Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós–Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Compacidade de soluções para equações do tipo Yamabe em dimensão 3

Lorena Maria Augusto Pequeno Silva

João Pessoa – PB
Julho de 2019

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós–Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Compacidade de soluções para equações do tipo Yamabe em dimensão 3

por

Lorena Maria Augusto Pequeno Silva

sob a orientação do

Prof. Dr. Manassés Xavier de Souza

João Pessoa – PB
Julho de 2019

Catalogação na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

S586c Silva, Lorena Maria Augusto Pequeno.
Compacidade de soluções para equações do tipo Yamabe em dimensão 3 / Lorena Maria Augusto Pequeno Silva. - João Pessoa, 2019.
92 f.

Orientação: Manassés Xavier de Souza.
Dissertação (Mestrado) - UFPB/CCEN.

1. Análise de blow-up. 2. Compacidade. 3. equação de Yamabe. I. Souza, Manassés Xavier de. II. Título.

UFPB/BC

Elaborado por - CRB-

Compacidade de soluções para equações do tipo Yamabe em dimensão 3

por

Lorena Maria Augusto Pequeno Silva [1]

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós–Graduação em Matemática da Universidade Federal da Paraíba como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Análise

Aprovada em 25 de Julho de 2019.

Banca Examinadora:

Manassés Xavier de Souza

Prof. Dr. Manassés Xavier de Souza – UFPB
(Orientador)

Levi Lopes de Lima

Prof. Dr. Levi Lopes de Lima – UFC
(Examinador Externo)

Uberlandio Batista Severo.

Prof. Dr. Uberlandio Batista Severo– UFPB
(Examinador Interno)

[1] O autor foi bolsista da CAPES durante a elaboração desta dissertação.

A minha família

Agradecimentos

A Deus pela vida e pelas pessoas que colocou em meu caminho.

A minha mãe e meus irmãos pelo apoio durante toda minha vida e pelo incentivo de continuar estudando mesmo estando longe de casa durante alguns momentos. Obrigada pelo apoio de vocês! Agradeço ao meu pai que mesmo em forma espiritual me acompanhou durante todo o tempo, me dando força e consolo quando preciso. A toda minha família que torceu pelo meu sucesso.

Agradeço ao meu amado Douglas Queiroz por todo apoio, amor e confiança quando nem eu mesma acreditei que fosse capaz.

Ao professor Manassés Xavier que aceitou o convite de me orientar. Obrigada por todos os momentos compartilhados, sua paixão e dedicação com a matemática contagiam. Agradeço pela sua disponibilidade, paciência e simpatia. O senhor é um exemplo de profissional para mim.

Agradeço aos professores Levi Lopes de Lima e Uberlandio Batista Severo e aos suplentes José Carlos Albuquerque Melo Júnior e Márcio Silva Santos por terem aceito o convite de participar da banca e pelas suas contribuições a esse trabalho.

Aos meus sogros por terem me dado suporte principalmente no último ano em João Pessoa, os considero como parte da minha família. Aos meus amigos Castelo Branco e Sylvia Ferreira que mesmo já os conhecendo desde a graduação se tornaram grandes amigos durante o mestrado. Foi um prazer ter dividido desesperos e conquistas com vocês além dos muitos momentos de alegria. O quarteto é para toda vida.

Aos amigos que fiz no mestrado em especial a Ângélica, Douglas Magno, Hector, Lázaro, Lênin, Mariana, Pedro, Railane, Raoni, Ranieri, Renato e Thiago Paiva. Obrigada pelos momentos de estudos e conversa.

A CAPES pelo apoio financeiro.

Por fim, agradeço a todos que de forma direta e indireta contribuíram e torceram para a realização desse trabalho.

Resumo

Nesta dissertação, provaremos resultados sobre a compacidade de soluções para equações do tipo Yamabe em variedades Riemannianas de dimensão 3. Para isso, faremos uma análise local sobre sequências de soluções próxima a pontos de blow-up e usaremos o Teorema da Massa Positiva. Além disso, veremos algumas aplicações sobre tal resultado: o cálculo do grau de Leray-Schauder e a existência e multiplicidade de sequências minimizantes. Por fim, veremos que os mesmos resultados continuam válidos para uma classe de equações com peso mais geral do tipo Yamabe também em dimensão 3.

Palavras-chave: Análise de blow-up; Compacidade; equação de Yamabe.

Abstract

In this dissertation, we will prove results on the compactness of solutions for equations of the Yamabe type in Riemannian manifolds of dimension 3. For this, we will do a local analysis of a sequence of solutions near blow-up points and use the Positive Mass Theorem. In addition, we will see some applications about this result: the calculation of the Leray-Schauder degree and the existence and multiplicity of minimizing sequences. Finally, we will see that the same results remain valid for a class of Yamabe type equations with more general weight also in dimension 3.

Keywords: Blow-up analysis; Compactness; Yamabe's equation.

Sumário

Introdução

Uma consequência do Teorema da Uniformização de Poincaré para uma variedade (M, g) compacta bi-dimensional é que existe uma métrica $\tilde{g}$ conforme a g de tal forma que $(M, \tilde{g})$ possui curvatura Gaussiana constante. Uma pergunta natural seria: é possível generalizar o Teorema de Uniformização para $n \geq 3$? Surge então o problema proposto por Yamabe.

Problema de Yamabe: *Seja (M, g) uma variedade Riemanniana compacta suave de dimensão $n \geq 3$. Então, existe métrica $\tilde{g}$ conforme a g com curvatura escalar constante.*

Seja (M, g) uma variedade Riemanniana compacta suave de dimensão $n \geq 3$ e $\tilde{g}$ uma métrica conforme a g. Então, $\tilde{g}$ pode ser escrita por $\tilde{g} = u^{\frac{4}{n-1}} g$, onde u é uma função real positiva e suave definida em M. Assim, podemos relacionar as curvaturas na métrica g e $\tilde{g}$ da seguinte forma

$$R_{\tilde{g}} = u^{-\frac{n+2}{n-2}} \left(4\frac{n-1}{n-2} \Delta_g u + R_g u \right),$$

onde R_g e $R_{\tilde{g}}$ são as curvaturas escalares de M na métrica g e $\tilde{g}$ respectivamente. Analiticamente, o problema de Yamabe é equivalente a encontrar uma solução positiva u para a chamada *equação de Yamabe*

$$\Delta_g u - \frac{n-2}{4(n-1)} R_g u + K u^{\frac{n+2}{n-2}} = 0 \;\text{ em } M, \tag{1}$$

onde Δ_g é o operador de Laplace-Beltrami associado a métrica g e K é uma constante. O operador $L_g = \Delta_g - \frac{n-2}{4(n-1)} R_g$ é chamado de *Laplaciano conforme* na métrica g. Yamabe observou que (1) é a equação de Euler-Lagrange para o funcional

$$Q(\tilde{g}) = \frac{\int_M R_{\tilde{g}} \mathrm{d}v_g}{\left(\int_M \mathrm{d}v_{\tilde{g}}\right)^{\frac{n-2}{n}}}$$

que é conhecido como *funcional de Yamabe.* É possível definir ainda o *invariante de*

Yamabe como sendo

$$\lambda(M) = \inf_{\tilde{g}\in[g]} Q(\tilde{g}),$$

onde $[g]$ representa a classe de equivalência de métricas conformes a g. O sinal desse invariante nos dá informações sobre o conjunto solução do problema de Yamabe. Se $\lambda(M) < 0$, a solução do problema é única. Caso $\lambda(M) = 0$, a solução é única a menos de um fator constante. Em nosso trabalho, estamos interessados no caso em que o $\lambda(M) > 0$, pois a estrutura do conjunto de soluções do problema pode ser muito rica.

O próprio Hidehiko Yamabe acreditou ter provado tal problema em 1960 no artigo [30] utilizando técnicas do cálculo variacional e de equações diferenciais parciais elípticas. No entanto, em 1968 Neil Trudinger descobriu um erro na prova de Yamabe. Em [29], Trudinger conseguiu adaptar alguns resultados feitos por Yamabe ao introduzir a hipótese do invariante de Yamabe $\lambda(M) \leq 0$. Na verdade, ele mostrou que se o invariante de Yamabe fosse menor que uma constante positiva $\alpha(M)$ os resultados valiam. Em 1976, Aubin estendeu o resultado de Trudinger em [2] mostrando que $\alpha(M) = \lambda(\mathbb{S}^n)$ para toda variedade M, onde $\mathbb{S}^n$ é a esfera unitária munida da métrica usual. No mesmo trabalho, Aubin resolveu ainda o problema de Yamabe para o caso não localmente conformemente flat para as dimensões $n \geq 6$. Por fim, Schoen completou em 1984 a prova do problema de Yamabe no artigo [24] resolvendo os casos restantes para as dimensões $3 \leq n \leq 5$ e o caso em que a variedade é localmente conformemente flat. Destacamos que os resultados obtidos por Schoen foram possíveis graças ao uso do Teorema da Massa Positiva da Relatividade Geral.

A solução do problema Yamabe foi uma conquista notável pois pela primeira vez, foi dada uma teoria de existência bastante satisfatória para uma equação diferencial parcial não linear envolvendo um expoente crítico de Sobolev.

Ainda sobre o problema de Yamabe, John Lee e Thomas Parker [17], alguns anos depois, deram uma outra demonstração para o problema, apresentando melhorias para alguns resultados ao introduzir um sistema de coordenadas normais conformes, que simplificou a análise local.

Após a resolução completa do problema de Yamabe, surgiram tentativas em descrever o conjunto de soluções da equação de Yamabe (1). A Conjectura de Compacidade tenta investigar a Compacidade das soluções em variedades Riemannianas que não são equivalentemente conformes a esfera. Exclui-se a esfera pois em Obata [23] é demonstrado que o conjunto de soluções de (1) para a esfera unitária $(\mathbb{S}^n, g_0)$ é não-compacto. Tal Conjectura foi proposta em 1988 por Richard Schoen enquanto estudava o caso localmente conformemente flat em [25]. Vejamos:

Conjectura de Compacidade: O conjunto de soluções do Problema de Yamabe, no caso em que o invariante de Yamabe for positivo, é compacto a não ser que a variedade seja conformemente equivalente a esfera euclidiana.

Em 1991, Schoen obteve resultados de compacidade para o problema de Yamabe no artigo [26] provando que quando (M, g) é localmente conformemente flat mas não conformemente equivalente à esfera unitária, todas as soluções para o problema Yamabe permanecem em um conjunto compacto em relação à norma C^3 e o grau total de todas as soluções de Leray-Schauder é igual a -1.

Em 1999, YanYan Li e Meijun Zhu [20] provaram para variedades Riemannianas de dimensão 3 o caso não localmente conformemente flat. Por ser um trabalho pioneiro e em dimensão 3, esse artigo tornou-se uma referência na literatura. Os trabalhos posteriores em dimensões maiores tiveram como referência o trabalho e a metodologia desenvolvidos por Li e Zhu. Devido a sua importância, nosso objetivo nesta dissertação é estudar os resultados sobre compacidade obtidos no artigo [20] em variedades Riemannianas de dimensão 3. Para obter tais resultados, precisaremos de uma Identidade do tipo Pohozaev, analisar as sequências de soluções próximas a pontos de blow-up e do Teorema da Massa Positiva.

Mais recentemente, sobre variedades não localmente conformemente flat, Druet provou resultados sobre compacidade em dimensão 4 no artigo [8] e dimensão 5 em [9]. Em 2008 Simon Brendle provou no trabalho [4] que a Conjectura de Compacidade é falsa quando $n \geq 52$. No mesmo ano, Fernando Codá Marques e Brendle provaram em [5] que a Conjectura é falsa para $25 \leq n \leq 51$. Por fim, em 2009 Marcus Khuri, Marques e Schoen finalmente provaram em [16] que a conjectura é válida para $3 \leq n \leq 24$. Um texto acessível sobre o último trabalho é a dissertação [7]. Em resumo, a Conjectura da Compacidade é válida em qualquer variedade Riemanniana para $3 \leq n \leq 24$.

Estudaremos a seguir os resultados obtidos em [20] que comprovam a Conjectura da Compacidade em dimensão 3. Nosso trabalho está dividido em três capítulos. No primeiro capítulo, veremos os resultados preliminares que serão utilizadas durante a dissertação, passando por alguns resultados de Geometria e de Análise. No segundo capítulo, apresentaremos a equação do tipo Yamabe que estudaremos, definiremos os pontos de blow-up, blow-up isolado e isolado simples para uma sequência de soluções, além da Identidade de Pohozaev, bem como diversos resultados sobre a análise dos pontos de blow-up. A segunda parte deste capítulo é dedicada a provar dois teoremas de compacidade um com respeito a norma H^1 e outro em C^2. Depois discutiremos as seguintes aplicações: o cálculo do Grau de Leray-Schauder e a existência e multiplicidade em problemas de minimização. O último capítulo é destinado a compacidade de soluções para uma classe de equações do tipo Yamabe com peso, que é um caso mais geral que o visto no Capítulo 2 e que incluí o problema de equações de curvatura escalar prescrita e terá a mesma metodologia do capítulo anterior. Encerramos o capítulo destacando um resultado de compacidade obtido quando o peso é permitido mudar de sinal e a existência de uma função minimizante também neste caso.

Capítulo 1

Preliminares

Este capítulo será dedicado a relembrar ou conhecer, de forma introdutória, alguns conceitos e resultados que serão utilizados durante toda a dissertação. A primeira seção é destinada aos operadores diferenciáveis em variedades Riemannianas. Em seguida, veremos definições e resultados sobre o Teorema da Massa Positiva que, embora provenha da teoria da relatividade, será fundamental para o nosso resultado sobre a compacidade de soluções em C^2. Dando continuidade, relembraremos alguns resultados sobre a teoria elíptica e por fim veremos alguns resultados para soluções positivas de equações elípticas lineares em bolas perfuradas.

1.1 Operadores Diferenciáveis em Variedades Riemannianas

Definição 1.1. O *gradiente* de $f \in C^\infty$ é o campo vetorial de classe C^∞, $\nabla f : M \to TM$, definido por

$$\langle \nabla f, X \rangle = X_p(f),$$

para todo X pertencente ao conjunto dos campos de vetores de classe C^∞ em M, ou ainda $X \in \mathfrak{X}(M)$.

1. Se $\{E_1, ..., E_n\}$ é um referencial ortonormal em uma vizinhança U de M, ou seja $E_i \in \mathfrak{X}(U)$ de modo que para todo $q \in U$, $\{E_i\}_{i=1,\cdots,n}$ forma uma base ortonormal de T_qM, então

$$\nabla f = \sum_{i,j=1}^{n} E_i(f)E_j \text{ em } U.$$

2. Dado $p \in M$ e $v \in T_pM$, seja $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ uma curva de classe C^∞ tal que

$\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = v$. Então

$$\langle \nabla f, v \rangle_p = \frac{d}{dt}(f \circ \alpha)(t)\Big|_{t=0}.$$

Veremos a seguir uma caracterização do gradiente em coordenadas locais.

Proposição 1.1. Seja M uma variedade Riemanniana com métrica g. Se $f : M \to \mathbb{R}$ é de classe C^∞ e $U \subset M$ é uma vizinhança coordenada com campos coordenados $\partial_1, \ldots, \partial_n$, então

$$\nabla f = \sum_{k,l=1}^{n} g^{kl} \frac{\partial f}{\partial x_l} \partial_k.$$

Em particular,

$$|\nabla f|^2 = \sum_{k,l=1}^{n} g^{kl} \frac{\partial f}{\partial x_k} \frac{\partial f}{\partial x_l}.$$

Demonstração. Sejam $a_k \in C^\infty(U)$ com $k = 1, \ldots, n$ tais que $\nabla f = \sum_{k=1}^{n} a_k \partial_k$. Então,

$$\frac{\partial f}{\partial x_l} = \langle \nabla f, \partial_l \rangle = \langle \sum_{k=1}^{n} a_k \partial_k, \partial_l \rangle = \sum_{k=1}^{n} a_k \langle \partial_k, \partial_l \rangle = \sum_{k=1}^{n} a_k gkl.$$

Assim,

$$\sum_{l=1}^{n} g^{kl} \frac{\partial f}{\partial x_l} = \sum_{l=1}^{n} g^{kl} \left(\sum_{j=1}^{n} a_j g_{jl} \right) = \sum_{j=1}^{n} a_j \left(\sum_{l=1}^{n} g^{kl} g_{lj} \right) = \sum_{j=1}^{n} a_j \delta_{kj} = a_k.$$

Logo,

$$\nabla f = \sum_{k=1}^{n} a_k \partial_k = \sum_{k,l=1}^{n} g^{kl} \frac{\partial f}{\partial x_l} \partial_k.$$

Como consequência, temos que

$$\begin{aligned} |\nabla f|^2 &= \langle \nabla f, \nabla f \rangle \\ &= \langle \sum_{k,l=1}^{n} g^{kl} \frac{\partial f}{\partial x_l} \partial k, \sum_{m,j=1}^{n} g^{mj} \frac{\partial f}{\partial x_j} \partial m \rangle \\ &= \sum_{j,k,l,m=1}^{n} g^{kl} g^{mj} g_{km} \frac{\partial f}{\partial x_l} \frac{\partial f}{\partial x_j}. \end{aligned}$$

Ou ainda,

$$\begin{aligned}
|\nabla f|^2 &= \sum_{j,k,l=1}^{n} g^{kl}\frac{\partial f}{\partial x_l}\frac{\partial f}{\partial x_j}(\sum_{m=1}^{n} g^{mj}g_{km}) \\
&= \sum_{j,k,l=1}^{n} g^{kl}\frac{\partial f}{\partial x_l}\frac{\partial f}{\partial x_j}\delta_{jk} \\
&= \sum_{k,l=1}^{n} g^{kl}\frac{\partial f}{\partial x_l}\frac{\partial f}{\partial x_k}.
\end{aligned}$$

Portanto, $|\nabla f|^2 = \displaystyle\sum_{k,l=1}^{n} g^{kl}\frac{\partial f}{\partial x_k}\frac{\partial f}{\partial x_l}$. □

Definição 1.2. Seja $X \in \mathfrak{X}(M)$. A *divergência* de X é a função de classe C^∞ div $X : M \to \mathbb{R}$ dada por

$$(\text{div } X)(p) = \text{tr}\{v \mapsto (\nabla_v X)(p)\},$$

onde tr representa o traço do operador linear $v \in T_pM \to \nabla_v X \in T_pM$.

Proposição 1.2. Sejam $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $\{E_1, \ldots, E_n\}$ um referencial ortonormal em uma vizinhança $U \subset M$. Se $X = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} f_i E_i$ em U, então

$$\text{div } X = \sum_{i=1}^{n}(E_i(f_i) - \langle \nabla_{E_i} E_i, X\rangle) \ \text{ em } U.$$

Em particular, se o referencial for geodésico em $p \in U$, ou seja $\nabla_{E_i} E_j(p) = 0$, então

$$\text{div } X = \sum_{i=1}^{n} E_i(f_i)(p).$$

Demonstração. Pela definição de divergência, temos que

$$\text{div } X = \text{tr}\{v \mapsto (\nabla_v X)(p)\} = \sum_{i=1}^{n}\langle \nabla_{E_i} X, E_i\rangle$$

usando a compatibilidade da conexão Riemanniana,

$$\begin{aligned}
\text{div } X &= \sum_{i=1}^{n}(E_i\langle X, E_i\rangle - \langle X, \nabla_{E_i} E_i\rangle) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(E_i\langle \sum_{j=1}^{n} f_j E_j, E_i\rangle - \langle X, \nabla_{E_i} E_i\rangle\right) \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} E_i(f_j)\langle E_j, E_i\rangle - \sum_{i=1}^{n}\langle X, \nabla_{E_i} E_i\rangle
\end{aligned}$$

Ou ainda,

$$\begin{aligned}
\text{div } X &= \sum_{i,j=1}^{n} E_i(f_j)\delta_{ij} - \sum_{i=1}^{n}\langle X, \nabla_{E_i}E_i\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} E_i(f_i) - \sum_{i=1}^{n}\langle X, \nabla_{E_i}E_i\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n}(E_i(f_i) - \langle X, \nabla_{E_i}E_i\rangle).
\end{aligned}$$

Em particular, segue diretamente do que acaba de ser provado já que se o referencial for geodésico, $\nabla_{E_i}E_i(p) = 0$. Logo, div $X = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} E_i(f_i)$. □

Lema 1.3. Sejam $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $U \subset M$ uma vizinhança coordenada com campos coordenados $\partial_1, \ldots, \partial_n$. Se $X = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} f_i\partial_i$ em U, então

$$\text{div } X = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f_i}{\partial x_i} + \sum_{i,j=1}^{n} f_i\Gamma_{ij}^{j},$$

onde Γ_{ij}^{k} são os símbolos de Christofell da métrica de M em U.

Demonstração. Observe que usando as propriedades da conexão Riemanniana temos que

$$\begin{aligned}
\nabla_{\partial_i}X &= \nabla_{\partial_i}\left(\sum_{k=1}^{n} f_k\partial_k\right) = \sum_{k=1}^{n}\nabla_{\partial_i}(f_k\partial_k) = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial f_k}{\partial x_i}\partial_k + f_k\nabla_{\partial_i}\partial_k\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial f_k}{\partial x_i}\partial_k + f_k\sum_{j=1}^{n}\Gamma_{ik}^{j}\partial_j\right) = \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial f_k}{\partial x_i}\partial_k + \sum_{j=1}^{n} f_k\Gamma_{ik}^{j}\partial_j \\
&= \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial f_k}{\partial x_i}\partial_k + \sum_{j,k=1}^{n} f_j\Gamma_{ij}^{k}\partial_k = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial f_k}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{n} f_j\Gamma_{ij}^{k}\right)\partial_k.
\end{aligned}$$

A expressão entre parênteses da linha anterior é um termo genérico da matriz que representa a aplicação $Y \to \nabla_Y X$ no referencial $\{\partial x_i, i = 1, \ldots, n\}$. Portanto,

$$\text{div } X = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f_i}{\partial x_i} + \sum_{i,j=1}^{n} f_i\Gamma_{ij}^{j}.$$

□

Proposição 1.4. Sejam $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $U \subset M$ uma vizinhança coordenada com campos coordenados $\partial_1, \ldots, \partial_n$. Se $X = \sum_{i=1}^{n} f_i \partial_i$ em U, então

$$\text{div } X = \frac{1}{\sqrt{\det\ G}} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial_{x_i}} (f_i \sqrt{\det\ G})$$

em U, onde $G = (g_{ij})$ é uma matriz da métrica.

Demonstração. Observe que

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} \Gamma_{ij}^{j} &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x_j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k}\right) g^{kj} \\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_j} g^{kj} + \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial g_{jk}}{\partial x_i} g^{kj} - \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} g^{kj}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{k,j=1}^{n} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} g^{jk} + \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial g_{jk}}{\partial x_i} g^{kj} - \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} g^{kj}\right) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial g_{jk}}{\partial x_i} g^{kj}.
\end{aligned}$$

Para demonstrar a proposição precisaremos da afirmação a seguir.

Afirmação *Vale a seguinte identidade:*

$$\sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial g_{jk}}{\partial x_i} g^{kj} = \frac{1}{\det\ G} \frac{\partial}{\partial x_i} (\det\ G).$$

Demonstração da Afirmação: Seja $(G^k)_i$ a matriz obtida de $G = (g_{ij})$ derivando as entradas da k-ésima coluna na direção de ∂_i. Ou seja,

$$(G^k)_i = \begin{pmatrix} g_{11} & \cdots & \partial_i g_{1k} & \cdots & g_{1n} \\ g_{21} & \cdots & \partial_i g_{2k} & \cdots & g_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n1} & \cdots & \partial_i g_{nk} & \cdots & g_{nn} \end{pmatrix}$$

Como det G é linear em cada coluna, temos

$$\frac{1}{\det\ G} \frac{\partial}{\partial x_i} (\det\ G) = \sum_{k=1}^{n} \det(G^{-1}) \det((G^k)_i) = \sum_{k=1}^{n} \det(G^{-1} (G^k)_i).$$

Usando o fato que $G^{-1}G = Id$, segue que

$$G^{-1}(G^k)_i = \begin{pmatrix} g^{11} & \cdots & g^{1k} & \cdots & g^{1n} \\ g^{21} & \cdots & g^{2k} & \cdots & g^{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g^{n1} & \cdots & g^{nk} & \cdots & g^{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} g_{11} & \cdots & \partial_i g_{1k} & \cdots & g_{1n} \\ g_{21} & \cdots & \partial_i g_{2k} & \cdots & g_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n1} & \cdots & \partial_i g_{nk} & \cdots & g_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & A_{1k} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & A_{k-1,k} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & A_{k,k} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & A_{k+1,k} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & A_{nk} & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

onde $A_{lk} = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} g^{lj} \frac{\partial g_{jk}}{\partial x_i}$. Assim,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\det\ G} \frac{\partial}{\partial x_i}(\det\ G) &= \sum_{k=1}^{n} \det(G^{-1}) \det((G^k)_i) \\ &= \sum_{k=1}^{n} A_{kk} \\ &= \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial g_{jk}}{\partial x_i} g^{kj}, \end{aligned}$$

o que prova a afirmação.

Agora, usando o Lema 1.3 e a Afirmação anterior, obtemos

$$\begin{aligned} \text{div } X &= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_i} + f_i \sum_{j=1}^{n} \Gamma_{ij}^{i} \right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_i} + \frac{f_i}{2 \det\ G} \frac{\partial}{\partial x_i}(\det\ G) \right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_i} + \frac{f_i}{\sqrt{\det\ G}} \frac{\partial}{\partial x_i}(\sqrt{\det\ G}) \right) \end{aligned}$$

colocando $\dfrac{1}{\sqrt{\det\ G}}$ em evidência, obtemos

$$
\begin{aligned}
\text{div } X &= \frac{1}{\sqrt{\det\ G}} \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_i} \sqrt{\det\ G} + f_i \frac{\partial}{\partial x_i} (\sqrt{\det\ G}) \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{\det\ G}} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(f_i \sqrt{\det\ G} \right).
\end{aligned}
$$

Portanto, a proposição está provada. □

Definição 1.3. Seja M uma variedade Riemanniana. O *Laplaciano* em M é o operador $\Delta : C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M)$, também chamado de operador de *Laplace-Beltrami*, definido por

$$\Delta u = \text{div } \nabla u, \quad u \in C^\infty(M).$$

Observação 1.1. Usando o Lema 1.4 e a Proposição 1.1, obtemos que em uma vizinhança coordenada $U \subset M$, o operador Laplaciano assume a seguinte forma:

$$
\begin{aligned}
\Delta u &= \frac{1}{\sqrt{\det\ G}} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(g^{ij} \sqrt{\det\ G} \frac{\partial_u}{\partial x_j} \right) \\
&= \sum_{i,j,k=1}^{n} g^{ij} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} - \Gamma_{ij}^k \frac{\partial u}{\partial x_k} \right). \qquad (1.1)
\end{aligned}
$$

1.2 Teorema da Massa Positiva

Nesta seção, veremos alguns resultados e definições com o objetivo de chegar ao Teorema da Massa Positiva, que a priori é um resultado físico da Teoria de Relatividade, e a sua relação com a constante A da função de Green. O Lema 1.11 será indispensável para a demonstração do Teorema 2.23. Graças a Schoen, foi possível relacionar o Teorema da Massa Positiva ao Problema de Yamabe e inferir sobre a positividade da constante A da função de Green através de variedades assintoticamente planas.

Não demonstraremos os resultados desta seção por exigirem mais aporte teórico do que aqui será exibido. Além do mais, o nosso interesse é apresentar o Teorema da Massa Positiva e deixar claro sua relação com o nosso trabalho.

Definição 1.4. Suponha que (M, g) seja uma variedade Riemanniana compacta com $\lambda(M) > 0$. Dado $P \in M$ defina a métrica $\hat{g} = G^{p-2}g$ sobre $\hat{M} = M \setminus \{P\}$, com

$$G = (n-2)\omega_{n-1} a \Gamma_P$$

onde ω_{n-1} é o volume da bola unitária em $\mathbb{R}^n$ e Γ_P é a função de Green sobre o ponto

P. A variedade $(\hat{M}, \hat{g})$ juntamente com a aplicação natural $\sigma : M \setminus P \to \hat{M}$ é chamada de *projeção estereográfica* de M a partir de P.

Na proposição a seguir, P_k denotará um polinômio homogêneo em x de grau k.

Lema 1.5. Em um sistema de coordenadas normais conformes (Φ, Ω) em P a função de Green G tem uma expansão assintótica da forma

$$G(x) = |x|^{n-2}\left(1 + \sum_{k=4}^{n} \psi_k(x)\right) + (c + u_1 + u_2)\log|x| + \alpha(x)$$

para todo $x \in \Phi(\Omega) \setminus \{0\}$, $\psi_k \in P_k, \alpha(x) \in C^{2,\mu}, u_1$ e u_2 são funções harmônicas com $u_1 \in P_1, u_2 \in P_2$ e os termos com log aparecem apenas se n é par.

Em particular, se $n = 3, 4, 5$ ou M é localmente conformemente plana em uma vizinhança de P então a expressão anterior é simplificada e dada por

$$G(x) = |x|^{2-n} + A + O''(r) \tag{1.2}$$

onde A é uma constante (não necessariamente positiva).

A prova pode ser vista em [17] página 65.

Definição 1.5. Dada (M, g) uma variedade Riemanniana, (M, g) é dita *assintoticamente plana* de ordem $\tau > 0$ se existe uma decomposição $M = M_0 \cup M_\infty$ com M_0 compacta, M_∞ difeomorfa a $\mathbb{R}^n \setminus B_R$ para algum $R > 0$ e o difeomorfismo fornece um sistema de coordenadas $\{z^i\}$ sobre M_∞ tal que

$$g_{ij} = \delta_{ij} + O(\rho^{-\tau}), \quad \partial_k g_{ij} = O(\rho^{-\tau-1}), \quad \partial_k\partial_l g_{ij} = O(\rho^{-\tau-2})$$

para $\rho \to \infty$. As coordenadas $\{z^i\}$ são chamadas *coordenadas assintóticas.*

Essa definição aparentemente depende da escolha de coordenadas assintóticas. No entanto, na Seção 9 de [6], vê-se que a estrutura assintoticamente plana é determinada apenas pela métrica.

