

Universidade Federal da Paraíba
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Doutorado em Matemática

Novos espaços de sequências e de operadores associados a uma aplicação bilinear

por

Marcos Aurélio Guimarães Monteiro

João Pessoa - PB

Agosto/2020

Novos espaços de sequências e de operadores associados a uma aplicação bilinear

por

Marcos Aurélio Guimarães Monteiro

sob orientação do

Prof. Dr. Joedson Silva dos Santos

e coorientação do

Prof. Dr. Jamilson Ramos Campos

Tese apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - UFPB como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Matemática.

João Pessoa - PB

Agosto/2020

Catálogo na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

M775n Monteiro, Marcos Aurélio Guimarães.

Novos espaços de sequências e de operadores associados
a uma aplicação bilinear / Marcos Aurélio Guimarães
Monteiro. - João Pessoa, 2020.
90 f.

Orientação: Joedson Silva dos Santos.

Coorientação: Jamilson Ramos Campos.

Tese (Doutorado) - UFPB/CCEN.

1. Matemática. 2. Espaços de sequências. 3. Sequências
(B;p)-somáveis. 4. Espaços B-normados. 5. Teoria de
operadores. 6. Operadores (B;p)-somantes. I. Santos,
Joedson Silva dos. II. Campos, Jamilson Ramos. III.
Título.

UFPB/BC

CDU 51(043)

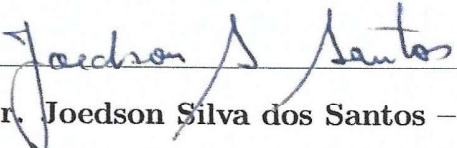
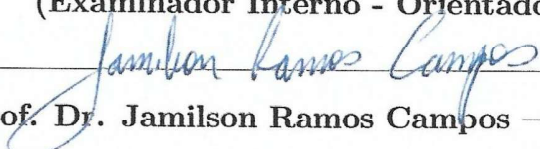
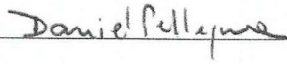
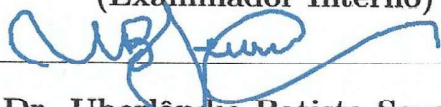
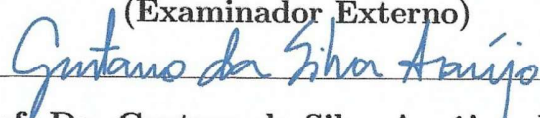
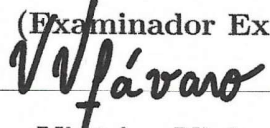
Universidade Federal da Paraíba
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Doutorado em Matemática

Tese apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - UFPB como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Matemática.

Área de Concentração: Análise

Aprovada em 3 de agosto de 2020.

Banca Examinadora:

 _____ Prof. Dr. Joedson Silva dos Santos – UFPB (Examinador Interno - Orientador)
 _____ Prof. Dr. Jamilson Ramos Campos – UFPB (Examinador Interno - Coorientador)
 _____ Prof. Dr. Daniel Marinho Pellegrino – UFPB (Examinador Interno)
 _____ Prof. Dr. Uberlândio Batista Severo – UFPB (Examinador Interno)
 _____ Prof. Dr. Eduardo Brandani da Silva – UEM (Examinador Externo)
 _____ Prof. Dr. Gustavo da Silva Araújo – UEPB (Examinador Externo)
 _____ Prof. Dr. Vinícius Vieira Fávaro – UFU (Examinador Externo)

Resumo

Neste trabalho, damos contribuições à teoria de sequências em espaços de Banach e à teoria de operadores definidos por transformações de sequências vetoriais. Estudamos novos espaços de sequências associados a uma aplicação bilinear. Investigamos a completude desses espaços, os relacionamos com os espaços das sequências absolutamente, fracamente e Cohen fortemente p -somáveis e estabelecemos condições de dualidade. Além disso, estudamos novas classes de operadores lineares relacionados a estes espaços e obtemos novos resultados, tais como teoremas do tipo dominação de Pietsch, de composição, de inclusão e de coincidência.

Palavras-chave: Espaços de sequências; Sequências (B, p) -somáveis; Espaços B -normados; Teoria de operadores; Operadores (B, p) -somantes.

Abstract

In this work, we give contributions to the theory of sequences in Banach spaces, and to theory of operators defined by the transformation of vector-valued sequences. We study new sequence spaces associated to a bilinear application and investigate the completeness of these spaces. We also relate them with the spaces of absolutely, weakly and Cohen strongly p -summable sequences and establish conditions of duality. In addition, we study new classes of linear operators related to these spaces and obtain new results, such as a Pietsch domination-type theorem and composition, inclusion and coincidence theorems.

Keywords: Sequence spaces; (B, p) -summable Sequences; B -normed Spaces; Operator theory; (B, p) -summing Operators.

Agradecimentos

Esta é uma parte que considero mais difícil de escrever, não pelo fato de registro, mas por não conseguir expressar com palavras a gratidão que tenho por todos os que, de forma direta ou indireta, contribuíram para a conclusão deste trabalho. Foram muitas; em destaque não poderia esquecer de agradecer:

A minha vó *Jovita*, “in memoriam”, responsável direta por minha criação e educação. Pessoa carismática de quem todos os que a conheceram sentem muito a falta.

A minha esposa *Élida*, por aceitar a distância nestes quatro anos e por desempenhar, de forma exemplar, o papel simultâneo de mãe e pai de nossa princesinha *Sofia*, a quem devo desculpas por não acompanhar de perto seu crescimento neste período.

A meus pais, *José Monteiro* e *Magnólia Guimarães*, pelo acolhimento e carinho sempre que precisei e pelo apoio incondicional nas minhas decisões.

A toda a minha família, irmãos, tios, primos e sobrinhos, em especial à tia *Magna* “in memoriam”, que sempre me incentivou e, assim como minha vó, nos deixou neste período em que me ausentei.

Aos amigos *Manuel*, *Iraci*, *Jane*, *Dorinha*, *Luciene* e companheiros de viagens turísticas, assim como a meu sogro, *Elias*, minha cunhada e seu esposo, *Eliane* e *Eugênio*, respectivamente, pelo apoio a minha esposa *Élida*, durante este período distante. Vocês não imaginam o quanto isso foi fundamental para que eu pudesse me manter tranquilo mesmo tão longe.

A querida *Nilza*, porto seguro de nossa família. Cuidou de forma admirável de mim, de *Élida* e, principalmente, de *Sofia*. Nosso lar não seria o mesmo sem ela. Meu distanciamento por tanto tempo só foi possível graças a essa pessoa divina que se prontificou a cuidar de nossa princesa. Jamais esquecerei o quanto foi importante desde que entrou em nossas vidas e, mais ainda, nestes últimos quatro anos.

Ao meu amigo/irmão *Ailton*, sua esposa, *Paola*, e toda a sua família (minha postixa), em especial à tia *Conceição (Ceixa)* e ao tio *Hélio*, pela adoção espontânea e acolhi-

mento carinhoso.

A todos os colegas de curso, em especial aos amigos *Antônio de Pádua, Lucas e Renato*, parceiros fiéis que nunca mediram esforços para me ajudar. Saibam que, sem vocês, esta conquista seria muito mais árdua. Aos demais amigos da pós-graduação: *Marcus, Eudes, Daniel, Diego, Tony, Lázaro, Edjane* e a todos os que tornaram os meus dias em João Pessoa mais agradáveis. Não poderia me esquecer de nosso tutor a toda hora, o colombiano *Luís Alba*, sempre disponível para ajudar.

Aos colegas do DMA-UFS, por facilitarem meu afastamento, em especial aos Professores *Ana Cristina, Gastão Florêncio, Ivanete, José Anderson, Wilberclay e Zaqueu*, por sempre me apoiarem em todos os momentos. Aos meus ex-professores *Danilo Felizardo e Natanael Oliveira* por sempre me motivarem a seguir.

Ao meu amigo, colega de graduação e de trabalho, *Adriano Veiga*, pelo incentivo durante quase vinte anos; mesmo de longe, sempre me cobrava para não desistir de meu sonho. Além disso, foi o meu revisor oficial da língua inglesa sempre que precisei.

Ao meu amigo, colega de trabalho e ídolo, *Prof. Paulo Rabelo*, por quem tenho admiração como pessoa e profissional. Agradeço por nunca ter desistido de me incentivar e fazer-me correr em busca de meus ideais.

A todos os professores da PGMAT-UEPB, em particular a *Daniel Pellegrino, Eraldo, Everaldo Medeiros, Fernando Xavier, Manassés, Uberlândio, Jacqueline Rojas, Pedro Hinojosa, Nacib Albuquerque e Napoleon Caro* pela colaboração e disposição sempre que os procurei para sanar minhas dúvidas frequentes.

A todo o pessoal de apoio da pós-graduação, técnicos: *Roseli, Athaíde Jr, Júnior Pires* e outros, pela presteza em atender a nossas solicitações e a *D. Clizelda*, por sempre manter nosso ambiente limpo, arrumado, por atender aos nossos pedidos e ouvir nossas lamentações diárias.

Ao meu padrinho *Prof. José Araújo*, exemplo de ser humano íntegro. Foi um dos grandes motivadores aos meus estudos desde minha adolescência.

Ao meu amigo e orientador, *Prof. Joedson Santos*, pela confiança depositada em mim, pela atenção dispensada e pela disposição para esclarecer sempre minhas dúvidas com muita presteza e segurança.

Ao meu coorientador, *Prof. Jamilson Ramos*, pela paciência, dedicação e comprometimento durante a construção de todo este trabalho. Ser simplesmente dedicado e que

demonstra a todo tempo entrega naquilo que faz. Muito obrigado, meu amigo, você se tornou um exemplo de dedicação e empenho profissional que tentarei seguir em minha jornada.

A cada um dos professores que compuseram a banca examinadora, pelas preciosas contribuições através de sugestões e correções na versão final.

E, sobretudo e acima de todos, a *DEUS*, pela dádiva da vida, por ter me dado uma família maravilhosa, pelos amigos que me cercam e por todas as minhas conquistas.

*“Educação é aquilo que a maior parte das pessoas recebe,
muitos transmitem e poucos possuem.”*

Karl Kraus

Dedicatória

Aos grandes amores de minha vida: minha vó *Jovita*, “in memoriam”, minha esposa *Élida*, e a razão de minha vida, minha filha *Sofia*.

Sumário

Introdução	1
Notação e terminologia	3
1 Espaços de sequências definidos a partir de uma aplicação bilinear	6
1.1 Sequências fortemente (B, p) -somáveis	7
1.2 Sequências fracamente e incondicionalmente (B, p) -somáveis	15
1.3 Espaços B -normados	26
2 Um dual do espaço $\ell_{B,p}(X)$	32
2.1 Sequências Cohen $(\mathcal{B}, p)$ -somáveis	32
3 Operadores B-somantes	53
3.1 Operadores fortemente e fracamente B -somantes	53
3.2 Teoremas tipo dominação de Pietsch e consequências	61
3.3 Operadores $\mathcal{B}$ -somantes (fortemente e Cohen) e adjuntos	72
Referências	77

Introdução

A teoria dos operadores definidos por meio de transformações de sequências vectoriais é um dos tópicos da Análise Funcional que tem conquistado um notório espaço nas pesquisas matemáticas nas últimas décadas. Iniciada nos anos 50, com o conceito de operadores absolutamente somantes, introduzido por A. Grothendieck [12], esta teoria ganhou maior destaque na década seguinte com as contribuições de Lindenstrauss e Pelczynski [13], Mitjagin e Pelczynski [17] e Albrecht Pietsch [20]. Nos anos 80, Pietsch fez com que esses estudos ganhassem mais notoriedade introduzindo uma abordagem não linear [21, 22]. Com o avanço dos estudos, novas classes de operadores foram concebidas, e, conseqüentemente, várias vertentes para novas teorias foram criadas. Os livros de A. Pietsch [22], A. Defant e K. Floret [9] e J. Diestel, H. Jarchow, A. Tonge [10] são exemplos de obras consagradas sobre a teoria de operadores. Nesse contexto, nosso trabalho tem como objetivo central estudar novos espaços de sequências e, com isso, definir novas classes de operadores, dando assim uma nova contribuição à literatura existente.

Algumas referências foram essenciais para a construção de nosso estudo, entre as quais destacamos [1, 2] de O. Blasco e J. M. Calabuig, tendo na última a contribuição de T. Signes, e [6] de Calabuig. Todas elas têm como ponto de partida um espaço de sequências construído a partir de uma aplicação bilinear $B : X \times Y \longrightarrow Z$, definida entre espaços de Banach, denotado por $\ell_{B,p}(X)$. De certa forma, o conceito desse espaço tem caráter generalista, uma vez que, escolhendo adequadamente a aplicação bilinear B , ele recupera certos espaços de sequências conhecidos.

Um fato interessante e um tanto surpreendente, provado em [6, Teorema 2.4.3], é que, em geral, $\ell_{B,p}(X)$ não é completo. Para contornar esse percalço, isto é, para

tornar $\ell_{B,p}(X)$ completo, os autores estabeleceram uma propriedade para o espaço X , com a qual este será dito B -normado. Em nosso trabalho, conseguimos dar mais uma caracterização para os espaços B -normados (ver Teorema 1.3.6). Estudamos também o espaço de sequências fracamente (B, p) -somáveis, introduzido em [1, 6] apenas para $p = 1$, e novos resultados foram obtidos para este espaço quando $1 \leq p < \infty$. Também estabelecemos condições para determinar o dual de $\ell_{B,p}^n(X)$, para cada número natural n , e para isso foi necessário definirmos o espaço das sequências Cohen (B, p) -somáveis.

A condição de X ser B -normado desempenha um papel crucial em nosso trabalho. Ela garante que o espaço $\ell_{B,p}(X)$ fique (em termos de inclusão) entre os espaços das sequências absolutamente e fracamente p -somáveis. Isso nos permite a criação de duas novas classes de operadores, a saber: a dos operadores que levam sequências fracamente p -somáveis em sequências (B, p) -somáveis e a dos operadores que levam sequências (B, p) -somáveis em sequências absolutamente p -somáveis. Também vamos introduzir mais duas novas classes de operadores: os Cohen (B, p) -somantes e os (B, p) -nucleares. Nesse sentido, a teoria dos operadores somantes se faz necessária como base para o desenvolvimento de nossos estudos. Caracterizamos essas classes através da propriedade de somabilidade e apresentamos alguns resultados importantes para a teoria, tais como teoremas do tipo dominação de Pietsch, de composição, de inclusão e de coincidência.

Estrutura da tese

Para efeitos didáticos, nosso trabalho está dividido em três capítulos e tem a seguinte estrutura:

O Capítulo 1 destina-se a um estudo detalhado sobre o espaço de sequências (B, p) -somáveis. Calabuig mostra que este recupera os espaços das sequências absolutamente e fracamente p -somáveis. De forma semelhante, provamos o mesmo para o espaço das sequências $\text{mid } p$ -somáveis. Mostramos também que X ser B -normado é equivalente a $\ell_{B,p}(X)$ estar imerso continuamente em $\ell_\infty(X)$. Esta propriedade sobre X é fundamental para o avanço da teoria estudada. Além disso, veremos que o fato de X ser B -normado está relacionado intrinsecamente com o Teorema de Lax-Milgran

para espaços de Banach.

No Capítulo 2 é definido e estudado o espaço das sequências Cohen $(\mathcal{B}, p)$ -somáveis, denotado por $\ell_{\mathcal{B}, p}(X)$; este foi criado a fim de se tornar um “dual” de $\ell_{\mathcal{B}, p}(X)$. Um novo conceito de estabilidade linear foi necessário para obtermos a dualidade desejada. Uma consequência desse fato é que vamos determinar qual é o dual do espaço das sequências mid p -somáveis, algo que até então não havia sido estudado. Esse novo espaço também será essencial na parte da teoria de operadores.

Finalmente, o Capítulo 3 está reservado ao estudo de classes de operadores, objetivo principal de nosso trabalho. Com a criação de novos espaços de sequências, surgem naturalmente novas classes de operadores, e, conseqüentemente, um estudo categórico torna-se necessário. Nesse contexto, para o avanço nessa linha de estudo, a recente publicação sobre classe de sequências, [5], de G. Botelho e J. R. Campos, foi essencial. Com novos resultados e caracterizações, relativos a esses novos operadores, conseguimos versões do teorema do tipo dominação e composição de Pietsch dentro de nosso contexto. Ainda neste capítulo, fazendo uso dos conceitos de tipo e cotipo, obtemos resultados de inclusão e coincidência. Novas classes de operadores, denominadas Cohen e nucleares por envolverem o espaço de sequências Cohen $(\mathcal{B}, p)$ -somáveis, foram definidas. Finalizamos nosso trabalho mostrando a relação entre essas classes por meio do operador adjunto.

Notação e terminologia

Neste trabalho, fazemos o uso desta simbologia:

- $U, V, X, Y, Z \dots$, salvo menção contrária, representam espaços de Banach.
- $G, T, T_1, T_2, S \dots$, denotam operadores lineares contínuos.
- $T \circ S$ denota a composição entre os operadores T e S .
- Um operador linear T de X em Y é dito de posto finito se a dimensão de $T(X)$ for finita.
- B e $\mathcal{B}$ denotam aplicações bilineares definidas ao longo do texto.
- $\mathbb{N}$ denota o conjunto dos números naturais e não inclui o zero.
- $\mathbb{K}$ denota o corpo dos reais $\mathbb{R}$ ou dos complexos $\mathbb{C}$.
- $\|\cdot\|$ denotará a norma de um espaço normado; quando maior precisão de notação for necessária, escreveremos $\|\cdot\|_X$ para ressaltar que a norma está sendo calculada no espaço X .
- B_X representa a bola unitária fechada de um espaço de Banach X .
- $\mathcal{L}(X; Y)$ indica o espaço vetorial formado pelos operadores lineares contínuos de X em Y .
- $\mathcal{B}(X \times Y; Z)$ representa o espaço das aplicações bilineares limitadas de $X \times Y$ em Z . Quando $Z = \mathbb{K}$, denotamos esse espaço simplesmente por $\mathcal{B}(X \times$

$Y; Z)$. A norma de uma aplicação bilinear B nesse espaço é definida por $\|B\| = \sup_{x \in X} \sup_{y \in Y} \|B(x, y)\|_Z$.

- X' denota o dual (topológico) de um espaço de Banach X e x^* denota um elemento de X' .
- δ_{jk} representa o delta de Kronecker, definido por $\delta_{jk} = \begin{cases} 1, & \text{se } j = k \\ 0, & \text{se } j \neq k \end{cases}$.
- p^* indica o conjugado do número $p \geq 1$, ou seja, $p^* = \frac{p}{p-1}$.
- $\ell_p(X)$ denota o espaço das sequências fortemente p -somáveis em X e $\|\cdot\|_p$ uma norma neste espaço. Para $p \in [1, \infty)$.

$$\ell_p(X) = \left\{ (x_j)_{j=1}^\infty \in X^{\mathbb{N}}; \sum_{j=1}^\infty \|x_j\|_X^p < \infty \right\}, \quad \|(x_j)_{j=1}^\infty\|_p := \left(\sum_{j=1}^\infty \|x_j\|_X^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

para $p = \infty$

$$\ell_\infty(X) = \left\{ (x_j)_{j=1}^\infty \in X^{\mathbb{N}}; \sup_{j \in \mathbb{N}} \|x_j\|_X < \infty \right\} \quad \text{e} \quad \|(x_j)_{j=1}^\infty\|_\infty := \sup_{j \in \mathbb{N}} \|x_j\|_X.$$

- $\ell_p^w(X)$ representa o espaço das sequências fracamente p -somáveis em X com a norma

$$\|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{w,p} := \sup_{x^* \in B_{X'}} \left(\sum_{j=1}^\infty |x^*(x_j)|_X^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

- $\ell_p^n(X)$ é o subespaço de X^n com a norma de $\ell_p(X)$, ou seja $\ell_p^n(X) = (X^n; \|\cdot\|_p)$, qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$. O mesmo vale para os demais espaços: $\ell_p^{w,n}(X)$, $\ell_{B,p}^n(X)$, $\ell_{B,p}^n\langle X \rangle, \dots$ que são subespaços de X^n com as normas dos espaços correspondentes.
- Sejam $C > 0$, $S_1(X)$ e $S_2(X)$ espaços de sequências, e $\|\cdot\|_{S_1}$ e $\|\cdot\|_{S_2}$ suas respectivas normas. Usamos a simbologia $S_1(X) \xrightarrow{C} S_2(X)$ para dizer que o espaço $S_1(X)$ está imerso continuamente em $S_2(X)$, isto é, $S_1(X)$ é um subespaço de $S_2(X)$ e $\|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{S_2} \leq C \|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{S_1}$, para todo $(x_j)_{j=1}^\infty \in S_1(X)$. Quando os espaços coincidirem com igualdade de normas, isto é,

$$S_1(X) = S_2(X) \quad \text{e} \quad \|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{S_1} = \|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{S_2},$$

para todo $(x_j)_{j=1}^\infty \in S_1(X)$, denotamos por $S_1(X) \stackrel{1}{=} S_2(X)$.

Capítulo 1

Espaços de sequências definidos a partir de uma aplicação bilinear

Espaços de sequências são ambientes muito explorados em Análise Funcional e suas propriedades possibilitam várias vertentes de estudos, entre os quais a de operadores que melhoram convergência de séries. Nesse contexto, este capítulo tem como objetivo apresentar um espaço de sequências, a valores em um espaço de Banach X , definido a partir de uma aplicação bilinear $B : X \times Y \longrightarrow Z$, que em todo nosso trabalho será contínua, definida entre espaços de Banach e com a seguinte propriedade

$$B(x, y) = 0, \forall y \in Y \Rightarrow x = 0. \quad (1.1)$$

Neste caso, dizemos que a tripla (Y, Z, B) é *admissível* para X ou, simplesmente, que a aplicação B é *admissível*. A propriedade acima equivale a afirmar que o operador definido por

$$\begin{aligned} \Phi_B : X &\longrightarrow \mathcal{L}(Y; Z) \\ x &\longmapsto B_x, \end{aligned}$$

é injetivo, onde B_x é a aplicação $B(x, \cdot) := B_x : Y \rightarrow Z$, para cada $x \in X$ fixo, induzida pela bilinear B . Outra característica importante abordada neste capítulo, diz respeito a uma propriedade intrínseca à aplicação B e atribuída ao espaço X , que devido a esta será chamado B -normado. A admissibilidade da aplicação B é algo essencial, como veremos, aos principais resultados apresentados ao longo de todo nosso trabalho.

1.1. Sequências fortemente (B, p) -somáveis

O estudo presente neste capítulo tem como principais referências a tese de J. M. Calabuig [6] e seu artigo [1] em conjunto com O. Blasco e T. Signes.

1.1 Sequências fortemente (B, p) -somáveis

Destinamos esta seção para definições e resultados necessários ao estudo dos espaços de sequências anunciados. Muitos desses resultados foram extraídos de [1, 6] e estão devidamente referenciados. Não obstante, também apresentamos resultados inéditos que complementam os estudos iniciais propostos nos trabalhos já citados.

Iniciemos com a definição das sequências (B, p) -somáveis, apresentando uma importante proposição.

Definição 1.1.1 [6, Definiciones 2.2.1 y 2.2.2]. Sejam $B : X \times Y \longrightarrow Z$ uma aplicação bilinear, limitada e admissível e $1 \leq p \leq \infty$. Uma sequência $(x_j)_{j=1}^\infty$ em X é dita (B, p) -somável se a sequência $(B(x_j, y))_{j=1}^\infty \in \ell_p(Z)$, qualquer que seja $y \in Y$.

Denotaremos por $\ell_{B,p}(X)$ o conjunto formado pelas sequências (B, p) -somáveis em X , isto é,

$$\ell_{B,p}(X) := \left\{ (x_j)_{j=1}^\infty \in X^{\mathbb{N}} : \sum_{j=1}^\infty \|B(x_j, y)\|_Z^p < \infty; \forall y \in Y \right\}.$$

Um cálculo simples mostra que o conjunto acima é um espaço vetorial com as operações usuais de sequências e a proposição abaixo garante que este é um espaço normado.

Proposição 1.1.2 [6, Definición 2.2.2] Para $1 \leq p \leq \infty$, a aplicação

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_{B,p} : \ell_{B,p}(X) &\longrightarrow [0, \infty) \\ (x_j)_{j=1}^\infty &\longmapsto \sup_{y \in B_Y} \|(B(x_j, y))_{j=1}^\infty\|_p \end{aligned}$$

define uma norma e, portanto, o espaço $(\ell_{B,p}(X); \|\cdot\|_{B,p})$ é um espaço vetorial normado.

Observação 1.1.3 Uma informação relevante e de imediata verificação é que, para todo $1 \leq p \leq \infty$, o espaço

$$c_{00}(X) := \{(x_j)_{j=1}^\infty \in X^{\mathbb{N}} : \exists k \in \mathbb{N} : x_j = 0, \forall j \geq k\}$$

1.1. Sequências fortemente (B, p) -somáveis

é subespaço de $\ell_{B,p}(X)$. Uma consequência, futuramente útil, deste fato e da definição da norma $\|\cdot\|_{B,p}$ é que uma sequência $(x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_{B,p}(X)$ se, e somente se,

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} \|(x_j)_{j=1}^k\|_{B,p} < \infty$$

e, neste caso, temos

$$\|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{B,p} = \sup_{k \in \mathbb{N}} \|(x_j)_{j=1}^k\|_{B,p}.$$

Isto é, o espaço $\ell_{B,p}(X)$ goza da propriedade de ser *finitamente determinado* (ver definição em (2.8), Seção 2.1), embora não possa ser caracterizado como classe de sequências, fato que será melhor esclarecido no Capítulo 2.

Observação 1.1.4 Se $1 \leq p \leq q \leq \infty$, então

$$\ell_{B,p}(X) \xhookrightarrow{1} \ell_{B,q}(X), \quad (1.2)$$

fato que segue diretamente da imersão $\ell_p(X) \xhookrightarrow{1} \ell_q(X)$.

Uma nova caracterização para o espaço $\ell_{B,p}(X)$ será dada a seguir.

Proposição 1.1.5 Sejam $B : X \times Y \longrightarrow Z$ uma aplicação bilinear, limitada e admissível e $1 \leq p < \infty$. Então

$$(x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_{B,p}(X) \Leftrightarrow \left((B(x_j, y_k))_{j=1}^\infty \right)_{k=1}^\infty \in \ell_p(\ell_p(Z)), \quad \forall (y_k)_{k=1}^\infty \in \ell_p(Y).$$

Além disso,

$$\sup \left\{ \sum_{k=1}^\infty \sum_{j=1}^\infty \|B(x_j, y_k)\|_Z^p ; (y_k)_{k=1}^\infty \in B_{\ell_p(Y)} \right\} = \sup_{y \in B_Y} \sum_{j=1}^\infty \|B(x_j, y)\|_Z^p.$$

Demonstração: Sejam $(x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_{B,p}(X)$ e $(y_k)_{k=1}^\infty \in \ell_p(Y)$. Agora, consideremos $J = \{k \in \mathbb{N}; y_k \neq 0\}$ e, para cada $k \in J$, $\bar{y}_k = \frac{y_k}{\|y_k\|_Y}$. Claro que, para cada $k \in J$, $\bar{y}_k \in B_Y$ e pela bilinearidade de B , temos

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^\infty \sum_{j=1}^\infty \|B(x_j, y_k)\|_Z^p &= \sum_{k \in J} \|y_k\|_Y^p \sum_{j=1}^\infty \|B(x_j, \bar{y}_k)\|_Z^p \\ &\leq \sum_{k \in J} \|y_k\|_Y^p \sup_{y \in B_Y} \sum_{j=1}^\infty \|B(x_j, y)\|_Z^p \\ &= \|(y_k)_{k=1}^\infty\|_p^p \|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{B,p}^p < \infty, \end{aligned}$$

qualquer que seja $(y_k)_{k=1}^\infty \in \ell_p(Y)$. Logo, $\left((B(x_j, y_k))_{j=1}^\infty \right)_{k=1}^\infty \in \ell_p(\ell_p(Z))$. Em particular, se $(y_k)_{k=1}^\infty \in B_{\ell_p(Y)}$, da desigualdade acima, obtemos:

$$\sup \left\{ \sum_{k=1}^\infty \sum_{j=1}^\infty \|B(x_j, y_k)\|_Z^p ; (y_k)_{k=1}^\infty \in B_{\ell_p(Y)} \right\} \leq \sup_{y \in B_Y} \sum_{j=1}^\infty \|B(x_j, y)\|_Z^p.$$

1.1. Sequências fortemente (B, p) -somáveis

Reciprocamente, suponhamos que $\left((B(x_j, y_k))_{j=1}^\infty\right)_{k=1}^\infty \in \ell_p(\ell_p(Z))$, qualquer que seja $(y_k)_{k=1}^\infty \in \ell_p(Y)$. Para cada $y \in Y$ e para cada $j \in \mathbb{N}$, considerando a sequência $(\delta_{kj}y)_{k=1}^\infty \in \ell_p(Y)$, temos

$$\sum_{j=1}^\infty \|B(x_j, y)\|_Z^p = \sum_{k=1}^\infty \sum_{j=1}^\infty \|B(x_j, \delta_{kj}y)\|_Z^p < \infty,$$

donde $(x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_{B,p}(X)$. Considerando $y \in B_Y$ e $(\delta_{kj}y)_{k=1}^\infty \in B_{\ell_p(Y)}$, da última desigualdade, temos

$$\sup_{y \in B_Y} \sum_{j=1}^\infty \|B(x_j, y)\|_Z^p \leq \sup \left\{ \sum_{k=1}^\infty \sum_{j=1}^\infty \|B(x_j, y_k)\|_Z^p ; (y_k)_{k=1}^\infty \in B_{\ell_p(Y)} \right\}.$$

Portanto, segue o resultado. ■

Observação 1.1.6 A proposição anterior nos sugere uma definição e uma norma alternativas para $\ell_{B,p}(X)$, a saber:

$$\ell_{B,p}(X) := \left\{ (x_j)_{j=1}^\infty \in X^{\mathbb{N}} ; \sum_{k=1}^\infty \sum_{j=1}^\infty \|B(x_j, y_k)\|_Z^p < \infty ; \forall (y_k)_{k=1}^\infty \in \ell_p(Y) \right\}$$

e

$$\|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{B,p} := \sup \left\{ \left(\sum_{k=1}^\infty \sum_{j=1}^\infty \|B(x_j, y_k)\|_Z^p \right)^{\frac{1}{p}} ; (y_k)_{k=1}^\infty \in B_{\ell_p(Y)} \right\}.$$

Vejamos alguns casos interessantes apresentados em [6, Ejemplo 2.2.1]:

Exemplo 1.1.7 Considere as aplicações bilineares:

$$\begin{array}{llll} B_1 : X \times \mathbb{K} & \longrightarrow & X & e \\ (x, \lambda) & \longmapsto & \lambda x & \end{array} \quad \begin{array}{llll} B_2 : X \times X' & \longrightarrow & \mathbb{K} & \\ (x, x^*) & \longmapsto & x^*(x). & \end{array}$$

É fácil verificar que

$$\ell_{B_1,p}(X) \stackrel{1}{=} \ell_p(X) \quad e \quad \ell_{B_2,p}(X) \stackrel{1}{=} \ell_p^w(X).$$

O exemplo seguinte exhibe outro caso de espaço de sequência (B, p) -somáveis. Trata-se do espaço das sequências em X tais que

$$\left((x_k^*(x_j))_{j=1}^\infty\right)_{k=1}^\infty \in \ell_p(\ell_p),$$

sempre que $(x_k^*)_{k=1}^\infty \in \ell_p^w(X')$, isto é,

$$\ell_p^{\text{mid}}(X) := \left\{ (x_j)_{j=1}^\infty \in X^{\mathbb{N}} ; \sum_{k=1}^\infty \sum_{j=1}^\infty |x_k^*(x_j)|^p < +\infty, \forall (x_k^*)_{k=1}^\infty \in \ell_p^w(X') \right\}.$$

1.1. Sequências fortemente (B, p) -somáveis

Definido em [14], o espaço acima é denominado *espaço das sequências mid p -somáveis*. Uma norma definida neste espaço é dada por

$$\|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{\text{mid}, p} := \sup \left\{ \left(\sum_{k=1}^\infty \sum_{j=1}^\infty |x_k^*(x_j)|^p \right)^{\frac{1}{p}} ; (x_k^*)_{k=1}^\infty \in B_{\ell_p^w(X')} \right\}.$$

Os trabalhos [4] e [14] apresentam estudos aprofundados acerca desses espaços onde, inclusive, a norma acima foi definida.

