

**Universidade Federal da Paraíba**  
**Centro de Ciências Exatas e da Natureza**  
**Programa de Pós-Graduação em Matemática**  
**Mestrado em Matemática**

**Caracterizando Horoesferas do Espaço Hiperbólico**  
**via Curvatura Média de Ordem Superior**

**Edson Rafael Braga do Nascimento**

JOÃO PESSOA – PB  
FEVEREIRO DE 2021

**Universidade Federal da Paraíba**  
**Centro de Ciências Exatas e da Natureza**  
**Programa de Pós-Graduação em Matemática**  
**Mestrado em Matemática**

**Caracterizando Horoesferas do Espaço Hiperbólico**  
**via Curvatura Média de Ordem Superior**

por

**Edson Rafael Braga do Nascimento**

sob a orientação do

**Prof. Dr. Eraldo Almeida Lima Júnior**

João Pessoa – PB

Fevereiro de 2021

**Catálogo na publicação**  
**Seção de Catalogação e Classificação**

N244c Nascimento, Edson Rafael Braga do.  
Caracterizando horoesferas do espaço hiperbólico via  
curvatura média de ordem superior / Edson Rafael Braga  
do Nascimento. - João Pessoa, 2021.  
78 f. : il.

Orientação: Eraldo Almeida Lima Júnior.  
Dissertação (Mestrado) - UFPB/CCEN.

1. Matemática. 2. Horoesfera. 3. Espaço hiperbólico. 4.  
Curvatura Média - Ordem Superior. 5. Transformações -  
Newton. I. Lima Júnior, Eraldo Almeida. II. Título.

UFPB/BC

CDU 51(043)

# Caracterizando Horoesferas do Espaço Hiperbólico via Curvatura Média de Ordem Superior

por

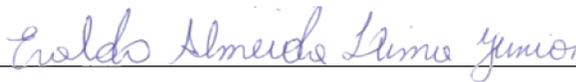
**Edson Rafael Braga do Nascimento<sup>1</sup>**

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Paraíba como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Geometria

Aprovado em 24 de Fevereiro de 2021.

Banca Examinadora:



Prof. Dr. Eraldo Almeida Lima Júnior – UFPB

(Orientador)



Prof. Dr. Henrique Fernandes de Lima – UFCG

(Examinador Interno)



Prof. Dr. Fábio Reis dos Santos – UFPE

(Examinador Externo)



Prof. Dr. Halyson Irene Baltazar – UFPI

(Examinador Externo)

---

<sup>1</sup>O autor foi bolsista da CAPES durante a elaboração desta dissertação

A minha mãe, meu exemplo de força, ao meu pai, minha família e amigos.

# Agradecimentos

A Deus, aos meus pais, que tanto me apoiaram, a minha irmã, família e amigos.

Ao professor Eraldo, que me orientou neste trabalho e, também, em muitos outros.

Agradeço aos professores Henrique Fernandes de Lima, Fábio Reis dos Santos e Halysom Irene Baltazar por aceitarem o convite de contribuir e participar da banca deste trabalho.

Agradeço ao Guilherme, ao Calvi e ao Danilo por compartilharem comigo conhecimentos e bons momentos nas aulas virtuais de Tópicos.

Agradeço a Coordenação do PPGMAT o tratamento sempre atencioso e gentil.

Aos amigos de longa data Elton, Vitor, Joaquim, Carlos e Harllen.

A CAPES pelo apoio financeiro.

Por fim, agradeço aos professores Adriano Alves e Gabriela Albuquerque pelo apoio na graduação, aos professores Allan George e Márcio Silva pelos ótimos cursos de Geometria Diferencial e ao professor José de Assis por me orientar no Estágio a Docência.

# Resumo

Neste trabalho nosso principal objetivo é estudar os resultados apresentados no artigo “Characterizing horospheres of the hyperbolic space via higher order mean curvatures” de Cícero P. Aquino, Halysen I. Baltazar e Henrique F. de Lima, no qual os autores apresentaram resultados de caracterização de horoesferas do espaço hiperbólico no contexto de curvatura média de ordem superior. Assim, para atingir este objetivo, apresentamos a  $r$ -ésima curvatura média, as transformações de Newton e o operador diferenciável  $L_r$ .

Palavras-chaves: Horoesfera. Espaço Hiperbólico. Curvatura Média de Ordem Superior. Transformações de Newton.

# Abstract

In this work our main objective is to study the results presented in the article “Characterizing horospheres of the hyperbolic space via higher order mean curvatures” by Cícero P. Aquino, Halysen I. Baltazar and Henrique F. de Lima. In this article the authors presented characterization results of horospheres in hyperbolic space in the context of higher order mean curvature. So, to achieve this goal, we also present the  $r$ -th mean curvature, Newton’s transformations and the differentiable operator  $L_r$ .

Keywords: Horospheres. Hyperbolic Space. Higher Order Mean Curvature. Newton’s Transformation.

# Sumário

<b>Introdução</b>	<b>10</b>
<b>1 Preliminares</b>	<b>12</b>
1.1 Segunda Forma Fundamental, Fórmulas de Gauss e Weingarten . . . . .	13
1.2 A $r$ -ésima Curvatura Média $H_r$ . . . . .	20
1.3 A $r$ -ésima Transformação de Newton $P_r$ . . . . .	22
1.4 O $r$ -ésimo Operador Diferencial $L_r$ . . . . .	27
<b>2 O Espaço Hiperbólico e Resultados Técnicos</b>	<b>33</b>
2.1 O Espaço de Minkowski $\mathbb{L}^{n+2}$ e o Espaço Hiperbólico $\mathbb{H}^{n+1}$ . . . . .	33
2.2 Resultados Técnicos . . . . .	38
<b>3 Caracterizando Horoesferas de <math>\mathbb{H}^{n+1}</math></b>	<b>45</b>
3.1 Conceitos Iniciais . . . . .	45
3.2 Teoremas de Caracterização de Horoesferas e Exemplos . . . . .	48
<b>A Conceitos Básicos de Geometria Riemanniana</b>	<b>59</b>
A.1 Campos de Vetores e Colchetes . . . . .	59
A.2 Métricas Riemannianas . . . . .	62
A.3 Conexões Afins . . . . .	64
A.3.1 Conexão Riemanniana . . . . .	66
A.4 Curvaturas . . . . .	70
A.4.1 Curvatura Seccional, Curvatura de Ricci e Curvatura Escalar . . . . .	74

# Introdução

O estudo da geometria das hipersuperfícies completas com curvatura média constante em um espaço Riemanniano constitui uma teoria clássica e frutífera dentro da análise geométrica. Neste sentido, Alías e Dajczer provaram em seu artigo intitulado “Uniqueness of constant mean curvature surfaces properly immersed in a slab” que as horoesferas são as únicas superfícies imersas em  $\mathbb{H}^3$  com curvatura média constante  $-1 \leq H \leq 1$  e que estão contidas em uma slab.

Além disso, Aquino e de Lima provaram em seu artigo “On the geometry of horospheres” que uma hipersuperfície  $\Sigma$  completa imersa em uma slab de  $\mathbb{H}^{n+1}$  com curvatura média limitada  $-1 \leq H \leq 1$  e  $a^\top \in \mathcal{L}^1(\Sigma)$  é uma horoesfera, onde  $a \in \mathbb{L}^{n+2}$  é o vetor que determina esta horoesfera.

No artigo “Characterizing horospheres of the hyperbolic space via higher order mean curvatures” os autores obtiveram resultados de caracterização de horoesferas do espaço hiperbólico  $\mathbb{H}^{n+1}$ , além disso estes resultados traziam hipóteses relacionadas com o conceito de curvatura média de ordem superior de hipersuperfícies. Mais ainda, os autores também apresentam exemplos que mostram como as hipóteses sobre a  $r$ -ésima curvatura média são indispensáveis.

Portanto, este trabalho tem como objetivo principal estudar os resultados obtidos em [1] e seus exemplos. Para atingir este objetivo será necessário uma descrição preliminar de tópicos sobre teoria das imersões, estudo das curvaturas de ordem superior, bem como uma descrição detalhada do espaço hiperbólico, após isto devemos iniciar o estudo específico do

artigo.

No capítulo 1 iniciaremos com alguns conceitos preliminares que serão importantes para o melhor entendimento dos outros capítulos deste trabalho, portanto, apresentamos a segunda forma fundamental e o operador de Weingarten, com os quais concluímos as fórmulas de Gauss e Weingarten, logo depois nos restringimos ao caso em que nosso objeto de estudo é uma hipersuperfície e, sob este ponto de vista, apresentamos o conceito da  $r$ -ésima curvatura média  $H_r$ , da  $r$ -ésima transformação de Newton  $P_r$  e do operador diferencial  $L_r$ .

No capítulo 2 iniciaremos apresentando o espaço de Minkowski  $\mathbb{L}^{n+2}$  e o espaço hiperbólico  $\mathbb{H}^{n+1}$ , também concluiremos neste capítulo, que o espaço hiperbólico é uma variedade Riemanniana com curvatura seccional constante. Por fim, apresentamos alguns resultados técnicos usados para a demonstração dos principais resultados de [1].

Finalmente, no capítulo 3 apresentaremos os resultados obtidos em [1] e os exemplos. Inicialmente será apresentado o conceito de horoesfera, que é uma hipersuperfície completa e totalmente umbílica do espaço hiperbólico com curvatura média constante e igual a 1. Logo depois apresentaremos os teoremas e exemplos que mostram a importância das principais hipóteses propostas nos teoremas.

O apêndice A apresenta alguns conceitos básicos de geometria Riemanniana que foram admitidos como conhecidos pelo leitor nos capítulos iniciais.

# Capítulo 1

## Preliminares

Neste primeiro capítulo iremos nos dedicar a apresentar, de forma introdutória, alguns conceitos que serão utilizados nos próximos capítulos desta dissertação. Dentre os conceitos aqui apresentados vale destacar o da *r-ésima curvatura média*,  $H_r$ , o qual será de fundamental importância no decorrer desta dissertação. Também apresentaremos os conceitos da *r-ésima transformação de Newton* e o seu *r-ésimo operador diferencial*,  $L_r$ , associado. Mostraremos também algumas equações importantes para os futuros capítulos deste trabalho, como as *fórmulas de Gauss e de Weingarten*.

Por fim, vale destacar que neste capítulo o espaço ambiente  $\overline{M}$  considerado será uma *variedade Riemanniana*<sup>1</sup> arbitrária e neste primeiro momento iremos considerar uma imersão isométrica,  $h : M \rightarrow \overline{M}$ , de uma *variedade diferenciável*  $M$  em  $\overline{M}$ . Mais à frente, ainda neste capítulo, iremos estudar o caso em que  $M$  é uma *hipersuperfície* de  $\overline{M}$  (conceito este que veremos mais adiante) e, apenas nos próximos capítulos, iremos nos restringir ao caso que realmente nos interessa, que é quando o espaço ambiente é o *espaço hiperbólico*  $\mathbb{H}^{n+1}$ , o qual está contido no *espaço de Minkowski*  $\mathbb{L}^{n+2}$ .

---

<sup>1</sup>Uma variedade Riemanniana é uma variedade diferenciável munida de uma métrica Riemanniana.

## 1.1 Segunda Forma Fundamental, Fórmulas de Gauss e Weingarten

Inicialmente, queremos introduzir o conceito da *segunda forma fundamental*, conceito este que será importante para definirmos as *fórmulas de Gauss e Weingarten* e, posteriormente, a *r-ésima curvatura média*  $H_r$ . Para isso, considere primeiramente o caso geral em que  $h : M^n \rightarrow \overline{M}^{k=n+m}$  é uma *imersão*<sup>2</sup> de uma variedade diferenciável  $M$  de dimensão  $n$  em uma variedade Riemanniana  $\overline{M}$  de dimensão  $k = n + m$ .

**Definição 1.1.1.** *Uma métrica Riemanniana (ou estrutura Riemanniana) em uma variedade diferenciável  $M$  é uma correspondência que associa a cada ponto  $p \in M$  uma forma bilinear, simétrica e positiva definida  $g_p$  no espaço tangente  $T_pM$ , que varia diferencialmente no seguinte sentido: se  $x_\alpha : U_\alpha \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$  é uma parametrização em torno de  $p$ , com  $q = (x_1, \dots, x_n) \in U_\alpha$ , então  $g \left( \frac{\partial}{\partial x_i}(q), \frac{\partial}{\partial x_j}(q) \right) = g_{ij}(x_1, \dots, x_n)$  é uma função diferenciável em  $U_\alpha$ .*

Definido o conceito de *métrica Riemanniana*, veja que a métrica Riemanniana  $\overline{g}$  de  $\overline{M}$  induz, de maneira natural, uma métrica Riemanniana  $g$  em  $M$ , pois para todo  $p \in M$  podemos tomar  $u, v \in T_pM$  e definir:

$$g(u, v) = \overline{g}(dh_p(u), dh_p(v)), \quad (1.1)$$

onde  $dh_p : T_pM \rightarrow T_p\overline{M}$  representa a diferencial da imersão  $h$  no ponto  $p \in M$ . Neste caso, temos que  $h$  é também uma *isometria*, e dizemos que  $h$  é uma *imersão isométrica*.

Voltando ao caso em que  $h : M^n \rightarrow M^{n+m=k}$  é uma imersão, então para cada  $p \in M$ , existe uma vizinhança  $U \subset M$  de  $p$ , tal que  $h(U) \subset \overline{M}$  é uma *subvariedade* de  $\overline{M}$ . De fato, existe uma vizinhança  $U \subset M$  de  $p$ , tal que a restrição  $h|_U : U \rightarrow \overline{M}$  é um mergulho<sup>3</sup> (cf. Proposição 3.7 do capítulo 0 de [17]), o que implica que  $h(U)$  é uma subvariedade de  $\overline{M}$ <sup>4</sup>.

Como  $h(U)$  é uma subvariedade de  $\overline{M}$ , existe uma vizinhança  $\overline{U} \subset \overline{M}$  de  $h(p)$  e um

<sup>2</sup>Imersão é uma função entre *variedades diferenciáveis* que é diferenciável e cuja derivada é injetiva em todo ponto.

<sup>3</sup>Mergulho é uma imersão que é também um homeomorfismo sobre sua imagem.

<sup>4</sup>Você pode conferir isto no capítulo 6 de [25], exemplo 2.

difeomorfismo  $\xi : \bar{U} \rightarrow V \subset \mathbb{R}^k$  em um aberto  $V$  de  $\mathbb{R}^k$ , tais que  $\xi$  aplica difeomorficamente  $h(U) \cap \bar{U}$  em um aberto do subespaço  $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^k$ . De fato, sendo  $h$  uma imersão, ela é localmente injetiva<sup>5</sup>, assim, tomando  $U$  suficientemente pequeno, temos que a dimensão de  $h(U) \cap \bar{U}$  é igual a  $n$ .

Portanto, para simplificar a notação, iremos identificar  $U$  com  $h(U)$  e cada vetor  $v \in T_q M$ ,  $q \in U$ , com  $dh_q(v) \in T_{h(q)} \bar{M}$ . Observe que com estas identificações  $h$  é uma imersão isométrica, pois a Equação 1.1 é satisfeita, e podemos estender um campo local (definido em  $U$ ) de vetores em  $M$  a um campo local (definido em  $\bar{U}$ ) de vetores em  $\bar{M}$ <sup>6</sup>, pois se  $U$  é suficientemente pequeno tal extensão é sempre possível, para isso basta usarmos o difeomorfismo  $\xi$  citado anteriormente.

Além disso, sendo  $h : M \rightarrow \bar{M}$  uma imersão isométrica, então para cada  $p \in M$ , podemos escrever  $T_p \bar{M}$  como

$$T_p \bar{M} = T_p M \oplus (T_p M)^\perp,$$

onde  $(T_p M)^\perp$  é o *complemento ortogonal* de  $T_p M$  em  $T_p \bar{M}$  determinado pela métrica  $\bar{g}$ , ou seja, dado  $v \in T_p \bar{M}$ ,  $p \in M$ , podemos escrever

$$v = v^\top + v^\perp, \quad v^\top \in T_p M, \quad v^\perp \in (T_p \bar{M})^\perp.$$

Denominamos  $v^\top$  a *componente tangente* de  $v$  e  $v^\perp$  a *componente normal* de  $v$ . Vale ressaltar que a aplicação de  $T_p \bar{M}$  em  $(T_p \bar{M})^\top$  dada por  $v \mapsto v^\top$  e a aplicação de  $T_p \bar{M}$  em  $(T_p \bar{M})^\perp$  dada por  $v \mapsto v^\perp$  são lineares (cf. capítulo 4 de [18]).

A *conexão de Levi-Civita*<sup>7</sup> de  $\bar{M}$  com a métrica Riemanniana  $\bar{g}$  será indicada por  $\bar{\nabla}$ . Se  $X$  e  $Y$  são campos locais de vetores em  $M$ , e  $\bar{X}$ ,  $\bar{Y}$  são extensões locais a  $\bar{M}$ , definimos

$$\nabla_X Y = (\bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y})^\top. \tag{1.2}$$

A conexão  $\nabla$  definida acima é a conexão de Levi-Civita de  $M$  com a métrica Riemanniana  $g$ . De fato, denotando por  $\mathfrak{X}(U)$  o conjunto dos campos de vetores de classe  $C^\infty$  em  $U$

<sup>5</sup>Confira isto no teorema 2 do capítulo 6 de [23].

<sup>6</sup>Ou seja, o campo local de vetores em  $M$  é um subcampo do campo local de vetores em  $\bar{M}$ .

<sup>7</sup>Para mais informações sobre conexões, consulte capítulo 2 de [17]

vizinhança de  $p$  em  $M$  e  $C^\infty(U)$  o anel das funções reais de classe  $C^\infty$  em  $U$ , se  $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(U)$  e  $f \in C^\infty(U)$ , então

$$\nabla_{X+Y}Z = (\overline{\nabla_{X+Y}}\overline{Z})^\top = (\overline{\nabla_X}\overline{Z} + \overline{\nabla_Y}\overline{Z})^\top = (\overline{\nabla_X}\overline{Z})^\top + (\overline{\nabla_Y}\overline{Z})^\top = \nabla_XZ + \nabla_YZ,$$

onde na segunda igualdade usamos a propriedade de linearidade da conexão  $\overline{\nabla}$  (cf. Definição 2.1 do capítulo 2 de [17]) e na terceira igualdade usamos a linearidade da aplicação  $v \mapsto v^\top$ . Para mostrarmos que  $\nabla_{fX}Y = f\nabla_XY$ , consideramos  $\overline{f} \in C^\infty(\overline{U})$  uma extensão de  $f$  a  $\overline{U}$  e concluímos que

$$\nabla_{fX}Y = (\overline{\nabla_{\overline{f}X}}\overline{Y})^\top = (\overline{f}\overline{\nabla_X}\overline{Y})^\top = f\nabla_XY.$$

Por fim, para mostrarmos que  $\nabla_X(fY) = f\nabla_XY + X(f)Y$ , observamos que  $\overline{X}(\overline{f}) = X(f)$  em  $M$ , portanto,

$$\nabla_X(fY) = (\overline{\nabla_X}\overline{f}\overline{Y})^\top = (\overline{f}\overline{\nabla_X}\overline{Y} + \overline{X}(\overline{f})\overline{Y})^\top = (\overline{f}\overline{\nabla_X}\overline{Y})^\top + (\overline{X}(\overline{f})\overline{Y})^\top = f\nabla_XY + X(f)Y.$$

**Observação 1.1.1.** *Lembre que, como a diferencial  $dh_p : T_pM \rightarrow T_p\overline{M}$  é injetiva, podemos identificar  $U$  com  $h(U)$ , assim, estamos cometendo um abuso de notação no qual o campo de vetores  $X$  representa tanto um campo de vetores em  $\mathfrak{X}(U)$  como um campo de vetores em  $\mathfrak{X}(h(U))$ . Por exemplo, a seguir iremos calcular  $g(Y, Z)$  e  $\overline{g}(Y, Z)$ , assim, fica subentendido que no primeiro caso  $Y$  e  $Z$  são campos de vetores em  $\mathfrak{X}(U)$ , enquanto no segundo caso  $Y$  e  $Z$  são campos de vetores em  $\mathfrak{X}(h(U))$ , campos estes os quais identificamos com os campos de vetores originais em  $\mathfrak{X}(U)$ .*

Resta mostrarmos que  $\nabla$  é compatível com a métrica  $g$  e também simétrica. Para mostrar que  $\nabla$  é compatível com a métrica  $g$  note que, pela observação anterior, a métrica  $g$  em  $U$  coincide com a métrica  $\overline{g}$  em  $h(U)$  e, sendo  $\overline{\nabla}$  compatível com a métrica  $\overline{g}$ , temos que

$$\begin{aligned} Xg(Y, Z) &= X\overline{g}(Y, Z) = \overline{g}(\overline{\nabla_X}Y, Z) + \overline{g}(Y, \overline{\nabla_X}Z) \\ &= \overline{g}(\nabla_XY + (\overline{\nabla_X}Y)^\perp, Z) + \overline{g}(Y, \nabla_XZ + (\overline{\nabla_X}Z)^\perp) \\ &= \overline{g}(\nabla_XY, Z) + \overline{g}(Y, \nabla_XZ) = g(\nabla_XY, Z) + g(Y, \nabla_XZ), \end{aligned}$$

onde usamos que  $\bar{\nabla}_X Y, \bar{\nabla}_X Z \in \mathfrak{X}(\bar{U})$ , logo pudemos decompô-los em parte tangente e parte normal e, também, usamos que  $\bar{g}((\bar{\nabla}_X Y)^\perp, Z) = 0$  e  $\bar{g}(Y, (\bar{\nabla}_X Z)^\perp) = 0$ .

Finalmente, para mostrarmos que  $\nabla$  é simétrica, veja que

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = (\bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y} - \bar{\nabla}_{\bar{Y}} \bar{X})^\top = ([\bar{X}, \bar{Y}])^\top = (\bar{X} \bar{Y} - \bar{Y} \bar{X})^\top = [X, Y].$$

Portanto,  $\nabla$  definido como na Equação 1.2 é, de fato, a conexão de Levi-Civita em  $M$ .

Agora queremos definir a *segunda forma fundamental* da imersão isométrica  $h : M \rightarrow \bar{M}$ . Para isso, vamos introduzir a seguinte definição; se  $X, Y$  são campos locais de vetores em  $M$ , então

$$\begin{aligned} B(X, Y) &= \bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y} - \nabla_X Y \\ &= (\bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y})^\perp \end{aligned} \tag{1.3}$$

é um campo local de vetores em  $\bar{M}$  normal a  $M$ . Além disso,  $B(X, Y)$  não depende das extensões  $\bar{X}, \bar{Y}$ , pois se  $\bar{X}_1$  é outra extensão de  $X$  e  $\bar{Y}_1$  é outra extensão de  $Y$ , então

$$(\bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y} - \nabla_X Y) - (\bar{\nabla}_{\bar{X}_1} \bar{Y}_1 - \nabla_X Y) = \bar{\nabla}_{\bar{X} - \bar{X}_1} \bar{Y} - \bar{\nabla}_{\bar{X}_1} (\bar{Y}_1 - \bar{Y}),$$

onde o segundo lado da igualdade se anula, pois tomando  $p \in M$ , como  $\bar{X}(p) = X(p) = \bar{X}_1(p)$ , temos

$$\bar{\nabla}_{(\bar{X} - \bar{X}_1)(p)} \bar{Y} = \bar{\nabla}_{\bar{X}(p) - \bar{X}_1(p)} \bar{Y} = 0.$$

E se considerarmos  $\bar{Y}_1$  e  $\bar{Y}$  ao longo de curvas em  $\bar{M}$  tangentes a  $\bar{X}_1(p) = X(p)$  em  $p \in M$ , basta lembrarmos que os valores de  $\bar{\nabla}_{\bar{X}_1(p)} \bar{Y}_1$  e  $\bar{\nabla}_{\bar{X}_1(p)} \bar{Y}$  não dependem das curvas consideradas, mas sim do vetor  $\bar{X}_1(p)$  (cf. Observação 2.3 do capítulo 2 de [17]), logo podemos considerar  $\bar{Y}_1$  e  $\bar{Y}$  ao longo de uma curva em  $M$  tangente a  $\bar{X}_1(p)$ , donde concluímos que  $\bar{Y}_1 = Y = \bar{Y}$  e, conseqüentemente

$$\bar{\nabla}_{\bar{X}_1(p)} (\bar{Y}_1 - \bar{Y}) = 0.$$

Portanto,  $B(X, Y)$  está bem definida. No que segue, indicaremos por  $\mathfrak{X}(U)^\perp$  os campos

diferenciáveis em  $U$  de vetores normais a  $h(U) \approx U^8$ .