Teorema 1.6. *$\hat{M}$ é assintoticamente plana de ordem $\tau = 1$ se $n = 3$, de ordem 2 se $n \geq 4$ e ordem $n - 2$ se M é conformemente plana perto de P.*

A projeção estereográfica de M recebe esse nome pois a curvatura escalar na métrica $\hat{g}$ sobre a variedade $\hat{M} = M \setminus P$ é identicamente nula. Mais ainda, $\hat{M} = M \setminus P$ é assintoticamente plana. Isso simplifica bastante o problema, similarmente ao que se faz no caso da esfera no qual usa-se a projeção estereográfica de $\mathbb{S}^n$ sobre $\mathbb{R}^n$, visto que sobre $\mathbb{R}^n$ a curvatura escalar é identicamente nula.

Definição 1.6. Dada uma variedade Riemanniana assintoticamente plana (M, g) com coordenadas assintóticas $\{z^i\}$, definimos a *massa* da variedade como sendo o limite

$$m(g) = \lim_{R\to\infty} \omega^{-1} \int_{S_R} \mu \lrcorner dz$$

se o limite existe, onde μ é o campo vetorial de massa-densidade definido em M_∞ por

$$\mu = \sum_{i,j=1}^{n} (\partial_i g_{ij} - \partial_j g_{ii})\partial_j.$$

Teorema 1.7. ***(Teorema da Massa positiva):*** *Seja (M, g) uma variedade Riemanniana assintoticamente plana de dimensão $n = 3$ e ordem $\tau > \frac{1}{2}$ com curvatura escalar não-negativa. Então a massa $m(g)$ é não-negativa e $m(g) = 0$ se, e somente se, (M, g) é isométrica ao espaço Euclidiano $\mathbb{R}^3$.*

Para a prova e mais detalhes veja o artigo [27]. Schoen e Yau conseguiram ainda generalizar o resultado acima para $3 \leq n \leq 7$.

Teorema 1.8. *Seja (M, g) uma variedade Riemanniana assintoticamente plana de dimensão $3 \leq n \leq 7$ e ordem $\tau > \frac{n-2}{2}$ com curvatura escalar não-negativa. Então a massa $m(g)$ é não-negativa e $m(g) = 0$ se, e somente se, (M, g) é isométrica ao espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$.*

O Teorema da Massa Positiva continuou sendo tema de pesquisa. Devido a sua ligação com os resultados de compacidade e outros temas. Muitos pesquisadores tentaram generalizá-lo para dimensão n qualquer. O trabalho de Schoen e Yau [28] ainda em análise publicado em 2017 talvez conclua essa pesquisa.

Vejamos mais resultados sobre o assunto.

Teorema 1.9. *Se (M, g) é uma variedade Riemanniana compacta (conexa) localmente conformemente plana de dimensão $n \geq 3$, então a massa de $\hat{M}$ satisfaz $m(\hat{g}) \geq 0$. Mais ainda $m(\hat{g}) = 0$ se, e somente se, $(\hat{M}, \hat{g})$ é conformemente equivalente a esfera $(\mathbb{S}^n, g_0)$.*

Lema 1.10. Seja $(\hat{M}, \hat{g})$ a projeção estereográfica de M a partir de $P \in M$. Se $n = 3, 4, 5$, ou M é localmente conformemente plana próximo a P, então $m(\hat{g}) = 4(n-1)A$. Onde A é a função que aparece na função de Green.

A demonstração do lema pode ser encontrada em [17] na página 79. O resultado a seguir é o fato mais importante da seção e será a peça chave para demonstrar o Teorema 2.24.

Lema 1.11. Se $n = 3, 4, 5$ ou (M, g) for localmente conforme plana em uma vizinhança de P, então a constante A na função de Green de (1.2) é não-negativa. Mais ainda, $A = 0$ se, e somente se, $\hat{M}$ é isométrica ao espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$.

Demonstração. Se M for localmente conformemente plana, o resultado segue do Teorema 1.9 acima e do lema anterior. Nos outros casos, considere a projeção estereográfica $(\hat{M}, \hat{g})$. Temos então que $\hat{M}$ tem curvatura escalar igual a zero. Pelo Teorema 1.6, sabemos que $\hat{M}$ é assintoticamente plana de ordem $\tau = 1, 2$ *ou* 2, se $n = 3, 4,$ ou 5, respectivamente. Assim, nessas dimensões, temos que $\tau > \frac{(n-2)}{2}$ e pelo Teorema 1.8 segue que $m(\hat{g}) \geq 0$ e $m(\hat{g}) = 0$ se e somente se $\hat{M}$ é isométrica ao $\mathbb{R}^n$. Pelo Lema 1.10, segue que $A \geq 0$ e $A = 0$ respectivamente. $\square$

O lema anterior não se aplica a variedades arbitrárias de dimensão $n \geq 6$, pois a projeção estereográfica de M tem ordem τ igual a 2 para $n \geq 4$, mas a condição $\tau > \frac{(n-2)}{2}$ não é satisfeita para dimensão maior ou igual a seis.

1.3 Equações Elípticas

Dedicamos esta seção a um breve estudo de equações diferenciais elípticas. Em diversos momentos do trabalho, faremos uso delas. A referência principal desta seção é o livro de Gilbarg e Trudinger [11] onde podem ser encontradas as demonstrações dos resultados aqui presentes.

O primeiro resultado que veremos sobre equações elípticas é o Princípio do Máximo em suas duas versões, a clássica e a forte. A primeira versão é conhecida também como o Princípio do Máximo Fraco.

Proposição 1.12. (Princípio do Máximo Fraco) Seja $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ uma função harmônica onde Ω é limitado. Então,

$$\sup_{\Omega} u = \sup_{\partial\Omega} u.$$

O mesmo resultado vale se substituirmos sup por inf. Tal versão é chamada de Princípio do Mínimo.

Proposição 1.13. (Princípio do Máximo Forte) Se $\Delta u \geq 0$ (≤ 0) em Ω e suponha que exista um ponto $y \in \Omega$ tal que

$$u(y) = \sup_{\Omega} \, (\inf_{\Omega} u)$$

então u é constante.
Consequentemente, uma função harmônica não pode assumir no interior um valor de máximo ou mínimo, a menos que seja constante.

O Princípio do Mínimo Forte é uma versão do resultado acima substituindo-se u por $-u$ e sup por inf.

O próximo resultado que veremos é a Desigualdade de Harnack. Essa desigualdade afirma que os valores de uma função harmônica não-negativa u em Ω são todos comparáveis, ou seja, u não pode assumir valores muito pequeno (ou muito grande) em qualquer ponto de Ω a menos que assuma valores muito pequeno (ou muito grande) em todos os pontos de Ω.

Proposição 1.14. (Desigualdade de Harnack)

Seja u uma função harmônica não-negativa em Ω. Então, para todo subdomínio $\Omega' \subset\subset \Omega$ limitado, existe uma constante C dependendo de n, Ω' e Ω tal que

$$\sup_{\Omega'} u \leq C \inf_{\Omega'} u.$$

A demonstração dos três resultados acima pode ser encontrada em [11] nas páginas 15 e 16.

Teorema 1.15. *(Teorema de Böcher)*

Seja u uma função harmônica positiva em $B_1(0) \setminus \{0\}$. Então, existe uma função harmônica b em $B_1(0)$ e uma constante $a \geq 0$ tal que

$$u(x) = \begin{cases} -a \log|x| + b(x), & se\ n = 2 \\ \frac{a}{|x|^{n-2}} + b(x), & se\ n \geq 3. \end{cases}$$

Vejamos mais alguns resultados.

Em um domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, consideremos o operador elíptico diferenciável de segunda ordem da forma

$$\mathrm{L}u = -a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_j} + b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu \tag{1.3}$$

com os coeficientes limitados $a_{ij} = a_{ji}, b_i$ e c satisfazendo a condição elíptica

$$a_{ij}\xi_i\xi_j \geq \lambda|\xi|^2,$$

para alguma constante $\lambda > 0$, para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$. Por convenção, os índices repetidos são somados de 1 a n.

Teorema 1.16. *Seja L um operador elíptico do tipo* (1.3) *com coeficientes de classe C^∞ e $u \in C^2(\Omega)$. Supondo que $Lu = f \in C^\alpha(\bar{\Omega})$, então $u \in C^{2,\alpha}(\Omega)$ e para todo*

$\Omega' \subset\subset \Omega$ *temos*

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}(\Omega')} \leq C\left(\|u\|_{L^\infty(\Omega)} + \|f\|_{C^\alpha(\bar{\Omega})}\right).$$

Além disso, se Ω *é de classe* $C^{2+\alpha}$ *e se* $u \in C^o(\bar{\Omega})$ *coincide com a função* $u_o \in C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$ *sobre* $\partial\Omega$, *então* $u \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$ *e*

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})} \leq C\left(\|u\|_{L^\infty(\Omega)} + \|f\|_{C^\alpha(\bar{\Omega})} + \|u_o\|_{C^\alpha(\bar{\Omega})}\right).$$

1.4 Soluções positivas em bolas perfuradas

Nesta seção fornecemos algumas descrições bem conhecidas na literatura sobre os comportamentos singulares de soluções positivas para algumas equações elípticas lineares em bolas perfuradas. Para $n \geq 3$, B_r denotará a bola em $\mathbb{R}^n$ de raio r centrada na origem. Denotaremos por $g = g_{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j$ alguma métrica Riemanniana suave em B_1 e $k(x) \in C^1(B_1)$.

Lema 1.17. Suponha que $u \in C^2(B_1 \setminus \{0\})$ seja uma solução de

$$-\Delta_g u + k(x)u = 0, \quad \text{em } B_1 \setminus \{0\}$$

e $u(x) = o(|x|^{2-n})$ quando $|x| \to 0$. Então $u \in C^{2,\alpha}(B_{\frac{1}{2}})$ para todo $0 < \alpha < 1$.

Demonstração. Primeiro mostraremos que $-\Delta_g u + k(x)u = 0$ em B_1 no sentido das distribuições. Para todo $\varepsilon > 0$, consideremos a função corte ξ_ε :

$$\xi_\varepsilon(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } |x| \leq \varepsilon, \\ 0 & \text{se} |x| \geq 2\varepsilon, \\ |\nabla_g \xi_\varepsilon| < \frac{C}{\varepsilon}, & |\nabla_g^2 \xi_\varepsilon| < \frac{C}{\varepsilon^2}. \end{cases}$$

Então, para todo $\phi \in C_c^\infty(B_1)$, temos que

$$-\int_{B_1} \Delta_g(\phi(1-\xi_\varepsilon))u + \int_{B_1} ku\phi(1-\xi_\varepsilon) = 0.$$

De fato, para todo $\phi \in C_c^\infty(B_1)$, temos que

$$-\int_{B_1} \Delta_g u((\phi(1-\xi_\varepsilon))) + \int_{B_1} ku\phi(1-\xi_\varepsilon) = 0.$$

Por outro lado, integrando por partes duas vezes consecutivas, obtemos

$$-\int_{B_1} \Delta_g u((\phi(1-\xi_\varepsilon))) + \int_{B_1} ku\phi(1-\xi_\varepsilon) = -\int_{B_1} \Delta_g(\phi(1-\xi_\varepsilon))u + \int_{B_1} ku\phi(1-\xi_\varepsilon)$$

Logo, a afirmação realmente vale.

Usando a regra do produto para o laplaciano para a afirmação anterior e a definição de ξ_ε, encontramos que

$$\left| -\int_{B_1} \Delta_g \phi u + \int_{B_1} k u \phi \right| \leq \frac{C}{\varepsilon^2} \int_{B_{2\varepsilon} \setminus B_\varepsilon} |u| + C \int_{B_\varepsilon} |u|$$

Fazendo ε tender a zero, obtemos pela Desigualdade de Hölder e a Continuidade absoluta da integral que

$$\frac{C}{\varepsilon^2} \int_{B_{2\varepsilon} \setminus B_\varepsilon} |u| = o(1)$$

e pelo fato que $u(x) = o(|x|^{2-n})$ quando $|x| \to \infty$,

$$C \int_{B_\varepsilon} |u| = o(1).$$

Portanto, $\left| -\int_{B_1} \Delta_g \phi u + \int_{B_1} k u \phi \right| \leq o(1)$.

Sabemos que $u(x) = o(|x|^{2-n})$ e $u \in L^s_{\text{loc}}(B_1)$ para $s < \frac{n}{n-2}$. Pelas estimativas de $W^{2,s}$, temos que $u \in W^{2,s}_{\text{loc}}(B_1)$. O lema então segue do método padrão de bootstrap e de estimativas elípticas. $\square$

Lema 1.18. Existe alguma constante $\delta_0 > 0$ dependendo de $n, \|g_{ij}\|_{C^2(B_1)}$ e $\|k(x)\|_{L^\infty}$ tal que o Princípio do Máximo seja válido para $-\Delta_g + k(x)$ na B_{δ_0} e existe uma única $G \in C^2(B_{\delta_0} \setminus \{0\})$ satisfazendo

$$\begin{cases} -\Delta_g G + k(x) G &= 0 \quad \text{em } B_{\delta_0} \setminus \{0\}, \\ \qquad G &= 0 \quad \text{sobre } \partial B_{\delta_0} \quad , \\ \lim_{|x| \to 0} |x|^{n-2} G(x) &= 1. \end{cases}$$

Além disso, $G(x) = |x|^{2-n} + R(x)$ onde $R(x)$ satisfaz, para todo $0 < \varepsilon < 1$, as estimativas

$$|x|^{n-4+\varepsilon} |R(x)| + |x|^{n-3+\varepsilon} |\nabla R(x)| \leq C(\varepsilon), \text{ para todo } x \in B_{\delta_0},\ n \geq 4$$

e

$$|x|^{\varepsilon-1} |R(x) - R(0)| + |x|^{\varepsilon} |\nabla R(x)| \leq C(\varepsilon), \text{ para todo } x \in B_{\delta_0},\ n = 3,$$

onde $C(\varepsilon)$ é alguma constante dependendo de $\varepsilon, n, \|g_{ij}\|_{C^2(B_1)}$ e $\|k(x)\|_{L^\infty}$.

A demonstração deste lema pode ser encontrada por exemplo no Apêndice B de [20].

Lema 1.19. Se $u(x) \in C^2(B_1 \setminus \{0\})$ satisfaz

$$- \Delta_g u + k(x)u = 0, \quad u > 0 \ \text{ em } B_1 \setminus \{0\}, \tag{1.4}$$

então

$$a = \overline{\lim_{r \to 0}} \max_{|x|=r} u(x)|x|^{n-2} < +\infty.$$

Demonstração. Suponha que o Lema 1.19 seja falso, isto é, $a = +\infty$. Portanto, para todo $A > 0$, existe $r_i \to 0^+$ tal que

$$u(x) > A|x|^{2-n}, \quad \text{para todo } |x| = r_i.$$

Note ainda que, pela Desigualdade de Harnack, existe $C > 0$ tal que para $0 < r < 1$

$$\max_{|x|=r} u(x) \leq C \min_{|x|=r} u(x). \tag{1.5}$$

Considere agora $v_A(x) = \frac{A}{2} G(x)$, onde $G(x)$ foi definido no Lema 1.18. Segue do Princípio do Máximo que para i suficientemente grande

$$u(x) \geq v_A(x), \quad \text{para todo } r_i \leq |x| \leq \delta_0.$$

Fazendo $i \to +\infty$, temos que

$$u(x) \geq v_A(x) = \frac{A}{2} G(x), \quad \text{para todo } 0 < |x| < \delta_0.$$

Tendendo agora A para o infinito, temos que $u(x) \to \infty$ o que contraria (1.5). O que conclui a prova.

□

Proposição 1.20. Se $u(x) \in C^2(B_1 \setminus \{0\})$ satisfaz

$$-\Delta_g u + K(x)u = 0, \quad u > 0 \ \text{ em } B_1 \setminus \{0\},$$

então existe alguma constante $b \geq 0$ tal que

$$u(x) = bG(x) + E(x), \quad \text{na } B_{\delta_0} \setminus \{0\},$$

onde $G(x)$ e δ_0 são definidas no Lema 1.18 e $E(x) \in C^2(B_1)$ satisfaz

$$-\Delta_g E(x) + K(x)E(x) = 0, \quad \text{em } B_1.$$

Demonstração. Considere

$$b = b(u) = \sup\{\lambda \geq 0 \mid \lambda G \leq u \text{ em } B_{\delta_0} \setminus \{0\}\}. \tag{1.6}$$

Pelo Lema 1.19 e a definição de b acima, temos que $0 \leq b \leq a < +\infty$. Então temos dois casos a considerar.

Caso 1: $b = 0$.
Neste caso, afirmamos o seguinte:

$$\forall\ \varepsilon > 0, \exists\ r_\varepsilon \in (0, \delta_0) : \min_{|x|=r}\{u(x) - \varepsilon G(x)\} \leq 0 \quad \forall\ 0 < r < r_\varepsilon$$

Provaremos que a afirmação vale argumentando por contradição. Suponha que seja falsa, então existe $\varepsilon_0 > 0$ e uma sequência $r_j \to 0^+$ tal que

$$\min_{|x|=r_j}\{u(x) - \varepsilon_0 G(x)\} > 0.$$

Note que pelo Lema 1.18 , $u(x) - \varepsilon_0 G(x) > 0$ para $|x| = \delta_0$. Pelo Princípio do Máximo, $u(x) - \varepsilon_0 G(x) > 0$ no anel $B_{\delta_0} \setminus B_{r_j}$. Consequentemente, $u(x) - \varepsilon_0 G(x) > 0$ em $B_{\delta_0} \setminus \{0\}$, o que implica que

$$b \geq \varepsilon_0 > 0,$$

contradizendo o fato de $b = 0$. A afirmação portanto está provada.

Assim, para todo $\varepsilon > 0$ e $0 < r < r_\varepsilon$ existe x_ε com $|x_\varepsilon| = r$ tal que $u(x_\varepsilon) \leq \varepsilon G(x_\varepsilon)$. Pela Desigualdade de Harnack, temos

$$\max_{|x|=r} u(x) \leq C u(x_\varepsilon) \leq C\varepsilon G(x_\varepsilon),$$

de onde obtemos

$$u(x) = o(|x|^{2-n}) \text{ quando } |x| \to 0.$$

Tomando $E(x) = u(x)$, segue do Lema 1.17 o resultado para o caso em que $b = 0$.
Caso 2: $b > 0$.
Considere $v(x) = u(x) - bG(x)$. Pela definição de $b(u)$, temos que $v(x) \geq 0$. O Princípio do Máximo nos garante que $v(x) = 0$ ou $v(x) > 0$ em $B_{\delta_0} \setminus \{0\}$. Se $v(x) = 0$, basta escolher $E(x) = 0$ e o resultado segue. Se $v(x) > 0$ na $B_{\delta_0} \setminus \{0\}$, temos que $v(x)$ satisfaz (1.4). Seja

$$b(v) = \sup\{\mu \geq 0 \mid \mu G \leq v \text{ em } B_{\delta_0} \setminus \{0\}\}.$$

Se $\mu \geq 0$ e $\mu G \leq v$ em $B_{\delta_0} \setminus \{0\}$, então $\mu G \leq u(x) - bG(x)$, o que implica que

$(\mu + b)G \leq u$ e pela definição de b, temos $b \geq \mu + b$. Logo, $\mu \leq 0$. Portanto, $\mu = 0$, o que nos leva a $b(v) = 0$. Argumentando da mesma forma como fizemos no Caso 1, temos que $v(x) = o(|x|^{2-n})$ quando $|x| \to 0$. Escolhendo $E(x) = v(x)$, o resultado para este caso segue do Lema 1.17. □

Vejamos, por fim, um corolário imediato da Proposição 1.20.

Corolário 1.21. Para $n \geq 3$, se u é uma solução de (1.4) que é singular perto da origem, então

$$\lim_{r \to 0} \int_{\partial B_r} \frac{\partial_g u}{\partial \nu} = b \cdot \lim_{r \to 0} \int_{\partial B_r} \frac{\partial_g G}{\partial \nu} = -(n-2)|\mathbb{S}^{n-1}|b$$

onde $b > 0$ é definido em (1.6) e ν denota o vetor unitário normal externo.

A primeira igualdade do corolário anterior segue da Proposição 1.20 e a segunda igualdade do Lema 1.18.

Capítulo 2

Compacidade de soluções para uma classe de equações do tipo Yamabe

2.1 Introdução

O objetivo deste capítulo é estabelecer resultados de compacidade para uma classe de equações do tipo Yamabe em dimensão 3. Precisamente, estudaremos a compacidade das soluções em variedades Riemannianas compactas (M, g) de dimensão 3 que satisfazem a equação

$$-\Delta_g u + Ku = u^p, \quad u > 0 \text{ em } M, \tag{2.1}$$

onde $K \in C^1(M)$ e $1 < p \leq 5$. Note que para $p = 5$ e $K = \frac{1}{8}R_g$ a equação anterior coincide com a equação de Yamabe.

Para obter tais resultados sobre compacidade, precisaremos da Identidade de Pohozaev além de uma análise sobre os pontos de blow-up. Dentre as propriedades que veremos, destacamos a Proposição 2.16 que juntamente com o Teorema da Massa Positiva, visto no capítulo anterior, serão a chave para a demonstração do nosso principal resultado.

Em todo o capítulo $\mathbb{M}_{K,p}$ denotará o conjunto solução de (2.1) em $C^2(M)$. Vejamos agora quais são os principais resultados deste capítulo. Eles se referem a compacidade para uma classe de equações do tipo Yamabe (2.1). O primeiro teorema dá estimativas para a solução com respeito a norma $H^1(M)$.

Teorema 2.1. *Seja (M, g) uma variedade Riemanniana de dimensão 3 compacta e suave. Então, para todo $\varepsilon_0 > 0$,*

$$\|u\|_{H^1(M)} \leq C, \text{ para todo } u \in \bigcup_{1+\varepsilon_0 \leq p \leq 5} \mathbb{M}_{K,p}$$

onde C depende somente de M, g, ε_0 e $\|K\|_{C^1(M)}$.

O próximo Teorema é o principal resultado desse capítulo e também deste trabalho.

Teorema 2.2. *Seja (M, g) uma variedade Riemanniana de dimensão 3 compacta com primeiro autovalor λ_1 positivo e $K \in C^1(M)$. Se*

$$\min_{y \in M} A_{K,g}(y) > 0$$

então, para todo $\varepsilon_0 > 0$,

$$\frac{1}{C} \leq u \leq C \text{ em } M \text{ e } \|u\|_{C^3(M)} \leq C, \text{ para todo } u \in \bigcup_{1+\varepsilon_0 \leq p \leq 5} \mathbb{M}_{K,p}, \tag{2.2}$$

onde C é uma constante positiva dependendo somente de $M, g, \varepsilon_0, \|K\|_{C^1(M)}$ e os limites inferiores positivos de $\min_M A_{K,g}$ e λ_1.

Observação 2.1. Uma condição necessária para que exista solução $u \in \mathbb{M}_{K,p}$, estabelecida por Bahri e Brezis em [3], é que o primeiro autovalor λ_1 de $-\Delta_g + K$ seja positivo. Como estamos interessado em estudar o conjunto de soluções, neste capítulo quando nos referirmos a λ_1 estaremos supondo que seja positivo.

No final do capítulo, discutiremos algumas aplicações do nosso teorema principal sendo elas o grau de Leray-Schauder e resultados de existência e multiplicidade para problemas de minimização. Salientamos que tais resultados não serão demonstrados neste trabalho, mas serão apontadas referências, como por exemplo [25].

2.2 Definições e notações

Seja (M, g) uma variedade Riemanniana compacta de dimensão 3. Em coordenadas locais, o operador Laplace-Beltrami pode ser escrito como:

$$\Delta_g u = \sum_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta}(\partial_{\alpha\beta} u - \Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta} \partial_\gamma u),$$

onde $\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}$ denota o símbolo de Christoffel que é dado pela expressão

$$\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \sum_{\delta} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_\alpha} g_{\beta\delta} + \frac{\partial}{\partial x_\beta} g_{\delta\alpha} - \frac{\partial}{\partial x_\delta} g_{\alpha\beta} \right\} g^{\delta\gamma}.$$

Seja $\Omega \subset M$ um conjunto aberto, $\{K_i\}$ uma sequência de funções convergindo para K em $C^1(M)$, $\{p_i\}$ uma sequência numérica tal que $2 \leq p_i \leq 5$, $p_i \to 5$ e $\{u_i\}$ uma sequência de funções satisfazendo

$$-\Delta_g u_i + K_i u_i = u_i^{p_i},\ u_i > 0,\ \text{em } \Omega. \tag{2.3}$$

Vejamos as definições de ponto de blow-up, blow-up isolado e blow-up isolado simples para uma sequência de soluções.

Definição 2.1. Um ponto $\bar{y} \in \Omega$ é chamado de *ponto de blow-up* de $\{u_i\}$, se existe uma sequência $\{y_i\} \subset \Omega$ tal que $u_i(y_i) \to \infty$ quando $y_i \to \bar{y}$.

Definição 2.2. Seja u_i satisfazendo (2.3). O ponto $\bar{y} \in \Omega$ é dito *ponto de blow-up isolado* de $\{u_i\}$ se existir $0 < \bar{r} < d(\bar{y}, \partial\Omega),\ C > 0$ e uma sequência y_i tendendo a $\bar{y}$ tal que:

1. y_i é máximo local de u_i;

2. $u_i(y_i) \to +\infty$ quando $i \to \infty$;

3. Para i suficientemente grande,

$$u_i(y) \leq C d(y, y_i)^{\frac{-2}{(p_i-1)}},\quad \text{para todo } d(y, y_i) < \bar{r}, \tag{2.4}$$

onde $d(y, y_i)$ denota a distância geodésica entre y e y_i.

Seja $y_i \to \bar{y}$ um ponto de blow-up isolado de $\{u_i\}$. Definimos a *média esférica* de u_i como

$$\bar{u}_i(r) = \frac{1}{|\partial B_r(y_i)|} \int_{\partial B_r(y_i)} u_i \ \mathrm{d}S_g,\ 0 < r < \bar{y},$$

onde $B_r(y_i)$ denota a bola geodésica de raio r e centro em y_i, $\mathrm{d}S_g$ é o elemento de área e $|\partial B_r(y_i)|$ denota a área de $\partial B_r(y_i)$ com relação a métrica g.

Na definição de ponto de blow-up isolado simples a seguir identificaremos

$$\bar{w}_i(r) = r^{\frac{2}{(p_i-1)}} \bar{u}_i(r),\ 0 < r < \bar{y}.$$

Definição 2.3. O ponto $\bar{y} \in \Omega$ é chamado de *ponto de blow-up isolado simples* se $\bar{y}$ é um ponto de blow-up de $\{u_i\}$ tal que para algum $\rho \in (0, \bar{r})$ independente de i,

$$\bar{w}_i \text{ tem exatamente um ponto crítico em } (0, \rho)$$

para i suficientemente grande.

Quanto a notação, durante várias partes do texto identificaremos y_i com a origem, pois utilizaremos coordenadas normais $x = (x_1, x_2, x_3)$ centrada em y_i. Denotaremos ainda $u_i(\exp_{y_i}(x))$ por $u_i(x)$, $d(y_i, y)$ por $|y|$ e $C, C_0, C_1, \ldots$ representaram constantes possivelmente diferentes.

2.3 A Identidade de Pohozaev

Nesta seção provaremos uma Identidade do tipo Pohozaev que será utilizada em resultados a posteriori. Como usaremos a Identidade do tipo Pohozaev apenas para vizinhanças pequenas de algum ponto, escreveremos em uma carta de coordenadas locais. Seja $\Omega \subset M$ um conjunto aberto em uma carta coordenada local $x = (x_1, x_2, x_3)$ com $g_{ij}(0) = \delta_{ij}$ e $\Gamma_{ik}^k(0) = 0$. Denotaremos nessa seção $\Delta = \sum_{i=1}^{n} \partial_{ii}, \nabla = (\partial_1, \partial_2, \partial_3), dv = dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3, |x|^2 = (x_1)^2 + (x_2)^2 + (x_3)^2, B_\sigma = \{(x_1, x_2, x_3) : |x| < \sigma\}$ e $\mathrm{d}S$ denota o elemento da área e com respeito a métrica flat.

Considerando para $K \in C^1(\Omega)$ e $p > 0$, a seguinte equação

$$-\Delta_g u + Ku = u^p, \quad u > 0 \ \text{ em } \Omega, \tag{2.5}$$

temos o seguinte Lema.

Lema 2.3. Se $u \in C^2(\Omega)$ é uma solução da Eq. (2.5), então

$$\begin{aligned}
&-\int_{B_\sigma} \left(K(x) + \frac{x \cdot \nabla K(x)}{2}\right) u^2 \,\mathrm{d}x + \left(\frac{3}{p+1} - \frac{1}{2}\right) \int_{B_\sigma} u^{p+1} \,\mathrm{d}x - A(g, u) \\
&= \int_{\partial B_\sigma} B(x, \sigma, u, \nabla u) \,\mathrm{d}S - \int_{\partial B_\sigma} \sigma \left(\frac{Ku^2}{2} - \frac{u^{p+1}}{p+1}\right) \mathrm{d}S,
\end{aligned} \tag{2.6}$$

onde

$$\begin{aligned}
A(g, u) &= \int_{B_\sigma} (x^\alpha \partial_\alpha u)(g^{\beta\gamma} - \delta^{\beta\gamma}) \partial_{\beta\gamma} u \,\mathrm{d}x - \int_{B_\sigma} (x^\alpha \partial_\alpha u)(g^{\beta\gamma} - \Gamma^\mu_{\beta\gamma}) \partial_\mu u \,\mathrm{d}x \\
&\quad + \frac{1}{2} \int_{B_\sigma} u(g^{\beta\gamma} - \delta^{\beta\gamma}) \partial_{\beta\gamma} u \,\mathrm{d}x - \frac{1}{2} \int_{B_\sigma} u(g^{\beta\gamma} \Gamma^\mu_{\beta\gamma}) \partial_\mu u \,\mathrm{d}x; \\
B(x, \sigma, u, \nabla u) &= \sigma \left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)^2 - \frac{\sigma}{2} |\nabla u|^2 + \frac{1}{2} u \frac{\partial u}{\partial \nu}
\end{aligned}$$

e ν denota o vetor unitário normal externo à ∂B_σ com relação a métrica flat. Em alguns momentos, utilizaremos a notação de Einstein ocultando os somatórios para simplificar a notação, como fizemos anteriormente.