Para apresentarmos o exemplo, necessitaremos também do conceito de conjunto normante e de um resultado de continuidade para aplicações bilineares que serão apresentados a seguir.

Sejam X um espaço de Banach e Y , subconjunto de X' . Dizemos que Y é *normante* para X se

$$\|x\| = \sup_{x^* \in B_Y} |x^*(x)|, \quad \text{para todo } x \in X. \quad (1.3)$$

Considerando o mergulho canônico $J_X : X \rightarrow X''$, o Teorema de Hahn-Banach nos garante que $B_{X'}$ é normante para X e, por (1.3), tem-se:

$$\|x^*\| = \sup_{\varphi \in B_{X''}} |\varphi(x^*)| = \sup_{x \in B_X} |J_X(x)(x^*)| = \sup_{x \in B_X} |x^*(x)|, \quad \text{para todo } x^* \in X'. \quad (1.4)$$

Lema 1.1.8 [3, Corolário 2.3.5] *Sejam X, Y e Z espaços vetoriais normados, Y completo e $B : X \times Y \rightarrow Z$ uma aplicação bilinear separadamente contínua, isto é, $B_x : Y \rightarrow Z$ e $B_y : X \rightarrow Z$ são operadores lineares contínuos para quaisquer $x \in X$ e $y \in Y$ fixados. Então $B : X \times Y \rightarrow Z$ uma aplicação contínua.*

Exemplo 1.1.9 Sejam $1 \leq p < \infty$ e X Banach. Considerando a aplicação

$$\begin{aligned} B_3 : X \times \ell_p^w(X') &\longrightarrow \ell_p \\ (x, (x_k^*)_{k=1}^\infty) &\longmapsto (x_k^*(x))_{k=1}^\infty \end{aligned},$$

mostraremos que os espaços de sequências $(\ell_{B_3, p}(X), \|\cdot\|_{B_3, p})$ e $(\ell_p^{\text{mid}}(X), \|\cdot\|_{\text{mid}, p})$ coincidem, ou seja

$$\ell_{B_3, p}(X) \stackrel{1}{=} \ell_p^{\text{mid}}(X).$$

A aplicação B_3 está bem definida. De fato, por (1.4), $J_X(B_X)$ é um subconjunto de $B_{X''}$ normante em X' , logo

$$\begin{aligned} \sup_{x \in B_X} \left(\sum_{k=1}^\infty |x_k^*(x)|^p \right)^{\frac{1}{p}} &= \sup_{x \in B_X} \left(\sum_{k=1}^\infty |J_X(x)(x_k^*)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \sup_{x^{**} \in B_{X''}} \left(\sum_{k=1}^\infty |x^{**}(x_k^*)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

1.1. Sequências fortemente (B, p) -somáveis

$$= \|(x_k^*)_{k=1}^\infty\|_{w,p} < \infty,$$

quaisquer que sejam $x \in X$ e $\mathbf{x}^* = (x_k^*)_{k=1}^\infty \in \ell_p^w(X')$. A aplicação B_3 claramente é bilinear. Para mostrarmos a sua continuidade faremos uso do Lema 1.1.8. Consideremos as seguintes aplicações:

$$\begin{aligned} B_{3,x} : \ell_p^w(X') &\longrightarrow \ell_p & e & & B_{3,\mathbf{x}^*} : X &\longrightarrow \ell_p \\ \mathbf{x}^* &\longmapsto (x_k^*(x))_{k=1}^\infty & & & x &\longmapsto (x_k^*(x))_{k=1}^\infty, \end{aligned}$$

em que, $x \in X$ e $\mathbf{x}^* \in \ell_p^w(X')$ são elementos fixados. É óbvio que cada uma das aplicações acima é linear. Provaremos, com o uso do Teorema do Gráfico Fechado, que $B_{3,x}$ é contínua.

Suponhamos que

$$(\mathbf{x}^{*(j)}, B_{3,x}(\mathbf{x}^{*(j)})) \xrightarrow{j} ((\varphi_k)_{k=1}^\infty, ((\lambda_k)_{k=1}^\infty)) \text{ em } \ell_p^w(X') \times \ell_p.$$

Como, para cada $j \in \mathbb{N}$, $B_{3,x}(\mathbf{x}^{*(j)}) = (x_k^{*(j)}(x))_{k=1}^\infty$, temos

$$\lim_{j \rightarrow \infty} (x_k^{*(j)}(x))_{k=1}^\infty = (\lambda_k)_{k=1}^\infty \in \ell_p$$

e assim

$$\lim_{j \rightarrow \infty} x_k^{*(j)}(x) = \lambda_k, \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

uma vez que $\ell_p \xhookrightarrow{1} \ell_\infty$. Por outro lado, como $\mathbf{x}^{*(j)} = (x_k^{*(j)})_{k=1}^\infty \xrightarrow{j} (\varphi_k)_{k=1}^\infty$ e $\ell_p^w(X') \xhookrightarrow{1} \ell_\infty(X')$, temos

$$\lim_{j \rightarrow \infty} x_k^{*(j)} = \varphi_k, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Logo, pela unicidade do limite,

$$\varphi_k(x) = \lambda_k, \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

e com isso

$$B_{3,x}((\varphi_k)_{k=1}^\infty) = (\varphi(x))_{k=1}^\infty = (\lambda_k)_{k=1}^\infty.$$

Dessa forma, $B_{3,x}$ tem gráfico fechado, portanto, é contínua.

Usando o mesmo argumento de Gráfico Fechado, mostra-se a continuidade de $B_{3,\mathbf{x}^*}$. Como os operadores $B_{3,x}$ e $B_{3,\mathbf{x}^*}$ são contínuos, segue que a aplicação B_3 é separadamente contínua e, pelo Lema 1.1.8, segue que B_3 é limitada.

Também é fato que B_3 satisfaz a propriedade (1.1), pois se

$$B_3(x, (x_k^*)_{k=1}^\infty) = (x_k^*(x))_{k=1}^\infty = 0, \quad \forall (x_k^*)_{k=1}^\infty \in \ell_p^w(X'),$$

então, para $x^* \in B_{X'}$, se considerarmos $(\delta_{k1}x^*)_{k=1}^\infty = (x^*, 0, 0, \dots) \in B_{\ell_p^w(X')}$, temos

$$\|x\|_X = \sup_{x^* \in B_{X'}} |x^*(x)| = \sup \left\{ \|(\delta_{k1}x^*(x))_{k=1}^\infty\|_p; (\delta_{k1}x^*)_{k=1}^\infty \in B_{\ell_p^w(X')} \right\} = 0 \Rightarrow x = 0.$$

1.1. Sequências fortemente (B, p) -somáveis

Notemos agora que, para todo $(x_k^*)_{k=1}^\infty \in \ell_p^w(X')$,

$$\begin{aligned} (x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_{B_3, p}(X) &\Leftrightarrow (B_3(x_j, (x_k^*)_{k=1}^\infty))_{j=1}^\infty = ((x_k^*(x_j))_{k=1}^\infty)_{j=1}^\infty \in \ell_p(\ell_p) \\ &\Leftrightarrow (x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_p^{\text{mid}}(X). \end{aligned}$$

Por fim,

$$\begin{aligned} \|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{B_3, p} &= \sup \left\{ \left\| (B_3(x_j, (x_k^*)_{k=1}^\infty))_{j=1}^\infty \right\|_p ; (x_k^*)_{k=1}^\infty \in B_{\ell_p^w(X')} \right\} \\ &= \sup \left\{ \left(\sum_{j=1}^\infty \|B_3(x_j, (x_k^*)_{k=1}^\infty)\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}} ; (x_k^*)_{k=1}^\infty \in B_{\ell_p^w(X')} \right\} \\ &= \sup \left\{ \left(\sum_{k=1}^\infty \sum_{j=1}^\infty |x_k^*(x_j)|^p \right)^{\frac{1}{p}} ; (x_k^*)_{k=1}^\infty \in B_{\ell_p^w(X')} \right\} \\ &= \|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{\text{mid}, p}. \end{aligned}$$

Isso mostra que o espaço normado $\ell_p^{\text{mid}}(X)$ é, de fato, um caso particular de um $\ell_{B, p}(X)$ cujas normas coincidem. Neste caso,

$$\ell_p^{\text{mid}}(X) \stackrel{1}{=} \ell_{B_3, p}(X).$$

Com isso, obtemos as inclusões $\ell_p(X) \subseteq \ell_{B_i, p}(X) \subseteq \ell_p^w(X)$, para $i \in \{1, 2, 3\}$. Isso nos remete à seguinte pergunta:

Qual a relação entre os espaços $\ell_p(X)$, $\ell_{B, p}(X)$ e $\ell_p^w(X)$?

Ou, mais precisamente, dados um espaço de Banach X e uma aplicação bilinear limitada e admissível B , ambos arbitrários, valem sempre as inclusões

$$\ell_p(X) \subseteq \ell_{B, p}(X) \subseteq \ell_p^w(X)? \tag{1.5}$$

Estamos, por enquanto, nos referindo às inclusões desses espaços simplesmente observando-os como conjuntos. Em [6, Proposición 2.3.1], prova-se a primeira inclusão acima e, no mesmo trabalho, precisamente na Proposición 2.3.4, é mostrado que a segunda inclusão nem sempre é verificada.

Em nosso contexto, é natural procurar condições para obter coincidências ou, pelo menos, inclusões entre espaços de sequências. Ao longo de nosso trabalho, buscamos tais condições a fim de compararmos o espaço $\ell_{B, p}(X)$ a espaços já conhecidos, como o espaço $\ell_p^{\text{mid}}(X)$ e os clássicos $\ell_p(X)$ e $\ell_p^w(X)$.

O exemplo seguinte, usado na demonstração de [6, Proposición 2.3.4], mostra que a inclusão $\ell_{B, p}(X) \subseteq \ell_p^w(X)$ nem sempre ocorre.

1.1. Sequências fortemente (B, p) -somáveis

Exemplo 1.1.10 Dados $x = (x_j)_{j=1}^\infty$ e $y = (y_j)_{j=1}^\infty$, ambos em ℓ_2 , e a aplicação

$$\begin{aligned} B : \ell_2 \times \ell_2 &\longrightarrow \mathbb{K} \\ (x, y) &\longmapsto \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} x_j y_j, \end{aligned}$$

Calabuig mostrou que a aplicação B está bem definida, satisfaz à Definição 1.1.1 e que $\ell_{B,1}(\ell_2)$ não está contido em $\ell_1^w(\ell_2)$. Mais adiante, mostraremos que, neste caso, ocorrerá $\ell_1^w(\ell_2) \subsetneq \ell_{B,1}(\ell_2)$ e, mais ainda, que este segundo espaço não está imerso continuamente em $\ell_\infty(X)$.

Apresentaremos mais alguns resultados relacionados ao espaço $\ell_{B,p}(X)$. Para isso será necessário fazer uso de conceitos clássicos da teoria de operadores absolutamente somantes. Faremos uso da consagrada obra [10], de J. Diestel, H. Jarchow e A. Tonge.

Definição 1.1.11 Sejam $1 \leq p, q < \infty$ e $T : X \longrightarrow W$ um operador linear contínuo. Dizemos que T é *absolutamente $(p; q)$ -somante* (ou simplesmente *$(p; q)$ -somante*) se $(T(x_j))_{j=1}^\infty \in \ell_p(W)$ sempre que $(x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_q^w(X)$, ou seja, T é $(p; q)$ -somante se induz a boa definição da aplicação linear

$$\begin{aligned} \widehat{T} : \ell_q^w(X) &\longrightarrow \ell_p(W) \\ (x_j)_{j=1}^\infty &\longmapsto (T(x_j))_{j=1}^\infty. \end{aligned}$$

Uma caracterização de um operador absolutamente somante será dada a seguir:

Um operador $T : X \longrightarrow W$ linear contínuo é $(p; q)$ -somante se, e somente se, existe uma constante $C > 0$, tal que

$$\left\| (T(x_j))_{j=1}^\infty \right\|_p \leq C \left\| (x_j)_{j=1}^\infty \right\|_{w,q}, \quad (1.6)$$

sempre que $(x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_p^w(X)$;

Denotaremos por $\Pi_{p,q}(X; W)$ o conjunto formado por todos os operadores $(p; q)$ -somantes de X em W . Quando $p = q$, escreveremos $\Pi_p(X; W)$ no lugar de $\Pi_{p,p}(X; W)$. O ínfimo das constantes que satisfazem (1.6) define uma *norma* para o operador $T \in \Pi_{p,q}(X; W)$ que denotaremos por $\pi_{p,q}(T)$ ou simplesmente por $\pi_p(T)$, quando $p = q$. Além disso, sabemos que $\pi_{p,q}(T) = \|\widehat{T}\|$.

A seguinte proposição nos fornece uma condição necessária e suficiente para que a inclusão $\ell_p^w(X) \subseteq \ell_{B,p}(X)$ ocorra. O caso particular $p = 1$ pode ser encontrado em [1, Proposition 20].

1.1. Sequências fortemente (B, p) -somáveis

Proposição 1.1.12 *Sejam $1 \leq p < \infty$ e $B : X \times Y \longrightarrow Z$ uma aplicação bilinear, limitada e admissível. Então*

$$\ell_p^w(X) \subseteq \ell_{B,p}(X) \Leftrightarrow \{B(\cdot, y) := B_y : X \rightarrow Z, y \in Y\} \subseteq \Pi_p(X; Z).$$

Neste caso, tem-se

$$\ell_p^w(X) \xrightarrow{M} \ell_{B,p}(X),$$

em que $M = \sup_{y \in B_Y} \pi_p(B_y)$.

Demonstração: Suponha $\ell_p^w(X) \subseteq \ell_{B,p}(X)$. Então,

$$\begin{aligned} (x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_p^w(X) &\Rightarrow (x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_{B,p}(X) \\ &\Rightarrow (B_y(x_j))_{j=1}^\infty \in \ell_p(Z), \forall y \in Y \\ &\Rightarrow B_y \in \Pi_p(X; Z), \forall y \in Y. \end{aligned}$$

Reciprocamente, suponhamos que $\{B_y : X \rightarrow Z, y \in Y\} \subseteq \Pi_p(X; Z)$. Inicialmente, usando o Teorema do Gráfico Fechado, mostremos que $M = \sup_{y \in B_Y} \pi_p(B_y) < \infty$.

De fato, para cada $1 \leq p \leq \infty$, consideremos a aplicação:

$$\begin{aligned} G : Y &\longrightarrow \Pi_p(X; Z) \\ y &\longmapsto B_y. \end{aligned}$$

A aplicação G está claramente bem definida e é linear. Agora suponha que a sequência $(y_k, G(y_k))_{k=1}^\infty = (y_k, B_{y_k})_{k=1}^\infty$ convirja para (y, T) em $Y \times \Pi_p(X; Z)$. Como o espaço $\Pi_p(X; Z) \subseteq \mathcal{L}(X; Z)$, então $(B_{y_k})_{k=1}^\infty$ converge para T em $\mathcal{L}(X; Z)$, portanto

$$T = \lim_{k \rightarrow \infty} B_{y_k} \tag{1.7}$$

Por outro lado, para todo $x \in X$, temos

$$\begin{aligned} \|(G(y) - G(y_k))(x)\|_Z &= \|(B_y - B_{y_k})(x)\|_Z \\ &= \|B(x, y - y_k)\|_Z \\ &\leq \|B\| \|x\|_X \|y - y_k\|_Y \end{aligned}$$

e como $(y_k)_{k=1}^\infty$ converge para y em Y , tomando o limite em k na desigualdade acima tem-se

$$B_y = \lim_{k \rightarrow \infty} B_{y_k}. \tag{1.8}$$

1.2. Sequências fracamente e incondicionalmente (B,p) -somáveis

Pela unicidade do limite, segue de (1.7) e (1.8), que $T = B_y = G(y)$, portanto G é contínua. Assim,

$$M = \sup_{y \in B_Y} \pi_p(B_y) = \sup_{y \in B_Y} \pi_p(G(y)) = \|G\| < \infty.$$

Agora, seja $(x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_p^w(X)$. Sendo B_y um operador p -somante, então

$$\begin{aligned} \|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{B,p} &= \sup_{y \in B_Y} \left\| (B(x_j, y))_{j=1}^\infty \right\|_p \\ &= \sup_{y \in B_Y} \left\| (B_y(x_j))_{j=1}^\infty \right\|_p \\ &\leq \sup_{y \in B_Y} \pi_p(B_y) \|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{w,p} \\ &= M \|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{w,p} < \infty. \end{aligned} \quad \blacksquare$$

Seja $T : X \rightarrow W$ um operador linear e contínuo. É bem conhecido que se T tem posto finito, então T é p -somante (ver [10, Proposition 2.3]). Considerando esse fato e as condições da proposição anterior, temos o seguinte resultado:

Corolário 1.1.13 *Se a aplicação B_y possui posto finito, para todo $y \in Y$, ou ainda, se $\Pi_p(X; Z) = \mathcal{L}(X; Z)$, então*

$$\ell_p^w(X) \xrightarrow{M} \ell_{B,p}(X),$$

em que M é a constante definida na proposição anterior.

Encerremos a seção com um fato um tanto surpreendente relativo aos espaços de sequências (B,p) -somáveis, provado por Calabuig. O resultado diz que mesmo o espaço X sendo Banach, em geral $\ell_{B,p}(X)$ não é completo. A demonstração desse fato é um tanto técnica e por esta razão resolvemos omiti-la.

Teorema 1.1.14 [6, Teorema 2.4.3] *O espaço $(\ell_{B,p}(X); \|\cdot\|_{B,p})$ nem sempre é completo.*

1.2 Sequências fracamente e incondicionalmente (B,p) -somáveis

Esta seção destina-se essencialmente ao estudo dos espaços das sequências fracamente (B,p) -somáveis, para $1 \leq p < \infty$. Este conceito foi introduzido em [1, 6], apenas para $p = 1$. Aqui também introduziremos e estudaremos o conceito de (B,p) -somabilidade incondicional.

1.2. Sequências fracamente e incondicionalmente (B, p) -somáveis

Definição 1.2.1 Sejam $B : X \times Y \longrightarrow Z$ uma aplicação bilinear limitada e admissível e $1 \leq p < \infty$. Uma sequência $(x_j)_{j=1}^\infty$ em X é dita *fracamente (B, p) -somável* se $(B(x_j, y))_{j=1}^\infty \in \ell_p^w(Z)$, para todo $y \in Y$ (equivalentemente, $(z^*(B(x_j, y)))_{j=1}^\infty \in \ell_p$, quaisquer que sejam $y \in Y$ e $z^* \in Z'$).

O espaço formado pelas sequências fracamente (B, p) -somáveis em X será denotado por $\ell_{B,p}^w(X)$, isto é,

$$\ell_{B,p}^w(X) := \left\{ (x_j)_{j=1}^\infty \in X^\mathbb{N} : \sum_{j=1}^\infty |z^*(B(x_j, y))|^p < \infty; \forall y \in Y \text{ e } \forall z^* \in Z' \right\},$$

ou, equivalentemente,

$$\ell_{B,p}^w(X) := \left\{ (x_j)_{j=1}^\infty \in X^\mathbb{N} : (B(x_j, y))_{j=1}^\infty \in \ell_p^w(Z); \forall y \in Y \right\}.$$

Observação 1.2.2 No trabalho [1], Blasco e Calabuig afirmam que $\ell_{B,1}^w(X)$ e $\ell_{\tilde{B},1}(X)$ coincidem como conjuntos, em que $\tilde{B} : X \times Y \widehat{\otimes}_\pi Z' \longrightarrow \mathbb{K}$ é a aplicação bilinear tal que $\tilde{B}(x, y \otimes z^*) = z^*(B(x, y))$. Apresentaremos mais adiante uma relação de inclusão entre esses espaços quando $p > 1$. Para isso, faremos uso da teoria de Produto Tensorial. Alguns elementos e resultados básicos desta importante teoria serão necessários. Para maiores detalhes, sugerimos [24].

Sejam X e Y espaços vetoriais sobre o corpo $\mathbb{K}$. O funcional dado pela avaliação de uma forma bilinear A , no ponto $(x, y) \in X \times Y$, será denotado por $x \otimes y$. Em símbolos:

$$x \otimes y : \mathcal{B}(X \times Y) \longrightarrow \mathbb{K}, \quad (x \otimes y)(A) = A(x, y).$$

O funcional $x \otimes y$ é chamado *tensor elementar* e o subespaço gerado pelos elementos $x \otimes y$, com $x \in X$ e $y \in Y$, do dual algébrico $B(E \times F)^\#$, será chamado de *produto tensorial de X por Y* , denotado por $X \otimes Y$. Denominamos os elementos de $X \otimes Y$ de *tensores*. Em símbolos, temos

$$X \otimes Y = \text{span} \{x \otimes y : x \in X, y \in Y\},$$

assim, um tensor típico em $X \otimes Y$ tem uma representação na forma $u = \sum_{j=1}^n x_j \otimes y_j$.

Para cada tensor $u \in X \otimes Y$, a *norma projetiva* de u é definida pelo número

$$\pi(u) := \inf \left\{ \sum_{j=1}^n \|x_j\| \|y_j\| : u = \sum_{j=1}^n x_j \otimes y_j \right\},$$

1.2. Sequências fracamente e incondicionalmente (B,p) -somáveis

em que o ínfimo é tomado sobre todas as representações de u . Denotamos por $X \otimes_\pi Y$ o produto tensorial $X \otimes Y$ munido da norma projetiva π e por $X \widehat{\otimes}_\pi Y$ o completamento de $X \otimes_\pi Y$. O espaço de Banach $X \widehat{\otimes}_\pi Y$ será chamado *produto tensorial projetivo*.

A proposição seguinte garante que um elemento $u \in X \widehat{\otimes}_\pi Y$ pode ser representado da forma $\sum_{k=1}^{\infty} x_j \otimes y_j$.

Proposição 1.2.3 [24, Proposition 2.8] *Sejam X e Y espaços de Banach. Dados $u \in X \widehat{\otimes}_\pi Y$ e $\varepsilon > 0$, existem sequências limitadas $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ e $(y_j)_{j=1}^{\infty}$ em X e Y , respectivamente, tais que a série $\sum_{j=1}^{\infty} x_j \otimes y_j$ converge para u , e*

$$\sum_{j=1}^{\infty} \|x_j\| \|y_j\| < \pi(u) + \varepsilon. \quad (1.9)$$

Visto um pouco da teoria de produto tensorial, retomemos ao objetivo desta seção com o seguinte resultado:

Proposição 1.2.4 *Para cada aplicação $B : X \times Y \longrightarrow Z$ bilinear, limitada e admissível e $1 \leq p < \infty$, existe uma aplicação correspondente $\widetilde{B}$, tal que*

$$\ell_{\widetilde{B},p}(X) \subseteq \ell_{B,p}^w(X).$$

Demonstração: Consideremos a aplicação:

$$\begin{aligned} \widetilde{B} : X \times Y \widehat{\otimes}_\pi Z' &\longrightarrow \mathbb{K} \\ (x, u) &\longmapsto \sum_{k=1}^{\infty} z_k^*(B(x, y_k)), \end{aligned}$$

em que as sequências $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ e $(z_j^*)_{j=1}^{\infty}$ escolhidas em X e Z' , são tais que a série $\sum_{k=1}^{\infty} y_k \otimes z_k^*$ convirja para u , como garante a proposição anterior. A aplicação $\widetilde{B}$ está bem definida uma vez que, para todo $\varepsilon > 0$,

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=1}^{\infty} z_k^*(B(x, y_k)) \right| &\leq \sum_{k=1}^{\infty} |z_k^*(B(x, y_k))| \\ &\leq \|B\| \|x\|_X \sum_{k=1}^{\infty} \|y_k\|_Y \|z_k^*\|_{Z'} \\ &\stackrel{(1.9)}{<} \|B\| \|x\|_X (\pi(u) + \varepsilon) < \infty, \end{aligned} \quad (1.10)$$

Notemos que, nos tensores elementares, temos a igualdade $\widetilde{B}(x, y \otimes z^*) = z^*(B(x, y))$, como cita a observação anterior. Mostremos agora que $\widetilde{B}$ é bilinear, limitada e admissível, propriedades necessárias para a definição do espaço $\ell_{\widetilde{B},p}(X)$.

1.2. Sequências fracamente e incondicionalmente (B,p) -somáveis

Para cada $u \in Y \widehat{\otimes}_\pi Z'$ fixo, notemos que o operador $\widetilde{B}_u := \widetilde{B}(\cdot, u) = \sum_{k=1}^{\infty} z_k^*(B(\cdot, y_k))$ é linear, uma vez que z_k^* e B_{y_k} o são. Sua continuidade é garantida por (1.10).

A linearidade e continuidade na primeira coordenada são imediatas. Para provarmos a linearidade e continuidade na segunda coordenada, isto é, do operador $\widetilde{B}_x := \widetilde{B}(x, \cdot)$, recorreremos à teoria de Produto Tensorial. Para cada $x \in X$, consideremos o operador

$$\begin{aligned} \overline{B}_x : Y \times Z' &\longrightarrow \mathbb{K} \\ (y, z^*) &\longmapsto z^*(B_x(y)). \end{aligned}$$

Claramente $\overline{B}_x$ está bem definido, é bilinear e contínuo. Considerando a aplicação

$$\begin{aligned} \widehat{B}_x : Y \otimes_\pi Z' &\longrightarrow \mathbb{K} \\ \sum_{k=1}^n y_k \otimes z_k^* &\longmapsto \sum_{k=1}^n z_k^*(B_x(y_k)), \end{aligned}$$

notemos que quaisquer que sejam $y \in Y$ e $z^* \in Z'$, tem-se

$$\overline{B}_x(y, z^*) = \widehat{B}_x(y \otimes z^*)$$

e por um argumento de extensão, existe uma única aplicação $\widetilde{B}_x$ que estende $\widehat{B}_x$, definida em $\widetilde{B}_x : Y \widehat{\otimes}_\pi Z' \longrightarrow \mathbb{K}$. Portanto, a aplicação $\widetilde{B}_x$ é linear e contínua. Como $\widetilde{B}$ é separadamente linear e contínua, o Lema 1.1.8 garante a sua continuidade.

Para a admissibilidade de $\widetilde{B}$, suponha-se que, para todo $u \in Y \widehat{\otimes}_\pi Z'$, tem-se

$$\widetilde{B}(x, u) = \sum_{k=1}^{\infty} z_k^*(B_x(y_k)) = 0.$$

Em particular, para os tensores elementares $y \otimes z^* \in Y \widehat{\otimes}_\pi Z'$, temos $\widetilde{B}(x, y \otimes z^*) = z^*(B_x(y)) = 0$, $\forall y \in Y$ e $\forall z^* \in Z'$ e assim $B_x(y) := B(x, y) = 0$. Como, por hipótese, a aplicação B é admissível, então $x = 0$, o que implica que $\widetilde{B}$ é admissível.

Resta-nos apenas mostrar a inclusão $\ell_{\widetilde{B},p}^w(X) \subseteq \ell_{B,p}^w(X)$. Seja $(x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_{\widetilde{B},p}^w(X)$. Então, para todo $u \in Y \widehat{\otimes}_\pi Z'$, é imediato ver que a sequência dada por $\left(\widetilde{B}(x_j, u)\right)_{j=1}^\infty = \left(\sum_{k=1}^\infty z_k^*(B(x_j), y_k)\right)_{j=1}^\infty$ pertence a ℓ_p . Em particular, para os tensores elementares $y \otimes z^*$ de $Y \widehat{\otimes}_\pi Z'$, temos que $\left(\widetilde{B}(x_j, y \otimes z^*)\right)_{j=1}^\infty = (z^*(B_{x_j}(y)))_{j=1}^\infty$ pertence a ℓ_p , quaisquer que sejam $y \in Y$ e $z^* \in Z'$, isto é, $(B_{x_j}(y))_{j=1}^\infty \in \ell_p^w(Z)$, o que mostra que $(x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_{B,p}^w(X)$. ■

O seguinte resultado garante que $\ell_{B,p}^w(X)$ é espaço normado.

