UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS DA NATUREZA
DEPARATAMENTO DE MATEMÁTICA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

Saul Arcanjo Santos Nascimento de Morais

ANÁLISE DO LIVRO DIDÁTICO DE MATEMÁTICA: Um enfoque psicológico

JOÃO PESSOA - PARAÍBA
2021

Saul Arcanjo Santos Nascimento de Morais

ANÁLISE DO LIVRO DIDÁTICO DE MATEMÁTICA: Um enfoque psicológico

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal da Paraíba, como requisito parcial para obtenção do título de licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Ms. Edison Thadeu Bichara Dantas.

JOÃO PESSOA - PARAÍBA

2021

Catalogação na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

M824a Morais, Saul Arcanjo Santos Nascimento de.
Análise do livro didático de matemática : um enfoque psicológico / Saul Arcanjo Santos Nascimento de Morais. - João Pessoa, 2021.
40 f. : il.

Orientação: Edison Thadeu Bichara Dantas.
TCC (Graduação/Licenciatura em Matemática) - UFPB/CCEN.

1. Análise do livro didático. 2. Conjuntos. 3. Trigonometria no triângulo. I. Dantas, Edison Thadeu Bichara. II. Título.

UFPB/CCEN CDU 51:37(043.2)

Elaborado por Josélia Maria Oliveira da Silva - CRB-15/113

SAUL ARCANJO SANTOS NASCIMENTO DE MORAIS

ANÁLISE DO LIVRO DIDÁTICO DE MATEMÁTICA: Um enfoque psicológico

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal da Paraíba Como requisito parcial para obtenção do título de licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Ms. Edison Thadeu Bichara Dantas.

Aprovado(a) em: 16/07/2021.

BANCA EXAMINADORA:

Prof.Ms. Edison Thadeu Bichara Dantas - UFPB
(Orientador)

Prof.Dr. Roosevelt Imperiano Da Silva - UFPB
(Avaliador)

Prof. Dr Vinícius Varella Ferreira – UFPB
(Avaliador)

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA

ATA Nº 8 / 2021 - CCEN-CGM (11.01.14.44)

Nº do Protocolo: 23074.070477/2021-37

João Pessoa-PB, 16 de Julho de 2021

ATA DA SESSÃO PÚBLICA DE DEFESA DO TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO DO DISCENTE SAUL ARCANJO SANTOS NASCIMENTO DE MORAIS, MATRÍCULA 20170031437, DO CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA.

Ao décimo sexto dia do mês de julho dois mil e vinte e um (16/07/2021), às 16:00 horas, por videoconferência via plataforma Google Meet, através do link https://meet.google.com/qej-zhcu-osj, em conformidade com a portaria nº 29/GR/REITORIA de 22 de julho de 2021, que dispõe sobre a regulamentação, em caráter excepcional e temporário, das atividades da graduação da Universidade Federal da Paraíba durante o período de isolamento social imposto pela pandemia de coronavírus (covid-19), reuniram-se em caráter de solenidade pública, os membros da comissão designada para avaliar Saul Arcanjo Santos de Morais. Foram componentes da Banca Examinadora, os professores Ms. Edson Thadeu Bichara Dantas (Orientador), Dra. Roosevelt Imperiano da Silva(UFPB) e Dr. Vinícius Martins Varella (UFPB). Dando início aos trabalhos, o Presidente da Banca, Edison Thadeu Bichara Dantas, após declarar os objetivos da reunião, apresentou o candidato a quem concedeu a palavra para que dissertasse, oral e sucintamente, sobre o tema apresentado, intitulado "Análise do Livro didático de Matemática: Um enfoque psicológico". Após discorrer sobre o referido tema, o candidato foi arguido pelos examinadores na forma regimental. Ato contínuo passou a comissão, em caráter secreto, a proceder à avaliação e julgamento do trabalho, concluindo por atribuir-lhe a nota **10,0 (dez)** e, portanto, o conceito **Aprovado.**

João Pessoa, 16 de julho de 2021.

(Assinado digitalmente em 21/07/2021 15:58)
EDISON THADEU BICHARA DANTAS
PROFESSOR DO MAGISTERIO SUPERIOR
Matrícula: 1030411

(Assinado digitalmente em 04/08/2021 12:11)
ROOSEVELT IMPERIANO DA SILVA
PROFESSOR DO MAGISTERIO SUPERIOR
Matrícula: 337361

(Assinado digitalmente em 02/08/2021 11:36)
VINICIUS MARTINS VARELLA
PROFESSOR DO MAGISTERIO SUPERIOR
Matrícula: 2424301

RESUMO

Este trabalho tem por objetivo a análise dos conteúdos presentes no livro didático de Matemática do 1º ano do ensino médio O objetivo foi o de analisar, à luz dos critérios preconizados, se houve embasamento nas teorias que norteiam a aprendizagem da Matemática no momento atual. Foi realizada uma investigação acerca dos temas: Conjuntos e Trigonometria no triângulo do livro #contato Matemática dos autores: Joamir Roberto de Souza e Jacqueline da Silva Ribeiro Garcia. A análise teve um caráter analítico-descritivo, onde foram apontados os méritos e deméritos, da obra em apreço, com base em critérios pré-estabelecidos. Estes foram construídos, respaldados na Teoria de Registro de Representação Semiótica de Raymond Duval (2009) e na Teoria dos Campos Conceituais de Gérard Vergnaud (1993). O processo de análise revelou haver alguma fundamentação nas teorias supracitadas, no entanto, algumas ressalvas foram feitas em relação às mudanças de registro e ao uso de representações simbólicas ao longo do texto considerado.

Palavras-chaves: Análise do livro didático. Conjuntos. Trigonometria no triângulo.

ABSTRACT

This work aims to analyze the contents present in the mathematics textbook of the 1st year of high school. The objective was to analyze, in the light of the recommended criteria, if there was a basis in the theories that guide the learning of Mathematics at the present time. An investigation was carried out on the themes: Sets and Trigonometry in the triangle of the book #contato Mathematics by the authors: Joamir Roberto de Souza and Jacqueline da Silva Ribeiro Garcia. The analysis had an analytical-descriptive character, where the merits and demerits of the work in question were pointed out, based on pre-established criteria. These were built, supported by Raymond Duval's Theory of Registration of Semiotic Representation (2009) and by Gérard Vergnaud's Theory of Conceptual Fields (1993). The analysis process revealed that there is some foundation in the aforementioned theories, however, some reservations were made in relation to registry changes and the use of symbolic representations throughout the considered text.

Keywords: Textbooks analysis. Sets. Trigonometry in the triangle.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

Uma das grandes preocupações da Educação em Matemática, além do domínio dos conteúdos específicos, é a busca do domínio dos processos pedagógicos para entender qual seria a melhor forma de se transmitir ou assimilar um conhecimento específico e em como torná-lo adequado para a faixa etária do aluno para que ele possa moldá-lo da melhor forma possível.

Atualmente, há um enfoque em metodologias e recursos didáticos que facilitam o processo de ensino e aprendizagem. Mas, mesmo com a criação de novos métodos de ensino e recursos didáticos, o livro didático ainda continua sendo um dos principais recursos utilizados por professores e alunos durante suas trajetórias pelo ensino básico, seja por conta de ser um material mais acessível, pelo comodismo ou costume de utilizá-lo.

Em virtude disso, existe uma demanda muito alta para a produção de novos materiais didáticos. Deste modo, tornasse necessário o trabalho de análise dessas obras para identificar se elas serão eficientes no processo de ensino-aprendizagem dos estudantes. Além disso, o trabalho de análise é importante, pois nem todos os professores possuem o embasamento teórico e nem o tempo necessário para analisar as possíveis obras que poderão ser utilizadas nas suas respectivas salas de aula.

Como já foi mencionado, é necessário que os livros didáticos tenham como base teóricos que já estudam o processo de ensino-aprendizagem por anos. Em virtude disso, decidimos observar alguns capítulos referentes ao livro didático #contato Matemática que foi utilizado durante o calendário escolar de 2020 em turmas do 1º ano do ensino médio de uma escola estadual.

Afinal, será que o livro #contato Matemática, dos autores Joamir Souza e Jacqueline Garcia, estão em consonância com os principais teóricos que norteiam a aprendizagem matemática?

O livro da editora FTD (1ª edição) engloba os conteúdos referentes a Conjuntos, Funções, Progressões e Trigonometria no triângulo e integra o Programa Nacional do Livro e do Material Didático (PNLD), encerrando o seu ciclo no final de 2020.

Para responder o questionamento que levantamos, decidimos fazer uma análise qualitativa para avaliar a existência desse embasamento teórico-psicológico no conteúdo dos capítulos específicos do referido livro. A saber: o primeiro e o último capítulo desse livro: Conjuntos e Trigonometria no triângulo. Os critérios de análise, dos referidos capítulos, serão norteados pela Teoria de Registro de Representação Semiótica de Raymond Duval (2009) e pela Teoria dos Campos Conceituais de Gérard Vergnaud (1993).

Os dois psicólogos cognitivistas franceses (Raymond Duval e Gérard Vergnaud) concentram seus estudos na aprendizagem matemática, por meio de mecanismos que levem a elaboração do conhecimento, apontando ideias interessantes a respeito da aprendizagem da matemática escolar.

Pela teoria de Duval existe um enfoque maior nas múltiplas representações do objeto matemático, por acreditar que a mobilização dos objetos só ocorre a partir de suas representações. Enquanto, Vergnaud foca mais nas relações provenientes e causadas pelos conceitos, além de observar o que o sujeito é capaz de produzir a partir dos conhecimentos que ele já possui.

Como o trabalho tem caráter analítico-descritivo, descreveremos as categorias de análise a partir de estudos dos textos e dos exercícios propostos para os alunos presentes na obra. Assim, elaboramos os seguintes critérios:

1 - Existência de uma diversidade de representações simbólicas relacionadas aos conceitos e aos procedimentos de tratamento.

2 - Existência de uma diversidade de situações relacionadas aos conceitos abordados.

3 - Prevalência, no texto e nos exercícios, de situações que remetem às mudanças de registro.

4 - Consonância da linguagem simbólica matemática apresentada com o nível de maturidade intelectual, do aluno, exigida na série considerada.

1.1. Objetivo do trabalho de análise

1.1.1. *Objetivo Geral*

- Análise dos conteúdos presentes no livro didático de Matemática no 1º ano do ensino médio.

1.1.2. *Objetivos Específicos*

- Identificar recortes textuais que dão ênfase às mudanças de registro.
- Citar atividades cognitivas ligadas ao tratamento.
- Descrever as situações relacionadas aos conceitos e objetos matemáticos presentes.
- Identificar as diferentes representações simbólicas utilizadas para representar os objetos matemáticos.

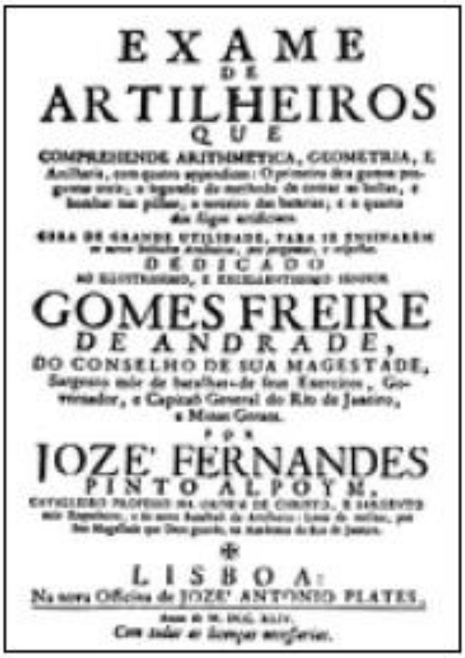
.

2. INTERFACES HISTÓRICAS E TEÓRICAS DO LIVRO DIDÁTICO

2.1. História do livro didático

A concepção adotada de livro didático será a mesma utilizada por Batista (1999 apud Alves 2005, p. 14) onde ele define "como um livro ou impresso utilizado pela escola para o desenvolvimento de um processo de ensino ou de formação". E os primeiros relatos de livro didático escrito no Brasil se referem ao livro Exame de Artilheiros de 1744, produzido por Joze Fernandes Pinto Alpoim (Valente, 1999). É importante destacarmos que ele foi impresso em Lisboa, pois o Brasil não tinha os aportes necessários para a impressão da obra no país.

Figura 1 – Capa do livro Exame de Artilheiros


EXAME
DE
ARTILHEIROS
QUE
COMPREHENDE ARITHMETICA, GEOMETRIA, E
DEDICADO
GOMES FREIRE
DE ANDRADE,
DO CONSELHO DE SUA MAGESTADE,
POR
JOZE' FERNANDES
PINTO ALPOYM,
LISBOA:

Fonte: Valente (1999).

