



UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
LICENCIATURA PLENA EM MATEMÁTICA

ANA KAROLINA DE ARAUJO OLIVEIRA

**O ENCONTRO DE JÚLIO CESAR DE MELLO E SOUZA E GEORGE PÓLYA:
UMA NARRATIVA FICCIONAL SOBRE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE
PARTILHA**

João Pessoa – PB

2021

ANA KAROLINA DE ARAÚJO OLIVEIRA

**O ENCONTRO DE JÚLIO CESAR DE MELLO E SOUZA E GEORGE PÓLYA:
UMA NARRATIVA FICCIONAL SOBRE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE
PARTILHA**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado como exigência parcial para a obtenção do título de Licenciatura Plena em Matemática, pela Universidade Federal da Paraíba, Campus I – João Pessoa, sob a orientação do Professor Doutor Eduardo Gonçalves dos Santos.

João Pessoa

2021

Catálogo na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

O48e Oliveira, Ana Karolina de Araújo.

O encontro de Júlio Cesar de Mello e Souza e George Pólya : uma narrativa ficcional sobre resolução de problemas de partilha / Ana Karolina de Araújo Oliveira. - João Pessoa, 2021.
42 f. : il.

Orientação: Eduardo Gonçalves dos Santos.
TCC (Graduação/Licenciatura em Matemática) -
UFPB/CCEN.

1. Malba Tahan. 2. Problemas de partilha. 3. Resolução de problemas. I. Santos, Eduardo Gonçalves dos. II. Título.

UFPB/CCEN

CDU 51:37(043.2)

ANA KAROLINA DE ARAÚJO OLIVEIRA

**O ENCONTRO DE JÚLIO CESAR DE MELLO E SOUZA E GEORGE PÓLYA:
UMA NARRATIVA FICCIONAL SOBRE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE
PARTILHA**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado como exigência parcial para obtenção do título de Licenciatura Plena em Matemática, pela Universidade Federal da Paraíba (UFPB), Campus de João Pessoa.

Aprovado em: 19/07/2021

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Eduardo Gonçalves dos Santos
Universidade Federal da Paraíba
(Orientador)

Prof. Ms. Antonio Salves da Silva
Universidade Federal da Paraíba
(Membro da banca examinadora)

Prof. Ms. João Batista Alves Parente
Universidade Federal da Paraíba
(Membro da banca examinadora)



**MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA**

ATA Nº 9 / 2021 - CCEN-CGM (11.01.14.44)

Nº do Protocolo: 23074.071244/2021-86

João Pessoa-PB, 19 de Julho de 2021

ATA DA SESSÃO PÚBLICA DE DEFESA DO TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO DO DISCENTE ANA KAROLINA DE ARAÚJO OLIVEIRA, MATRÍCULA 2016029086, DO CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA.

Ao décimo nono dia do mês de julho dois mil e vinte e um (19/07/2021), às 19:00 horas, por videoconferência via plataforma Google Meet, através do link <https://meet.google.com/uvu-yqqs-sqo>, em conformidade com a portaria nº 29/GR/REITORIA de 22 de julho de 2021, que dispõe sobre a regulamentação, em caráter excepcional e temporário, das atividades da graduação da Universidade Federal da Paraíba durante o período de isolamento social imposto pela pandemia de coronavírus (covid-19), reuniram-se em caráter de solenidade pública, os membros da comissão designada para avaliar Ana Karolina de Araújo Oliveira. Foram componentes da Banca Examinadora, os professores Dr. Eduardo Gonçalves dos Santos (Orientador), Ms. João Batista Parente(UFPB) e Ms. Antonio Sales da Silva (UFPB). Dando início aos trabalhos, o Presidente da Banca, Eduardo Gonçalves dos Santos, após declarar os objetivos da reunião, apresentou o candidato a quem concedeu a palavra para que dissertasse, oral e sucintamente, sobre o tema apresentado, intitulado "O Encontro de Júlio Cesar De Melo e Souza e George Pólya: "Uma Narrativa Ficcional Sobre Resolução de Problemas de Partilha". Após discorrer sobre o referido tema, o candidato foi arguido pelos examinadores na forma regimental. Ato contínuo passou a comissão, em caráter secreto, a proceder à avaliação e julgamento do trabalho, concluindo por atribuir-lhe a nota **10,0 (dez)** e, portanto, o conceito **Aprovada**.

João Pessoa, 19 de julho de 2021.

(Assinado digitalmente em 20/07/2021 16:27)
ANTÔNIO SALES DA SILVA
PROFESSOR DO MAGISTERIO SUPERIOR
Matrícula: 332490

(Assinado digitalmente em 19/07/2021 20:47)
EDUARDO GONCALVES DOS SANTOS
PROFESSOR DO MAGISTERIO SUPERIOR
Matrícula: 1125685

(Assinado digitalmente em 20/07/2021 09:33)
JOAO BATISTA ALVES PARENTE
PROFESSOR DO MAGISTERIO SUPERIOR
Matrícula: 331489

Para verificar a autenticidade deste documento entre em <https://sipac.ufpb.br/documentos/> informando seu número: **9**, ano: **2021**, documento(espécie): **ATA**, data de emissão: **19/07/2021** e o código de verificação: **6e2318d241**

AGRADECIMENTOS

Primeiramente à Deus, pelo dom da vida e por me conceder saúde e sabedoria durante esse período.

À minha família, minha mãe Ângela Araújo que sempre me auxiliou de sua maneira e com seu jeito amoroso sempre me deu o suporte necessário para continuar na caminhada, meu pai Geraldo Marcos que do seu jeito silencioso sempre torceu e acreditou em mim e a minha irmã Andreza Araújo que sempre se dispôs a me escutar e me acalmar.

Aos meus amigos e namorado, que sempre acreditaram em mim, me dando força e energia, me trazendo momentos de alegria tornando a escrita mais leve.

Aos meus colegas de curso, que caminharam junto comigo e que hoje posso chamar de amigos.

Aos professores, que tive oportunidade de ser aluna e que contribuíram para minha formação.

Ao meu orientador, professor Eduardo Gonçalves, que aceitou me orientar nessa jornada e me permitiu conhecer ainda mais o ser humano cheio de luz que é, além de um profissional inspirador. Meus agradecimentos por todo auxílio, não somente com o trabalho, mas também emocionalmente e psicologicamente.

RESUMO

Pensando no ensino da matemática na educação básica e refletindo sobre as dificuldades encontradas tanto pelos professores como pelos alunos, um questionamento levantado para a produção deste trabalho foi sobre como os alunos lidam com os problemas matemáticos quando colocados em um contexto. Foi nesse intuito que esse trabalho foi desenvolvido, trazendo os métodos de Pólya, que foi o precursor das literaturas sobre resolução de problemas, para resolver alguns problemas de partilha presentes no livro “O Homem que Calculava” de Malba Tahan, que traz a matemática numa perspectiva recreativa, apresentando-a numa forma leve e cativante. Este trabalho vai apresentar uma biografia do professor Júlio César, incluindo a criação do seu pseudônimo Malba Tahan, uma breve pesquisa bibliográfica sobre os problemas de partilha, baseadas nos estudos realizados por Jadilson R. Almeida (2011, 2016) e uma pesquisa bibliográfica acerca da resolução de problemas à luz do trabalho desenvolvido por George Pólya “A Arte de Resolver Problemas”. Na sequência é apresentado um encontro de ideias entre os problemas de partilha do livro “O Homem que Calculava” e o método de George Pólya para resolução de problemas, com o objetivo de buscar soluções, de entender as soluções apresentadas no livro, analisando em um dos problemas escolhidos soluções dadas por alunos do ensino básico. O trabalho busca também estudar meios alternativos para as soluções encontradas usando ferramentas como o Excel, por exemplo.

Palavras-chave: Malba Tahan; Problemas de Partilha; Resolução de Problemas.

ABSTRACT

Thinking about the teaching of mathematics in basic education and reflecting on the difficulties encountered by both teachers and students, a question raised for the production of this work was about how students deal with mathematical problems when placed in a context. It was with this in mind that this work was developed, bringing Pólya's methods, which was the precursor of the literature on problem solving, to solve some sharing problems present in the book "The Man who Calculated" by Malba Tahan, which brings mathematics in a recreational perspective, presenting it in a light and captivating way. This paper will present a biography of Professor Julio Cesar, including the creation of his pseudonym Malba Tahan, a brief bibliographic research about the sharing problems, based on the studies conducted by Jadilson R. Almeida (2011, 2016) and a bibliographic research about problem solving in the light of the work developed by George Pólya "The Art of Problem Solving". In the sequence a meeting of ideas is presented between the sharing problems in the book "The Man Who Calculated" and George Pólya's method for solving problems, with the aim of seeking solutions, to understand the solutions presented in the book, analyzing is one of de problems chosen solutions given by students of basic education. The work also seeks to study alternative means for the solutions found using tools such as Excel, for example.

Keywords: Malba Taha; Sharing Problems; Troubleshooting.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Revista “Erre” escrita por Júlio César	13
Figura 2 - Tabela desenvolvida no Excel	23
Figura 3 - Atividade desenvolvida por aluno do 9º ano durante uma aula interdisciplinar.....	28
Figura 4 - Atividade desenvolvida por aluno do 9º ano durante uma aula interdisciplinar.....	28
Figura 5 - Atividade desenvolvida por aluno do 9º ano durante uma aula interdisciplinar.....	29
Figura 6 - Tabela desenvolvida no Excel	38

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Partição do número 7	29
Tabela 2 – Partição do número 7	30
Tabela 3 - Partições possíveis para resolução do problema	32

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO.....	10
CAPÍTULO 1 – JÚLIO CESAR E MALBA TAHAN.....	12
CAPÍTULO 2 - PROBLEMAS DE PARTILHA.....	15
CAPÍTULO 3 - RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS.....	17
CAPÍTULO 4 - O CASO DAS 90 MAÇÃS	20
CAPÍTULO 5 - O PROBLEMA DOS 21 VASOS	26
CAPÍTULO 6 - O PROBLEMA DOS TRÊS MARINHEIROS	33
CONSIDERAÇÕES FINAIS	40
REFERÊNCIAS	41

INTRODUÇÃO

Neste trabalho é apresentada uma pesquisa sobre a biografia do Júlio Cesar de Mello e Souza e a construção do personagem Malba Tahan, conta também com uma pesquisa bibliográfica acerca dos problemas de partilha e da resolução de problemas na perspectiva de George Pólya.

