



Universidade Federal da Paraíba  
Centro de Ciências Exatas e da Natureza  
Programa de Pós-Graduação Stricto Sensu  
em Física

Dissertação de Mestrado

**Defeitos Topológicos em Teoria Clássica de  
Campos**

Matheus Alves Lião

João Pessoa  
2020



Universidade Federal da Paraíba  
Centro de Ciências Exatas e da Natureza  
Programa de Pós-Graduação Stricto Sensu  
em Física

Dissertação de Mestrado

**Defeitos Topológicos em Teoria Clássica de Campos**

Dissertação realizada sob a orientação do Prof. Dr. Dionisio Bazeia Filho e coorientação do Prof. Dr. Matheus Araújo Marques, apresentada à Coordenação do Programa de Pós-Graduação Stricto Sensu em Física da Universidade Federal da Paraíba, em complementação aos requisitos para obtenção do Título de Mestre em Física na Área de Concentração de Física de Partículas e Campos.

Matheus Alves Lião

João Pessoa  
2020

**Catálogo na publicação**  
**Seção de Catalogação e Classificação**

L693d Lião, Matheus Alves.

Defeitos topológicos em Teoria Clássica de Campos /  
Matheus Alves Lião. - João Pessoa, 2020.

118 f. : il.

Orientação: Dionísio Bazeia Filho.

Dissertação (Mestrado) - UFPB/CCEN.

1. Física. 2. Teoria de campos. 3. Defeitos  
topológicos. 4. Campo escalar. 5. Kinks. 6. Vórtices.  
7. Monopolos. I. Bazeia Filho, Dionísio. II. Título.

UFPB/BC

CDU 53(043)

Ata da Sessão Pública da Defesa de Dissertação de **Mestrado** do aluno **Matheus Alves Lião**, candidato ao Título de Mestre em Física na Área de Concentração Física das Partículas Elementares e Campos.

1 Aos vinte e oito dias do mês de fevereiro do ano de dois mil e vinte, às 14:00, na sala de reuniões  
2 do Departamento de Física do Centro de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade Federal  
3 da Paraíba, reuniram-se os membros da Banca Examinadora constituída para examinar o  
4 candidato ao grau de Mestre em Física na área de Física das Partículas Elementares e Campos,  
5 **Matheus Alves Lião**. A comissão examinadora composta pelos professores doutores: Dionísio  
6 Bazeia Filho (DF/UFPB), orientador e presidente da banca examinadora, Albert Petrov  
7 (DF/UFPB) e Dmitry Melnikov (UFRN). Dando início aos trabalhos, o Prof. Dionísio Bazeia  
8 Filho comunicou aos presentes a finalidade da reunião. A seguir, passou a palavra o candidato  
9 para que o mesmo fizesse, oralmente, a exposição do trabalho de dissertação intitulado  
10 “*Defeitos topológicos em teoria clássica de campos*”. Concluída a exposição, o candidato foi  
11 arguido pela Banca Examinadora que emitiu o seguinte parecer: “**aprovado**”. Assim sendo,  
12 deve a Universidade Federal da Paraíba expedir o respectivo diploma de Mestre em Física na  
13 forma da lei. E para constar, eu, Danilo Wilson Lemos Menezes, lavrei esta ata que vai assinada  
14 por mim e pelos membros da Banca Examinadora. João Pessoa, **28 de fevereiro 2020**.

15 Prof. Dr. Dionísio Bazeia Filho  
*Orientador - UFPB*

Prof. Dr. Albert Petrov  
*UFPB*

Prof. Dr. Dmitry Melnikov  
*UFRN*

# Agradecimentos

“Oh, I get by with a little help from my friends”

---

*The Beatles*

Agradeço primeiramente à minha família, especialmente aos meus pais Luciano e Edágna, que me apoiaram desde o início da minha vida acadêmica e me forneceram as condições necessárias para o início e conclusão deste mestrado. Agradeço também a todos os membros de nosso grupo de pesquisa, cada um dos quais contribuiu para a minha formação com discussões, seminários e ensinamentos. Em particular, agradeço ao professor Dionísio, que motivou minha vinda para Paraíba e foi responsável pela minha orientação desde o meu primeiro dia nesta instituição, e a Matheus Marques, que me coorientou em boa parte desta trajetória, e ajudou a retificar muitos dos meus erros. Agradeço também a cada um dos meus amigos, que sempre me apoiaram, e à Ster, cuja constante resistência a qualquer forma de procrastinação teve definitivo impacto positivo sobre o resultado final deste trabalho. Finalmente, agradeço ao CNPq (processo nº 130923/2018-4) e à FAPESQ-PB (projeto PRONEX 0015/2019) pelo suporte financeiro que possibilitou a realização deste trabalho.

# Resumo

Esta dissertação trata de defeitos topológicos em Teoria Clássica de Campos, com particular ênfase na investigação de modelos em que há quebra espontânea de simetria engendrada por um campo escalar. São estudadas soluções de equações de campo não lineares em diversos contextos, com o caráter topológico dessas estruturas servindo como o elemento que confere unidade ao trabalho. Inicialmente, estudamos defeitos topológicos em teorias de campos escalares em (1,1) dimensões, investigando modelos com um e dois campos acoplados, entre os quais incluímos resultados originais. A seguir, estudamos algumas teorias de calibre abelianas em (2,1) dimensões, nas quais encontramos os vórtices, que foram analisados nas teorias de Maxwell-Higgs, Chern-Simons e em uma classe de modelos com simetria aumentada, fruto de um trabalho publicado em 2019. Finalmente, prosseguimos com a investigação de soluções com carga magnética na teoria (3,1) dimensional de Yang-Mills-Higgs com simetria de calibre  $SU(2)$ . Nesse contexto, foram estudados monopolos magnéticos e dyons, e estabelecemos a relação entre a existência de um invariante topológico que caracteriza todas as soluções desse modelo e o aparecimento de carga magnética.

**Palavras-chave:** defeitos topológicos, kinks, vórtices, monopolos, dyons.

# Abstract

This dissertation deals with topological defects in Classical Field Theory, with particular emphasis being placed on the investigation of models in which spontaneous symmetry breaking is engendered by a scalar field. Solutions of nonlinear field equations are investigated in several contexts, with their topological nature acting as the element that entails unit to this work. Initially, we consider topological defects in (1,1)-dimensional spacetime, and investigate models with one then and two coupled scalar fields, among which original contributions have been included. Next, we study a few abelian gauge theories in three spacetime dimensions, where we encounter vortices, which have been investigated in Maxwell-Higgs and Chern-Simons theories, as well as in a new class of model with enhanced symmetry, developed as part of a work that was published in 2019. Finally, we deal with magnetically charged solutions from a (3,1)-dimensional Yang-Mills-Higgs theory with gauge group  $SU(2)$ . Magnetic monopoles and dyons were investigated in this context, and the relationship between the topological invariant that labels this model's every solution and the magnetic charge was established.

**Keywords:** topological defects, kinks, vortices, monopoles, dyons.

# Lista de Publicações

Um trabalho foi publicado durante o mestrado:

- D. Bazeia, M.A. Liao, M. A. Marques and R. Menezes, *multilayered vortices* , Phys. Rev. Res. **1**, 033053 (2019).

Adicionalmente, há um trabalho completo e já submetido para publicação:

- D. Bazeia, M. A. Liao, M. A. Marques, *Geometrically Constrained Multikink Configurations*, (2019) [arXiv:hep-th/1908.01085].

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Teorias escalares em (1,1) dimensões</b>	<b>7</b>
2.1	Notação e convenções	7
2.2	Aspectos gerais do formalismo	8
2.2.1	Equações de Euler-Lagrange	8
2.2.2	Tensor de energia-momento	8
2.2.3	Classificação topológica de soluções	10
2.3	Modelos de um campo escalar real	14
2.3.1	Modelo $\phi^4$	17
2.3.2	Modelo sine-Gordon	22
2.3.3	Modelo $\phi^4$ invertido	25
2.4	Estabilidade linear	26
2.5	Modelos com dois campos escalares	29
2.5.1	Método de Bogomol'nyi	30
2.5.2	Modelo BNRT	32
2.5.3	Multikinks	35
2.6	Teorema de Derrick	39
<b>3</b>	<b>Vórtices em teorias abelianas</b>	<b>41</b>
3.1	Teorias de calibre	42
3.2	Vórtices de Maxwell-Higgs	44
3.2.1	Quantização do fluxo	47
3.2.2	Soluções com simetria circular	49
3.2.3	Equações assintóticas	53
3.2.4	Limite de Bogomol'nyi	54
3.3	Vórtices de Chern-Simons	57
3.3.1	Soluções com simetria circular	60
3.3.2	Limite de Bogomol'nyi	62
3.4	Vórtices com múltiplas camadas	63
3.4.1	Simetria $U(1) \times Z_2$	64
3.4.2	Simetria $U(1) \times U(1)$	68
<b>4</b>	<b>Monopolos magnéticos em teorias Yang-Mills-Higgs</b>	<b>72</b>
4.1	Teoria Yang-Mills-Higgs com potencial quártico	73
4.2	Carga magnética	76
4.3	Monopolo de 't Hooft-Polyakov	80
4.3.1	Limite de Bogomol'nyi	86
4.4	Dyon de Julia e Zee	89
4.4.1	Limite de Bogomol'nyi	91

<b>5 Conclusão e perspectivas futuras</b>	<b>94</b>
<b>Apêndices</b>	<b>97</b>
<b>A</b>	<b>98</b>
A.1 Um pouco mais sobre o tensor de energia-momento	98
A.2 Maços de fibra	99
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>102</b>

# Introdução

“Begin at the beginning, the King said  
gravely, and go on till you come to the  
end: then stop.”

---

*Lewis Carroll*

Há, em sistemas físicos, uma aparente “preferência” por configurações nas quais a energia é a menor compatível com os vínculos (tais quais leis de conservação ou limitações geométricas) sobre eles impostos. É possível, entretanto, que esse processo de minimização não especifique completamente o estado do sistema, dando origem a configurações que se mostrem equivalentes no que diz respeito à energia, mas que sejam, em algum sentido, diferentes entre si. Esses estados são igualmente prováveis, e a distintas regiões do sistema podem corresponder diferentes configurações. No encontro entre essas regiões poderá se formar uma interface, conectando-as. Essa estrutura, distinta de qualquer uma das configurações de menor energia, é uma espécie de descontinuidade em relação a uma aparente “ordem” que caracteriza as regiões distantes desse *defeito*. Ela não pode ser facilmente eliminada, visto que sua remoção demanda um significativo gasto de energia e modificação da configuração de grande parte do sistema, necessária para forçar todas as regiões ao mesmo estado. Sua existência se deve a propriedades topológicas (isto é, que não podem ser eliminadas por deformações contínuas) do espaço das soluções de menor energia, e às condições de contorno do problema. As estruturas que acabamos de descrever estão entre os *defeitos topológicos* que, em teorias de campos, aparecem como soluções que não podem ser deformadas suavemente em nenhum dos estados de menor energia, os chamados vácuos. Soluções com essa propriedade encontram aplicações em diversas áreas das ciências naturais, que incluem, mas não se limitam à física da matéria condensada [1], óptica [2, 3], biologia [4, 5] e cosmologia [6, 7].

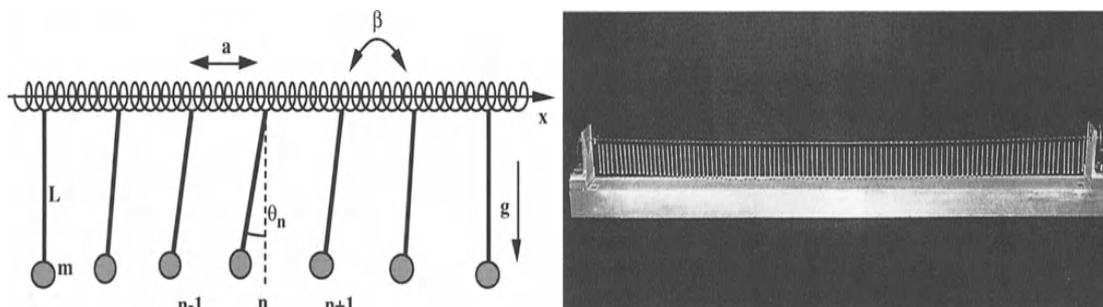
A mais famosa descrição de um defeito é provavelmente o célebre relato de John Scott Russell acerca de seu encontro com um tipo de defeito conhecido como *onda solitária*. Essa descrição constitui uma magnífica ilustração de diversas propriedades fundamentais encontradas em muitos defeitos topológicos, e mencioná-la ao escrever sobre essas estruturas é uma tradição que estudiosos da área raramente ousam quebrar. Não há razão para nos rebelarmos contra essa lei, e apresentamos portanto, em tradução livre, o relato de Russell [8]:

"Eu observava o movimento de um barco sendo puxado rapidamente ao longo de um estreito canal por um par de cavalos, quando o barco subitamente parou- mas não a massa de água que ele colocara em movimento; esta se acumulou ao redor da proa da embarcação em um estado de violenta agitação, e então, subitamente deixando-o pra trás, rolou para a frente com alta velocidade, assumindo a forma de uma grande elevação solitária, um monte arredondado, suave e bem definido

de água, que continuou seu curso ao longo do canal, aparentemente sem mudança de forma ou diminuição da velocidade. Eu o segui a cavalo, e o alcancei ainda rolando com uma velocidade de oito ou nove milhas por hora, preservando sua forma original(...). "

A onda descrita por Russell é um defeito topológico, constituído por uma massa localizada de água que se desloca, solitária, em um canal, e longe da qual a água é calma. Assim, a onda só é detectável em uma região finita do espaço. A intrigante estabilidade mencionada por Russell é resultado de uma delicada combinação de efeitos dispersivos e de não linearidade [9]. Tal estabilidade é uma característica comum em defeitos desse tipo, e está profundamente relacionada à topologia dessas soluções. Essa curiosa característica da onda de Russell atraiu a atenção dos físicos holandeses Diederik Korteweg e Gustav de Vries, que desenvolveram, em 1895, um estudo [10] no qual fizeram uso da famosa equação KdV, originalmente proposta por Boussinesq em 1877 [11], para estudar as características dessas estruturas, denominadas *ondas solitárias*. Na verdade, os defeitos topológicos da teoria KdV têm ainda uma outra propriedade especial, que a onda de Russell só possui aproximadamente: após uma colisão envolvendo um número arbitrário dessas ondas solitárias, elas mantêm sua identidade, e cada uma delas retorna, após um tempo suficientemente longo, à sua forma original. Soluções com essa propriedade são denominadas *sólitons*, e constituem uma classe especial de defeitos topológicos.

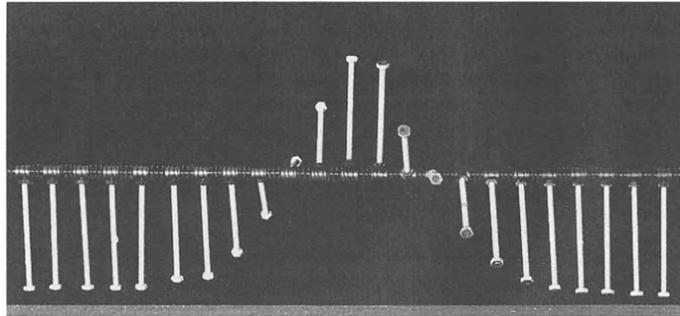
É possível criar um sóliton em um sistema mecânico através do simples e instrutivo arranjo experimental, idealizado originalmente em [12] e mostrado na Figura 1, que mostra um sistema de pêndulos (que são, aqui, parafusos) acoplados por uma mola, os quais podem girar pelo ângulo  $\theta$  mostrado na figura. Esse arranjo experimental é modelado, no limite em que a distância entre os pêndulos tende a zero, pelo sistema Sine-Gordon, a ser estudado mais adiante.



**Figura 1.1** Sistema de pêndulos acoplados por uma mola, representado esquematicamente (à esquerda) e em fotografia de um arranjo experimental real (à direita). A constante  $\beta$  está relacionada à magnitude do torque na seção da mola que conecta dois pêndulos. Os pêndulos são parafusos separados por uma pequena distância  $a$ , que são fixados por um cilindro de cobre e sustentados por uma corda de piano. Imagens encontradas na referência [13], com fotografia de autoria de R. Belleville.

Imagine agora que a experimentalista faça uma rotação completa, em sentido anti-horário, no primeiro parafuso à direita. Essa rotação introduz uma perturbação no sistema, que se manifesta na forma do “torção” (em inglês, *kink*) mostrado na Figura 1.2, o qual se desloca da esquerda para a direita sem mudança de forma ou velocidade, de modo completamente análogo à onda de Russell. Quando *kink* passa por um parafuso, este é rotacionado e, por sua vez, torce os pêndulos à sua direita preservando, assim, o *kink*, que persistirá até que a outra extremidade seja atingida. Note que os parafusos distantes do defeito estão efetivamente em um estado em que a energia é mínima (um “vácuo”), e só “percebem” o sóliton quando este passa por eles.

Ao atingir a extremidade direita, o defeito será refletido elasticamente<sup>†</sup>, e passará a se deslocar com velocidade de mesmo módulo e sentido contrário, exibindo a mesma regularidade de antes, mas com os parafusos sendo, agora, torcidos no sentido horário. A estrutura que se origina após a reflexão é denominada *antikink* [13] (ou, nesse caso, antisóliton), e será, eventualmente, refletida na forma de um kink, em um processo que se repetirá indefinidamente, na medida em que efeitos de dissipação inerentes a um sistema mecânico possam ser ignorados.



**Figura 1.2** Sóliton se propagando da esquerda para a direita em um sistema mecânico. Imagem encontrada na referência [13], com fotografia de autoria de R. Belleville .

Esse experimento ilustra bem o papel da topologia na existência e estabilidade desse tipo de defeito. A observação fundamental é a de que os pêndulos rotacionados  $N$  vezes estão em um estado de vácuo para qualquer  $N$  inteiro. Se, com cuidado, rotacionarmos rígida e simultaneamente todos os parafusos vistos na Figura 1, o que corresponde à transformação  $N \mapsto N + 1$ , nenhuma mudança será perceptível, e um observador que não tenha visto esse procedimento será incapaz de dizer se tal rotação ocorreu: essa é uma simetria do sistema. No caso retratado na Figura 1.2, entretanto, podemos diferenciar os parafusos à esquerda do sóliton daqueles à sua direita pelo número de voltas completas às quais foram submetidos: aqueles à esquerda foram rotacionados uma vez a mais que os parafusos à direita. Quando a experimentalista gira o primeiro parafuso, ela impõe uma “diferença de fase” entre as partes do sistema, a qual se manifesta na forma de um defeito. Note que se formos informados que, em um dado instante, o primeiro parafuso foi rotacionado mais vezes que o último, já saberemos que um defeito deve existir entre eles. O sóliton possui energia finita, que é apenas suficiente para perturbar uma pequena região do espaço, e não o sistema inteiro, de modo que este simplesmente não tem à sua disposição meios de eliminar essa diferença na fase angular. Explica-se por esse mecanismo a estabilidade do defeito topológico: ainda que sua existência não seja energeticamente favorável em relação aos estados de vácuos, não existe nenhuma forma de deformar suavemente (e deformações desse tipo são as únicas fisicamente aceitáveis) essa solução em um dos estados de menor energia<sup>†</sup>.

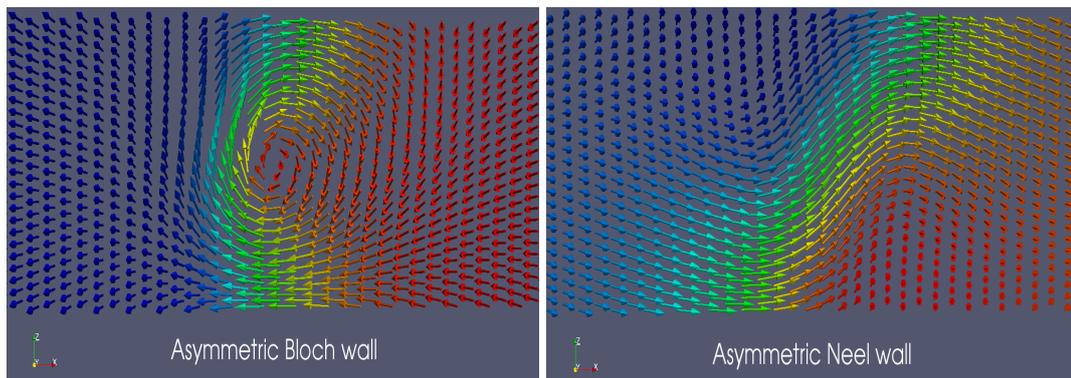
Defeitos topológicos são importantes em transições de fase. Esses processos frequentemente apresentam quebra espontânea de simetria, em que as condições de contorno (que podem estar relacionadas à variação de algum parâmetro termodinâmico como, por exemplo, a temperatura) levam o sistema a um estado caracterizado por uma menor simetria do que aquele em que anteriormente se encontrava. Essa mudança é quantificada pelo *parâmetro de ordem* do sistema, que vale zero na fase “desordenada”, de maior simetria, e aumenta em módulo à medida que

<sup>†</sup>Note-se que essa propriedade de espalhamento é uma característica desse sóliton, e não é inerente a todos os defeitos topológicos.

<sup>†</sup>Na linguagem da topologia, se diz que essa solução é *homotopicamente* distinta das soluções de vácuo, sendo “homotopia” a denominação formal para as deformações suaves às quais nos referimos.

o sistema se torna mais ordenado [14]. Nessas situações, um defeito topológico pode aparecer por consequência do chamado mecanismo de Kibble [15]: devido à finitude da velocidade com que a informação pode ser propagada, diferentes partes do sistema podem sofrer quebra de simetria (caracterizada por uma escolha para o parâmetro de ordem) sem que qualquer tipo de comunicação possa ser estabelecida entre elas, evitando qualquer correlação entre os valores escolhidos para o parâmetro de ordem em cada região, o que resulta em regiões de fronteira nas quais haverá uma mistura entre vários domínios, em que devem aparecer defeitos [16].

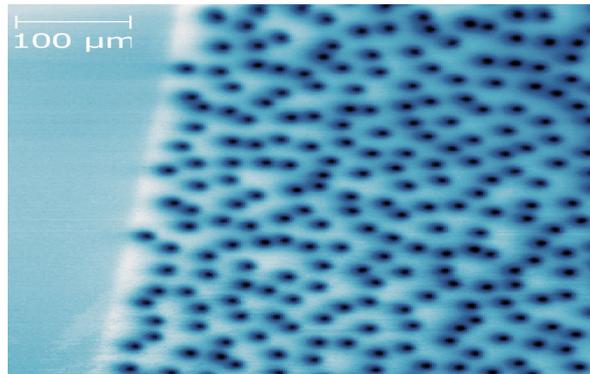
Essa situação é frequentemente encontrada em sistemas ferromagnéticos, nos quais a magnetização ( $\mathbf{M}$ ) faz o papel de parâmetro de ordem [16]. No estado simétrico, sua direção varia aleatoriamente de ponto a ponto, sendo, então,  $\mathbf{M} = 0$ . À medida que a temperatura varia, o sistema se torna mais ordenado, tendendo a um estado de vácuo no qual a magnetização possui um valor definido. Esse estado é claramente menos simétrico que o desordenado, pois as direções espaciais deixam de ser equivalentes quando a direção de  $\mathbf{M}$  é escolhida. A transição entre os estados, engendrada pela diminuição da temperatura abaixo de um valor crítico característico do material, determina que a magnetização em todos os pontos de uma região deve apontar ao longo de uma mesma direção, mas não vincula completamente a escolha dessa direção, decidida espontaneamente quando a temperatura crítica é alcançada. Numa situação real, a mudança de temperatura não ocorre em incrementos infinitesimais, de modo que regiões suficientemente distantes entre si não estão em equilíbrio térmico, e por isso escolhem separadamente (isto é, sem correlação) uma direção de magnetização. Surge assim um defeito conhecido como *parede de domínio*, que se forma na região que separa duas regiões caracterizados por diferentes direções de  $\mathbf{M}$ . Esse defeito constitui uma transição suave entre os domínios, e pode ter várias formas dependendo da maneira específica com a qual a transição ocorre. Dois importantes exemplos de paredes de domínio podem ser vistos na Figura 1.3: As paredes de Bloch e as de Néel. Enquanto nestas a magnetização é rotacionada dentro do plano definido pelas direções dos domínios adjacentes, naquelas a rotação ocorre fora desse plano [17]. Note que, olhando apenas as regiões assintóticas na Figura 1.3, poderíamos prever a existência de um defeito por simples considerações de continuidade. As setas azuis precisam ser rotacionadas para que se pareçam com as vermelhas e, para que essa transição seja gradual, uma parede de domínio precisa aparecer em alguma região intermediária. Por esse argumento, fica claro que não podemos remover o defeito sem desrespeitar as condições de contorno.



**Figura 1.3** Paredes de domínio assimétricas de Bloch (à esquerda) e de Néel (à direita) em um filme de material ferromagnético de espessura considerável. As setas representam a direção da magnetização em cada ponto [18].

Defeitos também ocorrem em modelos com topologia mais complicada, que incluem casos de quebra de simetrias contínuas, dentre os quais podemos destacar o importante exemplo dos

vórtices. Essas estruturas localizadas aparecem em teorias de calibre, e são caracterizadas pela quantização do fluxo de uma quantidade física. Vórtices possuem aplicações em diversas áreas da física, sendo particularmente conhecidos os vórtices em superfluidos, contexto em que foram primeiramente estudados por Feynman [19]. Nesses vórtices, é quantizada a circulação do campo de velocidade ao longo de uma curva fechada. Também são dignos de menção os vórtices de Abrikosov [20], que explicam a presença de fluxo magnético quantizado em certos materiais com propriedades supercondutoras. Os vórtices nesse caso são responsáveis por “prender” as linhas de campo magnético em uma região localizada do espaço. Uma extensão relativística devida a Nielsen e Olesen [21] da teoria de Ginzburg-Landau será estudada mais adiante. A Figura 1.4 mostra uma rede de vórtices detectada experimentalmente em um trabalho reportado em [22].



**Figura 1.4** Rede de vórtices em um filme de material supercondutor. Aqui, o campo magnético foi mapeado com a ajuda de um telescópio SQUID (Superconducting Quantum Interference Devices). A coloração é mais escura em regiões nas quais o fluxo de campo magnético é mais alto. Os vórtices aparecem como pontos escuros na imagem [22].

Por fim, vale mencionar a existência de defeitos em teorias não abelianas, que incluem os Skyrmons [23], descobertos originalmente no contexto da física nuclear, mas que hoje encontram aplicações em outras áreas, como no estudo de superfluidos [24] e em física da matéria condensada [25]. Também em teorias não abelianas encontramos os monopolos magnéticos, com propriedades semelhantes ao famoso monopolo de Dirac [26]. O monopolo de Dirac emerge também por argumentos de natureza topológica, mas sua energia infinita o diferencia fundamentalmente das soluções que serão consideradas neste trabalho. Há entretanto monopolos topológicos com energia finita, como o descoberto independentemente por Gerard 't Hooft [27] e Alexander Polyakov [28], que tem a distinção de não precisar da corda de singularidade utilizada por Dirac em seu trabalho. O trabalho de 't Hooft prevê o aparecimento de monopolos em várias Teorias de Grande Unificação, impondo vínculos a teorias desse tipo. Ademais, monopolos topológicos possuem diversas propriedades interessantes que investigaremos neste trabalho.

Nesta dissertação, as propriedades de defeitos topológicos serão estudados em diversos contextos. O capítulo 2 contém algumas noções gerais, necessárias ao desenvolvimento do trabalho, que serão exemplificadas por meio do estudo de campos escalares em sistemas com duas dimensões espaço-temporais. Apesar da relativa simplicidade desse tipo de teoria de campo, elas encontram uma grande variedade de aplicações [29], e seu estudo é indispensável para o estabelecimento de uma formação sólida na teoria de defeitos. Nesse contexto, investigaremos kinks, semelhantes ao exemplo representado na Figura 1.2, e os antikinks. Quando imersos em um número maior de dimensões, esses defeitos dão origem às já mencionadas paredes de domínio [30]. Os kinks dos modelos  $\phi^4$  e Sine-Gordon serão investigados em detalhes, e, a título

de comparação, mostraremos também um exemplo de defeito não topológico, o *lump* do modelo  $\phi^2$  invertido. Também investigaremos nesse capítulo modelos com dois campos escalares acoplados, o que inclui resultados originais desenvolvidos durante o mestrado.

No capítulo 3 a discussão é estendida a três dimensões espaço-temporais, onde encontraremos soluções tipo vórtice, que constituem um importante exemplo de defeitos em teorias de calibre abelianas. A variedade de vácuo desses modelos é equivalente a uma circunferência, e o estudo de sua topologia é agora mais rico, nos levando a diversas previsões não triviais. As soluções podem ser categorizadas por meio da classe de homotopia à qual pertencem, que rotulamos com o uso de um número inteiro  $N$ . São investigados os vórtices de Nielsen-Olesen e de Chern-Simons, além de modelos mais complexos em que aumentamos a simetria  $U_1$  do sistema para acomodar o acoplamento com outros campos. Esses modelos constituem a base de um artigo publicado durante o mestrado. Em todos esses casos, estudaremos o limite de Bogomol'nyi de cada teoria, que dará origem, em casos específicos do problema estático, a um formalismo de primeira ordem, no qual o problema original se reduz à resolução de um sistema de duas equações diferenciais ordinárias de primeira ordem.

No capítulo 4 voltaremos nossa atenção aos monopolos e dyons. Essas soluções, encontradas em teorias de calibre não abelianas em quatro dimensões espaço-temporais, são muito mais complexas do que os modelos presentes nos capítulos anteriores. Aqui também poderemos categorizar as soluções em setores topológicos caracterizados por um número inteiro  $N$ , proporcional à carga magnética da solução. Veremos que a carga magnética deve, portanto, ser diferente de zero para toda solução de energia finita homotopicamente distinta das soluções de vácuo (isto é, aquelas para as quais  $N \neq 0$ ), o que significa que partículas com carga magnética são muito mais prováveis do que aparentam nessas teorias. No caso dos dyons, haverá também a presença de uma carga elétrica, que enriquece ainda mais a dinâmica desse tipo de solução. Em ambos os casos há a possibilidade de redução do problema, em um caso limite, à resolução de equações de primeira ordem que podem ser resolvidas analiticamente, o que constitui um gigantesco triunfo, dada a complexidade do problema original.

Finalmente, discutimos, no último capítulo, as conclusões acerca do conteúdo desta dissertação, e estabelecemos perspectivas para trabalhos futuros.

# Teorias escalares em (1,1) dimensões

“A estrada para cima e a estrada para baixo são uma e a mesma.”

---

*Heráclito*

Os modelos mais simples em teoria de campos são aqueles descritos por campos escalares reais, que são funções que atribuem, a cada ponto do espaço-tempo, um número real. Nos concentraremos, nesse capítulo, em teorias definidas num espaço plano com duas dimensões espaço-temporais.

A relativa simplicidade desses modelos não diminui sua utilidade. Além de encontrarem aplicações em várias áreas da ciência, eles apresentam propriedades gerais também presentes em teorias mais sofisticadas envolvendo defeitos, tais quais a presença carga topológica, o papel da topologia na estabilidade das soluções, a quebra espontânea de simetria, etc. Campos escalares, quando acoplados a um campo de gauge, são responsáveis pelo *mecanismo de Higgs* [31], a partir do qual a geração de massa em bósons de gauge é explicada no Modelo Padrão. O estudo desse mecanismo contém a generalização de muitas ideias que serão primeiramente vistas, em contexto mais simples, nos modelos discutidos neste capítulo. Os fenômenos mencionados acima podem aqui ser estudadas em um ambiente em que as complicações algébricas são reduzidas ao mínimo possível, impedindo que as dificuldades inerentes ao formalismo matemático obscureçam o caráter físico de nosso estudo.

Começamos este capítulo com a introdução de algumas das ferramentas matemáticas fundamentais ao estudo de defeitos topológicos. Discutimos então alguns modelos simples de um campo escalar em uma dimensão espacial. Usaremos esses modelos pra contextualizar a discussão que faremos sobre o papel da topologia na teoria de defeitos. Depois passaremos a discutir a estabilidade dessas soluções e, por fim, elevaremos a complexidade do problema ao tratar de sistemas com dois campos escalares acoplados.

## 2.1 Notação e convenções

Neste trabalho serão usadas unidades naturais em que  $\hbar = c = 1$ . Trabalharemos em um espaço-tempo de Minkowski em  $(1, D)$  dimensões, isto é,  $D$  dimensões espaciais e uma temporal. Salvo explícita menção do contrário, escolheremos a assinatura métrica de modo que o tensor métrico seja  $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, \dots, -1)$ , que possui tantas componentes negativas quantas forem as dimensões espaciais relevantes ao problema. Empregaremos sempre a conhecida notação de Einstein, em que a soma é subentendida sobre índices repetidos.

As coordenadas são representadas por meio de índices gregos ou latinos, em que estes tomam os valores  $1 \dots D$ , enquanto aqueles variam entre 0 (que corresponde à coordenada temporal) e  $D$ . Índices superiores e inferiores correspondem, respectivamente, a vetores contravariantes e covariantes, para os quais vale a relação por  $x^\mu = \eta^{\mu\nu} x_\nu$ .

As derivadas parciais em relação às coordenadas serão representadas por  $\partial_\mu \equiv \partial/\partial x^\mu$ . Em alguns casos, também usaremos a notação  $f_\lambda$  para denotar a derivada de  $f$  em relação a uma variável  $\lambda$ .

As derivadas parciais de funções com dependência da forma  $f(t, \xi)$ , em que  $\xi$  é uma única coordenada espacial, serão representadas por  $df/d\xi \equiv f'$  e  $df/dt \equiv \dot{f}$ .

## 2.2 Aspectos gerais do formalismo

Nesta seção desenvolveremos algumas ferramentas teóricas necessárias ao desenvolvimento posterior. Iniciaremos falando rapidamente sobre as equações de campo que estão no centro da teoria, passando posteriormente a uma discussão acerca do tensor de energia-momento e, por fim, discutiremos as propriedades topológicas que distinguem os defeitos que são tema desta dissertação das demais soluções possíveis em teorias de campo.

### 2.2.1 Equações de Euler-Lagrange

Consideremos um sistema em  $n$  dimensões espaço-temporais, cuja dinâmica obedece ao famoso *Princípio de Hamilton* [32], o qual postula que o movimento deve ser tal a extremizar o funcional de ação do sistema, que se escreve

$$S = \int d^n x \sqrt{|g|} \mathcal{L} \quad (2.1)$$

em que  $g$  é o determinante da métrica, a integração é em todo o espaço-tempo, e  $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\varphi_a, \partial_\mu \varphi_a)$  é a *densidade lagrangiana* que define o modelo e depende dos campos  $\varphi_a$ . O fator  $\sqrt{|g|}$  vale um no espaço de Minkowski e poderá ser omitido na maior parte desse trabalho, mas será necessário em algumas aplicações, como no cálculo do tensor de energia-momento, a ser definido na próxima seção. No sistema de unidades adotado, a constante de Planck, que tem unidade de ação, é adimensional, e as coordenadas  $x^\mu$  possuem unidades de inverso da energia, dando ao elemento de volume  $d^n x$  dimensões de  $[\text{Energia}]^{1/n}$ . Para que a ação (2.1) seja adimensional devemos, portanto, exigir que a lagrangiana tenha dimensão de energia à  $n$ -ésima potência.

A extremização de (2.1) nos conduz às *equações de Euler-Lagrange*, cuja forma para uma teoria com  $N$  campos  $\varphi_a$  em um espaço plano é

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi_a)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_a} = 0, \quad (2.2)$$

em que o índice latino em  $\varphi_a$  enumera os campos.

### 2.2.2 Tensor de energia-momento

Em 1918, a matemática alemã Amalie Emmy Noether publicou um trabalho que afetaria profundamente a nossa compreensão acerca da realidade física. Nessa publicação [33] foi formulado e demonstrado o celebrado Teorema de Noether, o qual atribui, a toda simetria diferenciável presente na ação de um sistema físico, uma lei de conservação. As consequências desse teorema ajudaram a elevar as simetrias contínuas à posição central que elas hoje ocupam na física teórica.

Uma lei de conservação de considerável interesse resulta da invariância da ação de um sistema físico por transformações da forma [34]  $x^\mu \mapsto x^\mu + \epsilon^\mu$ , que mantém os campos invariantes.

Como a matriz jacobiana dessa transformação possui determinante 1, a condição para que a ação seja invariante sob essa transformação é a ausência de dependência explícita das coordenadas na lagrangiana, i.e  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} = 0$ , donde

$$\frac{d\mathcal{L}}{dx^\mu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu \varphi_a)} \partial_\mu \partial_\nu \varphi_a + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_a} \partial_\mu \varphi_a \quad (2.3)$$

em que está implícita a soma nos índices latinos, ainda que estes não sejam lorentzianos. Inserindo em (2.3) a equação de Euler Lagrange e usando a definição de derivada total, é possível escrever:

$$\frac{d}{dx^\nu} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu \varphi_a)} \partial_\mu \varphi_a - \delta_\mu^\nu \mathcal{L} \right) = 0, \quad (2.4)$$

que pode ser escrita<sup>†</sup> em uma forma análoga à da equação de continuidade do eletromagnetismo [35]

$$\partial_\mu \Theta^{\mu\nu} = 0, \quad (2.5)$$

em que

$$\Theta^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu \varphi_a)} \partial^\mu \varphi_a - g^{\mu\nu} \mathcal{L} \quad (2.6)$$

é o *tensor energia-momento canônico*.

Integrando a equação (2.5) e supondo que as componentes  $\Theta^{0j}$  tendam a zero no infinito, deduzimos a lei de conservação do quadrimomento, definido como:

$$P^\nu \equiv \int \Theta^{0\nu} d^3x. \quad (2.7)$$

Em particular, é de fundamental importância a componente  $\Theta^{00}$  que, pela definição do quadrimomento, deve ser identificado com a *densidade de energia*,  $\rho(x)$ . Note-se que a exigência de conservação de  $P^\nu$  não define univocamente o tensor de energia-momento, uma vez que qualquer tensor cuja contribuição se anule após integração em todo o espaço conduzirá à mesma lei de conservação. Em particular, podemos somar a  $\Theta^{\mu\nu}$  qualquer quantidade tensorial da forma  $\tilde{\Theta}^{\mu\nu} = \Theta^{\mu\nu} + \partial_\alpha \Lambda^{\alpha\mu\nu}$ , tal que  $\Lambda^{\alpha\mu\nu} = -\Lambda^{\alpha\nu\mu}$  [37].

Será mais conveniente definir o tensor energia-momento da forma comumente encontrada em livros de Relatividade Geral [36]:

$$T_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{|g|}} \frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}}, \quad (2.8)$$

em que  $S$  é a ação de um sistema material e a derivada funcional  $\frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}}$  pode ser definida implicitamente para funcionais com representação integral pela relação [34]:

$$\delta F[h_1, h_2, \dots] = \int d^n x \sum_a \frac{\delta F}{\delta h_a} \delta h_a. \quad (2.9)$$

Note-se que (2.8) é válida para assinatura métrica  $(+, -, -, \dots)$  e que o fator  $\sqrt{|g|}$  em (2.1) deve ser mantido nessa variação. Mediante uma troca de assinatura, o lado direito de (2.8) deverá ser multiplicado por  $(-1)$ . A quantidade definida por (2.8) é a que aparece nas equações de

<sup>†</sup>Em consonância com a literatura, substituímos aqui a derivada  $\frac{d}{dx^\mu}$  por  $\partial_\mu$ . A interpretação evidentemente continua a mesma, isto é,  $\partial_\mu$  representa uma derivação com respeito a  $x^\mu$  em que as variáveis  $x^\nu$  (mas **não** os campos ou suas derivadas) são mantidas fixas para todo  $\nu \neq \mu$ .

Einstein [37], sendo essa definição válida para qualquer sistema, em espaços curvos ou planos, mesmo em situações em que (2.6) não pode ser definida.

As duas definições apresentadas para o tensor energia-momento são equivalentes em muitos casos, incluindo os espaços planos [38], no sentido de que as duas escolhas levam às mesmas leis de conservação. Entretanto, o tensor (2.8) traz, mesmo em espaços planos, algumas vantagens, como o fato de este ser automaticamente simétrico e invariante por transformações de calibre [36]. Essas duas condições são importantes para um tensor de energia-momento fisicamente aceitável, e podem ser violadas pelo tensor canônico (como ocorre no caso das teorias de gauge que estudaremos mais adiante), que, nessas situações, precisa ser modificado para cumprir esse requerimento. Além disso, o cálculo de (2.8) é frequentemente muito mais simples, especialmente para sistemas mais complexos, o que já seria, por si só, uma boa justificativa para usá-lo. Discutimos no Apêndice A.1 o significado das componentes desse tensor, e mostramos também alguns resultados que são relevantes ao cálculo dessa quantidade.

### 2.2.3 Classificação topológica de soluções

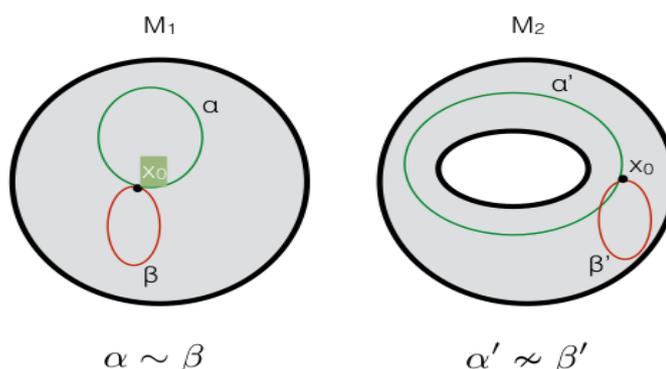
Por razões práticas, históricas e filosóficas, o pensamento físico sempre foi dominado por noções de geometria e de cálculo integral e diferencial, e é em termos dessas noções que a maior parte dos resultados dessa ciência é formulada. Outras áreas da matemática podem, entretanto, se mostrar grandes aliadas, nos fornecendo poderosas ferramentas de análise e uma nova perspectiva a partir da qual nossas teorias podem ser interpretadas. Dentre essas áreas, tem ganhado crescente reconhecimento a topologia.

Um dos primeiros encontros entre topologia e física está no trabalho de Gauss [39], em que uma investigação da lei de Ampère em um solenoide resultou na descoberta de um invariante topológico fundamental na teoria de nós e conhecido como número de enlace (linking number) [40]. A teoria de nós encontra aplicações, por exemplo, em estudos relacionados à estrutura do DNA [41] e à quiralidade de moléculas [42], e também foi de grande interesse para Maxwell [43]. Notável é ainda a natureza topológica de muitos trabalhos de Poincaré, como na famosa análise do problema de três corpos [44] ou em sua investigação sobre equações diferenciais, motivada por problemas físicos [45]. Já no século XX, Dirac descobriu resultados topológicos interessantes inerentes aos axiomas da mecânica quântica, que culminariam em sua conjectura sobre o monopolo magnético [26]. No fim dos anos 80, Edward Witten relacionaria o polinômio de Jones -um invariante topológico- a propriedades de certas teorias quânticas de campo [46, 47]. Também topológico é o argumento dado por Penrose acerca do aparecimento de singularidades em um espaço-tempo devido ao colapso gravitacional [48]. Neste trabalho, a topologia nos ajudará a entender várias propriedades dos defeitos topológicos, como a existência, quantização e conservação de fluxo magnético em certas teorias de gauge. Em alguns casos, até mesmo a energia da configuração pode ser deduzida apenas com a análise topológica sem nem ao menos precisarmos encontrar explicitamente as soluções.

A topologia é, por sua própria natureza, um campo de estudo abstrato. Essa parece ser uma característica negativa, mas é justamente um de seus pontos fortes, por nos fornecer uma ótica através da qual conseguimos enxergar fortes analogias entre fenômenos de naturezas completamente distintas. Além disso, a análise topológica conduz a uma compreensão mais profunda da natureza física de um problema, por abstrair apenas aquelas propriedades que são realmente fundamentais à existência de um dado fenômeno. Isso explica em parte o porquê de alguns defeitos topológicos, como as paredes de domínio e os vórtices, aparecerem situações tão diversas quanto a física da matéria condensada e gravitação. Estamos tratando de sistemas físicos completamente diferentes e, de modo geral, espaços geometricamente distintos, mas com ca-

racterísticas topológicas em comum.

A topologia investiga, a grosso modo, espaços e formas geométricas, com ênfase nas propriedades desses objetos que são preservadas mediante a deformações contínuas. A presença de buracos, por exemplo, é uma tal propriedade: não é possível criar um buraco numa esfera por uma deformação, e também não podemos deformar um objeto que possui um buraco, como uma caneca, em uma esfera, já que a deformação é capaz de diminuir ou mudar a forma do buraco, mas não elimina-lo. Uma maneira de enxergar a diferença entre esses espaços é examinando os “loops” que podem ser desenhados em suas superfícies [49]. Qualquer loop desenhado na esfera pode ser deformado em um ponto e, conseqüentemente, em qualquer outro loop, como fica claro caso o leitor imagine essa curva como um laço envolvendo a esfera. Apertando o laço podemos diminuir seu diâmetro suavemente sem soltar o laço da esfera, até que ele se torne um ponto, o qual podemos mover para outra localidade na superfície e transformá-lo em qualquer outro loop, o que mostra que essas curvas são equivalentes em certo sentido (isto é, pertencem a uma classe de equivalência). A presença de um buraco muda drasticamente a situação. Considere o objeto retratado à direita na Figura 2.1, que chamaremos de Toro. Alguns loops podem ser desenhados de modo que seja possível reduzi-los a pontos, mas um loop em cujo interior há a presença do buraco não pode ser reduzido a um ponto (a deformação deve acontecer sempre dentro do espaço topológico estudado), mostrando que os loops em um tal espaço podem ser separados em classes distintas, e só são possíveis deformações entre objetos que pertencem à mesma classe. As duas situações mencionadas são ilustradas na Figura 2.1.



**Figura 2.1** Comparação entre loops desenhados em um espaço um topológico com buraco e outro sem. Note que enquanto a topologia da esfera permite que qualquer loop seja deformado em um ponto (e, portanto, em qualquer outro loop), o espaço à direita possui classes distintas de loops [49].

Para avançar em nosso estudo, precisamos formalizar algumas noções. Este não é um trabalho sobre topologia, então é evidente que a discussão desenvolvida será superficial, e os conceitos considerados serão detalhados somente na medida em que forem necessários à nossa discussão. Primeiramente, formalizaremos o conceito de “deformação” que estamos usando, o qual corresponde a uma *homotopia*, cuja definição é dada, por exemplo, em [50]:

**Definição 2.2.1.** Duas funções  $f, g : X \rightarrow Y$  são homotópicas se e somente se existe uma família contínua de funções  $f_t : X \rightarrow Y$  (denominada homotopia) com  $t \in [0, 1]^\dagger$ , tal que  $f_0 = f, f_1 = g$ .

O conjunto de todas as funções que podem ser relacionadas por homotopias origina uma classe de equivalência, cuja existência permite a classificação dos mapas entre dois espaços

<sup>†</sup>A escolha do intervalo  $[0,1]$  é evidentemente imaterial, uma vez que é possível estabelecer uma bijeção entre qualquer intervalo degenerado  $[a,b]$  e  $[0, 1]$  [51]

topológicos de acordo com a classe à qual pertencem. O conjunto das classes de homotopia, munido da operação de composição de funções, forma um grupo [52], denominado *grupo de homotopia*. Usaremos o termo *defeito topológico* para nos referir às soluções homotopicamente distintas dos vácuos. São especialmente importantes os mapas entre uma  $n$ -esfera (a generalização da esfera a  $n$  dimensões, que pode ser visualizada como o conjunto dos pontos equidistantes a um “centro” em um espaço euclidiano  $n+1$  dimensional) e um espaço topológico  $\mathbf{M}$ . Na Figura 2.1 os loops são mapas entre uma circunferência e  $\mathbf{M}$ , e o grupo de homotopia correspondente é denominado  $\pi_1(\mathbf{M})$ , o chamado grupo fundamental<sup>†</sup>. No caso da esfera, esse grupo é trivial, já que todos os mapas são homotopicamente equivalentes.

O toro por outro lado possui um grupo fundamental não trivial. Como vimos, há os mapas que podem ser contraídos a pontos e aqueles que contém o buraco em seu interior. Há ainda um terceiro tipo de mapa: o que circula o “tubo” do Toro [49]. Na verdade, há infinitas classes em cada um dos dois último tipos, que podem ser distinguidas pelo número de voltas completas que o loop dá. É um resultado conhecido da topologia o fato de que loops caracterizados por números distintos de voltas completas não podem ser deformados um no outro [54]: seria necessário colar duas extremidades de uma curva aberta ou quebrar uma fechada, operações que não constituem homotopias. Assim, o grupo fundamental do Toro é  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \mathbb{Z}^2$ .

De que maneira esses conceitos se relacionam à física dos defeitos? A conexão da teoria de homotopia com essas estruturas se dá pela análise dos mapas entre um espaço físico e a variedade de vácuo do sistema (a variedade topológica cujos elementos são os estados de vácuo do modelo), que são determinados pelas condições de contorno. Em nossas investigações, exigiremos que as soluções tenham energia finita, o que vincula o comportamento assintótico dos campos e gera a topologia não trivial que engendra a presença de defeitos topológicos.

Visando uma análise mais precisa da forma como isso acontece, reproduziremos o argumento dado em [30], que mostra que soluções com topologia não trivial no infinito não podem pertencer à variedade de vácuo em todo o espaço. Podemos entender as condições de contorno como mapas topologicamente não triviais  $\phi_\infty : S_n^\infty \rightarrow \mathbf{M}$  entre uma  $n$ -esfera de raio infinito  $(S_n^\infty)^\ddagger$  centrada na origem e a variedade de vácuo ( $\mathbf{M}$ ) do sistema (para a qual os campos devem invariavelmente tender no infinito quando tratamos de configurações com energia finita). Por absurdo, suponha-se que  $(\phi_1, \dots, \phi_N) \in \mathbf{M} \forall \mathbf{x}$ . Mas esses mapas podem ser obtidos por meio do limite

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \{ \phi_a : S_n^a \rightarrow \mathbf{M} \},$$

em que  $S_n^a$  é uma  $n$ -esfera de raio  $a$ ). Esse argumento é válido para todo  $a$  e, em particular, vale no limite em que  $a \rightarrow 0$ . Mas isso é absurdo, visto que, por definição, campos devem ter um valor definido em todos o espaço, de modo que, no limite considerado, o mapa deve ter um único ponto como sua imagem, e só pode ser topologicamente trivial. Deve ser então falsa a hipótese de que os campos pertencem sempre a  $\mathbf{M}$  (note que, por exemplo, o mapa  $\alpha$  no Toro da Figura 2.1 não pode ser contraído em um ponto apenas porque está “preso” a essa variedade. O problema desaparece se permitirmos que ele a deixe), explicando a origem da energia dos defeitos topológicos.

