

Universidade Federal da Paraíba  
Centro de Ciências Exatas e da Natureza  
Programa de Pós-Graduação em Matemática  
Mestrado em Matemática

Subvariedades Aprisionadas  
Compactas do Tipo-Espaço com  
Codimensão 2 através das  
Hipersuperfícies Especiais do  
Espaço-Tempo de Sitter

Guilherme Francisco do Nascimento

JOÃO PESSOA – PB  
FEVEREIRO DE 2021

Universidade Federal da Paraíba  
Centro de Ciências Exatas e da Natureza  
Programa de Pós-Graduação em Matemática  
Mestrado em Matemática

Subvariedades Aprisionadas  
Compactas do Tipo-Espaço com  
Codimensão 2 através das  
Hipersuperfícies Especiais do  
Espaço-Tempo de Sitter

por

Guilherme Francisco do Nascimento

sob a orientação do

Prof. Dr. Eraldo Almeida Lima Júnior

João Pessoa – PB  
Fevereiro de 2021

**Catálogo na publicação**  
**Seção de Catalogação e Classificação**

N244s Nascimento, Guilherme Francisco do.

Subvariedades aprisionadas compactas do tipo-espaço com codimensão 2 através das hipersuperfícies especiais do espaço-tempo de Sitter / Guilherme Francisco do Nascimento. - João Pessoa, 2021.  
89 f. : il.

Orientação: Eraldo Almeida Lima Júnior.  
Dissertação (Mestrado) - UFPB/CCEN.

1. Subvariedades aprisionadas. 2. Cone de luz. 3. Steady state space. I. Lima Júnior, Eraldo Almeida. II. Título.

UFPB/BC

CDU 514.764.27(043)

# Subvariedades Aprisionadas Compactas do Tipo-Espaço com Codimensão 2 através das Hipersuperfícies Especiais do Espaço-Tempo de Sitter

por

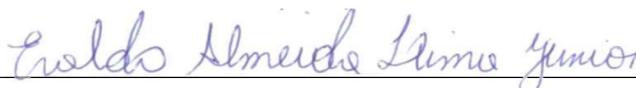
Guilherme Francisco do Nascimento <sup>1</sup>

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Paraíba como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração:

Aprovada em 23 de fevereiro de 2021.

Banca Examinadora:



---

Prof. Dr. Eraldo Almeida Lima Júnior  
(Orientador)



---

Prof. Luis Jose Alias Linares – UM  
(Examinador Externo)



---

Prof. Dr. Márcio Silva Santos – UFPB  
(Examinador Interno)

---

<sup>1</sup>O autor foi bolsista da CAPES durante a elaboração desta dissertação.

*Aos meus pais...*

# Agradecimentos

Agradeço aos meus pais, George Francisco do Nascimento e Eugenia Maria Ferreira do Nascimento, as minhas irmãs, Gabriela Ferreira do Nascimento e Gizele Francisco Ferreira do Nascimento, aos meus avós paternos, Geraldo Francisco do Nascimento (in memorian), Gilda do Espirito Santo do Nascimento, a minha avó materna, Maria do Carmo Ferreira (in memorian) por estarem incondicionalmente ao meu lado.

Agradeço a Terezinha de Jesus Nogueira, por ser uma das pessoas mais especiais de minha vida.

Agradeço o companheirismo e paciência da Carolina Stephany de Souza Cassoli.

Aos meus colegas de turma, Carlos Edilon Ferreira da Silva , Fábio Arceu Ferreira, Geovane de Souza Ferreira Júnior, Marcos Gabriel Ferreira da Silva e Victor Vinícius França Silva, pela jornada que fizemos durante todos os cursos.

Agradeço aos meu amigos da Graduação os quais levarei a vida toda comigo, Acilégnia Cristina Duarte Guedes Alcoforada, Ailton de Araújo Pereira, Arlandson Matheus Silva Oliveira, Caio Illan Ferreira Rodrigues, Erivaldo Diniz de Lima, Igor Délio de Sousa, Marcus Felipe Soares Bezerra, Pedro Henrique Oliveira Pantoja, Ruan Barbosa Fernandes e Wastheny Vasconcelos Cavalcante.

Agradeço a todos que fizeram parte da clã SoulArmy nesses 15 anos de amizade.

Agradeço aos meus amigos que ainda estão no Rio de Janeiro.

Agradeço aos Professores, David Armando Zavaleta Villanueva e Julia Victoria Toledo Benavides, pelos seus ensinamentos durante a graduação.

Agradeço ao meu orientador Eraldo Almeida Lima Júnior por ter dado a oportunidade de conhecer mais sobre a Geometria e me deixar deslumbrar o quão vasto esse campo pode se tornar.

Agradeço aos amigos da geometria, Danilo Ferreira da Silva, Edson Rafael Braga do Nascimento e Francisco Calvi da Cruz Junior, pelo compartilhamento de informações e auxílios durante a jornada.

Agradeço a todos que de alguma forma contribuíram para a construção do trabalho.

# Resumo

Neste trabalho, estudamos a obtenção de subvariedades compactas do tipo-espaço de codimensão 2 através das hipersuperfícies especiais do tipo-luz. Para um entendimento mais aprofundado abordaremos os principais resultados das geometrias Riemanniana e semi-Riemannianas até que possamos definir o que é uma subvariedade aprisionada. Iremos ver que obter uma orientação temporal para a subvariedade Lorentziana  $\Sigma$  e uma base pseudo-ortogonal para o  $(T\Sigma)^\perp$  possuem o cunho fundamental para a nossa base de cálculos e, desse modo, podemos definir e caracterizar as subvariedades aprisionadas quanto a sua causalidade e informar quais as restrições necessárias para que possa ser consideradas compactas.

**Palavras-chave:** Subvariedades Aprisionadas, Cone de Luz, Steady State Space.

# Abstract

In this work, we study the obtainment of compact submanifolds of the codimension 2 spacelike through special lightlike hypersurfaces. For a more in-depth understanding, we will approach from the main results of Riemannian and semi-Riemannian geometries. We will see that obtaining a temporal orientation for the Lorentzian submanifolds  $\Sigma$  and a pseudo-orthogonal basis for  $(T\Sigma)^\perp$  have the fundamental feature for our calculation base and, thus, we can define and to characterize the trapped submanifolds as to their causality and inform which restrictions are necessary to be considered compact.

**Keywords:** Trapped Submanifolds, Lightcone, Steady State Space.

# Sumário

<b>Introdução</b>	<b>2</b>
<b>1 Preliminares</b>	<b>4</b>
1.1 Variedades Lorentzianas . . . . .	4
1.1.1 Conexão de Levi-Civita . . . . .	6
1.1.2 Curvaturas . . . . .	8
1.2 Subvariedades em variedades Lorentzianas . . . . .	12
1.2.1 A segunda forma fundamental . . . . .	13
1.2.2 Hipersuperfícies . . . . .	16
1.2.3 A equação de Codazzi e conexão normal . . . . .	21
1.3 Operadores Diferenciais . . . . .	23
1.4 Produto Warped . . . . .	25
1.5 Subvariedades do tipo-espaço em variedades Lorentzianas . . . . .	28
1.5.1 Curvaturas . . . . .	32
<b>2 Construções de subvariedades do tipo-espaço com codimensão 2 através das hipersuperfícies especiais do espaço-tempo de Sitter</b>	<b>36</b>
2.1 Orientação temporal . . . . .	36
2.1.1 Construção da base pseudo-ortogonal . . . . .	41
2.2 O espaço-tempo de Sitter . . . . .	42
2.2.1 Subvariedades de codimensão 2 através do cone de luz . . . . .	45
2.2.2 Subvariedades de codimensão 2 através do passado infinito do modelo Steady State Space . . . . .	54
<b>3 Subvariedades compactas do tipo-espaço de codimensão 2 através das hipersuperfícies especiais do espaço-tempo de Sitter</b>	<b>61</b>
3.1 Caracterização das subvariedades do tipo-espaço compactas através do cone de luz . . . . .	65
3.2 Caracterização das subvariedades do tipo-espaço compactas através do passado infinito do modelo steady state space . . . . .	73

---

3.3 Um resultado de unicidade para a equação diferencial do tipo marginal- mente aprisionadas em variedades compactas . . . . .	76
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>79</b>

# Introdução

Neste trabalho, com base no artigo de Luis J. Alías, Verónica L. Cánovas e Marco Rigoli, [2], estudamos os métodos de obtenção de subvariedades aprisionadas do tipo-espaço de codimensão 2 que fatorizam através das hipersuperfícies do tipo-luz especiais: o cone de luz e o steady state space.

Nosso trabalho, foi construído de modo que apenas o conhecimento prévio de variedades suáveis é necessário ou uma breve leitura na referência [9] nos capítulos iniciais para um entendimento.

No *Capítulo 1*, estudamos as adequações necessárias para a modelagem do nosso problema, assim como em todo curso de geometria Riemanniana aprendemos sobre as geometrias semi-Riemannianas. Então, colocamos aqui os principais resultados e referências para o pleno entendimento de nosso trabalho. Cada informação aqui pode ser refinada com uma leitura aprofundada do livro [15], o qual as ideias necessárias foram retiradas e integradas no artigo que esse trabalho foi baseado. Inicialmente, abordaremos o básico de variedades Lorentzianas com algumas definições e propriedades. Nas seções 1.2 e 1.3 estaremos aprendendo um pouco mais sobre a base do nosso problema: hipersuperfícies e seus operadores vinculados. Na seção 1.4, trataremos de produtos Warped com alguns de seus conceitos. Finalmente, na seção 1.5 iremos caracterizar as subvariedades do tipo-espaço em variedades Lorentzianas.

O *Capítulo 2* é dedicado aos resultados de construção das subvariedades do tipo-espaço através das hipersuperfícies do tipo-luz: o cone de luz e o steady state space. Na seção 2.1 iremos começar com as ideias de Orientabilidade Temporal, até que possamos definir o espaço-tempo. Na seção 2.2 iremos definir o principal espaço-tempo de nosso trabalho: o espaço-tempo de Sitter, determinaremos as subvariedades do tipo-espaço com codimensão 2.

No *Capítulo 3*, estudamos uma caracterização para as subvariedades determinadas nas subseções 2.2.1 e 2.2.2, de modo que as subvariedades sejam compactas. Apresentaremos inicialmente Lemas importantes para tais caracterizações que podem ser encontradas nas referências [4] e [7], ambas são textos bases de um curso de geometria Riemanniana. Nas seções 3.1 e 3.2 trataremos as caracterizações dos compactos através

---

do cone de luz e do steady state space. Finalmente, traremos na seção 3.3 um resultado de unicidade para a equação diferencial citadas nos *Capítulos 2 e 3*.

# Capítulo 1

## Preliminares

Concentraremos nossa atenção nas variedades Lorentzianas neste capítulo, onde são atribuídas as noções fundamentais de causalidade e orientação temporal, de modo que possamos, mais tarde, descrever a geometria dessas variedades assim como são feitas na Geometria Riemanniana. Partiremos da premissa que, se tenha o conhecimento prévio do que é uma variedade diferencial (em particular, suave) e suas propriedades, do contrário recomendamos as referências [8] e [9] para um pleno aprofundamento do assunto.

### 1.1 Variedades Lorentzianas

**Definição 1.1.** Uma Variedade Lorentziana  $m$ -dimensional é um par  $(M, g)$  onde  $M$  é uma variedade  $m$ -dimensional e  $g$  é uma métrica com índice  $i=1$ . Essa métrica será chamada de métrica Lorentziana e terá assinatura  $(1, m-1)$ . Isto é, a métrica  $g$  será representada como

$$g(v, w) = -v_1w_1 + \sum_{i=2}^m v_iw_i$$

com  $v, w \in M$ .

Por simplicidade, denotaremos a variedade Lorentziana  $m$ -dimensional  $(M, g)$  por apenas  $M$ , lembrando sempre que estamos usando a métrica Lorentziana definida em  $M$  e indicaremos a dimensão de  $M$  quando necessário.

Verifica-se que, a métrica Lorentziana nos propõe novas classes de vetores em  $M$ . E, assim, abrir um novo conjunto de informações e regras que editará todo o corpo desse trabalho. A Definição a seguir irá caracterizar essas novas classes.

**Definição 1.2.** Seja  $v \in T_pM$  um vetor tangente do ponto  $p \in M$ . Nós diremos que  $v$  é

- i) tipo-espaço, se  $g(v, v) > 0$  ou  $v = 0$ ;
- ii) tipo-tempo, se  $g(v, v) < 0$ ;
- iii) tipo-luz, se  $g(v, v) = 0$ ; e
- iv) causal, se  $g(v, v) \geq 0$  e  $v \neq 0$ .

A Definição 1.2 é o que chamaremos de caráter causal do vetor  $v$ . Podendo ser estendido para o caso de campo de vetores tangente, isto é, se  $X \in \mathfrak{X}(M)$  diremos que  $X$  é tipo-espaço (respectivamente, tipo-tempo, tipo-luz e causal) se  $X_p := X(p)$  é um vetor do tipo-espaço (respectivamente, tipo-tempo, tipo-luz e causal).

**Definição 1.3.** Seja  $W \subset T_p M$ , com  $p \in M$ , um subespaço vetorial. Então,  $W$  é dito:

- 1. tipo-tempo se, e somente se,  $W$  possui um vetor do tipo-tempo;
- 2. tipo-espaço se, e somente se, todos os vetores em  $W$  são do tipo-espaço; e
- 3. tipo-luz caso contrário.

**Proposição 1.1.** Seja  $W \subset T_p M$  um subespaço.

- a)  $W$  é do tipo-tempo se, e somente se,  $W^\perp$  é do tipo-espaço. Além disso,  $W$  é do tipo-espaço se, e somente se,  $W^\perp$  é do tipo-tempo;
- b)  $W$  é do tipo-luz se, e somente se,  $W \cap W^\perp \neq \{0\}$  se, e somente se,  $W^\perp$  é do tipo-luz.

*Demonstração.* (a) Se  $W \subset T_p M$  é um subespaço do tipo-tempo então  $W$  contém um vetor do tipo-tempo. Deste modo,  $W$  conterá um vetor unitário, digamos,  $w$  então existe uma base ortonormal  $\{e_1, \dots, e_{n-1}, w\}$  de  $M$ . Desde que  $W^\perp \subset \text{Span}\{e_i | i = 1, \dots, n-1\}$  e  $g$  é positiva e definida neste gerado,  $W^\perp$  é um subespaço do tipo-espaço. Reciprocamente, suponhamos  $W^\perp$  seja um subespaço do tipo-espaço. Então,  $T_p M = W \oplus W^\perp$ . Seja  $v \in T_p M$  do tipo-tempo, então  $v = w + u$  para alguns  $w \in W$  e  $u \in W^\perp$  e  $g(w, w) = g(v, v) - g(u, u) < 0$ . Daí,  $w$  é vetor tipo-tempo e, desse modo,  $W$  é um subespaço do tipo-tempo. Para a segunda parte note que  $W^{\perp\perp} = W$ .

(b) Seja  $W$  um subespaço do tipo-luz então  $W$  contém um vetor  $w_0$  do tipo-luz, mas nenhum vetor do tipo-tempo. Então,  $\forall a \in \mathbb{R}$  e  $\forall w \in W$ ,  $g(w + aw_0, w + aw_0) = g(w, w) + 2ag(w_0, w_0) \geq 0$ . Desde que  $a$  foi escolhido de modo arbitrário, nós temos  $g(w, w) = 0 \quad \forall w \in W \Rightarrow w_0 \in W^\perp \Rightarrow W \cap W^\perp$ . Reciprocamente, se  $0 \neq w_0 \in W \cap W^\perp$  então  $w_0$  é um vetor do tipo-luz. Desde que, pelo item a),  $W$  não pode conter um vetor do tipo-tempo e, além disso,  $W$  é um subespaço tipo-luz pois  $w_0 \in W$ . Para concluirmos a demonstração notemos que  $W^{\perp\perp} = W$  voltando, então, ao caso da do início da demonstração.  $\square$

**Corolário 1.2.**  $w \in W$  é um vetor do tipo-tempo se, e somente se,  $w^\perp \subset V$  é do tipo-espaço.

**Corolário 1.3.** Dois vetores tipo-luz são ortogonais se, e somente se, eles são proporcionais.

*Demonstração.* Seja  $v, w \in T_p M$  vetores tipo-luz e  $u \in T_p M$  um vetor tipo-tempo. Suponhamos que  $g(v, w) = 0$ . Então, pelo Corolário 1.2,  $g(u, v) \neq 0$ , tomemos  $a \in \mathbb{R}$  tal que  $g(u, w + av) = 0$ . Então, novamente pelo Corolário 1.2,  $w + av$  é um vetor do tipo-espaço. Mais ainda,  $g(w + av, w + av) = g(w, w) + 2ag(v, w) + g(v, v) = 0$ , então  $w + av = 0$  e os vetores são proporcionais. A Recíproca é trivial.  $\square$

**Exemplo 1.1.** Seja  $W \subset T_p M$  um subespaço  $(n - 1)$ -dimensional do tipo-luz. Então,  $W^\perp$  é um subespaço do tipo-luz e possui dimensão 1. Além disso,  $W^\perp \subset W$ . Se  $w \in W$  e  $w \notin W^\perp$  então  $w$  é do tipo-espaço.

### 1.1.1 Conexão de Levi-Civita

Sejam  $V$  e  $W$  campos de vetores em uma variedade Lorentziana  $M$ . Queremos definir um novo campo de vetores,  $\nabla_V W$ , em  $M$  cujo o valor em cada ponto  $p$  é o vetor taxa de variação de  $W$  na direção de  $V_p$ . Existe uma maneira natural de fazer isto em  $M$ .

**Definição 1.4.** Seja  $u_1, \dots, u_m$  as coordenadas natural em  $M$ . Se  $V$  e  $W = \sum W_i \partial_i$  são campo de vetores em  $M$ , o campo de vetor

$$\nabla_V W = \sum V(W_i) \partial_i$$

é chamado de derivada covariante natural de  $W$  com respeito a  $V$ .

Desde que a definição não distingue as coordenadas em  $M$ , acaba não sendo obvio como estende-la para uma variedade Lorentziana arbitrária. Neste contexto, podemos axiomatizar essas propriedades.

**Definição 1.5.** Uma conexão  $\nabla$  em uma variedade suave  $M$  é a função  $\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$  tal que

- i)  $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$  ( $\mathbb{R}$ -linearidade);
- ii)  $\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$  ( $\mathfrak{F}(M)$ -linearidade); e
- iii)  $\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y$

onde  $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$  e  $f, g$  são aplicações suaves.  $\nabla_V W$  é chamado de derivada covariante de  $W$  com respeito a  $V$  para a conexão  $\nabla$ .

Vejam agora um resultado de caráter algébrico, o qual nos diz que na presença da métrica podemos identificar campos com 1-formas.

**Proposição 1.4.** Seja  $M$  uma variedade Lorentziana. Dado  $V \in \mathfrak{X}(M)$ , seja  $V^*$  a 1-forma em  $M$  tal que

$$V^*(X) = g(V, X) \text{ para todo } X \in \mathfrak{X}(M).$$

Então, a função  $V \rightarrow V^*$  é um isomorfismo  $\mathfrak{F}(M)$ -linear de  $\mathfrak{X}(M)$  até  $\mathfrak{X}^*(M)$

*Demonstração.* Desde que  $V^*$  é  $\mathfrak{F}(M)$ -linear isto é, certamente, uma 1-forma e a função  $V \rightarrow V^*$  é também  $\mathfrak{F}(M)$ -linear. O isomorfismo segue de dois fatos:

- (1) Se  $g(V, X) = g(W, X)$  para todo  $X \in \mathfrak{X}(M)$ , então  $V = W$ .
- (2) Dado qualquer 1-forma  $\theta \in \mathfrak{X}^*(M)$  existe um único campo de vetores  $V \in \mathfrak{X}(M)$  tal que  $\theta(X) = g(V, X)$  para todo  $X$ .