Segundo Alves (2005), o livro voltado para a formação militar era apresentado na forma de perguntas e repostas, além de conter, no material, conteúdos referentes à arte militar e a Matemática necessária para compreender o assunto. Valente (1999) aponta que a Matemática, contida no Exame, era básica e abordava conteúdos que são utilizados atualmente no ensino fundamental e médio, sendo dividido em três conteúdos: Aritmética, Geometria e Artilharia. Os autores ainda mencionam que o autor da obra procurava atender mais objetivos didáticos e existia uma ênfase maior na Aritmética (em especifico, as operações fundamentais). Também podemos notar uma grande diferença desta obra para os livros didáticos utilizados atualmente com relação à quantidade de notações matemática usadas, pois naquela época não existia ainda uma formalização da Matemática. A partir de 1809, houve importantes traduções de obras de autores europeus de Matemática como Os Elementos da Álgebra do matemático suíço Leonhard Euler e os Elementos de Geometria e Tratado de Trigonometria do francês Adrien Marie Legendre, essas obras foram consideradas as primeiras impressas no Brasil. E em 1830 surgem a primeiras obras didáticas brasileiras usadas em escolas primárias, além de livros escritos também para professores e no século XX já havia uma preocupação em produzir matérias para o professor e outro para o aluno de uma mesma obra (ALVES, 2005).

É importante destacarmos que até então não existia a disciplina de Matemática. A Aritmética, Álgebra e Geometria eram ministradas de forma autônomas e só em 1929 houve a criação da disciplina por meio de uma reorganização curricular proposta por Euclides Roxo (diretor e professor do Colégio Pedro II) e, consequentemente, uma nova forma de representação da matemática no currículo escolar, como a utilização de instrumentos para avaliar grandezas (régua ou compasso), além de recorrerem mais a experimentação e deixando um pouco de lado a abstração (VALENTE, 2006).

Figura 2 – Livro Como se aprende Matemática

Fonte: Valente (2006).

Nesse mesmo ano, foi publicada a obra de Euclides Roxo (Curso de Matemática Elementar), sendo o primeiro livro produzido de acordo com as novas exigências da disciplina e incentivou a produção de novos livros como a obra de Saverio Cristofaro (*Como se aprende Matemática*) que considerava a Geometria e gráficos como essências para o ensino da Matemática (ipid).

Em 1930, segundo Valente (2006, p. 12) é criado um novo programa que dá mais autonomia aos professores permitindo-os escolher a ordem dos conteúdos e o nível de dificuldade que serão abordados os assuntos de acordo com o aproveitamento e nível intelectual da turma. Com este segundo programa, é criada uma segunda edição do livro onde é separada em capítulos distinto a parte aritmética da algébrica. Além disso, a segunda edição do livro, *Como se aprende Matemática*, incentivou a escrita e a organização dos demais livros que seriam produzidos posteriormente.

2.2. Características do livro didático no ensino

Para existir uma compreensão melhor sobre o livro didático, não devemos apenas olhá-lo como uma mercadoria de consumo. Também temos que levar em consideração sua influência, positiva e negativa, em nosso meio.

Libâneo (1994) traz uma questão bastante interessante a respeito do livro no qual ele aponta que o livro acaba ocultando como o conhecimento foi criado ao longo de anos e, ao mesmo tempo, é gerado sem nenhum propósito ou sem algum contexto histórico por trás. Consequentemente, acaba passando a ideia de que o conhecimento surge do nada e sem motivo algum.

Por outro lado, também temos o fato dele não ser uma verdade absoluta ou que todas as informações essenciais estão presentes neles. Dessa forma, ele deve ser usado apenas como um material que deve ser complementado (ipid). Também devemos utilizar com outras fontes de conhecimento ao mesmo tempo, como outros livros, internet, o próprio conhecimento do aluno e do professor. Como afirma Brasil (2010, p. 67) ao dizer que “a variedade de informação é que contribuirá para o aluno ter uma visão ampla do conhecimento”.

O autor Libâneo (1994) também menciona a sobrecarga de conteúdos que acabam sendo gerados nos alunos, pois os professores acabam se sentindo na obrigação de ministrar todo o conteúdo programado no livro em um curto período de tempo para cumprir os prazos ou ensinar o que é pretendido antes da prova, por conta disso, ocorre uma sobrecarga cognitiva, pois o tempo que se demora para aprender não é o mesmo levado para ensinar.

Por comodismo dos professores, ou existir muita adoração, o livro didático também responsável por determinar quais conteúdos, como e de que forma serão ensinados (MEC, 1996). Assim, acaba tirando um pouco da autonomia dos professores já que eles acham que devem seguir o que se é sugerido nos livros, como exemplo, temos o manual do professor que está sempre dando orientações didáticas ao professor, além de citar referências e a presença de exercícios resolvidos.

No entanto, o mesmo autor, também afirma que o livro didático pode ter um papel decisivo, mas não exclusivo, no processo de aprendizagem por conta das atividades propostas na obra. Outro fator, é que ele é um artefato tecnológico de mudança do saber cientifico para o escolar, para diminuir o grau de complexidade ao ser ensinado um determinado conteúdo.

A partir das críticas feitas pelos estudiosos, é fácil perceber que eles não fazem críticas às obras em si, mas a maneira em que ela é utilizada pelos professores no ensino e que ela possui papel decisivo no processo de aprendizagem dos alunos.

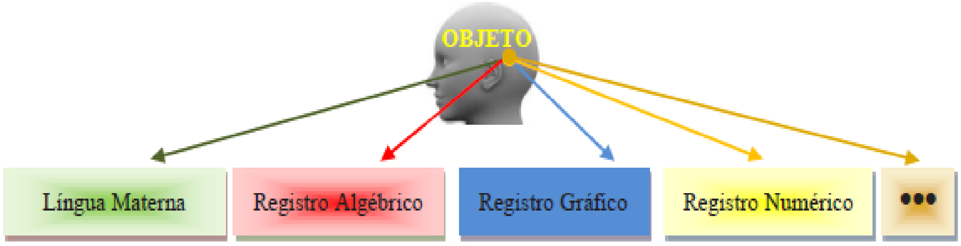
Além disso, Libanêo (1994) afirma que o livro didático, por ser impresso e de fácil locomoção, é um ótimo recurso didático e, muitas vezes, o único disponível para consulta, principalmente por alunos de escola pública, além de integrar e sistematizar os conteúdos dos livros, já que alguns conteúdos são necessários para a aprendizagem de outro. Como por exemplo, não podemos aprender função sem antes ter aprendido conjuntos.

E ainda completa dizendo que o livro didático é uma agenda cultural por fornecer conhecimento em uma sequência de informações lógicas, manifestar inserções de valores, traz problemas sociais, induz a conscientização dos estudantes, além de levantar questionamentos e reflexões (ipid).

2.3. Interfaces teóricas

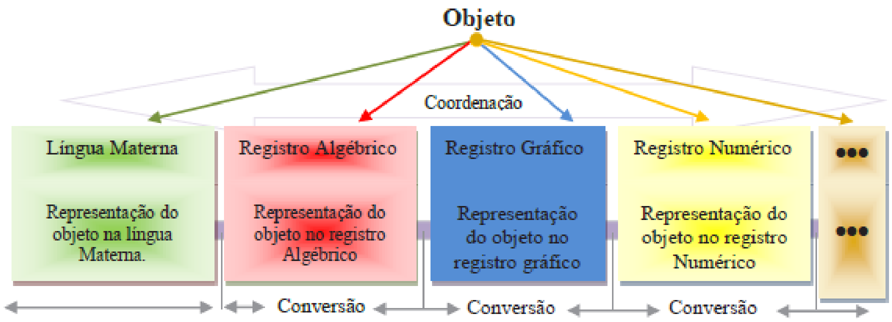
Vamos utilizar o teórico Duval, pois as representações semióticas são essenciais no processo de construção do conhecimento matemático, sejam eles representados por meio de gráficos, tabelas, figuras geométricas, diagramas, etc. Em outras palavras, segundo Duval (2012, p. 268) para compreender a Matemática é necessário distinguir o objeto matemático de sua representação, além de serem necessárias, pois os objetos matemáticos (números, conjuntos, área, ponto, reta, etc.) não são acessíveis, já que são objetos ideais, ou seja, constructos mentais que não podem ser trabalhados e, por isso, necessitam de um sistema semiótico para acessá-los. No caso, o sistema semiótico é um conjunto de signos que permite identificar o objeto representado e desempenha a função de comunicação, pois é capaz de produzir e transmitir informações (DUVAL, 2011). No qual os signos serão as letras, algarismos e siglas, ou seja, caracteres utilizados inicialmente para dar um sentido que pode ser visto a partir de uma relação envolvendo objeto, símbolo e interpretante. Deste modo, o objeto será o que está sendo representado, podendo estar na forma concreta ou abstrata, os símbolos seriam os sinais que estão sendo utilizados para representar o objeto e o conceito gerado por esses sinais seria o interpretante. Também é fácil notar que as interpretações, em uma determinada representação, são realizadas através dos signos. Ou seja, o seu sentido, está relacionado com a forma no qual o objeto é apresentado ao sujeito. E os registros são um caso particular de sistemas semióticos da Matemática que, além da função de comunicação, também desempenham as funções cognitivas de objetivação (entendimento para si, ou seja, a aquisição do conhecimento) e tratamento (DUVAL, 2011). Duval (1995) destaca três questões que estão diretamente relacionadas com os registros: formação (são regras e características do conteúdo envolvido), tratamento (transformação de uma representação em outra do mesmo registro) e conversão (transformação de uma representação em outra de registro diferente). Duval (1995 apud HENRIQUES; ALMOULOUD, 2016, p. 469-470) ainda ressalta que, para ocorrer uma compreensão significativa do conteúdo, o indivíduo deve conseguir representar um objeto em dois ou mais registros, o que acaba sendo chamado de coordenação.

Figura 3 – Alguns registros de representação de um objeto matemático



Fonte: Afonso Henrique e Saddo Ag Almouloud (2016).

Figura 4 – Conversão e coordenação de representações entre registros



Fonte: Afonso Henrique e Saddo Ag Almouloud (2016).

Vale ressaltar que o autor também relata que isso é fundamental, mas não suficiente para a compreensão. Como já mencionamos, também é necessário não confundir os objetos matemáticos com suas representações e para isso são necessárias duas operações cognitivas relacionadas ao objeto matemático ou sua representação que são chamadas de "*semiósis*" e "*noésis*". A primeira operação cognitiva está relacionada com a compreensão ou à produção de uma determinada representação semiótica (representação de uma ideia produzida a partir de um sistema de sinais) ligada com três atividades cognitivas fundamentais, como mencionado anteriormente: formação, tratamento e conversão. E a segunda operação está relacionada com a aquisição conceitual do objeto a partir do esclarecimento dos signos na mente do sujeito. Também temos que levar em consideração que é possível realizar tratamentos operatórios específicos, já que cada representação semiótica pode gerar um sentido diferente para o mesmo objeto.

É possível observar o tratamento quando resolvemos uma simples equação do primeiro grau $x+1=3$ em $x=2$ onde podemos notar que ela está acontecendo dentro de uma mesma rede semântica e a conversão é possível ser observada quando passamos uma função na forma algébrica para a sua forma gráfica, ou seja, houve mudança na representação, mas o objeto matemático continua sendo o mesmo. E a formação, seria por exemplo respeitar as regras para a construção de um círculo onde deve ser um conjunto de pontos equidistante a um único ponto para assegurar a identificação e o reconhecimento da representação, além disso, ela permite saber qual objeto matemático está sendo representado.

Ele também menciona que pode existe um certo nível de dificuldade na passagem de registros; pois, em alguns casos, as expressões podem "dizer a mesma coisa" sendo verdadeiras ou falsas ou não serem semanticamente iguais e, consequentemente, há um custo cognitivo importante para sua compreensão (DUVAL, 1988, p. 8).

E ainda, as representações semióticas, segundo Duval (2003), podem ser classificadas em registros: multifuncionais (os tratamentos não são algoritmizáveis, como a língua natural e as figuras geométricas) e em monofuncionais (os tratamentos são algoritmizáveis, como a escrita numérica, escrita algébrica, escrita simbólica e gráficos).

Também vamos utilizar a Teoria de Campos Conceituais que se preocupa em entender o processo de aprendizagem para conteúdos específicos, não sendo exclusiva da Matemática. Segundo Vergnaud (1983, p.127), é um conjunto de situações e problemas que, para o seu tratamento, necessitam de conceitos, procedimentos e diferentes tipos de representações que estão diretamente relacionados. No qual o conceito é definido como um tripleto de três conjuntos (S, I, R) chamados de situações, invariantes operatórios e representações simbólicas. Onde o primeiro conjunto, está sendo atribuído o sentido de uma tarefa ou a combinação de duas ou mais delas que, ao resolver, o conceito começa a fazer sentido para o estudante. Em outras palavras, esse primeiro conjunto é responsável por atribuir significado ao conceito que acaba sendo facilitado quando é apresentado vários tipos de situações diferentes aos alunos (VERGNAUD, 1993). Além disso, as situações podem ser mais simples ou mais complexas e, de acordo com o grau de complexidade, ela pode ser dividida em subtarefas que facilitem a sua compreensão. E para resolvê-las, os estudantes utilizam esquemas onde são uma sequência de ações, podendo ser de coleta de dados ou controle, que variam de acordo com cada situação (VERGNAUD, 1994, p. 53). Daí a importância de existirem exercícios resolvidos nos livros didáticos, pois são a partir deles que são apresentados esquemas onde são utilizados, sendo modificados ou não, para resolver novas situações de um mesmo conceito. Já o segundo conjunto, invariantes operatórios, é responsável pelo conhecimento contido nos esquemas no qual podem ser chamados de conceito-em-ação e teorema-em-ação. Os conceitos-em-ação são utilizados de forma natural pelo sujeito e são convenientes para a situação, ou seja, são as informações atribuídas às propriedades de informações que tem como função identificar os elementos importantes para se resolver um determinado problema. Já o teorema-em-ação são as técnicas que vinculam as informações podendo ser proposições estritamente verdadeiras naquela situação que nem sempre vão ser generalizadas ou provadas matematicamente e a solução da situação só será possível a partir do seu uso (VERGNAUD, 1993, 2009). E o último conjunto, representações simbólicas, vai ser responsável por representar as invariantes, situações e os procedimentos que serão utilizados para lidar com elas. Elas podem estar na forma de linguagem natural, gráficos, sentenças formais, etc.

