

Universidade Federal da Paraíba
Universidade Federal de Campina Grande
Programa Associado de Pós-Graduação em Matemática
Doutorado em Matemática

Trivialidade Topológica em Famílias
de Funções sobre Conjuntos
Subanalíticos e Espaços Analíticos
Complexos

por

Jonathas Phillipe de Jesus Almeida

João Pessoa - PB

Novembro/2020

Trivialidade Topológica em Famílias de Funções sobre Conjuntos Subanalíticos e Espaços Analíticos Complexos

por

Jonathas Phillipe de Jesus Almeida [†]

sob orientação do

Prof. Dr. Aurélio Menegon Neto

(Orientador)

Prof. Dr. José Luis Cisneros-Molina

(Coorientador)

Tese apresentada ao Corpo Docente do Programa Associado de Pós-Graduação em Matemática - UFPB/UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Matemática.

João Pessoa - PB

Novembro/2020

[†]Este trabalho contou com apoio financeiro da CAPES

Catálogo na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

A447t Almeida, Jonathas Phillipe de Jesus.

Trivialidade topológica em famílias de funções sobre conjuntos subanalíticos e espaços analíticos complexos / Jonathas Phillipe de Jesus Almeida. - João Pessoa, 2020.

54 f. : il.

Orientação: Aurélio Menegon Neto.

Coorientação: José Luis Cisneros-Molina.

Tese (Doutorado) - UFPB/CCEN.

1. Matemática. 2. Espaços analíticos complexos. 3. Estratificações de Whitney. 4. Interseções completas. 5. Número de Milnor. 6. Deformações lineares. 7. Trivialidade topológica. 8. Conjuntos subanalíticos. I. Menegon Neto, Aurélio. II. Cisneros-Molina, José Luis. III. Título.

UFPB/BC

CDU 51(043)

Universidade Federal da Paraíba
Universidade Federal de Campina Grande
Programa Associado de Pós-Graduação em Matemática
Doutorado em Matemática

Área de Concentração: Geometria

Aprovada em: 16 de Novembro de 2020



Prof. Dr. José Antonio Seade



Prof. Dr. José Edson Sampaio



Prof. Dr. Juan José Nuño Ballesteros



Prof. Dr. Roberto Callejas Bedregal



Prof. Dr. José Luis Cisneros-Molina

Coorientador



Prof. Dr. Aurélio Menegon Neto

Orientador

Tese apresentada ao Corpo Docente do Programa Associado de Pós-Graduação em Matemática - UFPB/UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Matemática.

Novembro/2020

Resumo

Neste trabalho, estudamos famílias de funções definidas sobre um conjunto subanalítico ou sobre espaços analíticos complexos. Damos condições suficientes para que uma família que depende linearmente de um parâmetro tenha tipo topológico constante, estendendo assim um resultado clássico de Parusiński. No caso particular de famílias de singularidades isoladas definidas sobre ICIS, provamos que μ -constância implica trivialidade topológica.

Palavras-chave: Conjuntos Subanalíticos; Espaços Analíticos Complexos; Estratificações de Whitney; Interseções Completas; Número de Milnor; Deformações Lineares; Trivialidade Topológica.

Abstract

In this work we study families of analytic functions defined on either subanalytic sets or complex analytic spaces. We give sufficient conditions for a family depending linearly on one parameter to have constant topological type, extending a classical result due to Parusiński. In the particular case of isolated singularity families defined on an ICIS, we prove that the μ -constancy implies topological triviality.

Keywords: Subanalytic Set; Complex Analytic Spaces; Whitney Stratification; Complete Intersections; Milnor Number; Linear Deformations; Topological Triviality.

Agradecimentos

Primeiramente a Deus pelo dom da vida, e por fazer de cada amanhecer fonte de luz e esperança.

A minha mãe, Rosemeire de Jesus e meus irmãos, Ewerton de Jesus e Jamerson Almeida por estarem incondicionalmente ao meu lado, com demonstrações de amor desmedidas. Por serem tudo pra mim e minhas motivações na vida. Nada teria sentido sem vocês, amores de minha vida.

Aos meus grandes amigos Djair Paulino e Aline Moreira. Vocês são anjos enviados em minha vida na forma de amigos. Amo vocês!

Às minhas madrinhas, Shirley Guimarães e Jucilene Santana, pelas palavras encorajadoras, pelo carinho, confiança.

A todas as pessoas de minha família que estão em Barrocas e em Feira de Santana, que sempre acreditaram que eu poderia chegar aqui.

Ao meu orientador Prof. Dr. Aurélio Menegon Neto, por todo ensinamento, paciência e disponibilidade em me orientar. A você só tenho agradecimentos e aproveito o momento para registrar o meu muito obrigado!

Ao meu coorientador, Prof. Dr. José Luis Cisneros-Molina, pela oportunidade de conhecer o México e o Instituto de Matemática (Unidade de Cuernavaca). Essa experiência agregou muito em minha vida pessoal e acadêmica.

Ao amigo brasileiro mais mexicano que já conheci, Otoniel Nogueira. Obrigado pelo aprendizado, pela disponibilidade e amizade. Sem falar nas viagens, que sem dúvida, foram muito enriquecedoras e alegres.

Aos professores de graduação e pós-graduação, pelos ensinamentos e motivações. Bem como a todos os outros mestres que tive na vida escolar.

A todos os meus amigos de graduação e pós-graduação. Em especial, Elisângela Alves, Edna Fonseca, Camila Marques e Janiely Maria.

A CAPES pelo apoio financeiro ao longo de todos esses anos.

Sumário

Introdução	1
Notação e terminologia	3
1 Ferramentas da Topologia Diferencial	5
1.1 Conjuntos Semianalíticos e Subanalíticos	5
1.2 Estratificações de Whitney e Teorema da Estrutura Cônica Local	7
1.3 Aplicações Homotópicas	14
1.4 Teoria de Fibrações e o Lema de Ehresmann	15
1.5 Transversalidade e pontos críticos de uma restrição	18
2 Trivialidade Topológica em Famílias de Aplicações Analíticas Reais e Complexas	20
3 Trivialidade Topológica em Famílias de Funções sobre Conjuntos Subanalíticos e Espaços Analíticos Complexos	28
3.1 Δ - regularidade e Trivialidade Topológica	28
3.2 Conjunto Singular Uniforme	41
3.3 Famílias μ -constante de funções definidas sobre ICIS	44
Referências	46

Introdução

O estudo de deformações de espaços analíticos e funções analíticas é de grande interesse em geometria real e complexa. Eles desempenham um papel central em muitas áreas da matemática, tal como Teoria de Singularidades, Geometria Diferencial, Geometria Algébrica e Análise Complexa.

Teissier conjecturou em [27] que o tipo topológico de uma família de germes na origem de hipersuperfícies complexas n -dimensionais com singularidade isolada, não muda se o número de Milnor for constante. Em 1976, D. T. Lê e C. P. Ramanujam [18] provaram a conjectura de Teissier para $n \neq 2$. O caso $n = 2$ é um dos principais problemas em teoria de singularidades. Em 1980, H. C. King [13] estudou a configuração mais geral de famílias de germes de funções analíticas reais afins, a vários parâmetros, tendo uma singularidade isolada na origem. Ele deu condições suficientes para que uma família seja topologicamente trivial.

Em 1998, A. Parusinski [21] deu condições suficientes para que uma família de germes de funções analíticas $F : (\mathbb{K}^n \times \mathbb{K}, \{0\} \times \mathbb{K}) \longrightarrow (\mathbb{K}, 0)$ da forma

$$f_s(x) := F(x, t) = f_0(x) + s\varphi(x),$$

com $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , seja topologicamente trivial. Isto significa que para cada $s \in \mathbb{K}$ suficientemente próximo da origem, existe um homeomorfismo $h_s : (\mathbb{K}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{K}^n, 0)$ que se restringe a um homeomorfismo $(V(f_s), 0) \longrightarrow (V(f_0), 0)$, onde $V(f_s) = f_s^{-1}(0)$. Na configuração complexa com singularidade isolada, a hipótese de Parusinski é equivalente à constância do número de Milnor. Portanto, dá uma solução para o problema de Lê-Ramanujam para deformações lineares.

Neste trabalho, estudamos famílias de germes de aplicações analíticas definidas so-

bre um conjunto subanalítico (quando $\mathbb{K} = \mathbb{R}$), ou sobre um espaço analítico complexo (quando $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). Como Parusinski, nós consideramos apenas famílias que dependem linearmente do parâmetro $s \in \mathbb{K}$, isto é,

$$f_s : (X, 0) \longrightarrow (\mathbb{K}, 0),$$

com $f_s(x) = f_0(x) + s\varphi(x)$.

Dizemos que tal família (f_s) tem tipo topológico constante se existe uma vizinhança W de 0 em \mathbb{K} tal que cada $s \in W$, existe um homeomorfismo de germes

$$h_s : (V(f_s), 0) \longrightarrow (V(f_0), 0).$$

Claramente esta é uma noção mais fraca de trivialidade topológica. Nosso objetivo é dar condições suficientes para que uma família (f_s) como acima tenha tipo topológico constante.

Dizemos que uma família (f_s) tem conjunto singular uniforme se existe uma vizinhança W de 0 em \mathbb{K} e um número real $\epsilon > 0$ tal que

$$\Sigma(f_s) \cap \mathbb{B}_\epsilon = \Sigma(f_0) \cap \mathbb{B}_\epsilon,$$

para cada $s \in W$. Neste caso definimos $\Sigma = \Sigma(f_s) \cap \mathbb{B}_\epsilon$ e dizemos que (f_s) tem conjunto singular uniforme Σ . Esta definição generaliza (para o cenário subanalítico com singularidade arbitrária) o conhecido conceito de *não coalescing de pontos críticos* (no ambiente afim com singularidade isolada, veja [13]) que no caso particular de famílias de hipersuperfícies complexas de singularidades isoladas, é equivalente à constância do número de Milnor (veja [12]).

Nosso principal resultado é o seguinte:

Teorema 0.0.1 *Seja $(X, 0)$ um germe de conjunto subanalítico em \mathbb{R}^N (resp. um germe de espaço analítico complexo em \mathbb{C}^N) e seja $f_s : (X, 0) \longrightarrow (\mathbb{K}, 0)$ com $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) uma família de germes de funções analíticas que depende linearmente de $s \in \mathbb{K}$. Se (f_s) tem conjunto singular uniforme $\Sigma = \{0\}$, então tem tipo topológico constante.*

A prova depende de uma implicação geométrica interessante da condição de ter conjunto singular uniforme, que chamamos de Δ -regularidade (Definição 3.1.1) que

nos permite construir um campo de vetores rugoso sobre X (no sentido de [26]), cuja integração dá os homeomorfismos desejados.

Objetivando apresentar resultados e ferramentas necessárias para o entendimento dos principais resultados, organizamos o texto da seguinte forma: no capítulo 1, apresentamos algumas ferramentas da Topologia Diferencial.

No Capítulo 2, fazemos um estudo da trivialidade topológica em uma configuração mais geral. Abordamos os principais resultados de trivialidade topológica em famílias de aplicações analíticas reais e complexas com singularidade isolada na origem.

Por fim, no capítulo 3, abordamos os resultados de trivialidade topológica para famílias de funções definidas sobre conjuntos subanalíticos ou espaços analíticos complexos. Este capítulo é subdividido em três seções. Na primeira seção tratamos de noção de Δ -regularidade e trivialidade topológica. Em seguida, na seção 3.2, abordamos o conceito de Conjunto Singular Uniforme. Na última seção, restringimos nossa atenção ao caso particular em que X é uma ICIS e cada f_s tem singularidade isolada. Neste caso, provamos que:

Teorema 0.0.2 *Seja $(X, 0) \subset \mathbb{C}^N$ o germe de uma ICIS e seja $f_s : (X, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$, com $s \in \mathbb{C}$, uma família de germes de funções com singularidade isolada dependendo linearmente de $s \in \mathbb{C}$. Se a família (f_s) é μ -constante, então tem tipo topológico abstrato constante.*

Notação e terminologia

- Em todo esse texto, \mathbb{K} denotará o corpo dos números reais \mathbb{R} ou o corpo dos números complexos \mathbb{C} .
- Usaremos o termo “aplicação” com o mesmo sentido de “função”, nos casos em que o contradomínio não é a reta.
- Denotaremos por \mathbb{B}_ϵ^n a bola unitária n -dimensional centrada na origem de raio ϵ , e por $\mathbb{S}_\epsilon^{n-1}$, sua respectiva fronteira, isto é:

$$\mathbb{B}_\epsilon^n = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x\| \leq \epsilon\},$$

$$\mathbb{S}_\epsilon^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x\| = \epsilon\}.$$

- Denotaremos por ∂A o bordo (ou fronteira do conjunto A).
- Denotaremos por \bar{A} o fecho topológico do conjunto A .
- Denotaremos por \mathring{A} o interior do conjunto A .
- Denotaremos por $C(X)$ o cone sobre o espaço topológico X , i.e.,

$$C(X) = (X \times [0, 1]) / (X \times 0).$$

- Dada uma função f denotaremos o conjunto de zeros de f por $V(f) := f^{-1}(0)$.

Capítulo 1

Ferramentas da Topologia Diferencial

Neste capítulo abordaremos os conceitos básicos essenciais para o desenvolvimento dos resultados relacionados à trivialidade topológica em famílias de aplicações analíticas reais ou complexas. As principais referências deste capítulo são [15], [1], [26] e [2].

1.1 Conjuntos Semianalíticos e Subanalíticos

Nosso principal foco nesta seção, é o estudo dos conjuntos subanalíticos. Para isso, seguiremos [2] e [1].

As funções analíticas são aquelas que localmente podem ser expandidas em séries de Taylor. Trata-se de uma classe mais ampla que as funções polinomiais. Formalmente, temos:

Definição 1.1.1 *Uma função $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é dita analítica se para cada $x_0 \in U$, existe uma vizinhança U_0 de x_0 em \mathbb{R}^n onde f pode ser desenvolvida como série de potências.*

Dizemos que um conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ é localmente analítico se para cada $x \in A$, existe uma vizinhança V_x de x em \mathbb{R}^n e funções analíticas $f_i : V_x \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$, tais que

$$A \cap V_x = \bigcap_{i=1}^n f_i^{-1}(0).$$

Recordando que um conjunto algébrico é o lugar geométrico dos zeros comuns de uma coleção de polinômios definidas em um corpo \mathbb{K} , temos que todo conjunto algébrico é um conjunto analítico. A recíproca é falsa. Com efeito, considere a função analítica real $h(x, y) = y + \sin(x)$. Por definição, $h^{-1}(0)$ é um conjunto analítico, porém não é algébrico, pois $\sin(x)$ não é uma função polinomial.

Nosso objetivo aqui, é definir conjuntos subanalíticos. Para isso, precisamos de algumas definições. De acordo com [2]:

Definição 1.1.2 *Um subconjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ é semianalítico se para cada $x \in A$, existe uma vizinhança V_x de x em \mathbb{R}^n e funções analíticas f_{jk}, g_{jk} definidas em V_x tais que:*

$$A \cap V_x = \bigcup_{j=1}^{\ell} \left(\bigcap_{k=1}^{s_j} \{x \in \mathbb{R}^n; f_{jk}(x) = 0, g_{jk}(x) > 0\} \right).$$

Note que todo conjunto analítico é um conjunto semianalítico.

Definição 1.1.3 *Uma função $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é dita semianalítica se seu gráfico*

$$\text{Graf}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+1}; x \in U \text{ e } y = f(x)\}$$

é um conjunto semianalítico.

Agora podemos definir uma categoria mais geral que a dos conjuntos semianalíticos, a dos conjuntos subanalíticos, que de acordo com [2]:

Definição 1.1.4 *Um subconjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ é dito subanalítico se existe um conjunto $\tilde{A} \subset \mathbb{R}^m$, semianalítico, $m \geq n$, tal que a projeção $\pi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ restrita a \tilde{A} é uma aplicação própria e $A = \pi(\tilde{A})$.*

De acordo com [1], temos o seguinte teorema para conjuntos subanalíticos:

Teorema 1.1.5 (Teorema de Tarski-Seidenberg para Conjuntos Subanalíticos)

A imagem de um conjunto subanalítico $A \subset \mathbb{R}^{n+1}$ por uma projeção $\pi : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ própria é um conjunto subanalítico.