Seja  $U = V - W$ . Então, para a afirmação (1) basta apenas provarmos que se  $g(U_p, X_p) = 0$  para todo  $X \in \mathfrak{X}(M)$  e  $p \in M$ , então  $U = 0$ . Desde que todo elemento do  $T_p M$  possui a forma  $X_p$ , o resultado segue pela não-degeneracidade da métrica.

Agora (1) é exatamente a afirmação que garante a unicidade em (2), desse modo a prova de (2) é suficiente para encontrarmos  $V$  em uma vizinhança coordenada arbitrária  $\mathcal{U}$ . Dado  $\theta = \sum \theta_i dx_i$  em  $\mathcal{U}$ , seja  $V = \sum_{i,j} g^{i,j} \theta_i \partial_j$ . Então, desde que  $(g_{i,j})$  e  $(g^{i,j})$  são matrizes inversas,

$$\begin{aligned} g(V, \partial_k) &= \sum_{i,j} g^{i,j} \theta_i g(\partial_j, \partial_k) = \sum_{i,j} \theta_i g^{i,j} g_{j,k} \\ &= \sum_i \theta_i \delta_{i,k} = \theta_k = \theta(\partial_k). \end{aligned}$$

Segue pela  $\mathfrak{F}(M)$ -linearidade que  $g(V, X) = \theta(X)$  para todo  $X$  em  $\mathcal{U}$ . □

O seguinte resultado fundamental é conhecido como milagre da geometria semi-Riemanniana:

**Teorema 1.5.** Em uma variedade Lorentziana  $M$  existe uma única conexão  $\nabla$  tal que

- I)  $[V, W] = \nabla_V W - \nabla_X V$  e
- II)  $Xg(V, W) = g(\nabla_X V, W) + g(V, \nabla_X W)$

para todo  $X, V, W \in \mathfrak{X}(M)$ .  $\nabla$  é chamado de conexão de Levi-Civita de  $M$ , e é caracterizada pela fórmula de Koszul

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_V W, X) &= Vg(W, X) + Wg(X, V) - Xg(V, W) \\ &\quad - g(V, [fW, X]) + g(fW, [X, V]) + g(X, [V, fW]) \end{aligned}$$

*Demonstração.* Suponha que  $\nabla$  é uma conexão em  $M$  satisfazendo (I) e (II). Verifique-se que

$$\begin{aligned} Vg(W, X) &= g(\nabla_V W, X) + g(W, \nabla_V X), \\ Wg(X, V) &= g(\nabla_W X, V) + g(X, \nabla_W V), \\ -Xg(V, W) &= -g(\nabla_X V, W) - g(V, \nabla_X W), \\ -g(V, [W, X]) &= -g(V, \nabla_W X - \nabla_X W) = -g(V, \nabla_W X) + g(V, \nabla_X W), \\ g(W, [X, V]) &= g(W, \nabla_X V - \nabla_V X) = g(W, \nabla_X V) - g(W, \nabla_V X) \text{ e} \\ g(X, [V, W]) &= g(X, \nabla_V W - \nabla_W V) = g(X, \nabla_V W) - g(X, \nabla_W V). \end{aligned}$$

Donde, conclui-se que, somando as equações acima temos  $2g(\nabla_V W)$  e, desse modo, a fórmula de Koszul é satisfeita. Note ainda que, a afirmação (1) na Proposição 1.4, garante a unicidade. Para provarmos a existência defina a aplicação  $F : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $F(V, W, X) = Vg(W, X) + Wg(X, V) - Xg(V, W) - g(V, [fW, X]) + g(fW, [X, V]) + g(X, [V, fW])$ . Note que, para  $V, W \in \mathfrak{X}(M)$  fixos a função  $X \mapsto F(V, W, X)$  é  $\mathfrak{F}(M)$ -linear, e desse modo é uma 1-forma. Pela Proposição 1.4, existe um único campo de vetores, o qual denotaremos por  $\nabla_V W$ , tal que  $2g(\nabla_V W, X) = F(V, W, X)$  para todo  $X \in \mathfrak{X}(M)$ . Portanto, a fórmula de Koszul é garantida e, com isso, podemos deduzir as propriedades de conexão junto de (I) e (II).  $\square$

### 1.1.2 Curvaturas

Nessa seção falaremos, um pouco sobre a noção de curvatura em uma variedade Lorentziana, que no final, possuirá o mesmo critério comportamental de uma variedade Riemanniana. A noção de querermos medir a curvatura de uma variedade, é pensar o quanto a curvatura influencia para  $M$  deixar de ser euclidiana. Assim, segue a primeira definição de curvatura devido a Riemann.

**Definição 1.6.** Seja  $M$  uma variedade Lorentziana com uma conexão de Levi-Civita  $\nabla$ . A aplicação  $R : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$  dada por

$$R(X, Y)Z = \nabla_{[X, Y]}Z - [\nabla_X, \nabla_Y]Z$$

é chamada de Curvatura Riemanniana.

Observe que se  $M = \mathbb{R}^n$ , então  $R(X, Y)Z = 0$  para todo  $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ . Com efeito, se indicarmos por  $Z = (z_1, \dots, z_n)$  as componentes do campo  $Z$  nas coordenadas naturais do  $\mathbb{R}^n$ , obteremos que

$$\nabla_X Z = (Xz_1, \dots, Xz_n),$$

donde

$$\nabla_Y \nabla_X Z = (YXz_1, \dots, YXz_n),$$

o que implica que

$$R(X, Y)Z = \nabla_{[X, Y]} Z - [\nabla_X, \nabla_Y] Z = 0,$$

como havíamos afirmado.

O que nos leva a seguinte Definição:

**Definição 1.7.** Dizemos que uma variedade é plana (ou *flat*) quando a curvatura Riemanniana é identicamente nulo.

**Exemplo 1.2.** Os espaços Euclidianos e os Semi-Euclidianos são variedades planas, pois os símbolos de Christoffel são identicamente nulos, nesse contexto, são dados pelas derivadas da métrica que são nulas nesses espaços.

**Proposição 1.6.** Sejam  $x, y, z, v, w \in T_p M$ , então

- (1)  $R(x, y) = -R(y, x)$ ;
- (2)  $g(R(x, y)z, w) = -g(R(x, y)w, v)$ ;
- (3)  $R(x, y)z + R(y, z)x + R(z, x)y = 0$ ; e
- (4)  $g(R(x, y)v, w) = g(R(v, w)x, y)$ .

*Demonstração.* A demonstração pode ser encontrada na referência [15] Proposição 3.36. □

Note que, os itens (1) e (2), da Proposição anterior, mostram que a curvatura Riemanniana contém uma anti-simetria que precisa ser considerada. O item (3) é conhecido como a Primeira Identidade de Bianchi.

Trabalhar com a curvatura Riemanniana  $R$  nem sempre é simples. Assim, para facilitar o entendimento iremos definir uma nova curvatura o qual, está intimamente relacionado com o curvatura Riemanniana.

Um subespaço bidimensional  $\Pi$  do espaço tangente  $T_pM$  é chamado de plano tangente de  $M$  em  $p$ . Para vetores tangentes  $v, w \in T_pM$  defina a seguinte função

$$Q(v, w) = g(v, v)g(w, w) - g(v, w)^2$$

Verifica-se que,  $Q(v, w) \neq 0$  se, e somente se,  $\Pi$  é um plano tangente não-degenerado.

**Proposição 1.7.** Seja  $\Pi$  um plano tangente não-degenerado de  $M$  em  $p$ . O número

$$K(v, w) = \frac{g(R(v, w)v, w)}{Q(v, w)}$$

não depende da escolha da base  $\{v, w\}$  de  $\Pi$ , e chamaremos  $K(\Pi)$  de curvatura seccional de  $M$ .

*Demonstração.* Quaisquer duas bases de  $\Pi$  são relacionadas pelas equações

$$v = ax + by$$

$$w = cx + dy$$

onde o determinante dos coeficientes  $ad - bc$  é diferente de zero. Um cálculo direto mostra que

$$g(R(v, w)v, w) = (ad - bc)^2 g(R(x, y)x, y)$$

e

$$Q(v, w) = (ad - bc)^2 Q(x, y).$$

□

Portanto, a curvatura Seccional  $K$  de  $M$  é uma função real definida no conjunto de todos os planos tangentes não-degenerados de  $M$ .

Dizemos que uma aplicação multilinear  $F : T_pM^4 \rightarrow \mathbb{R}$  é tipo-curvatura, se ela satisfaz todos os itens da Proposição 1.6 para a função  $(v, w, x, y) \mapsto g(R(v, w)x, y)$ . Assim, se  $F(x, y, x, y) = 0$  para quaisquer  $v, w \in T_pM$  tais que  $\Pi = \text{span}(v, w)$  é um plano tangente não-degenerado então  $F \equiv 0$ . Segue que  $K$  determina  $R$  no seguinte sentido:

**Lema 1.8.** Seja  $F$  uma função tipo-curvatura em  $T_pM$  tal que

$$K(v, w) = \frac{F(v, w, v, w)}{g(v, v)g(w, w) - g(v, w)^2}$$

para quaisquer que sejam  $v$  e  $w$  geradores do plano tangente não-degenerado. Então

$$g(R(v, w)x, y) = F(v, w, x, y)$$

para todo  $v, w, x, y \in T_p M$ .

*Demonstração.* Como a diferença de funções tipo-curvatura também é tipo-curvatura definimos  $\Upsilon(v, w, x, y) = F(v, w, x, y) - g(R(v, w)x, y)$ . Por hipótese,  $\Upsilon(v, w, x, y) = 0$  se  $\Pi = \text{span}(v, w)$  é um plano não degenerado de  $T_p M$ . Assim pela observação feita antes deste corolário,  $\Upsilon = 0$ .  $\square$

Uma variedade Lorentziana  $M$  possui curvatura constante se a função curvatura seccional é constante. O próximo resultado nos fornece uma fórmula para  $R$  quando  $K$  é constante.

**Proposição 1.9.** Se  $M$  possui curvatura seccional constante  $C$ , então

$$R(x, y)z = C \{g(z, x)y - g(z, y)x\}$$

*Demonstração.* Observe que definindo  $F(x, y, v, w) = C \{g(v, x)g(y, w) - g(v, y)g(x, w)\}$  temos  $F$  uma função tipo-curvatura em cada ponto, e

$$F(x, y, x, y) = C \{g(x, x)g(y, y) - g(x, y)^2\}.$$

Se  $\Pi = \text{span}(x, y)$  é um plano tangente não-degenerado, então

$$K(x, y) = C = \frac{F(x, y, x, y)}{g(x, x)g(y, y) - g(x, y)^2}$$

e o resultado segue do Lema 1.8.  $\square$

Seja  $x = z_n$  um vetor unitário em  $T_p M$ . Tomemos uma base ortonormal  $\{z_1, \dots, z_{n-1}\}$  do hiperplano de  $T_p M$  ortogonal a  $x$ .

**Definição 1.8.** Seja  $R$  a curvatura Riemanniana de  $M$ . Diremos que a curvatura de Ricci a média dada por

$$\text{Ric}_p(x) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} g(R(x, z_i)x, z_i)$$

**Definição 1.9.** Seja  $R$  a curvatura Riemanniana de  $M$ . Diremos que a curvatura escalar de  $M$  é a média dada por

$$K(p) = \frac{1}{n} \sum_j \text{Ric}_p(z_j) = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i,j} g(R(z_i, z_j)z_i, z_j)$$

Verifica-se que, as Definições acima não dependem da escolha das correspondentes bases ortonormais. Os devidos resultados pode ser encontrado em [4] na página 108 e para uma leitura mais completa recomendamos [15].

## 1.2 Subvariedades em variedades Lorentzianas

Apresentaremos algumas das definições e propriedades importantes que traremos da Geometria Riemanniana para o nosso meio Lorentziano, e veremos que a métrica Lorentziana fará com que a geometria aqui abordada seja, pontualmente, diferente da praticada no meio Riemanniano. Tendo isso em mente, faremos esse estudo um pouco mais aprofundado. De modo que, fique claro cada um dos tópicos aqui abordado.

**Definição 1.10.** Sejam  $M^m$  e  $\Sigma^n$  variedades Lorentzianas. Uma aplicação diferenciável  $\varphi : \Sigma \rightarrow M$  é uma imersão se  $d\varphi_p : T_p\Sigma \rightarrow T_p(p)M$  é injetiva para todo  $p \in \Sigma$ . Se, além disto,  $\varphi$  é um homeomorfismo sobre  $\varphi(\Sigma) \subset M$ , onde  $\varphi(\Sigma)$  tem a topologia induzida por  $M$ , diz-se que  $\varphi$  é um mergulho.

Nas condições da Definição 1.10, podemos definir o que é uma subvariedade Lorentziana.

**Definição 1.11.** Uma subvariedade  $n$ -dimensional  $\Sigma$ , de uma variedade Lorentziana  $m(\geq n)$ -dimensional  $M$ , é uma variedade  $n$ -dimensional tal que existe uma imersão  $\varphi : \Sigma \rightarrow M$ . O inteiro  $m - n$  é chamada de codimensão da subvariedade.

A imersão  $\varphi : \Sigma \rightarrow M$  fornece uma métrica para  $\Sigma$ . Isto é chamado de métrica induzida e é definida por

$$g(X, Y) = \varphi^*(g|_M(X, Y)) = g(d\varphi(X), d\varphi(Y))_M$$

onde  $X, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma)$  e  $g_M$  representa a métrica em  $M$ .

**Proposição 1.10.** Seja  $\varphi : M_1^n \rightarrow M_2^m$ ,  $n \leq m$ , uma imersão da variedade  $M_1$  na variedade  $M_2$ . Para todo ponto  $p \in M_1$ , existe uma vizinhança  $V \subset M_1$  de  $p$  tal que a restrição  $\varphi|_V \rightarrow M_2$  é um mergulho.

*Demonstração.* A demonstração pode ser encontrada na referencia 4 pág 14. □

Introduziremos algumas definições, as quais serão de grande importância para os futuros capítulos. Começaremos com as definições de subvariedades conformes.

**Definição 1.12.** Seja  $\psi : \Sigma \rightarrow M$  uma imersão entre duas variedades  $(\Sigma, g_\Sigma)$  e  $(M, g_M)$ . Diremos que  $\Sigma$  é uma subvariedade conforme (e  $\psi$  uma imersão conforme) se a métrica induzida satisfaz

$$\psi^*(g_\Sigma) = \lambda^2 g_M$$

para alguma função  $\lambda \in \mathcal{C}^\infty(\Sigma)$ ,  $\lambda > 0$ . A função positiva  $\lambda$  é chamada de fator conforme de  $g_M$  com respeito a  $g_\Sigma$ .

Se  $\lambda$  é uma constante, digamos,  $c$  diremos que  $\Sigma$  é uma homotetia de  $M$  com coeficiente  $c^2$ . No caso, em que  $c = 1$  tem-se a seguinte definição.

**Definição 1.13.** Seja  $\psi : \Sigma \rightarrow M$  uma imersão entre duas variedades  $(\Sigma, g_\Sigma)$  e  $(M, g_M)$  com  $\dim(\Sigma) = \dim(M)$ . Diremos que  $\psi$  é uma isometria se a métrica induzida coincide com a métrica original de  $\Sigma$ , isto é,

$$\psi^*(g_\Sigma) = g_M.$$

Neste caso, diremos que  $\Sigma$  e  $M$  são variedades isométricas.

### 1.2.1 A segunda forma fundamental

Seja  $\Sigma$  uma subvariedade Lorentziana de  $M$ . Cada espaço tangente  $T_p\Sigma$  é, por definição, um subespaço não-degenerado de  $T_pM$ . Portanto, podemos decompor  $T_pM$  na seguinte soma direta

$$T_pM = T_p\Sigma \oplus (T_p\Sigma)^\perp$$

e  $(T_p\Sigma)^\perp$  é não-degenerado.

Se  $v \in T_pM$ ,  $p \in M$ , podemos escrever

$$v = v^\top + v^\perp, \quad v^\top \in T_pM, \quad v^\perp \in (T_pM)^\perp$$

onde  $v^\top$  é a componente tangencial de  $v$  e  $v^\perp$  é a componente normal de  $v$ . Tal composição é diferenciável no sentido que as aplicações de  $TM$  em  $TM$  dadas por

$$(p, v) \rightarrow (p, v^\top) \quad \text{e} \quad (p, v) \rightarrow (p, v^\perp)$$

são diferenciáveis.

A conexão de Levi-Civita de  $M$  será indicada por  $\bar{\nabla}$ . Se  $X$  e  $Y$  são campos locais de vetores em  $\Sigma$  e  $\bar{X}, \bar{Y}$  são extensões locais a  $M$ , definimos

$$\nabla_X Y = (\bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y})^\top. \tag{1.1}$$

Verifica-se que essa expressão é uma conexão de Levi-Civita relativa a métrica induzida de  $\Sigma$ . Sem perda de generalidade, podemos tomar  $\bar{X} = X$ .

**Lema 1.11.** Seja  $\Pi : \mathfrak{X}(\Sigma) \times \mathfrak{X}(\Sigma) \rightarrow \mathfrak{X}^\perp(\Sigma)$  dada por

$$\Pi(X, Y) = (\bar{\nabla}_X Y)^\perp \quad (1.2)$$

é uma bilinear e simétrica.  $\Pi$  é chamada de segunda forma fundamental.

*Demonstração.* Desde que  $\bar{\nabla}_V W$  é  $\mathfrak{F}(\Sigma)$ -linear em  $V$  e  $\mathbb{R}$ -linear em  $W$ . Para  $f \in \mathfrak{F}(\Sigma)$ ,

$$\bar{\nabla}_V(fW) = VfW + f\bar{\nabla}_V W.$$

Entretanto,  $W$  é tangente a  $M$ , e a projeção normal é  $\mathfrak{F}(\Sigma)$ -linear, desse modo

$$\Pi(V, fW) = (\bar{\nabla}_V(fW))^\perp = f(\bar{\nabla}_V W)^\perp = f\Pi(V, W).$$

Finalmente,

$$\Pi(V, W) - \Pi(W, V) = (\bar{\nabla}_V(fW) - \bar{\nabla}_W V)^\perp = ([V, W])^\perp = 0$$

□

A equação (1.1) junto do Lema 1.11 pode ser sumarizado da seguinte forma

$$\bar{\nabla}_V W = \underset{\text{tangente a } \Sigma}{\nabla_V W} + \underset{\text{normal a } \Sigma}{\Pi(V, W)}$$

Essa decomposição é conhecida como Fórmula de Gauss e ela nos levará a um dos resultados fundamentais de curvatura.