Figura 5 – Mapa Conceitual da Teoria dos Campos Conceituais

Fonte: Grazielle Jenske (2011).

Em resumo, o Campo Conceitual é a utilização de conceitos, representações e procedimentos para resolver determinados problemas e situações. No qual os conceitos serão definidos em três conjuntos: as situações que são um conjunto de tarefas teóricas ou praticas (permitem traçar relações, formular conjecturas e testá-las), o conjunto de invariantes operatórios que são os procedimentos necessários para resolver cada grupos de situações garantindo o significado do conceito e as representações simbólicas são as formas de linguagem utilizadas para representar os invariantes e as situações.

E vale ressaltar que os campos conceituais são fundamentados em três argumentos essências: o conceito não se forma dentro de um só tipo de situação, além de uma situação não poder ser analisada a partir de um único conceito e a construção do conceito é um processo demorado que leva anos para ser construído (VERGNAUD, 1996).

3. ANÁLISE DO LIVRO

O capítulo de conjuntos, do livro, é iniciado com uma situação com o tema: classificação dos seres vivos. É pedido para que os estudantes escrevam as semelhanças e diferença entre os animais apresentados, pergunta-se qual dos grupos possuem a maior quantidade de seres vivos (família dos felinos ou classe dos mamíferos) e é pedido para escolher uma espécie animal e identificar a que família ela pertence.

Figura 6 – Atividade proposta no início do capítulo

Classificação dos seres vivos

O número de espécies de seres vivos presentes na Terra é incerto, mas sabe-se que milhões delas habitam nosso planeta, e, constantemente, novas espécies são encontradas.

Em razão desse grande número, verificou-se a necessidade da criação de um sistema de classificação dos seres vivos. O sistema de classificação atual agrupa os seres vivos a partir de categorias relacionadas às suas semelhanças. As principais categorias de classificação são: reino, filo, classe, ordem, família, gênero e espécie; de modo que espécies semelhantes se agrupam em gêneros que, a partir de suas semelhanças, se reúnem em famílias, e assim por diante, até que filos semelhantes se agrupem em reinos.

A onça-pintada, que aparece na fotografia maior, o guepardo, o lince e o tigre, que aparecem abaixo, possuem diversas semelhanças e são organizados em uma mesma família, a dos felídeos (Felidae), que por sua vez faz parte da classe dos mamíferos (Mammalia), a qual nós, seres humanos, também pertencemos.

A) Escreva semelhanças e diferenças entre os animais representados.

B) Qual dos grupos possui a maior quantidade de seres vivos: a família dos felinos ou a classe dos mamíferos? Justifique sua resposta.

C) Escolha uma espécie animal e realize uma pesquisa para identificar a que família ela pertence.

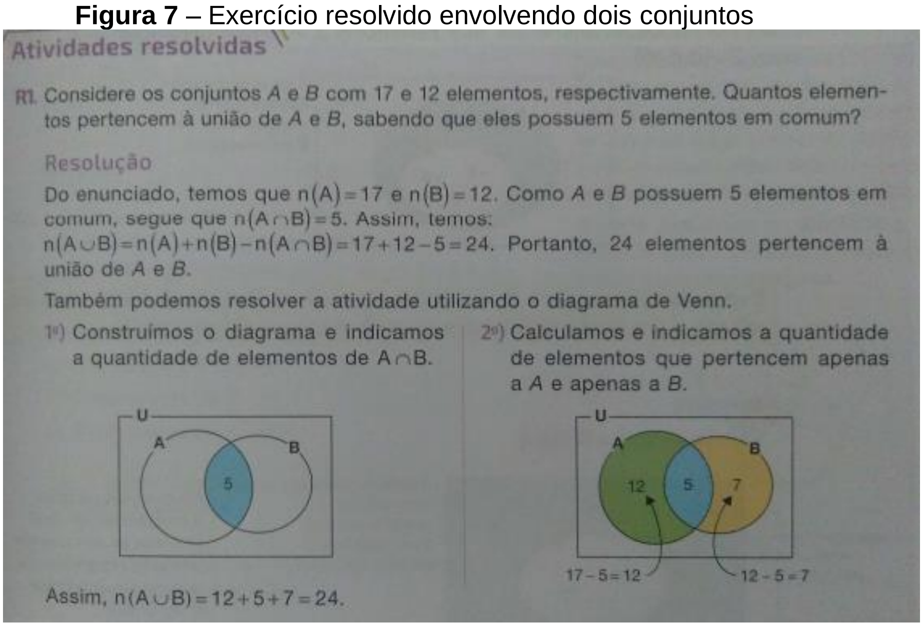
Fonte: Livro #contato Matemática (2016) Vol. 1, Souza; J. R., Jacqueline; S. R. Pág. 9.

Nessa atividade, é possível perceber que os autores queriam que os alunos elaborassem alguns conceitos que seriam formalizados posteriormente, como relação de inclusão e pertinência, além de conceitos como cardinalidade, a definição formal de conjuntos e formular hipóteses para identificar qual conjunto é maior.

É uma atividade que consideramos importante, pois permite identificar alguns conhecimentos que os estudantes já possuem sobre conjuntos. Vergnaud (1994) afirma que é importante identificar os conhecimentos que os alunos conseguem tornar explícitos e quais deles estão sendo utilizados corretamente.

Durante a leitura do capítulo, podemos perceber que existe uma preocupação em mostrar as diferentes representações que o objeto matemático possui e em como utilizá-las, o que é feito por meio do diagrama de Venn, utilizando a enumeração entre chaves e a vírgula para separar os elementos ou descrevendo a sua característica entre as chaves, além de ser visível a utilização das representações simbólicas. Com isso, é fácil perceber que existe uma preocupação de como o objeto matemático deve ser representado.

Figura 7 – Exercício resolvido envolvendo dois conjuntos



Atividades resolvidas

R1. Considere os conjuntos *A* e *B* com 17 e 12 elementos, respectivamente. Quantos elementos pertencem à união de *A* e *B*, sabendo que eles possuem 5 elementos em comum?

Resolução

Do enunciado, temos que $n(A) = 17$ e $n(B) = 12$. Como *A* e *B* possuem 5 elementos em comum, segue que $n(A \cap B) = 5$. Assim, temos:
$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 17 + 12 - 5 = 24$. Portanto, 24 elementos pertencem à união de *A* e *B*.

Também podemos resolver a atividade utilizando o diagrama de Venn.

1º) Construímos o diagrama e indicamos a quantidade de elementos de $A \cap B$.

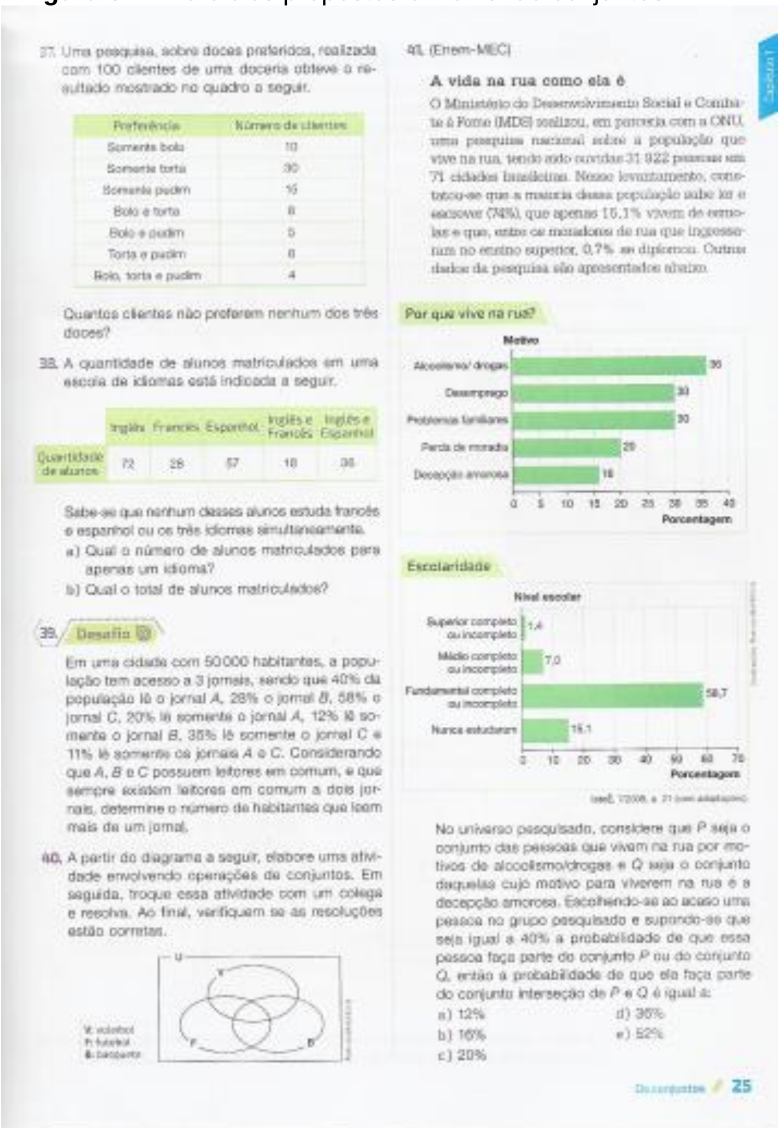
2º) Calculamos e indicamos a quantidade de elementos que pertencem apenas a *A* e apenas a *B*.

Assim, $n(A \cup B) = 12 + 5 + 7 = 24$.

Fonte: Livro #contato Matemática (2016) Vol. 1, Souza; J. R., Jacqueline; S. R. Pág. 17.

Pelas atividades, também é fácil notar que existe uma preocupação, por parte dos autores, que os alunos de fato tenham compreendido as mudanças de registro (conversão) e o seu tratamento. O que consideramos um aspecto importante, pois Duval (2009) ressalta que as atividades de conversão são importantes no processo de aprendizagem em Matemática. Mas também é nítido que existe um enfoque maior na mudança de registro da língua materna para o de figuras (diagrama de Venn) e existe uma quantidade menor de questões relacionadas às outras mudanças de registro, como o do registro algébrico, ou figural, para a língua materna.

Figura 8 – Exercícios propostos envolvendo conjuntos



37. Uma pesquisa, sobre doces preferidos, realizada com 100 clientes de uma doceria obteve o resultado mostrado no quadro a seguir.

Preferência	Número de clientes
Somente bolo	10
Somente torta	30
Somente pudim	15
Bolo e torta	8
Bolo e pudim	5
Torta e pudim	8
Bolo, torta e pudim	4

Quantos clientes não preferem nenhum dos três doces?

38. A quantidade de alunos matriculados em uma escola de idiomas está indicada a seguir.

	Inglês	Francês	Espanhol	Inglês e Francês	Inglês e Espanhol
Quantidade de alunos	72	28	57	18	36

Sabe-se que nenhum desses alunos estuda francês e espanhol ou os três idiomas simultaneamente.

a) Qual o número de alunos matriculados para apenas um idioma?

b) Qual o total de alunos matriculados?

39. Desafio

Em uma cidade com 50 000 habitantes, a população tem acesso a 3 jornais, sendo que 40% da população lê o jornal A, 28% o jornal B, 58% o jornal C, 20% lê somente o jornal A, 12% lê somente o jornal B, 35% lê somente o jornal C e 11% lê somente os jornais A e C. Considerando que A, B e C possuem leitores em comum, e que sempre existem leitores em comum a dois jornais, determine o número de habitantes que leem mais de um jornal.

40. A partir do diagrama a seguir, elabore uma atividade envolvendo operações de conjuntos. Em seguida, troque essa atividade com um colega e resolva. Ao final, verifiquem se as resoluções estão corretas.

41. (Enem-MEC)

A vida na rua como ela é

O Ministério do Desenvolvimento Social e Combate à Fome (MDS) realizou, em parceria com a ONU, uma pesquisa nacional sobre a população que vive na rua, tendo sido ouvidas 31 922 pessoas em 71 cidades brasileiras. Nesse levantamento, constatou-se que a maioria dessa população sabe ler e escrever (74%), que apenas 15,1% vivem de esmolas e que, entre os moradores de rua que ingressaram no ensino superior, 0,7% se diplomou. Outros dados da pesquisa são apresentados abaixo.