<sup>†</sup>A rigor, devemos especificar um ponto  $x_0 \in \mathbf{M}$  que é mantido fixo durante toda a deformação. Diferentes escolhas de  $x_0$  levam a grupos isomórficos e, portanto, abandonaremos a referência a esse ponto. Além disso, a distinção entre mapas que não podem ser deformados um no outro somente por diferirem na escolha de  $x_0$  normalmente não possui significado físico, razão pela qual consideraremos topologicamente distintos os mapas que não podem ser contraídos um no outro mesmo se soltarmos  $x_0$  [30].

<sup>‡</sup>Tecnicamente, quando  $n \geq 3$  só podemos representar o espaço euclidiano por uma esfera se a ele adicionarmos um ponto no infinito [53]. Essa sutileza não irá, entretanto, afetar os nossos resultados.

A análise topológica pode ser usada para avaliar a possibilidade de defeitos topológicos em um modelo. Em teorias de um campo escalar real, por exemplo, encontraremos um conjunto discreto de mínimos. A variedade de vácuo será topologicamente não trivial quando esse conjunto tiver mais do que um mínimo, já que o fato de variedade ser discreta implica que um ponto  $\phi_0^i$  não pode ser deformado em outro mínimo sem sair do vácuo. Defeitos topológicos podem, portanto, aparecer em tais teorias conectando mínimos distintos. Note-se entretanto, que esse raciocínio só pode eliminar ou sugerir a presença de defeitos em um modelo, não sendo suficiente para garantir que as equações de movimento admitam soluções homotopicamente distintas do vácuo.

Frequentemente, e em todos os casos que consideraremos, a topologia de  $\mathbf{M}$  está relacionada a um mecanismo de quebra espontânea de simetria. Dada uma solução de vácuo, todas as configurações a ela relacionadas pela ação de um elemento do grupo de simetria  $G$  da lagrangiana também pertencem ao vácuo. Se a teoria permite quebra espontânea de simetria para um grupo  $H \subset G$ , então os elementos de  $\mathbf{M}$  relacionados pela ação de  $H$  são equivalentes, e devem ser identificados. A variedade de vácuo é, então, isomórfica a  $G/H$  [30]. O quociente “/ $H$ ” é simplesmente a representação matemática do fato de que não há distinção física entre configurações que só diferem pela ação de elementos de  $H^\dagger$ .

Muitas informações sobre um modelo e suas soluções podem ser descobertas por meio da análise do grupo  $\pi_n(\mathbf{M})$ , relativo às classes de mapas entre uma esfera  $n$ -dimensional e a variedade de vácuo. O cálculo desses grupos é em geral complicado, mas já foi realizado para uma grande diversidade de variedades topológicas, e podemos simplesmente utilizar os resultados disponíveis na literatura. Em muitos casos, nossa variedade de vácuo será equivalente a uma  $m$ -esfera. Os grupos  $\pi_n(S_m)$  são conhecidos na literatura para muitas escolhas de  $m$  e  $n$ . Destacamos em particular os resultados [55]:

$$\pi_n(S_m) = 0 \quad (n < m) \quad (2.10)$$

$$\pi_n(S_n) = \mathbb{Z} \quad (n = m), \quad (2.11)$$

em que “0” denota o grupo trivial, e a “igualdade” é entendida no sentido de isomorfismo. Frequentemente nos deparamos com a situações em que  $\mathbf{M}$  é topologicamente equivalente a uma  $n$ -esfera no espaço interno, de modo que  $\pi_n(\mathbf{M}) = \mathbb{Z}$  possibilitando a classificação das soluções em classes rotuladas por um inteiro  $N$ , que é muitas vezes denominado de *carga topológica*. Uma solução é homotopicamente distinta do vácuo se, e somente se,  $N \neq 0$ . Embora seja uma quantidade abstrata, a carga topológica é frequentemente proporcional a quantidades mensuráveis, como o fluxo ou carga magnética, e em alguns casos muito especiais, até à energia da solução. As equações de movimento alteram a configuração dos campos de maneira suave e, portanto, não mudam a classe de homotopia, garantindo a conservação de qualquer quantidade proporcional a  $N$ . Transformações de calibre também são deformações contínuas, então essas quantidades são automaticamente invariantes por tais transformações. Teorias de gauge com um campo complexo  $\varphi$  grupo de calibre  $U(1)$  constituem um exemplo clássico. Nesse caso, encontramos modelos que têm seu potencial minimizado quando  $|\varphi|$  é uma constante não nula, de modo que  $\mathbf{M} = S_1$ . Nessa situação, encontramos vórtices.

Em monopolos magnéticos, o grupo  $\pi_n(\mathbf{M})$  está relacionado ao fluxo magnético no infinito. Um resultado comum em livros de topologia algébrica [55] nos diz que  $\pi_2(S^1) = 0$ , de modo que não podemos estender de forma simples as teorias que descrevemos acima para obter um monopolo de energia finita. É natural, portanto, considerar grupos de Lie não abelianos, os

---

<sup>†</sup>Uma definição precisa do espaço quociente é dada no apêndice A.2. Para os propósitos desta seção, a ideia intuitiva que foi apresentada é suficiente.

mais simples dos quais nos conduzem a  $\mathbf{M} = S_2$ . Como  $\pi_1(S_2)$  é também trivial, somos levados a considerar sistemas em três dimensões espaciais. Observações desse tipo são muito mais facilmente percebidas quando a estrutura topológica da variedade de vácuo é levada em conta, e motivaram t' Hooft a investigar monopolos em teorias não abelianas, considerando quatro dimensões espaço-temporais [27]. Também de natureza topológica e ainda menos óbvia é a constatação de que o campo escalar em uma teoria de gauge deve ter zeros se a carga topológica for não nula, o que deve ser levado em conta na hora de estabelecer condições de contorno. Argumentos desse tipo podem ser usados para excluir ou motivar a possibilidade de defeitos topológicos em teorias de campo com as características mais diversas, e ilustram bem a forma como a topologia pode ser usada para nortear nosso estudo.

A análise topológica também nos ajuda a prever as consequências de um aumento de simetria, que ocorre em modelos nos quais são acoplados dois subsistemas de simetria menor. Por exemplo, numa teoria de gauge  $U(1) \times U(1)$  e condições de contorno tais que  $(\varphi, \chi) \rightarrow (e^{i\alpha}, e^{i\beta})$  assintoticamente, teremos o grupo fundamental  $\pi_1(S_1 \times S_1)$ , isomórfico a  $\pi_1(S_1) \times \pi_1(S_1)$  [55], mostrando que a classificação topológica das soluções de um tal modelo é feita pela especificação de um par de inteiros. Teorias com simetria aumentada foram estudadas em [56, 57] e outros exemplos que aparecerão no decorrer do trabalho.

### 2.3 Modelos de um campo escalar real

Nos concentraremos nesta seção em modelos de um campo escalar real em (1,1) dimensões, cuja lagrangiana tem a forma *standard*:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi), \quad (2.12)$$

em que  $V(\phi)$  é uma função real de  $\phi$ , que representa a auto-interação do campo escalar. Para que a ação seja adimensional,  $\mathcal{L}$  deve possuir dimensão de energia ao quadrado, o que acontece somente se  $\phi$  for adimensional.

As equações de Lagrange se escrevem:

$$\square \phi + \frac{dV(\phi)}{d\phi} = 0, \quad (2.13)$$

em que  $\square \phi \equiv \partial_\mu \partial^\mu \phi$ . O cálculo do tensor energia-momento, seja por (2.6) ou (2.8), dá

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \eta_{\mu\nu} \mathcal{L}. \quad (2.14)$$

Estaremos particularmente interessados no caso estático, em que  $\phi = \phi(x)$ . Defeitos topológicos de energia finita são muitas vezes análogos a partículas clássicas e, nesse sentido, as configurações estáticas representam a partícula em repouso. Podemos encontrar soluções dependentes do tempo por meio de um boost de Lorentz. As soluções estáticas também servem como ponto de partida em problemas mais complexos, como as colisões entre kinks [30]. O tensor de energia-momento é, nessas condições, diagonal, com

$$T_{00} = \frac{1}{2} \phi'^2 + V(\phi), \quad (2.15)$$

$$T_{11} = \frac{1}{2} \phi'^2 - V(\phi). \quad (2.16)$$

A equação (2.13) se reduz a

$$\phi''(x) = V_\phi. \quad (2.17)$$

Multiplicando essa igualdade por  $\phi'$  e invocando as regras da cadeia e do produto, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dx}(\phi'^2) &= \frac{dV}{dx} \\ \therefore \frac{d\phi}{dx} &= \pm \sqrt{2V(x) + cte}. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Sejam  $v_1, \dots, v_n$  os mínimos (que suporemos degenerados

$$f_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu \Lambda_\nu - \partial_\nu \Lambda_\mu + 2\text{Tr}([\partial_\mu \hat{\phi}, \partial_\nu \hat{\phi}] \hat{\phi}), \quad (2.19)$$

) do potencial, enumerados de modo que  $v_1 < v_2$ , etc. Dizemos que o intervalo  $[v_l, v_{l+1}]$  define um *setor topológico*. Se o potencial é limitado inferiormente, podemos supor, sem perda de generalidade, que  $V(v_1) = \dots V(v_n) = 0$ . As soluções de interesse são aquelas de energia finita. Para que essa condição seja satisfeita, é necessário que a densidade de energia tenda a zero no infinito. Como os dois termos em (2.15) são positivos, eles devem fazê-lo separadamente. Em particular, deve ser

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \phi(x) \in \{v_1, \dots, v_n\}. \quad (2.20)$$

As condição de energia finita também implica em  $\rho(x) \rightarrow \frac{1}{2}\phi'^2$  no infinito. Visto que essa é uma função não negativa, sua integral será finita somente se a constante de integração em (2.18) for nula, donde

$$\frac{d\phi}{dx} = \pm \sqrt{2V(x)}. \quad (2.21)$$

A resolução das equações de movimento se reduz, portanto, à integração dessas equações de primeira ordem. Note que (2.21) é equivalente à nulidade da pressão, dada por (2.16), que é uma condição matematicamente análoga à conservação de energia em um sistema mecânico unidimensional, no qual a lei de conservação  $E_{\text{mec}} = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + U(x)$  pode ser usada para resolver as equações de movimento por quadratura [34]. A condição de pressão nula pode ser generalizada para sistemas mais complexos, nos quais ela pode ser tratada como um vínculo [17]. Vale destacar também que a nulidade da pressão assegura que as integrais [29]

$$E_g = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \phi'^2(x) dx \quad (2.22)$$

e

$$E_p = \int_{-\infty}^{\infty} V(x) dx, \quad (2.23)$$

convirjam separadamente. A porção “cinética” da energia, dada pela integral de  $\phi'^2/2$ , é evidentemente nula no caso estático, e também é finita quando uma solução dependente do tempo é obtida por boost de Lorentz. Se supormos que o potencial é não negativo, podemos definir uma função auxiliar  $W(\phi)$  (às vezes denominada superpotencial) tal que

$$V(\phi) = \frac{1}{2}W_\phi^2, \quad (2.24)$$

de modo que (2.21) se escrevem

$$\frac{d\phi}{dx} = \pm W_\phi. \quad (2.25)$$

É conveniente definir a *corrente topológica* [58]:

$$j^\mu = \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu} \partial_\nu \phi, \quad (2.26)$$

em que  $\varepsilon^{\mu\nu}$  é o símbolo de Levi-Civita no espaço de Minkowski bidimensional, cujas componentes diagonais são nulas e  $\varepsilon^{01} = -\varepsilon^{10} = 1$ . A equação de continuidade

$$\partial_\mu j^\mu = 0$$

segue imediatamente da simetria das derivadas parciais, e do fato de que a contração total de um tensor simétrico e um anti-simétrico é identicamente nula. Dessa equação e do fato de que as soluções de energia finita tendem, no infinito, a uma solução de vácuo, deduzimos a conservação da carga topológica

$$Q = \frac{1}{2} (v^+ - v^-), \quad (2.27)$$

onde  $v^+$  e  $v^-$  denotam as soluções de vácuo para as quais o campo tende no infinito positivo e negativo, respectivamente. As classes de homotopia são distinguidas pelos pares  $(v^-, v^+)$ . A conservação de  $Q$  é uma consequência do fato de que as configurações de energia finita não podem deixar essa classe.

As equações (2.25) podem também ser obtidas pela minimização do funcional de energia do sistema, por um procedimento que é o exemplo mais simples do famoso Método de Bogomolny [59], com o qual nos depararemos frequentemente. Para um potencial da forma (2.24), a energia da solução satisfaz:

$$E = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dx \left\{ \dot{\phi}^2 + (\phi'^2 \pm W_\phi^2) + 2 \frac{dW}{d\phi} \frac{d\phi}{dx} \right\}. \quad (2.28)$$

Em particular, as soluções tipo kink/antikink são funções monótonas, visto que  $W_\phi$  é, nesse caso, estritamente positiva no intervalo  $(v_l, v_{l+1})$ . Nesse caso, vale a *desigualdade de Bogomolny*

$$E \geq E_B = \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{dW}{dx} = |W(\phi^+) - W(\phi^-)| \quad (2.29)$$

onde  $E_B$  é a energia de Bogomol'nyi, que constitui um limite inferior para a energia do sistema. A igualdade é alcançada se e somente se  $\dot{\phi} = 0$  (a solução é estática) e as equações (2.25) são satisfeitas. Essas equações de primeira ordem são denominadas Bogomol'nyi-Prasad-Sommerfield, ou simplesmente *BPS*, em homenagem a Bogomol'nyi e aos físicos Prasad e Sommerfield, que encontraram, em suas investigações do monopolo de t'Hooft Polyakov, a primeira solução BPS [60]. Concluímos portanto que defeitos topológicos estáticos são pontos de extremo dos funcionais de ação e também mínimos da energia. Note-se que podemos, nessas condições, calcular diretamente a energia de uma solução BPS a partir do cálculo de  $E_B$  por meio de (2.29), que depende apenas do setor topológico. Também merece atenção o fato de que as equações de primeira ordem implicam na igualdade  $E_p = E_g$ , que constitui um Teorema do Virial. Mesmo configurações que não satisfaçam as equações de primeira ordem têm sua energia limitada pelo vínculo  $E \geq E_B$ .

Notemos que a segunda igualdade em (2.29) depende da monotonicidade de  $\phi$ , visto que, nesse caso, as equações correspondentes aos sinais positivo e negativo em (2.25) podem ser integradas separadamente em todo o espaço, resultando nas equações

$$\int_{\phi_0}^{\phi} \frac{d\tilde{\phi}}{W_{\tilde{\phi}}} = \pm(x - x_0), \quad (2.30)$$

em que  $\phi_0$  é um valor intermediário entre os dois mínimos que o defeito conecta, que normalmente tomaremos como o centro da solução, e  $x_0$  o ponto para o qual  $\phi(x_0) = \phi_0$ . Dada a condição inicial  $\phi(x_0) = \phi_0$ , podemos calcular as duas equações em (2.30) em todo o espaço, obtendo uma igualdade da forma  $f(\phi) = x - x_0$ . Como  $x - x_0$  é uma função bijetiva,  $f(\phi)$  também o será, o que implica na existência de uma inversa tal que  $\phi(x) = f^{-1}(x)$ . No caso de defeitos tipo *lump*, que não são topológicos, a derivada  $\phi'$  muda de sinal, o que exige um tratamento diferenciado das equações (2.21) e certas sutilezas no cálculo da energia. Um tal tratamento para lumps foi desenvolvido em [61].

### 2.3.1 Modelo $\phi^4$

Prosseguiremos agora com a resolução das equações (2.21) para alguns exemplos importantes. Dentre os defeitos encontrados em teorias de campo escalares, é especialmente notório o “kink” do modelo  $\phi^4$ , definido pela lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial^\mu \phi \partial_\mu \phi - \frac{\lambda^2}{4} (\phi^2 - a^2)^2, \quad (2.31)$$

onde  $\lambda$  e  $a$  são constantes reais, sendo esta adimensional enquanto aquela tem dimensão de inverso da energia. Note-se que a lagrangiana é invariante sob a reflexão  $\phi \mapsto -\phi$ . Dizemos, portanto, que ela possui simetria  $Z_2$ .

A primeira análise a ser feita na busca por defeitos é a da variedade de vácuo do modelo. Aqui, vemos que as soluções constantes  $\phi_0^\pm = \pm a$ , que trivialmente satisfazem as equações de movimento, são mínimos do potencial, para os quais, evidentemente, a energia é nula. A degenerescência nos mínimos do potencial engendra a quebra de simetria nesse sistema. Embora o conjunto  $\{-a, a\}$  seja também invariante sob uma transformação do grupo  $Z_2$ , as soluções de vácuo, vistas separadamente, não o são. Vamos analisar o mecanismo a partir do qual a massa clássica das excitações em torno do vácuo se torna bem definida por meio dessa quebra de simetria. Primeiramente, consideremos a famosa equação de Klein-Gordon [32]:

$$\square \psi + m^2 \psi = 0, \quad (2.32)$$

em que  $m$  é a massa de uma partícula cuja dinâmica obedece a essa equação. Linearizando a equação (2.13) em torno do vácuo, isto é, considerando  $\phi = \phi_0 + \psi$ , em que  $\phi_0$  é um dos mínimos e  $\psi$  é um termo de primeira ordem, podemos escrever

$$\square \psi + \left. \frac{dV(\phi)}{d\phi} \right|_{\phi_0} + \left. \frac{d^2V(\phi)}{d\phi^2} \right|_{\phi_0} \psi = 0, \quad (2.33)$$

ou, levando em conta o fato de  $\phi_0$  ser um mínimo:

$$\square \psi + \left. \frac{d^2V(\phi)}{d\phi^2} \right|_{\phi_0} \psi = 0, \quad (2.34)$$

o que nos motiva a identificar, por analogia com a equação de Klein-Gordon,

$$m_\psi^2 = \left. \frac{d^2V(\phi)}{d\phi^2} \right|_{\phi_0}. \quad (2.35)$$

Para o modelo  $\phi^4$ , temos, portanto:

$$m_\psi^2 = 2a^2\lambda^2. \quad (2.36)$$

Podemos compreender melhor a quebra de simetria nesse modelo analisando a lagrangiana que descreve excitações em torno de um dos vácuos [30]. Colocando  $\phi = a + \psi$  na lagrangiana do modelo  $\phi^4$ , obtemos

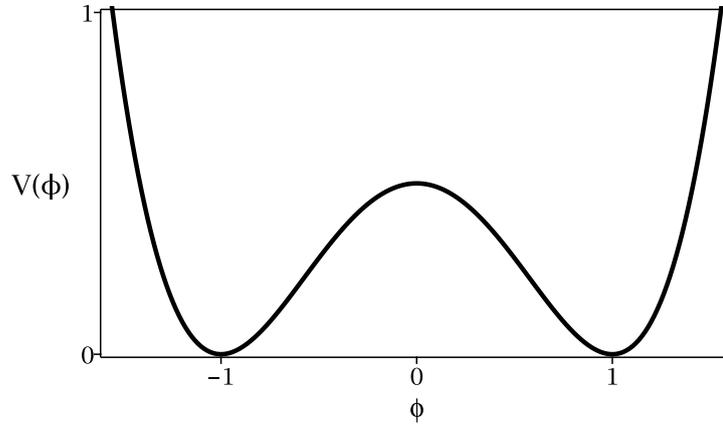
$$\mathcal{L}_\psi = \partial^\mu \psi \partial_\mu \psi - \frac{(m_\psi)^2 \psi^2}{2} - \frac{\lambda^2 \psi^4}{4} - \frac{\lambda m_\psi \psi^3}{\sqrt{2}} \quad (2.37)$$

em que  $m_\psi = \sqrt{2}a\lambda$  é a massa do méson [30] correspondente à mencionada excitação. O termo  $-(m_\psi)^2 \psi^2/2$  é o mesmo que ocorre na lagrangiana de Klein-Gordon para uma partícula de massa  $m_\psi$  [34]. Vemos, portanto, que a massa da partícula está bem definida, mas a presença do termo cúbico em  $\psi$  destrói a invariância sobre reflexões [29].

Resolvamos agora as equações de movimento (2.21) para soluções de energia finita no caso estático. Podemos simplificar nossa análise por meio da reescala  $\phi \rightarrow a\phi$ ,  $x^\mu \rightarrow \sqrt{2}x^\mu/\lambda a$ , que implica  $\mathcal{L} \rightarrow \tilde{\mathcal{L}} = (\lambda^2 a^4/2)\mathcal{L}$ . O fator multiplicativo que aparece na lagrangiana não afeta as equações de movimento, o que permite que a análise possa ser feita, a nível clássico, em termos da lagrangiana:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial^\mu \phi \partial_\mu \phi - \frac{1}{2} (1 - \phi^2)^2. \quad (2.38)$$

Notado seja, entretanto, que o valor dos parâmetros é importante no nível quântico [30]. Isso não causará problemas, visto que a reescala pode ser revertida com o simples retorno às variáveis originais, se necessário for. O potencial  $V(\phi) = (1 - \phi^2)^2/2$  desse modelo está plotado na Figura 2.2.



**Figura 2.2** Potencial do modelo  $\phi^4$

De (2.38), lemos  $W_\phi = 1 - \phi^2$ . A partir dessa relação deduzimos que  $W(\phi) = \phi - \phi^3/3$  gera esse potencial. Os mínimos são agora  $\phi_0^\pm = \pm 1$ . Como a solução conecta esses mínimos e é uma função contínua, existe  $x_0$  tal que  $\phi(x_0) = 0$ . Dada a invariância translacional da teoria, podemos tomar, sem perda de generalidade,  $x_0 = 0$ , donde obtemos, por (2.30), as igualdades

$$\int_0^\phi \frac{d\tilde{\phi}}{1 - \tilde{\phi}^2} = \pm x. \quad (2.39)$$

As duas equações estão relacionadas pela troca  $x \leftrightarrow -x$ . Podemos então nos concentrar na equação com sinal positivo, da qual deduzimos

$$x = \operatorname{arctanh}(\phi), \quad (2.40)$$

que é invertível em todo o espaço. Realizando a inversão, encontramos o kink do modelo  $\phi^4$

$$\phi(x) = \tanh(x). \quad (2.41)$$

Trocando  $x$  por  $-x$ , obtemos o antikink:

$$\phi(-x) = \tanh(-x) = -\tanh(x). \quad (2.42)$$

O perfil do kink está ilustrado na Figura 2.3. Para  $x$  positivo e distante do centro da solução,  $\phi \approx 1$ , enquanto para  $x$  negativo e, ainda, distante do centro,  $\phi \approx -1$ . O centro do kink, no entanto, está em  $\phi(0) = \phi(-0) = 0$ , mostrando que a simetria  $Z_2$  é restaurada nesse ponto [30]. A carga topológica, calculada por meio de (2.27), vale  $Q = 1$  para o kink e  $Q = -1$  para o antikink.

A análise do perfil do kink nos fornece uma explicação heurística para sua estabilidade. Observando o gráfico dessa solução, notamos que uma porção infinita do campo se encontra aproximadamente no vácuo. Para transformar o kink em uma solução de vácuo deveríamos levar toda a parcela que está na parte positiva do gráfico para a parte negativa, ou vice-versa. Assim, teríamos que transportar uma porção infinita do campo entre os vácuos, e a imposição, inerente à natureza da evolução temporal de um sistema que satisfaz as equações de Lagrange, de que tais transformações sejam executadas por meio de deformações suaves, garante que apareçam, nesse processo, configurações intermediárias nas quais uma uma porção infinita do campo está fora da variedade de vácuo. Esse exemplo ilustra a forma com que a condição de energia finita e a topologia da variedade de vácuo afetam a estabilidade. Na seção 2.4 investigaremos com maior profundidade a estabilidade das soluções do modelo  $\phi^4$ , bem como as das outras teorias que veremos nas próximas subseções.

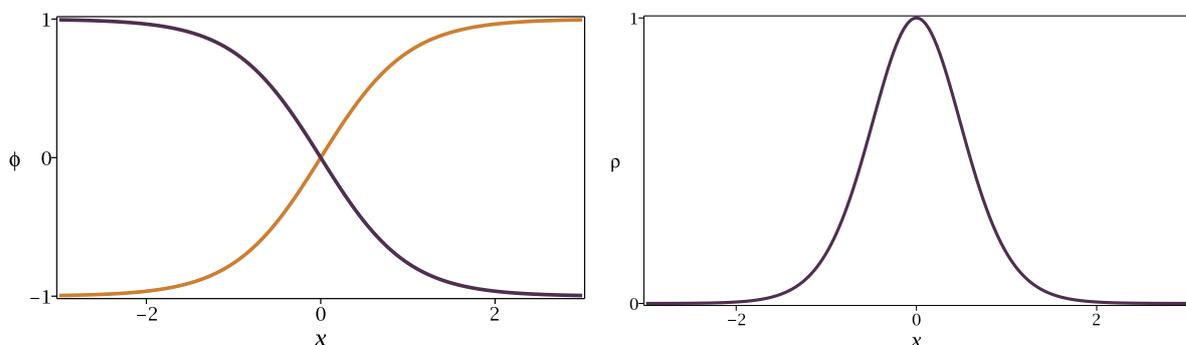
A densidade de energia do kink estático é

$$\rho = \frac{1}{2}(\phi'^2 + W_\phi^2) = \text{sech}^4(x), \quad (2.43)$$

cuja integral (ou, equivalentemente, o uso de (2.29)), dá a energia dessa configuração:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} \text{sech}^4(x) dx = \frac{4}{3}, \quad (2.44)$$

que pode ser identificada com a energia de repouso, ou massa, do kink. A densidade de energia também pode ser vista na Figura 2.3. Ela difere apreciavelmente de zero apenas em uma região finita próxima ao centro do defeito. É a esse fato que nos referimos ao dizer que esta é uma solução localizada.



**Figura 2.3** Gráficos representando o kink (em dourado) e o antikink (em violeta) do modelo  $\phi^4$  (à esquerda) e a densidade de energia das soluções estáticas (à direita).

Podemos obter uma solução dependente do tempo submetendo o kink a um boost de Lorentz, que corresponde à troca para um referencial inercial se movendo a uma velocidade constante  $v$  [37]. Desse procedimento resulta o campo escalar

$$\phi_v(x, t) = \tanh[\gamma(x - vt)], \quad (2.45)$$

onde  $\gamma = 1/(1 - v^2)$ . Pode ser verificado por substituição direta que essa solução resolve as equações de Lagrange do modelo. Introduzindo a variável  $y = \gamma(x - vt)$ , podemos escrever a densidade de energia na forma

$$\begin{aligned} \rho(x, t) &= \left( \frac{d\phi_v}{dt} \right)^2 - \mathcal{L} = \frac{1 + v^2}{2(1 - v^2)} \operatorname{sech}^4 y + \frac{1}{2} (1 - \tanh^2 y)^2 \\ &= \gamma^2 \operatorname{sech}^4 y. \end{aligned} \quad (2.46)$$

A energia obtida pela integração dessa densidade é

$$E = \gamma \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech}^4 y dy = \gamma E_0, \quad (2.47)$$

onde  $E_0$  é a energia do caso estático. De modo semelhante, podemos integrar a componente  $T^{01}$  do quadrimomento para encontrar o momento linear  $P_x = \gamma v E_0$ . Vemos que essa solução corresponde a uma partícula livre relativística com massa de repouso  $E_0$ .

Também são possíveis configurações com múltiplos kinks/antikinks. O estudo de tais soluções é em geral complicado, mas campos escalares reais fornecem um cenário em que alguns desses cálculos podem ser executados com relativa simplicidade, exemplificando de forma elegante tendências que se repetem em defeitos mais sofisticados, como vórtices e monopolos. Seguindo o procedimento utilizado, por exemplo, em [30] e [62], montaremos uma solução aproximada pela superposição de um kink e um antikink localizados, respectivamente, em  $x = \Delta$  e  $x = -\Delta$ , com  $\Delta \gg 1$ . Supondo que os defeitos estão em repouso em  $t = 0$ , podemos tomar

$$\phi(t = 0, x) = \phi_+(x) + \phi_-(x) + 1, \quad (2.48)$$

em que  $\phi_{\pm} = \pm \tanh(x \mp \Delta)$  e o fator aditivo  $+1$  serve para garantir que a solução tenda assintoticamente ao vácuo. A carga topológica desse ansatz é nula, o que significa que a solução pertence à mesma classe de homotopia que o vácuo. De fato, a deformação  $f(t) = (1 - t)(\phi_+(x) + \phi_-(x)) + 1$  mapeia continuamente essa solução em  $\phi_0 = 1$ . Simulações numéricas revelam que, ao menos para velocidades baixas em relação à velocidade da luz, a colisão entre um kink e um antikink resulta na aniquilação do par [63], liberando radiação. Uma tal colisão é, portanto, uma maneira de “remover” um defeito do sistema por meio da aniquilação. Como kink e antikink possuem mesma energia, vemos que o custo energético dessa remoção é, no mínimo, igual à energia do kink. O vínculo de Bogomol’nyi garante que qualquer solução com energia inferior à do antikink estático, não importa o quão complicada seja sua dependência em  $x$  e  $t$ , pertença ao setor  $(-1, -1)$  ou a  $(1, 1)$ , tendo carga topológica nula. A interação de um kink com uma solução desse tipo originaria uma configuração para a qual  $Q = 1 + 0 = 1$ , que ainda teria um defeito.

Identificamos a força que atua no antikink devido à presença do kink com a derivada temporal do momento linear da configuração em um intervalo  $[-\infty, R]$ , tal que  $R \gg \Delta$ :

$$P = - \int_{-\infty}^R dx \dot{\phi} \phi' \implies \dot{P} = - \int_{-\infty}^R (\ddot{\phi} \phi' + \dot{\phi} \phi''), \quad (2.49)$$

em que foi usado  $P = -T_{01} = -\dot{\phi}\phi'$ . Das equações de movimento, vem

$$\ddot{\phi}\dot{\phi} = \phi''\phi' - V_\phi\phi' = \frac{1}{2}\phi'^2 - V'(\phi(x)). \quad (2.50)$$

A substituição de de (2.50) e da relação  $\dot{\phi}\phi' = \frac{1}{2}(\dot{\phi}^2)'$  em (2.49) conduz à igualdade:

$$\dot{P} = \left[ V - \frac{1}{2}(\dot{\phi}^2 + \phi'^2) \right]_{-\infty}^R. \quad (2.51)$$

Como, por hipótese,  $R - \Delta \ll 0$  vemos que  $\varepsilon \equiv \phi_+ + 1 \ll 1$  em  $x = R$ . Como  $\phi_+$  é um kink, essa desigualdade também vale no outro extremo do intervalo, donde

$$V(\phi) \approx V(\phi_-) + \varepsilon \left( \frac{dV}{d\phi} \right)_{\phi=\phi_-}. \quad (2.52)$$

Também vale  $\phi_+ = \text{sech}^2(x - \Delta) \implies (\phi'_+)^2 \approx 0$  nos extremos do intervalo. Assim,  $\phi^2 \approx (\phi'_-)^2 + 2\phi'_-\phi'_+$ , e podemos escrever

$$F = \left\{ \frac{1}{2} \left[ 2V(\phi_-(x)) - \left( \frac{d\phi}{dx} \right)^2 \right] + \varepsilon \left( \frac{dV}{d\phi} \right)_{\phi=\phi_-} - \frac{d\phi_-}{dx} \frac{d\phi_+}{dx} \right\}_{-\infty}^R, \quad (2.53)$$

onde  $F = \dot{P}$  é a força que atua no antikink. Deduz-se do fato de que os defeitos satisfazem (2.21) que o termo entre colchetes é identicamente nulo. Usando a equação de movimento para o campo  $\phi_-$  e notando que  $x \rightarrow -\infty$  as derivadas de  $\phi_\pm$  tendem a zero, podemos escrever:

$$F = \left( \varepsilon \frac{d^2\phi_-}{dx^2} - \frac{d\phi_-}{dx} \frac{d\phi_+}{dx} \right)_{x=R}. \quad (2.54)$$

Como  $R$  está distante dos defeitos, podemos usar as soluções aproximadas  $\phi_\pm \approx -1 + 2e^{2(\pm x - \Delta)}$ , que substituídas em (2.54) conduzem, finalmente, a

$$F = 32e^{-2l}, \quad (2.55)$$

onde  $l = 2\Delta$  é a distância entre os centros dos defeitos.  $F$  é positiva, e portanto produz, no antikink, uma aceleração no sentido positivo do eixo  $x$ , mostrando que a interação é atrativa, e tão mais intensa quanto maior a proximidade entre os defeitos. O potencial de interação que dá origem a essa força é tal que  $F = -dU/dl$ . Colocando  $m_\psi = \sqrt{V''(\phi_\pm(\infty))} = 2$ , podemos escrever esse potencial, que descreve a interação assintótica entre um kink e um antikink, na forma

$$U = 16e^{-m_\psi l}. \quad (2.56)$$

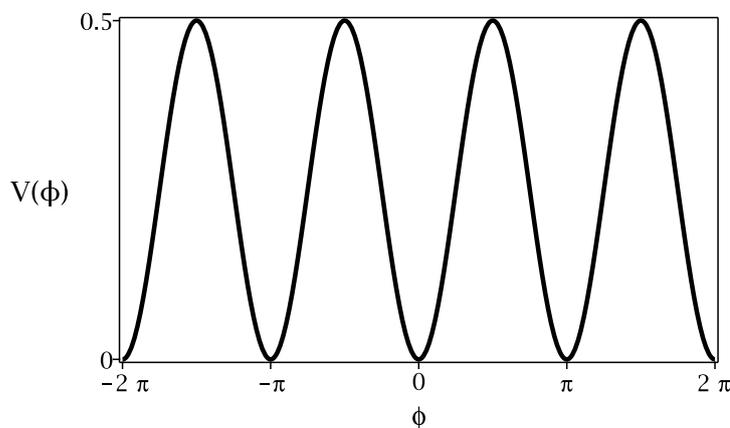
O fator  $e^{-m_\psi l}$  indica que essa interação, que é do tipo Yukawa, é intermediada por um escalar de massa  $m_\psi$ . Essa análise pode ser estendida para um número arbitrário de defeitos, desde que a combinação seja sempre tal que um kink seja seguido por um antikink e vice-versa. Investigações análogas são possíveis para outros modelos de um ou mais campos escalares, bem como para sistemas em que há acoplamento com um campo de gauge, entre outros. Mencionaremos alguns desses resultados nos próximos capítulos, mas o estudo detalhado dessas interações está além do escopo deste trabalho, e a leitores interessados são recomendadas as referências [30, 62–64] e [65], entre outros trabalhos que mencionaremos posteriormente, em conexão com alguns sistemas específicos.

### 2.3.2 Modelo sine-Gordon

Consideremos agora o célebre modelo sine-Gordon, um dos mais conhecidos na literatura de defeitos topológicos. Mencionamos na Introdução um sistema mecânico cuja dinâmica é modelada, no limite contínuo, pela equação de Lagrange desse sistema, a apontamos algumas de suas propriedades. As equações de campo desse modelo foram primeiramente estudadas pelo francês Edmond Bour em um estudo sobre superfícies com curvatura gaussiana negativa constante [66] e redescobertas em 1939, no contexto de física da matéria condensada, como limite contínuo do que hoje se conhece como modelo Frenkel–Kontorova [67]. Por ser esta uma das teorias de campo mais estudadas na literatura, e em parte devido à sua relativa simplicidade e à presença de sólitons entre suas soluções, esse modelo encontra aplicabilidade em uma miríade de contextos, que vão desde biologia molecular [68, 69] até a sismologia [70], além da física da matéria condensada, na qual o mencionado modelo de Frenkel–Kontorova é apenas um dos diversos sistemas modelados pela equação de sine-Gordon. Essa teoria também atraiu a atenção de Skyrme e Perring [71], que conduziram uma investigação incluindo as interações entre sóliton e antisólitons, usadas para modelar um sistema de mésons e bárions interagentes. A teoria é formulada em termos da densidade lagrangiana [72]:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} \sin^2 \phi, \quad (2.57)$$

cujos potencial é também da forma (2.24), com  $W(\phi) = -\cos \phi$ . Essa lagrangiana é invariante não apenas sob transformações de reflexão, mas também sobre deslocamentos do campo por múltiplos inteiros de  $\pi$ .



**Figura 2.4** Potencial do modelo de Sine-Gordon

As equações de campo obtidas de (2.57) são

$$\square \phi = -\sin \phi \cos \phi = -\frac{1}{2} \sin(2\phi). \quad (2.58)$$

A variedade de vácuo desse modelo é  $\mathbf{M} = \{N\pi, N \in \mathbb{Z}\}$ , cuja topologia é não trivial. A estrutura dessa variedade é mais rica do que a do modelo  $\phi^4$ , que só admitia dois mínimos, embora ela seja ainda um conjunto discreto de pontos. A quebra de simetria é novamente responsável por gerar uma massa para as partículas que correspondem a excitações em torno dos mínimos, que vale:

$$m_\psi^2 = \left. \frac{d^2 V(\phi)}{d\phi^2} \right|_{\phi=\pi N} = 1. \quad (2.59)$$

O modelo sine-Gordon é famoso por permitir soluções do tipo sóliton, no sentido mais restrito da palavra: tais defeitos recuperam assintoticamente sua forma após uma colisão com um número arbitrário de defeitos do mesmo tipo. O único efeito perceptível que uma tal colisão deixa sobre o sóliton é uma mudança de fase [54]. As propriedades de espalhamento dessas soluções decorrem do fato de este ser um sistema integrável [73], que apresenta um número infinito de quantidades dinâmicas conservadas.

Para a carga topológica poderíamos usar novamente (2.27), mas observamos que a definição dessa grandeza contém certo grau de arbitrariedade, e somos livres para escolher qualquer quantidade que capture o caráter topológico das configurações assintóticas e se mostre conveniente em determinada situação. Aqui, podemos assegurar que  $Q$  seja novamente um inteiro se definirmos:

$$Q = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\phi}{dx} dx = N \in \mathbb{Z}. \quad (2.60)$$

Note que  $Q$  não especifica completamente a classe de homotopia, pois classes caracterizadas pela mesma carga diferem por uma translação  $N\pi$  no espaço dos campos. O vínculo de Bogomol'nyi nesse sistema tem a forma

$$E \geq \left| - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d \cos \phi}{dx} dx \right| = 2|N|, \quad (2.61)$$

sendo saturado para soluções estáticas que resolvem as equações de primeira ordem

$$\frac{d\phi}{dx} = \pm \sin \phi. \quad (2.62)$$

Como a teoria é invariante sob deslocamentos de comprimento  $N\pi$ , podemos considerar, sem perda de generalidade,  $\phi(-\infty) = 0$ . Com essa condição de contorno, é possível integrar da equação de sinal positivo para deduzir

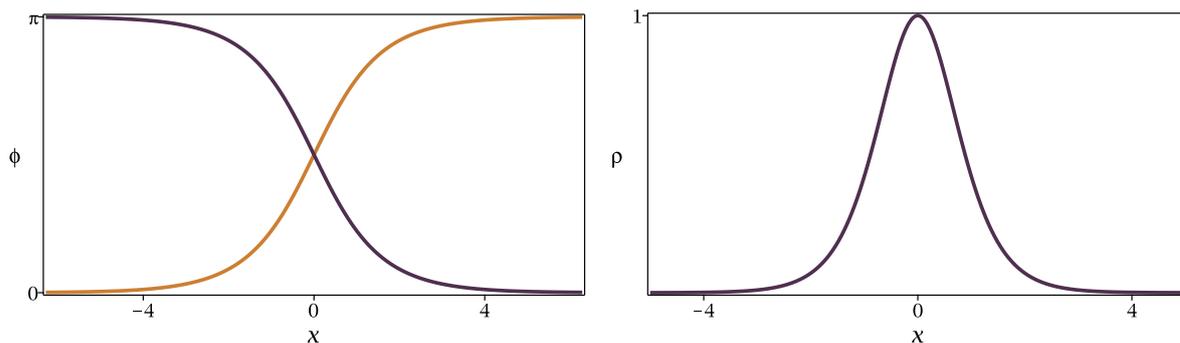
$$\phi(x) = 2 \arctan(e^x), \quad (2.63)$$

que é o kink (ou, nesse caso, sóliton) do modelo. O antisóliton pode ser obtido, assim como no modelo  $\phi^4$ , pela substituição  $x \leftrightarrow -x$ . O perfil dessas soluções está representado na Figura 2.5, em que vemos um comportamento qualitativamente semelhante ao das soluções investigadas na seção anterior. As cargas topológicas do kink e antikink valem 1 e  $-1$  respectivamente e sua energia, calculada via (2.61), vale  $E = 2$ . A densidade de energia do sóliton se escreve

$$\rho(x) = \operatorname{sech}^2(x), \quad (2.64)$$

cujos comportamento qualitativo é semelhante ao que foi visto no modelo anterior. Um gráfico de  $\rho(x)$  pode ser visto na Figura 2.5, ao lado do perfil da solução.

Diferentemente do que ocorre no  $\phi^4$ , a teoria sine-Gordon permite soluções que representam um número arbitrário de kinks, além de combinações entre kinks e antikinks. Uma situação em que estão presentes  $N$  sólitons é representada por uma configuração de carga topológica igual a esse inteiro. Num sistema com múltiplos sólitons, os defeitos são indistinguíveis, mesmo no nível clássico [62]. Essa indistinguilidade não se deve a um princípio básico como a das partículas quânticas, mas sim ao fato de que o objeto fundamental da teoria é o campo  $\phi$ , e não as “partículas”.



**Figura 2.5** Gráficos representando o kink (em dourado) e o antikink (em violeta) do modelo Sine-Gordon (à esquerda) e a densidade de energia das soluções estáticas (à direita).

Seguindo o mesmo procedimento conduzido no estudo da interação assintótica kink-antikink do modelo  $\phi^4$ , podemos calcular a força entre um sóliton e um antisóliton, ou entre duas partículas semelhantes, obtendo novamente uma interação do tipo Yukawa, com  $F \propto e^{-l} = e^{-m_\psi l}$ , sendo o fator de proporcionalidade negativo para partículas semelhantes e positivo para as distintas, tendo mesma magnitude nos dois casos e correspondendo, respectivamente, a uma força repulsiva e uma atrativa [23].

O modelo Sine-Gordon é também especial no fato de que soluções exatas e analíticas foram encontradas para configurações de  $N$  sólitons. Métodos analíticos usados para encontrar essas soluções incluem as transformações de Bäcklund, estudadas originalmente no contexto de equações diferenciais parciais relevantes ao estudo de superfícies pseudoesféricas [74], e o método de espalhamento inverso. Não pausaremos para encontrar ou discutir essas soluções, mas vale a pena mencionar um exemplo [54], dado por

$$\phi(t, x) = 2 \arctan \left( \frac{\sin(vt/\sqrt{1+v^2})}{v \cosh(x/\sqrt{1+v^2})} \right), \quad (2.65)$$

onde  $v$  é um parâmetro real. A substituição de  $\phi(x, t)$  na equação de Sine-Gordon comprova que esse campo é, de fato, uma solução. Essa configuração, denominada *breather*, tem carga topológica nula, e pode ser interpretada como um estado ligado para um par sóliton-antisóliton. Em  $t = 0$ , a solução é simplesmente  $\phi(0, x) = 0$ , mas, em instantes posteriores, presenciamos a criação do par sóliton-antisóliton, sendo essas estruturas produzidas simultaneamente, de modo a conservar a carga topológica. Os defeitos inicialmente se separam, mas a força atrativa que há entre eles faz com que sua velocidade diminua, até que eles parem e invertam o sentido de seu deslocamento, o que resulta em uma colisão. Nesse processo, os defeitos se aniquilam, desaparecendo por um instante, após o qual um novo par sóliton-antisóliton, é criado. Esse processo se repete indefinidamente, com período  $T = 2\pi\sqrt{1+v^{-2}}$ . Se trocarmos  $v$  por um parâmetro imaginário, como  $u \equiv -iv$ , obtemos uma nova solução que também descreve um par sóliton-antisóliton, mas na qual a função seno se torna um seno hiperbólico, e a periodicidade desaparece. Agora, os defeitos são criados em  $t = 0$  e se separam, ainda interagindo por meio de uma força atrativa que, no entanto, não é mais suficiente para inverter o sentido do seu deslocamento. Assintoticamente, os defeitos se separam até que a interação entre eles se torne desprezível, passando a se comportar, então, como duas soluções independentes. Análises detalhadas desses casos foram realizadas em [71] e [75].

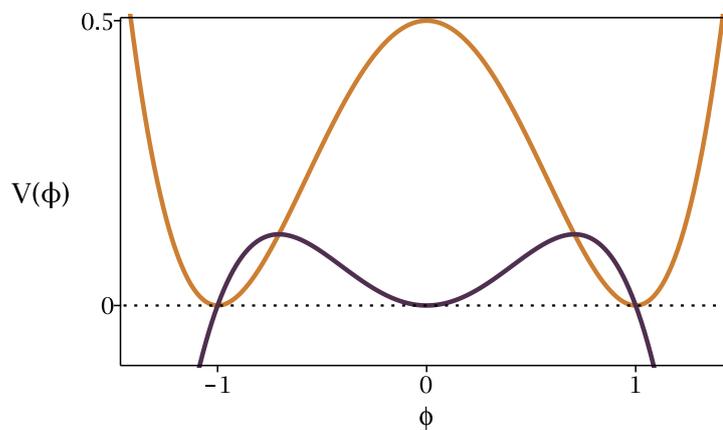
Uma excelente e bastante completa discussão sobre as transformações de Bäcklund, usando geometria diferencial, pode ser encontrada em [76], ao passo que o leitor interessado no método de espalhamento inverso é recomendado a [75].

### 2.3.3 Modelo $\phi^4$ invertido

Conquanto sejam os defeitos topológicos o tema desta dissertação, convém fazermos um rápido desvio para estudar um caso simples de defeito de natureza não topológica, com o objetivo de comparar essa solução aos kinks já estudados. Para esse fim, consideremos a densidade lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial^\mu \phi \partial_\mu \phi - \frac{1}{2} \phi^2 (1 - \phi^2), \quad (2.66)$$

que tem um potencial cujo comportamento lembra uma versão “invertida” do modelo  $\phi^4$ . Defeitos como os que decorrem desse potencial são denominados “lumps”. A análise da derivada primeira  $V_\phi = \phi - 2\phi^3$  revela três pontos críticos, em  $\phi = 0$  e  $\phi = \pm 2^{-1/2}$ , sendo os últimos pontos de máxima e o primeiro um mínimo local. O potencial não possui mínimos absolutos, pois  $V(\phi) \rightarrow -\infty$  quando  $\phi \rightarrow \pm\infty$ . Esse potencial está ilustrado na Figura 2.6, na qual também está representado, para fins de comparação, o potencial do modelo  $\phi^4$ .



**Figura 2.6** Plot simultâneo dos potenciais do modelo  $\phi^4$  (em dourado) e  $\phi^4$  invertido (em violeta), como função do campo escalar. A linha pontilhada representa a reta  $V(\phi) = 0$

Deduzimos dessa Lagrangiana as equações de movimento:

$$\square \phi + 2\phi(\phi^2 - 1) = 0 \quad (2.67)$$

que conduzem, no caso estático, a

$$\frac{d\phi}{dx} = \pm \phi \sqrt{1 - \phi^2}, \quad (2.68)$$

que observamos só ter soluções reais se  $|\phi| \leq 1$  para todo  $x$ , que corresponde ao subconjunto do domínio de  $V(\phi)$  cuja imagem é não negativa. A derivada de  $\phi(x)$  muda de sinal em um  $x_0$  tal que  $\phi(x_0) = 1$ , para o qual a invariância translacional nos permite a escolha  $x_0 = 0$ . A integração de (2.68) com essa condição, observando sempre os intervalos em que

$$f(\phi) = \int_0^\phi \frac{d\phi}{\phi \sqrt{1 - \phi^2}}$$

é invertível, dá as soluções

$$\phi(x) = \pm \operatorname{sech}(x), \quad (2.69)$$

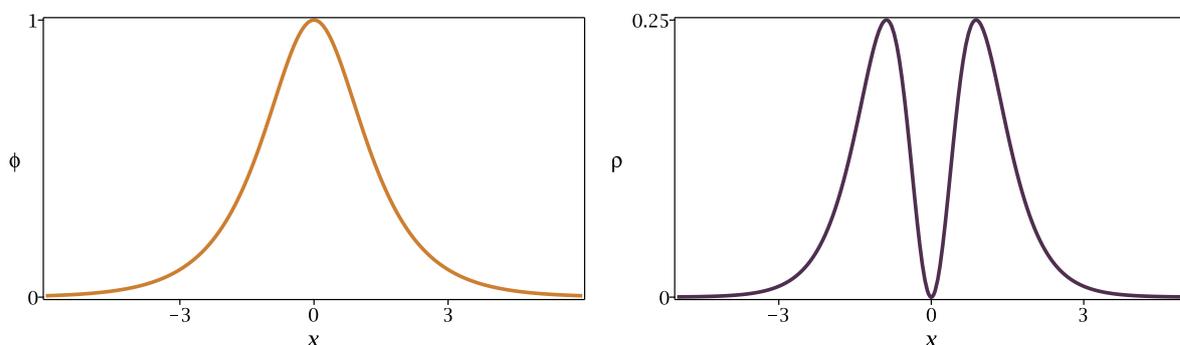
em que convém enfatizar que os sinais  $\pm$  **não** indicam a presença de um “antilump”. Ao contrário do que acontecia nos modelos anteriores, não é possível relacionar as soluções pela operação de reflexão, já que  $\text{sech}(x)$  é uma função par. A densidade de energia do lump se escreve:

$$\rho(x) = \text{sech}^2(x) \tanh^2(x), \quad (2.70)$$

donde

$$E = 2 \int_0^1 d[\tanh(x)] \tanh^2(x) = \frac{2}{3}. \quad (2.71)$$

O perfil dessa solução e sua densidade de energia estão representados na Figura 2.7, em que observamos um comportamento bastante diferente dos kinks vistos anteriormente. Além valores assintóticos iguais e a presença de um máximo, também é importante destacar o fato de que essa solução jamais cruza o eixo  $x$ . A densidade de energia é também uma estrutura localizada, mas ela possui, neste modelo, um mínimo na origem e dois máximos, localizados em  $x = \pm \arctan(\sqrt{2}/2)$ .