**Teorema 1.12.** *Seja  $\Sigma$  uma subvariedade Lorentziana de  $M$  com curvaturas Riemannianas  $R$  e  $\bar{R}$ , respectivamente, e seja  $\Pi$  a segunda forma fundamental. Então, para campos de vetores tangentes  $V, W, X, Y$  a  $\Sigma$ ,*

$$\begin{aligned} g(R(V, W)X, Y) &= g(\bar{R}(V, W)X, Y) + g(\Pi(V, X), \Pi(W, Y)) \\ &\quad - g(\Pi(V, Y), \Pi(W, X)). \end{aligned}$$

*Demonstração.* Assuma, sem perda de generalidade, que  $[V, W] = 0$ . Portanto,

$$\begin{aligned} \bar{R}(V, W)X &= \bar{\nabla}_{[V, W]}X - [\bar{\nabla}_V, \bar{\nabla}_W]X \\ &= -\bar{\nabla}_V \bar{\nabla}_W X + \bar{\nabla}_W \bar{\nabla}_V X. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Observe que a primeira parcela da soma pode ser descrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\bar{\nabla}_V \bar{\nabla}_W X &= \bar{\nabla}(\nabla_W X + \text{II}(W, X)) \\ &= \bar{\nabla}_V \nabla_W X + \bar{\nabla}_V(\text{II}(W, X)) \\ &= \nabla_V \nabla_W X + \text{II}(V, \nabla_W X) + \bar{\nabla}_V(\text{II}(W, X)).\end{aligned}$$

Então, dado o campo de vetores tangente  $Y \in \mathfrak{X}(\Sigma)$ , temos

$$\begin{aligned}g(\bar{\nabla}_V \bar{\nabla}_W X, Y) &= g(\nabla_V \nabla_W X, Y) + g(\text{II}(V, \nabla_W X), Y) + g(\bar{\nabla}_V(\text{II}(W, X)), Y) \\ &= g(\nabla_V \nabla_W X, Y) + g(\bar{\nabla}_V(\text{II}(W, X)), Y) \\ &= g(\nabla_V \nabla_W X, Y) + Vg(\text{II}(W, X), Y) - g(\text{II}(W, X), \bar{\nabla}_V Y) \\ &= g(\nabla_V \nabla_W X, Y) - g(\text{II}(W, X), \bar{\nabla}_V Y) \\ &= g(\nabla_V \nabla_W X, Y) - g(\text{II}(W, X), (\bar{\nabla}_V Y)^\top + (\bar{\nabla}_V Y)^\perp) \\ &= g(\nabla_V \nabla_W X, Y) - g(\text{II}(W, X), (\bar{\nabla}_V Y)^\perp) \\ &= g(\nabla_V \nabla_W X, Y) - g(\text{II}(W, X), \text{II}(V, Y))\end{aligned}$$

Analogamente, temos para a segunda parcela da soma em (1.3)

$$g(\bar{\nabla}_W \bar{\nabla}_V X, Y) = g(\nabla_W \nabla_V X, Y) - g(\text{II}(V, X), \text{II}(W, Y)).$$

Nestas condições, temos

$$\begin{aligned}g(\bar{R}(V, W)X, Y) &= g(\nabla_W \nabla_V X - \nabla_V \nabla_W X, Y) + g(\text{II}(W, X), \text{II}(V, Y)) \\ &\quad - g(\text{II}(V, X), \text{II}(W, Y)) \\ &= g(R(V, W)X, Y) + g(\text{II}(W, X), \text{II}(V, Y)) - g(\text{II}(V, X), \text{II}(W, Y))\end{aligned}$$

□

A fórmula do Teorema 1.12 é conhecido como Equação de Gauss e possui uma importância imensurável no estudo de curvaturas.

**Corolário 1.13.** Se os vetores  $v$  e  $w$  formam uma base para um plano tangente não-degenerado em  $M$ , então

$$K(v, w) = \bar{K}(v, w) + \frac{g(\text{II}(v, v), \text{II}(w, w)) - g(\text{II}(v, w), \text{II}(v, w))}{g(v, v)g(w, w) - g(v, w)^2}$$

Veremos um exemplo de aplicação do Corolário 1.13, donde mostraremos que a curvatura da esfera  $\mathbb{S}^n(r)$  é constante igual a  $1/r^2$ .

**Exemplo 1.3.** Seja  $P = \sum_{i=1}^{n+1} x_i \partial_i$  o campo de vetores posição da esfera euclidiana  $n$ -

dimensional de raio  $r$ . Denotaremos de  $\bar{\nabla}$  a conexão de Levi-Civita do espaço euclidiano  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Verifica-se que,  $\bar{\nabla}_X P = \sum_{i=1}^{n+1} X(x_i \partial_i) = X$  para todo campo de vetores  $X$ . Façamos,  $U = \frac{1}{r}P$  um campo de vetores unitário. Observe-que,

$$\begin{aligned} g(\Pi(V, W), U) &= g((\bar{\nabla}_V W)^\perp, U) \\ &= g(\bar{\nabla}_V W, \frac{1}{r}P) \\ &= \frac{1}{r}g(\bar{\nabla}_V W, P) \\ &= -\frac{1}{r}g(W, \bar{\nabla}_V P) \\ &= -\frac{1}{r}g(W, V). \end{aligned}$$

Implicando que a segunda forma fundamental será dada por

$$\Pi(V, W) = -\frac{1}{r}g(W, V)U,$$

pelo Corolário 1.13, dados vetores  $v$  e  $w$ , os quais formam uma base para o plano tangente não-degenerado de  $\mathbb{S}^n(r)$  temos

$$\begin{aligned} K(v, w) &= \bar{K}(v, w) + \frac{g(\Pi(v, v), \Pi(w, w)) - g(\Pi(v, w), \Pi(v, w))}{g(v, v)g(w, w) - g(v, w)^2} \\ &= \frac{1}{r^2} \frac{g(v, v)g(w, w) - g(v, w)^2}{g(v, v)g(w, w) - g(v, w)^2} \\ &= \frac{1}{r^2}. \end{aligned}$$

Portanto, a curvatura seccional da  $\mathbb{S}^n(r)$  é  $1/r^2$ .

### 1.2.2 Hipersuperfícies

Nessa seção abordaremos um pouco sobre hipersuperfícies e suas principais características.

**Definição 1.14.** Diremos que uma subvariedade é uma Hipersuperfície quando  $\varphi : \Sigma^n \rightarrow M^{n+1}$  é uma imersão, com codimensão 1, tal que  $\varphi(\Sigma) \subset M$  e a métrica é preservada.

**Definição 1.15.** Diremos que  $\varepsilon$  é o sinal de uma hipersuperfície  $\Sigma$  de  $M$  quando dado  $z \in (\mathfrak{X}(\Sigma))^\perp$  tem-se que,  $g(z, z) \neq 0$ . Atribuiremos para  $\varepsilon$ , os valores  $+1$  e  $-1$  quando  $g(z, z) > 0$  e  $g(z, z) < 0$ , respectivamente.

**Proposição 1.14.** Seja  $c$  um valor regular de  $f \in \mathfrak{F}(M)$ . Então  $\Sigma = f^{-1}(c)$  é uma hipersuperfície de  $M$  se, e somente se,  $g(\nabla f, \nabla f) > 0$  ou  $< 0$  em  $\Sigma$ . Se no caso em que

$g(\nabla f, \nabla f) = g(z, z) = \text{constante}$ , para todo  $z \in (T_p \Sigma)^\perp$ , e fazendo  $U = \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|}$  tem-se que  $U$  é um campo de vetores normal unitário de  $\Sigma$ .

*Demonstração.* Desde que  $\nabla f$  é metricamente equivalente o operador diferencial  $df$ , segue que  $\Sigma$  é uma hipersuperfície, e a condição em  $g(\nabla f, \nabla f)$  garante que  $\Sigma$  é uma subvariedade de  $M$ . Finalmente,  $\nabla f$  é normal a  $\Sigma$ , desde que para qualquer  $v \in T_p \Sigma$ ,

$$g(\nabla f, v) = v(f) = v(f|_M) = 0,$$

pois,  $f$  é constante em  $\Sigma$ . □

Um exemplo simples da aplicação da Proposição 1.14 é o caso em que  $M = \mathbb{R}^{n+1}$ . Se  $f = \sum (dx_i)^2$  então  $f^{-1}(r^2)$  é a representação da esfera euclidiana  $\mathbb{S}^n$ .

Porém, nem toda hipersuperfície  $\Sigma \subset M$  pode ser obtida através da Proposição 1.14, desde que, em geral, há existência de um campo de vetores normal unitário em todo  $\Sigma$  não é garantida e isso pode ser observado quando tomamos a fita de Möbius no  $\mathbb{R}^3$ .

**Definição 1.16.** Seja  $\zeta \in (\mathfrak{X}(\Sigma))^\perp$  um campo de vetores unitário. Chamaremos de operador de Weingarten, o operador linear  $A_\zeta : \mathfrak{X}(\Sigma) \rightarrow \mathfrak{X}(\Sigma)$  dado por

$$g(A_\zeta V, W) = g(\Pi(V, W), \zeta)$$

para todo  $V, W \in \mathfrak{X}(\Sigma)$ .

**Lema 1.15.** Se  $A$  é o operador de Weingarten derivado de  $\zeta \in (\mathfrak{X}(\Sigma))^\perp$ , então  $A_\zeta V = -\overline{\nabla}_V \zeta$ , e para cada ponto  $p \in \Sigma$  o operador linear  $A$  em  $T_p \Sigma$  é auto-adjunto. Em particular,  $A_\zeta V = -(\overline{\nabla}_V \zeta)^\top$ .

*Demonstração.* Desde que  $g(\zeta, \zeta)$  é constante, tem-se que  $g(\overline{\nabla}_V \zeta, \zeta) = 0$ . Desse modo,  $\overline{\nabla}_V \zeta$  é tangente a  $\Sigma$  para todo  $V \in \mathfrak{X}(\Sigma)$ . Entretanto, se  $W \in \mathfrak{X}(\Sigma)$  então

$$\begin{aligned} g(A_\zeta V, W) &= g(\Pi(V, W), \zeta) \\ &= g((\overline{\nabla}_V W)^\perp, \zeta) \\ &= g(\overline{\nabla}_V W, \zeta) \\ &= -g(W, \overline{\nabla}_V \zeta) \\ &= g(-\overline{\nabla}_V \zeta, W). \end{aligned}$$

Desse modo,  $A_\zeta V = -(\overline{\nabla}_V \zeta)^\top$ . A simetria de  $\Pi$  implica que  $A$  é auto-adjunto. □

O operador de Weingarten  $A$  mede a taxa de variação de  $\zeta$  em todas as direções tangentes, desde que  $(\mathfrak{X}(\Sigma))_p^\perp = T_p(\Sigma)$ .

Para hipersuperfícies a equação de Gauss será da seguinte forma.

**Corolário 1.16.** Seja  $A$  o operador de Weingarten de uma hipersuperfície Lorentziana  $\Sigma \subset M$ . Se  $v, w$  geram um plano tangente não-degenerado em  $\Sigma$ , então

$$K(v, w) = \overline{K}(v, w) + \varepsilon \frac{g(Av, v)g(Aw, w) - g(Av, w)^2}{g(v, v)g(w, w) - g(v, w)^2}$$

onde  $\varepsilon$  é o sinal de  $\Sigma \subset M$ .

*Demonstração.* Segue imediatamente do Corolário 1.13, desde que  $\Pi(v, w) = \varepsilon g(Av, w)\zeta$  e  $g(\zeta, \zeta) = \varepsilon$ .  $\square$

**Definição 1.17.** Um ponto  $p$  de  $\Sigma \subset M$  é umbílico se existe um vetor normal  $z \in (T_p\Sigma)^\perp$  tal que

$$\Pi(v, w) = g(v, w)z$$

para todos  $v, w \in T_p\Sigma$ . Então  $z$  é chamado de vetor curvatura normal de  $\Sigma$  em  $p$ .

Diremos que uma subvariedade Lorentziana  $\Sigma$  é totalmente umbílica se para todo  $p \in \Sigma$ ,  $p$  é um ponto umbílico.

**Lema 1.17.** Uma hipersuperfície  $\Sigma \subset M$  é totalmente umbílica se, e somente se, o operador de Weingarten é escalar.

*Demonstração.* Suponhamos que  $\Sigma$  seja totalmente umbílica, com o campo de vetores curvatura normal  $z$ . Seja  $A$  o operador de Weingarten derivado de um campo de vetores normal unitário  $U$ , definido localmente. Então,

$$g(A_U V, W) = g(\Pi(V, W), U) = g(V, W)g(z, U)$$

para todo campo de vetores tangente  $V, W$ . Portanto,  $A_U V = g(U, z)V$  para todo  $V$ , então  $A_U$  é um escalar.

Reciprocamente, suponhamos que para toda escolha de  $U$  o tem-se que  $A_U$  seja um escalar, isto é, existe uma função  $k_U$  em um domínio de  $U$  tal que  $A_U V = k_U V$  para todo  $V$ . Então

$$\Pi(V, W) = \varepsilon g(A_U V, W)U = \varepsilon k_U g(V, W)U.$$

Desde que  $k_{-U} = -k_U$  o campo de vetores  $z = \varepsilon k_U U$  é globalmente definido e a equação acima se torna  $\Pi(V, W) = g(V, W)z$ .  $\square$

A partir de agora, trataremos o Lema 1.17 como a seguinte definição.

**Definição 1.18.** Uma variedade  $n$ -dimensional  $\psi : \Sigma \rightarrow M$  é dita ser totalmente umbílica se a mesma é umbílica com respeito a todos os possíveis direções normais  $\zeta \in \mathfrak{X}^\perp(\Sigma)$ . Isto é, para cada  $\zeta \in \mathfrak{X}^\perp(\Sigma)$  existe uma função suave  $\lambda_\zeta \in \mathcal{C}^\infty(\Sigma)$  tal que

$$A_\zeta = \lambda_\zeta I$$

onde  $A_\zeta$  é o operador de Weingarten de  $\zeta$ .

Da mesma forma que podemos lidar com a esfera  $\mathbb{S}^{n+2}$ , no espaço euclidiano  $\mathbb{R}^{n+3}$ , o seus conceitos podem ser aplicado na variedade Lorentziana  $M^{n+3}$ . Pois, uma variedade Lorentziana  $M^{n+3}$  pode ser identificada como um Espaço semi-Euclidiano de dimensão  $(n + 3)$ . Seja  $q \in \mathfrak{F}(M^{n+3})$ , como de usual a função  $q(p) = g(p, p)$ . Em relação as coordenadas canônicas, temos

$$q = -(e_1)^2 + \sum_{i=2}^{n+3} (e_i)^2.$$

Se  $P$  é um campo de vetores posição de  $M^{n+3}$ , então  $q = g(P, P)$ . Consequentemente o  $\nabla q = 2P$ , desde que para todo  $V$ ,

$$g(\nabla q, V) = V(q) = V(g(P, P)) = 2g(\nabla_V P, P) = 2g(V, P).$$

Verifica-se que,  $g(\nabla q, \nabla q) = 4q$ . Pela Proposição 1.14, concluímos que para  $r > 0$  e  $\varepsilon = \pm 1$ ,  $Q = q^{-1}(\varepsilon r^2)$  é uma hipersuperfície Lorentziana de  $M^{n+3}$  com vetor normal unitário  $U = \frac{1}{r}P$  e sinal  $\varepsilon$ . Estas hipersuperfícies serão chamadas de hiperquádricas centrais de  $M^{n+3}$ . As duas famílias geradas pelos valores de  $\varepsilon$  preenchem todo  $M^{n+3}$ , com exceção do conjunto  $q^{-1}(0)$  que consiste do cone de luz  $\Lambda = q^{-1}(0) - \{0\}$  e a origem  $0$ .

**Proposição 1.18.** O Cone de Luz  $\Lambda \subset M^{n+3}$  é uma hipersuperfície invariante sob multiplicação por escalar e é difeomorfo a  $(\mathbb{R} - \{0\}) \times \mathbb{S}^{n+1}$ . O campo de vetores posição  $P$  em  $M^{n+3}$  é ambos tangente e normal a  $\Lambda$  e desse modo,  $\Lambda$  não é Lorentziana.

*Demonstração.* Desde que  $P = 0$  na origem  $0$ , pela Proposição 1.14 que  $\Lambda$  é uma hipersuperfície e  $P$  é normal a  $\Lambda$ .  $P$  é também tangente a  $\Lambda$  desde que, dado  $v \in \Lambda$ , o vetor  $P_1 = v_1$  é tangente a geodésica radial do tipo-luz  $t \mapsto tv \in \Lambda$ . A afirmação quanto a multiplicação por um escalar é óbvia, então resta determinarmos a estrutura de  $\Lambda$  como uma variedade suave. Seja  $\mathbb{S}^{n+1}$  a esfera unitária em  $\mathbb{R}^{n+2}$ , e defina a aplicação  $\phi : (\mathbb{R} - \{0\}) \times \mathbb{S}^{n+1} \rightarrow M^{n+3}$  por

$$\phi(x, p) = (x, |x|p_1, \dots, |x|p_{n+2}).$$

Desde que

$$g(\phi(x, p), \phi(x, p)) = -x^2 + |x|^2 = 0$$

temos  $\phi((\mathbb{R} - \{0\}) \times \mathbb{S}^{n+1}) \subset \Lambda$ .

Se  $v \in \Lambda$ , seja  $\psi(v) = (x, p) \in (\mathbb{R} - \{0\}) \times \mathbb{S}^{n+1}$ , onde  $x = v_1$  e  $p = (v_2, \dots, v_n + 1) / (\sum_{i=2}^{n+1} (v_i)^2)^{1/2}$ . Então, as  $\phi$  e  $\psi$  são difeomorfismos.  $\square$

**Definição 1.19.** Seja  $n \geq 2$ . Então, a pseudoesfera de raio  $r > 0$  em  $M^{n+3}$  é a hiperquádrica

$$\mathbb{S}_1^{n+2}(r) = q^{-1}(r^2) = \{p \in M^{n+3} : g(p, p) = r^2\}$$

com dimensão  $(n + 2)$ .

**Lema 1.19.** A pseudoesfera  $\mathbb{S}_1^{n+2}(r)$  é difeomorfa a  $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^{n+1}$ .

*Demonstração.* Dados  $x \in \mathbb{R}$  e  $p \in \mathbb{S}^{n+1}$ . Seja

$$\phi(x, p) = (x, (r^2 + |x|^2)^{1/2}p) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n+1}.$$

Note que,  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n+1} \approx \mathbb{R}^{n+2}$ . Daí, equipando  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n+1}$  com a métrica Lorentziana  $g$ , temos

$$g(\phi(x, p), \phi(x, p)) = -|x|^2 + (r^2 + |x|^2) = r^2$$

e, desse modo,  $\phi(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n+1}) \subset \mathbb{S}_1^{n+2}(r)$ . Desde que  $\phi$  possui inversa dada por  $(x, q) \mapsto (x, (r^2 + |x|^2)^{1/2}q)$  tem-se que,  $\phi$  é um difeomorfismo.  $\square$

**Corolário 1.20.**  $\mathbb{S}_1^{n+2}(r)$  é completa.

Assim como a esfera as hiperquádricas são totalmente umbílicas.

**Lema 1.21.** A hiperquádrica  $Q = q^{-1}(\varepsilon r^2) \subset M^{n+3}$  de sinal  $\varepsilon$  é totalmente umbílica, com o operador de Weingarten  $A = -\frac{1}{r}I$ , onde  $I$  é o operador identidade, derivado de um campo de vetores normal externo  $\zeta = P/r$ .

*Demonstração.* Se  $V \in \mathfrak{X}(Q)$ , então  $A_\zeta(V) = -\bar{\nabla}_V P/r = -V/r$ .  $\square$

Segue que o campo de vetores curvatura normal de  $Q$  é dado por  $z = -(\varepsilon/r)U$

**Proposição 1.22.** Seja  $n \geq 2$ . A pseudoesfera  $\mathbb{S}_1^{n+2}(r)$  é uma variedade Lorentziana completa e possui curvatura seccional contante  $K = 1/r^2$

*Demonstração.* A completude da pseudoesfera  $\mathbb{S}_1^{n+2}(r)$  segue do Corolário 1.20. Verifica-se que, para a curvatura seccional, o Lema 1.21 garante que  $\mathbb{S}_1^{n+2}(r)$  é totalmente umbílica, nestas condições, e pela Definição 1.18 aplicada no Corolário 1.16 que a curvatura seccional é igual a  $1/r^2$ .  $\square$

### 1.2.3 A equação de Codazzi e conexão normal

Para  $\Sigma \subset M$ , se a geometria de  $\Sigma$  é considerada pelos vetores tangentes de  $\Sigma$  então existe uma geometria análoga quanto aos vetores normais a  $\Sigma$ .

**Definição 1.20.** A conexão normal de  $\Sigma \subset M$  é a função  $\nabla^\perp : \mathfrak{X}(\Sigma) \times \mathfrak{X}(\Sigma)^\perp \rightarrow \mathfrak{X}(\Sigma)^\perp$  dada por

$$\nabla_V^\perp Z = (\bar{\nabla}_V Z)^\perp \quad \text{para } V \in \mathfrak{X}(\Sigma), \quad Z \in \mathfrak{X}(\Sigma)^\perp.$$

$\bar{\nabla}_V Z$  é chamada de derivada covariante normal de  $Z$  com respeito a  $V$ .