Demonstração. Seja $f \in C^2(B_\sigma)$, então

$$2\Delta u(\nabla u \cdot \nabla f) = \operatorname{div}[2(\nabla u \cdot \nabla f)\nabla u - |\nabla u|^2 \nabla f] + |\nabla u|^2 \Delta f - 2\nabla u \cdot \nabla^2 f \cdot \nabla u, \tag{2.7}$$

onde $\nabla^2 f = \left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^\alpha \partial x^\beta}\right)$ denota a matriz Hessiana da função f.

Para provar (2.7), defina $F = 2(\nabla u \cdot \nabla f)\nabla u - |\nabla u|^2 \nabla f$, ou seja,

$$F = 2\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)\nabla u - \left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2\right)\nabla f.$$

Por definição, temos que

$$\operatorname{div}(F) = \sum_{j=1}^{n}\left[2\frac{\partial}{\partial x_j}\left\{\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right\} - \frac{\partial}{\partial x_j}\left\{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2\frac{\partial f}{\partial x_j}\right\}\right].$$

Usando as regras de derivação, obtemos

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(F) &= \sum_{j=1}^{n}\left[2\frac{\partial}{\partial x_j}\left\{\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right\} - \frac{\partial}{\partial x_j}\left\{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2\frac{\partial f}{\partial x_j}\right\}\right]\\
&= 2\sum_{j=1}^{n}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}\nabla u\nabla f + \frac{\partial u}{\partial x_j}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}\frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}\right)\right]\\
&- \left[\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}|\nabla u|^2 + \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_j}\sum_{i=1}^{n}2\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i x_j}\right],
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(F) &= 2\Delta u\nabla u\nabla f + 2\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial x_j}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}\frac{\partial f}{\partial x_i} + 2\nabla u\nabla^2 f\nabla u\\
&- \left[\Delta f|\nabla u|^2 + 2\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_j}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}\right]\\
&= 2\Delta u(\nabla u\cdot\nabla f) + 2\nabla u\cdot\nabla^2 f\cdot\nabla u - \Delta f|\nabla u|^2.
\end{aligned}$$

Assim provamos (2.7).

Agora, considerando $f(x) = \frac{1}{2}|x|^2$, temos que $\nabla f = x,\ \Delta f = 3$ e $\nabla u\cdot\nabla^2 f\cdot\nabla u = |\nabla u|^2$. Utilizando integração por partes em B_σ, obtemos

$$\begin{aligned}
\int_{B_\sigma} 2\Delta u(\nabla u\cdot x)\,\mathrm{d}x &= \int_{B_\sigma}\operatorname{div}[2(\nabla u\cdot x)\nabla u - |\nabla u|^2 x]\,\mathrm{d}x + \int_{B_\sigma}(3|\nabla u|^2 - 2|\nabla u|^2)\,\mathrm{d}x\\
&= \int_{B_\sigma}\operatorname{div}[2(\nabla u\cdot x)\nabla u - |\nabla u|^2 x]\,\mathrm{d}x + \int_{B_\sigma}|\nabla u|^2\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Notemos também que

$$\begin{aligned}
\int_{B_\sigma} \operatorname{div}[2(\nabla u\cdot x)\nabla u - |\nabla u|^2 x]\,\mathrm{d}x &= \int_{\partial B_\sigma} [2(\nabla u\cdot x)\nabla u - |\nabla u|^2 x]\cdot \frac{x}{\sigma}\,\mathrm{d}S\\
&= \int_{\partial B_\sigma}\left(2\sigma\left|\frac{\partial u}{\partial\nu}\right|^2 - |\nabla u|^2\,\frac{x^2}{\sigma}\right)\mathrm{d}S\\
&= \sigma\int_{\partial B_\sigma}\left(2\left|\frac{\partial u}{\partial\nu}\right|^2 - |\nabla u|^2\right)\mathrm{d}S
\end{aligned}$$

e

$$\int_{B_\sigma}|\nabla u|^2\,\mathrm{d}x = -\int_{B_\sigma}\Delta u u\,\mathrm{d}x + \int_{\partial B_\sigma} u\frac{\partial u}{\partial\nu}\,\mathrm{d}S.$$

Assim, combinando estas estimativa obtemos

$$\int_{B_\sigma} 2\Delta u(\nabla u\cdot x)\,\mathrm{d}x + \int_{B_\sigma} u\Delta u\,\mathrm{d}x = \int_{\partial B_\sigma}\left\{2\left|\frac{\partial u}{\partial\nu}\right|^2\sigma - |\nabla u|^2\,\sigma + u\frac{\partial u}{\partial\nu}\right\}\mathrm{d}S. \quad (2.8)$$

Denotando $g = g_{\alpha\beta}\mathrm{d}x^\alpha\mathrm{d}x^\beta$ a métrica e usando a notação de Einstein, temos que

$$\Delta u = \Delta_g u - (g^{\alpha\beta} - \delta^{\alpha\beta})\partial_{\alpha\beta}u + g^{\alpha\beta}\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}\partial_\gamma u,$$

$$-\int_{\partial B_\sigma}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial\nu}\right)^2\sigma - \frac{1}{2}|\nabla u|^2\sigma + \frac{1}{2}u\frac{\partial u}{\partial\nu}\right]\mathrm{d}S = -\int_{B_\sigma}\Delta_g u(\nabla u\cdot x)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_{B_\sigma} u\Delta_g u\,\mathrm{d}x$$

e

$$\begin{aligned}
-\int_{B_\sigma}\Delta_g u(\nabla u\cdot x)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_{B_\sigma}u\Delta_g u\,\mathrm{d}x &= -\int_{B_\sigma}(x^\alpha\partial_\alpha u)\Delta_g u\mathrm{d}x + \int_{B_\sigma}x^\gamma\partial_\gamma u(g^{\alpha\beta}-\delta^{\alpha\beta})\partial_{\alpha\beta}u\mathrm{d}x\\
&- \int_{B_\sigma}x^\gamma\partial_\gamma u(g^{\alpha\beta}\Gamma^\mu_{\alpha\beta})\partial_\mu u\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_{B_\sigma}u\Delta_g u\mathrm{d}x\\
&- \frac{1}{2}\int_{B_\sigma}u(g^{\alpha\beta}\Gamma^\gamma_{\alpha\beta})\partial_\gamma u\mathrm{d}x\\
&+ \frac{1}{2}\int_{B_\sigma}u(g^{\alpha\beta}-\delta^{\alpha\beta})\partial_{\alpha\beta}u\mathrm{d}x. \quad (2.9)
\end{aligned}$$

Como u satisfaz a equação (2.5), usando a integração por partes temos que

$$\begin{aligned}
-\int_{B_\sigma}(x^\alpha\partial_\alpha u)\Delta_g u\,\mathrm{d}x &= \int_{B_\sigma}(x^\alpha\partial_\alpha u)(u^p - Ku)\,\mathrm{d}x\\
&= -\frac{3}{p+1}\int_{B_\sigma}u^{p+1}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{p+1}\int_{\partial B_\sigma}u^{p+1}\sigma\,\mathrm{d}S + \frac{3}{2}\int_{B_\sigma}Ku^2\,\mathrm{d}x\\
&+ \frac{1}{2}\int_{B_\sigma}(x\cdot\nabla K)u^2\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_{\partial B_\sigma}Ku^2\sigma\,\mathrm{d}S
\end{aligned}$$

e

$$-\frac{1}{2}\int_{B_\sigma}u\Delta_g u\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{B_\sigma}u(u^p - Ku)\,\mathrm{d}x.$$

Substituindo o resultado anterior em (2.9), obtemos

$$\begin{aligned}
-\int_{\partial B_\sigma} B(\sigma, x, u, \nabla u)\,\mathrm{d}S &= -\frac{3}{p+1}\int_{B_\sigma} u^{p+1}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{p+1}\int_{\partial B_\sigma} u^{p+1}\sigma\,\mathrm{d}S + \frac{3}{2}\int_{B_\sigma} Ku^2\,\mathrm{d}x \\
&+ \frac{1}{2}\int_{B_\sigma}(x\cdot\nabla K)u^2\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_{\partial B_\sigma} Ku^2\sigma\,\mathrm{d}S + \frac{1}{2}\int_{B_\sigma} u^{p+1}\,\mathrm{d}x \\
&+ \frac{1}{2}\int_{B_\sigma} Ku^2\,\mathrm{d}x + A(g,u),
\end{aligned}$$

e consequentemente, obtemos

$$\begin{aligned}
-\int_{B_\sigma}&\left(K(x) + \frac{x\cdot\nabla K(x)}{2}\right)u^2\,\mathrm{d}x + \left(\frac{3}{p+1} - \frac{1}{2}\right)\int_{B_\sigma} u^{p+1}\,\mathrm{d}x - A(g,u) \\
&= \int_{\partial B_\sigma} B(x,\sigma,u,\nabla u)\,\mathrm{d}S - \int_{\partial B_\sigma}\sigma\left(\frac{Ku^2}{2} - \frac{u^{p+1}}{p+1}\right)\mathrm{d}S.
\end{aligned}$$

Assim, concluímos a prova do Lema. □

2.4 Propriedades dos pontos de blow-up

Nesta seção veremos algumas propriedades referentes aos pontos de blow-up isolado e blow-up isolado simples definidos anteriormente.

O primeiro resultado mostra que próximo a um ponto de blow-up isolado, as soluções da equação (2.3) satisfazem uma Desigualdade do tipo de Harnack.

Lema 2.4. Seja $u_i(y_i)$ satisfazendo a equação (2.3) e $y_i \to \bar{y} \in \Omega$ um ponto de blow-up isolado. Então para todo $0 < r < \frac{\bar{r}}{3}$, temos

$$\max_{y\in B_{2r}(y_i)\setminus B_{\frac{r}{2}}(y_i)} u_i(y) \leq C_1 \min_{y\in B_{2r}(y_i)\setminus B_{\frac{r}{2}}(y_i)} u_i(y), \tag{2.10}$$

onde $B_s(y_i)$ denota a bola geodésica centrada em y_i de raio s e C_1 é uma constante positiva que independe de i e r.

Demonstração. Seja $x = (x_1, x_2, x_3)$ as coordenadas geodésicas normais centrada em y_i dada por $\exp_{y_i}(x)$ e $h = h_{\alpha\beta}(x)\mathrm{d}x^\alpha\mathrm{d}x^\beta = g_{\alpha\beta}(rx)\mathrm{d}x^\alpha\mathrm{d}x^\beta$ a métrica. Definindo $v_i(x) = r^{\frac{2}{p_i-1}}u_i(\exp_{y_i}(rx))$ para $|x| = \sqrt{(x_1)^2 + (x_2)^2 + (x_3)^2} < 3$, então $v_i(x)$ satisfaz

$$\begin{cases}
-\Delta_g v_i(x) + r^2\tilde{K}_i(x)v_i(x) = v_i(x)^{p_i} & |x| < 3, \\
\\
0 < v_i(x) \leq \tilde{C}|x|^{-\frac{2}{p_i-1}} & |x| < 3,
\end{cases}$$

onde $\tilde{K}_i = K_i(\exp_{y_i}(rx))$.

De fato, relacionando os laplacianos de u_i na métrica g e de v_i na métrica h juntamente a equação (2.3), temos

$$\begin{cases} \tilde{\Gamma}^{\gamma}_{\alpha\beta}(x) = r\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}\exp_{y_i}(rx) \\ \\ \dfrac{\partial v_i}{\partial x_\alpha}(x) = r^{\frac{2}{p_i-1}+1}\dfrac{\partial u_i}{\partial x_\alpha}(\exp_{y_i}(rx)) \\ \\ \dfrac{\partial^2 v_i}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}(x) = r^{\frac{2}{p_i-1}+2}\dfrac{\partial^2 u_i}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}(\exp_{y_i}(rx)) \end{cases}$$

Daí,

$$\begin{aligned} -\Delta_h v_i(x) &= -h^{\alpha\beta}(x)\left(\partial_{\alpha\beta}v_i - \tilde{\Gamma}^{\gamma}_{\alpha\beta}(x)\partial_\gamma v_i\right) \\ &= -r^{\frac{2}{p_i-1}+2}g^{\alpha\beta}(rx)\left(\partial_{\alpha\beta}u_i(\exp_{y_i}(rx)) - \Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}(\exp_{y_i}(rx))\partial_\alpha u_i(\exp_{y_i}(rx))\right) \\ &= -r^{\frac{2}{p_i-1}+2}\Delta_g u_i(\exp_{y_i}(rx)). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} -\Delta_h v_i(x) + r^2 K_i(\exp_{y_i}(rx))v_i(x) &= -r^{\frac{2}{p_i-1}+2}\Delta_g u_i(\exp_{y_i}(rx)) \\ &+ r^2 K_i(\exp_{y_i}(rx)) r^{\frac{2}{p_i-1}} u_i(\exp_{y_i}(rx)) \\ &= r^{\frac{2p_i}{p_i-1}}\left(-\Delta_g u_i(\exp_{y_i}(rx)) + K_i(\exp_{y_i}(rx))u_i(\exp_{y_i}(rx))\right) \\ &= r^{\frac{2p_i}{p_i-1}} u_i^{p_i}(\exp_{y_i}(rx)) \\ &= \left(r^{\frac{2}{p_i-1}}u_i(\exp_{y_i}(rx))\right)^{p_i} \\ &= v_i^{p_i}. \end{aligned}$$

A afirmação $0 < v_i(x) \le \tilde{C}|x|^{-\frac{2}{p_i-1}}$ segue diretamente da desigualdade (2.4) da definição de ponto de blow-up isolado.

Assim, existe $C > 0$ tal que para todo $\frac{1}{4} \le |x| \le \frac{9}{4},\ v_i(x) \le C$. Pela Desigualdade de Harnack Clássica,

$$\max_{\frac{1}{2}\le|x|\le 2} v_i(x) \le C_1 \min_{\frac{1}{2}\le|x|\le 2} v_i(x).$$

Como $v_i(x) = r^{\frac{2}{p_i-1}}u_i(\exp_{y_i}(rx))$, segue que

$$\max_{\frac{1}{2}\le|x|\le 2} u_i(\exp_{y_i}(rx)) \le C_1 \min_{\frac{1}{2}\le|x|\le 2} u_i(\exp_{y_i}(rx)),$$

ou seja,

$$\max_{y\in B_{2r}(y_i)\setminus B_{\frac{r}{2}}(y_i)} u_i(y) \le C_1 \min_{y\in B_{2r}(y_i)\setminus B_{\frac{r}{2}}(y_i)} u_i(y).$$

□

Lema 2.5. Seja u_i solução de (2.3) e $y_i \to \bar{y} \in \Omega$ um ponto de blow-up isolado. Então para todo $R_i \to +\infty, \varepsilon_i \to 0^+$, temos a menos de subsequência (que continuaremos denotando por $\{u_i\}, \{y_i\}, etc.$) que

$$\begin{aligned} & \left\| u_i(y_i)^{-1} u_i \left(\exp_{y_i} \left(u_i(y_i)^{-\frac{p_i-1}{2}} x \right) \right) - \left(1 + \frac{1}{3}|x|^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \right\|_{C^2(B_{2R_i})} \\ + & \left\| u_i(y_i)^{-1} u_i \left(\exp_{y_i} \left(u_i(y_i)^{-\frac{p_i-1}{2}} x \right) \right) - \left(1 + \frac{1}{3}|x|^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \right\|_{H^1(B_{2R_i})} \leq \varepsilon_i \end{aligned} \tag{2.11}$$

e

$$\frac{R_i}{\log u_i(y_i)} \to 0 \ \text{ quando } i \to \infty, \tag{2.12}$$

onde $x = (x_1, x_2, x_3)$ denota as coordenadas geodésicas normais centrada em y_i dada por $\exp_{y_i}(x)$.

Demonstração. Seja $h = h_{\alpha\beta}(x)\mathrm{d}x^\alpha \mathrm{d}x^\beta = g_{\alpha\beta}(u_i(y_i)^{-\frac{p_i-1}{2}} x)\mathrm{d}x^\alpha \mathrm{d}x^\beta$ a métrica. Definamos

$$\xi_i(x) = u_i(y_i)^{-1} u_i \left(\exp_{y_i} \left(u_i(y_i)^{-\frac{p_i-1}{2}} x \right) \right), \text{ para } |x| < \bar{r} u_i(y_i)^{\frac{p_i-1}{2}}.$$

Note que

$$\begin{cases} \tilde{\Gamma}^\gamma_{\alpha\beta} = u_i(y_i)^{-\frac{p_i-1}{2}} \Gamma^\gamma_{\alpha\beta}; \\ \dfrac{\partial \xi_i}{\partial x_\alpha} = u_i(y_i)^{-\frac{p_i+1}{2}} \dfrac{\partial u_i}{\partial x_\alpha} \left(\exp_{y_i} \left(u_i(y_i)^{-\frac{p_i-1}{2}} x \right) \right); \\ \dfrac{\partial^2 \xi_i}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} = u_i(y_i)^{-p_i} \dfrac{\partial^2 u_i}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \left(\exp_{y_i} \left(u_i(y_i)^{-\frac{p_i-1}{2}} x \right) \right). \end{cases}$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned} -\Delta_h \xi_i(x) &= -h^{\alpha\beta}(x) \left(\partial_{\alpha\beta} \xi_i(x) - \tilde{\Gamma}^\gamma_{\alpha\beta} \partial_\gamma \xi_i \right) \\ &= -g^{\alpha\beta} \exp_{y_i} \left(u_i(y_i)^{-\frac{p_i-1}{2}} x \right) \left(u_i(y_i)^{-p_i} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \right) \exp_{y_i} \left(u_i(y_i)^{-\frac{p_i-1}{2}} x \right) \\ &+ u_i(y_i)^{\frac{-p_i+1}{2}} \Gamma^\gamma_{\alpha\beta} u_i(y_i)^{\frac{-p_i-1}{2}} \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha} \exp_{y_i} \left(u_i(y_i)^{-\frac{p_i-1}{2}} x \right) \\ &= u_i(y_i)^{-p_i} \left(-g^{\alpha\beta} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \exp_{y_i} \left(u_i(y_i)^{-\frac{p_i-1}{2}} x \right) + \Gamma^\gamma_{\alpha\beta} \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha} \exp_{y_i} \left(u_i(y_i)^{-\frac{p_i-1}{2}} x \right) \right). \end{aligned}$$

Logo,

$$-\Delta_h \xi_i(x) = u_i(y_i)^{-p_i}\left(-\Delta_g u_i \exp_{y_i}\left(u_i(y_i)^{-\frac{p_i-1}{2}}x\right)\right). \tag{2.13}$$

Denotando por

$$J_i = u_i(y_i)^{1-p_i} K_i\left(\exp_{y_i}\left(u_i(y_i)^{-\frac{p_i-1}{2}}x\right)\right)\xi_i(x),$$

obtemos pela definição de ξ_i que

$$\begin{aligned} J_i &= u_i(y_i)^{1-p_i} K_i\left(\exp_{y_i}\left(u_i(y_i)^{-\frac{p_i-1}{2}}x\right)\right)\left(u_i(y_i)^{-1}u_i\left(\exp_{y_i}\left(u_i(y_i)^{-\frac{p_i-1}{2}}x\right)\right)\right)\\ &= u_i(y_i)^{-p_i} K_i\left(\exp_{y_i}\left(u_i(y_i)^{-\frac{p_i-1}{2}}x\right)\right)u_i\left(\exp_{y_i}\left(u_i(y_i)^{-\frac{p_i-1}{2}}x\right)\right). \end{aligned}$$

Pela equação (2.13) e usando a estimativa anterior, segue que

$$\begin{aligned} -\Delta_h \xi_i(x) + J_i &= u_i(y_i)^{-p_i}\left(-\Delta_g u_i\left(\exp_{y_i}\left(u_i(y_i)^{-\frac{p_i-1}{2}}x\right)\right)\right.\\ &+ \left. K_i\left(\exp_{y_i}\left(u_i(y_i)^{-\frac{p_i-1}{2}}x\right)\right)u_i\left(\exp_{y_i}\left(u_i(y_i)^{-\frac{p_i-1}{2}}x\right)\right)\right)\\ &= u_i(y_i)^{-p_i}u_i^{p_i}\left(\exp_{y_i}\left(u_i(y_i)^{-\frac{p_i-1}{2}}x\right)\right)\\ &= \xi_i(x)^{p_i}. \end{aligned}$$

Logo,

$$-\Delta_h \xi_i(x) + u_i(y_i)^{1-p_i} K_i\left(\exp_{y_i}\left(u_i(y_i)^{-\frac{p_i-1}{2}}x\right)\right)\xi_i(x) = \xi_i(x)^{p_i}.$$

Portanto,

$$-\Delta_h \xi_i(x) = \xi_i^{p_i}(x) - u_i^{1-p_i}(y_i) K_i\left(\exp_{y_i}\left(u_i(y_i)^{-\frac{p_i-1}{2}}x\right)\right)\xi_i(x)^{p_i}.$$

Temos ainda que $\xi_i(0) = 1$ e $\nabla\xi_i(0) = 0$ pois a origem é um ponto de máximo. Pelo fato de u_i ser um ponto de blow-up isolado, segue que

$$u_i\left(\exp_{y_i} u_i(y_i)^{-\frac{p_i-1}{2}}x\right) \le \tilde{C}|u_i(y_i)^{-\frac{p_i-1}{2}}x|^{-\frac{2}{p_i-1}},$$

e assim,

$$\xi_i(x) \le \tilde{C}|x|^{\frac{-2}{p_i-1}}.$$

Em resumo,

$$\begin{cases} -\Delta_h \xi_i(x) = \xi_i(x)^{p_i} - u_i(y_i)^{1-p_i}\tilde{K}_i(x)\xi_i(x) & |x| < \tilde{r}u_i(y_i)^{\frac{p_i-1}{2}},\\ \xi_i(0) = 1 & \\ \nabla\xi_i(0) = 0 & \\ 0 < \xi_i(x) \le \tilde{C}|x|^{-\frac{2}{p_i-1}} & |x| < \tilde{r}u_i(y_i)^{\frac{p_i-1}{2}}, \end{cases} \tag{2.14}$$

onde $\tilde{K}_i = K_i(\exp_{y_i}(u_i(y_i)^{-\frac{p_i-1}{2}}x))$.Segue do Lema 2.4 que para todo $0 < r < 1$,

$$\max_{|x|=r} \xi_i(x) \leq C \min_{|x|=r} \xi_i(x), \tag{2.15}$$

onde C independe de i e r. Como $u_i(y_i)^{1-p_i}\tilde{K}_i \to 0$ uniformemente para $|x| < 2$, pois é o produto de uma função que tende a zero e uma limitada, temos por (2.14) que

$$(-\Delta_h + o_i(1))\, \xi_i(x) \geq 0, \quad \text{para todo } |x| \geq 2,$$

onde $o_i \to 0$ quando $i \to \infty$. Pelo Princípio do Máximo, temos que

$$\xi_i(0) \geq \inf_{|x|\leq r} \xi_i(x) = \inf_{|x|=r} \xi_i(x) \quad \text{para todo } 0 < r \leq 1,$$

que juntamente com o fato que $\xi_i(0) = 1$ e pela desigualdade (2.15), temos

$$1 = \xi_i(0) \geq \inf_{|x|=r} \xi_i(x) \geq \frac{1}{2} \inf_{|x|=r} \xi_i(x) \geq \frac{1}{2C} \max_{|x|=r} \xi_i(x), \quad \text{para todo } 0 < r \leq 1.$$

Consequentemente, usando a continuidade de ξ_i, obtemos

$$\max_{|x|\leq 1} \xi_i(x) \leq \tilde{C}.$$

De forma mais genérica, pelo fato anterior e pelo quarto resultado de (2.14), segue que

$$\xi_i(x) \leq C, \quad \text{para todo } |x| < \tilde{r} u_i(y_i)^{\frac{p_i-1}{2}},$$

onde C independe de i e r.

Usando estimativas elípticas para $\{\xi_i\}$, obtemos passando a uma subsequência se necessário $\{\xi_{j_i}\}$, (que continuaremos denotando por $\{\xi_i\}$), que $\xi_i \to \xi$ tanto em $C^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^3)$ como em $H^1(\mathbb{R}^3)$ para algum ξ satisfazendo:

$$\begin{cases} -\Delta\xi(x) = \xi(x)^5, & \xi(x) > 0 \text{ em } \mathbb{R}^3, \\ \xi(0) = 1, & \nabla\xi(0) = 0. \end{cases}$$

Segue do Corolário 8.2 de Caffarelli, Gidas e Spruck em [6], que

$$\xi(x) = \left(1 + \frac{1}{3}|x|^2\right)^{-\frac{1}{2}}$$

pois $u_i(y_i)^{-1}u_i\left(\exp_{y_i}\left(u_i(y_i)^{-\frac{p_i-1}{2}}x\right)\right) \to \xi_i$ em $C^2(B_{2R_i})$. Além disso,

$$
\begin{aligned}
&\left\| u_i(y_i)^{-1} u_i \left(\exp_{y_i} \left(u_i(y_i)^{-\frac{p_i-1}{2}} x \right) \right) - \xi_i \right\|_{H^1(B_{2R_i})} = \\
&\qquad \int_{B_{2R_i}} \left(\left| \nabla u_i(y_i)^{-1} u_i \left(\exp_{y_i} \left(u_i(y_i)^{-\frac{p_i-1}{2}} x \right) \right) - \nabla \xi_i \right|^2 \right) \mathrm{d}x \\
&\qquad + \int_{B_{2R_i}} \left(\left| u_i(y_i)^{-1} u_i \left(\exp_{y_i} \left(u_i(y_i)^{-\frac{p_i-1}{2}} x \right) \right) - \xi_i \right|^2 \right) \mathrm{d}x \\
&\qquad \longrightarrow 0, \quad \text{quando } i \to \infty.
\end{aligned}
$$

Consequentemente, passando a outra subsequência, obtemos (2.11) e (2.12), o Lema está demonstrado. □

Antes de exibirmos uma estimativa importante sobre os pontos de blow-up isolado simples, introduziremos a função de Green de $-\Delta_g + K$ em bolas pequenas. Sejam $\bar{y} \in \Omega$ e $K \in C^1(\Omega)$. Como foi visto no Lema 1.18 para $\delta_0 > 0$ suficientemente pequeno, existe uma única $\tilde{G}(\cdot, \bar{y}) \in C^2(\overline{B_{\delta_0}(\bar{y})} \setminus \{\bar{y}\})$ satisfazendo

$$
\begin{cases}
-\Delta_g \tilde{G} + K\tilde{G} = 0, \quad \text{em } B_{\delta_0}(\bar{y}) \setminus \{\bar{y}\}, \\
\tilde{G} = 0, \quad \text{sobre } \partial B_{\delta_0}(\bar{y}), \\
\lim_{y \to \bar{y}} d(y, \bar{y}) \tilde{G}(y) = 1.
\end{cases} \tag{2.16}
$$

Proposição 2.6. Seja $\{u_i\}$ satisfazendo a equação (2.3) e $y_i \to \bar{y} \in \Omega$ um ponto de blow-up isolado simples cumprindo (2.4) e (2.3) para qualquer i. Então, para alguma constante C dependendo somente de $\rho, \tilde{C}$ e $\|K_i\|_{C^1(\Omega)}$, temos

$$
u_i(y) \leq C u_i(y_i)^{-1} d(y, y_i)^{-1}, \qquad \text{para todo } d(y, y_i) \leq \rho/2, \tag{2.17}
$$

onde ρ e $\tilde{C}$ são dados pelas Definições 2.2 e 2.3.

Além disso, passando a uma subsequência, para alguma constante positiva $a > 0$ e $K(x) = \lim_{i \to +\infty} K_i(x)$,

$$
u_i(y_i) u_i \to a\tilde{G}(\cdot, \bar{y}) + b \text{ em } C^2_{\text{loc}} \left(B_{\tilde{\rho}}(\bar{y}) \setminus \{\bar{y}\} \right),
$$

onde $\tilde{\rho} = \min\{\delta_0, \rho/2\}, \tilde{G}$ é dado por (2.16) e $b \in C^2(B_{\tilde{\rho}}(\bar{y}))$ satisfaz $-\Delta_g b + K(y) b = 0$ em $B_{\tilde{\rho}}(\bar{y})$.

Para provar essa proposição, precisaremos de alguns resultados complementares que serão obtidos por uma série de lemas dada a seguir.

Lema 2.7. Sejam u_i satisfazendo (2.3) e $y_i \to \bar{y} \in \Omega$ um ponto de blow-up isolado simples. Sejam $R_i \to \infty$ e $0 < \varepsilon_i < e^{-R_i}$ sequências que satisfazem (2.11) e (2.12).

Então para todo $0 < \delta < 1/100$, existe $\rho_1 \in (0, \rho)$ que independe de i (mas depende de δ), tal que

$$u_i(y) \leq C u_i(y_i)^{-\lambda_i} d(y, y_i)^{-1+\delta}, \quad \text{para todo } R_i u_i(y_i)^{-\frac{p_i-1}{2}} \leq d(y, y_i) \leq \rho_1; \tag{2.18}$$

$$|\nabla_g u_i(y)| \leq C u_i(y_i)^{-\lambda_i} d(y, y_i)^{-2+\delta}, \text{ para todo } R_i u_i(y_i)^{-\frac{p_i-1}{2}} \leq d(y, y_i) \leq \rho_1; \tag{2.19}$$

$$|\nabla_g^2 u_i(y)| \leq C u_i(y_i)^{-\lambda_i} d(y, y_i)^{-3+\delta}, \text{ para todo } R_i u_i(y_i)^{-\frac{p_i-1}{2}} \leq d(y, y_i) \leq \rho_1, \tag{2.20}$$

onde $\lambda_i = (1-\delta)^{\frac{p_i-1}{2}} - 1$ e C é uma constante positiva independente de i.