A finalidade do trabalho é realizar um encontro ficcional entre Júlio César e George Pólya. O encontro deles abordará três problemas presentes na obra de Malba Tahan “O homem que calculava” e o intuito é resolvê-los seguindo o método de Pólya para resolução de problemas.

O trabalho contém também algumas das atividades desenvolvidas por alunos do 9º ano durante uma disciplina eletiva interdisciplinar com o título “Pesquisar para Solucionar”, onde foram escolhidos capítulos do livro “O homem que calculava” para se trabalharem em um aspecto histórico e matemático os problemas apresentados nos capítulos escolhidos, além da apresentação de tabelas desenvolvidas na plataforma Excel como meio alternativo para as soluções apresentadas.

O trabalho está dividido em capítulos que tratam sobre os seguintes assuntos:

Capítulo 1: Biografia de Júlio César e criação do personagem Malba Tahan;

Capítulo 2: Problemas de Partilha, vai trazer um breve resumo e definição sobre os problemas de partilha, usando como referência o professor doutor em ensino das ciências e matemática Jadilson Ramos de Almeida;

Capítulo 3: Resolução de Problemas, apresenta uma pesquisa bibliográfica sobre a resolução de problemas na perspectiva do George Pólya;

Capítulos 4, 5, e 6: Apresentam os encontros ficcionais realizados por Júlio Cesar e George Pólya, trazendo discussões sobre os problemas presentes no livro “O homem que calculava”, sendo eles os problemas presentes no capítulo 17 (O caso das 90 maçãs), capítulo 8 (O problema dos 21 vasos) e capítulo 19 (O problema dos três marinheiros).

Capítulo 7: Considerações finais e perspectivas futuras.

Nossa pesquisa teve como objetivo geral realizar o encontro entre uma obra clássica “O homem que calculava” de Malba Tahan com o método de George Pólya para resolução de problemas através da obra “A arte de resolver problemas”.

Nesse intuito, foram traçados os seguintes objetivos específicos:

I) Conhecer a biografia de Júlio Cesar e criação do pseudônimo Malba Tahan;

II) Realizar uma pesquisa bibliográfica acerca dos problemas de partilha e da resolução de problemas;

III) Construir uma narrativa ficcional para promover o encontro entre a obra de Malba Tahan e o método do George Pólya.

CAPÍTULO 1 – JÚLIO CESAR E MALBA TAHAN

No dia 03 de maio de 1937, Júlio Cesar de Mello Souza se despedia, no aeroporto, de sua esposa Nair de Mello e Souza e mandava um beijo para seus três filhos enquanto se preparava para pegar o voo até a Suíça para participar de uma palestra na Universidade de Zurique sobre um método inovador de resolução de problemas, ministrada por George Pólya, criador do método. Júlio César era professor catedrático da Faculdade de Filosofia Ciência e Letras (FFCL) da Universidade do Brasil, mas antes tinha lecionado pela primeira vez no Colégio Pedro II e em seguida na Escola Normal. A princípio foi professor de História, Geografia e Física, mas optou pela matemática. Além de professor, era engenheiro e escritor, e estava prestes a lançar mais um livro que viria a ser o mais famoso dos seus escritos.

O intuito de Júlio César em participar dessa palestra era receber uma luz acerca dos problemas que ele queria desenvolver em seu livro. Enquanto esperava o avião no aeroporto, várias lembranças de sua infância e adolescência até chegar ali passavam por sua mente.

Lembrou-se de sua infância vivida na cidade de Queluz em São Paulo, mesmo tendo nascido no Rio de Janeiro. Ele era o quinto de nove irmãos e era filho de dois pais muito preocupados com a educação dos filhos. Desde cedo ele demonstrava interesse pela docência, sua mãe possuía uma escola dentro da sala de sua casa frequentada apenas por garotas, o que garantia uma renda para a numerosa família e Júlio César junto com suas irmãs ajudava sua mãe nas pequenas atividades, entregando as tarefas, lendo textos para as alunas e apagando o quadro. Nas horas vagas, Júlio, na ausência de brinquedos, gostava de se divertir com os sapos, ele os comandava e dava nome a eles, fazendo com que ele desenvolvesse um carinho e admiração pelos anfíbios, chegando a colecionar 50 sapos.

Pensando em seus irmãos, lembrou do irmão mais velho João Batista, que morava no Rio de Janeiro e o período que passou junto com ele quando tinha 10 anos com o intuito de estudar para ingressar no colégio militar, a felicidade com a aprovação no processo seletivo quando tinha 11 anos de idade ainda era fresca em suas memórias, mas por condições financeiras precárias só se manteve lá durante 3 anos, passando a estudar no Colégio Dom Pedro II, onde conseguiu semigratuidade.

Júlio lembrou de seus amigos do colégio e de como ganhava um dinheiro extra para comprar seu chocolate preferido, da marca Bhering, escrevendo redações para seus companheiros, já que era o único que conseguia tirar uma nota superior a 7,0 na disciplina de português, as redações eram sobre temas abstratos como “a esperança”, “a virtude”, “a injustiça”.

Enquanto passava um filme na sua cabeça, Júlio tirou de sua mala um caderninho, com folhas dobradas e costuradas a mão, sua primeira obra literária, uma revista intitulada “ERRE”, que ele produzia quando ia passar as férias com sua família. Ele gostava de falar na revista sobre suspense, guerra, comédia ou ainda a ciência dos animais ou do corpo humano. Foi na revista “ERRE” que ele usou seu primeiro pseudônimo: Salomão IV.

Figura 1 - Revista “Erre” escrita por Júlio César



Fonte: < <https://www.malbatahan.com.br/biografias/1895-1906/>>. Acesso em: 15 de junho, 2021.

Passando os dedos pelas letras do pseudônimo criado por ele, Júlio recordou da sua juventude e do seu emprego aos 24 anos como *office-boy* e tradutor de correspondências de guerra no jornal *O Imparcial*, no Rio de Janeiro. Na época passou por um momento de revolta, pois o jornal publicava contos e Júlio que já gostava de escrever, entregou ao editor do jornal um de seus contos para ser publicado, e tamanha foi a frustração por saber que seu conto não tinha sido nem lido depois de dias, permanecendo no mesmo lugar. Júlio como era esperto, pegou sorrateiramente o jornal de volta para si e ficou refletindo sobre o que fazer para que seu conto fosse publicado pelo jornal e lá na mesma hora trocou o nome J. C. Mello e Souza para R. V. Slady, um nome que inventou na hora.

Quando encontrou o editor do jornal, disse-lhe: “Aqueles contos que eu trouxe eram realmente muito fracos, não valiam nada. Mas descobri o escritor americano formidável, que é muito curioso. Traduzi – graças ao auxílio de um esperantista – os contos dele, que são

desconhecidos no Brasil”. Tamanha foi sua surpresa ao encontrar no dia seguinte nas bancas de jornais seu conto “A história dos oito pães” publicado com grifo, duas colunas e moldura.

A partir deste momento, Júlio Cesar começou a perceber que talvez escritos com seu nome não chamariam tanta atenção como escritos desenvolvidos por autores estrangeiros, mesmo que anônimos. E foi assim que ele começou a tornar o uso por pseudônimos mais frequente nos seus escritos. Júlio guardou seu livrinho e entrou no avião, partindo para Zurique.

CAPÍTULO 2 - PROBLEMAS DE PARTILHA

Durante o vôo, enquanto olhava pela janela, começou a recordar dos setes anos da sua vida dedicadas ao estudo da cultura árabe e como isso fez com que ele desenvolvesse um autor árabe com uma biografia própria e deu o nome de “Ali Yezid Ibn-Abul Izz-Eddin Ibn-Salin Hank Malba Tahan”, que depois seria reduzido para Malba Tahan, visto que um autor brasileiro não teria muita credibilidade escrevendo contos árabes. Malba Tahan foi quem assinou os escritos conhecidos mundialmente de Júlio César, fazendo com que a frustração de ser um escritor em um país que não valorizava seus escritores desaparecesse um pouco.

Por ser conhecedor da cultura árabe, os problemas que ele trazia para seu esperado encontro com George Pólya eram problemas caracterizados como problemas de partilha, que são problemas que segundo Almeida (2011, p. 22) estão associados às origens da álgebra pela necessidade de repartir heranças e resolver situações do cotidiano, até a álgebra que conhecemos hoje. “Um problema de partilha se caracteriza por ter um valor conhecido que será repartido em partes desiguais e desconhecidas” (ALMEIDA, 2016, p. 28).

Merchand e Bednarz (1999) destacam que um problema de partilha pode ser classificado de acordo com a relação existente entre as partes, levando em consideração o número das relações, a natureza das relações e o tipo de encadeamento das relações (apud ALMEIDA, 2016, p. 29).

Sobre o número de relações, os problemas de partilha podem conter uma, duas ou três relações. Quanto a natureza das relações, elas poderão ser de natureza aditiva, multiplicativa ou mista, onde a primeira compõe-se de problemas que envolvem adição e subtração, a segunda de problemas que envolvem multiplicação e divisão e na terceira natureza são problemas que envolvem as outras duas naturezas.

Quando se trata sobre o tipo de encadeamento, os problemas de partilha são classificados em: “fonte”, “composição” ou “poço”. Nos problemas em que o encadeamento é tipo fonte, as grandezas são originadas em função apenas de uma grandeza. Nos problemas em que o encadeamento é tipo composição, as relações são estabelecidas seguindo uma sequência. Já nos problemas de partilha em que o encadeamento é tipo poço, as relações convergem para um dos personagens do problema.