**Proposição 1.1.1.** *Se  $X, Y \in \mathfrak{X}(U)$ , a aplicação  $B : \mathfrak{X}(U) \times \mathfrak{X}(U) \longrightarrow \mathfrak{X}(U)^\perp$  dada por*

$$B(X, Y) = \bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Y} - \nabla_X Y \quad (1.4)$$

*é bilinear e simétrica.*

*Demonstração.* Pelas propriedades de linearidade de uma conexão, concluímos que  $B$  é aditiva nas entradas  $X$  e  $Y$  e que  $B(fX, Y) = fB(X, Y)$ , com  $f \in C^\infty(U)$ . Resta mostrar que  $B(X, fY) = fB(X, Y)$ ,  $f \in C^\infty(U)$ . Indicando por  $\bar{f}$  uma extensão de  $f$  a  $\bar{U}$ , temos que

$$B(X, fY) = \bar{\nabla}_{\bar{X}}(\bar{f}\bar{Y}) - \nabla_X(fY) = \bar{f}\bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Y} - f\nabla_X Y + \bar{X}(\bar{f})\bar{Y} - X(f)Y,$$

onde as duas últimas parcelas se anulam, pois em  $M$ ,  $\bar{X}(\bar{f}) = X(f)$  e  $\bar{Y} = Y$ . Além disso, em  $M$ ,  $f = \bar{f}$ , logo concluímos que  $B(X, fY) = fB(X, Y)$ , ou seja,  $B$  é linear.

Para mostrar que  $B$  é simétrica, observe que

$$B(X, Y) - B(Y, X) = \bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Y} - \nabla_X Y - \bar{\nabla}_{\bar{Y}}\bar{X} + \nabla_Y X = [\bar{X}, \bar{Y}] - [X, Y] = 0,$$

em  $M$ , onde usamos o fato que  $[\bar{X}, \bar{Y}]$  é uma extensão local de  $[X, Y]$ . □

Seja  $\mathbf{N} \in \mathfrak{X}(U)^\perp$  um campo local de vetores normais a  $M$ , então a aplicação  $II_{\mathbf{N}} : \mathfrak{X}(U) \times \mathfrak{X}(U) \longrightarrow \mathbb{R}$ , dada por

$$II_{\mathbf{N}}(X, Y) = \bar{g}(B(X, Y), \mathbf{N}) \quad (1.5)$$

é, pela proposição anterior, bilinear e simétrica. Assim, associado à aplicação  $II_{\mathbf{N}}$  existe um operador autoadjunto  $A_{\mathbf{N}} : \mathfrak{X}(U) \longrightarrow \mathfrak{X}(U)$ , conhecido como *operador de Weingarten* de  $M$  com respeito ao campo  $\mathbf{N}$ , e que satisfaz a seguinte igualdade:

$$II_{\mathbf{N}}(X, Y) = g(A_{\mathbf{N}}(X), Y). \quad (1.6)$$

---

<sup>8</sup>Quando escrevemos  $h(U) \approx U$  significa que estamos identificando  $U$  com  $h(U)$

Observe que se tomamos  $p \in M$  e escrevemos  $\mathbf{N}_p = \eta$ ,  $X_p = x$  e  $Y_p = y$ , então  $II_{\mathbf{N}}$  restrito a  $p$ , ou seja,  $II_{\eta} : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ , é uma forma bilinear simétrica que tem associado uma aplicação linear autoadjunta  $A_{\eta} : T_p M \rightarrow T_p M$  (cf. Proposição 7.4.5 de [?]) que satisfaz

$$II_{\eta}(x, y) = g(A_{\eta}(x), y). \quad (1.7)$$

**Definição 1.1.2.** A forma quadrática  $\Pi_{\eta}$  definida em  $T_p M$  por

$$\Pi_{\eta}(x) = g(A_{\eta}(x), x) \quad (1.8)$$

é chamada a segunda forma fundamental de  $h$  em  $p$  segundo o vetor normal  $\eta$ .

Às vezes se utiliza também a expressão *segunda forma fundamental* para designar a aplicação  $B : \mathfrak{X}(U) \times \mathfrak{X}(U) \rightarrow \mathfrak{X}(U)^{\perp}$  citada anteriormente. Veja que se restringimos a aplicação  $B$  ao ponto  $p \in M$ , teremos  $B_p : T_p M \times T_p M \rightarrow (T_p M)^{\perp}$ , que é dada por

$$B_p(x, y) = (\bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y})^{\perp}(p), \quad (1.9)$$

aplicação esta que em cada ponto  $p \in M$  é uma aplicação bilinear, simétrica, tomando valores em  $(T_p M)^{\perp}$ .

Finalizamos esta seção apresentando as fórmulas de Gauss e Weingarten, mas antes disto precisamos apresentar a próxima proposição.

**Proposição 1.1.2.** Seja  $p \in M$ ,  $x \in T_p M$  e  $\eta \in (T_p M)^{\perp}$ . Seja  $\mathbf{N}$  uma extensão local de  $\eta$  normal a  $M$ . Então

$$A_{\eta}(x) = -(\bar{\nabla}_x \mathbf{N})^{\top}. \quad (1.10)$$

*Demonstração.* Seja  $y \in T_p M$  e  $X, Y$  extensões locais de  $x, y$ , respectivamente, e tangentes a  $M$ . Então  $\bar{g}(Y, \mathbf{N}) = 0$ , o que implica que

$$X\bar{g}(Y, \mathbf{N}) = \bar{g}(\bar{\nabla}_X Y, \mathbf{N}) + \bar{g}(Y, \bar{\nabla}_X \mathbf{N}) = 0,$$

ou seja,  $\bar{g}(\bar{\nabla}_X Y, \mathbf{N}) = -\bar{g}(Y, \bar{\nabla}_X \mathbf{N})$ . Assim,

$$\begin{aligned} \bar{g}(A_\eta(x), y) &= \bar{g}(B(X, Y)(p), \mathbf{N}) = \bar{g}(\bar{\nabla}_X Y - \nabla_X Y, \mathbf{N})(p) = \bar{g}(\bar{\nabla}_X Y, \mathbf{N})(p) = -\bar{g}(Y, \bar{\nabla}_X \mathbf{N})(p) \\ &= \bar{g}(-\bar{\nabla}_x \mathbf{N}, y) = \bar{g}(-(\bar{\nabla}_x \mathbf{N})^\top, y), \end{aligned}$$

para todo  $y \in T_p M$ , o que mostra o que queríamos.  $\square$

**Corolário 1.1.1.** *Seendo  $X$  um campo local de vetores de  $M$  e  $\{N_1, \dots, N_m\} \subset \mathfrak{X}(U)^\perp$  um referencial local ortonormal a  $M$ , ou seja, para cada  $p \in M$ ,  $\{N_1(p), \dots, N_m(p)\}$  forma uma base ortonormal de  $(T_p M)^\perp$ , então temos as seguintes igualdades:*

$$A_{\mathbf{N}}(X) = -(\bar{\nabla}_X \mathbf{N})^\top, \quad \mathbf{N} \in \mathfrak{X}(U)^\perp, \quad (1.11)$$

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \sum_{i=1}^m \bar{g}(A_{N_i}(X), Y) N_i. \quad (1.12)$$

*Demonstração.* A primeira equação é consequência da proposição anterior. Já a segunda equação é resultado das igualdades seguintes:

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_X Y &= \nabla_X Y + (\bar{\nabla}_X Y)^\perp = \nabla_X Y + (\bar{\nabla}_X \bar{Y})^\perp = \nabla_X Y + \sum_{i=1}^m \bar{g}((\bar{\nabla}_X \bar{Y})^\perp, N_i) N_i \\ &= \nabla_X Y + \sum_{i=1}^m \bar{g}(B(X, Y), N_i) N_i = \nabla_X Y + \sum_{i=1}^m II_{N_i}(X, Y) N_i \\ &= \nabla_X Y + \sum_{i=1}^m \bar{g}(A_{N_i}(X), Y) N_i, \end{aligned}$$

de onde concluímos a igualdade desejada.  $\square$

**Definição 1.1.3.** *(Fórmula de Weingarten) Seendo  $X$  um campo local de vetores de  $M$  e  $\mathbf{N}$  um campo local normal a  $M$ , definimos a fórmula de Weingarten da seguinte forma:*

$$A_{\mathbf{N}}(X) = -(\bar{\nabla}_X \mathbf{N})^\top. \quad (1.13)$$

**Definição 1.1.4.** *(Fórmula de Gauss) Seendo  $X$  e  $Y$  campos locais de vetores de  $M$  e  $\{N_1, \dots, N_m\} \subset \mathfrak{X}(U)^\perp$  um referencial local ortonormal a  $M$ , definimos a fórmula de Gauss*

da seguinte forma:

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \sum_{i=1}^m \bar{g}(A_{N_i}(X), Y) N_i. \quad (1.14)$$

## 1.2 A $r$ -ésima Curvatura Média $H_r$

Nosso propósito nesta seção é definir a  $r$ -ésima curvatura média, para isso iremos analisar o caso em que a *codimensão* da imersão isométrica  $h : M^n \rightarrow \bar{M}^{n+1}$  é igual a 1, ou seja,  $h(M) \subset \bar{M}$  é denominada uma *hipersuperfície*. O estudo deste caso irá nos motivar na definição da  $r$ -ésima curvatura média.

Seja  $p \in M^n$  e  $\mathbf{N} \in (T_p M)^\perp$ ,  $|\mathbf{N}| = 1$ . Como o operador de Weingarten,  $A_{\mathbf{N}} : T_p M \rightarrow T_p M$ , é uma aplicação linear autoadjunta e, portanto, simétrica, então existe uma base ortonormal de *autovetores*  $\{E_1, \dots, E_n\}$  de  $T_p M$  com *autovalores* reais  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  (cf. Proposição 7.4.8 de [?]), isto é,  $A_{\mathbf{N}}(E_i) = \lambda_i E_i$ , para todo  $i \in \{1, \dots, n\}$ .

Se  $M^n$  e  $\bar{M}^{n+1}$  são orientáveis e estão orientadas, então o vetor  $\mathbf{N}$  fica univocamente determinado se exigirmos que sendo  $\{E_1, \dots, E_n\}$  uma base na orientação de  $M$ ,  $\{E_1, \dots, E_n, \mathbf{N}\}$  seja uma base na orientação de  $\bar{M}$ . Neste caso, denominamos os  $E_i$  *direções principais* e os  $\lambda_i$  as *curvaturas principais* de  $h$ . Portanto, as funções simétricas de  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ , as quais veremos a seguir, são invariantes da imersão  $h$ . Por exemplo, como o determinante e o traço são invariantes por mudanças de base, podemos escrever  $\det(A_{\mathbf{N}}) = \lambda_1 \dots \lambda_n$  que é chamada de curvatura de *Gauss-Kronecker* de  $h$  e  $\frac{1}{n} \text{tr}(A_{\mathbf{N}}) = \frac{1}{n}(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)$  que é chamada de *curvatura média* de  $h$ .

Portanto, para definirmos a  $r$ -ésima curvatura média, iremos considerar  $\bar{M}^{n+1}$  uma variedade Riemanniana, orientável, conexa, de dimensão  $n + 1$  cuja métrica é  $\bar{g}$  e a conexão de Levi-Civita é representada por  $\bar{\nabla}$ . Seja  $M^n$  uma variedade orientável, conexa, de dimensão  $n$ . Dizemos que  $M$  é uma hipersuperfície, se existe uma imersão isométrica  $h : M^n \rightarrow \bar{M}^{n+1}$ , neste caso, desde que  $M$  e  $\bar{M}$  são orientáveis, podemos escolher um campo normal  $\mathbf{N}$  de vetores unitários definidos em  $h(M)$ , e podemos assumir que  $M$  é orientada por  $\mathbf{N}$ . Denotando

por  $\nabla$  a conexão de Levi-Civita de  $M$ , então a fórmula de Gauss assume a seguinte forma

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \bar{g}(A_{\mathbf{N}}(X), Y)\mathbf{N}, \quad (\text{Fórmula de Gauss para hipersuperfícies}) \quad (1.15)$$

para todo  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ . Além disso, como  $\mathbf{N}$  é um campo unitário e normal a  $M$ , temos que  $\bar{\nabla}_X \mathbf{N}$  é um campo tangente a  $M$ , pois  $\bar{g}(\bar{\nabla}_X \mathbf{N}, \mathbf{N}) = X\bar{g}(\mathbf{N}, \mathbf{N}) = 0$ . Portanto, a fórmula de Weingarten assume a seguinte forma

$$A_{\mathbf{N}}(X) = -\bar{\nabla}_X \mathbf{N}, \quad (\text{Fórmula de Weingarten para hipersuperfícies}) \quad (1.16)$$

para todo  $X \in \mathfrak{X}(M)$ .

Veja que, no caso das hipersuperfícies, o campo  $\mathbf{N}$  está bem determinado, como pudemos ver na discussão feita acima, portanto, nestes casos iremos suprimir o subíndice  $\mathbf{N}$ . Além disso, também iremos usar a notação  $A_p : T_p M \rightarrow T_p M$  para designar o operador de Weingarten restrito ao ponto  $p \in M$ , e lembre que o operador  $A_p$  é uma aplicação linear autoadjunta, cujos autovalores  $\lambda_1(p), \dots, \lambda_n(p)$  são as *curvaturas principais da hipersuperfície associadas às direções principais*  $E_1(p), \dots, E_n(p)$ .

Como podemos ver em [4], a  $r$ -ésima função simétrica,  $S_r : M \rightarrow \mathbb{R}$ , de  $\lambda_1(p), \dots, \lambda_r(p)$ , denotada por  $S_r(p)$ , é definida como

$$S_r(p) = \sigma_r(\lambda_1(p), \dots, \lambda_n(p)), \quad 1 \leq r \leq n, \quad (1.17)$$

onde  $\sigma_r : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  são as *funções simétricas elementares* em  $\mathbb{R}$ , dadas por

$$\sigma_r(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i_1 < \dots < i_r} x_{i_1} \cdot \dots \cdot x_{i_r}, \quad 1 \leq r \leq n. \quad (1.18)$$

Assim, convencionamos que  $S_0(p) = 1$  e  $S_r(p) = 0$  quando  $r > n$ , e as demais funções são dadas por

$$S_r(p) = \sum_{i_1 < \dots < i_r} \lambda_{i_1}(p) \cdot \dots \cdot \lambda_{i_r}(p), \quad 1 \leq r \leq n, \quad (1.19)$$

ou seja, com as notações acima, temos que

$$\begin{aligned} S_1 &= \lambda_1 + \dots + \lambda_n; \\ S_2 &= \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \dots + \lambda_1\lambda_n + \lambda_2\lambda_3 + \dots + \lambda_{n-1}\lambda_n; \\ &\vdots \\ S_n &= \lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_n. \end{aligned}$$

Denotando por  $\text{diag}(t - \lambda_1, \dots, t - \lambda_n)$  a matriz diagonal com entradas  $t - \lambda_1, \dots, t - \lambda_n$ , então o polinômio característico de  $A_p$  é dado por

$$\begin{aligned} \det(tI - A_p) &= \det(\text{diag}(t - \lambda_1(p), \dots, t - \lambda_n(p))) = (t - \lambda_1(p)) \cdot \dots \cdot (t - \lambda_n(p)) \\ &= \sum_{r=0}^n (-1)^r S_r(p) t^{n-r}. \end{aligned} \quad (1.20)$$

A última igualdade se justifica, pois escolhendo  $r$  curvaturas principais  $\lambda_i$ , e realizando o produto, obtemos  $(-1)^r \cdot \lambda_{i_1}(p) \cdot \dots \cdot \lambda_{i_r}(p) \cdot t^{n-r}$ ,  $i_1 < \dots < i_r$ . Assim, somando os termos que tem o fator  $t^{n-r}$  em comum, obtemos  $(-1)^r S_r(p) t^{n-r}$  e, por fim, basta variarmos  $r$  de 0 até  $n$  para obtermos a igualdade desejada.

**Definição 1.2.1.** A  $r$ -ésima curvatura média  $H_r$  da hipersuperfície  $M$  é definida por

$$\binom{n}{r} H_r = S_r, \quad 0 \leq r \leq n. \quad (1.21)$$

Portanto, veja que se  $r = 1$ , temos  $H_1 = \frac{1}{n} \text{tr}(A) = H$ , que é a *curvatura média* de  $M$ . Já se  $r = n$ , temos  $H_n = \lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_n = \det(A)$ , que é a *curvatura de Gauss-Kronecker* de  $M$ .

### 1.3 A $r$ -ésima Transformação de Newton $P_r$

Nesta seção iremos apresentar as *transformações de Newton*, as quais serão importantes para estudarmos o *operador diferencial*  $L_r$  associado a  $P_r$  e também será importante para a demonstração de alguns lemas do próximo capítulo.

Como podemos ver em [4], as  $r$ -ésimas transformações de Newton  $P_r : \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$  são definidas recursivamente, a partir do operador de Weingarten  $A_{\mathbf{N}} = A : \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$ , da seguinte maneira

$$P_0 = I \quad \text{e} \quad P_r = S_r I - A P_{r-1}, \quad 1 \leq r \leq n, \quad (1.22)$$

onde  $I$  denota a identidade em  $\mathfrak{X}(M)$  e estamos suprimindo o subíndice  $\mathbf{N}$ , pois a partir da seção anterior estamos estudando o caso em que  $M$  é uma hipersuperfície.

Desenvolvendo a expressão de  $P_r$ , obtemos

$$\begin{aligned} P_r &= S_r I - A(S_{r-1} I - A P_{r-2}) \\ &= S_r I - S_{r-1} A + A^2(S_{r-2} - A P_{r-3}) \\ &\quad \vdots \\ &= S_r I - S_{r-1} A + \dots + (-1)^{r-1} S_1 A^{r-1} + (-1)^r A^r. \end{aligned}$$

Agora observamos que, pelo teorema de Cayley-Hamilton (cf. seção 5.3 de [?]) e pela Equação 1.20, temos a seguinte igualdade  $\sum_{r=0}^n (-1)^r S_r A^{n-r} = 0$ , ou seja,

$$A^n - S_1 A^{n-1} + \dots + (-1)^{n-1} S_{n-1} A + (-1)^n S_n I = 0,$$

e multiplicando a equação acima por  $(-1)^n$ , concluímos que

$$P_n = (-1)^n A^n + (-1)^{n-1} S_1 A^{n-1} + \dots - S_{n-1} A + S_n I = 0.$$

Um outro fato importante sobre a  $r$ -ésima transformação de Newton é que, sendo o operador de Weingarten uma aplicação linear autoadjunta, não é difícil ver que  $P_r$  também é um operador linear autoadjunto, para todo  $r \in \{1, \dots, n\}$ , ou seja,

$$g(P_r(X), Y) = g(X, P_r(Y)), \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M), \quad (1.23)$$

e portanto, o operador  $P_r$  é *diagonalizável* quando restrito a cada plano tangente  $T_p M$ . Mais

ainda, a mesma base de autovetores que diagonaliza o operador  $A_p$  também diagonaliza o operador  $P_r$ .

Finalizaremos esta seção com as proposições a seguir, que podem ser encontradas em [4] e [12], proposições estas que serão importantes para a demonstração de alguns lemas do próximo capítulo. Para isso, considere  $E_1, \dots, E_n$  as direções principais correspondentes, respectivamente, as curvaturas principais  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ . Para cada  $i \in \{1, \dots, n\}$  denote por  $A_i$  a restrição do operador de Weingarten  $A$  sobre o subespaço  $(n-1)$ -dimensional normal a  $E_i$ . Assim, denote por  $S_r(A_i)$  a  $r$ -ésima função simétrica associada a  $A_i$ , ou seja,

$$S_r(A_i) = \sum_{\substack{i_1 < \dots < i_r \\ i_1, \dots, i_r \neq i}} \lambda_{i_1} \cdot \dots \cdot \lambda_{i_r}. \quad (1.24)$$

Assim, com estas notações, temos a proposição a seguir.

**Proposição 1.3.1.** *Para todo  $r \in \{0, \dots, n\}$ ,  $i \in \{1, \dots, n\}$ , temos que:*

$$(i) \quad P_r(E_i) = \frac{\partial S_{r+1}}{\partial \lambda_i} E_i = S_r(A_i) E_i;$$

$$(ii) \quad H_1^2 \geq H_2.$$

*Demonstração.* (i) Observe que esta propriedade é válida quando  $r = 0$ , pois  $\frac{\partial S_1}{\partial \lambda_i} = 1$ . Agora, supondo que esta propriedade é válida para  $r \geq 0$ , queremos mostrar sua validade para  $r+1$ . Considere que  $i = 1$ , o que facilitará o entendimento dos próximos passos. Assim,

$$\begin{aligned} P_{r+1}(E_1) &= S_{r+1}I(E_1) - AP_r(E_1) = S_{r+1}E_1 - \frac{\partial S_{r+1}}{\partial \lambda_1} A(E_1) = \left( S_{r+1} - \frac{\partial S_{r+1}}{\partial \lambda_1} \lambda_1 \right) E_1 \\ &= \left( \sum_{i_1 < \dots < i_{r+1}} \lambda_{i_1} \cdot \dots \cdot \lambda_{i_{r+1}} - \sum_{\substack{i_1 < \dots < i_r \\ i_1, \dots, i_r \neq 1}} \lambda_{i_1} \cdot \dots \cdot \lambda_{i_r} \cdot \lambda_1 \right) E_1 \\ &= \left( \sum_{\substack{i_1 < \dots < i_{r+1} \\ i_1, \dots, i_{r+1} \neq 1}} \lambda_{i_1} \cdot \dots \cdot \lambda_{i_{r+1}} \right) E_1 \\ &= \left( \frac{\partial S_{r+2}}{\partial \lambda_1} \right) E_1. \end{aligned}$$

Como  $S_{r+1}(A_1) = \sum_{\substack{i_1 < \dots < i_{r+1} \\ i_1, \dots, i_{r+1} \neq 1}} \lambda_{i_1} \cdot \dots \cdot \lambda_{i_{r+1}}$ , concluímos que  $H_{r+1}(E_1) = \frac{\partial S_{r+2}}{\partial \lambda_1} E_1 = S_{r+1}(A_1)E_1$ . De maneira análoga mostramos a igualdade para  $i \in \{2, \dots, n\}$ , o que conclui a prova.

(ii) Observe que

$$\begin{aligned}
H_1^2 - H_2 &= \frac{1}{n^2} S_1^2 - \frac{2}{n(n-1)} S_2 \\
&= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 + \frac{2}{n^2} \sum_{i<j}^n \lambda_i \lambda_j - \left( \frac{2}{n-1} - \frac{2}{n} \right) \sum_{i<j}^n \lambda_i \lambda_j \\
&= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 - \frac{2}{n^2(n-1)} \sum_{i<j}^n \lambda_i \lambda_j \\
&= \frac{1}{n^2} \left[ \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 - \frac{2}{n-1} \sum_{i<j}^n \lambda_i \lambda_j \right] \\
&\geq \frac{1}{n^2} \left[ \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 - 2 \sum_{i<j}^n \lambda_i \lambda_j \right] \\
&\geq 0,
\end{aligned}$$

onde na última igualdade usamos que  $\sum_{i,j=1}^n (\lambda_i - \lambda_j)^2 \geq 0$ , o que implica que  $\sum_{i=1}^n \lambda_i^2 \geq 2 \sum_{i,j=1}^n \lambda_i \lambda_j$ .  $\square$

**Proposição 1.3.2.** *Para cada  $r \in \{1, \dots, n\}$ , se  $H_1, \dots, H_r$  são não-negativas, então:*

$$(i) \quad H_{r-1} H_{r+1} \leq H_r^2;$$

$$(ii) \quad H_1 \geq H_2^{\frac{1}{2}} \geq H_3^{\frac{1}{3}} \geq \dots \geq H_r^{\frac{1}{r}}.$$

*Demonstração.* (i) Iremos usar indução sobre a dimensão  $n$ , portanto, veja que se  $n = 1$ , então a propriedade é trivialmente válida. Suponha que a propriedade seja válida para  $n \geq 1$  e mostremos que ela é válida para  $n + 1$ .