Segue da Definição 1.20 a seguinte expressão

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_V Z &= (\nabla_V Z)^\top + (\nabla_V Z)^\perp \\ &= -A_Z V + \nabla_V^\perp Z \end{aligned} \tag{1.4}$$

com  $A$  sendo o operador de Weingarten derivado de  $Z \in (\mathfrak{X}(\Sigma))^\perp$ . Iremos chamar (1.4) de fórmula de Weingarten .

Algumas das propriedades de  $\bar{\nabla}$  são fornecidas de imediato, como podemos ver a seguir:

- (1)  $\bar{\nabla}_V Z$  é  $\mathfrak{F}(\Sigma)$ -linear em  $V$  e  $\mathbb{R}$ -linear em  $Z$ ;
- (2)  $\bar{\nabla}_V fZ = f\bar{\nabla}_V Z + V(fZ)$ , onde  $f \in \mathfrak{F}(\Sigma)$  ; e
- (3)  $Vg(Y, Z) = g(\bar{\nabla}_V Y, Z) + g(Y, \bar{\nabla}_V Z)$ , onde  $Y, Z \in (\mathfrak{X}(\Sigma))^\perp$ .

**Definição 1.21.** Seja  $\text{II}(\cdot, \cdot)$  a segunda forma fundamental de  $\Sigma \subset M$ . Dados  $V, X, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma)$ , temos

$$\nabla_V(\text{II}(X, Y)) = \bar{\nabla}_V(\text{II}(X, Y)) - \text{II}(\nabla_V X, Y) - \text{II}(X, \nabla_V Y)$$

A equação de Gauss descreve  $(\bar{R}(V, W)X)^\top$ , onde  $V, W, X$  são todos tangentes a  $\Sigma$ , em termos da segunda forma fundamental. O análogo para a  $(\bar{R}(V, W)X)^\perp$  é chamada de equação de Codazzi.

**Proposição 1.23.** Seja  $\Sigma$  uma subvariedade Lorentziana de  $M$ . Se  $V, W, X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$  então

$$(\bar{R}(V, W)X)^\perp = -\nabla_V(\text{II}(W, X)) + \nabla_W \text{II}(V, X).$$

*Demonstração.* Suponhamos, sem perda da generalidade,  $[V, W] = 0$ . Então,  $(\bar{R}(V, W)X)^\perp = -(\bar{\nabla}_V \bar{\nabla}_W X)^\perp + (\bar{\nabla}_W \bar{\nabla}_V X)^\perp$ . Verifica-se que,

$$(\bar{\nabla}_V \bar{\nabla}_W X)^\perp = (\bar{\nabla}_V \nabla_W X)^\perp + (\bar{\nabla}_V(\text{II}(W, X)))^\perp.$$

Note que, a primeira parcela da soma será igual a  $\text{II}(V, \nabla_W X)$ . De fato,

$$\begin{aligned} (\overline{\nabla}_V \nabla_W X)^\perp &= (\nabla_V \nabla_W X + \text{II}(V, \nabla_W X))^\perp \\ &= \text{II}(V, \nabla_W X). \end{aligned}$$

A segunda parcela é, por definição,  $\nabla_V^\perp(\text{II}(W, X))$  o que implica em

$$\begin{aligned} (\overline{\nabla}_V(\text{II}(W, X)))^\perp &= \nabla_V^\perp(\text{II}(W, X)) \\ &= \nabla_V(\text{II}(W, X)) + \text{II}(\nabla_V W, X) + \text{II}(W, \nabla_V X). \end{aligned}$$

Portanto,

$$(\overline{\nabla}_V \overline{\nabla}_W X)^\perp = \text{II}(V, \nabla_W X) + \nabla_V(\text{II}(W, X)) + \text{II}(\nabla_V W, X) + \text{II}(W, \nabla_V X)$$

Analogamente,

$$(\overline{\nabla}_W \overline{\nabla}_V X)^\perp = \text{II}(W, \nabla_V X) + \nabla_W(\text{II}(V, X)) + \text{II}(\nabla_W V, X) + \text{II}(V, \nabla_W X).$$

Desse modo,  $(\overline{R}(V, W)X)^\perp$  será dada por

$$(\overline{R}(V, W)X)^\perp = \nabla_W(\text{II}(V, X)) + \text{II}(\nabla_W V, X) - \nabla_V(\text{II}(W, X)) - \text{II}(\nabla_V W, X)$$

Note que,  $\text{II}(\nabla_W V, X) - \text{II}(\nabla_V W, X) = 0$ . De fato,

$$\begin{aligned} \text{II}(\nabla_W V, X) - \text{II}(\nabla_V W, X) &= (\overline{\nabla}_{\nabla_W V} X)^\perp - (\overline{\nabla}_{\nabla_V W} X)^\perp \\ &= (\overline{\nabla}_{\nabla_W V} X - \overline{\nabla}_{\nabla_V W} X)^\perp \\ &= (\overline{\nabla}_{\nabla_W V - \nabla_V W} X)^\perp \\ &= 0, \end{aligned}$$

pois  $[V, W] = 0$ . Nestas condições,  $(\overline{R}(V, W)X)^\perp$  será dada por

$$(\overline{R}(V, W)X)^\perp = \nabla_W(\text{II}(V, X)) + -\nabla_V(\text{II}(W, X)).$$

□

Para subvariedades Lorentzianas de codimensão maiores do que 1, a conexão  $\nabla^\perp$  torna-se mais importante. Pelo fato de que a segunda forma fundamental de  $\Sigma \subset M$  mede a diferença entre  $\nabla$  e  $\overline{\nabla}$  e isto também mede a diferença entre  $\nabla^\perp$  e  $\overline{\nabla}$ .

**Observação 1.1.** Seja  $\tilde{\text{II}}$  a segunda forma fundamental de  $\Sigma \subset M$ . Então, algumas propriedades são verificadas

- (1) Se  $\Sigma \subset M$  então para  $V \in \mathfrak{X}(\Sigma)$  e  $Z \in (\mathfrak{X}(\Sigma))^\perp$  define  $\tilde{\Pi}(V, Z) = (\bar{\nabla}_V Z)^\top$ .  
Portanto,

$$\bar{\nabla}_V Z = \underset{\text{tangente a } \Sigma}{\tilde{\Pi}(V, Z)} + \underset{\text{normal a } \Sigma}{\nabla_V^\perp W}.$$

- (2) A segunda forma fundamental  $\tilde{\Pi}$  não possui novas informações, desde que

$$g(\tilde{\Pi}(V, Z), W) = -g(\Pi(V, W), Z)$$

para todo  $V, W \in \mathfrak{X}(\Sigma)$  e  $Z \in (\mathfrak{X}(\Sigma))^\perp$ .

### 1.3 Operadores Diferenciais

Abordaremos algumas das principais definições de operadores diferenciais, na geometria, associados a métrica assim como suas propriedades mais úteis para o nosso meio Lorentziano. Para isto, nós denotaremos  $\nabla$  como sendo a conexão de Levi-Civita na variedade Lorentziana  $M$ .

**Definição 1.22.** O gradiente,  $\nabla f$ , de uma função  $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$  é o campo de vetores metricamente equivalente a diferencial  $df \in \mathfrak{X}^*(M)$ . Isto é definido pela relação

$$g(\nabla f, X) = X(f) = df(X)$$

para cada  $X \in \mathfrak{X}(M)$ .

Observe que em termos de sistema de coordenadas  $df = \sum_i (\partial f / \partial x^i) dx^i$  e desse modo,

$$\nabla f = \sum_{i,j} g^{i,j} \frac{\partial f}{\partial x^i} \partial_j$$

onde  $[g^{i,j}]$  representa a matriz inversa da métrica de  $M$ .

Da mesma forma, seja  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  duas funções suaves, nós podemos computar o gradiente da composição  $g \circ f : M \rightarrow \mathbb{R}$ .

$$\nabla(g \circ f) = g'(f) \nabla f$$

Vale ressaltar que, a notação para conexão de Levi-Civita e o operador gradiente são os mesmos. Podemos assegurar que não existirá nenhum tipo de desentendimento desde que o gradiente atua como função, enquanto a conexão de Levi-Civita trabalha com campos de vetores.

**Definição 1.23.** O divergente,  $\text{div}(X)$ , de um campo de vetores  $X \in \mathfrak{X}(M)$  é uma função suave definida por

$$\text{div}(X) = \text{tr}(Y \mapsto \nabla_Y X)$$

onde  $\text{tr}$  denota o traço com respeito a métrica de  $M$ .

Agora, seja  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  uma função suave e  $X \in \mathfrak{X}(M)$ . Então, segue que

$$\text{div}(fX) = f \text{div}(X) + g(\nabla f, X)$$

**Definição 1.24.** A Hessiana,  $\nabla^2 f$ , da função  $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$  é a segunda derivada covariante

$$\nabla^2 = \nabla(\nabla f)$$

Por outro lado, para quaisquer  $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$  nós denotaremos por  $\text{Hess}_f$  a simetria  $(0, 2)$  do tensor em  $M$  que é metricamente equivalente ao operador Hessiano,

$$\begin{aligned} \text{Hess}_f : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) &\rightarrow \mathbb{R} \\ (X, Y) &\mapsto g(\nabla_X(\nabla f), Y) = g(\nabla^2 f(X), Y) \end{aligned}$$

Por fim, introduziremos o operador Laplaciano.

**Definição 1.25.** O Laplaciano,  $\Delta f$ , da função  $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$  é a função suave definida como o divergente do gradiente, isto é,

$$\Delta f = \text{div}(\nabla f)$$

O Laplaciano tem como expressão coordenada

$$\begin{aligned} \Delta f &= \sum_{i,j} g^{i,j} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} - \sum_k \Gamma_{i,j}^k \frac{\partial f}{\partial x^k} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{|\det(g_{i,j})|}} \sum_i \frac{\partial}{\partial x^i} \left( \sqrt{|\det(g_{i,j})|} \sum_j g^{i,j} \frac{\partial f}{\partial x^j} \right), \end{aligned}$$

onde  $\Gamma_{i,j}^k$  denota os símbolos de Christoffel associados a métrica de  $M$ .

Sejam  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  duas funções suaves, o Laplaciano da composição  $g \circ f : M \rightarrow \mathbb{R}$  é dada por

$$\Delta(g \circ f) = g'(f) \Delta f + g''(f) \|\nabla f\|^2$$

## 1.4 Produto Warped

Nesta seção abordaremos alguns dos conceito de variedades Lorentzianas que são produto de variedades, ou seja, quando  $M$  é uma variedade Lorentziana munida da métrica  $g_M$  tal que  $M = B \times F$  e  $g_M(v, w)_M = g_B(d\pi(v), d\pi(w)) + g_F(d\eta(v), d\eta(w))$ , onde  $\pi$  e  $\eta$  são as projeções de  $B \times F$  em  $B$  e  $F$ , respectivamente.

**Definição 1.26.** Seja  $(B, g_B)$  uma variedade  $n$ -dimensional ( $n \geq 1$ ) com uma assinatura  $(-, +, \dots, +)$ , e seja  $(F, g_F)$  uma variedade Riemanniana. Seja  $f : B \rightarrow (0, +\infty)$  uma função suave e consideremos as projeções  $\pi : B \times F \rightarrow B$  e  $\eta : B \times F \rightarrow F$ . O produto warped Lorentziano  $B \times_f F$  é a variedade  $M = B \times F$  equipada com a métrica Lorentziana  $g_M$  definida por  $v, w \in T_p M$  por

$$g_M(v, w) = g_B(d\pi(v), d\pi(w)) + (f \circ \pi)^2(p) \cdot g_F(d\eta(v), d\eta(w))$$

**Definição 1.27.** Um produto warped  $B \times_f F$  com  $f = 1$  é chamado de produto Lorentziano e será denotado por  $B \times F$ .

**Observação 1.2.** Pode-se também obter variedades Lorentzianas considerando o produto warped  $F \times_f B$ , onde  $(F, g_F)$  é uma variedade Riemanniana,  $(B, g_B)$  é uma variedade Lorentziana e  $f : F \rightarrow (0, +\infty)$  uma função suave.

E denotaremos  $B$  como base de  $M = B \times_f F$  e  $F$  de fibra. Assim, estudaremos a geometria de  $M$  em termos da função warped  $f$  e das geometrias de  $B$  e  $F$ . Como no caso de um produto Lorentziano será fácil observar que as fibras  $p \times F = \pi^{-1}(p)$  e as folhas  $B \times q = \eta^{-1}(q)$  são subvariedades de  $M$ .

**Observação 1.3.** Seja  $B \times_f F$  um produto warped Lorentziano

- (1) Para cada  $b \in F$ , a restrição  $\pi|_{\eta^{-1}(b)} : \eta^{-1}(b) \rightarrow B$  é uma isometria sobrejetora de  $\eta^{-1}(b)$  em  $B$
- (2) Para cada  $m \in B$ , a restrição  $\eta|_{\pi^{-1}(m)} : \pi^{-1}(m) \rightarrow F$  é uma função homotética de  $\pi^{-1}(m)$  com o fator homotético  $1/f(m)$
- (3) Para cada  $(m, b) \in M$ , a Folha  $B \times b$  e a Fibra  $m \times F$  são ortogonais em  $(m, b)$
- (4) Se  $v \in T(B \times F)$ , então  $g_B(d\pi v, d\pi v) \leq g_M(v, v)$ . Assim,  $d\pi : T_p(B \times F) \rightarrow T_{\pi(p)}M$  será uma função de vetores causais para vetores causais.
- (5) Se  $\phi : F \rightarrow F$  é uma isometria, então a função  $\Phi = 1 \times \phi : B \times_f F \rightarrow B \times_f F$  dado por  $\Phi(m, b) = (m, \phi(b))$  é uma isometria de  $B \times_f F$ .

(6) Se  $\psi : B \rightarrow B$  é uma isometria de  $B$  tal que  $f \circ \psi = f$ , então a função  $\Psi = \psi \times 1 : B \times_f F \rightarrow B \times_f F$  dado por  $\Psi(m, b) = (\psi(m), b)$  é uma isometria em  $B \times_f F$ .

A relação de um produto warped com a base  $B$  é quase tão simples quanto no caso especial de um produto Lorentziano; no entanto, a relação com a fibra  $F$  geralmente envolve a função warped  $f$ .

**Lema 1.24.** Seja  $h$  uma função suave arbitrária de domínio na variedade Lorentziana  $B$ , então o gradiente do levantamento  $h \circ \pi$  de  $h$  em  $M = B \times_f F$  é o levantamento de  $M$  pelo gradiente de  $h$  em  $B$ .

*Demonstração.* Devemos mostrar que  $\nabla(h \circ \pi)$  é horizontal e  $\pi$ -relacionado ao  $\nabla h$  em  $B$ . Se  $v$  é um vetor tangente vertical a  $M$ , então  $g_B(\nabla(h \circ \pi), v) = v(h \circ \pi) = d\pi(v)h = 0$ , uma vez que  $d\pi(v) = 0$ . Assim,  $\nabla(h \circ \pi)$  é horizontal. Se  $x$  é horizontal,

$$\begin{aligned} g_B(d\pi(\nabla(h \circ \pi)), d\pi(x)) &= g_B(\nabla(h \circ \pi), x) \\ &= x(h \circ \pi) \\ &= d\pi(x)h \\ &= g_B(\nabla h, d\pi(x)) \end{aligned}$$

Portanto, em cada ponto,  $d\pi(\nabla(h \circ \pi)) = \nabla h$ . □

Chamaremos de  $\mathfrak{L}(B)$  o conjuntos dos levantamentos da base  $B$  e  $\mathfrak{L}(F)$  o conjuntos dos levantamentos da fibra  $F$ .

A conexão de Levi-Civita de  $M$  pode ser relacionada com  $B$  e  $F$  da seguinte forma:

**Proposição 1.25.** Em  $M = B \times_f F$ , se  $X, Y \in \mathfrak{L}(B)$  e  $V, W \in \mathfrak{L}(F)$  então

- (1)  $\nabla_X Y \in \mathfrak{L}(B)$  é o levantamento de  $\nabla_X Y$  em  $B$
- (2)  $\nabla_X V = \nabla_V X = (Xf/f)V$ .
- (3)  $(\nabla_V W)^\perp = \text{II}(V, W) = -(g(V, W)/f)\nabla f$
- (4)  $(\nabla_V W)^\top \in \mathfrak{L}(F)$  é o levantamento de  $\nabla_V W$  em  $F$

*Demonstração.* (1) A fórmula de Koszul para  $2g_M(\nabla_X Y, V)$  reduzirá em

$$-Vg_M(X, Y) + g_M(V, [X, Y])$$

desde que  $[X, V] = [Y, V] = 0$ . Como  $X$  e  $Y$  são levantamentos de  $B$ , temos  $g_M(X, Y)$  constante nas fibras. Desde que  $V$  é vertical,  $Vg_M(X, Y) = 0$ . Porém  $[X, Y]$  é tangente

as folhas, desse modo  $g_M(V, [X, Y]) = 0$ . Portanto,  $g_M(\nabla_X Y, V) = 0$  para todo  $V \in \mathfrak{L}(F)$ , então  $\nabla_X Y$  é horizontal. Desde que  $\pi|(B \times q)$  é uma isometria o resultado segue.

(2)  $\nabla_X V = \nabla_V X$  desde que  $[X, V] = 0$ . Segue de (1) que esses campos de vetores são verticais,  $g_M(\nabla_X V, Y) = -g_M(V, \nabla_X Y) = 0$ . Todos os termos na fórmula de Koszul,  $2g_M(\nabla_X V, W)$ , se anulam com exceção de  $Xg_M(V, W)$ . Pela definição de métrica warped,  $g_M(V, W)(p, q) = f^2(p)g_F(V_q, W_q)$ . Escrevendo  $f$  no lugar de  $f \circ \pi$  temos  $g_M(V, W) = f^2((V, W) \circ \eta)$ . Note que o termo em parenteses é constante nas folhas onde  $X$  é tangente. Desse modo,

$$Xg_M(V, W) = X[f^2((V, W) \circ \eta)] = 2fXf((V, W) \circ \eta) = 2(Xf/f)g_M(V, W).$$

Daí,  $\nabla_X V = (Xf/f)V$ .

(3) Segue de (2),

$$\begin{aligned} g_M(\nabla_V W, X) &= -g_M(W, \nabla_V W) \\ &= -g_M((Xf/f)V) \\ &= -(Xf/f)g_M(V, W). \end{aligned}$$

(4) Desde que  $V$  e  $W$  são tangentes em todas as fibras, pelo Lema 1.2,  $(\nabla_V W)^\perp$  é derivada covariante, da fibra, plicada na restrição de  $V$  e  $W$  na fibra. Então,  $\eta$ -relações seguiram, desde que homotetias preservam conexões de Levi-Civita.  $\square$

**Corolário 1.26.** Seja  $M \times_f H$  um Produto Warped Lorentziano. Então, cada  $b \in H$ , a folha  $\eta^{-1}(b)$  é totalmente geodésica e para cada  $p \in M$ , a fibra  $\pi^{-1}(p)$  são totalmente umbílicas.

*Demonstração.* Segue de 1 da Proposição 1.25 que a Segunda Forma Fundamental de Cada folha será Nula. Enquanto as fibras segue diretamente de 3.  $\square$

**Exemplo 1.4.** Uma superfície de revolução é um produto warped com folhas de diferentes posições das curvas rotacionadas e as fibras são os círculos de revolução. Explícitamente, se  $M$  é dada pela revolução da curva plana  $C$  sobre um dos eixos do  $\mathbb{R}^3$  e  $f : C \rightarrow \mathbb{R}^+$  dada pela distância ao eixo, então  $M$  é  $C \times_f \mathbb{S}^1$ .

**Lema 1.27.** Se  $M$  e  $H$  são Variedades Riemannianas completas, então  $\bar{M} = M \times_f H$  é completo para cada função Warped  $f$ .