Exemplo 1: Ana, Pedro e Júlia têm, ao total, 80 doces. Ana tem o dobro de Júlia e Pedro tem 20 doces a mais que Júlia. Quantos doces têm cada um?

No exemplo acima, há duas relações: “Ana tem o dobro de Júlia” e “Pedro tem 20 doces a mais que Júlia”. Quando se trata da natureza das relações, no exemplo 1, a primeira relação é de natureza multiplicativa e a segunda aditiva. Já o encadeamento é tipo fonte, onde a fonte é a quantidade de doces que Júlia possui.

Exemplo 2: Ana, Pedro e Júlia vão dividir entre eles 90 doces de modo que Pedro receba o dobro de doces de Ana e Júlia receba o triplo de Pedro. Quantos doces cada um vai receber?

No exemplo 2, há duas relações, são elas “Pedro receba o dobro de Ana” e “Júlia receba o triplo de Pedro”, a natureza das relações é multiplicativa e o encadeamento é do tipo composição, pois segue a sequência Ana → Pedro → Júlia.

Exemplo 3: Ana, Pedro e Júlia vão repartir entre eles 50 doces de modo que Ana receba metade dos doces de Pedro e 10 doces a mais que Júlia. Quantos doces cada um receberá?

No exemplo 3, há duas relações “Ana receba metade dos doces de Pedro” e “Ana receba 10 doces a mais que Júlia” e elas são de natureza multiplicativa e aditiva, respectivamente. O encadeamento é tipo poço, pois todas as relações convergem para Ana.

Essas questões são pertinentes nos problemas desenvolvidos por Júlio César, pois problemas em que se faz necessário as partilhas estão presentes no cotidiano da cultura árabe, tão conhecida por Júlio. Enquanto lembrava dessa parte de sua vida e trajetória, Júlio acabou caindo no sono.

CAPÍTULO 3 - RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Júlio acordou já na Suíça, depois de desembarcar foi direto para o hotel, onde teve uma noite tranquila, por conta do cansaço. De manhã, ele acordou, fez sua primeira refeição, pegou seus pertences e se encaminhou a Universidade de Zurique, onde ocorreria a palestra. Ele se adiantou um pouco no horário para poder aproveitar os momentos e não correr o risco de não achar o auditório. Chegando à Universidade, ele ficou deslumbrado com tamanha beleza arquitetônica e começou a procurar o auditório enquanto observava os ambientes pelos quais passava. Encontrou o auditório e se sentou na fila do meio enquanto observava a sala enchendo cada vez mais. Quando o relógio marcou exatas 09:00hrs, o homem que Júlio deduziu ser George Pólya apareceu e se apresentou confirmando as suas suspeitas.

George Pólya iniciou se apresentando como professor da Universidade de Zurique e dizendo que abordaria ali uma temática nova, mas que muito promissora. Ele iniciou a palestra falando sobre a necessidade cada vez maior das pessoas de aprenderem matemática e pensar como ela é transmitida na escola para os alunos de diversas faixas etárias é um tema que deve receber uma atenção especial, para Pólya (1978) ter um problema significa buscar conscientemente por alguma ação apropriada para atingir um objetivo claramente definido, mas não imediatamente atingível.

Em seguida ele começou a justificar a importância da temática, trazendo para pauta alguns benefícios, segundo sua visão, da resolução de problemas, afirmando que:

Uma grande descoberta resolve um grande problema, mas há sempre uma pitada de descoberta na resolução de qualquer problema. O problema pode ser modesto, mas se ele desafiar a curiosidade e puser em jogo as faculdades inventivas, quem o resolve por seus próprios meios, experimentará a tensão e vivenciará o triunfo da descoberta. Experiências tais, numa idade suscetível, poderão gerar o gosto pelo trabalho mental e deixar, por toda a vida, a sua marca na mente e no caráter. (POLYA, 2006, p. 5)

Pólya não sabia, mas seu trabalho seria o precursor de muitos outros trabalhos sobre resolução de problemas, principalmente a partir da década de 1990, quando um novo entendimento dessa temática foi ocupando seu lugar na literatura sobre educação matemática. Quando se trata do Brasil, a temática se estende até os documentos oficiais que tratam sobre educação, como por exemplo a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) que aponta que: “Esses processos de aprendizagem são potencialmente ricos para o desenvolvimento de competências fundamentais para o letramento matemático (raciocínio, representação,

comunicação e argumentação) e para o desenvolvimento do pensamento computacional” (BRASIL, 2018, p. 264).

As pessoas presentes na palestra, acostumados com os métodos convencionais de se ensinar matemática, onde só são passados mecanismos e repetições, se surpreenderam com tal proposta, mas concordaram que é muito mais desafiante e prazeroso quando o aluno constrói sua resposta, pois o problema não é uma resposta mecânica, mas um processo, onde a resposta é construída pela vontade de se encontrar uma solução. Os presentes começaram a se perguntar como deveria ser apresentado um problema desses aos alunos e quão desafiador para o professor poderia ser isso.

Dante (2009, p. 12) vem responder esses questionamentos nos dias atuais ressaltando que os educadores precisam ajustar suas práticas pedagógicas para acompanhar o processo e nas suas metodologias de ensino deve-se valorizar os pensamentos e questionamentos dos alunos por meio da expressão de ideias. A resolução de problemas traz esses aspectos, mas para que essa metodologia seja eficaz, Dante afirma ainda que os problemas devem conter elementos como ser real, interessante, não consistir na aplicação direta e evidente de uma ou mais operações aritméticas e ter um nível adequado de dificuldade.

Os problemas matemáticos podem ser classificados em: exercícios de reconhecimento; exercícios de algoritmos; problemas-padrão: problemas-processo ou heurísticos; problemas de aplicação e problemas de quebra-cabeça (DANTE, 2009). Mas com tantos tipos de problemas, o questionamento levantado por Júlio César enquanto escutava as palavras de Pólya era de como auxiliar os alunos a resolver os problemas que ele trazia consigo. E como se estivesse adivinhando seus pensamentos, George Pólya começou a falar sobre a resolução de problemas como uma metodologia de ensino de matemática.

Nos deparamos com problemas no nosso dia a dia e existe sempre uma reflexão de como resolver tais problemas, quais técnicas serão utilizadas, que materiais serão necessários e como vou utilizar as informações encontradas sobre o problema. George Pólya traz durante sua apresentação quatro fases para se resolver um problema, assegurando que se essas fases forem bem executadas, trarão bons resultados, são elas:

- ❖ **Compreender o problema:** Apesar de parecer simples, essa é uma fase importante para resolução de um problema. Aqui serão feitos alguns questionamentos como, o que é necessário para resolver o problema? Quais variáveis envolvidas? Existe alguma restrição ou condição? Quais os dados

apresentados? Além de se fazer esses questionamentos, também é indicado que se organize e separe todas as informações colhidas nessa fase;

- ❖ **Estabelecimento de um plano:** Essa fase pode ser considerada a mais difícil e que vai exigir mais da pessoa que tá resolvendo, tanto no sentido de possuir conhecimentos prévios, como também de usar a criatividade para resolver o problema. Nessa fase são levantados questionamentos como: Esse problema é conhecido? Qual a conexão entre os dados e a incógnita? Quais estratégias devemos usar para sua resolução?
- ❖ **Executar o plano:** Se a segunda fase foi executada de forma eficiente, essa terceira fase se torna simples. Os questionamentos levantados aqui são: é possível verificar cada passo da execução? É possível demonstrar que o plano está correto?
- ❖ **Retrospecto da solução:** Esta última fase é muitas vezes negligenciada e Pólya afirma sua importância falando que aqui podem ser encontrados alguns erros na execução ou até mesmo no plano. Outros aspectos também podem ser observados como uma maneira mais simples de se resolver o mesmo problema. O que a pessoa que está resolvendo o problema deve se perguntar aqui é se é possível verificar o resultado encontrado.

Pólya termina sua palestra enfatizando que é na resolução de problemas onde o professor precisa trabalhar de forma significativa para o desenvolvimento da inteligência do aluno, levando-o a pensar e trabalhar efetivamente na resolução, para que realmente aprenda, investigando e construindo o conhecimento.

Feitos os agradecimentos, George Pólya foi muito aplaudido e quando se encaminhava para a saída Júlio correu para falar com ele e mesmo apressado, ele lhe deu atenção. Júlio se apresentou e contou um pouco da sua história e dos seus objetivos e convidou Pólya para almoçar com ele. George achou intrigante a abordagem e objetivos de Júlio, por esse motivo aceitou o almoço.

CAPÍTULO 4 - O CASO DAS 90 MAÇÃS

George Pólya e Júlio Cesar se encaminharam para um restaurante próximo. No restaurante, Júlio contou que pretendia escrever um livro, mas que já tinha outros escritos e que no seu novo livro seriam apresentados alguns problemas durante a história e que pretendia com aquela conversa “testar” o método de Pólya para alguns dos problemas que tratavam de partilha. Deixou claro que seu intuito era que o seu livro fosse usado como uma abordagem diferente na hora de trabalhar matemática com crianças e adolescentes, e entendia que pela palestra de George Pólya ele tivesse um pensamento parecido.

Enquanto George Pólya chamava o atendente para fazer o pedido, Júlio pegava os escritos dentro de sua mochila. Júlio olhou atentamente enquanto Pólya fazia o pedido e por não conhecer muito bem a culinária local, pediu o mesmo.

- Sim, Júlio... conte-me sobre o problema que você estava dizendo – falou Pólya, curioso.

- Aqui está, trata-se de um problema onde um homem não acreditava nas palavras e elogios de um pai sobre a sabedoria de suas filhas e resolveu testá-las, fazendo o seguinte desafio: “Aqui estão 90 maçãs que vocês deverão vender no mercado. Fátima, que é mais velha, levará 50. Cunda levará 30 e Siha, a caçula, será encarregada de vender as 10 restantes. Se Fátima vender as 7 maçãs por um dinar¹, as outras deverão vender, também, pelo mesmo preço, isto é, a 7 por um dinar, se Fátima fizer a venda das maçãs a três dinares cada uma, será esse o preço pelo qual Cunda e Siha deverão vender as que levam. O negócio deve fazer-se de sorte que as três apurem, com a venda das respectivas maçãs, a mesma quantia”.