1.2. Sequências fracamente e incondicionalmente (B,p) -somáveis

Proposição 1.2.5 Para $1 \leq p < \infty$, a aplicação

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_{B,p,w}: \ell_{B,p}^w(X) &\longrightarrow [0, \infty) \\ (x_j)_{j=1}^\infty &\longmapsto \sup_{y \in B_Y} \|(B(x_j, y))_{j=1}^\infty\|_{w,p} \end{aligned}$$

define uma norma e, consequentemente, $(\ell_{B,p}^w(X); \|\cdot\|_{B,p,w})$ é um espaço vetorial normado.

Demonstração: A prova segue as linhas da demonstração da Proposição 1.1.2, que faz uso do Teorema do Gráfico Fechado para aplicações bilineares. Mostremos que a aplicação $\|\cdot\|_{B,p,w}$ está bem definida.

Para cada $x = (x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_{B,p}^w(X)$, consideremos a aplicação

$$\begin{aligned} T_{B,x}: Y \times Z' &\longrightarrow \ell_p \\ (y, z^*) &\longmapsto (z^*(B(x_j, y)))_{j=1}^\infty. \end{aligned}$$

Como $x = (x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_{B,p}^w(X)$, então $(z^*(B(x_j, y)))_{j=1}^\infty \in \ell_p$ e, portanto, $T_{B,x}$ está bem definida. A bilinearidade de $T_{B,x}$ decorre diretamente da linearidade de z^* e da bilinearidade de B . Como o espaço produto $Y \times Z'$ é Banach, resta-nos mostrar que $T_{B,x}$ é limitada. Suponhamos que

$$((y^{(k)}, z^{*(k)}), T_{B,x}(y^{(k)}, z^{*(k)}))_{k=1}^\infty \text{ convirja para } ((y, z^*), (\lambda_j)_{j=1}^\infty) \quad (1.11)$$

em $(Y \times Z') \times \ell_p$. Mostraremos que $T_{B,x}((y, z^*)) = (\lambda_j)_{j=1}^\infty$. De fato, para todos $j, k \in \mathbb{N}$, temos

$$\begin{aligned} |z^*(B(x_j, y)) - \lambda_j| &\leq |z^*(B(x_j, y - y^{(k)}))| + |(z^* - z^{*(k)})(B(x_j, y^{(k)}))| \\ &\quad + |z^{*(k)}(B(x_j, y^{(k)})) - \lambda_j| \\ &\leq \|z^*\| \|B\| \|x_j\|_X \|y - y^{(k)}\|_Y + \|z^* - z^{*(k)}\| \|B(x_j, y^{(k)})\|_Z \\ &\quad + \|(z^{*(k)}(B(x_j, y^{(k)})) - \lambda_j)_{j=1}^\infty\|_p \\ &= \|z^*\| \|B\| \|x_j\|_X \|y - y^{(k)}\|_Y + \|z^* - z^{*(k)}\| \|B(x_j, y^{(k)})\|_Z \\ &\quad + \|T_{B,x}((y^{(k)}, z^{*(k)})) - (\lambda_j)_{j=1}^\infty\|_p. \end{aligned}$$

Fazendo $k \rightarrow \infty$ e usando as convergências em (1.11), segue que

$$|z^*(B(x_j, y)) - \lambda_j| = 0, \quad \forall j \in \mathbb{N},$$

1.2. Sequências fracamente e incondicionalmente (B,p) -somáveis

ou seja, $T_{B,x}((y, z^*)) = (\lambda_j)_{j=1}^\infty$. Portanto, segue a limitação de $T_{B,x}$ e assim

$$\begin{aligned} \|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{B,p,w} &= \sup_{y \in B_Y} \|(B(x_j, y))_{j=1}^\infty\|_{w,p} \\ &= \sup_{y \in B_Y} \sup_{z^* \in B_{Z'}} \|(z^*(B(x_j, y)))_{j=1}^\infty\|_p \\ &= \sup_{y \in B_Y} \sup_{z^* \in B_{Z'}} \|T_{B,x}(y, z^*)\|_p \\ &= \|T_{B,x}\| < \infty. \end{aligned}$$

As propriedades de norma seguem diretamente da linearidade de z^* e da bilinearidade e admissibilidade de B . ■

A Proposição 1.2.4 nos fornece a inclusão de $\ell_{\tilde{B},p}(X)$ em $\ell_{B,p}^w(X)$, uma relação entre as normas dadas é algo esperado. Mostraremos que

$$\|\cdot\|_{B,p,w} \leq \|\cdot\|_{\tilde{B},p}. \quad (1.12)$$

Com efeito, seja $(x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_{B,p}^w(X)$, então

$$\begin{aligned} \|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{B,p,w} &= \sup_{y \in B_Y} \|(B(x_j, y))_{j=1}^\infty\|_{w,p} \\ &= \sup_{y \in B_Y} \sup_{z^* \in B_{Z'}} \left(\sum_{j=1}^\infty |z^*(B(x_j, y))|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \sup \left\{ \left(\sum_{j=1}^\infty |\tilde{B}(x_j, y \otimes z^*)|^p \right)^{\frac{1}{p}} ; y \otimes z^* \in B_{Y \hat{\otimes}_\pi Z'} \right\} \\ &\leq \sup \left\{ \left(\sum_{j=1}^\infty \left| \tilde{B} \left(x_j, \sum_{k=1}^n y_k \otimes z_k^* \right) \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} ; \sum_{k=1}^n y_k \otimes z_k^* \in B_{Y \hat{\otimes}_\pi Z'} \right\} \\ &= \|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{\tilde{B},p}, \end{aligned}$$

donde se conclui (1.12).

Observação 1.2.6 Assim como ocorre com o espaço $\ell_{B,p}(X)$, para todo $1 \leq p < \infty$, é fácil verificar que $c_{00}(X)$ é um subespaço de $\ell_{B,p}^w(X)$ e que

$$\|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{B,p,w} = \sup_{k \in \mathbb{N}} \|(x_j)_{j=1}^k\|_{B,p,w}, \quad \forall (x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_{B,p}^w(X).$$

Também ocorre que, se $1 \leq p \leq q < \infty$, então

$$\ell_{B,p}^w(X) \subseteq \ell_{B,q}^w(X).$$

1.2. Sequências fracamente e incondicionalmente (B,p) -somáveis

Apresentaremos, a seguir, resultados envolvendo o espaço de sequências fracamente (B,p) -somáveis. Primeiramente, vejamos sua relação com os espaços $\ell_{B,p}(X)$ e com $\ell_p^w(X)$.

Proposição 1.2.7 *Sejam $1 \leq p < \infty$ e $B : X \times Y \longrightarrow Z$ uma aplicação bilinear, limitada e admissível. Então*

$$\ell_{B,p}(X) \xhookrightarrow{1} \ell_{B,p}^w(X). \quad (1.13)$$

Caso Z tenha dimensão finita, tem-se $\ell_{B,p}(X) = \ell_{B,p}^w(X)$ e as normas $\|\cdot\|_{B,p}$ e $\|\cdot\|_{B,p,w}$ são equivalentes.

Demonstração: Seja $(x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_{B,p}(X)$. Então

$$\begin{aligned} \|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{B,p,w} &= \sup_{y \in B_Y} \|(B(x_j, y))_{j=1}^\infty\|_{w,p} \\ &\leq \sup_{y \in B_Y} \|(B(x_j, y))_{j=1}^\infty\|_p \\ &= \|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{B,p} < \infty, \end{aligned}$$

donde segue (1.13). No caso em que Z tenha dimensão finita, o resultado decorre da equivalência entre as normas $\|\cdot\|_p$ e $\|\cdot\|_{w,p}$. ■

Sabemos que, se o espaço X tem dimensão finita, então $\ell_p(X) = \ell_p^w(X)$ (Teorema de Dvoretzky-Rogers). Isso sugere a seguinte indagação, ainda sem resposta:

Problema 1.2.8 Se X tem dimensão finita, então $\ell_{B,p}(X)$ e $\ell_{B,p}^w(X)$ coincidem?

Vejamos a relação entre as sequências fracamente (B,p) -somáveis e as fracamente p -somáveis.

Proposição 1.2.9 *Sejam $1 \leq p < \infty$ e $B : X \times Y \longrightarrow Z$ uma aplicação bilinear, limitada e admissível. Então, em geral, temos*

$$\ell_p^w(X) \xhookrightarrow{\|B\|} \ell_{B,p}^w(X). \quad (1.14)$$

Demonstração: É óbvio que, quaisquer que sejam $y \in Y$ e $z^* \in Z'$, o funcional $z^*(B(\cdot, y)) := z^* \circ B_y \in X'$. Assim, se $(x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_p^w(X)$, então $\sum_{j=1}^\infty |x^*(x_j)|^p < \infty$ para todo $x^* \in X'$ e, em particular, isso também ocorre para $z^* \circ B_y$. Ou seja, $(x_j)_{j=1}^\infty \in$

1.2. Sequências fracamente e incondicionalmente (B,p) -somáveis

$\ell_{B,p}^w(X)$ e, portanto, $\ell_p^w(X) \subseteq \ell_{B,p}^w(X)$. Notemos ainda que, se $y \in B_Y$ e $z^* \in B_{Z'}$, então $\frac{z^* \circ B_y}{\|B\|} \in B_{X'}$. Dessa forma, para $(x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_p^w(X)$, temos

$$\begin{aligned} \|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{B,p,w} &:= \sup_{y \in B_Y} \|(B(x_j, y))_{j=1}^\infty\|_{w,p} \\ &= \sup_{y \in B_Y} \sup_{z^* \in B_{Z'}} \left(\sum_{j=1}^\infty |z^* \circ B_y(x_j)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \|B\| \sup_{y \in B_Y} \sup_{z^* \in B_{Z'}} \left(\sum_{j=1}^\infty \left| \frac{z^* \circ B_y}{\|B\|}(x_j) \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \|B\| \sup_{x^* \in B_{X'}} \left(\sum_{j=1}^\infty \|x^*(x_j)\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \|B\| \|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{w,p} \end{aligned}$$

e assim obtemos (1.14). ■

Vejamos como se comporta o espaço $\ell_{B,p}^w(X)$ para as aplicações B_1 e B_2 apresentados no Exemplo 1.1.7.

Exemplo 1.2.10 As seguintes coincidências de espaços são válidas:

$$\ell_{B_i,p}^w(X) \stackrel{1}{=} \ell_p^w(X), \quad (1.15)$$

em que B_i , $i \in \{1, 2\}$ são as aplicações do Exemplo 1.1.7. Com efeito, a proposição anterior já nos garante uma das inclusões em ambos os casos. Provemos, então, a inclusão que falta, ou seja, $\ell_{B_i,p}^w(X) \subseteq \ell_p^w(X)$, para $i \in \{1, 2\}$.

Vejamos o primeiro caso, isto é, quando $i = 1$. Considere $(x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_{B_1,p}^w(X)$. Logo

$$\sum_{j=1}^\infty |x^*(B_1(x_j, \lambda))|^p = \sum_{j=1}^\infty |x^*(\lambda x_j)|^p < \infty, \quad \forall x^* \in X' \text{ e } \forall \lambda \in \mathbb{K}$$

e para $\lambda = 1$ temos

$$\sum_{j=1}^\infty |x^*(B_1(x_j, 1))|^p = \sum_{j=1}^\infty |x^*(x_j)|^p < \infty, \quad \forall x^* \in X'.$$

Isso nos garante que $(x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_p^w(X)$, ou seja, $\ell_{B_1,p}^w(X) \subseteq \ell_p^w(X)$. Além disso, as normas em $\ell_p^w(X)$ e $\ell_{B_1,p}^w(X)$ coincidem. De fato,

$$\|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{B_1,p,w} = \sup_{\lambda \in B_{\mathbb{K}}} \|(B_1(x_j, \lambda))_{j=1}^\infty\|_{w,p}$$

1.2. Sequências fracamente e incondicionalmente (B,p) -somáveis

$$\begin{aligned}
&= \sup_{\lambda \in B_{\mathbb{K}}} \left\| (\lambda x_j)_{j=1}^{\infty} \right\|_{w,p} \\
&= \sup_{\lambda \in B_{\mathbb{K}}} |\lambda| \left\| (x_j)_{j=1}^{\infty} \right\|_{w,p} \\
&= \left\| (x_j)_{j=1}^{\infty} \right\|_{w,p}.
\end{aligned}$$

O segundo caso é consequência direta de resultados anteriores, uma vez que, pelo Exemplo 1.1.7, tem-se

$$\ell_{B_2,p}(X) \stackrel{1}{=} \ell_p^w(X)$$

e, sendo $\mathbb{K}$ o contradomínio da aplicação B_2 , segue da Proposição 1.2.7 que

$$\ell_{B_2,p}(X) \stackrel{1}{=} \ell_{B_2,p}^w(X).$$

O exemplo anterior mostra dois casos de espaços $\ell_{B,p}^w(X)$ que coincidem com $\ell_p^w(X)$, inclusive com igualdade de normas.

Observação 1.2.11 Notemos que a igualdade em (1.15) não ocorre em geral. De fato, no Exemplo 1.1.10, temos $\ell_1^w(\ell_2) \not\subseteq \ell_{B,1}(\ell_2)$ e sendo $\mathbb{K}$ o contradomínio da aplicação do referido exemplo, pela Proposição 1.2.7 temos $\ell_{B,1}^w(\ell_2) = \ell_{B,1}(\ell_2)$. Assim, temos a inclusão estrita

$$\ell_1^w(\ell_2) \subsetneq \ell_{B,1}^w(\ell_2).$$

De modo geral, não conseguimos estabelecer a completude de $\ell_{B,p}^w(X)$ nem exibir um caso, como foi feito para $\ell_{B,p}(X)$, que mostra sua não completude. Assim, o seguinte questionamento encontra-se em aberto:

Problema 1.2.12 Se X é um espaço de Banach, então $\ell_{B,p}^w(X)$ é completo?

No entanto, o teorema a seguir nos dá uma condição suficiente para a completude de $\ell_{B,p}^w(X)$.

Teorema 1.2.13 *Sejam $1 \leq p < \infty$ e $B : X \times Y \longrightarrow Z$ uma aplicação bilinear, limitada e admissível. Se*

$$\ell_{B,p}^w(X) \xrightarrow{K} \ell_{\infty}(X), \tag{1.16}$$

para algum $K > 0$. Então $(\ell_{B,p}^w(X), \|\cdot\|_{B,p,w})$ é Banach.

Demonstração: Seja $(x^{(k)})_{k=1}^{\infty}$ uma sequência de Cauchy em $\ell_{B,p}^w(X)$, em que para cada $k \in \mathbb{N}$ tem-se $x^{(k)} = (x_j^{(k)})_{j=1}^{\infty}$. Então, dado $\varepsilon > 0$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$, tal que, quaisquer que sejam $m, n \geq k_0$

$$\|x^{(m)} - x^{(n)}\|_{B,p,w} := \sup_{y \in B_Y} \left\| \left(B \left(x_j^{(m)} - x_j^{(n)}, y \right) \right)_{j=1}^{\infty} \right\|_{w,p} \leq \frac{\varepsilon}{K}. \tag{1.17}$$

1.2. Sequências fracamente e incondicionalmente (B,p) -somáveis

Como $\ell_{B,p}^w(X) \xrightarrow{K} \ell_\infty(X)$, segue que, quaisquer que sejam $j \in \mathbb{N}$ e $m, n \geq k_0$,

$$\left\| x_j^{(m)} - x_j^{(n)} \right\|_X \leq \varepsilon.$$

Assim, para qualquer $j \in \mathbb{N}$, a sequência $(x_j^{(k)})_{k=1}^\infty$ é de Cauchy em X , que é Banach, portanto, converge para algum $x_j \in X$. Fazendo $x := (x_j)_{j=1}^\infty$, resta-nos mostrar que $x \in \ell_{B,p}^w(X)$ e que $x^{(k)} \xrightarrow{k} x$ em $\ell_{B,p}^w(X)$. Com efeito, para todos $l \in \mathbb{N}$, $y \in B_Y$ e $z^* \in B_{Z'}$, por (1.17), temos

$$\sum_{j=1}^l \left| z^* \left(B \left(x_j^{(m)} - x_j^{(n)}, y \right) \right) \right|_Z^p \leq \frac{\varepsilon}{K}, \quad \forall m, n \geq k_0 \quad (1.18)$$

e fazendo $n \rightarrow \infty$ em (1.18), obtemos

$$\sum_{j=1}^l \left| z^* \left(B \left(x_j^{(m)} - x_j, y \right) \right) \right|_Z^p \leq \frac{\varepsilon}{K}, \quad \forall m \geq k_0, \forall l \in \mathbb{N}, \forall y \in B_Y.$$

Fazendo $l \rightarrow +\infty$ e tomando o $\sup_{y \in B_Y}$ na desigualdade acima, temos

$$\left\| \left(x_j^{(m)} - x_j \right)_{j=1}^\infty \right\|_{B,p,w} \leq \frac{\varepsilon}{K}, \text{ sempre que } m \geq k_0. \quad (1.19)$$

Isso mostra que $\left\| \left(x_j^{(m)} - x_j \right)_{j=1}^\infty \right\|_{B,p,w} \xrightarrow{m} 0$ e com isso $x^{(m)} - x \in \ell_{B,p}^w(X)$, sempre que $m \geq k_0$. Assim, tomando $m = k_0$, temos $x^{(k_0)} - x \in \ell_{B,p}^w(X)$ e sendo este um espaço vetorial, segue que $x = x^{(k_0)} - (x^{(k_0)} - x) \in \ell_{B,p}^w(X)$. Por fim, de (1.19), segue que $\|x^{(k)} - x\|_{B,p,w} \xrightarrow{k} 0$ e, portanto, $\ell_{B,p}^w(X)$ é Banach. ■

De modo semelhante à definição de $\ell_p^u(X)$, o espaço das sequências incondicionalmente somáveis em X , definiremos o espaço das sequências incondicionalmente (B,p) -somáveis.

Definição 1.2.14 Seja $1 \leq p < \infty$. O espaço das sequências *incondicionalmente (B,p) -somáveis* é definido por

$$\ell_{B,p}^u(X) := \left\{ (x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_{B,p}^w(X); \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| (x_j)_{j=n}^\infty \right\|_{B,p,w} = 0 \right\}.$$

A proposição a seguir garante que, para $1 \leq p < \infty$, o espaço $\ell_{B,p}^u(X)$ é fechado em $\ell_{B,p}^w(X)$.

Proposição 1.2.15 O espaço $\ell_{B,p}^u(X)$ é um subespaço fechado de $\ell_{B,p}^w(X)$. Em particular, o espaço $(\ell_{B,p}^u(X), \|\cdot\|_{B,p,w})$ é Banach se $(\ell_{B,p}^w(X), \|\cdot\|_{B,p,w})$ o for.

1.2. Sequências fracamente e incondicionalmente (B,p) -somáveis

Demonstração: Não é difícil mostrar que $\ell_{B,p}^u(X)$ é um espaço vetorial. Agora, seja $(x^{(k)})_{k=1}^\infty$ uma sequência em $\ell_{B,p}^u(X)$. Então, para cada $k \in \mathbb{N}$, temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \left(x_j^{(k)} \right)_{j=n}^\infty \right\|_{B,p,w} = 0,$$

isto é, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0^{(k)} \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq n_0^{(k)} \Rightarrow \left\| \left(x_j^{(k)} \right)_{j=n}^\infty \right\|_{B,p,w} < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (1.20)$$

Suponhamos que $x^{(k)} \rightarrow x = (x_j)_{j=1}^\infty$ em $\ell_{B,p}^w(X)$, ou seja, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$k \geq k_0 \Rightarrow \left\| \left(x_j^{(k)} - x_j \right)_{j=1}^\infty \right\|_{B,p,w} = \sup_{y \in B_Y} \left\| \left(B \left(x_j^{(k)} - x_j, y \right) \right)_{j=1}^\infty \right\|_{w,p} < \frac{\varepsilon}{2}$$

e, por maior razão, para todo $n \in \mathbb{N}$ e $k \geq k_0$, obtemos

$$\left\| \left(x_j^{(k)} - x_j \right)_{j=n}^\infty \right\|_{B,p,w} = \sup_{y \in B_Y} \left\| \left(B \left(x_j^{(k)} - x_j, y \right) \right)_{j=n}^\infty \right\|_{w,p} < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (1.21)$$

Finalmente, temos

$$\begin{aligned} \left\| (x_j)_{j=n}^\infty \right\|_{B,p,w} &= \left\| (x_j)_{j=n}^\infty - \left(x_j^{(k_0)} \right)_{j=n}^\infty + \left(x_j^{(k_0)} \right)_{j=n}^\infty \right\|_{B,p,w} \\ &\leq \left\| (x_j)_{j=n}^\infty - \left(x_j^{(k_0)} \right)_{j=n}^\infty \right\|_{B,p,w} + \left\| \left(x_j^{(k_0)} \right)_{j=n}^\infty \right\|_{B,p,w} \end{aligned}$$

e, por (1.20) e (1.21), segue que

$$n \geq \max\{n_0^{(k_0)}, k_0\} \Rightarrow \left\| (x_j)_{j=n}^\infty \right\|_{B,p,w} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

donde $x = (x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_{B,p}^u(X)$. ■

Uma consequência direta do Teorema 1.2.13 e da proposição anterior é o seguinte resultado:

Corolário 1.2.16 *Se $\ell_{B,p}^w(X)$ estiver imerso continuamente em $\ell_\infty(X)$, então o espaço $(\ell_{B,p}^u(X), \|\cdot\|_{B,p,w})$ é Banach.*

Considerando as aplicações B_1 e B_2 descritas no Exemplo 1.1.7, pela igualdade dos espaços $(\ell_{B_i,p}^w(X), \|\cdot\|_{B,p,w}) = (\ell_p^w(X), \|\cdot\|_{w,p})$, para $i \in \{1, 2\}$, obtemos a seguinte coincidência

$$\ell_{B_i,p}^u(X) = \ell_p^u(X).$$

1.3. Espaços B -normados

Com base na igualdade acima e tendo em vista que a cadeia

$$\ell_p(X) \subseteq \ell_p^u(X) \subseteq \ell_p^w(X)$$

é sempre válida, é de esperar que, para os espaços $\ell_{B,p}(X)$, $\ell_{B,p}^u(X)$ e $\ell_{B,p}^w(X)$ aconteça o mesmo, ou seja, que a cadeia

$$\ell_{B,p}(X) \subseteq \ell_{B,p}^u(X) \subseteq \ell_{B,p}^w(X) \quad (1.22)$$

sempre ocorra. Para B_1 isso é verdade, mas em geral, não. Para mostrarmos isso, basta tomarmos a aplicação B_2 definida no Exemplo 1.1.7 e considerarmos $X = c_0$, $Z = \mathbb{K}$ e $p = 1$. Dessa forma, como a dimensão de Z é 1, pela Proposição 1.2.7, temos $\ell_{B_2,1}(c_0) = \ell_{B_2,1}^w(c_0) = \ell_1^w(c_0)$. Por outro lado, $\ell_{B_2,1}^u(c_0) = \ell_1^u(c_0) \subsetneq \ell_1^w(c_0)$ (para a inclusão estrita, ver [9, p. 94]), logo

$$\ell_{B_2,1}^u(c_0) = \ell_1^u(c_0) \subsetneq \ell_1^w(c_0) = \ell_{B_2,1}(c_0) = \ell_{B_2,1}^w(c_0),$$

o que mostra que a cadeia (1.22) nem sempre ocorre.

1.3 Espaços B -normados

Apresentaremos nesta seção uma propriedade que pode ser atribuída a um espaço X , relacionada à aplicação bilinear B . Veremos que o fato de X possuir tal propriedade é essencial para obtermos resultados importantes, tanto sobre o espaço de sequências $\ell_{B,p}(X)$ como para os operadores que melhoram convergência de séries que lidem com esses espaços. Também será possível garantir a cadeia

$$\ell_p(X) \subseteq \ell_{B,p}(X) \subseteq \ell_p^w(X),$$

o que acarreta na completude de $\ell_{B,p}(X)$. Veremos também a relação entre o fato de X possuir essa propriedade e o Teorema de Lax-Milgran.

Definição 1.3.1 [6, Definición 2.4.1] Seja $B : X \times Y \longrightarrow Z$ uma aplicação bilinear, limitada e admissível. Considere a aplicação $\Phi_B : X \rightarrow \mathcal{L}(Y; Z)$ dada por $\Phi_B(x) := B_x$. Dizemos que o espaço X é B -normado se existe uma constante $C > 0$ tal que, para cada $x^* \in X'$, existe $\varphi_{x^*} : \mathcal{L}(Y; Z) \rightarrow \mathbb{K}$, satisfazendo as seguintes condições:

(i) $\|\varphi_{x^*}\| \leq C\|x^*\|$

1.3. Espaços B -normados

(ii) $x^*(x) = \varphi_{x^*}(\Phi_B(x)) = \varphi_{x^*}(B_x), \forall x \in X$.

Note que, nessas condições, vale a afirmação de que o operador adjunto Φ'_B é sobrejetivo.

Observação 1.3.2 Em [6, Definição 2.4.1], não consta a condição (i) acima nem a hipótese da admissibilidade de B . Essas hipóteses, imprescindíveis para uma das caracterizações desses espaços, foram acrescentadas em um trabalho posterior dos mesmos autores, mais precisamente em [1, Theorem 16].

O teorema seguinte, cuja demonstração consta no trabalho de Calabuig, mostra uma caracterização para espaços B -normados com a qual prova-se que é válida a cadeia (1.5). Uma das coisas demonstradas nesse resultado é a equivalência entre duas normas de elementos de espaços distintos, a saber: X e $\mathcal{L}(Y; Z)$. Para melhor apresentação das ideias escritas no teorema (mais precisamente no item (ii) abaixo), usaremos o seguinte lema:

Lema 1.3.3 *Seja $B : X \times Y \longrightarrow Z$ uma aplicação bilinear, limitada e admissível. Então a aplicação*

$$\begin{aligned} ||| \cdot |||_X : X &\longrightarrow [0, \infty) \\ x &\longmapsto \|B_x\|_{\mathcal{L}(Y; Z)}, \end{aligned}$$

define uma norma no espaço X .

Demonstração: A aplicação $||| \cdot |||_X$ está bem definida, uma vez que B_x pertence a $\mathcal{L}(Y; Z)$ para todo $x \in X$. Usando o fato da aplicação B ser bilinear e admissível, as condições de norma são facilmente verificadas. ■

Teorema 1.3.4 [6, Teorema 2.4.2] *Sejam $1 \leq p < \infty$ e $B : X \times Y \longrightarrow Z$ uma aplicação bilinear, limitada e admissível. As seguintes afirmações são equivalentes:*

- (i) $\ell_{B,p}(X)$ está imerso continuamente em $\ell_p^w(X)$.
- (ii) $\| \cdot \|_X$ e $||| \cdot |||_X$ são equivalentes em X ;
- (iii) X é um espaço B -normado;

Em razão do item (ii) acima, a partir daqui, utilizaremos a seguinte definição para espaço B -normado:

1.3. Espaços B -normados

Definição 1.3.5 Seja $B : X \times Y \longrightarrow Z$ uma aplicação bilinear, limitada e admissível. Dizemos que o espaço X é B -normado, se existe uma constante $K > 0$ tal que

$$\|x\|_X \leq K \sup_{y \in B_Y} \|B(x, y)\|_Z, \quad (1.23)$$

para todo $x \in X$.

A propriedade sobre um espaço de Banach X ser B -normado é de fundamental importância, uma vez que ela garantirá a completude dos espaços $\ell_{B,p}(X)$, considerando $1 \leq p < \infty$ (Ver [6, Teorema 2.4.4]).

Provar que determinado espaço é completo é, por si só, um problema interessante. No Teorema 1.2.13, foi provado que $\ell_{B,p}^w(X)$ é um espaço de Banach sempre que estiver imerso continuamente em $\ell_\infty(X)$. O próximo resultado nos garantirá a mesma conclusão sobre os espaços $\ell_{B,p}(X)$ quando a imersão contínua em $\ell_\infty(X)$ destes também ocorrer. Na verdade, essa hipótese sobre $\ell_{B,p}(X)$ nos fornece uma caracterização dos espaços B -normados, como mostra o teorema seguinte:

Teorema 1.3.6 *Um espaço X é B -normado se, e somente se, $\ell_{B,p}(X)$ estiver imerso continuamente em $\ell_\infty(X)$.*

Demonstração: Supondo que X seja B -normado, então por (i) do Teorema 1.3.4, $\ell_{B,p}(X)$ está imerso continuamente em $\ell_p^w(X)$, que, por sua vez, está imerso em $\ell_\infty(X)$. Reciprocamente, suponha-se que $\ell_{B,p}(X)$ esteja imerso continuamente em $\ell_\infty(X)$, então existe uma constante $K > 0$, tal que

$$\|(x_j)_{j=1}^\infty\|_\infty \leq K \|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{B,p},$$

qualquer que seja $(x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_{B,p}(X)$. Assim, dado $x \in X$, consideremos a sequência $(\delta_{1j}x)_{j=1}^\infty \in \ell_{B,p}(X)$. Pela desigualdade acima, temos

$$\|x\|_X = \|(\delta_{1j}x)_{j=1}^\infty\|_\infty \leq K \|(\delta_{1j}x)_{j=1}^\infty \|_{B,p} = K \sup_{y \in B_Y} \|B(x, y)\|_Z$$

e portanto X é B -normado. ■

Observação 1.3.7 Notemos que, sendo X B -normado, os itens (i) e (ii) do teorema anterior, garantem, respectivamente, a admissibilidade da aplicação B e a segunda inclusão da seguinte cadeia:

$$\ell_p(X) \xrightarrow{\|B\|} \ell_{B,p}(X) \xrightarrow{K} \ell_p^w(X) \xrightarrow{1} \ell_\infty(X).$$

1.3. Espaços B -normados

Outro fato que merece destaque é que nem sempre os espaços $\ell_{B,p}(X)$ estão imersos continuamente em $\ell_\infty(X)$. O Teorema 1.1.14 garante que, em geral, os espaços $\ell_{B,p}(X)$ não são Banach, e o Exemplo 1.1.10 mostra que $\ell_1^w(\ell_2) \subsetneq \ell_{B,1}^w(\ell_2)$. Portanto, nos dois casos, não ocorre a imersão referida. Concluimos com isso que as sequências fortemente (assim como as fracamente) (B, p) -somáveis não são, em geral, limitadas.

Uma consequência imediata do teorema anterior e da Proposição 1.1.12 é dada a seguir.

Corolário 1.3.8 *Sejam $1 \leq p < \infty$ e $B : X \times Y \longrightarrow Z$ uma aplicação bilinear, limitada e admissível, com X B -normado. Então*

$$\ell_p^w(X) = \ell_{B,p}(X) \Leftrightarrow \{B_y : X \rightarrow Z, y \in Y\} \subseteq \Pi_p(X; Z)$$

e as normas $\|\cdot\|_{w,p}$ e $\|\cdot\|_{B,p}$ são equivalentes.