No universo pesquisado, considere que P seja o conjunto das pessoas que vivem na rua por motivos de alcoolismo/drogas e Q seja o conjunto daquelas cujo motivo para viverem na rua é a decepção amorosa. Escolhendo-se ao acaso uma pessoa no grupo pesquisado e supondo-se que seja igual a 40% a probabilidade de que essa pessoa faça parte do conjunto P ou do conjunto Q, então a probabilidade de que ela faça parte do conjunto interseção de P e Q é igual a:

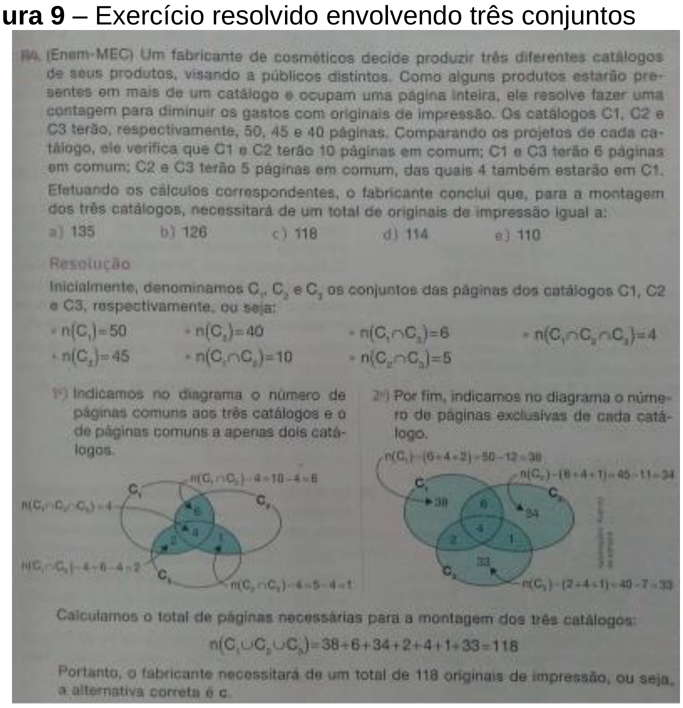
a) 12%
b) 16%
c) 20%
d) 36%
e) 52%

Os conjuntos 25

Fonte: Livro #contato Matemática (2016) Vol. 1, Souza; J. R., Jacqueline; S. R. Pág. 25.

Além de também ser ensinado nos exercícios resolvidos, a conversão para diferentes registros e os seus respectivos tratamentos. No entanto, isso é feito apenas quando há problemas envolvendo apenas dois conjuntos, quando ocorre em situações com três conjuntos, apenas é utilizado o diagrama de Venn para resolução do exercício, acreditamos que isso ocorra por eles acreditarem que o tratamento, nesse registro, seja mais simples e fácil de ser enxergado pelos alunos. Também é importante fazermos destaque para a questão quarenta da figura acima, no qual é pedido para formular uma questão utilizando o diagrama de Venn com três conjuntos e, em seguida, é pedido para a questão ser respondida por outra pessoa. Essa tarefa é uma atividade de conversão de registro de figuras para a língua materna. Além de permitir a socialização com outros alunos, essa atividade é considerada importante, pois não é comum uma mudança de registro desse tipo e é essencial para que seja possível representar o objeto em, pelo menos, dois registros distintos (coordenação). Mas, vale ressaltar que essa foi a única tarefa encontrada com essa metodologia e acreditamos que deveriam existir uma quantidade maior de atividades com essa mudança de registro. Ainda vale ressaltar que os esquemas perspectivo-gestuais (sequência de ações, em forma de diagrama, usados para resolver o problema) utilizados nas questões resolvidas são bem detalhados e facilmente podem ser usados para a resolução dos demais exercícios, já que a maioria das atividades são relativamente simples, além disso é possível perceber o uso de representações simbólicas durante a resolução dos exercícios.

Figura 9 – Exercício resolvido envolvendo três conjuntos



84. (Enem-MEC) Um fabricante de cosméticos decide produzir três diferentes catálogos de seus produtos, visando a públicos distintos. Como alguns produtos estarão presentes em mais de um catálogo e ocupam uma página inteira, ele resolve fazer uma contagem para diminuir os gastos com originais de impressão. Os catálogos C1, C2 e C3 terão, respectivamente, 50, 45 e 40 páginas. Comparando os projetos de cada catálogo, ele verifica que C1 e C2 terão 10 páginas em comum; C1 e C3 terão 6 páginas em comum; C2 e C3 terão 5 páginas em comum, das quais 4 também estarão em C1. Efetuando os cálculos correspondentes, o fabricante conclui que, para a montagem dos três catálogos, necessitará de um total de originais de impressão igual a:

a) 135 b) 126 c) 118 d) 114 e) 110

Resolução

Inicialmente, denominamos C_1, C_2 e C_3 os conjuntos das páginas dos catálogos C1, C2 e C3, respectivamente, ou seja:

- $n(C_1)=50$
- $n(C_2)=45$
- $n(C_3)=40$
- $n(C_1 \cap C_2)=10$
- $n(C_1 \cap C_3)=6$
- $n(C_2 \cap C_3)=5$
- $n(C_1 \cap C_2 \cap C_3)=4$

1º) Indicamos no diagrama o número de páginas comuns aos três catálogos e o de páginas comuns a apenas dois catálogos.

2º) Por fim, indicamos no diagrama o número de páginas exclusivas de cada catálogo.

Calculamos o total de páginas necessárias para a montagem dos três catálogos:

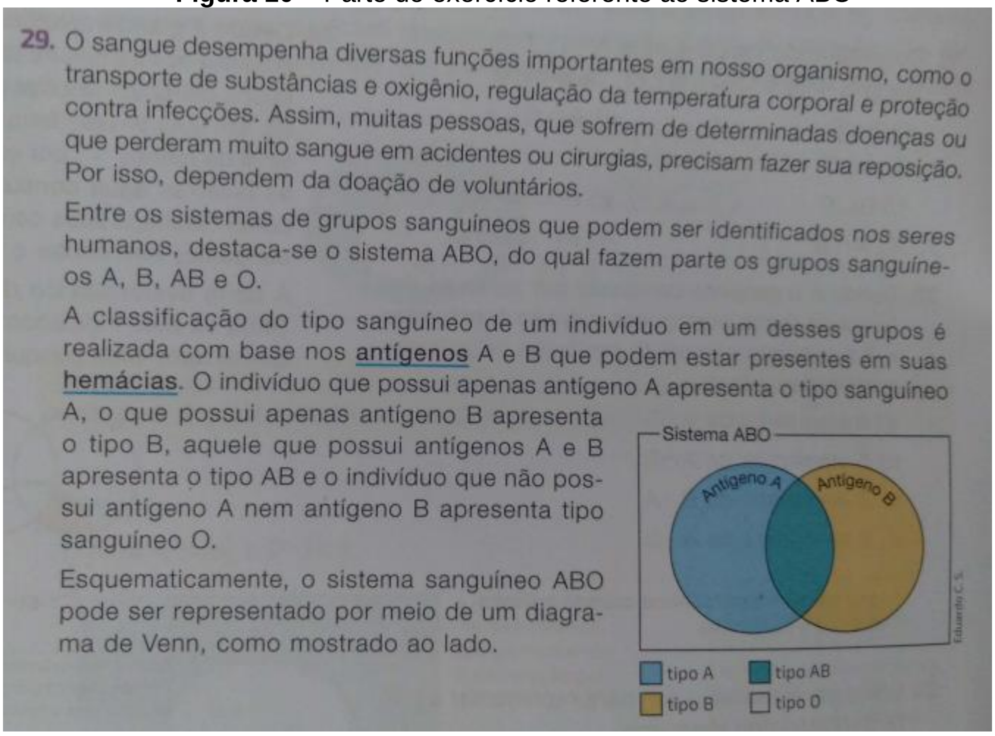
$$n(C_1 \cup C_2 \cup C_3)=38+6+34+2+4+1+33=118$$

Portanto, o fabricante necessitará de um total de 118 originais de impressão, ou seja, a alternativa correta é c.

Fonte: Livro #contato Matemática (2016) Vol. 1, Souza; J. R., Jacqueline; S. R. Pág. 23.

Outra situação interessante encontrada, neste capitulo, é uma envolvendo classificação do tipo sanguíneo de acordo com a presença de antígenos no sangue (sistema ABO), no qual os autores fazem interdisciplinaridade com a Biologia para trabalhar com alguns conteúdos de conjuntos da Matemática, como a diferença e interseção entre dois conjuntos e o seu complementar, além de abordar conhecimentos importantes sobre doação de sangue, como os requisitos para doar, para que serve e os procedimentos.

Figura 10 – Parte do exercício referente ao sistema ABO



29. O sangue desempenha diversas funções importantes em nosso organismo, como o transporte de substâncias e oxigênio, regulação da temperatura corporal e proteção contra infecções. Assim, muitas pessoas, que sofrem de determinadas doenças ou que perderam muito sangue em acidentes ou cirurgias, precisam fazer sua reposição. Por isso, dependem da doação de voluntários.

Entre os sistemas de grupos sanguíneos que podem ser identificados nos seres humanos, destaca-se o sistema ABO, do qual fazem parte os grupos sanguíneos A, B, AB e O.

A classificação do tipo sanguíneo de um indivíduo em um desses grupos é realizada com base nos antígenos A e B que podem estar presentes em suas hemácias. O indivíduo que possui apenas antígeno A apresenta o tipo sanguíneo A, o que possui apenas antígeno B apresenta o tipo B, aquele que possui antígenos A e B apresenta o tipo AB e o indivíduo que não possui antígeno A nem antígeno B apresenta tipo sanguíneo O.

Esquematicamente, o sistema sanguíneo ABO pode ser representado por meio de um diagrama de Venn, como mostrado ao lado.

Fonte: Livro #contato Matemática (2016) Vol. 1, Souza; J. R., Jacqueline; S. R. Pág. 20.

Só existe uma única ressalva que fazemos, é que deveria existir um cuidado maior na escrita, pois fica pressuposto que apenas a presença de antígenos é importante para a doação de sangue. Mas, atualmente, também temos que levar em consideração a presença, ou não, do fator Rh no sangue.

Também pudemos perceber uma quantidade aceitável de situações propostas nos exercícios, mas durante a apresentação dos conteúdos não há um enfoque tão grande e há uma presença maior de situações relacionadas a tipos sanguíneos, em especifico o sistema ABO.

Neste mesmo capitulo existe uma parte do conteúdo destinada a conjuntos numéricos. E nele notamos que há uma quantidade maior de situações apresentadas durante a apresentação dos conceitos e nos exercícios propostos poucos deles são contextualizados e são utilizados mais para trabalhar algum conceito ou propriedade dos conjuntos.

Figura 11 – Situações apresentadas com conjuntos numéricos

Conjuntos numéricos

Conhecer e compreender os diferentes tipos de números é importante, por exemplo, para entendermos diversas situações do dia a dia, como as apresentadas a seguir.

No gráfico ao lado, o número 0,652, por exemplo, indica que no ano de 2013 na região Nordeste foi coletado, em média por habitante, aproximadamente 0,652 quilograma de resíduos produzidos por estabelecimentos de serviço de saúde, como hospitais e consultórios odontológicos.

Na tabela abaixo, o número −633 217, por exemplo, indica que houve uma redução de 633 217 alunos matriculados no Ensino Fundamental no Brasil em 2013, em relação a 2012.