George Pólya pareceu intrigado com relação ao problema.

- Veja, George... – disse Júlio – quero primeiro esclarecer que a história irá se passar no Oriente Médio, pois dediquei uma parte da minha vida a estudar sobre a cultura árabe, e quem vai assinar o livro que vai conter esse e outros problemas é um personagem criado por mim, chamado de Malba Tahan, então não estranhe aspectos culturais e termos diferentes. Como é o caso do dinar, que é a moeda usada no Oriente Médio.

- Certo, certo – falou George Pólya – Vou querer saber mais sobre isso, mas vamos para o seu problema que eu fiquei intrigado. O primeiro passo na resolução de problemas é compreendê-lo, então deixe-me ver se entendi. O problema traz um questionamento aparentemente impossível de se resolver com métodos diretos, visto que Fátima possui uma

¹ Unidade monetária usada pelos árabes

vantagem muito maior com relação às outras irmãs, e isso é o interessante. Este problema poderia ser modificado com o objetivo de se trabalhar com o conceito de múltiplos e divisores, um assunto muito importante no ensino básico. Veja, se o problema não falasse que os valores de venda teriam que ser iguais, a questão poderia ser resolvida com uma simples equação: $50F = 30C = 10S$ onde F é o valor que Fátima venderia, C o valor que Cunda venderia e S o valor que Siha venderia e 50, 30 e 10 a quantidade de maçãs de cada irmã. Isso poderia ser proposto aos seus alunos de maneira que eles atribuíssem o preço de venda para um das irmãs no intuito de encontrar números inteiros e eles iriam perceber que isso só seria possível se o valor escolhido para Fátima resultasse em um número múltiplo de 30 e 10 que é a quantidade de maçãs de Cunda e Siha, respectivamente, da mesma maneira se escolhesse um número para Cunda o resultado deveria ser múltiplo de 50 e 10 que é a quantidade de maçãs de Fátima e Siha, e assim por diante. Esse é o tipo de questionamento que a gente pode levantar quando estamos discutindo um problema.

Interrompendo as palavras de Pólya e a atenção de Júlio, o garçom chegou trazendo o almoço dos dois.

Entre uma garfada e outra, George dizia:

- Já vimos que vamos ter que elaborar um plano por etapas, visto que na discussão do problema ficou claro que não é com um método convencional que iremos resolver. No enunciado da questão encontramos uma dica que podemos usar na nossa resolução, uma forma de venda para maçãs. Acho que podemos levar isso em consideração na elaboração do plano.

- No caso, estaríamos de acordo com seu método, no segundo passo que seria o de construir uma estratégia – disse Júlio -. Vejamos, teríamos que achar uma solução que trabalhasse por partes, onde o primeiro passo seria diminuir a vantagem que Fátima tem em relação a Cunda e que Cunda tem em relação a Siha. Se voltarmos à discussão do problema, professor, devemos observar uma coisa que se meus pensamentos estiverem corretos, deveremos ignorar para que a resolução dê certo. Veja, acredito que o cádi² escolheu maçãs para que fosse vendido rápido, visto que é uma fruta e normalmente são perecíveis, então acredito que iremos passar por uma espécie de “gangorra”, onde as irmãs venderão as maçãs por um preço muito abaixo do valor para que haja a diminuição da vantagem, enquanto em uma segunda etapa, elas venderão por um preço alto para que a vantagem não se faça mais presente.

- Júlio, há várias formas de vender maçãs, não sou um exímio pesquisador sobre o assunto, mas imagino que pode ser vendida por unidade, por peso ou até mesmo por lotes. A

² Juiz mulçumano com funções civis e religiosas

primeira opção é descartada, já que qualquer valor que atribuirmos as maçãs, a primeira terá uma vantagem enorme. A segunda opção de venda, por peso, também podemos descartar, visto que nada se fala sobre os pesos das maçãs. Acredito que essa última seja a mais interessante para este caso, visto que a intenção a princípio é tentar diminuir a vantagem da irmã mais velha com relação as mais novas e se agruparmos as maçãs, como foi proposto no problema, isso poderá acontecer. Ele fala de 7 maçãs por 1 dinar, mas por que 7 e por que 1 dinar?

De repente, Júlio e Pólya se viraram para observar um homem que se aproximava deles e se vestia de forma anormal, bem informalmente. O homem se aproximou e disse:

- Desculpe atrapalhar a conversa de vocês, mas eu não podia deixar de prestar atenção no problema discutido. É muito interessante e queria dizer a vocês que eu sou um viajante do tempo, não se assustem, por favor. Não é nada de anormal, eu não posso mudar o rumo das coisas, mas pude escolher participar de diálogos que envolvessem alguma temática que eu goste e eu escolhi o ensino da matemática e fui trazido até aqui. Queria dizer a vocês que tem uma ferramenta em um dos tempos que eu visitei, que é o século XXI anos 2000, que pode nos ajudar a entender melhor o funcionamento de uma possível solução para este problema, é chamado Excel, lá a gente pode construir tabelas, fazer simulações, programar e muitas outras coisas... e ele tem sua importância no ensino da matemática, pois “é uma ferramenta que pode ajudar o estudante a evitar os cansativos cálculos e assim oportunizar o raciocínio, a criatividade e a interpretação” (MACENDO; SILVA, 2016, p. 1).

- Queira se sentar, meu caro. – disse George Pólya – Parece que você tem levantamentos interessantes para esse problema.

- Como eu estava dizendo – continuou o homem – há uma ferramenta em uma das épocas que eu visitei e ela funciona em tabelas e por comandos, vejam.

Os dois observaram espantados e curiosos, enquanto o homem tirava da mochila um aparelho fino e com uma luz brilhante saindo dele, e ficaram ainda mais espantados quando ele começou a deslizar o dedo pelo aparelho e começou a aparecer novas imagens.

- Olhem – disse o homem -, não poderei lhes dizer muito sobre este aparelho e sei que vocês estão curiosos, só espero que confiem em mim, depois podem verificar as respostas. Eu digitei alguns comandos aqui para poder ter acesso a todas possíveis divisões das maçãs em lotes e analisarmos qual é mais vantajoso para o problema.

- Na tabela vemos divisões de 2 a 10 – continuou o homem desconhecido –, e pelo que entendi o objetivo é de alguma forma diminuir a vantagem das irmãs. A divisão por 1 seria o mesmo que vender por unidade e não seria útil para o problema, por isso não a adicionei e a divisão por valores acima de 10 não seria viável, pois a irmã mais nova possui apenas 10 maçãs.

Figura 2 - Tabela desenvolvida no Excel

50	16	2				50	6	2			
30	10	0		3		30	3	6		8	
10	3	1				10	1	2			
50	12	2				50	5	5			
30	7	2		4		30	3	3		9	
10	2	2				10	1	1			
50	10	0				50	5	0			
30	6	0		5		30	3	0		10	
10	2	0				10	1	0			
50	8	2				50	25	0			
30	5	0		6		30	15	0		2	
10	1	4				10	5	0			
50	7	1									
30	4	2		7							
10	1	3									

Fonte: Realizada pela autora

- Deixa-me ver se entendi, disse Júlio, essa aqui (falou apontando para parte em amarelo da tabela) são os números sendo divididos por 3, esse daqui, falou apontando para onde se encontrava os quocientes, são os resultados das divisões e este número do lado é a sobra (falou apontando para o resto)?

- Isso mesmo – disse o homem.

- Sendo assim, falou Pólya, que até o momento se encontrava calado, a divisão por 2 nenhuma ajuda traz para nosso problema, pois a primeira vai continuar a receber um valor maior por possuir mais lotes de maçãs e como é uma divisão sem restos todas as maçãs seriam vendidas, não havendo mais nada que pudesse ser feito. Em todos os casos a vantagem ainda vai existir, porém vai diminuir um pouco. No entanto temos que ter ‘outros olhos’ para este problema. As divisões que tem resto zero em nada vai nos ajudar, visto que a vantagem ainda vai existir e nada poderemos fazer, então podemos excluir as divisões por 2, 5 e 10. Como estamos trabalhando com uma solução por partes, pensemos na segunda parte do nosso problema. O primeiro passo da nossa estratégia é vender por lotes, mas como a vantagem sempre vai existir, nós temos que pensar na segunda parte, que seria observar os restos. Com o que cada uma vai sobrar de maçãs, poderíamos pensar em valores do resto que traga uma vantagem para irmã mais nova com relação as outras duas e da irmã do meio com relação a irmã mais velha.

- Então o número mais interessante é o 7, como foi proposto no problema, – disse Júlio – já que a irmã mais nova sobrará com uma quantidade maior que a do meio e a mais velha e a irmã do meio ficará com uma quantidade superior a irmã mais velha. Será que a outra sugestão

também nos serve para resposta? Neste caso o resto das divisões devem ser vendidos por unidade.

- O nosso plano já está elaborado, vamos executá-lo e depois verificar para saber se ele apresenta uma solução satisfatória para este problema. Ficamos com essas informações, Fátima ficará com 7 lotes de 7 maçãs e 1 unidade restante, Cunda ficará com 4 lotes de 7 maçãs e 2 maçãs restantes, já Siha ficará com 1 lote de 7 maçãs e 3 maçãs restantes. Vamos resolver o seguinte sistema de equações para descobrirmos por qual valor vender a unidade, e saber se a sugestão dada no problema serve de fato.