Análogo ao que foi feito anteriormente, podemos definir aplicações subanalíticas da seguinte forma:

Definição 1.1.6 *Dizemos que uma função $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é subanalítica se seu gráfico $\text{Graf}(f) = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^{n+1}; x \in U\}$ é um conjunto subanalítico.*

1.2 Estratificações de Whitney e Teorema da Estrutura Cônica Local

Dada uma variedade algébrica V , Whitney provou que V pode ser particionada em finitas subvariedades com um número finito de componentes conexas. Posteriormente Whitney refinou sua definição, estabelecendo o conceito de estratificação de variedades analíticas reais ou complexas.

A ideia da estratificação de Whitney é decompor um espaço singular em subvariedades diferenciáveis disjuntas, tais que estas subvariedades satisfaçam certas propriedades, chamadas condições de Whitney, as quais nos dão um certo controle sobre como fragmentar esse espaço. As referências mais usadas nesta seção são [7] e [26].

Definição 1.2.1 *Seja $X \subset \mathbb{R}^n$. Uma estratificação localmente finita de X é uma partição $X = \bigcup_{\alpha \in J} X_\alpha$, onde cada X_α é uma subvariedade analítica suave e um subespaço subanalítico de X , chamadas de estratos, tal que para cada $x \in X$, existe uma vizinhança V_x de x em \mathbb{R}^n que intersecta apenas um número finito de estratos.*

Os próximos exemplos são clássicos e foram retirados de [1].

Observação 1.2.2 *Algumas referências não pedem que os estratos sejam subconjuntos analíticos em X , no entanto, em [26], Verdier pede essa condição para que se tenha uma condição especial sobre a estratificação, que é a (w) -condição, que abordaremos no decorrer da seção.*

Exemplo 1.2.3 *O “Guarda-Chuva de Whitney” dado por $G = V(x^2 - y^2z) \subset \mathbb{R}^3$, tem a seguinte estratificação:*

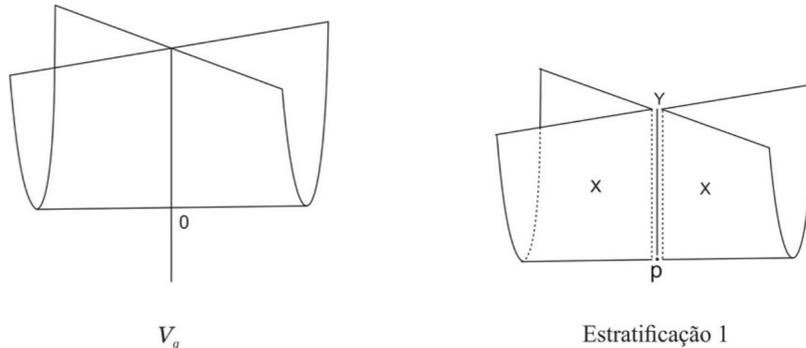


Figura 1.1: Estratificação de V_g

Exemplo 1.2.4 Seja $f(x, y, z) = z(x^2 - y^2) + x^4 + y^4$. Então V_f é definida por:

$$V_f = V(z(x^2 - y^2) + x^4 + y^4) \subset \mathbb{R}^3$$

e tem as seguintes estratificações:

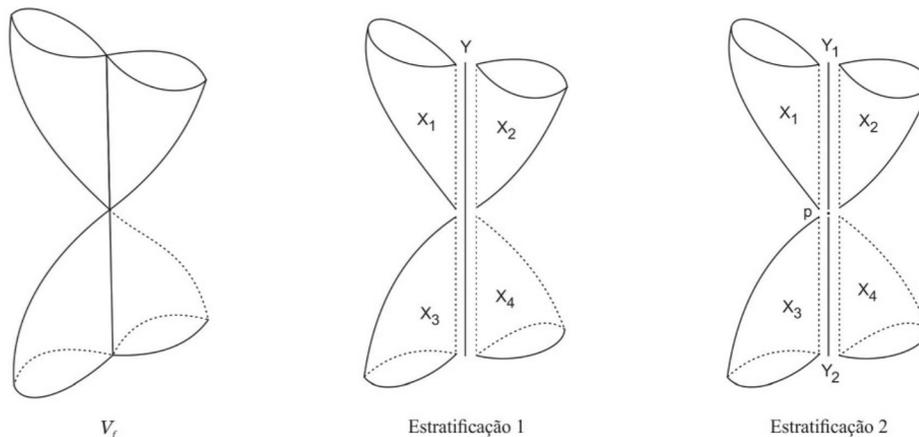


Figura 1.2: Estratificação de V_f

Exemplo 1.2.5 Seja $h(x, y, z) = x(x - y^2)$. Então V_h é definida por:

$$V_h = V(x(x - y^2)) \subset \mathbb{R}^3$$

e tem as seguintes estratificações:



Figura 1.3: Estratificação de V_h

Definição 1.2.6 Uma estratificação $\{X_\alpha\}$ de X satisfaz a condição de fronteira se para cada par de estratos (X_α, X_β) com $\overline{X_\beta} \cap X_\alpha \neq \emptyset$, tivermos $X_\beta \subset \overline{X_\alpha}$.

Exemplo 1.2.7 Considere o conjunto analítico $X = V(xy) \subset \mathbb{R}^2$. Considerando $X_1 = V(x)$, $X_2 = \{(x, 0); x > 0\}$ e $X_3 = \{(x, 0); x < 0\}$, então $\{X_1, X_2, X_3\}$ é

uma estratificação finita de X que não satisfaz a condição de fronteira, uma vez que $X_1 \cap \overline{X_2} \neq \emptyset$, mas $X_1 \not\subset \partial X_2$. No entanto, podemos refinar essa estratificação, obtendo os estratos $X_1 = \{(x, 0); x > 0\}$, $X_2 = \{(x, 0); x < 0\}$, $X_3 = \{(0, y); y > 0\}$, $X_4 = \{(0, y); y < 0\}$ e $X_5 = \{(0, 0)\}$, que claramente satisfazem a condição de fronteira.

Exemplo 1.2.8 Considere $M = \mathbb{R}^3$ e o cone $X = V(x^2 + y^2 - z^2)$, com $z \geq 0$. Tomando $X_1 = \{(0, 0, 0)\}$ e $X_2 = X \setminus X_1$, temos que essa estratificação satisfaz a condição de fronteira.

Definição 1.2.9 (Estratificação de Whitney) Seja $\{X_\alpha\}_{\alpha \in J}$ uma estratificação de um conjunto X obedecendo a condição de fronteira. Dizemos que $\{X_\alpha\}_{\alpha \in J}$ satisfaz as condições de Whitney se para cada par de estratos (X_α, X_β) tal que $X_\beta \subset \overline{X_\alpha}$ e para cada ponto $y \in X_\beta$, temos:

i) (a)-regular: Dada qualquer sequência de pontos $\{x_n\}$ em X_α que converge para y e tal que o limite $\lim_{n \rightarrow \infty} T_{x_n} X_\alpha = T$ existe na Grassmanniana correspondente, então $T_y X_\beta \subset T$.

ii) (b)-regular: Dada qualquer sequência de pontos $\{y_n\}$ em X_β que converge para y e tal que o limite $\lim_{n \rightarrow \infty} \overline{x_n y_n} = \lambda$ existe no espaço projetivo, então $\lambda \subset T$.

Se uma estratificação localmente finita $\{X_\alpha\}$ satisfaz a condição de fronteira e as condições de Whitney, dizemos que $\{X_\alpha\}$ é uma estratificação de Whitney.

Dizemos que a tripla (y, X_α, X_β) satisfaz a condição (a)-regular (resp. (b)-regular) se ela satisfaz em todos os pontos.

Vejamos agora que a condição (b)-regular implica a condição (a)-regular. Assim, para obtermos uma estratificação de Whitney será suficiente checarmos a condição (b).

Proposição 1.2.10 [1, Proposição 2.1] Se o par de estratos (X_α, X_β) satisfaz a condição (b) de Whitney em $y \in X_\beta$, então vale a condição (a) em y .

Exemplo 1.2.11 Seja C um cone de duas folhas com vértice na origem (conforme imagem abaixo). Consideremos a estratificação $\{S_1, S_2\}$ com S_1 uma geratriz do cone e $X_2 = C \setminus \{X_1\}$. Então, esta estratificação não satisfaz as condições de Whitney.

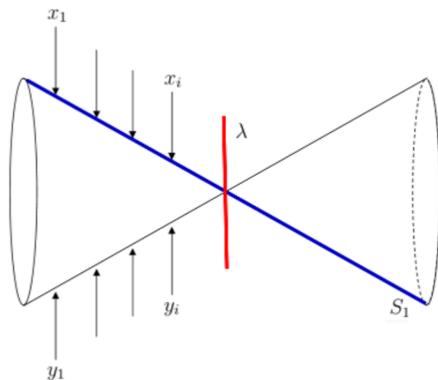


Figura 1.4: Estratificação do cone C

Considere agora um conjunto analítico $X \subset \mathbb{R}^n$ com uma estratificação de Whitney $X = (X_\alpha)$. Dizemos que essa estratificação satisfaz a (w) -condição de Kuo se: dados subespaços vetoriais A e B de \mathbb{R}^n , seja π_B a projeção ortogonal em B . Definamos a distância (ou ângulo) entre A e B por

$$\delta(A, B) = \sup_{a \in A, \|a\|=1} \text{dist}(a, B) = \sup_{a \in A, \|a\|=1} \|a - \pi_B(a)\|.$$

Considere a tripla (y, X_α, X_β) , onde X_α, X_β são estratos de X com $y \in X_\alpha \subset X_\beta$. A (w) -condição de Kuo (também conhecida como condição forte de Whitney) para a tripla (y, X_α, X_β) é satisfeita quando existe uma vizinhança U_y de $y \in X_\alpha \subset \mathbb{R}^n$ e uma constante $C > 0$ tal que

$$\delta(T_{y'}X_\alpha, T_xX_\beta) \leq C\|y' - x\|,$$

para todo $y' \in U_y \cap X_\alpha$ e todo $x \in U_y \cap X_\beta$.

A estratificação $X = (X_\alpha)$ de Whitney de classe é dita (w) -regular se toda tripla (y, X_α, X_β) satisfaz a (w) -condição de Kuo.

Teissier em [25] mostra que nos conjuntos analíticos complexos, as condições (w) -regular e (b) -regular são equivalentes. Em ([26], p. 297) consta-se a necessidade de definir cada estrato como um subespaço subanalítico no espaço mergulhado (Observação 1.1.8), para termos $(w) \Leftrightarrow (b)$ no corpo dos reais, caso contrário não teríamos essa implicação em geral.

O próximo resultado ilustra porque estratificações de Whitney constituem uma boa ferramenta para o estudo de variedades analíticas.

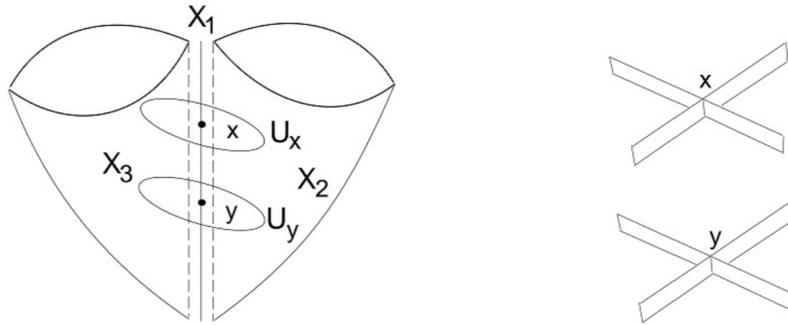
Teorema 1.2.12 *Toda variedade analítica (em \mathbb{R}^n ou \mathbb{C}^n) admite, localmente, uma estratificação de Whitney.*

Em ([26], Théorème (2.2)), Verdier prova que todo conjunto subanalítico possui uma estratificação de Whitney que é w -regular.

O próximo resultado é de extrema importância, pois nos diz que a ideia de uma estratificação é decompor uma variedade numa união disjunta de estratos, onde cada estrato consiste de pontos igualmente “ruins”.

Teorema 1.2.13 (Thom – Mather, [22] e [23]) *Seja V uma variedade estratificada sobre a condição (b)-regular. Ao longo de cada estrato X_i , localmente, a figura topológica permanece invariante no seguinte sentido: se x e y são dois pontos na mesma componente conexa do estrato X_i , então existem uma vizinhança U_x de x em V , uma vizinhança pequena U_y de y em V e um homeomorfismo h tal que $h(X_j) = X_j$ e, além disso, $h(X_j \cap U_x) = h(X_j \cap U_y)$ para cada j .*

Exemplo 1.2.14 *Considere o conjunto estratificado abaixo:*



Observe que, localmente, em x e y temos que $X_i \cap U_x$ é homeomorfo a $X_i \cap U_y$, para cada $i = 1, 2, 3$.

Definição 1.2.15 *Sejam X e Y conjuntos analíticos com estratificações de Whitney $(X_\alpha)_{\alpha \in A}$ e $(Y_\beta)_{\beta \in B}$, respectivamente. Uma aplicação $f : X \rightarrow Y$ é dita uma aplicação estratificada se*

- (i) f é contínua;
- (ii) $f(X_\alpha)$ está contido em algum estrato $Y_{\beta(\alpha)}$, para algum $\beta(\alpha) \in B$;
- (iii) A restrição de f a cada estrato X_α induz uma aplicação suave $f_\alpha : X_\alpha \rightarrow Y_{\beta(\alpha)}$.

Dizemos que uma aplicação estratificada f é uma submersão estratificada se cada f_α é uma submersão.

Dizemos que uma aplicação estratificada f é um homeomorfismo estratificado se cada f_α é um difeomorfismo.

Definição 1.2.16 *Seja X um conjunto analítico com uma estratificação de Whitney $(X_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$. Dizemos que um campo de vetores v em X é um campo de vetores tangente estratificado se para cada $\alpha \in \Lambda$, a restrição v_α de v a X_α é um campo de vetores tangente ao estrato.*

Nesta tese, vamos assumir que todo campo estratificado é contínuo, integrável e não nulo.

Uma função real $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ é dita uma função rugosa se para cada $\alpha \in \Lambda$, temos:

- a restrição de g a \mathcal{S}_α é suave;
- para qualquer $x \in \mathcal{S}_\alpha$, existe uma vizinhança U de x em \mathbb{R}^m e uma constante real $C > 0$ tal que para cada $x' \in U \cap \mathcal{S}_\alpha$ e para cada $y \in U \cap X$, tem-se

$$\|g(x') - g(y)\| \leq C\|x' - y\|.$$

Dizemos que uma aplicação $G : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma aplicação rugosa se cada função coordenada é rugosa.

Um campo de vetores estratificado v em X é chamado rugoso próximo a $y \in \mathcal{S}_\alpha$ se existe uma vizinhança U de y em \mathbb{R}^m e uma constante real $C > 0$ tal que

$$\|v(y') - v(x)\| \leq C\|y' - x\|,$$

para todo par $(x, y') \in (U \cap \mathcal{S}_\beta, U \cap \mathcal{S}_\alpha)$ com $\mathcal{S}_\alpha \subset \overline{\mathcal{S}_\beta}$.

O próximo resultado nos garante a existência de um campo de vetores rugoso levantado.