Iremos adotar as seguintes notações:

$$S'_r = \sum_{i_1 < \dots < i_r} \lambda_{i_1} \cdot \dots \cdot \lambda_{i_r}, \text{ onde } \lambda_{i_j} \in \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} \text{ e } j \in \{1, \dots, r\}; \quad H'_r = \frac{r!(n-r)!}{n!} S'_r;$$

$$S_r = \sum_{i_1 < \dots < i_r} \lambda_{i_1} \cdot \dots \cdot \lambda_{i_r}, \text{ onde } \lambda_{i_j} \in \{\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}\} \text{ e } j \in \{1, \dots, r\}; \quad H_r = \frac{r!(n+1-r)!}{(n+1)!} S_r.$$

Com as notações acima, veja que  $S_r = S'_r + \lambda_{n+1} S'_{r-1}$  e, conseqüentemente,

$$\begin{aligned} H_r &= \frac{r!(n+1-r)!}{(n+1)!} S_r = \frac{r!(n+1-r)!}{(n+1)!} (S'_r + \lambda_{n+1} S'_{r-1}) \\ &= \frac{r!(n+1-r)!}{(n+1)!} \left[ \frac{n!}{r!(n-r)!} H'_r + \lambda_{n+1} \frac{n!}{(r-1)!(n-r+1)!} H'_{r-1} \right] \\ &= \frac{n+1-r}{n+1} H'_r + \lambda_{n+1} \frac{r}{n+1} H'_{r-1}. \end{aligned}$$

Com o valor de  $H_r$  calculado na expressão acima, obtemos que:

$$\begin{aligned} H_{r-1} H_{r+1} - H_r^2 &= \left( \frac{n+2-r}{n+1} H'_{r-1} + \lambda_{n+1} \frac{r-1}{n+1} H'_{r-2} \right) \cdot \left( \frac{n-r}{n+1} H'_{r+1} + \lambda_{n+1} \frac{r+1}{n+1} H'_r \right) \\ &\quad - \left( \frac{n+1-r}{n+1} H'_r + \lambda_{n+1} \frac{r}{n+1} H'_{r-1} \right)^2 \\ &= \frac{(n+2-r)(n-r)}{(n+1)^2} H'_{r-1} H'_{r+1} + \lambda_{n+1} \frac{(n+2-r)(r+1)}{(n+1)^2} H'_{r-1} H'_r \\ &\quad + \lambda_{n+1} \frac{(r-1)(n-r)}{(n+1)^2} H'_{r-2} H'_{r+1} + \lambda_{n+1}^2 \frac{(r-1)(r+1)}{(n+1)^2} H'_{r-2} H'_r \\ &\quad - \frac{(n+1-r)^2}{(n+1)^2} H_r^2 - 2\lambda_{n+1} \frac{r(n+1-r)}{(n+1)^2} H'_r H'_{r-1} - \lambda_{n+1}^2 \frac{r^2}{(n+1)^2} H_{r-1}^2 \\ &= \frac{1}{(n+1)^2} \left( \left[ (n+2-r)(n-r) H'_{r-1} H'_{r+1} - (n+1-r)^2 H_r^2 \right] \right. \\ &\quad \left. + \lambda_{n+1} \left[ (n+2-r)(r+1) H'_{r-1} H'_r + (r-1)(n-r) H'_{r-2} H'_{r+1} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - 2r(n+1-r) H'_r H'_{r-1} \right] + \lambda_{n+1}^2 \left[ (r^2-1) H'_{r-2} H'_r - r^2 H_{r-1}^2 \right] \right) \\ &\leq \frac{1}{(n+1)^2} \left( \left[ (n+2-r)(n-r) - (n+1-r)^2 \right] H_r^2 \right. \\ &\quad \left. + \lambda_{n+1} \left[ (n+2-r)(r+1) + (r-1)(n-r) - 2r(n+1-r) \right] H'_{r-1} H'_r \right. \\ &\quad \left. + \lambda_{n+1}^2 \left[ (r^2-1) - r^2 \right] H_{r-1}^2 \right) \\ &= \frac{1}{(n+1)^2} \left[ -H_r^2 + 2\lambda_{n+1} H'_{r-1} H'_r - \lambda_{n+1}^2 H_r^2 \right] \\ &= -\frac{1}{(n+1)^2} (H'_r - \lambda_{n+1} H'_{r-1})^2 \leq 0, \end{aligned}$$

onde, para obter a desigualdade, usamos as seguintes hipóteses de indução:  $H'_{r-1}H'_{r+1} \leq H_r'^2$ ;  $H'_{r-2}H'_r \leq H_{r-1}'^2$  e  $H'_{r-2}H'_{r+1} \leq H'_{r-1}H'_r$ , pois

$$H'_{r-2}H'_{r+1} = \frac{H'_{r-2}H'_rH'_{r-1}H'_{r+1}}{H'_rH'_{r-1}} \leq \frac{H_{r-1}'^2H_r'^2}{H'_rH'_{r-1}} = H'_{r-1}H'_r.$$

Desta forma, concluímos que  $H_{r-1}H_{r+1} - H_r^2 \leq 0$ , ou seja,  $H_{r-1}H_{r+1} \leq H_r^2$ , como queríamos demonstrar.

(ii) A partir do item anterior, concluímos que:

$$(H_0H_2)(H_1H_3)^2(H_2H_4)^3 \dots (H_{r-3}H_{r-1})^{r-2}(H_{r-2}H_r)^{r-1}(H_{r-1}H_{r+1})^r \leq H_1^2H_2^4H_3^6 \dots H_{r-1}^{2r-2}H_r^{2r},$$

o que implica que  $H_{r+1}^r \leq H_r^{r+1}$ . Elevando ambos os lados a  $1/r(r+1)$ , obtemos que

$$H_{r+1}^{\frac{1}{r+1}} \leq H_r^{\frac{1}{r}},$$

como queríamos demonstrar. □

## 1.4 O $r$ -ésimo Operador Diferencial $L_r$

Nesta seção, finalizaremos este primeiro capítulo apresentando o operador diferencial  $L_r$  associado ao operador  $P_r$ , para isso precisamos de algumas definições, portanto, iremos iniciar com as definições do *gradiente* e da *hessiana*.

**Definição 1.4.1.** *O gradiente de uma função  $f \in C^\infty(M)$  é o campo de vetores  $\nabla f : M \rightarrow TM$  dado por*

$$g(\nabla f, X) = X(f), \tag{1.25}$$

para todo  $X \in \mathfrak{X}(M)$ , onde  $TM$  é o fibrado tangente de  $M$ .

**Definição 1.4.2.** *A hessiana da função  $f \in C^\infty(M)$ ,  $Hess f : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ , é definida*

da seguinte forma:

$$\text{Hess}f(X) = \nabla_X \nabla f, \quad \forall X \in \mathfrak{X}(M). \quad (1.26)$$

Iremos adotar a seguinte notação:

$$\text{Hess}f(X, Y) = g(\text{Hess}f(X), Y), \quad X, Y \in \mathfrak{X}(M), \quad (1.27)$$

notação esta que será usada na demonstração do penúltimo lema do próximo capítulo.

Tomando  $p \in M$ , seja  $U$  uma vizinhança de  $p$  em  $M$  e  $\{E_1, \dots, E_n\}$  um referencial ortonormal em  $U$ , ou seja,  $E_i \in \mathfrak{X}(M)$  e, para todo  $q \in U$ ,  $\{E_1, \dots, E_n\}$  forma uma base ortonormal de  $T_q M$ . Assim,

$$\nabla f = \sum_{i=1}^n E_i(f) E_i = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} E_i, \quad (1.28)$$

onde estamos usando a notação  $E_i(f) = \frac{\partial f}{\partial x_i}$ . Observe que, a partir da equação acima, concluímos que  $\nabla f \in \mathfrak{X}(M)$ . Além disso,

$$\text{Hess}f(E_i) = \nabla_{E_i} \nabla f = \nabla_{E_i} \left( \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j} E_j \right) = \sum_{j,k=1}^n \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k} + \frac{\partial f}{\partial x_j} \Gamma_{ij}^k \right) E_k, \quad (1.29)$$

onde  $\Gamma_{ij}^k$  são os coeficientes da conexão  $\nabla$  em  $U$ .

Assim, com as definições de  $P_r$  e  $\text{Hess}f$ , podemos definir o operador diferencial  $L_r$  associado a  $r$ -ésima transformação de Newton  $P_r$ , da seguinte forma.

**Definição 1.4.3.** Dado  $f \in C^\infty(M)$  e  $0 \leq r \leq n$ , o  $r$ -ésimo operador diferencial,  $L_r : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$ , associado ao operador  $P_r$ , é dado por

$$L_r(f) = \text{tr}(P_r \circ \text{Hess}f). \quad (1.30)$$

Nós iremos denotar por  $\nabla^2 f : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$  o operador linear autoadjunto metríca-

mente equivalente a hessiana de  $f$  e dado por

$$g(\nabla^2 f(X), Y) = g(\nabla_X \nabla f, Y), \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M). \quad (1.31)$$

Portanto, concluímos a validade da seguinte igualdade:

$$g(\nabla_X \nabla f, Y) = g(\nabla^2 f(X), Y) = g(\nabla^2 f(Y), X) = g(\nabla_Y \nabla f, X). \quad (1.32)$$

Desta forma, observe que

$$\begin{aligned} \text{tr}(P_r \circ \text{Hess} f) &= \sum_{i=1}^n g(P_r(\text{Hess} f(E_i)), E_i) = \sum_{i=1}^n g(\text{Hess} f(E_i), P_r(E_i)) \\ &= \sum_{i=1}^n g(\nabla_{E_i} \nabla f, P_r(E_i)) = \sum_{i=1}^n g(\nabla^2 f(E_i), P_r(E_i)) \\ &= \sum_{i=1}^n g(P_r(\nabla^2 f(E_i)), E_i) = \text{tr}(P_r \circ \nabla^2 f), \end{aligned} \quad (1.33)$$

onde usamos, nas equações acima, o fato de que  $P_r$  é um operador autoadjunto. Assim, podemos escrever

$$L_r(f) = \text{tr}(P_r \circ \nabla^2 f). \quad (1.34)$$

Enfim, a partir da Equação 1.32, concluímos que

$$\begin{aligned} \text{tr}(P_r \circ \nabla^2 f) &= \sum_{i=1}^n g(P_r(\nabla^2 f(E_i)), E_i) = \sum_{i=1}^n g(\nabla^2 f(E_i), P_r(E_i)) \\ &= \sum_{i=1}^n g(\nabla_{E_i} \nabla f, P_r(E_i)) = \sum_{i=1}^n g(\nabla_{P_r(E_i)} \nabla f, E_i) \\ &= \sum_{i=1}^n g(\nabla^2 f(P_r(E_i)), E_i) = \text{tr}(\nabla^2 f \circ P_r) \end{aligned} \quad (1.35)$$

A próxima expressão que iremos mostrar pode ser vista em [1], para isso consideramos

$\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função suave e  $f \in C^\infty(M)$ , então

$$\begin{aligned}
L_r(\varphi \circ f) &= \text{tr}(P_r \circ \nabla^2(\varphi \circ f)) = \sum_{i=1}^n g(P_r(\nabla^2(\varphi \circ f)(E_i)), E_i) \\
&= \sum_{i=1}^n g(\nabla^2(\varphi \circ f)(E_i), P_r(E_i)) = \sum_{i=1}^n g(\nabla_{E_i}(\nabla(\varphi \circ f)), P_r(E_i)) \\
&= \sum_{i=1}^n g(\nabla_{E_i}(\varphi'(f)\nabla f), P_r(E_i)) = \sum_{i=1}^n g(\varphi'(f)\nabla_{E_i}\nabla f + E_i(\varphi'(f))\nabla f, P_r(E_i)) \\
&= \varphi'(f) \sum_{i=1}^n g(\nabla^2 f(E_i), P_r(E_i)) + \sum_{i=1}^n g(\varphi''(f)E_i(f)\nabla f, P_r(E_i)) \\
&= \varphi'(f) \sum_{i=1}^n g(P_r(\nabla^2 f(E_i)), E_i) + \varphi''(f) \sum_{i=1}^n g(P_r(\nabla f), E_i(f)E_i) \\
&= \varphi'(f)\text{tr}(P_r \circ \nabla^2 f) + \varphi''(f)g\left(P_r(\nabla f), \sum_{i=1}^n E_i(f)E_i\right) \\
&= \varphi'(f)L_r(f) + \varphi''(f)g(P_r(\nabla f), \nabla f),
\end{aligned} \tag{1.36}$$

onde também usamos que o fato de  $P_r$  ser um operador linear autoadjunto, nas equações acima.

**Definição 1.4.4.** *Definimos o divergente de um campo  $X \in \mathfrak{X}(M)$  como a aplicação  $\text{div}X : M \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por*

$$\text{div}X(p) = \text{tr}\{v \mapsto (\nabla_v X)(p)\}. \tag{1.37}$$

Veja que, com a definição de divergente dada acima, obtemos que

$$L_0(f) = \text{tr}(\text{Hess}f) = \sum_{i=1}^n g(\text{Hess}f(E_i), E_i) = \sum_{i=1}^n g(\nabla_{E_i}\nabla f, E_i) = \text{div}(\nabla f). \tag{1.38}$$

Da mesma forma como fizemos em 1.29, tomando  $p \in M$ ,  $U$  vizinhança de  $p$  em  $M$  e  $\{E_1, \dots, E_n\}$  um referencial ortonormal em  $U$ , então se  $X = \sum_{j=1}^n a_j E_j$ , com  $a_j \in C^\infty(M)$ ,

temos que

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} X &= \sum_{i=1}^n g(\nabla_{E_i} X, E_i) = \sum_{i=1}^n g(\nabla_{E_i}(a_j E_j), E_i) = \sum_{i=1}^n g(E_i(a_j) E_j + a_j \Gamma_{ij}^k E_k, E_i) \\
&= \sum_{i=1}^n E_i(a_i) + a_j \Gamma_{ij}^i.
\end{aligned} \tag{1.39}$$

**Definição 1.4.5.** (*Operador de Laplace-Beltrami*) Seja  $f \in C^\infty(M)$ . Definimos o operador de Laplace-Beltrami de  $f$  como a aplicação  $\Delta f : M \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$\Delta f = \operatorname{div}(\nabla f). \tag{1.40}$$

Com a definição acima e a Equação 1.38, concluímos que  $L_0 = \Delta$ , ou seja,  $L_0$  é um operador *elíptico*, o que significa que  $P_r$  é positivo-definido. No próximo capítulo veremos alguns condições para que  $L_r$ ,  $r \in \{1, \dots, n-1\}$ , seja um operador elíptico, visto que  $L_n = 0$ , pois  $P_n = 0$ .

A última equação aqui apresentada, que também pode ser vista em [1], resultará numa equação simplificada para  $\operatorname{div}(P_r(\nabla f))$  quando o ambiente tiver curvatura seccional constante e, também, nos trará uma importante equivalência para verificar se o operador  $L_r$  é elíptico, portanto, veja que:

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(P_r(\nabla f)) &= \sum_{i=1}^n g(\nabla_{E_i}(P_r(\nabla f)), E_i) \\
&= \sum_{i=1}^n g((\nabla_{E_i} P_r)(\nabla f), E_i) + \sum_{i=1}^n g(P_r(\nabla_{E_i} \nabla f), E_i) \\
&= \sum_{i=1}^n g\left(\sum_{j=1}^n E_j(f)(\nabla_{E_i} P_r)(E_j), E_i\right) + g(P_r(\operatorname{Hess} f(E_i)), E_i) \\
&= \sum_{i,j=1}^n g((\nabla_{E_i} P_r)(E_j), E_j(f) E_i) + \operatorname{tr}(P_r \circ \operatorname{Hess} f) \\
&= g(\operatorname{div} P_r, \nabla f) + L_r(f),
\end{aligned} \tag{1.41}$$

onde na primeira igualdade usamos a regra do produto (cf. Proposição 13 do capítulo 2 de [18]) e na terceira igualdade usamos a definição de  $\nabla f$  e a definição 11 do capítulo 2 de [18],

onde o divergente de  $P_r$  em  $M$  foi denotado por

$$\operatorname{div}(P_r) = \operatorname{tr}(\nabla P_r) = \sum_{i=1}^n (\nabla_{E_i} P_r)(E_i). \quad (1.42)$$

O lema abaixo (cf. Lema 3.1 de [5]) nos dá uma caracterização para o divergente da transformação de Newton  $P_r$ .

**Lema 1.4.1.** *O divergente da transformação de Newton  $T_r$  em  $M$  é dado pela seguinte fórmula de recorrência*

$$\begin{cases} \operatorname{div} P_0 = 0, \\ \operatorname{div} P_r = -A(\operatorname{div} P_{r-1}) - \sum_{i=1}^n [\bar{R}(N, P_{r-1}(E_i))E_i]^\top, \end{cases} \quad (1.43)$$

onde  $\bar{R}$  denota a curvatura de  $\bar{M}$ ,  $N \in \mathfrak{X}(M)^\perp$  e  $E_i \in \mathfrak{X}(M)$ , para todo  $i \in \{1, \dots, n\}$ .

Com o lema acima, observamos que, se a componente  $[\bar{R}(N, T_{r-1}(E_i))E_i]^\top$  for nula para todo  $i \in \{1, \dots, n\}$ , então teremos que  $\operatorname{div} P_r = 0$ , para todo  $r \in \{0, \dots, n\}$ . Mas como podemos ver no lema abaixo (cf. Corolário 43 de [18]), quando o ambiente tem curvatura seccional nula, então a componente  $[\bar{R}(N, T_{r-1}(E_i))E_i]^\top$  é nula.

**Lema 1.4.2.** *Se  $\bar{M}$  tem curvatura seccional constante  $C$ , então*

$$\bar{R}(x, y)z = C\{\bar{g}(z, x)y - \bar{g}(z, y)x\}, \quad \forall x, y, z \in T_p M, \quad (1.44)$$

onde  $\bar{R}(X, Y)Z = \bar{\nabla}_Y \bar{\nabla}_X Z - \bar{\nabla}_X \bar{\nabla}_Y Z + \bar{\nabla}_{[X, Y]} Z$ , com  $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ .

De fato, dado  $p \in M$ , pelo lema anterior, temos que

$$\begin{aligned} [\bar{R}(N, T_{r-1}(E_i))E_i]^\top(p) &= [C\{\bar{g}(E_i, N)T_{r-1}(E_i) - \bar{g}(E_i, T_{r-1}(E_i))N\}]^\top(p) \\ &= [-C\{\bar{g}(E_i, T_{r-1}(E_i))N\}]^\top(p) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Assim, como  $\operatorname{div} P_r = 0$ , para todo  $0 \leq r \leq n$ , podemos escrever:

$$L_r(f) = \operatorname{div}(P_r(\nabla f)). \quad (1.45)$$

# Capítulo 2

## O Espaço Hiperbólico e Resultados Técnicos

Neste capítulo iremos nos dedicar a apresentar alguns lemas que serão importantes para o próximo capítulo, onde apresentaremos os teoremas de caracterização de horoesferas. Também apresentaremos neste capítulo o *espaço de Minkowski* e o *espaço hiperbólico*, pois estes espaços serão os ambientes nos quais os teoremas principais desta dissertação estarão embasados. Além disso, iremos concluir que o espaço hiperbólico  $\mathbb{H}^{n+1}$  é uma *variedade Riemanniana de curvatura seccional constante* e iremos obter equações importantes relacionadas com a imersão isométrica  $\psi : \Sigma^n \rightarrow \mathbb{H}^{n+1}$  da hipersuperfície two-sided conexa  $\Sigma^n$ .

### 2.1 O Espaço de Minkowski $\mathbb{L}^{n+2}$ e o Espaço Hiperbólico

$\mathbb{H}^{n+1}$

Nesta seção apresentaremos o *espaço de Minkowski*  $\mathbb{L}^{n+2}$  e o *espaço hiperbólico*  $\mathbb{H}^{n+1}$ . Dentre os objetivos principais desta seção estão o de concluir que o espaço hiperbólico é uma variedade Riemanniana, mostrar que sua curvatura seccional é constante e trazer as equações e conceitos apresentados no capítulo anterior para este ambiente.

Nós representamos o espaço de Minkowski  $\mathbb{L}^{n+2}$  como o espaço vetorial  $\mathbb{R}^{n+2}$  munido da

métrica Lorentziana<sup>1</sup>

$$\langle v, w \rangle = \sum_{i=1}^{n+1} v_i w_i - v_{n+2} w_{n+2}. \quad (2.1)$$

Assim, dado  $v \in \mathbb{L}^{n+2}$ , definimos o *caráter causal* de  $v$  como

- (i) *tipo-espaço*, se  $\langle v, v \rangle > 0$  ou  $v = 0$ ;
- (ii) *tipo-tempo*, se  $\langle v, v \rangle < 0$ ;
- (iii) *tipo-luz*, se  $\langle v, v \rangle = 0$  e  $v \neq 0$ .

Se  $W$  é um subespaço vetorial não nulo de  $\mathbb{L}^{n+2}$ , denotando por  $\langle \cdot, \cdot \rangle_W$  a métrica  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  restita ao subespaço  $W$ , dizemos que  $W$  é do tipo-espaço, se a métrica  $\langle \cdot, \cdot \rangle_W$  é *positiva-definida*<sup>2</sup>;  $W$  é do tipo-tempo, se a métrica  $\langle \cdot, \cdot \rangle_W$  é *não-degenerada*<sup>3</sup>; e  $W$  é do tipo-luz, se a métrica  $\langle \cdot, \cdot \rangle_W$  é *degenerada*<sup>4</sup>.

Alguns fatos que podem ser verificados em [20] (Corolário 1.2.16 e Corolário 1.2.17) é que  $W$  é um subespaço de  $\mathbb{L}^{n+2}$  do tipo-espaço (respectivamente, tipo-tempo) se, e somente se,  $W^\perp$  é um subespaço do tipo-tempo (respectivamente, tipo-espaço). E se  $W$  é do tipo-luz, então  $W^\perp$  é do tipo-luz. Mais ainda, se  $W$  é do tipo-tempo, então  $W$  possui um vetor tipo-tempo e se  $W$  é do tipo-espaço, então todos os vetores de  $W$  são do tipo-espaço.

Finalmente, se  $M$  é uma subvariedade diferenciável de  $\mathbb{L}^{n+2}$ , dizemos que

- (i)  $M$  é do tipo-espaço, se  $T_p M$  é do tipo-espaço, para todo  $p \in M$ ;
- (ii)  $M$  é do tipo-tempo, se  $T_p M$  é do tipo-tempo, para todo  $p \in M$ ;
- (iii)  $M$  é do tipo-luz, se  $T_p M$  é do tipo-luz, para todo  $p \in M$ .

Definimos o espaço hiperbólico como a *hiperquádrica* de  $\mathbb{L}^{n+2}$  dada por

$$\mathbb{H}^{n+1} = \{p \in \mathbb{L}^{n+2} \mid \langle p, p \rangle = -1, p_{n+2} \geq 1\} \quad (2.2)$$

<sup>1</sup>Métrica Lorentziana é uma forma bilinear simétrica de índice 1, ou seja, a assinatura da métrica é  $(-, +, \dots, +)$ .

<sup>2</sup>Positiva-definida significa que  $\langle v, v \rangle_W > 0, \forall v \in W \setminus \{0\}$ .

<sup>3</sup>Dizemos que a métrica é não degenerada, se a condição  $\langle v, w \rangle_W = 0, \forall v \in W$ , implicar que  $w = 0$ .

<sup>4</sup>Degenerada significa que  $\exists u \in W \setminus \{0\}$ , tal que  $\langle v, u \rangle_W = 0, \forall v \in W$  e  $W \neq \{0\}$ .

equipada com a métrica induzida de  $\mathbb{L}^{n+2}$ .

Para mostrarmos que  $\mathbb{H}^{n+1}$  é uma variedade Riemanniana, precisamos mostrar que, dado  $p \in \mathbb{H}^{n+1}$ , a métrica  $\langle \cdot, \cdot \rangle \Big|_{T_p \mathbb{H}^{n+1}}$  é positiva-definida. Para isso, considere a função diferenciável  $f : \mathbb{L}_+^{n+2} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$f(q) = \langle q, q \rangle,$$

onde  $\mathbb{L}_+^{n+2} = \{p \in \mathbb{L}^{n+2} \mid p_{n+2} > 0\}$ .