Pólya começou a escrever enquanto Júlio e o outro homem observavam:

$$(I) \quad L = 7a + u \text{ (equação para Fátima)}$$

$$(II) \quad L = 4a + 2u \text{ (equação para Siha)}$$

$$(III) \quad L = a + 3u \text{ (equação para Cunda)}$$

- Prestem atenção – falou Pólya – a letra “L” é o valor que cada uma ganhará com as vendas, que se dá através da soma das quantidades vendidas por lote com o valor unitário. A letra “a” é o valor que elas venderão os lotes e o coeficiente da incógnita “a” é a quantidade de lotes de 7 maçãs que cada uma conseguiu formar. Já a letra “u” é o valor que elas venderão as unidades restante das maçãs e o coeficiente é a quantidade com que cada uma restou. Como o valor de L tem que ser igual nas três podemos pegar duas destas equações e igualá-las, irei fazer isso com a (I) e a (II), obtendo o seguinte:

$$7a + u = 4a + 2u$$

$$3a = u$$

Continuou Pólya:

- Chegamos então nessa relação: se as irmãs venderem o lote por 1 dinar, teremos que vender as unidades restantes por 3 dinares, se vendermos por 2 dinares, teremos que vender as unidades restantes por 6 dinares e assim por diante. Veja Júlio e o amigo que se juntou a nós, nosso último passo é verificar se realmente dá certo. Faça as honras, Júlio, e verifique a solução.

- Obrigado, meu caro. Eu só precisava de uma solução, mas você me trouxe infinitas. Agradeço também a nosso companheiro que nos trouxe uma ferramenta que nos possibilitou enxergar possíveis soluções sem fazer muito esforço, tornando o problema mais envolvente. Vamos testar para uma das possibilidades que é o importante para o meu problema neste

momento. Utilizando o valor de 1 dinar para cada lote, teremos que Fátima ficará inicialmente com 7 dinares, Cunda com 4 dinares e Siha com 1 dinar, pela relação encontrada temos que a unidade tem que ser 3x o valor do lote, sendo assim as unidades restantes seriam vendidas por 3 dinares cada uma, sendo assim Fátima apuraria mais 3 dinares, Cunda 6 dinares e Siha 9 dinares, fazendo a soma do dinheiro obtido, teremos que Fátima apuraria $7 + 3 = 10$ dinares, Cunda apuraria $4 + 6 = 10$ dinares e Siha $1 + 9 = 10$ dinares, as três retornariam com o mesmo valor apurado vendendo as maçãs por valores iguais. Dessa maneira:

$$(I) \quad L = 7 \times 1 + 1 \times 3 = 7 + 3 = 10$$

$$(II) \quad L = 4 \times 1 + 2 \times 3 = 4 + 6 = 10$$

$$(III) \quad L = 1 \times 1 + 3 \times 3 = 1 + 9 = 10$$

- Espetacular! – exclamou o homem que tinha se juntado a eles.

Todos os três ficaram felizes com os resultados obtidos e marcaram de se encontrar em um mês para discutir um novo problema. Eles se despediram com um aperto de mão e troca de endereço de contato.

CAPÍTULO 5 - O PROBLEMA DOS 21 VASOS

Passado algum tempo, aconteceu novamente o encontro de Júlio César com o George Pólya, duas pessoas que criaram um laço de amizade pela matemática. O local escolhido para o encontro dessa vez foi um cafezinho de esquina, às 07:00 da manhã, antes de um Congresso de Ensino da Matemática, que aconteceria às 10:00hrs e que ambos participariam, por estarem sempre buscando formas de inovar a matemática. Júlio César sempre aparecia com os problemas e o George Pólya usava seu método de resolução de problemas para conseguir uma resposta satisfatória para os problemas apresentados por Júlio.

Júlio chegou apertando a mão de Pólya e trazia na sua expressão um ar empolgante, no que foi logo dizendo:

- Meu caro, esse problema que trago hoje é dos bons! Mas me diga, como foi a viagem?
- Ocorreu tudo bem, meu amigo. Mas vamos nos sentar, que estou curioso.

Ambos sentaram à mesa da calçada e pediram café e croissant.

- Sem açúcar, por favor – disse o Júlio –, pois já me encontro agitado demais, prosseguiu dizendo, o problema que trago comigo é o seguinte, três amigos que conheci em uma viagem receberam, como pagamento de um pequeno lote de camelos 21 vasos de vinho, onde haviam 7 vasos cheios de vinho, 7 vasos meio-cheios e 7 vasos vazios. Eles teriam que repartir entre os três os 21 vasos e ficar cada um com a mesma quantidade de vasos e a mesma quantidade de vinho, só que detalhe – disse Júlio com empolgação – os vasos não poderiam ser, em hipótese alguma, abertos.

- Esse é um problema interessante. Deixa-me ver se entendi: a maior dificuldade do problema está em repartir os vasos sem abri-los. Uma colocação um tanto óbvia é que cada um ficaria com 7 vasos, pois 21 dividido para três dá exatamente 7. O problema está em saber a quantidade de vinho que cada um deverá receber. Já sabemos o que temos e onde queremos chegar, o momento é de elaborar um plano.

- Tive uma ideia que poderá facilitar nossa vida. Podemos colocar 1 vaso meio cheio como 1 unidade de vinho e o cheio como 2 unidades de vinho, dessa maneira teremos 21 unidades de vinho, pois são 7 vasos cheios, logo 14 unidades, e 7 meio cheios que será 7 unidades, os vasos vazios deixaremos nesse momento um pouco de lado, pois não acrescentaram nada.

Eles mal começaram a conversar quando um homem surgiu e eles logo lhe reconheceram, o homem falou:

- Bom dia! Lembra-se de mim? Espero que sim. Fui mandado para cá de novo, não poderia ficar de fora de mais uma discussão de vocês dois, e já cheguei ouvindo que vocês estavam criando uma unidade para resolver um problema. Queria lhes dizer que há estudos sobre isso no século XXI, para justificar a importância dessa temática, como por exemplo os Pozebon e Lopes (2013, p. 4-5) que afirmam que as unidades de medida foram desenvolvidas como consequência do desenvolvimento do homem, convivendo em sociedade e constituindo comércios, trazendo a necessidade de medir ângulos, superfícies, comprimentos, volume e massa.

- Mas para que haja uma boa comunicação – continuou o homem – e que aconteça a justiça se faz necessária uma padronização dessas medidas. Percebi que o intuito de vocês com a criação de uma medida para resolver este problema é facilitar a compreensão e comunicação na hora da resolução. Mas continuem, achei importante fazer esse levantamento.

- Bom dia, meu caro! Muito interessante seu levantamento. – falou Pólya – Estávamos elaborando um plano para resolver este problema. Criadas as unidades para facilitar nossa vida, percebemos que cada um deverá ficar com 7 vasos e 7 unidades de vinho, pois nossas 21 unidades de vinho dividida para os três amigos daria 7 unidades para cada. Nós conseguimos identificar a maior dificuldade do problema e percebemos o que precisaria ser feito para resolvermos esse problema. Agora vamos falar sobre como faremos essa divisão.

- Esse método começa a parecer natural. Mas agora que já sabemos qual a quantidade que cada um deve ficar em questão de vasos e vinho, como repartiremos os vasos? – perguntou o Júlio.

- Desculpem-me me intrometer novamente, meu intuito era só ouvir vocês, mas queria dizer que esse problema daqui a alguns anos se tornará conhecido e alguns professores o usarão em suas aulas. Participei de uma aula de escola pública na Paraíba, que fica no Brasil, com alunos do 9º ano do ensino fundamental e 1º ano do ensino médio e trago fotografias comigo de algumas soluções propostas pelos alunos. O problema foi um pouco modificado e a unidade de medida utilizada por eles foi o litro, que é a unidade que mede volume e capacidade. Vejam:

Figura 3 - Atividade desenvolvida por aluno do 9º ano durante uma aula interdisciplinar

Devemos distribuir a Premiação entre Thauana, Miguel e Alanny, de modo que cada um dos três receba a mesma quantidade de garrafas e a mesma quantidade de suco. Entretanto, não podemos abrir nenhuma garrafa.

Será que é possível realizar a distribuição da Prêmio dessa maneira? Se sim como?

3, 5 Para cada, No total

7 Para cada

Alanny 10,5L com três cheias, uma meia e três vazias

Thauana 10,5L com duas cheias, três meias e duas vazias

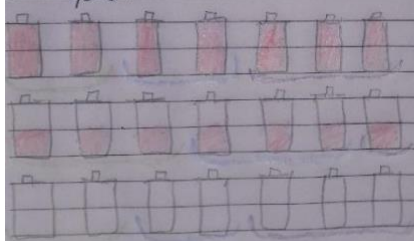
Miguel 10,5L com duas cheias, três meias e duas vazias

Fonte: Acervo da autora

Figura 4 - Atividade desenvolvida por aluno do 9º ano durante uma aula interdisciplinar

Supondo que uma garrafa cheia é um litro e uma garrafa que está na metade é meio litro. podemos calcular o total de litros que temos, que no caso é 10,5L agora se dividirmos 10,5L por três que dá o valor de 3,5L então devemos distribuir as garrafas de suco que de o valor de 3,5, assim todos ficarão com a mesma quantidade de suco lembrando que não precisamos abrir as garrafas para distribuir o suco para os alunos já que sabemos a quantidade de suco que cada aluno vai ficar agora é só distribuir as vinte e uma garrafas que no caso cada aluno deve ficar com sete.

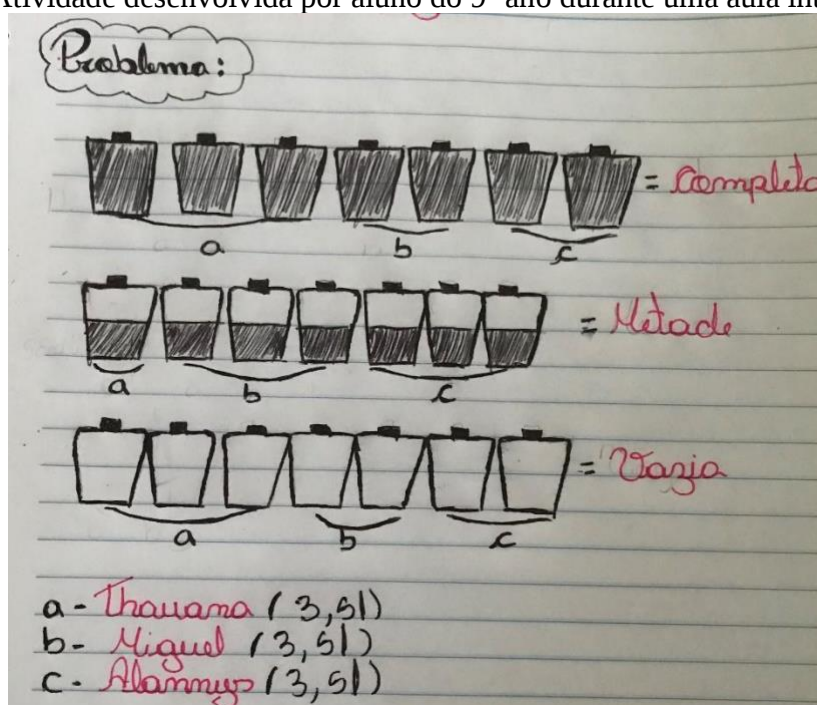
Exemplo:



podemos fazer com outras ordens diferentes mas a quantidade de suco não.