Demonstração. Seja $r_i = R_i u_i(y_i)^{-\frac{p_i-1}{2}}$. Como $R_i \to \infty$, temos que $r_i \to 0$. De fato, note que

$$\lim_{i\to+\infty} r_i = \lim_{i\to+\infty} R_i u_i(y_i)^{-\frac{p_i-1}{2}} = \lim_{i\to+\infty} \frac{R_i}{u_i(y_i)^{\frac{p_i-1}{2}}} \frac{\log u_i(y_i)}{\log u_i(y_i)} = \lim_{i\to+\infty} \frac{R_i}{\log u_i(y_i)} \frac{\log u_i(y_i)}{u_i(y_i)^{\frac{p_i-1}{2}}} = 0,$$

visto que pelo Lema 2.5, $\frac{R_i}{\log u_i(y_i)} \to 0$ quando $i \to \infty$.

Se $d(y, y_i) = r_i$ então $|x| = R_i$ e pelo Lema 2.5

$$u_i(y) \leq C u_i(y_i) R_i^{-1}. \tag{2.21}$$

Temos ainda pela definição de ponto de blow-up isolado simples e juntamente com o Lema 2.5, que a função

$$r^{\frac{2}{p_i-1}} \bar{u}_i(r) \text{ é estritamente decrescente para } r_i < r < \rho. \tag{2.22}$$

Para todo $r_i \leq d(y, y_i) < \rho$, temos pelo Lema 2.4 e as Afirmações (2.22) e (2.21) que

$$\begin{aligned} d(y, y_i)^{\frac{2}{p_i-1}} u_i(y) &\leq C d(y, y_i)^{\frac{2}{p_i-1}} \bar{u}_i(d(y, y_i)) \\ &\leq C r_i^{\frac{2}{p_i-1}} \bar{u}_i(r_i) \\ &\leq C r_i^{\frac{2}{p_i-1}} u_i(y_i) R_i^{-1} \\ &= C R_i^{-1+\frac{2}{p_i-1}} \\ &= C R_i^{\frac{-1}{2}+o_i(1)}. \end{aligned}$$

Dessa forma, para todo $r_i \leq d(y, y_i) \leq \rho$, temos que

$$u_i(y)^{p_i-1} \leq C R_i^{-2+o(1)} d(y, y_i)^{-2}.$$

Consideremos agora o operador:

$$l_i\varphi = \Delta_g\varphi + u_i(y)^{p_i-1}\varphi - K_i(y)\varphi.$$

Notemos que $l_i u_i = 0$ pela equação (2.3) e que $u_i > 0$. Então, vale o Princípio do Máximo para l_i. Para $0 \le \mu \le 1$ temos que

$$\Delta_g(d(y,y_i)^{-\mu}) = \sum_{i=1}^{3} -\mu d(y,y_i)^{-\mu-2} + \mu(\mu+2)d(y,y_i)^{-\mu-2} = -\mu(1-\mu)d(y,y_i)^{-\mu-2}.$$

Assim segue que para todo $0 < \delta < \frac{1}{100}$, podemos escolher $\rho_1 < \rho$ tal que para i suficientemente grande e $r_i \le d(y,y_i) < \rho_1$, temos

$$\begin{aligned} l_i(d(y,y_i)^{-\delta}) &= -\delta(1-\delta)d(y,y_i)^{-\delta-2} + O_i(1)d(y,y_i)^{-\delta} + u_i(y)^{p_i-1}d(y,y_i)^{-\delta} \\ &\le -\delta(1-\delta)d(y,y_i)^{-\delta-2} + CR_i^{-2+\circ(1)}d(y,y_i)^{-\delta-2} + O_i(1)d(y,y_i)^{-\delta} \\ &\le -\frac{1}{2}\delta(1-\delta)d(y,y_i)^{-\delta-2}. \end{aligned} \tag{2.23}$$

De forma análoga, temos

$$l_i(d(y,y_i)^{-1+\delta}) \le -\frac{1}{2}\delta(1-\delta)d(y,y_i)^{-1+\delta-2} = -\frac{1}{2}\delta(1-\delta)d(y,y_i)^{-3+\delta}. \tag{2.24}$$

Sejam $\lambda_i = (1-\delta)\dfrac{p_i-1}{2} - 1$, $M_i = \max\limits_{\partial B_{\rho_1}(y_i)} u_i$ e

$$\varphi_i(y) = M_i\rho_1^{\delta}d(y,y_i)^{-\delta} - \frac{1}{2}\delta(1-\delta)d(y,y_i)^{-\delta-2} + \tilde{A}u_i(y_i)^{-\lambda_i}d(y,y_i)^{-1+\delta},$$

para $r_i \le d(y,y_i) \le \rho_1$, onde $\tilde{A}$ é uma constante positiva grande que veremos em instantes. Pelas Desigualdades (2.23) e (2.24), $l_i\varphi_i(y) \le 0$ para $r_i \le d(y,y_i) \le \rho_1$. Sobre $\partial B_{\rho_1}(y_i)$, temos que $\varphi_i(y) \ge M_i \ge u_i(y)$. Já sobre $\partial B_{r_i}(y_i)$, obtemos

$$\varphi_i(y) \ge \tilde{A}u_i(y_i)^{-\lambda_i}d(y,y_i)^{-1+\delta} \ge \tilde{A}u_i(y_i)^{-\lambda_i}r_i^{-1+\delta} = \tilde{A}u_i(y_i)^{-\lambda_i}R_i^{-1+\delta}.$$

Escolhendo $\tilde{A}$ grande o suficiente, temos por (2.21) que $\varphi_i(y) \ge u_i(y)$ sobre $\partial B_{r_i}(y_i)$. Em vista de $l_iu_i = 0$, pelo Princípio do Máximo,

$$\varphi_i(y) \ge u_i(y) \text{ em } r_i \le d(y,y_i) \le \rho_1. \tag{2.25}$$

Por sua vez, para $r_i < \theta < \rho_1$ e i suficientemente grande, tem-se pelo Lema 2.4 e as

Afirmações (2.22) e (2.25) que

$$\begin{aligned}
\rho_1^{\frac{2}{p_i-1}} M_i &\leq C\rho_1^{\frac{2}{p_i-1}} \bar{u}_i(\rho_1) \\
&\leq C\theta^{\frac{2}{p_i-1}} \bar{u}_i(\theta) \\
&\leq C\theta^{\frac{2}{p_i-1}} u_i(\theta) \\
&\leq C\theta^{\frac{2}{p_i-1}} \{M_i \rho_1^{\delta} \theta^{-\delta} + A u_i(y_i)^{-\lambda_i} \theta^{-1+\delta}\}.
\end{aligned}$$

Desde que $\frac{2}{p_i-1} - \delta \geq \frac{1}{5}$ para i suficientemente grande, podemos fixar θ suficientemente pequeno (independente de i), tal que pelo que acabamos de ver segue

$$M_i \leq C u_i(y_i)^{-\lambda_i}.$$

Disto e juntamente com (2.25), temos

$$u_i(y) \leq C u_i(y_i)^{-\lambda_i} (d(y, y_i)^{-\delta} + d(y, y_i)^{-1+\delta}) \leq C_2 u_i(y_i)^{-\lambda_i} d(y, y_i)^{-1+\delta}$$

para $r_i \leq d(y, y_i) \leq \rho_1$, o que demonstra (2.18).

Provaremos agora a estimativa (2.19). Assumamos por simplicidade, que a métrica g em questão é a métrica flat. O caso geral pode ser obtido essencialmente da mesma forma. Para qualquer $R_i u_i(y_i)^{-\frac{p_i-1}{2}} \leq |\tilde{y}| \leq \frac{\rho_1}{2}$, considere

$$v_i(z) = |\tilde{y}|^{1-\delta} u_i(y_i)^{\lambda_i} u_i(|\tilde{y}|z), \quad \frac{1}{2} \leq |z| \leq 2.$$

Calculando de forma similar ao que foi feito nos Lemas 2.4 e 2.5 usando (2.3), temos que v_i satisfaz para $\frac{1}{2} \leq |z| \leq 2$,

$$-\Delta v_i(z) + |\tilde{y}|^2 K_i(|\tilde{y}|z) v_i(z) = |\tilde{y}|^{3-\delta-(1-\delta)p_i} u_i(y_i)^{(1-p_i)\lambda_i} v_i(z)^{p_i}. \tag{2.26}$$

Segue da definição de λ_i e do fato que $|\tilde{y}| \geq R_i u_i(y_i)^{-\frac{p_i-1}{2}}$ que

$$|\tilde{y}|^{3-\delta-(1-\delta)p_i} u_i(y_i)^{(1-p_i)\lambda_i} \leq R_i^{3-\delta-(1-\delta)p_i} = o_i(1). \tag{2.27}$$

Tendo em vista (2.18), substituindo apenas R_i por $\frac{R_i}{2}$, obtemos $v_i(z) \leq C$, para todo $\frac{1}{2} \leq |z| \leq 2$. Em virtude de (2.26), (2.27) e de estimativas elípticas, segue que

$$|\nabla v_i(z)| \leq C, \quad \text{para todo } |z| = 1.$$

Observemos ainda que

$$|\nabla v_i(z)| = |\tilde{y}|^{1-\delta} u_i(y_i)^{\lambda_i} |\tilde{y}||\nabla u_i(|\tilde{y}|)| = |\tilde{y}|^{2-\delta} u_i(y_i)^{\lambda_i} |\nabla u_i(|\tilde{y}|)| \leq C.$$

Logo,

$$|\nabla u_i(\tilde{y})| \leq C u_i(y_i)^{-\lambda_i} |\tilde{y}|^{-2+\delta},$$

que demonstra (2.19) no intervalo $2R_i u_i^{-\frac{p_i-1}{2}} \leq d(y, y_i) \leq \frac{1}{2}\rho_1$. No entanto, podemos estabelecer (2.18) em uma escala maior e utilizando o argumento acima para obter (2.19).

Por fim, encontraremos a estimativa (2.20) utilizando o mesmo argumento anterior, pois as estimativas elípticas garantem também que

$$|\nabla^2 v_i(z)| \leq C, \text{ para todo } |z| = 1,$$

acarretando que $|\nabla^2 v_i(z)| = |\tilde{y}|^{3-\delta} u_i(y_i)^{\lambda_i} |\nabla^2 u_i(\tilde{y})| \leq C$. Portanto,

$$|\nabla^2 u_i(\tilde{y})| \leq C |\tilde{y}|^{-3+\delta} u_i(y_i)^{-\lambda_i}.$$

De onde concluímos o Lema 2.7. □

Observação 2.2. Mais a frente corrigiremos δ para zero, logo ajustaremos ρ_1. Nosso objetivo é obter (2.18) com $\delta = 0$ para $r_i \leq d(y, y_i) \leq \rho_1$, que junto com o Lema 2.4, resultará na Proposição 2.6.

Lema 2.8. Seja u_i satisfazendo (2.3) e $y_i \to \bar{y} \in \Omega$ um ponto de blow-up isolado simples. Sejam $R_i \to \infty$ e $0 < \varepsilon_i < e^{-R_i}$ sequências nas quais (2.11) e (2.12) valem. Fixado $0 < \delta < \frac{1}{100}$, então para todo $0 < \sigma < \rho_1$ fixado, temos para i suficientemente grande que

$$\begin{aligned} \int_{d(y,y_i)\leq\sigma} d(y, y_i)^2 u_i^{p_i+1} \mathrm{d}v_g &= O_i(u_i(y_i)^{-4+o_i(1)}), & (2.28)\\ \int_{d(y,y_i)\leq\sigma} u_i^2 \mathrm{d}v_g &\leq C_3 \sigma u_i(y_i)^{-2\lambda_i}, & (2.29)\\ \int_{d(y,y_i)\leq\sigma} d(y, y_i)^2 |\nabla u_i|^2 \mathrm{d}v_g &\leq O_i(u_i(y_i)^{-4+o_i(1)}) + C\sigma u_i(y_i)^{-2\lambda_i}, & (2.30) \end{aligned}$$

onde C é uma constante que independe de i e σ.

Demonstração. Para provar as três estimativas acima separaremos cada uma em duas partes. O primeiro é o caso em que $d(y, y_i) \leq r_i$ e usaremos (2.12) para estimar u_i. O segundo caso será analisar no anel $r_i \leq d(y, y_i) \leq \sigma$ e usaremos o Lema 2.7 para estimar u_i.

Adotemos a notação $y = \exp_{y_i} u_i(y_i)^{-\frac{p_i-1}{2}} x$.

Provaremos a seguir a estimativa (2.28). Fazendo uma mudança de variável e usando (2.11), temos

$$\int_{d(y,y_i)\leq r_i} d(y,y_i)^2 u_i^{p_i+1} \mathrm{d}v_g = \int_{|z|<r_i} |z|^2 u_i^{p_i+1}(z)(1+o(|z|^2))\ \mathrm{d}z.$$

Como $o_i(|z|^2)$ denota uma expressão em função de $|z|^2$ que tende a zero quando $i \to \infty$ e tende a zero mais rápido que o restante da estimativa, podemos omiti-lo nos próximos passos. Dessa forma, de agora em diante, quando fizermos a mudança de variável omitiremos esse passo. Segue que

$$\begin{aligned}
\int_{d(y,y_i)\leq r_i} d(y,y_i)^2 u_i^{p_i+1} \mathrm{d}v_g &= u_i(y_i)^{\frac{-5p_i+5}{2}} \int_{|x|<R_i} |x|^2 u_i^{p_i+1}(u_i(y_i)^{-\frac{p_i-1}{2}} x)\ \mathrm{d}x \\
&\leq C u_i(y_i)^{-4+\frac{3\tau_i}{2}} \int_{|x|<R_i} |x|^2 \left(1+\frac{|x|^2}{3}\right)^{-\frac{p_i+1}{2}} \mathrm{d}x \\
&\leq C u_i(y_i)^{-4+\frac{3\tau_i}{2}},
\end{aligned}$$

onde $z = u_i(y_i)^{-\frac{p_i-1}{2}} x$ e $\tau_i = 5 - p_i$ e $r_i = R_i u_i(y_i)^{-\frac{p_i-1}{2}}$. Assim fica provado então a estimativa (2.28) para a primeiro parte. Para a segunda parte, por (2.18) temos

$$\begin{aligned}
\int_{r_i\leq d(y,y_i)\leq\sigma} d(y,y_i)^2 u_i^{p_i+1} \mathrm{d}v_g &\leq C \int_{r_i\leq d(y,y_i)\leq\sigma} d(y,y_i)^2 \left(u_i(y_i)^{-\lambda_i} d(y,y_i)^{-1+\delta}\right)^{p_i+1} \mathrm{d}v_g \\
&\leq C u_i(y_i)^{-\lambda_i(p_i+1)} \int_{r_i}^{\sigma} \rho^{4-(1-\delta)(p_i+1)} \mathrm{d}\rho \\
&\leq C u_i(y_i)^{-\lambda_i(p_i+1)} r_i^{5-(1-\delta)(p_i+1)} \\
&= C R_i^{5-(1-\delta)(p_i+1)} u_i(y_i)^{-4+\frac{3\tau_i}{2}}.
\end{aligned}$$

O segundo caso segue do que acabamos de provar. Portanto, (2.28) está demonstrado.

Dando continuidade verificaremos a estimativa (2.29). O procedimento é similar a estimativa anterior. De fato, por (2.11) obtemos

$$\begin{aligned}
\int_{d(y,y_i)\leq r_i} u_i^2(y)\ \mathrm{d}v_g &= \int_{|z|<r_i} u_i^2(z)\ \mathrm{d}z \\
&= u_i(y_i)^{\frac{-3p_i+3}{2}} \int_{|x|<R_i} u_i^2(u_i(y_i)^{-\frac{p_i-1}{2}} x)\ \mathrm{d}x \\
&\leq C u_i(y_i)^{\frac{-3p_i+3}{2}} \int_{|x|<R_i} u_i(y_i)^2 (1+\frac{1}{3}|x|^2)^{-1}\ \mathrm{d}x \\
&= C u_i(y_i)^{\frac{-3p_i+7}{2}} \int_{|x|<R_i} \left(1+\frac{1}{3}|x|^2\right)^{-1} \mathrm{d}x \\
&= O_i(u_i(y_i)^{-4+o_i(1)} R_i).
\end{aligned}$$

Como $\frac{R_i}{u_i(y_i)} \to 0$, então $\frac{R_i}{u_i(y_i)} < \sigma$. Logo,

$$O_i(u_i(y_i)^{-4+o_i(1)}R_i) = O_i(u_i(y_i)^{-3}) \leq C_3\sigma u_i(y_i)^{-2\lambda_i}.$$

Portanto,

$$\int_{d(y,y_i)\leq r_i} u_i^2 \mathrm{d}v_g \leq C_3\sigma u_i(y_i)^{-2\lambda_i}.$$

Por outro lado, se $r_i \leq d(y,y_i) \leq \sigma$, por (2.18) segue que

$$\begin{aligned}
\int_{r_i\leq d(y,y_i)\leq\sigma} u_i^2 \mathrm{d}v_g &\leq C_3\int_{r_i\leq d(y,y_i)\leq\sigma} u_i(y_i)^{-2\lambda_i} d(y,y_i)^{-2+2\delta}\mathrm{d}v_g \\
&= C_3 u_i(y_i)^{-2\lambda_i}\int_{r_i\leq d(y,y_i)\leq\sigma} d(y,y_i)^{-2+2\delta}\mathrm{d}v_g \\
&= C_3 u_i(y_i)^{-2\lambda_i}(\sigma^{1+2\delta} - r_i^{1+2\delta}) \\
&\leq C_3 u_i(y_i)^{-2\lambda_i}\sigma.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\int_{d(y,y_i)\leq\sigma} u_i^2 \mathrm{d}v_g \leq C_3 u_i(y_i)^{-2\lambda_i}\sigma$$

provando (2.29).

Por último estimaremos (2.30). Temos que

$$\begin{aligned}
\int_{d(y,y_i)\leq r_i} d(y,y_i)^2|\nabla u_i|^2\mathrm{d}v_g &= \int_{|z|<r_i} |z|^2|\nabla u_i(z)|^2 \,\mathrm{d}z \\
&= u_i(y_i)^{\frac{-5p_i+5}{2}}\int_{|x|<R_i} |x|^2 \,|\nabla u_i(u_i(y_i)^{-\frac{p_i-1}{2}}x)|^2 \,\mathrm{d}x \\
&\leq Cu_i(y_i)^{\frac{-3p_i+7}{2}}\int_{|x|<R_i} |x|^4(1+\frac{1}{3}|x|^2)^{-3} \,\mathrm{d}x \\
&= Cu_i(y_i)^{-4+o_i(1)})O_i(R_i) \\
&\leq Cu_i(y_i)^{-2\lambda_i}\sigma.
\end{aligned}$$

Em contrapartida, por (2.19) encontramos que

$$\begin{aligned}
\int_{r_i\leq d(y,y_i)\leq\sigma} d(y,y_i)^2|\nabla u_i|^2\mathrm{d}v_g &\leq C_3\int_{r_i\leq d(y,y_i)\leq\sigma} d(y,y_i)^2 u_i(y_i)^{-2\lambda_i} d(y,y_i)^{-4+2\delta}\mathrm{d}v_g \\
&= C_3 u_i(y_i)^{-2\lambda_i}\int_{r_i\leq d(y,y_i)\leq\sigma} d(y,y_i)^{-2+2\delta}\mathrm{d}v_g \\
&\leq C_3 u_i(y_i)^{-2\lambda_i}\sigma.
\end{aligned}$$

Assim, a estimativa (2.30) está estabelecida. O lema portanto está provado. $\square$

Lema 2.9. Seja u_i solução da Equação (2.3) e $y_i \to \bar{y} \in \Omega$ um ponto de blow-up isolado simples. Se $R_i \to \infty$ e $0 < \varepsilon_i < e^{-R_i}$ são sequências que satisfazem (2.11) e (2.12). Então para $0 < \sigma < \rho_1$, temos que

$$|A(g, u_i)| \leq C_3 \sigma u_i(y_i)^{-2\lambda_i},$$

onde C_3 é uma constante que independe de i e σ.

Demonstração. Por definição, temos que

$$\begin{aligned} A(g,u) &= \int_{B_\sigma} (x^\alpha \partial_\alpha u)(g^{\beta\gamma} - \delta^{\beta\gamma})\partial_{\beta\gamma} u \; \mathrm{d}x - \int_{B_\sigma} (x^\alpha \partial_\alpha u)(g^{\beta\gamma} - \Gamma^\mu_{\beta\gamma})\partial_\mu u \; \mathrm{d}x \\ &+ \frac{1}{2}\int_{B_\sigma} u(g^{\beta\gamma} - \delta^{\beta\gamma})\partial_{\beta\gamma} u \; \mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_{B_\sigma} u(g^{\beta\gamma}\Gamma^\mu_{\beta\gamma})\partial_\mu u \; \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Denotemos por

$$\begin{aligned} L(g,u) &= \int_{B_\sigma} (x^\alpha \partial_\alpha u)(g^{\beta\gamma} - \delta^{\beta\gamma})\partial_{\beta\gamma} u \; \mathrm{d}x, \\ M(g,u) &= -\int_{B_\sigma} (x^\alpha \partial_\alpha u)(g^{\beta\gamma} - \Gamma^\mu_{\beta\gamma})\partial_\mu u \; \mathrm{d}x, \\ N(g,u) &= \frac{1}{2}\int_{B_\sigma} u(g^{\beta\gamma} - \delta^{\beta\gamma})\partial_{\beta\gamma} u \; \mathrm{d}x \\ P(g,u) &= \frac{1}{2}\int_{B_\sigma} u(g^{\beta\gamma}\Gamma^\mu_{\beta\gamma})\partial_\mu u \; \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Separando nos casos em que $d(y, y_i) < r_i$ e $r_i \leq d(y, y_i) \leq \sigma$, segue pelos Lemas 2.5 e 2.7, respectivamente, que

$$\begin{aligned} |L(g,u)| &\leq C_2 \int_{B_\sigma} |x|^3 |\nabla u_i| \; |\nabla^2 u_i| \; \mathrm{d}v_g \leq C_2 \sigma u_i(y_i)^{-2\lambda_i}; \\ |M(g,u)| &\leq C_2 \int_{B_\sigma} |x|^2 |\nabla u_i|^2 \; \mathrm{d}v_g \leq C_2 \sigma u_i(y_i)^{-2\lambda_i}; \\ |N(g,u)| + |P(g,u)| &\leq C_2 \int_{B_\sigma} |x| u_i \; |\nabla u_i| \; \mathrm{d}v_g \leq C_2 \sigma u_i(y_i)^{-2\lambda_i}. \end{aligned}$$

Como $A(g, u_i) = L(g,u) + M(g,u) + N(g,u) + P(g,u)$, então $|A(g, u_i)| \leq C_3 \sigma u_i(y_i)^{-2\lambda_i}$. □

Lema 2.10. Seja u_i satisfazendo (2.3) e $y_i \to \bar{y} \in \Omega$ um ponto de blow-up isolado simples. Se $R_i \to \infty$ e $0 < \varepsilon_i < e^{-R_i}$ são sequências que cumprem (2.11) e (2.12), então

$$\tau_i = O(u_i(y_i)^{-2\lambda_i}).$$

Consequentemente, $u_i(y_i)^{\tau_i} \to 1$ quando $i \to \infty$.

Demonstração. Notemos que

$$\begin{aligned}\int_{d(y,y_i)\le r_i} u_i^{p_i+1}\mathrm{d}v_g &= \int_{|z|\le r_i} u_i^{p_i+1}(z)\,\mathrm{d}z\\ &= u_i(y_i)^{-\frac{3(p_i-1)}{2}}\int_{|x|\le R_i} u_i^{p_i+1}\left(u_i(y_i)^{-\frac{p_i-1}{2}}x\right)\mathrm{d}x\\ &\geq C^{-1}u_i(y_i)^{\frac{-p_i+5}{2}}\int_{|x|\le R_i}\left(1+\frac{1}{3}|x|^2\right)^{-\frac{p_i+1}{2}}\mathrm{d}x\\ &\geq C^{-1}u_i(y_i)^{\frac{\tau_i}{2}}.\end{aligned}$$

Como $\ln(u_i(y_i))\geq 0$, segue que $u_i(y_i)^{\frac{\tau_i}{2}}>0$. Assim,

$$\int_{d(y,y_i)\le r_i} u_i^{p_i+1}\mathrm{d}v_g \geq C^{-1}u_i(y_i)^{\frac{\tau_i}{2}}\geq C^{-1}, \tag{2.31}$$

onde $r_i=R_iu_i(y_i)^{-\frac{p_i-1}{2}}$.Temos ainda que

$$\begin{aligned}\left(\frac{3}{p_i+1}-\frac{1}{2}\right)\int_{B_\sigma}u_i^{p_i+1}\mathrm{d}x &\geq \left(\frac{3}{p_i+1}-\frac{1}{2}\right)\int_{B_{r_i}}u_i^{p_i+1}\mathrm{d}x\\ &= \frac{\tau_i}{2(p_i+1)}\int_{B_{r_i}}u_i^{p_i+1}\mathrm{d}x\\ &\geq \frac{\tau_i}{2(p_i+1)}C^{-1}\\ &\geq \tau_i C^{-1}.\end{aligned}$$

Logo,

$$\tau_i\leq C\left(\frac{3}{p_i+1}-\frac{1}{2}\right)\int_{B_\sigma}u_i^{p_i+1}\mathrm{d}x.$$

Pela Identidade de Pohozaev de u_i dada pelo Lema 2.3 e usando os Lemas 2.7 e 2.8, temos que

$$\tau_i\leq C\left(\frac{3}{p_i+1}-\frac{1}{2}\right)\int_{B_\sigma}u_i^{p_i+1}\mathrm{d}x\leq Cu_i(y_i)^{-2\lambda_i}.$$

Logo, $\tau_i=O(u_i(y_i)^{-2\lambda_i})$. Consequentemente, se denotarmos $t_i=u_i(y_i)^{\tau_i}$, temos que

$$\begin{aligned}\ln(t_i) &= \tau_i\ln\left(u_i(y_i)\right)\\ &= Cu_i(y_i)^{-2\lambda_i}\ln\left(u_i(y_i)\right)\\ &= \frac{C\ln\left(u_i(y_i)\right)}{u_i(y_i)^{2\lambda_i}}\to 0 \text{ quando } i\to\infty.\end{aligned}$$

Logo, $\ln(t_i)\to 0$ e portanto $t_i\to 1$, ou seja, $u_i(y_i)^{\tau_i}\to 1$. □

Lema 2.11. Seja u_i verificando (2.3) e $y_i\to\bar{y}\in\Omega$ um ponto de blow-up isolado simples. Se $R_i\to\infty$ e $0<\varepsilon_i<e^{-R_i}$ são sequências que satisfazem (2.11) e (2.12),

então para todo $0 < \sigma < \bar{r}/2$, temos que

$$\limsup_{i\to+\infty}\left(\max_{y\in\partial B_\sigma(y_i)} u_i(y)u_i(y_i)\right) \leq C(\sigma).$$

Demonstração. Pelo Lema 2.4, precisamos estabelecer este lema apenas para o caso em que $\sigma > 0$ é suficientemente pequeno. Sem perda de generalidade, assumiremos $\bar{r} = 2$. Separaremos a prova em dois casos, de acordo com o sinal de K_i.

Caso 1: $K_i(x) \geq 0$ para todo $x \in B_1(\bar{y})$.

Considere a aplicação

$$\xi_i(y) = u_i(y_\sigma)^{-1}u_i(y),$$

onde y_σ é escolhido de modo que $d(y_\sigma, y_i) = \sigma$ e $\xi_i(y)$ satisfaça

$$-\Delta_g\xi_i(y) = u_i(y_\sigma)^{p_i-1}\xi_i(y)^{p_i} - K_i(y)\xi_i(y) = u_i(y_\sigma)^{-1}u_i(y)^{p_i} - K_i(y)\xi_i(y).$$

Segue do Lema 2.4 que para qualquer conjunto compacto $K \subset B_1(\bar{y}\setminus\{\bar{y}\})$, existe uma constante $C(K)$ tal que

$$C(K)^{-1} \leq \xi_i \leq C(K) \text{ em } K.$$

Pela Equação (2.18), $u_i(y_\sigma) \leq C_2 u_i(y_i)^{-\lambda_i}\sigma^{-1+\delta}$. Logo, $u_i(y_\sigma) \to 0$, pois é o produto de uma sequência que converge para zero e outra limitada quando $i \to \infty$. Então, usando estimativas elípticas, temos após passar a uma subsequência, que

$$\xi_i \to \xi \text{ em } C^2_{\text{loc}}\left(B_1(\bar{y}) \setminus \{\bar{y}\}\right),$$

onde ξ satisfaz

$$-\Delta_g\xi + K\xi = 0,\ \xi > 0,\ \text{em}\left(B_1(\bar{y}) \setminus \{\bar{y}\}\right),$$

em que $K(y) = \lim_{i\to+\infty} K_i(y)$. Note que fixado $0 < r < \sigma$,

$$\lim_{i\to+\infty} u_i(y_\sigma)^{-1} r^{\frac{2}{p_i-1}}\bar{u}_i(r) = r^{\frac{1}{2}}\bar{\xi}(r),$$

onde $\bar{\xi}(r) = \dfrac{1}{|\partial B_r(\bar{y})|}\displaystyle\int_{\partial B_r(\bar{y})} \xi_i \,\mathrm{d}S_g.$

Desde que $y_i \to \bar{y}$ é um ponto de blow-up isolado simples de $\{u_i\}$, temos que $r^{\frac{1}{2}}\bar{\xi}(r)$ é não-decrescente para $r \in (0, \rho)$, o que implica que ξ é regular perto de $\bar{y}$. Pelo Corolário 1.21, para σ suficientemente pequeno, existe uma constante $m > 0$, que independe de

i, tal que para i grande,

$$\begin{aligned} -\int_{B_\sigma(y_i)} \Delta_g \xi_i \mathrm{d}x &= -\int_{\partial B_\sigma(y_i)} \nabla_g \xi_i \cdot \nu \mathrm{d}S \\ &= -\int_{\partial B_\sigma(\bar{y})} \nabla_g \xi \cdot \nu \mathrm{d}S + o_i(1) > m > 0. \end{aligned} \tag{2.32}$$

Por outro lado, como $K_i(x) \geq 0$, temos

$$\begin{aligned} -\int_{B_\sigma(y_i)} \Delta_g \xi_i(y) \mathrm{d}x &= \int_{B_\sigma(y_i)} u_i(y_\sigma)^{-1} u_i(y)^{p_i} \mathrm{d}y - K_i(y)\xi_i(y)\ \mathrm{d}y \\ &\leq u_i(y_\sigma)^{-1} \int_{B_\sigma(y_i)} u_i(y)^{p_i}\ \mathrm{d}y. \end{aligned} \tag{2.33}$$

Similarmente a (2.31), podemos obter

$$\int_{d(y,y_i)\leq r_i} u_i^{p_i} \mathrm{d}v_g \leq C u_i(y_i)^{-1+\frac{\tau_i}{2}}.$$

Usando o Lema 2.7 para $0 < \delta < 1/100$, segue que

$$\begin{aligned} \int_{r_i \leq d(y,y_i) \leq \sigma} u_i^{p_i} \mathrm{d}v_g &\leq C_2 \int_{r_i \leq d(y,y_i)\leq \sigma} \left(u_i(y_i)^{-\lambda_i} d(y,y_i)^{-1+\delta}\right)^{p_i} \mathrm{d}v_g \\ &\leq C r_i^{3-p_i(1-\delta)} u_i(y_i)^{-\lambda_i p_i} \\ &= C R_i^{3-p_i(1-\delta)} u_i(y_i)^{-1+\frac{\tau_i}{2}} \\ &= o_i(1) u_i(y_i)^{-1+\frac{\tau_i}{2}}. \end{aligned}$$

Utilizando o Lema 2.10, temos

$$\int_{B_\sigma(y_i)} u_i^{p_i} \mathrm{d}v_g \leq C u_i(y_i)^{-1} \tag{2.34}$$

pelas Equações (2.32) , (2.33) e (2.34),

$$-\int_{B_\sigma(y_i)} \Delta_g \xi_i(y) \mathrm{d}v_g \leq u_i(y_\sigma)^{-1} C u_i(y_i)^{-1}.$$

Portanto, $u_i(y_\sigma) u_i(y_i) \leq C$.