Teorema 1.2.17 [26, Proposition 4.6] *Seja X um espaço analítico real e seja A um subespaço localmente fechado de X , munido de uma estratificação de Whitney \mathcal{S} . Seja Y um espaço analítico real suave de \mathbb{R}^n , $f : X \rightarrow Y$ uma aplicação transversal a \mathcal{S} e η um campo de vetores C^∞ em Y . Então existe um campo rugoso ξ de vetores tangentes a (A, \mathcal{S}) que levanta η , isto é, tal que para todo $x \in A$, temos $Df_x(\xi_x) = \eta_{f(x)}$.*

Seja η um campo rugoso de vetores tangentes a (A, \mathcal{S}) . Veremos que a este campo corresponde um grupo a um parâmetro de difeomorfismos. Vamos munir $A \times \mathbb{R} \subset X \times \mathbb{R}$ com a estratificação $\mathcal{S} \times \mathbb{R}$. Em outras palavras, isso significa que todo campo rugoso é integrável.

Proposição 1.2.18 [26, Proposition 4.8] *Existe uma vizinhança aberta $U \subset A \times \mathbb{R}$ de $A \times \{0\}$ e uma aplicação rugosa $\theta : U \rightarrow A$ com as seguintes propriedades:*

- (i) para todo estrato \mathcal{S}_α de \mathcal{S} , $\theta((\mathcal{S}_\alpha \times \mathbb{R}) \cap U) \subset \mathcal{S}_\alpha$;
- (ii) para todo estrato \mathcal{S}_α e para cada $x \in \mathcal{S}_\alpha$ tal que $(x, t) \in (\mathcal{S}_\alpha \times \mathbb{R}) \cap U$, temos que $\frac{\partial}{\partial t} \theta(x, t) = \eta_{\theta(x, t)}$.

Agora, veremos um resultado muito importante em Teoria de Singularidade. Ele nos garante a estrutura cônica (no sentido abaixo) de $V(f) = f^{-1}(0)$.

Definição 1.2.19 *O subespaço $X \subset \mathbb{R}^n$ tem estrutura cônica quando é homeomorfo ao $\text{Cone}(X \cap \mathbb{S}_\epsilon)$, o qual é definido como sendo a união de todos os segmentos $tp + (1-t)x_0$, $0 \leq t \leq 1$ onde $a \in X \cap \mathbb{S}_\epsilon$ e x_0 é o ponto base, neste caso, o centro da esfera de raio ϵ .*

Com esta definição, finalmente podemos enunciar o Teorema da Estrutura Cônica Local:

Teorema 1.2.20 [15, Theorem 2.10] *Seja $X \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto analítico e $x \in X$. Existe $\epsilon_0 > 0$ real suficientemente pequeno tal que, para cada ϵ com $0 < \epsilon \leq \epsilon_0$, existe um homeomorfismo de pares*

$$(\mathbb{B}_\epsilon(x), \mathbb{B}_\epsilon(x) \cap X) \cong (\text{Cone}(\mathbb{S}_\epsilon(x)), \text{Cone}(\mathbb{S}_\epsilon(x) \cap X)).$$

Assim, temos a conhecida ilustração da esfera de Milnor.

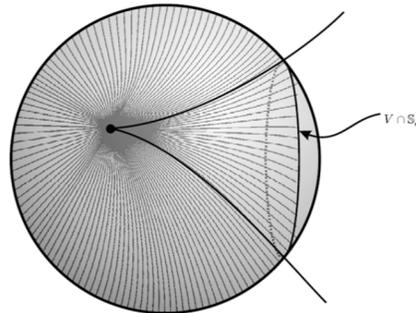


Figura 1.5: Esfera de Milnor

1.3 Aplicações Homotópicas

Definição 1.3.1 *Sejam X e Y espaços topológicos e $f, g : X \rightarrow Y$ aplicações contínuas. Dizemos que f e g são homotópicas se existe uma aplicação contínua*

$$h : [0, 1] \times X \rightarrow Y$$

tal que $h(0, x) = f(x)$ e $h(1, x) = g(x)$ para todo $x \in X$.

A função h é dita uma homotopia entre f e g . A notação que se usa para indicar que f é homotópica a g é:

$$h : f \simeq g.$$

Uma homotopia h entre f e g é uma família a um parâmetro de funções contínuas entre X e Y , isto é, para cada $t \in I$:

$$f_t : X \rightarrow Y$$

é contínua, onde $f_t(x) = h(x, t)$. Intuitivamente, uma homotopia deforma continuamente f em g .

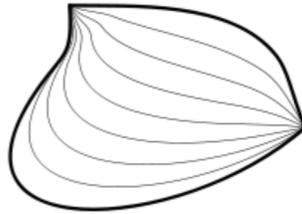


Figura 1.6: homotopia entre caminhos

Observação 1.3.2 *Seja $\mathcal{C}(X, Y)$ o espaço das aplicações contínuas de X em Y , com a topologia compacto-aberta. Uma homotopia deve ser vista como um caminho*

$$\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathcal{C}(X, Y)$$

ligando as funções f e g em $\mathcal{C}(X, Y)$.

Exemplo 1.3.3 *Sejam $X = \{a\}$, $Y = \{a, b\}$ com a topologia discreta e $f, g : X \rightarrow Y$ definidas por $f(a) = a$ e $g(a) = b$. Então f não é homotópica a g . Com efeito, Suponha que $H : f \simeq g$, então $\alpha : [0, 1] \rightarrow Y$ definida por $\alpha(t) = h(t, x)$ é uma caminho tal que $\alpha(0) = a$ e $\alpha(1) = b$. Logo a e b estão na mesma componente conexa por caminho, o que é um absurdo.*

A relação de homotopia entre funções é uma relação de equivalência no espaço $\mathcal{C}(X, Y)$. Se Y é um espaço vetorial, então $\mathcal{C}(X, Y)$ é também um espaço vetorial. Neste caso, quaisquer duas funções $f, g \in \mathcal{C}(X, Y)$ são homotópicas entre si através da homotopia $h : [0, 1] \times X \rightarrow Y$ definida por

$$h(t, x) := (1 - t)f(x) + tg(x).$$

Se $Y \subset \mathbb{R}^n$ é um subconjunto convexo, uma homotopia semelhante mostra que quaisquer duas funções em $\mathcal{C}(X, Y)$ são homotópicas.

Exemplo 1.3.4 *Sejam $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ definidas por $f(x) = (x, x^2)$ e $g(x) = (x, x)$; logo $f \simeq g$. De fato, definamos a seguinte homotopia:*

$$\begin{aligned} h : \mathbb{R} \times I &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, t) &\mapsto (x, x^2 - tx^2 + tx). \end{aligned}$$

Claramente, h é contínua, $h(x, 0) = f(x)$ e $h(x, 1) = g(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Logo:

$$f \simeq g.$$

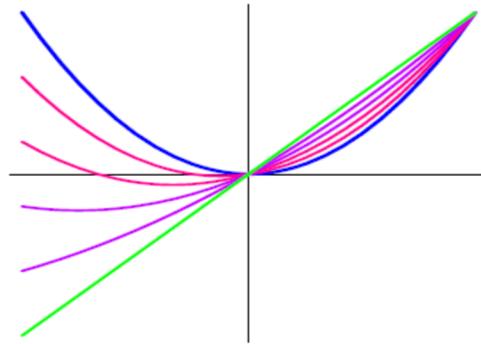
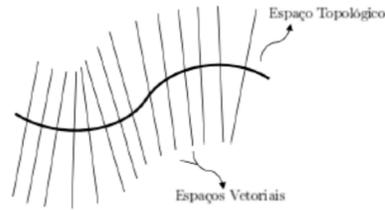


Figura 1.7: homotopia entre f e g

1.4 Teoria de Fibrações e o Lema de Ehresmann

Em Topologia Diferencial, um fibrado vetorial (f.v) é um espaço topológico que é uma associação de um espaço vetorial a cada ponto de um espaço mais simples satisfazendo determinadas propriedades que ligam as estruturas do espaço topológico aos espaços vetoriais.



Fibras em um Espaço Topológico

- X chama-se base;
- F_x é a fibra sobre x ;
- $\cup F_x$ chama-se espaço total do fibrado.

Essencialmente, a propriedade de ligar a base às fibras é que localmente, o fibrado vetorial seja muito parecido com um cilindro, ou seja, para cada $x \in X$, existe uma vizinhança U de x em X tal que $U \times F_x$ é homeomorfo a um aberto do fibrado. Neste trabalho, abordaremos apenas os fibrados topológicos, que formalmente são definidos da seguinte forma:

Definição 1.4.1 *Um fibrado topológico localmente trivial é uma aplicação contínua e sobrejetiva*

$$f : E \longrightarrow B$$

entre espaços topológicos tal que para cada $b \in B$, existe uma vizinhança aberta V_b de b em B e um homeomorfismo:

$$h_b : f^{-1}(V_b) \longrightarrow V_b \times f^{-1}(b)$$

tal que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccc}
 f^{-1}(U_b) & \xrightarrow{f} & U_b \\
 \downarrow h_b & \nearrow \pi_1 & \\
 U_b \times \mathbb{R}^k & &
 \end{array}$$

onde π_1 é a projeção na primeira coordenada.

Na definição acima, dizemos que E é o espaço total (espaço fibrado) e que B é a base do fibrado f .

Observação 1.4.2 *Se $f : E \rightarrow B$ é um fibrado topológico localmente trivial, então $f^{-1}(b)$ é homeomorfo a $f^{-1}(b')$ para todos $b, b' \in B$.*

Analogamente, definimos o seguinte:

Definição 1.4.3 *Um fibrado suave localmente trivial é uma aplicação suave e sobrejetiva:*

$$f : E \rightarrow B$$

entre variedades suaves tal que para cada $b \in B$, existe uma vizinhança aberta V_b de b em B e um difeomorfismo:

$$h_b : f^{-1}(V_b) \rightarrow V_b \times f^{-1}(b)$$

tal que $(f \circ h_b) : V_b \times f^{-1}(b) \rightarrow f^{-1}(b)$ é a projeção na primeira coordenada.

Neste caso, todas as fibras $f^{-1}(b)$ são difeomorfas, para $b \in B$.

Observação 1.4.4 *Seja $\pi : E \rightarrow B$ um fibrado localmente trivial. Se B é um espaço contrátil, então é um fibrado globalmente trivial.*

Da teoria geral de fibrados, sabemos que a projeção de fibrado suave localmente trivial é uma submersão. Assim, um problema natural é o seguinte: Dadas M e N variedades suaves e $f : M \rightarrow N$ uma submersão sobrejetiva suave, encontrar condições suficientes para que f seja um fibrado suave localmente trivial. Uma tal condição é dada pelo Teorema de Fibrção de Ehresmann:

Teorema 1.4.5 [7, Theorem 3.4] *Se $f : M \rightarrow N$ é uma submersão própria, suave e sobrejetiva, então f é a projeção de um fibrado suave localmente trivial.*

Temos a seguinte versão do Teorema 1.4.5 para variedades com fronteira:

Teorema 1.4.6 [16, Theorem 3.1] *Seja $f : M \rightarrow N$ uma aplicação suave entre variedades suaves, com $\partial M \neq \emptyset$. Se f é uma submersão sobrejetiva e própria, e se a restrição de f à fronteira de M também é uma submersão, então f é um fibrado suave localmente trivial.*

O próximo resultado é uma generalização do Teorema de Fibrção de Ehresmann para conjuntos analíticos singulares.

Lema 1.4.7 (1° Lema de Isotopia de Thom-Mather) [7, Theorem 7.17] *Seja $f : X \rightarrow N$ uma aplicação suave e sobrejetiva entre um conjunto analítico X com uma estratificação de Whitney $(S_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ e uma variedade suave N . Se f é própria e se a restrição $f_\alpha : S_\alpha \rightarrow N$ é uma submersão sobrejetiva para cada $\alpha \in \Lambda$, então f é a projeção de um fibrado topológico localmente trivial.*

1.5 Transversalidade e pontos críticos de uma restrição

Nesta seção, abordamos um conceito que descreve como espaços podem se intersectar.

Definição 1.5.1 *Sejam $f : M \rightarrow N$ uma aplicação suave e $L \subset N$ uma subvariedade suave. Dizemos que f é transversal a L , e denotamos por $f \pitchfork L$, se para cada $x \in f^{-1}(L)$, temos:*

$$df_x(T_x M) + T_{f(x)} L = T_{f(x)} N.$$

Teorema 1.5.2 *Sejam $f : M \rightarrow N$ uma aplicação suave e $L \subset N$ uma subvariedade de N de codimensão k . Se $f \pitchfork L$ e $f^{-1}(L) \neq \emptyset$, então $f^{-1}(L)$ é uma subvariedade de M de codimensão k .*

Definição 1.5.3 *Sejam A e B subvariedades suaves de uma variedade suave M e seja $x \in A \cap B$. Dizemos que A intersecta B transversalmente em x , e denotamos por $A \pitchfork_x B$, se*

$$T_x A + T_x B = T_x M.$$

Se A intersecta transversalmente B para todo $x \in A \cap B$, dizemos que A é transversal a B e denotamos por $A \pitchfork B$.

Teorema 1.5.4 *Sejam $A, B \subset M$ subvariedades suaves de M . Se $A \pitchfork B$, então $A \cap B$ é uma subvariedade de M e $\text{codim}(A \cap B) = \text{codim}(A) + \text{codim}(B)$.*

Definição 1.5.5 *Seja X um conjunto analítico com uma estratificação de Whitney $(X_\alpha)_{\alpha \in A}$. Seja N uma subvariedade suave de uma variedade suave M e $x \in X_\alpha \cap N$. Dizemos que X intersecta transversalmente N em x em M no sentido estratificado se X_α intersecta transversalmente N em x em N .*

Dizemos que X intersecta N transversalmente em M no sentido estratificado, se X intersecta N transversalmente em x em M para todo $x \in X \cap N$.

Lema 1.5.6 (Pontos críticos de uma restrição) *Seja $f : M \rightarrow N$ uma aplicação suave entre variedades suaves e seja $Z \subset M$ uma subvariedade suave. O conjunto dos pontos críticos da restrição $f|_Z : Z \rightarrow N$ é dado por:*

- (i) *Os pontos críticos da f que estão em Z .*
- (ii) *Os pontos regulares x de f que estão em Z tais que a fibra $f^{-1}(f(x))$ intersecta não transversalmente Z em x em M .*

Isto é,

$$\text{Crit}(f|_Z) = (\text{Crit}(f) \cap Z) \cup \{x \in \text{Reg}(f); Z \overset{\text{não}}{\cap} f^{-1}(f(x))\}.$$

Observação 1.5.7 *Nas condições do lema acima, os pontos regulares de $f|_Z$ são os pontos regulares de f tais que $f^{-1}(f(x)) \cap T_x Z$.*

Definição 1.5.8 *Dizemos que $\epsilon_0 > 0$ é um raio de Milnor para uma aplicação $f : X \rightarrow \mathbb{R}^k$ com $0 \in X$ e com $f(0) = 0$ (com respeito a uma dada estratificação de Whitney $f^{-1}(0) = (S_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$) se $f^{-1}(0)$ intersecta as esferas \mathbb{S}_ϵ transversalmente no sentido estratificado, para todo $0 < \epsilon \leq \epsilon_0$.*

Temos o seguinte corolário do Lema 1.5.6:

Corolário 1.5.9 *Seja $f : X \rightarrow \mathbb{R}^k$ com $0 \in X$ e $f(0) = 0$. Seja $f^{-1}(0) = (S_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ uma estratificação de Whitney de $f^{-1}(0)$. Então:*

- (i) *Existe um raio de Milnor $\epsilon_0 > 0$ para f (com respeito a estratificação de Whitney de $f^{-1}(0) = (S_\alpha)_\alpha$);*
- (ii) *Se ϵ_0 é um raio de Milnor para f , então para todo ϵ com $0 < \epsilon \leq \epsilon_0$, existe um homeomorfismo de pares:*

$$(\mathbb{B}_\epsilon(x), \mathbb{B}_\epsilon(x) \cap X) \cong (\text{Cone}(\mathbb{S}_\epsilon(x)), \text{Cone}(\mathbb{S}_\epsilon(x) \cap X)).$$

Definição 1.5.10 [26, Définition 3.2] *Sejam X e Y espaços analíticos reais (resp. complexos), $f : X \rightarrow Y$ uma aplicação e $S = (\mathcal{S}_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ uma estratificação de Whitney de X . Dizemos que f é transversal à estratificação \mathcal{S} se, para cada $\alpha \in \Lambda$, a restrição de f a cada estrato \mathcal{S}_α é uma submersão.*

Observação 1.5.11 [26, Remarque 3.7] *Sejam X e Y como acima, A um subconjunto de X com uma estratificação de Whitney \mathcal{S} e $f : X \rightarrow Y$ uma aplicação. Suponha que Y seja suave e f transversal a \mathcal{S} . Então, para qualquer subespaço suave localmente fechado $Z \subset Y$, $f^{-1}(Z) \cap S$ é uma estratificação de Whitney de $A \cap f^{-1}(Z)$ satisfazendo a propriedade (w).*

Capítulo 2

Trivialidade Topológica em Famílias de Aplicações Analíticas Reais e Complexas

Uma família de germes é o germe em $\mathbb{K}^p \times \{0\}$ de alguma função contínua

$$F : (\mathbb{K}^p \times \mathbb{K}^n, \mathbb{K}^p \times \{0\}) \longrightarrow (\mathbb{K}^k, 0).$$

Usualmente denotaremos uma família de germes por $f_s : (\mathbb{K}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{K}^k, 0)$, com $s \in \mathbb{K}^p$, onde $f_s(x) = F(s, x)$.