*Demonstração.* Usaremos a métrica utilizada na demonstração do teorema de Hopf-Rinow. Note primeiro que se  $v$  é tangente a  $M$  então, desde que  $f > 0$  e  $F$  é Riemanniana,  $g_M(v, v) \geq g_M(d\pi \cdot v, d\pi \cdot v)$ . Desse modo,  $L(\alpha) \geq L(\pi \circ \alpha)$  para algum segmento de curva. Portanto,  $d(m_0, m_1) \geq d(\pi(m_0), \pi(m_1))$  para todo  $m_0, m_1 \in M$ .

Esta propriedade implica que, se tomarmos uma sequência de Cauchy  $(p_i, q_i)$  em  $M$ , então  $(p_i)$  é Cauchy em  $B$ . Desde que  $B$  é completo,  $(p_i)$  converge para algum ponto  $p \in B$ .

Nós podemos assumir então que a sequência encontra-se em algum conjunto compacto  $K$  em  $B$ , desse modo,  $f \geq c > 0$  em  $K$ . Agora,  $(q_i)$  é Cauchy em  $F$  e daí convergente. Nestas condições, a sequência original converge em  $M$ , e portanto  $M$  é completa.  $\square$

**Observação 1.4.** Esse resultado falha em métricas indefinidas.

## 1.5 Subvariedades do tipo-espaço em variedades Lorentzianas

Aqui discutiremos sobre as subvariedades do tipo-espaço e a geometria por trás dela. Num ponto de vista mais intrínseco, elas são nada mais do que variedades Riemannianas. Inicialmente definiremos a causalidade de uma subvariedade.

**Definição 1.28.** Seja  $\Sigma$  uma subvariedade imersa em uma variedade Lorentziana  $M$ . Nós diremos que:

- (i)  $\Sigma$  é tipo-espaço, se a métrica induzida possui índice  $v = 0$ , isto é, se esta é uma métrica riemanniana em  $\Sigma$ ;
- (ii)  $\Sigma$  é tipo-tempo, se a métrica induzida possui índice  $v = 1$ , isto é, se esta é uma métrica Lorentziana em  $\Sigma$ ; e
- (iii)  $\Sigma$  é tipo-luz, se a métrica induzida é degenerada em  $\Sigma$ .

Agora que definimos a causalidade de uma subvariedade Lorentziana, podemos entrar em um dos principais pontos de nosso estudo, o campo de vetores curvatura média.

**Definição 1.29.** Seja  $\Pi : \mathfrak{X}(\Sigma) \times \mathfrak{X}(\Sigma) \rightarrow \mathfrak{X}^\perp(\Sigma)$  dada por

$$\Pi(X, Y) = -(\bar{\nabla}_X Y)^\perp \tag{1.5}$$

é uma bilinear e simétrica.  $\Pi$  é chamada de segunda forma fundamental.

**Observação 1.5.** Note que a Definição 1.29 ela difere do Lema 1.11 a menos de um sinal, e isso é devido ao contexto da Relatividade dos problemas que aqui serão abordados. Uma vez que, o sinal trocado em (1.5) representará um campo de vetores

normal externo a  $\Sigma$  e, desse modo, podemos interpretar o campo de vetores curvatura média de uma esfera sempre pontando para fora.

Existiram algumas conseqüências pela utilização da Definição 1.29 e uma delas é que o operador de Weingarten ele será dado como  $A_\zeta V = (\bar{\nabla}_V \zeta)^\perp$ , com  $V \in \mathfrak{X}(\Sigma)$  e  $\zeta \in (\mathfrak{X}(\Sigma))^\perp$ .

Seja  $\psi : \Sigma \rightarrow M$  uma subvariedade tipo-espaço, e sejam  $\bar{\nabla}$  e  $\nabla$  as conexões Levi-Civita de  $M$  em  $\Sigma$ , respectivamente. Denotaremos por  $\nabla^\perp$  a conexão normal de  $\Sigma$  em  $M$ . Então, as fórmulas de Gauss e Weingarten de  $\psi$  são dados por

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y - \text{II}(X, Y) \quad (1.6)$$

e

$$\bar{\nabla}_X \zeta = A_\zeta X + \nabla^\perp \zeta \quad (1.7)$$

para todo campo de vetores  $X, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma)$  e o campo de vetores normal  $\zeta \in \mathfrak{X}^\perp(\Sigma)$ .

**Definição 1.30.** O campo de vetores curvatura média de  $\Sigma$  é dado por

$$\mathbf{H} = \frac{1}{n} \text{tr}(\text{II}) \in \mathfrak{X}^\perp(\Sigma)$$

onde  $\text{tr}$  representa o traço com respeito a métrica induzida em  $\Sigma$ .

A definição seguinte nos permite classificar a subvariedade que estamos manuseando em termos de seu campo de vetores curvatura média.

**Definição 1.31.** Seja  $\psi : \Sigma^n \rightarrow M^{n+2}$  uma subvariedade do tipo-espaço com codimensão 2. Nós diremos que  $\Sigma$  é

1. Aprisionada no Futuro (Passado), se  $\mathbf{H}$  é tipo-tempo e está apontando para o futuro (passado);
2. Marginalmente aprisionada no futuro (passado), se  $\mathbf{H}$  é tipo-luz e está apontando para o futuro (passado) em  $\Sigma$ .
3. Fracamente aprisionada no Futuro (Passado) se  $\mathbf{H}$  é causal e apontando para o futuro (passado) em  $\Sigma$ .

Em condições extremas em que  $\mathbf{H} = 0$  a mesma corresponderá a uma subvariedade mínima.

Estudaremos a geometria de  $\Sigma$  em termos do referencial ortonormal  $\{\xi, \eta\}$ , o qual é uma base para  $(T_p \Sigma)^\perp$  tal que  $g(\xi, \eta) = -1$ . Assim, para quaisquer  $X, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma)$  a

segunda forma fundamental poderá ser descrita da forma

$$\text{II}(X, Y) = \alpha(X, Y)\xi + \beta(X, Y)\eta$$

onde  $\alpha, \beta : \mathfrak{X}(\Sigma) \times \mathfrak{X}(\Sigma) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(\Sigma)$ . Calculando

$$\begin{aligned} g(\text{II}(X, Y), \xi) &= g(\alpha(X, Y)\xi + \beta(X, Y)\eta, \xi) \\ &= g(\alpha(X, Y)\xi, \xi) + g(\beta(X, Y)\eta, \xi) \\ &= \beta(X, Y)g(\eta, \xi) = -\beta(X, Y) \end{aligned}$$

Logo,  $\beta(X, Y) = -g(A_\xi X, Y)$ , onde  $A_\xi$  é o operador de Weingarten de  $\xi$ . De modo análogo obtém-se

$$\begin{aligned} g(\text{II}(X, Y), \eta) &= \alpha(X, Y)g(\eta, \xi) \\ &= -\alpha(X, Y) \end{aligned}$$

Logo,  $\beta(X, Y) = -g(A_\eta X, Y)$ , onde  $A_\eta$  é o operador de Weingarten de  $\eta$ . Daqui por diante, podemos descrever a segunda forma fundamental da seguinte forma

$$\text{II}(X, Y) = -g(A_\eta X, Y)\xi - g(A_\xi X, Y)\eta \quad (1.8)$$

Assim, se tomarmos o traço na expressão (1.8) obtemos o campo de vetores curvatura média dado por

$$\mathbf{H} = -\frac{1}{n} (\text{tr}(A_\eta)\xi + \text{tr}(A_\xi)\eta) \quad (1.9)$$

Note que fazendo  $\theta_\xi = \frac{1}{n}\text{tr}(A_\xi)$  e  $\theta_\eta = \frac{1}{n}\text{tr}(A_\eta)$ , tem-se que

$$\begin{aligned} g(H, H) &= g(-\theta_\eta\xi - \theta_\xi\eta, -\theta_\eta\xi - \theta_\xi\eta) \\ &= g(-\theta_\eta\xi, -\theta_\eta\xi) + g(-\theta_\eta\xi, -\theta_\xi\eta) + g(-\theta_\xi\eta, -\theta_\xi\eta) + g(-\theta_\xi\eta, -\theta_\eta\xi) \\ &= \theta_\xi^2 g(\eta, \eta) + \theta_\eta^2 g(\xi, \xi) + 2\theta_\eta\theta_\xi g(\eta, \xi) \\ &= -2\theta_\xi\theta_\eta \end{aligned}$$

Logo,

$$g(\mathbf{H}, \mathbf{H}) = -\frac{2}{n^2} \text{tr}(A_\eta)\text{tr}(A_\xi)$$

Então, nós podemos definir o campo de vetores curvatura média do tipo-luz da seguinte maneira:

**Definição 1.32.** A curvatura média do tipo-luz associado a  $\xi$  e  $\eta$ , respectivamente,

são as funções

$$\theta_\xi = \frac{1}{n} \text{tr}(A_\xi) \text{ e } \theta_\eta = \frac{1}{n} \text{tr}(A_\eta)$$

onde  $\text{tr}$  representa o traço com respeito a métrica induzida em  $\Sigma$ .

Desde que, em nosso contexto, o operador de Weingarten  $A_\zeta X = (\bar{\nabla}_X \zeta)^T$  para cada Campo de Vetores Normais  $\zeta \in \mathfrak{X}^\perp(\Sigma)$ , tem-se que

$$\theta_\xi = \frac{1}{n} \text{div}_\Sigma \xi \text{ e } \theta_\eta = \frac{1}{n} \text{div}_\Sigma \eta.$$

Isso significa que, fisicamente,  $\theta_\xi$  (respectivamente,  $\theta_\eta$ ) mede a divergência dos raios de luz emanados de  $\Sigma$  na direção de  $\xi$  (respectivamente,  $\eta$ ). Em termos de curvatura Média tipo-luz o campo de vetores curvatura média será dada por

$$\mathbf{H} = -\theta_\eta \xi - \theta_\xi \eta. \tag{1.10}$$

Neste contexto, de curvatura média, podemos reescrever a Definição 1.31 usando o referencial ortogonal  $\{\xi, \eta\}$ .

- (i)  $\Sigma$  é uma subvariedade aprisionada se, e somente se, ou  $\theta_\xi < 0$  e  $\theta_\eta < 0$  (aprisionada no futuro) ou  $\theta_\xi > 0$  e  $\theta_\eta > 0$  (aprisionada no passado);
- (ii)  $\Sigma$  é uma subvariedade marginalmente aprisionada se, e somente se, ou  $\theta_\xi = 0$  e  $\theta_\eta \neq 0$  (marginalmente aprisionada no futuro se  $\theta_\eta < 0$  e marginalmente aprisionada no passado se  $\theta_\eta > 0$ ) ou  $\theta_\xi \neq 0$  e  $\theta_\eta = 0$  (marginalmente aprisionada no futuro se  $\theta_\xi < 0$  e marginalmente aprisionada no passado se  $\theta_\xi > 0$ ); e
- (iii)  $\Sigma$  é uma subvariedade fracamente aprisionada se, e somente se, ou ambos  $\theta_\xi, \theta_\eta \leq 0$  com  $\theta_\xi^2 + \theta_\eta^2 > 0$  (fracamente aprisionada no futuro) ou ambos  $\theta_\xi, \theta_\eta \geq 0$  com  $\theta_\xi^2 + \theta_\eta^2 > 0$  (fracamente aprisionada no passado).

Essa nova reescritura da Definição 1.31 foi dada por Penrose [16] em termos do anulamento de curvatura média tipo-luz. Historicamente, as superfícies aprisionadas foram introduzidas para estudar as singularidades e buracos negros. Mais tarde, ganhou um contexto mais matemático devido a Yau [17].

### 1.5.1 Curvaturas

Reformularemos as expressões da Curvatura Riemanniana de  $\Sigma$ ,  $R$ , e a curvatura de Ricci de  $\Sigma$ ,  $Ric$ . Desse modo, usaremos a equação de Gauss da seguinte maneira

$$\begin{aligned} g(R(V, W)X, Y) &= g(\bar{R}(V, W)X, Y) + g(\Pi(V, X), \Pi(W, Y)) \\ &\quad - g(\Pi(V, Y), \Pi(W, X)) \\ &= g(\bar{R}(V, W)X, Y) + g(A_{\Pi(V, X)}W, Y) - g(A_{\Pi(V, Y)}W, X) \end{aligned} \quad (1.11)$$

onde  $X, Y, V, W \in \mathfrak{X}(\Sigma)$  e  $\bar{R}$  representa a curvatura Riemanniano de  $M$ .

Lembrando que

$$R(X, Y)Z = \nabla_{[X, Y]}Z - [\nabla_X, \nabla_Y]Z$$

temos

$$R(X, Y)Z = (\bar{R}(X, Y)Z)^\top + A_{\Pi(X, Z)}Y - A_{\Pi(Y, Z)}X.$$

Logo,

$$\begin{aligned} Ric(X, Y) &= tr(R) \\ &= \sum_{i=1}^n g(R(Xe_i)Y, e_i) \\ &= \sum_{i=1}^n (g((\bar{R}(X, e_i)Y)^\top, e_i) + g(A_{\Pi(X, Y)}e_i, e_i) - g(A_{\Pi(e_i, Y)}X, e_i)) \\ &= \sum_{i=1}^n (g(\bar{R}(X, e_i)Y, e_i) + g(\Pi(X, Y), \Pi(e_i, e_i)) - g(\Pi(X, e_i), \Pi(Y, e_i))) \\ &= \sum_{i=1}^n (g(\bar{R}(X, e_i)Y, e_i) + g(\Pi(X, Y), n\mathbf{H}) - g(\Pi(X, e_i), \Pi(Y, e_i))) \end{aligned}$$

Aqui,  $\{e_1, \dots, e_n\}$  representa o referencial ortonormal de  $\Sigma$ . Tomando em consideração (1.8),

$$g(\Pi(X, e_i), \Pi(Y, e_i)) = -2g(A_\eta X, e_i)g(A_\xi, e_i).$$

Desse modo,

$$\sum_{i=1}^n g(\Pi(X, e_i), \Pi(Y, e_i)) = -2g((A_\xi \circ A_\eta)X, Y)$$

Donde conclui-se que,

$$Ric(X, Y) = \sum_{i=1}^n (g(\bar{R}(X, e_i)Y, e_i) + g(\Pi(X, Y), n\mathbf{H})) + 2g((A_\xi \circ A_\eta)X, Y)$$

Estudaremos o termo  $\sum_{i=1}^n g(\overline{R}(X, e_i)Y, e_i)$ . Denotaremos por  $\overline{Ric}$  a curvatura de Ricci de  $M$  e lembrando que, de [ [15],Lema 3.52]

$$\overline{Ric}(X, Y) = g(\overline{R}(X, v_1)Y, v_1) - g(\overline{R}(X, v_2)Y, v_2) + \sum_{i=1}^n g(\overline{R}(X, e_i)Y, e_i) \quad (1.12)$$

onde  $\{v_1, v_2\}$  é um referencial ortogonal de  $\mathfrak{X}^\perp(\Sigma)$  tal que  $g(v_1, v_1) = 1$  e  $g(v_2, v_2) = -1$ . Nós podemos construir esses dois campos de vetores como sendo

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi - \eta) \text{ e } v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi + \eta)$$

e com estas escolhas

$$g(\overline{R}(X, v_1)Y, v_1) - g(\overline{R}(X, v_2)Y, v_2) = -g(\overline{R}(X, \xi)Y, \eta) - g(\overline{R}(X, \eta)Y, \xi)$$

Com isso dito, a identidade (1.12) será agora representa por

$$\sum_{i=1}^n g(\overline{R}(X, e_i)Y, e_i) = \overline{Ric}(X, Y) + g(\overline{R}(X, \xi)Y, \eta) + g(\overline{R}(X, \eta)Y, \xi)$$

e, desse modo, poderemos escrever a curvatura de Ricci da nossa subvariedade  $\Sigma$  como sendo

$$\begin{aligned} Ric(X, Y) &= \overline{Ric}(X, Y) + g(\overline{R}(X, \xi)Y, \eta) + g(\overline{R}(X, \eta)Y, \xi) \\ &\quad + ng(\Pi(X, Y), \mathbf{H}) + 2g((A_\xi \circ A_\eta)X, Y). \end{aligned} \quad (1.13)$$

Iremos agora interpretar, em nosso meio, a curvatura escalar de  $\Sigma$ , o qual é definida usualmente por

$$K = \text{tr}(Ric).$$

Para isso, seja  $\{e_1, \dots, e_n\}$  um referencial ortonormal de  $\Sigma$ . Então, usando a equação (1.13) e algumas das propriedades da Curvatura  $R$ ,

$$\begin{aligned} K &= \sum_{i=1}^n \overline{Ric}(e_i, e_i) + 2 \sum_{i=1}^n g(\overline{R}(e - i, \xi)e_i, \eta) \\ &\quad + n\text{tr}(A_{\mathbf{H}}) + 2\text{tr}(A_\xi \circ A_\eta). \end{aligned} \quad (1.14)$$

Por outro lado, tomando em conta a Definição de  $v_1$  e  $v_2$  nós podemos escrever a

curvatura escalar de  $M$  sendo

$$\begin{aligned}\bar{K} &= \sum_{i=1}^n \bar{Ric}(e_i, e_i) + \bar{Ric}(v_1, v_1) - \bar{Ric}(v_2, v_2) \\ &= \sum_{i=1}^n \bar{Ric}(e_i, e_i) - 2\bar{Ric}(\xi, \eta).\end{aligned}$$

Seguindo alguns cálculos simples teremos

$$\bar{Ric}(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n g(\bar{R}(e_i, \xi)e_i, \eta) - g(\bar{R}(\xi, \eta)\eta, \xi)$$

e então,

$$\begin{aligned}\bar{K} &= \sum_{i=1}^n \bar{Ric}(e_i, e_i) - 2 \sum_{i=1}^n g(\bar{R}(e_i, \xi)e_i, \eta) \\ &\quad + 2g(\bar{R}(\xi, \eta)\eta, \xi).\end{aligned}\tag{1.15}$$

Substituindo (1.15) em (1.14) segue que

$$\begin{aligned}K &= \bar{K} + 4\bar{Ric}(\xi, \eta) + 2g(\bar{R}(\xi, \eta)\eta, \xi) \\ &\quad + n\text{tr}(A_{\mathbf{H}}) + 2\text{tr}(A_{\xi} \circ A_{\eta}).\end{aligned}\tag{1.16}$$

Por outro lado, desde que  $\{\xi_p, \eta_p\}$  é uma base para  $(T_p\Sigma)^\perp$  em qualquer  $p \in \Sigma$ , a curvatura seccional gerada por  $\xi$  e  $\eta$  será dada por

$$\bar{K}(\xi \wedge \eta) = \frac{g(\bar{R}(\xi, \eta)\xi, \eta)}{\bar{Q}(\xi, \eta)}$$

onde  $\bar{Q}(\xi, \eta) = g(\xi, \xi)g(\eta, \eta) - g(\xi, \eta)^2$ . Então,  $\bar{K}(\xi \wedge \eta) = -g(\bar{R}(\xi, \eta)\xi, \eta) = g(\bar{R}(\xi, \eta)\eta, \xi)$ .

Inserindo essas informações adicionais em (1.16) e usando que  $\text{tr}(A_{\mathbf{H}}) = ng(\mathbf{H}, \mathbf{H})$ , a Curvatura Escalar será dada por

$$\begin{aligned}K &= \bar{K} + 4\bar{Ric}(\xi, \eta) + 2\bar{K}(\xi \wedge \eta) \\ &\quad + n^2g(\mathbf{H}, \mathbf{H}) + 2\text{tr}(A_{\xi} \circ A_{\eta}).\end{aligned}$$

Podemos resumir toda essa seção em uma simples proposição.