Observação 1.3.9 Se, no corolário acima, o espaço Z (ou X) tem dimensão finita, então $\ell_p^w(X) = \ell_{B,p}(X)$. De fato, qualquer que seja $y \in Y$, temos B_y de posto finito, e o Corolário 1.1.13 garante que $\ell_p^w(X) \subseteq \ell_{B,p}(X)$. Sendo X B -normado, temos a inclusão contrária.

Proposição 1.3.10 *Se $\ell_{B,p}^w(X)$ estiver imerso continuamente em $\ell_\infty(X)$, então X é $\tilde{B}$ -normado.*

Demonstração: Como $\ell_{B,p}^w(X)$ está imerso continuamente em $\ell_\infty(X)$, então a desigualdade dada em (1.12) garante também imersão contínua de $\ell_{\tilde{B},p}(X)$ em $\ell_\infty(X)$. Assim, pelo Teorema 1.3.6, X é $\tilde{B}$ -normado. ■

Outro fato um tanto quanto curioso no que concerne à Definição 1.3.5, é a relação que esta tem com o conhecido Teorema de Lax-Milgran (para espaços de Banach). Por esse motivo, no sentido que ficará claro a seguir, podemos dizer que X tem “a propriedade de Lax-Milgram” quando for B -normado. Além disso, em virtude do Teorema 1.3.4, vale uma versão ampliada de Lax-Milgran. Para efeito de comparação, vamos enunciar o teorema original.

Teorema 1.3.11 (Teorema de Lax-Milgran para espaços de Banach) *Sejam X e Y espaços de Banach sobre $\mathbb{K}$, com Y reflexivo e $B : X \times Y \longrightarrow \mathbb{K}$ uma forma bilinear, limitada e não-degenerada. Então, as seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) *Dado $y^* \in Y'$, existe $x_0 \in X$ tal que $y^*(y) = B(x_0, y)$, para todo $y \in Y$.*

1.3. Espaços B -normados

(ii) *Existe uma constante $K > 0$, tal que*

$$\|x\|_X \leq K \sup_{y \in B_Y} |B(x, y)|, \quad \forall x \in X.$$

Note que as condições do Teorema de Lax-Milgran implicam nas hipóteses da Definição 1.3.5: a admissibilidade da bilinear B é garantida pelo fato de esta ser não degenerada, isto é, para cada $x \neq 0$ (ou $y \neq 0$), existe $y \in Y$ (ou $x \in X$), tal que $B(x, y) \neq 0$; além disso, o item (ii) acima garante que, nestas condições, o espaço X seja B -normado. Dessa forma, temos o seguinte resultado:

Corolário 1.3.12 *Sejam X e Y espaços de Banach sobre $\mathbb{K}$ e $B : X \times Y \longrightarrow \mathbb{K}$ uma forma bilinear, todos nas condições do Teorema de Lax-Milgran. Então X é B -normado. Além disso, a seguinte igualdade*

$$\ell_{B,p}(X) = \ell_p^w(X) = \ell_{B,p}^w(X)$$

é satisfeita.

Demonstração: Como X é um espaço B -normado, o item (i) do Teorema 1.3.4 assegura a primeira inclusão da cadeia abaixo; a segunda é garantida pela Proposição 1.2.9:

$$\ell_{B,p}(X) \subseteq \ell_p^w(X) \subseteq \ell_{B,p}^w(X).$$

Sendo $\mathbb{K}$ o contradomínio da aplicação B , segue da Proposição 1.2.7 a igualdade

$$\ell_{B,p}(X) = \ell_{B,p}^w(X).$$

Dessa forma, o resultado segue das duas expressões acima. ■

O fato de X ser B -normado caracteriza os funcionais de X' (é o que essencialmente diz a Definição 1.3.1) e isso amplia o Teorema de Lax-Milgran. De fato, podemos escrever essa versão ampliada na forma

Teorema 1.3.13 (de Lax-Milgran ampliado para espaços de Banach) *Sejam X e Y espaços de Banach sobre $\mathbb{K}$, com Y reflexivo e $B : X \times Y \longrightarrow \mathbb{K}$ uma forma bilinear, limitada e não-degenerada. Então, as seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) *Dado $y^* \in Y'$, existe $x_0 \in X$ tal que $y^*(y) = B(x_0, y)$, para todo $y \in Y$.*

(ii) *Existe uma constante $K > 0$, tal que*

$$\|x\|_X \leq K \sup_{y \in B_Y} |B(x, y)|, \quad \forall x \in X.$$

1.3. Espaços B -normados

(iii) Dado $x^* \in X'$, existe $\varphi_{x^*} \in Y''$ tal que

$$x^*(x) = \varphi_{x^*}(Bx), \forall x \in X, \text{ e } \|\varphi_{x^*}\| \leq C\|x^*\|.$$

O resultado seguinte relaciona os espaços $\ell_p(X)$, $\ell_{B,p}(X)$, $\ell_p^w(X)$ e $\ell_{\tilde{B},p}(X)$, no caso em que X tem dimensão finita.

Proposição 1.3.14 *Seja $B : X \times Y \longrightarrow Z$ uma aplicação bilinear, limitada e admissível. Se a dimensão do espaço X é finita, então X é B -normado. Em particular, os espaços $\ell_p(X)$, $\ell_{B,p}(X)$, $\ell_p^w(X)$ e $\ell_{\tilde{B},p}(X)$ coincidem.*

Demonstração: Pelo Lema 1.3.3, a aplicação definida por

$$\|x\|_X = \|Bx\|_{\mathcal{L}(Y;Z)}$$

é uma norma em X . Como, por hipótese, a dimensão de X é finita, então as normas $\|\cdot\|_X$ e $\|\cdot\|_X$ são equivalentes em X e, pelo Teorema 1.3.4, segue que X é B -normado. Agora, sendo X B -normado, sabemos que

$$\ell_p(X) \subseteq \ell_{B,p}(X) \subseteq \ell_p^w(X)$$

e, novamente, como X tem dimensão finita, segue do Teorema de Dvoretzky-Rogers que $\ell_p(X) = \ell_p^w(X)$. Assim

$$\ell_p(X) = \ell_{B,p}(X) = \ell_p^w(X).$$

A igualdade acima, sendo X de dimensão finita, vale qualquer que seja a bilinear B com as propriedades usuais, em particular para $\tilde{B}$. Dessa forma, temos a coincidência descrita. ■

Finalizamos o capítulo retomando o espaço das sequências mid-somáveis no contexto de espaços B -normados.

Exemplo 1.3.15 No Exemplo 1.1.9, apresentamos o espaço $\ell_p^{\text{mid}}(X)$ e mostramos que este se trata de um espaço de sequências B_3 -somáveis. É sabido (ver [4] ou [14]) que

$$\ell_p(X) \subseteq \ell_p^{\text{mid}}(X) \subseteq \ell_p^w(X),$$

assim, segue do Teorema 1.3.4 que neste caso o espaço X é B_3 -normado.

Capítulo 2

Um dual do espaço $\ell_{B,p}(X)$

Ao estudar classes de operadores em espaços vetoriais, em geral, é muito natural estender o estudo a classes de adjuntos e, conseqüentemente, aos respectivos duais dos espaços. Algumas características de classes de operadores não são preservadas nos duais correspondentes. Por exemplo, o operador inclusão $\iota : \ell_1 \longrightarrow \ell_2$ é absolutamente 2-somante, enquanto seu adjunto $\iota^* : \ell'_2 = \ell_2 \longrightarrow \ell'_1 = \ell_\infty$ não possui esta propriedade. Esse fato motivou J. S. Cohen a buscar uma caracterização para a classe dual dos operadores absolutamente somantes (ver [8]), e esse esforço passa necessariamente pela necessidade de conhecer os duais dos espaços de seqüências envolvidos.

Este capítulo tem como finalidade determinar um espaço dual de $\ell_{B,p}(X)$ e permitir, assim, o estudo futuro de classes de operadores que envolvam esses espaços e seus duais. As principais referências usadas nessa construção foram [4, 7, 8, 16].

2.1 Sequências Cohen $(\mathcal{B}, p)$ -somáveis

Antes de iniciarmos o estudo de nosso novo espaço, faremos breve apresentação do espaço das seqüências Cohen fortemente p -somáveis, denotado por $\ell_p\langle X \rangle$, e de alguns resultados necessários para nosso objetivo.

Definição 2.1.1 ([8], Cohen) Uma seqüência $(x_j)_{j=1}^\infty$ em um espaço de Banach X é dita *Cohen fortemente p -somável* se a série $\sum_{j=1}^\infty x_j^*(x_j)$ converge, qualquer que seja $(x_j^*)_{j=1}^\infty \in \ell_p^w(X')$.

2.1. Sequências Cohen $(\mathcal{B}, p)$ -somáveis

O conjunto formado pelas sequências Cohen fortemente p -somáveis em X será denotado por $\ell_p\langle X \rangle$. Assim,

$$\ell_p\langle X \rangle := \left\{ (x_j)_{j=1}^\infty \in X^\mathbb{N}; \sum_{j=1}^\infty x_j^*(x_j) \text{ converge}; \forall (x_j^*)_{j=1}^\infty \in \ell_{p^*}^w(X') \right\}$$

ou, devido à [7, Proposição 1.1.2], o espaço $\ell_p\langle X \rangle$ também pode ser denotado de forma equivalente por

$$\ell_p\langle X \rangle := \left\{ (x_j)_{j=1}^\infty \in X^\mathbb{N}; \sum_{j=1}^\infty |x_j^*(x_j)| < \infty; \forall (x_j^*)_{j=1}^\infty \in \ell_{p^*}^w(X') \right\}.$$

Uma norma completa definida neste espaço é dada por

$$\|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{C,p} := \sup \left\{ \sum_{j=1}^\infty |x_j^*(x_j)|; (x_j^*)_{j=1}^\infty \in B_{\ell_{p^*}^w(X')} \right\}.$$

Os resultados de inclusão e coincidência a seguir, cujas provas podem ser encontradas em [7, Proposição 1.1.3 e Teorema 1.1.8], serão elencados aqui para uso futuro.

Proposição 2.1.2 *Se $1 \leq p \leq \infty$, então $\ell_p\langle X \rangle \subseteq \ell_p(X) \subseteq \ell_p^w(X)$ e as coincidências ocorrem nos seguintes casos:*

- (i) $\ell_1\langle X \rangle = \ell_1(X)$;
- (ii) *Se $\dim(X) < \infty$, então $\ell_p\langle X \rangle = \ell_p(X) = \ell_p^w(X)$.*

Vamos definir o nosso novo espaço. Apresentaremos alguns resultados e, por fim, mostraremos que esse espaço é, num certo sentido, o dual de um espaço $\ell_{\mathcal{B},p}(X)$.

Definição 2.1.3 Sejam $\mathcal{B} : X' \times Y \longrightarrow Z$ uma aplicação bilinear, limitada e admissível, X' um espaço $\mathcal{B}$ -normado e $1 < p \leq \infty$. Uma sequência $(x_j)_{j=1}^\infty$ em X é dita *Cohen $(\mathcal{B}, p)$ -somável* se a série $\sum_{j=1}^\infty x_j^*(x_j)$ converge para todo $(x_j^*)_{j=1}^\infty \in \ell_{\mathcal{B},p^*}(X')$.

Denotaremos por $\ell_{\mathcal{B},p}\langle X \rangle$ o conjunto formado pelas sequências Cohen $(\mathcal{B}, p)$ -somáveis em X , isto é,

$$\ell_{\mathcal{B},p}\langle X \rangle = \left\{ (x_j)_{j=1}^\infty \in X^\mathbb{N}; \sum_{j=1}^\infty x_j^*(x_j) \text{ converge}, \forall (x_j^*)_{j=1}^\infty \in \ell_{\mathcal{B},p^*}(X') \right\}.$$

2.1. Sequências Cohen $(\mathcal{B}, p)$ -somáveis

Observação 2.1.4

- (a) Notemos que, embora as sequências Cohen $(\mathcal{B}, p)$ -somáveis estejam definidas no espaço X , a primeira entrada da aplicação bilinear associada é o dual daquele espaço (no caso, X'). Por esse fato, estamos usando a notação $\mathcal{B}$ sempre que nos referirmos a este espaço de sequências.
- (b) A exigência de que X' seja $\mathcal{B}$ -normado na definição acima se justificará quando formos definir uma norma para o espaço $\ell_{\mathcal{B}, p}\langle X \rangle$.
- (c) Notemos que, para $p = 1$ o espaço $\ell_{\mathcal{B}, p}\langle X \rangle$ não está definido, uma vez que

$$\ell_{\mathcal{B}, 1}\langle X \rangle := \left\{ (x_j)_{j=1}^\infty \in X^{\mathbb{N}}; \sum_{j=1}^\infty x_j^*(x_j) < \infty; \forall (x_j^*)_{j=1}^\infty \in \ell_{\mathcal{B}, \infty}(X') \right\}$$

e o espaço $\ell_{\mathcal{B}, \infty}(X')$ não é contemplado pelo Teorema 1.3.4, que caracteriza espaços $\mathcal{B}$ -normados (por (b), isso será necessário).

O lema seguinte garante que, para todo $(x_j^*)_{j=1}^\infty \in \ell_{\mathcal{B}, p^*}(X')$, uma sequência $(x_j)_{j=1}^\infty$ em X é Cohen $(\mathcal{B}, p)$ -somável se, e somente se, a série $\sum_{j=1}^\infty x_j^*(x_j)$ converge absolutamente. Dessa forma, em nosso contexto, faremos o uso indistinto de qualquer uma das séries.

A demonstração desse lema é uma simples adaptação de [18, Proposição 2.7.5] e, portanto, será omitida.

Lema 2.1.5 *Seja $\mathcal{B} : X' \times Y \longrightarrow Z$ uma aplicação bilinear, limitada e admissível e $(x_j)_{j=1}^\infty$ uma sequência no espaço de Banach X . A série $\sum_{j=1}^\infty x_j^*(x_j)$ converge para toda $(x_j^*)_{j=1}^\infty \in \ell_{\mathcal{B}, p^*}(X')$ se, e somente se, $\sum_{j=1}^\infty |x_j^*(x_j)|$ converge para todo $x^* = (x_j^*)_{j=1}^\infty \in \ell_{\mathcal{B}, p^*}(X')$. Além disso,*

$$\sup \left\{ \left| \sum_{j=1}^\infty x_j^*(x_j) \right|; x^* \in B_{\ell_{\mathcal{B}, p^*}(X')} \right\} = \sup \left\{ \sum_{j=1}^\infty |x_j^*(x_j)|; x^* \in B_{\ell_{\mathcal{B}, p^*}(X')} \right\}. \quad (2.1)$$

Verifica-se facilmente que, para cada $1 < p \leq \infty$, $\ell_{\mathcal{B}, p}\langle X \rangle$ é um espaço vetorial com as operações usuais de sequências. O resultado a seguir garante que este é um espaço normado.

2.1. Sequências Cohen $(\mathcal{B}, p)$ -somáveis

Proposição 2.1.6 *Seja $\mathcal{B} : X' \times Y \longrightarrow Z$ uma aplicação bilinear, limitada e admissível com X' sendo $\mathcal{B}$ -normado. Então, para cada $1 < p \leq \infty$, a aplicação*

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_{\langle \mathcal{B}, p \rangle} : \ell_{\mathcal{B}, p}\langle X \rangle &\longrightarrow [0, \infty) \\ (x_j)_{j=1}^\infty &\longmapsto \sup \left\{ \left\| (\varphi_j(x_j))_{j=1}^\infty \right\|_1 ; (\varphi_j)_{j=1}^\infty \in B_{\ell_{\mathcal{B}, p^*}(X')} \right\}. \end{aligned}$$

define uma norma e, portanto, $(\ell_{\mathcal{B}, p}\langle X \rangle; \|\cdot\|_{\langle \mathcal{B}, p \rangle})$ é um espaço vetorial normado.

Demonstração: Mostraremos que a aplicação $\|\cdot\|_{\langle \mathcal{B}, p \rangle}$ está bem definida. Para cada $x = (x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_{\mathcal{B}, p}\langle X \rangle$, consideremos a seguinte aplicação:

$$\begin{aligned} T_x : \ell_{\mathcal{B}, p^*}(X') &\longrightarrow \ell_1 \\ (\varphi_j)_{j=1}^\infty &\longmapsto (\varphi_j(x_j))_{j=1}^\infty. \end{aligned}$$

É claro que T_x está bem definida, uma vez que $x = (x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_{\mathcal{B}, p}\langle X \rangle$, e é fácil verificar sua linearidade. Resta-nos mostrar que T_x é limitada e para isso, faremos uso do Teorema do Gráfico Fechado. Suponhamos que $(\varphi^{(k)}, T_x(\varphi^{(k)}))_{k=1}^\infty$ convirja para (φ, z) em $\ell_{\mathcal{B}, p^*}(X') \times \ell_1$, em que, para cada $k \in \mathbb{N}$, $\varphi^{(k)} = (\varphi_j^{(k)})_{j=1}^\infty$, $\varphi = (\varphi_j)_{j=1}^\infty$ e $z = (z_j)_{j=1}^\infty$. Mostraremos que $z = T_x(\varphi)$. Como $T_x(\varphi^{(k)}) \xrightarrow{k} z$, temos

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \left(\varphi_j^{(k)}(x_j) \right)_{j=1}^\infty = z = (z_j)_{j=1}^\infty,$$

como $\ell_1 \xhookrightarrow{1} \ell_\infty$, segue que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \varphi_j^{(k)}(x_j) = z_j, \forall j \in \mathbb{N}.$$

Por outro lado, como $\varphi^{(k)} \xrightarrow{k} \varphi$ em $\ell_{\mathcal{B}, p^*}(X')$, temos

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \left(\varphi_j^{(k)} \right)_{j=1}^\infty = \varphi = (\varphi_j)_{j=1}^\infty$$

e, sendo X' um espaço $\mathcal{B}$ -normado, $\ell_{\mathcal{B}, p^*}(X') \xhookrightarrow{C} \ell_\infty(X')$. Logo

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \varphi_j^{(k)} = \varphi_j, \forall j \in \mathbb{N}$$

e pela unicidade do limite, obtemos $\varphi_j(x_j) = z_j, \forall j \in \mathbb{N}$. Dessa forma,

$$T_x(\varphi) = T_x((\varphi_j)_{j=1}^\infty) = (\varphi_j(x_j))_{j=1}^\infty = (z_j)_{j=1}^\infty = z$$

e, pelo Teorema do Gráfico Fechado, T_x é contínua. Daí,

$$\infty > \|T_x\| := \sup \left\{ \left\| T_x((\varphi_j)_{j=1}^\infty) \right\|_1 ; (\varphi_j)_{j=1}^\infty \in B_{\ell_{\mathcal{B}, p^*}(X')} \right\}$$

2.1. Sequências Cohen $(\mathcal{B}, p)$ -somáveis

$$= \sup \left\{ \left\| (\varphi_j(x_j))_{j=1}^\infty \right\|_1 ; (\varphi_j)_{j=1}^\infty \in B_{\ell_{\mathcal{B}, p^*}(X')} \right\},$$

o que mostra a boa definição da aplicação $\| \cdot \|_{\langle \mathcal{B}, p \rangle}$.

As propriedades de norma para $\| \cdot \|_{\langle \mathcal{B}, p \rangle}$ decorrem diretamente da bilinearidade e da admissibilidade da aplicação $\mathcal{B}$. ■

Observação 2.1.7 Em decorrência das duas últimas proposições, concluímos que o espaço das sequências Cohen $(\mathcal{B}; p)$ -somáveis pode também ser denotado por

$$\ell_{\mathcal{B}, p}\langle X \rangle := \left\{ (x_j)_{j=1}^\infty \in X^\mathbb{N}; (x_j^*(x_j))_{j=1}^\infty \in \ell_1; \forall (x_j^*)_{j=1}^\infty \in \ell_{\mathcal{B}, p^*}(X') \right\},$$

e que $\ell_{\mathcal{B}, p}\langle X \rangle$ é um espaço vetorial normado, cuja norma de seus elementos é qualquer um dos supremos dados por (2.1). Assim, podemos escrever

$$\begin{aligned} \|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{\langle \mathcal{B}, p \rangle} &:= \sup \left\{ \left\| \sum_{j=1}^\infty x_j^*(x_j) \right\| ; (x_j^*)_{j=1}^\infty \in B_{\ell_{\mathcal{B}, p^*}(X')} \right\} \\ &= \sup \left\{ \sum_{j=1}^\infty |x_j^*(x_j)| ; (x_j^*)_{j=1}^\infty \in B_{\ell_{\mathcal{B}, p^*}(X')} \right\} \\ &= \sup \left\{ \left\| (x_j^*(x_j))_{j=1}^\infty \right\|_1 ; (x_j^*)_{j=1}^\infty \in B_{\ell_{\mathcal{B}, p^*}(X')} \right\}. \end{aligned}$$

Observando a norma acima, fica claro que, para todo $1 < p < \infty$, o espaço $c_{00}(X)$ é subespaço de $\ell_{\mathcal{B}, p}\langle X \rangle$ e uma consequência disso associado à definição da norma é que uma sequência $(x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_{\mathcal{B}, p}\langle X \rangle$ se, e somente se,

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} \|(x_j)_{j=1}^k\|_{\langle \mathcal{B}, p \rangle} < \infty$$

e, neste caso, tem-se

$$\|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{\langle \mathcal{B}, p \rangle} = \sup_{k \in \mathbb{N}} \|(x_j)_{j=1}^k\|_{\langle \mathcal{B}, p \rangle}.$$

Mais um fato digno de nota é que o espaço $\ell_{\mathcal{B}, p}\langle X \rangle$ goza de mesma propriedade de imersão de $\ell_{B, p}(X)$, dada em (1.2), isto é, se $1 < p \leq q \leq \infty$, então

$$\ell_{\mathcal{B}, p}\langle X \rangle \xhookrightarrow{1} \ell_{\mathcal{B}, q}\langle X \rangle. \quad (2.2)$$

De fato, como $1 < p \leq q \leq \infty$, então $1 \leq q^* \leq p^* < \infty$, e da imersão (1.2), temos $\ell_{\mathcal{B}, q^*}(X') \xhookrightarrow{1} \ell_{\mathcal{B}, p^*}(X')$ e com isso

$$\begin{aligned} \|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{\langle \mathcal{B}, q \rangle} &= \sup \left\{ \left\| (x_j^*(x_j))_{j=1}^\infty \right\|_1 ; (x_j^*)_{j=1}^\infty \in B_{\ell_{\mathcal{B}, q^*}(X')} \right\} \\ &\leq \sup \left\{ \left\| (x_j^*(x_j))_{j=1}^\infty \right\|_1 ; (x_j^*)_{j=1}^\infty \in B_{\ell_{\mathcal{B}, p^*}(X')} \right\} \\ &= \|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{\langle \mathcal{B}, p \rangle}, \end{aligned}$$

o que prova (2.2).

2.1. Sequências Cohen $(\mathcal{B}, p)$ -somáveis

Para mostrarmos a completude do espaço $\ell_{\mathcal{B},p}\langle X \rangle$, necessitaremos de alguns resultados.

Proposição 2.1.8 *Para $1 < p < \infty$, o espaço de sequências $\ell_{\mathcal{B},p}\langle X \rangle$ encontra-se entre os espaços de sequências completos $\ell_p\langle X \rangle$ e $\ell_p(X)$ de forma contínua. Em outras palavras, a seguinte cadeia é sempre válida:*

$$\ell_p\langle X \rangle \xhookrightarrow{K} \ell_{\mathcal{B},p}\langle X \rangle \xhookrightarrow{\|\mathcal{B}\|} \ell_p(X),$$

em que K é uma constante de imersão de $\ell_{\mathcal{B},p^*}(X')$ em $\ell_{p^*}^w(X')$.

Demonstração: Como, pela definição de $\ell_{\mathcal{B},p}\langle X \rangle$, X' é $\mathcal{B}$ -normado, temos

$$\ell_{p^*}(X') \xhookrightarrow{\|\mathcal{B}\|} \ell_{\mathcal{B},p^*}(X') \xhookrightarrow{K} \ell_{p^*}^w(X')$$

e estas imersões nos garantem que:

- (a) se $(x_j^*)_{j=1}^\infty \in B_{\ell_{\mathcal{B},p^*}(X')}$, então $\left(\frac{x_j^*}{K}\right)_{j=1}^\infty \in B_{\ell_{p^*}^w(X')}$ e
- (b) se $(x_j^*)_{j=1}^\infty \in B_{\ell_{p^*}(X')}$, então $\left(\frac{x_j^*}{\|\mathcal{B}\|}\right)_{j=1}^\infty \in B_{\ell_{\mathcal{B},p^*}(X')}$.

Seja $(x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_p\langle X \rangle$. Então

$$\begin{aligned} \|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{\langle \mathcal{B}, p \rangle} &= \sup \left\{ \sum_{j=1}^\infty |x_j^*(x_j)| ; (x_j^*)_{j=1}^\infty \in B_{\ell_{\mathcal{B},p^*}(X')} \right\} \\ &= K \sup \left\{ \left| \sum_{j=1}^\infty \frac{x_j^*}{K}(x_j) \right| ; (x_j^*)_{j=1}^\infty \in B_{\ell_{\mathcal{B},p^*}(X')} \right\} \\ &\stackrel{(a)}{=} K \sup \left\{ \left| \sum_{j=1}^\infty \frac{x_j^*}{K}(x_j) \right| ; \left(\frac{x_j^*}{K}\right)_{j=1}^\infty \in B_{\ell_{p^*}^w(X')} \right\} \\ &\leq K \sup \left\{ \sum_{j=1}^\infty |\varphi_j(x_j)| ; (\varphi_j)_{j=1}^\infty \in B_{\ell_{p^*}^w(X')} \right\} \\ &= K \left\| (x_j)_{j=1}^\infty \right\|_{C,p}, \end{aligned}$$

o que prova a segunda imersão do enunciado. Para mostrarmos a primeira, recordemos que se $\varphi \in (\ell_p(X))'$, então φ é caracterizado por uma sequência $(x_j^*)_{j=1}^\infty \in \ell_{p^*}(X')$, ou seja, para $(x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_p(X)$,

$$\varphi((x_j)_{j=1}^\infty) = \sum_{j=1}^\infty x_j^*(x_j). \quad (2.3)$$

2.1. Sequências Cohen $(\mathcal{B}, p)$ -somáveis

Seja $(x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_{\mathcal{B},p}\langle X \rangle$. Pelo Teorema de Hahn-Banach, temos

$$\begin{aligned}
\|(x_j)_{j=1}^\infty\|_p &= \sup \left\{ \left| \varphi \left((x_j)_{j=1}^\infty \right) \right| ; \varphi \in B_{(\ell_p(X))'} \right\} \\
&\stackrel{(2.3)}{=} \sup \left\{ \left| \sum_{j=1}^\infty x_j^*(x_j) \right| ; (x_j^*)_{j=1}^\infty \in B_{\ell_{p^*}(X')} \right\} \\
&\stackrel{(2.1)}{=} \sup \left\{ \sum_{j=1}^\infty |x_j^*(x_j)| ; (x_j^*)_{j=1}^\infty \in B_{\ell_{p^*}(X')} \right\} \\
&= \|\mathcal{B}\| \sup \left\{ \sum_{j=1}^\infty \left| \frac{x_j^*}{\|\mathcal{B}\|}(x_j) \right| ; (x_j^*)_{j=1}^\infty \in B_{\ell_{p^*}(X')} \right\} \\
&\stackrel{(b)}{=} \|\mathcal{B}\| \sup \left\{ \sum_{j=1}^\infty \left| \frac{x_j^*}{\|\mathcal{B}\|}(x_j) \right| ; \left(\frac{x_j^*}{\|\mathcal{B}\|} \right)_{j=1}^\infty \in B_{\ell_{\mathcal{B},p^*}(X')} \right\} \\
&\leq \|\mathcal{B}\| \sup \left\{ \sum_{j=1}^\infty |\varphi_j(x_j)| ; (\varphi_j)_{j=1}^\infty \in B_{\ell_{\mathcal{B},p^*}(X')} \right\} \\
&= \|\mathcal{B}\| \left\| (x_j)_{j=1}^\infty \right\|_{\langle \mathcal{B}, p \rangle}
\end{aligned}$$

donde se conclui o resultado. ■

O corolário seguinte apresenta casos de coincidências dos espaços estudados.

Corolário 2.1.9 *Para $1 < p < \infty$, obtemos os seguintes casos de coincidências:*

(i) *Se $\dim(X') < +\infty$, então*

$$\ell_p\langle X \rangle = \ell_{\mathcal{B},p}\langle X \rangle = \ell_p(X).$$

(ii) *Considerando as aplicações $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ definidas a seguir:*

$$\begin{array}{llll}
\mathcal{B}_1 : X' \times \mathbb{K} & \longrightarrow & X' & \text{e} \quad \mathcal{B}_2 : X' \times X'' \longrightarrow \mathbb{K} \\
(x^*, \lambda) & \longmapsto & \lambda x^* & \quad (x^*, \varphi) \longmapsto \varphi(x^*)
\end{array}$$

temos:

$$\ell_{\mathcal{B}_1,p}\langle X \rangle \stackrel{1}{=} \ell_p(X) \quad \text{e} \quad \ell_{\mathcal{B}_2,p}\langle X \rangle \stackrel{1}{=} \ell_p\langle X \rangle.$$

Demonstração: A prova de (i) decorre diretamente da proposição anterior associada ao item (ii) da Proposição 2.1.2.