Fonte: Acervo da autora

Figura 5 - Atividade desenvolvida por aluno do 9º ano durante uma aula interdisciplinar



Fonte: Acervo da autora

- Que interessante! – comentou Júlio – Alguns usaram desenhos para representar suas respostas.

- Sim, isso mesmo. – disse o homem – Alguns foram induzidos a isso, visto que o problema foi apresentado dessa forma, já com desenhos. Mas foi muito interessante ver eles resolvendo em pouco menos de 8 minutos essa questão.

- Certo, achei muito legal a forma como resolveram. Mas como podemos ter certeza que essas são as únicas soluções possíveis?

Nesse momento eles começaram a refletir sobre isso e o Júlio sugeriu:

- Vamos particionar o número 7 que seriam os vasos e ver quais as possibilidades encontraremos.

- Queria só acrescentar que – falou o homem – esse problema também é muito interessante para se trabalhar com divisão de números inteiros. Mas seguimos vamos seguir:

Júlio pegou caneta e papel e começou a fazer anotações que estão na tabela 1, a seguir:

Tabela 1 – Partição do número 7

A	B	C	A	B	C
7	0	0	2	3	2
6	0	1	2	4	1
6	1	0	2	5	0
5	0	2	1	0	6

5	1	1	1	1	5
5	2	0	1	2	4
4	0	3	1	3	3
4	1	2	1	4	2
4	2	1	1	5	1
4	3	0	1	6	0
3	0	4	0	0	7
3	1	3	0	1	6
3	2	2	0	2	5
3	3	1	0	3	4
3	4	0	0	4	3
2	0	5	0	5	2
2	1	4	0	6	1
2	2	3	0	7	0

Fonte: Adaptado de Pommer e Pommer (2012)

E prosseguiu explicando:

- Encontramos 36 partições do número 7. Vamos escolher três dessas partições para cada amigo, já que cada um tem que ficar com 7 vasos. Onde o primeiro dígito vai indicar pra nós a quantidade de vasos cheios que o primeiro amigo receberá, o segundo dígito indicará a quantidade de vasos meio cheios que o primeiro amigo receberá e o terceiro dígito a quantidade de vasos vazios que o primeiro amigo receberá, aí repetiremos o processo com os outros dois amigos com as partições que escolhermos.

- Temos um bocado de trabalho pela frente, - disse Pólya - olhe todas essas partições, vamos testar um por um? Deixe-me pensar em algo mais eficaz. Vamos primeiro eliminar as opções que apresentam zero, pois seria impossível dividir os vasos igualmente, de tal maneira que algum ficasse com zero vasos em uma das opções. Ficando assim:

Tabela 2 – Partição do número 7

A	B	C	A	B	C
7	0	0	2	3	2
6	0	1	2	4	1
6	1	0	2	5	0
5	0	2	1	0	6
5	1	1	1	1	5
5	2	0	1	2	4
4	0	3	1	3	3
4	1	2	1	4	2
4	2	1	1	5	1
4	3	0	1	6	0
3	0	4	0	0	7
3	1	3	0	1	6
3	2	2	0	2	5

3	3	1	0	3	4
3	4	0	0	4	3
2	0	5	0	5	2
2	1	4	0	6	1
2	2	3	0	7	0

Fonte: Adaptado de Pommer e Pommer (2012)

- Já reduzimos as opções em 15. – comentou Pólya - Sabemos que pelo menos uma resposta que foi apresentada pelos alunos encontra-se correta, nosso objetivo é descobrir se é a única.

Júlio fez a seguinte observação:

- Observem: como nossos valores de vasos terão que ser multiplicado por 2, visto que usamos o meio cheio como um e o cheio como dois e como cada um só poderá ficar com sete unidades de vinho, então podemos excluir as opções que a quantidade de vasos cheios ultrapassem o valor de 3.

O homem que até então estava só escutando, entrevistou:

- Não sei se entendi muito bem.

- Veja, todas as quantidades de vasos, quando vistas como unidades de vinho serão multiplicadas por 2, então um dos amigos que, por exemplo, receber 4 vasos cheios, vai receber 8 unidades de vinho, sendo que ele tem que receber exatamente 7 unidades de vinho para que as condições do problema sejam satisfeitas. Então poderemos excluir as opções: 5-1-1, 4-2-1 e 4-1-2. – explicou Júlio.

- Ah, agora tudo ficou claro.

- Por essa mesma linha de raciocínio, - disse Polya – como só ficamos com 12 opções, poderemos verificar quais dessas, ultrapassam o valor de 7 unidades de vinho, que são claramente as opções: 3-1-3, 3-2-2, 3-3-1, 2-1-4, 2-2-3, 2-3-2, 2-4-1, 1-1-5, 1-2-4, 1-3-3 e 1-4-2, 1-5-1. Restando-nos apenas 3 opções, que são: 3-1-3, 2-3-2 e 1-5-1.

Impressionou-se Júlio:

- Uau! Uma redução muito importante. Se observarmos, conseguimos elaborar o plano com o uso da tabela com as partições do número 7 e executamos o plano de procurar as partições que possibilitariam uma solução viável para nosso problema, agora que as achamos, podemos verificar se satisfazem de fato o nosso problema. Já vimos pelas soluções dos alunos que a combinação de 3-1-3, 2-3-2, 2-3-2 dá certo, agora vamos ver se as demais combinações são possíveis.

Pólya complementou:

- São 10 e a tabela irá nos mostrar com qual quantidade de vinho cada um irá ficar no final com as opções que encontramos, lembrando sempre que o objetivo é que cada um fique com 7 unidades de vinho. Na tabela as siglas VC, VM e VV significam vasos cheios, vasos meio-cheios e vasos vazios, respectivamente:

Tabela 3 - Partições possíveis para resolução do problema

A1			A2			A3			VC	VM	VV
3	1	3	3	1	3	3	1	3	9	3	9
2	3	2	2	3	2	2	3	2	6	9	6
1	5	1	1	5	1	1	5	1	3	15	3
3	1	3	3	1	3	2	3	2	8	5	8
3	1	3	3	1	3	1	5	1	7	7	7
2	3	2	2	3	2	3	1	3	7	7	7
2	3	2	2	3	2	1	5	1	5	11	5
1	5	1	1	5	1	3	1	3	5	11	5
1	5	1	1	5	1	2	3	2	4	13	4
3	1	3	2	3	2	1	5	1	6	9	6

Fonte: Produzida pela autora

- Formidável! – exclamou Júlio – Temos então duas soluções possíveis.

- Veja, Júlio. Essa é a parte final do nosso problema, a tabela já nos traz uma revisão de que os resultados são realmente verdadeiros. Iniciamos a discussão do problema tratando sobre quais condições nos era dada e qual problemática teríamos, falamos sobre a criação de unidades para facilitar nossas vidas e até foi citado por nosso colega, o homem misterioso, como ela foi importante no tempo, depois elaboramos um plano que foi o de particionar o número 7 para conseguirmos ver nossas possíveis soluções, executamos o plano e conseguimos observar quais as opções eram possíveis para nós, e seguimos até chegar nas nossas soluções finais. Esse problema então tem pelo menos duas soluções, a geométrica através de desenhos, como os alunos do moço apresentou e temos também essa, usando partição de números.

Os três satisfeitos com a resolução pediram a conta e se retiraram do café, Júlio e George se encaminharam para o Congresso e o homem desconhecido que vinha ajudando-os se despediu com um aceno e aperto de mão.

CAPÍTULO 6 - O PROBLEMA DOS TRÊS MARINHEIROS

O que viria a ser o último encontro sobre os problemas que o Júlio César estava elaborando para seu livro, pois o mesmo já estava a ponto de ser publicado, aconteceu de forma combinada e em um ambiente familiar. O convite a Júlio César foi feito para que ele visitasse a casa de George Pólya e lisonjeado, Júlio não pensou duas vezes em aceitar. Viajou para visitar quem agora podia chamar de amigo, George Pólya.

Chegando no Reino Unido, dirigiu-se para casa de seu amigo. Foi atendido com um caloroso bom dia, um aperto de mão e um convite para sentar-se e tomar um café, como de costume. Júlio sentou-se e começou a observar a casa de seu amigo e as figuras geométricas penduradas na parede, ao momento que Pólya chegou e entregou a Júlio uma xícara de um café forte e quente.

- Diga-me, Júlio. Qual o problema que trouxeste hoje?

- O problema trata de partilha, uma recompensa recebida por três marinheiros.

- Qual o contexto?