**Proposição 1.28.** Seja  $\psi : \Sigma^n \rightarrow M^{n+2}$  uma subvariedade do tipo-espaco de co-dimensão 2, tal que existe um referencial ortogonal normal do tipo-luz  $\{\xi, \eta\}$  com  $g(\xi, \eta) = -1$ . Então, com a notação prévia, nós temos em  $\Sigma$  que:

(i) A segunda forma fundamental

$$\mathbf{II}(X, Y) = -g(A_\eta X, Y)\xi - g(A_\xi X, Y)\eta \quad (1.17)$$

(ii) O campo de vetores curvatura média

$$\mathbf{H} = -\frac{1}{n} (\text{tr}(A_\eta)\xi + \text{tr}(A_\xi)\eta) \quad (1.18)$$

(iii) A curvatura Riemanniana

$$R(X, Y)V = (\overline{R}(X, Y)V)^\top + A_{\mathbf{II}(X, V)}Y - A_{\mathbf{II}(Y, V)}X \quad (1.19)$$

(iv) A curvatura de Ricci

$$\begin{aligned} Ric(X, Y) &= \overline{Ric}(X, Y) + g(\overline{R}(X, \xi)Y, \eta) + g(\overline{R}(X, \eta)Y, \xi) \\ &\quad + ng(\mathbf{II}(X, Y), \mathbf{H}) + 2g((A_\xi \circ A_\eta)X, Y) \end{aligned} \quad (1.20)$$

(v) curvatura escalar

$$\begin{aligned} K &= \overline{K} + 4\overline{Ric}(\xi, \eta) + 2\overline{K}(\xi \wedge \eta) \\ &\quad + n^2g(\mathbf{H}, \mathbf{H}) + 2\text{tr}(A_\xi \circ A_\eta) \end{aligned} \quad (1.21)$$

## Capítulo 2

# Construções de subvariedades do tipo-espaço com codimensão 2 através das hipersuperfícies especiais do espaço-tempo de Sitter

Nesse capítulo iremos construir as ideias iniciais de espaço-tempo e daremos alguns exemplos práticos.

### 2.1 Orientação temporal

Aprofundaremos aqui os conceitos iniciais de cone de luz e algumas de suas propriedades que, de modo geral, são estabelecidas em qualquer ambiente que estejamos trabalhando com a métrica Lorentziana.

**Definição 2.1.** Chamaremos de cone de luz o conjunto de todos os vetores  $v \in T_pM$ , com  $p \in M$ , tal que  $g(v, v) = 0$  e  $v \neq 0$ .

Do mesmo modo que na Definição 2.1, podemos introduzir o conjunto dos vetores do tipo-tempo em  $T_pM$ , com  $p \in M$ , chamaremos esse conjunto de  $\mathcal{T}$ . Para todo  $u \in \mathcal{T}$  façamos o conjunto

$$C(u) = \{v \in \mathcal{T} : g(u, v) < 0\}.$$

Chamaremos  $C(u)$  de cone temporal do  $T_pM$  contendo  $u$ . Enquanto, o cone temporal oposto será dada por

$$C(-u) = -C(u) = \{v \in \mathcal{T} : g(u, v) > 0\}$$

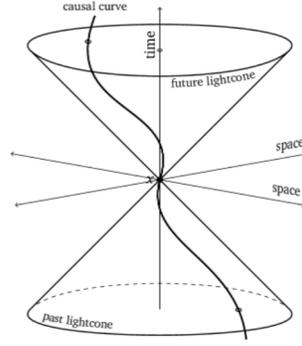


Figura 2.1: Cone de Luz

**Lema 2.1.** Dados os vetores do tipo-tempo  $v, w \in T_p M$ , com  $p \in M$ , diremos que  $u$  e  $v$  estão no mesmo cone se, e somente se,  $g(v, w) < 0$ .

*Demonstração.* Nós mostraremos que, se  $v \in C(u)$  e  $w$  é um vetor do tipo-tempo, então  $w \in C(u)$  se, e somente se,  $g(v, w) < 0$ . Desde que  $C(\frac{u}{\|u\|}) = C(u)$ , nós podemos assumir que  $u$  é um vetor do tipo-tempo unitário. Fazemos  $v = au + \bar{v}$  e  $w = bu + \bar{w}$ , onde  $\bar{v}, \bar{w} \in \langle u \rangle^\perp$ . Desde que  $u$  e  $v$  são vetores do tipo-tempo temos que  $|a| > \|\bar{v}\|$  e  $|b| > \|\bar{w}\|$ . Agora,  $g(v, w) = -ab + g(\bar{v}, \bar{w})$ , onde pela desigualdade de Cauchy-Schwarz,  $|g(\bar{v}, \bar{w})| \leq \|\bar{v}\| \|\bar{w}\| < |ab|$ . Desde que  $v \in C(u)$ ,  $a > 0$ . daí,  $\text{sgn}(g(v, w)) = \text{sgn}(-ab) = -\text{sgn}(b)$ . Portanto,  $g(v, w) < 0$ .  $\square$

O Lema 2.1 nos garante duas informações importantes com respeito aos cones temporais.

$$(1) u \in C(v) \iff v \in C(u) \iff C(v) = C(u)$$

De fato, se  $u \in C(u)$  então pelo Lema 2.1,  $g(u, v) < 0$ , isto é,  $v \in C(u)$ .

(2) Os cones temporais são convexos.

Com efeito, assumindo que  $u, v \in C(w)$  e seja  $t \in [0, 1]$ . Então,

$$g(tu + (1-t)v, w) = tg(u, w) + (1-t)g(v, w) < 0$$

e, daí,  $tu + (1-t)v \in C(w)$ .

Algumas coisas importantes são herdadas do fato de que as variedades Lorentzianas podem ser vistas como um espaço topológico com produto interno de índice 1. Uma delas é a desigualdade de Cauchy-Schwarz que ganha uma nova forma de ser interpretada quanto aos vetores do tipo-tempo e, assim, podemos encontrar as primeiras noções de geometria que é o ângulo entre vetores.

**Proposição 2.2.** Sejam  $v, w \in T_p M$  vetores do tipo-tempo, com  $p \in M$ . Então,

- (1)  $|g(v, w)| \geq \|v\| \|w\|$ , com a igualdade ocorrendo se, e somente se,  $v$  e  $w$  são colineares.
- (2) Se  $v$  e  $w$  estão no mesmo cone temporal então existe um único número  $\theta \geq 0$ , chamando ângulo hiperbólico entre  $v$  e  $w$ , tal que

$$g(v, w) = -\|v\| \|w\| \cosh(\theta)$$

*Demonstração.* (1) Fazemos  $w = av + \bar{w}$ , onde  $\bar{w} \in \langle v \rangle^\perp$ . Desde que  $w$  é um vetor do tipo-tempo,

$$g(w, w) = a^2 g(v, v) + g(\bar{w}, \bar{w}) < 0$$

então,

$$\begin{aligned} g(v, w)^2 &= a^2 g(v, v) \\ &= (g(w, w) - g(\bar{w}, \bar{w}))g(v, v) \\ &\geq g(w, w)g(v, v) \\ &= \|w\|^2 \|v\|^2 \end{aligned}$$

Desde que  $g(\bar{w}, \bar{w}) \geq 0$  e  $g(v, v) < 0$ . Donde, ocorrerá a igualdade quando  $g(\bar{w}, \bar{w}) = 0$ , o que é o mesmo do que dizer que  $\bar{w} = 0$ , isto é,  $w = av$ .

- (2) Se  $v$  e  $w$  estão no mesmo cone temporal então  $g(v, w) < 0$ . Desse modo,

$$\frac{-g(v, w)}{\|v\| \|w\|} \geq 1$$

e o resultado segue usando a propriedade do cosseno hiperbólico.  $\square$

Desde que a desigualdade de Cauchy-Schwarz funciona em nosso contexto poderemos descrever a versão da desigualdade triangular.

**Corolário 2.3.** Se  $v$  e  $w$  são vetores do tipo-tempo que encontram-se no mesmo cone temporal, então  $\|v\| + \|w\| \leq \|v + w\|$ , com a igualdade sendo satisfeita se, e somente se,  $v$  e  $w$  sejam colineares.

*Demonstração.* Uma vez que  $g(v, w) < 0$ , pela desigualdade de Cauchy-Schwarz,  $\|v\| \|w\| \leq -g(v, w)$ . Daí,

$$\begin{aligned} (\|v\| + \|w\|)^2 &= \|v\|^2 + 2\|v\| \|w\| + \|w\|^2 \\ &\leq \|v\|^2 - 2g(v, w) + \|w\|^2 \\ &= -g(v + w, v + w) \\ &= \|v + w\|^2 \end{aligned}$$

2. Construções de subvariedades do tipo-espaço com codimensão 2 através das hipersuperfícies especiais do espaço-tempo de Sitter

---

Donde, a igualdade é válida se, e somente se,  $\|v\|\|w\| = -g(v, w)$ . Mas, o último termo é  $|g(v, w)|$ , segue então, da Proposição 2.2, a colinearidade.  $\square$

A existência de cones de luz levanta uma questão fundamental sobre uma arbitrária variedade Lorentziana  $M$ . Pois, em cada espaço tangente  $T_p M$  existem dois cones temporais, donde não existem uma maneira intrínseca de distinguir uma da outra. No momento que escolhemos um desses cones temporais estamos dando uma orientação temporal para  $T_p M$ . Desse modo, teremos a seguinte questão: “Podemos dizer que cada espaço tangente de  $M$  é tempo-orientada?”

Seja  $\tau$  uma função em  $M$  que associa cada ponto  $p \in M$  a um cone temporal  $\tau_p$  em  $T_p M$ .  $\tau$  é suave se para cada  $p \in M$  existe um campo de vetores suave  $V$  em alguma vizinhança  $U$  de  $p$  tal que  $V_q \in \tau_q$  para cada  $q \in U$ . Chamaremos  $\tau$  de orientação temporal de  $M$ . Se  $M$  admite uma orientação temporal, então  $M$  será dita tempo-orientada. Além disso, escolher uma orientação temporal para  $M$  é tempo-orientar  $M$ .

Podemos formular uma definição para orientação temporal do seguinte modo.

**Definição 2.2.** Uma orientação temporal em uma variedade Lorentziana  $M$  é uma escolha suave entre dois cones temporais. O Cone escolhido será chamado de Cone Futuro e o outro de Cone Passado.

Conseqüentemente, diremos que os vetores do tipo-tempo que estão no cone futuro são vetores que apontam para o futuro e analogamente diremos que os vetores tipo-tempo no cone passado apontam para o passado.

**Lema 2.4.** Uma variedade Lorentziana  $M$  é tempo-orientada se, e somente se, existe um campo de vetores tipo-tempo  $X \in \mathfrak{X}(M)$ .

*Demonstração.* Se existe  $X$  então atribuindo cada  $p \in M$  o cone temporal contendo  $X_p$  daremos uma orientação temporal.

Reciprocamente, seja  $\tau$  a orientação temporal de  $M$ . Desde que  $\tau$  é suave, cada ponto de  $M$  possui uma vizinhança  $U$  em que é definido um campo de vetores  $X_U$  do tipo-tempo cujos valores em cada  $p \in U$  está em  $\tau_p$ . Agora, seja  $\{f_\alpha : \alpha \in A\}$  uma partição suave unitária subordinada ao recobrimento de  $M$  por cada uma de suas vizinhanças. As funções  $f_\alpha$  são não-negativas e os cones temporais são convexos. Portanto, o campo de vetores  $X = \sum f_\alpha X_{U(\alpha)}$  é do tipo-tempo.  $\square$

No contexto do Lema 2.4 podemos reformular a ideia de tempo-orientação com a seguinte definição.

**Definição 2.3.** Uma variedade Lorentziana  $(M, g)$  é dita ser tempo-orientada se  $M$  admite um contínuo, e não-nulo, campo de vetores  $X$  do tipo-tempo.

## 2. Construções de subvariedades do tipo-espaço com codimensão 2 através das hipersuperfícies especiais do espaço-tempo de Sitter

---

Para uma variedade Lorentziana não existe uma relação entre orientabilidade e tempo-orientabilidade. Por exemplo:

- (i) O Espaço de Minkowski é orientável e tempo-orientável;
- (ii) A Esfera  $S^1$  é orientável, mas não é tempo-orientável;
- (iii) A faixa de Möbius é não-orientável. Mas, podemos equipá-la com uma métrica Lorentziana que não é tempo-orientável; e
- (iv) O cilindro  $(\mathbb{R} \times S^1)$  é orientável. Pode ser equipado com uma métrica Lorentziana

$$ds^2 = -dt^2 + d\theta^2$$

que é tempo-orientável. Mas também, pode ser equipada com a métrica Lorentziana

$$ds^2 = \cos(\theta)dt^2 + 2\sin(\theta)dtd\theta - \cos(\theta)d\theta^2$$

que não é tempo-orientável.

A partir de agora, podemos apresentar o espaço-tempo Lorentziano.

**Definição 2.4.** Um espaço-tempo Lorentziano é uma variedade Lorentziana  $M$  onde podemos escolher uma orientação temporal em cada um de seus pontos  $p \in M$ .

Podemos observar que a Definição 2.3 assegura que a tempo-orientação da variedade Lorentziana é a existência de um globalmente definido campo de vetores tipo-tempo  $X \in \mathfrak{X}(M)$ . De fato, dado  $p \in M$ , nós definimos o cone futuro em  $p$  como a componente do cone temporal contendo  $X_p$ . Neste caso, nós diremos que a tempo-orientação em  $M$  é dada por  $X$  e seremos capazes de orientar cada vetor causal em  $M$  com o seguinte critério.

**Definição 2.5.** Seja  $M$  um espaço-tempo Lorentziano cuja tempo-orientação é dada por um globalmente definido campo de vetores tipo-tempo  $X$ . Diremos que um vetor causal  $v \in T_pM$ , com  $p \in M$ , esta apontando para o futuro se, e somente se,  $g(v, X_p) < 0$ . Analogamente, diremos que  $v$  está apontando para o passado.

**Exemplo 2.1.** O espaço de Lorentz-Minkowski é uma variedade Lorentziana  $(n + 3)$ -dimensional, denotada por  $\mathbb{L}^{n+3}$ , que pode ser identificada com o espaço vetorial  $\mathbb{R}^{n+3}$  munida da métrica Lorentziana

$$g(\cdot) = -(dx_1)^2 + \sum_{i=2}^{n+3} (dx_i)^2$$

### 2.1.1 Construção da base pseudo-ortogonal

A construção de uma base pseudo-ortogonal está intimamente ligado aos nossos próximos resultados e, desse modo, a geometria, quando pertinente, poderá ser descrita em seu termos. Para uma explicação detalhada sobre as suas propriedades recomendamos as referências [15] página 84 e [14].

Queremos construir um conjunto com campo de vetores do tipo-luz globalmente definidos que estejam apontando para o futuro, para uma subvariedade do tipo-espaço de codimensão 2. E, para isso, seja  $\xi$  um campo de vetores do tipo-luz globalmente definido apontando para o futuro. Isto é,  $g(\xi, \xi) = 0$  e  $g(\xi, \tau) < 0$ .

Decomponha  $\tau$  como

$$\tau = \tau^\top + \tau^\perp$$

onde  $\tau^\top$  representará a parte tangente de  $\tau$  em  $\Sigma$  enquanto  $\tau^\perp$  representará a parte normal de  $\tau$  em  $\Sigma$ . Podemos tomar  $\tau$  sem perda de generalidade unitário. Então,

$$\begin{aligned} -1 = g(\tau, \tau) &= g(\tau^\top + \tau^\perp, \tau^\top + \tau^\perp) \\ &= g(\tau^\top, \tau^\top) + g(\tau^\top, \tau^\perp) + g(\tau^\perp, \tau^\top) + g(\tau^\perp, \tau^\perp) \\ &= \|\tau^\top\|^2 + g(\tau^\perp, \tau^\perp) \end{aligned}$$

e, portanto,

$$g(\tau^\perp, \tau^\perp) = -1 - \|\tau^\top\|^2 \leq -1 < 0$$

Considere o campo de vetores unitários globalmente definidos

$$v = \frac{\tau^\perp}{\sqrt{1 + \|\tau^\top\|^2}} \quad (2.1)$$

que também é normal em  $\Sigma$  e esta apontando para o futuro. Portanto,  $g(\xi, v) < 0$ . Agora, seja  $\eta$  um campo de vetores normal do tipo-luz, tal que  $\eta = a\xi + bv$ , isto é,  $g(\eta, \eta) = 0$ . Notemos que,

$$\begin{aligned} 0 = g(\eta, \eta) &= g(a\xi + bv, a\xi + bv) \\ &= g(a\xi, a\xi) + 2g(a\xi, bv) + g(bv, bv) \\ &= a^2g(\xi, \xi) + 2abg(\xi, v) + b^2g(v, v) \\ &= 2abg(\xi, v) - b^2 \end{aligned}$$

Logo,  $b^2 = 2abg(\xi, v) \Rightarrow b = 2ag(\xi, v)$ .

Seja  $A$  uma constante, tal que,  $g(\xi, \eta) = A$ . Notemos que,  $A \neq 0$ , de fato, do contrário teríamos que  $\eta$  e  $\xi$  seriam linearmente dependentes.

Calculando  $g(\xi, \eta)$  teremos que

$$\begin{aligned} A = g(\xi, \eta) &= g(\xi, a\xi + bv) \\ &= ag(\xi, \xi) + bg(\xi, v) \\ &= bg(\xi, v) \end{aligned}$$

Logo,  $b = \frac{A}{g(\xi, v)}$ . Segue que  $\frac{A}{g(\xi, v)} = 2ag(\xi, v) \Rightarrow a = \frac{A}{2g(\xi, v)^2}$ .  
E desse modo, temos que

$$\eta = \frac{A}{2g(\xi, v)^2}\xi + \frac{A}{g(\xi, v)}v$$

Notemos que, para fazermos com que  $\eta$  e  $\xi$  estejam no mesmo cone de luz teremos que determinar que  $A < 0$ , então sem perda de generalidade, podemos tomar  $A = -1$  e, assim,

$$\eta = -\frac{1}{2g(\xi, v)^2}\xi - \frac{1}{g(\xi, v)}v \quad (2.2)$$

nos proverá um segundo campo de vetores normal globalmente definidos ao logo de uma subvariedade, de modo que esteja apontando para o futuro e satisfazendo  $g(\eta, \xi) = -1$ .

## 2.2 O espaço-tempo de Sitter

Iniciaremos esta seção definindo o que é o espaço-tempo de Sitter  $(n+2)$ -dimensional. Para isto, consideraremos que ela esteja imersa em um espaço-tempo Lorentziano  $\mathbb{L}^{n+3}$  com coordenadas  $(x_0, x_1, \dots, x_{n+2})$ . Daqui por diante, usaremos  $\langle, \rangle$  para se referir a métrica no espaço.

**Definição 2.6.** O modelo que representa o espaço-tempo de Sitter  $(n+2)$ -dimensional é a hiperquádrica

$$\mathbb{S}_1^{n+2} = \{x \in \mathbb{L}^{n+3} : \langle x, x \rangle = 1\}$$

consistindo de todos os vetores unitários do tipo-espaço em  $\mathbb{L}^{n+3}$  e dotado com a métrica de  $\mathbb{L}^{n+3}$ .

O espaço-tempo de Sitter  $\mathbb{S}_1^{n+2}$  é uma variedade Lorentziana  $(n+2)$ -dimensional completa e simplesmente conexa com curvatura seccional igual a 1. Essas afirmações seguem da consequência de que o espaço-tempo de Sitter é uma hiperquádrica pseudo-esférica como vimos no capítulo anterior.