Evolução do número de alunos matriculados na educação básica no Brasil

Etapa/Modalidade de ensino	2012	2013	Variação 2012/2013
Educação Infantil	7 295 512	7 590 600	295 088
Ensino Fundamental	29 702 498	29 069 281	−633 217
Ensino Médio	8 376 852	8 312 815	−64 037
Educação de Jovens e Adultos	3 906 877	3 772 670	−134 207
Educação Especial*	199 656	194 421	−5 235
Educação Profissional	1 063 655	1 102 661	39 006
Total	50 545 050	50 042 448	−502 602

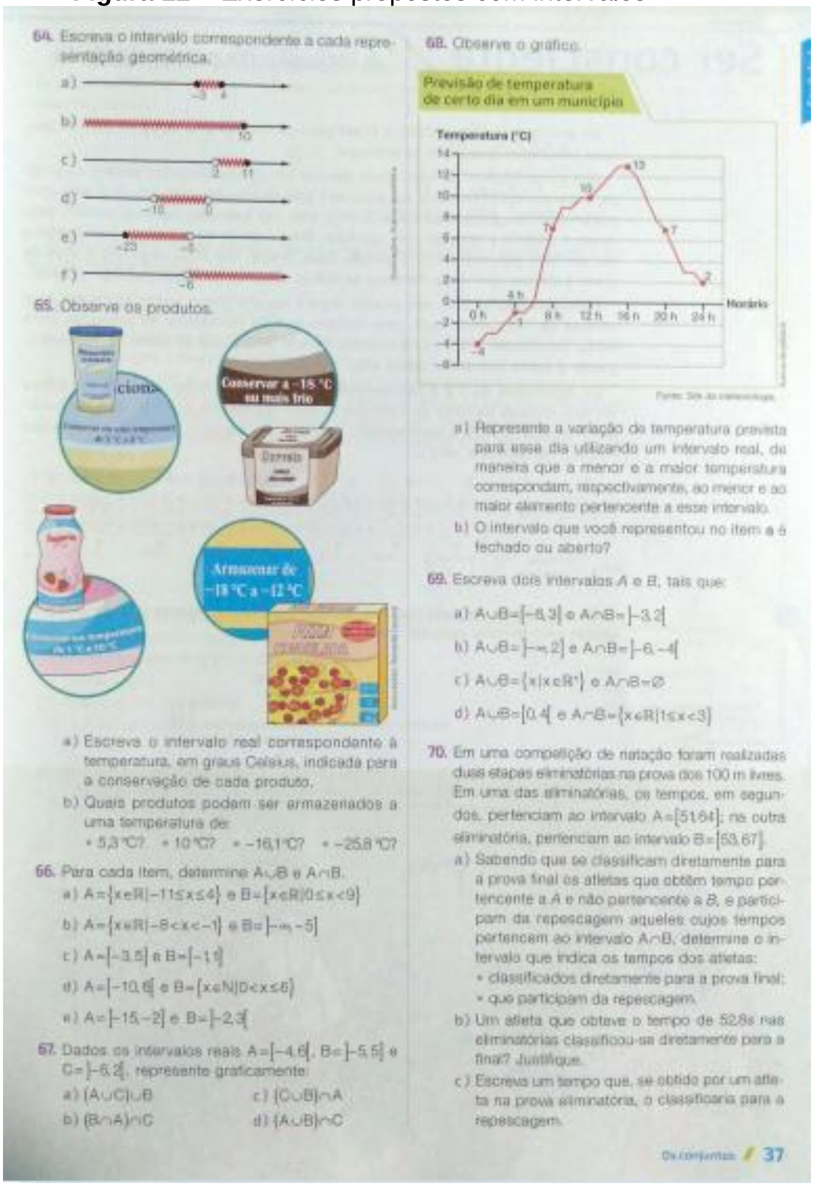
Já na fatura de energia elétrica a seguir, nas partes em destaque, o número 97 indica o consumo em quilowatts-hora, e o número 128,99 indica o valor em reais da fatura.

Neste tópico, serão retomados e aprofundados alguns conceitos relacionados aos conjuntos numéricos estudados em anos anteriores.

Fonte: Livro #contato Matemática (2016) Vol. 1, Souza; J. R., Jacqueline; S. R. Pág. 26.

É interessante mencionar que existe uma preocupação em apresentar as diferentes representações, como na reta numérica, as diferentes formas de representar os números racionais (decimais finitos, dízimas periódicas, forma geométrica ou de fração), além das representações simbólicas dos conjuntos numéricos e uso da representação geométrica dos intervalos para efetuar suas respectivas operações. Pois, segundo Duval (2013), é ideal existir múltiplas representações mobilizadas, já que cada registro revela um diferente sentido ao objeto.

Figura 12 – Exercícios propostos com intervalos



64. Escreva o intervalo correspondente a cada representação geométrica.

a) b) c) d) e) f)

65. Observe os produtos.

a) Escreva o intervalo real correspondente à temperatura, em graus Celsius, indicada para a conservação de cada produto.

b) Quais produtos podem ser armazenados a uma temperatura de:

• 5,3 °C? • 10 °C? • −16,1 °C? • −25,8 °C?

66. Para cada item, determine $A \cup B$ e $A \cap B$.

a) $A=\{x \in \mathbb{R} \mid -11 \leq x \leq 4\}$ e $B=\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < 9\}$

b) $A=\{x \in \mathbb{R} \mid -8 < x < -1\}$ e $B=]-\infty, -5]$

c) $A=[-3, 5]$ e $B=[-1, 1]$

d) $A=[-10, 6[$ e $B=\{x \in \mathbb{N} \mid 0 < x \leq 6\}$

e) $A=]-15, -2]$ e $B=]-2, 3[$

67. Dados os intervalos reais $A=[-4, 6[$, $B=]-5, 5]$ e $C=]-6, 2[$, represente graficamente:

a) $(A \cup C) \cup B$

b) $(B \cap A) \cap C$

c) $(C \cup B) \cap A$

d) $(A \cup B) \cap C$

68. Observe o gráfico.

a) Represente a variação de temperatura prevista para esse dia utilizando um intervalo real, de maneira que a menor e a maior temperatura correspondam, respectivamente, ao menor e ao maior elemento pertencente a esse intervalo.

b) O intervalo que você representou no item a é fechado ou aberto?

69. Escreva dois intervalos *A* e *B*, tais que:

a) $A \cup B=[-8, 3]$ e $A \cap B=]-3, 2[$

b) $A \cup B=]-\infty, 2]$ e $A \cap B=]-6, -4[$

c) $A \cup B=\{x \mid x \in \mathbb{R}^*\}$ e $A \cap B=\varnothing$

d) $A \cup B=[0, 4[$ e $A \cap B=\{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x < 3\}$

70. Em uma competição de natação foram realizadas duas etapas eliminatórias na prova dos 100 m livres. Em uma das eliminatórias, os tempos, em segundos, pertenciam ao intervalo $A=[51, 64]$; na outra eliminatória, pertenciam ao intervalo $B=[53, 67]$.

a) Sabendo que se classificam diretamente para a prova final os atletas que obtêm tempo pertencente a *A* e não pertencente a *B*, e participam da repescagem aqueles cujos tempos pertencem ao intervalo $A \cap B$, determine o intervalo que indica os tempos dos atletas:

• classificados diretamente para a prova final;

• que participam da repescagem.

b) Um atleta que obteve o tempo de 52,8 s nas eliminatórias classificou-se diretamente para a final? Justifique.

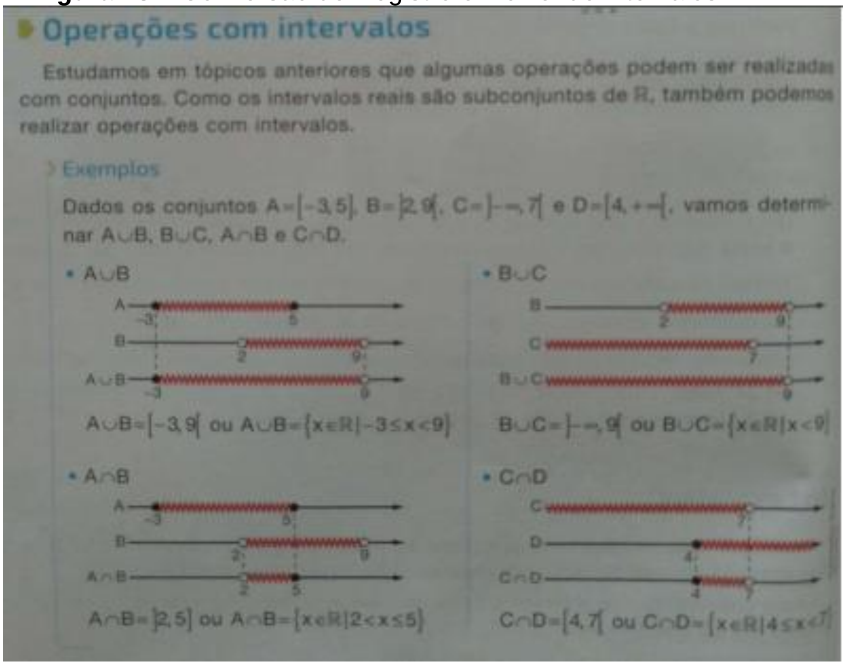
c) Escreva um tempo que, se obtido por um atleta na prova eliminatória, o classificaria para a repescagem.

Os conjuntos 37

Fonte: Livro #contato Matemática (2016) Vol. 1, Souza; J. R., Jacqueline; S. R. Pág. 37.

As conversões de registro também são presentes, nesta parte do capítulo, como podemos observar nas operações com intervalos ou escrever as dizimas periódicas em sua forma fracionária. Os autores fazem uso de esquemas perspectivo-gestuais e ordinários, respectivamente, para a conversão desses registros.

Figura 13 – Conversão de Registro envolvendo intervalos


Operações com intervalos

Estudamos em tópicos anteriores que algumas operações podem ser realizadas com conjuntos. Como os intervalos reais são subconjuntos de $\mathbb{R}$, também podemos realizar operações com intervalos.

Exemplos

Dados os conjuntos $A=[-3,5]$, $B=]2,9[$, $C=]-\infty,7[$ e $D=[4,+\infty[$, vamos determinar $A\cup B$, $B\cup C$, $A\cap B$ e $C\cap D$.

- $A\cup B$

$A\cup B=[-3,9[$ ou $A\cup B=\{x\in\mathbb{R} \mid -3\leq x<9\}$

- $B\cup C$

$B\cup C=]-\infty,9[$ ou $B\cup C=\{x\in\mathbb{R} \mid x<9\}$

- $A\cap B$

$A\cap B=]2,5]$ ou $A\cap B=\{x\in\mathbb{R} \mid 2<x\leq 5\}$

- $C\cap D$

$C\cap D=[4,7[$ ou $C\cap D=\{x\in\mathbb{R} \mid 4\leq x<7\}$

Fonte: Livro #contato Matemática (2016) Vol. 1, Souza; J. R., Jacqueline; S. R. Pág. 36.

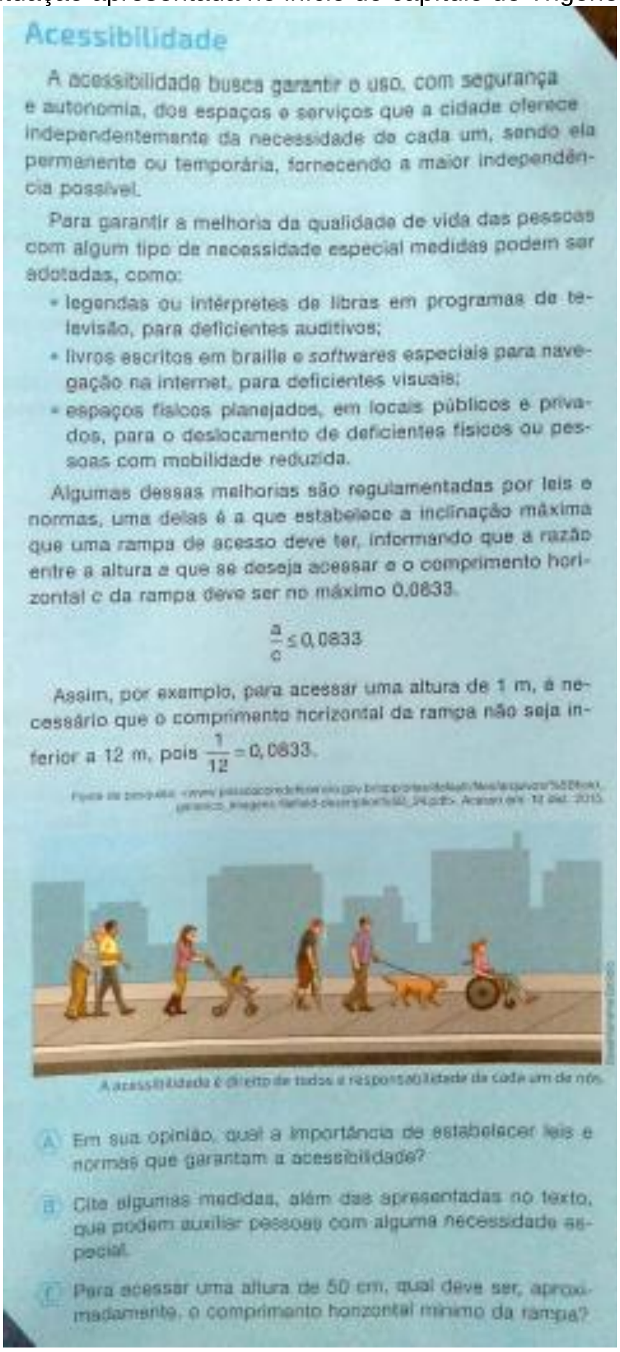
No geral, a linguagem utilizada, neste capítulo, é adequada para os estudantes e sempre quando são apresentados termos que seriam desconhecidos, nas questões ou no decorrer da apresentação dos conceitos, os autores colocam notas explicando o termo ou acrescentando alguma outra informação relevante.

Também consideramos interessante a apresentação de situações para, depois, apresentar os conceitos, pois muitas das concepções adquiridas pelos alunos se originam a partir das primeiras situações que são apresentadas, além de suas respectivas experiências (VERGNAUD, 1996).

No capítulo de Trigonometria do Triângulo, também é iniciado com uma situação para mostrar a proporcionalidade aplicada na Geometria. Essa situação possui como tema A Acessibilidade e fala de um projeto de lei que estabelece a inclinação máxima que uma rampa de acesso pode ter. Para medir essa inclinação, basta calcular a razão entre a altura que se deseja acessar e o comprimento horizontal da rampa. E esse valor deve ser menor, ou igual, que 0,0833.