**Figura 2.7** Perfil da solução tipo lump do modelo  $\phi^4$  invertido (à esquerda), e a correspondente densidade de energia (à direita).

Podemos compreender intuitivamente o fato de o lump ser homotopicamente equivalente ao vácuo  $\phi = 0$  se imaginarmos seu perfil como uma corda, que podemos facilmente esticar para fazer com que a estrutura localizada em seu centro desapareça gradualmente, até que sobre apenas a linha reta que corresponde à solução trivial. Uma tal transformação pode ser descrita pela função contínua  $f(t) = (1-t) \text{sech}(x)$ , para a qual  $f(0) = \text{sech}(x)$  e  $f(1) = 0$ . A existência dessa deformação sinaliza a instabilidade da solução. Se tentarmos imaginar a execução do mesmo procedimento em um dos kinks dos modelos anteriores, a impossibilidade ficará clara.

## 2.4 Estabilidade linear

Para além da existência de soluções das equações de movimento, há também a questão de sua estabilidade. Estamos interessados no efeito que a introdução de uma pequena perturbação dependente do tempo tem sobre o defeito. Uma configuração será estável se uma tal perturbação não for suficiente para fazer com que ela decaia em um outro estado. Como veremos, a topologia da variedade de vácuo tem profundo impacto sobre a estabilidade de defeitos, uma vez que ela vincula os estados para os quais a solução pode decair. Em particular, defeitos topológicos são, por definição, homotopicamente distintos das soluções de vácuo, não podendo, então, decair em configurações desse tipo. O decaimento de tais soluções em outras que pertençam à mesma

classe de homotopia é, no entanto, possível em alguns casos, o que nos obriga a refinar a nossa análise. Para nossos propósitos, será suficiente a investigação da estabilidade clássica (ou linear) das soluções. É necessário que uma configuração seja estável nesse âmbito para que também o seja no regime quântico.

Consideremos um sistema de  $N$  campos escalares reais em  $D$  dimensões espaciais, com lagrangiana da forma

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi_a \partial^\mu \varphi_a - V(\varphi_1, \dots, \varphi_N), \quad (2.72)$$

em que o índice  $a$ , sobre o qual uma soma está implícita quando da sua repetição, enumera os campos. As equações de Lagrange que seguem de  $\mathcal{L}$  são

$$\square \varphi_a + V_{\varphi_a} = 0 \quad (2.73)$$

Consideremos uma perturbação  $\eta = (\eta_1(t, \mathbf{x}), \dots, \eta_N(t, \mathbf{x}))$  sobre uma solução  $(\phi_1, \dots, \phi_N)$  das equações de movimento, tal que  $\varphi_a = \phi_a + \eta_a$  [17]. Expandindo a lagrangiana em uma série de potências centrada na solução não perturbada, podemos escrever, até a segunda ordem em  $\eta$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2} (\partial_\mu \eta_a \partial^\mu \eta_a + \partial_\mu \varphi_a \partial^\mu \varphi_a + 2\partial_\mu \eta_a \partial^\mu \varphi_a) - [V + V_{\varphi_a} \eta_a + U_{ab} \eta_a \eta_b] \\ &\equiv \mathcal{L}_0 + \frac{1}{2} (\partial_\mu \eta_a \partial^\mu \eta_a + 2\partial_\mu \eta_a \partial^\mu \varphi_a) - [V_{\varphi_a} \eta_a + U_{ab} \eta_a \eta_b] \end{aligned} \quad (2.74)$$

em que  $\mathcal{L}_0$  agrupa os termos que dependem apenas dos  $\phi_a$  e

$$U_{ab} \equiv \left. \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi_a \partial \varphi_b} \right|_{\varphi_j = \phi_j} \quad (2.75)$$

é a matriz hessiana do potencial. Após uma integração por partes, a ação correspondente a essa lagrangiana toma a forma

$$S = \int d\Omega \left[ \mathcal{L}_0 + \frac{1}{2} \partial_\mu \eta_a \partial^\mu \eta_a + U_{ab}(\varphi_1, \dots, \varphi_N) \eta_a \eta_b - (\square \varphi_a + V_{\varphi_a}) \eta_a \right], \quad (2.76)$$

onde  $d\Omega = dt d^D x$ . Como a perturbação é em princípio arbitrária, devemos considerar independentes as variações  $\delta \eta_a$  e  $\delta \varphi_a$  ao extremizar a ação. Dado que  $\phi_a$  resolve, por hipótese, as equações de movimento do sistema, está claro que a integral  $\mathcal{L}_0$  não contribui para a variação da ação. Pelo mesmo motivo, o termo linear em  $\eta_a$  se anula e deduzimos, da condição  $\delta S = 0$ , o sistema de equações que governa a evolução da perturbação:

$$(\square + U_{ab}) \eta_a = 0. \quad (2.77)$$

Estaremos interessados na maior parte deste trabalho em soluções independentes do tempo, para as quais vale  $\varphi_a = \varphi_a(\mathbf{x})$ . Nessas condições, (2.77) se escreve:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) \eta_a + U_{ab}(\mathbf{x}) \eta_a = 0, \quad (2.78)$$

onde  $U_{ab}$  é uma função apenas da posição e  $\nabla = (\partial_1, \dots, \partial_D)$ . O método de separação de variáveis nos fornece uma base completa de funções, em termos das quais  $\eta_a$  se escreve [17]:

$$\eta_a = \sum_n \eta_a^n(\mathbf{x}) \cos(\omega_n t), \quad (2.79)$$

em que  $\eta_a^n$  e  $\omega_n$  estão relacionados pela equação de autovalor:

$$H_{ab}\eta_a^n = \omega_n^2 \eta_b^n, \quad (2.80)$$

em que

$$H_{ab} \equiv -\delta_{ab}\nabla^2 + U_{ab}, \quad (2.81)$$

que é formalmente equivalente à equação de Schrödinger independente do tempo de uma partícula em  $D$  dimensões submetida a um potencial  $U_{ab}(\mathbf{x})$ . Vemos portanto que soluções estáveis devem gerar um problema quântico em que o hamiltoniano seja um operador não-negativo. Se essa condição for violada, então  $\exists n \in \mathbb{N}$  tal que  $\omega_n$  é imaginário, o que implica  $\cos(\omega_n t) = \cosh(|\omega_n|t)$ , que aumenta indefinidamente com o tempo.

Essa conexão com a mecânica quântica pode ser explorada para simplificar o estudo da estabilidade linear em sistemas de campos escalares, uma vez que tais problemas já foram resolvidos para uma vasta gama de potenciais. Voltemos agora aos problemas unidimensionais investigados na seção anterior. A “hessiana” do problema é agora uma simples função, o potencial de estabilidade  $U(x)$ . Para modelos em que  $V(\phi) \geq 0$ , como é o caso das teorias  $\phi^4$  e Sine-Gordon, as equações (2.24) e (2.25) permitem que o “hamiltoniano” seja escrito na forma

$$H = -\frac{d^2}{dx^2} + W_\phi W_{\phi\phi} + W_{\phi\phi}^2, \quad (2.82)$$

o que motiva a definição dos operadores

$$S = -\frac{d}{dx} + W_{\phi\phi} \quad (2.83)$$

$$S^\dagger = \frac{d}{dx} + W_{\phi\phi}, \quad (2.84)$$

em que foi usado o fato de que o operador  $d/dx$  é anti-hermitiano. Em termos desses operadores, o hamiltoniano se escreve  $H = S^\dagger S$ , que é uma forma quadrática e só possui, portanto, autovalores não negativos [77]. Se explica assim a estabilidade dos kinks estudados. Essa propriedade de  $H$  tem uma interpretação em supersimetria, em que  $H$  pode ser visto como o setor bosônico de uma teoria supersimétrica [78]. Nesse contexto, é possível definir o operador  $H_f = SS^\dagger$ , que difere de  $H$  pela presença de um sinal negativo que antecede o termo  $W_\phi W_{\phi\phi}$  e pode ser interpretado como o parceiro supersimétrico de  $H$ .

Uma observação importante é a de que um sistema unidimensional sempre possui um modo de frequência nula, chamado *modo de translação*, proporcional à derivada da solução. Para provar que essa função é um autoestado de  $H$ , derivamos a equação de movimento do caso estático e usamos a regra da cadeia para deduzir

$$-\frac{d^3\phi}{dx^3} + \frac{dV_\phi}{dx} = \left( -\frac{d^2}{dx^2} + V_{\phi\phi}(\phi(x)) \right) \phi' = 0, \quad (2.85)$$

que tem exatamente a forma da equação de autovalor (2.80) para um sistema unidimensional, com  $\omega_n^2 = 0$ . Para relacionar essa função ao modo de translação do sistema, usaremos o fato de que a invariância translacional da teoria garante que, se  $\phi(x)$  é uma solução,  $\phi(x+x_0)$  também o é, e façamos a expansão:  $\phi(x+x_0) = \phi(x) + x_0\phi'(x)$ , válida até a primeira ordem em  $x_0$ . Essa é uma expansão da forma  $\phi = \phi + \eta$ , e, por (2.85),  $\eta = x_0\phi'(x)$  satisfaz (2.80) com autovalor nulo. Mais geralmente, qualquer  $\delta\phi$  tal que a teoria seja invariante sob a transformação  $\phi \mapsto \phi + \delta\phi$  origina um modo zero [79] o que, em particular, implica que em  $D$  dimensões

especiais existem  $D$  modos de translação. A existência desses modos em nada depende da topologia da solução ou de sua estabilidade: é uma propriedade geral de teorias com lagrangiana (2.12). Entretanto, o já discutido requerimento de que  $H$  não possua autovalores negativos para soluções estáveis implica na necessidade de que o modo zero seja o estado fundamental do problema quântico correspondente. Sabemos da mecânica quântica unidimensional que esse estado é não-degenerado, e é o único que não possui nós [80] (isto é, ele não muda de sinal). Dos nossos exemplos vemos que kinks e antikinks são funções monótonas (o que é consequência do fato de  $W_\phi$  não possuir zeros), de modo que suas derivadas nunca mudam de sinal. Assim, podemos concluir que o modo zero é o de menor energia, e o somatório em (2.79) só contém termos periódicos. O lump do modelo  $\phi^4$  invertido é diferente nesse sentido, pois esse defeito possui um máximo em  $x_0 = 0$ , onde sua derivada muda de sinal. Essa é uma propriedade geral dos defeitos tipo lump: como eles não são constantes e seus valores assintóticos em  $\pm\infty$  são iguais, deve haver um ponto de máximo entre os extremos. Vemos por esse argumento simples que os defeitos tipo lump são instáveis.

Investiguemos com maior detalhe a estabilidade dos kinks dos modelos  $\phi^4$  e S.G, cujos potenciais de estabilidade nos conduzem, como aponta a referência [79], respectivamente aos casos  $L = 2$  e  $L = 1$  de equações da forma:

$$\left[ -\frac{d^2}{dy^2} + L^2 - \frac{L(L+1)}{\cosh^2 y} \right] \eta_n(y) = \omega_n^2 \eta_n(y), \quad (2.86)$$

que possui os estados ligados  $\omega_n^2 = L^2 + l^2$ , com  $l$  tomando valores inteiros entre 1 e  $L - 1$ . Assim, o hamiltoniano quântico relacionado à teoria  $\phi^4$  possui como porção discreta de seu espectro o conjunto  $\{0, 3\}$ . O potencial de estabilidade  $U(x) = 4 - 6 \operatorname{sech}^2(x)$  desse problema pertence à classe de potenciais do tipo Pöschl-Teller modificados, sobre os quais uma excelente discussão, incluindo a dedução das autofunções, pode ser encontrada na referência [81]. Já o modelo S.G possui apenas um estado ligado, que é justamente o modo de translação. O potencial de estabilidade é, nesse caso,  $U(x) = 1 - 2 \operatorname{sech}^2(x)$ . O espectro contínuo se inicia em  $\omega_n^2 = 2$  para o modelo  $\phi^4$  e  $\omega_n^2 = 1$  para o S.G, que coincide, em ambos os casos, com a massa das partículas correspondentes a flutuações em torno do vácuo.

Por outro lado, o lump do modelo  $\phi^4$  invertido tem estabilidade governada pelo potencial  $U(x) = 1 - 6 \operatorname{sech}^2(x)$ , que é simplesmente o potencial de estabilidade do modelo  $\phi^4$  deslocado três unidades para baixo. Essa teoria possui, então, um estado com autovalor  $\omega_n^2 = -3$ , mostrando que essa solução é instável.

## 2.5 Modelos com dois campos escalares

Tendo estudado modelos unidimensionais com um campo escalar real, avançamos ao próximo nível de complexidade: o de modelos com dois campos reais acoplados, ainda em (1,1) dimensões. As soluções agora serão pares da forma  $(\phi, \chi)$ , que terão muitas propriedades em comum com os kinks estudados anteriormente, mas também algumas completamente novas. O estudo desses sistemas é mais complexo porque as soluções agora descrevem órbitas no espaço de campos, o que dificulta a integração das equações de movimento do caso estático. As condições de contorno agora descrevem mapas que levam o “infinito” em pares  $(v_\phi, v_\chi)$

Investigaremos primeiramente modelos standard, governados por lagrangianas da forma

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + \frac{1}{2} \partial_\mu \chi \partial^\mu \chi - V(\phi, \chi), \quad (2.87)$$

que conduzem às equações de movimento

$$\square\phi + V_\phi(\phi, \chi) = 0, \quad (2.88)$$

$$\square\chi + V_\chi(\phi, \chi) = 0, \quad (2.89)$$

ou, no caso estático:

$$\phi''(x) = V_\phi(\phi, \chi), \quad (2.90)$$

$$\chi''(x) = V_\chi(\phi, \chi). \quad (2.91)$$

O tensor de energia-momento em modelos desse tipo se escreve

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu\phi\partial_\nu\phi + \partial_\mu\chi\partial_\nu\chi - \eta_{\mu\nu}\mathcal{L}. \quad (2.92)$$

### 2.5.1 Método de Bogomol'nyi

O método de minimização do funcional de energia descrito na seção 2.3 pode ser generalizado para modelos com dois campos escalares. Para investigar essa possibilidade, consideremos a densidade de energia.

$$\rho = T_{00} = \left(\frac{d\phi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\chi}{dx}\right)^2 + V(\phi, \chi), \quad (2.93)$$

que pode ser escrita, com a introdução de uma função auxiliar  $W(\phi, \chi)$  e completamento de quadrados, na forma

$$\rho = \frac{1}{2} \left[ \left(\frac{d\phi}{dx} \mp W_\phi\right)^2 + \left(\frac{d\chi}{dx} \mp W_\chi\right)^2 \pm 2 \left(\frac{\partial W}{\partial\phi} \frac{d\phi}{dx} + \frac{\partial W}{\partial\chi} \frac{d\chi}{dx}\right) - (W_\phi^2 + W_\chi^2) \right] + V(\phi, \chi). \quad (2.94)$$

Vemos que, quando o potencial tem a forma

$$V(\phi, \chi) = \frac{1}{2}(W_\phi^2 + W_\chi^2), \quad (2.95)$$

a energia do modelo satisfaz

$$E = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \left(\frac{d\phi}{dx} \mp W_\phi\right)^2 + \left(\frac{d\chi}{dx} \mp W_\chi\right)^2 \right\} dx + E_B, \quad (2.96)$$

em que  $E_B$  é a energia de Bogomol'nyi, dada por

$$E_B = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dW}{dx} dx = \Delta W \equiv |W(\phi(\infty), \chi(\infty)) - W(\phi(-\infty), \chi(-\infty))|. \quad (2.97)$$

Como a integral em (2.96) tem integrando não negativo, a energia satisfaz a desigualdade de Bogomol'nyi  $E \geq E_B$ , com igualdade sendo alcançada se, e somente se, os campos satisfazem o par de equações BPS:

$$\frac{d\phi}{dx} = \pm W_\phi(\phi, \chi), \quad (2.98)$$

$$\frac{d\chi}{dx} = \pm W_\chi(\phi, \chi). \quad (2.99)$$

Ao contrário do que ocorre para um campo escalar real, não podemos deduzir as equações de primeira ordem a partir das equações de Lagrange do sistema e condições de contorno. Para checar que soluções BPS resolvem as equações de segunda ordem, vamos derivar a equação com sinal positivo em (2.98) para deduzir

$$\begin{aligned} \frac{d^2\phi}{dx^2} &= W_{\phi\phi} \frac{d\phi}{dx} + W_{\phi\chi} \frac{d\chi}{dx} \\ &= W_{\phi\phi} W_\phi + W_{\chi\phi} W_\chi = V_\phi, \end{aligned} \quad (2.100)$$

em que, no último passo, uso foi feito da simetria das derivadas  $W_{\phi\chi} = W_{\chi\phi}$  e das equações de primeira ordem. O mesmo procedimento pode ser usado para estender a verificação às outras equações BPS. Note-se que é necessário que os sinais “combinem”, isto é, não podemos usar a equação com sinal positivo para  $\phi$  e a de sinal negativo para  $\chi$ , por exemplo. Setores topológicos tais que  $\Delta W \neq 0$  são denominados *setores BPS*. A existência de um vínculo de Bogomol’nyi não exclui a presença de soluções não BPS um setor topológico, mesmo no caso estático. Entretanto, tais soluções não minimizam a energia.

Multiplicando (2.98) por  $(d\chi/dx)^{-1}$  e fazendo uso da regra da cadeia e de (2.99), deduzimos:

$$W_\phi d\chi - W_\chi d\phi = 0, \quad (2.101)$$

cujas soluções dá a órbita descrita pelo par  $(\phi, \chi)$ . Quando  $W(\phi, \chi)$  é uma função harmônica (isto é, resolve a equação de Laplace no espaço dos campos), podemos usar o fato de que, em um disco aberto, tais funções correspondem sempre à parte real de uma função analítica complexa [82] para resolver essa equação em termos gerais [29]. De fato, essa identificação permite a introdução de uma função analítica  $f(\phi, \chi) = W(\phi, \chi) + iY(\phi, \chi)$ , para a qual devem valer as equações de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial Y}{\partial \phi} = \frac{\partial W}{\partial \chi}, \quad -\frac{\partial Y}{\partial \chi} = \frac{\partial W}{\partial \phi}, \quad (2.102)$$

das quais inferimos que uma órbita da forma  $Y(\phi, \chi) = 0$  resolve (2.101), uma vez que a inserção de (2.102) em  $dY = 0$  dá exatamente a igualdade procurada. O caso em que  $W(\phi, \chi)$  é harmônica é de especial interesse pelo fato, provado na referência [83], de que todas as soluções das equações de movimento são BPS nesse caso.

Quando o superpotencial não resolve a equação de Laplace, não existe um método geralmente efetivo para solucionar (2.101). Essa dificuldade pode ser resolvida, em alguns casos, por meio da introdução de um fator integrante  $I(\phi, \chi)$ , tal que exista  $Z(\phi, \chi)$  que satisfaça

$$\frac{\partial Z}{\partial \phi} = I(\chi, \phi) \frac{\partial W}{\partial \chi}, \quad -\frac{\partial Z}{\partial \chi} = I(\chi, \phi) \frac{\partial W}{\partial \phi}, \quad (2.103)$$

de modo que a órbita  $Z(\phi, \chi) = 0$  resolva (2.101). Não há um procedimento geral que possa ser utilizado para encontrar fatores integrantes para um superpotencial arbitrário, o que faz com que essa ferramenta, embora muito poderosa, tenha aplicabilidade limitada. Essa dificuldade

levou à introdução de um método de busca sistemática por órbitas, desenvolvido originalmente para as equações de segunda ordem em [84], e modificado para a investigação de equações BPS em [85]. Na próxima seção apresentaremos um sistema para o qual um fator integrante foi encontrado.

Assim como acontecia para modelos de um campo escalar real, o fato de que soluções BPS minimizam o funcional de energia do sistema sinaliza sua estabilidade. O estudo da estabilidade linear desses defeitos é feito por meio das equações (2.80). O operador Hamiltoniano pode, nesse caso, ser fatorado na forma

$$H_{ab} = S_{ac}^\dagger S_{cb}, \quad (2.104)$$

em que  $a, b \in 1, 2$  enumeram os campos  $\phi$  e  $\chi$ , e os operadores  $S$  e  $S^\dagger$  se escrevem [17]

$$S_{ab} = -\delta_{ab} \frac{d}{dx} + \frac{\partial^2 W}{\partial \phi_a \partial \phi_b} \quad (2.105)$$

$$S_{ab}^\dagger = \delta_{ab} \frac{d}{dx} + \frac{\partial^2 W}{\partial \phi_a \partial \phi_b}, \quad (2.106)$$

que é novamente uma forma quadrática (que também pode ser associada ao setor bosônico de uma teoria supersimétrica), cujos autovalores não podem ser negativos. Concluimos, pelo mesmo argumento usado anteriormente, que essas soluções são estáveis sob pequenas perturbações dos campos.

### 2.5.2 Modelo BNRT

Para exemplificar o formalismo desenvolvido para sistemas de dois campos, usaremos um modelo bastante bem sucedido desenvolvido por nosso grupo de pesquisa em 1995 [86], e cujo estudo foi aprofundado em outros trabalhos, como [87], e utilizado também por outros autores [88–90]. Esse modelo é conhecido, em muitas aplicações, como modelo BNRT (Bazeia-Nascimento-Ribeiro-Toledo) [90], e é atraente por uma série de motivos, que incluem a presença de setores BPS nos quais soluções analíticas podem ser encontradas e de um fator integrante, que pode ser usado para resolver as equações de primeira ordem do sistema. O potencial do modelo pode ser derivado do superpotencial  $W(\phi, \chi) = \phi - \phi^3/3 - r\chi^2\phi$ , com  $r > 0$ , que leva à lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + \frac{1}{2} \partial_\mu \chi \partial^\mu \chi - \left[ \frac{1}{2} (1 - \phi^2 - r\chi^2)^2 + 2(r\chi\phi)^2 \right], \quad (2.107)$$

que é invariante sob transformações  $Z_2$  em cada um dos campos, o que significa que  $\mathcal{L}$  tem grupo de simetria  $Z_2 \times Z_2$ . A variedade de vácuo é o conjunto  $\{(\pm 1, 0), (0, \pm 1/\sqrt{r})\}$  de pares  $(\phi, \chi)$ , de cuja análise deduzimos a existência de seis setores topológicos distintos, cinco dos quais são BPS e um (o setor que conecta os mínimos  $(0, -1/\sqrt{r})$  e  $(0, 1/\sqrt{r})$ ) não é, visto que  $W$  tende ao mesmo valor  $W = 0$  em seus extremos. A energia de Bogomol'nyi vale  $4/3$  no setor  $\{(-1, 0), (1, 0)\}$  e  $2/3$  em todos os outros setores BPS. As equações de Lagrange para esse modelo são

$$\frac{d^2 \phi}{dx^2} = 2\phi [r\chi^2(2r+1) + \phi^2 - 1] \quad (2.108)$$

$$\frac{d^2 \chi}{dx^2} = 2\chi [r\phi^2(2r+1) + (r\chi)^2 - r], \quad (2.109)$$

e as equações de primeira ordem ficam

$$\frac{d\phi}{dx} = \pm(1 - \phi^2 - r\chi^2), \quad (2.110)$$

$$\frac{d\chi}{dx} = \mp 2r\chi\phi, \quad (2.111)$$

que podem ser resolvidas com o auxílio de um fator integrante. Antes de usar essa técnica, vamos investigar as órbitas mais simples possíveis, que correspondem a linhas retas, nas quais um dos campos é identicamente nulo. Notamos que, quando  $\chi$  vale zero, (2.110) se reduz à equação BPS do modelo  $\phi^4$ , cujas soluções topológicas já foram investigadas. A órbita resultante é um segmento de reta definido no setor topológico  $\{(-1, 0), (1, 0)\}$ . É claro que as soluções nesse caso são simplesmente os pares  $(\pm \tanh(x), 0)$  e a energia vale  $E = 4/3$ . Podemos analogamente investigar a reta  $\phi = 0$ , mas vemos que a substituição dessa órbita nas equações BPS dá simplesmente o par  $(0, \pm 1/\sqrt{r})$ . Isso se deve ao fato e que a energia mínima nesse setor é zero, e só pode ser obtida quando a solução é trivial. Entretanto, essa órbita pode ser usada diretamente nas equações de Lagrange, nos levando à e.d.o de primeira ordem

$$\frac{d^2\chi}{dx^2} = 2r\chi(r\chi^2 - 1), \quad (2.112)$$

que apresenta as soluções

$$\chi(x) = \frac{\pm 1}{\sqrt{r}} \tanh(\sqrt{r}x), \quad (2.113)$$

as quais, combinadas a  $\phi = 0$ , correspondem a soluções não BPS de energia  $E = 4/(3\sqrt{r})$ . De modo geral, podemos usar o fator integrante  $I = \chi^{-\frac{(r+1)}{r}}$  para deduzir a equação de órbita:

$$\frac{r\chi^2}{2r-1} + \alpha\chi^{\frac{1}{r}} - \phi^2 + 1 = 0, \quad (2.114)$$

onde  $\alpha$  é uma constante de integração. Com essa órbita, podemos encontrar as soluções em todos os setores BPS da teoria. Um estudo detalhado acerca das equações BPS incluindo diversas escolhas de  $r$ , no qual os autores encontram soluções gerais para certos casos, pode ser visto em [90]. Note-se que cada escolha de  $r$  equivale a um modelo distinto, que pode suportar diferentes tipos de órbitas. Analisemos algumas possibilidades. Um caso interessante emerge quando tomamos  $\alpha = 0$  em (2.114), que conduz à órbita

$$\phi^2 + \frac{r\chi^2}{1-2r} = 1, \quad (2.115)$$

que é, para  $r \in (0, 1/2)$ , uma elipse, que podemos usar para encontrar soluções que conectam os mínimos  $(\pm 1, 0)$ . A elipse se achata à medida que  $r$  se aproxima de  $1/2$ , e no limite  $r \rightarrow 1/2$  a condição de que a órbita fique bem definida exige  $\chi = 0$ , nos levando uma vez mais ao segmento de reta já discutido. Substituindo  $r\chi^2 = (1-2r)(1-\phi^2)$  em (2.110), deduzimos

$$\frac{d\phi}{dx} = 2r(1-\phi^2), \quad (2.116)$$

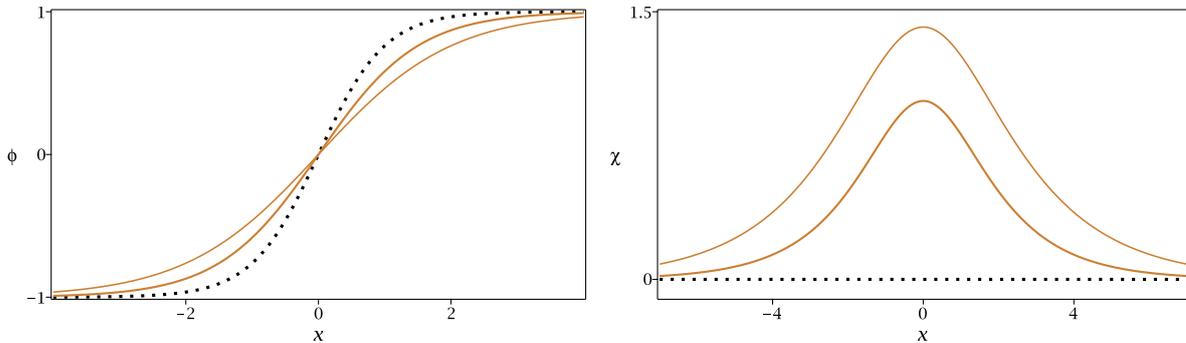
que tem as soluções tipo kink

$$\phi(x) = \pm \tanh(2rx), \quad (2.117)$$

cuja substituição em (2.115) implica

$$\chi(x) = \pm \sqrt{\frac{1-2r}{r}} \operatorname{sech}(2rx). \quad (2.118)$$

Esses pares de soluções BPS têm também energia  $E = 4/3$ . Os perfis dessas soluções estão representados na Figura 2.8.



**Figura 2.8** Soluções tipo kink para as órbitas elípticas, com  $\phi(x)$  representado à esquerda e  $\chi(x)$  à direita. A espessura das linhas aumenta com  $r$ , que assume os valores  $r = 1/4, r = 1/3$  e  $r = 1/2$ , estando os campos correspondentes a essa última escolha de  $r$  pontilhados em preto.

No caso em que  $r = 1/4$ , a equação da órbita se escreve

$$\phi^2 = \alpha \chi^4 - \frac{1}{2} \chi^2 + 1, \quad (2.119)$$

de onde a escolha  $\alpha = 1/16$ , que transforma o lado direito no quadrado perfeito  $(\chi^2/4 - 1)^2$ , se sugere, resultando nas órbitas:

$$\chi^2 = 4(1 \pm \phi), \quad (2.120)$$

com o uso da qual encontramos as equações de primeira ordem para  $\phi(x)$

$$\frac{d\phi}{dx} = \pm \phi(1 - \phi), \quad (2.121)$$

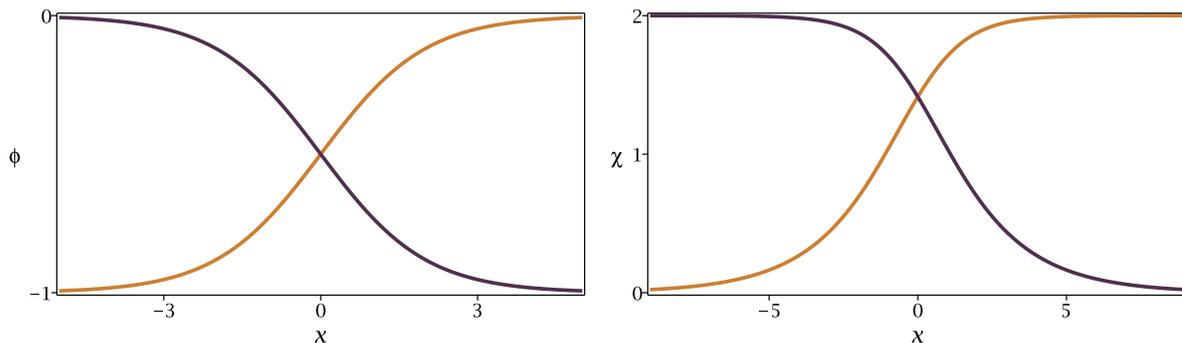
que podemos integrar (usando, por exemplo, a substituição  $\xi = 2\phi - 1$ ) para deduzir

$$\phi_{\{\pm\pm\}} = \pm \frac{1}{2} \left[ 1 \pm \tanh\left(\frac{x}{2}\right) \right], \quad (2.122)$$

que tendem, nos extremos, a  $\pm 1$  e 0 ou vice-versa, a depender das combinações dos sinais. Da substituição desses resultados em (2.120), vem

$$\chi_{\{\pm\pm\}} = \pm \sqrt{2 \left( 1 \pm \tanh\left(\frac{x}{2}\right) \right)}, \quad (2.123)$$

cujos valores assintóticos são  $\pm 2$  e 0, ou vice-versa. Devemos tomar nas igualdades acima os sinais apropriados para que o par  $(\phi, \chi)$  pertença a um dado setor topológico. A solução  $(\phi_{\{-\}}, \chi_{\{++\}})$ , por exemplo, constitui um kink no setor  $\{(-1, 0), (0, 2)\}$ , enquanto  $(\phi_{\{-\}}, \chi_{\{+-\}})$  é o antikink do mesmo setor. Essas soluções, de energia  $E = 2/3$ , têm seu perfil ilustrado na Figura 2.9.



**Figura 2.9** Soluções  $(\phi_{\{-\}}, \chi_{\{++\}})$  (em dourado) e  $(\phi_{\{-+\}}, \chi_{\{+-\}})$  (em violeta), válidas para  $r = 1/4$  no setor topológico  $\{(-1, 0), (0, 2)\}$ . Aqui, vemos  $\phi$  nos gráficos da esquerda e  $\chi$  nos da direita.

### 2.5.3 Multikinks

Consideremos agora uma classe de teorias de dois campos escalares com ação modificada. Os modelos que estudaremos nesta subseção não são descritos por uma lagrangiana do tipo standard, mas sim por uma da forma

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}f(\chi)\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi + \frac{1}{2}\partial_\mu\chi\partial^\mu\chi - V(\phi, \chi), \quad (2.124)$$

em que  $f(\chi) \geq 0$  é uma função real de  $\chi$ . Esses modelos foram tema de um trabalho concluído durante o período de mestrado e já submetido para publicação [91], em que investigamos alguns modelos nos quais o campo  $\chi$  modifica o comportamento de  $\phi$  em uma certa região do espaço, de modo análogo a um modelo de um campo sujeito a um vínculo geométrico. Motivações teóricas e experimentais para a construção desses modelos incluem [92], em que um vínculo geométrico na forma de uma constrição, ou estreitamento, é usado para controlar o tipo e as dimensões de paredes de domínio em um sistema magnético, e a referência [93], publicada na revista Science, em que constrições semelhantes são usadas para gerar e controlar defeitos topológicos conhecidos como bolhas de skyrmions. Investigaremos o caso estático, em que as equações de movimento têm a forma

$$\frac{d}{dx} \left[ f(\chi) \frac{d\phi}{dx} \right] = V_\phi(\phi, \chi) \quad (2.125)$$

$$\frac{d^2\chi}{dx^2} - \frac{1}{2} \frac{df(\chi)}{d\chi} \left( \frac{d\phi}{dx} \right)^2 = V_\chi(\phi, \chi). \quad (2.126)$$

Um procedimento de Bogomol'nyi é também possível para esse sistema. Procedendo da mesma maneira que fizemos ao investigar modelos com lagrangiana standard, deduzimos que um vínculo de Bogomol'nyi é encontrado se existe  $W(\phi, \chi)$  tal que

$$V(\phi, \chi) = \frac{W_\phi^2}{2f(\chi)} + \frac{W_\chi^2}{2}, \quad (2.127)$$

que implica

$$E[\phi, \chi] \geq \left| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dW(\phi, \chi)}{dx} dx \right| \equiv \|\Delta W\|, \quad (2.128)$$

com a igualdade sendo alcançada se, e somente se, as equações de primeira ordem

$$\frac{d\phi}{dx} = \pm \frac{W_\phi(\phi, \chi)}{f(\chi)}, \quad (2.129)$$

$$\frac{d\chi}{dx} = \pm W_\chi(\phi, \chi). \quad (2.130)$$

são satisfeitas. Notemos que a energia de Bogomol'nyi do sistema é completamente independente de  $f(\chi)$ . A saturação do vínculo 2.128 permite a separação da densidade de energia na forma  $\rho = \rho_1 + \rho_2$ , em que

$$\rho_1 = f(\chi) \left( \frac{d\phi}{dx} \right)^2 = \frac{W_\phi^2}{f(\chi)}, \quad (2.131a)$$

$$\rho_2 = \left( \frac{d\chi}{dx} \right)^2 = W_\chi^2. \quad (2.131b)$$

Observe-se que, em geral, o acoplamento entre os campos ocorre por duas vias: a função  $f(\chi)$  e o próprio potencial. Modelos em que essas duas vias afetam o comportamento dos campos foram investigados durante o desenvolvimento do trabalho em questão. Como exemplo, podemos tomar  $W(\phi, \chi)$  como o superpotencial do modelo BNRT, e  $f(\chi)$  da forma

$$f(\chi) = \frac{1}{r} - |\chi|, \quad (2.132)$$

que conduz ao sistema de equações

$$\frac{d\phi}{dx} = \pm \frac{1 - \phi^2 - r\chi^2}{r^{-1} - |\chi|}, \quad (2.133)$$

$$\frac{d\chi}{dx} = \mp 2r\chi\phi, \quad (2.134)$$

que admite, em particular, as soluções tipo kink/antikink

$$\phi = \pm \tanh(rx), \quad (2.135)$$

$$\chi = \operatorname{sech}^2(rx). \quad (2.136)$$

No trabalho [91], resolvemos nos restringir, por simplicidade, a potenciais tais que  $W_{\phi\chi} = W_{\chi\phi} = 0$ . Nesse caso, (2.130) é independente de  $\phi$ , e pode ser integrada diretamente. A solução  $\chi(x)$  pode então ser substituída em (2.129), fornecendo uma equação diferencial ordinária para  $\phi$ , a qual pode ser resolvida por quadratura. Ilustraremos esse procedimento com o auxílio de dois exemplos que capturam a ideia geral do método. Primeiramente, consideremos

$$W(\phi, \chi) = \phi - \frac{\phi^3}{3} + \alpha\chi - \frac{\alpha\chi^3}{3} \quad \text{e} \quad f(\chi) = \frac{1}{\chi^2}, \quad (2.137)$$

de modo que o potencial (2.127) se escreve

$$V(\phi, \chi) = \frac{\chi^2}{2} (1 - \phi^2)^2 + \frac{\alpha^2}{2} (1 - \chi^2)^2, \quad (2.138)$$

que alcança seu valor mínimo quando os campos assumem os valores  $\pm 1$ . Notado seja que  $f(\pm 1) = 1$ , mostrando que quando  $\chi$  pertence ao vácuo o modelo se torna equivalente ao  $\phi^4$ . Assim, o campo  $\chi$  só afeta a dinâmica de  $\phi$  quando ele difere apreciavelmente do vácuo. As equações de primeira ordem são

$$\frac{d\phi}{dx} = \pm \chi^2(1 - \phi^2), \quad (2.139)$$

$$\frac{d\chi}{dx} = \pm \alpha(1 - \chi^2). \quad (2.140)$$

Nos concentremos, por simplicidade, nas equações com sinal positivo, que levam a uma solução tipo kink, a partir das quais o antikink pode ser, como sempre, deduzido a partir de uma operação de reflexão. Vemos que, com a substituição  $u = \alpha x$ , a equação para  $\chi$  se torna simplesmente aquela encontrada para o kink do modelo  $\phi^4$ , com o resultado  $\chi(x) = \tanh(\alpha x)$ . Substituindo essa solução em (2.139), obtemos

$$\frac{d\phi}{dx} = \tanh^2(\alpha x)(1 - \phi^2), \quad (2.141)$$

que pode ser escrita, por meio da substituição  $\xi \equiv x - \tanh(\alpha x)/\alpha$ , na forma

$$\frac{d\phi}{d\xi} = (1 - \phi^2), \quad (2.142)$$

que, como sabemos, tem a solução “tipo kink”

$$\phi(x) = \tanh(\xi(x)). \quad (2.143)$$

Sempre seremos capazes de introduzir a variável  $\xi$ , que caracteriza o mecanismo através do qual o campo auxiliar  $\chi$  atua como um vínculo geométrico. Sempre que o potencial for separável, (2.130) nos fornecerá uma função  $f(\chi(x))$ . Ao resolver a equação diferencial separável

$$\frac{d\xi}{dx} = \frac{1}{f(x)}, \quad (2.144)$$

obtemos a variável  $\xi$ , em termos da qual a equação de primeira ordem se escreve

$$\frac{d\phi}{d\xi} = W_\phi, \quad (2.145)$$

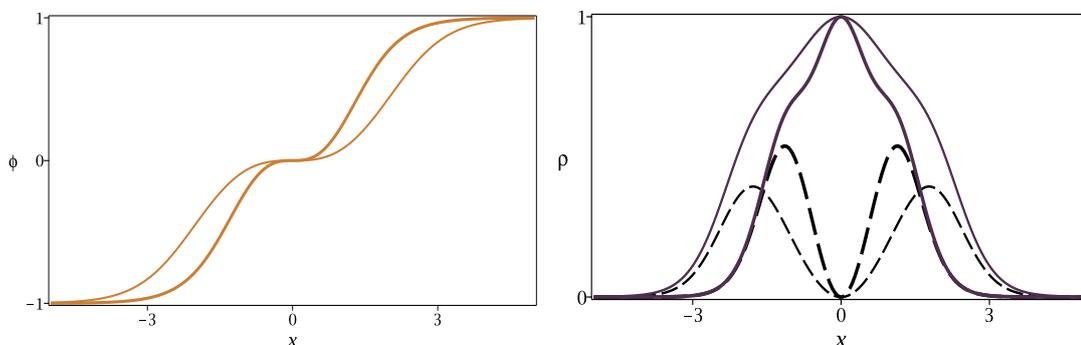
que é exatamente a equação de primeira ordem resolvida por um defeito topológico em uma teoria standard de um único campo, mas em um espaço parametrizado pela variável  $\xi$ . Note que (2.143), por exemplo, é um kink comum do modelo  $\phi^4$  em termos de  $\xi$ . A estrutura interna do kink é adquirida quando retornamos à variável  $x$ , como se fosse uma consequência da inserção desse kink em um espaço geometricamente distinto.

Próximo à origem, podemos escrever, desprezando termos de quinta ordem,  $\phi(x) \propto \alpha^2 x^3$ . Plotamos a solução na Figura (2.10), em que percebemos a presença de um “plateau” próximo à origem, que leva a uma configuração que pode ser interpretada como um kink duplo. A origem desse comportamento está no fato de que  $1/f(\chi(x)) = 0$  na origem, fazendo com que a derivada de  $\phi$  seja nula nesse ponto, e pequena em sua vizinhança. Vemos que  $\alpha$  controla a magnitude do efeito que  $\chi$  tem sobre  $\phi$ , tornando o plateau mais estreito à medida que esse parâmetro é aumentado. As contribuições  $\rho_1$  e  $\rho_2$  para a densidade de energia são

$$\rho_1 = \frac{d\xi}{dx} \operatorname{sech}^4(\xi(x)) = \operatorname{sech}^4(\xi(x)) \tanh^2(\alpha x), \quad (2.146a)$$

$$\rho_2 = \operatorname{sech}^4(\alpha x), \quad (2.146b)$$

que, juntas, dão a energia  $E = 4(1 + \alpha)/3$ , esperada de uma solução desse setor BPS.



**Figura 2.10** Soluções duplo kink do primeiro modelo (à esquerda), densidade de energia total (à direita, linhas sólidas) e contribuições  $\rho_1$  (à direita, linhas tracejadas). A espessura das linhas aumenta com  $\alpha$ , que assume os valores  $\alpha = 0.5$  e  $\alpha = 1$ .

Como segundo exemplo, vamos tomar  $f(\chi) = \sec^2(n\pi\chi)$ , com  $n \in \{1/2, 1, 3/2, \dots\}$  e usar o mesmo superpotencial de antes. A equação para  $\chi$  e, portanto, sua solução, permanecem inalteradas, enquanto  $\phi$  deve satisfazer

$$\frac{d\phi}{dx} = \cos^2(n\pi \tanh(\alpha x))(1 - \phi^2), \quad (2.147)$$

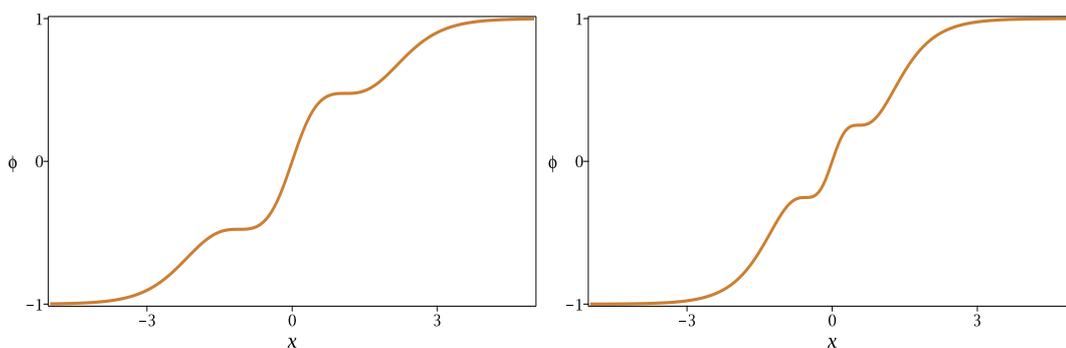
da qual podemos novamente deduzir uma equação da forma (2.142), com

$$\xi(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{4\alpha} [C_i(\beta_n^+(x)) - C_i(\beta_n^-(x))], \quad (2.148)$$

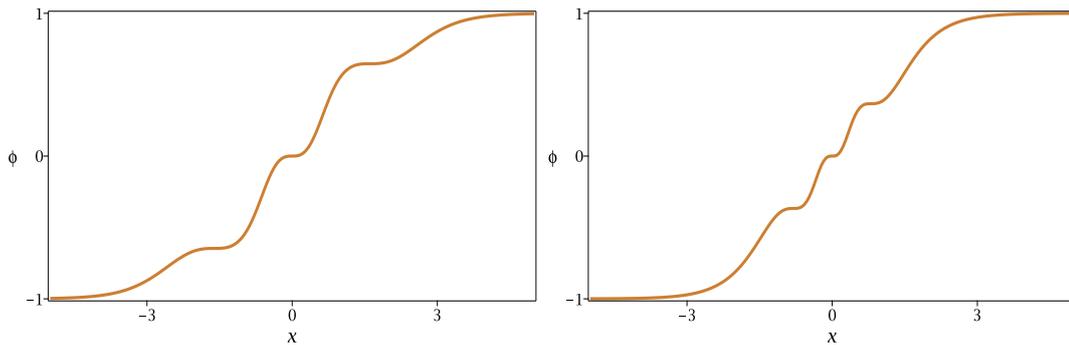
em que

$$C_i = - \int_x^\infty dt \frac{\cos t}{t} \quad (2.149)$$

é a integral cosseno [94] e  $\beta_n^\pm(x) = 2\pi n[1 \pm \tanh(\alpha x)]$ . A solução é novamente da forma  $\phi = \tanh \xi$ , mas possui agora o comportamento visto nas Figuras 2.11 e 2.12. A configuração é o que denominamos *multikink*, e sua derivada se anula em  $2n$  pontos, podendo esse número ser par (se  $n \in \mathbb{N}$ ) ou ímpar (se  $(n + 1/2) \in \mathbb{N}$ ).



**Figura 2.11** Multikinks do segundo modelo com  $n = 1$  e  $\alpha = 0.5$  (esquerda) e 1(direita)

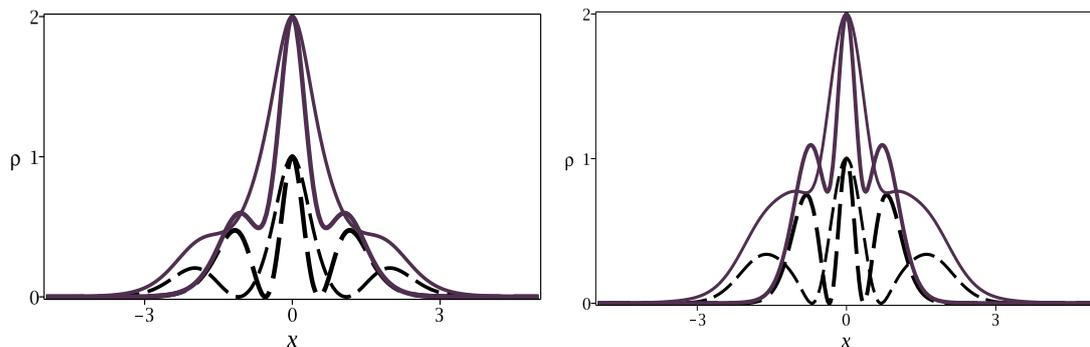


**Figura 2.12** Multikinks do segundo modelo com  $n = 3/2$  e  $\alpha = 0.5$  (esquerda) e 1(direita)

A contribuição  $\rho_1$  para densidade de energia é

$$\rho_1 = \cos^2(n\pi \tanh(\alpha x)) \operatorname{sech}^4 \xi(x), \quad (2.150)$$

que pode ser vista na Figura 2.13. A energia total dessas configurações é, novamente,  $E = 4(1 + \alpha)/3$ .



**Figura 2.13** Densidades de energia das soluções multikink para  $n=1$  (à esquerda) e  $n=3/2$  (à direita). As linhas sólidas correspondem à densidade de energia total, e as tracejadas à contribuição  $\rho_1$ . A espessura das linhas aumenta com  $\alpha$ , que assume os valores  $\alpha = 0.5$  e  $\alpha = 1$ .

## 2.6 Teorema de Derrick

Tendo estudado modelos com um e dois campos escalares reais em duas dimensões espaço-temporais, estamos preparados a dar mais um passo em direção a modelos mais complexos. Embora interessante, a extensão para modelos com três ou mais campos escalares envolve um significativo aumento no trabalho algébrico necessário às investigações, e ainda apresenta, fundamentalmente, muitas das ideias já discutidas no contexto de modelos de dois campos, incluindo a introdução de um superpotencial e a presença de um vínculo de Bogomol'nyi. Exemplos desse tipo de teoria e algumas de suas aplicações são discutidas em [29].

O próximo passo lógico, é, portanto, considerar sistemas em múltiplas dimensões espaciais. Esse caminho encontra, entretanto, um obstáculo em um argumento devido, em sua forma original, ao físico G.H. Derrick [95], que mostra a impossibilidade de configurações de campo estáticas que sejam soluções localizadas e estáveis de energia finita em teorias com lagrangiana standard em mais de uma dimensão espacial. A demonstração do teorema de Derrick é tão esclarecedora quanto seu resultado final, por nos permitir uma visão do papel desempenhado por

cada uma de suas hipóteses no argumento, fornecendo um valioso auxílio na busca por meios de evadir o teorema. Vamos, portanto, demonstrar esse resultado.