Caso 2: $K_i(x) < 0$ para algum $x \in B_1(\bar{y})$.

Para $\sigma_1 > 0$, vamos denotar φ como sendo a primeira auto-função do operador $-\Delta_g$ em $B_{2\sigma_1}(\bar{y})$ com respeito a condição de bordo de Dirichlet, isto é

$$\begin{cases} -\Delta_g \varphi = \lambda_i \varphi, \quad \varphi > 0, & \text{em } B_{2\sigma_1}(\bar{y}) \\ \quad \varphi = 0, & \text{sobre } \partial B_{2\sigma_1}(\bar{y}), \end{cases}$$

onde λ_1 denota o primeiro autovalor do operador $-\Delta_g$.
Podemos escolher $\sigma_i > 0$ suficientemente pequeno e independente de i tal que $\lambda_1 > \|K_i\|_{L^\infty(B_{2\sigma_1}(\bar{y}))} + 1$ para todo i. Fixado σ_1, temos que

$$-\Delta_g \varphi + K_i \varphi > 0 \text{ em } \; B_{\sigma_1}(\bar{y}). \tag{2.35}$$

Seja $\tilde{g} = \varphi^4 g$ e considere L_g e $L_{\tilde{g}}$ os operadores Laplaciano conformes de g e $\tilde{g}$ respectivamente. Sabemos que

$$L_{\tilde{g}} \psi = \varphi^{-5} L_g(\psi\varphi), \text{ para todo } \psi \in \; C^\infty\left(B_{\sigma_1}(\bar{y})\right). \tag{2.36}$$

Definindo $\tilde{u}_i = \varphi^{-1} u_i$, deriva da Equação (2.3) e da estimativa acima para $\psi = \tilde{u}_i$ que

$$\begin{aligned} L_{\tilde{g}}(\tilde{u}_i) &= \varphi^{-5} L_g(\tilde{u}_i \varphi) \\ &= \varphi^{-5} L_g(u_i) \\ &= \varphi^{-5}\left(-\Delta_g u_i + \frac{1}{8} R_g u_i\right) \\ &= \varphi^{-5}\left(u_i^{p_i} - K_i u_i + \frac{1}{8} R_g u_i\right). \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$L_{\tilde{g}}(\tilde{u}_i) = -\Delta_{\tilde{g}} \tilde{u}_i + \frac{1}{8} R_g \tilde{u}_i.$$

Assim,

$$-\Delta_{\tilde{g}} \tilde{u}_i + \frac{1}{8} R_g \tilde{u}_i + K_i u_i \varphi^{-5} = \varphi^{-5} u_i^{p_i},$$

isto é,

$$\begin{aligned} -\Delta_{\tilde{g}} \tilde{u}_i + \frac{1}{8} R_g \tilde{u}_i + K_i \tilde{u}_i \varphi^{-4} &= \varphi^{-5} (\tilde{u}_i \varphi)^{p_i} \\ &= \varphi^{-(5-p_i)} \tilde{u}_i^{p_i} \\ &= \varphi^{-\tau_i} \tilde{u}_i^{p_i}, \end{aligned}$$

ou ainda,

$$-\Delta_{\tilde{g}} \tilde{u}_i + \tilde{K}_i \tilde{u}_i = \varphi^{-\tau_i} \tilde{u}_i^{p_i},$$

com $\tilde{K}_i = \frac{1}{8} R_{\tilde{g}} - \left(\frac{1}{8} R_g - K_i\right) \varphi^{-4}$.

Fazendo $\psi = 1$ na Equação (2.36), tem-se $L_{\tilde{g}}(1) = \varphi^{-5} \tilde{u}_i^{p_i}$. Note também que $L_{\tilde{g}}(1) = \frac{1}{8} R_{\tilde{g}}$ e que $\varphi^{-5} L_g(\varphi) = \varphi^{-5}\left(-\Delta_g \varphi + \frac{1}{8} R_g \varphi\right)$. Logo,

$$\frac{1}{8}R_{\tilde{g}} = \varphi^{-5}\left(-\Delta_g\varphi + \frac{1}{8}R_g\varphi\right).$$

Usando (2.35) e a expressão anterior, temos em $B_{\sigma_1}(\bar{y})$ que

$$\begin{aligned}\tilde{K}_i &= \frac{1}{8}R_{\tilde{g}} - \frac{1}{8}R_g\varphi^{-4} + K_i\varphi^{-4}\\ &= \varphi^{-5}\left(-\Delta_g\varphi + \frac{1}{8}R_g\varphi\right) - \frac{1}{8}R_g\varphi^{-4} + K_i\varphi^{-4}\\ &= \varphi^{-5}\left(-\Delta_g\varphi + K_i\varphi\right) > 0.\end{aligned}$$

Escolhendo agora $\sigma \in (0,\sigma_1)$ pequeno e definindo $\tilde{\xi}_i = \tilde{u}_i(y_\sigma)^{-1}\tilde{u}_i(y) = \varphi(y_\sigma)\varphi^{-1}(y)\xi_i(y)$ temos que as Equações (2.32) e (2.34) continuam válidas ao substituir ξ_i por $\tilde{\xi}_i$ e u_i por $\tilde{u}_i$. Usando o fato de $\tilde{K}_i$ ser positiva, obtemos de (2.33) que

$$0 < -\int_{B_\sigma}\Delta_{\tilde{g}}\tilde{\xi}_i\mathrm{d}x \leq \tilde{u}_i(y_\sigma)^{-1}\int_{B_\sigma}\tilde{u}_i^{p_i}\mathrm{d}x.$$

Da mesma forma que provamos no Caso 1, vale $\displaystyle\int_{B_\sigma}\tilde{u}_i^{p_i}\mathrm{d}x \leq C\tilde{u}_i(y_i)^{-1}$ e portanto o Lema está demonstrado no Caso 2. □

De posse dos lemas anteriores, provaremos agora a Proposição 2.6.

Prova da Proposição 2.6:

Inicialmente, provaremos que (2.17) realmente vale, argumentando por contradição. Para tanto, suponha que (2.17) não seja válido. Então, ao passar a uma subsequência, existe $\{\tilde{y}_i\}$ tal que $d(y_i,\tilde{y}_i) \leq \rho/2$ e

$$u_i(y_i)u_i(\tilde{y}_i)d(y_i,\tilde{y}_i) \to \infty \ \text{ quando } i \to \infty. \tag{2.37}$$

Passando a outra subsequência, as estimativas (2.11) e (2.12) valem para algum $R_i \to +\infty$ e $0 < \varepsilon_i < e^{-R_i}$. Se $d(y_i,\tilde{y}_i) < r_i$, teríamos por (2.11) que

$$u_i(y_i)^{-1}u_i(\tilde{y}_i) \leq C, \text{ onde } d(y_i,\tilde{y}_i) \leq r_i = R_iu_i(y_i)^{-\frac{p_i-1}{2}}.$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned}u_i(y_i)u_i(\tilde{y}_i)d(y_i,\tilde{y}_i) &= u_i(y_i)^{-1}u_i(\tilde{y}_i)u_i^2(y_i)d(y_i,\tilde{y}_i)\\ &\leq Cd(y_i,\tilde{y}_i)^{-\frac{4}{p_i-1}}d(y_i,\tilde{y}_i)\\ &\leq C,\end{aligned}$$

o que implicaria que $u_i(y_i)u_i(\tilde{y}_i)d(y_i,\tilde{y}_i) \to C$, contradizendo (2.37). Portanto, temos que $r_i = R_i u_i(y_i)^{-\frac{p_i-1}{2}} \leq d(y_i,\tilde{y}_i) \leq \rho/2$.

Seja $x = (x_1, x_2, x_3)$ um sistema de coordenadas geodésicas normais centrado em y_i dado por $\exp_{y_i}(x)$. Considerando $\tilde{r}_i = d(y_i, \tilde{y}_i)$ e

$$\tilde{u}_i(x) = (\tilde{r}_i)^{\frac{2}{p_i-1}} u_i\left(\exp_{y_i}(\tilde{r}_i x)\right), \quad |x| < 2,$$

temos que $\tilde{u}_i$ satisfaz

$$-\Delta_{g_i}\tilde{u}_i(x) + \tilde{K}_i(x)\tilde{u}_i(x) = \tilde{u}_i^{p_i}, \quad |x| < 2,$$

onde $\tilde{K}_i(x) = \tilde{r}_i^2 K_i\left(\exp_{y_i}(\tilde{r}_i x)\right)$ e $(g_i)_{\alpha\beta}(x) = g_{\alpha\beta}(\tilde{r}_i x)dx^\alpha dx^\beta$.

A métrica g_i depende de i, mas se g_i converge uniformemente, então os resultados anteriores ainda são válidos para a métrica limite.

Como $\tilde{u}_i$ é uma renormalização de u_i, temos que a origem é um ponto de blow-up isolado simples para $\tilde{u}_i$. Além disso, $\{\tilde{u}_i\}$ satisfaz as hipóteses do Lema 2.11 e então,

$$\max_{|x|=1} \tilde{u}_i(0)\tilde{u}_i(x) \leq C.$$

Assim, $u_i(\tilde{y}_i)u_i(y_i)d(y_i,\tilde{y}_i)^{\frac{4}{p_i-1}} \leq C$. Como $d(y_i,\tilde{y}_i)^{\frac{4}{p_i-1}} \to d(y_i,\tilde{y}_i)$, temos

$$u_i(\tilde{y}_i)u_i(y_i)d(y_i,\tilde{y}_i) \leq C,$$

o que contradiz nossa hipótese (2.37). Portanto,

$$u_i(\tilde{y}_i)u_i(y_i)d(y_i,\tilde{y}_i) \leq C.$$

Provaremos agora a segunda parte da proposição. Em vista da Equação (2.3), temos que $u_i(y_i)u_i$ satisfaz

$$-\Delta_g\left(u_i(y_i)u_i\right) + K_i\left(u_i(y_i)u_i\right) = u_i(y_i)^{1-p_i}\left(u_i(y_i)u_i\right)^{p_i}.$$

Por (2.17), temos que $u_i(y_i)u_i(x) \leq Cd(x,y_i)^{-1}$. Logo, $u_i(y_i)u_i$ é localmente limitada em qualquer conjunto compacto que não contenha $\bar{y}$. Podemos então aplicar a Desigualdade de Harnack e, por estimativas elípticas, após passar a uma subsequência, obtemos

$$u_i(y_i)u_i \to v \text{ em } C^2_{\text{loc}}\left(B_{\tilde{\rho}}(\bar{y}) \setminus \{\bar{y}\}\right),$$

onde $v > 0$ e satisfaz

$$-\Delta_g v + Kv = 0 \text{ em } B_{\tilde{\rho}}(\bar{y}) \setminus \{\bar{y}\}$$

com $K(x) = \lim\limits_{i\to+\infty} K_i(x)$. Observe também que para todo $0 < r < \rho$,

$$\lim_{i\to+\infty} u_i(y_i) r^{\frac{2}{p_i-1}} \bar{u}_i(r) = r^{\frac{1}{2}} \bar{v}(r).$$

onde $\bar{u}_i(r)$ é a média esférica definida em (2.2) e $\bar{v}(r)$ é definida da mesma forma. Como já vimos, pela Definição 2.3 e a estimativa (2.11), $r^{\frac{1}{2}}\bar{v}(r)$ é não-decrescente para $r \in (0, \rho)$, o que implica que v é singular na origem. Pela Proposição 1.20 temos que $v = aG + b$ onde $a \geq 0$ é uma constante e $b \in C^2(B_{\tilde{\rho}}(\bar{y}))$ satisfaz $-\Delta_g b + Kb = 0$ em $B_{\tilde{\rho}}(\bar{y})$. Como v é singular na origem, segue que $a > 0$. Portanto, a Proposição está demonstrada.

Após a Proposição 2.6, podemos determinar os Corolários a seguir como versões mais fortes dos Lemas 2.7, 2.8 e 2.9. A demonstração dos seguintes Corolários difere da prova dos Lemas apenas ao substituir a estimativa de (2.18) por (2.17).

Corolário 2.12. Seja u_i satisfazendo (2.3) e $y_i \to \bar{y} \in \Omega$ um ponto de blow-up isolado simples. Sejam $R_i \to \infty$ e $0 < \varepsilon_i < e^{-R_i}$ sequências que satisfazem (2.11) e (2.12). Então existe $\rho_1 \in (0, \rho)$ independente de i tal que

$$|\nabla_g u_i(y)| \leq C_2 u_i(y_i)^{-1} d(y, y_i)^{-2} \text{ para todo } R_i u_i(y_i)^{-\frac{p_i-1}{2}} \leq d(y, y_i) \leq \rho_1$$

e

$$|\nabla_g^2 u_i(y)| \leq C_2 u_i(y_i)^{-1} d(y, y_i)^{-3} \text{ para todo } R_i u_i(y_i)^{-\frac{p_i-1}{2}} \leq d(y, y_i) \leq \rho_1,$$

onde C_2 é uma constante positiva que independe de i.

Corolário 2.13. Seja u_i satisfazendo (2.3) e $y_i \to \bar{y} \in \Omega$ um ponto de blow-up isolado simples. Sejam $R_i \to \infty$ e $0 < \varepsilon_i < e^{-R_i}$ sequências que satisfazem (2.11) e (2.12). Então para todo $0 < \sigma < \rho_1$ fixado, temos para i suficientemente grande que

$$\begin{aligned}
\int_{d(y,y_i)\leq\sigma} d(y, y_i)^2 u_i^{p_i+1} \mathrm{d}v_g &= O_i(u_i(y_i)^{-4+o_i(1)}), \\
\int_{d(y,y_i)\leq\sigma} u_i^2 \mathrm{d}v_g &\leq C_3\sigma u_i(y_i)^{-2} + o_i(u_i(y_i)^{-2}), \\
e \qquad \int_{d(y,y_i)\leq\sigma} d(y, y_i)^2 |\nabla u_i|^2 \mathrm{d}v_g &\leq O_i(u_i(y_i)^{-4+o_i(1)}) + C_3\sigma u_i(y_i)^{-2},
\end{aligned}$$

onde C_3 é uma constante independente de i e σ positiva.

Corolário 2.14. Seja u_i cumprindo (2.3) e $y_i \to \bar{y} \in \Omega$ um ponto de blow-up isolado simples. Se $R_i \to \infty$ e $0 < \varepsilon_i < e^{-R_i}$ são sequências que satisfazem (2.11) e (2.12).

Então

$$|A(g, u_i)| \leq C_3 \sigma u_i(y_i)^{-2},$$

onde $A(g, u_i)$ é definido no Lema 2.3 e C_3 é uma constante que independe de i e σ.

Corolário 2.15. Seja u_i satisfazendo (2.3) e $y_i \to \bar{y} \in \Omega$ um ponto de blow-up isolado simples. Após passar a uma subsequência de $\{u_i\}$, as estimativas a seguir valem:

$$\begin{aligned}
\lim_{i\to+\infty} u_i(y_i)^2 \int_{d(y,y_i)\leq\sigma} d(y,y_i)^2 u_i^{p_i+1} \mathrm{d}v_g &= 0; \\
\lim_{\sigma\to 0^+} \limsup_{i\to+\infty} u_i(y_i)^2 \int_{d(y,y_i)\leq\sigma} d(y,y_i)^2 |u_i|^2 \mathrm{d}v_g &= 0; \\
\lim_{\sigma\to 0^+} \limsup_{i\to+\infty} u_i(y_i)^2 \int_{d(y,y_i)\leq\sigma} u_i^2 \mathrm{d}v_g &= 0; \\
\lim_{\sigma\to 0^+} \limsup_{i\to+\infty} u_i(y_i)^2 |A(g,u_i)| \mathrm{d}v_g &= 0.
\end{aligned}$$

A proposição a seguir é uma das principais ferramentas que usaremos para demonstrar nosso resultado mais importante sobre compacidade. Além disso, será usado em algumas demonstrações mais a frente.

Proposição 2.16. Sejam u_i satisfazendo (2.3), $y_i \to \bar{y}$ um ponto de blow-up isolado simples, e para algum $\tilde{\rho} > 0$,

$$u_i(y_i) u_i \to h \text{ em } C^2_{\mathrm{loc}}\left(B_{\tilde{\rho}}(\bar{y}) \setminus \{\bar{y}\}\right).$$

Supondo que, para algum $a > 0$ em um sistema de coordenadas geodésicas normais $x = (x_1, x_2, x_3)$, tem-se

$$h(x) = \frac{a}{|x|} + A + o(1) \text{ quando } |x| \to 0,$$

então $A \leq 0$.

Demonstração. Para $\sigma > 0$ suficientemente pequeno, a identidade de Pohozaev de u_i dada pelo Lema 2.3 e torna-se

$$-\int_{B_\sigma} \left(K(x) + \frac{x\cdot\nabla K(x)}{2}\right) u_i^2 \,\mathrm{d}x + \left(\frac{3}{p+1} - \frac{1}{2}\right) \int_{B_\sigma} u_i^{p+1} \,\mathrm{d}x - A(g,u_i)$$

$$= \int_{\partial B_\sigma} B(x,\sigma,u_i,\nabla u_i) \,\mathrm{d}S - \int_{\partial B_\sigma} \sigma \left(\frac{K u_i^2}{2} - \frac{u_i^{p+1}}{p+1}\right) \mathrm{d}S.$$

Multiplicando a equação acima por $u_i(0)^2$ e calculando o limite, $\lim_{\sigma\to 0^+} \limsup_{i\to+\infty}$, obtemos usando o Corolário 2.15, que

$$\lim_{\sigma\to 0^+}\int_{\partial B_\sigma} B(x,\sigma,h,\nabla h) = \lim_{\sigma\to 0^+}\limsup_{i\to+\infty} u_i(0)^2\int_{\partial B_\sigma} B(x,\sigma,u_i,\nabla u_i) \geq 0.$$

Por outro lado, pela definição de $B(x,\sigma,h,\nabla h)$ temos

$$\begin{aligned}\lim_{\sigma\to 0^+}\int_{\partial B_\sigma} B(x,\sigma,h,\nabla h) &= \lim_{\sigma\to 0^+}\int_{\partial B_\sigma} \sigma\left(\frac{\partial h}{\partial \nu}\right)^2 - \frac{\sigma}{2}|\nabla h|^2 + \frac{1}{2}h\frac{\partial h}{\partial \nu}\\ &= -\frac{aA}{2}|\mathbb{S}^2|,\end{aligned}$$

onde $|\mathbb{S}^2|$ denota a área da esfera unitária. Pelas duas estimativas acima, como $a > 0$, segue que $A \leq 0$. $\square$

Observação 2.3. A Proposição 2.16 continua valendo ao substituirmos a métrica g por uma sequência de métricas suficientemente suave.

Observação 2.4. Para constatarmos essa afirmação, notemos que Adimurthi e Yadava provaram em [1] que para as dimensões $4 \leq n \leq 6$, existe uma sequência de soluções radialmente simétricas para o seguinte problema de Neumann:

$$\begin{cases} -\Delta u_i(x) + \frac{1}{i}u_i = u_i^{\frac{n+2}{n-2}},\ u_i > 0, \qquad \text{em } B_1(0),\\ \\ \dfrac{\partial u_i}{\partial \nu} = 0, \qquad \text{sobre } \partial B_1(0),\end{cases} \tag{2.38}$$

com $u_i(0) = \max\limits_{\bar{B}_1} u_i \to \infty$.

O lema a seguir, juntamente a descoberta de Adimurthi e Yadava, validam nossa afirmação.

Lema 2.17. Para $n \geq 3$, seja u_i uma solução radialmente simétrica de (2.38). Então, após passar a uma subsequência, ou $u_i \to 0$ uniformemente na $\bar{B}_1$ ou $u_i(0) \to \infty$, para todo $0 < |x| \leq 1$, $u_i(0)u_i(x) \to \infty$.

Demonstração. Como apontado na Observação 4.4 de [19] , $\{u_i\}$ pode ter no máximo um ponto blow-up isolado em $x = 0$. Mais precisamente, temos
Passo 1 Para alguma constante C independente de i, afirmamos que

$$|x|^{\frac{n-2}{2}}u_i(x) \leq C, \quad \text{para todo } |x| \leq 1.$$

Provaremos a afirmação anterior por contradição. Supondo o contrário, temos que para algum $0 < |x_i| \leq 1$,

$$f_i(x_i) = \max_{0\leq|x|\leq 1} f_i(x) \to \infty,$$

onde $f_i(x) := |x|^{\frac{n-2}{2}} u_i(x)$. Seja $\sigma_i = \frac{1}{2}|x_i|$ notemos que

$$\sigma_i^{\frac{n-2}{2}} \max_{|x-x_i|\leq\sigma_i} u_i \geq 2^{-\frac{n-2}{2}} f_i(x_i) \to \infty$$

e

$$(2\sigma_i)|^{\frac{n-2}{2}} u_i(x_i) \geq \max_{|x-x_i|\leq\sigma_i} f_i \geq \sigma_i^{\frac{n-2}{2}} \max_{|x-x_i|\leq\sigma_i} u_i.$$

Consequentemente, $\sigma_i^{\frac{n-2}{2}} u_i(x_i) \to \infty$ e

$$u_i(x_i) \geq 2^{-\frac{n-2}{2}} \max_{|x-x_i|\leq\sigma_i} u_i. \tag{2.39}$$

Consideremos

$$w_i(z) = u_i(x_i)^{-1} u_i\left(u_i(x_i)^{\frac{2}{n-2}} z + x_i\right), \quad |z| < u_i(x_i)^{\frac{2}{n-2}} \sigma_i \to \infty.$$

Observemos em vista de (2.39) que w_i satisfaz

$$\begin{cases} -\Delta_g w_i(z) = w_i(x)^{\frac{n+2}{n-2}} - i^{-1} u_i(x_i)^{-\frac{4}{n-2}} w_i(z), \quad u_i(x_i)^{-\frac{2}{n-2}} z + x_i \in B_1(0), \\ \\ \dfrac{\partial w_i}{\partial \nu} = 0, \quad \text{sobre } \partial B_1(0), \\ \\ 2^{-\frac{n-2}{2}} w_i(z) \leq w_i(0) = 1, \quad u_i(x_i)^{-\frac{2}{n-2}} z + x_i \in B_1(0). \end{cases}$$

Após passar a uma subsequência, w_i converge fortemente para algum w em qualquer subconjunto compacto com $w \geq 0$ satisfazendo $w(0) = 1$ e $-\Delta w = w^{\frac{n+2}{n-2}}$ em todo o espaço $\mathbb{R}^n$ ou em um semi-espaço que contenha a origem do tipo $\mathbb{R}^n_+$. No segundo caso, também sabemos que w satisfaz a condição de fronteira nula de Neumann na fronteira do semi-espaço. Pelo Teorema do tipo Liouville de Caffarelli, Gidas e Spruck tem-se a expressão que representa w. Essa expressão e a convergência forte de w_i para w em qualquer conjunto compacto viola a simetria radial de u_i o que é uma contradição. A afirmação portanto está demonstrada.

Pelo passo 1, sabemos que $\{u_i\}$ é uniformemente limitada distante da origem. Assim, podemos obter a Desigualdade de Hanack (incluindo a condição com bordo, como pode ser visto por exemplo no Lema A.1 de [14]) a seguir

Passo 2. Para todo $0 < \varepsilon < 1$, existe $C(\varepsilon)$ independente de i tal que

$$\max_{\varepsilon\leq|x|\leq1} u_i \leq C(\varepsilon) \min_{\varepsilon\leq|x|\leq1} u_i.$$

Vejamos agora o seguinte passo:

Passo 3. Depois de passar a uma subsequência, u_i converge uniformemente para zero na $\bar{B}_1$ ou $u_i(0) \to \infty$.

De fato, após passar a uma subsequência, podem ocorrer dois casos; $\{u_i(0)\}$ permanece limitada ou $u_i(0) \to \infty$. Se $\{u_i(0)\}$ permanece limitada, então junto ao passo 1 podemos mostrar, de forma análoga ao que foi feito na prova do Lema 2.5, que $\{u_i\}$ é uniformemente limitado em $\bar{B}_1$. Passando a outra subsequência e usando estimativas elípticas, $u_i \to u$ em $C^2(\bar{B}_1)$ para alguma função radialmente simétrica u satisfazendo

$$\begin{cases} -\Delta u = u^{\frac{n+2}{n-2}}, \quad u \geq 0, \quad \text{em } B_1(0), \\ \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0, \quad \text{sobre } \partial B_1(0) \end{cases}$$

Como a única solução radialmente simétrica neste caso é $u \equiv 0$, temos que $u_i \to 0$. Portanto, u_i converge uniformemente para zero na $\bar{B}_1$ ou $u_i(0) \to \infty$.

Passo 4. Após passar a uma subsequência, u_i converge uniformemente para zero em $\bar{B}_1$ ou

$$u_i(0)u_i(1) \to \infty. \tag{2.40}$$

Depois de passar a uma subsequência, mostramos que u_i converge para zero uniformemente em $\bar{B}_1$ ou $u_i(0) \to \infty$. Se $u_i(0) \to \infty$, temos a partir da equação de u_i que $\Delta u_i \leq 0$ perto da origem o que juntamente a simetria radial de u_i implica que 0 é um ponto de máximo local de u_i. Portanto, pelo Passo 1, $\{0\}$ é um ponto de blow-up isolado de $\{u_i\}$. Aplicando o Lema 2.5 sabemos, depois de passar para uma subsequência, que

$$C^{-1}u_i(0) \leq u_i\left(u_i(0)^{-\frac{2}{n-2}}\right) \leq Cu_i(0).$$

Notemos também que

$$\left(-\Delta + \frac{1}{i}\right)(e^{-|x|}|x|^{2-n}) \leq 0, \quad \text{para todo } |x| \leq 1.$$

Pelo Princípio do Máximo em $B_1 \setminus B_{u_i(0)^{-\frac{2}{n-2}}}(0)$, temos para algum C independente de i que

$$u_i(x) \geq C^{-1}u_i(0)^{-1}[e^{-|x|}|x|^{2-n} - e^{-1}], \quad \text{para todo } u_i(0)^{-\frac{2}{n-2}} \leq |x| \leq 1.$$

Consequentemente, para todo $0 < |x| < 1$,

$$\liminf_{i \to \infty} u_i(0)u_i(x) \geq C^{-1}[e^{-|x|}|x|^{2-n} - e^{-2}2^{2-n}]. \tag{2.41}$$

Agora vamos provar (2.40) por contradição. Suponha o contrário, ou seja $u_i(0)u_i(1) \leq C$ em uma subsequência. Segue do Passo 2 que $\{u_i(0)u_i\}$ é localmente limitado em $\bar{B}_1 \setminus \{0\}$. Passando a uma subsequência,

$$u_i(0)u_i(x) \to G_0(x) \text{ em } C^2_{\text{loc}}(\bar{B}_1 \setminus \{0\}),$$

onde G_0 satisfaz

$$\begin{cases} -\Delta G_0 = 0, \quad G_0 \geq 0, & \text{em } B_1(0) \setminus \{0\}, \\ \\ \dfrac{\partial G_0}{\partial \nu} = 0, & \text{sobre } \partial B_1(0). \end{cases}$$

Temos por (2.41) que G_0 é singular perto da origem, portanto para $a_0 > 0$,

$$G_0(x) = \frac{a_0}{|x|^{n-2}} + H_0(x), \quad \text{em } B_2(0) \setminus \{0\},$$

onde H_0 é uma função harmônica regular em B_1. Aparentemente H_0 é uma função harmônica em $C^1(\bar{B}_1)$ e satisfaz $\frac{\partial H_0}{\partial \nu} = (n-2)a_0 > 0$ sobre ∂B_1. Mas isso viola o Princípio do Máximo e o Lema de Hopf. O Lema segue portanto do Passo 1 ao Passo 4. □

O resultado de Adimurthi e Yadava nos garante para $4 \leq n \leq 6$ a existência de soluções radialmente simétricas para (2.38) com $u_i(0) \to \infty$, pelo Lema 2.17 temos que para todo $0 < |x| \leq 1$, $u_i(0)u_i(x) \to \infty$, logo o análogo de (2.17) não se aplica as dimensões $4 \leq n \leq 6$.

2.5 Todo ponto de blow-up isolado é um ponto de blow-up isolado simples

Para finalizar a primeira parte do capítulo, que foi dedicado aos resultados sobre os pontos de blow-up isolado e isolado simples, veremos que todo ponto de blow-up isolado é também simples.

Proposição 2.18. Seja $\{u_i\}$ uma sequência de soluções de (2.3) e $y_i \to \bar{y}$ um ponto de blow-up isolado. Então $\bar{y}$ é um ponto de blow-up isolado simples.