Em seguida, são levantados alguns questionamentos aos alunos, como citar qual a importância de existirem leis e normas que garantam a acessibilidade, além de pedir para que eles mostrem outros exemplos. E por último, pergunta-se qual é o comprimento horizontal mínimo de uma rampa sabendo que ela possui uma altura de cinquenta centímetros. Neste último item, além de trabalhar com proporcionalidade, também é exigido que o aluno tenha o conhecimento de inequações. Neste caso, os alunos poderão formular duas conjecturas como: qualquer comprimento maior que o resultado obtido estará dentro das leis e normas que estabelecem a inclinação máxima de uma rampa ou qualquer comprimento menor que o valor encontrado não cumpre o que se é exigido.

Figura 14 – Situação apresentada no início do capítulo de Trigonometria



Acessibilidade

A acessibilidade busca garantir o uso, com segurança e autonomia, dos espaços e serviços que a cidade oferece independentemente da necessidade de cada um, sendo ela permanente ou temporária, fornecendo a maior independência possível.

Para garantir a melhoria da qualidade de vida das pessoas com algum tipo de necessidade especial medidas podem ser adotadas, como:

- legendas ou intérpretes de libras em programas de televisão, para deficientes auditivos;
- livros escritos em braille e *softwares* especiais para navegação na internet, para deficientes visuais;
- espaços físicos planejados, em locais públicos e privados, para o deslocamento de deficientes físicos ou pessoas com mobilidade reduzida.

Algumas dessas melhorias são regulamentadas por leis e normas, uma delas é a que estabelece a inclinação máxima que uma rampa de acesso deve ter, informando que a razão entre a altura a que se deseja acessar e o comprimento horizontal c da rampa deve ser no máximo 0,0833.

$$\frac{a}{c} \leq 0{,}0833$$

Assim, por exemplo, para acessar uma altura de 1 m, é necessário que o comprimento horizontal da rampa não seja inferior a 12 m, pois $\frac{1}{12} = 0{,}0833$.

A acessibilidade é direito de todos e responsabilidade de cada um de nós.

A) Em sua opinião, qual a importância de estabelecer leis e normas que garantam a acessibilidade?

B) Cite algumas medidas, além das apresentadas no texto, que podem auxiliar pessoas com alguma necessidade especial.

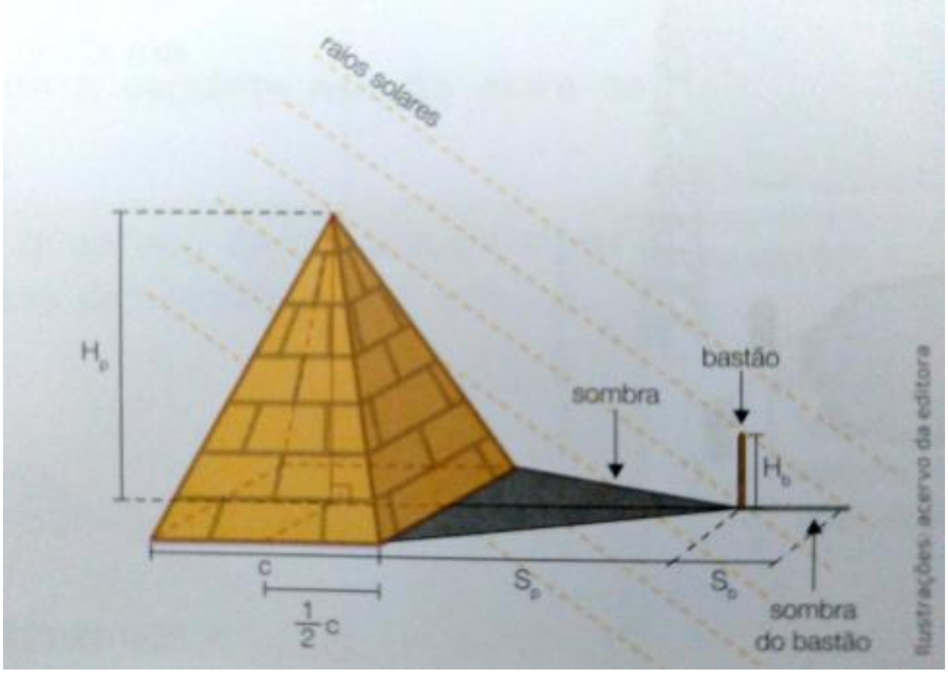
C) Para acessar uma altura de 50 cm, qual deve ser, aproximadamente, o comprimento horizontal mínimo da rampa?

Fonte: Livro #contato Matemática (2016) Vol. 1, Souza; J. R., Jacqueline; S. R. Pág. 233.

Outra situação apresentada, neste capítulo, é referente ao Teorema de Tales, onde é apresentado duas versões para medições da pirâmide por meio de sombras proposta por Tales. A primeira versão é medindo a altura de uma pirâmide do Egito observando o comprimento das sombras e a segunda é por meio de uma proporção estabelecida entre as medidas da altura do bastão fincado no chão, próximo à pirâmide, de sua sombra, da altura da pirâmide e da sombra projetada por ela adicionada à metade do comprimento de sua base.

Em seguida, são apresentadas outras duas situações que exigem a aplicação da segunda versão do cálculo da altura da pirâmide, onde se pede para calcular a altura de um poste em determinado momento do dia e, a outra situação, é para determinar a altura de uma pirâmide de base quadrada.

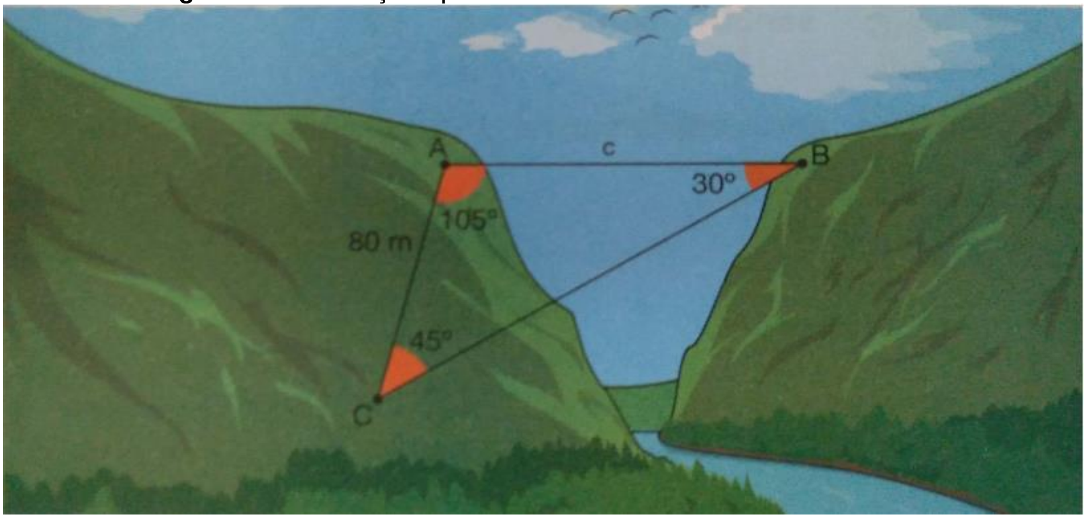
Figura 15 – Medição da pirâmide utilizando o segundo método



Fonte: Livro #contato Matemática (2016) Vol. 1, Souza; J. R., Jacqueline; S. R. Pág. 239.

Também existe uma situação sobre um topógrafo que precisa determinar o comprimento de uma ponte construída no meio do vale, onde ele marca os pontos A e B que serão a extremidade da ponte e um ponto C na mesma margem de A e, em seguida, mediu os ângulos do triângulo formado com os pontos. E para resolver o problema seria necessário utilizar a lei dos senos.

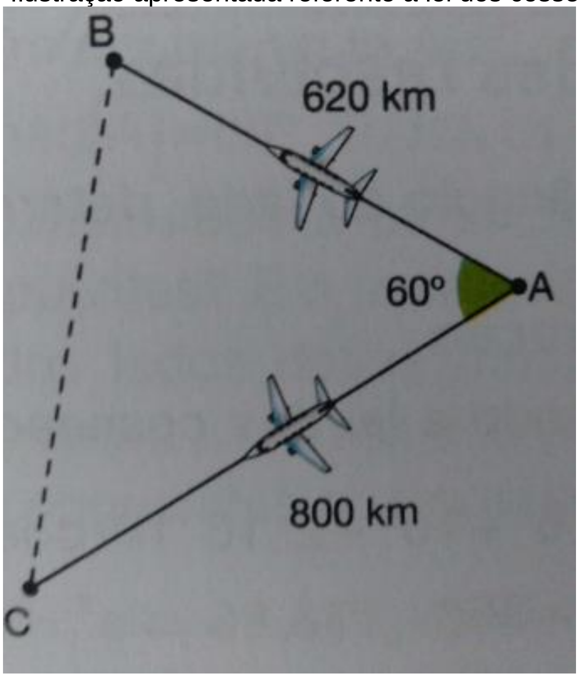
Figura 16 – Ilustração apresentada referente à lei dos senos



Fonte: Livro #contato Matemática (2016) Vol. 1, Souza; J. R., Jacqueline; S. R. Pág. 257.

Além disso, existe outra situação relacionada com o conteúdo de lei dos cossenos. No qual uma companhia aérea realiza voo direto para cidades A e B e entre A e C e ela deseja criar uma nova linha para realizar voos partindo de A com destino a C, fazendo conexão em B.

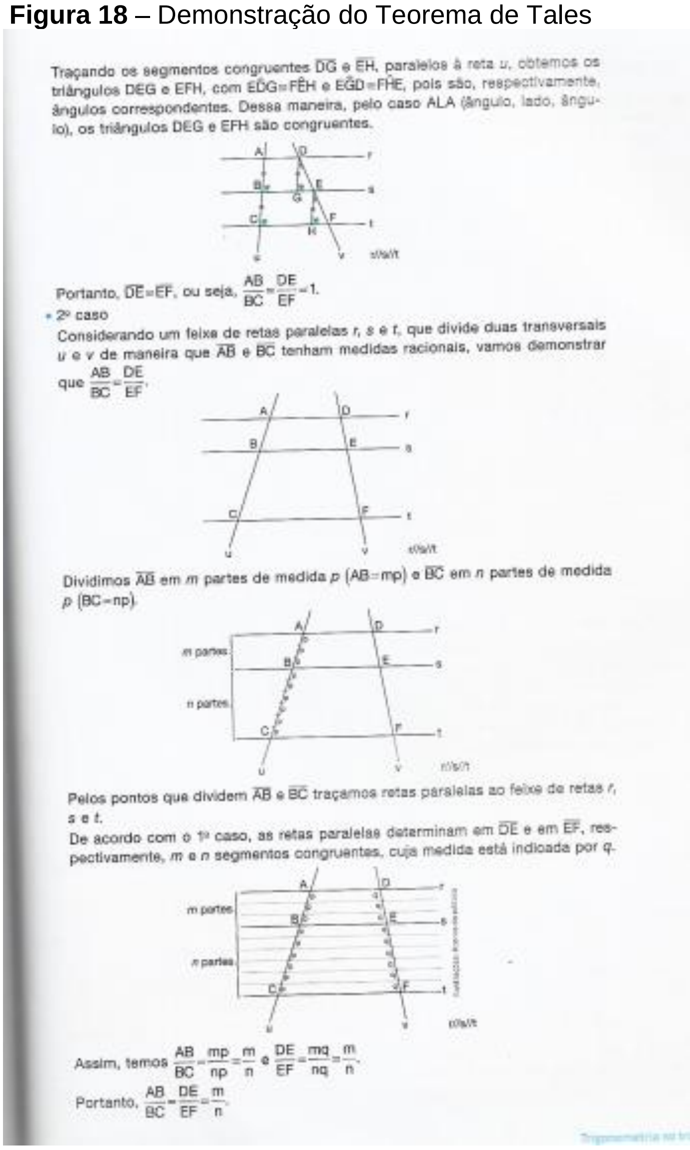
Figura 17 – Ilustração apresentada referente à lei dos cossenos



Fonte: Livro #contato Matemática (2016) Vol. 1, Souza; J. R., Jacqueline; S. R. Pág. 261.

Após enunciar os problemas, são feitas demonstrações acerca do conteúdo e em seguida são solucionados os problemas utilizando o que foi demonstrado. Com isso, também notamos que existe uma forte preocupação em mostrar as demonstrações, como por exemplo, ocorre no Teorema de Tales e o de Pitágoras, além de relações envolvendo seno, cosseno e tangente; e nas leis do seno e cosseno, como citamos anteriormente. Por conta disso, são utilizadas várias representações simbólicas e muitas delas não são explicadas e, com isso, acaba ficando subentendido o que elas representam. Por exemplo, na demonstração do Teorema de Pitágoras utilizasse o símbolo “≡” para indicar congruência e também utiliza “FÊH” do triângulo EFH para se referir ao ângulo deste triângulo, mas em nenhum momento é falado o que significa ou que os símbolos estão representando.

Figura 18 – Demonstração do Teorema de Tales


Traçando os segmentos congruentes $\overline{DG}$ e $\overline{EH}$, paralelos à reta *u*, obtemos os triângulos DEG e EFH, com $E\hat{D}G \equiv F\hat{E}H$ e $E\hat{G}D \equiv F\hat{H}E$, pois são, respectivamente, ângulos correspondentes. Dessa maneira, pelo caso ALA (ângulo, lado, ângulo), os triângulos DEG e EFH são congruentes.