Lembre que o gradiente de  $f$  no ponto  $p$  é ortogonal ao conjunto de nível de nível de  $f$  que passa por  $p$  (cf. página 51 de [23]). Assim, como  $f^{-1}(-1) = \mathbb{H}^{n+1}$  e  $\nabla f(q) = 2q$ , para todo  $q \in \mathbb{L}^{n+2}$ , concluímos que, dado  $p \in \mathbb{H}^{n+1}$ , o vetor posição  $p$  é do tipo-tempo, pois  $\langle p, p \rangle = -1$ , e é ortogonal a  $\mathbb{H}^{n+1}$ , ou seja,  $p$  é ortogonal a  $T_p \mathbb{H}^{n+1}$ .

Portanto, como a codimensão de  $\mathbb{H}^{n+1}$  é 1, temos  $\{p\}^\perp = T_p \mathbb{H}^{n+1}$  e, concluímos que,  $T_p \mathbb{H}^{n+1}$  é do tipo-espaço, pois a assinatura da métrica  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  em  $\mathbb{L}^{n+2}$  é 1. Consequentemente,  $T_p \mathbb{H}^{n+1}$  só possui vetores do tipo-espaço, o que garante que a métrica  $\langle \cdot, \cdot \rangle \Big|_{T_p \mathbb{H}^{n+1}}$  é positiva-definida (cf. Corolário 1.2.33 de [20]).

Agora queremos mostrar que a curvatura seccional de  $\mathbb{H}^{n+1}$  é constante e igual a  $-1$ . Para isso, considere uma base ortonormal  $\{E_1, \dots, E_{n+2}\}$  de  $\mathbb{L}^{n+2}$ , com  $E_{n+2} = p \in \mathbb{H}^{n+1}$ . Como vimos anteriormente,  $T_p \mathbb{H}^{n+1} = \{p\}^\perp$ , ou seja,  $T_p \mathbb{H}^{n+1} = \text{span}\{E_1, \dots, E_{n+1}\}$ .

Denotando  $g_{ij} = \langle E_i, E_j \rangle$ ,  $i, j \in \{1, \dots, n+2\}$ , concluímos que  $\Gamma_{ij}^k = 0$ , para todo  $i, j, k \in \{1, \dots, n+2\}$  (cf. Observação 3.7 do capítulo 2 de [17]), onde  $\Gamma_{ij}^k$  são os coeficientes da conexão  $\nabla^0$  de  $\mathbb{L}^{n+2}$ . Portanto, dados  $Y, Z \in \mathfrak{X}(\mathbb{L}^{n+2})$ , com  $Y = \sum_{j=1}^{n+2} b_j E_j$  e  $Z = \sum_{k=1}^{n+2} c_k E_k$ ,

então  $\nabla_Y^0 Z = \sum_{l=1}^{n+2} Y(c_l) E_l$  (cf. Observação 2.3 do capítulo 2 de [17]), onde  $b_j, c_k \in C^\infty(\mathbb{L}^{n+2})$ .

Considere  $\mathbf{N} \in \mathfrak{X}(U)^\perp$  uma extensão local de  $p$  ortonormal a  $\mathbb{H}^{n+1}$ , ou seja, existe uma vizinhança  $U$  de  $p$  em  $\mathbb{H}^{n+1}$ , tal que o campo  $\mathbf{N}$  está definido em  $U$  e, dado  $q \in U$ ,  $\mathbf{N}_q \in T_q \mathbb{H}^{n+1}$ . Como a codimensão de  $\mathbb{H}^{n+1}$  é igual a 1, então  $\mathbf{N}_q = q$ , para todo  $q \in U$ . Portanto, em coordenadas locais temos que  $\mathbf{N}_q = (x_1, \dots, x_{n+2}) = q$ .

Assim, dado  $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{H}^{n+1})$ , com  $X = \sum_{i=1}^{n+1} a_i E_i$ ,  $a_i \in C^\infty(\mathbb{H}^{n+1})$ , temos, pela Equação

1.16, que  $A_{\mathbf{N}}(X) = -\nabla_X^0 \mathbf{N}$ , logo

$$\begin{aligned} A_{\mathbf{N}}(X) &= A_{\mathbf{N}}\left(\sum_{i=1}^{n+1} a_i E_i\right) = \sum_{i=1}^{n+1} a_i A_{\mathbf{N}}(E_i) = -\sum_{i=1}^{n+1} a_i \bar{\nabla}_{E_i} \mathbf{N} = -\sum_{i=1}^{n+1} a_i \left(\sum_{l=1}^{n+2} E_l(x_l) E_l\right) \\ &= -\sum_{i=1}^{n+1} a_i E_i = -X. \end{aligned}$$

Assim,  $A_{\mathbf{N}} = -I$ , onde  $I$  é a identidade em  $\mathfrak{X}(\mathbb{H}^{n+1})$ . Em particular,  $A_p$  é a identidade em  $T_p \mathbb{H}^{n+1}$ .

Dados  $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{H}^{n+1})$ , pelas Equações 1.6 e 1.7, observe que  $\langle B(X, Y), \mathbf{N} \rangle = \langle A_{\mathbf{N}}(X), Y \rangle$ , de onde concluímos que  $\langle B(X, Y), \mathbf{N} \rangle = -\langle X, Y \rangle$ , logo a 2ª forma fundamental é dada por

$$B(X, Y) = \langle X, Y \rangle \mathbf{N}, \quad (2.3)$$

ou ainda,  $B_p(x, y) = \langle x, y \rangle$ , onde  $x, y \in T_p \mathbb{H}^{n+1}$ .

A curvatura seccional de uma seção plana<sup>5</sup> independe da base escolhida (cf. Proposição 3.1 do capítulo 4 de [17]), assim, escolhendo  $E_i, E_j$ ,  $i, j \in \{1, \dots, n+1\}$  e  $i \neq j$ , como base de uma seção plana de  $T_p \mathbb{H}^{n+1}$ , temos, pela fórmula de Gauss (cf. Teorema 2.5 do capítulo 6 de [17]), que

$$\begin{aligned} K(E_i, E_j) - \bar{K}(E_i, E_j) &= \langle B(E_i, E_i), B(E_j, E_j) \rangle - |B(E_i, E_j)|^2 \\ &= \langle \langle E_i, E_i \rangle p, \langle E_j, E_j \rangle p \rangle - \langle \langle E_i, E_j \rangle p, \langle E_i, E_j \rangle p \rangle \\ &= \langle p, p \rangle = -1, \end{aligned}$$

onde  $\bar{K}$  representa a curvatura seccional em  $\mathbb{L}^{n+2}$ .

Como  $\bar{K}$  está em função dos coeficientes  $\Gamma_{ij}^k$  da conexão  $\nabla^0$  (cf. página 103 de [17]), concluímos que  $\bar{K}(E_i, E_j) = 0$ . Logo  $K(E_i, E_j) = -1$ , para todo  $i, j \in \{1, \dots, n+1\}$ ,  $i \neq j$ , de onde concluímos que a curvatura seccional de  $\mathbb{H}^{n+1}$  é constante e igual a  $K = -1$ .

Agora iremos trazer alguns conceitos e equações do capítulo anterior para o ambiente do espaço de Minkowski  $\mathbb{L}^{n+2}$  e o espaço hiperbólico  $\mathbb{H}^{n+1}$ .

Considere a imersão isométrica  $\psi : \Sigma^n \rightarrow \mathbb{H}^{n+1} \subset \mathbb{L}^{n+2}$  da hipersuperfície two-sided

---

<sup>5</sup>Seção plana é um subespaço bidimensional do espaço tangente da variedade em questão.

conexa  $\Sigma^n$ , onde por two-sided queremos dizer que existe um campo de vetores normal e unitário  $N$  globalmente definido em  $\Sigma^n$ . O campo de vetores normal e unitário definido em  $\mathbb{H}^{n+1}$  continuará sendo denotado por  $\mathbf{N}$ , assim, observe que, em particular,  $N \in \mathfrak{X}(\mathbb{H}^{n+1})$ , enquanto  $\mathbf{N} \in \mathfrak{X}(\mathbb{H}^{n+1})^\perp$ . O operador de Weingarten de  $\Sigma^n$  com relação ao campo de vetores  $N$  será denotado por  $A : \mathfrak{X}(\Sigma) \rightarrow \mathfrak{X}(\Sigma)$  ou  $A_N : \mathfrak{X}(\Sigma) \rightarrow \mathfrak{X}(\Sigma)$ , enquanto o operador de Weingarten de  $\mathbb{H}^{n+1}$  será denotado por  $A_{\mathbf{N}} : \mathfrak{X}(\mathbb{H}^{n+1}) \rightarrow \mathfrak{X}(\mathbb{H}^{n+1})$ .

Também iremos denotar por  $\nabla^0, \bar{\nabla}$  e  $\nabla$  as conexões de Levi-Civita em  $\mathbb{L}^{n+2}, \mathbb{H}^{n+1}$  e  $\Sigma^n$ , respectivamente. Assim, as fórmulas de Gauss e Weingarten para a hipersuperfície apresentadas nas Equações 1.15 e 1.16 assumem, respectivamente, a seguinte forma:

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \langle A(X), Y \rangle N, \quad (2.4)$$

$$A(X) = -\bar{\nabla}_X N = -\nabla_X^0 N, \quad (2.5)$$

para todo campo de vetores tangentes  $X, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma)$ . Observe que temos a igualdade  $-\bar{\nabla}_X N = -\nabla_X^0 N$ , pois

$$\nabla_X^0 N = \bar{\nabla}_X N + \langle A_{\mathbf{N}}(X), N \rangle \mathbf{N} = \bar{\nabla}_X N + \langle -X, N \rangle \mathbf{N} = \bar{\nabla}_X N,$$

onde  $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$  e  $N \in \mathfrak{X}(\Sigma)^\perp$ .

Destacamos também que a fórmula de Weingarten com relação a hipersuperfície  $\mathbb{H}^{n+1}$  de  $\mathbb{L}^{n+2}$  é dada por

$$\nabla_X^0 Y = \bar{\nabla}_X Y - \langle A_{\mathbf{N}}(X), Y \rangle \mathbf{N}, \quad (2.6)$$

onde  $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{H}^{n+1})$  e  $\mathbf{N} \in \mathfrak{X}(\mathbb{H}^{n+1})^\perp$ .

Por último, se  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função suave e  $f \in C^\infty(\Sigma)$ , então é válida a Equação 1.36, ou seja,

$$L_r(\varphi \circ f) = \varphi'(f)L_r(f) + \varphi''(f)\langle P_r(\nabla f), \nabla f \rangle. \quad (2.7)$$

E como  $\mathbb{H}^{n+1}$  tem curvatura seccional constante, temos a validade da Equação 1.45,

$$L_r(f) = \operatorname{div}(P_r(\nabla f)). \quad (2.8)$$

## 2.2 Resultados Técnicos

Nesta seção iremos apresentar alguns lemas que serão importantes para o próximo capítulo onde iremos estudar os principais teoremas desta dissertação.

Nós dizemos que o operador  $L_r$  é elíptico se  $P_r$  é positivo-definido, com isso veja que  $L_0 = \Delta$  é sempre elíptico. Porém,  $L_1$  não é necessariamente elíptico, portanto, apresentamos o próximo lema, que pode ser visto em [4], o qual nos dá uma condição para que  $L_1$  seja elíptico. Mas antes disso observe que escolhido um campo de vetores normal e unitário  $N$  globalmente definido em  $\Sigma^n$ , então o sinal  $H_r$  depende de  $N$  se  $r$  é ímpar e não depende de  $N$  se  $r$  é par. Este fato decorre da definição de  $S_r$  e do fato dos sinais das curvaturas principais mudarem quando a direção de  $N$  é trocada, ou seja, se  $\sum_{i_1 < \dots < i_r} \lambda_{i_1} \cdot \dots \cdot \lambda_{i_r}$  é positivo para o campo de vetores  $N$ , então trocada a direção de  $N$  temos que  $\sum_{i_1 < \dots < i_r} \lambda_{i_1} \cdot \dots \cdot \lambda_{i_r}$  se torna negativo quando  $r$  é ímpar e o sinal não se altera se  $r$  é par

**Lema 2.2.1.** *Seja  $\psi : \Sigma^n \rightarrow \mathbb{H}^{n+1}$  uma hipersuperfície two-sided em  $\mathbb{H}^{n+1}$ . Se  $H_2 > 0$  em  $\Sigma^n$ , então  $L_1$  é elíptica ou, equivalentemente,  $P_1$  é positiva-definida (para uma escolha apropriada da orientação  $N$ ).*

*Demonstração.* Como  $L_1$  é elíptico se, e somente se,  $P_1$  é positivo-definido, iremos mostrar que esta última propriedade é válida.

Como por hipótese  $H_2 > 0$  e pela Proposição 1.3.1  $H_1^2 \geq H_2$ , concluímos que  $H_1 > 0$ . Assim,  $H_1 : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função que não se anula e, sendo  $\Sigma$  conexa,  $H_1$  tem o mesmo sinal em  $\Sigma$ .

Portanto, escolhendo  $N$  de maneira que  $H_1$  seja positiva, concluímos que  $S_1 = mH_1 > 0$ . Além disso, como por hipótese  $S_2 > 0$  e vale a desigualdade  $S_1^2 = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 + 2S_2 > \lambda_i^2$ , concluímos que  $S_1 > \lambda_i$ , para todo  $i \in \{1, \dots, n\}$ .

Assim, pela Proposição 1.3.1, temos que  $S_1(A_i) = \frac{\partial S_2}{\partial \lambda_i} = S_1 - \lambda_i > 0$ , ou seja, como  $P(E_i) = S_1(A_i)E_i$ , concluímos que  $P_1$  é positiva-definida, pois  $\langle P(E_i), E_i \rangle = S_1(A_i) > 0$ , para todo  $i \in \{1, \dots, n\}$ .  $\square$

O próximo lema, que pode ser encontrado em [4] na Proposição 3.2, nos diz sob quais condições o operador  $L_r$  é elíptico. Com este lema obtemos o corolário seguinte que pode ser visto em [1] no Lema 2.

**Lema 2.2.2.** *Seja  $\overline{M}^{n+1}$  uma variedade Riemanniana  $(n+1)$ -dimensional orientável e  $\Sigma^n$  uma variedade Riemanniana  $n$ -dimensional orientável e conexa. Suponha que  $\psi : \Sigma \rightarrow \overline{M}$  é uma imersão isométrica com  $H_r > 0$  para algum  $r \in \{1, \dots, n\}$ . Se existe um ponto  $p \in \Sigma$  tal que todas as curvaturas principais em  $p$  são não-negativas, então  $L_k$  é elíptico para todo  $k \in \{1, \dots, r-1\}$ .*

*Demonstração.* Mais uma vez, para mostrarmos que  $L_k$  é elíptico iremos mostrar que  $P_k$  é positivo-definido,  $k \in \{1, \dots, r-1\}$ , ou seja,  $S_k(A_i) > 0$  em  $\Sigma$  para todo  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Também, a partir de agora, iremos considerar no decorrer desta demonstração que  $k \in \{1, \dots, r-1\}$  e  $i \in \{1, \dots, n\}$ .

Como por hipótese  $S_r > 0$  e todas as curvaturas principais de  $\psi$  em  $p$  são não-negativas, temos, pela definição de  $S_r$ , que ao menos  $r$  curvaturas principais são positivas, pois caso contrário teríamos  $\lambda_{i_1} \cdot \dots \cdot \lambda_{i_r} = 0$ , o que implicaria  $S_r = 0$ . Sem perda de generalidade iremos supor que  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  são positivas.

Consequentemente, veja que, em  $p$ ,  $S_k(A_i) > 0$ , pois

$$S_k(A_i) = \sum_{\substack{i_1 < \dots < i_r \\ i_1, \dots, i_r \neq i}} \lambda_{i_1} \cdot \dots \cdot \lambda_{i_r},$$

logo se  $\lambda_i > 0$ , ainda restam  $r-1$  curvaturas principais positivas e, sendo  $k \leq r-1$ , concluímos que  $S_k(A_i) > 0$ . Assim, pela continuidade de  $S_k(A_i) : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ , existe uma bola aberta  $B(p) \subset \Sigma$  centrada em  $p$ , tal que  $S_k(A_i) > 0$  em  $B(p)$ .

Portanto, dado  $q \in \Sigma$ , como  $\Sigma$  é conexa, existe um caminho,  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \Sigma$ , em  $\Sigma$  ligando  $p$  a  $q$ , tal que  $\gamma(0) = p$  e  $\gamma(1) = q$ . Defina  $J = \{t \in [0, 1] \mid S_k(A_i) > 0 \text{ em } \gamma(t)\}$  e

seja  $t_0 = \sup J$ . Veja que como  $S_k(A_i) > 0$  em  $p$ , então  $t_0 > 0$ , logo, por continuidade, temos que ter  $S_k(A_i) \geq 0$  em  $t_0$ .

Nós iremos mostrar que  $S_k(A_i) > 0$  em  $t_0$ , conseqüentemente,  $t_0 \in J$ . Para isso, primeiro iremos mostrar que  $S_{r-1}(A_i) > 0$  em  $t_0$ . De fato, se não acontece que  $S_{r-1}(A_i) > 0$  em  $t_0$ , então existe  $i \in \{1, \dots, n\}$ , tal que  $S_{r-1}(A_i) = 0$  em  $t_0$ . Para este  $i$ , é fácil verificar que podemos escrever  $S_r = \lambda_i S_{r-1}(A_i) + S_r(A_i)$ , logo  $S_r(A_i) = S_r > 0$  em  $t_0$ . Então, em  $t_0$ ,  $S_k(A_i) \geq 0$  e  $S_r(A_i) > 0$ , portanto, pela Proposição 1.3.2, temos a seguinte desigualdade:

$$H_1(A_i) \geq H_2^{\frac{1}{2}}(A_i) \geq \dots \geq H_{r-1}^{\frac{1}{r-1}}(A_i) \geq H_r^{\frac{1}{r}}(A_i) > 0,$$

ou seja,  $H_{r-1}^{\frac{1}{r-1}}(A_i) > 0$ , isto é,  $S_{r-1}(A_i) > 0$ , em  $t_0$ , o que é uma contradição.

Assim,  $S_{r-1}(A_i) > 0$  em  $t_0$  e como  $H_1(A_i) \geq H_2^{\frac{1}{2}}(A_i) \geq \dots \geq H_{r-1}^{\frac{1}{r-1}}(A_i) > 0$ , concluímos que  $S_k(A_i) > 0$ , em  $t_0$ , logo  $t_0 \in J$ .

Supondo que  $t_0 < 1$ , então existe uma bola  $B(\gamma(t_0))$  centrada em  $\gamma(t_0)$  tal que  $S_k(A_i) > 0$  em  $B(\gamma(t_0))$ . Logo existe  $t_1 > t_0$ , tal que  $S_k(A_i) > 0$  em  $t_1$ , ou seja,  $t_1 \in J$ , o que contaria  $t_0 = \sup J$ . Assim,  $t_0 = 1$ , e concluímos que  $S_k(A_i) > 0$  em  $q$ , o que significa que  $P_k$  é positiva-definida, pois  $P_k(E_i) = S_k(E_i)E_i$ .  $\square$

**Observação 2.2.1.** Na demonstração do Lema acima, usamos que  $S_r = \lambda_i S_{r-1}(A_i) + S_r(A_i)$ . Este fato decorre do seguinte cálculo:

$$\begin{aligned} \lambda_i S_{r-1}(A_i) + S_r(A_i) &= \lambda_i \sum_{\substack{i_1 < \dots < i_r \\ i_1, \dots, i_r \neq i}} \lambda_{i_1} \cdot \dots \cdot \lambda_{i_{r-1}} + \sum_{\substack{i_1 < \dots < i_r \\ i_1, \dots, i_r \neq i}} \lambda_{i_1} \cdot \dots \cdot \lambda_{i_r} \\ &= \sum_{i_1 < \dots < i_r} \lambda_{i_1} \cdot \dots \cdot \lambda_{i_r} \\ &= S_r. \end{aligned}$$

Com o lema acima e observando que um ponto elíptico  $p \in \Sigma^n$  é um ponto onde todas as curvaturas principais são positivas, obtemos o corolário abaixo.

**Corolário 2.2.1.** *Seja  $\psi : \Sigma^n \rightarrow \mathbb{H}^{n+1}$  uma hipersuperfície two-sided em  $\mathbb{H}^{n+1}$ . Se existe um ponto elítico de  $\Sigma^n$ , com respeito a uma escolha apropriada da orientação  $N$ , e  $H_{r+1} > 0$  em  $\Sigma^n$ , com  $2 \leq r \leq n - 1$ , então para todo  $1 \leq k \leq r$  o operador  $L_k$  é elítico ou,*

equivalentemente,  $P_k$  é positiva-definida (para uma escolha apropriada da orientação  $N$ , se  $k$  é ímpar).

No próximo lema, que pode ser visto no Lema 5.4 de [11], iremos apresentar condições para que uma hipersuperfície  $\Sigma^n$  de  $\overline{M}^{n+1}$  possua um ponto elíptico, mas antes precisamos destacar alguns pontos importantes.

Como pode ser visto em [11], dizemos que o campo de vetores  $V$  em  $\overline{M}^{n+1}$  é conforme quando a derivada de Lie da métrica  $\bar{g}$  de  $\overline{M}^{n+1}$  com respeito a  $V$  satisfaz:

$$\mathcal{L}_V \bar{g} = 2\phi \bar{g}, \quad (2.9)$$

para alguma função suave  $\phi \in C^\infty(\overline{M})$ . Em outras palavras,

$$\bar{g}(\bar{\nabla}_X V, Y) + \bar{g}(X, \bar{\nabla}_Y V) = 2\phi \bar{g}(X, Y), \quad (2.10)$$

para todo  $X, Y \in \mathfrak{X}(\overline{M})$ . Veja que, pela equação anterior, a função  $\phi$  pode ser caracterizada da seguinte forma:

$$\phi = \frac{1}{n+1} \overline{div} V. \quad (2.11)$$

A equação acima se justifica pois

$$\overline{div} V = \sum_{i=1}^{n+1} \bar{g}(\bar{\nabla}_{E_i} V, E_i) = \sum_{i=1}^{n+1} 2\phi \bar{g}(E_i, E_i) - \sum_{i=1}^{n+1} \bar{g}(E_i, \bar{\nabla}_{E_i} V),$$

o que implica que  $2\overline{div} V = 2(n+1)\phi$ , ou seja,  $\phi = \frac{1}{n+1} \overline{div} V$ .

Um caso particular de um campo de vetores conforme ocorre quando é satisfeita a seguinte condição:

$$\bar{\nabla}_X V = \phi X, \quad (2.12)$$

para todo  $X \in \mathfrak{X}(\overline{M})$ . Neste caso dizemos que o campo  $V$  é fechado.

Por último, como pode ser visto na Equação 4.3 de [11], dados  $X, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma)$ ,  $V \in \mathfrak{X}(\overline{M})$

e  $N \in \mathfrak{X}(\Sigma)^\perp$ , temos que

$$\begin{aligned}
 \bar{g}(\nabla_X V^\top, Y) + \bar{g}(X, \nabla_Y V^\top) &= \bar{g}(\bar{\nabla}_X V^\top - \langle A(X), K^\top \rangle N, Y) + \bar{g}(X, \bar{\nabla}_Y V^\top - \langle A(Y), K^\top \rangle N) \\
 &= \bar{g}(\bar{\nabla}_X (V - \bar{g}(V, N)N), Y) + \bar{g}(X, \bar{\nabla}_Y (V - \bar{g}(V, N)N)) \\
 &= \bar{g}(\bar{\nabla}_X V, Y) - \bar{g}(V, N)\bar{g}(\bar{\nabla}_X N, Y) + \bar{g}(X, \bar{\nabla}_Y V) \\
 &\quad - \bar{g}(V, N)\bar{g}(X, \bar{\nabla}_Y N) \\
 &= \bar{g}(\phi X, Y) - \bar{g}(V, N)\bar{g}(-A(X), Y) + \bar{g}(X, \phi Y) \\
 &\quad - \bar{g}(V, N)\bar{g}(X, -A(Y)) \\
 &= 2\phi\bar{g}(X, Y) + 2\bar{g}(V, N)\bar{g}(A(X), Y),
 \end{aligned} \tag{2.13}$$

onde usamos que  $V^\top = V - \bar{g}(V, N)N$  na primeira igualdade e na última igualdade usamos que  $A$  é autoadjunta.