O cerne desse teorema, que foi inicialmente proposto como um argumento para a impossibilidade da identificação de tais soluções com partículas, está na imposição de que o funcional de energia seja estacionário mediante à reescala espacial  $\mathbf{x} \mapsto \lambda \mathbf{x}$ . Para que a solução seja estável, deve ser  $\delta E = 0$  e  $\delta^2 E \geq 0$ . Em uma teoria standard de  $N$ -campos em  $n + 1$  dimensões espaço-temporais, o funcional Energia se escreve

$$E = - \int d^n x \left\{ \frac{1}{2} \partial_k \phi_a(\mathbf{x}) \partial^k \phi_a(\mathbf{x}) - V(\phi_1(\mathbf{x}), \dots, \phi_N(\mathbf{x})) \right\} = E_g + E_p, \quad (2.151)$$

onde  $E_g$  e  $E_p$  são generalizações imediatas de (2.22) e (2.23). Aqui,  $k$  assume os valores  $\{1, \dots, n\}$  e  $a$  enumera os campos, indo de 1 a  $N$ . Mediante a reescala, e definindo  $y_k \equiv \lambda x_k$ , obtemos

$$E_\lambda = - \int d^n \left[ \frac{y}{\lambda} \right] \left\{ \frac{\lambda^2}{2} \partial_k \phi_a(\mathbf{y}) \partial^k \phi_a(\mathbf{y}) - V(\phi_1(\mathbf{y}), \dots, \phi_N(\mathbf{y})) \right\} = \lambda^{-n} (\lambda^2 E_g + E_p), \quad (2.152)$$

donde, tomando a variação numa vizinhança de  $\lambda = 1$  e exigindo  $\delta E = 0$ , deduzimos

$$\left. \frac{dE_\lambda}{d\lambda} \right|_{\lambda=1} = 0 \implies E_g = \frac{2-n}{n} E_p, \quad (2.153)$$

que é um teorema do virial. Em uma dimensão, ele implica  $E_p = E_g$ , resultado que já encontramos na seção 2.3. Se o potencial for positivo semidefinido, esse resultado só é possível para  $n = 1$  e  $n = 2$ , existindo esta última possibilidade apenas se  $V$  for identicamente nulo, o que ocorre, por exemplo, para o modelo  $O(3)$  não linear [54]. Como a porção gradiente da energia é necessariamente positiva, somos forçados a concluir, em um número maior de dimensões, que  $E_p$  é negativa. Mas nesse caso as soluções serão instáveis, pois

$$\delta^2 E = \{ (2-n)(1-n)E_g + (1+n)nE_p \} (\delta\lambda)^2 = 2nE_p(\delta\lambda)^2, \quad (2.154)$$

que é uma expressão negativa se  $E_p$  o for! Isso significa que  $E_\lambda$  é um máximo da energia nesses casos. Note-se que esse argumento não é aplicável para soluções de vácuo, para as quais  $E_p = E_g = 0$  em qualquer dimensão.

Analisando a demonstração desse teorema, podemos imaginar várias formas de “escapar” das dificuldades por ele impostas. Uma saída possível é a investigação de soluções dependentes do tempo. No entanto, essa abordagem inviabiliza a identificação dos defeitos com partículas de teorias quânticas de campo, já que uma partícula em repouso deve ter suas propriedades físicas, incluindo sua energia de repouso, deduzidas a partir de solução estática. Outra possibilidade é a modificação da lagrangiana. Um trabalho do nosso grupo de pesquisa mostrou a existência de defeitos globais estáveis em uma classe de teorias em dimensão arbitrária nas quais o potencial tem dependência explícita nas coordenadas [96]. Também é possível incluir termos envolvendo derivadas de ordem superior dos campos ou outros desvios em relação à forma standard. Nos próximos capítulos, apresentaremos modelos que evadem o Teorema de Derrick por meio da introdução de campos de gauge ao sistema, aos quais os campos escalares serão acoplados.

## Vórtices em teorias abelianas

“We dance round in a ring and suppose,  
but the Secret sits in the middle and  
knows.”

---

*Robert Frost*

Como o teorema de Derrick dificulta a busca por defeitos em teorias puramente escalares em mais de duas dimensões, somos motivados a explorar outros paradigmas, em particular as teorias de calibre, que ocupam um papel central na física teórica. O grupo de gauge  $U(1)$ , conhecido do eletromagnetismo, é a escolha mais natural, pois o fato de esse grupo ser abeliano simplifica grandemente o formalismo matemático. Estaremos interessados em teorias nas quais o potencial só depende do módulo do campo escalar, de modo que a classificação topológica é regida pelos grupos de homotopia  $\pi_l(S_1)$ . Da nossa discussão sobre topologia, sabemos que esse grupo é trivial para  $l \neq 1$ , o que faz com que a investigação de uma teoria em duas dimensões espaciais se sugira naturalmente. Nesse tipo de teoria há o aparecimento de estruturas topológicas conhecidas como vórtices. Defeitos desse tipo também podem ser encontrados em teorias não abelianas em  $(2,1)$  dimensões [97], mas como  $\pi_1(S_m) = 0$  para  $m \neq 1$ , a variedade de vácuo necessita, nesse caso, de uma estrutura mais sofisticada, o que pode ser alcançado, por exemplo, com o uso de dois campos escalares distintos. Essa situação é muito mais complicada, e por isso estudaremos neste capítulo apenas os vórtices abelianos.

Esses defeitos são caracterizadas pela presença de pontos isolados no plano, em que um campo escalar complexo  $\varphi$  se anula. Se considerarmos um loop circulando esse ponto, veremos que a cada volta completa nessa curva corresponde um aumento de  $2\pi n$  na fase do campo escalar. Esses loops podem ser identificados com os mapas entre uma circunferência infinita e a variedade de vácuo do modelo, os quais podem ser divididos em classes topológicas caracterizadas por um inteiro  $n$ . De modo semelhante à maneira com que podemos obter paredes de domínio a partir de kinks unidimensionais, é possível inserir vórtices (sem alterar a maneira com que o infinito é mapeado na variedade de vácuo) em um espaço com três dimensões espaciais, dando origem a cordas (nesse caso, se exige apenas que a energia por unidade de comprimento seja finita). Discussões sobre esses objetos podem ser encontradas, por exemplo, em [98, 99].

Encontrados pela primeira vez por Helmholtz em mecânica dos fluídos [100], vórtices são comuns no estudo de sistemas não lineares, aparecendo, por exemplo, no estudo de supercondutores [20], superfluidos [19, 101], estruturas de spin de materiais magnéticos em nanoescala [102, 103], cosmologia [104, 105], entre outros. Essas estruturas podem aparecer em teorias com simetria de gauge *local*, nas quais são permitidas transformações de calibre dependentes das coordenadas, ou *global*, em que apenas transformações independentes das coordenadas são permitidas. Nas primeiras, o campo escalar deve ser acoplado a *campos de gauge*, familiares no eletromagnetismo clássico. A teoria global, entretanto, não faz uso desse acoplamento. Por serem teorias escalares standard em duas dimensões espaciais, soluções estáticas estáveis de energia finita em teorias globais são proibidas pelo Teorema de Derrick. Com efeito, veremos

que os vórtices da teoria global possuem energia infinita. Essa observação, e o fato de elas ocuparem um papel de destaque na física teórica, nos motivam a nos concentrar em teorias locais, com referências às suas correspondentes globais sendo feitas esporadicamente, para efeito de comparação.

Neste capítulo, estudaremos vórtices que aparecem em teorias de gauge locais, em um espaço plano (2,1) dimensional. Veremos o clássico exemplo do vórtice de Nielsen-Olesen, e estudaremos algumas propriedades do modelo, incluindo a presença de soluções BPS no acoplamento crítico. Usando um ansatz circularmente simétrico, vamos simplificar as equações de segunda e primeira ordem, e analisar os resultados. Em seguida, investigaremos um sistema em que a eletrodinâmica é governada por um termo de Chern-Simons, e encontraremos vórtices carregados eletricamente, com algumas propriedades marcadamente diferentes das do modelo anterior. Finalmente, abordaremos dois modelos estudados no mestrado, em que os vórtices de Nielsen-Olesen são modificados pela inclusão de outros campos, que aumentam a simetria do sistema por meio de uma modificação semelhante à sugerida na nossa investigação de multikinks. Os vórtices desses modelos apresentam estrutura interna interessante, e notavelmente distinta dos de Nielsen-Olesen.

### 3.1 Teorias de calibre

Nesta seção, vamos definir alguns objetos centrais das teorias de gauge, que estudaremos neste e no próximo capítulo. Uma teoria de calibre é caracterizada pela presença de um grau de redundância na descrição dos campos, que nos leva a considerar como equivalentes todas as quantidades que diferem entre si apenas por uma transformação de calibre (ou gauge). Portanto, nossos objetos de estudo não são apenas funções, mas classes de equivalência às quais pertencem todos os objetos equivalentes no sentido de gauge. Formalmente, isso significa que estamos interessados em *maços de fibra*, dos quais os campos de matéria são seções (Discutimos esses conceitos no apêndice A.2).

Para estudar um grupo de Lie  $G$ , precisamos de uma representação  $R : G \mapsto GL(V)$ , que é um homomorfismo entre  $G$  e o grupo das matrizes  $n \times n$  invertíveis, munido da operação de multiplicação matricial [106]. Poderemos sempre tomar uma representação unitária, em que  $G$  é mapeado em um grupo unitário  $U(n)$ , ou um seu subgrupo. O espaço-tempo é uma variedade diferenciável  $\mathbf{X}$  coberta por abertos  $U_i$  e, como estamos tratando de teorias locais, devemos ser capazes de considerar a ação de  $G$  em cada uma dessas vizinhanças. Ora as seções de maço que determinam a forma de  $\phi(x)$  só podem, em geral, ser definidas localmente, em cada  $U_i$ . Esse caráter intrinsecamente local nos impede de usar a derivada usual  $\partial_\mu \phi$  na lagrangiana da teoria. Como, em geral, as transformações de calibre alteram as bases de forma distinta em cada vizinhança, as seções em diferentes pontos da variedade não podem ser efetivamente comparadas por meio da derivada parcial. O problema é análogo àquele encontrado no estudo de derivadas em espaços curvos na teoria de Einstein. Também análoga é a solução: resolvemos o problema pela introdução de uma conexão, a qual permite a comparação de objetos definidos em diferentes vizinhanças. Como discutido nos apêndices, as vizinhanças estão relacionadas por funções de transição, que são elementos do grupo de Lie. Para definir uma noção de derivada, precisamos usar um elemento do espaço tangente de  $G$ , identificado com a álgebra de Lie ( $\mathfrak{g}$ ) associada a esse grupo [106]. A conexão aparece quando usamos uma representação de  $\mathfrak{g}$  para mapear a álgebra em  $gl(V)$ , que é o espaço de mapas lineares  $l : V \mapsto V$  [106], em que  $V$  é o espaço vetorial em que  $\phi$  toma valores (a fibra). Com isso, obtemos um campo vetorial de componentes  $A_\mu$ , que representa, fisicamente, o *campo de gauge*. Quando  $G = U(1)$ , podemos

tomar  $V = \mathbb{C}$ , e todos os campos da teoria ficam representados por números complexos. No caso não abeliano,  $A_\mu$  é representado como uma combinação linear de matrizes hermitianas  $n \times n$ , os geradores de  $\mathfrak{g}$ . A derivada covariante pode ser definida como um operador linear da forma

$$D_\mu := \partial_\mu + \rho(A_\mu), \quad (3.1)$$

em que  $\rho$  é a representação de  $\mathfrak{g}$ . Modelos em que o acoplamento entre campos escalar e de gauge ocorre dessa maneira são ditos *minimamente acoplados*. Tomaremos a representação adjunta, em que  $A_\mu$  é representado por um elemento da própria álgebra de Lie, de modo que podemos simplesmente abandonar a referência explícita a  $\rho$  em (3.1) e escrever simplesmente  $A_\mu$ . Ora o requerimento de que  $D_\mu \phi$  seja covariante sob transformações de gauge (isto é, que se transforme da mesma forma que o campo escalar) nos permite concluir que  $A_\mu$  deve se transformar segundo a regra

$$A_\mu \rightarrow \gamma A_\mu \gamma^{-1} - \partial_\mu \gamma \gamma^{-1} \quad (3.2)$$

que, para o grupo  $U(1)$  com ação representada por  $e^{i\lambda(t, \mathbf{x})}$ , se reduz à conhecida expressão  $A_\mu \rightarrow A_\mu - \partial_\mu [i\lambda(t, \mathbf{x})]$ . Por substituição direta, pode ser verificado que  $D_\mu \phi$  é, de fato, um objeto covariante da teoria.

A introdução da conexão permite que seja definida uma forma de curvatura, que é, por construção, um operador linear na fibra, cujas componentes são definidas por sua ação em  $\phi$

$$F_{\mu\nu} \phi := [D_\mu, D_\nu] \phi, \quad (3.3)$$

que é uma expressão válida para qualquer grupo de gauge. Escrevendo  $F_{\mu\nu}$  dessa maneira, entendemos intuitivamente o porquê de essa quantidade ser uma curvatura: O comutador das derivadas covariantes dá o efeito que o transporte paralelo (efetuado pela conexão) em um loop infinitesimal tem sobre uma seção de  $V$ . Fisicamente, o efeito do campo de gauge sobre  $\phi$  é dado pela presença dessa curvatura, e no caso em que ele é nulo ou não está acoplado a  $\phi$ , retornamos à situação plana.  $D_\mu \phi$  segue a mesma lei de transformação que o campo escalar, então  $D_\nu D_\mu \phi$  e, por conseguinte, o comutador que define  $F_{\mu\nu} \phi$ , é também covariante sob transformações de calibre.

Se a curvatura for zero em todo o espaço, então o resultado obtido é o mesmo que encontraríamos ao tomar  $A_\mu$  identicamente nulo. Nesse caso, existe uma transformação de calibre que transforma  $D_\mu$  em  $\partial_\mu$ , mostrando que  $\phi$  não é afetado pelos campos de gauge. Para que isso seja possível, as seções precisam ser definidas globalmente, o que significa que as funções de transição devem atuar da mesma forma em todas as interseções. Como essas transições são efetuadas pela ação do grupo, vemos que a nulidade da curvatura restringe as transformações possíveis àquelas que transformam todos os pontos de  $\mathbf{X}$  da mesma forma, nos levando à teoria global. Nesse caso, o uso da conexão é redundante, e podemos simplesmente tomar  $A_\mu \equiv 0$ .

Substituindo diretamente  $D_\mu = \partial_\mu + A_\mu$  em (3.3), encontramos

$$F_{\mu\nu} \phi = \{ [\partial_\mu, \partial_\nu] + [A_\mu, A_\nu] + [\partial_\mu, A_\nu] + [A_\mu, \partial_\nu] \} \phi. \quad (3.4)$$

O primeiro termo é sempre nulo. Em teorias abelianas, a ação de elementos do grupo comuta, então o segundo também se anula. O que sobra é

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} \phi &= \partial_\mu (A_\nu \phi) - A_\nu \partial_\mu \phi + \partial_\nu (A_\mu \phi) - A_\mu \partial_\nu \phi \\ &= (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) \phi, \end{aligned} \quad (3.5)$$

que recupera o tensor eletromagnético da teoria de Maxwell. Dada uma transformação de calibre  $\gamma$ , vemos que  $[D_\mu, D_\nu] \phi \rightarrow \gamma [D_\mu, D_\nu] \phi = [D_\mu, D_\nu] (\gamma \phi)$ , provando que  $F_{\mu\nu}$  não muda nesse

caso, o que só acontece porque o grupo é abeliano. Por meio desse tensor, podemos definir os campos elétrico  $E_i = F_{0i}$  e magnético  $\varepsilon^{ijk}B_k = -F_{ij}$  [35]. Notamos ainda uma importante identidade. Pela definição da curvatura, vale,

$$[D_\nu, [D_\mu, D_\lambda]]\phi = (D_\nu F_{\mu\lambda})\phi, \quad (3.6)$$

que, com o uso da conhecida identidade de Jacobi para comutadores, leva à expressão

$$D_\nu F_{\mu\lambda} + D_\mu F_{\lambda\nu} + D_\lambda F_{\mu\nu} = 0, \quad (3.7)$$

que é conhecida como identidade de Bianchi, válida para  $G$  qualquer. Para campos abelianos,  $F_{\mu\nu}$  é invariante por transformações de calibre, então a derivada covariante da curvatura coincide com a parcial, e podemos escrever

$$\partial_\nu F_{\mu\lambda} + \partial_\mu F_{\lambda\nu} + \partial_\lambda F_{\mu\nu} = 0, \quad (3.8)$$

que dá as equações de Maxwell homogêneas.

### 3.2 Vórtices de Maxwell-Higgs

Seja  $\varphi$  um campo de matéria, representado por uma função complexa, sobre a qual a atuação do grupo de Lie tem o efeito de uma mudança de fase. Trabalhamos no espaço plano em  $(2, 1)$  dimensões, com uma lagrangiana da forma

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + D^\mu\varphi\overline{D_\mu\varphi} - V(|\varphi|), \quad (3.9)$$

em que  $D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu$ ,  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$  e a barra horizontal denota conjugação complexa. O fator  $ie$  na derivada covariante foi adicionado por conveniência, de modo que a conexão é, aqui,  $ieA_\mu$ , onde  $A_\mu = (A_0, \mathbf{A})$ , sendo  $\mathbf{A}$  o conhecido potencial vetor do eletromagnetismo. Para usar (3.3), devemos dividir a expressão do lado esquerdo esse mesmo fator. A constante  $e$  controla o acoplamento entre os campos. Da discussão feita na seção 2.2, sabemos que essa lagrangiana deve ter dimensão de energia ao cubo, de modo que todos campos e a constante de acoplamento tem dimensão de raiz quadrada da energia. Em termos dos campos de gauge podemos escrever a lagrangiana na forma explícita

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{4}(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu)(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) + \partial_\mu\varphi\partial^\mu\overline{\varphi} - ieA_\mu(\overline{\varphi}\partial^\mu\varphi - \varphi\partial^\mu\overline{\varphi}) \\ & + e^2A_\mu A^\mu\varphi\overline{\varphi} - V(|\varphi|). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Se quisermos voltar para o caso global, basta colocar  $A_\mu = 0$  nessa lagrangiana. Notamos que, além de apresentar simetria  $Z_2$ , essa teoria é invariante sob as transformações de gauge:

$$\varphi \rightarrow e^{-ie\alpha(t, \mathbf{x})}\varphi, \quad (3.11)$$

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu\alpha, \quad (3.12)$$

em que  $\alpha(t, \mathbf{x})$  é uma função arbitrária das coordenadas e do tempo. Para demonstrar esse fato note que o módulo de  $\varphi$  não muda quando alteramos sua fase. A derivada covariante se transforma da mesma forma que o campo sob essas transformações, de modo que o mesmo argumento implica na invariância de  $D^\mu\varphi\overline{D_\mu\varphi}$ , e já mostramos que  $F_{\mu\nu}$  também é invariante sob transformações de calibre. A lagrangiana (3.9), com potencial quártico

$$V(|\varphi|) = \frac{\lambda}{2}(v^2 - |\varphi|^2)^2, \quad (3.13)$$

em que  $\lambda$  e  $v$  são parâmetros reais positivos, foi introduzida por H.B Nielsen e P. Olesen no estudo de cordas de Nambu [21]. O modelo por ela originado é uma extensão relativística da teoria de Ginzburg-Landau [GL] para a supercondutividade [107], e a relação com esses materiais é útil na interpretação física dos resultados da teoria. Em particular, é notada pelos próprios autores a identificação exata entre a teoria de GL (cujas soluções tipo vórtice foram estudadas por A.A Abrikosov [20], o qual, em 2003, dividiu o prêmio Nobel com Ginzburg e Anthony James Leggett por seu trabalho em supercondutividade) e o caso estático do sistema tratado nesta seção<sup>†</sup>. Variando a ação com respeito  $\bar{\varphi}$ , e mantendo  $\varphi$  fixo, encontramos

$$D_\mu D^\mu \varphi + V_{\bar{\varphi}} = 0. \quad (3.14)$$

Não é necessário variar em relação a  $\varphi$ , já que  $\bar{\varphi}$  pode ser obtido por conjugação complexa de  $\varphi$ . Variando com respeito ao campo de gauge, obtemos

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu, \quad (3.15)$$

que corresponde às equações de Maxwell não homogêneas, com corrente dada por

$$J^\mu = ie(\bar{\varphi} D^\mu \varphi - \varphi \overline{D^\mu \varphi}). \quad (3.16)$$

Note que a conservação dessa corrente segue imediatamente de (3.15). Com efeito, a antisimetria de  $F_\mu$  e simetria das derivadas parciais implicam  $\partial_\nu J^\nu = \partial_\mu \partial_\nu F^{\mu\nu} = 0$ . Analisando as componentes temporais em (3.15), identificamos a lei de Gauss:

$$\partial_k E^k = J^0. \quad (3.17)$$

Com o auxílio das fórmulas discutidas no Apêndice A.1, podemos calcular a derivada funcional presente em (2.8), a partir da qual encontramos o tensor energia-momento da teoria

$$T_{\mu\nu} = -F_{\mu\eta} F_\nu^\eta + \overline{D_\mu \varphi} D_\nu \varphi + \overline{D_\nu \varphi} D_\mu \varphi - \eta_{\mu\nu} \mathcal{L}, \quad (3.18)$$

que já é simétrico e invariante por transformações de calibre. Em particular,

$$T_{00} = \frac{1}{2}(E^2 + B^2) + \overline{D_0 \varphi} D_0 \varphi + \overline{D_k \varphi} D_k \varphi + V(|\varphi|) \quad (3.19)$$

é a densidade de energia. Quando a lei de Gauss é satisfeita, podemos atribuir energias cinética e potencial ao sistema. Essas quantidades têm um significado físico importante em teorias de calibre (veja, por exemplo, [108]). Notemos que as trajetórias físicas são órbitas no espaço de configuração  $\{(\phi, A_\mu)\}/U(1)$ , onde o quociente identifica todas as trajetórias que são equivalentes sob transformações de calibre. Pode-se mostrar [62] que a quantidade

$$T = \int d^2x \left[ |D_0 \phi|^2 + \frac{1}{2} E^2 \right], \quad (3.20)$$

que é invariante sob transformações de calibre, corresponde à metade do quadrado da velocidade obtida quando uma trajetória em  $\{(\phi, A_\mu)\}$  é projetada no espaço de configuração, sendo então

<sup>†</sup>A teoria desenvolvida por Ginzburg-Landau e posteriormente investigada por Abrikosov trata de equações oriundas da minimização do funcional de energia livre de Helmholtz. O modelo de Nielsen-Olesen pode ser visto como uma extensão dinâmica da teoria.

interpretada naturalmente como a energia cinética. Comparando essa expressão à integral de  $T_{00}$ , identificamos a energia “potencial” da teoria:

$$U = \int d^2x \left[ |D_k \phi|^2 + \frac{1}{2} B^2 + V(|\phi|) \right], \quad (3.21)$$

que é, também, invariante sob transformações de calibre. As soluções estáticas podem ser definidas de forma natural pela exigência  $E = U$ , que significa que elas não têm energia cinética, qualquer que seja a escolha de calibre. Note que nesse caso  $E = -L$ , em que  $L$  é a lagrangiana usual da mecânica analítica, dada pela integral espacial de  $\mathcal{L}$ . Quando interpretamos os campos em termos da teoria de Ginzburg-Landau, o funcional  $U[\phi, A_\mu]$  tem ainda outra interpretação: ele corresponde à diferença na energia livre de Helmholtz, próximo à temperatura crítica, entre o estados normal e supercondutor, na ausência de um campo magnético externo. As equações estáticas da teoria, que podem ser obtidas pela extremização de  $U[\phi, A_\mu]$ , correspondem a pontos estacionários do funcional. As soluções que o minimizam, as quais são estáveis na teoria de Maxwell-Higgs, são análogas a estados em que energia livre é mínima. Na situação em que a temperatura é constante, essa condição garante que a existência das soluções seja termodinamicamente favorável. Investiguemos a variedade de vácuo do modelo. Vemos que  $V(|\phi|)$  se anula quando  $|\phi| = v$ , de modo que temos a circunferência

$$\min(V) = \{v e^{i\alpha}\}, \quad (3.22)$$

parametrizada pela variável contínua  $\alpha$ . Para que a solução pertença ao vácuo, devemos exigir que todos os seus termos, que são positivos, se anulem.  $|F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}|$  deve se anular, então  $A_\mu$  só pode diferir de zero por uma transformação de calibre. Também deve ser  $|D_\mu \phi|^2 = 0$ , e vemos que o vácuo da teoria é o conjunto  $\{(\phi, A_\mu) : |\phi| = v, eA_\mu = \partial_\mu \alpha\}$ . Note que todos os elementos dessa variedade são equivalentes por transformação de gauge, sendo o vácuo, nesse sentido, único. A variedade de vácuo é um espaço contínuo com topologia não trivial (uma circunferência), o que possibilita a presença de defeitos topológicos nessa teoria.

A lagrangiana (3.9) com potencial quártico fornece um clássico exemplo do conhecido mecanismo de Higgs. A invariância de calibre da teoria impede a adição de um termo  $\frac{1}{2} M^2 A_\mu A^\mu$ , a partir do qual seria possível definir uma massa para o sistema. Resulta daí que os campos de gauge na teoria de Maxwell não podem ser massivos. A situação muda, entretanto, quando esses campos são acoplados a um campo escalar, com um potencial que engendra quebra da simetria. Para ver como isso ocorre, vamos linearizar as equações de Lagrange em torno do vácuo da teoria [62]. Se o campo escalar está próximo ao vácuo, podemos escrever  $\phi \approx v + \psi$ , em que  $|\psi|$  é suposto pequeno. Até a segunda ordem, vale

$$V(|\psi|) \approx \lambda v^2 |\psi|^2 = \frac{1}{2} m_\psi^2 |\psi|^2, \quad (3.23)$$

mostrando a presença de um campo escalar massivo, o campo de Higgs da teoria, cuja massa é  $m_\psi = \sqrt{2\lambda} v$ . Linearizando (3.15), encontramos

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \partial_\mu \partial^\mu A^\nu - \partial_\mu \partial_\nu A^\mu = -2e^2 v^2 A^\nu. \quad (3.24)$$

Derivando essa igualdade em relação a  $x^\nu$ , deduzimos

$$\partial_\nu \partial_\mu \partial^\mu A^\nu - \partial_\nu \partial_\mu \partial^\nu A^\mu = -2e^2 v^2 \partial_\nu A^\nu \implies \partial_\nu A^\nu = 0, \quad (3.25)$$

sendo a última igualdade facilmente encontrada quando usamos a simetria das derivadas parciais e renomearmos índices mudos. Combinada a (3.24), essa equação dá

$$\partial_\mu \partial^\mu A^\nu + 2(ev)^2 A^\nu = 0, \quad (3.26)$$

que tem a forma de equações de Klein-Gordon para as componentes do campo de gauge, em que identificamos a massa  $M = \sqrt{2}ev$ .

### 3.2.1 Quantização do fluxo

Busquemos soluções de energia finita. Para que isso ocorra, é necessário que os campos tendam assintoticamente ao vácuo no infinito. Para tal, devemos impor

$$|\varphi| \xrightarrow{r \rightarrow \infty} v. \quad (3.27)$$

Além dessa condição, vemos que o campo magnético deve tender assintoticamente a zero, de modo que

$$|D_\mu \varphi|^2 \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0 \quad \therefore \quad A_\mu \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \frac{1}{e} \partial_\mu \alpha. \quad (3.28)$$

Com essas informações, podemos calcular o fluxo magnético sobre o plano  $xy$  imaginando-o como um círculo cujo raio  $R$  tende ao infinito:

$$\begin{aligned} \Phi_R &= \int_{r \leq R} \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, da = \oint_{r=R} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \\ \therefore \Phi &= \frac{1}{e} \int_0^{2\pi} \frac{\partial \alpha}{\partial \theta} d\theta = \frac{2\pi n}{e}; \quad n \in \mathbb{Z}, \end{aligned} \quad (3.29)$$

em que foi usado, no último passo, o fato de o campo escalar  $\varphi$  ser uma função unívoca, cuja fase deve variar apenas em múltiplos de  $2\pi$  em caminhos fechados. Enfatizemos a importância da condição  $v \neq 0$  para que esse argumento faça sentido: se a magnitude de  $\varphi$  fosse nula no infinito, sua fase não estaria bem definida na superfície de integração, e  $\partial\alpha/\partial\theta$  não teria significado.

O inteiro  $n$ , correspondente ao número de voltas completas que caracterizam um mapa entre o infinito espacial e a variedade de vácuo, é denominado *winding number*, ou vorticidade, e é o invariante topológico que rotula as classes de homotopia do modelo. Identificamos esse inteiro com a carga topológica da solução, de modo que a não nulidade de  $n$  indica a presença de defeitos topológicos. A medição do fluxo magnético no infinito pode, portanto, ser usada para determinar a carga topológica, ou vice versa. Note-se que  $n$  não está restrito a valores positivos, e uma inversão em seu sinal é equivalente a percorrer o caminho de integração no sentido oposto, invertendo as linhas de campo magnético no infinito. Valores positivos e negativos de  $n$  serão identificados, respectivamente, com vórtices e antivórtices, e veremos que a relação entre esses defeitos ecoa em muitos aspectos aquela entre kinks e antikinks.

É curioso que a condição de quantização (3.29) tenha sido obtida por meio de uma análise puramente clássica. Fundamentalmente, essa é uma propriedade quântica, e o fato de a termos encontrado é explicado pela constatação de que  $e$  é, no nível clássico, simplesmente a constante de acoplamento. Somente uma teoria quântica pode fornecer a condição  $e = Q/\hbar$ , que especifica a relação entre essa constante e a carga elétrica de um par de Cooper [31]. Em nossas unidades,  $\hbar = 1$ , de modo que  $e = Q$ . A teoria BCS [109] revela que  $Q$  vale o dobro da carga do elétron,

de modo que, em termos dessa carga fundamental, que representaremos por  $q_e$ , a condição de quantização fica  $\Phi = \pi n/q_e$ .

Esse resultado mostra a possibilidade de existência de um fluxo quantizado na solução, que se realizará quando  $n \neq 0$ . Supercondutores têm como característica a expulsão de campos magnéticos do material, no conhecido efeito Meissner. Os vórtices permitem a negação parcial desse fenômeno, pois o campo é expelido da região supercondutora, mas preso dentro dos vórtices, os quais “seguram” quanta de fluxo magnético.

O campo  $\phi$  é interpretado como o parâmetro de ordem, no sentido da fenomenologia de Landau, cujo módulo varia entre 0 e  $v$  que correspondem, respectivamente, aos estados normal e supercondutor. A passagem para o estado supercondutor é interpretada como uma transição de fase, descrita por parâmetros introduzidos fenomenologicamente. Atualmente a supercondutividade e, por conseguinte, a teoria de Ginzburg-Landau, são compreendidas em termos de quantidades microscópicas de acordo com a teoria BCS [109]. Materiais supercondutores podem ser classificados de acordo com sua resposta à introdução de um campo magnético *externo*, que induz uma transição de fase entre os estados supercondutor e “normal”. Nos chamados supercondutores *tipo-2*, ocorre uma transição de fase de segunda ordem, o que os diferencia dos materiais em que tal transição é de primeira ordem, denominados *tipo-1*. Enquanto estes apresentam apenas um valor crítico para o campo magnético, a partir do qual a supercondutividade é destruída, os supercondutores *tipo-2* apresentam dois campos críticos. A transição começa quando a intensidade do campo atinge o primeiro desses valores críticos, e se encerra quando ela atinge um segundo valor, que caracteriza a passagem completa para o estado normal. Vórtices tendem a aparecer em materiais *tipo-2* após a aplicação de um campo magnético cuja magnitude se encontra entre os valores críticos.

Nesse modelo, é possível conectar, de maneira simples, a presença de defeitos a uma situação experimental, em um exemplo do famoso mecanismo de Kibble [15]. A transformação de um material para um estado supercondutor é caracterizada por uma temperatura crítica  $T_c$ , abaixo da qual o material apresenta propriedades supercondutoras. Acima de  $T_c$  a energia livre é minimizada para  $\phi = 0$ , ao passo que no cenário em que  $T < T_c$ , ela é mínima para  $|\phi| = v$  (nesse caso, o funcional de energia livre se torna equivalente a (3.21)). Imagine um experimento em que abaixamos a temperatura de um material até que esta caia a um valor menor que  $T_c$ . Com essa mudança, submetemos o sistema a condições em que  $|\phi| = v$  se torna termodinamicamente favorável, de modo que o parâmetro de ordem muda para satisfazer essa condição, a qual, entretanto, não vincula sua fase, que é escolhida aleatoriamente. Se a amostra for suficientemente grande <sup>†</sup>, teremos quebras de simetria acontecendo simultaneamente em regiões que não estão causalmente conectadas. Como cada região do material não “conhece” a fase do parâmetro de ordem em domínios distantes, não há nada que vincule a fase a ter o mesmo valor em todos os pontos. Vórtices podem então aparecer na região intermediária entre domínios caracterizados por diferentes escolhas de fase. A impossibilidade de remover esses defeitos por meio de transformações de calibre se deve às condições de consistência, discutidas nos apêndices, impostas às funções de transição. Mesmo que fixemos a fase em duas regiões distintas, deve haver uma vizinhança que as conecta, e nela a fase não pode ser constante. Ao contornar a circunferência na integral (3.29), passamos por interseções desse tipo, “ganhando” quanta de fluxo magnético no processo.

<sup>†</sup>A escala de comprimento que torna preciso o significado dessa expressão, bem como o tamanho dos domínios causalmente conectados, é definida pelo comprimento característico  $\xi = (2\lambda v^2)^{-1/2} = 1/m_\psi$  [15], bastante conhecido na teoria de supercondutividade.

### 3.2.2 Soluções com simetria circular

Vamos investigar mais profundamente os vórtices estáticos do modelo. O problema pode ser simplificado por uma escolha conveniente de calibre. Em particular, podemos tomar  $A_0 = 0$  se essa escolha for consistente com a lei de Gauss, como verificaremos ser o caso. Mesmo supondo soluções estáticas e fazendo essa escolha, o problema ainda fica bastante complexo. Afinal, (3.14) inclui na verdade duas equações, para as partes real e complexa de  $\varphi$ , enquanto (3.15) ainda possui outras 2 equações diferenciais parciais acopladas, dependentes de  $x$  e  $y$ , além da lei de Gauss. Uma técnica bastante útil na investigação dessas equações consiste em buscar soluções que sejam simétricas sob a ação de uma determinada simetria [31]. Esse procedimento é parecido com o que se faz costumeiramente no estudo de equações diferenciais lineares, como a de Laplace. Entretanto, ele é aqui menos poderoso, pois a não linearidade nos impede de usar as soluções simétricas como uma base ortogonal em termos da qual uma solução arbitrária do problema poderia ser escrita. Estamos investigando, portanto, um subconjunto das soluções do modelo. O problema de existência e unicidade dessas configurações deve ser investigado separadamente para cada teoria, assim como sua estabilidade, visto que nada proíbe a existência, dentro da mesma classe de homotopia, de configurações que não sejam invariantes por essa simetria, mas tenham menor energia. Ainda assim, esse método se prova bastante poderoso, e é em particular muito útil no caso dos vórtices, em que o ansatz considerado dá origem a uma classe ampla e importante de soluções. Há um ponto fundamental que precisa ser enfatizado: devemos sempre tomar a forma mais geral possível que seja compatível com a simetria desejada [31].

Tomando um ansatz tal que  $A_0 = 0$ , busquemos soluções que sejam simétricas com relação a rotações no plano. Por “simétricas”, não nos referimos ao sentido mais estrito da palavra, que consistiria em demandar que os campos fossem invariantes sob essas transformações. Em vez disso, exigimos que os campos sejam tais que o efeito dessa rotação (isto é, a ação do grupo  $SO(2)$  nas coordenadas espaciais) deve resultar sempre em uma transformação de calibre global, que corresponde a uma rotação no espaço interno. Analisando a ação dessa operação nos campos da teoria [62], é possível mostrar que o ansatz pode ser tomado na forma<sup>†</sup>

$$\varphi = h(r)e^{in\theta} \quad (3.30)$$

$$\mathbf{A} = \frac{n}{er}(1 - a(r))\hat{\theta}. \quad (3.31)$$

Veja que a rotação  $\theta \mapsto \theta + \theta_0$  de fato resulta apenas em uma mudança global na fase de  $\varphi$ . No infinito, exigiremos  $\varphi = ve^{in\theta}$ , condição que sabemos ser necessária à finitude da energia, e que significa que o material tem assintoticamente as propriedades de um supercondutor puro. Note que quando contornamos uma circunferência de raio infinito parametrizada por  $\theta$ ,  $\varphi$  é rotacionado  $n$  vezes no plano complexo, mostrando que esse inteiro pode ser identificado com a carga topológica. Mas, se  $n$  só aparece na seção dentro de uma fase, o que nos impede de usar uma transformação de calibre (como, por exemplo,  $\gamma = e^{-in\theta}$ ) para eliminá-lo completamente? Com base no que foi dito até agora, nada. Entretanto, é necessário que  $\varphi$  se anule em ao menos um ponto, que, pela invariância translacional da teoria, podemos supor ser a origem. Essa necessidade decorre do fato de que  $n$  corresponde ao número de zeros isolados em uma seção,

<sup>†</sup>Na verdade, essa imposição não exclui a presença de uma componente radial em  $\mathbf{A}$ . Entretanto, isso só é permitido se for  $A_r = A_r(r)$ , sendo possível, nesse caso, eliminar essa componente por meio da transformação de gauge global  $\gamma = e^{ieA_r}$ , que não afeta  $A_\theta$  e resulta na multiplicação de  $\varphi$  por  $\gamma$ , que, por depender apenas de  $r$ , pode ser absorvida em  $h(r)$  qualquer perda de generalidade.

contados com multiplicidade [110]. Quando  $|\varphi| = 0$ , sua fase não tem significado, de modo que a aplicação da transformação de calibre mencionada em todos os pontos perde o sentido. Essa condição garante que  $\varphi$  seja univocamente definido em  $r = 0$ . Além disso, a direção  $\hat{\theta}$  não está bem definida na origem, onde deve ser, portanto,  $\mathbf{A} = 0$  para que o potencial vetor seja não singular. No infinito,  $\mathbf{A}$  deve ser compatível com (3.28). Temos, portanto, as condições de contorno

$$\lim_{r \rightarrow \infty} h(r) = v, \quad (3.32) \quad h(0) = 0, \quad (3.33)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} a(r) = 0 \quad (3.34) \quad a(0) = 1. \quad (3.35)$$

Substituindo o ansatz na lei de Gauss, deduzimos que ela é satisfeita com  $E_k = J_0 = 0$ , mostrando que a escolha  $A_0 = 0$  não gera contradição. O vórtice de que estamos tratando não possui, portanto, carga elétrica. Na verdade, essa afirmação vale em um contexto mais geral: soluções das equações de movimento desse sistema que tenham carga elétrica diferente de zero devem ter, necessariamente, energia infinita [111]. Um antivórtice pode ser obtido trocando  $n$  por  $-n$ , o que equivale a inverter o sinal de  $\mathbf{A}$  e simultaneamente tomar o conjugado complexo de  $\varphi$ . Em notação vetorial, podemos escrever as componentes espaciais da derivada covariante como o operador  $\mathbf{D} = \nabla + \mathbf{A}$ . Utilizando a conhecida fórmula que dá o gradiente em coordenadas polares [112], deduzimos

$$\begin{aligned} \mathbf{D}\varphi &= (\partial_r h e^{in\theta}) \hat{r} + h \left( \frac{1}{r} \partial_\theta e^{in\theta} + ieA_\theta e^{in\theta} \right) \hat{\theta} \\ &= \left\{ \frac{dh(r)}{dr} \hat{r} - \frac{in h a}{r} \hat{\theta} \right\} e^{in\theta}. \end{aligned} \quad (3.36)$$

As componentes espaciais de  $J_\mu$  formam a corrente

$$\mathbf{J} = 2e \text{Im} \left\{ -h \frac{dh(r)}{dr} \hat{r} + h \frac{in h a}{r} \hat{\theta} \right\} = \frac{2e n a h^2}{r} \hat{\theta}, \quad (3.37)$$

em que  $\text{Im}(z)$  denota a parte imaginária de uma função complexa.

A corrente circula em torno da origem, possuindo simetria circular que reflete a classe de soluções investigada nesta seção. Usando a relação  $\hat{\theta} = -\sin\theta \hat{x} + \cos\theta \hat{y}$  [112], encontramos as componentes cartesianas

$$J_x = -\frac{2e n a h^2 \sin\theta}{r}, \quad J_y = \frac{2e n a h^2 \cos\theta}{r}. \quad (3.38)$$

O campo magnético é dado pelo rotacional

$$\mathbf{B} = \nabla \times \left[ \frac{n}{er} (1 - a(r)) \hat{\theta} \right] = -\frac{n a'}{er}, \quad (3.39)$$

em que a linha denota derivação com respeito à variável radial. As condições de contorno impostas garantem que essa expressão tenda a zero assintoticamente, como exige a condição de energia finita. Se considerarmos que o plano em que o sistema está definido está inserido num espaço euclidiano tridimensional (como, é claro, será o caso em um experimento real), podemos atribuir a esse campo a direção  $\hat{z}$ . A inversão do sinal de  $n$ , que corresponde a trocar um vórtice por antivórtice ou vice-versa, equivale à inversão do sentido da corrente que, portanto, origina

um campo magnético de mesma magnitude e direção, mas sentido contrário. Esse campo pode ser integrado para revelar explicitamente a condição de quantização do fluxo magnético, calculada em termos mais gerais na seção anterior. Ao projetar (3.15) na direção  $\hat{x}$  e usar a expressão encontrada para  $J_x$ , bem como  $F^{21} = B$ , somos levados à equação

$$\partial_y B = J^x = \frac{2neah^2 \sin \theta}{r}. \quad (3.40)$$

Escrevendo  $x, y$  e os respectivos versores em coordenadas polares, é possível deduzir:

$$\partial_i = - \left( \frac{x_i}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \varepsilon_{ij} \frac{x^j}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \right), \quad (3.41)$$

que, substituída em (3.40), dá

$$\frac{dB}{dr} + \frac{2neah^2}{r} = 0, \quad (3.42)$$

que é uma das equações de movimento do sistema. Se tivéssemos usado a direção  $y$ , seríamos levados à mesma igualdade, o que é consequência da simetria do ansatz. Colocando  $h = 0$  nessa equação, vemos que  $B$  atinge um ponto crítico quando o campo escalar se anula. Cálculos numéricos mostram que, em soluções simétricas,  $B$  é um máximo no centro do vórtice [21]. Podemos usar (3.39) para escrever essa equação em termos da função  $a(r)$ , resultando em

$$\frac{d^2 a}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{da}{dr} - 2nae^2 h^2 = 0. \quad (3.43)$$

Voltemos agora nossa atenção a (3.14). Primeiramente, note-se que, pela regra da cadeia, vale

$$V_{\bar{\varphi}} = \frac{1}{2} \frac{\varphi}{|\varphi|} V_{|\varphi|}, \quad (3.44)$$

que, para o nosso ansatz, fica

$$V_{\bar{\varphi}} = \lambda h (v^2 - h^2) e^{in\theta}. \quad (3.45)$$

Aplicando a “divergência covariante”  $\mathbf{D} \cdot = (\nabla \cdot + \mathbf{A} \cdot)$  em  $\mathbf{D}\varphi$ , que já calculamos em (3.36), deduzimos

$$\begin{aligned} \mathbf{D} \cdot \mathbf{D}\varphi &= e^{in\theta} \left\{ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dh}{dr} \right) + \frac{1}{r^2} n^2 h a + \frac{n(1-a)}{r} \left( \frac{nha}{r} \right) \right\} \\ &= e^{in\theta} \left\{ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dh}{dr} \right) - h \frac{n^2 a^2}{r^2} \right\}, \end{aligned} \quad (3.46)$$

que equivale à expressão  $D_k D_k \varphi$ . Substituindo (3.45) e (3.46) na versão estática de (3.14), encontramos

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dh}{dr} \right) - \frac{n^2 a^2}{r^2} h = \lambda h (v^2 - h^2), \quad (3.47)$$

que completa as equações de Lagrange para o caso de simetria circular. Vemos que o problema foi bastante simplificado em relação ao original, pois só sobraram duas equações diferenciais ordinárias acopladas. Mesmo assim, o problema é bastante complexo, e soluções analíticas não são conhecidas, embora um tratamento numérico seja factível. Vamos analisar o comportamento das soluções em uma pequena vizinhança da origem, mantendo apenas o primeiro termo não nulo na expansão em séries de potência. Pelas condições de contorno e continuidade, deve

ser possível escrever  $h(r) = g(r)$  e  $a(r) = 1 - b(r)$ , com  $g(r)$  e  $b(r)$  arbitrariamente pequenos se a vizinhança analisada for tomada como um disco centrado na origem, de raio suficientemente pequeno. Nessa aproximação, (3.43) se torna

$$b'' = \frac{b'}{r} \quad \therefore \quad b \propto \frac{r^2}{2}, \quad (3.48)$$

em que a condição de contorno  $b(0) = 0$  foi usada para eliminar uma constante aditiva. Colocando  $b = Cr^2/2$ , podemos escrever  $a^2 = Cr^2 + 1$  dentro dessa aproximação. Quando substituído em (3.47), esse resultado leva à equação

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dg(r)}{dr} \right) = \frac{1}{r^2} [\lambda v^2 r^2 + n^2 (r^2 C + 1)] g(r) \approx n^2 \frac{g(r)}{r^2}, \quad (3.49)$$

que é satisfeita por uma função da forma  $g(r) \propto r^n$ , como podemos verificar por substituição direta. Esse argumento nos revela que  $\phi$  possui um zero de multiplicidade  $n$  na origem. Então uma solução tipo vórtice ou antivórtice não pode ter nenhuma outra raiz, dada a já mencionada conexão entre  $n$  e esses zeros<sup>†</sup>. Podemos identificar a posição do vórtice com esse ponto central, em torno da qual a corrente circula. Como  $\varphi = 0$  representa a fase normal, temos um “caroço” dessa fase dentro de um material supercondutor. Em todos os pontos fora do caroço, o material se encontra na fase intermediária, sendo formalmente um supercondutor apenas no infinito. Se defeitos desse tipo se encontrarem, é possível que os zeros se juntem em um só, dando origem a uma solução que tem um zero de multiplicidade  $n_1 + n_2$ . Em particular, quando  $n_1 = -n_2$ , o zero pode desaparecer, o que corresponde à aniquilação de um par vórtice-antivórtice. Na prática, o problema é mais complicado devido a questões de estabilidade: uma solução com carga topológica  $n$  pode decair em um conjunto de vários vórtices e antivórtices, desde que a soma das cargas topológicas dessas estruturas seja  $n$  (a solução resultante não será, nesse caso, simétrica). Matematicamente, teremos um zero de multiplicidade  $n$  se dividindo em vários outros zeros, que marcam posição dos novos defeitos. É ainda possível, se houver energia suficiente disponível, que um par vórtice-antivórtice seja criado numa região em que antes não existiam defeitos. O fluxo magnético dessa configuração ainda é nulo, visto que a contribuição do antivórtice cancela exatamente a do vórtice.

As componentes do tensor energia-momento para esse ansatz se escrevem, por (3.18)

$$T_{00} = \frac{1}{2} \left( \frac{na'}{er} \right)^2 + h'(r)^2 + \left( \frac{nah}{r} \right)^2 + \frac{\lambda}{2} (v^2 - h^2)^2 \quad (3.50)$$

$$T_{0j} = T_{j0} = 0 \quad (3.51)$$

$$T_{jk} = \delta_{jk} \left[ - \left( \frac{na'}{er} \right)^2 + h'^2 + \left( \frac{nah}{r} \right)^2 - \frac{\lambda}{2} (v^2 - h^2)^2 \right] + \frac{2}{r^2} \left( x_j x_k h'^2 + \frac{n^2 h^2 a^2 \epsilon_{aj} \epsilon_{bk} x^a x^b}{r^2} \right). \quad (3.52)$$

O primeiro termo da densidade de energia é a expressão  $B^2/2$  (que aqui não tem campo elétrico, como verificamos), conhecida da teoria de Maxwell, em que ela dá a energia do campo magnético. Analisando (3.36), vemos que o segundo e terceiro termo correspondem a  $\mathbf{D}\varphi \cdot \mathbf{D}\varphi$ ,

<sup>†</sup>Intuitivamente, podemos entender propriedade com base na simetria do problema, já que uma solução com dois ou mais zeros distintos certamente não é simétrica sob rotações. Entretanto, esse argumento só constitui uma demonstração se assumirmos que os zeros são isolados.

a generalização natural da expressão  $\nabla\varphi \cdot \nabla\varphi$  que tínhamos nas teorias puramente escalares. Por fim, o termo de autointeração, dado por  $V(h)$ . Pelas condições de contorno impostas, todas essas contribuições tendem a zero separadamente, o que é necessário para que a energia seja finita. O fluxo de energia nas direções  $x$  e  $y$  (análogos às componentes do vetor de Poynting na teoria eletromagnética sem campo escalar) é nulo.

Note-se que no caso  $a(r) \equiv 1$  (vórtice global), a energia diverge. Isso ocorre porque a parcela  $(nah/r)^2$  da densidade de energia dará assintoticamente uma contribuição  $(nv/r)^2$ , que corresponde a um integrando  $\propto 1/r$  no funcional de energia. A menos que seja  $n = 0$ , essa contribuição resultará em divergência logarítmica. Então apenas as soluções triviais podem ter energia finita na teoria global, ao passo que a versão local da teoria permite soluções de qualquer classe topológica, desde que  $a(r)$  e  $a'(r)$  tendam a zero suficientemente rápido no infinito. Como (3.50) foi calculada para o ansatz de simetria circular, seria possível questionar se essa diferença é consequência dessa restrição, o que não é o caso. Na verdade, uma aplicação do argumento de Derrick nos mostra que a condição de energia finita para o vórtice global implica  $E_g = E_p = 0$ , sendo  $E_g$  e  $E_p$  definidos como na seção 2.6. Segue que  $\varphi$  deverá ser a solução constante. Isso ocorre porque a imposição  $|\partial_\theta\varphi| \rightarrow 0$  da teoria global é muito mais restritiva do que a condição análoga,  $|D_\theta\varphi| \rightarrow 0$ , que vale na versão local.

Conquanto uma forma analítica não seja conhecida para nenhuma solução não trivial das equações (3.47) e (3.43), sua existência é demonstrada em [113]. O fato de essas soluções existirem para qualquer valor de  $n$  significa que a imposição de invariância com relação a rotações no plano não restringe as classes topológicas possíveis para as soluções. Essa conclusão não é de modo algum trivial e há, de fato, situações em que a escolha de um ansatz por um método similar ao utilizado nessa seção restringe as classes topológicas possíveis, como é o caso do ansatz de t' Hooft Polyakov, estudado no próximo capítulo.

A estabilidade dessas soluções é estudada detalhadamente por Gustafson e Sigal em [114], onde é mostrado que os casos  $n = \pm 1$  (e, obviamente, o caso trivial em que  $n = 0$ ) são estáveis para todo  $\lambda$ , ao passo que, no caso geral, a estabilidade depende do valor desse parâmetro, o qual pode ser usado para classificar os supercondutores em tipo-1 ( $\lambda < e^2$ ) e tipo-2 ( $\lambda > e^2$ ). No trabalho mencionado os autores mostram que, em supercondutores tipo-1, todas as soluções são estáveis, ao passo que, para supercondutores do tipo-2, elas são instáveis sempre que  $|n| > 1$ . Nesse caso, um  $n$ -vórtice comumente decai em soluções de com  $n$  vórtices de carga topológica unitária.