Iremos tomar em  $\mathbb{S}_1^{n+2}$  a orientação temporal induzida pelo globalmente definido

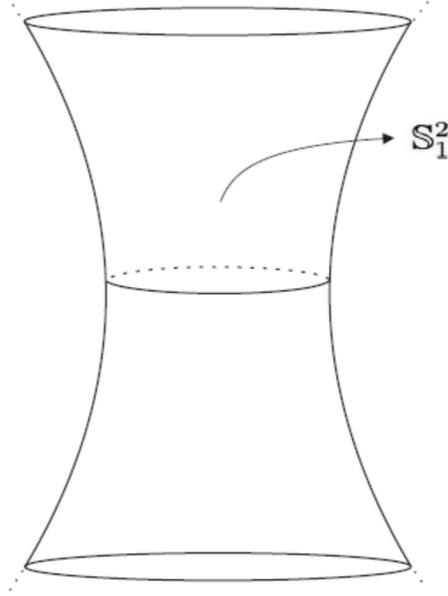


Figura 2.2: O espaço-tempo de Sitter no caso tridimensional

campo de vetores tipo-tempo  $e_0^* \in \mathfrak{X}(\mathbb{S}_1^{n+2})$  dada por

$$e_0^*(x) = e_0 - \langle e_0, x \rangle x = e_0 + x_0 x, \quad x \in \mathbb{S}_1^{n+2},$$

onde  $e_0 = (1, 0, 0, \dots, 0)$ . Observe que, para todo  $x \in \mathbb{S}_1^{n+2}$ ,

$$\begin{aligned} \langle e_0^*, e_0^* \rangle &= \langle e_0 - \langle e_0, x \rangle x, e_0 - \langle e_0, x \rangle x \rangle \\ &= \langle e_0, e_0 \rangle - \langle e_0, x \rangle \langle e_0, x \rangle - \langle e_0, x \rangle \langle e_0, x \rangle + \langle e_0, x \rangle^2 \langle x, x \rangle \\ &= -1 - 2 \langle e_0, x \rangle^2 + \langle e_0, x \rangle^2 \\ &= -1 - \langle e_0, x \rangle^2 \\ &\leq -1 < 0. \end{aligned}$$

Nós estamos interessados no caso onde a subvariedade  $\psi : \Sigma \rightarrow \mathbb{S}_1^{n+2} \subset \mathbb{L}^{n+3}$  está contida em uma hipersuperfície do tipo-luz no espaço-tempo de Sitter. Mas ainda, queremos encontrar uma base pseudo-ortogonal do tipo-luz  $\{\xi, \eta\}$  em  $\Sigma$  seguindo as ideias de construção do capítulo anterior. Identificaremos com  $\nabla$ ,  $\bar{\nabla}$  e  $\nabla^0$  as conexões de Levi-Civita de  $\Sigma$ ,  $\mathbb{S}_1^{n+2}$  e  $\mathbb{L}^{n+3}$ , respectivamente. Seja  $e_0^\perp$  a componente normal de  $e_0$  ao longo da subvariedade, isto é, para cada  $p \in \Sigma$  nós temos que a decomposição ortogonal

$$e_0 = e_0^\top + e_0^\perp + \langle e_0, \psi \rangle \psi, \quad (2.3)$$

2. Construções de subvariedades do tipo-espaço com codimensão 2 através das hipersuperfícies especiais do espaço-tempo de Sitter

---

onde  $e_0^\top \in \mathfrak{X}(\Sigma)$  é tangente em  $\Sigma$  e  $e_0^\perp \in \mathfrak{X}^\perp(\Sigma)$  é normal em  $\Sigma$ . Notemos que,

$$\begin{aligned} \langle e_0, e_0 \rangle &= \langle e_0^\top + e_0^\perp + \langle e_0, \psi \rangle \psi, e_0^\top + e_0^\perp + \langle e_0, \psi \rangle \psi \rangle \\ &= \langle e_0^\top, e_0^\top \rangle + \langle e_0^\perp, e_0^\perp \rangle + 2 \langle e_0, \psi \rangle \langle e_0^\top, \psi \rangle + 2 \langle e_0, \psi \rangle \langle e_0^\perp, \psi \rangle + \langle e_0, \psi \rangle^2 \\ &= \langle e_0^\top, e_0^\top \rangle + \langle e_0^\perp, e_0^\perp \rangle + 2 \langle e_0, \psi \rangle \langle e_0^\top + e_0^\perp, \psi \rangle + \langle e_0, \psi \rangle^2 \\ &= \langle e_0^\top, e_0^\top \rangle + \langle e_0^\perp, e_0^\perp \rangle + \langle e_0, \psi \rangle^2 \\ &= \|e_0^\top\|^2 + \langle e_0^\perp, e_0^\perp \rangle + \langle e_0, \psi \rangle^2. \end{aligned}$$

Logo,

$$\langle e_0^\perp, e_0^\perp \rangle = -1 - \|e_0^\top\|^2 - \langle e_0, \psi \rangle^2 \leq -1 < 0.$$

O vetor  $v$  dado em (2.1) possui expressão

$$v = \frac{e_0^\perp}{\|e_0^\perp\|} = \frac{e_0^\perp}{\sqrt{1 + \|e_0^\top\|^2 + \langle e_0, \psi \rangle^2}}. \quad (2.4)$$

Logo,

$$\begin{aligned} \langle \xi, v \rangle &= \left\langle \xi, \frac{e_0^\perp}{\sqrt{1 + \|e_0^\top\|^2 + \langle e_0, \psi \rangle^2}} \right\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + \|e_0^\top\|^2 + \langle e_0, \psi \rangle^2}} \langle \xi, e_0^\perp \rangle < 0. \end{aligned}$$

Portanto,  $\langle \xi, v \rangle < 0$  e usando a fórmula (2.2), o campo de vetores

$$\eta = -\frac{\langle e_0^\perp, e_0^\perp \rangle}{2 \langle \xi, e_0^\perp \rangle^2} \xi - \frac{1}{\langle \xi, e_0^\perp \rangle} e_0^\perp \quad (2.5)$$

nos fornece um segundo campo de vetores do tipo-luz globalmente definido ao longo da subvariedade que está apontando para o futuro e satisfaz  $\langle \xi, \eta \rangle = -1$ . Por outro lado, segue das equações de Gauss para subvariedades que a curvatura Riemanniana  $R$  de  $\Sigma$  é dada por

$$R(X, Y)Z = \langle X, Z \rangle Y - \langle Y, Z \rangle X + A_{\Pi(X, Z)} Y - A_{\Pi(Y, Z)} X$$

Para quaisquer  $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(\Sigma)$ , onde em nossa convenção

$$R(X, Y)Z = \nabla_{[X, Y]} Z - [\nabla_X, \nabla_Y] Z.$$

Em particular, tomando as fórmulas (1.20) e (1.21), a curvatura de Ricci e a Cur-

2. Construções de subvariedades do tipo-espaço com codimensão 2 através das hipersuperfícies especiais do espaço-tempo de Sitter

---

vatura escalar de  $\Sigma$  serão dadas, respectivamente, por

$$Ric(X, Y) = (n - 1) \langle X, Y \rangle + n \langle \mathbf{H}, \mathbf{II}(X, Y) \rangle + 2 \langle (A_\xi \circ A_\eta)X, Y \rangle \quad (2.6)$$

e

$$K = n(n - 1) + n^2 \langle \mathbf{H}, \mathbf{H} \rangle + 2\text{tr}(A_\xi \circ A_\eta) \quad (2.7)$$

### 2.2.1 Subvariedades de codimensão 2 através do cone de luz

Para obtermos as primeiras hipersuperfícies do tipo-luz do Espaço-Tempo de Sitter, iremos considerar o cone de luz do espaço-tempo  $(n+3)$ -dimensional Lorentz-Minkowski com vértice em  $a \in \mathbb{L}^{n+3}$

$$\Lambda_a^{\mathbb{L}^{n+3}} = \{x \in \mathbb{L}^{n+3} : \langle x - a, x - a \rangle = 0, x \neq a\}.$$

Queremos interceptar esses subconjuntos com o espaço-tempo de Sitter de dimensão  $(n + 2)$ . Então, tomemos  $a \in \mathbb{S}_1^{n+2}$  e observe que a condição  $\langle x - a, x - a \rangle = 0$  é equivalente a

$$\langle x, x \rangle + \langle a, a \rangle - 2 \langle x, a \rangle = 0$$

isto é, se  $x \in \mathbb{S}_1^{n+2} \cap \Lambda_a^{\mathbb{L}^{n+3}}$ , então  $\langle x, a \rangle = 1$ . Daqui por diante seremos capazes de criar as primeiras hipersuperfícies do tipo-luz dentro do Espaço-Tempo de Sitter onde nossa subvariedades do tipo-espaço de codimensão 2 estarão contidas. Definiremos, assim como no caso do Espaço-Tempo de Lorentz-Minkowski, o cone de luz de  $\mathbb{S}_1^{n+2}$ .

**Definição 2.7.** Seja  $a \in \mathbb{S}_1^{n+2}$  um ponto fixado do Espaço-Tempo de Sitter. O cone de luz de  $\mathbb{S}_1^{n+2}$  com o vértice em  $a$  é o subconjunto

$$\Lambda_a = \{x \in \mathbb{S}_1^{n+2} : \langle a, x \rangle = 1, x \neq a\}.$$

Segue da Definição 2.7 que um ponto  $x \in \mathbb{S}_1^{n+2}$  está contido em  $\Lambda_a$  se, e somente se,  $x - a$  é do tipo-luz. Isto é,

$$\Lambda_a = \{x \in \mathbb{S}_1^{n+2} : \langle x - a, x - a \rangle = 0, x \neq a\}.$$

Este subconjunto corresponde ao subconjunto de todos os pontos do Espaço-Tempo de Sitter que são alcançados através de uma geodésica do tipo-luz que sai do ponto  $a$ . Em particular, o cone de luz, assim como o cone de luz no espaço-tempo de Lorentz-Minkowski, ele possui duas componentes conexas. Nós iremos assumir que nossas (sempre conexas) subvariedades fatorizam através do cone futuro.

2. Construções de subvariedades do tipo-espaço com codimensão 2 através das hipersuperfícies especiais do espaço-tempo de Sitter

---

**Definição 2.8.** A Componente futura de  $\Lambda_a$  consiste de todos os pontos  $x \in \Lambda_a$  tais que o vetor do tipo-luz  $x - a$  está apontando para o futuro, isto é,

$$\Lambda_a^+ = \{x \in \mathbb{S}_1^{n+2} : \langle a, x \rangle = 1, \langle x - a, e_0 \rangle = -x_0 + a_0 < 0\}.$$

Respectivamente, a componente passado de  $\Lambda_a$  é o subconjunto

$$\Lambda_a^- = \{x \in \mathbb{S}_1^{n+2} : \langle a, x \rangle = 1, \langle x - a, e_0 \rangle = -x_0 + a_0 > 0\}$$

e este conjunto corresponderá a todos os pontos  $x \in \Lambda_a$  tal que o vetor do tipo-luz  $x - a$  esta apontando para o passado.

Seja  $\psi : \Sigma^n \rightarrow \mathbb{S}_1^{n+2}$  uma subvariedade de codimensão 2 e assumamos que  $\psi(\Sigma)$  fatoriza através da componente futura do cone de luz, com  $a \in \mathbb{S}_1^{n+2}$  o vértice de  $\Lambda_a$ , isto é,  $\psi(\Sigma) \subset \Lambda_a^+$ . Em outras palavras,  $\psi(p) \neq a$  para todo  $p \in \Sigma$ , e que satisfaz

$$\langle \psi, \psi \rangle = 1, \langle \psi, a \rangle = 1 \text{ e } \langle \psi - a, e_0 \rangle < 0.$$

Façamos

$$\xi = \psi - a$$

onde  $\xi$  será um campo de vetores do tipo-luz globalmente definido na subvariedade tangente ao Espaço-Tempo de Sitter e que está a apontando para o futuro. Portanto, podemos tomar  $\xi$  como o primeiro Campo de Vetores tipo-luz globalmente definido e apontando para o futuro, para a nossa base pseudo-ortogonal.

Nós definiremos a função  $u : \Sigma \rightarrow (0, +\infty)$  dada por

$$u = -\langle \psi - a, e_0 \rangle = \psi_0 - a_0 > 0.$$

Verifica-se que, o gradiente de  $u$  é da forma

$$\nabla u = -e_0^\top.$$

De fato, note que  $\nabla u \in \mathfrak{X}(\Sigma)$  tal que

$$\langle \nabla u, X \rangle = du_p \cdot X = X(u(p)), \quad \forall X \in \mathfrak{X}(\Sigma).$$

Daí,

$$\begin{aligned}
 \langle \nabla u, X \rangle &= X(u) \\
 &= X(-\langle \psi - a, e_0 \rangle) \\
 &= -(\langle \nabla_X(\psi - a), e_0 \rangle + \langle \psi - a, \nabla_X e_0 \rangle) \\
 &= -\langle \nabla_X(\psi - a), e_0 \rangle \\
 &= -\langle \nabla_X \psi - \nabla_X a, e_0 \rangle \\
 &= -\langle \nabla_X \psi, e_0 \rangle \\
 &= -\langle \nabla_X \psi, e_0^\top + e_0^\perp + \langle \psi, e_0 \rangle \psi \rangle \\
 &= -\langle \nabla_X \psi, e_0^\top \rangle - \langle \nabla_X \psi, e_0^\perp \rangle - \langle \psi, e_0 \rangle \langle \nabla_X \psi, \psi \rangle \\
 &= -\langle \nabla_X \psi, e_0^\top \rangle \\
 &= -\langle X(\psi), e_0^\top \rangle = -\langle e_0^\top, X \rangle.
 \end{aligned} \tag{2.8}$$

Nestas condições,  $\nabla u = -e_0^\top$ .

Uma vez que,  $e_0 = e_0^\top + e_0^\perp + \langle \psi, e_0 \rangle \psi$  como em (2.3), obtemos a expressão

$$e_0 = e_0^\perp - \nabla u - (u + a_0)\psi \tag{2.9}$$

usando (2.4) e (2.9), nós deduzimos que

$$v = \frac{1}{\sqrt{1 + \|\nabla u\|^2 + (u + a_0)^2}}(e_0 + \nabla u + (u + a_0)\psi)$$

e

$$\begin{aligned}
 \langle \xi, v \rangle &= \left\langle \psi - a, \frac{1}{\sqrt{1 + \|\nabla u\|^2 + (u + a_0)^2}}(e_0 + \nabla u + (u + a_0)\psi) \right\rangle \\
 &= \frac{1}{\sqrt{1 + \|\nabla u\|^2 + (u + a_0)^2}} \langle \psi - a, e_0 + \nabla u + (u + a_0)\psi \rangle \\
 &= \frac{1}{\sqrt{1 + \|\nabla u\|^2 + (u + a_0)^2}} [\langle \psi - a, e_0 \rangle + \langle \psi - a, \nabla u \rangle + \langle \psi - a, (u + a_0)\psi \rangle] \\
 &= \frac{1}{\sqrt{1 + \|\nabla u\|^2 + (u + a_0)^2}} [\langle \psi - a, e_0 \rangle + 0 + (u + a_0)(\langle \psi, \psi \rangle - \langle \psi, a \rangle)] \\
 &= \frac{1}{\sqrt{1 + \|\nabla u\|^2 + (u + a_0)^2}} [\langle \psi - a, e_0 \rangle + (u + a_0)(1 - 1)] \\
 &= \frac{1}{\sqrt{1 + \|\nabla u\|^2 + (u + a_0)^2}} \langle \psi - a, e_0 \rangle
 \end{aligned}$$

2. Construções de subvariedades do tipo-espaço com codimensão 2 através das hipersuperfícies especiais do espaço-tempo de Sitter

---

Logo,

$$\begin{aligned}\langle \xi, v \rangle &= \frac{1}{\sqrt{1 + \|\nabla u\|^2 + (u + a_0)^2}} \langle \psi - a, e_0 \rangle \\ &= -\frac{u}{\sqrt{1 + \|\nabla u\|^2 + (u + a_0)^2}}\end{aligned}$$

Portanto, de (2.2) nós obtemos

$$\eta = -\frac{1 + \|\nabla u\|^2 + (u + a_0)^2}{2u^2} \xi + \frac{1}{u} e_0^\perp. \quad (2.10)$$

Seguindo todas as informações adquiridas até o momento, podemos criar a seguinte Proposição.

**Proposição 2.5.** Seja  $\psi : \Sigma^n \rightarrow \Lambda_a^+ \subset \mathbb{S}_1^{n+2}$  uma subvariedade tipo-espaço de codimensão 2 localizada no cone de luz futuro  $\Lambda_a^+$ . Então,

$$\xi = \psi - a \text{ e } \eta = -\frac{1 + \|\nabla u\|^2 + (u + a_0)^2}{2u^2} \xi + \frac{1}{u} e_0^\perp \quad (2.11)$$

são dois campos de vetores normal tipo-luz globalmente definidos ao longo da subvariedade, que estão apontando para o futuro que satisfaz  $\langle \xi, \eta \rangle = -1$ .

Agora, identificaremos os operadores de Weingarten.

**Proposição 2.6.** Seja  $\psi : \Sigma^n \rightarrow \Lambda_a^+ \subset \mathbb{S}_1^{n+2}$  uma subvariedade tipo-espaço de codimensão 2 localizada no cone de luz futuro  $\Lambda_a^+$ . Então,

$$A_\xi = I \text{ e } A_\eta = -\frac{1 + \|\nabla u\|^2 - u^2 + a_0^2}{2u^2} I + \frac{1}{u} \nabla^2 u \quad (2.12)$$

são os operadores de Weingarten associados a  $\xi$  e  $\eta$ , respectivamente. Em particular, a curvatura média luz serão dadas por

$$\theta_\xi = 1 \text{ e } \theta_\eta = \frac{2u\Delta u - n(1 + \|\nabla u\|^2 - u^2 + a_0)^2}{2nu^2} \quad (2.13)$$

onde  $\nabla^2$  e  $\Delta$  representa, respectivamente, a Hessiana e o Operador Laplaciano.

*Demonstração.* Aplicando a fórmula de Weingarten (1.7), nós temos que a expressão

$$\bar{\nabla}_X \xi = \nabla_X^\perp \xi + A_\xi X = 0 + A_\xi X = X$$

2. Construções de subvariedades do tipo-espaço com codimensão 2 através das hipersuperfícies especiais do espaço-tempo de Sitter

---

Dados  $X, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma)$  temos

$$\begin{aligned}
\langle \Pi(X, Y), \eta \rangle &= \left\langle \Pi(X, Y), -\frac{1 + \|\nabla u\|^2 + (u + a_0)^2}{2u^2} \xi + \frac{1}{u} e_0^\perp \right\rangle \\
&= \left\langle \Pi(X, Y), -\frac{1 + \|\nabla u\|^2 + (u + a_0)^2}{2u^2} \xi \right\rangle + \left\langle \Pi(X, Y), \frac{1}{u} e_0^\perp \right\rangle \\
&= -\frac{1 + \|\nabla u\|^2 + (u + a_0)^2}{2u^2} \langle \Pi(X, Y), \xi \rangle + \frac{1}{u} \langle \Pi(X, Y), e_0^\perp \rangle \\
&= -\frac{1 + \|\nabla u\|^2 + (u + a_0)^2}{2u^2} \langle A_\xi X, Y \rangle + \frac{1}{u} \langle A_{e_0^\perp} X, Y \rangle.
\end{aligned} \tag{2.14}$$

Lembrando que

$$\langle II(X, Y), \eta \rangle = \langle A_\eta X, Y \rangle \tag{2.15}$$

e substituindo (2.15) em (2.14), teremos

$$\langle A_\eta X, Y \rangle = -\frac{1 + \|\nabla u\|^2 + (u + a_0)^2}{2u^2} \langle A_\xi X, Y \rangle + \frac{1}{u} \langle A_{e_0^\perp} X, Y \rangle,$$

desse modo

$$A_\eta X = -\frac{1 + \|\nabla u\|^2 + (u + a_0)^2}{2u^2} A_\xi X + \frac{1}{u} A_{e_0^\perp} X.$$

Segue que o Operador de Weingarten  $A_\eta$  será dado por

$$A_\eta = -\frac{1 + \|\nabla u\|^2 + (u + a_0)^2}{2u^2} A_\xi + \frac{1}{u} A_{e_0^\perp}$$

Usando a fórmula (2.9), para cada  $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$

$$0 = \nabla_X^0 e_0 = \nabla_X^0 e_0^\perp - \nabla_X^0 \nabla u - \nabla_X^0 ((u + a_0)\psi). \tag{2.16}$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
\nabla_X^0 e_0^\perp &= \nabla_X^\perp e_0^\perp + A_{e_0^\perp} X, \\
\nabla_X^0 \nabla u &= \bar{\nabla}_X \nabla u - \langle X, \nabla u \rangle \psi = \nabla_X \nabla u - \Pi(\nabla u, X) - X(u)\psi \text{ e} \\
\nabla_X^0 ((u + a_0)\psi) &= X(u)\psi + (u + a_0)X.
\end{aligned}$$

Desse modo, inserindo as expressões (2.16) temos

$$0 = \nabla_X^\perp e_0^\perp + A_{e_0^\perp} X - \nabla_X \nabla u + \Pi(\nabla u, X) - (u + a_0)X.$$

E, em particular,

$$A_{e_0^\perp} X = \nabla_X \nabla u + (u + a_0)X.$$

2. Construções de subvariedades do tipo-espaço com codimensão 2 através das hipersuperfícies especiais do espaço-tempo de Sitter

---

Nestas condições,

$$\begin{aligned} A_\eta &= -\frac{1 + \|\nabla u\|^2 + (u + a_0)^2}{2u^2}I + \frac{1}{u}(\nabla^2 u + (u + a_0)I) \\ &= -\frac{1 + \|\nabla u\|^2 - u^2 + a_0^2}{2u^2}I + \frac{1}{u}\nabla^2 u. \end{aligned}$$

Como queríamos demonstrar. Finalmente, tomando o traço nas expressões  $A_\xi$  e  $A_\eta$  nós obtemos (2.13).  $\square$

Note que  $\langle \eta, \eta \rangle = 0$  tem-se  $\langle \nabla_X^\perp \eta, \eta \rangle = 0$  e usando o fato de que  $\langle \xi, \eta \rangle = -1$  segue que  $\langle \nabla_X^\perp \eta, \xi \rangle = 0$ . Portanto,  $\nabla_X^\perp \eta = 0$ . Uma vez que,  $\nabla_X^\perp \xi = 0$ , a base pseudo-ortogonal  $\{\xi, \eta\}$  será paralela no fibrado normal e, em particular, a conexão será plana.