**Lema 2.2.3.** *Seja  $\bar{M}^{n+1}$  uma variedade Riemanniana munida com um campo de vetores conforme fechado completo  $V$  e  $\Sigma^n$  seja uma hipersuperfície two-sided completa em  $\bar{M}^{n+1}$ . Suponha que o divergente de  $V$  em  $\bar{M}^{n+1}$ , denotado por  $\bar{\text{div}}V$ , não se anula em nenhum ponto de  $\Sigma^n$  onde a restrição de  $|V|$  sobre  $\Sigma^n$ , denotado por  $|V|_\Sigma$ , atinge um máximo local. Então existe um ponto elíptico em  $\Sigma^n$ .*

*Demonstração.* Suponha que existe um ponto  $p \in \Sigma$  onde a função  $|V|_\Sigma$ , ou equivalentemente a função  $f = \bar{g}(V, V)|_\Sigma$ , atinge um máximo local, com  $\bar{\text{div}}V_p \neq 0$  (ou equivalentemente  $\phi(p) \neq 0$ ). Portanto, (cf. Teorema 5 do capítulo 3 de [24])

$$\nabla f(p) = 0 \quad \text{e} \quad \text{Hess}f(v, v) < 0,$$

para todo  $v \in T_p\Sigma$ , com  $v \neq 0$ . Nós queremos calcular o gradiente da função  $f$ , para isso observamos que dado  $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$ , então:

$$\bar{g}(\nabla f, X) = X(f) = X\bar{g}(V, V)|_\Sigma = 2\bar{g}(\bar{\nabla}_X V, V)|_\Sigma = 2\bar{g}(\phi X, V)|_\Sigma = 2\phi\bar{g}(V, X)|_\Sigma,$$

ou seja,  $\nabla f = 2\phi V^\top$ . Além disso, dado  $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$ , temos que:

$$\begin{aligned} \text{Hess}f(X, X) &= \bar{g}(\nabla_X \nabla f, X) = \bar{g}(\nabla_X (2\phi V^\top), X) = 2\phi \bar{g}(\nabla_X V^\top, X) + 2X(\phi) \bar{g}(V^\top, X) \\ &= 2\phi^2 |X|^2 + 2\phi \bar{g}(V, N) \bar{g}(A(X), X) + 2X(\phi) \bar{g}(V^\top, X), \end{aligned}$$

onde usamos que  $\phi \bar{g}(\nabla_X V^\top, X) = \phi |X|^2 + \bar{g}(V, N) \bar{g}(A(X), X)$ , equação esta que decorre da Equação 2.13. Portanto, no ponto  $p \in \Sigma$ , temos que  $V^\top(p) = 0$ , conseqüentemente  $\bar{g}(V, N)(p) = \sqrt{f(p)}$ . Assim, obtemos que:

$$\frac{1}{2} \text{Hess}f(v, v) = \phi^2(p) |v|^2 + \phi \sqrt{f(p)} \bar{g}(A(v), v) < 0,$$

para todo  $v \in T_p \Sigma$ . Tomando  $\{E_1, \dots, E_n\}$  a base de direções principais no ponto  $p$ , concluímos que:

$$\frac{1}{2} \text{Hess}f(E_i, E_i) = \phi(p) \left( \phi(p) + \sqrt{f(p)} \lambda_i(p) \right) < 0, \quad \forall i \in \{1, \dots, n\},$$

o que implica que  $\lambda_i(p) < \frac{-\phi(p)}{\sqrt{f(p)}} < 0$ , quando  $\overline{\text{div}}V_p$  (ou equivalentemente  $\phi(p)$ ) é positivo; e  $\lambda_i(p) > \frac{-\phi(p)}{\sqrt{f(p)}} > 0$ , quando  $\overline{\text{div}}V_p$  (ou equivalentemente  $\phi(p)$ ) é negativo. Ou seja, o ponto  $p \in \Sigma$  é elíptico.  $\square$

Finalizamos esta seção apresentando o próximo lema, cuja demonstração pode ser consultada na Proposição 2.1 de [3]. Como podemos ver em [1], Yau generalizou um resultado anterior de Gaffney e estabeleceu a seguinte versão do Teorema de Stokes em uma variedade Riemanniana  $\Sigma^n$  completa, não compacta e  $n$ -dimensional. Se  $\omega \in \Omega^{n-1}(\Sigma)$  é uma forma  $(n-1)$ -diferencial integrável em  $\Sigma^n$ , ou seja,  $|\omega| \in \mathcal{L}^1(\Sigma)$ , então existe uma sequência  $B_i$  de domínios em  $\Sigma^n$  tais que  $B_i \subset B_{i+1}$ ,  $\Sigma^n = \cup_{i \geq 1} B_i$  e

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} \int_{B_i} d\omega = 0. \quad (2.14)$$

Supondo que  $\Sigma^n$  é orientada pelo elemento de volume  $d\Sigma$  e seja  $\mathcal{L}^1(\Sigma)$  o espaço das funções Lebesgue integrável em  $\Sigma^n$ . Se  $\omega = \iota_X d\Sigma$  é uma contração de  $d\Sigma$  na direção de um campo

de vetores  $X$  em  $\Sigma^n$ , então Caminha obteve a seguinte consequência do resultado de Yau.

**Lema 2.2.4.** *Seja  $X$  um campo de vetores em uma variedade Riemanniana orientada completa  $n$ -dimensional  $\Sigma^n$ , tal que  $\operatorname{div} X$  não muda de sinal em  $\Sigma^n$ . Se  $|X| \in \mathcal{L}^1(\Sigma)$ , então  $\operatorname{div} X = 0$ .*

*Demonstração.* Suponha, sem perda de generalidade, que  $\operatorname{div} X \geq 0$  em  $\Sigma^n$ . Se  $\{e_1, \dots, e_n\}$  é uma base ortonormal em um aberto  $U \subset \Sigma$ , com base dual  $\{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ , então

$$\iota_X d\Sigma = (-1)^{n-1} \langle X, e_i \rangle \omega_1 \wedge \dots \wedge \hat{\omega}_i \wedge \dots \wedge \omega_n.$$

Desde que as  $(n-1)$ -formas  $\omega_1 \wedge \dots \wedge \hat{\omega}_i \wedge \dots \wedge \omega_n$  são ortonormais em  $\Omega^{n-1}(\Sigma)$ , temos que

$$|\omega|^2 = \sum_{i=1}^n \langle X, e_i \rangle^2 = |X|^2.$$

Então  $|\omega| \in \mathcal{L}^1(\Sigma)$  e  $d\omega = d(\iota_X d\Sigma) = (\operatorname{div} X) d\Sigma$ .

Sendo  $B_i$  definido como na discussão acima, temos que

$$\int_{B_i} (\operatorname{div} X) d\Sigma = \int_{B_i} d\omega \longrightarrow 0, \quad \text{quando } i \rightarrow +\infty,$$

assim, como  $\operatorname{div} X \geq 0$  em  $\Sigma$ , concluímos que  $\operatorname{div} X = 0$  em  $\Sigma$ . □

# Capítulo 3

## Caracterizando Horoesferas de $\mathbb{H}^{n+1}$

Neste capítulo apresentaremos os resultados principais obtidos em [1], no qual Aquino, Baltazar e de Lima estabelecem novos resultados de caracterização de horoesferas do espaço hiperbólico sob certas condições apropriadas no comportamento das curvaturas médias de ordem superior. Também apresentaremos, neste capítulo, os exemplos mostrados por eles e que são de fundamental importância para concluir a necessidade das principais hipóteses dos resultados.

### 3.1 Conceitos Iniciais

As horoesferas são hipersuperfícies do espaço hiperbólico que são planas, totalmente umbílicas, com curvatura média constante e completas. Assim como López e Montiel fizeram em [8], iremos caracterizar uma horoesfera em  $\mathbb{H}^{n+1}$  como a interseção entre  $\mathbb{H}^{n+1}$  e um hiperplano afim tipo-luz  $\mathbb{P}^{n+1}$  de  $\mathbb{L}^{n+2}$ , ou seja, hiperplanos da seguinte forma:  $\mathbb{P}^{n+1} = \{p \in \mathbb{L}^{n+2} \mid \langle p, a \rangle = k\}$ , onde  $a \in \mathbb{L}^{n+2}$  é um vetor tipo-luz e  $\tau > 0$ . Assim, as horoesferas são conjuntos da seguinte forma:

$$L_\tau = \{p \in \mathbb{H}^{n+1} \mid \langle p, a \rangle = \tau\}. \quad (3.1)$$

Observe que quando fixamos o vetor  $a$  e variamos  $\tau \in \mathbb{R}_+$ , obtemos uma folheação com-

pleta de  $\mathbb{H}^{n+1}$  por meio de horoesferas. Além disso, não é difícil ver que

$$\xi(p) = -p - \frac{1}{\tau}a \quad (3.2)$$

é um campo de vetores do tipo-espaço normal e unitário em  $L_\tau$  com relação ao qual a horoesfera tem curvatura média constante igual a 1. De fato, dado  $p \in L_\tau$ , temos que

$$\begin{aligned} \langle \xi(p), \xi(p) \rangle &= \left\langle -p - \frac{1}{\tau}a, -p - \frac{1}{\tau}a \right\rangle = \langle p, p \rangle + \frac{2}{\tau} \langle p, a \rangle + \frac{1}{\tau^2} \langle a, a \rangle = -1 + 2 = 1; \\ \langle \xi(p), p \rangle &= \left\langle -p - \frac{1}{\tau}a, p \right\rangle = -\langle p, p \rangle - \frac{1}{\tau} \langle a, p \rangle = 1 - 1 = 0. \end{aligned}$$

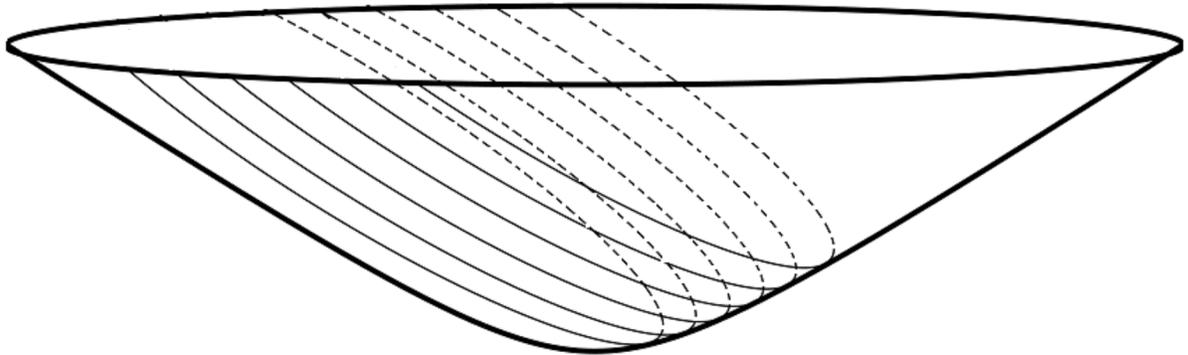


Figura 3.1: Espaço hiperbólico folheado por horoesferas.

Além disso, tomando  $X \in \mathfrak{X}(L_\tau)$ , temos que

$$A_{\xi(p)}(X) = -\bar{\nabla}_X \xi(p) = -\nabla_X^0 \xi(p) = -\nabla_X^0 \left( -p - \frac{1}{\tau}a \right) = \nabla_X^0 p + \frac{1}{\tau} \nabla_X^0 a = \nabla_X^0 p = X,$$

ou seja,  $A_{\xi(p)} = I$ , onde  $I$  é a identidade no espaço tangente de  $L_\tau$ . Assim, concluímos que  $H = \frac{1}{n} \text{tr}(A_{\xi(p)}) = \frac{1}{n} \text{tr}(I) = 1$ , como queríamos. Além disso, a equação acima também implica que as horoesferas são totalmente umbílicas (cf. Exercício 6 de do capítulo 8 de [17]).

Iremos fixar o vetor  $a \in \mathbb{L}^{n+2}$  e no que segue vamos considerar duas funções particulares que estão naturalmente relacionadas com uma hypersuperfície two-sided  $\psi : \Sigma^n \rightarrow \mathbb{H}^{n+1}$ . A

primeira delas é a função altura com relação ao vetor  $a$ , definida por

$$\begin{aligned} l_a : \Sigma^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ p &\longmapsto \langle \psi(p), a \rangle, \end{aligned} \tag{3.3}$$

enquanto a segunda delas é a função ângulo com relação ao vetor  $a$ , definida por

$$\begin{aligned} f_a : \Sigma^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ p &\longmapsto \langle N(p), a \rangle. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Dado  $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$ , como a conexão  $\nabla^0$  é compatível com a métrica, concluímos que:

$$\langle \nabla l_a, X \rangle = X(l_a) = X\langle \psi, a \rangle = \langle \nabla_X^0 \psi, a \rangle + \langle \psi, \nabla_X^0 a \rangle = \langle X(\psi), a \rangle = \langle X, a \rangle = \langle X, a^\top \rangle,$$

de onde concluímos que  $\nabla l_a = a^\top$ . Da mesma maneira concluímos que  $\nabla f_a = -A(a^\top)$ , pois

$$\begin{aligned} \langle \nabla f_a, X \rangle &= X(f_a) = X\langle N, a \rangle = \langle \nabla_X^0 N, a \rangle + \langle N, \nabla_X^0 a \rangle = \langle \bar{\nabla}_X N, a \rangle = \langle -A(X), a \rangle \\ &= \langle -A(X), a^\top \rangle = \langle X, -A(a^\top) \rangle. \end{aligned}$$

Veja que, para cada  $p \in \mathbb{L}^{n+2}$ , podemos decompor o espaço de Minkowski da seguinte forma,  $\mathbb{L}^{n+2} = T_p \Sigma^n \oplus \text{span}\{N_p, \psi(p)\}$ . Assim, o vetor  $a^\top$  é a projeção ortogonal de  $a$  sobre o fibrado tangente  $T\Sigma^n$ , assim vamos adotar a seguinte definição para  $a^\top$ :

$$a^\top = a - \langle N, a \rangle N + \langle \psi, a \rangle \psi = a - f_a N + l_a \psi. \tag{3.5}$$

Finalmente, no que segue, iremos usar as seguintes fórmulas clássicas, decorrentes dos trabalhos de Reilly e Rosenberg (cf. [14] e Teorema 5.1 de [15]), para exprimir o operador  $L_r$  atuando sobre as funções altura e ângulo em uma hipersuperfície Riemanniana. Assim, para o caso do espaço hiperbólico, temos que:

$$L_r(l_a) = c_r(H_{r+1}f_a + H_r l_a); \tag{3.6}$$

$$L_r(f_a) = -\left(\frac{n}{r+1}c_r H H_{r+1} - c_r H_{r+2}\right) f_a - c_r H_{r+1} l_a - \frac{c_r}{r+1} \langle \nabla H_{r+1}, a^\top \rangle, \tag{3.7}$$

$$\text{onde } c_r = (r+1) \binom{n}{r+1} = (n-r) \binom{n}{r}.$$

## 3.2 Teoremas de Caracterização de Horoesferas e Exemplos

Em [2], os autores obtiveram um resultado para o caso de hipersuperfícies  $\Sigma^n$  imersas em uma slab de  $\mathbb{H}^{n+1}$  determinada por um vetor tipo-luz  $a \in \mathbb{L}^{n+2}$ , com  $|a^\top| \in \mathcal{L}^1(\Sigma)$  e tal que a função curvatura média  $H$  satisfaz  $-1 \leq H \leq 1$ . Quando dizemos que  $\Sigma^n$  está imersa em uma slab de  $\mathbb{H}^{n+1}$  significa que a imagem da imersão isométrica  $\psi : \Sigma^n \rightarrow \mathbb{H}^{n+1}$  está entre duas horoesferas, ou seja, existe um vetor tipo-luz  $a \in \mathbb{L}^{n+2}$  e  $\tau_1, \tau_2 > 0$ , tais que a função altura  $l_a = \langle \psi, a \rangle$  satisfaz  $\tau_1 < l_a(p) < \tau_2$ , para todo  $p \in \Sigma^n$ .

Mais precisamente, o resultado obtido no Teorema 3.5 de [2] foi o seguinte:

**Teorema 3.2.1.** *(Aquino-de Lima): Seja  $\psi : \Sigma^n \rightarrow \mathbb{H}^{n+1}$  uma hipersuperfície completa imersa em uma slab de  $\mathbb{H}^{n+1}$  determinada por um vetor do tipo-luz  $a \in \mathbb{L}^{n+2}$  com curvatura média  $-1 \leq H \leq 1$  (não necessariamente constante). Se  $|a^\top| \in \mathcal{L}^1(\Sigma)$ , então  $\Sigma^n$  é uma horoesfera.*

Assim, observando o teorema acima, os autores apresentaram resultados que buscam estender o teorema acima para o contexto de curvatura média de ordens superiores. Portanto, neste sentido segue o próximo teorema.

**Teorema 3.2.2.** *Seja  $\psi : \Sigma^n \rightarrow \mathbb{H}^{n+1}$  uma hipersuperfície two-sided completa de  $\mathbb{H}^{n+1}$  com a segunda forma fundamental limitada. Suponha que, para algum  $1 \leq r \leq n-1$ , a  $r$ -ésima curvatura média  $H_r$  de  $\Sigma^n$  é tal que*

$$0 < H_{r+1} \leq H_r.$$

*Se  $|a^\top| \in \mathcal{L}^1(\Sigma)$  para algum vetor tipo-luz  $a \in \mathbb{L}^{n+2}$ , então  $\Sigma^n$  é uma horoesfera  $L_\tau$  para algum  $\tau > 0$ .*

*Demonstração.* Inicialmente, usando as ideias apresentadas em 1.36, iremos calcular uma expressão para  $L_r(l_a^2)$ . Assim, veja que

$$\begin{aligned}
L_r(l_a^2) &= \text{tr}(P_r \circ \nabla^2 l_a^2) = \sum_{i=1}^n \langle P_r(\nabla^2 l_a^2(E_i)), E_i \rangle = \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{E_i} \nabla l_a^2, P_r(E_i) \rangle \\
&= \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{E_i}(2l_a \nabla l_a), P_r(E_i) \rangle = \sum_{i=1}^n \langle 2l_a \nabla_{E_i} \nabla l_a + 2E_i(l_a) \nabla l_a, P_r(E_i) \rangle \\
&= 2l_a \sum_{i=1}^n \langle P_r(\nabla^2 l_a(E_i)), E_i \rangle + 2 \sum_{i=1}^n \langle P_r(\nabla l_a), E_i(l_a) E_i \rangle \\
&= 2l_a L_r(l_a) + \langle P_r(\nabla l_a), \nabla l_a \rangle,
\end{aligned}$$

onde na quarta igualdade usamos que dados  $f, g \in C^\infty(\Sigma)$ , então  $\nabla(f \cdot g) = f \nabla g + g \nabla f$ .

Agora usando a Equação 3.6, obtemos a seguinte expressão para  $L_r(l_a^2)$ ,

$$L_r(l_a^2) = 2c_r H_{r+1} f_a l_a + 2c_r H_r l_a^2 + 2 \langle P_r(\nabla l_a), \nabla l_a \rangle,$$

onde  $c_r = (n-r) \binom{n}{r}$ . Observe também que

$$c_r \left( \sqrt{H_r} f_a + \frac{H_{r+1}}{\sqrt{H_r}} l_a \right)^2 = c_r H_r f_a^2 + 2c_r H_{r+1} f_a l_a + c_r \frac{H_{r+1}^2}{H_r} l_a^2,$$

de onde concluímos que

$$\begin{aligned}
L_r(l_a^2) &= c_r \left( \sqrt{H_r} f_a + \frac{H_{r+1}}{\sqrt{H_r}} l_a \right)^2 - c_r H_r f_a^2 - c_r \frac{H_{r+1}^2}{H_r} l_a^2 + 2c_r H_r l_a^2 + 2 \langle P_r(\nabla l_a), \nabla l_a \rangle \\
&= c_r \left( \sqrt{H_r} f_a + \frac{H_{r+1}}{\sqrt{H_r}} l_a \right)^2 + c_r H_r (l_a^2 - f_a^2) + c_r \left( H_r - \frac{H_{r+1}^2}{H_r} \right) l_a^2 + 2 \langle P_r(\nabla l_a), \nabla l_a \rangle.
\end{aligned}$$

Como  $a$  é um vetor tipo-luz e  $a = a^\top + f_a N - l_a \psi$ , concluímos que

$$0 = \langle a, a \rangle = \langle a^\top, a^\top \rangle + f_a^2 \langle N, N \rangle + l_a^2 \langle \psi, \psi \rangle = |\nabla l_a|^2 + f_a^2 - l_a^2,$$

ou seja,  $l_a^2 - f_a^2 = |\nabla l_a|^2$ . Voltando para a expressão de  $L_r(l_a^2)$ , obtemos que

$$L_r(l_a^2) = c_r \left( \sqrt{H_r} f_a + \frac{H_{r+1}}{\sqrt{H_r}} l_a \right)^2 + c_r H_r |\nabla l_a|^2 + c_r \left( H_r - \frac{H_{r+1}^2}{H_r} \right) l_a^2 + 2 \langle P_r(\nabla l_a), \nabla l_a \rangle.$$

Como  $2 \langle P_r(\nabla l_a), \nabla l_a \rangle = L_r(l_a^2) - 2l_a L_r(l_a)$ , concluímos que

$$2l_a L_r(l_a) = c_r \left( \sqrt{H_r} f_a + \frac{H_{r+1}}{\sqrt{H_r}} l_a \right)^2 + c_r H_r |\nabla l_a|^2 + c_r \left( H_r - \frac{H_{r+1}^2}{H_r} \right) l_a^2. \quad (3.8)$$

Por outro lado, desde que as horoesferas  $L_r$  folheiam todo o espaço hiperbólico, então para qualquer hipersuperfície  $\Sigma^n$  imersa em  $\mathbb{H}^{n+1}$  temos que a função altura,  $l_a(p) = \langle \psi(p), a \rangle = \tau > 0$ , é estritamente positiva. Visto que  $0 < H_{r+1} \leq H_r$ , concluímos que  $L_r(l_a) \geq 0$  em  $\Sigma^n$ , pois  $H_r - \frac{H_{r+1}^2}{H_r} \geq 0$ . Além disso, como a segunda forma fundamental é limitada e  $|a^\top| \in \mathcal{L}^1(\Sigma)$ , podemos aplicar o Lema 2.2.4, pois  $\text{div}(P_r(a^\top))$  não muda de sinal em  $\Sigma^n$ , visto que  $\text{div}(P_r(a^\top)) = \text{div}(P_r(\nabla l_a)) = L_r(l_a) \geq 0$ , e assim concluímos que  $\text{div}(P_r(a^\top)) = L_r(l_a) = 0$ . Conseqüentemente,  $H_r |\nabla l_a|^2 = 0$ , e como  $H_r > 0$ , concluímos que  $|\nabla l_a|^2 = 0$ , ou ainda,  $\nabla l_a = 0$ . Portanto,  $l_a$  é uma constante positiva em  $\Sigma^n$ , o que implica que  $l_a(p) = \langle \psi(p), a \rangle = \tau > 0$ , ou seja,  $\Sigma^n$  é uma horoesfera de  $\mathbb{H}^{n+1}$ .  $\square$

**Exemplo 3.2.1.** *Considere um inteiro  $k$ , tal que  $0 \leq k < n$ , e defina a função suave  $f : \mathbb{H}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por:*

$$f(p) = p_1^2 + \dots + p_{k+1}^2,$$

onde  $p = (p_1, \dots, p_{n+2})$ . Tomando  $\rho > 0$ , então  $f^{-1}(\rho^2) = \Sigma^n$  não possui pontos críticos com relação ao campo  $\bar{N}(p)$  abaixo, ou seja,  $\rho$  é um valor regular, logo  $\Sigma^n$  é uma hipersuperfície completa, imersa em  $\mathbb{H}^{n+1}$  e orientada pelo campo

$$\bar{N}(p) = \frac{\bar{\nabla} f}{|\bar{\nabla} f|}(p) = \frac{1}{\rho \sqrt{1 + \rho^2}} (\nu(p) + \rho^2 p), \quad (3.9)$$

onde  $\nu(p) = (p_1, \dots, p_{k+1}, 0, \dots, 0)$  e  $\bar{\nabla} f$  é o gradiente de  $f$  em  $\mathbb{H}^{n+1}$ . De fato, considerando