Podemos dar uma interpretação física para essa dependência da estabilidade com o valor de  $\lambda$  ao considerarmos uma interface plana separando regiões de estado normal e supercondutor. A tensão superficial nessa interface muda de sinal justamente quando  $\lambda = e^2$ , sendo ela positiva antes e negativa depois desse valor [115]. Quando essa tensão é positiva, os vórtices tendem a se aglomerar para diminuir a superfície de contato entre as duas regiões, ao passo que o caso em que a tensão é negativa os leva a maximizar essa superfície. Na referência [116], os autores verificam, por simulações numéricas, a existência de uma interação entre vórtices, que é atrativa para supercondutores tipo-1 e repulsiva para tipo-2. Um caso limite muito especial ocorre quando  $\lambda = e^2$ , em que os vórtices não interagem [117], o que possibilita a existência de configurações estáveis contendo vórtices em posições relativas arbitrárias. Investigaremos esse limite na subseção 3.2.4.

### 3.2.3 Equações assintóticas

Diante das dificuldades encontradas na resolução direta de (3.43) e (3.47), vamos nos contentar com a análise assintótica dessas equações. Supondo as funções  $a(r)$  e  $h(r)$  matematica-

mente bem comportadas no infinito, deve ser possível a introdução de funções  $\tilde{h}$  e  $\tilde{a}$  tais que

$$h(r) = v + \tilde{h} + \mathcal{O}(\tilde{h}^2) \quad (3.53)$$

e

$$a(r) = \tilde{a} + \mathcal{O}(\tilde{a}^2). \quad (3.54)$$

Notando que, na mesma ordem de aproximação,

$$\lambda h(v^2 - h^2) \approx \lambda(v + \tilde{h})(-2\tilde{h}v) \approx -2\lambda v^2 \tilde{h}, \quad (3.55)$$

podemos escrever (3.47) na forma

$$r^2 \tilde{h}'' + r \tilde{h}' - 2\lambda v^2 r^2 \tilde{h} = 0 \quad (3.56)$$

que é uma equação de Bessel modificada de ordem 0 [35], cujas soluções linearmente independentes são as funções de Bessel modificadas de primeira e segunda espécie, representadas respectivamente por  $I_0(\sqrt{2\lambda v^2 r})$  e  $K_0(\sqrt{2\lambda v^2 r})$ . O uso da forma assintótica dessas funções, encontrada em [35], nos revela que, quando  $r \rightarrow \infty$ ,  $K_0 \rightarrow 0$  e  $I_0 \rightarrow \infty$ , de modo que nossas condições de contorno só são compatíveis com

$$h = v + CK_0(\sqrt{2\lambda v^2 r}) + \mathcal{O}[(K_0(\sqrt{2\lambda v^2 r}))^2], \quad (3.57)$$

em que  $C$  é uma constante. De modo semelhante:

$$\tilde{a}'' - \frac{1}{r} \tilde{a}' - 2e^2 v^2 \tilde{a} = 0 \quad (3.58)$$

Das substituições  $\zeta = \tilde{a}/r$  e  $u = \sqrt{2}evr$  resulta

$$u^2 \zeta'' + u \zeta' - u^2 \zeta = 0, \quad (3.59)$$

onde  $\zeta' \equiv d\zeta/du$ , etc. Repetindo a análise que conduziu a (3.57), podemos escrever

$$a = DK_1(\sqrt{2e^2 v^2 r}) + \mathcal{O}[(K_1(\sqrt{2e^2 v^2 r}))^2], \quad (3.60)$$

com  $D$  constante. Note que os argumentos das funções de Bessel que dão as formas assintóticas das soluções são justamente  $m_\psi r$  (para  $h(r)$ ) e  $Mr$  (para  $a(r)$ ), onde  $m_\psi$  e  $M$  são, respectivamente as expressões que encontramos para as massas do campo de Higgs e de gauge. Se usarmos a expansão assintótica das funções de Bessel modificada de segunda ordem [35], podemos escrever

$$\psi \approx Fr^{-1/2} e^{-m_\psi r}, \quad (3.61)$$

$$a \approx Gr^{-1/2} e^{-Mr}, \quad (3.62)$$

em que  $\psi = h - v$  e  $F$  e  $G$  são constantes.

### 3.2.4 Limite de Bogomol'nyi

O modelo governado pela lagrangiana (3.9) foi um dos exemplos estudados por Evgeny Bogomol'nyi em seu trabalho acerca da estabilidade de soluções clássicas [59]. O método por ele utilizado nos permite encontrar um limite inferior para a energia do sistema quando a condição  $\lambda = e^2$  é satisfeita. Como discutido acima, essa não é uma imposição arbitrária sobre

a forma do potencial, tendo significados físicos que podem ser interpretados à luz da teoria de Ginzburg-Landau ou das interações entre múltiplos vórtices. Em particular, é esse o limite em que a energia de interação entre vórtices tende a zero, e é também nele que as massas que encontramos para os campos de gauge e de Higgs se tornam iguais. Satisfeita essa condição, podemos escrever, no caso estático:

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} \int (B^2 + 2D_k \phi \overline{D_k \phi} + e^2(v^2 - |\phi|^2)^2) d^2x \\ &= \int \left\{ \frac{1}{2} [B \mp (v^2 - |\phi|^2)]^2 \pm eB(v^2 - |\phi|^2) + |D_1 \phi \pm iD_2 \phi|^2 \right. \\ &\quad \left. \mp i(\overline{D_1 \phi} D_2 \phi - \overline{D_2 \phi} D_1 \phi) \right\} d^2x, \end{aligned} \quad (3.63)$$

em que não foi utilizado o ansatz circularmente simétrico. Abrindo os termos na última expressão entre parênteses, encontramos:

$$\begin{aligned} \overline{D_1 \phi} D_2 \phi &= \partial_1 (\overline{\phi} D_2 \phi) - \overline{\phi} (\partial_1 \partial_2 \phi + ieA_2 \partial_1 \phi + ie\phi \partial_1 A_2) \\ &\quad - ieA_1 \overline{\phi} \partial_2 \phi + e^2 A_1 A_2 |\phi|^2, \end{aligned} \quad (3.64)$$

$$\begin{aligned} \overline{D_2 \phi} D_1 \phi &= \partial_2 (\overline{\phi} D_1 \phi) - \overline{\phi} (\partial_2 \partial_1 \phi + ieA_1 \partial_2 \phi + ie\phi \partial_2 A_1) \\ &\quad - ieA_2 \overline{\phi} \partial_1 \phi + e^2 A_2 A_1 |\phi|^2, \end{aligned} \quad (3.65)$$

cuja subtração revela

$$\mp i(\overline{D_1 \phi} D_2 \phi - \overline{D_2 \phi} D_1 \phi) = \mp i[\partial_1 (\overline{\phi} D_2 \phi) - \partial_2 (\overline{\phi} D_1 \phi)] \pm eB|\phi|^2. \quad (3.66)$$

A substituição dessas expressões no funcional de energia e cancelamento de termos semelhantes conduz à igualdade:

$$\begin{aligned} E &= \int d^2x \left\{ \frac{1}{2} [B \mp e(v^2 - |\phi|^2)] + |D_1 \phi + iD_2 \phi|^2 \right\} \pm ev^2 \int d^2x B \\ &\quad \mp \int d^2x [\partial_1 (\overline{\phi} D_2 \phi) - \partial_2 (\overline{\phi} D_1 \phi)], \end{aligned} \quad (3.67)$$

em que se reconhece, no último termo, o rotacional do vetor  $(\overline{\phi} D_1 \phi \hat{x} + \overline{\phi} D_2 \phi \hat{y})$ , cujas componentes são forçadas a tender a zero para que se satisfaça a condição de energia finita. A aplicação do teorema de Stokes mostra, portanto, que a última integral não contribui para a energia. Essas considerações conduzem ao vínculo de Bogomol'nyi:

$$E \geq 2\pi v^2 |n|, \quad (3.68)$$

com igualdade satisfeita se, e somente se, a solução satisfaz as equações BPS:

$$B = \pm e(v^2 - |\phi|^2) \quad (3.69)$$

e

$$(D_1 \pm iD_2)\phi = 0. \quad (3.70)$$

Uma das características que tornam essa classe de soluções especial é o fato de que, assim como acontecia com campos escalares, a saturação do vínculo de Bogomol'nyi permite que a

energia seja identificada sem que seja necessário resolver as equações de movimento. Mais do que isso: essa energia é proporcional ao fluxo magnético, de modo que a medição desse fluxo pode ser usada para encontrar a energia no caso de acoplamento crítico. Ainda mais importante é o fato de que essas soluções são, por construção, mínimos do funcional de energia, o que garante sua estabilidade no nível clássico.

Essas equações podem ser combinadas em uma única igualdade [118], escrita em termos da variável  $\xi \equiv \ln|\varphi|$ , de modo que  $\varphi = \exp(\xi + i\alpha)$ , válida quando  $|\varphi| \neq 0$ . Consideremos, por simplicidade as equações de sinal positivo em (3.69) e (3.70). A parte real da equação envolvendo as derivadas covariantes se escreve:

$$\partial_1 \xi - \partial_2 \alpha = -eA_2, \quad (3.71)$$

ao passo que a parte imaginária nos leva a

$$\partial_2 \xi + \partial_1 \alpha = eA_1. \quad (3.72)$$

Derivando, respectivamente, essas igualdades com respeito a  $x_1$  e  $x_2$  e somando as expressões resultantes, escrevemos o campo magnético em termos da variável  $\xi$ :

$$eB = -\nabla^2 \xi \quad (3.73)$$

donde, por (3.69),

$$\nabla^2 \xi + e^2[v^2 - \exp(2\xi)] = 0, \quad (3.74)$$

que, enfatizamos novamente, vale quando  $|\varphi| \neq 0$ , visto que o logaritmo que define  $\xi$  diverge nos zeros de  $\varphi$ . Esses pontos podem, entretanto, ser incluídos se adicionarmos ao lado direito de (3.74) um termo contendo funções delta centradas nos zeros da seção, resultando em [120]

$$\nabla^2 \xi + e^2[v^2 - \exp(2\xi)] = 2\pi \sum_j \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j), \quad (3.75)$$

onde o somatório vai de 1 a  $n$  e os  $\mathbf{x}_j$  são os zeros, não necessariamente distintos (ou seja, um zero de multiplicidade  $m$  é contado  $m$  vezes nessa soma). Levando em conta (3.73) e analisando (3.75), vemos que o campo magnético possui picos próximos aos zeros. O fator multiplicativo  $2\pi$  garante que essa equação, com o uso de (3.73), leve à expressão correta para o fluxo magnético. Assim, a conexão entre os zeros de  $\varphi$  e o fluxo quantizado pode ser visualizada de forma bastante direta. No infinito, a integração em uma circunferência de raio infinito engloba todos os zeros, e cada um deles é responsável por uma contribuição  $2\pi m/e$ , onde  $m$  é sua multiplicidade. Se analisarmos a integral de fluxo em um círculo centrado em um dos zeros, obteremos essa contribuição individual, o que mostra que cada zero isolado pode ser interpretado como um vórtice da teoria, cada um dos quais é estável porque, no acoplamento crítico, eles não se atraem ou repelem. Ainda vemos que essa quantização está relacionada ao fato de os zeros serem isolados (ou seja, não há nenhum tipo de “linha” de zeros no plano  $xy$ . A existência de uma tal linha também implicaria em um número infinito de zeros e, portanto, uma energia de Bogomol’nyi infinita).

Note que, mesmo sem a suposição de simetria circular, o problema já está grandemente simplificado, uma vez que temos, agora, uma única equação diferencial envolvendo apenas a magnitude de  $|\varphi|$ . No influente trabalho de Taubes [119], é demonstrado que, no caso  $\lambda = e^2$ , todas as soluções estáticas de energia finita do modelo resolvem as equações de primeira ordem, o que significa que o estudo das equações BPS é, nessas condições, completamente equivalente

ao caso geral. Esse fato, além da já mencionada existência e estabilidade de soluções com múltiplos vórtices/antivórtices em posições arbitrárias, faz com que o estudo do caso  $\lambda = e^2$  seja extremamente rico, e por isso muitos resultados sobre as soluções de (3.69) e (3.70) podem ser encontrados na literatura. Na referência [120], essa equação é estabelecida e as propriedades da solução e de seus zeros são estudadas a fundo, sendo, em particular, demonstrado que, em todo o espaço, vale  $|\varphi| < v$ . Por (3.69) isso implica que  $B$  jamais muda de sinal.

Podemos inserir as soluções simétricas diretamente em (3.69) e (3.70) para obter a forma das equações BPS na presença dessa simetria. Como já calculamos a densidade de energia em (3.50), é mais rápido simplesmente completar quadrados novamente, para obter

$$\begin{aligned} \rho(r) &= \frac{1}{2} \left[ \frac{na'}{er} \mp e(v^2 - h^2) \right]^2 \pm \frac{na'}{r} (v^2 - h^2) + \left( h' \pm \frac{nah}{r} \right)^2 \mp \frac{2h'nah}{r} \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{na'}{er} \mp e(v^2 - h^2) \right]^2 + \left( h' \pm \frac{nah}{r} \right)^2 \pm \frac{n}{r} \frac{d}{dr} [a(v^2 - h^2)], \end{aligned} \quad (3.76)$$

cuja integral sobre o plano dá a desigualdade (3.68), e conduz às equações de primeira ordem

$$\frac{na'}{er} = \pm e(v^2 - h^2), \quad (3.77)$$

$$h' = \mp \frac{nah}{r}, \quad (3.78)$$

em que os sinais superiores dão uma solução tipo vórtice, e os inferiores um antivórtice. É claro que, no caso simétrico, essas soluções descrevem um único (anti)vórtice, já que o zero da origem tem multiplicidade  $n$ . Note que, satisfeitas as equações de primeira ordem, a densidade de energia pode ser escrita na forma simples

$$\rho = \left( \frac{na'}{er} \right)^2 + 2h'^2 = B^2 + 2h'^2. \quad (3.79)$$

Considere as equações que dão o vórtice simétrico. Nesse caso, como  $|\varphi| < v$  em todo o plano,  $B$  é estritamente positivo. Por conseguinte, a relação (3.39) nos mostra que  $a'(r)$  é uma função estritamente negativa, de modo que  $a(r)$  é sempre decrescente, sendo uma função positiva que vai de 1 a 0. Então, como  $a(r)$  só se nula no infinito, (3.42) nos revela que o campo magnético só tem um ponto crítico no (único) zero de  $h$ , que ocorre no centro do vórtice. Por (3.77) vemos que, na vizinhança da origem,  $B$  decresce, de modo que esse ponto crítico só pode ser um máximo. Temos então uma figura fisicamente consistente, em que o campo magnético é mais intenso na região em que o material está no estado normal e sua magnitude diminui à medida que nos aproximamos do estado supercondutor, em que o campo é expelido. Por (3.79), vemos que a densidade de energia também tem um pico na origem, já que  $\rho \geq B^2$  em todo o espaço.

### 3.3 Vórtices de Chern-Simons

Além do modelo de Maxwell-Higgs, há outras teorias de calibre abelianas que também permitem soluções tipo vórtice, algumas das quais apresentam propriedades interessantes e notavelmente distintas das estudadas acima. Um desses modelos é obtido por meio da adição do termo de Chern-Simons(CS) [121]

$$\mathcal{L}_{C.S.} = \frac{\kappa}{4} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} A_\alpha F_{\beta\gamma} \quad (3.80)$$

à já estudada lagrangiana de Maxwell-Higgs [121]. Iremos, no entanto, nos concentrar no caso em que o parâmetro  $\kappa$  é suficientemente grande<sup>†</sup> para que se estude a chamada “eletrodinâmica de Chern-Simons”, em que o termo CS domina o de Maxwell, que pode nesses casos ser descartado, resultando na lagrangiana

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \mathcal{L}_{C.S.} + D^\mu \phi \overline{D_\mu \phi} - V(|\phi|) \\ &= \partial_\mu \phi \partial^\mu \overline{\phi} + ie A_\mu j^\mu + e^2 A_\mu A^\mu \phi \overline{\phi} + \frac{\kappa}{2} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} A_\alpha \partial_\beta A_\gamma - V(|\phi|) \end{aligned} \quad (3.81)$$

em que  $j^\mu \equiv \overline{\phi} \partial^\mu \phi - \phi \partial^\mu \overline{\phi}$  é uma corrente associada apenas ao campo escalar. Uma diferença importante entre essa teoria e a de Maxwell-Higgs é que a lagrangiana (3.81) não é invariante sob transformações de gauge do grupo  $U(1)$ . Com efeito, submetendo (3.80) a uma transformação de gauge  $\gamma = e^{ie\Lambda}$ , obtemos

$$\mathcal{L}_{C.S.} \rightarrow \mathcal{L}_{C.S.} + \frac{\kappa}{2} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} (A_\alpha \partial_\beta A_\gamma + A_\alpha \partial_\beta \partial_\gamma \Lambda + \partial_\alpha \Lambda \partial_\beta A_\gamma), \quad (3.82)$$

usando a simetria das derivadas parciais e o fato de que a contração de um tensor antissimétrico com um simétrico é identicamente nula, encontramos

$$\mathcal{L}_{C.S.} \rightarrow \mathcal{L}_{C.S.} + \frac{\kappa}{2} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} \partial_\alpha (\Lambda \partial_\beta A_\gamma), \quad (3.83)$$

que é um termo de superfície. Nesta dissertação, estamos considerando condições de contorno tomadas no infinito, onde deve ser  $|F_{\mu\nu}| \rightarrow 0$  para soluções de energia finita. Nessas condições, a ação é invariante sob transformações de calibre não divergentes. Note que, em situações nas quais os valores dos campos na fronteira precisam ser considerados (como acontece, por exemplo, em uma região de volume finito), a presença do termo (3.80) nos obriga a impor restrições mais fortes às transformações de calibre aceitáveis. O trabalho [122], no qual um modelo abeliano unidimensional com termo de Chern-Simons é proposto como uma teoria efetiva para o estudo de moléculas de proteínas, exemplifica um contexto em que essa restrição tem consequências fisicamente relevantes.

Estudaremos novamente um modelo com quebra espontânea de simetria induzida pelo campo de Higgs. Poderíamos novamente tomar o modelo quártico estudado na seção anterior, mas, como trocamos o termo de Maxwell por  $\mathcal{L}_{C.S.}$ , não conseguiremos obter um limite de Bogomol’nyi nesse caso. Aqui, será mais conveniente usar um potencial da forma [121]

$$V(|\phi|) = \frac{\lambda^2}{4} [ (|\phi|^2 - v^2)^3 + \alpha^2 v^2 (|\phi|^2 - v^2)^2 ], \quad (3.84)$$

onde  $\alpha^2 \geq 1$ . Note-se que esse potencial possui um mínimo em  $|\phi| = 0$ , em que a quebra de simetria não ocorre. A condição  $\alpha^2 \geq 1$  garante que o mínimo assimétrico seja global.

O tensor energia-momento pode ser calculado, como sempre, por meio da derivada funcional da ação em relação à métrica. A esse respeito, é interessante notar que o termo de Chern-Simons não contribui para o cálculo. Com efeito, seja introduzida uma variação de primeira ordem na métrica, e consideremos a contribuição de (3.80) para  $\delta S$ :

<sup>†</sup>Como mencionado em [121], essa aproximação é boa para grandes distâncias e baixas energias.

$$\delta S_{\text{C.S.}} = \delta \left\{ \int d\Omega \sqrt{|g|} \left( \frac{\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}}{\sqrt{|g|}} A_\alpha F_{\beta\gamma} \right) \right\}, \quad (3.85)$$

em que  $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}$  é o *símbolo* de Levi-Civita, ao qual deve ser incorporado, quando é variada a métrica, o fator  $|g|^{-1/2}$ , para obter o *tensor* de Levi-Civita [36], que é a quantidade presente em (3.80). No espaço-tempo plano, a distinção é irrelevante, uma vez que  $\sqrt{|g|} = 1$ , e por isso é comum usar a mesma notação para símbolo e tensor de Levi-Civita. Como  $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}$  tem, por definição, as mesmas componentes em qualquer sistema de coordenadas, vemos que a dependência da métrica em (3.85) se cancela, resultando em  $\delta S_{\text{C.S.}} = 0$ , o que faz com que apenas a porção invariante por gauge da lagrangiana contribua para a densidade de energia. Teorias com essa característica são denominadas *teorias topológicas do tipo Schwarz* [123]. Na verdade, o termo de Chern-Simons é formalmente definido, para esse sistema, em termos da 3-forma  $F \wedge A$ , em que  $A = A_\mu dx^\mu$ ,  $F = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu$ , onde  $\wedge$  denota o *produto exterior*<sup>†</sup>. Foi com esse formalismo que Chern e Simons originalmente introduziram essa classe de modelos [124], o que explica a forma da lagrangiana. Teorias do tipo Chern-Simons também podem ser definidas de forma natural para grupos de Lie não abelianos, e em qualquer espaço-tempo de dimensão ímpar. É ainda possível inserir a teoria num espaço-tempo de dimensão par, como feito em [125], com uma “variável de inserção”. Termos de Chern-Simons aparecem, entre outros, em teorias modificadas de gravitação [125, 126] e no estudo da supercondutividade anyônica [127], em particular na relação dessas quasipartículas com o efeito Hall quântico fracionário [128].

O tensor energia-momento é dado por:

$$T_{\mu\nu} = D_\mu \overline{\varphi} D_\nu \varphi + D_\nu \overline{\varphi} D_\mu \varphi - \eta_{\mu\nu} [D^\alpha \overline{\varphi} D_\alpha \varphi - V(|\varphi|)], \quad (3.86)$$

e é invariante por transformações de calibre. As equações de movimentam resultantes de (3.81) são:

$$D_\mu D^\mu \varphi + V_{\overline{\varphi}} = 0 \quad (3.87)$$

$$\frac{\kappa}{2} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} F_{\beta\gamma} = J^\alpha, \quad (3.88)$$

onde  $J^\alpha \equiv j^\alpha - 2e^2 A^\alpha |\varphi|^2$ . Em termos dos campos elétrico e magnético, as equações (3.88) se escrevem:

$$\kappa B = -J_0 \quad (3.89)$$

$$\kappa E_k = \varepsilon_{ik} J^i. \quad (3.90)$$

as quais, em contraste com a eletrodinâmica de Maxwell, são equações de primeira ordem. Em particular, (3.89) é a lei de Gauss dessa teoria. Fisicamente, a mudança nessa lei é uma consequência extremamente significativa da presença de um termo de Chern-Simons, visto que a densidade de carga elétrica agora depende do campo magnético. Uma consequência desse fato é

$$Q = \int da J_0 = -\kappa \Phi, \quad (3.91)$$

em que  $Q$  é a carga elétrica, de modo que os vórtices dessa teoria devem ser necessariamente carregados. Entretanto, veremos que, mesmo assim, é possível a presença de vórtices de energia

<sup>†</sup>Um breve e didático tratamento sobre formas diferenciais, incluindo as definições de produto e derivada exterior, pode ser encontrado em [36]

finita nessa teoria, em notável contraste com o sistema que estudamos na seção anterior. A presença de um termo de Maxwell na lagrangiana faz com que a divergência  $\nabla \cdot \mathbf{E}$  seja adicionada ao lado esquerdo da lei de Gauss [62]. Nessa situação, (3.91) continua válida, pois o campo elétrico tende a zero no infinito.

O vácuo da teoria é similar ao que encontramos no modelo de Maxwell-Higgs, sendo novamente possível a introdução de um inteiro que classifica as soluções. Há, entretanto, o caso  $\alpha = \nu = 1$ , que tem o mínimo global  $\varphi = 0$  que não induz quebra de simetria. Por ser apenas um ponto, os mapas entre o infinito e esse vácuo são topologicamente triviais, e nenhuma solução topológica pode tender a esse vácuo. Iremos portanto nos concentrar apenas em soluções nas quais  $|\varphi| \rightarrow \nu$ , mesmo que essa condição não seja sempre necessária para a finitude da energia. A partir de um procedimento virtualmente idêntico ao que foi feito na seção anterior, concluímos que a quebra de simetria implica em uma massa  $m_\psi = \lambda \alpha \nu^2$  para o campo de Higgs. Analisando (3.88) próximo ao vácuo e usando a propriedade [129]

$$\varepsilon_{\alpha\mu\nu}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma} = \delta_\mu^\beta \delta_\nu^\gamma - \delta_\nu^\beta \delta_\mu^\gamma,$$

podemos escrever

$$\kappa \left( \delta_\beta^\mu \delta_\gamma^\nu - \delta_\gamma^\mu \delta_\beta^\nu \right) \partial^\beta A^\gamma = \kappa F^{\mu\nu} = -2e^2 \nu^2 \varepsilon^{\alpha\mu\nu} A_\alpha, \quad (3.92)$$

donde

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = -\frac{4e^4 \nu^4}{\kappa^2} A^\nu, \quad (3.93)$$

que tem a mesma forma de (3.24), de modo que, pelo mesmo argumento, podemos atribuir ao campo de gauge a massa  $M = 2e^2 \nu^2 / |\kappa|$ .

Por depender apenas da forma da derivada covariante e das condições assintóticas para  $D_\theta \varphi$ , o argumento que levou à dedução de (3.29) continua válido, de modo que, novamente:

$$\Phi = \frac{2\pi n}{e}, \quad (3.94)$$

donde, por (3.91),

$$Q = -\kappa \frac{2\pi n}{e}, \quad (3.95)$$

de modo que a carga elétrica é, neste modelo, uma grandeza cujo valor pode ser previsto com base apenas nas características topológicas da solução, o que não é possível na eletrodinâmica de Maxwell.

### 3.3.1 Soluções com simetria circular

Consideremos agora soluções independentes do tempo. Aqui,  $j^0 = 0$ , donde, pela definição de  $J^\mu$ ,

$$J^0 = -2e^2 A_0 |\varphi|^2 \quad (3.96)$$

$$\therefore A_0 = \frac{-J_0}{2e^2 |\varphi|^2} \quad (3.97)$$

(3.97) e (3.88) resultam em

$$A_0 = \frac{\kappa B}{2e^2 |\varphi|^2}, \quad (3.98)$$

o que implica em um novo contraste com a teoria de Maxwell-Higgs: o campo magnético se anula nos zeros da seção, em vez de ser um máximo.

Exigiremos novamente que a solução seja circularmente simétrica, de modo que  $\varphi$  e  $\mathbf{A}$  continuem dados, respectivamente, por (3.30) e (3.31), com as equações de contorno definidas por (3.32)–(3.35). Como consequência,  $\mathbf{J}$  continua obedecendo (3.37) e a relação

$$B = -\frac{na'}{er}, \quad (3.99)$$

continua válida. É claro que  $a(r)$  é agora solução de uma equação diferencial diferente, de modo que essa semelhança formal não deve ser confundida com a afirmação de que o comportamento de  $B$  não muda. Adicionalmente, tomemos:

$$A_0 = f(r). \quad (3.100)$$

Como  $A_0$  pode ser determinada em termos dos outros campos pela igualdade (3.98), nenhuma nova condição de contorno precisa ser imposta. O uso desse ansatz, junto à relação  $\mathbf{E} = -\nabla A_0$ , que segue da definição do campo elétrico, conduz à equação:

$$\mathbf{E} = -\frac{df}{dr}\hat{r}, \quad (3.101)$$

ou

$$E_k = -\frac{x^k f'}{r} = \frac{x_k f'}{r}, \quad (3.102)$$

ao passo que o campo magnético se escreve, por (3.30), (3.98) e (3.100), na forma

$$B = \frac{2f(r)e^2 h^2}{\kappa}. \quad (3.103)$$

Juntas, as equações (3.90), (3.37), e (3.102) nos conduzem à equação diferencial:

$$\frac{df}{dr} + \frac{2neah^2}{\kappa r} = 0. \quad (3.104)$$

De (3.89), (3.39) e da definição de  $J^0$ , encontramos

$$\frac{da}{dr} + \frac{2e^3 r h^2 f}{\kappa n} = 0, \quad (3.105)$$

em que podemos isolar  $f$  para escrever

$$f = -\frac{\kappa n}{2e^3 r h^2} \left( \frac{da}{dr} \right). \quad (3.106)$$

Essa equação pode ser usada para eliminar  $df/dr$  em (3.104), o que resulta na troca de duas equações de primeira ordem, (3.104) e (3.105), pela seguinte equação de segunda ordem:

$$r \frac{d}{dr} \left( \frac{1}{r} \frac{da}{dr} \right) - 2 \frac{d[\ln(h)]}{dr} \frac{da}{dr} - a \left( \frac{2e^2 h^2}{\kappa} \right)^2 = 0. \quad (3.107)$$

A equação para  $h(r)$  é semelhante a (3.47), com a diferença de que o potencial é dado por (3.84) e o termo  $D^0 \varphi \overline{D_0 \varphi} = (ef)^2 h$  é agora diferente de zero. Assim:

$$h(ef)^2 + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dh}{dr} \right) - \frac{n^2 a^2}{r^2} h = \frac{\lambda^2}{4} [3h(h^2 - v^2)^2 + 2\alpha^2 v^2 h(h^2 - v^2)]. \quad (3.108)$$

Uma análise similar àquela conduzida na subseção (3.2.3) pode ser usada para escrever a forma assintótica das soluções dessas equações de movimento em termos de funções de Bessel de segunda espécie. Uma investigação desse tipo pode ser encontrada em [58].

As expressões obtidas acima resultam em um tensor  $T_{\mu\nu}$  de componentes

$$T_{00} = h'^2 + \left(\frac{nha}{r}\right)^2 + \left[\left(\frac{na'}{er}\right)\left(\frac{\kappa}{2eh}\right)\right]^2 + V(h), \quad (3.109)$$

$$T_{0k} = -\frac{2enah^2 f \varepsilon_{kj} x^j}{r^2} = \frac{\kappa na \varepsilon_{kj} x^j}{er^2} \left(\frac{na'}{er}\right), \quad (3.110)$$

$$T_{kj} = 2 \left[ \frac{x_k x_j}{r^2} h'^2 + \left(\frac{nha}{r^2}\right)^2 \varepsilon_{kl} \varepsilon_{ij} x^l x^i \right] + \delta_{jk} \left[ h'^2 + \left(\frac{nha}{r}\right)^2 + e^2 f^2 h^2 - V \right], \quad (3.111)$$

que é bem diferente do que encontramos quando o campo eletromagnético é regido pelas leis de Maxwell. Note que a presença do parâmetro  $\kappa$  mostra que, embora o termo CS não contribua diretamente para o tensor de energia-momento, seu efeito sobre as soluções das equações de movimento faz com que ele tenha influência sobre a energia do sistema. Note também que numa solução não topológica (o caso  $n = 0$ ) o termo dependente de  $\kappa$  desaparece, o que segue do fato de que soluções não topológicas têm carga elétrica e fluxo magnético nulo. Além disso, soluções com  $n \neq 0$  possuem densidade de momento, mesmo com campos independentes do tempo.

### 3.3.2 Limite de Bogomol'nyi

Assim como no modelo de Nielsen-Olesen, é possível escolher os parâmetros do potencial (3.84) de forma que as soluções em cada classe de homotopia sejam limitadas inferiormente por um vínculo de Bogomol'nyi, saturado por soluções de certas equações de primeira ordem. Isso ocorre quando  $\alpha = 1$  e  $\lambda = 2e^2/|\kappa|$ . Assim como no modelo anterior, o vínculo emerge no limite em que as massas dos campos de gauge e de Higgs se igualam<sup>†</sup>, tendo ambas o valor  $2e^2 v^2/|\kappa|$ . Nessas condições, o funcional de energia para soluções independentes do tempo se escreve

$$\begin{aligned} E &= \int \left\{ \kappa A_0 B - e^2 |\varphi|^2 A_0^2 + D_k \varphi \overline{D_k \varphi} + \frac{e^4}{\kappa^2} [ (|\varphi|^2 - v^2)^3 + v^2 (|\varphi|^2 - v^2)^2 ] \right\} d^2 x \\ &= \int \left\{ \frac{\kappa^2 B^2}{4e^2 |\varphi|^2} + D_k \varphi \overline{D_k \varphi} + \frac{e^4}{\kappa^2} [ (|\varphi|^2 - v^2)^3 + v^2 (|\varphi|^2 - v^2)^2 ] \right\} d^2 x, \end{aligned} \quad (3.112)$$

em que a passagem para a última linha resulta da substituição do vínculo (3.98). O termo  $|D_k \varphi|^2$  pode ser expandido da mesma forma que na seção anterior, de modo que a maior parte do trabalho já está feito. Ignorando os mesmos termos de superfície que encontramos anteriormente, podemos escrever,

$$\begin{aligned} E &= \int d^2 x \left\{ \left| \frac{\kappa B}{2e\varphi} \mp \frac{e^2 \overline{\varphi}}{\kappa} (v^2 - |\varphi|^2) \right|^2 + |D_1 \varphi + iD_2 \varphi|^2 \pm eB |\varphi|^2 \pm eB (v^2 - |\varphi|^2) \right\}, \\ &= \int d^2 x \left\{ \left| \frac{\kappa B}{2e\varphi} \mp \frac{e^2 \overline{\varphi}}{\kappa} (v^2 - |\varphi|^2) \right|^2 + |D_1 \varphi + iD_2 \varphi|^2 \right\} + 2\pi v^2 |n|, \end{aligned} \quad (3.113)$$

<sup>†</sup>Note-se, entretanto, que qualquer combinação de  $\alpha$  e  $\lambda$  tal que  $\alpha\lambda = 2e^2/|\kappa|$  implica em  $m_\psi = M$ . Então, a igualdade das massas é condição necessária, mas ao contrário do sistema de Maxwell Higgs, ela não é suficiente para o estabelecimento do vínculo de Bogomol'nyi, a não ser que se fixe  $\alpha = 1$  ou  $\lambda = 2e^2/|\kappa|$ .

que conduz, novamente, à desigualdade,  $E \geq 2\pi v^2 |n|$ , com igualdade se, e só se,

$$B = \pm \frac{2e^3 |\varphi|^2}{\kappa^2} (v^2 - |\varphi|^2) \quad (3.114)$$

e

$$(D_1 \pm iD_2)\varphi = 0. \quad (3.115)$$

Um argumento semelhante ao que foi usado na dedução de (3.75) pode ser usado para combinar as equações BPS em uma única equação de segunda ordem, que depende apenas do módulo de  $\varphi$ . De fato, (3.115) é exatamente a mesma equação que (3.70), então todos os passos necessários para eliminar a fase da seção de fibra e relacionar sua magnitude ao campo magnético permanecem válidos, sem qualquer alteração. Resta simplesmente substituir  $\nabla^2 \xi$  em (3.114) e adicionar as “fontes” dadas pelas deltas de Dirac. O resultado, para as equações com sinal positivo, é

$$\nabla^2 \xi + \frac{2e^2 \exp(2\xi)}{\kappa^2} [v^2 - \exp(2\xi)] = 2\pi \sum_j \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j). \quad (3.116)$$

A existência de soluções dessas equações com qualquer carga topológica  $n$  foi demonstrada rigorosamente em [130]. Uma análise similar à conduzida por Taubes e Jaffe no estudo da equação (3.74) é realizada para os zeros das soluções de (3.116), e é novamente demonstrado que  $|\varphi| < v$ . Perto de um zero de multiplicidade  $m$ , vale  $\varphi = (z - z_m)^m g(z)$ , onde  $g(z)$  é uma função suave e  $z_m$  a posição do zero [130].

Vamos agora escrever as equações BPS em termos do ansatz simétrico. Ora, um par de equações pode ser obtido imediatamente pela substituição de (3.99) e do ansatz em (3.114):

$$\frac{na'}{r} = \mp \frac{2e^4 h^2}{\kappa^2} (v^2 - h^2). \quad (3.117)$$

A equação restante pode ser obtida substituindo a solução em (3.115). Mas como  $A_0$  não entra nessa equação, esse processo consiste em substituir o mesmo ansatz da seção passada em expressões formalmente idênticas a (3.70), o que naturalmente resulta na mesma equação:

$$h' = \mp \frac{nah}{r}, \quad (3.118)$$

que completa o par de equações de Bogomol'nyi circularmente simétricas desse sistema.

### 3.4 Vórtices com múltiplas camadas

Em um trabalho publicado em 2019 [131], nos propusemos a estudar vórtices em modelos com simetria aumentada e ação modificada. Os modelos foram gerados com um procedimento análogo ao que discutimos a subseção 2.5.3, que consiste em acoplar à lagrangiana de Maxwell-Higgs um campo escalar ou outro sistema com simetria  $U(1)$ , resultando em um modelo com simetria estendida  $U(1) \times G$ . O termo de Maxwell é modificado por meio da multiplicação por uma função  $f(\chi)$ , onde  $\chi$  é um campo escalar diferente de  $\varphi$ , o que altera as equações de movimento e, em particular, o campo magnético da teoria. A função  $f(\chi)$  será usada para simular um confinamento geométrico, que leva a vórtices com propriedades diferentes. Nas referências [132, 133], o efeito de um confinamento desse tipo no diagrama de fases do hélio superfluido é examinado. Nesta seção, examinaremos vórtices topológicos em dois modelos, um dos quais apresenta simetria  $U(1) \times Z_2$ , enquanto o outro apresenta simetria  $U(1) \times U(1)$ .

### 3.4.1 Simetria $U(1) \times Z_2$

Primeiramente, consideremos um modelo governado por uma lagrangiana da forma

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}f(\chi)F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + D^\mu\varphi\overline{D_\mu\varphi} + \frac{1}{2}\partial_\mu\chi\partial^\mu\chi - V(|\varphi|, \chi), \quad (3.119)$$

onde  $f(\chi)$  é uma função não negativa do campo escalar real  $\chi$ , o qual é eletricamente neutro, enquanto as outras quantidades de (3.119) têm o mesmo significado que a elas atribuímos na seção 3.2. Essa forma é análoga à encontrada nos modelos propostos em [134], em que vórtices com uma estrutura interna também foram investigados, mas no contexto de uma teoria modificada de simetria  $U(1)$ . Suponha que o potencial tenha simetria  $Z_2$  no campo  $\chi$ . Para que soluções de energia finita sejam possíveis, é necessário que  $f(\chi)|F_{\mu\nu}|^2$  tenda a zero, portanto  $f(\chi)$  não pode tender a infinito mais rápido do que o quadrado do campo magnético tende a zero. No caso que investigaremos,  $f \rightarrow 1$  quando  $\chi$  se aproxima do vácuo, de modo que esse defeito apenas afeta a permeabilidade magnética na região em que ele difere apreciavelmente do vácuo. As outras restrições impostas pela condição de energia finita são basicamente a combinação daquilo que vimos quando estudamos a variedade de vácuo do modelo de sistemas com um campo escalar real e da teoria Maxwell-Higgs em (1,1) e (2,1) dimensões, respectivamente. A classificação topológica de soluções é agora feita com um par  $(n, q_\tau)$ , onde  $q_\tau$  é definida de forma análoga à carga topológica que encontramos em sistemas com um campo escalar real. A modificação da lagrangiana em nada afeta o argumento que levou à quantização do fluxo magnético na teoria de Maxwell-Higgs, de modo que a condição de quantização encontrada permanece válida.

Consideremos  $\chi = \chi(r)$  e o ansatz circularmente simétrico, com a escolha de gauge tal que  $A_0 = 0$ . As condições de contorno para  $h$  e  $a$  são as mesmas da seção 3.2, e para  $\chi$  podemos exigir  $E_g^{(\chi)} = E_p^{(\chi)}$ , como no Capítulo 2. Por simplicidade, tomamos  $e = |n| = 1$  para a constante de acoplamento e a vorticidade. As equações de movimento se escrevem

$$\frac{1}{r}(r\chi')' = f\chi\frac{a'^2}{2r^2} + V_\chi, \quad (3.120)$$

$$\frac{1}{r}(rh')' = \frac{a^2h}{r^2} + \frac{1}{2}V_h, \quad (3.121)$$

$$\left(f\frac{a'}{r}\right)' = \frac{2ah^2}{r}. \quad (3.122)$$

Em particular, podemos tomar um potencial da forma

$$V(|\varphi|, \chi) = \frac{1}{2} \left[ \frac{(1 - |\varphi|^2)^2}{f(\chi)} + \frac{W_\chi^2}{r^2} \right], \quad (3.123)$$

em que reconhecemos a escolha  $\lambda = e^2 = 1$  correspondente ao acoplamento crítico. Introduzimos um superpotencial  $W(\chi)$  a partir do qual  $W_\chi$  será obtido, e podemos escolhê-lo de modo que os pontos em que  $W_\chi^2 = 0$  sejam  $\chi = \pm 1$ . Quando o potencial tem essa forma, a densidade de energia pode ser separada em duas contribuições  $\rho = \rho_{vor} + \rho_\chi$ , com

$$\rho_{vor} = f(\chi)\frac{a'^2}{r^2} + 2h'^2, \quad \rho_\chi = \chi'^2 = \frac{W_\chi^2}{r^2}, \quad (3.124)$$

em que notamos que  $\rho_{vor}$  tem forma similar à densidade de energia do vórtice BPS no modelo de Nielsen-Olesen, com a presença de um termo positivo  $f(\chi)$  que modela uma mudança na permeabilidade magnética do material. Note-se que, se  $f(\chi) \rightarrow 1$  e  $f_\chi \rightarrow 0$  assintoticamente, a forma das equações de movimento em uma região próxima do vácuo é a idêntica ao que encontraríamos na ausência de acoplamento entre os sistemas. Assim, as massas das excitações em torno do vácuo, que apenas dependem da forma assintótica das equações de movimento, não mudam. Como a igualdade dessas massas engendra um limite de Bogomol'nyi, e a dependência do potencial em  $\chi$  foi escolhida de forma conveniente (veja a discussão sobre sistemas de dois campos na seção 2.5), fica clara a possibilidade de desenvolvermos um panorama de primeira ordem nesse modelo. Com efeito, o funcional de energia se escreve

$$E = \frac{1}{2} \int [f(\chi)B^2 + 2D_k\phi\overline{D_k\phi} + (1 - |\phi|^2)^2] d^2x + \pi \int r \left[ \chi'^2 + \frac{W_\chi^2}{r^2} \right] dr \quad (3.125)$$

$$\geq 2\pi(|n| + 1),$$

com igualdade satisfeita se, somente se,

$$B \mp \frac{1 - |\phi|^2}{f(\chi)} = 0, \quad (3.126)$$

$$(D_1 \pm iD_2)\phi = 0, \quad (3.127)$$

e

$$\chi' = \pm \frac{W_\chi}{r}. \quad (3.128)$$

Note-se que, quando  $1/f(\chi) = 0$ ,  $B$  se anula. Desse modo, as soluções das equações de primeira ordem mantêm a densidade de energia finita nesses pontos. Entretanto,  $B$  apresenta um comportamento bem diferente do que vimos no sistema Maxwell-Higgs, em que sua magnitude é máxima no centro do vórtice, e diminui constantemente à medida que dele nos afastamos, sem se anular. Isso indica a presença de uma estrutura interna no vórtice, perceptível na região intermediária entre o caroço e o limite no qual o estado supercondutor prevalece. Seria novamente possível reduzir as duas equações de Bogomol'nyi a uma única expressão para  $\ln|\phi|$ . Nesse caso, vemos que, numa vizinhança das raízes da equação  $1/f = 0$ ,  $\xi$  obedece aproximadamente  $\nabla^2\xi = 0$ , desde que essas raízes não coincidam com os zeros de  $\phi$ . Voltando ao ansatz simétrico e ao caso  $n = \pm 1$ , podemos escrever (3.126) e (3.127) na forma

$$h' = \pm \frac{ah}{r}, \quad (3.129)$$

$$\frac{a'}{r} = \mp \frac{(1 - h^2)}{f(\chi)}, \quad (3.130)$$

que, combinadas a (3.128), dão as soluções BPS com simetria circular, cuja energia é  $E_{BPS} = 4\pi$ . Os sinais positivo e negativo em (3.128) estão relacionados pela transformação  $r \rightarrow 1/r$ , ao passo que aqueles em (3.129) e (3.130), se relacionam por  $(h, a) \rightarrow (h, -a)$ . Consideraremos a partir de agora apenas os sinais superiores nas equações de Bogomol'nyi, com as outras soluções BPS podendo ser obtidas por meio dessas transformações.

Como primeiro exemplo, tomaremos  $W(\chi) = \alpha\chi - \alpha\chi^3/3$ , onde  $\alpha$  é um parâmetro real. Esse  $W(\chi)$  leva ao potencial

$$V(|\varphi|, \chi) = \frac{1}{2} \left[ \frac{(1 - |\varphi|^2)^2}{f(\chi)} + \alpha^2 \frac{(1 - \chi^2)^2}{r^2} \right], \quad (3.131)$$

que retorna ao caso de Nielsen-Olesen quando  $\chi$  é uma solução de vácuo. A equação BPS (com sinal positivo) para o campo escalar real é

$$\chi' = \frac{\alpha(1 - \chi^2)}{r}, \implies \int_0^\chi \frac{d\chi'}{1 - \chi'^2} = \alpha \int_{r_0}^r \frac{dr'}{r'}, \quad (3.132)$$

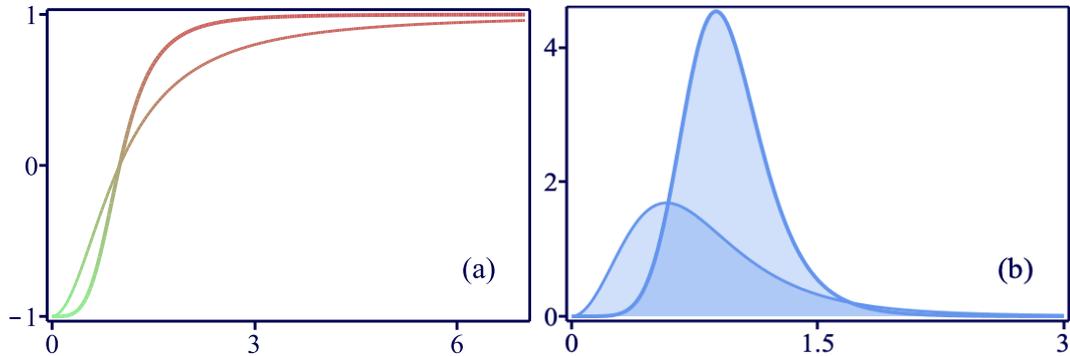
onde  $r_0$  é um parâmetro de integração que escolhemos de modo que  $\chi(r_0) = 0$ , o que deve ser possível visto que  $\chi$  é contínua, e portanto cruza o eixo  $x$ . Como a integral em (3.132) é logarítmica, não podemos mais tomar  $r_0 = 0$ , como fizemos no segundo capítulo, mas qualquer valor positivo é satisfatório. Integrando e invertendo o resultado, encontramos

$$\chi(r) = \frac{r^{2\alpha} - r_0^{2\alpha}}{r^{2\alpha} + r_0^{2\alpha}}, \quad (3.133)$$

que é uma solução tipo kink. A contribuição associada para a densidade de energia é

$$\rho_\chi = \frac{16\alpha^2 (r_0 r)^{4\alpha}}{r^2 (r^{2\alpha} + r_0^{2\alpha})^4}. \quad (3.134)$$

Na Figura 3.1 estão representadas a solução tipo kink e a contribuição  $\rho_\chi$  para a densidade de energia para dois valores de  $\alpha$ . Vemos que a altura e a posição do máximo de  $\rho_\chi$ , além da inclinação da função  $\chi(r)$ , dependem de  $\alpha$ .



**Figura 3.1** Solução tipo kink da equação (3.132) (a) e a contribuição  $\rho_\chi(r)$  para a densidade de energia (b), nos casos  $\alpha = 1$  e  $\alpha = 2$ . Nas duas figuras, a espessura das linhas aumenta com  $\alpha$  e  $r_0$  foi tomado igual a um [131].