- Aqui está, veja: – falou Júlio – Um navio que voltava de Serendib³, trazendo grande partida de especiarias, foi assaltado por violenta tempestade. A embarcação teria sido destruída pela fúria das ondas se não fosse a bravura e o esforço de três marinheiros que, no meio da tormenta, manejaram as velas com extrema perícia. O comandante, querendo recompensar os denodados marujos, deu-lhes certo número de catis. Esse número superior a duzentos, não chegava a trezentos. As moedas foram colocadas numa caixa para que no dia seguinte, por ocasião do desembarque, o almoxarife as repartisse entre os três corajosos marinheiros. Aconteceu, porém, que, durante a noite, um dos marinheiros acordou, lembrou-se das moedas e pensou: “Será melhor que eu tire a minha parte. Assim não terei ocasião de discutir ou brigar com os meus amigos”. E, sem nada dizer aos companheiros, foi, pé ante pé, até onde se achava guardado o dinheiro, dividiu-o em três partes iguais, mas notou que a divisão não era exata e que sobrava um catil. “Por causa desta mísera moedinha é capaz de haver amanhã discussão e rixa. O melhor é jogá-la fora”. E o marinheiro atirou a moeda ao mar, retirando-se cauteloso. Levava sua parte e deixava no mesmo lugar o que cabia aos companheiros. Horas depois o segundo marinheiro teve a mesma ideia. Foi à arca em que se depositara o prêmio coletivo e dividiu-o em três partes iguais. Sobrava uma moeda. Ao marujo, para evitar futuras dúvidas, veio à lembrança atirá-la ao mar. E dali voltou levando consigo a parte a que se julgava com

³ Nome antigo de Ceilão, atual Sri Lanka.

direito. O terceiro marinheiro, ignorando, por completo, a antecipação dos colegas, teve o mesmo alvitre. Levantou-se de madrugada e foi, pé ante pé, à caixa dos catís. Dividiu as moedas que lá encontrou em três partes iguais; a divisão não foi exata. Sobrou um catil. Não querendo complicar o caso, o marujo atirou ao mar a moedinha excedente, retirou a terça parte para si e voltou tranquilo para seu leito. No dia seguinte, na ocasião do desembarque, o almoxarife do navio encontrou um punhado de catís na caixa. Soube que as moedas pertenciam aos três marinheiros. Dividiu-as em três partes iguais, dando a cada um dos marujos uma dessas partes. Ainda dessa vez a divisão não foi exata. Sobrava uma moeda, que o almoxarife guardou como para do seu trabalho e de sua habilidade. É claro que nenhum dos marinheiros reclamou, pois cada um deles estava convencido de que já havia retirado da caixa a parte que lhe cabia o dinheiro. Pergunta-se, afinal: Quantas eram as moedas? Quanto recebeu cada um dos marujos?

- Hm... Interessante. - disse Pólya – O problema está tratando principalmente com divisões por 3 com resto 1, tanto para os 3 marinheiros, como também para o almoxarife na última divisão, que deveria ser a única divisão realizada, mas como os marinheiros são espertinhos, pensaram diferente.

- Eu imaginei, Pólya, que eles no final se sensibilizariam e fariam a divisão justa, mas acredito que em suas mentes acreditavam serem os únicos a terem feito isso, e acabou que no fim, o objetivo de não ocorrer discussões entre os colegas foi concluído, apesar de que no final a partilha foi injusta. Só imagino um dia eles celebrando e bebendo e contando suas façanhas e acabarem deixando escapar o que fizeram nesse dia, a briga ia ser feia. Mas nosso objetivo aqui não é imaginar a briga dos três marinheiros, e sim descobrir a quantidade de moedas e quanto cada um ficou, só assim perceberemos quão injusta foi essa partilha. Uma informação nós já sabemos, a quantidade de moedas está entre 200 e 300.

Rindo do comentário de Júlio, Pólya disse:

- Essa vai ser uma informação importante para a resolução do nosso problema. O que temos sobre o problema? Isso que você bem pontuou, o fato de serem divisões por 3 com resto 1 e vale salientar também que cada um recebeu na sua vez, 2 vezes o que seu antecessor pegou para si. Eu imaginei um jeito de poder resolver esse problema. Primeiro iremos representar a quantidade que cada um ficou.

Pegando caneta e papel da sua bolsa, Pólya começou a escrever:

Seja N o número de moedas:

- Marinheiro 1: $N = 3q_1 + 1 \therefore m_1 = q_1$, restando para o segundo $2q_1$;
- Marinheiro 2: $2q_1 = 3q_2 + 1 \therefore m_2 = q_2$, restando para o terceiro $2q_2$;

- Marinheiro 3: $2q_2 = 3q_3 + 1 \therefore m_3 = q_3$, restando para o almoxarife $2q_3$;
- Almoxarife: $2q_3 = 3q_4 + 1 \therefore a = 1$

- No caso – falou Júlio – a primeira representação é da quantidade total de moedas, visto que foi a quantidade total que o primeiro marinheiro encontrou. Sendo assim, o número total de moedas pode ser representado por 3 vezes a quantidade 1, que foi a quantidade que o primeiro marinheiro tomou para ele, mais 1, que foi a moeda que restou e foi para o mar, restando para o segundo duas da quantidade que o primeiro pegou para si, e assim por seguinte. Sendo o $a=1$ a quantidade que ficou para o almoxarife.

- Isso mesmo, Júlio. Excelente explicação. Veja mais, se explicitarmos a quantidade que cada um ficou em função de N , teremos:

- $q_1 = \frac{N-1}{3} \in \mathbb{N}$;
- $q_2 = \frac{2q_1-1}{3} = \frac{2N-5}{9}$;
- $q_3 = \frac{2q_2-1}{3} = \frac{4N-19}{27}$;
- $q_4 = \frac{2q_3-1}{3} = \frac{8N-65}{81}$

- Aqui é uma substituição para deixar todas as quantidades em função de N , explicitando que são números naturais, visto que estamos tratando de moedas. Agora preste atenção, que é aqui que a mágica acontece. Foquemos na última desigualdade e lembremos da nossa informação sobre a quantidade de moedas, representando-a matematicamente, obtemos o seguinte: $200 < N < 300$. Agora veja:

Multiplicando as desigualdades por 8, temos:

- $1600 < 8N < 2400$.

Subtraindo 65 de todas as três, temos:

- $1535 < 8N - 65 < 2335$.

Dividindo por 81, teremos:

- $18,95 \dots < \frac{8N-1}{81} < 28,82 \dots$

Ou seja,

- $19 \leq q_4 \leq 28$.

Continuou Pólya:

- Logo, os possíveis valores de q_4 serão 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28. E os valores de N serão: 200,5 (para $q_4 = 19$), 210,625 (para $q_4 = 20$), 220,75 (para $q_4 = 21$), 230,875 (para $q_4 = 22$), 241 (para $q_4 = 23$), 251,125 (para $q_4 = 24$), 261,25 (para $q_4 = 25$), 271,375 (para $q_4 = 26$), 281,5 (para $q_4 = 27$), 291,625 (para $q_4 = 28$), 301,15 (para $q_4 = 29$). Como o único q_4 que fornece um valor inteiro de N é 23, teremos $q_4 = 23$ e $N = 241$. Sendo assim, são 241 moedas e na divisão do almoxarife ficaram 23 moedas para cada. Resta fazer o cálculo de quanto cada um ficou no final, o que é bem simples, veja:

- $q_1 = \frac{241-1}{3} = 80$
- $q_2 = \frac{2 \cdot 241-5}{9} = 53$
- $q_3 = \frac{4 \cdot 241-19}{27} = 35$

- Daí temos que o primeiro marinheiro ficou com $80 + 23 = 103$, o segundo ficou com $53 + 23 = 76$ e o terceiro ficou com $35 + 23 = 58$. Fazendo o último passo do processo, veremos que a resposta vai satisfazer nosso problema, pois se pegarmos 241 e dividirmos por 3, dará 80 e sobrar uma moeda, ficando para o segundo marinheiro 2 vezes 80, no caso 160 moedas, ele chegará lá, dividirá por três que dará 53 e sobrar uma moeda, ficando duas vezes 53, ou seja 106, para o terceiro marinheiro, que chegará e dividirá em três partes, tomando para si 35 moedas e jogando uma ao mar. No fim teremos o almoxarife que encontrará 70 moedas, dividirá entre os três marinheiros e cada um receberá 23 moedas, ficando ele com a última moeda como recompensa por seu trabalho. Se somarmos o ganho de cada um, teremos:

$$103 + 76 + 58 + 1 + 1 + 1 + 1 = 241$$

- Resolução verificada.

- Excelente! – disse Júlio empolgado – Mas veja Pólya, não me leve a mal, mas a proposta inicial era poder apresentar o conteúdo para os meus alunos da educação básica e acredito que essa resposta seja um pouco rebuscada para eles, apesar da ótima explicação.

Nesse momento, os dois ouviram batidas na porta e Pólya pediu licença para ir atender. Quando abriu a porta notou a presença do homem que já era conhecido por Júlio e Pólya. O homem que já estava se tornando familiar para os dois, disse enquanto ajeitava os cabelos:

- Ah, então eu consegui acertar a casa. Quase que não consigo chegar a tempo. Qual o problema dessa vez?

- Entre! – disse Pólya – Estávamos começando a discussão agora. Quer um café?

- Aceito, obrigado.

Ao tempo em que George Pólya foi buscar o café, Júlio começou a explicar toda a situação ao viajante do tempo.

Pólya chegou trazendo o café no momento em que o viajante começou a falar:

- Vocês lembram aquela tabela que eu mostrei a vocês quando discutimos o problema das maçãs? Pois bem, podemos usar ela para simular respostas e encontrar o valor certo.

Pólya interveio dizendo:

- Mas vejam, vocês acham uma resposta feita em computador satisfatória? Apesar de termos a usado no caso das maçãs, não sei se vai funcionar para este problema.

- Veja, Pólya, – disse o homem – Diferente do tempo que vocês vivem, nos dias atuais, existem tecnologias que nos auxiliam a resolver problemas como este, e ajudam os alunos a fazerem simulações, estudarem resultados e compreenderem tabelas, conhecimento muito necessário para o tempo que estamos vivendo. A literatura matemática está cada vez mais voltada na busca do interesse do aluno pelas disciplinas e principalmente em metodologias que vão despertar esse interesse e também tornar o aprendizado mais eficaz. É como disse o Macêdo e Silva (2016, p. 6) “a utilização do Excel quando bem empregado no contexto escolar contribui de forma significativa com a melhoria da qualidade do ensino-aprendizagem, pois proporcionam um ensino dinâmico, criativo onde o aluno pode ser um agente de sua própria aprendizagem”.