$\bar{f} : \mathbb{L}^{n+2} \rightarrow \mathbb{R}$  a extensão de  $f$  em  $\mathbb{L}^{n+2}$ , dada por  $\bar{f}(p) = \langle \nu(p), p \rangle$ , e  $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{L}^{n+2})$ , então

$$\langle \overline{\nabla} \bar{f}(p), X \rangle = X \langle \nu(p), p \rangle = \langle \nabla_X^0 \nu(p), p \rangle + \langle \nu(p), \nabla_X^0 p \rangle = \langle \nu(X), p \rangle + \langle X, \nu(p) \rangle = 2 \langle \nu(p), X \rangle,$$

ou seja,  $\overline{\nabla} \bar{f}(p) = 2\nu(p)$ , onde  $\overline{\nabla} \bar{f}$  representa o gradiente de  $\bar{f}$  em  $\mathbb{L}^{n+2}$ . Desta forma,

$$\overline{\nabla} \bar{f}(p) = 2\nu(p) + \langle 2\nu(p), p \rangle p,$$

ou seja, o gradiente de  $f$  sobre  $\Sigma^n$  assume a seguinte forma  $\overline{\nabla} \bar{f}(p) = 2\nu(p) + 2\rho^2 p$ , logo

$$\bar{N}(p) = \frac{\overline{\nabla} \bar{f}}{|\overline{\nabla} \bar{f}|} = \frac{2\nu(p) + 2\rho^2 p}{\sqrt{4\rho^2 + 8\rho^4 - 4\rho^4}} = \frac{2\nu(p) + 2\rho^2 p}{\sqrt{4\rho^2(1 + \rho^2)}} = \frac{1}{\rho\sqrt{1 + \rho^2}}(\nu(p) + \rho^2 p).$$

Se  $p = (p_1, \dots, p_{n+2})$  é um ponto de  $\Sigma^n$ , então considere as imersões canônicas

$$\begin{aligned} S^k(\rho) &\hookrightarrow \mathbb{R}^{k+1}; \\ \mathbb{H}^{n-k}(\sqrt{1 + \rho^2}) &\hookrightarrow \mathbb{L}^{n-k+1} \end{aligned}$$

e, tomando a imersão produto, veja que  $\Sigma^n = S^k(\rho) \times \mathbb{H}^{n-k}$ , pois  $p_1^2 + \dots + p_{k+1}^2 = \rho^2$  e  $p_{k+2}^2 + \dots - p_{n+2}^2 = -(\sqrt{1 + \rho^2})^2$ . Além disso, o operador de Weingarten  $A$  com relação ao vetor  $N = -\bar{N}$  tem as seguintes curvaturas principais:

$$\lambda_1 = \dots = \lambda_k = \frac{\sqrt{1 + \rho^2}}{\rho}; \quad \lambda_{k+1} = \dots = \lambda_n = \frac{\rho}{\sqrt{1 + \rho^2}},$$

pois tomando  $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$  podemos escrever  $X = (X_1, X_2)$ , com  $X_1 \in \mathfrak{X}(S^k(\rho))$  e  $X_2 \in$

$\mathfrak{X}(\mathbb{H}^{n-k})$ , logo pela fórmula de Weingarten para hipersuperfícies, temos que

$$\begin{aligned}
 A_N(X) &= -\bar{\nabla}_X(N) = -\nabla_X^0 N \\
 &= \frac{1}{\rho\sqrt{1+\rho^2}} \nabla_{(X_1,0)}^0(\nu(p) + \rho^2 p) + \frac{1}{\rho\sqrt{1+\rho^2}} \nabla_{(0,X_2)}^0(\nu(p) + \rho^2 p) \\
 &= \frac{1}{\rho\sqrt{1+\rho^2}}(\nu(X_1,0) + \rho^2(X_1,0)) + \frac{1}{\rho\sqrt{1+\rho^2}}(\nu(0,X_2) + \rho^2(0,X_2)) \\
 &= \frac{1+\rho^2}{\rho\sqrt{1+\rho^2}}(X_1,0) + \frac{\rho^2}{\rho\sqrt{1+\rho^2}}(0,X_2) \\
 &= \frac{\sqrt{1+\rho^2}}{\rho}(X_1,0) + \frac{\rho}{\sqrt{1+\rho^2}}(0,X_2).
 \end{aligned}$$

Em particular, veja que  $\Sigma^n$  tem a segunda forma fundamental limitada, pois dado  $\rho > 0$ , temos que  $\lambda_i \leq \frac{\sqrt{1+\rho^2}}{\rho}$ , para todo  $1 \leq i \leq n$ .

Agora vamos considerar o caso em que  $k = 1$  e  $1 \leq r \leq n - 1$ . Observe que a  $r$ -ésima curvatura média de  $\Sigma^n$  é dada por:

$$\begin{aligned}
 \binom{n}{r} H_r &= S_r = \sum_{i_1 < \dots < i_r} \lambda_{i_1} \cdot \lambda_{i_2} \cdot \dots \cdot \lambda_{i_{r-1}} + \sum_{\substack{i_1 < \dots < i_r \\ i_1, \dots, i_r \neq 1}} \lambda_{i_1} \cdot \dots \cdot \lambda_{i_r} \\
 &= \binom{n-1}{r-1} \frac{\sqrt{1+\rho^2}}{\rho} \left( \frac{\rho}{\sqrt{1+\rho^2}} \right)^{r-1} + \binom{n-1}{r} \left( \frac{\rho}{\sqrt{1+\rho^2}} \right)^r.
 \end{aligned}$$

Portanto, denotando  $\alpha = \frac{\sqrt{1+\rho^2}}{\rho}$ , temos que

$$\binom{n}{r} H_r = \frac{1}{\alpha^{r-1}} \left[ \binom{n-1}{r-1} \alpha + \binom{n-1}{r} \frac{1}{\alpha} \right],$$

de onde concluímos que

$$\begin{aligned}
 H_r &= \frac{1}{\alpha^{r-1}} = \left[ \frac{(n-1)!}{(r-1)!(n-r)!} \frac{r!(n-r)!}{n!} \alpha + \frac{(n-1)!}{r!(n-r-1)!} \frac{r!(n-r)!}{n!} \frac{1}{\alpha} \right] \\
 &= \frac{1}{n\alpha^{r-1}} \left[ r\alpha + \frac{n-r}{\alpha} \right] > 0.
 \end{aligned}$$

De maneira análoga, também concluímos que  $H_{r+1} = \frac{1}{n\alpha^r} \left[ (r+1)\alpha + \frac{n-r-1}{\alpha} \right] > 0$ ,  
 logo

$$\begin{aligned}
 H_r - H_{r+1} &= \frac{1}{n\alpha^{r+1}} [r\alpha^3 + (n-r)\alpha - (r+1)\alpha^2 - (n-r-1)] \\
 &= \frac{1}{n\alpha^{r+1}} [r\alpha^2(\alpha-1) - r(\alpha-1) + n(\alpha-1) + 1 - \alpha^2] \\
 &= \frac{r}{n\alpha^{r+1}} (\alpha-1) \left[ \alpha^2 - 1 + \frac{n}{r} + \frac{1}{r} + \frac{\alpha}{r} \right] \\
 &= \frac{r}{n\alpha^{r+1}} (\alpha-1) \left[ \alpha \left( \alpha + \frac{1}{r} \right) + \frac{n+1-r}{r} \right] \\
 &> 0,
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

pois  $\alpha > 1$ . Assim, concluímos que  $0 < H_{r+1} < H_r$ , para todo  $1 \leq r \leq n-1$ . Finalmente, observando a Equação 3.8 vemos que se  $L_r(l_a) = 0$ , para algum vetor tipo-luz  $a \in \mathbb{L}^{n+2}$ , então  $H_r = H_{r+1}$ , porém como neste exemplo temos  $H_r > H_{r+1}$ , concluímos que  $L_r(l_a) > 0$  e, conseqüentemente,  $|a^\top| \notin \mathcal{L}^1(\Sigma)$ , para todo vetor tipo-luz  $a \in \mathbb{L}^{n+2}$ .

Portanto, este exemplo mostra a importância da hipótese  $|a^\top| \in \mathcal{L}^1(\Sigma)$ , pois  $\Sigma^n$  cumpre todas as hipóteses do teorema anterior (com exceção desta última) e não é uma horoesfera.

Antes do próximo teorema nós precisamos esclarecer que uma hipersuperfície  $\Sigma^n$  imersa em  $\mathbb{H}^{n+1}$  ser localmente tangente abaixo de uma horoesfera  $L_\tau$  de  $\mathbb{H}^{n+1}$  significa que existe um ponto  $p \in \Sigma^n$  e uma vizinhança  $\mathcal{U} \subset \Sigma^n$  de  $p$  tal que  $l_a(p) = \tau$  e  $l_a(q) \leq \tau$ , para todo  $q \in \mathcal{U}$ .

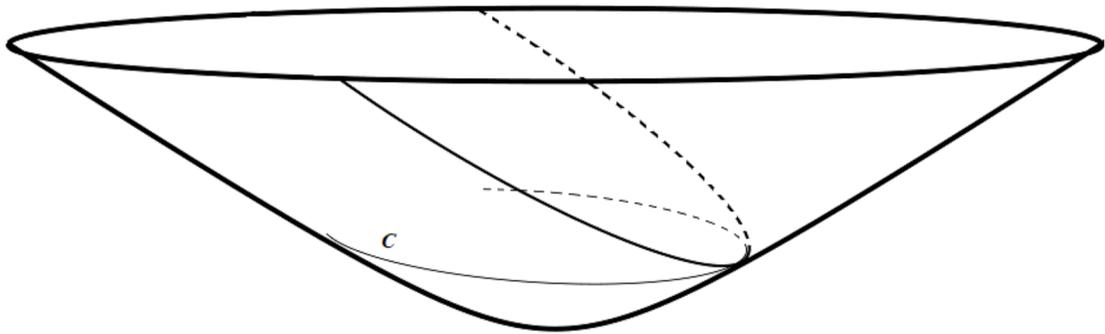


Figura 3.2: A curva  $C$  acima é localmente tangente abaixo da horoesfera  $L_\tau$  de  $\mathbb{H}^3$ .

**Teorema 3.2.3.** *Seja  $\psi : \Sigma^n \rightarrow \mathbb{H}^{n+1}$  uma hipersuperfície two-sided completa de  $\mathbb{H}^{n+1}$  com a segunda forma fundamental limitada. Suponha que, para algum  $1 \leq r \leq n$ , a  $r$ -ésima curvatura média  $H_r$  de  $\Sigma^n$  satisfaz*

$$0 < H_r \leq 1.$$

*Se  $|a^\top| \in \mathcal{L}^1(\Sigma)$  para algum vetor tipo-luz  $a \in \mathbb{L}^{n+2}$ , e  $\Sigma^n$  é localmente tangente abaixo da horoesfera  $L_\tau$ , então  $\Sigma^n$  é a horoesfera  $L_\tau$ .*

*Demonstração.* Considere o campo de vetores definido em  $\mathbb{H}^{n+1}$  por

$$V(p) = a + \langle p, a \rangle p.$$

Observe que  $V$  é um campo de vetores conforme fechado completo, pois dado  $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{H}^{n+1})$ , temos, pela Equação 2.6, que

$$\begin{aligned} \overline{\nabla}_X V &= \nabla_X^0 V + \langle A_p(X), V \rangle p = \langle \nabla_X^0 p, a \rangle p + \langle p, a \rangle \nabla_X^0 p - \langle X, a + \langle p, a \rangle p \rangle p \\ &= \langle X, a \rangle p + \langle p, a \rangle - \langle X, a \rangle p = \langle p, a \rangle X. \end{aligned}$$

Além disso,  $\overline{\text{div}} V_p = (n+1)\langle p, a \rangle$  e  $|V_p|_\Sigma = \langle \psi(p), a \rangle = l_a(p)$ ,  $p \in \Sigma^n$ . Supondo que  $\Sigma^n$  é localmente tangente abaixo de uma horoesfera  $L_\tau$ , temos que  $|V|_\Sigma$  atinge um máximo local em  $\Sigma^n$ , pois existe um ponto  $p \in \Sigma^n$  e uma vizinhança  $U \subset \Sigma^n$  de  $p$ , tal que  $l_a(q) = |V_q|_\Sigma \leq |V_p|_\Sigma = l_a(p)$ , para todo  $q \in U$ . Visto que  $|V|_\Sigma = l_a > 0$  em  $\Sigma^n$ , podemos aplicar o Lema 2.2.3 e garantir a existência de um ponto elíptico em  $\Sigma^n$ . Além disso, como estamos supondo que  $H_r > 0$ , segue do Lema 2.2.1 que  $P_j$  é positiva-definida e, conseqüentemente,  $H_j$  é positiva para todo  $j \in \{1, \dots, r-1\}$ .

Agora definimos o campo de vetores em  $\Sigma^n$  a seguir:

$$X = \sum_{i=0}^{r-1} \frac{1}{c_i} P_i(\nabla l_a),$$

onde  $c_i = (i+1) \binom{n}{i+1}$ . Observe que:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} X &= \sum_{i=0}^{r-1} \frac{1}{c_i} \operatorname{div}(P_i(\nabla l_a)) = \sum_{i=0}^{r-1} \frac{1}{c_i} L_i(l_a) = \sum_{i=0}^{r-1} \frac{1}{c_i} c_i (H_{i+1} f_a + H_i l_a) \\ &= (H f_a + l_a) + (H_2 f_a + H l_a) + \dots + (H_r f_a + H_{r-1} l_a) \\ &= l_a + H(f_a + l_a) + \dots + H_{r-1}(f_a + l_a) + H_r f_a \geq (H + \dots + H_r)(f_a + l_a), \end{aligned}$$

onde a última desigualdade decorre do fato que  $0 < H_r \leq 1$  e  $l_a > 0$  em  $\Sigma^n$ . Por outro lado, como  $|\nabla l_a|^2 + f_a^2 - l_a^2 = 0$ , concluímos que

$$l_a^2 - f_a^2 = (l_a + f_a)(l_a - f_a) \geq 0,$$

ou seja,  $l_a + f_a \geq 0$ , pois de outra forma teríamos  $l_a + f_a < 0$  e  $l_a - f_a < 0$ , onde a última desigualdade implica que  $f_a > 0$ , pois  $l_a > 0$ , e a primeira desigualdade implica que  $l_a < 0$ , o que é absurdo. Portanto, como  $H_j$  é positivo para todo  $1 \leq j \leq r$ , temos que  $\operatorname{div} X \geq 0$ . Além disso, como a segunda forma fundamental de  $\Sigma^n$  é limitada concluímos que dado  $Y \in \mathfrak{X}(\Sigma)$ , então  $|A(Y)| \leq M|Y|$ , para algum  $M > 0$  e  $A : \mathfrak{X}(\Sigma) \rightarrow \mathfrak{X}(\Sigma)$  o operador de Weingarten em  $\Sigma^n$ . Assim,

$$|X| = \sum_{i=0}^{r-1} \frac{1}{c_i} |P_i(\nabla l_a)| \leq M|\nabla l_a|,$$

para algum  $M > 0$ . Como  $|\nabla l_a| = |a^\top| \in \mathcal{L}^1(\Sigma)$ , concluímos que  $|X| \in \mathcal{L}^1(\Sigma)$  e, pelo Lema 2.2.4, concluímos que  $\operatorname{div} X = 0$  em  $\Sigma^n$ , logo  $l_a = -f_a$ , ou seja,

$$|\nabla l_a|^2 = l_a^2 - f_a^2 = 0,$$

de onde concluímos que  $l_a$  é constante em  $\Sigma^n$ , o que significa que  $\Sigma^n$  é uma horoesfera em  $\mathbb{H}^{n+1}$ . □

**Observação 3.2.1.** Observe que se  $r = 2$  no teorema anterior, então pelo Lema 2.2.1 concluímos que não é necessário supor que a hipersuperfície two-sided completa  $\Sigma^n$  é localmente

tangente abaixo de uma horoesfera  $\tau$ , pois este último fato implica que  $H_1 > 0$ , mas já temos essa conclusão pela Lema 2.2.1.

**Exemplo 3.2.2.** Fixe um ponto  $p \in \mathbb{H}^3 \subset \mathbb{L}^4$  e considere uma base ortonormal  $\{e_1, e_2, e_3\}$  de  $T_p\mathbb{H}^3$ . De acordo com o exemplo 10 de [9], podemos definir um toro de revolução  $\psi : [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{H}^3$  da seguinte forma:

$$\psi(\eta, \phi) = \cosh \rho (\cosh Rp + \sinh R (\cos \eta e_1 + \sin \eta e_2) + \sinh \rho (\cos \phi (\sinh Rp + \cosh R (\cos \eta e_1 + \sin \eta e_2))) + \sin \eta e_3),$$

onde  $R > \rho > 0$ . Como podemos ver em [9] as curvaturas principais  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  da imersão são dadas por:

$$\lambda_1 = \frac{\sinh \rho \sinh R + \cosh \rho \cosh R \cos \phi}{\cosh \rho \sinh R + \sinh \rho \cosh R \cos \phi},$$

$$\lambda_2 = -\coth \rho.$$

Veja que em  $\lambda_1$ , trocando  $\cos \phi$  por 1 no numerador e  $\cos \phi$  por  $-1$  no denominador, então a fração atinge seu máximo, pois  $\cosh \rho \sinh R > \sinh \rho \cosh R$ , já que  $\coth \rho > \coth R$ . Assim,

$$\begin{aligned} |\lambda_1| &= \frac{\sinh \rho \sinh R + \cosh \rho \cosh R}{\cosh \rho \sinh R - \sinh \rho \cosh R} = \frac{(e^\rho - e^{-\rho})(e^R - e^{-R}) + (e^\rho + e^{-\rho})(e^R + e^{-R})}{(e^\rho + e^{-\rho})(e^R - e^{-R}) - (e^\rho - e^{-\rho})(e^R - e^{-R})} \\ &= \frac{2(e^{R+\rho} + e^{-R-\rho})}{2(e^{R-\rho} + e^{-R+\rho})} = \frac{\cosh(R+\rho)}{\sinh(R-\rho)} \leq \frac{\cosh(R-\rho)}{\sinh(R-\rho)} = \coth(R-\rho). \end{aligned}$$

Portanto,  $|\lambda_1| \leq \coth(R-\rho)$ , ou seja,  $-1 \leq \lambda_1 \leq 1$  e  $\lambda_2 = \coth r < -1$ . Assim, concluímos que  $H_1 = (\lambda_1 + \lambda_2)/2 < 0$ . Veja também que  $H_2 \leq 0$ , pois caso contrário teríamos, pelo Lema 2.2.1, que  $H_1 > 0$ . Logo, concluímos que  $H_r \leq 0$  no toro de revolução.

Por outro lado, como o toro é compacto, temos que a segunda forma fundamental é limitada,  $|a^\top|$  é Lebesgue integrável, para todo vetor tipo-luz  $a \in \mathbb{L}^{n+2}$ . Desta forma, junto com a observação anterior, vemos que o toro cumpre todas as hipóteses do teorema anterior, com exceção da hipótese que  $0 < H_r \leq 1$ , o que mostra que esta hipótese é necessária para concluir que a hipersuperfície é uma horoesfera do espaço hiperbólico.

Baseado na Equação 3.2, Aquino e de Lima observaram em [2] que as funções altura e

ângulo de uma horoesfera  $L_\tau$  de  $\mathbb{H}^{n+1}$  satisfazem a identidade  $l_a = -f_a$ , onde  $a$  é o vetor tipo-luz que define a horoesfera. Motivados por este fato, eles mostraram no teorema 4.2 de [2] que as únicas hipersuperfícies completas com curvatura média constante imersas em  $\mathbb{H}^{n+1}$  tais que  $l_a = \lambda f_a$ , para algum vetor tipo-luz  $a \in \mathbb{L}^{n+2}$  e alguma constante  $\lambda \in \mathbb{R}$ , são as horoesferas ou os cilindros hiperbólicos de  $\mathbb{H}^{n+1}$ . Portanto, inspirados neste resultado os autores mostraram o seguinte teorema.

**Teorema 3.2.4.** *Seja  $\psi : \Sigma^n \rightarrow \mathbb{H}^{n+1}$  uma hipersuperfície two-sided completa de  $\mathbb{H}^{n+1}$  com a segunda forma fundamental limitada. Suponha que  $l_a = \lambda f_a$ , para algum vetor tipo-luz  $a \in \mathbb{L}^{n+2}$  e alguma constante não nula  $\lambda \in \mathbb{R}$ , e que a  $r$ -ésima curvatura média de  $\Sigma^n$  satisfaz*

$$0 < H_{r+2} \leq H_r,$$

para algum  $1 \leq r \leq n - 2$ . Se  $|a^\top| \in \mathcal{L}^1(\Sigma)$ , então  $\Sigma^n$  é uma horoesfera  $L_\tau$ , para algum  $\tau > 0$ .

*Demonstração.* Como  $l_a = \lambda f_a$ , então

$$|\nabla l_a|^2 = l_a^2 - f_a^2 = (1 - \lambda^{-2})l_a^2.$$

Em particular, veja que  $(1 - \lambda^{-2}) \geq 0$ . Agora, definimos em  $\Sigma^n$  o seguinte campo de vetores tangentes:

$$X = -\frac{\lambda^{-1}}{c_{r+1}}P_{r+1}(\nabla l_a) + \frac{1}{c_r}P_r(\nabla l_a),$$

onde  $c_i = (i+1) \binom{n}{i+1}$ . Assim, concluímos que

$$\begin{aligned}
 \operatorname{div} X &= -\frac{\lambda^{-1}}{c_{r+1}} \operatorname{div}(P_{r+1}(\nabla l_a)) + \frac{1}{c_r} \operatorname{div}(P_r(\nabla l_a)) = -\frac{\lambda^{-1}}{c_{r+1}} L_{r+1}(l_a) + \frac{1}{c_r} L_r(l_a) \\
 &= -\frac{\lambda^{-1}}{c_{r+1}} c_{r+1} (H_{r+2} f_a + H_{r+1} l_a) + \frac{1}{c_r} c_r (H_{r+1} f_a + H_r l_a) \\
 &= -\lambda^{-1} H_{r+2} \lambda^{-1} l_a - \lambda^{-1} H_{r+1} l_a + H_{r+1} \lambda^{-1} l_a + H_r l_a \\
 &= (H_r - \lambda^{-2} H_{r+2}) l_a \geq (1 - \lambda^{-2}) H_r l_a \geq 0,
 \end{aligned}$$

onde na penúltima desigualdade usamos que  $H_{r+2} \leq H_r$ . Além disso, como  $\Sigma^n$  tem a segunda forma fundamental limitada e  $|\nabla l_a| = |a^\top| \in \mathcal{L}^1(\Sigma)$ , mais uma vez concluímos que  $|X| \in \mathcal{L}^1(\Sigma)$ . Portanto, como  $\operatorname{div} X$  não muda de sinal em  $\Sigma^n$ , podemos aplicar o Lema 2.2.4 e obter que  $\operatorname{div} X = 0$ . Consequentemente, concluímos que  $\lambda^2 = 1$  e, portanto,  $|\nabla l_a|^2 = 0$ , ou seja,  $l_a$  é uma constante em  $\Sigma^n$ , o que significa que  $\Sigma^n$  é uma horoesfera  $L_\tau$ , para algum  $\tau > 0$ .  $\square$

**Exemplo 3.2.3.** No exemplo 3.2.1 considere o vetor tipo-luz  $a = (0, \dots, 1, 1) \in \mathbb{L}^{n+2}$ . Agora veja que:

$$f_a(p) = \left\langle a, -\frac{1}{\rho\sqrt{1+\rho^2}}(\nu(p) + \rho^2 p) \right\rangle = -\frac{\rho}{\sqrt{1+\rho^2}} \langle a, p \rangle,$$

ou seja,  $l_a = -\frac{\rho}{\sqrt{1+\rho^2}} f_a$ . Porém, mais uma vez podemos ver na Equação 3.10 do exemplo 3.2.1 que  $H_{r+2} < H_r$ , para todo  $1 \leq r \leq n-2$ . Assim, como  $\Sigma^n$  tem segunda forma fundamental limitada, concluímos que  $|a^\top| \in \mathcal{L}^1(\Sigma)$  é uma hipótese necessária no teorema anterior, pois caso contrário não poderíamos garantir que a hipersuperfície do teorema anterior seria uma horoesfera, pois poderia ser a superfície do exemplo 3.2.1, que não é uma horoesfera.

# Apêndice A

## Conceitos Básicos de Geometria Riemanniana

O propósito deste apêndice é apresentar algumas ferramentas e conceitos básicos da teoria de geometria Riemanniana, que podem ser encontrados nos capítulos iniciais de [17], ferramentas e conceitos estes que são importantes para um melhor entendimento do que foi apresentado neste trabalho. Dentre estas ferramentas e conceitos destacamos as *métricas Riemannianas*, as *conexões afins* e a *curvatura*.