Note que fomos capazes de encontrar a solução  $\chi(r)$  sem fazer menção ao vórtice, o que faz sentido dentro da interpretação desse campo escalar como uma “fonte” neutra que alimenta a permeabilidade magnética  $f$ . Para prosseguir, é necessária a escolha de uma forma funcional para essa permeabilidade. Tomamos, neste exemplo,

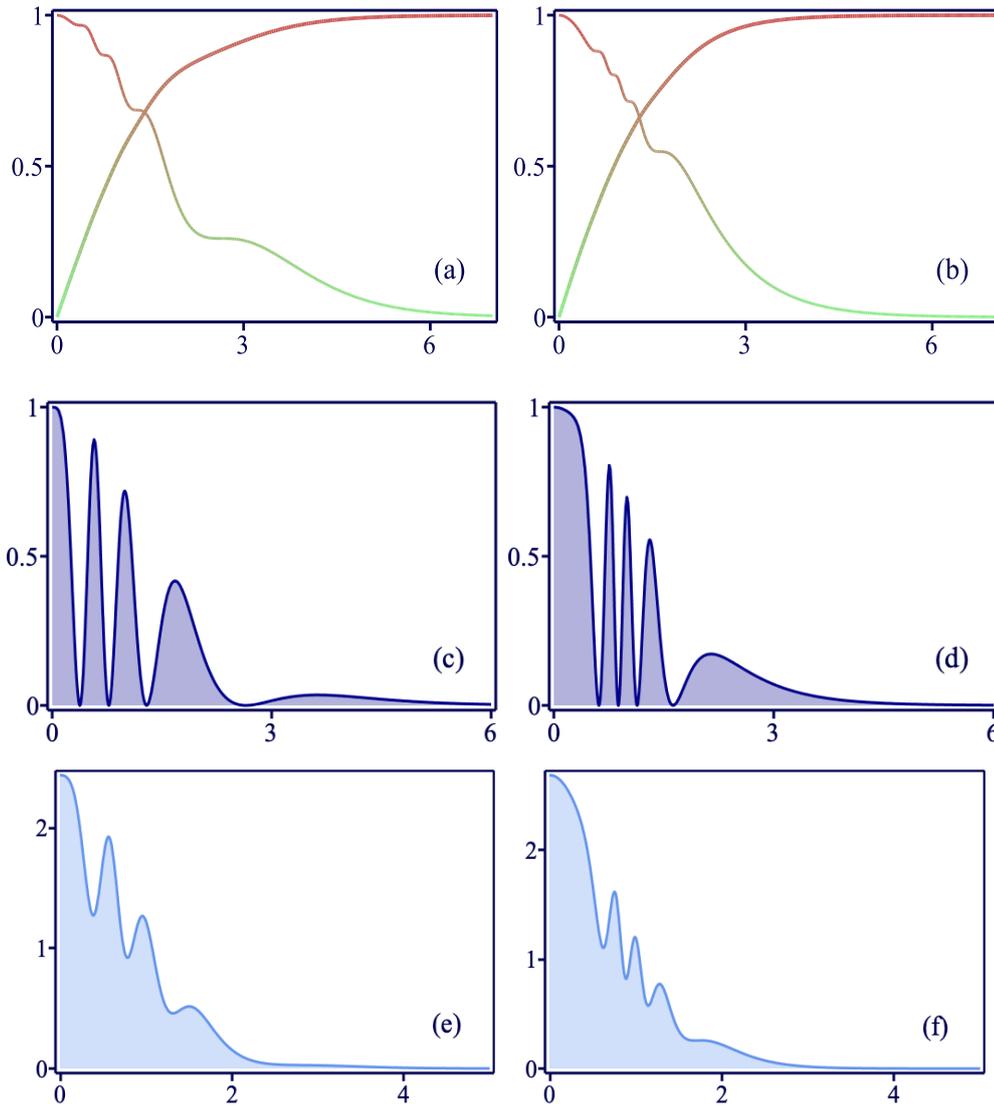
$$f(\chi) = \frac{1}{\cos^2(m\pi\chi)}, \quad (3.135)$$

com  $m \in \mathbb{N}$ . Assim, o campo magnético se anulará sempre que  $m\chi = k/2$ , para  $k \in \mathbb{Z}$ . Ora  $\chi \in (-1, 1)$ , e varia continuamente nesse intervalo, de modo que  $m\chi \in (-m, m)$ , e deve invariavelmente passar por todos os semi-inteiros que existem nesse intervalo. Se  $\chi = \pm 1$  em todo

o espaço, então  $f = 1$ , como deve ser, já que essas soluções, que têm energia nula, não podem influenciar a permeabilidade magnética do vórtice. A equação (3.130) com sinal superior se escreve

$$-\frac{a'}{r} = \cos^2\left(m\pi \frac{r^{2\alpha} - r_0^{2\alpha}}{r^{2\alpha} + r_0^{2\alpha}}\right) (1 - h^2), \quad (3.136)$$

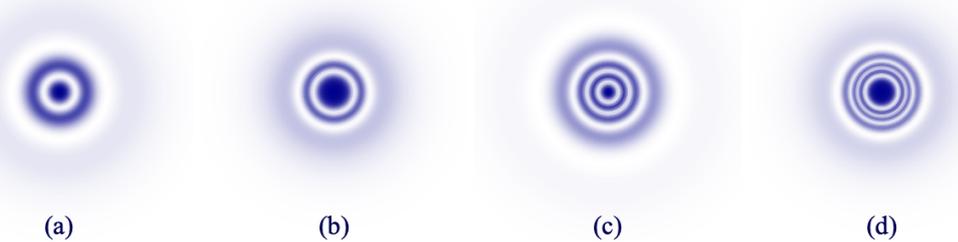
em que o termo  $1/f(\chi(r))$  tem um papel semelhante ao que vimos nos sistemas com soluções tipo multikink. As equações de primeira ordem foram resolvidas numericamente, e os comportamentos das soluções, da densidade de energia e do campo magnético, estão representados na Figura 3.2.



**Figura 3.2** Quantidades relativas ao vórtice do primeiro modelo, representadas para  $n = r_0 = 1$ , e  $m = 2$ . As funções  $a(r)$  (linha decrescente) e  $h(r)$  (linha crescente) estão representadas nos casos  $\alpha = 1$  (a) e  $\alpha = 2$  (b). O campo magnético também está representado para esses valores de  $\alpha$ , vistos, respectivamente, em (c) e (d). Finalmente, é apresentada a contribuição  $\rho_{vor}(r)$ , também nos casos  $\alpha = 1$  (e) e 2 (f) [131].

Vemos que  $h(r)$  tem um comportamento qualitativo semelhante ao caso  $f = 1$ , incluindo a propriedade  $h < 1$ , apresentada, ao menos no acoplamento crítico, por todos os vórtices que

estudamos. Mesmo na presença do campo escalar neutro,  $\varphi$  se comporta da forma que esperaríamos para um parâmetro de ordem, aumentando contínua e monotonamente de 0 a 1. O gráfico de  $a(r)$ , entretanto, é qualitativamente diferente, visto que agora sua derivada se anula em alguns pontos, de modo análogo aos multikinks. O máximo global de  $B$  continua no centro do vórtice, na vizinhança do qual a permeabilidade magnética difere pouco da unidade. Entretanto, é nítida a diferença no comportamento de  $B$  fora das regiões assintóticas, onde encontramos agora máximos e mínimos, controlados pela mudança na permeabilidade magnética. A densidade de energia também reflete a nova estrutura interna, apresentando picos nas regiões em que  $B$  é mais intenso. Na Figura (3.3), é ilustrada a intensidade do campo magnético no plano, para dois valores de  $\alpha$  e  $m$ , permitindo a visualização da estrutura interna dos vórtices. Vemos que o raio do disco central aumenta com  $\alpha$ , e notamos a presença de  $2m$  anéis ou “camadas” no plano, engendrados pelos zeros que aparecem quando  $m\chi = k/2$



**Figura 3.3** Intensidade do campo magnético no modelo de simetria  $U(1) \times Z_2$ , com  $n = r_0 = 1$ . Ilustramos as situações  $\alpha = 1 = m = 1$  (a),  $\alpha = 2, m = 1$  (b),  $\alpha = 1, m = 2$  (c), e  $\alpha = m = 2$  (d) [131].

### 3.4.2 Simetria $U(1) \times U(1)$

Consideraremos agora um modelo em que  $G = U(1)$ , definido por uma lagrangiana com simetria interna  $U(1) \times U(1)$ . Essa escolha é motivada principalmente por sua aplicação no estudo de matéria escura, em que o aumento de simetria é usado para incluir a presença de um “setor escondido” [136–138], que interage indiretamente com o setor visível, o qual inclui as partículas usuais do Modelo Padrão. Devemos incluir um campo escalar complexo  $\chi$  e uma outra conexão  $\mathcal{A}_\mu$ , com a qual é construída a derivada covariante  $\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu + iq\mathcal{A}_\mu$ , em que  $q$  é a constante que controla o acoplamento entre  $\chi$  a  $\mathcal{A}_\mu$ . Introduzimos também a curvatura  $\mathcal{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu \mathcal{A}_\nu - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu$  relacionada a essa conexão. A teoria deve agora ser invariante sob transformações de calibre locais  $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$ , em que  $\gamma_1$  atua em  $(\varphi, A_\mu)$  e  $\gamma_2$  em  $(\chi, \mathcal{A}_\mu)$  segundo as regras usuais para a representação unitária de  $U(1)$ . Como  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  podem ser a identidade, é possível executar transformações de gauge separadamente em cada subespaço. A lagrangiana pode ser tomada na forma

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}f(|\chi|)F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{4}\mathcal{F}_{\mu\nu}\mathcal{F}^{\mu\nu} + |D_\mu\varphi|^2 + |D_\mu\chi|^2 - V(|\varphi|, |\chi|), \quad (3.137)$$

O potencial será escolhido de modo que os mínimos ocorram para  $|\varphi| = 1$  e  $|\chi| = \omega$ , em que  $\omega$  é uma constante real não nula. Como discutimos na subseção 2.2.3, a variedade de vácuo do modelo tem grupo fundamental  $\pi_1(S_1 \times S_1) = \pi_1(S_1) \times \pi_1(S_1) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ , em que a igualdade é no sentido de isomorfismo. Portanto, essa variedade tem a topologia de um toro, sendo necessários dois inteiros  $(n_1, n_2)$  para classificar as soluções topológicas. Uma solução correspondente a

$n_1 = n_2$ , por exemplo, é caracterizada por  $\varphi$  e  $\chi$  cujas formas assintóticas podem ser deformadas em um par de loops, cada um dos quais dá uma volta completa em uma das circunferências que caracterizam o mínimo do potencial. Como  $\varphi$  só “percebe” as transformações  $\gamma_1$ , ele só sente o efeito da curvatura relacionada a essa conexão. Em outras palavras, ele só é carregado em relação aos campos que derivam de  $A_\mu$ , e uma observação análoga vale para  $\chi$ . Não podemos simplesmente tomar  $e = q = 1$  nesse caso, já que os diferentes acoplamentos são em princípio independentes, e não são necessariamente caracterizados pela mesma constante.

No infinito, todos os termos aditivos dessa lagrangiana devem tender individualmente a zero e, em particular,  $|D_\theta \varphi|^2$  e  $|\mathcal{D}_\theta \varphi|$  devem fazê-lo. A uma solução cuja classe de homotopia é caracterizada por  $(n_1, n_2)$ , associamos dois tipos de campos magnéticos, e as condições sobre as derivadas covariantes dão origem aos fluxos

$$\Phi_1 = 2\pi n_1, \quad \Phi_2 = \frac{2\pi n_2}{q}. \quad (3.138)$$

Tomaremos novamente o caso estático, calibre tal que  $A_0 = \mathcal{A}_0 = 0$  e ansatz simétrico, de modo que  $\varphi$  e  $A_\mu$  não mudam, e os outros campos têm a forma

$$\chi = g(r)e^{in_2\theta} \quad (3.139)$$

$$\mathcal{A} = \frac{n_2}{qr}(1 - c(r))\hat{\theta}, \quad (3.140)$$

com as condições de contorno  $g(0) = 0$ ,  $g(\infty) = \omega$ ,  $c(0) = 1$  e  $c(\infty) = 0$ . As equações de movimento, no caso  $n_1 = n_2 = 1$ , se escrevem

$$r \left( f \frac{a'}{r} \right)' - 2ah^2 = 0, \quad (3.141)$$

$$\frac{1}{r} (rh')' - \frac{a^2 h}{r^2} = \frac{1}{2} V_h, \quad (3.142)$$

$$r \left( \frac{c'}{qr} \right)' - 2qcg^2 = 0, \quad (3.143)$$

$$\frac{1}{r} (rg')' - \frac{c^2 g}{r^2} = \frac{1}{2} \left( f_g \frac{a'^2}{2r^2} + V_g \right). \quad (3.144)$$

A densidade de energia associada a campos que satisfazem esse ansatz é

$$\rho = f(g) \frac{a'^2}{2r^2} + h'^2 + \frac{a^2 h^2}{r^2} + \frac{c'^2}{2q^2 r^2} + g'^2 + \frac{c^2 g^2}{r^2} + V(h, g). \quad (3.145)$$

Escolhemos um potencial que consiste na adição de dois potenciais quárticos de Higgs para os campos escalares, modificados pela função  $f$ . Se supormos, ainda, o acoplamento crítico para os dois sistemas, com interpretação física análoga a todos aos exemplos deste capítulo, podemos tomar

$$V(|\varphi|, |\chi|) = \frac{1}{2} \frac{(1 - |\varphi|^2)^2}{f(|\chi|)} + \frac{q^2}{2} (\omega^2 - |\chi|^2)^2, \quad (3.146)$$

que podemos usar para investigar as condições de minimização do funcional de energia pelo procedimento usual de completamento de quadrados, que nos conduz ao vínculo

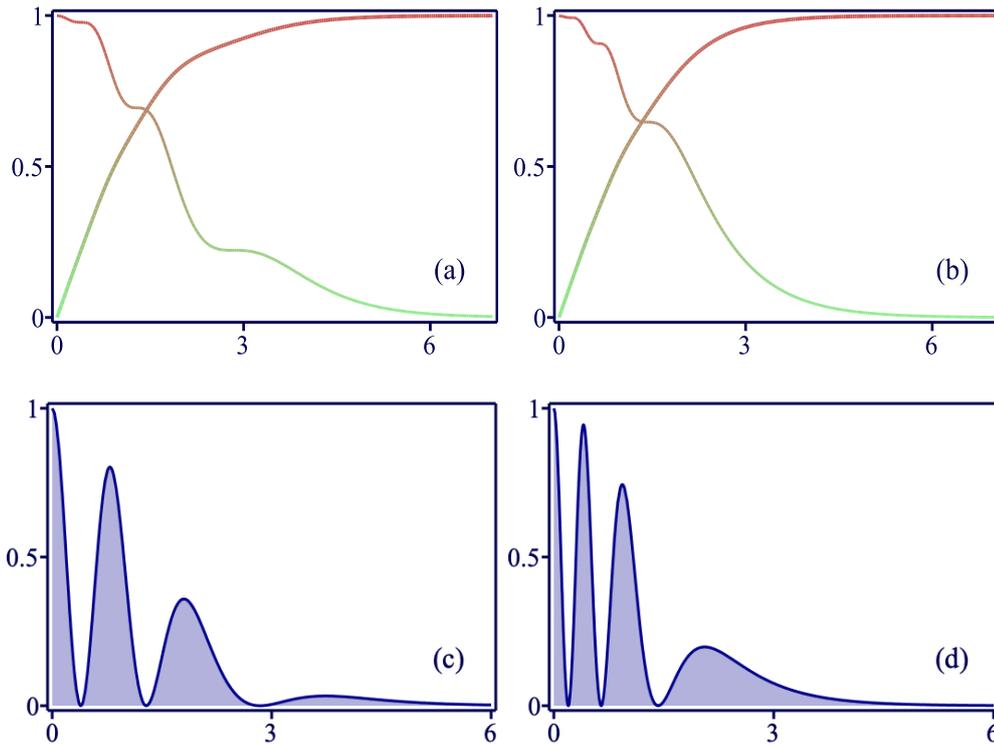
$$E \geq 2\pi(|n_1| + |n_2|\omega^2). \quad (3.147)$$

Novamente, a energia de Bogomol'nyi depende apenas dos valores assintóticos do campo, e o resultado é o mesmo que teríamos obtido se fosse minimizada a energia em cada um dos subsistemas e somados os resultados. Para melhor comparar esse modelo ao anterior, vamos tomar  $f(|\chi|) = 1/(\cos^2(2\pi m|\chi|))$  com  $m \in \mathbb{N}$ . As equações de primeira ordem, no caso  $|n_1| = |n_2| = 1$ , são

$$g' = \pm \frac{cg}{r}, \quad (3.148) \quad -\frac{c'}{qr} = \pm q(\omega^2 - g^2), \quad (3.149)$$

$$h' = \pm \frac{ah}{r}, \quad (3.150) \quad -\frac{a'}{r} = \pm \cos^2(2\pi m g(r))(1 - h^2). \quad (3.151)$$

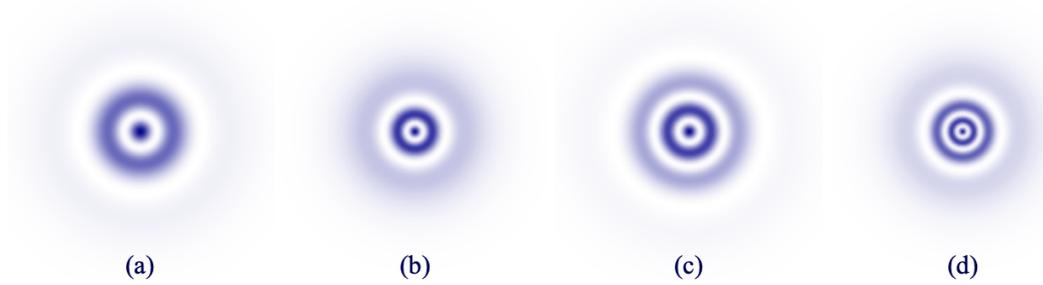
As equações (3.148) e (3.149) dão exatamente os vórtices de Nielsen-Olesen com acoplamento crítico no setor com carga topológica unitária. Já conhecemos então seu comportamento e o das grandezas associadas a eles. As soluções do problema de Nielsen-Olesen podem ser calculadas numericamente e substituídas em (3.151), fornecendo equações de primeira ordem que também podem ser resolvidas numericamente. A representação gráfica das funções  $a$  e  $h$ , bem como o campo magnético associado a essas soluções, pode ser vista na Figura 3.4.



**Figura 3.4** Comportamento de  $a(r)$  (linha decrescente) e  $h(r)$  (linha crescente) para o segundo modelo, representadas nos casos  $q = 0.5$  (a) e  $q = 1$  (b). O campo magnético também está representado para esses dois valores de  $q$ , vistos, respectivamente, em (c) e (d). Em todas as figuras, foi tomado  $n_1 = n_2 = 1$  e  $m = 3$  [131].

Vemos que, embora o modelo da subseção anterior seja muito diferente do que estamos considerando agora, tanto do ponto de vista matemático quanto do físico, o efeito que a modificação que define esses modelos tem sobre os vórtices de Nielsen-Olesen é qualitativamente muito parecido nos dois exemplos. Novamente,  $|\varphi|$  é uma função limitada que os resultados numéricos

indicam tomar valores apenas em  $(0, 1)$ , sendo sempre crescente nesse intervalo. Vemos a presença de degraus no gráfico de  $a(r)$  e reconhecemos uma estrutura interna para o vórtice, com a presença de  $m$  anéis, cuja espessura é controlada pelo parâmetro  $q$  (análogo a  $\alpha$  do modelo anterior). A relação entre  $m$  e o número de camadas decorre do fato de que  $|\chi| \in (0, 1)$  no acoplamento crítico. Note que, se esse resultado não tivesse sido estabelecido, o número de anéis poderia, teoricamente, exceder esse valor em algumas situações. Na Figura (3.5), é ilustrada a magnitude do campo magnético no plano, em função de  $r$  e dos parâmetros do modelo.



**Figura 3.5** Intensidade do campo magnético no modelo de simetria  $U(1) \times U(1)$ , com  $n_1 = n_2 = 1$ . Ilustramos as situações  $q = 0.5, m = 2$  (a),  $q = 1, m = 2$  (b),  $q = 0.5, m = 3$  (c), e  $q = 1, m = 3$  (d) [131].

Outras escolhas de  $f$  são possíveis, modulando o termo de Maxwell para engendrar o comportamento que for mais conveniente a cada situação. Em princípio, é também possível o acoplamento com sistemas de simetrias diferente, ou com a lagrangiana de Chern-Simmons.

# Monopolos magnéticos em teorias Yang-Mills-Higgs

“Under these circumstances one would be surprised if Nature had made no use of it.”

---

*Dirac, sobre o monopolo.*

A ausência de monopolos magnéticos parece ser uma característica fundamental da natureza, ao menos com respeito ao que a experiência nos diz. Quando cortamos um ímã no meio, tentando separar seus polos norte e sul, obtemos dois novos ímãs, cada um com seus dois respectivos polos. Não importa o quão persistente sejamos, sempre falhamos na tarefa de isolar um polo magnético, que poderíamos caracterizar como a fonte do campo magnético. Em vez disso, esses campos parecem ser sempre originários de cargas elétricas em movimento [112]. Essa impossibilidade está expressa diretamente nas equações de Maxwell, em que se lê  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ , que deve ser contrastada à sua contraparte elétrica, que conta com a presença de uma densidade de carga.

Entretanto, a assimetria que caracteriza as equações de Maxwell fora do vácuo parece ser, de algum modo, “estranha”, e é natural indagar se ela não poderia ser resolvida de algum modo. Ainda no final do século XIX, esse fato chamou a atenção de Pierre Curie, o qual já apontava que a teoria de Maxwell poderia ser modificada para englobar monopolos magnéticos, e que o fato de não encontrarmos magnetos de um polo na nossa experiência não é uma evidência conclusiva de que eles não possam existir [139]. O interesse nesse assunto ressurgiria na primeira metade do século XX, com o importante artigo de Dirac [26], e na sua posterior continuação [140] em que, dezessete anos depois, foram aprofundados os resultados de seu trabalho original. Seguindo a sua conhecida filosofia de investigação que consistia em estudar a lógica interna de uma teoria na forma mais abstrata possível, generalizando ao máximo seus axiomas fundamentais para, depois, analisar as consequências físicas, Dirac não apenas demonstrou que a existência de monopolos era perfeitamente consistente com a teoria quântica, como ainda mostrou que, se monopolos magnéticos existirem, essa teoria impõe às cargas elétricas um vínculo que explica sua quantização. Em unidades gaussianas, essa condição se escreve [140]

$$q_e q_m = \frac{N\hbar c}{2}, \quad (4.1)$$

onde  $q_e$  e  $q_m$  são, respectivamente, a carga elétrica e a magnética. Se existir, no universo, ao menos um monopolo magnético, então a carga elétrica de todas as partículas deve ser quantizada em unidades  $\hbar c/2q_m$ . Esse foi um grande triunfo das teorias de monopolo, visto que a explicação desse fato experimental por outros meios constitui um grande desafio. Note que a teoria de Dirac não *prevê* a existência de monopolos, ela apenas mostra que essas partículas podem existir e explica suas consequências mas, enquanto um monopolo não é observado, a versão usual da teoria eletromagnética continuaria satisfatória.

Na primeira metade da década de 1970, t’Hooft [27] e Polyakov [28] elevaram monopolos a um lugar de destaque na física teórica ao chamarem atenção para o fato de que essas partículas podem emergir como defeitos topológicos em teorias de Yang-Mills (YM) com quebra espontânea de simetria. Uma consequência é que, devido às altas energias disponíveis no universo primitivo, monopolos deveriam ser abundantes. Esse tipo de previsão é inevitável em teorias de grande unificação (GUT) e outros candidatos a “teorias de tudo” [141], e por isso as constantes falhas na busca por monopolo são um desafio para essas teorias. Esse problema é remediado por teorias de universo inflacionário, para os quais os monopolos foram uma motivação histórica. Nesses modelos, a produção de monopolos (e antimonopolos) ainda acontece, mas a rápida expansão do universo dilui sua densidade a níveis que impossibilitam a detecção experimental [142, 143]. Muitas motivações para o estudo de monopolos se devem à imposição de vínculos em GUT, modelos inflacionários e outros tipo de teoria, que devem ser impostos para que elas sejam consistentes com o fato de monopolos não serem observados. Por exemplo, dada uma teoria que prevê monopolos, é necessária uma análise dinâmica das soluções para estimarmos a taxa de produção e de aniquilação de monopolos sob certas condições de energia. Uma discussão bastante elaborada sobre esses vínculos, bem como sobre a produção de monopolos no universo primitivo, pode ser encontrada em [144].

Outras motivações para o estudo de monopolos incluem a presença de quasipartículas com carga magnética, em sistemas de *spin ice* [145], cuja descrição matemática é semelhante à dos monopolos. As soluções BPS na teoria YM com potencial quártico estão entre as primeiras desse tipo a terem sido encontradas [60], e o estudo de monopolos BPS oferece *insight* na estrutura de teorias não abelianas supersimétricas com acoplamento forte, que por sua vez também ampliam nosso entendimento das versões não supersimétricas de tais teorias [146]. Para nossos propósitos, a principal justificativa para o estudo de monopolos será simplesmente o fato de que ele fornecerá uma poderosa ferramenta de estudo, que nos ajuda a compreender melhor a forma como defeitos topológicos aparecem em teorias de calibre não abelianas, que são de grande interesse na física teórica moderna.

Neste capítulo, estudaremos monopolos em uma teoria de Yang-Mills-Higgs, com grupo de calibre  $SU(2)$  e potencial quártico, que engendra quebra espontânea de simetria. Vamos estudar as propriedades básicas de monopolos desse tipo, incluindo o limite BPS, e depois usar um ansatz com simetria esférica para simplificar as equações de movimento. Finalmente, investigaremos partículas que possuem carga magnética e elétrica, os dyons.

## 4.1 Teoria Yang-Mills-Higgs com potencial quártico

Neste capítulo, trabalharemos em  $(3,1)$  dimensões, e será conveniente nos desviarmos da convenção adotada até aqui, usando agora o tensor métrico  $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ . Para estudar os monopolos propriamente ditos, precisamos primeiramente introduzir o formalismo que levará a essas soluções. Aqui, o campo escalar  $\phi$  está na representação adjunta de um grupo de Lie não abeliano  $G^\dagger$ , tomando valores na álgebra de Lie correspondente, que denotaremos por  $\mathfrak{g}$ . Esse campo será agora representado por uma matriz quadrada, escrita na forma  $\phi = \phi^a T^a$ , em que  $T^a$  são os geradores de  $\mathfrak{g}$ . Assim como no capítulo anterior, escreveremos  $A_\mu = A_\mu^a T^a$  na representação adjunta (ad) da álgebra de Lie, o que significa que sua atuação em  $\phi$  fica definida por [106]

$$\text{ad}_{A_\mu}(\phi) \equiv [A_\mu, \phi], \quad (4.2)$$

<sup>†</sup>Na linguagem geométrica introduzida no Apêndice A.2, estamos tomando  $\phi$  como uma seção do chamado maço adjunto.

e outros elementos de  $\mathfrak{g}$  atuam na seção de maneira análoga. Com relação a uma mudança de calibre, os campos seguem as leis de transformação

$$\phi \rightarrow \gamma\phi\gamma^{-1}, \quad A_\mu \rightarrow \gamma A_\mu \gamma^{-1} - \partial_\mu \gamma \gamma^{-1}, \quad (4.3)$$

onde  $\gamma$  é uma transformação de gauge, que pode ser representada por uma matriz unitária  $n \times n$  da forma [148]

$$\gamma = e^{i\alpha^a T^a}. \quad (4.4)$$

Para sermos concretos, vamos tomar  $G = SU(2)^\dagger$ , embora muitos dos resultados que encontraremos possam ser generalizados para uma vasta classe de grupos de calibre, incluindo  $SU(N)$  [149] ou produtos de tais grupos. No nosso caso, teremos três geradores, que podemos tomar como  $T^a = -i\sigma^a/2$  [31], onde  $\sigma^a$  são as matrizes de Pauli, que satisfazem as conhecidas relações de comutação  $[\sigma^a, \sigma^b] = 2i\epsilon_{abc}\sigma^c$  e anticomutação  $\{\sigma^a, \sigma^b\} = 2\delta^{ab}$  [81]. A conexão pode ser tomada como  $gA_\mu$ , onde  $g$  é a constante de acoplamento, de modo que a derivada covariante se escreve, por (3.1) e (4.2), na forma

$$D_\mu \phi = \partial_\mu \phi + g[A_\mu, \phi]. \quad (4.5)$$

Sob uma transformação de calibre,  $D_\mu \phi$  se transforma da mesma forma que  $\phi$ . Podemos definir o *tensor intensidade de campo* pela relação  $F_{\mu\nu} \phi = \frac{1}{g}[D_\mu, D_\nu]\phi$ . Por simplicidade notacional, vamos tomar  $g = 1$ . Quando necessário, podemos recuperar essa constante fazendo  $A_\mu \rightarrow gA_\mu$  e lembrando de incluir o fator  $1/g$  na definição de  $F_{\mu\nu}$ . De (4.5), vem

$$D_\mu D_\nu \phi = \partial_\mu \partial_\nu \phi + [A_\nu, \partial_\mu \phi] + [A_\mu, \partial_\nu \phi] + [\partial_\mu A_\nu, \phi] + [A_\mu, [A_\nu, \phi]]. \quad (4.6)$$

Os três primeiros termos formam um tensor simétrico em  $\mu$  e  $\nu$ , e por isso desaparecem no comutador, que fica

$$(D_\mu D_\nu - D_\nu D_\mu)\phi = [\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \phi] + [A_\mu, [A_\nu, \phi]] + [A_\nu, [\phi, A_\mu]], \quad (4.7)$$

em que foi usada a propriedade  $[A, B] = -[B, A]$ . Pela identidade de Jacobi, os dois últimos termos são equivalentes a  $[[A_\nu, A_\mu], \phi]$ , donde

$$[D_\mu, D_\nu]\phi = [\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu], \phi]. \quad (4.8)$$

O lado direito dessa equação é a ação de  $F_{\mu\nu}$  em  $\phi$ , pela representação adjunta, donde

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu]. \quad (4.9)$$

Dada uma transformação de calibre,  $D_\mu D_\nu \phi \rightarrow \gamma D_\mu D_\nu \phi \gamma^{-1}$ , que substituída no comutador que define  $F_{\mu\nu}$ , nos leva à lei de transformação  $F_{\mu\nu} \rightarrow \gamma F_{\mu\nu} \gamma^{-1}$ . Vemos que a curvatura não é, aqui, invariante sob transformações de calibre, como também não é o produto  $F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$ , que se transforma da mesma forma. Entretanto, a invariância do traço sob permutações cíclicas implica

---

<sup>†</sup>Note que essa escolha é diferente da que foi feita por 't Hooft, que trabalha com o grupo  $SO(3)$ . Como nossos cálculos são feitos na álgebra de Lie, e sabemos que  $su(2)$  e  $so(3)$  são isomórficas, os cálculos feitos em termos das componentes são idênticos. Entretanto, note-se que os grupos  $SU(2)$  e  $SO(3)$  não são equivalentes, sendo relacionados por um mapa  $2 : 1$  [150], o que tem consequências físicas. Em particular, as duas escolhas levam a condições de quantização diferentes para a carga magnética [27].

em  $\text{Tr}(\gamma F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \gamma^{-1}) = \text{Tr}(F_{\mu\nu} F^{\mu\nu})$ . Definimos um produto interno (e, conseqüentemente, uma norma) pela condição [31]

$$\langle T^a, T^b \rangle = -2\text{Tr}(T^a T^b) = \delta^{ab}. \quad (4.10)$$

Portanto, termos proporcionais ao quadrado de  $\phi$ ,  $F_{\mu\nu}$  e  $D_\mu \phi$  são invariantes por transformações de gauge, de modo que podemos tomar a lagrangiana da teoria na forma

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\text{Tr}(F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) + \text{Tr}(D_\mu \phi D^\mu \phi) - V(|\phi|), \quad (4.11)$$

onde  $|\phi|^2 = -2\text{Tr}(\phi \cdot \phi) = \phi^a \phi^a$ . Equivalentemente, podemos escrever  $\mathcal{L}$  em termos das componentes dos campos

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{a\mu\nu} F_{\mu\nu}^a - \frac{1}{2}D^\mu \phi^a D_\nu \phi^a - V(|\phi|). \quad (4.12)$$

Podemos tomar

$$V(|\phi|) = \frac{\lambda}{4}(\mu^2 - |\phi|^2)^2, \quad (4.13)$$

que é um potencial quártico, o qual alcança seu mínimo quando  $|\phi|^2 = \mu^2$ . Por simplicidade, iremos usar  $\mu = 1$ , o que equivale a trocar  $\phi$  por  $\phi/\mu$  e efetuar uma reescala, de modo análogo ao que fizemos com o modelo  $\phi^4$ . Inserindo esse potencial na lagrangiana, e extremizando a ação de acordo com o procedimento usual, obtemos as equações de movimento da teoria

$$D_\mu D^\mu \phi = \lambda \phi (|\phi|^2 - 1), \quad (4.14)$$

$$D_\mu F^{\mu\nu} = [\phi, D^\nu \phi], \quad (4.15)$$

onde  $D_\mu F^{\mu\nu} = \partial_\mu F^{\mu\nu} + [A_\mu, F^{\mu\nu}]$ . Podemos usar  $F_{\mu\nu}$  para definir as quantidades  $E_k = F_{0k}$  e  $B_k = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk} F^{ij}$ , que são formalmente análogas ao campo eletromagnético. A equação correspondente a  $\nu = 0$  em (4.15) é o análogo da lei de Gauss dessa teoria e, em termos de  $E_k$ , se escreve

$$D_k E_k = [\phi, D_0 \phi]. \quad (4.16)$$

Como invertemos a assinatura métrica, devemos usar (A.9) para calcular o tensor energia-momento, que fica

$$T_{\mu\nu} = -2\text{Tr}(D_\mu \phi D_\nu \phi - F_\mu^\eta F_{\eta\nu}) + \eta_{\mu\nu} \mathcal{L}. \quad (4.17)$$

Em particular, a componente  $T_{00}$  se escreve

$$T_{00} = \frac{1}{2}(E_k^a E_k^a + B_k^a B_k^a + D_0 \phi^a D_0 \phi^a + D_k \phi^a D_k \phi^a) + V(|\phi|), \quad (4.18)$$

cuja integração dá a energia, a qual pode, assim como no caso abeliano, ser escrita como a soma  $E = T + U$ , em que [31, 62]

$$T = \frac{1}{2} \int d^3x \{ |E|^2 + |D_0 \phi|^2 \} \quad (4.19)$$

$$U = \int d^3x \left\{ \frac{1}{2} |D_k \phi|^2 + \frac{1}{2} |B|^2 + V(|\phi|) \right\}, \quad (4.20)$$

onde  $|B|^2 = B_k^a B_k^a$ , etc. Essas quantidades, que são invariantes por transformações de calibre, têm o mesmo significado que a elas atribuímos no caso abeliano. Pode ser demonstrado [31]

que, nessa teoria, é *sempre* possível (embora, como veremos, nem sempre conveniente) escolher o calibre de modo que  $A_0 = 0$ . Assim, poderíamos escrever, sem perda de generalidade,  $|\partial_0\phi|^2$  em vez de  $|D_0\phi|^2$  na definição da energia cinética<sup>†</sup>.

Apesar da maior complexidade do ponto de vista matemático, esse sistema é, em muitos aspectos, análogo à sua contraparte abeliana, que é a versão (3, 1) da teoria discutida na seção 3.2. Há, entretanto, uma diferença crucial, que é a dificuldade de se definir campos físicos nessa teoria.  $E_k$  e  $B_k$  são aqui matrizes, e poderíamos tentar agrupar as componentes  $E_k^a, B_k^a$  em campos físicos, mas isso não funcionaria. O motivo é que essas componentes não são independentes da escolha de calibre, e portanto não podem ser medidas. Uma transformação de gauge “mistura” as componentes uma nas outras, de modo que não é possível, em geral, selecionar uma componente que corresponda a um campo físico. Esse problema pode ser resolvido pela introdução de um mecanismo de quebra espontânea de simetria, que é engendrada aqui pelo campo escalar. Como todos os termos da energia são quadráticos, as configurações de vácuo devem ser tais que cada um deles seja nulo separadamente.  $|F_{\mu\nu}|^2$  será nulo para  $A_\mu = 0$ , ou para campos de gauge que difiram de zero apenas por uma transformação de calibre. A variedade de vácuo do modelo tem, portanto, a forma

$$\mathbf{M} = \{(\phi, A_\mu) : |\phi|^2 = 1, D_\mu\phi = 0, A_\mu = -\partial_\mu\gamma\gamma^{-1}\}. \quad (4.21)$$

A condição  $|\phi| = 1$  descreve uma esfera em  $su(2)$ , de modo que o grupo de homotopia relevante é  $\pi_2(S_2) = \mathbb{Z}$ , mostrando que é novamente possível classificar as soluções do modelo por meio de uma carga topológica corresponde a um número inteiro. Para analisar os elementos dessa variedade, é comum usar uma transformação de calibre para rotacionar o campo escalar de modo que  $\phi = T^3$  [27, 62], o que sempre pode ser feito para uma configuração de vácuo. Assim, a simetria é quebrada para o grupo que mantém  $\phi = T^3$  invariante, isto é,  $\gamma T^3 \gamma^{-1} = T^3$ , que reduz as transformações possíveis para aquelas da forma  $e^{i\alpha^3(t, \mathbf{x})T^3}$ . Essas transformações não afetam a solução de vácuo, mas atuam de forma não trivial em outras seções do maço. A ação do grupo sobrevivente pode ser descrita em termos de um único parâmetro ( $\alpha_3$ , na convenção que adotamos), e pode ser identificada com a atuação do grupo  $U(1)$ . Ao contrário dos outros exemplos que estudamos, a quebra de simetria não é total, já que o grupo sobrevivente não é trivial. Ao analisar as excitações em torno do vácuo pelo procedimento usual (que é simplificado se tomarmos um calibre tal que  $\phi \approx (\psi + 1)T^3$  próximo ao vácuo), identificamos a massa  $m_\psi = \sqrt{2\lambda}$  do bóson de Higgs. Como discutido na próxima seção, a projeção de  $A_\mu$  na direção de  $\hat{\phi}$ , que corresponde à simetria gerada pela forma assintótica do campo de Higgs, não é massiva, e está relacionada a uma interação de longo alcance, que veremos ser consistente com o eletromagnetismo. As componentes ortogonais à direção do campo de Higgs, que na versão quântica da teoria dão origem aos chamados bósons vetoriais intermediários  $W^\pm$  [27], adquirem massa  $M_W = 1$ , que pode ser calculada, novamente, por meio da linearização das equações de movimento numa vizinhança do vácuo [151].

## 4.2 Carga magnética

Embora nosso objetivo seja estudar monopolos magnéticos, ainda não está claro o significado que deve ser atribuído ao adjetivo “magnético” no contexto da teoria de Yang-Mills. Definimos os campos  $E_k^a$  e  $B_k^a$ , mas vimos que eles não podem ser todos físicos, e não há, em

<sup>†</sup>note que a demonstração dada em [31] não depende essencialmente do grupo não ser abeliano, e o resultado pode, portanto, ser entendido para  $U(1)$ , incluindo a lagrangiana de Maxwell-Higgs do capítulo anterior.

geral, uma maneira natural de selecionar quantidades que possam ser identificadas com os campos elétrico e magnético. Nesta seção, mostraremos que o mecanismo de quebra espontânea de simetria permite a identificação de um tensor que satisfaz as equações de Maxwell, e também de uma carga magnética que pode ser medida sem ambiguidade. Para interpretar de forma mais profunda o papel de monopolos em teorias YM, convém analisar o problema da forma mais geral possível, sem fazer muitas suposições além do requerimento de que a energia seja finita. A análise desenvolvida nesta seção é baseada na abordagem introduzida em [152]. Note que, se  $|\phi| \neq 0$  numa região, podemos escrever  $\phi = \zeta(t, \mathbf{x})\hat{\phi}$ , em que  $\zeta$  é uma função arbitrária dos  $x^\mu$  e  $\hat{\phi} \equiv \phi/|\phi|$  é um versor unitário que define uma direção em  $su(2)$ . É possível supor sem perda de generalidade que  $\zeta$  é positiva, já que um eventual sinal negativo pode ser absorvido por  $\hat{\phi}$ . Consideremos uma região para a qual vale  $D_\mu \hat{\phi} = 0$ . Em particular, soluções de energia finita sempre satisfazem assintoticamente essa condição, o que pode ser demonstrado se observarmos que é sempre possível usar transformações de calibre para garantir que  $\phi$  e  $A_\mu$  sejam paralelos a  $T^3$  na superfície de uma esfera de raio infinito <sup>†</sup>. Com essa transformação, fica claro que  $D_\mu \hat{\phi} = 0$  vale nesse calibre e, portanto, em qualquer outro. Essa condição implica

$$D_\mu \phi = (\partial_\mu \zeta)\hat{\phi} + \zeta D_\mu \hat{\phi} = (\partial_\mu \zeta)\hat{\phi}, \quad (4.22)$$

que é uma imposição mais fraca do que  $D_\mu \phi = 0$ . Note que, nessa aproximação, a equação para o campo escalar fica  $\square \zeta = \lambda \zeta (\zeta^2 - 1)$ , mostrando que  $|\phi|$  não precisa estar próximo de seu valor assintótico. Isso é fisicamente relevante, pois veremos que o campo magnético só pode ser medido sem ambiguidade quando  $D_\mu \hat{\phi} = 0$  dentro da precisão experimental considerada, de modo que essa condição estabelece um comprimento característico.

Usaremos a equação  $D_\mu \hat{\phi} = 0$  para encontrar  $A_\mu$ . Tomando o comutador de  $[D_\mu \hat{\phi}, \hat{\phi}]$  e usando a hipótese mencionada, deduzimos

$$[\partial_\mu \hat{\phi}, \hat{\phi}] + [[A_\mu, \hat{\phi}], \hat{\phi}] = 0. \quad (4.23)$$

Usando as propriedades de comutação e traço das matrizes de Pauli, é simples demonstrar a relação

$$\frac{1}{2} [[A, B], C] = A \text{Tr}(BC) - B \text{Tr}(AB), \quad (4.24)$$

em que  $A$ ,  $B$  e  $C$  são matrizes de  $su(2)$ . A aplicação dessa relação a (4.23), nos conduz a

$$\begin{aligned} [\partial_\mu \hat{\phi}, \hat{\phi}] &= -2 \{A_\mu \text{Tr}(\hat{\phi}^2) - \hat{\phi} \text{Tr}(A_\mu \hat{\phi})\}, \\ \therefore A_\mu &= \Lambda_\mu \hat{\phi} + [\partial_\mu \hat{\phi}, \hat{\phi}], \end{aligned} \quad (4.25)$$

em que, na passagem da primeira para a segunda linha, foi usada a relação  $|\hat{\phi}^2| = 1$  e definimos

$$\Lambda_\mu \equiv -2 \text{Tr}(A_\mu \hat{\phi}) = \langle A_\mu, \hat{\phi} \rangle. \quad (4.26)$$

Devemos agora substituir esse resultado em (4.9) para encontrar a curvatura. Derivando (4.25) com respeito a  $x^\nu$ , encontramos

$$\partial_\nu A_\mu = \{[\partial_\nu \partial_\mu \hat{\phi}, \hat{\phi}] - [\partial_\nu \hat{\phi}, \partial_\mu \hat{\phi}] + \partial_\nu \Lambda_\mu \hat{\phi}\}, \quad (4.27)$$

<sup>†</sup>Para obter explicitamente essa transformação, é necessário fixar o calibre separadamente em regiões  $U_1$  e  $U_2$  tais que  $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$  e que, juntas, cubram  $S_2^\infty$  [62].

donde

$$\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = (\partial_\mu \Lambda_\nu - \partial_\nu \Lambda_\mu) \hat{\phi} + 2[\partial_\nu \hat{\phi}, \partial_\mu \hat{\phi}] + \Lambda_\nu \partial_\mu \hat{\phi} - \Lambda_\mu \partial_\nu \hat{\phi}. \quad (4.28)$$

Por outro lado, o comutador que aparece na curvatura se escreve

$$[A_\mu, A_\nu] = [[\partial_\mu \hat{\phi}, \hat{\phi}], [\partial_\nu \hat{\phi}, \hat{\phi}]] + \Lambda_\nu [[\partial_\mu \hat{\phi}, \hat{\phi}], \hat{\phi}] - \Lambda_\mu [[\partial_\nu \hat{\phi}, \hat{\phi}], \hat{\phi}]. \quad (4.29)$$

Para calcular os dois últimos termos de (4.29), note que

$$\text{Tr}(\hat{\phi} \partial_\mu \hat{\phi}) = 0, \quad (4.30)$$

cuja dedução consiste simplesmente em derivar a condição  $|\hat{\phi}|^2 = 1$  em relação a  $x^\mu$ . Fazendo uso de (4.30) e (4.24), escrevemos

$$[[\partial_\mu \hat{\phi}, \hat{\phi}], \hat{\phi}] = -\{-2\text{Tr}(\hat{\phi} \hat{\phi})\} \partial_\mu \hat{\phi} - \hat{\phi} \text{Tr}(\hat{\phi} \partial_\mu \hat{\phi}) = -\partial_\mu \hat{\phi} \quad (4.31)$$

em que um novo uso foi feito da condição  $|\hat{\phi}|^2 = 1$ . Vemos que a soma de (4.28) e (4.29) leva ao cancelamento dos dois últimos termos de cada equação. Ora note que

$$\text{Tr}(A[B, C]) = \text{Tr}(ABC - ACB + BCA - BCA + BAC - BAC) = \text{Tr}(B[C, A]), \quad (4.32)$$

em que foi usada a ciclicidade do traço. Aplicando (4.24) ao primeiro termo de (4.29) e usando essa relação, encontramos

$$[[\partial_\mu \hat{\phi}, \hat{\phi}], [\partial_\nu \hat{\phi}, \hat{\phi}]] = -2\hat{\phi} \text{Tr}([\partial_\mu \hat{\phi}, \partial_\nu \hat{\phi}] \hat{\phi}), \quad (4.33)$$

em que também apareceria um termo proporcional a  $[\hat{\phi}, \hat{\phi}]$ , que é evidentemente nulo. Mas note que (4.24) e (4.30) implicam  $[[\partial_\mu \hat{\phi}, \partial_\nu \hat{\phi}], \hat{\phi}] = 0$ , o que significa que essas matrizes têm a mesma “direção” em  $su(2)$ , isto é,  $[\partial_\mu \hat{\phi}, \partial_\nu \hat{\phi}] = \alpha \hat{\phi}$ , com  $\alpha$  constante. Basta multiplicar essa relação por  $-2\hat{\phi}$  e tirar o traço para encontrar  $\alpha$ , que vale

$$\alpha = -2\text{Tr}([\partial_\mu \hat{\phi}, \partial_\nu \hat{\phi}] \hat{\phi}), \quad (4.34)$$

de modo que o lado direito de (4.33) é simplesmente  $\alpha \hat{\phi}$ . Substituindo (4.33) em (4.29), somando o resultado a (4.28) e usando novamente (4.34) encontramos, finalmente

$$F_{\mu\nu} = f_{\mu\nu} \hat{\phi}, \quad (4.35)$$

onde

$$f_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu \Lambda_\nu - \partial_\nu \Lambda_\mu + 2\text{Tr}([\partial_\mu \hat{\phi}, \partial_\nu \hat{\phi}] \hat{\phi}), \quad (4.36)$$

que coincide com o tensor usado por 't Hooft para definir o campo eletromagnético [27]. Vemos que, quando as condições que estabelecemos são satisfeitas,  $F_{\mu\nu}$  está na mesma direção que o campo de Higgs. Portanto, a quebra de simetria engendrada por  $\hat{\phi}$  faz com que a ação da curvatura seja reduzida à do grupo gerado por  $\hat{\phi}$ , que é  $U(1)$ . Verifiquemos que as equações de Maxwell são satisfeitas quando a simetria é quebrada. Primeiramente, note que

$$D_\alpha F^{\beta\gamma} = (\partial_\alpha f^{\beta\gamma}) \hat{\phi} + f^{\beta\gamma} D_\alpha \hat{\phi} = (\partial_\alpha f^{\beta\gamma}) \hat{\phi}. \quad (4.37)$$

Usando (4.22) e a forma suposta para  $\hat{\phi}$ , encontramos

$$[D^\nu(\zeta \hat{\phi}), \zeta \hat{\phi}] = \partial^\nu \zeta [\hat{\phi}, \hat{\phi}] = 0, \quad (4.38)$$

que substituída em (4.15) e combinada a (4.37), leva a

$$\partial_\mu f^{\mu\nu} = 0, \quad (4.39)$$

que são as equações de Maxwell não homogêneas na ausência de cargas, de onde se lê a presença de um campo de gauge não massivo paralelo a  $\hat{\phi}$ . Para encontrar as equações homogêneas, basta lembrar que a desigualdade de Bianchi, na forma (3.7), continua válida na teoria de Yang-Mills. Quando  $F_{\mu\nu}$  se escreve na forma (4.35), a relação (4.37) pode ser usada para trocar as derivadas covariantes por parciais, resultando em

$$\partial_\alpha f_{\beta\gamma} + \partial_\gamma f_{\alpha\beta} + \partial_\beta f_{\gamma\alpha} = 0, \quad (4.40)$$

que corresponde às equações de Maxwell restantes. Os campos elétrico e magnético ficam definidos de forma natural por  $e_k = f_{0k}$  e  $b_k = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}f^{ij}$ , que são simplesmente as projeções de  $E_k$  e  $B_k$  ao longo da direção  $\hat{\phi}$ . Note que, como usamos o traço para realizar a projeção, os campos abelianos são independentes do calibre.

Note que (4.40) implica, em particular, em  $\nabla \cdot \mathbf{b} = 0$ . Entretanto, isso não impede a presença de monopolos magnéticos na teoria, que estariam localizados nas regiões em que nossas hipóteses falham, nas quais as equações abelianas não podem ser usadas. Uma observação matematicamente simples mas fisicamente muito importante está na constatação de que o campo magnético nesse sistema simplesmente não pode ser definido de forma unívoca em todo o espaço. Uma possibilidade é seguir 't Hooft [27], que definiu o tensor eletromagnético abeliano por (4.39). Entretanto, há infinitas outras definições que correspondem ao mesmo valor na região assintótica. Como aponta Coleman [31], cada uma delas é igualmente válida, e corresponde a uma forma diferente de definir um magnetômetro ideal. Apenas quando a simetria é reduzida para  $U(1)$  a ambiguidade desaparece. Os monopolos estão, assim, “inseridos” em uma teoria  $SU(2)$ , e possuem “núcleos” próximos aos zeros, que são regiões em que o caráter não abeliano do grupo de calibre nos impede de definir os campos de forma precisa, e uma região externa, onde todas as formas de medir o campo magnético se tornam equivalentes. O resultado essencial da teoria, que desenvolveremos a seguir, depende apenas desse valor.

Estamos finalmente prontos para entender como a carga magnética se manifesta nessa teoria. Para encontrá-la, vamos calcular o fluxo magnético total, que pela versão magnética da lei de Gauss  $\nabla \cdot \mathbf{b} = \rho_m$  é, em nossas unidades, numericamente igual à carga magnética. Definindo o  $\mathbf{b}$  por meio de (4.36) e usando as convenções que estabelecemos para o comutador e traço dos geradores de  $su(2)$ , encontramos

$$q_m = \frac{1}{2} \oint_{S_2^\infty} \epsilon_{ijk} \epsilon_{abc} \partial_j \hat{\phi}^b \partial_k \hat{\phi}^c \hat{\phi}^a dS^i + \oint_{S_2^\infty} \epsilon_{ijk} \partial_j \Lambda_k dS^i. \quad (4.41)$$

O último termo é a integral de um rotacional, e o uso do teorema de Stokes garante que ele não contribuirá para a carga. Introduzindo o elemento dual a  $dS_i = \frac{1}{2}\epsilon_{ilm}dS_{lm}^*$  [37], para o qual vale  $\epsilon_{ijk}dS^i = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\epsilon^{ilm}dS_{lm}^* = dS_{jk}^*$ , podemos escrever

$$q_m = \frac{1}{2} \oint_{S_2^\infty} \epsilon_{abc} \hat{\phi}^a \frac{\partial \hat{\phi}^b}{\partial x^j} \frac{\partial \hat{\phi}^c}{\partial x^k} dS_{jk}^*, \quad (4.42)$$

em que reconhecemos o jacobiano da transformação entre o espaço físico e o interno, em que os campos estão representados. Usando esse jacobiano, deduzimos

$$q_m = \oint_{S_2} \hat{\phi}^a \frac{1}{2} \epsilon_{abc} dS_{bc}^* = \oint_{S_2} \hat{\phi}^a ds_a, \quad (4.43)$$

em que na última igualdade foi usada a definição do dual de  $ds_{bc}$ , e a integração é agora sobre a esfera unitária em  $su(2)$ . A integral vale  $N$  vezes a área superficial dessa esfera, sendo  $N$  a carga topológica, isto é

$$q_m = 4\pi N, \quad (4.44)$$

mostrando que a carga magnética existe para soluções topológicas, e é quantizada. Esse resultado pode ser escrito na forma  $q_m = 4\pi N/g$  se redefinirmos novamente os campos de gauge fazendo  $A_\mu \rightarrow gA_\mu$ , e nos lembrarmos de incluir o fator  $1/g$  na expressão que define a curvatura. A conclusão de que  $N$  corresponde exatamente ao inteiro que identificamos com a carga topológica se deve ao fato de que a passagem de (4.42) a (4.43) é justamente a construção explícita dos mapas  $\hat{\phi}_\infty : S_2^\infty \mapsto S_2$ , nos quais o requerimento de que  $\hat{\phi}$  esteja univocamente definido garante que  $N \in \mathbb{Z}$ . Veja que, malgrado a maior sofisticação algébrica, a relação entre o fluxo magnético e as classes de homotopia é essencialmente a mesma do caso abeliano. Novamente,  $N$  pode ser positivo ou negativo, de modo que a cada monopolo corresponde um antimonopolo cuja carga magnética tem o sinal oposto.