Demonstração. Provaremos por contradição. Suponha que $\bar{y}$ não seja um ponto de

blow-up isolado simples. Então após passar a uma subsequência existem ao menos dois pontos críticos de $r^{\frac{2}{p_i-1}}\bar{u}_i(r)$ no intervalo $(0, \bar{\mu}_i)$ para alguma sequência $\bar{\mu}_i$ com $\lim\limits_{i\to\infty} \bar{\mu}_i = 0$. Passando a outra subsequência, podemos assumir que as estimativas (2.11) e (2.12) valem para as sequências $R_i \to \infty$ e $0 < \varepsilon_i < e^{-R_i}$. Segue de (2.11) que $r^{\frac{2}{p_i-1}}\bar{u}_i(r)$ tem exatamente um ponto crítico no intervalo $0 < r < r_i := R_i u_i(y_i)^{-\frac{p_i-1}{2}}$. Seja μ_i o segundo ponto crítico de $r^{\frac{2}{p_i-1}}\bar{u}_i(r)$. Portanto, $\mu_i \geq r_i$ e $\lim\limits_{i\to\infty} \mu_i = 0$.
Sejam $x = (x_1, x_2, x_3)$ algum sistema de coordenadas geodésicas normais centrado em y_i dado por $\exp_{y_i}(x)$, $h = h_{\alpha\beta}\mathrm{d}x^\alpha \mathrm{d}^\beta = g_{\alpha\beta}(\mu_i x)\mathrm{d}x^\alpha\mathrm{d}^\beta$ a métrica e

$$\xi_i(x) = \mu_i^{\frac{2}{p_i-1}} u_i(\exp_{y_i}(\mu_i x)), \quad |x| < \frac{1}{\mu_i}.$$

Então ξ_i satisfaz

$$\begin{cases} -\Delta_h \xi_i(x) + \tilde{K}_i(x)\xi_i(x) = \xi_i(x)^{p_i}, \quad |x| < \frac{1}{\mu_i}; \\ \\ |x|^{\frac{2}{p_i-1}}\xi_i(x) \leq C, \quad |x| < \frac{1}{\mu_i}; \\ \\ \lim\limits_{i\to+\infty} \xi_i(0) = \infty; \\ \\ r^{\frac{2}{p_i-1}}\bar{\xi}_i(r) \text{ tem precisamente um ponto crítico em } 0 < r < 1; \\ \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\{r^{\frac{2}{p_i-1}}\bar{\xi}_i(r)\}|_{r=1} = 0, \end{cases} \tag{2.42}$$

onde $\tilde{K}_i(x) = \mu_i^2 K_i\left(\exp_{y_i}(\mu_i x)\right)$ e $\bar{\xi}_i(r)$ é a média esférica de ξ_i.
A primeira equação pode ser obtida da mesma forma que fizemos durante a demonstração do Lema 2.4. A segunda provém da definição de ponto de blow-up isolado. A terceira afirmação decorre do seguinte fato

$$\xi_i(0) = \mu_i^{\frac{2}{p_i-1}} u_i(y_i) \geq r_i^{\frac{2}{p_i-1}} u_i(y_i) = R_i \to \infty.$$

A quarta afirmação ocorre pois do fato que $r^{\frac{2}{p_i-1}}\bar{u}_i(r)$ tem apenas um ponto crítico no intervalo $(0, r_i)$. Segue que $x = 0$ é um ponto de blow-up isolado simples de $\{\xi_i\}$. Sabemos, pela Proposição 2.6 e a Desigualdade de Harnack, que para todo conjunto compacto $K \subset \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$,

$$C(K)^{-1} \leq \xi_i(0)\xi_i \leq C(K) \text{ em } K$$

e para alguma constante $a > 0$ que

$$\xi_i(0)\xi_i(x) \to h(x) := \frac{a}{|x|} + b(x) \ \text{ em } C^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}), \tag{2.43}$$

onde $b(x)$ satisfaz $\Delta b = 0$ em $\mathbb{R}^3$.

Desde que $h(x)$ é positiva, temos que $\liminf_{|x|\to\infty} b(x) \geq 0$. Assim, utilizando o Princípio do Máximo concluímos que $b(x) \geq 0$. Pelo Teorema de Liouville, como b é harmônica e limitada inferiormente, $b(x)$ é constante, ou seja $b(x) \equiv b$. Por (2.42) e (2.43)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^{\frac{1}{2}} h(r)\right)|_{r=1} = 0.$$

Logo,

$$\left(\frac{1}{2} r^{\frac{-1}{2}} (a|r|^{-1} + b) - r^{\frac{1}{2}} a|r|^{-2}\right)|_{r=1} = 0$$

assim,

$$\frac{a+b}{2} = a.$$

Segue que

$$b = a > 0.$$

O que contradiz a Proposição 2.16, pois deveríamos ter $b \leq 0$. A proposição portanto está demonstrada. $\square$

2.6 Descartando as acumulações de bolhas

Nesta seção analisaremos algumas propriedades relacionadas à compacidade do conjunto $\cup_{2\leq p\leq 5}\mathbb{M}_{K,p}$ definido na Introdução para $K(x) \in C^1(M)$.

A proposição a seguir dá uma descrição preliminar para funções $u \in \cup_{2\leq p\leq 5}\mathbb{M}_{K,p}$ que se baseia em dois Teoremas do tipo Liouville. Um é devido a Gidas e Spruck [13] o qual afirma que para $n \geq 3$ e $1 < p < \frac{n+2}{n-2}$ a única solução seria a função constante igual a zero, então não há solução para a seguinte equação envolvendo o expoente subcrítico de Sobolev

$$\begin{cases} -\Delta u = u^p, \ \text{ em } \ \mathbb{R}^n, \\ u > 0, \ \text{em } \ \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

O outro Teorema é devido a Caffarelli, Gidas e Spruck [6] que afirma que para

$n \geq 3$, qualquer solução da equação crítica

$$\begin{cases} -\Delta u = u^{\frac{n+2}{n-2}}, \text{ em } \mathbb{R}^n, \\ u > 0, \text{ em } \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

é da forma

$$u(x) = \left(\frac{\lambda}{1 + \frac{1}{n(n-2)}\lambda^2 |x - \bar{x}|^2} \right)^{\frac{n-2}{2}}$$

para algum $\lambda > 0$ e $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$.

Observação 2.5. Com algumas hipóteses adicionais sobre o decaimento de $u(x)$ no infinito, os Teoremas do tipo Liouville acima foram obtidos para equações gerais que envolvem o expoente subcrítico em Gidas, Ni e Nirenberg [12], enquanto que para equações que envolvem o expoente crítico encontram-se em Obata [23] e Gidas, Ni e Nirenberg [12].

Em resumo, a próxima proposição mostrará que para $u \in \cup_{2 \leq p \leq 5} \mathbb{M}_{k,p}$ onde u não é limitado, p precisa estar se aproximando de 5 e pode-se encontrar uma coleção finita de bolas disjuntas $B_{\bar{r}_1}(y_1), \ldots, B_{\bar{r_N}}(y_N)$ (N podendo depender de u) dentro do qual u é bem aproximado com relação a convergência forte por standard bubbles. Além disso, u satisfaz a condição $u(y) \leq C_1 d(y, \{y_1, \ldots, y_N\})^{\frac{-2}{p-1}}$ para todo $y \in M$, onde C_1 é uma constante positiva que independe de u.

Proposição 2.19. Dado qualquer $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno e R suficientemente grande, existem constantes positivas C_0 *e* C_1 dependendo apenas de $M, g, ||K||_{C^1(M)}$ e R tal que para todo $u \in \cup_{2 \leq p \leq 5} \mathbb{M}_{k,p}$ com

$$\max_M u > C_0,$$

então existe algum inteiro $N = N(u) \geq 1$ e N pontos de máximos locais de u, denotados por $y_1, \ldots, y_N$, tal que

1. $5 - \varepsilon < p \leq 5$;
2. $\overline{B_{\bar{r}_i}(y_i)} \cap \overline{B_{\bar{r}_j}(y_j)} = \emptyset$, para $i \neq j$ e para cada j;

$$\left\| u(y_j)^{-1} u \left(\exp_{y_i} \left(u(y_j)^{-\frac{p-1}{2}} x \right) \right) - \left(1 + \frac{1}{3}|x|^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \right\|_{C^2(|x|<2R)} < \varepsilon, \qquad (2.44)$$

onde $\bar{r}_j = Ru(y_j)^{-\frac{p-1}{2}}, B_{\bar{r}_j}(y_j) \subset M$ denota a bola geodésica de raio $\bar{r}_j$ centrado em $y_j, x = (x_1, x_2, x_3)$ denota alguma coordenada geodésica normal de centro y_j e $|x| = \sqrt{(x_1)^2 + (x_2)^2 + (x_3)^2}$;

3. $d(y_i, y_j)^{\frac{2}{p-1}} u(y_j) \geq C_0$ para $j > i$, enquanto $d(y, \{y_1, \ldots, y_N\})^{\frac{2}{p-1}} u(y) \leq C_1$ para todo $y \in M$.

Para demonstrar tal proposição, usaremos o lema a seguir.

Lema 2.20. Dado qualquer $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno e $R > 1$, então existe alguma constante positiva suficientemente grande C_0, dependendo apenas de M, g, ϵ, R e $||K||_{C^1(M)}$ tal que para todo $S \subset M$ compacto e todo $u \in \cup_{2 \leq p \leq 5} \mathbb{M}_{K,p}$ com

$$\max_{y \in M \backslash S} d(y, S)^{\frac{2}{p-1}} u(y) \geq C_0,$$

temos $p > 5 - \varepsilon$ e para algum ponto de máximo local de $u \in M \backslash S$,que denotaremos por y_0,

$$\left\| u(y_0)^{-1} u \left(\exp_{y_0} \left(u(y_0)^{-\frac{p-1}{2}} x \right) \right) - \left(1 + \frac{1}{3}|x|^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \right\|_{C^2(|x|<2R)} < \varepsilon, \tag{2.45}$$

onde $d(y, S)$ denota a distância de y à S com $d(y, S) = 1$ se $S = \emptyset$.

Demonstração. Suponhamos que para algum ε e R tal C_0 não exista. Então existe um compacto $S_i \subset M, 2 \leq p_i \leq 5, \{||K_i||_{C^1(M)}\}$ uniformemente limitado e $u_i \in \mathbb{M}_{K_i,p_i}$ tal que $\max_{y \in M \backslash S_i} d(y, S_i)^{\frac{2}{p_i - 1}} u_i(y) \geq i$, mas não exista tal ponto de máximo y_0 que satisfaça (2.45) . Seja $\tilde{y}_i \in M \backslash S_i$ tal que

$$d(\tilde{y}_i, S_i)^{\frac{2}{p_i - 1}} u_i(\tilde{y}_i) = \max_{y \in M \backslash S_i} d(y, S_i)^{\frac{2}{p_i - 1}} u_i(y).$$

Note que esse ponto $\tilde{y}_i$ de fato existe pois se $\tilde{y}_i \in M \backslash \mathrm{int}(S_i)$ então $\tilde{y}_i \in \partial S_i$ o que implicaria que $d(\tilde{y}_i, S_i) = 0$ logo, $d(\tilde{y}_i, S_i)^{\frac{2}{p_i - 1}} u_i(\tilde{y}_i) = 0 \geq i$ gerando um absurdo. Agora consideremos a seguinte função

$$w_i(x) = u_i(\tilde{y}_i)^{-1} u_i \left(\exp_{\tilde{y}_i} (u_i(\tilde{y}_i)^{-\frac{p_i - 1}{2}} x \right),$$

para $|x| < R_i := \frac{1}{4} u_i(\tilde{y}_i)^{\frac{p_i - 1}{2}} d(\tilde{y}_i, S_i)$.

Observe que

$$R_i = \frac{1}{4} (u_i(\tilde{y}_i) d(\tilde{y}_i, S_i)^{\frac{2}{p_i - 1}})^{\frac{p_i - 1}{2}} \geq \frac{1}{4} i^{\frac{p_i - 1}{2}} \geq \frac{1}{4} i^{\frac{1}{2}}.$$

Logo, $R_i \to \infty$.

Se $y = \exp_{\tilde{y}_i}\left(u_i(\tilde{y}_i)^{-\frac{p_i-1}{2}}x\right)$ e $\hat{y} = \exp_{\tilde{y}_i}^{-1}\left(u_i(\tilde{y}_i)^{-\frac{p_i-1}{2}}x\right)$, temos que

$$\begin{aligned} d(\tilde{y}_i, S_i) &\leq d(\tilde{y}_i, \hat{y}) + d(\hat{y}, S_i) \\ &\leq u_i(\tilde{y}_i)^{-\frac{p_i-1}{2}}\left(\frac{1}{4}u_i(\tilde{y}_i)^{\frac{p_i-1}{2}}d(\tilde{y}_i, S_i)\right) + d(\hat{y}, S_i) \\ &= \frac{1}{4}d(\tilde{y}_i, S_i) + d(\hat{y}, S_i) \end{aligned}$$

logo,

$$\frac{3}{4}d(\tilde{y}_i, S_i) \leq d(\hat{y}, S_i).$$

Portanto, $\frac{1}{2}d(\tilde{y}_i, S_i) \leq d(\hat{y}, S_i)$, para todo $|x| \leq R_i$. Segue então que

$$\left(\frac{1}{2}d(\tilde{y}_i, S_i)\right)^{\frac{2}{p_i-1}} u_i(y) \leq d(y, S_i)^{\frac{2}{p_i-1}}u_i(y) \leq d(\tilde{y}_i, S_i)^{\frac{2}{p_i-1}}u_i(\tilde{y}_i), \quad \text{para todo } |x| \leq R_i.$$

Assim,

$$w_i(x) \leq \left(\frac{1}{2}d(\tilde{y}_i, S_i)\right)^{-\frac{2}{p_i-1}} d(y_i, S_i)^{\frac{2}{p_i-1}} = 2^{\frac{2}{p_i-1}} \leq 4, \text{ para todo } |x| \leq R_i.$$

Usando as estimativas elípticas, após passar a uma subsequência que continuaremos denotando por $\{w_i\}$, temos que $p_i \to p \in [2, 5]$ e

$$w_i \to w \text{ em } C^2_{loc}(\mathbb{R}^3),$$

onde w satisfaz a equação $-\Delta w = w^p, \quad w > 0$ em $\mathbb{R}^3$.

Pelo Teorema do tipo Liouville de Gidas e Spruck, obtemos $p = 5$ e em particular $p_i > 5 - \varepsilon$ para i suficientemente grande. Por sua vez, segue do Teorema do tipo Liouville de Cafarelli, Gidas e Spruck que $w(x) = \left(\frac{\lambda}{1 + \frac{1}{3}\lambda^2|x - \bar{x}|^2}\right)^{\frac{1}{2}}$ para algum $\bar{x} \in \mathbb{R}^3$. Observe que

$$1 = w(0) = \left(\frac{\lambda}{1 + \frac{1}{3}\lambda^2|\bar{x}|^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

e como $\left(\frac{\lambda}{1 + \frac{1}{3}\lambda^2|\bar{x}|^2}\right)^{\frac{1}{2}} \leq \lambda^{\frac{1}{2}}$, obtemos $\lambda \geq 1$. Além disso, é fácil ver que $\lambda < \infty$. Assim, $1 \leq \lambda < \infty$. Pela forma explícita de w podemos encontrar $x_i \to \bar{x}$ que são pontos de máximo local de $w_i(x)$. Note que $w_i(x_i) \to \lambda^{\frac{1}{2}} = \max w$. Definindo $y_i = \exp_{\tilde{y}_i}\left(u_i(\tilde{y}_i)^{-\frac{p_i-1}{2}}x_i\right)$, então $y_i \in M \setminus S_i$ é um ponto de máximo local de u_i. Repetindo o argumento que acabamos de fazer substituindo apenas $\tilde{y}_i$ por y_i encontramos um novo limite w tal que $w(x) = \left(\dfrac{1}{1+\frac{1}{3}|x|^2}\right)^{\frac{1}{2}}$. Logo, para i suficientemente grande, temos

$$\left\| u_i(y_i)^{-1}u_i\left(\exp_{y_i}(u(y_i)^{-\frac{p_i-1}{2}}x)\right) - \left(1+\frac{1}{3}|x|^2\right)^{-\frac{1}{2}} \right\|_{C^2(|x|<2R)} < \varepsilon.$$

Isso mostra que para i suficientemente grande, u_i satisfaz (2.45) contrariando nossa hipótese. Portanto, o Lema está demonstrado. $\square$

De posse do Lema anterior, provaremos agora a Proposição 2.19.

Demonstração da Proposição 2.19

Primeiramente considere $S = \emptyset$, então temos que $d(y,S) = 1$ e pelo Lema anterior, $p > 5-\varepsilon$, $y_1 = y_0$ é um ponto de máximo de u e a estimativa (2.45) vale. Em seguida, tomemos $S = \overline{B_{\bar{r}_i}(y_1)}$, onde $\bar{r_1} = Ru^{-\frac{p-1}{2}}(y_1)$. Se

$$\max_{y\in M\setminus S} d\left(y,S\right)^{\frac{2}{p-1}} u(y) \leq C_0, \tag{2.46}$$

paramos. Pois não existem outros pontos de máximo de u. Caso contrário, obtemos $y_2 = y_0$ dado pelo Lema 2.20. Segue novamente do Lema que $\overline{B_{\bar{r_1}}(y_1)} \cap \overline{B_{\bar{r_2}}(y_2)} = \emptyset$ desde que $\varepsilon > 0$ seja pequeno o suficiente desde o início. Continuemos com esse processo. Tal processo tem que parar após uma quantidade finita de vezes, pois cada $\displaystyle\int_{B_{\bar{r}_i}(y_i)} |\nabla u|^2 \geq C_0 > 0$, para todo $i \in \mathbb{N}$. Dessa forma, obtemos $\{y_1, y_2, \ldots, y_N\} \subset M$ satisfazendo a condição 2 e além disso, $d\left(y, \cup_{i=1}^N B_{\bar{r}_i}(y_i)\right)^{\frac{2}{p-1}} u(y) \leq C_0,$ para todo $y \in M\setminus \cup_{i=1}^N B_{\bar{r}_i}(y_i)$.

Provemos a condição 3. Note que $d(y_i,y_j)^{\frac{2}{p-1}}u(y_j) \geq C_0$. Além disso, dado $y \in M$, temos que $y \in B_{2\bar{r}_i}(y_i)$ para algum i ou $d(y,y_i) > 2\bar{r}_i,$ para todo $1 \leq i \leq N$. No primeiro caso, $d(y,\{y_1,y_2,\ldots,y_N\}) \leq d(y,y_i) \leq 2\bar{r}_i$. Para $i \to \infty$, temos por (2.44) que

$$u(y) \leq 2u(y_i) = 2\bar{r_i}^{-\frac{2}{p-1}}R^{\frac{2}{p-1}}.$$

Logo,

$$d(y,\{y_1,y_2,\ldots,y_N\})^{\frac{2}{p-1}}u(y) \leq 2^{\frac{2}{p-1}}\bar{r}_i{}^{\frac{2}{p-1}}2\bar{r_i}^{-\frac{2}{p-1}}R^{\frac{2}{p-1}} = 2(2R)^{\frac{2}{p-1}} \leq 8R^2.$$

No segundo caso,

$$d(y,\{y_1,y_2,\ldots,y_N\}) \leq 2d(y,\cup_{i=1}^N B_{\bar{r}_i}(y_i)).$$

Logo,

$$d(y,\{y_1,y_2,\ldots,y_N\})^{\frac{2}{p-1}}u(y) \leq 2^{\frac{2}{p-1}}C_0 \leq 4C_0.$$

Se chamarmos $C_1 = 8R^2 + 4C_0$, obtemos

$$d(y, \{y_1, y_2, \dots, y_N\})^{\frac{2}{p-1}} u(y) \leq C_1.$$

A Proposição 2.19 portanto está demonstrada.

A próxima Proposição exclui possíveis acumulações dessas bolhas e isso implica que em uma sequência de soluções apenas pontos isolados podem ocorrer.

Proposição 2.21. Seja $K \in C^1(M)$, $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno e $R > 1$ suficientemente grande. Então existe alguma constante positiva δ^* dependendo de M, g, ε, R e $||K||_{C^1(M)}$ tal que para todo $u \in \cup_{2 \leq p \leq 5} \mathbb{M}_{K,p}$ com $\max_M u \geq C_0$, temos

$$d(y_j, y_l) \geq \delta^*, \quad \text{para todo } 1 \leq j \neq l \leq N,$$

onde $y_j = y_j(u), y_l = y_l(u), N = N(u)$ e C_0 foram definidos na Proposição 2.19.

Demonstração. Provaremos por contradição. Suponhamos que para alguns $\varepsilon > 0$, R suficientemente grande, $K_i \to K$ em $C^1(M)$, $p_i \in \;[2,5]$ com $p_i \to p \in \;[2,5]$ e $u_i \in \;\mathbb{M}_{K_i, p_i}$ tenhamos $\max_M u_i \geq C_0$ e

$$\lim_{i \to +\infty} \min_{j \neq l} d(y_j(u_i), y_l(u_i)) = 0.$$

Podemos assumir sem perda de generalidade que

$$\sigma_i := d(y_1(u_i), y_2(u_i)) = \min_{j \neq l} d(y_j(u_i), y_l(u_i)) \to 0.$$

Como $B_{Ru_i(y_1)^{-\frac{p_i-1}{2}}}(y_1) \cap B_{Ru_i(y_2)^{-\frac{p_2-1}{2}}}(y_1) = \emptyset$, em vista do item 3 da Proposição 2.19, tem-se que $u_i(y_1), u_i(y_2) \to \infty$. Seja $x = (x_1, x_2, x_3)$ um sistema de coordenadas geodésicas normal centrado em $y_1(u_i), g = g_{\alpha\beta}(x)\mathrm{d}x_\alpha \mathrm{d}x_\beta$ denote a métrica em coordenadas locais. Seja $h_{\alpha\beta}(x) = g_{\alpha\beta}(\sigma_i x)$ e $h = h_{\alpha\beta}(x)\mathrm{d}x_\alpha \mathrm{d}x_\beta$ a métrica escalar. Considere a renormalização

$$w_i(x) = \sigma_i^{\frac{2}{p-1}} u_i(\exp_{y_1}(\sigma_i x)).$$

Segue que w_i satisfaz

$$\begin{cases} -\Delta_h w_i(x) + \tilde{k}_i(x) w_i(x) = w_i(x)^{p_i}, & em\ B_{\sigma_i^{-1}}, \\ w_i(x) > 0, & em\ B_{\sigma_i^{-1}}, \end{cases} \tag{2.47}$$

onde $\tilde{K}_i = \sigma_i^2 K_i \left(\exp_{y_1}(\sigma_i x)\right)$.

Seja $x_j = x_j(u_i)$ o ponto tal que $\exp_{y_1}(\sigma_i x_j) = y_j \in \;B_{\sqrt{\sigma_i}}(y_1),\; j \;\in\; \{1, 2, \dots, N\}$.

Note que

$$x_1 = 0, \quad \min_{j \neq l} |x_j - x_l| \geq 1 + o(1), \quad |x_2| = 1 + o(1).$$

Após passar a uma subsequência, temos que $x_2(u_i) \to \bar{x}$ onde $|\bar{x}| = 1$. Observe que

$$\sigma_i \geq \frac{1}{C} \max \left\{ Ru_i(y_1)^{-\frac{p_i-1}{2}}, Ru_i \left(y_2^{-\frac{p_i-1}{2}} \right) \right\}.$$

Assim, $w_i(0), w_i(x_2) \geq C_0'$, cada x_j é um ponto de máximo local de w_i, pois y_j são pontos de máximo local de u_i e $\min\limits_{1 \leq j \leq N} |x - x_j|^{\frac{2}{p_i-1}} w_i(x) \leq C_1$, para todo $|x| \leq \sigma_i^{-1}$ pelo item 3 da Proposição 2.19.

Mostraremos primeiro que

$$w_i(0) \to \infty \text{ } e \text{ } w_i(x_2) \to \infty. \tag{2.48}$$

De fato, se um deles tende ao infinito ao longo de uma subsequência, digamos que $w_i(0) \to \infty$ então $x = 0$ é um ponto de blow-up isolado, logo um ponto de blow-up isolado simples pela Proposição 2.18. Então $w_i(x_2)$ tem que tender ao infinito ao longo da mesma sequência, pois caso contrário, por um argumento usado na prova do Lema 2.5, w_i seria uniformemente limitado próximo de x_2 ao longo de outra subsequência. Por sua vez, usando a Proposição 2.6 e a Desigualdade de Harnack, temos que w_i converge uniformemente para zero próximo de x_2, o que viola o fato de $w_i(x_2) \geq C_0'$. Caso $\{w_i(0)\}$ e $\{w_i(x_2)\}$ fossem limitadas, sabemos por um argumento parecido ao mencionado a cima que $\{w_i\}$ é localmente limitado. E por estimativas elípticas, ao passar a uma subsequência, $w_i \to w$ em $C^3_{loc}(\mathbb{R}^3)$ donde w cumpre $-\Delta w = w^5$, $w > 0 \in \mathbb{R}^3$ e $\nabla w(0) = \nabla w(\bar{x}) = 0$. O que é uma contradição, uma vez que não há solução positiva para a equação com dois pontos críticos distintos de acordo com o Teorema do tipo Liouville de Caffarelli, Gidas e Spruck, pois teríamos $w = 0$. Estabelecemos portanto (2.48).

Assim, $x = 0$ e $x_2 \to \bar{x}$ são pontos de blow-up isolado de $\{w_i\}$ e de acordo com a Proposição 2.18 esses pontos são de blow-up isolado simples.

Passando a subsequência, denotemos $\tilde{S}$ como o conjunto dos pontos de blow-up de w_i. Teríamos que 0, $\bar{x} \in \tilde{S}$ e $d(\hat{x}, \tilde{x}) \geq 1$ para quaisquer dois pontos distintos $\hat{x}$ e $\tilde{x}$ em $\tilde{S}$. Em razão da Proposição 2.6, temos que $\{w_i(0)w_i\}$ é localmente limitado em $\mathbb{R}^3 \setminus \tilde{S}$. Multiplicando (2.47) por $w_i(0)$ e fazendo i tender ao infinito, obtemos ao passar a uma subsequência que

$$\lim_{i \to \infty} w_i(0) w_i = h^* \text{ em } C^2_{loc}(\mathbb{R}^3 \setminus \tilde{S}),$$

donde h^* é uma função harmônica em $\mathbb{R}^3 \setminus \tilde{S}$. Como todos os pontos de blow-up de $\{w_i\}$ são pontos de blow-up isolado simples, pela Proposição 2.6 e pelo Teorema de

Böcher, segue que

$$h^* = a_1|x|^{-1} + a_2|x-\bar{x}|^{-1} + b^*(x), \text{ para todo } \mathbb{R}^3 \setminus \tilde{S},$$

onde a_1, a_2 são constantes positivas e b^* é alguma função harmônica em $\mathbb{R}^3 \setminus \{\tilde{S} \setminus \{0, \bar{x}\}\}$. Deriva do Princípio do Máximo que $b^*(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\tilde{S} \setminus \{0, \bar{x}\}\}$. Daí,

$$h^*(x) = a_1|x|^{-1} + A + O(|x|) \text{ para } |x| \text{ próximo a } 0.$$

donde A é alguma constante positiva. O que contraria a condição do sinal na Proposição 2.16. Portanto, $d(y_j, y_l) \geq \delta^*$, para todo $1 \leq j \neq l \leq N$. Logo a Proposição está demonstrada. □

Pela Proposição acima temos que para qualquer sequência dada de funções $\{u_i\}$, o inteiro $N = N(i)$ da Proposição 2.19 deve permanecer uniformemente limitado. Caso contrário, pela compacidade da variedade existiria uma sequência com subsequência convergente, por outro lado pela Proposição anterior existe uma constante $\delta^* > 0$ tal que $d(x_j, x_l) \geq \delta^*$ assim $\delta^* < 0$ gerando um absurdo. Como consequência imediata obtemos o resultado a seguir.

Corolário 2.22. Seja $\{u_i\}$ uma sequência de soluções positivas de (2.3), com $\max_M u_i \to \infty$. Então $p_i \to 5$ e o conjunto dos pontos de blow-up é um conjunto finito formado apenas de pontos de blow-up isolados simples.

.

2.7 Prova dos resultados principais

A seção a seguir é destinada a dois resultados sobre a compacidade das soluções. Um com respeito a norma H^1 e outro em C^3, este segundo resultado é o mais importante de todos e veremos algumas de suas aplicações na próxima seção.

O nosso primeiro resultado dá estimativas a priori para a solução de

$$-\Delta_g u + Ku = u^p, \quad u > 0, \quad \text{em } M \tag{2.49}$$

na norma $H^1(M.)$

Teorema 2.23. *Seja (M, g) uma variedade Riemanniana de dimensão 3 compacta e suave, então para todo $\varepsilon_0 > 0$,*

$$\|u\|_{H^1(M)} \leq C, \text{ para todo } u \in \bigcup_{1+\varepsilon_0 \leq p \leq 5} \mathbb{M}_{K,p}$$

onde C depende somente de M, g, ε_0 e $\|K\|_{C^1(M)}$.

Demonstração. Provaremos por contradição. Suponha que existe $p_i \to p \in (1,5]$, $K_i \to K$ em $C^1(M)$ e $u_i \in \mathbb{M}_{K_i,p_i}$ tal que $\|u_i\|_{H^1(M)} \to \infty$, o que por estimativas elípticas implica que $\max_M u_i \to \infty$.