Provemos o item (ii). No Exemplo 1.1.7 vimos que

$$\ell_{\mathcal{B}_1,p^*}(X') \stackrel{1}{=} \ell_{p^*}(X').$$

Então, pela definição de $\ell_{\mathcal{B}_1,p}\langle X \rangle$ e pela caracterização do dual de $\ell_p(X)$, temos

$$\ell_{\mathcal{B}_1,p}\langle X \rangle := \left\{ (x_j)_{j=1}^\infty \in X^{\mathbb{N}} ; (x_j^*(x_j))_{j=1}^\infty \in \ell_1 ; \forall (x_j^*)_{j=1}^\infty \in \ell_{\mathcal{B}_1,p^*}(X') \right\}$$

2.1. Sequências Cohen $(\mathcal{B}, p)$ -somáveis

$$\begin{aligned}
&= \left\{ (x_j)_{j=1}^\infty \in X^{\mathbb{N}}; (x_j^*(x_j))_{j=1}^\infty \in \ell_1; \forall (x_j^*)_{j=1}^\infty \in \ell_{p^*}(X') \right\} \\
&= \ell_p(X)
\end{aligned}$$

e além disso, por Hahn-Banach, segue que

$$\begin{aligned}
\|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{\langle \mathcal{B}_1, p \rangle} &:= \sup \left\{ \sum_{j=1}^\infty |x_j^*(x_j)|; (x_j^*)_{j=1}^\infty \in B_{\ell_{\mathcal{B}_1, p^*}(X')} \right\} \\
&= \sup \left\{ \sum_{j=1}^\infty |x_j^*(x_j)|; (x_j^*)_{j=1}^\infty \in B_{\ell_{p^*}(X')} \right\} \\
&= \|(x_j)_{j=1}^\infty\|_p.
\end{aligned}$$

Ainda do mesmo exemplo citado, tem-se

$$\ell_{\mathcal{B}_2, p^*}(X') \stackrel{1}{=} \ell_{p^*}^w(X')$$

e de modo análogo ao caso anterior, temos

$$\begin{aligned}
\ell_{\mathcal{B}_2, p}\langle X \rangle &= \left\{ (x_j)_{j=1}^\infty \in X^{\mathbb{N}}; (x_j^*(x_j))_{j=1}^\infty \in \ell_1; \forall (x_j^*)_{j=1}^\infty \in \ell_{\mathcal{B}_2, p^*}(X') \right\} \\
&= \left\{ (x_j)_{j=1}^\infty \in X^{\mathbb{N}}; (x_j^*(x_j))_{j=1}^\infty \in \ell_1; \forall (x_j^*)_{j=1}^\infty \in \ell_{p^*}^w(X') \right\} \\
&= \ell_p\langle X \rangle
\end{aligned}$$

e ainda

$$\begin{aligned}
\|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{\langle \mathcal{B}_2, p \rangle} &= \sup \left\{ \sum_{j=1}^\infty |x_j^*(x_j)|; (x_j^*)_{j=1}^\infty \in B_{\ell_{\mathcal{B}_2, p^*}(X')} \right\} \\
&= \sup \left\{ \sum_{j=1}^\infty |x_j^*(x_j)|; (x_j^*)_{j=1}^\infty \in B_{\ell_{p^*}^w(X')} \right\} \\
&= \|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{C, p^*}. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Veremos a seguir que, diferentemente do caso do espaço de sequências (B, p) -somantes, o espaço $(\ell_{\mathcal{B}, p}\langle X \rangle, \|\cdot\|_{\langle \mathcal{B}, p \rangle})$ é sempre completo quando o espaço X é Banach. Necessitamos antes de um resultado clássico de Análise Funcional, um de Análise Real, envolvendo séries duplas, e de um lema técnico.

Proposição 2.1.10 *Um espaço normado X é completo se, e somente se, toda série absolutamente convergente em X é convergente.*

Demonstração: Ver [3, Proposição 10.1.4.] ■

2.1. Sequências Cohen $(\mathcal{B}, p)$ -somáveis

Proposição 2.1.11 *Dada uma sequência dupla de números reais $((a_{jk})_{k=1}^\infty)_{j=1}^\infty$, suponhamos que para cada $j \in \mathbb{N}$ fixo, a série $\sum_{k=1}^\infty |a_{jk}| = b_j$ e também que a série $\sum_{j=1}^\infty b_j$ converge. Então*

$$\sum_{j=1}^\infty \sum_{k=1}^\infty a_{jk} = \sum_{k=1}^\infty \sum_{j=1}^\infty a_{jk}.$$

Demonstração: Ver [15, Teorema 8, p. 384] ■

Lema 2.1.12 *Seja X um espaço de Banach. Suponha que a sequência $(x^{(k)})_{k=1}^\infty$ seja absolutamente somável em $\ell_{\mathcal{B},p}\langle X \rangle$, isto é,*

$$\sum_{k=1}^\infty \|x^{(k)}\|_{\langle \mathcal{B}, p \rangle} < \infty, \quad (2.4)$$

em que, para cada $k \in \mathbb{N}$, $x^{(k)} = (x_j^{(k)})_{j=1}^\infty$. Então:

(i) Para cada $j \in \mathbb{N}$ fixo, a série

$$\sum_{k=1}^\infty x_j^{(k)} \text{ converge em } X. \quad (2.5)$$

(ii) A série dupla $\sum_{j=1}^\infty \sum_{k=1}^\infty |x_j^*(x_j^{(k)})|$ converge e

$$\sum_{j=1}^\infty \sum_{k=1}^\infty |x_j^*(x_j^{(k)})| = \sum_{k=1}^\infty \sum_{j=1}^\infty |x_j^*(x_j^{(k)})|, \quad \forall (x_j^*)_{j=1}^\infty \in \ell_{\mathcal{B},p^*}(X'). \quad (2.6)$$

Demonstração: (i) Para cada $j, k \in \mathbb{N}$ fixos, segue da Proposição 2.1.8 que $\|x_j^{(k)}\|_X \leq \|x^{(k)}\|_p \leq \|\mathcal{B}\| \|x^{(k)}\|_{\langle \mathcal{B}, p \rangle}$, e assim $\|x_j^{(k)}\|_X \leq \|\mathcal{B}\| \|x^{(k)}\|_{\langle \mathcal{B}, p \rangle}$. Então,

$$\sum_{k=1}^\infty \|x_j^{(k)}\|_X \leq \|\mathcal{B}\| \sum_{k=1}^\infty \|x^{(k)}\|_{\langle \mathcal{B}, p \rangle} \stackrel{(2.4)}{<} \infty \quad (2.7)$$

donde a sequência $(x_j^{(k)})_{k=1}^\infty$ é absolutamente somável no espaço de Banach X . Pela Proposição 2.1.10, a sequência $(x_j^{(k)})_{k=1}^\infty$ é somável em X .

(ii) Como, para cada $k \in \mathbb{N}$ fixo, $(x_j^{(k)})_{j=1}^\infty \in \ell_{\mathcal{B},p}\langle X \rangle$, então

$$\sum_{j=1}^\infty |x_j^*(x_j^{(k)})| < \infty, \quad \forall (x_j^*)_{j=1}^\infty \in \ell_{\mathcal{B},p^*}(X')$$

2.1. Sequências Cohen $(\mathcal{B}, p)$ -somáveis

e além disso

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \left| x_j^* (x_j^{(k)}) \right| &= \left\| (x_j^*)_{j=1}^{\infty} \right\|_{\mathcal{B}, p^*} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \left| \frac{x_j^*}{\left\| (x_j^*)_{j=1}^{\infty} \right\|_{\mathcal{B}, p^*}} \left(x_j^{(k)} \right) \right| \\
&\leq \left\| (x_j^*)_{j=1}^{\infty} \right\|_{\mathcal{B}, p^*} \sum_{k=1}^{\infty} \sup \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \left| \varphi_j \left(x_j^{(k)} \right) \right| ; (\varphi_j)_{j=1}^{\infty} \in B_{\ell_{\mathcal{B}, p^*}(X')} \right\} \\
&= \left\| (x_j^*)_{j=1}^{\infty} \right\|_{\mathcal{B}, p^*} \sum_{k=1}^{\infty} \left\| x^{(k)} \right\|_{\langle \mathcal{B}, p \rangle} \stackrel{(2.4)}{<} \infty.
\end{aligned}$$

Logo, pela Proposição 2.1.11, segue o resultado. ■

Proposição 2.1.13 *O espaço $(\ell_{\mathcal{B}, p}\langle X \rangle, \|\cdot\|_{\langle \mathcal{B}, p \rangle})$ é Banach se X é Banach.*

Demonstração: Para cada $k \in \mathbb{N}$, consideremos $x^{(k)} = (x_j^{(k)})_{j=1}^{\infty}$. Suponhamos que a $(x^{(k)})_{k=1}^{\infty}$ seja absolutamente somável em $\ell_{\mathcal{B}, p}\langle X \rangle$. Provemos que a série

$$\sum_{k=1}^{\infty} x^{(k)}$$

converge em $\ell_{\mathcal{B}, p}\langle X \rangle$.

Para cada $j \in \mathbb{N}$ fixo, consideremos $u = (u_j)_{j=1}^{\infty}$, em que

$$u_j = \sum_{k=1}^{\infty} x_j^{(k)}.$$

Por (2.5), u_j está bem definido. Provemos agora que

$$u = (u_j)_{j=1}^{\infty} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} x_j^{(k)} \right)_{j=1}^{\infty} \in \ell_{\mathcal{B}, p}\langle X \rangle.$$

De fato, para todo $(x_j^*)_{j=1}^{\infty} \in \ell_{\mathcal{B}, p^*}(X')$, temos

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{\infty} \left| x_j^* (u_j) \right| &= \sum_{j=1}^{\infty} \left| x_j^* \left(\sum_{k=1}^{\infty} x_j^{(k)} \right) \right| \\
&\stackrel{(2.5)}{=} \sum_{j=1}^{\infty} \left| \sum_{k=1}^{\infty} x_j^* \left(x_j^{(k)} \right) \right| \\
&\leq \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left| x_j^* \left(x_j^{(k)} \right) \right| \stackrel{(2.6)}{<} \infty.
\end{aligned}$$

Além disso, $\left(\sum_{k=1}^n x_j^{(k)} \right)_{j=1}^{\infty} \xrightarrow{n} u$ em $\ell_{\mathcal{B}, p}\langle X \rangle$, pois, para cada $n \in \mathbb{N}$, tem-se

$$\left\| u - \left(\sum_{k=1}^n x_j^{(k)} \right)_{j=1}^{\infty} \right\|_{\langle \mathcal{B}, p \rangle} = \left\| \left(\sum_{k=1}^{\infty} x_j^{(k)} - \sum_{k=1}^n x_j^{(k)} \right)_{j=1}^{\infty} \right\|_{\langle \mathcal{B}, p \rangle}$$

$$\begin{aligned}
&= \left\| \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} x_j^{(k)} \right)_{j=1}^{\infty} \right\|_{\langle \mathcal{B}, p \rangle} \\
&= \sup \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \left| x_j^* \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} x_j^{(k)} \right) \right| ; (x_j^*)_{j=1}^{\infty} \in B_{\ell_{\mathcal{B}, p^*}(X')} \right\} \\
&= \sup \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} x_j^* (x_j^{(k)}) \right| ; (x_j^*)_{j=1}^{\infty} \in B_{\ell_{\mathcal{B}, p^*}(X')} \right\} \\
&\leq \sup \left\{ \sum_{k=n+1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \left| x_j^* (x_j^{(k)}) \right| ; (x_j^*)_{j=1}^{\infty} \in B_{\ell_{\mathcal{B}, p^*}(X')} \right\} \\
&= \sum_{k=n+1}^{\infty} \sup \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \left| x_j^* (x_j^{(k)}) \right| ; (x_j^*)_{j=1}^{\infty} \in B_{\ell_{\mathcal{B}, p^*}(X')} \right\} \\
&= \sum_{k=n+1}^{\infty} \|x^{(k)}\|_{\langle \mathcal{B}, p \rangle}.
\end{aligned}$$

De (2.7), temos $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_j^{(k)}\|_{\langle \mathcal{B}, p \rangle} < \infty$. Tomando o limite em n na expressão acima, obtemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| u - \sum_{k=1}^n x^{(k)} \right\|_{\langle \mathcal{B}, p \rangle} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^{\infty} \|x_j^{(k)}\|_{\langle \mathcal{B}, p \rangle} = 0,$$

ou seja, a série $\sum_{k=1}^{\infty} x^{(k)}$ converge em $\ell_{\mathcal{B}, p}\langle X \rangle$. Invocando a Proposição 2.1.10, segue que $\ell_{\mathcal{B}, p}\langle X \rangle$ é Banach. ■

Para compreendermos melhor os resultados adiante, recorreremos ao trabalho [5] de G. Botelho e J. R. Campos, que introduz o conceito de classe de sequências e uma de suas importantes propriedades, a estabilidade linear. Enunciaremos, a seguir, alguns resultados deste trabalho.

Definição 2.1.14 [5, Definition 2.1] Uma *classe de sequências de valores vetoriais* S , ou simplesmente uma *classe de sequências* S , é uma regra que associa a cada espaço de Banach X um espaço de sequências a valores em X , $S(X)$, que satisfaz as seguintes condições:

- (i) $S(X)$ é completo;
- (ii) $c_{00}(X) \subseteq S(X)$;
- (iii) $S(X) \xhookrightarrow{1} \ell_{\infty}(X)$ e
- (iv) $\|e_j\|_{S(\mathbb{K})} = 1, \forall j \in \mathbb{N}$.

2.1. Sequências Cohen $(\mathcal{B}, p)$ -somáveis

Uma classe de sequência S é dita *finitamente determinada* se, para toda sequência $(x_j)_{j=1}^\infty \in X^\mathbb{N}$, tem-se $(x_j)_{j=1}^\infty \in S(X)$ se, e somente se, $\sup_{k \in \mathbb{N}} \|(x_j)_{j=1}^k\|_{S(X)} < \infty$ e, neste caso,

$$\|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{S(X)} = \sup_{k \in \mathbb{N}} \|(x_j)_{j=1}^k\|_{S(X)}. \quad (2.8)$$

Não é difícil mostrar que $c_0(\cdot)$, $\ell_p(\cdot)$, $\ell_p^w(\cdot)$ e $\ell_\infty(\cdot)$ são classes de sequências finitamente determinadas (veja [5]).

No contexto dos espaços (B, p) -somáveis, a regra $\ell_{B,p}(\cdot)$ não faz sentido: a aplicação B é dada *a priori* e com ela o espaço X , o que impede a variação nos espaços, em que nascem as sequências, indicados nos casos anteriores pela notação $(\cdot)$. Além disso, o fato do espaço X ser Banach não garante que $\ell_{B,p}(X)$ seja completo (Teorema 1.1.14). Isto é, não faz sentido falar na “classe de sequências $\ell_{B,p}(\cdot)$ ”.

Veremos mesmo assim que quando X é B -normado podemos ainda fazer uso parcial da teoria de classes de sequências, uma vez que algumas das propriedades dessas classes (entre outras, o fato de ser finitamente determinada), são obtidas a partir do espaço de sequências imagem associada um espaço de Banach pela classe. Este fato é algo interessante para a construção da teoria de operadores que envolvem sequências (B, p) -somáveis. Relembremos algumas propriedades já provadas anteriormente:

Observação 2.1.15 Sejam $1 \leq p < \infty$ e $B : X \times Y \longrightarrow Z$ uma aplicação bilinear, sendo X um espaço B -normado. Então, são satisfeitas as seguintes propriedades:

- (i) $\ell_{B,p}(X)$ é Banach.
- (ii) $c_{00}(X) \subseteq \ell_{B,p}(X)$.
- (iii) $\ell_{B,p}(X) \xrightarrow{K} \ell_\infty(X)$.
- (iv) $\|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{B,p} = \sup_{k \in \mathbb{N}} \|(x_j)_{j=1}^k\|_{B,p}$.

Para o item (ii) não é necessária a exigência do espaço X ser B -normado.

Propriedades análogas, algumas já provadas anteriormente, valem para o espaço das sequências Cohen $(\mathcal{B}, p)$ -somáveis. Vamos a elas:

Observação 2.1.16 Seja $\mathcal{B} : X' \times Y \longrightarrow Z$ uma aplicação bilinear, limitada e admissível com X' sendo $\mathcal{B}$ -normado. Então, as seguintes propriedades são satisfeitas:

- (i) $\ell_{\mathcal{B},p}(X)$ é Banach.

2.1. Sequências Cohen $(\mathcal{B}, p)$ -somáveis

$$(ii) \quad c_{00}(X) \subseteq \ell_{\mathcal{B},p}\langle X \rangle.$$

$$(iii) \quad \ell_{\mathcal{B},p}\langle X \rangle \xrightarrow{\|\mathcal{B}\|} \ell_{\infty}(X).$$

$$(iv) \quad \|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{\langle \mathcal{B},p \rangle} = \sup_{k \in \mathbb{N}} \|(x_j)_{j=1}^k\|_{\langle \mathcal{B},p \rangle}.$$

Notemos que, nas condições dadas pelas observações anteriores, os itens (iv) de cada uma delas caracterizam os respectivos espaços, $\ell_{B,p}(X)$ e $\ell_{\mathcal{B},p}\langle X \rangle$, como “finitamente determinados”.

O trabalho [5], de Botelho e Campos, traz um estudo conciso sobre operadores multilineares caracterizados por classes de sequências. A definição a seguir trata da versão linear do conceito geral dado neste estudo.

Definição 2.1.17 [5, Definition 3.1] Sejam S e V classes de sequências. Um operador $T \in \mathcal{L}(X; Y)$ é dito $(S; V)$ -somante, se $(T(x_j))_{j=1}^{\infty} \in V(Y)$ sempre que $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in S(X)$. Neste caso, escrevemos $T \in \mathcal{L}_{S;V}(X; Y)$ e sua norma, neste espaço, denotada por $\|T\|_{S;V}$, é definida por

$$\|T\|_{S;V} := \|\widehat{T}\|_{\mathcal{L}(S(X); V(Y))} = \|\widehat{T}\|,$$

em que $\widehat{T}$ é o operador linear induzido

$$\begin{aligned} \widehat{T}: \quad S(X) &\longrightarrow V(Y) \\ (x_j)_{j=1}^{\infty} &\longmapsto (T(x_j))_{j=1}^{\infty}. \end{aligned}$$

Definição 2.1.18 [5, Definition 3.2] Uma classe de sequência S é dita *linearmente estável* se $\mathcal{L}_{S;S}(X; Y) \stackrel{1}{=} \mathcal{L}(X; Y)$, para quaisquer espaços de Banach X e Y , ou equivalentemente, para todo $T \in \mathcal{L}(X; Y)$ o operador induzido

$$\begin{aligned} \widehat{T}: \quad S(X) &\longrightarrow S(Y) \\ (x_j)_{j=1}^{\infty} &\longmapsto (T(x_j))_{j=1}^{\infty} \end{aligned}$$

está bem definido e $\|\widehat{T}\| = \|T\|$.

É fato bem conhecido que as classes de sequências $\ell_p(\cdot)$ e $\ell_p^w(\cdot)$ são linearmente estáveis. A estabilidade linear de $\ell_p^{\text{mid}}(\cdot)$ foi provada em [4, Proposition 1.10].

Dada $B : X \times Y \longrightarrow Z$ uma aplicação bilinear, limitada e admissível, pretendemos estabelecer condições de modo que $\ell_{B,p}(X)$ tenha uma determinada estabilidade linear.

No contexto (B, p) -somável, esse tipo de conceito requer uma adaptação da definição original, uma vez que nesse caso, as aplicações bilineares e seus domínios estão

2.1. Sequências Cohen $(\mathcal{B}, p)$ -somáveis

pré-definidos enquanto, por exemplo, nas classes $\ell_p(\cdot)$, $\ell_p^w(\cdot)$ e $\ell_p^{\text{mid}}(\cdot)$ este conceito independe do espaço da qual a sequência será tomada. Sendo assim, uma definição de estabilidade linear em nosso contexto só fará sentido quando definida nos pares de bilineares (B_1, B_2) com entradas definidas nos espaços X e U (ou em seus subespaços). Vejamos como isso pode ser feito.

Definição 2.1.19 Sejam $B_1 : X \times Y \longrightarrow Z$ e $B_2 : U \times V \longrightarrow W$ aplicações bilineares, limitadas e admissíveis. Dizemos que o par $(B_1; B_2)$ é *linearmente estável* se quaisquer que sejam os subespaços fechados $X_1 \subseteq X$ e $U_1 \subseteq U$ e os operadores $T_1 \in \mathcal{L}(X_1; U)$ e $T_2 \in \mathcal{L}(U_1; X)$, as desigualdades

$$\left\| (T_1(x_j))_{j=1}^\infty \right\|_{B_2, p} \leq \|T_1\| \left\| (x_j)_{j=1}^\infty \right\|_{B_1, p} \quad \text{e} \quad \left\| (T_2(u_j))_{j=1}^\infty \right\|_{B_1, p} \leq \|T_2\| \left\| (u_j)_{j=1}^\infty \right\|_{B_2, p}$$

são satisfeitas, quaisquer que sejam $(x_j)_{j=1}^\infty \subseteq X_1$ e $(u_j)_{j=1}^\infty \subseteq U_1$.

Observação 2.1.20 Um fato que nos será útil mais adiante: se $U = X''$ e J_X é a injeção canônica de X em X'' , temos

$$(x_j)_{j=1}^\infty \in B_{\ell_{B_1, p}(X)} \Rightarrow (J_X(x_j))_{j=1}^\infty \in B_{\ell_{B_2, p}(X'')}, \quad (2.9)$$

para o caso em que o par $(B_1; B_2)$ seja linearmente estável.

Os seguintes exemplos nos fornecem casos que satisfazem a definição anterior.

Exemplo 2.1.21 Sabemos que os espaços de sequências $\ell_p(X)$, $\ell_p^w(X)$ e $\ell_p^{\text{mid}}(X)$ são linearmente estáveis qualquer que seja o espaço de Banach X . Além disso, eles são também espaços de sequências (B, p) -somáveis. Assim, todos esses espaços de sequências satisfazem a definição anterior quando encarados em nosso contexto. Mostraremos que, de fato, isso ocorre através do exemplo do $\ell_p^{\text{mid}}(X)$. Para os demais, a prova é análoga.

Consideremos as seguintes aplicações

$$\begin{array}{llll} B_1 : X \times \ell_p^w(X') & \longrightarrow & \ell_p & e \quad B_2 : U \times \ell_p^w(U') \longrightarrow \ell_p \\ (x, (x_j^*)_{j=1}^\infty) & \longmapsto & (x_j^*(x))_{j=1}^\infty & (u, (u_j^*)_{j=1}^\infty) \longmapsto (u_j^*(u))_{j=1}^\infty. \end{array}$$

Do Exemplo 1.1.9, sabemos que

$$\ell_{B_1, p}(X) \stackrel{1}{=} \ell_p^{\text{mid}}(X) \quad e \quad \ell_{B_2, p}(U) \stackrel{1}{=} \ell_p^{\text{mid}}(U).$$

Além disso, quaisquer que sejam os subespaços fechados $X_1 \subseteq X$ e $U_1 \subseteq U$ e os operadores $T_1 \in \mathcal{L}(X_1; U)$ e $T_2 \in \mathcal{L}(U_1; X)$, as seguintes desigualdades são satisfeitas:

$$\left\| (T_1(x_j))_{j=1}^\infty \right\|_{\text{mid}, p} = \left\| (T_1(x_j))_{j=1}^\infty \right\|_{B_2, p} \leq \|T_1\| \left\| (x_j)_{j=1}^\infty \right\|_{B_1, p} = \|T_1\| \left\| (x_j)_{j=1}^\infty \right\|_{\text{mid}, p} \quad e$$

2.1. Sequências Cohen $(\mathcal{B}, p)$ -somáveis

$$\left\| (T_2(u_j))_{j=1}^\infty \right\|_{\text{mid},p} = \left\| (T_2(u_j))_{j=1}^\infty \right\|_{B_{1,p}} \leq \|T_2\| \left\| (u_j)_{j=1}^\infty \right\|_{B_{2,p}} = \|T_2\| \left\| (u_j)_{j=1}^\infty \right\|_{\text{mid},p},$$

quaisquer que sejam $(x_j)_{j=1}^\infty \subseteq X_1$ e $(u_j)_{j=1}^\infty \subseteq U_1$.

O exemplo seguinte nos fornece uma família composta de pares de aplicações bilineares linearmente estáveis.

Exemplo 2.1.22 Seja $S(\cdot)$ uma classe de sequências linearmente estável e suponhamos que $S(\cdot) \xrightarrow{1} c_0(\cdot)$. Consideremos X espaço de Banach e que, para todo subespaço fechado X_1 de X , S tenha a propriedade:

$$\text{se } (x_j^*)_{j=1}^\infty \in S(X'_1), \text{ então } (\tilde{x}_j^*)_{j=1}^\infty \in S(X') \text{ e } \left\| (\tilde{x}_j^*)_{j=1}^\infty \right\|_{S(X')} \leq \left\| (x_j^*)_{j=1}^\infty \right\|_{S(X'_1)},$$

para toda $\tilde{x}_j^*$ extensão de Hahn-Banach dos x_j^* a X , $j \in \mathbb{N}$ (as classes de sequências $\ell_p(\cdot)$ e $\ell_p^w(\cdot)$, por exemplo, satisfazem todas estas propriedades). Consideremos ainda as aplicações dadas por:

$$\begin{aligned} B_1 : X \times S(X') &\longrightarrow c_0 & e & & B_2 : U \times S(U') &\longrightarrow c_0 \\ (x, (x_j^*)_{j=1}^\infty) &\longmapsto (x_j^*(x))_{j=1}^\infty & & & (u, (u_j^*)_{j=1}^\infty) &\longmapsto (u_j^*(u))_{j=1}^\infty. \end{aligned}$$

Nestas condições, para todo $1 \leq p < \infty$, o par (B_1, B_2) é linearmente estável.

Mostraremos a princípio que tais aplicações satisfazem as condições exigidas da Definição 1.1.1. Faremos apenas para a aplicação B_1 , já que para B_2 a verificação é análoga.

A boa definição da aplicação B_1 assim com a de sua limitação, decorrem do fato de $S(\cdot) \xrightarrow{1} c_0(\cdot)$, pois

$$\begin{aligned} \left\| (x_j^*(x))_{j=1}^\infty \right\|_\infty &:= \sup_{j \in \mathbb{N}} |x_j^*(x)| \\ &\leq \sup_{j \in \mathbb{N}} \|x_j^*\|_{X'} \|x\|_X \\ &= \|(x_j^*)_{j=1}^\infty\|_\infty \|x\|_X \\ &\leq \|(x_j^*)_{j=1}^\infty\|_{S(X')} \|x\|_X. \end{aligned}$$

A bilinearidade de B_1 é imediata, restando-nos provar sua admissibilidade. Consideremos $\varphi \in X'$ um elemento arbitrário. Sendo $k \in \mathbb{N}$, temos $(\delta_{1k}\varphi)_{j=1}^\infty \in S(X')$, já que por hipótese $c_{00}(X') \subset S(X')$. Assim, supondo que $B_1(x, (x_j^*)_{j=1}^\infty) = 0$; $\forall (x_j^*)_{j=1}^\infty \in S(X')$, tem-se $B_1(x, (\delta_{1k}\varphi)_{j=1}^\infty) = 0$ qualquer que seja $\varphi \in X'$. Logo

$$0 = B_1(x, (\delta_{1k}\varphi)_{j=1}^\infty) = (\delta_{1k}\varphi(x))_{j=1}^\infty = \varphi(x), \quad \forall \varphi \in X',$$

2.1. Sequências Cohen $(\mathcal{B}, p)$ -somáveis

ou seja, $x = 0$. Portanto B_1 é admissível. Isso prova que as aplicações B_1 e B_2 satisfazem as propriedades da Definição 1.1.1.

Sejam X_1 subespaço fechado de X , $T_1 \in \mathcal{L}(X_1; U)$ e $(u_k^*)_{k=1}^\infty \in S(U')$, então $(\widetilde{u_k^* \circ T_1})_{k=1}^\infty \in S(X')$. De fato, usando as propriedades citadas da classe de sequências $S(\cdot)$, temos

$$\begin{aligned} \left\| \left(\widetilde{u_k^* \circ T_1} \right)_{k=1}^\infty \right\|_{S(X')} &\leq \| (u_k^* \circ T_1)_{k=1}^\infty \|_{S(X'_1)} \\ &= \| (T_1^* (u_k^*))_{k=1}^\infty \|_{S(X'_1)} \\ &= \| \widehat{T_1}^* ((u_k^*)_{k=1}^\infty) \|_{S(X'_1)} \\ &\leq \| \widehat{T_1}^* \| \| (u_k^*)_{k=1}^\infty \|_{S(U')} \\ &\leq \| \widehat{T_1}^* \| \| (u_k^*)_{k=1}^\infty \|_{S(U')}, \\ &= \| T_1 \| \| (u_k^*)_{k=1}^\infty \|_{S(U')}, \end{aligned}$$

Ainda da desigualdade acima, para $T_1 \neq 0$ concluímos que

$$(u_k^*)_{k=1}^\infty \in B_{S(U')} \Rightarrow \left(\frac{\widetilde{u_k^* \circ T_1}}{\|T_1\|} \right)_{k=1}^\infty \in B_{S(X')}. \quad (2.10)$$

Agora consideremos $T_1 \in \mathcal{L}(X_1; U)$ e $(x_j)_{j=1}^\infty \subseteq X_1$. Então

$$\begin{aligned} \| (T_1(x_j))_{j=1}^\infty \|_{B_{2,p}} &= \sup \left\{ \left\| (B_2(T_1(x_j), (u_k^*)_{k=1}^\infty))_{j=1}^\infty \right\|_p ; u^* = (u_k^*)_{k=1}^\infty \in B_{S(U')} \right\} \\ &= \sup \left\{ \left\| ((u_k^*(T_1(x_j)))_{k=1}^\infty)_{j=1}^\infty \right\|_p ; u^* \in B_{S(U')} \right\} \\ &= \sup \left\{ \left(\sum_{j=1}^\infty \| (u_k^*(T_1(x_j)))_{k=1}^\infty \|_\infty^p \right)^{\frac{1}{p}} ; u^* \in B_{S(U')} \right\} \\ &= \sup \left\{ \left(\sum_{j=1}^\infty \| ((u_k^* \circ T_1)(x_j))_{k=1}^\infty \|_\infty^p \right)^{\frac{1}{p}} ; u^* \in B_{S(U')} \right\} \\ &= \|T_1\| \sup \left\{ \left(\sum_{j=1}^\infty \left\| \left(\frac{u_k^* \circ T_1}{\|T_1\|} (x_j) \right)_{k=1}^\infty \right\|_\infty^p \right)^{\frac{1}{p}} ; u^* \in B_{S(U')} \right\} \\ &= \|T_1\| \sup \left\{ \left(\sum_{j=1}^\infty \left\| \left(\frac{\widetilde{u_k^* \circ T_1}}{\|T_1\|} (x_j) \right)_{k=1}^\infty \right\|_\infty^p \right)^{\frac{1}{p}} ; u^* \in B_{S(U')} \right\} \\ &\stackrel{(3.6)}{\leq} \|T_1\| \sup \left\{ \left(\sum_{j=1}^\infty \| (x_k^*(x_j))_{k=1}^\infty \|_\infty^p \right)^{\frac{1}{p}} ; x^* = (x_k^*)_{k=1}^\infty \in B_{S(X')} \right\} \\ &= \|T_1\| \sup \left\{ \left\| (B_1(x_j, (x_k^*)_{k=1}^\infty))_{j=1}^\infty \right\|_p ; x^* \in B_{S(X')} \right\} \\ &= \|T_1\| \| (x_j)_{j=1}^\infty \|_{B_{1,p}}, \end{aligned}$$

2.1. Sequências Cohen $(\mathcal{B}, p)$ -somáveis

o que mostra que as exigências da Definição 2.1.19 são satisfeitas.