Note que demonstramos muito mais do que a simples existência de monopolos na teoria. Toda solução homotopicamente distinta do vácuo que satisfaz, ao menos assintoticamente, a condição  $D_\mu \hat{\phi} = 0$  (o que inclui todas as configurações de energia finita) é um monopolo magnético<sup>†</sup>. Não foi suposto que a solução é estática ou simétrica e não fizemos qualquer referência à carga elétrica, de modo que nossa análise não exclui partículas carregadas eletricamente, desde que a carga elétrica esteja distribuída na região em que as equações de Maxwell para  $f_{\mu\nu}$  não possam ser aplicadas. Além disso, a topologia garante que esses defeitos sejam estáveis contra decaimento no vácuo. Assim como no caso dos vórtices, ainda é em princípio possível que esses defeitos decaiam em outras estruturas com cargas topológicas  $n_1 + \dots + n_l = N$ , mas cada uma dessas estruturas também tem carga magnética e é, portanto, um monopolo, fazendo com que a persistência de partículas desse tipo na teoria seja inescapável! Embora a forma explícita dos nossos resultados dependa da escolha do grupo de gauge, o argumento poderia ser adaptado para outros grupos de Lie (sempre contendo  $U(1)$  ou um grupo a ele isomórfico), que resultariam em valores diferentes para o quantum de carga magnética, mas não eliminariam a possibilidade de monopolos. Quando a escolha é  $SU(2)$ , (4.44) é equivalente à condição de Dirac, e implica em carga elétrica quantizada de acordo com (4.1).

### 4.3 Monopolo de 't Hooft-Polyakov

Vamos agora analisar diretamente o caso estático das equações de movimento. Faremos uso frequente das identidades

$$\partial_k f(r) = \frac{x_k}{r} \frac{df}{dr}, \quad (4.45)$$

$$\varepsilon^{irs} \varepsilon_{ijk} = \delta_j^r \delta_k^s - \delta_k^r \delta_j^s, \quad (4.46)$$

em que a primeira propriedade pode ser verificada sem grandes dificuldades, e a segunda é uma identidade bastante conhecida do símbolo de Levi-Civita em três dimensões. Uma consequência imediata desta última propriedade é a relação  $\varepsilon^{irs} \varepsilon_{krs} = 2\delta_k^i$ . Primeiramente, vamos abrir (4.14) e (4.15) em termos das componentes, supondo campos independentes do tempo. Note que

<sup>†</sup>Os dyons, estudados na seção 4.4, também são incluídos entre os monopolos no contexto desta seção.

$$D_k D^k \phi^a = \partial_k \partial^k \phi^a + \varepsilon^{ars} \partial^k (A_k^r \phi^s) + \varepsilon^{abc} A_k^b \left[ \partial^k \phi^c + \varepsilon^{crs} A^{rk} \phi^s \right], \quad (4.47)$$

mas

$$\begin{aligned} \varepsilon^{abc} \varepsilon^{crs} A_k^b A^{rk} \phi^s &= (\delta_s^r \delta_b^s - \delta_b^r \delta_a^s) A_k^b A^{rk} \phi^s, \\ &= A_k^b \left( \phi^b A^{ak} - \phi^a A^{bk} \right), \end{aligned} \quad (4.48)$$

que, substituída em (4.47), nos leva a

$$D_k D^k \phi^a = \partial_k \partial^k \phi^a + 2\varepsilon^{abc} A^{bk} \partial_k \phi^c + A_k^b \left( \phi^b A^{ak} + \phi^a A^{bk} \right) + \varepsilon^{abc} \phi^c \partial_k A^{bk}. \quad (4.49)$$

Um raciocínio semelhante, mas usando o fato de que  $\partial_0 \phi = 0$ , dá

$$D_0 D^0 \phi^a = A_0^b (A^{a0} \phi^b - A^{b0} \phi^k), \quad (4.50)$$

que, somado a (4.49) e substituído em (4.14), nos leva à equação de movimento para o campo escalar, que se escreve

$$\begin{aligned} D_\mu D^\mu \phi^a &= A_0^b (A^{a0} \phi^b - A^{b0} \phi^k) + \partial_k \partial^k \phi^a + 2\varepsilon^{abc} A^{bk} \partial_k \phi^c + \varepsilon^{abc} \phi^c \partial_k A^{bk} \\ &\quad + A_k^b \left( \phi^b A^{ak} + \phi^a A^{bk} \right) = \lambda (|\phi|^2 - 1) \phi^a. \end{aligned} \quad (4.51)$$

Agora examinaremos as equações para o campo de gauge. Para as componentes  $\nu = k$  de (4.15), temos

$$D_\mu F^{a\mu k} = D_0 F^{a0k} + D_j F^{ajk} = \varepsilon^{abc} \phi^b D^k \phi^c. \quad (4.52)$$

Ora

$$D_0 F^{a0k} = -\varepsilon^{abc} A_0^b E^{ck} \quad (4.53)$$

e

$$D_l F^{alk} = \varepsilon^{lkj} \partial_l B_j^a + \varepsilon^{abc} A_l^b \varepsilon^{lik} B_i^c, \quad (4.54)$$

em que foi usada a relação

$$F^{kij} = \varepsilon^{ijl} B_l^k, \quad (4.55)$$

deduzida a partir da definição de  $B$  e da antissimetria da curvatura. Por outro lado,

$$\varepsilon^{abc} \phi^b D^k \phi^c = \varepsilon^{abc} \phi^b \partial^k \phi^c - A^{bk} \phi^b \phi^a + A^{ak} \phi^b \phi^a. \quad (4.56)$$

Usando (4.56) e substituindo as equações acima em (4.52), encontramos

$$\varepsilon^{abc} \left( A_j^b \varepsilon^{jik} B_i^c - A_0^b E^{ck} - \phi^b \partial^k \phi^c \right) + \varepsilon^{lkj} \partial_l B_j^a + A^{bk} \phi^b \phi^a - A^{ak} \phi^b \phi^a = 0. \quad (4.57)$$

Escolhendo um gauge tal que  $A_0 = 0$ , vemos que a lei de Gauss é trivialmente satisfeita. Os campos  $E_k$  são identicamente nulos, de modo que, em particular,  $\text{Tr}(\phi, E_k) = 0 \forall \mathbf{x}$ , mostrando que em nossa solução não há campo ou carga elétrica.

O problema completo é formidável, mesmo com o auxílio de algoritmos numéricos. A busca por soluções é simplificada por um procedimento análogo ao conduzido em nossa investigação sobre vórtices: investigamos uma classe de soluções que possuem uma certa simetria e escrevemos as equações de movimento correspondentes. Aqui, seguiremos 't Hooft e Polyakov ao buscar soluções invariantes sob a ação combinada dos grupos de rotações e de paridade [31],

com a palavra “invariante” tendo o mesmo significado de antes: o de que a ação desse grupo resulta em uma transformação de calibre global. Assim, podemos tomar o ansatz na forma

$$\phi^a = \frac{h(r)}{r^2} x^a, \quad (4.58)$$

$$A_i^a = \frac{k(r) - 1}{r^2} \varepsilon_{abi} x^b. \quad (4.59)$$

Essa configuração foi denominada *hedgehog* por Polyakov [28], pois sua forma lembra um ouriço. Sabemos que monopolos devem ter carga topológica, o que revela a necessidade de que  $\phi$  tenha ao menos um zero, que podemos colocar na origem. Essa é uma simples aplicação de um conhecido teorema da topologia, o qual diz que “é impossível pentear um coco” (ou, mais apropriadamente, um “ouriço”), pois uma tal tentativa sempre deixará um buraco. Também devemos levar em conta que o campo de gauge deve estar bem definido em todos os pontos e que a solução deve ter energia finita, o que nos leva a exigir as condições de contorno

$$\lim_{r \rightarrow \infty} h(r) = r, \quad (4.60) \quad \lim_{r \rightarrow 0} \left\{ \frac{h(r)}{r} \right\} = 0, \quad (4.61)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} k(r) = 0 \quad (4.62) \quad \lim_{r \rightarrow 0} k(r) = 1. \quad (4.63)$$

Um antimonopolo de carga magnética igual em módulo resulta da transformação  $\hat{x}^a \mapsto -\hat{x}^a$ . Note que o ansatz foi construído de modo que  $N = 1$ , visto que o limite  $r \rightarrow \infty$  dá simplesmente a identidade, que mapeia os pontos de uma esfera de raio infinito (representados pelos ângulos polar e azimutal) em seus correspondentes da esfera unitária de  $su(2)$ , parametrizados pelos mesmos ângulos. Essa simples observação pode ser usada para exemplificar o poder da topologia enquanto ferramenta de análise. Sabemos que o zero localizado na origem é o único possível, então  $h(r)$  nunca muda de sinal e deve ser estritamente positiva, o que também implica que, ao menos em uma vizinhança da origem, essa função deve ser crescente. Além disso, já conhecemos a carga magnética, que vale  $4\pi$ , e essa informação permite o uso de  $\nabla \cdot \mathbf{b} = \rho_m$  para calcular campo magnético assintótico, que é radial pela simetria do problema. Como mencionado, não existe uma forma definitiva de calcular essa quantidade em todo o espaço, mas será instrutivo seguir 't Hooft [27] e usar (4.36) para todo  $\mathbf{x}$ . Sabemos que, como a solução não é topologicamente trivial, não existe uma transformação de calibre que torne  $\phi$  e  $A_k$  paralelos a  $T^3$  em todo o espaço. Entretanto, isso pode ser alcançado para todos os pontos tais que  $\mathbf{x} \notin \mathcal{C}_\beta$ , em que  $\mathcal{C}_\beta$  é um cone que se estende ao longo do eixo  $z$  negativo, incluindo a origem, com ângulo de abertura  $\beta$  que pode ser tomado arbitrariamente pequeno [153]. Dessa escolha de gauge resulta  $f_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu^3 - \partial_\nu A_\mu^3$ , que satisfaz as equações de Maxwell em todos os pontos em que está definida, o que significa que a fonte de campo deve estar em  $\mathcal{C}_\beta$ . Poderíamos naturalmente mudar a direção sobre a qual o cone se estende, e somente o zero de  $\phi$  permanece em  $\mathcal{C}_\beta$  em todas essas cenários fisicamente equivalentes, sendo esse o ponto em que devemos identificar a fonte de  $\mathbf{b}$ . Temos uma carga pontual na origem, e um simples uso da contraparte magnética da lei de Gauss ( $\nabla \cdot \mathbf{b} = 4\pi\delta(\mathbf{x})$ ) nos conduz ao campo magnético

$$\mathbf{b} = \frac{\hat{r}}{r^2}. \quad (4.64)$$

Essa demonstração ilustra bem a relação entre os zeros da seção e a carga magnética. De fato, foram considerações dessa natureza que levaram 't Hooft a identificar o monopolo nessa teoria e sugerir essa forma para a solução. Na referência [153], são construídas explicitamente

as transformações de calibre que colocam os campos na direção desejada, e é demonstrado que, no limite em que  $\beta \rightarrow 0$ , essa construção resulta numa corda nodal, estabelecendo a conexão entre os monopolos de Dirac e 't Hooft-Polyakov. Este, entretanto, difere daquele no fato de que a corda de singularidade, que apareceu por consequência da escolha de calibre, não é uma necessidade da teoria, podendo ser “suavizada” dentro do monopolo [152]. Se insistirmos em usar o tensor de 't Hooft para definir o campo magnético em todo o espaço, obteremos sempre uma singularidade na origem, mas existem definições alternativas (as quais, naturalmente, sempre satisfazem (4.64) assintoticamente) que resultam em uma distribuição de carga não singular [153].

Agora retornamos a (4.58) e (4.59) para procurar as equações de movimento do problema em termos do ansatz. Será conveniente definir as quantidades  $\zeta \equiv h/r^2$  e  $\xi \equiv (k-1)/r^2$ , em termos das quais os campos se escrevem  $A_k^a = \varepsilon_{ajk} x^j \xi$  e  $\phi = \zeta \hat{\phi}$ . Lembramos que, devido à assinatura métrica adotada, as coordenadas espaciais satisfazem  $x^j = \eta^{jk} x_k = x_j$ . Para calcular  $B_l^a$ , precisamos de  $F_{jk}^a$ , que fica

$$\begin{aligned} F_{jk}^a &= \partial_j(\varepsilon_{aik} x_i \xi) - \partial_k(\varepsilon_{aij} x_i \xi) + \xi^2 (\delta_{cd} \delta_{aj} - \delta_{cj} \delta_{ad}) \varepsilon_{cfk} x_d x_f, \\ &= 2\varepsilon_{ajk} \xi + \frac{x_i (x_j \varepsilon_{aik} - x_k \varepsilon_{aij})}{r} \xi' + \xi^2 (x_c x_a \varepsilon_{cfk} - x_a x_f \varepsilon_{jfk}), \end{aligned} \quad (4.65)$$

donde

$$B_l^a = \frac{1}{2} \varepsilon^{ljk} F_{jk}^a = 2\delta_l^a \xi + \xi' \left( r\delta_l^a - \frac{x^a x_l}{r} \right) + \xi^2 x_l x^a. \quad (4.66)$$

As derivadas do campo escalar satisfazem

$$\partial^k \phi^c = \frac{x^k x^c \zeta'}{r} + \zeta \delta_k^c. \quad (4.67)$$

Podemos agora analisar (4.57). O primeiro termo que aparece naquela equação é

$$\begin{aligned} \varepsilon^{abc} A_j^b \varepsilon^{jik} B_k^c &= (\delta_l^c \delta_j^a - \delta_l^a \delta_j^c) x_l \varepsilon^{ijk} B_k^c \xi \\ &= \xi \left( x_c \varepsilon^{aik} - x_a \varepsilon^{cik} \right) \left\{ \delta_{ck} (2\xi + \xi' r) - \left( \frac{\xi'}{r} - \xi^2 \right) x_c x_k \right\}, \\ &= x_k \varepsilon^{aik} (2\xi^2 + r^2 \xi^3). \end{aligned} \quad (4.68)$$

Sabemos que  $E^{ck} = 0$ , então prosseguimos ao termo seguinte. Examinando o produto  $\phi^b \partial^k \phi^c$ , percebemos que

$$\phi^b \partial^k \phi^c = \frac{x^k x^c x^b}{r} \zeta' \zeta + \zeta^2 x^b \delta_k^c \implies \varepsilon^{abc} \phi^b \partial^k \phi^c = \varepsilon^{abk} x^b \zeta^2. \quad (4.69)$$

Em seguida, derivamos as componentes de  $B_k$ , para encontrar

$$\partial_j B_k^c = \frac{2\delta_k^c x_j \xi'}{r} + \frac{x_j x_k x^c}{r^2} (2r^2 \xi \xi' - \xi'') + \delta_k^c \xi'' x_j + \left( \frac{\delta_j^c x_k}{r} + \frac{\delta_{jk} x^c}{r} \right) (\xi^2 - \xi'), \quad (4.70)$$

donde

$$\varepsilon^{ijk} \partial_j B_k^c = \varepsilon_{ijc} x^j \left( 4 \frac{\xi'}{r} + \xi'' - \xi^2 \right). \quad (4.71)$$

Os últimos dois termos de (4.57), ficam

$$A_k^b \phi^a \phi^b = \varepsilon_{bjk} x^j x^b x^a \xi \zeta^2 = 0, \quad (4.72)$$

$$A_k^a \phi^b \phi^b = \varepsilon_{ajk} x^j r^2 \xi \zeta^2, \quad (4.73)$$

em que a última igualdade da primeira linha resulta do fato de que  $2\varepsilon_{bjk} x^j x^b = \varepsilon_{bjk} x^j x^b + \varepsilon_{kjb} x^b x^j = 0$ . Juntando tudo, ficamos com

$$\varepsilon^{jka} x_j \left\{ r^2 \xi \zeta^2 + \left[ \xi'' + \frac{4\xi'}{r} - \xi^2 \right] - [2\xi^2 + r^2 \xi^3] - \zeta^2 \right\} = 0. \quad (4.74)$$

Devemos agora voltar às funções  $h(r)$  e  $k(r)$ . De  $\xi \equiv (k-1)/r^2$ , vem

$$\xi' = \frac{k'}{r^2} - \frac{2(k-1)}{r^3}, \quad \xi'' = \frac{k''}{r^2} - \frac{4k'}{r^3} + \frac{6(k-1)}{r^4}, \quad (4.75)$$

ao passo que as derivadas de  $\zeta$  em termos de  $h(r)$  se escrevem

$$\zeta' = \frac{h'}{r^2} - \frac{2h}{r^3}, \quad \zeta'' = \frac{h''}{r^2} - \frac{4h'}{r^3} + \frac{6h}{r^4}. \quad (4.76)$$

Substituindo essas equações em (4.74) somos levados a

$$\begin{aligned} r^2 k'' - 2(k-1) - h^2 k &= 3(k-1)^2 + (k-1)^3, \\ &= k^3 - (2k-1) - k, \end{aligned} \quad (4.77)$$

ou

$$k'' - \frac{k}{r^2} (h^2 + k^2 - 1) = 0. \quad (4.78)$$

Resta agora (4.51). Derivando (4.67), encontramos

$$\begin{aligned} \partial^k \partial_k \phi^a &= \frac{\zeta' x^a}{r} + \frac{x_k x^k x^a \zeta''}{r^2} - \frac{x_k x^k x^a \zeta'}{r^3} + \frac{\zeta'}{r} [(\partial_k x_k) x^a + x^a] \\ &= \frac{x^a}{r} (4\zeta' + r\zeta''), \end{aligned} \quad (4.79)$$

onde usamos o fato de que o traço da delta em 3 dimensões é  $\delta_k^k = 3$ . Por (4.69), sabemos que  $\varepsilon^{abc} \partial_k \phi^c = \varepsilon^{abk} \zeta$ , donde

$$2\varepsilon^{abc} A^{bk} \partial_k \phi = -2\varepsilon^{jbc} \varepsilon_{abk} \xi \zeta x_j = -4\xi \zeta x^a. \quad (4.80)$$

Ora note que

$$A_k^b A^{ak} = \xi^2 x_j x_l (\delta^{ab} \delta^{jl} - \delta^{al} \delta^{jb}) = \xi^2 (r^2 \delta^{ab} - x^a x^b), \quad (4.81)$$

donde

$$A^{bk} (A^{ak} \phi^b - A^{bk} \phi^a) = -2x^a r^2 \xi \zeta^2. \quad (4.82)$$

A expressão  $\varepsilon_{abc} \phi^c \partial_k A^{bk} \propto x_c x_k x_j \varepsilon^{bjk}$ , é identicamente nula, por ser a contração de um tensor simétrico e um antissimétrico. Falta apenas a derivada do potencial, cujo cálculo não apresenta grandes dificuldades, e sua projeção na direção  $T^a$  fica

$$\langle V_\phi, T^a \rangle = \lambda \frac{h}{r} \left( \frac{h^2}{r^2} - 1 \right) \frac{x^a}{r}. \quad (4.83)$$

Usando as expressões encontradas acima e voltando às variáveis  $h(r)$  e  $k(r)$ , deduzimos

$$h'' - \frac{2hk^2}{r^2} = \lambda h \left( \frac{h^2}{r^2} - 1 \right). \quad (4.84)$$

O problema se reduz, então, à resolução de um sistema com duas equações diferenciais ordinárias. Esse certamente não é um desafio que chamaríamos de “simples”, mas é inegável o avanço em relação ao problema original. Soluções analíticas só são conhecidas no limite  $\lambda \rightarrow 0$ , mas as equações simétricas são muito mais amenas à análise numérica, mesmo para outros valores de  $\lambda$ . A existência de soluções para  $\lambda$  arbitrário foi demonstrada rigorosamente em [154], e resultados numéricos apontam para a sua unicidade. A demonstração de que essas soluções são estáveis pode ser encontrada, por exemplo, em [155].

Vamos agora examinar a densidade de energia da solução. Nesse caso (4.19) se anula, de modo que  $T_{00}$  é dada pelo integrando de (4.20). Primeiramente, note que

$$\varepsilon^{abc} A_k^b \phi^c = \zeta \xi [r^2 \delta_k^a - x^a x_k], \quad (4.85)$$

e as derivadas parciais do campo escalar são dadas por (4.67), de modo que podemos escrever a derivada covariante

$$D_k \phi^a = \delta_k^a \zeta + \frac{x_k x^a \zeta'}{r} + \zeta \xi (r^2 \delta_k^a - x^a x_k), \quad (4.86)$$

donde

$$(D_k \phi^a)^2 = 3\zeta^2 + 2r\zeta\zeta' + (r\zeta')^2 + 2\zeta\xi(r^2\delta_k^a - x^a x_k) \left( \delta^{ka}\zeta + \frac{x^k x^a \zeta'}{r} \right) + 2\zeta^2 \xi^2 r^4. \quad (4.87)$$

Ora

$$2\zeta\xi(r^2\delta_k^a - x^a x_k) \left( \delta^{ka}\zeta + \frac{x^k x^a \zeta'}{r} \right) = 4\zeta^2 r^2 \xi = 4\zeta^2 (k-1), \quad (4.88)$$

de modo que

$$2\zeta\xi(r^2\delta_k^a - x^a x_k) \left( \delta^{ka}\zeta + \frac{x^k x^a \zeta'}{r} \right) + 2r^2 \zeta^2 \xi^2 = 2\zeta^2 (k^2 - 1), \quad (4.89)$$

que implica

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(D_k \phi^a)^2 &= \frac{1}{2} [\zeta^2(1+2k^2) + r^2 \zeta'^2 + 2\zeta\zeta' r] \\ &= \frac{k^2 h^2}{r^4} + \frac{1}{2} \left( \frac{h'}{r} - \frac{h}{r^2} \right)^2, \end{aligned} \quad (4.90)$$

o qual é o primeiro termo em (4.20). Prosseguimos ao próximo:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} B^{ak} B_k^a &= 6\xi^2 + 2\xi^3 r^2 + \frac{1}{2} \xi^4 r^4 + \underbrace{\frac{\xi'^2}{2} \left( r\delta^{ka} - \frac{x^a x^k}{r} \right)^2}_{=r^2 \xi'^2} \\ &\quad + \underbrace{\xi' \left[ \left( r\delta_k^a - \frac{x^a x_k}{r} \right) \left( 2\delta^{ka} \xi + \xi^2 x^a x^k \right) \right]}_{=4r\xi\xi'}. \end{aligned} \quad (4.91)$$

Notando que  $r\xi' = k'/r - 2\xi$ , podemos escrever

$$4r\xi'\xi + (\xi'r)^2 + 6\xi^2 = 2\xi^2 + \left(\frac{k'}{r}\right)^2, \quad (4.92)$$

donde

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}B^{ak}B_k^a &= \left(\frac{k'}{r}\right)^2 + \frac{1}{2}(\xi^4 r^4 + 4\xi^2 + 4\xi^3 r^2), \\ &= \frac{1}{2}(\xi^2 r^2 + 2\xi)^2 \\ &= \frac{1}{r^4} \left[ (rk')^2 + \frac{(k^2 - 1)^2}{2} \right]. \end{aligned} \quad (4.93)$$

Como  $|\phi| = h/r$ , a contribuição de  $V(|\phi|)$  para a densidade de energia é simplesmente  $\lambda(r^2\xi^2 - 1)^2/4$  que, somada a (4.90) e (4.93), nos dá

$$\rho(r) = \frac{k^2 h^2}{r^4} + \frac{1}{2} \left( \frac{h'}{r} - \frac{h}{r^2} \right)^2 + \left( \frac{k'}{r} \right)^2 + \frac{(k^2 - 1)^2}{2r^4} + \frac{\lambda}{4} \left( \frac{h^2}{r^2} - 1 \right)^2. \quad (4.94)$$

A energia obtida de (4.94) pode ser identificada com a massa do monopolo. Essa é mais uma diferença com relação ao monopolo de Dirac, em que essa quantidade é um parâmetro livre, que não pode ser calculado pela teoria. A massa é uma grandeza especialmente importante no estudo de monopolos, pois sua ordem de magnitude determina condições experimentais nas quais um monopolo deve ser encontrado. Em geral, não podemos calcular analiticamente a energia, mas sua ordem de magnitude é conhecida desde os trabalhos originais de 't Hooft e Polyakov, que concluíram ela é da ordem da massa das partículas  $W^\pm$  da teoria [27, 28].

### 4.3.1 Limite de Bogomol'nyi

Assim como o modelo de Nielsen-Olesen, a teoria de Yang-Mills-Higgs foi um dos exemplos considerados por Bogomol'ny em seu clássico trabalho [59], em que a existência de um vínculo de Bogomol'nyi foi estabelecida para o caso  $\lambda \rightarrow 0$ , que corresponde ao limite em que a massa do bóson de Higgs tende a zero. Assim como no caso abeliano, é possível encontrar um limite inferior para a energia de cada setor topológico, e encontramos um formalismo de primeira ordem para soluções com ou sem simetria rotacional. Note que quando  $\lambda = 0$  a condição de energia finita não demanda  $|\phi| \rightarrow v$  no infinito, mas vamos continuar impondo esse comportamento por meio das condições de contorno, o que permite que o limite de Bogomol'nyi seja visto como uma aproximação válida para valores pequenos, mas finitos, de  $\lambda$ . Na referência [156], os autores desenvolvem uma discussão mais profunda sobre a relação entre sistemas BPS e o caso geral  $\lambda \neq 0$ , e é demonstrado que a massa (que corresponde à energia de Bogomol'nyi do monopolo) pode ser escrita como uma série de potências em  $m_\psi/M_W$ , em que  $M_W$  é a massa das componentes do campo de gauge ortogonais a  $\phi$ . A energia de Bogomol'nyi corresponde ao termo de ordem zero nessa expansão. No limite  $\lambda \rightarrow 0$ , a energia de um monopolo estático se escreve

$$\begin{aligned} E &= - \int_{\Omega} d^3x \operatorname{Tr} (D_k \phi D_k \phi + B_k B_k), \\ &= - \int_{\Omega} d^3x \{ \operatorname{Tr} (B_k B_k \pm B_k D_k \phi \pm D_k \phi B_k + D_k \phi D_k \phi) \mp 2 \operatorname{Tr} (B_k D_k \phi) \}, \end{aligned} \quad (4.95)$$

em que  $\Omega$  denota o espaço tridimensional euclidiano. Para escrever o último termo de (4.95), usamos a propriedade  $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$ . Notado seja que, pela identidade de Bianchi, vale  $\text{Tr}(\varepsilon^{0ijk}F_{jk}) = 2\text{Tr}(D_k B_k) = 0$ , donde

$$\begin{aligned}\text{Tr}(B_k D_k \phi) &= \text{Tr}(B_k D_k \phi) + \text{Tr}\{(D_k B_k)\phi\} = \text{Tr}\{D_k(B_k \phi)\}, \\ &= \text{Tr}\{\partial_k(B_k \phi)\},\end{aligned}\quad (4.96)$$

em que a última igualdade decorre do fato de que o traço de qualquer comutador é nulo. Temos, portanto

$$E = - \int_{\Omega} d^3x \text{Tr}\{(B_k \pm D_k \phi)^2\} \pm 2 \int_{\partial\Omega} dS^k \text{Tr}(B_k \phi), \quad (4.97)$$

em que, na segunda integral, foi realizada uma integração por partes para mudar a região de integração de  $\Omega$  para sua fronteira  $\partial\Omega$ , que pode ser identificada com  $S_2^\infty$ . Mas sabemos que, no infinito,  $F_{\mu\nu} = f_{\mu\nu}\phi$ , e  $|\phi| = 1$ , de modo que a projeção  $-2\text{Tr}(B_k \phi)$  dá simplesmente a componente  $b_k$  do campo magnético. O último termo é então o valor absoluto do fluxo magnético em  $S_2^\infty$ , que já calculamos. Então temos o vínculo de Bogomol'nyi

$$E \geq 4\pi|N|, \quad (4.98)$$

o qual é saturado se, e somente se,

$$B_k = \mp D_k \phi, \quad (4.99)$$

que são as equações BPS da teoria. A equação  $B_k = -D_k \phi$  dá um monopolo, enquanto a restante descreve um antimonopolo BPS. É fácil demonstrar que as soluções BPS satisfazem as equações de segunda ordem. De  $B_k = -D_k \phi$  vem  $D_k D_k \phi = -D_k B_k = 0$ , que é o caso  $\lambda = 0$  de (4.14). Por outro lado, a lei de Gauss é trivialmente satisfeita e, para verificar as outras igualdades em (4.15), note que (4.55) e as equações de Bogomol'nyi implicam

$$\begin{aligned}D_j F^{jk} &= \varepsilon^{jkl} D_j B_l = -\frac{1}{2} \left( \varepsilon^{jkl} D_j D_l \phi + \varepsilon^{lkj} D_l D_j \phi \right) \\ &= \frac{1}{2} \varepsilon^{jlk} [D_j, D_l] \phi,\end{aligned}\quad (4.100)$$

Comparando a última expressão de (4.100) com (4.8), vemos que o comutador que aparece é simplesmente  $[F_{jl}, \phi]$ , de modo que podemos usar novamente a definição de  $B$  e (4.99) para deduzir, finalmente

$$D_j F^{jk} = [B^k, \phi] = [\phi, D^k \phi], \quad (4.101)$$

que completa a demonstração. Esses resultados mostram que equações BPS existem em qualquer setor topológico. Podemos substituir o ansatz simétrico em (4.99) para encontrar a forma que elas tomam nesse caso. Na prática, é menos trabalhoso usar (4.94) e minimizar diretamente a energia, que fica

$$\begin{aligned}E &= 4\pi \int_0^\infty dr \left\{ \left( \frac{k^2 - 1}{\sqrt{2}r} \right)^2 + \frac{(h'r - h)^2}{2r^2} \pm 2 \frac{(k^2 - 1)(h'r - h)}{2r^2} \right. \\ &\quad \left. \mp \frac{(k^2 - 1)(h'r - h)}{r^2} + k'^2 \right\} \\ &= 4\pi \int_0^\infty dr \left\{ \left( \frac{hk}{r} \pm k' \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{k^2 - 1}{r} \pm \frac{h}{r} \mp h' \right)^2 \pm \frac{d}{dr} \left[ \frac{h}{r} (1 - k^2) \right] \right\} \\ &= 4\pi \int_0^\infty dr \left\{ \left( \frac{hk}{r} \pm k' \right)^2 + \frac{1}{2r^2} [k^2 - 1 \mp (rh' - h)]^2 \right\} + 4\pi,\end{aligned}\quad (4.102)$$

que conduz ao vínculo de Bogomol'nyi  $E \geq 4\pi$ , o qual corresponde, como deveria ser, ao caso  $|N| = 1$  de (4.99). De (4.102) lemos a versão esfericamente simétrica das equações de Bogomol'nyi:

$$rk' = \mp hk, \quad (4.103)$$

$$1 - k^2 = \pm(rh' - h), \quad (4.104)$$

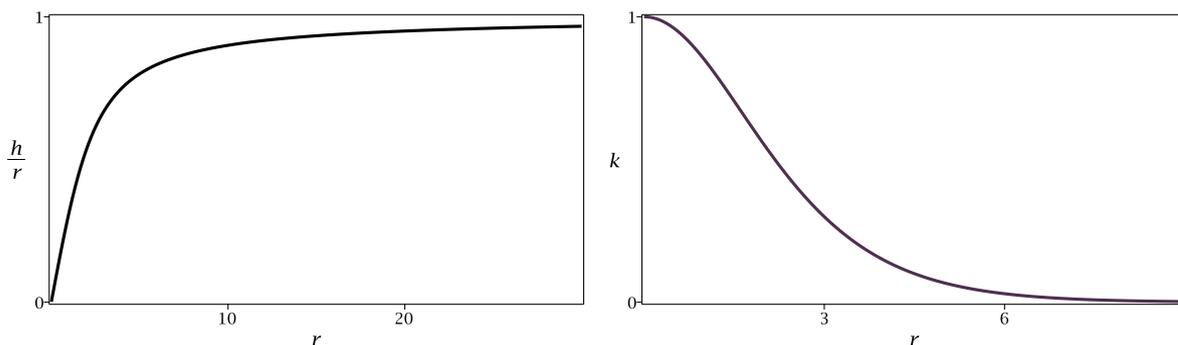
em que os sinais superiores correspondem ao monopolo e os inferiores ao antimonopolo. Surpreendentemente para um sistema com essa complexidade, uma solução analítica das equações de movimento é conhecida no limite de Bogomol'nyi. Com efeito, as equações de Bogomol'nyi para o monopolo são resolvidas por

$$h(r) = r \coth(r) - 1 \quad (4.105)$$

e

$$k(r) = \frac{r}{\sinh(r)}, \quad (4.106)$$

como pode ser verificado por substituição direta. Um antimonopolo é obtido pela inversão do sinal de  $h(r)$ . Essas soluções foram encontradas por Prasad e Sommerfield em 1975 [60], antes do famoso trabalho de Bogomol'nyi. Embora nenhuma menção tenha sido feita às equações de primeira ordem no trabalho de Prasad e Sommerfield, eles foram os primeiros a analisar o limite  $\lambda \rightarrow 0$ . O comportamento das funções  $|\phi| = h(r)/r$  e  $k(r)$  está representado na figura 4.1. Note que  $h(r)$  tem exatamente um zero, como havíamos previsto, e é estritamente crescente. Por outro lado,  $k(r)$  é uma função estritamente decrescente que varia de 1 a 0, de forma consistente com as condições de contorno. Note que  $|\phi|$  se aproxima de seu valor assintótico de forma bastante lenta em comparação à taxa com que o módulo do campo de gauge se aproxima do vácuo. Embora a solução de Prasad-Sommerfield só seja válida no limite de Bogomol'nyi, seu comportamento é qualitativamente similar ao encontrado para  $\lambda$  finito, investigado via métodos numéricos [156].



**Figura 4.1** Gráficos de  $|\phi| = h(r)/r$  (em preto) e  $k(r)$  (em violeta) para o monopolo de Prasad-Sommerfield

A forma analítica de qualquer outra solução das equações de Bogomol'nyi não é conhecida até o momento, mas soluções BPS com qualquer  $N$  existem e podem ser construídas por vários métodos. Na referência [120], é demonstrada a existência de soluções BPS correspondentes a configurações com  $N$  monopolos. Uma solução desse tipo deve não apenas satisfazer as equações de primeira ordem, como também possuir zeros distintos que possam ser interpretados

individualmente como os centros de cada um dos monopolos. A demonstração é feita “juntando” monopolos de Prasad-Sommerfield distantes e mostrando que essa construção aproxima uma solução exata das equações BPS. Fisicamente, esse é um resultado surpreendente. Afinal, esperaríamos que houvesse uma interação entre dois monopolos magnéticos, de modo que as equações BPS (que só fornecem soluções independentes do tempo) seriam presumivelmente violadas. O resultado estabelecido em [152], onde se constata que a força entre monopolos de mesma carga é nula, joga alguma luz nessa discussão. A interação entre essas partículas é composta por duas contribuições distintas: uma interação escalar atrativa, intermediada pelo bóson de Higgs, e uma que é a versão magnética da lei de Coulomb. Ambas as forças decaem com  $r^{-2}$  e, para dois monopolos de mesma carga, as duas contribuições se cancelam, o que possibilita a existência de soluções estáticas com  $N$  monopolos. Uma solução representando um par monopolo-antimonopolo (ou generalizações) pode ser construída, mas nesse caso as duas contribuições da força serão atrativas, de modo que uma tal solução não pode ser BPS. É curioso observar que a “lei de Coulomb” para monopolos pode ser inferida apenas com base nas propriedades das soluções [152]. Isso está longe de ser óbvio, já que na teoria de Maxwell é necessário postular a força eletromagnética, que não pode ser deduzida pelas equações de campo [35].

#### 4.4 Dyon de Julia e Zee

Note que nada na nossa discussão proíbe a presença de carga elétrica nas soluções de (4.14) e (4.15), já que nenhuma condição sobre essa quantidade foi suposta. Fora do monopolo, vimos que  $f_{\mu\nu}$  satisfaz as equações de Maxwell com  $J^\mu = 0$ , mas carga e campo elétrico podem emergir sob as mesmas condições em que encontramos seus análogos magnéticos, com uma fonte na região em que a simetria  $SU(2)$  ainda se expressa. Sabemos que toda solução topológica dessa teoria deve ter carga magnética, o que nos leva a considerar partículas que tenham, ao mesmo tempo, os dois tipos de carga. Soluções com essa propriedade foram denominadas *dyons* por Julian Schwinger, um dos pioneiros no estudo dessas partículas [157]. Quando a solução é estática (i.e, não possui energia cinética) vimos que a lei de Gauss é trivialmente satisfeita, impedindo a presença carga elétrica. Como essa é uma quantidade fisicamente observável, é claro que nenhuma transformação de gauge poderá mudar esse fato. À primeira vista, pode parecer que o estudo de dyons nos levará a uma situação bastante complicada envolvendo equações dependentes do tempo, mas uma solução bastante engenhosa e relativamente simples foi proposta por Bernard Julia e Anthony Zee [111]. Em um trabalho publicado alguns meses após o artigo de 't Hooft, os autores propuseram uma simples generalização do ansatz estudado na seção anterior, o qual mantém a simetria rotacional e só envolve funções independentes do tempo. Tomamos  $\phi$  e  $A_k$  como na seção passada e satisfazendo as mesmas condições de contorno, e escolhemos um calibre tal que

$$A_0^a = \frac{j(r)}{r^2} x_a, \quad (4.107)$$

com condições as de contorno adicionais

$$\lim_{r \rightarrow \infty} j(r) = \alpha r + \beta, \quad (4.108) \quad \lim_{r \rightarrow 0} j(r) = 0, \quad (4.109)$$

em que  $\alpha$  e  $\beta$  são constantes. Note que  $A_0$  é paralelo a  $\phi$ , o que implica  $[A_0, \phi] = 0$ , de modo que a solução satisfaz

$$D_0 \phi = 0. \quad (4.110)$$

Usando esse resultado, podemos escrever a lei de Gauss na forma

$$D_k E_k = 0, \quad (4.111)$$

que agora admite campos elétricos não triviais. Ora  $E_k = -\partial_k A_0 + [A_0, A_k]$  e, como o comutador  $[A_0, A_k]$  é ortogonal a  $A_0$  e, portanto, a  $\phi$ , deduzimos que a projeção de  $E_k$  ao longo da direção de  $\phi$  deve ser  $2\text{Tr}(\partial_k A_0 \hat{\phi})$ . O campo elétrico, que podemos definir pelo tensor de 't Hooft, fica

$$\mathbf{e} = - \left[ \frac{d}{dr} \left( \frac{j}{r} \right) \right] \hat{r}. \quad (4.112)$$

Assintoticamente, temos  $\mathbf{e} = \beta \hat{r}/r^2$ . Aplicando a lei de Gauss do eletromagnetismo em uma superfície esférica que engloba toda a distribuição de carga, podemos determinar  $\beta = q_e/4\pi$ , em que  $q_e$  é a carga elétrica. Assim,

$$\mathbf{e} = \frac{q_e}{4\pi r^2} \hat{r}, \quad (4.113)$$

que é o campo resultante de uma distribuição de carga elétrica esfericamente simétrica. Note que  $q_e$  entra como um parâmetro da teoria, que só pode ser especificado por condições de contorno que o fixem. A presença do campo elétrico não afeta as considerações que levaram à dedução da carga magnética e do campo produzido por ela, que continuam idênticos.

A não nulidade de  $A_0$  não contradiz nossa afirmação de que é sempre possível tomar  $A_0 = 0$ . De fato, não é difícil encontrar um calibre em que essa condição é satisfeita: basta tomar  $\gamma = \exp\{t(A_0^a T^a)\}$  em (4.4). A razão pela qual não tomamos esse calibre está no fato de que essa transformação também altera os outros campos, que passam a depender do tempo. Devido à forma particularmente simples do ansatz e às simplificações que decorrem da observação de que  $A_0$  é paralelo a  $\phi$ , é simplesmente mais conveniente usar o ansatz de Julia e Zee. Ao contrário do monopolo, essa solução possui energia cinética, pois  $E_k E_k \neq 0$ . Pela forma do ansatz, vemos que os campos são funções só de  $\mathbf{x}$ , mas é importante notar que essa condição é dependente do calibre, como acabamos de exemplificar. Se usarmos energia cinética como critério para definir quando uma solução é estática, obtemos uma condição válida em qualquer calibre. Veja que o monopolo<sup>†</sup>, por exemplo, pode ser descrito por funções dependentes do tempo (nesse caso será inválido tomar  $A_0 = 0$ ) mas, se o fizermos, ainda teremos  $T = \mathbf{e} = 0$ .

Vamos agora escrever as equações de movimento em termos do ansatz. Ora  $B_k$ ,  $\phi$  e as derivadas dessas quantidades não mudam, então só precisamos considerar os termos que dependem de  $E_k$  e  $A_0$  nas equações de movimento. Em particular, isso implica que (4.84) continua válida, de modo que ainda temos

$$h'' - 2hk^2 = \lambda h(h^2 - r^2). \quad (4.114)$$

Em princípio, precisaríamos agora substituir (4.107) e encontrar as outras equações de movimento. Felizmente, podemos evitar a maior parte dos cálculos envolvidos por meio de uma observação bastante simples, conhecida na literatura como correspondência de Julia e Zee [149]. Observe que a forma de  $A_0$  é perfeitamente análoga à de  $\phi$ , além de eles serem, como vimos, paralelos. Além disso, note que, como  $\partial_0 A_k = 0$ , vale

$$E_k = -\partial_k A_0 - [A_k, A_0] = -D_k A_0. \quad (4.115)$$

Então a lei de Gauss fica simplesmente  $D_k D_k A_0 = 0$ , que é formalmente idêntica ao caso  $\lambda = 0$  de (4.14) se fizermos a correspondência entre  $A_0$  e  $\phi$ . Portanto, a lei de Gauss se escreve

$$j'' - 2jk^2 = 0. \quad (4.116)$$

<sup>†</sup>Nesta seção, estamos usando a palavra "monopolo" para nos referir às soluções que só tem carga elétrica, embora os dyons também sejam magnetos de um único polo.

Para calcular equação de movimento restante, note que (4.115) permite que as componentes espaciais de (4.15) sejam escritas na forma

$$D_j F^{jk} = [\phi, D^k \phi] - [A_0, D^k A_0]. \quad (4.117)$$

Como  $D_j F^{jk}$  não possui nenhum termo que dependa de  $\phi$  ou de  $A_0$ , as contribuições dos comutadores em (4.117) são análogas. Na seção anterior, calculamos o caso  $A_0 = 0$ , e vimos que a contribuição de  $[\phi, D^k \phi]$  para (4.78) se resume ao termo  $-h^2 k/r^2$ , o único que depende de  $h(r)$ . Usando a correspondência de Julia e Zee e notando o sinal negativo em (4.117), concluímos que (4.117) equivale a

$$k'' - \frac{k}{r^2} (h^2 - j^2 + k^2 - 1) = 0, \quad (4.118)$$

que completa as equações de movimento do dyon de Julia e Zee. Assim, o “preço” que pagamos para incluir a possibilidade de carga elétrica no monopolo de 't Hooft-Polyakov é bem menor do que o podíamos razoavelmente esperar: ganhamos uma nova equação análoga à que já tínhamos para o campo escalar e um termo adicional  $-j^2 k/r^2$  em (4.118). Pela forma dessas equações, vemos que  $A_0$  e  $\phi$  não influenciam diretamente a dinâmica um do outro, algo que já foi notado pelos autores do ansatz [111]. A correspondência entre  $A_0$  e  $\phi$  só não é perfeita por causa do sinal negativo que aparece em (4.118). Fora isso, a componente temporal do campo de gauge se comporta, em muitos aspectos, como se um novo tripleto de campos escalares tivesse sido adicionado ao modelo. A analogia fica ainda mais forte no limite  $\lambda \rightarrow 0$ , o que sugere um vínculo de Bogomol'nyi sob as mesmas condições que levaram a (4.99). Esse vínculo de fato existe, e será examinado na próxima subseção. No caso geral, a existência de soluções para essas equações também foi demonstrada [154]. Sua estabilidade, entretanto, é uma questão mais complicada, que em geral depende do valor da carga elétrica. Como essa solução pertence ao mesmo setor topológico do monopolo de 't Hooft Polyakov, é natural nos perguntarmos se o dyon poderia decair em uma configuração que inclui um monopolo e outras partículas carregadas. Simulações numéricas parecem negar essa possibilidade [111].

Finalmente, vamos calcular a densidade de energia. Ora sabemos que o funcional  $U[\phi, A_\mu]$  tem a mesma forma que tinha no monopolo de 't Hooft-Polyakov (para o qual ele era a própria energia), já que nenhum dos termos que o compõe sofre qualquer alteração formal<sup>†</sup>.  $A_0$  contribui apenas para a energia cinética, que tem, por (4.19) e (4.115), a forma

$$T = \frac{1}{2} \int d^3x |D_k A_0|^2, \quad (4.119)$$

que é perfeitamente análoga à contribuição da parcela  $|D_k \phi|^2/2$ . O uso de (4.94), de (4.90) e da correspondência Julia e Zee, nos conduz a

$$\begin{aligned} \rho(r) = & \frac{k^2 h^2}{r^4} + \left( \frac{h'}{2r} - \frac{h}{r^2} \right)^2 + \left( \frac{k'}{r} \right)^2 + \frac{(k^2 - 1)^2}{2r^4} + \frac{\lambda}{4} \left( \frac{h^2}{r^2} - 1 \right)^2 \\ & + \frac{k^2 j^2}{r^4} + \left( \frac{j'}{2r} - \frac{j}{r^2} \right)^2. \end{aligned} \quad (4.120)$$

<sup>†</sup>Nos referimos aqui à forma desse funcional quando escrito em termos de  $h$  e  $k$ . É claro que, se calcularmos explicitamente as integrais em cada caso, podemos obter resultados distintos.