### A.1 Campos de Vetores e Colchetes

Um *campo de vetores* é uma aplicação que relaciona pontos da *variedade diferenciável* com vetores tangentes à superfície nestes pontos, mais precisamente temos a definição a seguir.

**Definição A.1.1.** *Um campo de vetores  $X$  em uma variedade diferenciável  $M$  é uma correspondência  $X : M \rightarrow TM$ , que a cada ponto  $p \in M$  associa um vetor  $X(p) \in T_pM$ . O campo é diferenciável se a aplicação  $X : M \rightarrow TM$  é diferenciável, onde  $TM$  é o fibrado tangente.*

Se considerarmos uma *parametrização*  $x_\alpha : U_\alpha \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$  é possível escrever

$$X(p) = \sum_{i=1}^n a_i(p) \frac{\partial}{\partial x_i}(p), \tag{A.1}$$

onde cada  $a_i : U \rightarrow \mathbb{R}$  são funções em  $U$ , para cada  $i \in \{1, \dots, n\}$ , e  $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_i}(p) \right\}_{i=1}^n$  é a base de  $T_p M$  associada a  $x_\alpha$ . É claro que  $X = (a_1, \dots, a_n)$  é diferenciável se, e somente se, as funções coordenadas  $a_i$  são diferenciáveis para alguma parametrização, o que implica que elas são diferenciáveis para qualquer parametrização, pois sendo  $X = (a_1, \dots, a_n)$  com relação a parametrização  $x_\alpha : U_\alpha \rightarrow M$  e  $X = (b_1, \dots, b_n)$  com relação a uma parametrização  $y_\beta : U_\beta \rightarrow M$ , então  $a_i = h \circ b_i$ , onde  $h$  é a mudança de coordenadas, logo sendo  $a_i$  diferenciável,  $b_i$  também será diferenciável.

Às vezes é conveniente utilizar a ideia sugerida por A.1 e pensar em um campo de vetores como uma aplicação  $X : C^\infty(M) \rightarrow \mathcal{F}$  do conjunto  $C^\infty(M)$  das funções diferenciáveis definidas em  $M$  no conjunto  $\mathcal{F}$  das funções reais definidas em  $M$ , definida do seguinte modo:

$$(Xf)(p) = \sum_i a_i(p) \frac{\partial f}{\partial x_i}(p), \quad (\text{A.2})$$

onde, por um abuso de notação,  $f \in C^\infty(M)$  indica  $f \circ x_\alpha$ , que é a expressão de  $f$  na parametrização  $x_\alpha$ . A função  $Xf$  obtida em A.2 não depende da escolha da parametrização  $x_\alpha$ , além disso, veja que  $X$  é diferenciável se, e somente se,  $X : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$ , isto é,  $Xf \in C^\infty(M)$ , para todo  $f \in C^\infty(M)$ .

A interpretação de  $X$  como um operador em  $C^\infty(M)$  permite-nos considerar os *iterados* de  $X$ . Por exemplo, se  $X$  e  $Y$  são campos diferenciáveis em  $M$  e  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função diferenciável, podemos considerar as funções  $X(Yf)$  e  $Y(Xf)$ . Em geral, tais operações não conduzem a campos vetoriais, por envolverem derivadas de ordem superior à primeira, entretanto, podemos afirmar o lema a seguir.

**Lema A.1.1.** *Sejam  $X$  e  $Y$  campos diferenciáveis de vetores em uma variedade diferenciável  $M$ . Então existe um único campo vetorial  $Z$  tal que, para todo  $f \in C^\infty(M)$ ,  $Zf = (XY - YX)f$ .*

*Demonstração.* Inicialmente, iremos supor que existe o campo vetorial  $Z$ . Então considere  $p \in M$  e  $x_\alpha : U_\alpha \rightarrow M$  uma parametrização em torno de  $p$ . Além disso, tome

$$X = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad Y = \sum_{j=1}^n b_j \frac{\partial}{\partial x_j}$$

as expressões de  $X$  e  $Y$  nesta parametrização. Então para todo  $f \in C^\infty(M)$ , temos

$$\begin{aligned} X(Yf) &= \sum_i a_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \sum_j b_j \frac{\partial f}{\partial x_j} \right) = \sum_{i,j} a_i \frac{\partial b_j}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} + \sum_{i,j} a_i b_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}, \\ Y(Xf) &= \sum_j b_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \sum_i a_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) = \sum_{i,j} b_j \frac{\partial a_i}{\partial x_j} \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{i,j} a_i b_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}. \end{aligned}$$

Portanto,  $Zf = X(Yf) - Y(Xf) = \sum_{i,j} \left( a_i \frac{\partial b_j}{\partial x_i} - b_j \frac{\partial a_i}{\partial x_j} \right) \frac{\partial f}{\partial x_j}$ , de onde concluímos a unicidade de  $Z$ , visto que a última expressão depende apenas das coordenadas dos campos vetoriais já determinados  $X$  e  $Y$ .

Para demonstrarmos a existência de  $Z$ , consideramos  $Z_\alpha$  definido na vizinhança coordenada  $x_\alpha(U_\alpha)$  pela expressão anterior. Pela unicidade, temos que  $Z_\alpha = Z_\beta$  em  $x_\alpha(U_\alpha) \cap x_\beta(U_\beta) \neq \emptyset$ , o que permite definir  $Z$  em toda variedade  $M$ .  $\square$

O campo vetorial  $Z$  dado pelo Lema(A.1.1) é chamado o *colchete*  $[X, Y] = XY - YX$  de  $X$  e  $Y$ . Vale salientar que aqui a notação  $XY$  significa  $X \circ Y$ . Veja que  $Z$  é evidentemente diferenciável, pois  $X$  e  $Y$  são diferenciáveis, além disso, a operação colchete possui as seguintes propriedades demonstradas na proposição abaixo.

**Proposição A.1.1.** *Se  $X, Y$  e  $Z$  são campos diferenciáveis em  $M$ ,  $a, b$  são números reais, e  $f, g$  são funções diferenciáveis, então:*

- (a)  $[X, Y] = -[Y, X]$  (*anticomutatividade*);
- (b)  $[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z]$  (*linearidade*);
- (c)  $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$  (*identidade de Jacobi*);
- (d)  $[fX, gY] = fg[X, Y] + f(Xg)Y - g(Yf)X$ .

*Demonstração.* Os itens (a) e (b) são imediatos. Para o item (c) observe que, usando (a), precisamos mostrar que

$$[[X, Y], Z] = [X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]].$$

Assim, observe que

$$\begin{aligned}
 [X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] &= [X, YZ - ZY] + [Y, ZX - XZ] \\
 &= XYZ - XZY - YZX + ZYX + YZX - YXZ - ZXY + XZY \\
 &= XYZ + ZYX - YXZ - ZXY, \\
 [[X, Y], Z] &= [XY - YX, Z] = XYZ - YXZ - ZXY + ZYX,
 \end{aligned}$$

de onde concluímos a igualdade desejada. Para concluirmos (d) tomamos  $h \in C^\infty(M)$  e verificamos que

$$\begin{aligned}
 [fX, gY](h) &= (fXgY - gYfX)(h) = fXg(Yh) - gYf(Xh) \\
 &= f(Xg)(Yh) + fgX(Yh) - g(Yf)(Xh) - fgY(Xh) \\
 &= (fg[X, Y] + f(Xg)Y - g(Yf)X)(h),
 \end{aligned}$$

de onde concluímos o item (d). □

## A.2 Métricas Riemannianas

Dada uma variedade diferenciável, queremos introduzir em cada ponto uma maneira de medir comprimentos de vetores tangentes que varia diferencialmente com o ponto. Neste sentido segue a próxima definição.

**Definição A.2.1.** *Uma métrica Riemanniana (ou estrutura Riemanniana) em uma variedade diferenciável  $M$  é uma correspondência que associa a cada ponto  $p \in M$  um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$  (isto é, uma forma bilinear, simétrica e positiva definida) no espaço tangente  $T_pM$ , que varia diferencialmente no seguinte sentido: Se  $x_\alpha : U_\alpha \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$  é uma parametrização em torno de  $p$ , com  $q = (x_1, \dots, x_n) \in U_\alpha$ , então  $\left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}(q), \frac{\partial}{\partial x_j}(q) \right\rangle = g_{ij}(x_1, \dots, x_n)$  é uma função diferenciável em  $U_\alpha$ .*

Veja que a definição acima não depende da escolha do sistema de coordenadas, pois se escolhermos um novo sistema de coordenadas  $y_\beta : V_\beta \rightarrow M$ , em torno de  $p$ , a base de  $T_pM$

associada a  $y_\beta$  é uma combinação linear da base de  $T_pM$  associada a  $x_\alpha$  que, por hipótese, varia diferencialmente.

Outra maneira de exprimir a diferenciabilidade da métrica é dizer que para todo par  $X$  e  $Y$  de campos de vetores diferenciáveis em uma vizinhança de  $W$  de  $M$ , a função  $\langle X, Y \rangle$  é diferenciável em  $W$ . Claro que esta definição implica na definição anterior, mas veja também que estas definições são equivalentes, visto que os campos  $X$  e  $Y$  podem ser escritos em cada ponto como combinação linear da base associada a  $x_\alpha$ .

As funções  $g_{ij}$  são chamadas expressão da métrica Riemanniana no sistema de coordenadas  $x_\alpha : U_\alpha \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$ . Uma variedade diferenciável com uma dada métrica Riemanniana chama-se uma *variedade Riemanniana*.

**Definição A.2.2.** *Sejam  $M$  e  $N$  variedades Riemannianas. Um difeomorfismo  $f : M \rightarrow N$  é chamado uma isometria se:*

$$\langle u, v \rangle_p = \langle df_p(u), df_p(v) \rangle_{f(p)}, \quad (\text{A.3})$$

para todo  $p \in M$  e todo  $u, v \in T_pM$ .

Se  $M$  e  $N$  são duas variedades Riemannianas e  $f : M \rightarrow N$  uma aplicação diferenciável, dizemos que  $f$  é uma *isometria local* em  $p \in M$ , se existe uma vizinhança  $W \subset M$  de  $p$  tal que  $f : W \rightarrow f(W)$  é um difeomorfismo satisfazendo A.3. É usual dizer que a variedade Riemanniana  $M$  é *localmente isométrica* à variedade Riemanniana  $N$  se, para todo  $p \in M$ , existe uma vizinhança  $W$  de  $p$  em  $M$  e uma isometria local  $f : W \rightarrow f(W) \subset N$ .

As próximas definições serão importantes para entendermos alguns conceitos dados nas seções seguintes como, por exemplo, quando abordamos a derivada covariante.

**Definição A.2.3.** *Uma aplicação diferenciável  $c : I \rightarrow M$  de um intervalo aberto  $I \subset \mathbb{R}$  em uma variedade diferenciável  $M$  chama-se uma curva (parametrizada).*

**Definição A.2.4.** *Um campo vetorial  $V$  ao longo de uma curva  $c : I \rightarrow M$  é uma aplicação que a cada  $t \in I$  associa um vetor tangente  $V(t) \in T_{c(t)}M$ . Diz-se que  $V$  é diferenciável se para toda função diferenciável  $f$  em  $M$ , a função  $t \mapsto V(t)f$  é uma função diferenciável em  $I$ .*

### A.3 Conexões Afins

Nesta seção iremos estudar as *conexões afins* e suas propriedades, veremos que este conceito nos dá uma noção de derivada de campos vetoriais e, mais que isso, iremos verificar que associada a uma métrica Riemanniana existe uma única conexão afim, a qual será chamada de *conexão Riemanniana* ou *conexão de Levi-Civita*. Para isso indicaremos por  $\mathfrak{X}(M)$  o conjunto dos campos de vetores de classe  $C^\infty$  em  $M$  e por  $C^\infty(M)$  o anel das funções reais de classe  $C^\infty$  definidas em  $M$ .

**Definição A.3.1.** *Uma conexão afim  $\nabla$  em uma variedade diferenciável  $M$  é uma aplicação*

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$$

que se indica por  $(X, Y) \mapsto \nabla_X Y$  e que satisfaz as seguintes propriedades:

$$(i) \quad \nabla_{fX+gY}Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z;$$

$$(ii) \quad \nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z;$$

$$(iii) \quad \nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + (Xf)Y,$$

onde  $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$  e  $f, g \in C^\infty(M)$ .

A proposição a seguir irá nos apresentar a *derivada covariante* e suas propriedades.

**Proposição A.3.1.** *Seja  $M$  uma variedade diferenciável com uma conexão afim  $\nabla$ . Então existe uma única correspondência que associa a um campo vetorial  $V$  ao longo da curva diferenciável  $c : I \rightarrow M$  um outro campo vetorial  $\frac{DV}{dt}$  ao longo de  $c$ , denominado derivada covariante de  $V$  ao longo de  $c$ , tal que:*

$$(a) \quad \frac{D}{dt}(V + W) = \frac{DV}{dt} + \frac{DW}{dt}$$

$$(b) \quad \frac{D}{dt}(fV) = \frac{df}{dt}V + f\frac{DV}{dt}, \text{ onde } V \text{ é um campo de vetores ao longo de } c \text{ e } f \text{ é uma função diferenciável em } I.$$

$$(c) \quad \text{Se } V \text{ é induzido por um campo de vetores } Y \in \mathfrak{X}(M), \text{ isto é, } V(t) = Y(c(t)), \text{ então}$$

$$\frac{DV}{dt} = \nabla_{dc/dt} Y.$$

*Demonstração.* Suponhamos que existe uma correspondência satisfazendo (a), (b) e (c). Seja  $x_\alpha : U_\alpha \rightarrow M$  um sistema de coordenadas com  $c(I) \cap x_\alpha(U_\alpha) \neq \emptyset$  e  $(x_1(t), \dots, x_n(t))$  as coordenadas de  $c(t)$ ,  $t \in I$ , em  $U_\alpha$ . Então podemos expressar o campo  $V$  localmente como  $\sum_{j=1}^n v_j \frac{\partial}{\partial x_j}$ , onde  $v_j = v_j(t)$  e  $\frac{\partial}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}(c(t))$ .

Por (a) e (b), temos

$$\frac{DV}{dt} = \frac{D}{dt} \left( \sum_j v_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right) = \sum_j \frac{dv_j}{dt} \cdot \frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_j v_j \cdot \frac{D}{dt} \left( \frac{\partial}{\partial x_j} \right),$$

enquanto, por (c) e pela primeira propriedade de conexão, temos que

$$\frac{D}{dt} \left( \frac{\partial}{\partial x_j} \right) = \nabla_{dc/dt} \frac{\partial}{\partial x_j} = \nabla_{\left( \sum_i \frac{dx_i}{dt} \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} \right)} \frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_i \frac{dx_i}{dt} \cdot \nabla_{\partial/\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

Portanto,

$$\frac{DV}{dt} = \sum_j \frac{dv_j}{dt} \cdot \frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_{i,j} \frac{dx_i}{dt} \cdot v_j \cdot \nabla_{\partial/\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

A expressão de  $\frac{DV}{dt}$  acima nos mostra que se a correspondência existe, então ela é única, pois depende apenas do vetor velocidade da curva  $c$ , das coordenadas de  $V$  com relação a base  $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_j} \right\}_{j=1}^n$  e os valores da conexão associados a esta base.

Para mostrar a unicidade definimos  $\frac{DV}{dt}$  em  $x_\alpha(U_\alpha)$  pela expressão acima, na qual a primeira e segunda propriedade são imediatas e para a terceira consideramos  $Y = \sum_j b_j \cdot \frac{\partial}{\partial x_j}$ ,

então  $V = \sum_j b_j(c(t)) \cdot \frac{\partial}{\partial x_j}$ . Assim,

$$\begin{aligned} \frac{DV}{dt} &= \sum_j \frac{db_j}{dt} \cdot \frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_{i,j} b_j \cdot \frac{dx_i}{dt} \cdot \nabla_{\partial/\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_j \left( \frac{db_j}{dt} \cdot \frac{\partial}{\partial x_j} + b_j \nabla_{dc/dt} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \\ &= \sum_j \nabla_{dc/dt} \left( b_j \cdot \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \\ &= \nabla_{dc/dt} Y. \end{aligned}$$

Se  $y_\beta(V_\beta)$  é outra vizinhança coordenada com  $x_\alpha(U_\alpha) \cap y_\beta(V_\beta) \neq \emptyset$  e definimos  $\frac{DV}{dt}$  como na expressão acima, então as definições concordam em  $x_\alpha(U_\alpha) \cap y_\beta(V_\beta)$  pela unicidade de  $\frac{DV}{dt}$  em  $x_\alpha(U_\alpha)$ . Assim, estendemos a definição para toda  $M$ .  $\square$

Veja que a proposição acima mostra que a escolha de uma conexão afim em  $M$  dá origem a uma derivada de campos de vetores ao longo de curvas que satisfaz as propriedades (a) e (b), ou seja, as propriedades da derivada da soma e regra do produto do produto.

### A.3.1 Conexão Riemanniana

Nesta seção iremos falar de uma conexão bastante particular, porém muito importante, visto que toda variedade Riemanniana possui essa tal conexão, a qual chamaremos de *conexão Riemanniana* ou *conexão de Levi-Civita*. Iniciamos com as definições e proposições que irão nos dar o significado de uma conexão ser *simétrica* e *compatível com a métrica* para, então, concluirmos a existência e unicidade da conexão Riemanniana.

**Definição A.3.2.** *Seja  $M$  uma variedade diferenciável com uma conexão afim  $\nabla$  e uma métrica Riemanniana  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . A conexão é dita compatível com a métrica  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , quando para toda curva diferenciável  $c$  e quaisquer pares de campos de vetores paralelos  $X$  e  $Y$  ao longo de  $c$ , tivermos  $\langle X, Y \rangle = \text{constante}$ .*

A proposição seguinte mostra que se a conexão  $\nabla$  é compatível com a métrica Riemanniana  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , então podemos derivar o *produto interno* pela regra do produto usual, como pode ser visto abaixo.

**Proposição A.3.2.** *Seja  $M$  uma variedade Riemanniana. Uma conexão  $\nabla$  em  $M$  é compatível com a métrica se, e somente se, para todo par  $V$  e  $W$  de campos de vetores ao longo da curva diferenciável  $c : I \rightarrow M$  tem-se*

$$\frac{d}{dt} \langle V, W \rangle = \left\langle \frac{DV}{dt}, W \right\rangle + \left\langle V, \frac{DW}{dt} \right\rangle, \quad t \in I. \quad (\text{A.4})$$

*Demonstração.* É claro que a equação A.4 implica na definição acima, pois sendo  $V$  e  $W$  campos de vetores paralelos, então  $\frac{d}{dt} \langle V, W \rangle = 0$ , o que implica que  $\langle V, W \rangle = \text{constante}$ .

Agora supondo que a conexão é compatível com a métrica, escolhamos uma base ortonormal  $\{X_1(t_0), \dots, X_n(t_0)\}$  de  $T_{c(t_0)}M$ ,  $t_0 \in I$ , a qual estendemos paralelamente ao longo de  $c$ . Como  $\nabla$  é compatível com a métrica,  $\{X_1(t), \dots, X_n(t)\}$  é uma base ortonormal de  $T_{c(t)}M$ , para todo  $t \in I$ . Podemos escrever,

$$V = \sum_i v_i X_i, \quad W = \sum_i w_i X_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

onde as funções  $v_i$  e  $w_i$  são diferenciáveis em  $I$ . Dessa forma, temos

$$\frac{DV}{dt} = \sum_i \frac{dv_i}{dt} X_i + \sum_i v_i \frac{DX_i}{dt} = \sum_i \frac{dv_i}{dt} X_i \quad \text{e} \quad \frac{DW}{dt} = \sum_i \frac{dw_i}{dt} X_i + \sum_i w_i \frac{DX_i}{dt} = \sum_i \frac{dw_i}{dt} X_i.$$

Portanto,

$$\left\langle \frac{DV}{dt}, W \right\rangle + \left\langle V, \frac{DW}{dt} \right\rangle = \sum_i \left( \frac{dv_i}{dt} w_i + \frac{dw_i}{dt} v_i \right) = \frac{d}{dt} \left( \sum_i v_i w_i \right) = \frac{d}{dt} \langle V, W \rangle,$$

o que conclui nossa demonstração.  $\square$

O próximo resultado nos dá uma caracterização mais utilizada quando queremos verificar a compatibilidade da métrica com relação a conexão.

**Corolário A.3.1.** *Uma conexão  $\nabla$  em uma variedade Riemanniana  $M$  é compatível com a métrica se, e somente se,*

$$X \langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle, \quad X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M). \quad (\text{A.5})$$

*Demonstração.* Suponha que  $\nabla$  é compatível com a métrica. Sejam  $p \in M$  e  $c : I \rightarrow M$  uma curva diferenciável com  $c(t_0) = p$ ,  $t_0 \in I$  e  $\left. \frac{dc}{dt} \right|_{t=t_0} = X(p)$ . Então

$$\begin{aligned} X(p) \langle Y, Z \rangle &= \left. \frac{d}{dt} \langle Y(c(t)), Z(c(t)) \rangle \right|_{t=t_0} = \left\langle \frac{DY}{dt}, Z \right\rangle_p + \left\langle Y, \frac{DZ}{dt} \right\rangle_p \\ &= \langle \nabla_{X(p)} Y, Z \rangle_p + \langle Y, \nabla_{X(p)} Z \rangle_p. \end{aligned}$$

Como  $p \in M$  é um ponto arbitrário, concluímos a Equação A.5. A recíproca segue da

terceira igualdade na equação acima em conjunto com a proposição anterior.  $\square$

**Definição A.3.3.** *Uma conexão afim  $\nabla$  em uma variedade diferenciável  $M$  é dita simétrica quando*

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y], \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M). \quad (\text{A.6})$$

Veja que segue da definição acima que se tivermos um sistema de coordenadas  $x_\alpha : U_\alpha \rightarrow M$  e  $\nabla$  for simétrica, então

$$\nabla_{\partial/\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} - \nabla_{\partial/\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i} = \left[ \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right] = \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i} \equiv 0, \quad (\text{A.7})$$

para todo  $i, j = 1, \dots, n$ . Ou seja,  $\nabla_{\partial/\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} = \nabla_{\partial/\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i}$ , o que justifica chamarmos tais conexões de simétricas. Veja que também concluímos que  $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$ , onde  $\nabla_{\partial/\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_k \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x_k}$ .

Agora vamos enunciar e demonstrar o que afirmamos no início desta seção.

**Teorema A.3.1.** *(Levi-Civita) Dada uma variedade Riemanniana  $M$ , existe uma única conexão afim  $\nabla$  em  $M$  satisfazendo as condições:*

- (a)  $\nabla$  é simétrica;
- (b)  $\nabla$  é compatível com a métrica Riemanniana.

*Demonstração.* Suponhamos que exista tal conexão  $\nabla$ , então a compatibilidade com a métrica garante que

$$\begin{aligned} X\langle Y, Z \rangle &= \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle, & Y\langle Z, X \rangle &= \langle \nabla_Y Z, X \rangle + \langle Z, \nabla_Y X \rangle, \\ Z\langle X, Y \rangle &= \langle \nabla_Z X, Y \rangle + \langle X, \nabla_Z Y \rangle. \end{aligned}$$

Somando as duas primeiras equações e subtraindo a última, temos, usando a simetria de

$\nabla$ , que

$$\begin{aligned} X\langle Y, Z \rangle + Y\langle Z, X \rangle - Z\langle X, Y \rangle &= \langle \nabla_X Z - \nabla_Z X, Y \rangle + \langle \nabla_Y Z - \nabla_Z Y, X \rangle + \langle [X, Y], Z \rangle \\ &\quad + \langle \nabla_Y X, Z \rangle + \langle Z, \nabla_Y X \rangle \\ &= \langle [X, Z], Y \rangle + \langle [Y, Z], X \rangle + \langle [X, Y], Z \rangle + 2\langle Z, \nabla_Y X \rangle. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\langle Z, \nabla_Y X \rangle = \frac{1}{2} (X\langle Y, Z \rangle + Y\langle Z, X \rangle - Z\langle X, Y \rangle - \langle [X, Z], Y \rangle - \langle [Y, Z], X \rangle - \langle [X, Y], Z \rangle).$$

A expressão acima mostra que  $\nabla$  está univocamente determinada pela métrica  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Portanto, caso exista, ela será única. Assim, para mostrar a existência, definimos  $\nabla$  como na última expressão acima, de onde concluímos que  $\nabla$  está bem definida, é simétrica, pois  $\langle Z, \nabla_X Y - \nabla_Y X \rangle = \langle Z, [X, Y] \rangle$ , e é compatível com a métrica, visto que sendo simétrica, as implicações que fizemos acima são, na verdade, equivalências.  $\square$

**Observação A.3.1.** A conexão dada pelo teorema anterior é denominada de conexão de Levi-Civita (ou Riemanniana) de  $M$ .