Considerando U_1 subespaço fechado de U e um operador $T_2 \in \mathcal{L}(U_1; X)$, de modo análogo, mostra-se que as condições da definição acima são satisfeitas e, portanto, o par (B_1, B_2) é linearmente estável.

Para demonstrarmos o principal resultado deste capítulo, precisaremos do seguinte teorema:

Teorema 2.1.23 (Princípio da Reflexividade Local Fraco) *Sejam V e U espaços normados, com $\dim V < \infty$, e $T \in \mathcal{L}(V, U'')$. Então para todo $\delta > 0$ e todo subespaço de dimensão finita N de U' , existe um operador $S \in \mathcal{L}(V, U)$ tal que*

- (a) $\|S\| \leq (1 + \delta)\|T\|$
- (b) $\varphi(S(v)) = T(v)(\varphi)$, $\forall v \in V$ e $\forall \varphi \in N$.

Demonstração: Ver [9, p. 74] ■

Observação 2.1.24 Espaços de sequências em X que, ao longo do texto, surgirem com o expoente n , representam X^n com a respectiva norma do espaço de sequência em questão. Exemplo:

$$\ell^n_p(X) = (X^n, \|\cdot\|_p), \text{ em que } \|(x_j)_{j=1}^n\|_p = \left(\sum_{j=1}^n \|x_j\|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Apresentados os resultados necessários, agora estamos em condições de enunciar e demonstrar um dos principais resultados do capítulo. Vamos mostrar uma relação de dualidade entre espaços $\ell_{B_1, p}(X)$ e $\ell_{B_2, p^*}\langle X' \rangle$ com as devidas hipóteses.

Aqui vamos nos restringir a estabelecer essa relação para os espaços $\ell_{B_1, p}^n(X)$ e $\ell_{B_2, p^*}^n\langle X' \rangle$, com $n \in \mathbb{N}$ arbitrário, isto é, espaços de sequências $(x_j)_{j=1}^\infty$ em que $x_j = 0$ para todo $j > n$. Apesar de parecer muito restritiva, essa relação de dualidade é muito útil em teoria de operadores, já que, em geral, existem caracterizações de classes de operadores por meio de desigualdades para uma quantidade finita de vetores e, nesses casos, esse tipo de relação se apresenta como ferramenta importante.

Teorema 2.1.25 *Sejam $B_1 : X \times Y \longrightarrow Z$ e $B_2 : X'' \times W \longrightarrow H$ aplicações tais que o par (B_1, B_2) seja linearmente estável. Suponha que X'' seja um espaço B_2 -normado. Então, os espaços de sequências $(\ell_{B_1, p}^n(X))'$ e $\ell_{B_2, p^*}^n\langle X' \rangle$ são isomorfos isometricamente através da aplicação*

$$\begin{aligned} \Omega : \quad \ell_{B_2, p^*}^n\langle X' \rangle &\longrightarrow (\ell_{B_1, p}^n(X))' \\ x^* = (x_j^*)_{j=1}^n &\longmapsto \Omega(x^*) : \quad \ell_{B_1, p}^n(X) \longrightarrow \mathbb{K} \\ (x_j)_{j=1}^n &\longmapsto \sum_{j=1}^n x_j^*(x_j), \end{aligned}$$

2.1. Sequências Cohen $(\mathcal{B}, p)$ -somáveis

qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração: Inicialmente, mostremos que a aplicação Ω está bem definida, isto é, dado $x^* = (x_j^*)_{j=1}^n \in \ell_{\mathcal{B}_2, p^*}^n \langle X' \rangle$, a aplicação $\Omega(x^*) \in (\ell_{B_1, p}^n(X))'$. É claro que $\Omega(x^*)$ está bem definida e é linear. Agora, seja $(x_j)_{j=1}^n \in \ell_{B_1, p}^n(X)$ não nulo (pois, caso contrário, o resultado seria imediato) e, para cada $j = 1, \dots, n$, considere-se $v_j = \frac{x_j}{\|(x_j)_{j=1}^n\|_{B_1, p}}$. Temos $(v_j)_{j=1}^\infty \in B_{\ell_{B_1, p}(X)}^n$ e pela Observação 2.1.20 tem-se $(J_X(v_j))_{j=1}^n \in B_{\ell_{\mathcal{B}_2, p}(X'')}^n$. Assim,

$$\begin{aligned}
 \left| \sum_{j=1}^n x_j^*(x_j) \right| &\leq \|(x_j)_{j=1}^n\|_{B_1, p} \sum_{j=1}^n \left| x_j^* \left(\frac{x_j}{\|(x_j)_{j=1}^n\|_{B_1, p}} \right) \right| \\
 &= \|(x_j)_{j=1}^n\|_{B_1, p} \sum_{j=1}^n |x_j^*(v_j)| \\
 &= \|(x_j)_{j=1}^n\|_{B_1, p} \sum_{j=1}^n |J_X(v_j)(x_j^*)| \\
 &\stackrel{(2.9)}{\leq} \|(x_j)_{j=1}^n\|_{B_1, p} \sup \left\{ \sum_{j=1}^n |\varphi_j(x_j^*)| ; (\varphi_j)_{j=1}^n \in B_{\ell_{\mathcal{B}_2, p}(X'')}^n \right\} \\
 &= \|(x_j)_{j=1}^n\|_{B_1, p} \|(x_j^*)_{j=1}^n\|_{\langle \mathcal{B}_2, p^* \rangle},
 \end{aligned}$$

qualquer que seja $(x_j)_{j=1}^n \in \ell_{B_1, p}^n(X)$. Isso mostra que $\|\Omega(x^*)\| \leq \|(x_j^*)_{j=1}^n\|_{\langle \mathcal{B}_2, p^* \rangle}$ e, com isso, $\Omega(x^*) = \Omega((x_j^*)_{j=1}^n) \in (\ell_{B_1, p}^n(X))'$. Como Ω é claramente linear, tomando o supremo sobre $B_{\ell_{B_1, p}(X)}^n$, concluímos que $\|\Omega\| \leq 1$ e daí segue sua continuidade.

Calculemos o inverso de Ω . Para isso, consideremos o operador Γ dado por

$$\begin{aligned}
 \Gamma : (\ell_{B_1, p}^n(X))' &\longrightarrow \ell_{\mathcal{B}_2, p^*}^n \langle X' \rangle \\
 \varphi &\longmapsto (\varphi \circ \Gamma_j)_{j=1}^n,
 \end{aligned} \tag{2.11}$$

em que, o operador $\Gamma_j : X \longrightarrow \ell_{B_1, p}^n(X)$ é definido por $\Gamma_j(x) = (\delta_{ij}x)_{i=1}^n$, sendo δ_{ij} o delta de Kronecker. A boa definição e a linearidade do operador Γ são imediatas. Faremos uso do Teorema 2.1.23 para mostrar a sua continuidade. Sejam $(\xi_j)_{j=1}^n \in \ell_{\mathcal{B}_2, p}^n(X'')$, $V = [\xi_1, \dots, \xi_n]$, $N = [\psi_1, \dots, \psi_n]$, em que, para cada $j \in \{1, \dots, n\}$, $\psi_j = \varphi \circ \Gamma_j$ sendo $\varphi \in (\ell_{B_1, p}^n(X))'$. Considere-se ainda o operador $Id_{X''}|_V$ e $\delta > 0$. Então, pelo Princípio da Reflexividade Local Fraco, existe um operador $G \in \mathcal{L}(V; X)$ tal que

$$\begin{aligned}
 &\|G\| \leq (1 + \delta)\|Id_{X''}|_V\| = 1 + \delta \quad \text{e} \\
 &\psi_j(G(\xi_j)) = Id_{X''}|_V(\xi_j)(\psi_j) = \xi_j(\psi_j),
 \end{aligned}$$

2.1. Sequências Cohen $(\mathcal{B}, p)$ -somáveis

para todo $j = 1, \dots, n$. Assim,

$$\begin{aligned}
 \left| \sum_{j=1}^n \xi_j(\psi_j) \right| &= \left| \sum_{j=1}^n \psi_j(G(\xi_j)) \right| \\
 &= \left| \sum_{j=1}^n (\varphi \circ \Gamma_j)(G(\xi_j)) \right| \\
 &= \left| \sum_{j=1}^n \varphi(\Gamma_j(G(\xi_j))) \right| \\
 &= \left| \sum_{j=1}^n \varphi((\delta_{ij} G(\xi_j))_{i=1}^n) \right| \\
 &= \left| \varphi\left((G(\xi_j))_{j=1}^n\right) \right| \\
 &\leq \|\varphi\| \left\| (G(\xi_j))_{j=1}^n \right\|_{B_1, p}.
 \end{aligned} \tag{2.12}$$

Sendo V um subespaço de X'' , $G \in \mathcal{L}(V; X)$ e o par $(B_1, \mathcal{B}_2)$ linearmente estável, tem-se

$$\begin{aligned}
 \left\| (G(\xi_j))_{j=1}^n \right\|_{B_1, p} &\leq \|G\| \left\| (\xi_j)_{j=1}^n \right\|_{\mathcal{B}_2, p} \\
 &\leq (1 + \delta) \left\| (\xi_j)_{j=1}^n \right\|_{\mathcal{B}_2, p}
 \end{aligned} \tag{2.13}$$

e usando (2.13) para majorar (2.12), obtemos

$$\left| \sum_{j=1}^n \xi_j(\psi_j) \right| \leq (1 + \delta) \|\varphi\| \left\| (\xi_j)_{j=1}^n \right\|_{\mathcal{B}_2, p}.$$

Fazendo $\delta \rightarrow 0$, obtemos

$$\left| \sum_{j=1}^n \xi_j(\varphi \circ \Gamma_j) \right| = \left| \sum_{j=1}^n \xi_j(\psi_j) \right| \leq \|\varphi\| \left\| (\xi_j)_{j=1}^n \right\|_{\mathcal{B}_2, p},$$

qualquer que seja $(\xi_j)_{j=1}^n \in \ell_{\mathcal{B}_2, p}^n(X'')$ e assim

$$\|\Gamma(\varphi)\|_{(\mathcal{B}_2, p^*)} \leq \|\varphi\|,$$

ou seja, Γ é contínuo e $\|\Gamma\| \leq 1$. Além disso, $\Omega \circ \Gamma = Id_{(\ell_{B_1, p}^n(X))'}$, pois

$$\begin{aligned}
 \Omega \circ \Gamma(\varphi) \left((x_j)_{j=1}^n \right) &= \Omega(\Gamma(\varphi)) \left((x_j)_{j=1}^n \right) \\
 &= \Omega \left((\varphi \circ \Gamma_j)_{j=1}^n \right) \left((x_j)_{j=1}^n \right) \\
 &= \sum_{j=1}^n (\varphi \circ \Gamma_j)(x_j) \\
 &= \sum_{j=1}^n \varphi(\Gamma_j(x_j))
 \end{aligned}$$

2.1. Sequências Cohen $(\mathcal{B}, p)$ -somáveis

$$\begin{aligned} &= \varphi \left(\sum_{j=1}^n (\delta_{ij} x_j)_{i=1}^n \right) \\ &= \varphi \left((x_j)_{j=1}^n \right), \end{aligned}$$

qualquer que seja $(x_j)_{j=1}^n \in \ell_{B_1, p}^n(X)$. Por outro lado, uma vez que

$$\Gamma \circ \Omega \left((x_j^*)_{j=1}^n \right) = \Gamma \left(\Omega \left((x_j^*)_{j=1}^n \right) \right) = \left(\Omega \left((x_j^*)_{j=1}^n \right) \circ \Gamma_i \right)_{i=1}^n$$

e, para cada $i \in \mathbb{N}$ fixo, tem-se

$$\begin{aligned} \Omega \left((x_j^*)_{j=1}^n \right) \circ \Gamma_i(x) &= \Omega \left((x_j^*)_{j=1}^n \right) (\Gamma_i(x)) \\ &= \Omega \left((x_j^*)_{j=1}^n \right) \left((\delta_{ij} x)_{j=1}^n \right) \\ &= \sum_{j=1}^n x_j^* (\delta_{ij} x) \\ &= x_i^*(x), \end{aligned}$$

obtemos $\left(\Omega \left((x_j^*)_{j=1}^n \right) \circ \Gamma_i \right)_{i=1}^n = (x_i^*)_{i=1}^n$, qualquer que seja $x^* = (x_j^*)_{j=1}^n \in \ell_{\mathcal{B}_2, p^*}^n \langle X' \rangle$.

Logo, $\Gamma \circ \Omega = Id_{\ell_{\mathcal{B}_2, p^*}^n \langle X' \rangle}$.

Por fim, como $\Omega \circ \Gamma = Id_{(\ell_{B_1, p}^n(X))'}$, $\|\Omega\| \leq 1$ e $\|\Gamma\| \leq 1$, temos

$$\|\varphi\| = \|\Omega \circ \Gamma(\varphi)\| = \|\Omega(\Gamma(\varphi))\| \leq \|\Gamma(\varphi)\| \leq \|\varphi\|,$$

portanto, Ω é uma isometria. ■

Uma aplicação do teorema anterior será dada a seguir.

Exemplo 2.1.26 Consideremos as aplicações B_1 e $\mathcal{B}_2$ do Exemplo 2.1.21, dadas por:

$$\begin{aligned} B_1 : X \times \ell_p^w(X') &\longrightarrow \ell_p & e & \quad \mathcal{B}_2 : X'' \times \ell_p^w(X''') \longrightarrow \ell_p \\ (x, (x_j^*)_{j=1}^\infty) &\longmapsto (x_j^*(x))_{j=1}^\infty & & \quad (\varphi, (\varphi_j^*)_{j=1}^\infty) \longmapsto (\varphi_j^*(\varphi))_{j=1}^\infty. \end{aligned}$$

Segue que $\ell_{B_1, p}^n(X) \stackrel{1}{=} \ell_p^{\text{mid}, n}(X)$, $\ell_{\mathcal{B}_2, p}^n(X'') \stackrel{1}{=} \ell_p^{\text{mid}, n}(X'')$, X'' é $\mathcal{B}_2$ -normado e, por fim, o par $(B_1, \mathcal{B}_2)$ é linearmente estável. Logo, as condições do Teorema 2.1.25 são satisfeitas e os espaços $(\ell_{B_1, p}^n(X))' = (\ell_p^{\text{mid}, n}(X))'$ e $\ell_{\mathcal{B}_2, p^*}^n \langle X' \rangle$ são isomorfos isometricamente.

Como

$$\ell_{\mathcal{B}_2, p^*} \langle X' \rangle := \left\{ (x_j^*)_{j=1}^\infty \in (X')^\mathbb{N}; \sum_{j=1}^\infty |\varphi_j(x_j^*)| < \infty, \forall (\varphi_j)_{j=1}^\infty \in \ell_{\mathcal{B}_2, p}(X'') \right\},$$

2.1. Sequências Cohen $(\mathcal{B}, p)$ -somáveis

temos a motivação para definir um novo espaço, a saber: o espaço das sequências *mid-Cohen p -somáveis*, que será denotado por $\ell_p^{\text{mid}}\langle X \rangle$. Em símbolos,

$$\ell_p^{\text{mid}}\langle X \rangle := \left\{ (x_j)_{j=1}^\infty \in X^{\mathbb{N}}; (x_j^*(x_j))_{j=1}^\infty \in \ell_1, \forall (x_j^*)_{j=1}^\infty \in \ell_{p^*}^{\text{mid}}(X') \right\}.$$

Com essa definição e pelo que foi exposto acima, tem-se

$$(\ell_p^{\text{mid},n}(X))' = \ell_p^{\text{mid},n}\langle X' \rangle.$$

Capítulo 3

Operadores B -somantes

Nos capítulos anteriores, estudamos o espaço de sequências $\ell_{B,p}(X)$ e, no caso em que X é B -normado, apresentamos resultados que nos remetem ao estudo de classes de operadores que melhoram convergência de séries. Este capítulo tem como principal objetivo definir essas classes e resgatar resultados clássicos de operadores que melhoram convergência, além de relacioná-las ao famoso Teorema da Dominação de Pietsch. O trabalho [11], de Irene Ferrando, apresenta resultados para operadores e domínios específicos. Em nossa abordagem, procuramos generalizar este estudo para classes de operadores que envolvem espaços B -normados. Por esse motivo, em geral, denominaremos esses operadores por B -somantes. Importantes referências utilizadas neste capítulo foram o artigo de Botelho e Campos [5], que traz estudos acerca do ambiente abstrato de classes de sequências, e o trabalho de Pellegrino e Santos [19], que aborda de forma abstrata o Teorema da Dominação de Pietsch.

Ao longo deste capítulo, salvo menção contrária, consideraremos $1 \leq p, q < \infty$ e $B : X \times Y \longrightarrow Z$ uma aplicação bilinear, limitada e admissível.

3.1 Operadores fortemente e fracamente B -somantes

Definição 3.1.1 Sejam X um espaço B -normado e $T \in \mathcal{L}(X; V)$. Dizemos que T é um operador *fortemente* $(p; B, q)$ -somante (ou simplesmente, $(p; B, q)$ -somante) se

$$(T(x_j))_{j=1}^{\infty} \in \ell_p(V) \text{ sempre que } (x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_{B,q}(X),$$

3.1. Operadores fortemente e fracamente B -somantes

isto é, o operador linear

$$\begin{aligned}\widehat{T} : \ell_{B,q}(X) &\longrightarrow \ell_p(V) \\ (x_j)_{j=1}^\infty &\longmapsto (T(x_j))_{j=1}^\infty.\end{aligned}\tag{3.1}$$

está bem definido.

No caso em que $p = q$, dizemos simplesmente que T é (B, p) -somante.

Denotaremos o espaço dos operadores lineares absolutamente $(p; B, q)$ -somantes de X em V por $\Pi_{p,q}^B(X; V)$. Quando $p = q$, escreveremos simplesmente $\Pi_p^B(X; V)$.

Definição 3.1.2 Sejam X um espaço B -normado e $T \in \mathcal{L}(U; X)$. Dizemos que T é um operador *fracamente* $(B, p; q)$ -somante se

$$(T(u_j))_{j=1}^\infty \in \ell_{B,p}(X) \text{ sempre que } (u_j)_{j=1}^\infty \in \ell_q^w(U),\tag{3.2}$$

ou seja, aplicação linear

$$\begin{aligned}\widehat{T} : \ell_q^w(U) &\longrightarrow \ell_{B,p}(X) \\ (u_j)_{j=1}^\infty &\longmapsto (T(u_j))_{j=1}^\infty\end{aligned}\tag{3.3}$$

está bem definida.

No caso em que $p = q$, dizemos simplesmente que T é *fracamente* (B, p) -somante. O espaço dos operadores lineares fracamente $(B, p; q)$ -somantes de U em X será denotado por $W_{p,q}^B(U; X)$ e quando $p = q$, denotaremos este espaço apenas por $W_p^B(U; X)$.

Observação 3.1.3 Tendo em mente a definição do espaço $\ell_{B,p}(X)$, a expressão (3.2) nos diz que o operador T é fracamente $(B, p; q)$ -somante se, e somente se, $(B_y \circ T(u_j))_{j=1}^\infty$ pertence a $\ell_p(Z)$, quaisquer que sejam $y \in Y$ e $(u_j)_{j=1}^\infty \in \ell_q^w(U)$. Em outras palavras, dizer que $T \in W_{p,q}^B(U; X)$ equivale a afirmar que o operador

$$\begin{aligned}B_y \circ T : U &\longrightarrow Z \\ u &\longmapsto B(T(u), y)\end{aligned}$$

é absolutamente (p, q) -somante, qualquer que seja $y \in Y$.

Para mostrarmos algumas caracterizações interessantes para os operadores B -somantes, usaremos resultados do trabalho de Botelho e Campos (ver [5]) que generaliza classes de operadores que melhoram convergência de séries. No capítulo anterior já vimos as definições de classes de sequências e estabilidade linear. A seguir, enunciaremos

3.1. Operadores fortemente e fracamente B -somantes

mais alguns dos resultados desse recente trabalho que servirão para o desenvolvimento deste capítulo.

O resultado abaixo é um dos primeiros da teoria de classes de seqüências e é usado para caracterizar classes de operadores por desigualdades.

Proposição 3.1.4 [5, Proposition 2.4] *Sejam $n \in \mathbb{N}$, $S_1, \dots, S_n$ e V classes de seqüências. As seguintes condições são equivalentes para um operador multilinear $T \in \mathcal{L}(X_1, \dots, X_n; Y)$:*

- (a) $(T(x_j^1, \dots, x_j^n))_{j=1}^\infty \in V(Y)$ sempre que $(x_j^m)_{j=1}^\infty \in S_m(X_m)$, $m = 1, \dots, n$.
- (b) O operador induzido

$$\begin{aligned} \widehat{T}: S_1(X_1) \times \dots \times S_n(X_n) &\longrightarrow V(Y) \\ ((x_j^1)_{j=1}^\infty, \dots, (x_j^n)_{j=1}^\infty) &\longmapsto (T(x_j^1, \dots, x_j^n))_{j=1}^\infty \end{aligned}$$

está bem definido, é n -linear e contínuo.

As condições acima implicam a afirmação (c) abaixo e todas são equivalentes, quando as classes de seqüências $S_1, \dots, S_n$ e V são finitamente determinadas:

- (c) Existe $C > 0$ tal que

$$\left\| (T(x_j^1, \dots, x_j^n))_{j=1}^k \right\|_{V(Y)} \leq C \prod_{m=1}^n \left\| (x_j^m)_{j=1}^k \right\|_{S_m(X_m)}, \quad (3.4)$$

para todo $k \in \mathbb{N}$ e toda seqüência finita $x_j^m \in X_m$, $j = 1, \dots, k$ e $m = 1, \dots, n$.

Neste caso,

$$\|\widehat{T}\| = \inf\{C; (3.4) \text{ ocorre}\}.$$

Observação 3.1.5 É digno de nota que a demonstração da proposição acima em [5] usa apenas os seguintes fatos:

- (i) $S(X) \xrightarrow{1} \ell_\infty(X)$, para garantir que convergência no espaço $S(X)$ implica em convergência coordenada a coordenada; isto obviamente pode ser generalizado por $S(X) \xrightarrow{C} \ell_\infty(X)$, para algum $C > 0$.
- (ii) A propriedade de ser finitamente determinada, citada nos itens (iv) das Observações 2.1.15 e 2.1.16.

Com a observação acima e fazendo uso da Proposição 3.1.4, é possível a partir do ambiente abstrato de classes de seqüências obter as seguintes caracterizações para nossos operadores B -somantes:

3.1. Operadores fortemente e fracamente B -somantes

Proposição 3.1.6 *Sejam $1 \leq p, q < \infty$ e $T \in \mathcal{L}(X; V)$. São equivalentes:*

- (i) *O operador T é $(p; B, q)$ -somante;*
- (ii) *Existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$\left\| (T(x_j))_{j=1}^{\infty} \right\|_p \leq C \left\| (x_j)_{j=1}^{\infty} \right\|_{B,q},$$

sempre que $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_{B,q}(X)$;

- (iii) *Existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$\left\| (T(x_j))_{j=1}^m \right\|_p \leq C \left\| (x_j)_{j=1}^m \right\|_{B,q}, \quad (3.5)$$

para todo m natural e quaisquer $x_1, \dots, x_m$ em X .

Demonstração: Suponha que T seja um operador $(p; B, q)$ -somante. Então, tem-se $(T(u_j))_{j=1}^{\infty} \in \ell_p(V)$ sempre que $(u_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_{B,q}(X)$, e isso satisfaz a condição (a) da Proposição 3.1.4 (caso linear). Como a classe de sequências $\ell_p(\cdot)$ é finitamente determinada, e a Observação 2.1.15 nos dá os ingredientes necessários sobre $\ell_{B,q}(X)$, a mesma proposição citada acima garante a equivalência entre os itens (i), (ii) e (iii). ■

Denotaremos por $\pi_{p,q}^B(T)$ (e quando $p = q$, por $\pi_p^B(T)$) o ínfimo das constantes C que satisfazem uma das desigualdades anteriores. Além disso, temos $\pi_{p,q}^B(T) = \|\widehat{T}\|$, em que $\widehat{T}$ é a aplicação induzida definida em (3.1).

Observação 3.1.7 Diante das condições dadas, acerca da classe dos operadores $(p; B, q)$ -somantes, é imediato o seguinte fato:

$$\Pi_{p,q}(X; V) \subseteq \Pi_{p,q}^B(X; V).$$

Tendo em vista os resultados anteriores obtemos o seguinte

Corolário 3.1.8 *Sejam $1 \leq p, q < \infty$ e X um espaço B -normado. Se*

$$\{B_y : X \rightarrow Z, y \in Y\} \subseteq \Pi_q(X; Z),$$

então $\Pi_{p,q}^B(X; V) = \Pi_{p,q}(X; V)$.

Demonstração: Do Corolário 1.3.8, obtemos $\ell_{B,q}(X) = \ell_q^w(X)$, e o resultado segue diretamente. ■

De modo semelhante, obtemos caracterizações para os operadores fracamente $(B, p; q)$ -somantes.

3.1. Operadores fortemente e fracamente B -somantes

Proposição 3.1.9 *Sejam $1 \leq p, q < \infty$ e $T \in \mathcal{L}(U; X)$. São equivalentes:*

(i) *O operador T é fracamente $(B, p; q)$ -somante;*

(ii) *Existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$\left\| (T(u_j))_{j=1}^\infty \right\|_{B,p} \leq C \left\| (u_j)_{j=1}^\infty \right\|_{w,q},$$

sempre que $(u_j)_{j=1}^\infty \in \ell_q^w(U)$;

(iii) *Existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$\left\| (T(u_j))_{j=1}^m \right\|_{B,p} \leq C \left\| (u_j)_{j=1}^m \right\|_{w,q}, \quad (3.6)$$

para quaisquer m natural e $u_1, \dots, u_m$ em U .

(iv) *Existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$\left\| (B_y \circ T(u_j))_{j=1}^\infty \right\|_p \leq C \|y\|_Y \left\| (u_j)_{j=1}^\infty \right\|_{w,q}, \quad (3.7)$$

sempre que $(u_j)_{j=1}^\infty \in \ell_q^w(U)$ e $y \in Y$;

(v) *Existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$\left\| (B_y \circ T(u_j))_{j=1}^m \right\|_p \leq C \|y\|_Y \left\| (u_j)_{j=1}^m \right\|_{w,q}, \quad (3.8)$$

para quaisquer m natural, $u_1, \dots, u_m$ em U e $y \in Y$.

Demonstração: Mostremos somente a equivalência entre (ii) e (iv). A equivalência entre (iii) e (v) é obtida de forma semelhante e as demais implicações usam argumentos análogos aos usados na proposição anterior.

Sejam $(u_j)_{j=1}^\infty \in \ell_q^w(U)$, $y \in Y \setminus \{0\}$ (no caso de y nulo, a prova é imediata) e consideremos $v = \frac{y}{\|y\|_Y}$, temos:

$$\begin{aligned} \left\| (B_y \circ T(u_j))_{j=1}^\infty \right\|_p &= \|y\|_Y \left\| (B(T(u_j), v))_{j=1}^\infty \right\|_p \\ &\leq \|y\|_Y \sup_{v \in B_Y} \left\| (B(T(u_j), v))_{j=1}^\infty \right\|_p \\ &\leq \|y\|_Y \sup_{v \in B_Y} \left\| (T(u_j), v)_{j=1}^\infty \right\|_{B,p} \\ &\leq C \|y\|_Y \left\| (u_j)_{j=1}^\infty \right\|_{w,p} \end{aligned}$$

Reciprocamente, sejam $y \in B_Y$ e $(u_j)_{j=1}^\infty \in \ell_q^w(U)$, então

$$\left\| (T(u_j))_{j=1}^\infty \right\|_{B,p} = \sup_{y \in B_Y} \left\| (B_y \circ T(u_j))_{j=1}^\infty \right\|_p$$

3.1. Operadores fortemente e fracamente B -somantes

$$\begin{aligned} &\leq C \left\| (u_j)_{j=1}^\infty \right\|_{w,p} \sup_{y \in B_Y} \|y\|_Y \\ &\leq C \left\| (u_j)_{j=1}^\infty \right\|_{w,p}. \end{aligned}$$

■

Denotaremos por $\omega_{p,q}^B(T)$ (e quando $p = q$, por $\omega_p^B(T)$) o ínfimo das constantes C que satisfaçam uma das desigualdades anteriores. Consequentemente $\omega_{p,q}^B(T) = \|\widehat{T}\|$, em que $\widehat{T}$ é o operador induzido definido em (3.3).

Observação 3.1.10 Se $p < q$, então os únicos operadores B -somantes (fortemente ou fracamente) são nulos. Com efeito, se $X = \{0\}$ o resultado é imediato. Assim, suponha-se que $X \neq \{0\}$. Como $p < q$, seja $(\lambda_j)_{j=1}^\infty \in \ell_q \setminus \ell_p$. Para todo $x \in X$, temos $(\lambda_j x)_{j=1}^\infty \in \ell_{B,q}(X)$, pois

$$\begin{aligned} \left\| (\lambda_j x)_{j=1}^\infty \right\|_{B,q} &= \sup_{y \in B_Y} \left(\sum_{j=1}^\infty \|B(\lambda_j x, y)\|_Z^q \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \sup_{y \in B_Y} \|B(x, y)\| \left(\sum_{j=1}^\infty |\lambda_j|^q \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq \|B\| \|x\| \|(\lambda_j)_{j=1}^\infty\|_q \\ &< +\infty. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Seja $x \in X \setminus \{0\}$ e suponhamos que exista um operador $T \neq 0$ que seja $(p; B, q)$ -somante. Assim, pelo item (ii) da Proposição 3.1.6, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\left\| (T(\lambda_j x))_{j=1}^m \right\|_p \leq C \left\| (\lambda_j x)_{j=1}^m \right\|_{B,q},$$

para todo $m \in \mathbb{N}$ e $x_1, \dots, x_m$ em X . Usando a linearidade de T e a desigualdade obtida em (3.9), temos

$$\|T(x)\|_V \left\| (\lambda_j)_{j=1}^m \right\|_p \leq C \|B\| \|x\|_X \left\| (\lambda_j)_{j=1}^m \right\|_q,$$

donde segue-se que

$$\|T\| \left\| (\lambda_j)_{j=1}^m \right\|_p \leq C \|B\| \left\| (\lambda_j)_{j=1}^m \right\|_q.$$

Sendo $\ell_p(\cdot)$ finitamente determinada, concluímos que $(\lambda_j)_{j=1}^\infty \in \ell_p$ (absurdo). A verificação para o caso dos operadores fracamente $(B, p; q)$ -somantes é análoga.