Neste capítulo, estaremos interessados em famílias de germes de aplicações analíticas reais e complexas com singularidade isolada, que são topologicamente triviais. Abordaremos aqui os resultantes mais relevantes que se tem sobre trivialidade topológica.

No caso complexo, muito se sabe sobre trivialidade topológica de famílias de aplicações analíticas e várias equivalências foram obtidas por vários autores, como Lê-Ramanujam [18] e Timourian [24]. As principais referências para este capítulo são [13], [14], [18] e [24].

Definição 2.0.1 *Sejam $f, g : (\mathbb{R}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^k, 0)$ germes de aplicações analíticas. Dizemos que f e g são topologicamente \mathcal{R} -equivalentes, e denotamos por $f \sim_{\mathcal{R}} g$, se existe um germe de homeomorfismo $h : (\mathbb{R}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$ tal que o seguinte diagrama*

comuta:

$$\begin{array}{ccc}
 (\mathbb{R}^n, 0) & \xrightarrow{f} & (\mathbb{R}^k, 0) \\
 \downarrow h & & \nearrow g \\
 (\mathbb{R}^n, 0) & &
 \end{array}$$

Exemplo 2.0.2 *Pela Forma Local das Submersões, toda submersão (topológica) é topologicamente \mathcal{R} -equivalente a uma projeção.*

Definição 2.0.3 *Dizemos que f_s é topologicamente trivial (ou que tem trivialidade topológica forte em $0 \in \mathbb{K}$), se existe uma vizinhança V de 0 em \mathbb{K}^p e uma família de germes de homeomorfismos*

$$h_s : (\mathbb{K}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{K}^n, 0),$$

para cada $s \in V$ que se restringe a um homeomorfismo $(V(f_s), 0) \longrightarrow (V(f_0), 0)$.

Definição 2.0.4 *Dizemos que F tem tipo topológico constante se existe uma vizinhança W de 0 em \mathbb{K}^p tal que para cada $s \in W$, existe um homeomorfismo de germes*

$$h_s : (V(f_s), 0) \longrightarrow (V(f_0), 0),$$

onde $V(f_s) = f_s^{-1}(0)$.

Observe que esta é uma noção mais fraca de trivialidade topológica.

Definição 2.0.5 *Dizemos que a família f_t não tem curva de coalescing (curva de pontos críticos) se existem números reais $\epsilon > 0$ e $\delta > 0$ tal que para cada $t \in (-\delta, \delta)$, temos que a origem é o único ponto crítico de f_t em \mathbb{B}_ϵ^n . Caso contrário, dizemos que a família tem curva de coalescing.*

Exemplo 2.0.6 *A família $f_s : (\mathbb{R}^3, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}, 0)$ dada por*

$$f_s(x, y, z) = sx^q + xz + y^p, \quad p, q \geq 2,$$

não tem curva de coalescing. De fato,

$$\text{grad} f_s(x, y, z) = (qsx^{q-1} + z, py^{p-1}, x).$$

Como $(p-1), (q-1) \geq 1$, temos

$$\text{grad} f_s(x, y, z) = 0 \iff x = 0, y = 0 \quad e \quad z = -qsx^{q-1} = 0,$$

logo,

$$\text{Crit}(f_s) = \{(0, 0, 0)\} \times \mathbb{R}.$$

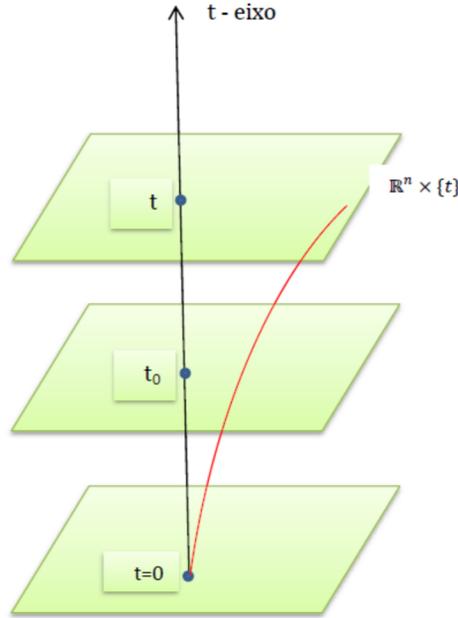


Figura 2.1: Curva de coalescing

No caso complexo, combinando os Teoremas de Lê-Ramanujam e Timourian [24], temos para $n \neq 3$ um resultado que garante que para famílias de funções holomorfas com singularidade isolada, não existência de curva de coalescing é uma condição suficiente para garantir trivialidade topológica.

Teorema 2.0.7 (Lê-Ramanujam and Timorian) *Para qualquer deformação $F : (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}, 0 \times \mathbb{C}) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ de uma função holomorfa $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ ($n > 1$ e $n \neq 3$) com singularidade isolada, as seguintes afirmações são equivalentes:*

- (i) F é topologicamente trivial.
- (ii) F é uma deformação μ -constante de f .
- (iii) $\{(x, t) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C} \mid \frac{\partial F}{\partial x_i} = 0, i = 1, \dots, n\} = \{0\} \times \mathbb{C}$ numa vizinhança de $(0, 0)$.

Uma pergunta natural é: no caso real analítico, não coalescing de pontos críticos é uma condição suficiente para garantir trivialidade topológica? A resposta é não, veja o exemplo abaixo.

Exemplo 2.0.8 *King mostrou em [13] que para $n \geq 5$ existe um germe de polinômio $g : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ com as seguintes propriedades:*

- (i) g tem singularidade isolada na origem;

- (ii) Seja h os monômios de grau mais alto de g . Vamos pedir que 0 seja o único ponto crítico de h ;
- (iii) Para cada $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, $g^{-1}(0) \cap \mathbb{S}_\varepsilon$ e $h^{-1}(0) \cap \mathbb{S}_\varepsilon$ não são homotopicamente equivalentes.

Assim, a deformação $F : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, 0 \times \mathbb{R}) \longrightarrow (\mathbb{R}, 0)$ dada por

$$F(x, t) = \begin{cases} t^k g(x/t), & \text{se } t \neq 0 \\ h(x), & \text{se } t = 0, \end{cases}$$

não tem coalescing de pontos críticos, tampouco trivialidade topológica. De fato,

$$\text{grad} f_t(x, t) = \begin{cases} t^{k-1} \text{grad} g(x/t), & \text{se } t \neq 0 \\ \text{grad} h(x), & \text{se } t = 0, \end{cases}$$

logo se $x \neq 0$, $\text{grad} f_t(x, t) \neq 0$, ou seja,

$$\text{Crit}(f_t) = \{(0, t)\}.$$

Portanto, a família f_t não tem coalescing de pontos críticos. Agora, para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno e para $t \neq 0$, temos o seguinte homeomorfismo

$$\begin{array}{ccc} \varphi : \mathbb{S}_\varepsilon \cap f_t^{-1}(0) & \longrightarrow & \mathbb{S}_{\varepsilon/t}^{n-1} \cap g^{-1}(0) \\ x & \mapsto & x/t \end{array}$$

Analogamente temos um homeomorfismo entre $\mathbb{S}_\varepsilon \cap f_0^{-1}(0)$ e $\mathbb{S}_{\varepsilon/t}^{n-1} \cap h^{-1}(0)$. Logo pela propriedade (iii), $\mathbb{S}_\varepsilon \cap f_t^{-1}(0)$ não pode ser homeomorfo a $\mathbb{S}_\varepsilon \cap f_0^{-1}(0)$.

Ou seja, no caso real, apenas a não existência de curva de coalescing não é suficiente para garantir trivialidade topológica. No entanto, King apresenta uma condição suficiente para que famílias de germes com não coalescing de pontos críticos, tenha trivialidade topológica. Os próximos resultados caracterizam, de forma completa, esta condição.

Definição 2.0.9 *Seja $f_s : (\mathbb{R}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}, 0)$ uma família de germes com ponto crítico isolado. Dizemos que f_s tem raio de Milnor uniforme se existem números reais $\varepsilon_0 > 0$ e $\delta > 0$ tais que para cada $s \in (-\delta, \delta)$, $\mathbb{B}_{\varepsilon_0}^n$ é uma bola de Milnor para f_s , ou seja, $f_s^{-1}(0)$ intersecta transversalmente as esferas \mathbb{S}_ε , para cada $s \in (-\delta, \delta)$ e cada $\varepsilon \leq \varepsilon_0$.*

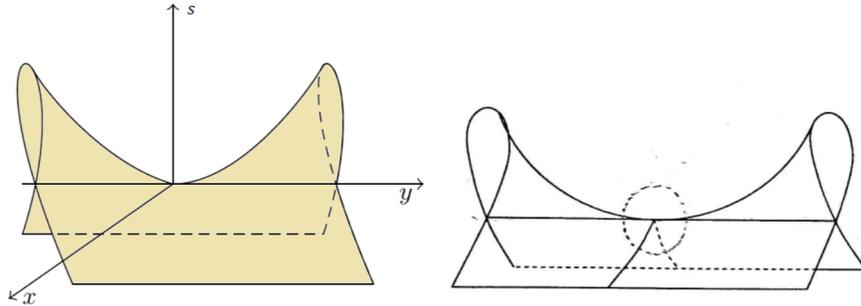
Se δ pode ser tomado arbitrariamente grande, dizemos que f_s tem raio de Milnor uniforme global.

Observação 2.0.10 Note que f_s tem raio de Milnor uniforme se, e somente se, existe $\epsilon_0 > 0$ e $\delta > 0$ tais que os vetores normais a $f_s^{-1}(0)$ e \mathbb{S}_ϵ , que são dados, respectivamente, por $\text{grad}f(p)$ e o vetor posição, não são paralelos para todo $p \in \mathbb{B}_{\epsilon_0}$ e $s \in (-\delta, \delta)$.

Proposição 2.0.11 Seja f_s uma família de germes com ponto crítico isolado. Se existe uma curva $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $\gamma(s) \in V(f_s)$ para $s \in (-\epsilon, \epsilon)$, $\nabla f_s(\gamma(s)) = \alpha_s \gamma(s)$ (α_s é uma constante que depende de s) e $\lim_{s \rightarrow 0} \gamma(s) = (0, 0)$, então f_s não tem raio de Milnor uniforme.

Demonstração. Suponhamos por absurdo que f_s tem raio de Milnor uniforme, logo existem números $\epsilon_0, \delta > 0$ tais que os vetores $\nabla f_s(p)$ e \vec{p} não são paralelos, para cada $p \in \mathbb{B}_{\epsilon_0}$ e $s \in (-\delta, \delta)$. Pela nossa hipótese inicial, existe uma curva γ em \mathbb{R}^n tal que $\nabla f_s(\gamma(s)) = \alpha_s \gamma(s)$ e $\lim_{s \rightarrow 0} \gamma(s) = (0, 0)$. Logo, existe $s_0 \in (-\epsilon, \epsilon)$ tal que $\gamma(s_0) \in \mathbb{B}_{\epsilon_0}$, implicando que $\nabla f_s(\gamma(s_0)) = \alpha_s \gamma(s_0)$, o que contraria nossa hipótese de absurdo. Portanto, f_s não tem raio de Milnor uniforme. ■

Exemplo 2.0.12 A família $f_s(x, y) = sx^2 + x^3 - y^2$ não tem raio de Milnor uniforme. De fato, pelo Teorema da Estrutura Cônica Local, existe $\epsilon_0 > 0$ raio de Milnor para f_0 .



Seja s suficientemente pequeno. Sabemos que em cada ponto $p \in V(f_s)$, o vetor normal a $V(f_s)$ em p é dado por $\nabla f_s(p)$. Assim, a curva $\gamma(s) = (-s, 0)$ é tal $\gamma(s) \in V(f_s)$, $\nabla f_s(\gamma(s))$ é paralelo a $\vec{\gamma}(s)$ e $\lim_{s \rightarrow 0} \gamma(s) = (0, 0)$. Portanto, pela Proposição 2.0.11, f_s não tem raio de Milnor uniforme.

Definição 2.0.13 [9, Definition 3.6] Um germe de aplicação analítica $f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^k, 0)$ com valor crítico isolado é d -regular, se existe $\epsilon_0 > 0$ tal que $(X_L \setminus V(f)) \cap \mathbb{S}_\epsilon$, para cada $\epsilon \leq \epsilon_0$ e para cada linha L em \mathbb{R}^k passando pela origem, onde $X_L := f^{-1}(L)$.

Para o próximo resultado, precisamos de uma reformulação sutil da definição dada acima:

Definição 2.0.14 *Seja $f : (\mathbb{R}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^k, 0)$ um germe de função analítica com valor crítico isolado. Dizemos que f é d^* -regular, se existe $\epsilon_0 > 0$ tal que $(X_L \setminus \text{Crit}(f)) \pitchfork \mathbb{S}_\epsilon$, para cada $\epsilon \leq \epsilon_0$ e para cada linha L em \mathbb{R}^k passando pela origem.*

Proposição 2.0.15 *Seja $f : \mathbb{R}^n, 0 \longrightarrow \mathbb{R}^k, 0$ um germe de função analítica com valor crítico isolado. Então, f é d -regular se, e somente se, é d^* -regular.*

Demonstração. É imediato verificar que d^* -regularidade implica d -regularidade. De fato, suponha que f é d^* -regular, então existe $\epsilon_0 > 0$ tal que

$$(X_L \setminus \text{Crit}(f)) \pitchfork \mathbb{S}_\epsilon,$$

para cada $\epsilon \leq \epsilon_0$. Em particular, se $x \notin V(f)$, como $\text{Crit}(f) \subset V(f)$, segue que $x \notin \text{Crit}(f)$, logo X_L intersecta transversalmente \mathbb{S}_ϵ em x . Portanto, f é d -regular.