Iremos finalizar este tópico calculando os *símbolos de Christoffel*. Para isso consideremos um sistema de coordenadas  $x_\alpha : U_\alpha \rightarrow M$ , então dizemos que as funções  $\Gamma_{ij}^k$  definidas em  $U_\alpha$  por  $\nabla_{\partial/\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j}$  são os *coeficientes da conexão*  $\nabla$  em  $U$  ou os *símbolos de Christoffel da conexão*. Lembre que  $\left[ \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right] = 0$ , para todo  $i, j = 1, \dots, n$ , e no teorema anterior encontramos uma expressão para a conexão, logo

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial x_k}, \nabla_{\partial/\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x_i} g_{jk} + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{ki} - \frac{\partial}{\partial x_k} g_{ij} \right).$$

Mas também, temos que

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial x_k}, \nabla_{\partial/\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_k}, \sum_l \Gamma_{ij}^l \frac{\partial}{\partial x_l} \right\rangle = \sum_l \Gamma_{ij}^l g_{lk},$$

onde  $g_{ij} = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle$ . Como a matriz  $(g_{km})$  admite uma inversa  $(g^{km})$ , temos que

$$\sum_{k,l} \Gamma_{ij}^l g_{lk} \cdot g^{km} = \frac{1}{2} \sum_k \left( \frac{\partial}{\partial x_i} g_{jk} + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{ki} - \frac{\partial}{\partial x_k} g_{ij} \right) g^{km},$$

mas veja que

$$\sum_{k,l} \Gamma_{ij}^l g_{lk} \cdot g^{km} = \sum_l \Gamma_{ij}^l \delta_{lm} = \Gamma_{ij}^m,$$

de onde concluímos que

$$\Gamma_{ij}^m = \frac{1}{2} \sum_k \left( \frac{\partial}{\partial x_i} g_{jk} + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{ki} - \frac{\partial}{\partial x_k} g_{ij} \right) g^{km}, \quad (\text{A.8})$$

onde esta última equação é a expressão clássica dos símbolos de Christoffel da conexão Riemanniana em termos dos  $g_{ij}$  dados pela métrica. Já a derivada covariante assume a seguinte forma clássica, em termos dos símbolos de Christoffel:

$$\frac{DV}{dt} = \sum_k \left\{ \frac{dv_k}{dt} + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k v_j \frac{dx_i}{dt} \right\} \frac{\partial}{\partial x_k}. \quad (\text{A.9})$$

## A.4 Curvaturas

Nesta seção iremos estudar o conceito geral de *curvatura* e logo após os casos particulares das *curvaturas seccionais*, de *Ricci* e *escalar*. Veremos que a curvatura mede, de certa forma, o quanto a variedade  $M$  deixa de ser euclidiana. Também veremos que a curvatura mede, em um sentido não muito formal, a não-comutatividade da derivada covariante.

**Definição A.4.1.** *A curvatura  $R$  de uma variedade Riemanniana  $M$  é uma correspondência que associa a cada par  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$  uma aplicação  $R(X, Y) : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$  dada por*

$$R(X, Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X, Y]} Z, \quad Z \in \mathfrak{X}(M),$$

onde  $\nabla$  é a conexão Riemanniana de  $M$ .

Se consideramos  $M = \mathbb{R}^n$ , então  $R(X, Y)Z = 0$ , para todo  $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ , pois indi-

cando por  $X = (x_1, \dots, x_n)$  e  $Z = (z_1, \dots, z_n)$  as componentes do campo  $X$  e  $Z$  nas coordenadas naturais do  $\mathbb{R}^n$ , também lembrando que os símbolos de Christoffel na Equação A.8 para o ambiente euclidiano são nulos e, por fim, observando que

$$\begin{aligned} \nabla_X Z &= \nabla_X \left( \sum_j z_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right) = \sum_j \left( z_j \nabla_X \frac{\partial}{\partial x_j} + X(z_j) \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \\ &= \sum_{i,j} \left( z_j x_i \nabla_{\partial/\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} + X(z_j) \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \\ &= \sum_k \left( \sum_{i,j} z_j x_i \Gamma_{ij}^k + X(z_k) \right) \frac{\partial}{\partial x_k}. \end{aligned}$$

temos que  $\nabla_X Z = (Xz_1, \dots, Xz_n)$ , de onde concluímos que  $\nabla_Y \nabla_X Z = (YXz_1, \dots, YXz_n)$ , o que implica que

$$R(X, Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X, Y]} Z = 0.$$

Outro fato é que se considerarmos um sistema de coordenadas  $x_\alpha : U_\alpha \rightarrow M$  em torno de um ponto  $p \in M$ , como  $\left[ \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right] = 0$ , teremos que:

$$R \left( \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \frac{\partial}{\partial x_k} = (\nabla_{\partial/\partial x_i} \nabla_{\partial/\partial x_j} - \nabla_{\partial/\partial x_j} \nabla_{\partial/\partial x_i}) \nabla_{\partial/\partial x_k},$$

o que de certa forma mede a não-comutatividade da curvatura, além disso, mais adiante veremos que se  $R = 0$ , então  $\nabla_{\partial/\partial x_i}$  e  $\nabla_{\partial/\partial x_j}$  comutam, pois veremos que  $R(X, Y) = -R(Y, X)$ .

A próxima proposição nos dá algumas propriedades da curvatura  $R$ , que na verdade é uma aplicação multilinear, por isso a linearidade da curvatura ocorre em todas as entradas.

**Proposição A.4.1.** *A curvatura  $R$  de uma variedade Riemanniana goza das seguintes propriedades:*

(i)  $R$  é bilinear em  $\mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M)$ , isto é,

$$R(fX_1 + gX_2, Y_1) = fR(X_1, Y_1) + gR(X_2, Y_1), \quad (\text{A.10})$$

$$R(X_1, fY_1 + gY_2) = fR(X_1, Y_1) + gR(X_1, Y_2), \quad (\text{A.11})$$

$$f, g \in C^\infty(M), X_1, X_2, Y_1, Y_2 \in \mathfrak{X}(M).$$

(ii) Para todo par  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ , o operador curvatura  $R(X, Y) : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$  é linear, isto é,

$$R(X, Y)(Z + W) = R(X, Y)Z + R(X, Y)W, \quad (\text{A.12})$$

$$R(X, Y)fZ = fR(X, Y)Z, \quad (\text{A.13})$$

$$f \in C^\infty(M), Z, W \in \mathfrak{X}(M).$$

*Demonstração.* (i) Para mostrarmos a primeira igualdade, observamos que

$$[fX_1 + gX_2, Y_1] = [fX_1, Y_1] + [gX_2, Y_1] = f[X_1, Y_1] + 0 - Y_1(f)X_1 + g[X_2, Y_1] + 0 - Y_1(g)X_2,$$

logo  $\nabla_{[fX_1+gX_2, Y_1]} = f\nabla_{[X_1, Y_1]} + g\nabla_{[X_2, Y_1]} - Y_1(f)X_1 - Y_1(g)X_2$ . Veja também que

$$\nabla_{Y_1} \nabla_{(fX_1+gX_2)} = \nabla_{Y_1}(f\nabla_{X_1} + g\nabla_{X_2}) = f\nabla_{Y_1} \nabla_{X_1} + g\nabla_{Y_1} \nabla_{X_2} + Y_1(f)X_1 + Y_1(g)X_2.$$

E por fim, veja que  $-\nabla_{(fX_1+gX_2)} \nabla_{Y_1} = -f\nabla_{X_1} \nabla_{Y_1} - g\nabla_{X_2} \nabla_{Y_1}$ . Assim, somando os termos, verificamos a igualdade desejada. A segunda equação é análoga ao que fizemos para a primeira equação.

(ii) A primeira equação deste item segue diretamente das linearidades do colchete e da conexão Riemanniana. Para a segunda equação verificamos que

$$\nabla_Y \nabla_X (fZ) = \nabla_Y (f\nabla_X Z + X(f)Z) = f\nabla_Y \nabla_X Z + Y(f)\nabla_X Z + X(f)\nabla_Y Z + Y(X(f))Z.$$

Analogamente, temos que

$$-\nabla_X \nabla_Y fZ = -f\nabla_X \nabla_Y Z - X(f)\nabla_Y Z - Y(f)\nabla_X Z - X(Y(f))Z.$$

Finalmente, observando que  $f\nabla_{[X, Y]}(fZ) = f\nabla_{[X, Y]}Z + ([X, Y]f)Z$ , e somando os termos anteriores concluímos a igualdade desejada, onde foi usado que  $Y(X(f))Z - X(Y(f))Z = ([Y, X]f)Z$ .  $\square$

Antes de estudarmos algumas curvaturas particulares vamos finalizar esta seção com duas

proposições que são válidas para curvaturas Riemannianas gerais.

**Proposição A.4.2.** (*Primeira Identidade de Bianchi*) *É válida a seguinte relação*

$$R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0,$$

para todo  $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ .

*Demonstração.* Pela definição da curvatura  $R$  e da simetria da conexão Riemanniana, temos que

$$\begin{aligned} R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y &= \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X, Y]} Z + \nabla_Z \nabla_Y X - \nabla_Y \nabla_Z X \\ &+ \nabla_{[Y, Z]} X + \nabla_X \nabla_Z Y - \nabla_Z \nabla_X Y + \nabla_{[Z, X]} Y = \nabla_Y (\nabla_X Z - \nabla_Z X) + \nabla_X (\nabla_Z Y - \nabla_Y Z) \\ &+ \nabla_Z (\nabla_Y X - \nabla_X Y) + \nabla_{[X, Y]} Z + \nabla_{[Y, Z]} X + \nabla_{[Z, X]} Y = \nabla_Y ([X, Z]) + \nabla_X ([Z, Y]) \\ &+ \nabla_Z ([Y, X]) - \nabla_{[Y, X]} Z - \nabla_{[Z, Y]} X - \nabla_{[X, Z]} Y = [Y, [X, Z]] + [X, [Z, Y]] + [Z, [Y, X]] = 0, \end{aligned}$$

onde na última igualdade foi aplicada a identidade de Jacobi para campos de vetores.  $\square$

**Proposição A.4.3.** *Para todo  $X, Y, Z, T \in \mathfrak{X}(M)$  são válidas as seguintes relações:*

$$(a) \langle R(X, Y)Z, T \rangle + \langle R(Y, Z)X, T \rangle + \langle R(Z, X)Y, T \rangle = 0;$$

$$(b) \langle R(X, Y)Z, T \rangle = -\langle R(Y, X)Z, T \rangle;$$

$$(c) \langle R(X, Y)Z, T \rangle = -\langle R(X, Y)T, Z \rangle;$$

$$(d) \langle R(X, Y)Z, T \rangle = \langle R(T, Z)X, Y \rangle.$$

*Demonstração.* (a) Segue imediatamente da desigualdade de Bianchi vista anteriormente.

(b) Segue diretamente da definição de  $R$ .

(c) Observe que  $\langle R(X, Y)Z+T, Z+T \rangle = \langle R(X, Y)Z, Z \rangle + \langle R(X, Y)Z, T \rangle + \langle R(X, Y)T, Z \rangle + \langle R(X, Y)T, T \rangle$ . Assim, se mostrarmos que  $\langle R(X, Y)Z, Z \rangle = 0$ , para todo  $Z \in \mathfrak{X}(M)$ , então concluiremos a igualdade desejada. Temos que

$$\langle R(X, Y)Z, Z \rangle = \langle \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X, Y]} Z, Z \rangle,$$

mas lembre que  $Y\langle\nabla_X Z, Z\rangle = \langle\nabla_Y\nabla_X Z, Z\rangle + \langle\nabla_X Z, \nabla_Y Z\rangle$  e  $[X, Y]\langle Z, Z\rangle = 2\langle\nabla_{[X, Y]} Z, Z\rangle$ , logo

$$\langle R(X, Y)Z, Z\rangle = Y\langle\nabla_X Z, Z\rangle - \langle\nabla_X Z, \nabla_Y Z\rangle - X\langle\nabla_Y Z, Z\rangle + \langle\nabla_Y Z, \nabla_X Z\rangle + \frac{1}{2}[X, Y]\langle Z, Z\rangle.$$

Como  $X\langle Z, Z\rangle = 2\langle\nabla_X Z, Z\rangle$ , temos que

$$\langle R(X, Y)Z, Z\rangle = \frac{1}{2}Y(X\langle Z, Z\rangle) - \frac{1}{2}X(Y\langle Z, Z\rangle) + \frac{1}{2}[X, Y]\langle Z, Z\rangle = 0.$$

(d) Para mostrarmos este item iremos usar o item (a) somando os termos seguintes:

$$\langle R(X, Y)Z, T\rangle + \langle R(Y, Z)X, T\rangle + \langle R(Z, X)Y, T\rangle = 0,$$

$$\langle R(Y, Z)T, X\rangle + \langle R(Z, T)Y, X\rangle + \langle R(T, Y)Z, X\rangle = 0,$$

$$\langle R(Z, T)X, Y\rangle + \langle R(T, X)Z, Y\rangle + \langle R(X, Z)T, Y\rangle = 0,$$

$$\langle R(T, X)Y, Z\rangle + \langle R(X, Y)T, Z\rangle + \langle R(Y, T)X, Z\rangle = 0,$$

de onde concluímos, usando os itens (b) e (c), que

$$2\langle R(Z, X)Y, T\rangle = 2\langle R(Y, T)Z, X\rangle,$$

ou seja,  $\langle R(Z, X)Y, T\rangle = \langle R(Y, T)Z, X\rangle$ . □

#### A.4.1 Curvatura Seccional, Curvatura de Ricci e Curvatura Escalar

No que segue vamos usar a seguinte notação. Dado um espaço vetorial  $V$ , indicaremos por  $|x \wedge y|$  a expressão

$$\sqrt{|x|^2|y|^2 - \langle x, y\rangle^2},$$

que representa a área do paralelogramo bidimensional determinado pelo par de vetores  $x, y \in V$ .

A proposição seguinte mostra a interessante propriedade de que o que definiremos como

curvatura seccional depende apenas da seção plana considerada, isso acontece mesmo com a definição estando em função de uma base dessa seção plana.

**Proposição A.4.4.** *Seja  $\sigma \subset T_p M$  um subespaço bidimensional determinado pelo par de vetores  $x, y \in \sigma$  dois vetores linearmente independentes. Então*

$$K(x, y) = \frac{\langle R(x, y)x, y \rangle}{|x \wedge y|^2}$$

não depende da escolha dos vetores  $x, y \in \sigma$ .

*Demonstração.* Primeiro vamos observar que podemos mudar de uma base  $\{x, y\}$  de  $\sigma$  para outra base  $\{\bar{x}, \bar{y}\}$  por iteração das seguintes transformações lineares:

$$(i) \quad \{x, y\} \longrightarrow \{y, x\}, \quad (ii) \quad \{x, y\} \longrightarrow \{\lambda x, y\}, \quad (iii) \quad \{x, y\} \longrightarrow \{x + \lambda y, y\}.$$

Observe que  $K(x, y)$  é invariante pela transformação no item (iii), pois os itens (b) e (c) da última proposição da seção anterior implicam na igualdade  $K(x, y) = K(y, x)$ . No item (ii) a invariância de  $K(x, y)$  segue da multilinearidade de  $R$  e no item (c), inicialmente observamos que

$$\begin{aligned} |(x + \lambda y) \wedge y|^2 &= |x + \lambda y|^2 |y|^2 - \langle x + \lambda y, y \rangle^2 \\ &= (|x|^2 + 2\lambda \langle x, y \rangle + \lambda^2 |y|^2) \cdot |y|^2 - (\langle x, y \rangle + \lambda |y|^2)^2 \\ &= |x|^2 |y|^2 + 2\lambda \langle x, y \rangle \cdot |y|^2 + \lambda^2 |y|^4 - \langle x, y \rangle^2 - 2\lambda \langle x, y \rangle |y|^2 - \lambda^2 |y|^4 \\ &= |x|^2 |y|^2 - \langle x, y \rangle^2 \\ &= |x \wedge y|^2. \end{aligned}$$

E, finalmente, vemos que

$$\begin{aligned} \langle R(x + \lambda y, y)(x + \lambda y), y + \lambda y \rangle &= \langle R(x, y)x, y \rangle + \langle R(x, y)\lambda y, y \rangle + \langle R(\lambda y, y)x, y \rangle \\ &\quad + \langle R(\lambda y, y)\lambda y, y \rangle \\ &= \langle R(x, y)x, y \rangle, \end{aligned}$$

pois mais uma vez pela multilinearidade de  $R$  e pelos itens (b) e (c) mencionados anteriormente os outros termos se anulam. Dessa forma conseguimos o que queríamos provar.  $\square$

**Definição A.4.2.** *Dado um ponto  $p \in M$  e um subespaço bidimensional  $\sigma \subset T_pM$  o número real  $K(x, y) = K(\sigma)$ , onde  $\{x, y\}$  é uma base qualquer de  $\sigma$ , é chamado curvatura seccional de  $\sigma$  em  $p$ .*

Assim, a definição e o lema acima nos mostraram, que escolhido um subespaço bidimensional no espaço tangente da variedade, a curvatura seccional independe da base escolhida desse subespaço.

Agora iremos finalizar este trabalho apresentando os conceitos de *curvatura de Ricci* e *curvatura escalar*. Essas curvaturas são combinações das curvaturas seccionais, e por aparecerem com bastante frequência no estudo da geometria Riemanniana, iremos nomeá-las.

Seja  $x = z_n$  um vetor unitário em  $T_pM$ ; tomemos uma base ortonormal  $\{z_1, \dots, z_{n-1}\}$  do hiperplano de  $T_pM$  ortogonal a  $x$  e consideremos as seguintes médias:

$$Ric_p(x) = \frac{1}{n-1} \sum_i \langle R(x, z_i)x, z_i \rangle, \quad i = 1, 2, \dots, n-1,$$

$$K(p) = \frac{1}{n} \sum_j Ric_p(z_j) = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i,j} \langle R(z_i, z_j)z_i, z_j \rangle, \quad j = 1, \dots, n,$$

que são chamadas *curvatura de Ricci na direção  $x$*  e *curvatura escalar (ou média) em  $p$* , respectivamente.

Para mostrarmos que as curvaturas acima estão bem definidas precisamos mostrar que elas independem da base ortonormal escolhida, para isso consideramos  $x, y \in T_pM$  e definimos a aplicação linear  $A : T_pM \rightarrow T_pM$ , dada por  $Az = R(x, z)y$ . Então, definimos a aplicação  $Q : T_pM \times T_pM$ , por  $Q(x, y) = tr(A)$ , que é bilinear, pois a função traço é linear e a curvatura  $R$  é multilinear.

Escolhendo  $x$  unitário e uma base ortonormal  $\{z_1, \dots, z_{n-1}, z_n = x\}$  para  $T_pM$ , então podemos calcular o traço da aplicação  $A$  da seguinte forma:

$$Q(x, y) = tr(A) = \sum_i \langle Az_i, z_i \rangle = \sum_i \langle R(x, z_i)y, z_i \rangle = \sum_i \langle R(y, z_i)x, z_i \rangle = Q(y, x),$$

de onde concluímos que  $Q$  é simétrica e  $Q(x, x) = (n-1)Ric_p(x)$ , visto que  $\langle R(z_n, z_n)z_n, z_n \rangle = 0$ . Como o traço é invariante por mudança de base concluímos que  $Ric_p(x)$  independe da base ortonormal considerada.

Por outro lado, a forma bilinear simétrica  $Q$  corresponde a uma aplicação auto-adjunta  $B : T_pM \rightarrow T_pM$  dada por

$$\langle Bx, y \rangle = Q(x, y).$$

Tomando uma base ortonormal  $\{z_1, \dots, z_{n-1}, z_n\}$ , temos que

$$tr(B) = \sum_i \langle Bz_i, z_i \rangle = \sum_i \langle Q(z_i, z_i) \rangle = \sum_i (n-1)Ric_p(z_i) = n(n-1)K(p),$$

o que nos mostra que  $K(p)$  também independe da base ortonormal considerada.

# Referências Bibliográficas

- [1] Cícero P. Aquino, Halysen I. Baltazar, Henrique F. de Lima, Characterizing horospheres of the hyperbolic space via higher order mean curvatures, *Differential Geometry and its Applications*, Volume 62, Pages 109-119, 2019.
- [2] C.P. Aquino, H.F. de Lima, On the geometry of horospheres, *Comment. Math. Helv.* 89, Pages 617-629, 2014.
- [3] A. Caminha, The geometry of closed conformal vector fields on Riemannian spaces, *Bull. Braz. Math. Soc.* 42, Pages 277-300, 2011.
- [4] X. Cheng, H. Rosenberg, Embedded positive constant  $r$ -mean curvature hypersurfaces in  $M^m \times \mathbb{R}$ , *An. Acad. Bras. Ciênc.* 77, Pages 183-199, 2005.
- [5] L.J. Alías, J.H. de Lira, J.M. Malacarne, Constant higher order mean curvature hypersurfaces in Riemannian spaces, *J. Inst. Math. Jussieu* 5, Pages 527-562, 2006.
- [6] Alías, L., Colares, A. Uniqueness of spacelike hypersurfaces with constant higher order mean curvature in generalized Robertson-Walker spacetimes. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, Pages 703-729, 2007.
- [7] Ros, Antonio. Compact Hypersurfaces with Constant Higher Order Mean Curvatures. *Revista Matemática Iberoamericana*, Pages 447-453, 1987.
- [8] López, R., Montiel, S. Existence of constant mean curvature graphs in hyperbolic space. *Calc Var* 8, Pages 177-190, 1999.
- [9] L.J. Alías, T. Kurose, G. Solanes, Hadamard-type theorems for hypersurfaces in hyperbolic spaces, *Differ. Geom. Appl.* 24, Pages 492-502, 2006.

- [10] Silva Filho, J.F. Quasi-Einstein manifolds endowed with a parallel vector field. *Monatsh Math* 179, Pages 305-320, 2016.
- [11] L.J. Alías, A. Brasil Jr., A.G. Colares, Integral formulae for spacelike hypersurfaces in conformally stationary spacetimes and applications, *Proc. Edinb. Math. Soc.* 46, Pages 465-488, 2003.
- [12] Hardy G, Littlewood J and Polya G. *Inequalities*, 2nd. Ed., Cambridge, Univ. Press, 1989.
- [13] Alencar, H., do Carmo, M. & Santos, W. A gap theorem for hypersurfaces of the sphere with constant scalar curvature one. *Comment. Math. Helv.* 77, Pages 549-562, 2002.
- [14] R. Reilly, Variational properties of functions of the mean curvature for hypersurfaces in space form, *J. Differ. Geom.* 8, Pages 447-453, 1973.
- [15] H. Rosenberg, Hypersurfaces of constant curvature in space forms, *Bull. Sci. Math.* 117, Pages 217-239, 1993.
- [16] S. Montiel, Unicity of constant mean curvature hypersurfaces in some Riemannian manifolds, *Indiana Univ. Math. J.* 48, Pages 711-748, 1999.
- [17] do Carmo, Manfredo Perdigão. *Geometria Riemanniana*. 5 ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2015.
- [18] O’Neil, Barret. *Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity*. 1 ed. London: Academic Press, 1983.
- [19] Beem, John K.; Ehrlich, Paul E. *Global Lorentzian Geometry*. 2 ed. New York: Marcel Dekker, 1996.
- [20] Couto, Ivo Terek; Lyberopoulos, Alexandre. *Introdução à Geometria Lorentziana: Curvas e Superfícies*. Rio de Janeiro: SBM, 2018.
- [21] Montiel, Sebastián; Ros, Antonio. *Curves and Surfaces*. 2 ed. USA: American Mathematical Society, 2009.

- [22] do Carmo, Manfredo Perdigão. Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies. 4 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2010.
- [23] Lima, Elon Lages. Análise Real Volume 2. Rio de Janeiro: IMPA, 2004.
- [24] Lima, Elon Lages. Curso de análise Vol. 2. 11 ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2015.
- [25] Lima, Elon Lages. Variedades Diferenciáveis. Rio de Janeiro: IMPA, 2011.
- [26] Munkres, James Raymond. Topology. 2 ed. Massachusetts Institute of Technology: Prentice Hall, 2000.