A seguir, apresentamos alguns resultados sobre os espaços de operadores B -somantes.

Proposição 3.1.11 *Se o espaço X é B -normado e $1 \leq q \leq p < \infty$, então o espaço*

3.1. Operadores fortemente e fracamente B -somantes

$$(\Pi_{p,q}^B(X; V), \pi_{p,q}^B(\cdot))$$

é Banach.

Demonstração: Inicialmente provaremos que $(\Pi_{p,q}^B(X; V), \pi_{p,q}^B(\cdot))$ é um espaço vetorial ($\pi_{p,q}^B(T)$ já é uma norma, definida na Proposição 3.1.6).

Sejam $T_1, T_2 \in \Pi_{p,q}^B(X; V)$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. Então, pelo item (ii) da Proposição 3.1.6, para $i \in \{1, 2\}$ e todo $n \in \mathbb{N}$, temos

$$\left\| (T_i(x_j))_{j=1}^n \right\|_p \leq \pi_{p,q}^B(T_i) \left\| (x_j)_{j=1}^n \right\|_{B,q},$$

para quaisquer $x_1, \dots, x_n \in X$. Usando a Desigualdade de Minkowski, obtemos

$$\begin{aligned} \left(\sum_{j=1}^n \|(T_1 + \lambda T_2)(x_j)\|_V^p \right)^{\frac{1}{p}} &\leq \left(\sum_{j=1}^n (\|T_1(x_j)\|_V + \|\lambda T_2(x_j)\|_V)^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left\| (T_1(x_j))_{j=1}^n \right\|_p + |\lambda| \left\| (T_2(x_j))_{j=1}^n \right\|_p \\ &\leq (\pi_{p,q}^B(T_1) + |\lambda| \pi_{p,q}^B(T_2)) \left\| (x_j)_{j=1}^n \right\|_{B,q}, \end{aligned}$$

portanto, $(T_1 + \lambda T_2) \in \Pi_{p,q}^B(X; V)$. Notemos ainda que para todo operador $T \in \Pi_{p,q}^B(X; V)$, vale

$$\|T\| \leq \pi_{p,q}^B(T) \|B\|. \quad (3.10)$$

Com efeito, dado $x \in X$, a sequência $(x, 0, 0, \dots)_{j=1}^\infty \in \ell_q(X) \subseteq \ell_{B,q}(X)$ e tem-se

$$\|T(x)\|_V = \|(T(x), 0, 0, \dots)\|_p \quad \text{e} \quad \|(x, 0, 0, \dots)\|_{B,q} = \sup_{y \in B_Y} \|B(x, y)\|_Z \leq \|B\| \|x\|_X.$$

Usando os fatos acima e a definição de $\pi_{p,q}^B(T)$ no item (ii) da Proposição 3.1.6 para $n = 1$, obtemos

$$\|T(x)\|_V = \|(T(x), 0, 0, \dots)\|_p \stackrel{(3.5)}{\leq} \pi_{p,q}^B(T) \|(x, 0, 0, \dots)\|_{B,q} \leq \pi_{p,q}^B(T) \|B\| \|x\|_X$$

e disso segue (3.10).

Agora, provemos que $(\Pi_{p,q}^B(X; V), \pi_{p,q}^B(\cdot))$ é Banach. Seja $(T_k)_{k=1}^\infty$ uma sequência de Cauchy em $(\Pi_{p,q}^B(X; V), \pi_{p,q}^B(\cdot))$. Então, por (3.10), $(T_k)_{k=1}^\infty$ é uma sequência de Cauchy em $\mathcal{L}(X; V)$ e assim $T_k \rightarrow T \in \mathcal{L}(X; V)$. Para cada $k \in \mathbb{N}$, o operador induzido $\widehat{T}_k$, definido em (3.1), pertence a $\mathcal{L}(\ell_{B,q}(X); \ell_p(V))$ e $\|\widehat{T}_k\| = \pi_{p,q}^B(T_k)$, como provado na Proposição 3.1.6. Dessa forma, $(\widehat{T}_k)_{k=1}^\infty$ é de Cauchy em $\mathcal{L}(\ell_{B,q}(X); \ell_p(V))$

3.1. Operadores fortemente e fracamente B -somantes

que é completo pois $\ell_p(V)$ é Banach. Assim, $(\widehat{T}_k)_{k=1}^\infty$ converge para algum operador $S \in \mathcal{L}(\ell_{B,q}(X); \ell_p(V))$. Dados $(x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_{B,q}(X)$ e $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$k > N \Rightarrow \left\| \widehat{T}_k((x_j)_{j=1}^\infty) - S((x_j)_{j=1}^\infty) \right\|_p < \epsilon. \quad (3.11)$$

Denotando $S((x_j)_{j=1}^\infty) = (y_j)_{j=1}^\infty \in \ell_p(V)$ e substituindo em (3.11), obtemos

$$k > N \Rightarrow \left\| \widehat{T}_k((x_j)_{j=1}^\infty) - (y_j)_{j=1}^\infty \right\|_p = \left(\sum_{j=1}^\infty \|T_k(x_j) - y_j\|_V^p \right)^{\frac{1}{p}} < \epsilon.$$

Assim, para todo $j \in \mathbb{N}$, temos

$$k > N \Rightarrow \|T_k(x_j) - y_j\|_V < \epsilon,$$

ou seja, para todo $j \in \mathbb{N}$, obtemos $\lim_{k \rightarrow \infty} T_k(x_j) = y_j$ e, como $T_k \rightarrow T$ em $\mathcal{L}(X; V)$, temos $\lim_{k \rightarrow \infty} T_k(x_j) = T(x_j)$. Pela unicidade do limite, segue-se que $T(x_j) = y_j, \forall j \in \mathbb{N}$, isto é,

$$\widehat{T}((x_j)_{j=1}^\infty) = (T(x_j))_{j=1}^\infty = (y_j)_{j=1}^\infty = S((x_j)_{j=1}^\infty); \quad \forall (x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_{B,q}(X).$$

Com isso, $\widehat{T} = S$ e, portanto, T é $(p; B, q)$ -somante. ■

Abaixo enunciamos um resultado análogo à proposição anterior para a classe dos operadores fracamente $(B, q; p)$ -somantes.

Proposição 3.1.12 *Suponha que o espaço X seja B -normado e que $1 \leq q \leq p < \infty$. Então, o espaço*

$$(W_{p,q}^B(U; X), \omega_{p,q}^B(T))$$

é Banach.

Demonstração: De forma semelhante à desenvolvida em (3.10), obtemos a desigualdade

$$\|T\| \leq C \omega_{p,q}^B(T),$$

válida para todo operador $T \in W_{p,q}^B(U; X)$, em que $C > 0$ é a razão entre as constantes dadas no item (ii) em (3.1.9) e a obtida em (1.23). A partir disso, seguindo-se um procedimento análogo ao usado na demonstração da proposição anterior, obteremos o resultado desejado. ■

3.2. Teoremas tipo dominação de Pietsch e consequências

No que segue, apresentaremos alguns casos de coincidências entre as classes de operadores B -somantes com classes já conhecidas. Isso mostrará que essas definições generalizam outros espaços clássicos de operadores.

Antes disso, vejamos mais duas classes de operadores definidas nos trabalhos [4] e [14].

Definição 3.1.13 [4, Definition 2.1] Seja $T \in \mathcal{L}(X; V)$. Dizemos que T é um operador:

(i) *Absolutamente mid* $(p; q)$ -somante se

$$(T(x_j))_{j=1}^{\infty} \in \ell_p(V) \text{ sempre que } (x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_q^{\text{mid}}(X).$$

(ii) *Fracamente mid* $(p; q)$ -somante se

$$(T(x_j))_{j=1}^{\infty} \in \ell_p^{\text{mid}}(V) \text{ sempre que } (x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_q^w(X).$$

Os espaços dos operadores definidos acima são denotados, respectivamente, por $\Pi_{p,q}^{\text{mid}}(X; V)$ e $W_{p,q}^{\text{mid}}(X; V)$. Quando $p = q$, denotaremos os espaços acima por $\Pi_p^{\text{mid}}(X; V)$ e $W_p^{\text{mid}}(X; V)$, respectivamente, e se $p < q$, então os espaços $\Pi_{p,q}^{\text{mid}}(X; V)$ e $W_{p,q}^{\text{mid}}(X; V)$ são ambos espaços nulos.

Exemplo 3.1.14 Consideremos as aplicações bilineares B_i , para $i \in \{1, 2\}$, vistas no Exemplo 1.1.7 e B_3 vista no Exemplo 1.1.9. Temos $\ell_{B_1,p}(X) = \ell_p(X)$, $\ell_{B_2,p}(X) = \ell_p^w(X)$ e $\ell_{B_3,p}(X) = \ell_p^{\text{mid}}(X)$ e obtemos as seguintes coincidências de classes para todo espaço de Banach V :

- | | |
|--|---|
| i) $\Pi_{p,q}^{B_1}(X, V) = \mathcal{L}(X, V);$ | iv) $W_{p,q}^{B_1}(V, X) = \Pi_{p,q}(V, X);$ |
| ii) $\Pi_{p,q}^{B_2}(X, V) = \Pi_{p,q}(X, V);$ | v) $W_{p,q}^{B_2}(V, X) = \mathcal{L}(V, X)$ |
| iii) $\Pi_{p,q}^{B_3}(X, V) = \Pi_{p,q}^{\text{mid}}(X, V);$ | vi) $W_{p,q}^{B_3}(V, X) = W_{p,q}^{\text{mid}}(V, X).$ |

3.2 Teoremas tipo dominação de Pietsch e consequências

O Teorema da Dominação de Pietsch é um importante e clássico resultado que relaciona operadores absolutamente somantes com a teoria da medida. Nesta seção, apresentaremos alguns resultados do tipo dominação de Pietsch para os operadores B -somantes, além de uma série de consequências. Como base para esse estudo, foram fundamentais alguns trabalhos tais como [9, 10, 19, 23].

Vamos primeiro enunciar a versão clássica do Teorema da Dominação de Pietsch, formulado no contexto dos operadores absolutamente somantes.

3.2. Teoremas tipo dominação de Pietsch e consequências

Teorema 3.2.1 (Teorema da Dominação de Pietsch) [10, Theorem 2.12] *Sejam $1 \leq p < \infty$, U e X espaços de Banach e $T \in \mathcal{L}(U; X)$. O operador T é absolutamente p -somante se, e somente se, existem uma constante positiva C e uma medida regular de probabilidade μ nos borelianos de $B_{U'}$, com a topologia fraca-estrela, tais que*

$$\|T(u)\|_X \leq C \left(\int_{B_{U'}} |u^*(u)|^p d\mu(u^*) \right)^{\frac{1}{p}}, \quad (3.12)$$

para todo $u \in U$. Além disso, $\pi_p(T) = \inf\{C; C \text{ satisfaz (3.12)}\}$.

Apresentaremos algumas versões do teorema anterior para as classes dos operadores B -somantes. Para o caso dos fracamente (B, p) -somantes, o resultado é obtido por uma simples aplicação do teorema anterior para a composição $B_y \circ T$. Já no caso dos fortemente (B, p) -somantes, necessitaremos da teoria desenvolvida em [19].

Teorema 3.2.2 (Tipo Dominação de Pietsch I) *Sejam X um espaço B -normado e $1 \leq p < \infty$. Um operador $T \in \mathcal{L}(U; X)$ é fracamente (B, p) -somante se, e somente se, para cada $y \in Y$, existem uma constante $C_y > 0$ e uma medida regular de probabilidade μ , definida nos borelianos de $B_{U'}$, com a topologia fraca-estrela, tais que*

$$\|B_y \circ T(u)\|_Z \leq C_y \left(\int_{B_{U'}} |u^*(u)|^p d\mu(u^*) \right)^{\frac{1}{p}}, \quad (3.13)$$

para todo $u \in U$. Além disso, $\omega_p^B(T) = \inf\{C_y; C_y \text{ satisfaz (3.13)}\}$.

Demonstração: Sendo T um operador fracamente (B, p) -somante, segue-se da Observação 3.1.3 que, para cada $y \in Y$, o operador $B_y \circ T$ é absolutamente p -somante. O resultado então segue da aplicação imediata do teorema anterior. ■

Como consequência do resultado acima, temos o

Corolário 3.2.3 *Se T é um operador fracamente (B, p) -somante, então*

$$\omega_p^B(T) = \sup_{y \in B_Y} \pi_p(B_y \circ T).$$

A demonstração desse corolário faz uso do seguinte lema técnico, cuja demonstração encontra-se em [18, Lema 2.4.10].

Lema 3.2.4 *Sejam A e B conjuntos não vazios e $f : A \times B \rightarrow \mathbb{R}$ uma função. Então*

$$\sup_{x \in A} \sup_{y \in B} f(x, y) = \sup_{y \in B} \sup_{x \in A} f(x, y). \quad (3.14)$$

3.2. Teoremas tipo dominação de Pietsch e consequências

Demonstração: (do Corolário) Como o operador $B_y \circ T$ é absolutamente p -somante, qualquer que seja $y \in Y$, então

$$\left\| (B_y \circ T(u_j))_{j=1}^n \right\|_p \leq \pi_p(B_y \circ T) \left\| (u_j)_{j=1}^n \right\|_{w,p}, \quad (3.15)$$

quaisquer que sejam $u_1, \dots, u_n \in U$ e $n \in \mathbb{N}$. Considerando o operador induzido definido em (3.3), temos

$$\begin{aligned} \omega_p^B(T) &= \|\widehat{T}\| \\ &= \sup \left\{ \left\| \widehat{T}((u_j)_{j=1}^n) \right\|_{B,p} ; (u_j)_{j=1}^n \in B_{\ell_p^w(U)} \right\} \\ &= \sup \left\{ \left\| (T(u_j))_{j=1}^n \right\|_{B,p} ; (u_j)_{j=1}^n \in B_{\ell_p^w(U)} \right\} \\ &= \sup_{y \in B_Y} \sup \left\{ \left\| (B(T(u_j), y))_{j=1}^n \right\|_p ; (u_j)_{j=1}^n \in B_{\ell_p^w(U)} \right\} \\ &\stackrel{(3.14)}{=} \sup_{y \in B_Y} \sup \left\{ \left\| (B_y \circ T(u_j))_{j=1}^n \right\|_p ; (u_j)_{j=1}^n \in B_{\ell_p^w(U)} \right\} \\ &\stackrel{(3.15)}{\leq} \sup_{y \in B_Y} \sup \left\{ \pi_p(B_y \circ T) \left\| (u_j)_{j=1}^n \right\|_{w,p} ; (u_j)_{j=1}^n \in B_{\ell_p^w(U)} \right\} \\ &= \sup_{y \in B_Y} \pi_p(B_y \circ T). \end{aligned} \quad (3.16)$$

Por outro lado, usando novamente o fato de $B_y \circ T$ ser absolutamente p -somante, qualquer que seja $y \in Y$, e a desigualdade dada por (3.7), temos

$$\begin{aligned} \pi_p(B_y \circ T) &\leq \inf \{C; C \text{ satisfaz (3.7)}\} \|y\|_Y \\ &= \omega_p^B(T) \|y\|_Y \end{aligned}$$

e assim

$$\sup_{y \in B_Y} \pi_p(B_y \circ T) \leq \omega_p^B(T).$$

O resultado segue de (3.16) e da desigualdade acima. ■

Fazendo algumas restrições sobre domínio da aplicação bilinear B e graças ao trabalho [19] de D. Pellegrino e J. Santos, obteremos um teorema do tipo dominação de Pietsch para a classe dos operadores fortemente (B, p) -somantes. Citemos alguns resultados deste importante trabalho, necessários para o avanço de nossa teoria.

Definição 3.2.5 [19, p. 371] *Sejam X, W e E conjuntos não-vazios arbitrários, $\mathcal{H}$ uma família de aplicações de X em W , G um espaço de Banach e K um conjunto*

3.2. Teoremas tipo dominação de Pietsch e consequências

compacto de Hausdorff. Consideremos ainda as aplicações arbitrárias R e S definidas por:

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad R &: K \times E \times G \longrightarrow [0, \infty) \\ \text{(ii)} \quad S &: \mathcal{H} \times E \times G \longrightarrow [0, \infty) \end{aligned}$$

e $0 < p < \infty$. Uma aplicação $T \in \mathcal{H}$ é dita RS -abstrata p -somante se existir uma constante $C > 0$ tal que

$$\left(\sum_{j=1}^m S(T, x_j, b_j)^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq C \sup_{\varphi \in K} \left(\sum_{j=1}^m R(\varphi, x_j, b_j)^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

quaisquer que sejam $m \in \mathbb{N}$, $x_1, \dots, x_m \in E$ e $b_1, \dots, b_m \in G$.

Teorema 3.2.6 [19, Theorem 3.1] *Nas condições da definição anterior, se a aplicação $R_{x,b}$, definida por*

$$\begin{aligned} R_{x,b} &: K \longrightarrow [0, \infty) \\ \lambda &\longmapsto R(\lambda, x, b) \end{aligned},$$

for contínua, quaisquer que sejam $x \in E$ e $b \in G$, então um operador $T \in \mathcal{H}$ é RS -abstrato p -somante se, e somente se, existem uma constante $C > 0$ e uma medida de probabilidade de Borel μ sobre K tais que

$$S(T, x, b) \leq C \left(\int_K R(\varphi, x, b)^p d\mu(\varphi) \right)^{\frac{1}{p}},$$

para todo $x \in E$ e todo $b \in G$.

A seguinte observação é essencial para o próximo resultado:

Observação 3.2.7 Dados os espaços de Banach Y e Z , denotaremos por $\mathcal{L}_{w^*, \|\cdot\|}(Y'; Z)$ o subespaço de $\mathcal{L}(Y'; Z)$ dos operadores lineares contínuos, em que Y' está munido com a topologia fraca-estrela e Z com a topologia da norma.

Tendo posse os resultados necessários, voltemos ao nosso principal objetivo: o Teorema tipo Dominação de Pietsch para a classe dos operadores (B, p) -somantes.

Teorema 3.2.8 (Tipo Dominação de Pietsch II) *Sejam $1 \leq p < \infty$ e $B : X \times Y' \longrightarrow Z$ uma aplicação bilinear, admissível e limitada, com X um espaço B -normado. Suponhamos que, para cada $x \in X$, o operador $B(x, \cdot) := B_x \in \mathcal{L}_{w^*, \|\cdot\|}(Y'; Z)$. Então, o operador T é (B, p) -somante se, e somente se, existem uma constante $C > 0$ e uma medida de probabilidade μ sobre os borelianos de $B_{Y'}$ com a topologia fraca-estrela tais que*

$$\|T(x)\|_W \leq C \left(\int_{B_{Y'}} \|B_x(y^*)\|_Z^p d\mu(y^*) \right)^{\frac{1}{p}}, \quad (3.17)$$

para todo $x \in X$. Além disso, $\Pi_p^B(T) = \inf\{C; C \text{ satisfaz (3.17)}\}$.

3.2. Teoremas tipo dominação de Pietsch e consequências

Demonstração: Seja T um operador fortemente (B, p) -somante. Considerando os parâmetros do Teorema 3.2.6, façamos

$$\left\{ \begin{array}{l} E = G; \\ G = \mathbb{R}; \\ \mathcal{H} = \mathcal{L}(X; W) \\ K = B_{Y'}. \end{array} \right.$$

O Teorema de Banach-Alaoglu-Bourbaki garante a compacidade de $B_{Y'}$, uma vez que a bola está munida da topologia fraca-estrela. Agora, definamos as seguintes aplicações R e S , respectivamente, pondo

$$\begin{aligned} R : B_{Y'} \times X \times \mathbb{R} &\longrightarrow [0, \infty) & e & \quad S : \mathcal{L}(X; W) \times X \times \mathbb{R} \longrightarrow [0, \infty) \\ (y^*, x, \lambda) &\longmapsto \|B_x(y^*)\|_Z & & (T, x, \lambda) \longmapsto \|T(x)\|_W. \end{aligned}$$

Como o operador $T \in \Pi_{p,q}^B(X; W)$, então, pela Proposição 3.1.6, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\left\| (T(x_j))_{j=1}^m \right\|_p \leq C \left\| (x_j)_{j=1}^m \right\|_{B,p},$$

para todo m natural e quaisquer $x_1, \dots, x_m$ em X . Assim, usando as respectivas definições das aplicações R e S , a desigualdade anterior pode ser reescrita por

$$\left(\sum_{j=1}^m S(T, x_j, b_j)^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq C \sup_{\varphi \in K} \left(\sum_{j=1}^m R(\lambda, x_j, b_j)^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

para todo m natural e quaisquer $x_1, \dots, x_m$ em X . Com isso, as hipóteses da Definição 3.2.5 são satisfeitas e o operador T é RS -abstrato p -somante.

Notemos ainda que, para todo $x \in X$ e todo $\lambda \in \mathbb{R}$, a continuidade da aplicação $R_{x,\lambda} := R(\cdot, x, \lambda)$, definida por

$$\begin{aligned} R_{x,\lambda} : B_{Y'} &\longrightarrow [0, \infty) \\ y^* &\longmapsto \|B_x(y^*)\|_Z, \end{aligned}$$

decorre diretamente da continuidade das aplicações $\|\cdot\|$ e B_x , uma vez que, por hipótese, $B(x, \cdot) := B_x \in \mathcal{L}_{w^*, \|\cdot\|}(Y'; Z)$. Assim, as condições exigidas pelo Teorema 3.2.6 são satisfeitas e, portanto, obtemos a desigualdade (3.17). ■

Elencaremos agora uma série de consequências dos teoremas tipo Dominação de Pietsch para as classes de operadores B -somantes.

3.2. Teoremas tipo dominação de Pietsch e consequências

Corolário 3.2.9 *Nas condições do Teorema 3.2.2, se $1 \leq q \leq p < \infty$, então*

$$W_q^B(U; X) \subseteq W_p^B(U; X).$$

Além disso, se $T \in W_q^B(U; X)$, então

$$\omega_p^B(T) \leq \omega_q^B(T). \quad (3.18)$$

Demonstração: Se $T \in W_q^B(U; X)$, pelo teorema anterior, existe uma medida de probabilidade μ tal que

$$\|B_y \circ T(u)\|_Z \leq \omega_q^B(T) \left(\int_{B_{U'}} |u^*(u)|^q d\mu(u^*) \right)^{\frac{1}{q}},$$

quaisquer que sejam $u \in U$ e $y \in Y$. Como $L_p(U, \Sigma, \mu) \xhookrightarrow{1} L_q(U, \Sigma, \mu)$, temos

$$\|B_y \circ T(u)\|_Z \leq \omega_q^B(T) \left(\int_{B_{U'}} |u^*(u)|^q d\mu(u^*) \right)^{\frac{1}{q}} \leq \omega_q^B(T) \left(\int_{B_{U'}} |u^*(u)|^p d\mu(u^*) \right)^{\frac{1}{p}}$$

e aplicando-se mais uma vez o teorema anterior, segue-se que T é fracamente (B, p) -somante. Sendo $\omega_p^B(T)$ o ínfimo das constantes que satisfazem a última desigualdade, temos também (3.18). ■

Vejamos agora que a inclusão obtida no corolário anterior pode ser generalizada com uso da Observação 3.1.3. Antes disso, relembremos o clássico e mais geral Teorema de Inclusão para operadores absolutamente somantes.

Teorema 3.2.10 (Teorema da Inclusão) *Sejam U e Z espaços de Banach e p, q, r, s no intervalo $[1, \infty)$ tais que*

$$\left| \begin{array}{l} q \leq p, s \leq r; \\ \frac{1}{q} - \frac{1}{p} \leq \frac{1}{s} - \frac{1}{r}. \end{array} \right.$$

Então,

$$\Pi_{p,q}(U; Z) \subseteq \Pi_{r,s}(U; Z) \quad e \quad \pi_{r,s}(\cdot) \leq \pi_{p,q}(\cdot).$$

Demonstração: Ver [10, Theorem 10.4]. ■

Proposição 3.2.11 *Sejam $p, q, r, s \in [1, \infty)$ tais que*

$$\left| \begin{array}{l} q \leq p, s \leq r; \\ \frac{1}{q} - \frac{1}{p} \leq \frac{1}{s} - \frac{1}{r}. \end{array} \right. \quad (3.19)$$

Então

$$W_{p,q}^B(U; X) \subseteq W_{r,s}^B(U; X) \quad e \quad \omega_{r,s}^B(\cdot) \leq \omega_{p,q}^B(\cdot).$$

3.2. Teoremas tipo dominação de Pietsch e consequências

Demonstração: A Observação 3.1.3 garante que $T \in W_{p,q}^B(U; X)$ se, e somente se, $B_y \circ T \in \Pi_{p,q}(U; Z)$, para todo $y \in Y$, e como as condições dadas em (3.19) satisfazem o Teorema da inclusão, temos $\Pi_{p,q}(U; Z) \subseteq \Pi_{r,s}(U; Z)$ e então $B_y \circ T \in \Pi_{r,s}(U; Z)$, para todo $y \in Y$. Isso equivale a afirmar que $T \in W_{r,s}^B(U; X)$. Para provarmos a desigualdade de normas, consideremos $T \in W_{p,q}^B(U; X)$ e $u_1, \dots, u_n \in U$. Analisemos dois casos:

- Quando $q = s$: Nesse caso, temos $p \leq r$ (por (3.19)) e então, de (1.2) e (??), segue que

$$\begin{aligned} \left\| (T(u_j))_{j=1}^n \right\|_{B,r} &\leq \left\| (T(u_j))_{j=1}^n \right\|_{B,p} \\ &\leq \omega_{p,q}^B(T) \left\| (u_j)_{j=1}^n \right\|_{w,q} \\ &= \omega_{p,q}^B(T) \left\| (u_j)_{j=1}^n \right\|_{w,s}. \end{aligned} \quad (3.20)$$

- Quando $q < s$: Neste caso, temos $p < r$ (por (3.19)). Definindo $t_1, t_2 \in [1, \infty)$ de modo que $\frac{1}{t_1} = \frac{1}{q} - \frac{1}{s}$ e $\frac{1}{t_2} = \frac{1}{p} - \frac{1}{r}$ e, considerando $\lambda_j := \|B_y \circ T(u_j)\|^{r/t_2}$, com $1 \leq j \leq n$ e $y \in Y$, temos

$$\|B_y \circ T(u_j)\|^r = \|B_y \circ T(\lambda_j u_j)\|^p.$$

De fato, como $\frac{1}{t_2} = \frac{1}{p} - \frac{1}{r}$, então $r = \frac{pr}{t_2} + p$, logo

$$\begin{aligned} \|B_y \circ T(u_j)\|^r &= \|B_y \circ T(u_j)\|^{\frac{pr}{t_2} + p} \\ &= (\|B_y \circ T(u_j)\|^{r/t_2} \|B_y \circ T(u_j)\|)^p \\ &= (\lambda_j \|B_y \circ T(u_j)\|)^p \\ &= \|B_y \circ T(\lambda_j u_j)\|^p. \end{aligned}$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned} \left(\sum_{j=1}^n \|B_y \circ T(u_j)\|^r \right)^{\frac{1}{p}} &= \left(\sum_{j=1}^n \|B_y \circ T(\lambda_j u_j)\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\stackrel{(3.8)}{\leq} \omega_{p,q}^B(T) \|y\|_Y \left\| (\lambda_j u_j)_{j=1}^n \right\|_{w,q}. \end{aligned}$$

Como $\frac{1}{q} = \frac{1}{t_1} + \frac{1}{s}$, aplicando a Desigualdade de Höder e usando o fato de $t_2 \leq t_1$, obtemos

$$\left(\sum_{j=1}^n \|B_y \circ T(u_j)\|^r \right)^{\frac{1}{p}} \leq \omega_{p,q}^B(T) \|y\|_Y \left\| (\lambda_j)_{j=1}^n \right\|_{t_1} \left\| (u_j)_{j=1}^n \right\|_{w,s}$$

3.2. Teoremas tipo dominação de Pietsch e consequências

$$\begin{aligned} &\leq \omega_{p,q}^B(T) \|y\|_Y \left\| (\lambda_j)_{j=1}^n \right\|_{t_2} \left\| (u_j)_{j=1}^n \right\|_{w,s} \\ &= \omega_{p,q}^B(T) \|y\|_Y \left(\sum_{j=1}^n \|B_y \circ T(u_j)\|^r \right)^{\frac{1}{t_2}} \left\| (u_j)_{j=1}^n \right\|_{w,s} \end{aligned}$$

e disso, segue que

$$\left(\sum_{j=1}^n \|B_y \circ T(u_j)\|^r \right)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{t_2}} = \left(\sum_{j=1}^n \|B_y \circ T(u_j)\|^r \right)^{\frac{1}{r}} \leq \omega_{p,q}^B(T) \|y\|_Y \left\| (u_j)_{j=1}^n \right\|_{w,s}.$$

Por fim, tomando o supremo de $y \in B_Y$ na desigualdade acima, obtemos

$$\left\| (T(u_j))_{j=1}^n \right\|_{B,r} \leq \omega_{p,q}^B(T) \left\| (u_j)_{j=1}^n \right\|_{w,s}. \quad (3.21)$$

Portanto, pela definição de $\omega_{r,s}^B(T)$, as expressões (3.20) e (3.21) garantem a desigualdade de normas desejada. $\blacksquare$

Uma versão do Corolário 3.2.9 para a classe dos operadores fortemente (B, p) -somantes será apresentada a seguir. Sua demonstração é análoga à prova daquele corolário, portanto será omitida.