Reciprocamente, suponha que f é d -regular, então existe $\eta_0 > 0$ tal que

$$(X_L \setminus V(f)) \pitchfork \mathbb{S}_\epsilon,$$

para cada $\epsilon \leq \eta_0$. Seja $x \in V(f) \setminus \text{Crit}(f)$ e seja $(\mathcal{S}_\alpha)_\alpha$ uma estratificação de Whitney para $V(f)$. Temos que $x \in \mathcal{S}_\alpha$, para algum α . Pelo Teorema da estrutura Cônica Local, existe $\delta_0 > 0$ tal que \mathcal{S}_α é transversal a \mathbb{S}_ϵ em x , para cada $\epsilon \leq \delta_0$. Ou seja, existe $\vec{v} \in T_x \mathcal{S}_\alpha$ tal que $\vec{v} \notin T_x \mathbb{S}_\epsilon$. Como $\mathcal{S}_\alpha \subset X_L$, segue que $\vec{v} \in T_x(X_L \setminus \text{Crit}(f))$. Portanto, existe $\epsilon_0 > 0$ tal que $(X_L \setminus \text{Crit}(f)) \pitchfork \mathbb{S}_\epsilon$, para cada $\epsilon \leq \epsilon_0$. ■

Observação 2.0.16 *Seja $f = (g, h) : (\mathbb{R}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$ um germe de função analítica e considere a família definida por $f_s(x) := sg(x) + h(x)$, com $s \in \mathbb{R}$. Então, para cada s fixo:*

$$\begin{aligned} (f_s)^{-1}(0) &= \{x \in \mathbb{R}^n; -sg(x) = h(x)\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^n; f(x) = (g(x), -sg(x))\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^n; f(x) \in \langle (1, -s) \rangle := L_s\} \\ &= X_{L_s}, \end{aligned}$$

onde $\langle (1, -s) \rangle$ denota a linha que passa pela origem e pelo ponto $(1, -s)$.

Lema 2.0.17 *Seja $f = (f_0, f_1) : (\mathbb{R}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$ um germe de função analítica com valor crítico isolado. Se f é d -regular, então a família $f_s := sf_0 + f_1$ tem raio de Milnor uniforme.*

Demonstração. É uma consequência imediata da Definição 2.0.13 e da Observação 2.0.16. ■

O próximo resultado nos diz que raio de Milnor uniforme é uma condição suficiente para garantir a trivialidade topológica de famílias sem curva de coalescing.

Teorema 2.0.18 [13, Corollary 4] *Suponha que $f_t : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^k, 0)$ é uma família de germes de polinômios que não tem coalescing de pontos críticos e que tem raio de Milnor uniforme. Então existe uma família contínua $h_t : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$ de germes de homeomorfismos tal que $f_0 = f_t \circ h_t$ para todo t .*

Observe que esse Teorema nos dá um resultado de trivialidade topológica, apenas para os casos em que a família de germes f_s não possui curva de coalescing e tem raio de Milnor uniforme. No entanto, nada sabemos a respeito da trivialidade em famílias de germes que gozem de apenas uma (ou nenhuma) dessas propriedades. Veja os exemplos abaixo.

Exemplo 2.0.19 *A família $f_s(x, y) = sx^5 + x^4 + y^3$ tem tipo topológico localmente constante. Primeiramente vejamos que f_s tem raio de Milnor uniforme. Seja $\gamma(s) = (x(s), y(s))$ uma curva tal que $\gamma(s) \in V(f_s)$ e $\nabla f_s(\gamma(s)) = \alpha_s \gamma(s)$, para alguma constante α_s . Vejamos que neste caso, $\lim_{s \rightarrow 0} \gamma(s) \neq (0, 0)$. Com efeito, as hipóteses de γ nos fornecem o seguinte sistema:*

$$\begin{cases} 5s(x(s))^4 + 4(x(s))^3 = \alpha_s x(s) \\ 3y(s)^2 = \alpha_s y(s) \\ s(x(s))^5 + (x(s))^4 + (y(s))^3 = 0 \end{cases}$$

Da segunda equação, temos $y = 0$ ou $\alpha_s = 2$. Para $y = 0$, usando a terceira equação concluímos que $x(s) = -1/s$. Logo $\gamma(s) = (-1/s, 0)$ e, portanto, $\lim_{s \rightarrow 0} \gamma(s) \neq (0, 0)$. Pela Proposição 2.0.11, f_s tem raio de Milnor uniforme.

Por outros lado,

$$\nabla f_s(x, y) = (5sx^4 + 4x^3, 3y^2),$$

assim,

$$\nabla f_s(x, y) = (0, 0) \iff y = 0 \text{ e } x = -1/s$$

isto é, f_s tem curva de coalescing.

Vamos provar que existem $\delta_0, \epsilon_0 > 0$ tais que $V(f_s) \cap \mathbb{B}_{\epsilon_0}$ é homeomorfo a $V(f_0) \cap \mathbb{B}_{\epsilon_0}$, para todo $s \in (-\delta_0, \delta_0)$. Considere a projeção canônica $\pi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $\pi(x, y) = x$. Afirmamos que a restrição $\pi|_{V(f_s)}$ é um homeomorfismo local. De fato:

- É imediato que $\pi|_{V(f_s)}$ é contínua. Agora, seja $a \in \mathbb{R}$. É fácil verificar que $(a, (-a^4(sa + 1))^{1/3}) \in V(f_s)$ e que $\pi(a, (-a^4(sa + 1))^{1/3}) = a$. Logo $\pi|_{V(f_s)}$ é sobrejetiva.

- $\pi|_{V(f_s)}(x_1, y_1) = \pi|_{V(f_s)}(x_2, y_2) \iff x_1 = x_2$. Por outro lado, como $(x_i, y_i) \in V(f_s)$, $i = 1, 2$, temos:

$$\begin{cases} sx_1^5 + x_1^4 + y_1^3 = 0 \\ sx_2^5 + x_2^4 + y_2^3 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} y_1 = (-sx_1^5 - x_1^4)^{1/3} \\ y_2 = (-sx_1^5 - x_1^4)^{1/3} \end{cases} .$$

Portanto, $\pi|_{V(f_s)}$ é injetiva, e pelo item anterior, é bijetiva.

- A inversa de $\pi|_{V(f_s)}$ é dada por

$$(\pi|_{V(f_s)})^{-1}(x) = (x, (-x^4(sx + 1))^{1/3}),$$

que claramente é contínua.

Se considerarmos a família $f_t(x, y, z) = tx + xz + y^3$, é fácil verificar que f_s tem raio de Milnor uniforme, tem curva de coalescing e, mesmo assim, tem tipo topológico constante. Ou seja, é possível a existência de trivialidade topológica (ainda que em um sentido mais fraco), para famílias de germes que não gozem das propriedades do Teorema 2.0.18.

Dada uma família de germes de singularidades isoladas f_s , vimos que trivialidade topológica no sentido fraco nos dá um homeomorfismo entre as variedades $V(f_s)$, para s em uma vizinhança da origem no espaço de parâmetros. Em geral, pode não ser possível estender esse homeomorfismo a todo o espaço ambiente, o que nos faz acreditar que trivialidade fraca e forte não são conceitos equivalentes.

O Teorema 1 abaixo nos diz que em uma família (f_s) de germes que não tem coalescing de pontos críticos, trivialidade topológica (forte) implica \mathcal{R} -equivalência.

Teorema 2.0.20 [13, Theorem 1] *Seja $f_t : (\mathbb{R}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^k, 0)$ uma família de germes de funções analíticas que não tem coalescing de pontos críticos e suponha que existe uma família de germes de homeomorfismos $g_t : (\mathbb{R}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$ tal que o germe em 0 de $g_t(f_t^{-1}(0))$ é o germe de $f_0^{-1}(0)$. Então existe uma família contínua $h_t : (\mathbb{R}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$ de germes de homeomorfismos tal que $f_0 = f_t \circ h_t$ para todo $t \in V$, onde V é uma vizinhança de 0 em \mathbb{R}^p .*

Pergunta 1 *Trivialidade topológica fraca implica a não existência de curva coalescing de pontos críticos? A resposta é não! Vimos anteriormente que a família $f_t(x, y, z) = tx + xz + y^3$ tem tipo topológico localmente constante (sentido fraco) e tem curva de coalescing.*

Capítulo 3

Trivialidade Topológica em Famílias de Funções sobre Conjuntos Subanalíticos e Espaços Analíticos Complexos

No capítulo anterior, vimos que toda família de germes de polinômios reais com raio de Milnor uniforme e sem curva de coalescing de pontos críticos, tem tipo topológico constante. Contudo, nada afirma para famílias que não gozam dessas duas propriedades. Neste capítulo estudaremos a trivialidade topológica de famílias de germes que dependem linearmente do parâmetro s , incluindo casos que não satisfazem as hipóteses do Teorema 2.0.18.

3.1 Δ - regularidade e Trivialidade Topológica

Lidamos com funções definidas em conjuntos subanalíticos (resp. espaços analíticos complexos), então nos referimos à Seção 2 de [19] para um breve resumo de alguns resultados clássicos que nos permitirão lidar com tais objetos.

Seja $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , e seja $(X, 0) \subset \mathbb{K}^N$ o germe em 0 de um conjunto subanalítico. Seja (f_s) uma família de germes de aplicações analíticas $f_s : (X, 0) \rightarrow (\mathbb{K}, 0)$, com $s \in \mathbb{K}$, da seguinte forma:

$$f_s = f_0 + s\varphi.$$

Seja $\mathcal{S} = (\mathcal{S}_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ uma estratificação subanalítica de Whitney de X com a propriedade (w), como em [26], tal que $V(\varphi)$ é uma união de estratos.

Recorde que $z \in X$ é um ponto singular de f_s se a restrição de f_s ao estrato $\mathcal{S}_{\alpha(z)}$ que contém z não é uma submersão em z . Isto significa que $\nabla_{\alpha(z)} f_s(z) = 0$, onde $\nabla_{\alpha(z)} f_s(z)$ denota a projeção do vetor gradiente $\nabla f_s(z)$ de f_s em z , sobre o espaço tangente $T_z \mathcal{S}_{\alpha(z)}$.

Note que

$$\nabla_{\alpha(z)} f_s(z) = \nabla_{\alpha(z)} f_0(z) + s \nabla_{\alpha(z)} \varphi(z),$$

onde $\nabla_{\alpha(z)} f_0(z)$ é a projeção de $\nabla f_0(z)$ sobre $T_z \mathcal{S}_{\alpha(z)}$ e $\nabla_{\alpha(z)} \varphi(z)$ é a projeção de $\nabla \varphi(z)$ sobre $T_z \mathcal{S}_{\alpha(z)}$. Denotamos por $\Sigma(f_s) \subset X$ o conjunto dos pontos críticos de f_s .

Um ponto $p \in \mathbb{K}$ é um valor crítico de f_s se $\Sigma(f_s) \cap (f_s)^{-1}(p) \neq \emptyset$. Segue do Teorema de Sard que os germes de f_0 e φ em $0 \in \mathbb{K}^N$, têm valor crítico isolado em $0 \in \mathbb{K}$.

Defina o seguinte germe de aplicação analítica:

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &: (X, 0) \longrightarrow (\mathbb{K}^2, 0) \\ z &\longmapsto (f_0(z), \varphi(z)) \end{aligned}$$

Lembre-se que $z \in X$ é um ponto crítico de \mathcal{F} se a restrição de \mathcal{F} ao estrato $\mathcal{S}_{\alpha(z)}$ que contém z , não é uma submersão em z . Isto significa que $\nabla_{\alpha(z)} f_0(z)$ e $\nabla_{\alpha(z)} \varphi(z)$ são linearmente dependentes sobre \mathbb{K} . Note que $\Sigma(f_s) \subset \Sigma(\mathcal{F})$, para cada $s \in \mathbb{K}$.

Seja $\Sigma(\mathcal{F})$ o conjunto dos pontos críticos de \mathcal{F} e considere o conjunto discriminante:

$$\Delta_{\mathcal{F}} = \mathcal{F}(\Sigma(\mathcal{F})),$$

que é um conjunto subanalítico em \mathbb{K}^2 .

Agora, para cada $s \in \mathbb{K}$, defina a linha \mathcal{H}_s em \mathbb{K}^2 dada por:

$$\mathcal{H}_s := \{y_0 + sy_1 = 0\}.$$

Note que

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{H}_s) &= \{x \in \mathbb{R}^n; \mathcal{F}(x) \in \mathcal{H}_s\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^n; (f_0(x), \varphi(x)) \in \mathcal{H}_s\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^n; f_0(x) + s\varphi(x) = 0\} \\ &= V(f_s). \end{aligned}$$

para cada $s \in \mathbb{K}$.

Recorde que, dada uma curva γ (real ou complexa), uma linha secante a γ é uma linha que intersecta γ em pelo menos dois pontos distintos. Este conceito é muito utilizado quando queremos definir (quando existe) a linha tangente a γ em um ponto $P \in \gamma$, a qual é definida como um limite de linhas secantes à γ passando por P e por pontos próximos a P .

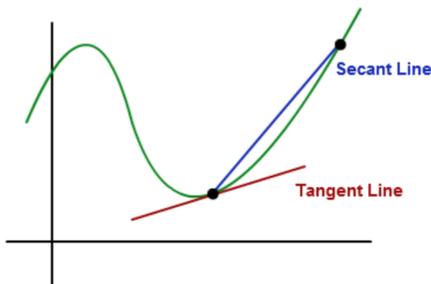


Figura 3.1: Linhas secante e tangente a uma curva

Definição 3.1.1 Dizemos que a família (f_s) é Δ -regular se a linha \mathcal{H}_0 em \mathbb{K}^2 , não é limite de linhas secantes a $\Delta_{\mathcal{F}}$ em $0 \in \mathbb{K}^2$.

Observação 3.1.2 A família (f_s) é Δ -regular se, e somente se, existe uma vizinhança pequena U de 0 em \mathbb{K}^2 e um número real pequeno $\delta > 0$ tal que

$$\mathcal{H}_s \cap \Delta_{\mathcal{F}} \cap U \subset \{0\},$$

sempre que $\|s\| < \delta$.

Exemplo 3.1.3 Considere o germe de função $\mathcal{F}(x, y, z) = (x^2 + y^3, y^2 + z^2)$. Note que

$$J\mathcal{F}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x & 3y^2 & 0 \\ 0 & 2y & 2z \end{pmatrix}$$

Assim, $\Sigma(\mathcal{F}) = \{(x, 0, 0); x \in \mathbb{R}\} \cup \{(0, y, 0); y \in \mathbb{R}\} \cup \{(0, 0, z); z \in \mathbb{R}\}$ e o discriminante de \mathcal{F} é

$$\Delta_{\mathcal{F}} = \{(0, z^2)\} \cup \{(x^2, 0)\} \cup \{(y^2, y^3)\}.$$

Consequentemente, o limite de retas secantes a $\Delta_{\mathcal{F}}$ é dado por

$$Ox \cup Oy.$$

onde Ox e Oy denotam os eixos coordenados. Portanto, \mathcal{H}_0 é limite de retas secantes a $\Delta_{\mathcal{F}}$ em $0 \in \mathbb{R}^2$ e, assim, f_s não é Δ -regular.

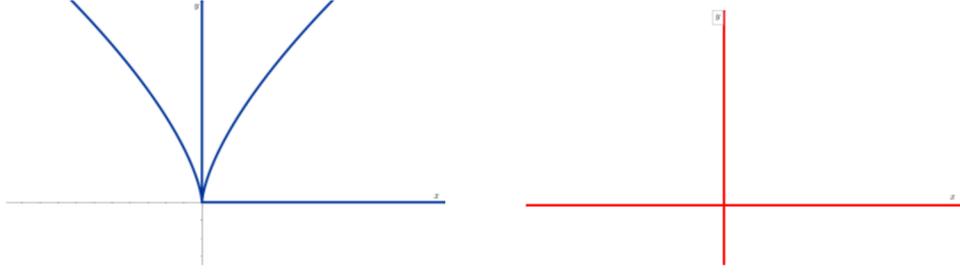


Figura 3.2: À esquerda, $\Delta_{\mathcal{F}}$. À direita, limite de secantes a $\Delta_{\mathcal{F}}$ em $0 \in \mathbb{R}^2$

Nos próximos exemplos, estaremos interessados em analisar possíveis curvas de coalescing, raio de Milnor uniforme e a Δ -regularidade. Aproveitaremos ainda para estudar se essas famílias têm, localmente, tipo topológico constante.

Exemplo 3.1.4 Seja $\mathcal{F}(x, y, z) = (x, xz + y^3)$ e considere a família que depende linearmente do parâmetro s , dada por $f_s(x, y, z) = sx + xz + y^3$.