Pelo Teorema do tipo de Liouville de Gidas e Spruck e usando argumentos de blow-up, como na prova do Lema 2.20, temos que $p_i \to 5$. Aplicando a Proposição 2.21, obtemos para algum $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, $R > 0$ suficientemente grande e algum inteiro positivo N, independente de i que $y_i^{(1)} = y^{(1)}(u_i), \ldots, y_i^{(N)} = y^{(N)}(u_i) \in M$ são tais que as condições 1, 2 e 3 da Proposição 2.19 valem. Argumentando como na prova da Proposição 2.21, sabemos que $\{y_i^{(1)}\}, \ldots, \{y_i^{(N)}\}$ são pontos de blow-up isolados de $\{u_i\}$ logo eles são pontos de blow-up isolado simples de $\{u_i\}$ em vista da Proposição 2.18. Como $\|u\|_{H^1(M)} = \left(\int_{u\in M} |\nabla u|^2 + |u|^2 \, dv_g\right)^{\frac{1}{2}}$, temos pelos Lemas 2.7, 2.8 e a estimativa (2.12) que $\|u\|_{H^1(M)}$ é limitado o que é uma contradição. Portanto, o Teorema está demonstrado. □

Embora o Teorema acima dê estimativas a priori na norma H^1 para as soluções de (2.49), as estimativas na norma L^∞ não valem em tal generalidade como veremos. Para estimar a priori em normas de convergência uniforme sob hipóteses adequadas, introduziremos uma função em M que será denotada por $A(y) \equiv A_{K,g}(y)$ e definida a seguir. Suponha que o primeiro autovalor λ_1 de $-\Delta_g + K$ seja positivo. Para $y \in M$, considere a função de Green de $-\Delta_g + K$ denotada por G_y com centro em y, ou seja

$$(-\Delta_g + K)G_y = \delta_y \text{ em } M.$$

Seja $x = (x_1, x_2, x_3)$ um sistema de coordenadas geodésicas normais centrado em y, então a métrica g é localmente dada por $g_{ij}(x)dx^i dx^j$ com $g_{ij}(0) = \delta_{ij}$ e $\partial_{x_l} g_{ij}(0) = 0$ para todo i, j e l. Segue do Lema 1.18 que para algum número real $A_{K,g}(y)$,

$$G_y(x) = \frac{1}{3\omega_3|x|} + A_{K,g}(y) + O(|x|^\alpha), \quad \text{para } |x| \text{ perto de } 0,$$

para todo $0 < \alpha < 1$, onde ω_3 é o volume da bola unitária em $\mathbb{R}^3$. O valor de $A_{K,g}(y)$ independe da escolha do sistema de coordenadas geodésicas normais e $A_{K,g}(y)$ é uma função contínua em M.

Teorema 2.24. *Seja (M, g) uma variedade Riemanniana de dimensão 3 compacta, suave com primeiro autovalor λ_1 positivo e $K \in C^1(M)$. Se*

$$\min_{y\in M} A_{K,g}(y) > 0$$

então para todo $\varepsilon_0 > 0$,

$$\frac{1}{C} \leq u \leq C \text{ em } M \text{ e } \|u\|_{C^3(M)} \leq C, \text{ para todo } u \in \bigcup_{1+\varepsilon_0 \leq p \leq 5} \mathbb{M}_{K,p} \tag{2.50}$$

onde C é uma constante positiva dependendo de $M, g, \varepsilon_0, \|K\|_{C^1(M)}$, e dos limites inferiores positivos de $\min_M A_{K,g}$ e λ_1.

Demonstração. Por estimativas elípticas e a Desigualdade de Hanack, a demonstração se resume a provar que a norma L^∞ é limitada, isto é $u \leq C$. Suponhamos que u não seja limitado na norma L^∞, então existe $p_i \to p \in (1,5], K_i \to K \in C^1(M)$ tal que

$$\max_M u_i \to \infty.$$

Como fizemos na demonstração do Teorema 2.23, após passar a uma subsequência temos que $p_i \to 5$ e $\{u_i\}$ tem N pontos de blow-up isolado simples

$$y_i^{(1)} \to y^{(1)}, \ldots, y_i^{(N)} \to y^{(N)},$$

onde N é um inteiro positivo que independe de i. Podemos assumir sem perda de generalidade que

$$u_i(y_i^{(1)}) = \min\{u_i(y_i^{(1)}), \ldots, u_i(y_i^{(N)})\}$$

para todo i. Pela proposição 2.6, existem $\rho, C > 0$ tais que

$$u_i(y_i^{(1)})u_i(y) \leq Cd(y, y_i^{(j)})^{-1}$$

quando $d(y, y_i^{(j)}) \leq \rho$, para todo $j = \{1, \ldots, N\}$.
Por outro lado, sabemos que a sequência u_i é uniformemente limitada em $M \backslash \cup_{j=1}^N B_{\frac{\rho}{4}}(y^{(j)})$, desde que não haja pontos de blow-up na região. Aplicando a Desigualdade de Harnack concluímos ainda que $u_i(y_i^{(1)})u_i(y)$ é uniformemente limitada em $M \setminus \cup_{j=1}^N B_{\frac{\rho}{2}}(y^{(j)})$. Os fatos acima implicam que, após passarmos a uma subsequência,

$$u_i(y_i^{(1)})u_i(y) \to h(y) := \sum_{j=1}^N a_j G_{y^{(j)}}(y) + b(y) \text{ em } C^2_{loc}(M \setminus y^{(1)}, \ldots, y^{(N)}),$$

onde $a_1, \ldots, a_N$ são constantes positivas e $b \in C^2(M)$ satisfaz $(-\Delta_g + K)b = 0$ em M. Como $\lambda_1 > 0$, segue que $b \equiv 0$.

Seja $x = (x_1, x_2, x_3)$ sistema de coordenadas normais geodésicas centrada em $y_i^{(1)}$.

Pelo Teorema da Massa Positiva, segue que $A > 0$ independente de i, assim

$$h(x) := h\left(\exp_{y_i^{(1)}}(x)\right) = \frac{a_1}{3\omega_3}|x|^{-1} + A_i + O(|x|^\alpha) \text{ para } |x| \text{ perto de } 0,$$

onde $A_i \geq A > 0$ para todo i por hipótese, ω_3 é o volume da bola unitária em $\mathbb{R}^3$ e $0 < \alpha < 1$. Logo, $A_i > 0$ o que contradiz a condição do sinal de A_i pela Proposição 2.16. O Teorema portanto está demonstrado. $\square$

Corolário 2.25. Seja (M, g) uma variedade Riemanniana positiva compacta suave de dimensão três que não é equivalentemente conforme a esfera unitária tri-dimensional. Então para todo $\varepsilon_0 > 0$ e para qualquer $K \in C^1(M)$ satisfazendo $K \leq \frac{1}{8}R_g$ em M, tem-se

$$\frac{1}{C} \leq u \leq C \text{ em } M \text{ e } \|u\|_{C^3(M)} \leq C, \text{ para todo } u \in \bigcup_{1+\varepsilon_0 \leq p \leq 5} \mathbb{M}_{K,p}$$

onde C é uma constante positiva que depende apenas de M, g, ε_0 e $\|K\|_{C^1(M)}$.

Para provar o Corolário podemos assumir que o primeiro autovalor λ_1 de $-\Delta_g + K$ é positivo pois caso contrário, $\mathbb{M}_{K,g} = \emptyset$. Fazendo uma mudança de métrica conforme usando uma auto-função positiva associada a λ_1, podemos assumir sem perda de generalidade que $K > 0$ em M. Pelo Princípio do Máximo, vemos que a função de Green de $-\Delta_g + K$ é maior ou igual à função de Green de $-\Delta_g + \frac{1}{8}R_g$. Segue então que $A_{K,g} \geq A_{\frac{1}{8}R_g,g} > 0$, a última desigualdade provém do Teorema da Massa Positiva. O Corolário então segue do Teorema 2.24.

2.8 Algumas aplicações do Teorema 2.24

Uma vez que temos os resultados de compacidade no Teorema 2.24, podemos derivar a existência de resultados e resultados de multiplicidade (multiplicidade de contagem). Consideremos o seguinte problema de minimização

$$\min\left\{E(v) : v \in H^1(M), \int_M v^6 = 1\right\}, \tag{2.51}$$

onde $E(v) = \displaystyle\int_M (|\nabla_g v|^2 + Kv^2)$.

Teorema 2.26. *Supondo as mesmas hipóteses do Teorema 2.24 , então (2.51) é atingido para alguma função positiva $v \in C^2(M)$.*

O Teorema 2.26 deriva do Teorema 2.24 da seguinte forma. Sendo $\lambda_1 > 0$, $\sqrt{E(v)}$ é uma norma equivalente a $H^1(M.)$ Para $2 < q < 6$, o mergulho de $H^1(M)$ em

$L^q(M)$ é compacto, então podemos encontrar um minimizador v_q não negativo para $\min\left\{E(v) : v \in H^1(M), \int_M v^6 = 1\right\}$. A equação de Euler-Lagrange de v_q é

$$-\Delta_g v_q + K v_q = E(v_q) v_q^{q-1}, \quad \text{em } M.$$

Note que $E(v_q)$ é limitado longe de zero e do infinito. Pelo Princípio do Máximo forte temos que v_q é positivo em M. Aplicando o Teorema 2.24 e algumas estimativas elípticas para $E(v_q)^{\frac{1}{q-2}}$ temos, ao longo de uma subsequência, que $v_q \to v \in C^2(M)$ quando $q \to 6$. Portanto, v é um minimizador positivo de (2.51).

Seja v o minimizador positivo obtido pelo Teorema 2.26 , então $u = E(v)^{\frac{1}{4}} \in \mathbb{M}_{K,5}$. A existência de u em $\mathbb{M}_{K,5}$, sob a hipótese necessária de $\lambda_1 > 0$, foi bem estabelecida em Bahri e Brezis [3]. É interessante notar que (2.51) não admite minimizador se K é suficientemente grande, embora $\mathbb{M}_{K,5} \neq \emptyset$ de acordo com o resultado em [3]. A inexistência de minimizadores para K grande pode ser vista da seguinte forma. Observemos inicialmente que

$$\min\left\{E(v) : v \in H^1(M), \int_M v^6 = 1\right\} \leq \frac{1}{S_1}$$

onde

$$\frac{1}{S_1} = \inf\left\{\frac{\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u|^2}{\left(\int_{\mathbb{R}^3} u^6\right)^{1/3}} : u \in L^6(\mathbb{R}^3) \setminus \{0\}, \nabla u \in L^2(\mathbb{R}^3)\right\}.$$

Segue dos resultados de Hebey e Vaugon [15] que para alguma constante $C = C(M, g)$,

$$\int_M |\nabla_g v|^2 + C\int_M v^2 \geq \frac{1}{S_1}, \quad \text{para todo } v \in H^1(M), \ \int_M v^6 = 1.$$

Portanto, se $K > C$ em M, teríamos que $\min E(v) > \frac{1}{S_1}$ logo (2.51) não tem minimizador.

Em vista que do que vimos acima e do fato que o Teorema 2.26 deriva do Teorema 2.24, temos que o resultado de compacidade (2.50) não se mantém se $K > C$ em M. O motivo é que v_q construído anteriormente não tem nenhuma subsequência convergindo em $H^1(M)$ devido à inexistência de minimizadores de (2.51).

Para exibir um resultado sobre a multiplicidade, introduziremos o operador $F : C^{2,\alpha}(M)^+ \to C^{2,\alpha}(M)$ dado por

$$F(v) = v - (-\Delta_g + K)^{-1}(E(v)v^5)$$

onde $0 < \alpha < 1$ e $E(v) = \int_M (|\nabla_g v|^2 + K v^2)$.

Consideremos também o subconjunto D_Λ limitado e aberto de $C^{2,\alpha}(M)^+$ para Λ suficientemente grande definido por

$$D_\Lambda = \left\{ v \in C^{2,\alpha}(M) : \|v\|_{C^{2,\alpha}(M)} < \Lambda,\ \min_M v > 1/\Lambda \right\}.$$

Então pela teoria elíptica sabemos que a aplicação $v \mapsto (\Delta_g - K)^{-1}(E(v)v^5)$ é uma aplicação compacta. Assim, o operador F é da forma $I + compacto$ e podemos portanto definir o grau de Leray-Schauder de F na região D_Λ com respeito a $0 \in C^{2,\alpha}$, denotado por $\deg(F, D_\Lambda, 0)$ desde que 0 não pertença a $F(\partial D_\Lambda)$. Para mais propriedades sobre o grau de Leray-Schauder veja Nirenberg [22].

Teorema 2.27. *Sob as mesmas hipóteses do Teorema 2.24, temos que para Λ suficientemente grande,* 0 *não pertence a* $F(\partial D_\Lambda)$ *e*

$$\deg(F, D_\Lambda, 0) = -1.$$

Consequentemente, $\mathbb{M}_{k,5} \neq \emptyset$.

Usando o Teorema 2.24, o Teorema anterior pode ser provado da mesma forma como em Schoen [26].

Capítulo 3

Compacidade de soluções para uma classe de equações do tipo Yamabe com peso

3.1 Introdução

Neste capítulo veremos generalizações dos resultados obtidos no Capítulo 2 para uma classe de equações do tipo Yamabe com peso. Nosso objetivo é estudar a compacidade das soluções em variedades Riemannianas suaves compactas (M, g) de dimensão três que satisfazem a equação

$$-\Delta_g u + Ku = Qu^p, \quad u > 0, \text{ em } M \tag{3.1}$$

onde $1 < p \leq 5$ e $Q \in C^2(M)$.

Assumiremos durante o capítulo, a menos de indicação, que $K \in C^1(M)$ e $Q \in C^2(M)$. Para $1 < p \leq 5$ denotaremos $\mathbb{M}_{Q,K,p}$ o conjunto solução de (3.1) em $C^2(M)$.

Os principais resultados deste capítulo são os teoremas de compacidade para as soluções da equação (3.1) a seguir. O primeiro resultado é uma versão do Teorema 2.24 para o caso com peso.

Teorema 3.1. *Seja (M, g) uma variedade Riemanniana de dimensão três compacta com λ_1 positivo, $K \in C^1(M)$ e $Q(y) \in C^2(M)$ uma função positiva. Se*

$$\min_{y \in M} A_{K,g}(y) > 0,$$

então para todo $\varepsilon_0 > 0$,

$$\frac{1}{C} \leq u \leq C \text{ em } M \text{ e } \|u\|_{C^2(M)} \leq C, \text{ para todo } u \in \bigcup_{1+\varepsilon_0 \leq p \leq 5} \mathbb{M}_{Q,K,p}$$

onde C *é uma constante positiva dependendo somente de* $M, g, \varepsilon_0, \|K\|_{C^1(M)}, \|Q\|_{C^2(M)}$ *e os limites inferiores positivos de* $A_{K,g}$, λ_1 *e* Q.

Veremos também um resultado de compacidade com respeito a norma H^1 como foi visto no capítulo anterior. Além desses resultado, no final do capítulo veremos que é possível obter um resultado sobre a compacidade de soluções de energia finita em variedades tri-dimensionais quando Q é permitido mudar de sinal. Tal resultado é dado pelo teorema a seguir

Teorema 3.2. *Seja* (M, g) *uma variedade Riemanniana compacta com* λ_1 *positivo,* $K \in C^1(M)$ *e* $Q \in C^2(M)$ *uma função positiva em algum lugar. Assumindo que*

$$\min_{y \in M} A_{K,g}(y) > 0.$$

Então para todo $p_i \leq 5$ *com* $p_i \to 5, K_i \to K$ *em* $C^1(M)$, $Q_i \to Q$ *em* $C^2(M)$ *e toda solução* u_i *de* $-\Delta_g u_i + K_i u_i = Q_i u_i^{p_i}$, $u_i > 0$, *em* M *com energia* $\left\{\|u_i\|_{H^1(M)}\right\}$ *uniformemente limitado, temos*

$$\frac{1}{C} \leq u_i \leq C \text{ e } \|u_i\|_{C^3(M)} \leq C, \text{ para todo } i$$

onde C *é uma constante que independe de* i.

Em geral, os resultados expostos neste capítulo serão semelhantes ao exibidos no Capítulo 2 bem como suas demonstrações, por esse motivo omitiremos algumas provas. Quando houver diferenças significativas deixaremos claro. O roteiro deste capítulo será estudar a Identidade de Pohozaev, fazer a análise dos pontos de blow-up, exibir resultados de compacidade e discutir sobre algumas aplicações.

3.2 A Identidade de Pohozaev

Seja $\Omega \subset M$ um conjunto aberto, $\{K_i\}$ uma sequência de funções convergindo para K em $C^1(M)$, $\{Q_i\}$ uma sequência de funções convergindo para alguma função positiva Q em $C^2(M)$, $\{p_i\}$ uma sequência numérica satisfazendo $2 \leq p_i \leq 5$, $p_i \to 5$ e $\{u_i\}$ uma sequência de funções de C^2 satisfazendo

$$-\Delta_g u_i + K_i u_i = Q_i u_i^{p_i}, \; u_i > 0, \text{ em } \Omega \subset M. \tag{3.2}$$

As definições de ponto de blow-up isolado e blow-up isolado simples são as mesmas vistas nas Definições 2.2 e 2.3.

A identidade do tipo Pohozaev para uma solução de

$$-\Delta_g u + Ku = Qu^{p_i}, \ u > 0, \ \text{em } \Omega$$

é da forma

$$\begin{aligned}
-\int_{B_\sigma} \left(K(x) + \frac{x \cdot \nabla K(x)}{2} \right) u^2 \,\mathrm{d}x + \left(\frac{3}{p+1} - \frac{1}{2} \right) \int_{B_\sigma} Qu^{p+1} \,\mathrm{d}x \\
-A(g,u) + \frac{1}{p+1} \int_{B_\sigma} (x.\nabla Q(x))\, u^{p+1} \mathrm{d}x \\
= \int_{\partial B_\sigma} B(x,\sigma,u,\nabla u) \,\mathrm{d}S - \int_{\partial B_\sigma} \sigma \left(\frac{Ku^2}{2} - \frac{Qu^{p+1}}{p+1} \right) \mathrm{d}S,
\end{aligned} \tag{3.3}$$

a notação usada é a mesma do Lema 2.3.

A demonstração é similar a que detalhamos no Lema 2.3. A maior diferença é que por (3.1),

$$-\frac{1}{2} \int_{B_\sigma} u \ \Delta_g u \ \mathrm{d}v_g = \frac{1}{2} \int_{B_\sigma} u(Qu^p - Ku) \ \mathrm{d}v_g = \frac{1}{2} \int_{B_\sigma} Qu^{p+1} \ \mathrm{d}v_g - \frac{1}{2} \int_{B_\sigma} Ku^2 \ \mathrm{d}v_g$$

e

$$\begin{aligned}
-\int_{B_\sigma} (x^\alpha \partial_\alpha u)\, \Delta_g u \ dv &= \int_{B_\sigma} (x^\alpha \partial_\alpha u)\, (Qu^p - Ku) \ \mathrm{d}v_g \\
&= \int_{B_\sigma} x^\alpha \partial_\alpha u \ Qu^p \ \mathrm{d}v_g - \int_{B_\sigma} x^\alpha \partial_\alpha u \ Ku \ \mathrm{d}v_g.
\end{aligned}$$

Integrando por partes, obtemos

$$\begin{aligned}
-\int_{B_\sigma} (x^\alpha \partial_\alpha u)\, \Delta_g u \ \mathrm{d}v_g &= \frac{-3}{p+1} \int_{B_\sigma} Qu^{p+1} \ \mathrm{d}v - \frac{1}{p+1} \int_{B_\sigma} (x\nabla Q) u^{p+1} \ \mathrm{d}v_g \\
&+ \frac{\sigma}{p+1} \int_{\partial B_\sigma} Qu^{p+1} + \frac{3}{2} \int_{B_\sigma} Ku^2 \ \mathrm{d}v_g + \frac{1}{2} \int_{B_\sigma} (\nabla K x) u^2 \ \mathrm{d}v_g \\
&- \frac{\sigma}{2} \int_{\partial B_\sigma} Ku^2
\end{aligned}$$

substituindo as duas estimativas acima na igualdade (2.9), obtemos (3.3).

3.3 Propriedades de blow-up isolado e isolado simples

Nos dedicaremos agora as propriedades dos pontos de blow-up e pontos de blow-up isolado simples. Basicamente todos os resultados vistos nas seções 2.4 e 2.5 estarão presentes aqui para o caso em que as soluções satisfazem (3.2). Veremos também mais alguns resultados adicionais.

Lema 3.3. Seja u_i satisfazendo (3.2) e $y_i \to \bar{y} \in \Omega$ um ponto de blow-up isolado, então para todo $0 < r < \frac{\bar{r}}{3}$, temos

$$\max_{y \in B_{2r}(y_i) \setminus B_{\frac{r}{2}}(y_i)} u_i(y) \leq C_1 \min_{y \in B_{2r}(y_i) \setminus B_{\frac{r}{2}}(y_i)} u_i(y),$$

onde $B_s(y_i)$ denota a bola geodésica centrada em y_i de raio s e C_1 é uma constante positiva que independe de i e r.

Lema 3.4. Seja u_i satisfazendo (3.2) e $y_i \to \bar{y} \in \Omega$ um ponto de blow-up isolado. Então para quaisquer sequências $R_i \to +\infty$ e $\epsilon_i \to 0^+$ temos após passarmos a uma subsequência $\{u_{j_i}\}$ (continuaremos denotando por $\{u_i\}, \{y_i\}, \text{etc. }$), que

$$\begin{aligned} &\left\| u_i(y_i)^{-1} u_i \left(\exp_{y_i} \left(u_i(y_i)^{-\frac{p_i - 1}{2}} x \right) \right) - \left(1 + \frac{1}{3} Q(y_i) |x|^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \right\|_{C^2(B_{2R_i})} \\ + &\left\| u_i(y_i)^{-1} u_i \left(\exp_{y_i} \left(u_i(y_i)^{-\frac{p_i - 1}{2}} x \right) \right) - \left(1 + \frac{1}{3} Q(y_i) |x|^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \right\|_{H^1(B_{2R_i})} \leq \varepsilon_i \end{aligned} \tag{3.4}$$

e

$$\frac{R_i}{\log u_i(y_i)} \to 0 \text{ quando } i \to \infty, \tag{3.5}$$

onde $x = (x_1, x_2, x_3)$ denota as coordenadas geodésicas normais centrada em y_i dada por $\exp_{y_i}(x)$.

Proposição 3.5. Seja $\{u_i\}$ satisfazendo a equação 3.2 e $y_i \to \bar{y} \in \Omega$ um ponto de blow-up isolado simples cumprindo (2.2) e (2.3) para qualquer i. Então para alguma constante C dependendo somente de $\rho, \tilde{C}, \|K_i\|_{C^1(\Omega)}, \|Q_i\|_{C^2(\Omega)}$ e o limite inferior positivo de $\inf\limits_i \inf\limits_{y \in \Omega} Q_i(y)$ temos

$$u_i(y) \leq C u_i(y_i)^{-1} d(y, y_i)^{-1}, \quad \text{para todo } d(y, y_i) \leq \rho/2,$$

onde ρ e $\tilde{C}$ são dados pelas Definições 2.2 e 2.3.

Além disso, passando a uma subsequência, para alguma constante positiva $a > 0$ e $K(x) = \lim_{i \to +\infty} K_i(x)$,

$$u_i(y_i)u_i \to a\tilde{G}(\cdot, \bar{y}) + b \text{ em } C^2_{loc}\left(B_{\tilde{\rho}}(\bar{y}) \setminus \{\bar{y}\}\right)$$

onde $\tilde{\rho} = \min\{\delta_0, \rho/2\}$, $\tilde{G}$ é dado por (2.16) e $b \in C^2(B_{\tilde{\rho}}(\bar{y}))$ satisfaz $-\Delta_g b + k(y)b = 0$ em $B_{\tilde{\rho}}(\bar{y})$.

Para estabelecer esta proposição é necessário alguns resultados auxiliares que serão dados pela série de Lemas abaixo.

Lema 3.6. Seja u_i satisfazendo (3.2) e $y_i \to \bar{y} \in \Omega$ um ponto de blow-up isolado simples. Assuma que $R_i \to \infty$ e $0 < \epsilon_i < e^{-R_i}$ são sequências que satisfazem (3.4) e (3.5). Então dado $0 < \delta < 1/100$, existe $\rho_1 \in (0, \rho)$ que independe de i (mas depende de δ), tal que

$$u_i(y) \leq C_2 u_i(y_i)^{-\lambda_i} d(y, y_i)^{-1+\delta}, \quad \text{para todo } R_i u_i(y_i)^{-\frac{p_i - 1}{2}} \leq d(y, y_i) \leq \rho_1,$$

$$|\nabla_g u_i(y)| \leq C_2 u_i(y_i)^{-\lambda_i} d(y, y_i)^{-2+\delta}, \text{ para todo } R_i u_i(y_i)^{-\frac{p_i - 1}{2}} \leq d(y, y_i) \leq \rho_1$$

e

$$|\nabla^2_g u_i(y)| \leq C_2 u_i(y_i)^{-\lambda_i} d(y, y_i)^{-3+\delta}, \text{ para todo } R_i u_i(y_i)^{-\frac{p_i - 1}{2}} \leq d(y, y_i) \leq \rho_1$$

onde $\lambda_i = (1 - \delta)^{\frac{p_i - 1}{2}} - 1$ e C_2 é uma constante positiva independente de i.

A demonstração do Lema anterior é similar a prova do Lema 2.7 uma das diferenças é definir o operador l_i como $l_i \varphi = \Delta_g \varphi + Q_i(y) u_i(y)^{p_i - 1} \varphi - K_i(y)\varphi$.

Lema 3.7. Seja u_i satisfazendo (3.2) e $y_i \to \bar{y} \in \Omega$ um ponto de blow-up isolado simples. Sejam $R_i \to \infty$ e $0 < \varepsilon_i < e^{-R_i}$ sequências nas quais (3.4) e (3.5) valem. Fixado $0 < \delta < \frac{1}{100}$. Então para todo $0 < \sigma < \rho_1$ fixado temos para i suficientemente grande que

$$\begin{aligned}
\int_{d(y,y_i) \leq \sigma} d(y, y_i)^2 u_i^{p_i + 1} &= O(u_i(y_i)^{-4 + o(1)}), \\
\int_{d(y,y_i) \leq \sigma} u_i^2 &\leq C_3 \sigma u_i(y_i)^{-2\lambda_i} \\
\int_{d(y,y_i) \leq \sigma} d(y, y_i)^2 |\nabla u_i|^2 &\leq O(u_i(y_i)^{-4 + o(1)}) + C_3 \sigma u_i(y_i)^{-2\lambda_i} \\
\int_{d(y,y_i) \leq \sigma} d(y, y_i) u_i^{p_i + 1} &= O(u_i(y_i)^{-2\lambda_i})
\end{aligned}$$

onde C_3 é uma constante que independe de i e σ.

As três primeiras desigualdades seguem analogamente ao que fizemos no Lema 2.8 e a última segue os mesmos passos, basta analisar os dois casos sobre a distância, no primeiro onde $r_i \leq d(y, y_i) \leq \rho$ usamos o Lema 3.6 para estimar e utilizamos (3.4) no segundo caso onde $d(y, y_i) \leq r_i$.

No restante desta seção (x_1, x_2, x_3) denotará um sistema de coordenadas geodésicas normais centrado em y_i. Usaremos a mesma notação do Capítulo 2.

Lema 3.8. Seja u_i cumprindo (3.2) e $y_i \to \bar{y} \in \Omega$ um ponto de blow-up isolado simples. Se $R_i \to \infty$ e $0 < \varepsilon_i < e^{-R_i}$ são sequências que satisfazem (3.4) e (3.5). Então para $0 < \sigma < \rho_1$, temos que

$$|A(g, u_i)| \leq C_3 \sigma u_i(y_i)^{-2\lambda_i}$$

onde C_3 é uma constante que independe de i e σ.

Lema 3.9. Seja u_i satisfazendo (3.2) e $y_i \to \bar{y} \in \Omega$ um ponto de blow-up isolado simples. Se $R_i \to \infty$ e $0 < \varepsilon_i < e^{-R_i}$ são sequências que cumprem (3.4) e (3.5), então

$$\tau_i = O(u_i(y_i)^{-2\lambda_i}).$$

Consequentemente, $u_i(y_i)^{\tau_i} \to 1$ quando $i \to \infty$.

A prova é uma modificação do Lema 2.10 substituindo por exemplo (2.11) por (3.4) e permutando a Pohozaev 2.3 por (3.3).

Lema 3.10. Seja u_i atendendo (3.2) e $y_i \to \bar{y} \in \Omega$ um ponto de blow-up isolado simples. Se $R_i \to \infty$ e $0 < \varepsilon_i < e^{-R_i}$ são sequências que satisfazem (3.4) e (3.5). Então para todo $0 < \sigma < \bar{r}/2$, temos que

$$\lim_{i \to +\infty} \sup \max_{y \in \partial B_\sigma(y_i)} u_i(y) u_i(y_i) \leq C(\sigma).$$

A Proposição 3.5 então pode ser demonstrada da mesma forma que a Proposição 2.6 usando o resultado dos Lemas vistos anteriormente.

Os Corolários a seguir são versões mais fortes dos Lemas 3.6, 3.7, 3.8 obtidos através da Proposição 3.5. A demonstração dos seguintes Corolários difere da prova dos Lemas apenas ao substituir a estimativa do Lema 3.6 pela estimativa da Proposição 3.5.

Corolário 3.11. Seja u_i satisfazendo (3.2) $y_i \to \bar{y} \in \Omega$ um ponto de blow-up isolado simples. Sejam $R_i \to \infty$ e $0 < \varepsilon_i < e^{-R_i}$ são sequências que satisfazem (3.4) e (3.5). Então existem $\rho_1 \in (0, \rho)$ independente de i tal que

$$|\nabla_g u_i(y)| \leq C_2 u_i(y_i)^{-1} d(y, y_i)^{-2} \text{ para todo } R_i u_i(y_i)^{-\frac{p_i - 1}{2}} \leq d(y, y_i) \leq \rho_1$$

e

$$|\nabla_g^2 u_i(y)| \leq C_2 u_i(y_i)^{-1} d(y,y_i)^{-3} \text{ para todo } R_i u_i(y_i)^{-\frac{p_i-1}{2}} \leq d(y,y_i) \leq \rho_1$$

onde C_2 é uma constante positiva que independe de i.