- Certo, certo. Se eu ver que dá certo, me darei por vencido. – disse Pólya parecendo duvidoso.

- Agora nos explique como funciona essa tabela. – disse Júlio, parecendo ansioso pela resposta.

- Vamos lá. Primeiro quero destacar que as cores repetidas não são coincidência, elas representam o uso do mesmo comando. As colunas em verde representam o que cada marinheiro e o almoxarife encontrou quando foi dividir as moedas. As colunas nesse tom rosado representam a quantidade de moedas que cada um pegou para si, exceto a última coluna rosada que foi a quantidade que o almoxarife deu a cada um. E as colunas em azul representam a quantidade de moedas jogadas ao mar, sendo a última coluna em azul, a quantidade que o almoxarife ficou pra si. Os comandos usados são os seguintes, a primeira coluna foi sem comando, são os números entre 200 e 300 que quando divididos por 3 deixam o resto 1. O comando das colunas de tom rosado são as divisões da coluna anterior por 3. E o das colunas verdes é o produto da coluna anterior por 2. E o das colunas azul, é o resto da divisão das colunas em verde por 3. O que deve ser analisado aqui, depois de montada a tabela, é o resto.

Observem, a linha que possuir na parte azul todos restos 1, será a nossa escolhida e a que satisfará o problema.

Figura 6 - Tabela desenvolvida no Excel

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	202	67	134	44	88	29	58	19	1	2	1	1
2	208	69	138	46	92	30	60	20	1	0	2	0
3	211	70	140	46	92	30	60	20	1	2	2	0
4	214	71	142	47	94	31	62	20	1	1	1	2
5	217	72	144	48	96	32	64	21	1	0	0	1
6	220	73	146	48	96	32	64	21	1	2	0	1
7	223	74	148	49	98	32	64	21	1	1	2	1
8	226	75	150	50	100	33	66	22	1	0	1	0
9	229	76	152	50	100	33	66	22	1	2	1	0
10	232	77	154	51	102	34	68	22	1	1	0	2
11	235	78	156	52	104	34	68	22	1	0	2	2
12	238	79	158	52	104	34	68	22	1	2	2	2
13	241	80	160	53	106	35	70	23	1	1	1	1
14	244	81	162	54	108	36	72	24	1	0	0	0
15	247	82	164	54	108	36	72	24	1	2	0	0
16	250	83	166	55	110	36	72	24	1	1	2	0
17	253	84	168	56	112	37	74	24	1	0	1	2
18	256	85	170	56	112	37	74	24	1	2	1	2
19	259	86	172	57	114	38	76	25	1	1	0	1
20	262	87	174	58	116	38	76	25	1	0	2	1
21	265	88	176	58	116	38	76	25	1	2	2	1
22	268	89	178	59	118	39	78	26	1	1	1	0
23	271	90	180	60	120	40	80	26	1	0	0	2
24	274	91	182	60	120	40	80	26	1	2	0	2
25	277	92	184	61	122	40	80	26	1	1	2	2
26	280	93	186	62	124	41	82	27	1	0	1	1
27	283	94	188	62	124	41	82	27	1	2	1	1
28	286	95	190	63	126	42	84	28	1	1	0	0
29	289	96	192	64	128	42	84	28	1	0	2	0
30	292	97	194	64	128	42	84	28	1	2	2	0
31	295	98	196	65	130	43	86	28	1	1	1	2
32	298	99	198	66	132	44	88	29	1	0	0	1

Fonte: Produzida pela autora

Continuou o viajante:

- Se olharmos bem a linha que satisfará o problema é a linha 13. Ela nos mostra que a quantidade inicial de moedas era 241, o primeiro marinheiro ficou com 80 moedas e deixou 160, jogando uma moeda ao mar. Quando o segundo marinheiro foi fazer a divisão, pegou para si 53 moedas, deixando 106 moedas e jogando uma ao mar. O terceiro marinheiro fez a divisão por três e tomou para si 35 moedas, deixando 70 moedas e jogando uma ao mar. Quando o almoxarife chegou havia 70 moedas e dividindo a quantidade para os três, entregou para cada um 23 moedas e a que sobrou tomou para si como pagamento.

Júlio falou satisfeito:

- Excelente, excelente! O mais interessante é que se executa o método de Pólya tão naturalmente que fica imperceptível. A discussão inicial é a mesma, mas como a proposta é usar o Excel, a elaboração do plano muda e passa a ser sobre quais comandos usar para representar o problema. A execução do plano consiste em montar a tabela e testar os comandos para ver se dá certo. E a verificação se dá da mesma forma da resolução proposta por Pólya, como encontramos os mesmos resultados, não há necessidade de fazer a verificação novamente.

- Estou satisfeito com a resposta. – disse Pólya – Agora nos tire uma dúvida, caro amigo. Como é seu nome?

- Beremiz.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A realização deste trabalho nos permitiu perceber o quão significativo pode ser a influência da família no desenvolvimento de seu filho. Júlio César de Mello e Souza, mais conhecido como Malba Tahan, foi um educador aplicado e preocupado com a inovação do ensino da matemática, fonte de inspiração para novos trabalhos, ele nos mostra que é possível ensinar matemática de uma forma mais cativante e menos monótona.

Acerca da resolução de problemas, é notório sua grande importância, por isso é tema de muitas pesquisas. Ela nos permite trabalhar de forma criativa, fazendo com que os alunos participem de forma ativa das aulas. Com os métodos de Pólya para a resolução de problemas, podemos mostrar aos nossos alunos por onde começar, que passos seguir e sempre lembrá-los de revisar e verificar suas soluções, buscando possíveis erros e/ou uma forma mais fácil de resolver o problema.

Os problemas contidos no livro “O homem que Calculava” são apresentados de forma cativante, trazendo sempre um ar de dúvida e um desejo de busca pela resposta, tornando o problema muito envolvente. Os problemas apresentados neste trabalho encontram-se resolvidos no livro, pelo personagem Beremiz, mas durante nossos encontros sempre nos ficava a dúvida: “de onde surgiam tais respostas?”. Essa dúvida fez com que buscássemos meios para satisfazer nossa curiosidade e seguindo o método de Pólya conseguimos perceber detalhes que às vezes são passados despercebidos e com isso obtemos soluções satisfatórias.

O Excel nos auxiliou no sentido de simular situações e possíveis soluções, que talvez com cálculos manuais se tornasse uma tarefa exaustiva e monótona, o que nos fez perceber o quão importante é o uso de meios tecnológicos dentro da sala de aula. Em um século em que a tecnologia fica cada vez mais presente, é preciso sempre buscar inovar e atrair cada vez mais o aluno para a sala de aula.

Realizar uma narrativa ficcional nos possibilitou trabalhar de forma mais leve, permitindo que fossem feitos questionamentos dentro do texto sem comprometer o sentido e o desenvolvimento do trabalho.

O livro “O homem que calculava” é um livro inspirador, e esperamos que este trabalho inspire outras pesquisas sobre o livro e as contribuições do Júlio César para o ensino de matemática, com o intuito de sempre buscar novos meios e soluções que tornem o ensino de matemática cada vez mais prazeroso tanto para o professor como para o aluno.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, Jadilson R. **Problemas Propostos para o Ensino de Equações Polinomiais do Primeiro Grau com uma Incógnita: Um Estudo Exploratório nos Livros Didáticos de Matemática do 7º Ano do Ensino Fundamental.** Recife – PE, 2011. Dissertação (Mestrado). Universidade Federal de Pernambuco, Recife, PE, 2011.

ALMEIDA, Jadilson R. **Níveis de Desenvolvimento do Pensamento Algébrico: Um Modelo para os Problemas de Partilha de Quantidade.** Recife – PE, 2016. Tese (Doutorado) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife, PE, 2016.

BRASIL, Ministério da Educação. **BASE NACIONAL COMUM CURRICULAR: EDUCAÇÃO É A BASE.** 2018. Disponível em:

http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf.

Acesso em 15 de Junho de 2021.

DANTE, Luiz R. **Formulação e Resolução de problemas de matemática: Teoria e prática.** São Paulo: Ática, 2011.

MACÊDO, Josimar S.; SILVA, Josiel P. **A utilização do software Excel no ensino da Matemática.** In: I Congresso Nacional de Pesquisa e Ensino em Ciências – Universidade Estadual da Paraíba. Campinha Grande – Paraíba: Editora Realize. 2016.

OLIVEIRA, Cristiane C.; SILVA, Leonardo C.; SILVA, Flavia M. **Malba Tahan em sala de aula: Possibilidades para o ensino.** São Paulo: Editora Livraria da Física, 2019.

POLYA, George. **A arte de resolver problemas.** Rio de Janeiro: Interciência, 2006.

POZEBON, Simone; LOPES, Anemari R. L. V. **Grandezas e medidas: Surgimento histórico e contextualização escolar.** In: VI Congresso Internacional de Ensino da Matemática – Universidade Luterana do Brasil. Canoas – Rio Grande do Sul. 2016.

POMMER, Wagner M.; POMMER, Clarice P. C. R. **Estratégia de Resolução de Problemas: Contribuições de Malba Tahan para educação algébrica.** São Paulo: agosto. 2012. Disponível em:

<[https://www.researchgate.net/publication/298972601 Estrategias de resolucao de problemas Contribuicoes de Malba Tahan para a Educacao Algebrica](https://www.researchgate.net/publication/298972601_Estrategias_de_resolucao_de_problemas_Contribuicoes_de_Malba_Tahan_para_a_Educacao_Algebrica)>. Acesso em: 20 de junho, 2021.

ROMANATTO, Mauro C. **Resolução de problemas nas aulas de matemática**. In: Revista Eletrônica de Educação – São Paulo. 2012 – Número 1. V. 6. p: 299-311.

SALES, Pedro P.; NETO, Andre P. **Julio Cesar e Malba Tahan: Criador e criatura**. São Paulo: Paco Editorial, 2017. p: 17-58.

TAHAN, Malba. **O homem que calculava**. Editora São Paulo, 1965.