(i) Pontos críticos e Δ -regularidade:

$$J\mathcal{F}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ z & 3y^2 & x \end{pmatrix}$$

calculando os menores, temos:

$$\begin{cases} 3y^2 = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

Assim,

$$\text{Crit}(\mathcal{F}) = \{(0, 0, z)\}$$

e

$$\Delta(\mathcal{F}) = \{(0, 0)\}.$$

Portanto, (f_s) é Δ -regular.

(ii) Curva de Coalescing de f_s :

$$\text{grad}f_s(x, y, z) = 0 \iff (s + z, 3y^2, x) = (0, 0, 0) \iff x = y = 0 \text{ e } z = -s.$$

Portanto, f_s tem curva de coalescing.

(iii) Raio de Milnor uniforme de f_s : Como \mathcal{F} é d -regular, segue do Lema 2.0.17 que f_s tem raio de Milnor uniforme.

(iv) Trivialidade Topológica: vamos provar que existem $\delta_0, \epsilon_0 > 0$ tais que $V(f_s) \cap \mathbb{B}_{\epsilon_0}$ é homeomorfo a $V(f_0) \cap \mathbb{B}_{\epsilon_0}$, para todo $s \in (-\delta_0, \delta_0)$. Considere a projeção canônica $\pi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, dada por $\pi(x, y, z) = (x, z)$. Afirmamos que a restrição $\pi|_{V(f_s)}$ é um homeomorfismo local. De fato:

- É imediato que $\pi|_{V(f_s)}$ é contínua. Agora, seja $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, é fácil ver que $(a, (-a(s+b))^{1/3}, b) \in V(f_s)$ e que $\pi(a, (-a(s+b))^{1/3}, b) = (a, b)$. Logo $\pi|_{V(f_s)}$ é sobrejetiva.
- $\pi|_{V(f_s)}(x_1, y_1, z_1) = \pi|_{V(f_s)}(x_2, y_2, z_2) \iff (x_1, z_1) = (x_2, z_2) \iff x_1 = x_2$ e $z_1 = z_2$. Por outro lado, como $(x_i, y_i, z_i) \in V(f_s)$, $i = 1, 2$, temos:

$$\begin{cases} sx_1 + x_1z_1 + y_1^3 = 0 \\ sx_2 + x_2z_2 + y_2^3 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} y_1 = (-sx_1 - x_1z_1)^{1/3} \\ y_2 = (-sx_1 - x_1z_1)^{1/3} \end{cases}.$$

Portanto, $\pi|_{V(f_s)}$ é injetiva, e pelo item anterior, é bijetiva.

- A inversa de $\pi|_{V(f_s)}$ é dada por

$$(\pi|_{V(f_s)})^{-1}(x, y) = (x, (-x(s+y))^{1/3}, y),$$

que claramente é contínua.

Desta forma, o Teorema [13] é inconclusivo em relação à trivialidade topológica da família f_s . No entanto, verificamos que esta família tem tipo topológico localmente constante.

Exemplo 3.1.5 Seja $\mathcal{F}(x, y, z) = (c_1x^q, c_2xz + c_3y^p)$, com $c_i \neq 0$ para todo $i = 1, 2, 3$ e $p, q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

(i) Pontos críticos e condição Δ -regularidade:

$$J\mathcal{F}(x, y, z) = \begin{pmatrix} c_1qx^{q-1} & 0 & 0 \\ c_2z & c_3py^{p-1} & c_2x \end{pmatrix}$$

calculando os menores, temos:

$$\begin{cases} c_1c_3pqx^{q-1}y^{p-1} = 0 \\ c_1c_2qx^q = 0 \end{cases}$$

e como $c_1c_2q \neq 0$, segue que $\text{rank}(\text{J}\mathcal{F}(x, y, z)) = 0$ se, e somente se, $x = 0$. Assim,

$$\Sigma(\mathcal{F}) = \{(0, y, z)\}$$

e

$$\Delta_{\mathcal{F}} = \{(0, c_3y^p)\}.$$

Note que o limite de secantes a $\Delta_{\mathcal{F}}$ em $0 \in \mathbb{R}^2$, é o eixo Oy . Logo (f_s) é Δ -regular.

(ii) Curva de Coalescing: considere a família a um-parâmetro dada por

$$f_s(x, y, z) = sc_1x^q + c_2xz + c_3y^p,$$

$$\text{grad}f_s(x, y, z) = 0 \iff (sc_1qx^{q-1} + c_2z, c_3py^{p-1}, c_2x) = (0, 0, 0),$$

assim,

$$\left\{ \begin{array}{l} p = 1, q \geq 1 : f_s \text{ não tem curva de coalescing;} \\ q = 1, p \geq 2 : f_s \text{ tem curva de coalescing;} \\ p, q \geq 2 : f_s \text{ não tem curva de coalescing.} \end{array} \right.$$

(iii) Raio de Milnor uniforme de f_s : Seja $(x, y, z) \in V(f_s)$ tal que

$$\text{grad}f_s(x, y, z) = \alpha_s(x, y, z).$$

Assim:

$$\left\{ \begin{array}{l} sc_1qx^{q-1} + c_2z = \alpha_sx \\ c_3py^{p-1} = \alpha_sy \\ c_2x = \alpha_sz \\ sc_1x^q + c_2xz + c_3y^p = 0 \end{array} \right.$$

Da segunda equação, temos dois casos:

Caso 1 $y = 0$:

$$sc_1x^q + c_2xz = 0 \implies sc_1x^q + \frac{c_2^2x^2}{\alpha_s} = 0 \implies x = 0 \text{ ou } x = \left(-\frac{c_2^2x^2}{\alpha_s sc_1} \right)^{\frac{1}{q-2}}.$$

Para $x = 0$, temos a solução trivial. Para $x = \left(-\frac{c_2^2}{\alpha_s sc_1} \right)^{\frac{1}{q-2}}$, temos $z =$

$\frac{c_2}{\alpha_s} \left(-\frac{c_2^2}{\alpha_s sc_1} \right)^{\frac{1}{q-2}}$, e pela última equação do sistema

$$sc_1 \left(-\frac{c_2^2}{\alpha_s sc_1} \right)^{q-2} + \frac{c_2^2}{\alpha_s} = 0 \iff \frac{ac_1(-c_2)^{2(q-2)} + \alpha_s^{q-3}(sc_1)^{q-2}c_2^2}{(\alpha_s sc_1)^{q-2}} = 0$$

assim, como $s, c_1 \neq 0$, temos:

$$\alpha_s = \frac{\left(-c_2^{2(q-2)-2}\right)^{\frac{1}{q-3}}}{sc_1}.$$

Caso 2 $y = \left(\frac{\alpha_s}{pc_3}\right)^{\frac{1}{p-2}} :$

$$c_2x = \alpha_s z \implies z = \frac{c_2x}{\alpha_s},$$

assim, da primeira equação do sistema:

$$sc_1qx^{q-1} + \frac{c_2^2x^2}{\alpha_s} - \alpha_sx^2 = 0 \iff x^2(\alpha_ssc_1qx^{q-2} + c_2^2 - 1) = 0,$$

logo, $x = 0$ ou $x = \left(\frac{-c_2^2 + 1}{\alpha_ssc_1q}\right)^{\frac{1}{q-2}}$. O primeiro caso nos dá uma solução trivial.

Considerando a segunda solução:

$$sc_1 \left(\frac{-c_2^2 + 1}{\alpha_ssc_1q}\right)^{\frac{q}{q-2}} + \frac{c_2^2}{\alpha_s} \left(\frac{-c_2^2 + 1}{\alpha_ssc_1q}\right)^{\frac{2}{q-2}} + c_3 \left(\frac{\alpha_s}{pc_3}\right)^{\frac{p}{p-2}} = 0$$

Portanto, a medida que s converge para zero, a sequência dos pontos (x, y, z) obtidos acima não converge para a origem. Pela Proposição 2.0.11, f_s tem raio de Milnor uniforme.

O próximo exemplo está inspirado nas aplicações de S. López de Medrano (veja [28]).

Exemplo 3.1.6 Seja $\mathcal{F} = (f, g) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^2$ uma função analítica da forma:

$$\mathcal{F}(x_1, \dots, x_n) = \left(\sum_{i=1}^n a_i x_i^p, \sum_{i=1}^n b_i x_i^q \right),$$

onde $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ são constantes em posição genérica, isto é, são tais que a origem está na envoltória convexa dos pontos (a_i, b_i) , e $p, q \geq 2$ são inteiros.

- (i) Pontos Críticos e Δ -regularidade: Uma simples conta nos mostra que $Crit(\mathcal{F})$ é dado pelos eixos coordenados de \mathbb{R}^n e, assim, $\Delta(\mathcal{F})$ é a união de segmentos de retas unindo a origem e os pontos (a_i, b_i) . Logo, como $a_i \neq 0$, temos que (f_s) é Δ -regular.

(ii) Curva de Coalescing de f_s : Considere a família

$$f_s(x_1, \dots, x_n) = s \left(\sum_{i=1}^n a_i x_i^p \right) + \sum_{i=1}^n b_i x_i^q.$$

$$\begin{aligned} \text{grad} f_s(x_1, \dots, x_n) = 0 &\iff (sa_1 p x_1^{p-1} + b_1 q x_1^{q-1}, \dots, sa_n p x_n^{p-1} + b_n q x_n^{q-1}) = 0 \\ &\iff sa_i p x_i^{p-1} + b_i q x_i^{q-1} = 0. \end{aligned}$$

Assim,

- Se $p = q \geq 2$: $x_i^{p-1}(sa_i p + b_i q) = 0 \implies x_i = 0$ ou $sa_i p + b_i q = 0$, logo f_s não tem curva se coalescing.
- Se $p > q \geq 2$: $x_i^{q-1}(sa_i p x_i^{p-q} + b_i q) = 0 \implies x_i = 0$ ou $x_i = \left(-\frac{b_i q}{sa_i p} \right)^{\frac{1}{p-q}}$. Se $p - q$ é ímpar, f_s tem curva de coalescing. Se $p - q$ é par, f_s também tem curva de coalescing, pois se $-b_i q / sa_i p < 0$ para determinado s , então $-b_i q / (-s) a_i p > 0$.
- Se $q > p \geq 2$: $x_i^{p-1}(sa_i p + b_i q x_i^{q-p}) = 0 \implies x_i = 0$ ou $x_i = \left(-\frac{sa_i p}{b_i q} \right)^{\frac{1}{q-p}}$. Se $q - p$ é ímpar, f_s tem curva de coalescing. Se $q - p$ é par, f_s também tem curva de coalescing, pois se $-sa_i p / b_i q > 0$ para determinado s , então $-(-s) a_i p / b_i q > 0$.

(iii) Raio de Milnor uniforme: Note que cada segmento de reta $L \subset \mathbb{R}^2$ tem uma das seguintes formas:

$$\{x + \beta y = 0\} \cap \{y > 0\},$$

$$\{x + \beta y = 0\} \cap \{y < 0\},$$

$$\{y = 0\} \cap \{x > 0\},$$

$$\{y = 0\} \cap \{x < 0\},$$

para algum $\beta \in \mathbb{R}$.

Assim, cada $X_L = f^{-1}(L)$ tem uma das seguintes formas:

$$\{f + \beta g = 0\} \cap \{g > 0\},$$

$$\{f + \beta g = 0\} \cap \{g < 0\},$$

$$\{g = 0\} \cap \{f > 0\},$$

$$\{g = 0\} \cap \{f < 0\},$$

para algum $\beta \in \mathbb{R}$. Em cada caso, todas as equações e inequações são homogêneas, implicando que X_L intersecta transversalmente cada esfera centrada na origem. Logo \mathcal{F} é d -regular, e portanto, a família $f_s = sf + g$ tem raio de Milnor uniforme.

Portanto, pelo Corolário 4 de [13], para $p = q \geq 2$, a família f_s tem tipo topológico constante. Os demais casos são inconclusivos pelo mesmo teorema, porém, aplicando o mesmo argumento dos exemplos anteriores, provamos que, localmente, f_s tem tipo topológico constante.

Proposição 3.1.7 *Se a família $f_s = f_0 + s\varphi$ é Δ -regular, então para cada $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, existe uma vizinhança W de 0 em \mathbb{K} tal que para cada $s \in W$, existe um homeomorfismo*

$$h_s : (V(f_s) \setminus V(\varphi)) \cap \mathbb{B}_\epsilon \longrightarrow (V(f_0) \setminus V(\varphi)) \cap \mathbb{B}_\epsilon.$$

Demonstração. Nós vamos organizar nossa prova em alguns passos.

(a₁) Como (f_s) é Δ -regular, pela Observação (3.1.2), podemos escolher uma vizinhança U de 0 em \mathbb{K}^2 e um número real $\delta > 0$ tal que para cada $s \in \mathbb{D}_\delta$, temos:

$$\mathcal{H}_s \cap \Delta_{\mathcal{F}} \cap U \subset \{0\}.$$

Vamos escolher $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno tal que $\mathcal{F}(\mathbb{B}_\epsilon) \subset U$. Então, para cada $s \in \mathbb{D}_\delta$ e para cada $z \in (V(f_s) \setminus V(\varphi)) \cap \mathring{\mathbb{B}}_\epsilon$, temos que $\mathcal{F}(z) \notin \Delta_{\mathcal{F}}$ e, assim, $z \notin \Sigma(\mathcal{F})$. Logo, para cada $s \in \mathbb{D}_\delta$, temos:

$$(V(f_s) \setminus V(\varphi)) \cap \Sigma(\mathcal{F}) \cap \mathring{\mathbb{B}}_\epsilon = \emptyset.$$

Por outro lado, como $\Sigma(f_s) \subset \Sigma(\mathcal{F})$, segue que para todo $s \in \mathbb{D}_\delta$,

$$(V(f_s) \setminus V(\varphi)) \cap \Sigma(f_s) \cap \mathring{\mathbb{B}}_\epsilon = \emptyset.$$

Como $V(\varphi)$ é uma união de estratos, segue que a restrição de f_s ao conjunto subanalítico $(X \setminus V(\varphi)) \cap \mathring{\mathbb{B}}_\epsilon$ é transversal à estratificação \mathcal{S} no sentido de Verdier (o que significa que a restrição de f_s a cada estrato, é uma submersão, de acordo com a Definição (1.5.10)). Em particular, segue da Observação (1.5.11) que \mathcal{S} induz uma estratificação subanalítica (w)-regular sobre cada conjunto subanalítico

$$\mathring{X}_s := (V(f_s) \setminus V(\varphi)) \cap \mathring{\mathbb{B}}_\epsilon.$$

(a₂) Por outro lado, pela estrutura cônica local do conjunto subanalítico $V(f_0)$ na origem, podemos escolher $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno tal que $V(f_0) \setminus V(\varphi)$ intersecta a esfera \mathbb{S}_ϵ transversalmente no sentido estratificado. Isso significa que para cada estrato \mathcal{S}_α fora de $V(\varphi)$, a interseção $V(f_0) \cap \mathcal{S}_\alpha$ é uma variedade suave que intersecta transversalmente \mathbb{S}_ϵ em \mathbb{K}^N . Assim, para cada $\|s\|$ suficientemente pequeno, a pequena perturbação $V(f_s) \cap \mathcal{S}_\alpha$ também é uma variedade suave que intersecta transversalmente \mathbb{S}_ϵ . Portanto, podemos escolher $\delta' > 0$ suficientemente pequeno com $0 < \delta' \leq \delta$, tal que $V(f_s) \setminus V(\varphi)$ intersecta a esfera \mathbb{S}_ϵ transversalmente no sentido estratificado, sempre que $\|s\| < \delta'$. Em particular, \mathcal{S} induz uma estratificação subanalítica (w)-regular sobre o conjunto subanalítico

$$X_s := (V(f_s) \setminus V(\varphi)) \cap \mathbb{B}_\epsilon,$$

onde cada estrato é da forma $\mathcal{S}_\alpha \cap V(f_s) \cap \mathring{\mathbb{B}}_\epsilon$ ou da forma $\mathcal{S}_\alpha \cap V(f_s) \cap \mathbb{S}_\epsilon$, para $\alpha \in \Lambda$ (veja Lema 10 de [19], por exemplo).