### 4.4.1 Limite de Bogomol'nyi

Dadas as analogias entre as soluções de 't Hooft-Polyakov e o dyon de Julia e Zee, é natural procurar estender a análise da subseção 4.3.1 para tentar incluir dyons. As equações BPS aparecem, novamente, no limite em que a massa do campo de Higgs é nula. Observando as equações de movimento que encontramos acima, vemos que nesse limite a correspondência entre  $A_0$  e  $\phi$  é a mais forte possível. Entretanto, a presença de energia cinética dificulta nossa análise. O problema é que não basta procurar o mínimo da energia em um dado setor topológico, pois ele corresponde ao monopolo BPS sem carga elétrica. Para procedermos, precisaremos *assumir*  $q_e \neq 0$ , e impor vínculos que possibilitem a execução do procedimento de Bogomol'nyi. Na busca por equações BPS do monopolo, usamos a igualdade  $D_k B_k = 0$ , que segue da identidade de Bianchi. Precisaremos de uma relação análoga que envolva os  $E_k$ , o que nos motiva a impor a condição  $D_0 \phi = 0$ , que implicará em (4.111) se for suposto (e será) que os campos independem do tempo. Para desenvolver os cálculos, seguiremos o procedimento introduzido em [158], em foi usada uma constante  $\alpha$  para escrever o funcional de energia na forma

$$E = - \int_{\Omega} d^3x \operatorname{Tr} (\sin^2 \alpha D_k \phi D_k \phi + E_k E_k) - \int_{\Omega} d^3x \operatorname{Tr} (\cos^2 \alpha D_k \phi D_k \phi + B_k B_k), \quad (4.121)$$

em que continuamos a usar a letra  $E$  para a energia, acreditando ser improvável alguma confusão com os campos  $E_k$ . Em cada uma dessas integrais, completamos quadrados seguindo um procedimento matematicamente idêntico ao realizado para o monopolo, e encontramos

$$\begin{aligned} E = & - \int_{\Omega} d^3x \{ \operatorname{Tr} [(E_k \pm \sin \alpha D_k \phi)^2] + \operatorname{Tr} [(B_k \pm \cos \alpha D_k \phi)^2] \} \\ & \pm 2 \int_{\Omega} d^3x \{ \operatorname{Tr} (E_k \sin \alpha D_k \phi + B_k \cos \alpha D_k \phi) \}. \end{aligned} \quad (4.122)$$

Como a desigualdade de Bianchi sempre vale, ainda podemos usar (4.96) para escrever  $\operatorname{Tr} (B_k D_k \phi) = \operatorname{Tr} \{ (\partial_k B_k) \phi \}$ . Sob as hipóteses consideradas, vale  $D_k E_k = 0$ , de modo que podemos usar o mesmo argumento para escrever

$$\operatorname{Tr} (E_k D_k \phi) = \operatorname{Tr} \{ (\partial_k E_k) \phi \}, \quad (4.123)$$

que contribui para (4.122) com uma integral de fluxo para  $\mathbf{e}$ . Assim, temos

$$\begin{aligned} E = & - \int_{\Omega} d^3x \{ \operatorname{Tr} [(E_k - \sin \alpha D_k \phi)^2] \} \mp 2 \int_{\partial\Omega} dS^k \operatorname{Tr} (\cos \alpha B_k \phi + \sin \alpha E_k \phi), \\ \geq & E_B \equiv 4\pi |N| \cos \alpha + |q_e| \sin \alpha, \end{aligned} \quad (4.124)$$

com igualdade se, e somente se

$$E_k = \mp \sin \alpha D_k \phi, \quad (4.125)$$

$$B_k = \mp \cos \alpha D_k \phi. \quad (4.126)$$

Quando o vínculo de Bogomol'nyi é saturado, encontramos uma relação entre  $q_m$  e  $q_e$ , o que também fornece uma interpretação para o parâmetro  $\alpha$ . Com efeito, podemos dividir (4.126) por  $\cos \alpha$  e substituir o resultado em (4.125). Projetando a equação resultante ao longo da direção de  $\phi$  e integrando em uma esfera de raio infinito, deduzimos

$$\frac{q_e}{q_m} = \tan \alpha, \quad (4.127)$$

de modo que  $\alpha$  nos fornece uma representação geométrica da razão entre  $q_e$  e  $q_m$ . Podemos escrever a energia de Bogomol'nyi na forma

$$E_B = \sqrt{q_e^2 + (4\pi N)^2}. \quad (4.128)$$

Note-se que o vínculo de Bogomol'nyi do dyon é peculiar em vários aspectos. Ao contrário dos outros exemplos que analisamos, o dyon não é a solução de menor energia em um dado setor topológico, de modo que o procedimento de Bogomol'nyi leva à minimização da energia apenas quando a presença de carga elétrica é imposta. A condição  $D_0\phi = 0$  também teve que ser imposta ad-hoc. Ainda assim, essas soluções são análogas aos monopolos BPS em diversos aspectos. Em particular, um par de dyons BPS bem separado com cargas magnética e elétrica iguais não experimenta força [159]. É naturalmente possível encontrar novamente a forma que as equações de primeira ordem assumem no caso de simetria rotacional, mas podemos obter uma solução analítica para o dyon BPS usando (4.125) e (4.126) diretamente. Por simplicidade, vamos a partir de agora considerar apenas as equações com sinal superior, já que as restantes podem ser recuperadas pela transformação  $\phi \rightarrow -\phi$ ,  $A_0 \rightarrow -A_0$ . Ora, é fácil ver que  $\cos\alpha\phi$  satisfaz as equações (4.99), cujas soluções já conhecemos. Com o uso de (4.115), podemos ainda escrever

$$D_k A_0 = \tan\alpha D_k(\cos\alpha\phi), \quad (4.129)$$

o que nos revela que as equações de primeira ordem são resolvidas por

$$h(r) = \sec\alpha[r \coth(r) - 1], \quad (4.130)$$

$$j(r) = \tanh\alpha[r \coth(r) - 1], \quad (4.131)$$

$$k(r) = \frac{r}{\sinh(r)}, \quad (4.132)$$

que é equivalente ao resultado encontrado por Prasad e Sommerfield no mesmo trabalho em que a solução analítica para o monopolo de 't Hooft-Polyakov foi apresentada pela primeira vez [60]. As funções  $h(r)/r$  e  $j(r)/r$  têm comportamento qualitativamente idêntico ao visto no gráfico à esquerda na Figura 4.1, já que diferem da função plotada apenas por um fator multiplicativo constante, enquanto  $k(r)$  não muda. Note-se que, quando  $r \rightarrow \infty$ , temos  $|\phi| \rightarrow \sec\alpha$ , que vale um somente quando  $\tanh\alpha = 0$ , o que evidentemente nos leva de volta ao monopolo sem carga elétrica. A energia do dyon BPS é dada por (4.128), e é finita porque, no caso  $\lambda = 0$ , a condição  $|\phi| \rightarrow 1$  não precisa ser satisfeita no assintoticamente. Como  $|\phi|$  continua tendendo a um valor constante, ainda é possível definir os campos elétrico e magnético. Entretanto, note que esse fato impede que essa solução seja vista como uma aproximação para valores pequenos de  $\lambda$ . Para obter uma solução consistente com as condições de contorno do problema original, precisamos efetuar uma reescala nos campos [62]. Uma tal solução pode ser encontrada se considerarmos coordenadas  $\xi^i$  tais que  $x^i = \cos\alpha\xi^i$ . Então  $\cos\alpha\nabla\phi(\mathbf{x}) = \nabla_\xi\phi(\boldsymbol{\xi})$ . Podemos introduzir  $\mathbf{A}_\xi = \cos\alpha\mathbf{A}(\mathbf{x})$ , para definir a operação  $\mathbf{D}_\xi\phi(\boldsymbol{\xi}) = \nabla_\xi\phi(\boldsymbol{\xi}) + [\mathbf{A}_\xi(\boldsymbol{\xi}), \phi(\boldsymbol{\xi})]$ , que usamos para escrever (4.126) na forma

$$\mathbf{B} = -\mathbf{D}_\xi\phi(\boldsymbol{\xi}), \quad (4.133)$$

que dá as soluções  $h(r) = h_m(r \cos\alpha)$  e  $k(r) = k_m(r \cos\alpha)$ , em que  $h_m$  e  $k_m$  são as soluções de Prasad-Sommerfield para o monopolo. Por outro lado, (4.125) fica  $\mathbf{D}_\xi A_0 = \sin\alpha\mathbf{D}_\xi\phi(\boldsymbol{\xi})$ , que nos conduz à solução  $j(r) = \sin\alpha h_m(r \cos\alpha)$ .

## Conclusão e perspectivas futuras

“And in the end, the love you take, is  
equal to the love you make...”

---

*The Beatles*

Neste trabalho, foram abordados defeitos topológicos de energia finita em teoria de campos. Conduzimos uma investigação sistemática de alguns dos diversos contextos em que essas estruturas se manifestam, e buscamos enfatizar as semelhanças entre essas soluções. Conquanto a complexidade matemática dos sistemas considerados tenha evoluído gradativamente ao longo do trabalho, aumentando desde o kink do modelo  $\phi^4$  aos muito mais desafiadores monopolos e dyons, é notável que muitas das ideias apresentadas desde os primeiros modelos nos acompanharam até o fim. Exemplos incluem a presença de invariantes topológicos que permitem a classificação das soluções, a consequente estabilidade de defeitos topológicos contra decaimento no vácuo, a relação entre defeitos de carga topológica com sinal oposto, o significado dos zeros dos campos escalares, entre vários outros aspectos. Com a exceção do modelo  $\phi^4$  invertido, todas as teorias que estudamos apresentam quebra espontânea de simetria engendrada por um campo escalar, bem como a consequente geração de massa por meio do famoso mecanismo de Higgs.

Iniciamos o segundo capítulo tratando de alguns conceitos gerais, que solidificam a base sobre a qual construímos o resto do trabalho. A seguir, estudamos modelos em (1,1) dimensões com um único campo escalar real, que constituem o paradigma mais simples em que defeitos topológicos podem ser encontrados. Nesse contexto, foram examinados o kink e o antikink do clássico modelo  $\phi^4$ , que apresenta simetria  $Z_2$  e uma variedade de vácuo discreta, que contém os campos triviais  $\phi = \pm 1$ . Estudamos também o modelo sine-Gordon, um dos exemplos paradigmáticos de teoria com sólitons, no sentido mais estrito da palavra. Diferentemente do modelo  $\phi^4$ , essa teoria possui infinitas classes de soluções distintas, caracterizadas por uma carga topológica que pode tomar qualquer valor inteiro. A seguir, estudamos o único defeito não topológico deste trabalho: o lump do modelo  $\phi^4$  invertido, que foi incluído com o objetivo de contraste. Comparamos essa estrutura, que pode ser deformada suavemente na solução de vácuo, aos defeitos topológicos das seções que o precederam. Investigamos a estabilidade linear desses três defeitos, e mostramos que os kinks são estáveis, ao contrário dos lumps. Avançamos então para modelos com dois campos escalares reais, ainda em duas dimensões espaço-temporais. Introduzimos o método de Bogomol’nyi, mostrando que, para certas classes de potenciais, é possível estudar a teoria por meio de equações de primeira ordem. Mais importante, as soluções encontradas por esse método são mínimos da energia, que devem ser estáveis sob pequenas perturbações. Exemplificamos essas ideias usando o modelo BNRT, para o qual existe um formalismo de primeira ordem e há um fator integrante, que usamos para obter uma expressão geral para as órbitas descritas pelos campos. Seguimos com um trabalho desenvolvido durante o mestrado, em que um campo auxiliar foi usado para controlar o comportamento de um campo escalar  $\phi$  em uma região do espaço, simulando a presença de um vínculo

geométrico. As estruturas que emergiram nesse modelo foram denominadas multikinks devido à presença de degraus na vizinhança de pontos nos quais a derivada de  $\phi$  se anula. O comportamento dessas soluções é bastante interessante, e acreditamos que essas estruturas possam ser usadas para diversos tipos de aplicações. Futuramente, podemos estender esse raciocínio para teorias com mais de dois campos, ou incluir outros tipos de defeitos. Concluímos esse capítulo apresentando o argumento de Derrick, que mostra a forma com que o requerimento de que as soluções sejam estacionárias sob uma reescala espacial limita a possibilidade de que teorias de campo produzam soluções estáticas, localizadas e de energia finita.

No terceiro capítulo, voltamos nossa atenção a teorias de gauge abelianas em que há o acoplamento de um campo escalar que, novamente, engendra quebra de simetria, aos campos de gauge da teoria. Essas teorias são muito diferentes das que foram estudadas no segundo capítulo, e nos fornecem um meio conveniente de evitar as limitações impostas pelo teorema de Derrick. A simetria de gauge nesse capítulo é  $U(1)$ , e o espaço-tempo considerado é tridimensional. Nesse contexto, encontramos vórtices, estruturas localizadas que prendem o fluxo magnético, o qual é quantizado nessas teorias. Estudamos o modelo de Maxwell-Higgs, uma generalização relativística da teoria de Ginzburg-Landau. A seguir, investigamos vórtices em um modelo de Chern-Simons, que apresenta propriedades únicas em relação às outras teorias discutidas neste trabalho, como o fato de que todas as soluções topológicas da teoria são carregadas eletricamente. Encerramos o capítulo discutindo vórtices com múltiplas camadas, que foram estudados em um trabalho publicado durante o mestrado. Em um procedimento análogo ao que levou aos multikinks, aumentamos a simetria de um sistema Maxwell-Higgs por meio do acoplamento com outro subsistema, resultando na simetria  $U(1) \times G$ . Apresentamos dois modelos: um com  $G = Z_2$  e outro com  $G = U(1)$ , e observamos o surgimento de uma estrutura interna nos defeitos, que diferencia esses vórtices dos de Nielsen-Olesen. Há a possibilidade de implementarmos o aumento de simetria por meio de escolhas diferentes para  $G$ . Também pode ser interessante examinar a presença de estruturas desse tipo em teorias de Chern-Simons. Essas possibilidades já estão em consideração. Em todas as teorias examinadas nesse capítulo, encontramos soluções BPS no chamado acoplamento crítico, caracterizado pela igualdade das massas dos campos de Higgs e de gauge.

O quarto capítulo é dedicado a soluções com carga magnética na teoria de Yang-Mills-Higgs em  $(3,1)$  dimensões. Especificamente, escolhemos  $SU(2)$  como grupo de gauge, embora muitos dos nossos resultados possam ser generalizados para outros grupos. Investigamos o mecanismo a partir do qual a quebra espontânea de simetria faz com que a teoria se torne abeliana quando os campos se aproximam do vácuo, o que permite a identificação do campo eletromagnético nesse regime. É particularmente importante o resultado, que deduzimos sob hipóteses bastantes gerais, de que qualquer solução de energia finita homotopicamente distinta do vácuo possui carga magnética. Investigamos a seguir duas soluções esfericamente simétricas. A primeira é o monopolo de 't Hooft-Polyakov, que foi o primeiro defeito topológico encontrado na teoria. A segunda é o dyon de Julia e Zee, que pode ser interpretada como uma partícula que possui ao mesmo tempo carga magnética e elétrica. Encontramos, no limite em que a massa do campo de Higgs tende a zero, vínculos de Bogomol'nyi para esses dois tipos de solução. Mostramos que, surpreendentemente, existem soluções analíticas de forma particularmente simples nesse caso.

Defeitos topológicos compõem uma área extremamente vasta e diversa, com aplicações ilimitadas. Essa dissertação lidou com defeitos escalares, vórtices, monopolos e dyons, mas há muitos outros defeitos interessantes na literatura, como Instantons e Skyrmions. Também podemos considerar situações em que a curvatura do espaço-tempo é relevante, como ocorre em modelos cosmológicos envolvendo defeitos escalares, teorias de mundo brana, entre outras. As ideias que levaram aos artigos sobre multikinks e vórtices com múltiplas camadas podem ser

generalizadas pra incluírem outros tipos de defeitos, com infinitas novas possibilidades.

# Apêndices

### A.1 Um pouco mais sobre o tensor de energia-momento

Nesta seção demonstraremos alguns resultados que se revelarão fundamentais no cálculo de  $T^{\mu\nu}$ , e também iremos discutir, para referência, o significado de cada uma de suas componentes.

Primeiramente, temos que calcular a variação  $\delta g^{\lambda\rho}$ , que aparece quando calculamos o tensor de energia-momento por variação da métrica. Observe-se que  $g^{\nu\rho} g_{\nu\nu} = \delta_\nu^\rho \implies g_{\mu\nu} \delta g^{\nu\rho} = -g^{\nu\rho} \delta g_{\mu\nu}$ , donde

$$\delta g^{\lambda\rho} = -g^{\lambda\mu} g^{\nu\rho} \delta g_{\mu\nu}. \quad (\text{A.1})$$

Também será necessário o cálculo da variação  $\delta(\sqrt{|g|})$ . Por simplicidade, assumase que o determinante da métrica é negativo, de modo que  $|g| = -g$ . Se  $g > 0$  bastará simplesmente mudar o sinal no resultado que encontraremos. Temos

$$\begin{aligned} \delta(\sqrt{-g}) &= \frac{-1}{2\sqrt{-g}} \frac{\delta g}{\delta g^{\mu\nu}} \delta g^{\mu\nu} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{-g} \delta[\log(g)]. \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Seja  $M$  uma matriz simétrica e invertível, função de um parâmetro contínuo  $\xi$ . Da introdução de uma variação  $\delta\xi$ , resulta [30]

$$\delta[\log(\text{Det}M(\xi))] = \log\left(\frac{\text{Det}(M + \delta M)}{\text{Det}M}\right) \quad (\text{A.3})$$

$$= \log[\text{Det}(1 + X)], \quad (\text{A.4})$$

em que  $X \equiv M^{-1} \delta M$  e foi usada a relação  $\text{Det}M^{-1} = \frac{1}{\text{Det}M}$ . Mantendo apenas termos de primeira ordem na expansão em série de potências da exponencial, podemos identificar o argumento do determinante com  $e^X$ . O uso da conhecida relação  $\det(e^A) = e^{\text{Tr}(A)}$ , em que  $\text{Tr}()$  é o traço da matriz, permite escrever (A.3) na forma

$$\delta[\log(\text{Det}M(\xi))] = \text{Tr}(X), \quad (\text{A.5})$$

donde

$$\delta(\sqrt{-g}) = \frac{1}{2} \sqrt{-g} g^{\lambda\rho} \delta g_{\lambda\rho} = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \quad (\text{A.6})$$

em que, na segunda igualdade, foi feito uso de (A.1). Usando esses resultados, supondo que  $\mathcal{L}$  não depende das derivadas da métrica e definindo  $\tilde{\mathcal{L}}$  de modo que  $\mathcal{L} = \sqrt{-g} \tilde{\mathcal{L}}$ , podemos escrever

$$\delta S = \int d^n x \sqrt{-g} \left\{ \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial g^{\mu\nu}} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \tilde{\mathcal{L}} \right\} \delta g^{\mu\nu}, \quad (\text{A.7})$$

de onde se lê, pela definição de  $T_{\mu\nu}$  e da derivada funcional, a fórmula

$$T_{\mu\nu} = 2 \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial g^{\mu\nu}} - g_{\mu\nu} \tilde{\mathcal{L}}, \quad (\text{A.8})$$

válida quando a ação é escrita em termos de uma densidade lagrangiana e quando as convenções sobre a assinatura métrica e o sinal de seu determinante forem da forma suposta neste apêndice. No capítulo 4, trabalhamos em (3,1) dimensões e usamos a assinatura  $(-, +, +, +)$ . Nessa situação, calcularemos  $T_{\mu\nu}$  via [36]

$$T_{\mu\nu} = \frac{-2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}} = -2 \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial g^{\mu\nu}} + g_{\mu\nu} \tilde{\mathcal{L}} \quad (\text{A.9})$$

que garante, em particular, que a energia mantenha o sinal positivo após a mudança de assinatura. Os significados das componentes  $T_{0\nu}$  são facilmente extraídos da definição (2.7): eles representam a densidade de energia ( $T_{00}$ ) e as componentes da densidade de momento linear ( $T^{0k}$ ). A interpretação das outras componentes do tensor pode ser feita por meio da análise conduzida em [37], que consiste em estudar individualmente as equações  $\partial_\mu T_{\mu 0} = 0$  e  $\partial^\mu T_{\mu k} = 0$ , integrando-as e, finalmente, interpretando-as à luz do significado das componentes  $T_{0\mu}$ . Listamos abaixo a interpretação de todas as componentes desse tensor:

- $T_{00} \equiv \rho(t, \mathbf{x})$  é a densidade de energia. Sua integral sobre um volume  $V$  dá a energia contida nesse volume;
- $T_{0k} = -T^{0k}$  corresponde ao negativo da  $k$ -ésima componente do vetor  $(\pi^1, \pi^2, \pi^3)$ , que devemos interpretar como a densidade de momento linear da configuração ;
- $T_{jk}$  representa o fluxo da  $j$ -ésima componente de momento que atravessa, em uma unidade de tempo, um elemento de superfície perpendicular à direção definida por  $x^k$ . Essas componentes compõe o tensor  $T_{kj} = -\sigma_{kj}$ , o negativo do tensor de estresse do sistema. Quando o estresse é isotrópico, as componentes diagonais  $T_{kk}$  representam a pressão.

## A.2 Maços de fibra

Discutiremos agora alguns conceitos que nos ajudarão a colocar as teorias de calibre em um patamar sólido. Não dispomos de espaço suficiente para apresentar uma discussão profunda sobre essas ideias, e ao leitor interessado são recomendadas as referências [160–162]. Aqui, nos contentaremos simplesmente em estabelecer os conceitos mais importantes. Dado um espaço  $E$  e uma variedade  $X$  (espaço de base), como o espaço-tempo, definimos um mapa sobrejetivo

$$\pi : E \mapsto X, \quad (\text{A.10})$$

que faz o papel de uma projeção.  $E$  é um maço de fibras se,  $\forall x \in X$ , é possível estabelecer um homomorfismo entre  $\pi^{-1}(x)$  e um espaço denominado fibra de referência,  $F$ . Para isso,

devemos cobrir a variedade  $X$  com uma coleção de vizinhanças  $U_i$  tais que exista, em cada vizinhança, um homomorfismo

$$\Psi_i : \pi^{-1}(U_i) \mapsto U_i \times F \quad (\text{A.11})$$

que mapeia cada elemento  $p \in \pi^{-1}(U_i)$  em um par da forma  $(\pi(p), f_i(p))$ . Procedendo dessa maneira para todos os pontos de  $X$ , e lembrando que  $\pi^{-1}(x)$  é um elemento de  $E$ , percebemos que o maço de fibras é localmente similar a um produto cartesiano [160]. Em cada vizinhança, temos uma aplicação

$$f_i : \pi^{-1}(x) \mapsto F, \quad (\text{A.12})$$

que é um homomorfismo. Entretanto, um obstáculo é encontrado quando examinamos as interseções  $U_i \cap U_j$ . Afinal, os  $f_i$  foram estabelecidos localmente, e sua definição faz referência apenas à vizinhança  $U_i$ . Como garantir que nossa construção seja consistente nas interseções? A resposta emerge quando consideramos as *funções de transição*, definidas pela composição  $t_{ij} = f_i f_j^{-1}$ , donde  $t_{ij} f_j = f_i$ . Se essas funções puderem ser descritas pela ação de um grupo, este é denominado *grupo de estrutura*. É de particular interesse o caso em que a fibra de referência e o grupo de estrutura podem ser identificados com um mesmo grupo de Lie,  $G$ . Nesse caso, o maço de fibras é o chamado *Maço principal- $G$* , que identificaremos pela letra  $P$ . Assim,  $t_{ij} = g_{ij} \in G$ , e vemos que essas funções definem operações que mapeiam a interseção  $U_i \cap U_j$  em  $G$ , sendo essa aplicação efetuada por um elemento do próprio grupo. Essa ação deve ser *fiel*, de modo que a elementos distintos de  $G$  correspondam homomorfismos distintos. Portanto, a ação pela esquerda do grupo em sí mesmo fica bem definida. Definindo os  $g_{ij}$  em todas as interseções, obtemos um atlas ( $G$ -atlas), estabelecendo uma conexão entre a ação abstrata do grupo e cada ponto da variedade.

Numa interseção tripla, vale a propriedade [161]

$$g_{ij} g_{jk} = g_{ik}, \quad (\text{A.13})$$

que implica que  $g_{ii}$  é a identidade, como é necessário por consistência, e que a inversa de  $g_{ij}$  é  $g_{ji}$ . Com isso, a ação pela direita de  $G$  em  $\pi^{-1}(U_i)$  fica bem definida, e se escreve

$$g(p) = f_i^{-1}(g_{ij} f_j(p)), \quad x \in U_i, \quad (\text{A.14})$$

que é perfeitamente consistente na interseção  $U_i \cap U_j$ .

Outro conceito de que necessitaremos é o de *seções* do maço de fibra, que são simplesmente mapas  $\sigma : X \mapsto E$  tais que

$$\pi(\sigma(x)) = x, \quad (\text{A.15})$$

ou  $\sigma(x) = \pi^{-1}(x)$ . Em geral, essas aplicações só podem ser definidas em uma vizinhança de  $x$ . Mas lembre-se que o formalismo desenvolvido até aqui nos permitiu criar um atlas que cobre o espaço  $X$ , e as funções de transição possibilitam a passagem de uma vizinhança a outra. As seções podem ser mapeadas, pelos  $f_i$ , em  $G$  e escritas na representação  $R : G \mapsto GL(V)$  do grupo, permitindo que a ação de  $G$  na seção fique perfeitamente definida em todo o espaço. Em particular, são relevantes as *seções identidade*, denotadas por  $\sigma_i$  e definidas pela relação  $f_i(\sigma_i) = I$ , em que  $I$  é a identidade em  $G$ . Usando as propriedades das funções de transição, podemos deduzir

$$\sigma_i = f_i^{-1}(f_j(\sigma_j)) = g_{ij} \sigma_j. \quad (\text{A.16})$$

Dado um maço principal- $G$  e um espaço vetorial  $V$  (em geral complexo) de dimensão finita e uma representação, construímos um maço de fibras associado, que possui o mesmo espaço

base e grupo de estrutura, e tem  $V$  como a fibra de referência. As seções do maço associado correspondem aos campos de matéria. A representação mapeia  $G$  no espaço de operadores lineares que atuam em  $V$  e, portanto, define a ação do grupo nos vetores de  $V$ . Podemos definir uma ação pela esquerda em  $P \times V$  da seguinte forma [162]

$$g \cdot (p, v) = (pg^{-1}, R(g)v), \quad (\text{A.17})$$

que dá origem ao espaço quociente  $A = (P \times V)/G^\dagger$ . O quociente identifica pontos  $(p, v)$  que estão relacionadas pela ação à direita de  $g$  em  $P$  e  $g^{-1}$  em  $V$ . Notado seja que cada  $R$  implica em um maço associado diferente, então é sempre necessário especificar a representação utilizada, embora ela fique, frequentemente, implícita na literatura. Definimos a projeção

$$\pi' : A \mapsto X \quad (\text{A.18})$$

de forma natural pelo requerimento de que os pontos  $a \in A$  que pertençam à mesma classe de equivalência que  $(p, v)$  sejam projetados de acordo com  $\pi'(a) = \pi(p)$ . Usamos a representação para obter as funções de transição  $t_{ij} = R(g_{ij})$  de  $A$  a partir das de  $P$ . Os campos de matéria  $\Phi$  são definidos como as seções locais do maço  $A$ .

Fixar um calibre significa escolher, para o maço principal, uma seção local  $\sigma(x)$ , com o uso da qual podemos escrever, para cada  $x$ ,  $\Phi = [\sigma(x), \phi(x)]$ , usando definição de  $A$ . Diferentes escolhas de  $\sigma$  implicam em diferentes  $\phi(x)$ , o que equivale a escrever essa quantidade em uma nova base. Essas escolhas estão relacionadas por *transformações de calibre*, e é por isso que os objetos mensuráveis devem ser independentes do calibre: quantidades que podem ser conectadas por uma tal transformação diferem meramente por uma escolha de base, que não pode ter significado físico. As transformações de gauge são mapas da forma  $\gamma_i : G \mapsto U_i$ , e uma composição com a representação de  $G$  nos leva a

$$R\gamma_i^{-1} : U_i \mapsto GL(V), \quad (\text{A.19})$$

cujo resultado é um operador que atua em  $V$ . Com a transformação de gauge, as funções de transição são modificadas de acordo com a regra

$$g'_{ij} = \gamma_i g_{ij} \gamma_j^{-1}, \quad (\text{A.20})$$

que, por (A.16), resulta em novas seções identidade, o que é outra forma de entender o significado das transformações de calibre. Por (A.19), vemos que, como  $\phi \in V$ , o efeito da transformação de calibre fica perfeitamente definido em cada vizinhança. Em particular, é possível escolher a representação de modo que a ação dessa transformação possa ser identificada com a multiplicação de uma matriz unitária  $n \times n$  e  $\phi$  fica escrito como um vetor, em geral complexo, com  $n$  componentes que se transformam de acordo com a regra

$$\phi^a = \gamma^a_b \phi^b, \quad (\text{A.21})$$

onde  $\gamma^a_b$  é uma matriz unitária. No caso do grupo abeliano  $U(1)$ , a fibra  $V$  pode ser tomada como o corpo dos complexos. As representações de  $U(1)$  são unidimensionais e podemos tomar a “matriz”  $\gamma$  como um número complexo de módulo 1, que atua na fibra por multiplicação direta.

---

<sup>†</sup>Um espaço quociente  $M/r$  é formado por classes de elementos do espaço que são equivalentes com respeito à relação  $r$ , com a topologia definida de maneira que um subconjunto do espaço seja um aberto se, e somente se, a união de seus pontos formar um aberto em  $M$  [163]. Intuitivamente, é como se estivéssemos “colando”, isto é, identificando, pontos de  $M$  que pertencem a uma classe de equivalência.

## Referências Bibliográficas

- [1] N. D. Mermin, *The topological theory of defects in ordered media*, Rev. Mod. Phys. **51**, 591 (1979).
- [2] A. Hasegawa, F. Tappert *Transmission of stationary nonlinear optical pulses in dispersive dielectric fibers. I. Anomalous dispersion*, Appl. Phys. Lett **23**, 142 (1973).
- [3] A. Hasegawa, F. Tappert *Trans-Polyakovmission of stationary nonlinear optical pulses in dispersive dielectric fibers. II. Normal dispersion*, Appl. Phys. Lett **23**, 171 (1973).
- [4] A. S. Davydov, *Solitons in molecular systems*, Springer (1985).
- [5] T. Heimburg, A.D Jackson, *On soliton propagation in biomembranes and nerves*, Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A. **102**, 9790 (2005).
- [6] V.A. Rubakov, M.E. Shaposhnikov, *Do we live inside a domain wall?* Phys. Lett.B 125, **136** (1983).
- [7] G.W. Gibbons, D.L. Wiltshire, *Spacetime as a membrane in higher dimensions*, Nucl. Phys B **287**, 717 (1987).
- [8] J. S. Russell, *Report on Waves*, 14th Meeting of the British Association for the Advancement of Science, 311 (1844).
- [9] P. G. Drazin, R. S. Johnson, *Solitons: An Introduction*, Cambridge University Press (1989).
- [10] D. J. Korteweg, G. de Vries, *On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary waves*, Phil. Mag. **39**, 422 (1895).
- [11] J. Boussinesq, *Essai sur la theorie des eaux courantes*, Memoires presentes par divers savants l'Acad. des Sci. Inst. Nat. France **23**, 1 (1877).
- [12] A. C. Scott, *A nonlinear Klein-Gordon equation*, Am. J. Phys. **37**, 52 (1969).
- [13] M. Remoissenet, *Waves Called Solitons*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg (1999).
- [14] L. D. Landau, E. M. Lifshitz, *Statistical Physics*, Pergamon Press (1970).
- [15] T. W. B. Kibble, *Topology of cosmic domains and strings*. Journal of Physics A: Mathematical and General **9**, 1387 (1976).
- [16] N.H. Protik, *Topological defects in condensed matter and cosmology*, (2017). Disponível em <https://www.semanticscholar.org/paper/Topological-defects-in-condensed-matter-and-Protik/aa2b27b7c2b361237b15892627c88888344b8718>. Acesso em: 20 de janeiro de 2020.

- [17] R. Menezes, *Defeitos Globais em Teoria de Campos e Aplicações*, Tese de Doutorado, Universidade Federal da Paraíba (2007).
- [18] Max-Planck-Institut für Mathematik in den Naturwissenschaften *Micromagnetics*. Disponível em <https://www.mis.mpg.de/applan/research/micromagnetics.html>. Acesso em: 18 de Novembro de 2019.
- [19] R. P. Feynman, *Application of quantum mechanics to liquid helium*, Progress in Low Temperature Physics **1**, 17 (1955).
- [20] A. A. Abrikosov *The magnetic properties of superconducting alloys*. J. Phys. Chem. Solids **2**, 199 (1957).
- [21] H. B. Nielsen, P. Olesen, *Vortex-line models for dual strings*, Nucl. Phys. B **61**, 45 (1973).
- [22] F. S. Wells, A. V. Pan, R. X. Wang, S. A. Fedoseev, H. Hans, *Analysis of low-field isotropic vortex glass containing vortex groups in  $YBa_2Cu_3O_{7-x}$  thin films visualized by scanning SQUID microscopy*, Sci. Rep. **5**, 8677 (2015).
- [23] T. Skyrme, *A unified field theory of mesons and baryons*. Nucl. Phys. **31**, 555 (1962).
- [24] S. Donati, L. Dominici, G. Dagvadorj, et al. *Twist of generalized skyrmions and spin vortices in a polariton superfluid*. Proc Natl Acad Sci USA **113**, 14926 (2016).
- [25] N.S Kiselev, A. N. Bogdanov, R. Schäfer, U. K. Rößler, *Chiral skyrmions in thin magnetic films: New objects for magnetic storage technologies?* J. Phys. D **44**, 392001 (2011).
- [26] P. A. M. Dirac, *Quantised singularities in the electromagnetic field*, Proc. R. Soc. Lond. A **133**, 60 (1931).
- [27] G. 't Hooft, *Magnetic monopoles in unified gauge theories*, Nucl. Phys. B **79**, 276 (1974).
- [28] A. M. Polyakov, *Particle spectrum in quantum field theory*, JETP Lett. **20**, 194 (1974).
- [29] D. Bazeia, *Campos Escalares em Ação*, Tese Apresentada em Concurso de Professor Titular, Universidade Federal da Paraíba (2004).
- [30] Tanmay Vachaspati, *Kinks and Domain Walls: An Introduction to Classical and Quantum Solitons*, Cambridge University Press (2007).
- [31] S. Coleman, *Aspects of Symmetry*, Cambridge University Press (1985).
- [32] H. Goldstein, C. P. Poole, J.L Safko, *Classical Mechanics*, Addison-Wesley (2001).
- [33] E. Noether, *Invariante Variationsprobleme*, Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse **1918** (1918).
- [34] N. A. Lemos, *Mecânica Analítica*, Livraria da Física, (2008).
- [35] J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, John Wiley & Sons (1999).
- [36] S. Carroll, *An Introduction to General Relativity Spacetime and Geometry*, Addison Wesley (2004).

- [37] L. D. Landau, E. M. Lifshitz, *The Classical Theory of Fields*, Pergamon Press (1975).
- [38] M. Leclerc, *Canonical and gravitational stress-energy tensors*, Int. J. Mod. Phys. D **15**, 959 (2006).
- [39] C. F. Gauss, *Zur mathematischen theorie der electrodynamischen Wirkungen*, Werke 5, Königliche Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, 603 (1867).
- [40] C. Nash, *Topology and physics-a historical essay*, (1997) [arXiv:hep-th/9709135].
- [41] E. Flapan, *When topology meets chemistry: A topological look at molecular chirality*, Cambridge University Press (2000).
- [42] J. Simon, *Topological chirality of certain molecules*, **25**, 229 (1986).
- [43] D. Silver, *Knot theory's odd origins*, American Scientist, **94**, 158 (2006).
- [44] H. Poincaré, *Sur le problème de trois corps et les équations de la dynamique*, Acta Math. **13**, 1 (1890).
- [45] H. Poincaré, *Sur les courbes définies par une équation différentielle*, J. Math. Pures Appl. **7**, 375 (1881).
- [46] E. Witten, *Quantum field theory and the Jones polynomial*, Commun. Math. Phys. **121**, 351 (1989).
- [47] E. Witten, *Topological quantum field theory*, Commun. Math. Phys. **117**, 353 (1988).
- [48] R. Penrose, *Gravitational collapse and space-time singularities*, Phys. Rev. Lett. **14**, 57 (1965).
- [49] D. B. Reeves, *An introduction to topological defects in field theories* (2014). Disponível em <http://www.dartmouth.edu/~dbr/topdefects.pdf>. Acesso em: 20 de janeiro de 2020.
- [50] G.W. Whitehead, *Elements of homotopy theory*, Springer, (1978).
- [51] E. L. Lima, *um curso de análise, vol.1*, Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, (2016).
- [52] J. Mcleary, *A First Course in Topology: Continuity and Dimension*, American Mathematical Society (2006).
- [53] L. Cremona, *Elements of Projective Geometry*, Dover 1960.
- [54] R. Rajaraman, *Solitons and instantons: an introduction to solitons and instantons in quantum field theory* North-Holland, (1984).
- [55] A. Hatcher, *Algebraic topology*, Cambridge University Press (2005).
- [56] D. Bazeia, M.A. Marques, R. Menezes, *Bimagnetic monopoles*, Phys. Rev. D **98**, 065003 (2018).
- [57] D. Bazeia, M.A. Marques, G.J. Olmo, *Small and hollow magnetic monopoles*, Phys. Rev. D **98**, 025017 (2018).

- [58] M. A Marques, *Soluções Localizadas em Diversas Dimensões*, Tese de Doutorado, Universidade Federal da Paraíba (2015).
- [59] E. B. Bogomol'nyi, *The stability of classical solutions*, Sov. J. Nucl. Phys. **24**, 449 (1976).
- [60] M.K Prasad, C. M. Sommerfield, *Exact Classical Solution for the 't Hooft Monopole and the Julia-Zee Dyon*, Phys. Rev. Lett. **35**, 760 (1975).
- [61] A. Avelar, D. Bazeia, L. Losano, R. Menezes, *New lump-like structures in scalar-field models*, Eur. Phys. J. C, **55**, 133 (2008).
- [62] N. Manton, P. Sutcliffe, *Topological Solitons*, Cambridge University Press (2007).
- [63] M. Moshir, *Soliton-antisoliton scattering and capture in  $\lambda\phi^4$  theory*, Nucl. Phys. B **185**, 318 (1981).
- [64] R. Rajaraman. *Intersoliton forces in weak-coupling quantum field theories* Phys. Rev. D **15**, 2866 (1977).
- [65] N.S. Manton, *An effective Lagrangian for solitons*. Nucl. Phys., B **150**, 397 (1979).
- [66] E. Bour, *Théorie de la déformation des surfaces*, J. Ec. polytech. Math. **19**, 1 (1862).
- [67] J. Frenkel, T. Kontorova. *On the theory of plastic deformation and twinning*. Izv. Akad. Nauk, Ser. Fiz. 1, **137** (1939).
- [68] D. D. Georgiev, S. F. Papaioanou, J. F. Glazebrook, *Neuronic system inside neurons: molecular biology and biophysics on neuronal microtubules*, Biomed, Rev. **15**, 67 (2004).
- [69] E. Lennholm, M. Hörnquist, *Revisiting Salerno's sine-Gordon model of DNA: active regions and robustness*, Physica D **177**, 233 (2003).
- [70] V. G. Bykov, *Sine-Gordon equation and its application to tectonic stress transfer*, J. seismol. **18**, 497 (2014).
- [71] J. K. Perring, T. H. R. Skyrme, *A model unified field equation*, Nucl.Phys. **31**, 550 (1962).
- [72] J. Rubinstein, *Sine-Gordon Equation*, J. Math. Phys. **11**, 258 (1970).
- [73] L. A. Takhtadzhyan, L. D. Faddeev, *Essentially nonlinear one-dimensional model of classical field theory*, Theor. Math. Phys. **21**, 1046 (1974).
- [74] A. V. Bäcklund, *Zur Theorie der Partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung*, Math. Ann. **17**, 285 (1880).
- [75] M. Ablowitz, H. Segur, *Solitons and the Inverse Scattering Transform*, Nonlinear Partial Differential Equations for Scientists and Engineers, Birkhäuser Boston (1981).
- [76] C. Roger, W. K. Schief, *Bäcklund and Darboux Transformations-Geometry and Modern Applications in Soliton Theory*. Cambridge University Press (2002).
- [77] E. L. Lima, *Álgebra Linear*, IMPA (2014).
- [78] F. Cooper, A. Khare, U. Sukhatme, *Supersymmetry and Quantum Mechanics*, Phys. Rep. **251**, 267 (1995).

- [79] R. Jackiw, *Quantum meaning of classical field theory* Rev. Mod. Phys. **49**, 681 (1977).
- [80] L. D. Landau, E. M. Lifshitz, *The Classical Theory of Fields*, Pergamon Press (1981).
- [81] S. Flügge, *Practical Quantum Mechanics*, Springer-Verlag (1974).
- [82] A. Sheldon, *Harmonic Functions from a Complex Analysis Viewpoint*, Am. Math. Mon. **83**, 246 (1986).
- [83] D. Bazeia, J. Menezes, M. M. Santos, *Complete factorization of equations of motion in supersymmetric field theories* Nucl. Phys. B **636**, 132 (2002).
- [84] R. Rajaraman, *Solitons of Coupled Scalar Field Theories in Two Dimensions* Phys. Rev. Lett. **42**, 200 (1979).
- [85] D. Bazeia, W. Freire, L. Losano, R.F. Ribeiro, *Topological Defects and the Trial Orbit Method* Mod. Phys. Lett. A **17**, 1945 (2002).
- [86] D. Bazeia, M. J. dos Santos, R. F. Ribeiro, *Solitons in systems of coupled scalar fields*, Phys. Lett. A **208**, 84 (1995).
- [87] D. Bazeia, J. R. S. Nascimento, R. F. Ribeiro, D. Toledo, *Soliton stability in systems of two real scalar fields*, J. Phys. A **30**, 8157 (1997).
- [88] B. Chibisov, M. Shifman, *BPS-saturated walls in supersymmetric theories* Phys. Rev. D **56**, 7990 (1997).
- [89] M. Shifman, M. Voloshin, *Degenerate domain wall solutions in supersymmetric theories* Phys. Rev. D **57**, 2590 (1998).
- [90] A. A. Izquierdo, M.A. G. Leon, J. M. Guilarte, *Kink variety in systems of two coupled scalar fields in two space-time dimensions* Phys. Rev. D **65**, 085012 (2002).
- [91] D. Bazeia, M. A. Liao, M. A. Marques, *Geometrically Constrained Multikink Configurations*, (2019) [arXiv:hep-th/1908.01085].
- [92] P.-O. Jubert, R. Allenspach, A. Bischof, *Magnetic domain walls in constrained geometries* Phys. Rev. B **69**, 220410 (2004).
- [93] W. Jiang, P. Upadhyaya, W. Zhang, G. Yu, M. B. Jungfleisch, F. Y. Fradin, J. E. Pearson, Y. Tserkovnyak, K. L. Wang, O. Heinonen, S. G. E. te Velthuis, A. Hoffmann, *Magnetism. Blowing magnetic skyrmion bubbles*, Science **349**, 283 (2015).
- [94] G. Arfken, *Mathematical Methods for Physicists*, Academic Press (1985).
- [95] G.H. Derrick, *Comments on nonlinear wave equations as models for elementary particles*, J. Math. Phys. **5** 1252, (1964).
- [96] D. Bazeia, J. Menezes, R. Menezes, *New Global Defect Structures* Phys. Rev. Lett. **91**, 241601 (2003).
- [97] Y. Yang, *Vacuum decay of non-Abelian vortices*, Math. Methods Appl. Sci. **15**, 79 (1992).
- [98] D. Tong, *Quantum Vortex Strings: A Review*, Annals Phys. **324**, 30 (2009).

- [99] A. T. Akhmedov, M. A. Zubkov, *Quantum Abrikosov-Nielsen-Olsen strings*, Journal of Experimental and Theoretical Physics Letters **61**, 351 (1995).
- [100] H. von Helmholtz, *Über Integrale der hydrodynamischen Gleichungen, welche der Wirbelbewegung entsprechen*, J. Reine Angew. Math. **55**, 25 (1858).
- [101] G. Bewley, D. Lathrop, K. Sreenivasan, *Visualization of quantized vortices*, Nature **441**, 588 (2006).
- [102] T. Shinjo, T. Okuno, R. Hassdorf, K. Shigeto, T. Ono, *Magnetic Vortex Core Observation in Circular Dots of Permalloy*, Science **289**, 930 (2000).
- [103] A. Wachowiak, J. Wiebe, M. Bode, O. Pietzsch, M. Morgenstern, R. Wiesendanger, *Direct Observation of Internal Spin Structure of Magnetic Vortex Cores* Science **298**, 577 (2002).
- [104] A. Patwardhan, *Non commutative quantum spacetime with topological vortex states, and dark matter in the universe*, (2003) [arXiv:hep-th/0310136].
- [105] D. Garfinkle, *General relativistic strings*, Phys. Rev. D **32**, 1323 (1985).
- [106] B. C. Hall, *Lie groups, Lie algebras, and Representations: An Elementary Introduction*, Springer (2015).
- [107] V.L. Ginzburg, L.D. Landau, *On the theory of superconductivity* Zh. Eksp. Teor. Fiz. **20**, 1064 (1950).
- [108] Y. Eylon, E. Rabinovici, *Kinetic-energy considerations and the vacuum*, Phys. Rev. D **16**, 2660 (1977).
- [109] J. Bardeen, L. N. Cooper, J. R. Schrieffer *Microscopic Theory of Superconductivity*, Phys. Rev. **106**, 162 (1957).
- [110] F. Lenz, *Topological Concepts in Gauge Theories*, (2004) [arXiv:hep-th/0403286].
- [111] B. Julia, A. Zee, *Poles with both magnetic and electric charges in non-Abelian gauge theory*, Phys. Rev. D **11**, 2227 (1975).
- [112] D. J. Griffiths, *An introduction to Electrodynamics*, Prentice Hal (1999).
- [113] M. S. Berger, Y. Y. Chen, *Symmetric vortices for the nonlinear Ginzburg-Landau equations of superconductivity, and the nonlinear desingularization phenomenon*, J. Funct. Anal. **82**, 259 (1989).
- [114] S. Gustafson, I.M. Sigal, *The stability of magnetic vortices* Commun. Math. Phys. **212**, 257 (2000).
- [115] S. Gustafson, I.M. Sigal, T.T. Tzaneteas, *Statics and dynamics of magnetic vortices and of Nielsen–Olesen (Nambu) strings*, J. of Math. Phys. **51**, 015217 (2010).
- [116] L. Jacobs, C. Rebbi, *Interaction of superconducting vortices*, Phys. Rev. B **19**, 4486 (1979).

- [117] E. Weinberg, *Multivortex solutions of the Ginzburg-Landau equations*, Phys. Rev. D **19**, 3008 (1979).
- [118] G. V Dunne, *Aspects Of Chern-Simons Theory*, (1999) [arXiv:hep-th/9902115].
- [119] C. Taubes, *On the equivalence of the first and second order equations for gauge theories*. Commun.Math. Phys. **75**, 207 (1980).
- [120] A. Jaffe, C. Taubes, *Vortices and Monopoles: The Structure of Static Gauge Theories*, Birkhäuser (1980).
- [121] R. Jackiw, Erick J. Weinberg, *Self-Dual Chern-Simons Vortices*, Phys. Rev. Lett. **64**, 2234 (1990).
- [122] D. Melnikov, A. B. F. Neves, *Chern-Simons-Higgs Model as a Theory of Protein Molecules* J. Appl. Phys. **126**, 244701 (2019).
- [123] A. Schwarz, *Topological quantum field theories*, (2000) [arXiv:hep-th/0011260].
- [124] S. S. Chern, J. Simons, *Characteristic forms and geometric invariants*, Ann. Math. Second Series. **99**, 48 (1974).
- [125] R. Jackiw , S.-Y. Pi, *Chern–Simons modification of general relativity*. Phys. Rev. D **68**, 104012 (2003).
- [126] S. Deser, R. Jackiw, S. Templeton, *Three-Dimensional Massive Gauge Theories*, Phys. Rev. Lett. **48**, 975 (1982).
- [127] J. Lykken, J. Sonnenschein, N. Weiss, *The Theory of Anyonic Superconductivity*, Int. J. Mod. Phys. A **6**, 5155 (1991).
- [128] A. Lopez, E. Fradkin, *Fractional quantum Hall effect and Chern-Simons gauge theories*, Phys. Rev. B. **44**, 5246 (1991).
- [129] J. R. Tyllesley, *An introduction to Tensor Analysis: For Engineers and Applied Scientists*, Longman (1973).
- [130] R. Wang, *The existence of Chern-Simons vortices*, Commun.Math. Phys. **137**, 587 (1991).
- [131] D. Bazeia, M.A. Liao, M. A. Marques, R. Menezes, *Multilayered vortices* Phys. Rev. Res. **1**, 033053 (2019).
- [132] L. V. Levitin, R. G. Bennett, A. Casey, B. Cowan, J. Saunders, D. Drung, Th. Schurig, J. M. Parpia, *Phase Diagram of the Topological Superfluid  $^3\text{He}$  Confined in a Nanoscale Slab Geometry*, Science **340**, 841 (2013).
- [133] J. J. Wiman, J. A. Sauls, *Superfluid phases of  $^3\text{He}$  in nanoscale channels*, Phys. Rev. B **92**, 144515 (2015).
- [134] D. Bazeia, M.A. Marques, D. Melnikov, *Planar ringlike vortices*, Phys. Lett. B **785**, 454 (2018).

- [135] G. Theocharis, D. J. Frantzeskakis, P. G. Kevrekidis, B. A. Malomed, Y. S. Kivshar, *Ring Dark Solitons and Vortex Necklaces in Bose-Einstein Condensates* Phys. Rev. Lett. **90**, 120403 (2003).
- [136] B. Hartmann, F. Arbabzadah, *Cosmic strings interacting with dark strings* J. High Energy Phys. **2009**, 69 (2009).
- [137] T. Vachaspati, *Dark Strings* Phys. Rev. D **80**, 063502 (2009).
- [138] P. Arias, E. Ireson, C. Núñez, F. Schaposnik,  $\mathcal{N} = 2$  SUSY Abelian Higgs model with hidden sector and BPS equations J. High Energy Phys. **2015**, 156 (2015).
- [139] P. Curie, *Sur la possibilité d'existence de la conductibilité magnétique et du magnétisme libre*, Séances de la Société Française de Physique, 76 (1894).
- [140] P. A. M. Dirac, *The theory of magnetic poles*, Phys. Rev. **74**, 817 (1948).
- [141] A. Rajantie, *Magnetic monopoles in field theory and cosmology*, Phil. Trans. R. Soc. A **370**, 5705 (2012).
- [142] A. H. Guth, *Inflationary universe: A possible solution to the horizon and flatness problems*, Phys. Rev. D **23**, 347 (1981).
- [143] K.A. Olive, D. Seckel, *Primordial Inflation and the Monopole Problem*, J.L. Stone (eds), Monopole '83 111, Springer (1984).
- [144] A. Vilenkin, E. P. S. Shellard, *Cosmic Strings and Other Topological Defects*, Cambridge University Press (2000).
- [145] C. Castelnovo, R. Moessner, S. L. Sondhi, *Magnetic monopoles in spin ice*, Nature **451**, 42 (2008).
- [146] M. Shifman, A. Yung *Supersymmetric solitons*, Rev. Mod. Phys. **79**, 1139 (2007).
- [147] I. Kolář, P. Michor, J. Slovák, *Natural operators in differential geometry*, Springer-Verlag (1993).
- [148] G. Burdman, *Lecture 15: Non Abelian Gauge Symmetries*. Notas de aula, QFT 2, (2019). Disponível em <http://fma.if.usp.br/burdman/QFT2/>. Acesso em: 02 de janeiro de 2020.
- [149] Y. Shnir, *SU(N) monopoles with and without SUSY*, (2005) [arXiv:hep-th/0508210].
- [150] W. Rossmann, *Lie Groups – An Introduction Through Linear Groups*, Oxford Science Publications (2002).
- [151] M. Holmberg, *Calculating the Mass of Magnetic Monopoles in Non-Abelian Gauge Theories*, Tese de Bacharelado, Uppsala University (2016).
- [152] N. S. Manton, *The force between 't Hooft-Polyakov monopoles*. Nuclear Physics B **126**, 525 (1977).
- [153] P. Goddard, D. I. Olive, *Magnetic monopoles in gauge field theories*, Rep. Prog. **41**, 1357 (1978).

- [154] J.B. Mcleod, C.B. Wang, *Existence of the Solution for the 't Hooft-Polyakov Monopole*, (1999) [arXiv:math-ph/9902002].
- [155] K. R. Qandaji, *Non-Topological (Dynamical) Approach to Stability of 't Hooft-Polyakov Monopole*, (2012) [arXiv: hep-th/1206.4220].
- [156] T. W. Kirkman, C. K. Zachos, *Asymptotic analysis of the monopole structure*, Phys. Rev. D **24**, 999 (1981).
- [157] J. Schwinger, *A Magnetic Model of Matter*, Science **165**, 757 (1969).
- [158] S. Coleman, S. Parke, A. Neveu, C.M. Sommerfield, *Can one dent a dyon?* Phys. Rev. D **15**, 544 (1977).
- [159] N. S. Manton, *Monopole interactions at long range*, Phys. Lett. B **154**, 397 (1985).
- [160] P. W. Michor, *Gauge theory for Fiber Bundles*, American Institute of Physics (1991).
- [161] A. Marsh, *Gauge Theories and Fiber Bundles: Definitions, Pictures, and Results*, (2019) [arXiv:hep-th/160703089] .
- [162] R. W. Sharpe, *Differential Geometry - Cartan's generalization of Klein's Erlangen program*, Springer-Verlag (1997).
- [163] J. R. Munkres, *Topology: A First Course*, Prentice-Hall (2000).