Corolário 3.12. Seja u_i satisfazendo (3.2) $y_i \to \bar{y} \in \Omega$ um ponto de blow-up isolado simples. Sejam $R_i \to \infty$ e $0 < \varepsilon_i < e^{-R_i}$ sequências que satisfazem (3.4) e (3.5). Então para todo $0 < \sigma < \rho_1$ fixado, temos para i suficientemente grande que

$$\begin{aligned}
\int_{d(y,y_i)\leq\sigma} d(y,y_i)^2 u_i^{p_i+1} &= O(u_i(y_i)^{-4+o(1)}), \\
\int_{d(y,y_i)\leq\sigma} u_i^2 &\leq C_3\sigma u_i(y_i)^{-2}, \\
\int_{d(y,y_i)\leq\sigma} d(y,y_i)^2|\nabla u_i|^2 &\leq O(u_i(y_i)^{-4+o(1)}) + C_3\sigma u_i(y_i)^{-2}, \\
\int_{d(y,y_i)\leq\sigma} d(y,y_i) u_i^{p_i+1} &= O(u_i(y_i)^{-2}, \\
\int_{d(y,y_i)\leq\sigma} d(y,y_i)|\nabla u_i|^2 &= O((u_i(y_i)^{-2}\log u_i(y_i), \\
e \qquad \int_{d(y,y_i)\leq\sigma} d(y,y_i)^3|\nabla^2 u_i|^2 &= O((u_i(y_i)^{-2}\log u_i(y_i)
\end{aligned}$$

onde C_3 é uma constante independente de i e σ positiva.

As duas últimas estimativas são obtidas analisando os casos em que $d(y,y_i) \leq \sigma$ e $r_i \leq d(y,y_i) \leq \sigma$. No primeiro caso, basta usar o Corolário anterior e no segundo fazer uma mudança de variável e usar (3.4).

Corolário 3.13. Seja u_i cumprindo (3.2) e $y_i \to \bar{y} \in \Omega$ um ponto de blow-up isolado simples. Se $R_i \to \infty$ e $0 < \varepsilon_i < e^{-R_i}$ são sequências que satisfazem (3.4) e (3.5). Então

$$|A(g,u_i)| \leq C_3\sigma u_i(y_i)^{-2}$$

onde C_3 é uma constante que independe de i e σ.

Corolário 3.14. Seja u_i satisfazendo (3.2) e $y_i \to \bar{y} \in \Omega$ um ponto de blow-up isolado simples. Após passar a uma subsequência de $\{u_i\}$, as estimativas a seguir valem:

$$\begin{aligned}
\lim_{i\to+\infty} u_i(y_i)^2 \int_{d(y,y_i)\leq\sigma} d(y,y_i)^2 u_i^{p_i+1} &= 0, \\
\lim_{\sigma\to0^+} \lim_{i\to+\infty} \sup u_i(y_i)^2 \int_{d(y,y_i)\leq\sigma} d(y,y_i)^2 |u_i|^2 &= 0, \\
\lim_{\sigma\to0^+} \lim_{i\to+\infty} \sup u_i(y_i)^2 \int_{d(y,y_i)\leq\sigma} u_i^2 &= 0 \\
e \qquad \lim_{\sigma\to0^+} \lim_{i\to+\infty} \sup u_i(y_i)^2 |A(g,u_i)| &= 0.
\end{aligned}$$

O Lema a seguir trás uma estimativa sobre o gradiente da função Q, que é uma novidade quando comparado ao Capítulo 2 pois a equação (2.3) não envolvia tal função.

Os próximos dois resultados usam a mesma ideia das provas dos Lemas 2.5 e 2.6 de Li em [18]. Em nosso caso teremos $\beta = 2$.

Lema 3.15. Seja u_i satisfazendo (3.2) e $y_i \to \bar{y} \in \Omega$ um ponto de blow-up isolado simples. Então

$$\tau_i \equiv 5 - p_i = O(u_i(y_i)^{-2}), \qquad |\nabla K_i(y_i)| = O(u_i(y_i)^{-2} \log u_i(y_i)).$$

Demonstração. A estimativa sobre τ_i segue da identidade de Pohozaev 3.3 e das estimativas obtidas de u_i perto dos pontos de blow-up isolado simples.

Sejam $x = (x_1, x_2, x_3)$ as coordenadas normais geodésicas centradas em y_i e η uma função corte suave onde $\eta(x) = 1$ se $|x| \leq \frac{\sigma}{2}$ e $\eta(x) = 0$ se $|x| \geq \sigma$. Multiplicando a Equação (3.2) por $\eta \dfrac{\partial u_i}{\partial x_j}$ e integrando por partes em $|x| \leq \sigma$, temos

$$-\int_{|x|\leq\sigma} \Delta_g u_i \eta \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \int_{|x|\leq\sigma} K_i u_i \eta \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{1}{p_i+1} \int_{|x|\leq\sigma} \frac{\partial Q_i}{\partial x_i} \eta u_i^{p_i+1}$$

Usando as estimativas para u_i perto dos pontos de blow-up isolado simples, segue que

$$\left| \int_{|x|\leq\sigma} \frac{\partial Q_i}{\partial x_i}(x) u_i(x)^{p_i+1} \right| = O(u_i(0)^{-2} \log u_i(0)).$$

Pela condição $(*)_\beta$ e argumentos usados na prova do Lema 2.5 de [18], temos que

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial Q_i}{\partial x_i}(0) \int_{|x|\leq\sigma} u_i(x)^{p_i+1} \right| - O(u_i(0)^{-2} \log u_i(0)) &\leq \left| \int_{|x|\leq\sigma} \left\{ \frac{\partial Q_i}{\partial x_j}(0) - \frac{\partial Q_i}{\partial x_j} \right\} u_i^{p_i+1} \right| \\ &\leq C \int_{|x|\leq\sigma} |x| u_i^{p_i+1}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\left| \frac{\partial Q_i}{\partial x_i}(0) \int_{|x|\leq\sigma} u_i(x)^{p_i+1} \right| \leq C \int_{|x|\leq\sigma} |x| u_i^{p_i+} + O(u_i(0)^{-2} \log u_i(0))$$

Com argumento análogo ao que fizemos em (2.31), temos que $\displaystyle\int_{|x|\leq\sigma} u_i^{p_i+1} \leq C$. Assim,

$$|\nabla Q_i(0)| \leq O(u_i(0)^{-2} \log u_i(0)) + C \int_{|x|\leq\sigma} |x| u_i(x)^{p_i+1} dx = O(u_i(0)^{-2} \log u_i(0))$$

pelo Corolário 3.12. Logo, o Lema está demonstrado. $\square$

Proposição 3.16. Seja u_i satisfazendo (3.2) e $y_i \to \bar{y} \in \Omega$ um ponto de blow-up isolado simples com algum $\tilde{\rho} > 0$, tal que

$$u_i(y_i)u_i \to h \ \text{ em } C^2_{loc}\left(B_{\tilde{\rho}}(\tilde{y}) \setminus \{\tilde{y}\}\right).$$

Assumindo que para $a > 0$ em um sistema de coordenadas normais geodésicas $x = (x_1, x_2, x_3)$, tenha-se

$$h(x) = \frac{a}{|x|} + A + o(1) \ \text{ quando } |x| \to 0,$$

então $A \leq 0$.

A demonstração é similar a Proposição 2.16. A grande diferença é que ao estabelecer a Identidade de Pohozaev neste caso obtemos mais uma estimativa, então para provar a Proposição precisamos calcular a estimativa extra

$$\lim_{i\to\infty} u_i^2(0)\left|\int_{B_\sigma}(x.\nabla Q_i(x))u_i(x)^{p_i+1}\mathrm{d}v\right| = 0. \tag{3.6}$$

Pelos argumentos usados na demonstração do Lema 2.5 de [18], podemos escrever

$$\int_{B_\sigma}(x.\nabla Q_i(x))u_i(x)^{p_i+1}\mathrm{d}v = \nabla Q_i(0)\int_{B_\sigma} xu_i(x)^{p_i+1}\mathrm{d}v + O\left(\int_{B_\sigma}|x|^2u_i(x)^{p_i+1}\ \mathrm{d}v\right)$$

A estimativa (3.6) então pode ser deduzida pelo Lema 3.15 e o Corolário 3.14.

A próxima Proposição afirma que todo ponto de blow-up isolado é simples.

Proposição 3.17. Seja u_i satisfazendo (3.2) e $y_i \to \bar{y} \in \Omega$ um ponto de blow-up isolado. Então $\tilde{y}$ é um ponto de blow-up isolado simples.

Com a Proposição 3.16, o resultado acima pode ser estabelecida com pequenas modificações nos argumentos da Proposição 2.18.

3.4 Teoremas de Compacidade

Nesta seção veremos as generalizações dos Teoremas de compacidade 2.23 e 2.24 vistos no capítulo anterior, além de alguns resultados adicionais obtidos a partir do Teorema 3.19.

O Teorema a seguir é uma generalização do Teorema 2.23 e que fornece estimativas a priori na norma $H^1(M)$ para soluções da Equação (3.1).

Teorema 3.18. *Seja (M, g) uma variedade Riemanniana de dimensão 3 compacta, então para todo $\varepsilon_0 > 0$,*

$$\|u\|_{H^1(M)} \leq C, \text{ para todo } u \in \bigcup_{1+\varepsilon_0 \leq p \leq 5} \mathbb{M}_{Q,K,p}$$

onde C depende somente de M, g, ε_0 e $\|k\|_{C^1(M)}, \|Q\|_{C^2(M)}$ e o limite inferior positivo de Q em M.

Continuaremos denotando λ_1 como o primeiro autovalor de $-\Delta_g + K$. O próximo resultado é uma extensão do Teorema 2.24.

Teorema 3.19. *Seja (M, g) uma variedade Riemanniana de dimensão três compacta suave e $K \in C^1(M), \lambda_1$ positivo e $Q(y) \in C^2(M)$ uma função positiva. Se*

$$\min_{y \in M} A_{K,g}(y) > 0,$$

então para todo $\varepsilon_0 > 0$,

$$\frac{1}{C} \leq u \leq C \text{ em } M \text{ e } \|u\|_{C^2(M)} \leq C, \text{ para todo } u \in \bigcup_{1+\varepsilon_0 \leq p \leq 5} \mathbb{M}_{Q,K,p}$$

onde C é uma constante positiva dependendo somente de $M, g, \varepsilon_0, \|K\|_{C^1(M)}, \|Q\|_{C^2(M)}$ e os limites inferiores positivos de $A_{K,g}$, λ_1 e Q.

De posse da Proposição 3.16, os Teoremas 3.18 e 3.19 podem ser estabelecidos com pequenas modificações nos argumentos usados no capítulo anterior utilizando o Teorema da Massa Positiva. Veremos as definições de variedade positiva e de um operador compacto para estabelecer o próximo Teorema.

Definição 3.1. A variedade Riemanniana (M, g) é dita *positiva* se o primeiro autovalor de $-L_g \equiv -\Delta_g + \frac{n-2}{4(n-1)} R_g$ é positivo.

Definimos em variedades positivas o operador compacto $T : C^{2,\alpha}(M)^+ \to C^{2,\alpha}(M)$ por

$$Tu = \left(-\Delta_g + \frac{1}{8} R_g\right)^{-1} (Qu^5),$$

onde $0 < \alpha < 1$ e $C^{2,\alpha}(M)^+$ denota o conjunto das funções positivas em $C^{2,\alpha}(M)$. O conjunto D_Λ referido a baixo será o mesmo definido no Capítulo 2.

Teorema 3.20. *Seja (M, g) uma variedade Riemanianna de dimensão 3 positiva compacta suave que não é equivalentemente conforme a esfera unitária tri-dimensional.*

Então, para todo $1 < p \leq 5$ e toda função positiva $Q \in C^2(M)$, existe alguma constante C dependendo de $M, g, \|Q\|_{C^2(M)}$ e os limites inferiores positivos de Q e $p-1$ tal que

$$\frac{1}{C} \leq u \leq C \ e \ \|u\|_{C^3(M)} \leq C,$$

para toda solução u de $-\Delta_g u + \frac{1}{8}R_g u = Qu^p$ onde $u > 0$ em M. Além disso, $\deg((I - T), D_\Lambda, 0) = -1$ para Λ suficientemente grande. Consequentemente a equação $-\Delta_g u + \frac{1}{8}R_g u = Qu^5$ tem pelo menos uma solução.

A estimativa a priori do Teorema anterior segue do Teorema 3.19 e do Teorema da Massa Positiva de Schoen e Yau. O grau de contagem de todas as soluções segue das estimativas a priori e argumentos de [26].

Podemos derivar do Teorema 3.19 resultados de existência e de multiplicidade (multiplicidade de contagem) como fizemos no capítulo anterior com o Teorema 2.24. Considere o seguinte problema de minimização:

$$\min\left\{E(v) : v \in H^1(M), \int_M Qv^6 = 1\right\}, \tag{3.7}$$

onde $E(v) = \displaystyle\int_M (|\nabla_g v|^2 + Kv^2)$.

O Teorema a seguir é uma extensão do Teorema 2.26.

Teorema 3.21. *Supondo as mesmas hipóteses do Teorema* 3.19 então (3.7) é atingido em alguma função positiva $v \in C^2(M)$.

Podemos derivar o Teoremas 3.21 do Teorema 3.19 do mesmo jeito que deriva o Teorema 2.26 do Teorema 2.24.

Considere o operador $\tilde{F} : C^{2,\alpha}(M)^+ \to C^{2,\alpha}(M)$ dado por

$$\tilde{F}(v) = v - (-\Delta_g + K(y))^{-1} (E(v)Qv^5).$$

onde $0 < \alpha < 1$.

O próximo resultado é uma extensão do Teorema 2.27.

Teorema 3.22. *Supondo as mesmas hipóteses do Teorema* 3.19, então para Λ suficientemente grande temos que 0 não pertence a $\tilde{F}(\partial\Omega_\Lambda)$ e

$$\deg(\tilde{F}, \Omega_\Lambda, 0) = -1.$$

Em particular, $\mathbb{M}_{Q,K,5} \neq \emptyset$.

Usando o Teorema 3.19 podemos provar o Teorema anterior como em Schoen [26].

Observação 3.1. Se $(M, g) = (\mathbb{S}^3, g_0)$ é a esfera unitária tri-dimensional, $K \in C^1(\mathbb{S}^3)$ satisfaz $K(y) < \frac{3}{4} \equiv \frac{1}{8} R_{g_0}$ e $Q \in C^2(\mathbb{S}^3)$ é uma função positiva, então as hipóteses do Teorema 3.19 são satisfeitas. Consequentemente, os resultados dos Teoremas 3.19, 3.21 e 3.22 são todos válidas.

Observação 3.2. Seja (M, g) uma variedade Riemanniana compacta suave de dimensão 3 positiva não equivalentemente conforme a esfera unitária tri-dimensional. Então, pelo Teorema da Massa Positiva, existe $\varepsilon = \varepsilon(M, g) > 0$ tal que para todo $K \in C^1(M)$ satisfazendo $K \leq \frac{1}{8} R_g + \varepsilon$ em M e toda função positiva $Q \in C^2(M)$; as hipóteses do Teorema 3.19 valem. Logo, os resultados dos Teoremas 3.19, 3.21 e 3.22 são válidos.

3.5 Compacidade e existência de função minimizante quando Q é positiva em algum lugar

Veremos nesta última seção um resultado de compacidade no caso em que a função $Q \in C^2$ da equação 3.1 é permitida mudar de sinal desde que seja positiva em algum lugar. Veremos como consequência desse Teorema de compacidade que o problema de minimização neste caso tem solução. O Lema a seguir nos ajudará a demonstrar tal resultado.

Lema 3.23. Seja $K_i \to K$ em $C^0(M)$, $Q_i \to Q$ em $C^0(M)$, $p_i \leq \frac{n+2}{n-2}$, $p_i \to \frac{n+2}{n-2}$ e u_i satisfazendo

$$-\Delta_g u_i + K_i u_i = Q_i u_i^{p_i}, \ u_i > 0, \ \text{em } M. \tag{3.8}$$

e

$$\left\{ \|u_i\|_{H^1(M)} \right\} \text{seja uniformemente limitado.}$$

Então para algum número positivo ε_0 e C independente de i,

$$u_i \leq C \text{ em } \left\{ y \in M; Q(y) \leq \varepsilon_0 \right\}.$$

Demonstração. Provaremos por contradição. Suponha então que após passar a uma subsequência exista uma sequência $\bar{y}_i \to \bar{y} \in M$ tal que $u_i(\bar{y}_i) \to \infty$ e $Q(\bar{y}) \leq 0$. Escolhendo $\varepsilon_i \to 0^+$ de modo que o conjunto

$$O_i := \{ y \in M | Q_i(y) < \varepsilon_i \}$$

tenha a seguinte propriedade

$$d(\bar{y}_i, \partial O_i)^{\frac{2}{p_i-1}} u_i(\bar{y}_i) \to \infty. \tag{3.9}$$

Considere a seguinte função em O_i:

$$f_i(y) = d(y, \partial O_i)^{\frac{2}{p_i-1}} u_i(y),$$

e seja $y_i \in O_i$ o ponto de máximo da função f_i em O_i, isto é

$$f_i(y_i) = \max_{O_i} f_i.$$

Note que por (3.9) temos que $f_i(y_i) \to \infty$. Considere agora $\sigma_i = \frac{1}{2} d(y_i, \partial O_i) > 0$, temos então que

$$\begin{aligned} \sigma_i^{\frac{2}{p_i-1}} \max_{B_{\sigma_i}(y_i)} &\geq 2^{-\frac{2}{p_i-1}} f_i(y_i) \to \infty, \\ (2\sigma_i)^{\frac{2}{p_i-1}} u_i(y_i) &\geq \max_{B_{\sigma_i}(y_i)} f_i \geq \sigma_i^{\frac{2}{p_i-1}} \max_{B_{\sigma_i}(y_i)} u_i. \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\sigma_i^{\frac{2}{p_i-1}} u_i(y_i) \to \infty$$

e

$$u_i(y_i) \geq 2^{-\frac{2}{p_i-1}} \max_{B_{\sigma_i}(y_i)} u_i. \tag{3.10}$$

Sejam $x = (x_1, \cdots, x_n)$ a coordenada geodésica normal de centro em y_i e w_i o conjunto definido por

$$w_i(x) = u_i(y_i)^{-1} u_i \left(\exp_{y_i} \left(u_i(y_i)^{-\frac{p_i-1}{2}} x \right) \right), \quad |x| < \sigma_i u_i(y_i)^{\frac{p_i-1}{2}} \to \infty.$$

Note que w_i satisfaz em vista de (3.10)

$$\begin{cases} -\Delta_h w_i(x) = \tilde{Q}_i(x) w_i(x)^{p_i} - u_i(y_i)^{1-p_i} \tilde{K}_i(x) w_i(x), & |x| < \sigma_i u_i(y_i)^{\frac{p_i-1}{2}}, \\ \\ 2^{-\frac{2}{p_i-1}} w_i(x) \leq w_i(0) = 1, & |x| < \sigma_i u_i(y_i)^{\frac{p_i-1}{2}} \end{cases} \tag{3.11}$$

onde $\tilde{Q}_i(x) = Q_i \left(\exp_{y_i} \left(u_i(y_i)^{-\frac{p_i-1}{2}} x \right) \right), \tilde{K}_i(x) = K_i \left(\exp_{y_i} \left(u_i(y_i)^{-\frac{p_i-1}{2}} x \right) \right)$ e $h = h_{\alpha\beta}(x) \mathrm{d}x^\alpha \mathrm{d}x^\beta = g_{\alpha\beta}(rx) \mathrm{d}x^\alpha \mathrm{d}x^\beta$ denota a métrica escalar.

Por outro lado, temos pelos Teoremas de Mergulho de Sobolev que

$$\int_M u_i^{p_i+1} \leq C \|u_i\|_{H^1(M)}^{p_i+1} \leq C$$

pois $\|u_i\|_{H^1(M)}$ é uniformemente limitado por hipótese. Logo,

$$\int_{|x| \leq \sigma u_i(y_i)^{\frac{p_i-1}{2}}} w_i^{p_i+1} \leq C u_i(y_i)^{\frac{(p_i-1)n}{2} - (p_i+1)} \int_M u_i^{p_i+1} \leq C. \tag{3.12}$$

Calculando o limite com $i \to \infty$, temos por (3.11), (3.12) e a teoria elíptica que ao passar a uma subsequência

$$w_i \to w \in C^2_{loc}(\mathbb{R}^n),$$

onde $w \in L^{\frac{2n}{n-2}}(\mathbb{R}^n)$, satisfaz para alguma constante $\tilde{Q} \leq 0$,

$$-\Delta w = \tilde{Q} w^{\frac{n+2}{n-2}}, \; w > 0, \text{ em } \mathbb{R}^n.$$

Note que para $\tilde{Q} < 0$ a equação acima não tem solução. Quando $\tilde{Q} = 0$, todas as soluções são constantes positivas logo não podem pertencer a $L^{\frac{2n}{n-2}}$. O que é uma contradição. Portanto, o Lema está provado. □

A seguir veremos o principal resultado desta seção sobre a compacidade de soluções de energia finita em variedades tri-dimensionais quando Q é permitida mudar de sinal.

Teorema 3.24. *Seja (M, g) uma variedade Riemanniana compacta suave, K em $C^1(M)$ com λ_1 positivo, $Q \in C^2(M)$ uma função positiva em alguma parte. Assumindo que*

$$\min_{y \in M} A_{K,g}(y) > 0.$$

Então para todo $p_i \leq 5$ com $p_i \to 5, K_i \to K$ em $C^1(M)$, $Q_i \to Q$ em $C^2(M)$ e toda solução u_i de (3.8) com energia $\left\{\|u_i\|_{H^1(M)}\right\}$ uniformemente limitado, temos

$$\frac{1}{C} \leq u_i \leq C \; e \; \|u_i\|_{C^3(M)} \leq C, \; para \; todo \; i$$

onde C é uma constante que independe de i.

Demonstração. Pelo Lema 3.23 temos que para algum $\varepsilon_0 > 0$, $\{u_i\}$ é uniformemente limitado na região em que $Q \leq \varepsilon_0$. Para este caso portanto, está provado. Vejamos agora caso $Q \geq \varepsilon_0$. Devido ao que vimos no Capítulo 2, $\{u_i\}$ é uniformemente limitado em M ou após passar a uma subsequência, existem muitos porém finitos pontos de Blow-up isolado simples na região em que $Q \geq \varepsilon_0$. Se $\{u_i\}$ é uniformemente limitado, então as estimativas das derivadas superiores seguem da teoria elíptica. Caso contrário, sejam $y_i^{(1)} \to \bar{y}^{(1)}, \dots, y_i^{(m)} \to \bar{y}^{(m)}$ todos os pontos de blow-up isolado simples. Sabemos pela Proposição 3.5 que $\{u_i(y_i^{(1)} u_i)\}$ é uniformemente limitado em qualquer subconjunto compacto de $\{y \in M \mid Q(y) \geq \varepsilon_0/2\} \setminus \{\bar{y}^{(1)}, \dots, \bar{y}^{(m)}\}$. Além disso, usando o fato que $\{u_i\}$ é uniformemente limitado em $\{y \in M \mid Q(y) \leq \varepsilon_0\}$ e a Desigualdade de Harnack, obtemos que $\{u_i(y_i^{(1)} u_i)\}$ é uniformemente limitado em qualquer subconjunto compacto de $M \setminus \{\bar{y}^{(1)}, \dots, \bar{y}^{(m)}\}$. Dessa forma, podemos escrever a Identidade do tipo Pohozaev de u_i em $B_\sigma(y_i^{(1)})$, usando a hipótese que $\min\limits_{y \in M} A_{K,g}(y) > 0$ e chegarmos a uma contradição. Portanto, a sequência minimizante $\{u_i\}$ é de fato uniformemente limitado. Logo, o Teorema está provado. $\square$

Vejamos por fim uma aplicação do Teorema anterior.

Seja (M, g) uma variedade Riemanniana compacta suave de dimensão $n \geq 3$, $K \in C^1(M)$ com primeiro autovalor λ_1 positivo e $Q \in C^2(M)$ uma função positiva em alguma parte. Considere para $1 < p \leq \frac{n+2}{n-2}$, o seguinte problema de minimização:

$$S_p = \inf \left\{ \int_M (|\nabla_g u|^2 + K u^2); u \in H^1(M), \int_M Q|u|^{p+1} = 1 \right\}.$$

Note que para $1 < p \leq \frac{n+2}{n-2}$, S_p é atingido para alguma função positiva, denotemos ela por u_p e $S_p \to S_{\frac{n+2}{n-2}} \in (0, \infty)$ para $p \to \frac{n+2}{n-2}$ pela esquerda. A equação de Euler-Lagrange de u_p é

$$-\Delta_g u_p + K u_p = S_p Q u_p^p, \ u_p > 0, \text{ em } M.$$

Vejamos então o seguinte resultado.

Corolário 3.25. Seja (M, g) uma variedade Riemanniana tri-dimensional compacta suave com λ_1 positivo e $K \in C^1(M)$. Assumindo que

$$\min_{y \in M} A_{K,g}(y) > 0.$$

Então para todo $Q \in C^2(M)$ positivo em alguma parte, S_5 é atingido em alguma função positiva. Em particular, $\mathbb{M}_{Q,K,5} \neq \emptyset$.

Observação 3.3. Quando (M, g) é uma variedade Riemanniana positiva tri-dimensional compacta suave não equivalentemente conforme a esfera unitária de dimensão 3 e $K = \frac{1}{8} R_g$ temos pelo Teorema da Massa Positiva que $\min\limits_M A_{\frac{1}{8} R_g, g} > 0$ e assim existe solução pelo Corolário 3.25. Mas neste caso específico Escobar e Schoen em 1986 já haviam provado tal resultado em [10].

Referências Bibliográficas

[1] Adimurthi; Yadava, S. L. *Existence and nonexistence of positive radial solutions of Neumann problems with critical Sobolev exponents.* Archive for Rational Mechanics and Analysis, **115** (1991), 275-296.

[2] Aubin, T. Équations différentielles non linéares et probléme de Yamabe concernant la corbure scalaire. J.Math. Pures Appl., 55:269-296, 1976.

[3] Bahri, A.; Brezis, H. *Non-linear elliptic equations on Riemannian manifolds with the Sobolev critical exponent.* In: Topics in Geometry. Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications, **20**. Birkhäuser Boston (1996), 1-100.

[4] Brendle, S. *On the conformal scalar curvature equation and related problems.*To appear in Surveys in Differential Geom. (2008)

[5] Brendle, S.; Marques, F.C. *Blow-up phenomena for the Yamabe equation II.* To appear in J. Differential Geom., (2008).

[6] Caffarelli, L. A.; Gidas, B.; Spruck, J. *Asymptotic symmetry and local behavior of semilinear elliptic equations with critical Sobolev growth.* Communications on Pure and Applied Mathematics, **42** (1989), 271-297.

[7] Caju, R. H. A. L. *Um Teorema de Compacidade para o Problema de Yamabe.* Dissertação de Mestrado (Orientador: J. M. Bezerra do Ó), Departamento de Matemática, Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, (2014).

[8] Druet, O. *From one bubble to several bubbles: the low-dimensional case.* Journal Differential Geometry, **63(3)** (2003), 399-473.

[9] Druet, O. *Compactness for Yamabe metrics in low dimensions.* Int. Math. Res.Not. **23** (2004), 1143?1191

[10] Escobar, J. F.; Schoen, R. M. *Conformal metrics with prescribed scalar curvature.* Inventiones Mathematicae, **86** (1986), 243-254.

[11] Gilbarg, D.; Trudinger, N. S. *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*. 2nd ed., Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences] No. 224, Springer-Verlag, Berlin-New York, (1983), 517 p.

[12] Gidas, B.; Ni, W. N.; Nirenberg, L. *Symmetry and related properties via the maximum principle*. Communications in Mathematical Physics, **68** (1979), 209-243.

[13] Gidas, B.; Spruck, J. *Global and local behavior of positive solutions of nonlinear elliptic equations*. Communications on Pure and Applied Mathematics, **34** (1981), 525-598.

[14] Han, Z. C.; Li, Y. Y. *The Yamabe problem on manifolds with boundaries: Existence and compactness results*, Duke Math. J., to appear.

[15] Hebey, E.; Vaugon, M. *Meilleures constantes dans le theoreme d' inclusion de Sobolev*. Annales de l'Institut Henri Poincaré Non Linéaire, **13** (1996), 57-93.

[16] Khuri, M. A.; Marques, F. C.; Schoen, R. M. *A Compactness Theorem for the Yamabe Problem*. Journal Differential Geometry, **81** (2009), 143-196.

[17] Lee, J. M.; Parker, T. H. *The Yamabe problem*. Bulletin of the American Mathematical Society, **17** (1987), 37-91.

[18] Li, Y. Y. *Prescribing scalar on $\mathbb{S}^n$ and related problems, Part I*. Journal Differential Equations, **120** (1995), 319-410.

[19] Li, Y. Y. *Prescribing scalar curvature on $\mathbb{S}^n$ and related problems, Part II*. Communications on Pure and Applied Mathematics, **49** (1996), 541-597.

[20] Li, Y. Y.; Zhu, M. *Sharp Sobolev Trace Inequalities on Riemannian Manifolds with Boundaries*. Communications on Pure and Applied Mathematics, **50** (1997), 449-487.

[21] Li, Y. Y.; Zhu, M. *Yamabe type equations on three dimensional Riemannian manifolds*. Communications in Contemporary Mathematics, **1** (1999), 1-50.

[22] Nirenberg, N. *Topics in Nonlinear Functional Analysis*. Courant Institute publication, New York University, (1974).

[23] Obata, M. *The conjecture on conformal transformations of Riemannian manifolds*. Journal Differential Geometry, **6** (1971), 247-258.

[24] Schoen, R. *Conformal deformations of a Riemannian metric to constant scalar curvature equation*. Journal Differential Geometry, **20** (1984), 479-495.

[25] Schoen, R. *Courses at Stanford University*, (1989).

[26] Schoen, R. M. *On the number of constant scalar curvature metrics in a conformal class*. in Differential Geometry: A Symposium in Honor of Manfredo Do Carmo, eds. H. B. Lawson and K. Tenenblat, Wiley, 1991, 311-320.

[27] Schoen, R. M.; Yau, S. T. *On the proof of the positive mass conjecture in General Relativity*. Communications in Mathematical Physics, **65** (1979), 45-76.

[28] Schoen, R.; Yau, S-T. *Positive scalar curvature and minimal hypersurface singularities*. https://arxiv.org/pdf/1704.05490.pdf (2017).

[29] Trundiger, N. S. *Remarks concerning the conformal deformation of a Riemannian structure on compact manifolds*. Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa. 22(3): (1968), 265-274.

[30] Yamabe, H. *On a deformation of Riemannian structures on compact manifolds*. Osaka Mathematical Journal, **12** (1960), 21-37.