(a₃) Seja $y \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. Para cada $s \in \mathbb{D}_{\delta'}$, temos que $V(f_s)$ intersecta $\varphi^{-1}(y) \cap \mathring{\mathbb{B}}_\epsilon$ transversalmente, no sentido estratificado. De fato, é suficiente mostrar que, para cada $z \in \mathcal{S}_\alpha \cap V(f_s) \cap \varphi^{-1}(y) \cap \mathring{\mathbb{B}}_\epsilon$, os vetores $\nabla_\alpha f_s(z)$ e $\nabla_\alpha \varphi(z)$ são linearmente independentes sobre \mathbb{K} em $T_z \mathcal{S}_\alpha(z)$. Mas como $\nabla_\alpha f_s(z) = \nabla_\alpha f_0(z) + s \nabla_\alpha \varphi(z)$, temos que $\nabla_\alpha f_s(z) = c \nabla_\alpha \varphi(z)$ para algum $c \in \mathbb{K}$ se, e somente se, $\nabla_\alpha f_0(z) = c' \nabla_\alpha \varphi(z)$ para algum $c' \in \mathbb{K}$, implicando que $z \in \Sigma(\mathcal{F})$. Isto contradiz (a₁).

(a₄) Fixe $\alpha \in \Lambda$ e considere a restrição de φ a $V(f_0) \cap \mathcal{S}_\alpha$. Como φ tem a propriedade a_f de Thom ([4], Seção 5, Corolário 1), segue que para cada $y \in \mathbb{K}$ com $\|y\|$ suficientemente pequeno, $\varphi^{-1}(y) \cap \mathcal{S}_\alpha$ intersecta transversalmente $V(f_0) \cap \mathbb{S}_\epsilon \cap \mathcal{S}_\alpha$ em \mathcal{S}_α . Assim, temos que $\varphi^{-1}(y) \cap \mathbb{S}_\epsilon \cap \mathcal{S}_\alpha$ intersecta transversalmente $V(f_0) \cap \mathbb{S}_\epsilon \cap \mathcal{S}_\alpha$ em $\mathbb{S}_\epsilon \cap \mathcal{S}_\alpha$. Então podemos mostrar (veja Lema 2.3 de [20]) que $V(f_0) \cap \mathcal{S}_\alpha$ intersecta $\varphi^{-1}(y) \cap \mathbb{S}_\epsilon \cap \mathcal{S}_\alpha$ transversalmente em \mathcal{S}_α . Portanto, para cada $s \in \mathbb{K}$ com $\|s\|$ suficientemente pequeno, temos que $V(f_s) \cap \mathcal{S}_\alpha$ intersecta $\varphi^{-1}(y) \cap \mathbb{S}_\epsilon \cap \mathcal{S}_\alpha$ transversalmente em \mathcal{S}_α .

(b) Agora, para cada número real suficientemente pequeno $q > 0$, considere a pequena vizinhança de $V(\varphi)$ em X , dada por:

$$N_q = (\varphi)^{-1}(\mathring{\mathbb{D}}_q).$$

Desde que $V(\varphi)$ é uma união de estratos e como $\varphi : (X, 0) \rightarrow (\mathbb{K}, 0)$ tem valor crítico isolado pelo Teorema de Sard, segue que a restrição $\varphi| : (X \setminus V(\varphi), 0) \rightarrow (\mathbb{K}, 0)$ é transversal a \mathcal{S} (isto é, é uma submersão em cada estrato). Assim, segue da Observação 1.5.11 que \mathcal{S} induz uma estratificação subanalítica (w) -regular sobre o conjunto subanalítico $X \setminus N_q$, para cada $q > 0$. Seus estratos são da forma $\mathcal{S}_\alpha \setminus \bar{N}_q$ ou da forma $\mathcal{S}_\alpha \cap \varphi^{-1}(\mathbb{S}_q)$, para $\alpha \in \Lambda$.

(c) Defina o conjunto

$$\tilde{M}_q := (X \setminus N_q) \cap \mathbb{B}_\epsilon,$$

que é um conjunto subanalítico fechado. Pela estrutura cônica local do conjunto subanalítico X na origem, podemos assumir que $\epsilon > 0$ é pequeno o suficiente para que cada estrato $\mathcal{S}_\alpha \setminus \bar{N}_q$ intersekte a esfera \mathbb{S}_ϵ transversalmente em \mathbb{K}^N . Podemos assumir também que cada estrato $\mathcal{S}_\alpha \cap \varphi^{-1}(\mathbb{S}_q)$ intersekte a esfera \mathbb{S}_ϵ transversalmente em \mathbb{K}^N . De fato, no caso complexo, isto segue do fato que φ tem a propriedade a_f de Thom; no caso real, isto segue aplicando o Teorema de Sard para a restrição de φ a $\mathbb{S}_\epsilon \cap \mathcal{S}_\alpha$. Assim, segue (Lema 10 de [19], por exemplo) que \mathcal{S} induz uma estratificação subanalítica (w) -regular $\tilde{\mathcal{S}}(q)$ sobre cada \tilde{M}_q . Cada estrato de \tilde{M}_q tem um dos seguintes tipos:

$$(T_1) \quad (\mathcal{S}_\alpha \setminus \bar{N}_q) \cap \mathring{\mathbb{B}}_\epsilon$$

$$(T_2) \quad (\mathcal{S}_\alpha \setminus \bar{N}_q) \cap \mathbb{S}_\epsilon$$

$$(T_3) \quad \mathcal{S}_\alpha \cap \varphi^{-1}(\mathbb{S}_q) \cap \mathring{\mathbb{B}}_\epsilon$$

$$(T_4) \quad \mathcal{S}_\alpha \cap \varphi^{-1}(\mathbb{S}_q) \cap \mathbb{S}_\epsilon$$

(d) Agora, defina o seguinte conjunto

$$M_q := \left(\bigcup_{\|s\| < \delta'} V(f_s) \right) \cap (X \setminus N_q) \cap \mathbb{B}_\epsilon,$$

que tem uma estratificação subanalítica (w) -regular $\mathcal{S}(q)$ dada por

$$\mathcal{S}_\alpha(q) := \tilde{\mathcal{S}}_\alpha(q) \cap \left(\bigcup_{\|s\| < \delta'} V(f_s) \right).$$

Defina a aplicação

$$H_q : M_q \rightarrow \mathbb{D}_{\delta'} \\ z \mapsto (\pi \circ \mathcal{F})(z),$$

onde $\pi : \mathbb{K}^2 \setminus \{y_1 = 0\} \rightarrow \mathbb{K}$ é a aplicação dada por $\pi(y_0, y_1) := \frac{y_0}{y_1}$. Então, para cada $s \in \mathbb{D}_{\delta'}$, temos:

$$(H_q)^{-1}(s) = [V(f_s) \setminus N_q] \cap \mathbb{B}_\epsilon = V(f_s) \cap M_q.$$

Nós afirmamos que H_q é transversal à estratificação $\mathcal{S}(q)$. De fato, se $\mathcal{S}(q)$ é do tipo (T_i) , para $i = 1, 2, 3, 4$; segue de (a_i) que a restrição de H_q a $\mathcal{S}_\alpha(q)$ é uma submersão.

(e) Os resultados de Verdier (Proposições 4.6 e 4.8 de [26]) nos dão que a aplicação H_q é a projeção de um fibrado topológico localmente trivial, para cada $q > 0$ suficientemente pequeno. Além disso, é fácil ver que se $q < q'$, então H_q é a restrição de $H_{q'}$ a $M_q \subset M_{q'}$. Assim, para cada $\mathbb{D}_{\delta'}$ e para cada número real $q > 0$ suficientemente pequeno, existe um homeomorfismo

$$h_s^q : (V(f_s) \setminus N_q) \cap \mathbb{B}_\epsilon \rightarrow (V(f_0) \setminus N_q) \cap \mathbb{B}_\epsilon,$$

tal que h_s^q é a restrição de $h_s^{q'}$ sempre que $q < q'$.

(f) Dado $x \in (V(f_s) \setminus V(\varphi)) \cap \mathbb{B}_\epsilon$, existe $q \in \mathbb{R}$ suficientemente pequeno tal que $x \notin N_q$, logo $x \in (V(f_s) \setminus N_q) \cap \mathbb{B}_\epsilon$. Assim, temos a seguinte extensão do homeomorfismo

h_s^q :

$$\begin{array}{ccc} h_s & : & (V(f_s) \setminus V(\varphi)) \cap \mathbb{B}_\epsilon \longrightarrow (V(f_0) \setminus V(\varphi)) \cap \mathbb{B}_\epsilon \\ & & z \qquad \qquad \qquad \longmapsto h_s^q(z) \end{array}$$

para cada q com $0 < q < \|\varphi(z)\|$.

■

Exemplo 3.1.8 A família $f_s : (\mathbb{K}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{K}, 0)$ dada por $f_s(x, y) = xy + sy$ é Δ -regular, pois $\Delta_{\mathcal{F}} = \{(0, 0)\}$. Note que $V(f_s) = \{x + s = 0\} \cup \{y = 0\}$. Como $V(\varphi) = \{y = 0\}$, temos

$$V(f_s) \setminus V(\varphi) = \{x + s = 0\},$$

para cada $s \in \mathbb{K}$. Assim o homeomorfismo $h_s : V(f_s) \setminus V(\varphi) \rightarrow V(f_0) \setminus V(\varphi)$ não pode ser estendido a um homeomorfismo $V(f_s) \rightarrow V(f_0)$ que fixa $0 \in \mathbb{K}^2$. Este exemplo mostra que, em geral, não é possível estender o homeomorfismo h_s a um homeomorfismo de germes $(V(f_s), 0) \rightarrow (V(f_0), 0)$ (veja Teorema (3.1.10) abaixo).

Exemplo 3.1.9 Considere $X = \{x^2 - y^2 = 0\} \subset \mathbb{K}^3$ com a seguinte estratificação de Whitney

$$\mathcal{S}_0 = X \setminus \{x = y = 0\}, \quad \mathcal{S}_1 = \{x = y = 0\}.$$

Considere a família de germes $f_s : (X, 0) \rightarrow (\mathbb{K}, 0)$ dada por

$$f_s(x, y, z) = x^3 + y^4 + z^2 + sx^a,$$

com $a \geq 2$. O conjunto crítico da restrição de \mathcal{F} ao estrato \mathcal{S}_0 é o conjunto

$$\Sigma_0(\mathcal{F}) = \{x^2 - y^2 = z = 0\},$$

enquanto o conjunto crítico da restrição de \mathcal{F} a \mathcal{S}_1 é o conjunto $\Sigma_1(\mathcal{F}) = \{0\}$. Assim, o conjunto singular de \mathcal{F} é o conjunto $\Sigma(\mathcal{F}) = \{x^2 - y^2 = z = 0\}$. A imagem por \mathcal{F} do discriminante $\Delta_{\mathcal{F}}$, é a curva parametrizada $t \mapsto (t^3 + t^4, t^a)$ em \mathbb{K}^2 . Note que o cone tangente desta curva é a linha $\mathcal{H}_0 = \{(y_0, y_1) \in \mathbb{K}^2; y_0 = 0\}$ se, e somente se, $a = 2$. Portanto, (f_s) é Δ -regular se, e somente se, $a > 2$.

Teorema 3.1.10 Se (f_s) é Δ -regular e se $V(f_0) \cap V(\varphi) = \{0\}$, então (f_s) tem tipo topológico constante.

Demonstração. Pela Proposição 3.1.7, para cada $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, existe uma vizinhança W de 0 em \mathbb{R} tal que para cada $s \in W$, existe um homeomorfismo $h_s : (V(f_s) \setminus \{0\}) \cap \mathbb{B}_\epsilon \rightarrow (V(f_0) \setminus \{0\}) \cap \mathbb{B}_\epsilon$. Então a aplicação

$$\bar{h}_s : V(f_s) \cap \mathbb{B}_\epsilon \rightarrow V(f_0) \cap \mathbb{B}_\epsilon$$

definida por

$$\bar{h}_s(z) = \begin{cases} h_s(z), & \text{se } z \neq 0, \\ 0, & \text{se } z = 0. \end{cases}$$

é um homeomorfismo. ■

Exemplo 3.1.11 No Exemplo 3.1.9, temos que $V(f_0) \cap V(\varphi) = \{0\}$, para cada $a \geq 2$. Por outro lado, se considerarmos $X = \mathbb{K}^3$ e a família $f_s(x, y, z) = x^3 + y^4 + z^2 + sx^a$, temos que $V(f_0) \cap V(\varphi) = \{0\}$ se, e somente se, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Observação 3.1.12 Se o discriminante $\Delta(\mathcal{F}) \subset \mathbb{K}^2$ associado à família f_s como acima está contido na linha $\{y_1 = 0\}$, então podemos tomar $W = \mathbb{K}$.

3.2 Conjunto Singular Uniforme

Definição 3.2.1 Dizemos que a família $f_s : (X, 0) \rightarrow (\mathbb{K}, 0)$ tem conjunto singular uniforme se existe $\epsilon > 0$ e $\delta > 0$ suficientemente pequeno tal que

$$\Sigma(f_s) \cap \mathbb{B}_\epsilon = \Sigma(f_0) \cap \mathbb{B}_\epsilon,$$

para cada $s \in \mathbb{D}_\delta$. Definimos o conjunto $\Sigma := \Sigma(f_0) \cap \mathbb{B}_\epsilon$.

Temos o seguinte resultado:

Proposição 3.2.2 Se a família $f_s : (X, 0) \rightarrow (\mathbb{K}, 0)$ tem conjunto singular uniforme, então é Δ -regular.

Demonstração. Suponha que (f_s) não é Δ -regular. Pela Observação 2.2 acima, para cada vizinhança U de 0 em \mathbb{K}^2 e para cada $\delta > 0$, existe $s \in \mathbb{D}_\delta$ tal que

$$\mathcal{H}_s \cap \Delta_{\mathcal{F}} \cap (U \setminus \{0\}) \neq \emptyset.$$

Em particular, dado algum $a > 0$, para todo $\xi \in (0, a)$, existe um ponto $p(\xi) \neq 0$ tal que

$$p(\xi) \in \mathcal{H}_{s(\xi)} \cap \Delta_{\mathcal{F}} \cap \mathbb{B}_\xi$$

para algum $s(\xi)$ com $\|s(\xi)\| < \xi$. Esses pontos podem ser escolhidos de modo que definam uma curva contínua $p : (0, a) \rightarrow \mathbb{K}^2$.

Agora, para cada $p(\xi)$ existe um ponto $\gamma(\xi) \in \mathcal{F}^{-1}(p(\xi))$ tal que $\gamma(\xi)$ é um ponto singular de \mathcal{F} , isto é, é um ponto crítico da restrição de \mathcal{F} a algum estrato \mathcal{S}_α de X . Esses pontos $\gamma(\xi)$ podem ser escolhidos de modo que definam uma curva contínua $\gamma : (0, a) \rightarrow \mathcal{S}_\alpha$ tal que $\lim_{t \rightarrow 0} \gamma(t) \in \mathcal{F}^{-1}(0)$ e tal que para cada $t \in (0, a)$, temos:

- (i) $\gamma(t) \notin \mathcal{F}^{-1}(0)$;
- (ii) $\gamma(t) \in \Sigma_\alpha(\mathcal{F})$; onde $\Sigma_\alpha(\mathcal{F})$ é o conjunto crítico da restrição de \mathcal{F} ao estrato \mathcal{S}_α ;
- (iii) $\mathcal{F}(\gamma(t)) \in \mathcal{H}_{s(t)}$ para algum $s(t) \in \mathbb{K}$, com $\lim_{t \rightarrow 0} s(t) = 0$.