Corolário 3.2.12 *Considere-se B uma aplicação bilinear nas condições do Teorema 3.2.8 e $1 \leq q \leq p < \infty$. Então, para todo espaço de Banach V , tem-se*

$$\Pi_q^B(X; V) \subseteq \Pi_p^B(X; V).$$

Além disso, se $T \in \Pi_q^B(X; V)$, então

$$\pi_p^B(T) \leq \pi_q^B(T).$$

Outras consequências dos teoremas tipo Dominação de Pietsch I e II são resultados de coincidências, que apresentaremos a seguir. Para isso, lembremos antes alguns conceitos e resultados da teoria de espaços de Banach.

As funções de Rademacher são definidas por

$$\begin{aligned} r_n : [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N} \\ t &\longmapsto \text{sign}(\sin 2^n \pi t). \end{aligned}$$

Um fato interessante é que as funções de Rademacher possuem a propriedade de ortogonalidade, isto é,

$$\int_0^1 r_j(t) r_k(t) dt = \delta_{jk} = \begin{cases} 1, & \text{se } j = k \\ 0, & \text{se } j \neq k \end{cases}.$$

3.2. Teoremas tipo dominação de Pietsch e consequências

Assim, $(r_n)_{n=1}^\infty$ forma uma sequência ortonormal de $L_2[0, 1]$.

Sejam $1 \leq p, q \leq \infty$ números reais. Um espaço de Banach Z possui *tipo* q se existir uma constante $\theta \geq 0$ tal que, para qualquer escolha finita $z_1, \dots, z_n$ de elementos de Z , vale a desigualdade

$$\left(\int_0^1 \left\| \sum_{j=1}^n r_j(t) z_j \right\|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \leq \theta \left(\sum_{j=1}^n \|z_j\|^q \right)^{\frac{1}{q}}. \quad (3.22)$$

De forma semelhante à definição anterior, um espaço de Banach V possui *cotipo* p se existir uma constante $\kappa \geq 0$ tal que, para qualquer escolha finita $w_1, \dots, w_n$ de elementos de Z , vale a desigualdade

$$\left(\sum_{j=1}^n \|w_j\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \kappa \left(\int_0^1 \left\| \sum_{j=1}^n r_j(t) w_j \right\|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.23)$$

Os ínfimos das constantes θ e κ que satisfazem (3.22) e (3.23), respectivamente, são denotados por $T_q(Z)$ e $C_p(V)$. Para um estudo mais detalhado sugerimos [10, p. 217].

Lema 3.2.13 (Desigualdade de Kahane) [10, p. 211] *Se r_j são funções de Rademacher definidas no intervalo $[0, 1]$, então para todo $0 < p, q < \infty$, existe uma constante $K_{p,q} \geq 0$ tal que*

$$\left(\int_0^1 \left| \sum_{j=1}^n r_j(t) x_j \right|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \leq K_{p,q} \left(\int_0^1 \left| \sum_{j=1}^n r_j(t) x_j \right|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}, \quad (3.24)$$

para todo n natural e $x_1, \dots, x_n$ elementos do espaço de Banach X .

Corolário 3.2.14 *Nas condições do Teorema 3.2.2, suponha que o espaço Z tenha cotipo p , com $2 \leq p < \infty$. Então*

$$W_q^B(U; X) \subset W_{p,2}^B(U; X), \quad \forall 1 \leq q < \infty. \quad (3.25)$$

Em particular, se $p = 2$, temos

$$W_q^B(U; X) = W_2^B(U; X), \quad \forall 2 < q < \infty. \quad (3.26)$$

Demonstração: Como Z tem cotipo p , com $2 \leq p < \infty$, então, por [10, Theorem 11.13], temos $\Pi_q(U; Z) \subset \Pi_{p,2}(U; Z)$, $\forall 1 \leq q < \infty$ e, quando $p = 2$, temos

3.2. Teoremas tipo dominação de Pietsch e consequências

$\Pi_q(U; X) = \Pi_2(U; Z)$, $\forall 2 < q < \infty$. Dessa forma, (3.25) e (3.26) decorrem da Proposição 3.2.11 (ver isso na demonstração dessa proposição). ■

Para a classe dos operadores fortemente (B, p) -somantes, temos um resultado análogo, porém sua demonstração percorre um caminho não tão simples em relação ao caso anterior.

Corolário 3.2.15 *Nas condições do Teorema 3.2.8, suponha que os espaços V e Z tenham, respectivamente, cotipo p e tipo q , com $1 \leq q \leq 2 \leq p \leq \infty$. Então*

$$\Pi_r^B(X; V) \subset \Pi_{p,q}^B(X; V), \quad \forall r \geq 1. \quad (3.27)$$

Em particular, se $p = q = 2$, então

$$\Pi_r^B(X; V) = \Pi_2^B(X; V), \quad \forall r \geq 2.$$

Demonstração: Sejam $T \in \Pi_r^B(X; V)$ e $x_1, \dots, x_n \in X$. Iniciaremos usando o fato de V possuir cotipo p , passando pela Desigualdade de Kahane para $(r, 2)$ e, em seguida, pelo Teorema tipo Dominação de Pietsch II. Então, para cada $y^* \in Y'$, obtemos

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{j=1}^n \|T(x_j)\|_V^p \right)^{\frac{1}{p}} \stackrel{(3.23)}{\leq} C_p(V) \left(\int_0^1 \left\| \sum_{j=1}^n r_j(t) T(x_j) \right\|_V^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \\ & \leq C_p(V) K_{r,2} \left(\int_0^1 \left\| \sum_{j=1}^n r_j(t) T(x_j) \right\|_V^r dt \right)^{\frac{1}{r}} \\ & = C_p(V) K_{r,2} \left(\int_0^1 \left\| T \left(\sum_{j=1}^n r_j(t) x_j \right) \right\|_V^r dt \right)^{\frac{1}{r}} \\ & \stackrel{(3.17)}{\leq} C_p(V) K_{r,2} \pi_r^B(T) \left(\int_0^1 \int_{B_{Y'}} \left\| B \left(\sum_{j=1}^n r_j(t) x_j, y^* \right) \right\|_Z^r d\mu(y^*) dt \right)^{\frac{1}{r}}. \end{aligned}$$

Usando o Teorema de Fubini, a bilinearidade de B , a desigualdade de Kahane (agora para $(2, r)$) e, por fim, o fato de Z ter tipo p , nessa ordem, o cálculo acima implica em

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{j=1}^n \|T(x_j)\|_V^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq C_p(V) K_{r,2} \pi_r^B(T) \left(\int_{B_{Y'}} \int_0^1 \left\| \sum_{j=1}^n r_j(t) B(x_j, y^*) \right\|_Z^r dt d\mu(y^*) \right)^{\frac{1}{r}} \\ & \stackrel{(3.24)}{\leq} C_p(V) K_{r,2} \pi_r^B(T) K_{2,r} \left(\int_{B_{Y'}} \left(\int_0^1 \left\| \sum_{j=1}^n r_j(t) B(x_j, y^*) \right\|_Z^2 dt \right)^{\frac{r}{2}} d\mu(y^*) \right)^{\frac{1}{r}} \end{aligned}$$

3.2. Teoremas tipo dominação de Pietsch e consequências

$$\begin{aligned}
& \stackrel{(3.22)}{\leq} C_p(V)K_{r,2}\pi_r^B(T)K_{2,r}T_q(Z) \left(\int_{B_{Y'}} \left(\sum_{j=1}^n \|B(x_j, y^*)\|_Z^q \right)^{\frac{r}{q}} d\mu(y^*) \right)^{\frac{1}{r}} \\
& \leq C_p(V)K_{r,2}\pi_r^B(T)K_{2,r}T_q(Z) \left(\int_{B_{Y'}} \sup_{y^* \in Y'} \left(\sum_{j=1}^n \|B(x_j, y^*)\|_Z^q \right)^{\frac{r}{q}} d\mu(y^*) \right)^{\frac{1}{r}} \\
& \leq K \left\| (x_j)_{j=1}^n \right\|_{B,q},
\end{aligned}$$

em que $K = C_p(V)K_{r,2}\pi_r^B(T)K_{2,r}T_q(Z)$. Logo, pelo item (ii) da Proposição 3.1.9, segue-se que $T \in \Pi_{p,q}^B(X; V)$ qualquer que seja $r \geq 1$. Isto prova (3.27).

No caso em que $p = q = 2$, como $r \geq 2$, a inclusão contrária é garantida pelo Corolário 3.2.12. ■

Para finalizarmos esta seção, faremos uso do trabalho de D. Popa [23] que aborda uma nova classe de operadores. Para essa nova classe, foram obtidos alguns resultados, entre eles: um Teorema do tipo Dominação Pietsch (e, claro, algumas de suas consequências), um Teorema de Composição, além de uma propriedade “Splitting”. Mostraremos que, sob certas hipóteses, a classe definida por Popa recupera certas classes de operadores fortemente B -somantes e portanto esses resultados são naturalmente herdados por nossas classes de estudo.

Definição 3.2.16 [23, Definition 1] Sejam $1 \leq q \leq p < \infty$, X, V e Z espaços de Banach, Ω um espaço (topológico) compacto de Hausdorff e $S : X \rightarrow C(\Omega, Z)$ uma aplicação linear limitada. Um operador $T \in \mathcal{L}(X; V)$ é dito (p, q, S) -somante se existe uma constante $C \geq 0$ tal que, para todo número natural n e toda n -upla $(x_j)_{j=1}^n$ em X , a seguinte relação é satisfeita

$$\left(\sum_{j=1}^n \|T(x_j)\|_V^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq C \sup_{\omega \in \Omega} \left(\sum_{j=1}^n \|S(x_j)(\omega)\|_Z^q \right)^{\frac{1}{q}}. \quad (3.28)$$

Uma norma do operador T , nesta classe, é dada por

$$\pi_{p,q}^S(T) = \inf\{C; C \text{ satisfaz (3.28)}\}.$$

Quando $p = q$, o operador T é chamado (p, S) -somante e sua norma denotada, simplesmente, por $\pi_p^S(T)$.

Façamos agora um conjunto de escolhas que nos leva a uma identificação entre os operadores (p, q, S) -somantes e os fortemente $(p; B, q)$ -somantes.

3.3. Operadores $\mathcal{B}$ -somantes (fortemente e Cohen) e adjuntos

Exemplo 3.2.17 Seja $B : X \times Y' \longrightarrow Z$ bilinear com X B -normado e tal que o operador $B_x \in \mathcal{L}_{w^*, \|\cdot\|}(Y'; Z)$, para todo $x \in X$. Escolhendo $\Omega = B_{Y'}$, munido com a topologia fraca-estrela, e definindo a aplicação $S : X \longrightarrow C(\Omega, Z)$, pondo $S(x)(y^*) = B(x, y^*)$, é imediato verificar que T é fortemente (B, p) -somante se, e somente se, T é (p, S) -somante.

Os resultados a seguir são consequências imediatas da teoria estudada em [23], mais precisamente do Lemma 1 e Theorem 2, respectivamente, adaptados para a classes dos operadores B -somantes, com a identificação descrita no exemplo acima.

Teorema 3.2.18 (Propriedade Splitting) *Sejam V um espaço de Banach, os parâmetros $1 \leq q \leq p, r < \infty$ tais que $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{r}$ e $B : X \times Y' \longrightarrow Z$ uma aplicação bilinear com X B -normado e tal que $B_x \in \mathcal{L}_{w^*, \|\cdot\|}(Y'; Z)$, para todo $x \in X$. Então, todo operador $T \in \mathcal{L}(X; V)$ fortemente (B, r) -somante é $(q; p)$ -misto somante. Em outras palavras, quaisquer que sejam $n \in \mathbb{N}$ e $(x_j)_{j=1}^n \in X^n$, existem $(\lambda_j)_{j=1}^n \in \mathbb{K}^n$ e $(v_j)_{j=1}^n \in V^n$, tais que*

$$T(x_j) = \lambda_j v_j, \quad 1 \leq j \leq n.$$

Além disso,

$$\|(\lambda_j)_{j=1}^n\|_r \| (v_j)_{j=1}^n \|_{w,p} \leq \pi_r^B(T) \| (x_j)_{j=1}^n \|_{B,q}.$$

Teorema 3.2.19 (Tipo Composição de Pietsch) *Sejam $1 \leq q_i < p_i, r < \infty$ parâmetros que satisfaçam $\frac{1}{q_i} = \frac{1}{p_i} + \frac{1}{r}$, para $i \in \{1, 2\}$, $q_2 \leq q_1$ e $p_2 \leq p_1$. Consideremos V e U espaços de Banach e $B : X \times Y' \longrightarrow Z$ uma aplicação bilinear com X B -normado tal que $B_x \in \mathcal{L}_{w^*, \|\cdot\|}(Y'; Z)$, para todo $x \in X$. Se os operadores $T \in \mathcal{L}(X; V)$ e $V \in \mathcal{L}(V; U)$ são, respectivamente, fortemente (B, r) -somante e (p_1, p_2) -somante. Então, a composição $V \circ T \in \mathcal{L}(X; U)$ é fortemente $(q_1; B, q_2)$ -somante. Além disso,*

$$\pi_{q_1, q_2}^B(V \circ T) \leq \pi_{p_1, p_2}(V) \pi_r^B(T).$$

3.3 Operadores $\mathcal{B}$ -somantes (fortemente e Cohen) e adjuntos

A presente seção destina-se a apresentação de novos operadores cuja definição envolve o espaço de sequências Cohen $(\mathcal{B}, p)$ -somáveis. Esses operadores, de certo modo, caracterizarão adjuntos dos operadores B -somantes já estudados. Optamos por usar a forma caligráfica para notação da aplicação bilinear a fim de diferenciá-la da aplicação B que está definida no espaço X , enquanto que esta é definida no dual X' .

Começemos pelas definições das novas classes.

3.3. Operadores $\mathcal{B}$ -somantes (fortemente e Cohen) e adjuntos

Definição 3.3.1 Sejam $\mathcal{B} : X' \times Y \longrightarrow Z$ uma aplicação bilinear com X' $\mathcal{B}$ -normado, V um espaço de Banach e $1 \leq p < \infty$. Dizemos que $T \in \mathcal{L}(V; X)$ é um operador *fortemente Cohen* $(\mathcal{B}, p)$ -somante se

$$(T(v_j))_{j=1}^{\infty} \in \ell_{\mathcal{B},p}\langle X \rangle \text{ sempre que } (v_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p(V),$$

isto é, se o operador induzido

$$\begin{aligned} \widehat{T} : \ell_p(V) &\longrightarrow \ell_{\mathcal{B},p}\langle X \rangle \\ (v_j)_{j=1}^{\infty} &\longmapsto (T(v_j))_{j=1}^{\infty} \end{aligned} \tag{3.29}$$

estiver bem definido.

O espaço dos operadores lineares fortemente Cohen $(\mathcal{B}, p)$ -somantes de V em X será denotado por $\mathcal{D}_p^{\mathcal{B}}(V; X)$.

Definição 3.3.2 Sejam $\mathcal{B} : X' \times Y \longrightarrow Z$ uma aplicação bilinear com X' $\mathcal{B}$ -normado, V um espaço de Banach e $1 \leq p < \infty$. Dizemos que $T \in \mathcal{L}(X; U)$ é um operador *Cohen* $(\mathcal{B}, p)$ -somante se

$$(T(x_j))_{j=1}^{\infty} \in \ell_p\langle U \rangle \text{ sempre que } (x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_{\mathcal{B},p}\langle X \rangle,$$

isto é, se o operador induzido

$$\begin{aligned} \widehat{T} : \ell_{\mathcal{B},p}\langle X \rangle &\longrightarrow \ell_p\langle U \rangle \\ (x_j)_{j=1}^{\infty} &\longmapsto (T(x_j))_{j=1}^{\infty} \end{aligned}$$

estiver bem definido.

O espaço dos operadores lineares Cohen $(\mathcal{B}, p)$ -somantes em $\mathcal{L}(X; U)$ será denotado por $\mathcal{C}_p^{\mathcal{B}}(X; U)$.

Vejamos alguma caracterizações para as classes de operadores definidas acima. As demonstrações dessas caracterizações, que serão omitidas, repousam sobre os mesmos resultados usados para as demonstrações das Proposições 3.1.6 e 3.1.9, usando o fato de que o espaço das sequências Cohen $(\mathcal{B}, p)$ -somáveis satisfaz as propriedades necessárias, elencadas nas Observações 2.1.15 e 2.1.16.

Proposição 3.3.3 Sejam $1 \leq p < \infty$ e $T \in \mathcal{L}(V; X)$. São equivalentes:

(i) T é fortemente Cohen $(\mathcal{B}, p)$ -somante;

3.3. Operadores $\mathcal{B}$ -somantes (fortemente e Cohen) e adjuntos

(ii) Existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\left\| (T(v_j))_{j=1}^{\infty} \right\|_{\langle \mathcal{B}, p \rangle} \leq C \left\| (v_j)_{j=1}^{\infty} \right\|_p,$$

sempre que $(v_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p(V)$;

(iii) Existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\left\| (T(v_j))_{j=1}^m \right\|_{\langle \mathcal{B}, p \rangle} \leq C \left\| (v_j)_{j=1}^m \right\|_p,$$

para quaisquer m natural e $v_1, \dots, v_m$ em V .

Denotaremos por $d_p^{\mathcal{B}}(T)$ o ínfimo das constantes C tais que uma das desigualdades acima, e portanto ambas, são satisfeitas. Além disso, temos $d_p^{\mathcal{B}}(T) = \|\widehat{T}\|$, em que $\widehat{T}$ é o operador induzido definido em (3.29).

Uma versão análoga à caracterização acima, também é válida para a classe dos operadores Cohen $(\mathcal{B}, p)$ -somantes:

Proposição 3.3.4 *Sejam $1 \leq p < \infty$ e $T \in \mathcal{L}(X; U)$. São equivalentes:*

(i) T é Cohen $(\mathcal{B}, p)$ -somante;

(ii) Existe uma constante $D > 0$ tal que

$$\left\| (T(x_j))_{j=1}^{\infty} \right\|_{C, p} \leq D \left\| (x_j)_{j=1}^{\infty} \right\|_{\langle \mathcal{B}, p \rangle},$$

sempre que $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_{\mathcal{B}, p}\langle X \rangle$.

(iii) Existe uma constante $D > 0$ tal que

$$\left\| (T(x_j))_{j=1}^m \right\|_{C, p} \leq D \left\| (x_j)_{j=1}^m \right\|_{\langle \mathcal{B}, p \rangle},$$

para quaisquer m natural e $x_1, \dots, x_m$ em X .

Denotaremos por $c_p^{\mathcal{B}}(T)$ o ínfimo das constantes D tais que uma das desigualdades acima, e portanto ambas, são satisfeitas. Além disso, temos $c_p^{\mathcal{B}}(T) = \|\widehat{T}\|$, em que $\widehat{T}$ é o operador induzido definido em (3.3.2).

Vamos agora apresentar os principais resultados da seção. A demonstração do primeiro será apresentada e a do segundo, por ser análoga, será omitida.

Proposição 3.3.5 *Sejam $B_1 : X \times Y \rightarrow Z$ e $\mathcal{B}_2 : X'' \times V \rightarrow H$ aplicações bilineares tais que $(\ell_{B_1, p}^n(X))'$ e $\ell_{\mathcal{B}_2, p}^n\langle X' \rangle$ sejam isometricamente isomorfos, com $n \in \mathbb{N}$. Então*

$$T \in \Pi_p^{B_1}(X; V) \Leftrightarrow T' \in \mathcal{D}_{p^*}^{\mathcal{B}_2}(V', X') \quad e \quad \pi_p^{B_1}(T) = d_{p^*}^{\mathcal{B}_2}(T').$$

3.3. Operadores $\mathcal{B}$ -somantes (fortemente e Cohen) e adjuntos

Demonstração: Seja $T \in \Pi_p^{B_1}(X; V)$. Para provarmos que $T' \in \mathcal{D}_{p^*}^{B_2}(V', X')$, basta-nos mostrar, tendo em mente a Proposição 3.3.3 e o diagrama abaixo, que $\widehat{T}'$ está bem definido.

$$\begin{array}{ccc} \ell_{p^*}^n(V') & \xrightarrow{\widehat{T}'} & \ell_{\mathcal{B}_2, p^*}^n\langle X' \rangle \\ J \downarrow & \circlearrowleft & \uparrow \Gamma \\ (\ell_p^n(V))' & \xrightarrow{(\widehat{T})'} & (\ell_{\mathcal{B}_1, p}^n(X))' \end{array}$$

Ou seja, devemos mostrar que

$$\widehat{T}' = \Gamma \circ (\widehat{T})' \circ J \Rightarrow \widehat{T}' \in \mathcal{L}(\ell_{p^*}^n(V'); \ell_{\mathcal{B}_2, p^*}^n\langle X' \rangle), \quad (3.30)$$

em que J e Γ são os isomorfismos isométricos duais, dados por:

$$J((v_j^*)_{j=1}^\infty)((v_j)_{j=1}^\infty) = \sum_{j=1}^n v_j^*(v_j) \text{ e } \Gamma(\varphi) = (\varphi \circ \Gamma_i)_{i=n}^n \text{ (para o último, ver (2.11)).}$$

Ressaltamos que, por abuso de notação, os operadores $\widehat{T}'$ e $(\widehat{T})'$ denotarão, respectivamente, suas restrições $\widehat{T}'|_{\mathcal{L}(\ell_{p^*}^n(V'); \ell_{\mathcal{B}_2, p^*}^n\langle X' \rangle)}$ e $(\widehat{T})'|_{\mathcal{L}((\ell_p^n(V))'; (\ell_{\mathcal{B}_2, p}^n(X))')}$.

É claro que o operador linear $(\widehat{T})'$ está bem definido e é contínuo. Assim, a composição $\Gamma \circ (\widehat{T})' \circ J$ pertence a $\mathcal{L}(\ell_{p^*}^n(V'); \ell_{\mathcal{B}_2, p^*}^n\langle X' \rangle)$. Agora, se $v^* := (v_j^*)_{j=1}^n$ pertence a $\ell_{p^*}^n(V')$, então

$$\Gamma \circ (\widehat{T})' \circ J((v_j^*)_{j=1}^n) = \Gamma \circ J_{v^*} \circ \widehat{T} = \left(J_{v^*} \circ \widehat{T} \circ \Gamma_i \right)_{i=1}^n,$$

usando a notação $J((v_j^*)_{j=1}^\infty) = J_{v^*}$. Assim, para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ e $x \in X$, temos

$$\begin{aligned} J_{v^*} \circ \widehat{T} \circ \Gamma_i(x) &= J_{v^*} \circ \widehat{T}((\delta_{ij}x)_{j=1}^n) \\ &= J_{v^*}((\delta_{ij}T(x))_{j=1}^n) \\ &= \sum_{j=1}^n v_j^*(\delta_{ij}T(x)) \\ &= v_i^*(T(x)) \\ &= T'(v_i^*)(x) \end{aligned}$$

e isso mostra que

$$\Gamma \circ (\widehat{T})' \circ J((v_j^*)_{j=1}^n) = \left(J_{v^*} \circ \widehat{T} \circ \Gamma_j \right)_{j=1}^n$$

3.3. Operadores $\mathcal{B}$ -somantes (fortemente e Cohen) e adjuntos

$$\begin{aligned} &= (T'(v_j^*))_{j=1}^n \\ &= \widehat{T}'((v_j^*)_{j=1}^n). \end{aligned}$$

Disso, segue a implicação (3.30). Mais ainda, como $\|\Gamma\| = \|J\| = 1$, temos

$$\begin{aligned} d_{p^*}^{\mathcal{B}_2}(T') &= \|\widehat{T}'\| = \left\| \Gamma \circ (\widehat{T})' \circ J \right\| \\ &\leq \|\Gamma\| \left\| (\widehat{T})' \right\| \|J\| \\ &= \left\| (\widehat{T})' \right\| = \|\widehat{T}\| = \pi_p^{B_1}(T), \end{aligned}$$

ou seja,

$$d_{p^*}^{\mathcal{B}_2}(T') \leq \pi_p^{B_1}(T). \quad (3.31)$$

Reciprocamente, sejam $(x_j)_{j=1}^n \in X^n$ e $(v_j^*)_{j=1}^n \in (V')^n$. Usando a caracterização do dual de $\ell_p^n(V)$, tem-se

$$\begin{aligned} \left\| (T(x_j))_{j=1}^n \right\|_p &= \sup \left\{ \left| \sum_{j=1}^n v_j^*(T(x_j)) \right| ; (v_j^*)_{j=1}^n \in B_{\ell_{p^*}^n(V')} \right\} \\ &= \sup \left\{ \left| \sum_{j=1}^n T'(v_j^*)(x_j) \right| ; (v_j^*)_{j=1}^n \in B_{\ell_{p^*}^n(V')} \right\} \\ &= \sup \left\{ \sum_{j=1}^n |T'(v_j^*)(x_j)| ; (v_j^*)_{j=1}^n \in B_{\ell_{p^*}^n(V')} \right\} \\ &\stackrel{(2.1)}{=} d_{p^*}^{\mathcal{B}_2}(T') \sup \left\{ \sum_{j=1}^n \left| \frac{T'(v_j^*)}{d_{p^*}^{\mathcal{B}_2}(T')} (x_j) \right| ; (v_j^*)_{j=1}^n \in B_{\ell_{p^*}^n(V')} \right\} \\ &\leq d_{p^*}^{\mathcal{B}_2}(T') \sup \left\{ \sum_{j=1}^n |x_j^*(x_j)| ; (x_j^*)_{j=1}^n \in B_{\ell_{\mathcal{B}_2, p^*}^n(X')} \right\} \\ &= d_{p^*}^{\mathcal{B}_2}(T') \|(x_j)_{j=1}^n\|_{B_{1,p}}. \end{aligned}$$

Portanto, por (ii) da Proposição 3.1.6, $T \in \Pi_p^{B_1}(X; V)$. Além disso, da expressão acima, concluímos que

$$\pi_p^{B_1}(T) \leq d_{p^*}^{\mathcal{B}_2}(T').$$

Finalmente, a desigualdade acima e (3.31) garantem a igualdade de normas. $\blacksquare$

Proposição 3.3.6 *Sejam $B_1 : X \times Y \longrightarrow Z$ e $\mathcal{B}_2 : X'' \times V \longrightarrow H$ aplicações bilineares tais que $(\ell_{B_1, p}^n(X))'$ e $\ell_{\mathcal{B}_2, p}^n\langle X' \rangle$ sejam isometricamente isomorfos, com $n \in \mathbb{N}$. Então*

$$T \in W_p^{B_1}(U; X) \Leftrightarrow T' \in \mathcal{C}_{p^*}^{\mathcal{B}_2}(X', U') \quad e \quad \omega_p^{B_1}(T) = c_{p^*}^{\mathcal{B}_2}(T').$$

Referências Bibliográficas

- [1] O. BLASCO, J. M. CALABUIG, AND T. SIGNES, *A bilinear version of Orlicz-Pettis theorem*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, **348** (2008), 150–164.
- [2] O. BLASCO, J. M. CALABUIG, AND T. SIGNES, *Some classes of p -summing type operators*, Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana: Tercera Serie, Vol. 9, N°. 1, **348** (2003), 119–133.
- [3] G. BOTELHO, D. PELLEGRINO E E. TEIXEIRA, *Fundamentos de Análise Funcional*, Sociedade Brasileira de Matemática, 2ª edição, 2015.
- [4] G. BOTELHO, J. R. CAMPOS, AND J. SANTOS, *Operator ideals related to absolutely summing and Cohen Strongly summing operator*, Pacific Journal of Mathematics, **87** (2017), No. 1, 1-17.
- [5] G. BOTELHO AND J. R. CAMPOS, *On the transformation of vector-valued sequences by multilinear operators*, Monatshefte für Mathematik, **183** (2017), 415-435.
- [6] J. M. CALABUIG, *Integración bilineal*, Tesis de doctoral, Universidad de Valencia, 2004.
- [7] J. R. CAMPOS, *Contribuições à teoria dos operadores Cohen fortemente somantes*, Tese de doutorado, UFPB, 2013.
- [8] J. S. COHEN, *Absolutely p -summing, p -nuclear operators and their conjugates*, Mathematische Annalen, **201** (1973), 177-200 .

Referências Bibliográficas

- [9] A. DEFANT AND K. FLORET, *Tensor Norms and Operator Ideals*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1993.
- [10] J. DIESTEL, H. JARCHOW, AND A. TONGE, *Absolutely summing operators*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics 43, Cambridge University Press, 1995.
- [11] I. FERRANDO, *Factorization theorem for 1-summing operators*, Czechoslovak Mathematical Journal, **61**, (2011), 785–793.
- [12] A. GROTHENDIECK, *Résumé de la théorie métrique des produits tensoriels topologiques*, Boletim da Sociedade de Matemática de São Paulo, (1956), 1-79.
- [13] J. LINDENSTRAUSS AND A. PELCZYNSKI, *Absolutely summing operators in L^p spaces and their applications*, Studia Mathematica, **29** (1968), 276-326.
- [14] A. K. KARN AND D. P. SINHA, *An operator summability of sequences in Banach spaces*, Glasgow Mathematical Journal, **56** (2014), 427-437.
- [15] E. L. LIMA, *Curso de análise*, v.1, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 14^a edição, 2013.
- [16] L. MEZRAG AND K. SAADI, *Inclusion theorems for Cohen strongly summing multilinear operators*, Bulletin of the Belgian Mathematical Society Simon Stevin **16** (2009), 1-11.
- [17] B. MITJAGIN AND A. PELCZYNSKI, *Nuclear operators and approximative dimension*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, 1966, 366-372.
- [18] D. F. NOGUEIRA, *Espaços de sequências vetoriais e ideais de operadores*, Dissertação de mestrado, UFU, 2016.
- [19] D. PELLEGRINO AND J. SANTOS, *A general Pietsch domination theorem*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, **375**, (1) (2011), 371-374.
- [20] A. PIETSCH, *Absolut p -summierende Abbildungen in normierten Räumen*, Studia Mathematica, **27**, (1967), 333-353.

Referências Bibliográficas

- [21] A. PIETSCH, *Ideals of multilinear functionals*, Proceedings of the Second International Conference on Operator Algebras, Ideals and Their Applications in Theoretical Physics, 185-199, Teubner-Texte, Leipzig, 1983.
- [22] A. PIETSCH, *Operator Ideals*, North-Holland, Amsterdam, 1980.
- [23] D. POPA, *The splitting property for (p, S) -summing operators*, Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Serie A. Matemáticas, **111** (2017), 167-175.
- [24] R. A. RYAN, *Introduction to Tensor Products of Banach Spaces*, Springer-Verlag, 2002.