Portanto, $\overline{DE} \equiv \overline{EF}$, ou seja, $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF} = 1$.

- 2º caso

Considerando um feixe de retas paralelas *r*, *s* e *t*, que divide duas transversais *u* e *v* de maneira que $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ tenham medidas racionais, vamos demonstrar que $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$.

Dividimos $\overline{AB}$ em *m* partes de medida *p* (AB = mp) e $\overline{BC}$ em *n* partes de medida *p* (BC = np).

Pelos pontos que dividem $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ traçamos retas paralelas ao feixe de retas *r*, *s* e *t*.

De acordo com o 1º caso, as retas paralelas determinam em $\overline{DE}$ e em $\overline{EF}$, respectivamente, *m* e *n* segmentos congruentes, cuja medida está indicada por *q*.

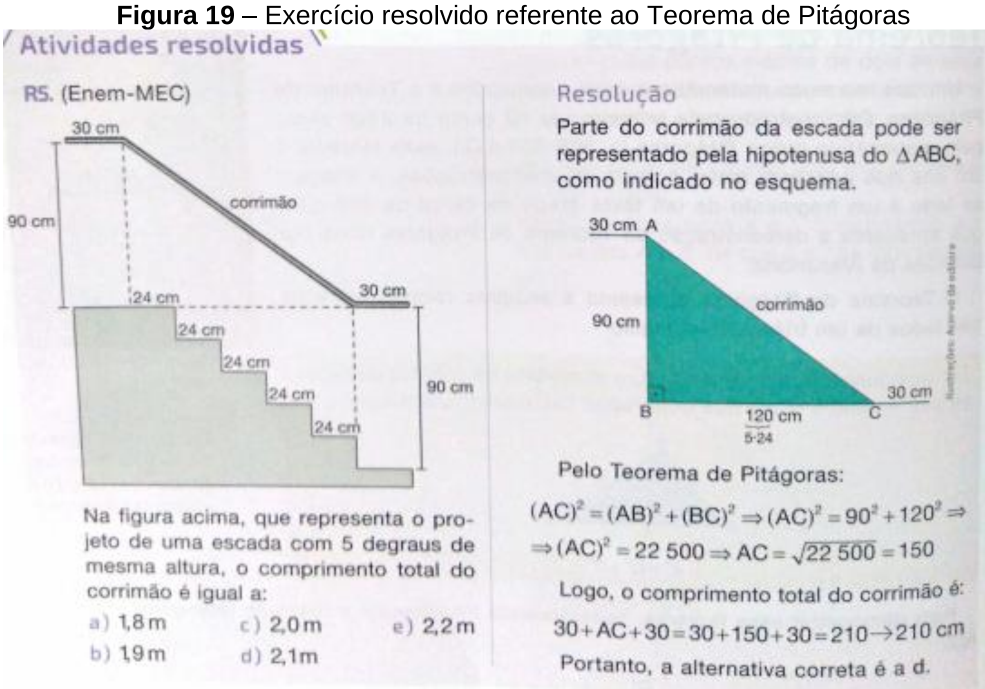
Assim, temos $\frac{AB}{BC} = \frac{mp}{np} = \frac{m}{n}$ e $\frac{DE}{EF} = \frac{mq}{nq} = \frac{m}{n}$.

Portanto, $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF} = \frac{m}{n}$.

Fonte: Livro #contato Matemática (2016) Vol. 1, Souza; J. R., Jacqueline; S. R. Pág. 235.

Acreditamos que os autores acabam pressupondo que os alunos já possuem esse tipo linguagem matemática formalizada e, por isso, não fazem questão de mencionar. No entanto, isso não ocorre no capítulo de conjuntos. Além disso, muitos objetos matemáticos são utilizados como o triângulo e em nenhum momento há uma preocupação em mostrar suas características, propriedades, classificações, etc. Por isso, acreditamos que a formação é deixada um pouco de lado neste capítulo. Também percebemos que existem mais atividades relacionadas ao tratamento. E as conversões de registro, em geral, aparecem mais da representação linguística para a figural e, em seguida, para o registro algébrico ou ocorre de forma direta de figuras geométricas para o algébrico, consequentemente, é fácil notar que o registro algébrico, e seu respectivo tratamento, aparece com uma maior frequência nos exercícios resolvidos e é essencial para a resolução das atividades propostas aos alunos, pois é um registro algoritmizável (monofuncional).

Figura 19 – Exercício resolvido referente ao Teorema de Pitágoras


Atividades resolvidas

R5. (Enem-MEC)

Na figura acima, que representa o projeto de uma escada com 5 degraus de mesma altura, o comprimento total do corrimão é igual a:

a) 1,8 m
b) 1,9 m
c) 2,0 m
d) 2,1 m
e) 2,2 m

Resolução

Parte do corrimão da escada pode ser representado pela hipotenusa do ΔABC, como indicado no esquema.

Pelo Teorema de Pitágoras:

$(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2 \Rightarrow (AC)^2 = 90^2 + 120^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow (AC)^2 = 22\,500 \Rightarrow AC = \sqrt{22\,500} = 150$

Logo, o comprimento total do corrimão é:

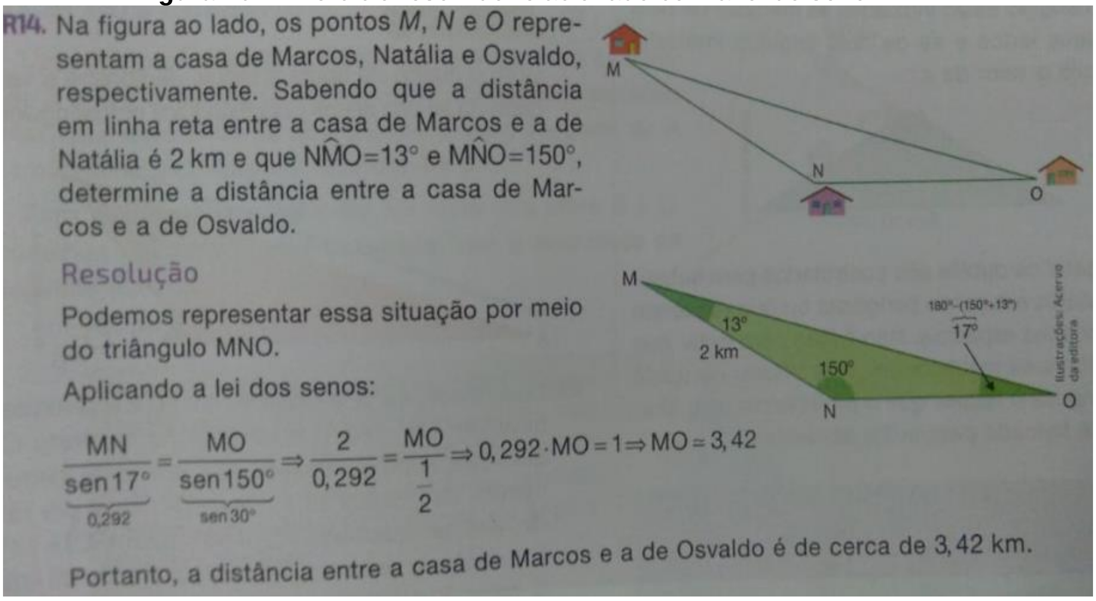
$30 + AC + 30 = 30 + 150 + 30 = 210 \rightarrow 210$ cm

Portanto, a alternativa correta é a d.

Fonte: Livro #contato Matemática (2016) Vol. 1, Souza; J. R., Jacqueline; S. R. Pág. 242.

O registro de figuras geométricas também é presente, neste capítulo do livro didático, além de ser essencial para a resolução das atividades e ao entendimento do conteúdo. Como podemos observar, quando "Vergnaud argumenta que [...] o sistema de percepção visual tem um papel preponderante na construção do conhecimento pelos sujeitos". (MOREIRA, 2002, p. 19).

Figura 20 – Exercício resolvido relacionado com a lei do seno



R14. Na figura ao lado, os pontos *M*, *N* e *O* representam a casa de Marcos, Natália e Osvaldo, respectivamente. Sabendo que a distância em linha reta entre a casa de Marcos e a de Natália é 2 km e que $N\hat{M}O = 13°$ e $M\hat{N}O = 150°$, determine a distância entre a casa de Marcos e a de Osvaldo.

Resolução

Podemos representar essa situação por meio do triângulo MNO.

Aplicando a lei dos senos:

$$\frac{MN}{\underbrace{\text{sen}\,17°}_{0{,}292}} = \frac{MO}{\underbrace{\text{sen}\,150°}_{\text{sen}\,30°}} \Rightarrow \frac{2}{0{,}292} = \frac{MO}{\frac{1}{2}} \Rightarrow 0{,}292 \cdot MO = 1 \Rightarrow MO = 3{,}42$$

Portanto, a distância entre a casa de Marcos e a de Osvaldo é de cerca de 3,42 km.

Fonte: Livro #contato Matemática (2016) Vol. 1, Souza; J. R., Jacqueline; S. R. Pág. 259.

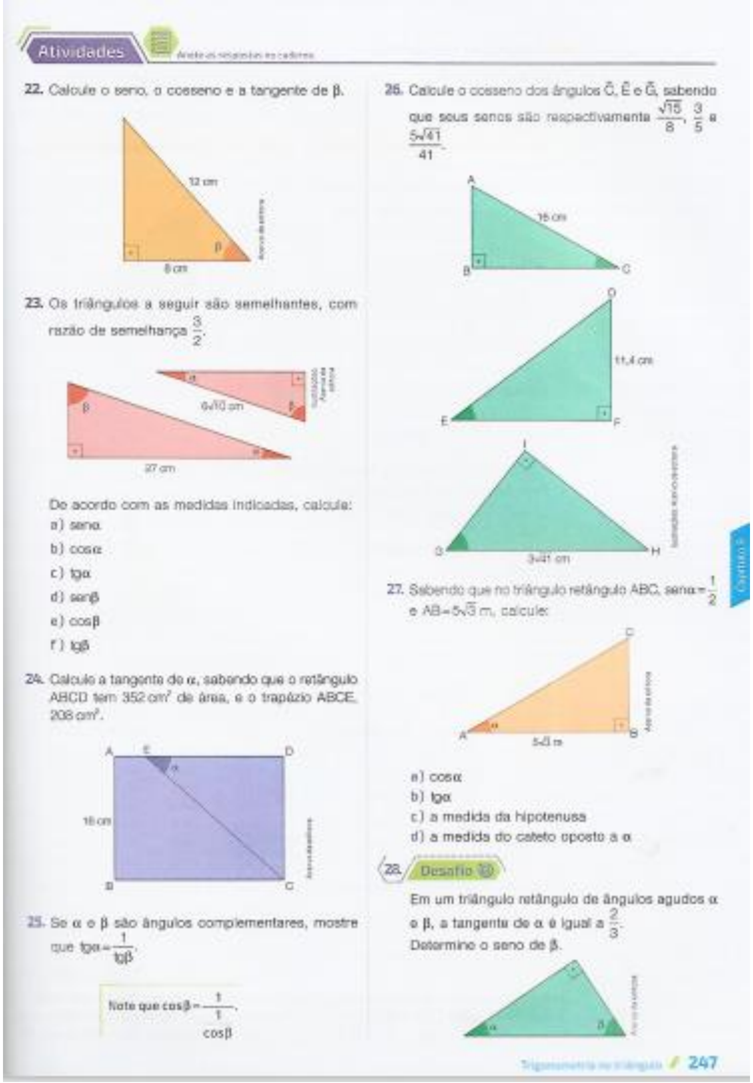
Perceber que o uso de figuras geométricas é recorrente no restante dos exercícios resolvidos, pois, eles sempre são utilizados nos enunciados ou na própria resolução sugerida no livro e está sempre ocorrendo a mudança de registro da língua materna para a de figuras e, em seguida, para o registro algébrico.

Além desses registros, também é possível notar o uso do registro em valor decimal, quando é apresentado uma tabela trigonométrica com os valores aproximados do seno, cosseno e tangente de ângulos, cujas as medidas são inteiras e variam de um a oitenta e nove graus. Foi possível identificar o registro de representação numérico-fracionário quando são utilizados os ângulos notáveis.

Consideramos importante, mostrar essas diferentes representações semióticas, pois, são a partir delas que ocorre a comunicação em matemática, ou seja, facilita o processo de compreensão e aprendizagem de um determinado objeto matemático (DUVAL, 1993, p. 3, apud DAMM, 2015, p. 177).

Em geral, as atividades, resolvidas e propostas, se limitam ao uso de seno, cosseno e tangente para sua resolução ou, até mesmo, as razões expandidas para outros tipos de triângulo como a lei do seno e do cosseno. Também é visível o uso da relação entre os lados do triângulo ou o cálculo de área do mesmo utilizando a base e altura ou usando o semiproduto das medidas de dois lados quaisquer pelo seno do ângulo formado por eles.