Por (iii) nós podemos supor que $\varphi(\gamma(t)) \neq 0$, para cada $t \in (0, a)$. Como $\varphi : (X, 0) \rightarrow (\mathbb{K}, 0)$ tem valor crítico isolado em $0 \in \mathbb{K}$, nós podemos assumir que $\nabla_\alpha \varphi(\gamma(t)) \neq 0$ para cada $t \in (0, a)$, onde $\nabla_\alpha \varphi(\gamma(t))$ denota a projeção do vetor gradiente de φ em $\gamma(t)$ sobre o espaço tangente $T_{\gamma(t)} \mathcal{S}_\alpha$.

Recorde que os pontos críticos da restrição de \mathcal{F} ao estrato \mathcal{S}_α , são os pontos $x \in \mathcal{S}_\alpha$ tais que $\nabla_\alpha f_0(x)$ e $\nabla_\alpha \varphi(x)$ são linearmente dependentes sobre \mathbb{K} , onde $\nabla_\alpha f_0(x)$ denota a projecção do vetor gradiente de f_0 em x sobre o espaço tangente $T_x \mathcal{S}_\alpha$. Assim, como $\gamma(t) \in \Sigma(\mathcal{F})$ para cada $t \in (0, a)$, temos que existe $r(t) \in \mathbb{K}$ tal que

$$\nabla_\alpha f_0(\gamma(t)) + r(t) \nabla_\alpha \varphi(\gamma(t)) = 0,$$

Consequentemente $\gamma(t) \in \Sigma_\alpha(f_{r(t)})$.

Nós também podemos supor que $\gamma(t) \notin \Sigma_\alpha(f_0)$, para cada $t \in (0, a)$. De fato, se $\gamma(t) \in \Sigma_\alpha(f_0)$, para algum $t \in (0, a)$, então $\gamma(t) \in \Sigma_\alpha(f_s)$ para cada $s \in \mathbb{D}_\delta$, pois (f_s) tem conjunto singular uniforme. Mas como $\nabla_\alpha f_s(\gamma(t)) = \nabla_\alpha f_0(\gamma(t)) + s \nabla_\alpha \varphi(\gamma(t))$, isso implica que $\nabla \varphi(\gamma(t)) = 0$, o que é uma contradição.

Então, só precisamos mostrar que $\lim_{t \rightarrow 0} r(t) = 0$ para obter uma contradição com o fato de que (f_s) tem conjunto singular uniforme. Segue de (iii) que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\|f_0(\gamma(t))\|}{\|\varphi(\gamma(t))\|} = 0.$$

Pela regra de L'Hospital (aplicada à norma), temos que

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\|f_0(\gamma(t))\|}{\|\varphi(\gamma(t))\|} &= \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{\frac{f_0(\gamma(t)) \langle \nabla_\alpha f_0(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle}{\|f_0(\gamma(t))\|}}{\frac{\varphi(\gamma(t)) \langle \nabla_\alpha \varphi(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle}{\|\varphi(\gamma(t))\|}} \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f_0(\gamma(t)) \langle \nabla_\alpha f_0(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle}{\varphi(\gamma(t)) \langle \nabla_\alpha \varphi(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle} \frac{\|f_0(\gamma(t))\|}{\|\varphi(\gamma(t))\|} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{pr_{\gamma'(t)} \nabla_\alpha f_0(\gamma(t))}{pr_{\gamma'(t)} \nabla_\alpha \varphi(\gamma(t))} \frac{\|f_0(\gamma(t))\|}{\|\varphi(\gamma(t))\|} \end{aligned}$$

Assim,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{pr_{\gamma'(t)} \nabla_\alpha f_0(\gamma(t))}{pr_{\gamma'(t)} \nabla_\alpha \varphi(\gamma(t))} \frac{\|f_0(\gamma(t))\|}{\|\varphi(\gamma(t))\|} = 0.$$

Tomando a norma, temos que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\|pr_{\gamma'(t)} \nabla_\alpha f_0(\gamma(t))\|}{\|pr_{\gamma'(t)} \nabla_\alpha \varphi(\gamma(t))\|} = 0,$$

onde $pr_{\gamma'(t)} \nabla_\alpha f_0(\gamma(t))$ denota a projecção do vetor $\nabla_\alpha f_0(\gamma(t))$ sobre o vetor $\gamma'(t)$ em $T_{\gamma(t)} \mathcal{S}_\alpha$ e $pr_{\gamma'(t)} \nabla_\alpha \varphi(\gamma(t))$ denota a projecção do vetor $\nabla_\alpha \varphi(\gamma(t))$ sobre o vetor $\gamma'(t)$ em $T_{\gamma(t)} \mathcal{S}_\alpha$. Mas como $\nabla_\alpha f_0(\gamma(t)) + r(t) \nabla_\alpha \varphi(\gamma(t)) = 0$, segue que

$$pr_{\gamma'(t)} \nabla_\alpha f_0(\gamma(t)) + r(t) pr_{\gamma'(t)} \nabla_\alpha \varphi(\gamma(t)) = 0,$$

de modo que,

$$r(t) = \frac{\|pr_{\gamma'(t)} \nabla_{\alpha} f_0(\gamma(t))\|}{\|pr_{\gamma'(t)} \nabla_{\alpha} \varphi(\gamma(t))\|}.$$

Assim, $\lim_{t \rightarrow 0} \|r(t)\| = 0$. ■

O Exemplo 3.1.8 mostra que a recíproca da Proposição 3.2.2 é falsa.

Note que se (f_s) tem conjunto singular uniforme Σ (e consequentemente é Δ -regular, pela Proposição 3.2.2), então

$$\Sigma \subset V(f_0) \cap V(\varphi) \cap \mathbb{B}_{\epsilon}.$$

Neste caso, pode-se voltar à demonstração da Proposição 3.1.7 e em vez de remover $V(\varphi)$ de X , pode-se remover apenas Σ (tomando uma estratificação apropriada \mathcal{S} tal que Σ seja uma união de estratos). Assim obtemos o seguinte resultado:

Proposição 3.2.3 *Se (f_s) tem conjunto singular uniforme Σ , então para cada $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, existe uma vizinhança W de 0 em \mathbb{K} tal que, para cada $s \in W$, existe um homeomorfismo*

$$h_s : (V(f_s) \setminus \Sigma) \cap \mathbb{B}_{\epsilon} \longrightarrow (V(f_0) \setminus \Sigma) \cap \mathbb{B}_{\epsilon}.$$

Exemplo 3.2.4 *Em [10], J. Fernandes Bobadilla dá exemplos de famílias de hipersuperfícies singulares com número de Lê constante, fibração de Milnor constante e tipo topológico não constante, respondendo negativamente a uma pergunta de D. Massey. Um dos seus exemplos foi a família $f_s : (\mathbb{C}^5, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}, 0)$ definida por*

$$f_s(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2) = 2x_2y_1y_2 + x_3(y_1^2 - y_2^2) + sx_1y_2^2.$$

Ele provou que (f_s) não tem tipo topológico constante, mostrando que se houver um homeomorfismo $V(f_s) \cap \mathbb{B}_{\epsilon} \longrightarrow V(f_0) \cap \mathbb{B}_{\epsilon}$, então deve se restringir a um homeomorfismo de pares $(\Sigma(f_s) \cap \mathbb{B}_{\epsilon}, \Sigma^2(f_s) \cap \mathbb{B}_{\epsilon}) \longrightarrow (\Sigma(f_0) \cap \mathbb{B}_{\epsilon}, \Sigma^2(f_0) \cap \mathbb{B}_{\epsilon})$, onde $\Sigma^2(f_s)$ e $\Sigma^2(f_0)$ denotam os conjuntos de zeros do determinante das matrizes Hessianas de f_s e f_0 respectivamente; o que ele mostra ser impossível. É fácil ver que o discriminante associado $\Delta_{\mathcal{F}}$ é a linha $\{(y_0, y_1) \in \mathbb{K}^2; y_1 = 0\}$ e, assim, (f_s) é Δ -regular. Na realidade, a família (f_s) tem conjunto singular uniforme $\Sigma = \{z_1 = z_2 = 0\}$. Assim, segue da Proposição 3.2.3 acima que existe, de fato, um homeomorfismo $(V(f_s) \setminus \Sigma) \cap \mathbb{B}_{\epsilon} \longrightarrow (V(f_0) \setminus \Sigma) \cap \mathbb{B}_{\epsilon}$ que, portanto, não pode ser estendido a um homeomorfismo $V(f_s) \cap \mathbb{B}_{\epsilon} \longrightarrow V(f_0) \cap \mathbb{B}_{\epsilon}$.

Seguindo o mesmo argumento da prova do Teorema 3.1.10, obtemos o seguinte resultado:

Teorema 3.2.5 *Seja $(X, 0)$ um germe de conjunto subanalítico em \mathbb{R}^N (resp. um germe de espaço analítico complexo em \mathbb{C}^N) e seja $f_s : (X, 0) \rightarrow (\mathbb{K}, 0)$ com $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) uma família de germes de funções analíticas que depende linearmente de $s \in \mathbb{K}$. Se (f_s) tem conjunto singular uniforme $\Sigma = \{0\}$, então tem tipo topológico constante.*

3.3 Famílias μ -constante de funções definidas sobre ICIS

Recorde que dada uma variedade analítica complexa em \mathbb{C}^n de dimensão d e I um ideal que define X , dizemos que I define uma interseção completa em 0 se I admite $n - d$ (codimensão de X) geradores g_1, \dots, g_{n-d} , onde g_i é uma função analítica. Uma interseção completa com singularidade isolada é chamada de ICIS.

Agora seja $(X, 0) \subset \mathbb{C}^N$ o germe em $0 \in \mathbb{C}^N$ de uma interseção completa de singularidade isolada (ICIS). Nós vamos estudar famílias de germes de funções holomorfas $f_s : (X, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ da seguinte forma

$$f_s = f_0 + s\varphi$$

tal que cada germe de função f_s tem uma singularidade isolada, o que significa que existe um número real $\epsilon_s > 0$ tal que a restrição de f_s a $(X \setminus \{0\}) \cap \mathring{\mathbb{B}}_{\epsilon_s}$ é uma submersão.

Recorde que no caso afim $X = \mathbb{C}^n$, dizemos que a família (f_s) não tem coalescing de pontos críticos se existem números reais positivos $\epsilon > 0$ e $\delta > 0$ tal que 0 é o único ponto crítico de f_s em \mathbb{B}_ϵ para cada $s \in \mathbb{D}_\delta$. G. M. Greuel provou em [12] que (f_s) não tem coalescing de pontos críticos se, e somente se é μ -constante.

No caso geral em que X é uma ICIS, tem-se uma versão análoga deste resultado. A noção de não ter coalescing de pontos críticos é equivalente a ter conjunto singular uniforme $\Sigma = \{0\}$. Em [11], Carvalho Oréfica-Okamoto e Tomazella provaram que isso também é equivalente à μ -constância da família (f_s) .

Assim o Teorema 3.2.5 fornece:

Teorema 3.3.1 *Seja $(X, 0) \subset \mathbb{C}^N$ o germe de uma ICIS e seja $f_s : (X, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$, com $s \in \mathbb{C}$, uma família de germes de funções com singularidade isolada, da forma $f_s = f_0 + s\varphi$. Se a família (f_s) é μ -constante, então tem tipo topológico abstrato constante.*

No caso em que $X = \mathbb{C}^n$, $n \neq 3$, o resultado acima pode ser estendido para famílias arbitrárias $f_s : (X, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ com conjunto singular uniforme $\Sigma = \{0\}$, pois neste caso, (f_s) é μ -constante (Teorema 2.0.7).

Referências Bibliográficas

- [1] V. M. R. Bezerra, *Teoria de Estratificações e condições de regularidade*. Dissertação (Mestrado) - Universidade de São Paulo - Campus São Carlos, 2007.
- [2] E. Bierstone, P. D. Milman, *Semianalytic and subanalytic sets*, Mathématiques de l'I.H.É.S, v.67, p.5-42, 1988.
- [3] V. Guillemin and A. Pollaek , *Differential Topology*, Prentice-Hall, New Jersey, 1974.
- [4] H. Hironaka, *Stratification and Flatness*. In "Real and Complex singularities", Proc. of the Nordic Summer School, Oslo 1976, Sijhoff en Nordhoff, Alphen a.d. Rijn 1977, 199-265.
- [5] H. Hamm, *Lokale topologische Eigenschaften Komplexer Raume*, Math. Ann.191 (1971), 235-252.
- [6] J. F. Bobadilla, *Topological equisingularity of hypersurfaces with 1-dimensional critical set*, Advances in Mathematics. 248 (2013), p. 1199-1253.
- [7] D. Massey and D. T. Lê, *Notes on real and complex analytic and semianalytic singularities*, Advanced School and Workshop on Singularities en Geometry and Topology, 81-126,2007.
- [8] J. L. Cisneros-Molina, J. Seade and J. Snoussi, *Milnor fibrations and d-regularity*, International J. Maths. 21 (2010), p. 419-434.

- [9] J. L. Cisneros-Molina, J. Seade and J. Snoussi, *Milnor fibrations and the concept of d -regularity for analytic map germs*, Contemporary Mathematics, A. M. S., v. 569, p. 01-28, 2012.
- [10] J. Fernandez de Bobadilla, *Answers to some equisingularity questions*, Inv. Math. 161, 657-675 (2005).
- [11] S. Carvalho, B. Orefice-Okamoto and J.N. Tomazella, *μ -constant deformation of functions on an ICIS*, J. of Singularities, Vol. 19, 163-176 (2019).
- [12] G. M. Greuel, *Constant Milnor number implies constant multiplicity for quasihomogeneous singularities*. Manuscripta Math. 56 (1986), 159-166.
- [13] H. C. King, *Topological type in families of germs*, Inventiones Mathematicae 62, 1-13 (1980).
- [14] H. C. King, *Topological type of isolated critical points*, Annals of Math. 107, 385-397 (1978).
- [15] J. W. Milnor, *Singular points of complex hypersurfaces*, Ann. of Math. Studies 61, Princeton, 1968.
- [16] J. Seade, *On the topology of isolated singularities in analytic spaces*, vol. 241 of Progress in Mathematics Verlag, Basel, 2006.
- [17] A. C. G. Fernandes, C. H. Soares, R. N. A. dos Santos., *Topological triviality of family of functions and sets*, Rocky Mountain Journal of Mathematics, v. 36, n. 4, p. 1235-1248, 2006.
- [18] D. T. Lê and C. P. Ramanujam, *The invariance of Milnor's number implies the invariance of topological type*, Amer. J. Math. 98 (1976), 67-78.
- [19] D. T. Lê and A. Menegon, *Vanishing polyhedron and collapsing map*. Math. Z. 286 (2017), no.3-4, 1003-1040.
- [20] A. Menegon, J. Seade, *On the Lê-Milnor fibration for real analytic maps*. Math. No. 2-3, 382-392 (2017).

- [21] A. Parusinsky, *Topological Triviality of μ -constant deformation of type $f(x)+tg(x)$* . Bull. London Math. Soc.31 (1999), no.6, 686-692.
- [22] J. N. Mather, *Notes on topological stability*, Lecture Notes, Havard University, 1970 (unpublished).
- [23] R. Thom, *Ensembles et morphisms stratifiés*, Bull. Amer. Math. Soc. 75(1969), 240-284.
- [24] J. G. Timoriam, *The invariance of Milnor's number implies tological triviality*, Amer. J. Math. 99 (1977), 437-466.
- [25] B. Teissier, *Multiplicités polaires, sections planes, et conditions de Whitney*, Lecture Notes in Math. 961 (1982), Springer-Verlag, Berlin, R.F.A.
- [26] J. L. Verdier, *Stratifications de Whitney et théorème de Bertini-Sard*. Inv. Math. 36, 295-312 (1976).
- [27] B. Teissier, *Introduction to equisingularity problems*. A. M. S. Algebraic Geometry Symposium, Arcata 1974, Providence, Rhode Island (1975), pp. 593-632.
- [28] S. López de Medrano, *Singularities of homogeneous quadratic mappings*. Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fís. Nat Ser. A Math. RACSAM, 108(1): 95-112, 2014.