Figura 21 – Atividade proposta destinada à memorização de fórmulas



Atividades

22. Calcule o seno, o cosseno e a tangente de β.

23. Os triângulos a seguir são semelhantes, com razão de semelhança $\frac{3}{2}$.

De acordo com as medidas indicadas, calcule:

a) $sen\alpha$

b) $\cos\alpha$

c) $tg\alpha$

d) $sen\beta$

e) $\cos\beta$

f) $tg\beta$

24. Calcule a tangente de α, sabendo que o retângulo ABCD tem 352 cm² de área, e o trapézio ABCE, 208 cm².

25. Se α e β são ângulos complementares, mostre que $tg\alpha = \frac{1}{tg\beta}$.

Note que $\cos\beta = \frac{1}{\frac{1}{\cos\beta}}$.

26. Calcule o cosseno dos ângulos $\hat{C}$, $\hat{E}$ e $\hat{G}$, sabendo que seus senos são respectivamente $\frac{\sqrt{15}}{8}$, $\frac{3}{5}$ e $\frac{5\sqrt{41}}{41}$.

27. Sabendo que no triângulo retângulo ABC, $sen\alpha = \frac{1}{2}$ e $AB = 5\sqrt{3}$ m, calcule:

a) $\cos\alpha$

b) $tg\alpha$

c) a medida da hipotenusa

d) a medida do cateto oposto a α

28. Desafio

Em um triângulo retângulo de ângulos agudos α e β, a tangente de α é igual a $\frac{2}{3}$. Determine o seno de β.

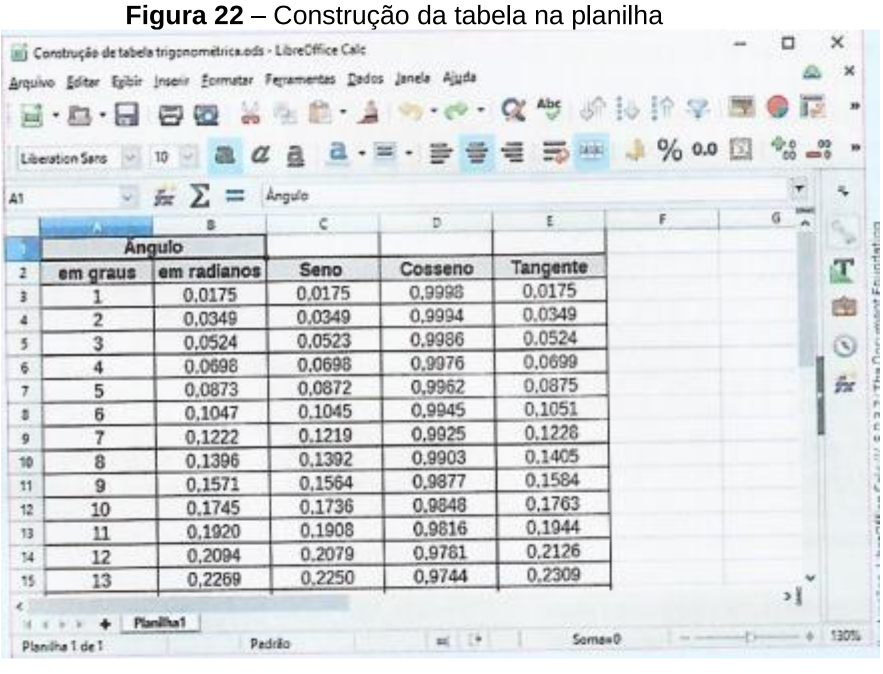
Trigonometria no triângulo 247

Fonte: Livro #contato Matemática (2016) Vol. 1, Souza; J. R., Jacqueline; S. R. Pág. 247.

Nas atividades propostas, também é possível notar que algumas tarefas apresentadas mobilizam os mesmos métodos para a resolução mudando apenas o que é calculado por meio das informações transmitidas no enunciado de cada atividade. Por exemplo, é pedido para encontrar a medida indicada por um x a partir de um lado e um ângulo, achar a medida do lado de um triângulo retângulo através dos outros dois lados dados ou encontrar o cosseno de triângulos retângulos por meio do seno e um lado, como podemos observar na figura acima. Por isso, acreditamos que essas atividades são utilizadas apenas para a memorização de fórmulas e não permitem que os alunos formulem conjecturas ou estabeleçam hipóteses. Mesmo assim, esses problemas de Geometria são essenciais, pois, fornecem formas diferentes de interpretação. Como afirma Duval (2012), ao citar que alguns deles necessitam apenas analisar os dados fornecidos pela figura (apreensão perceptiva), também existem os que necessitam da articulação do enunciado com a figura geométrica (apreensão discursiva), outros ocorrem quando se há intenção de reproduzir uma figura por meio da sua descrição (apreensão sequencial) ou, até mesmo, fazendo modificações na figura inicial sem perder as propriedades a elas associadas (apreensão operatória).

Ao final do livro, existe uma seção com algumas atividades fazendo uso do computador com temas matemáticos. Assim, é feito um trabalho com programas computacionais que contribuem para a visualização e verificação de propriedades e auxiliam na resolução de problemas. Dentre elas, é mostrada uma forma de construir uma tabela trigonométrica com o seno, cosseno e tangente dos ângulos de 1º a 20º (também é obtido o valor dos mesmos em radianos) utilizando a planilha de *Cálculo* no registro em valor decimal.

Figura 22 – Construção da tabela na planilha



Ângulo				
em graus	em radianos	Seno	Cosseno	Tangente
1	0,0175	0,0175	0,9998	0,0175
2	0,0349	0,0349	0,9994	0,0349
3	0,0524	0,0523	0,9986	0,0524
4	0,0698	0,0698	0,9976	0,0699
5	0,0873	0,0872	0,9962	0,0875
6	0,1047	0,1045	0,9945	0,1051
7	0,1222	0,1219	0,9925	0,1228
8	0,1396	0,1392	0,9903	0,1405
9	0,1571	0,1564	0,9877	0,1584
10	0,1745	0,1736	0,9848	0,1763
11	0,1920	0,1908	0,9816	0,1944
12	0,2094	0,2079	0,9781	0,2126
13	0,2269	0,2250	0,9744	0,2309

Fonte: Livro #contato Matemática (2016) Vol. 1, Souza; J. R., Jacqueline; S. R. Pág. 247

Diferente do capítulo de conjuntos, não foi encontrada atividades em que haja mudança de registros de figuras para a língua materna. Em outras palavras, poderia existir questões que pedissem aos alunos para formularem o enunciado das tarefas, a partir de figuras geométricas.

Como vimos anteriormente, esse tipo de atividade de conversão é essencial, porque os alunos devêm ter o domínio nas mudanças de registro de representação e também é necessário que o aluno consiga voltar para o registro inicial que geralmente, se é trabalhado, como o da língua materna (DUVAL, 2003), além de permitir que eles exponham suas ideias para o restante da sala e estimule a criatividade.

4. AVALIAÇÃO E RECOMENDAÇÃO

Ao fazermos uma análise do livro #contato Matemática, dos autores Joamir Souza e Jacqueline Garcia, é possível notar que existe certo embasamento nas teorias de Registro de Representação Semiótica de Raymond Duval e dos Campos Conceituais de Gérard Vergnaud.

Percebemos a importância de recorrermos a diferentes registros, principalmente, durante a resolução dos exercícios ou quando o conteúdo é apresentado. É possível notar um enfoque maior em alguns registros, como por exemplo, o de figuras, quando os autores utilizam o diagrama de Venn no capítulo de Conjuntos ou quando eles usam figuras geométricas no capítulo de Trigonometria no triângulo. Como já vimos, esse foco ocorre por ser mais fácil a assimilação do conteúdo através da visualização.

Destacamos a forma como são apresentados os conteúdos por meio de situações. Percebemos que essas situações são importantes para estabelecer quais conhecimentos prévios eles já possuem, além de servirem como tema para introduzir os assuntos que serão trabalhados posteriormente. No entanto, não é exaurido todas as situações presentes em cada conceito, justamente, por ser um livro didático e, assim, não seria possível que isso ocorra em virtude de sua limitação.

Entre as situações presentes existem algumas que estão resolvidas e é possível notar o uso de representações simbólicas durante a resolução dos exercícios. Porém, fazemos uma ressalva no capitulo de Trigonometria do triângulo, onde são feitas demonstrações de teoremas e são utilizadas notações que deveriam ter sido explicadas aos alunos, como o símbolo de congruência de triângulos e a notação de ângulo.

Outras ressalvas, fazemos em relação às mudanças de registros, pois, deveria existir uma variedade maior de exercícios de conversão de registro, principalmente no capítulo de Trigonometria no Triângulo. Nesse aspecto, seria importante a existência de mais atividades, onde os estudantes pudessem voltar para o registro inicial, o registro em língua materna, em outras palavras, deveríamos ter mais tarefas em que os alunos partissem do registro algébrico ou figural e retornassem ao registro em língua materna.

Embora a obra apresente aspectos que possam ser melhorados, recomendamos o livro didático #contato Matemática em relação aos aspectos teóricos considerados e em relação aos capítulos analisados.

REFERÊNCIAS

ALVES, A. M, M. **Livro didático de matemática: uma abordagem histórica**. 2005. 178 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Educação, Universidade Federal de Pelotas, Pelotas, 2005.

Cunha, K. M. A., & Ferreira, L. N. de A. A Teoria dos Campos Conceituais e o Ensino de Ciências: Uma Revisão. **Revista Brasileira De Pesquisa Em Educação Em Ciências**, *20*(u), 523–552, 2020.

DAMM, R. F. Registros de representação. In: MACHADO, Sílvia Dias Alcântara (org.). **Educação Matemática**: uma (nova) introdução. 3 ed. São Paulo: EDUC, 2012.

DUVAL, R. Écarts sémantiques et cohérence mathématique: introduction aux problèmes de congruence. **Annales de Didactique et de Sciences Cognitives**-IREM, Strasbourg, v.1, p. 7-25, 1988.

DUVAL, R. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. Tradução de Méricles Thadeu Moretti. **Revista Eletrônica de Educação Matemática**. Florianópolis, v. 07, n. 2, p.266-297, 2012.

FERREIRA, F. A.; SANTOS, C. A. B. Uma reflexão teórica acerca do papel dos registros de representação semiótica em atividades de demonstrações matemáticas em Geometria Euclidiana A theoretical reflection on the role of semiotic registers representation activities in mathematical. **Revemat**: revista eletrônica de educação matemática, [S.L.], Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC), v. 8, n. 2, p. 177-193, dezembro, 2013.

HENRIQUES, A.; ALMOULOUD, S. A. Teoria dos registros de representação semiótica em pesquisas na Educação Matemática no Ensino Superior: uma análise de superfícies e funções de duas variáveis com intervenção do software maple. **Ciência & Educação, Bauru**, v 22, n.2, p. 465-487, jun 2016. Disponível em: <https://www.scielo.br/j/ciedu/a/QVbBDvRRtjvVXD6HXFYXcxx/?format=pdf&lang=pt>. Acesso em: 20 mar.2021.

JENSKE, G. **A Teoria de Gérard Vergnaud como aporte para a superação da defasagem de aprendizagem de conteúdo.** 2011. 129 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Educação em Ciências e Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2011.

LIBÂNEO, J. C**. Didática**. São Paulo: Cortez, 1994.

MEC. Livro Didático e Qualidade de Ensino. **Em Aberto**, Brasília, v. 16, nº69 jan/mar 1996.

MOREIRA, M. A. A teoria dos campos conceituais de Vergnaud, o ensino de ciências e a pesquisa nesta área. **Revista Investigações em Ensino de Ciências**, Instituto de Física, Porto Alegre, v. 7, n. 1, p. 7-29, abril 2002.

NIEMANN, F. Semiósis e pensamento humano: registros semióticos e aprendizagens intelectuais. **Revista Espaço Pedagógico**, v. 20, n. 1, 4 out. 2013.

SOUZA, J. R.; GARCIA, J. S. R. **#contato Matemática**. São Paulo: Ftd, 2016. 288 p.

VALENTE, W. R. A criação da disciplina escolar de Matemática no Brasil e seu primeiro livro didático. **Educação em Revista**, Belo Horizonte, v. 43. p. 173-187. Junho, 2006.

Vergnaud. G. (1990). La théorie des champs conceptuels. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, 10 (23): 133-170.

Vergnaud, G. (1994). Multiplicative conceptual field: what and why? In Guershon, H. and Confrey, J. (1994). (Eds.) **The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics**. Albany, N.Y.: State University of New York Press. pp. 41-59.

Vergnaud, G. Multiplicative structures. In Lesh, R. and Landau, M. (Eds.) Acquisition of Mathematics Concepts and Processes. New York: Academic Press Inc. pp. 127-174, 1983.

Vergnaud, G. (1993). Teoria dos campos conceituais. In Nasser, L. (Ed.). **Anais do 1º Seminário Internacional de Educação Matemática do Rio de Janeiro**. p. 1-26.

Vergnaud, G. O que é aprender? In: BITTAR, Marilena; MUNIZ, Cristiano Alberto (organizadores). **A Aprendizagem matemática na perspectiva da teoria dos campos conceituais**. – 1. ed.- Curitiba: Editora CRV, 2009, p. 13-35.