Usando a Proposição (2.6) e a fórmula (1.18), o campo de vetores curvatura média de uma subvariedade do tipo-espaço de codimensão 2,  $\Sigma$ , localizada na componente futura do cone de luz,  $\Lambda_a^+$ , do Espaço-Tempo de Sitter é dado por

$$\mathbf{H} = -\frac{1}{2nu^2}(2u\Delta u - n(1 + \|\nabla u\|^2 - u^2 + a_0))\xi - \eta$$

e, em particular,

$$\langle \mathbf{H}, \mathbf{H} \rangle = -\frac{1}{nu^2}(2u\Delta u - n(1 + \|\nabla u\|^2 - u^2 + a_0^2)). \quad (2.17)$$

Portanto,  $M$  é marginalmente aprisionada se, e somente se,

$$2u\Delta u - n(1 + \|\nabla u\|^2 - u^2 + a_0^2) = 0$$

em  $\Sigma$ , e neste caso  $\Sigma$  é necessariamente marginalmente aprisionada no passado desde que  $\theta_\xi = 1 > 0$ . Pelas fórmulas (2.6) e (2.7) nós obtemos a expressão para a curvatura de Ricci e a curvatura escalar de  $\Sigma$ ,

$$\begin{aligned} Ric(X, Y) &= (n - 1)(1 + \langle \mathbf{H}, \mathbf{H} \rangle) \langle X, Y \rangle \\ &\quad + \frac{n - 2}{nu}(\Delta u \langle X, Y \rangle - n \text{Hess } u(X, Y)), \end{aligned} \quad (2.18)$$

e

$$K = n(n - 1)(1 + \langle \mathbf{H}, \mathbf{H} \rangle). \quad (2.19)$$

**Corolário 2.7.** Seja  $\psi : \Sigma^n \rightarrow \Lambda_a^+ \subset \mathbb{S}_1^{n+2}$  uma subvariedade do tipo-espaço localizada na componente futura do cone de luz  $\Lambda_a^+$ . São equivalentes as afirmações:

- (i)  $\Sigma$  é marginalmente aprisionada (necessariamente no passado);

2. Construções de subvariedades do tipo-espaço com codimensão 2 através das hipersuperfícies especiais do espaço-tempo de Sitter

---

(ii) A função positiva  $u = -\langle \psi - a, e_0 \rangle$  satisfaz a equação diferencial

$$2u\Delta u - n(1 + \|\nabla u\|^2 - u + a_0^2) = 0 \text{ em } \Sigma \quad (2.20)$$

(iii)  $\Sigma$  possui Curvatura Escalar constante  $K = n(n - 1)$

**Observação 2.1.** Verifica-se que,  $\Sigma$  é aprisionada se, e somente se,  $2u\Delta u - n(1 + \|\nabla u\|^2 - u + a_0^2) > 0$ , e, portanto,  $\Sigma$  é fracamente aprisionada se, e somente se,  $2u\Delta u - n(1 + \|\nabla u\|^2 - u + a_0^2) \geq 0$ .

Ao longo desse capítulo, iremos denotar para  $u$  a função positiva em  $\Sigma$  dada por  $u = -\langle \psi - a, e_0 \rangle > 0$ .

**Exemplo 2.2.** Seja  $\psi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{S}_1^4 \subset \mathbb{L}^5$ , com  $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x, y \in (0, \frac{\pi}{2})\}$ , uma aplicação dada por

$$\psi(x, y) = (1, \sin(x), \cos(x) \cos(y), \cos(x) \sin(y), 1)$$

Segue da Definição 2.8 que  $\psi$  fatoriza através da componente futura do cone de luz, com o vértice  $a = (0, 0, 0, 0, 1) \in \mathbb{S}_1^4$ . Dado  $(x, y) \in U$ , tem-se

$$J_\psi(x, y) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \cos(x) & 0 \\ -\sin(x) \cos(y) & -\cos(x) \sin(y) \\ -\sin(x) \sin(y) & \cos(x) \cos(y) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Logo, para  $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$  temos

$$d\psi_{(x,y)}v = (0, v_1 \cos(x), -v_1 \sin(x) \cos(y) - v_2 \cos(x) \sin(y), \\ -v_1 \sin(x) \sin(y) + v_2 \cos(x) \cos(y), 0).$$

2. Construções de subvariedades do tipo-espaço com codimensão 2 através das hipersuperfícies especiais do espaço-tempo de Sitter

---

Então, dado  $w = (w_1, w_2) \in \mathbb{R}^2$ , tem-se

$$\begin{aligned}
 \langle d\psi_{(x,y)}v, d\psi_{(x,y)}w \rangle &= v_1w_1 \cos^2(x) + v_1w_1 \sin^2(x) \cos^2(y) \\
 &\quad + v_1w_2 \cos(x)\cos(y) \sin(x) \sin(y) \\
 &\quad + v_2w_1 \sin(y) \sin(x) \cos(x) \cos(y) \\
 &\quad + v_2w_2 \cos^2(x) \sin^2(y) + v_1w_1 \sin^2(x) \sin^2(y) \\
 &\quad - v_1w_2 \sin(y) \sin(x) \cos(x) \cos(y) \\
 &\quad - v_2w_1 \sin(y) \sin(x) \cos(x) \cos(y) \\
 &\quad + w_2v_2 \cos^2(x) \cos^2(y) \\
 &= v_1w_1 \cos^2(x) + v_1w_1 \sin^2(x) + v_2w_2 \cos^2(x) \\
 &= v_1w_1 + v_2w_2 \cos^2(x)
 \end{aligned}$$

isto é,

$$\psi^*(\langle, \rangle) = dx^2 + \cos^2(x)dy^2.$$

Isto significa que a métrica induzida é uma métrica Warped com a função Warped  $\cos(x)$ .

Definindo  $u(x, y) = -\langle \psi(x, y) - a, e_0 \rangle$ , para  $(x, y) \in U$  e  $e_0 = (1, 0, 0, 0, 0)$  temos

$$\begin{aligned}
 u(x, y) &= -\langle \psi(x, y) - a, e_0 \rangle \\
 &= -\langle (1, \sin(x), \cos(x) \cos(y), \cos(x) \sin(y), 0), e_0 \rangle \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

Calculando o gradiente e o operador laplaciano de  $u$ , verifica-se

$$\Delta u = 0 \text{ e } \nabla u = 0$$

Segue do Corolário 2.7 item (ii) que a subvariedade é marginalmente aprisionada.

**Exemplo 2.3.** Seja  $\psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{S}_1^4 \subset \mathbb{L}^5$  uma aplicação dada por

$$\psi(x, y) = (\cosh(x) \cosh(y), \cosh(x) \sinh(y), \sinh(x), 1, 1)$$

Segue da Definição 2.8 que  $\psi$  fatoriza através da componente futura do cone de luz , com o vértice  $a = (0, 0, 0, 0, 1) \in \mathbb{S}_1^4$ . Dado  $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ , tem-se

2. Construções de subvariedades do tipo-espaço com codimensão 2 através das hipersuperfícies especiais do espaço-tempo de Sitter

---

$$J_\psi(x, y) = \begin{bmatrix} \sinh(x) \cosh(y) & \cosh(x) \sinh(y) \\ \sinh(x) \sinh(y) & \cosh(x) \cosh(y) \\ \cosh(x) & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Logo,

$$\begin{aligned} d\psi_{(x,y)}v &= (v_1 \sinh(x) \cosh(y) + v_2 \cosh(x) \sinh(y), \\ &v_1 \sinh(x) \sinh(y) + v_2 \cosh(x) \cosh(y), v_1 \cosh(x), 0, 0) \end{aligned}$$

Então, dado  $w = (w_1, w_2) \in \mathbb{R}^2$ , tem-se

$$\langle d\psi_{(x,y)}v, d\psi_{(x,y)}w \rangle = v_1 w_1 + v_2 w_2 \cosh^2(x).$$

Isto é, a métrica induzida por  $\psi$  é uma métrica Warped do tipo

$$\psi^*(\langle, \rangle) = dx^2 + \cosh^2(x)dy^2$$

com a função Warped dada por  $\cosh(x)$ .

Seja  $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{S}_1^4$  dada por  $u(x, y) = -\langle \psi(x, y) - a, e_0 \rangle$ . Dados  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  e  $e_0 = (1, 0, 0, 0, 0)$  temos

$$\begin{aligned} u(x, y) &= -\langle \psi(x, y) - a, e_0 \rangle \\ &= \cosh(x) \cosh(y) > 0. \end{aligned}$$

Portanto, podemos calcular o gradiente e o operador laplaciano de  $u$ . Para isto, observe que a matriz da métrica é dada por

$$[g_{i,j}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cosh^2(x) \end{bmatrix}$$

e a matriz inversa será representada por

$$[g^{i,j}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\cosh^2(x)} \end{bmatrix}.$$

Além disso, as derivadas parciais serão dadas por  $\frac{\partial u}{\partial x} = \sinh(x) \cosh(y)$  e  $\frac{\partial u}{\partial y} = \cosh(x) \sinh(y)$ . Nestas condições, o gradiente de  $u$ ,  $\nabla u$ , será dada por

$$\nabla u = (\sinh(x) \cosh(y), \frac{\sinh(y)}{\cosh(y)}).$$

Logo,

$$\begin{aligned}
 \|\nabla u\|^2 &= \sinh^2(x) \cosh^2(y) + \sinh^2(y) \\
 &= \sinh^2(x) \cosh^2(y) - 1 + \cosh^2(y) \\
 &= -1 + \cosh^2(y) [\sinh^2(x) + 1] \\
 &= -1 + \cosh^2(y) \cosh^2(x) \\
 &= -1 + u^2.
 \end{aligned}$$

Por outro lado, para obtermos o operador laplaciano iremos levar em consideração o determinante da matriz da métrica. Note que

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial x} (\sqrt{|\det(g_{i,j})|} (g^{1,1} \frac{\partial u}{\partial x})) &= \frac{\partial}{\partial x} (\cosh(x) \cosh(y) \sinh(x)) \\
 &= \cosh(y) [\sinh^2(x) + \cosh^2(x)]
 \end{aligned} \tag{2.21}$$

e

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial y} (\sqrt{|\det(g_{i,j})|} (g^{2,2} \frac{\partial u}{\partial y})) &= \frac{\partial}{\partial y} (\cosh(x) [\frac{1}{\cosh^2(x)} \cosh(x) \sinh(y)]) \\
 &= \cosh(y).
 \end{aligned} \tag{2.22}$$

Então, pela Definição 1.25, temos

$$\begin{aligned}
 \Delta u &= \frac{1}{\cosh(x)} (\cosh(y) [\sinh^2(x) + \cosh^2(x)] + \cosh(y)) \\
 &= \frac{1}{\cosh(x)} (\cosh(y) [1 + \sinh^2(x) + \cosh^2(x)]) \\
 &= 2 \frac{\cosh(y)}{\cosh(x)} \cosh^2(x) \\
 &= 2 \cosh(y) \cosh(x) \\
 &= 2u.
 \end{aligned}$$

Portanto,

$$2u\Delta u - n(1 + \|\nabla u\|^2 - u^2) = 2u\Delta u = 4u^2 > 0.$$

Donde podemos concluir que a subvariedade é aprisionada.

## 2.2.2 Subvariedades de codimensão 2 através do passado infinito do modelo Steady State Space

Abordaremos nessa seção um caso interessante de hipersuperfície do tipo-luz do espaço-tempo de Sitter. Seja  $a \in \mathbb{L}^{n+3}$ , com  $a \neq 0$ , um vetor do tipo-luz e consideremos

2. Construções de subvariedades do tipo-espaço com codimensão 2 através das hipersuperfícies especiais do espaço-tempo de Sitter

---

a hipersuperfície do tipo-luz

$$L = \{x \in \mathbb{S}_1^{n+2} : \langle a, x \rangle = 0\}. \quad (2.23)$$

Suponha que  $a$  esteja apontando para o passado, isto é,  $\langle a, e_0 \rangle > 0$ , onde  $e_0 = (1, 0, \dots, 0)$ . Então, a região aberta do espaço-tempo de Sitter  $\mathbb{S}_1^{n+2}$  dada por

$$\mathcal{H}^{n+2} = \{x \in \mathbb{S}_1^{n+2} : \langle a, x \rangle > 0\}$$

é chamada de Steady State Space.

Verifica-se que,  $\mathcal{H}^{n+2}$  é estendível e não-completo. De fato,  $\mathcal{H}^{n+2}$  é isométrico a um aberto de  $\mathbb{S}_1^{n+2}$  e, por isso é não-completo. Em particular,  $\mathcal{H}^{n+2}$  é somente uma metade do espaço-tempo de Sitter. A sua fronteira, como um subconjunto de  $\mathbb{S}_1^{n+2}$ , será (2.23) cuja a topologia é equivalente a de  $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^n$ . Para uma melhor compreensão sobre as propriedades recomenda-se a leitura das referências [6], pág. 127, e [10].

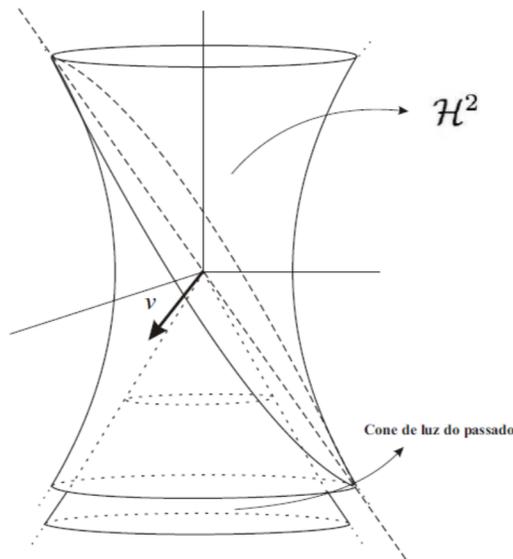


Figura 2.3: O Steady State Space no caso tridimensional

Podemos olhar o modelo steady state space como um produto warped Lorentziano, tomando a função Warped  $f = \exp(t)$ , consideraremos  $\mathcal{H}^{n+2}$  como  $-\mathbb{R} \times_{\exp(t)} \mathbb{R}^{n+1}$ , que corresponde ao modelo steady state do universo proposto por Bondi, Gold e Hoyle (cf. [6], pág. 126). O que reforça a não-completude de  $\mathcal{H}^{n+2}$ , uma vez que a métrica do produto Warped é indefinida. Esse exemplo pode ser visto em [15], pág. 209, no Exemplo 7.41.

**Definição 2.9.** Diremos que o passado infinito do modelo steady state space  $\mathcal{H}^{n+2}$  é

2. Construções de subvariedades do tipo-espaço com codimensão 2 através das hipersuperfícies especiais do espaço-tempo de Sitter

---

a hipersuperfície do tipo-luz definida como

$$\mathcal{I}^- = \{x \in \mathbb{S}_1^{n+2} : \langle a, x \rangle = 0\}, \quad (2.24)$$

onde  $a \in \mathbb{L}^{n+3}$  é um vetor do tipo-luz que está apontando para o passado. Analogamente, diremos que o futuro infinito do modelo steady state space é a hipersuperfície do tipo-espaço definida como

$$\mathcal{I}^+ = \{x \in \mathbb{S}_1^{n+2} : \langle a, x \rangle = \infty\}. \quad (2.25)$$

O steady state space possui uma propriedade especial, o qual admite uma folheação por meio de hipersuperfícies do tipo-espaço totalmente umbílicas

$$L_\tau = \{x \in \mathcal{H}^{n+2} : \langle x, a \rangle = \tau\}, \quad \tau > 0$$

possuindo curvatura média constante  $H = 1$  com respeito a aplicação de Gauss

$$N_\tau(x) = x - \frac{1}{\tau}a$$

que está apontando para o futuro. ( cf. [1], pág. 712)

Vale ressaltar que cada  $L_\tau$  é isométrico ao espaço Euclidiano (cf. [10], pág 918). Neste contexto, iremos dizer que uma hipersuperfície tipo-espaço  $\Sigma$  em  $\mathcal{H}^{n+2}$  é limitada no futuro infinito se existir um  $\tau_0 > 0$  tal que

$$\psi(\Sigma) \subset \{x \in \mathcal{H}^{n+2} : \langle x, a \rangle \leq \tau_0\},$$

e diremos que ela é limitada no passado infinito se existir um  $\tau_1 > 0$  tal que

$$\psi(\Sigma) \subset \{x \in \mathcal{H}^{n+2} : \langle x, a \rangle \geq \tau_1\}.$$

Diremos que  $\Sigma$  é limitada no infinito se ambos passado e futuro infinitos ocorrem, isto é, existem  $\tau_0, \tau_1$  tal que  $0 < \tau_1 < \tau_0$ . Em outras palavras,  $\psi(\Sigma)$  está entra as folhas  $L_{\tau_1}$  e  $L_{\tau_0}$ .

Iremos agora tratar o caso das subvariedades do tipo-espaço de codimensão 2 que fatoriza através do passado infinito  $\mathcal{I}^-$ . Então, seja  $\psi : \Sigma^n \rightarrow \mathcal{I}^- \subset \mathbb{S}_1^{n+2}$  uma subvariedade do tipo-espaço que fatoriza através do passado infinito  $\mathcal{I}^-$  do modelo steady state space. Neste caso, tomemos

$$\xi = -a,$$

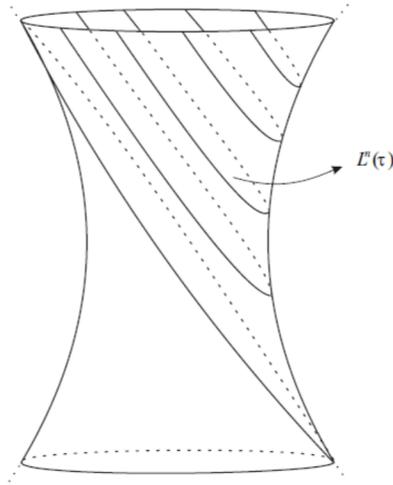


Figura 2.4: O Steady State Space sendo folheado tridimensionalmente

note que,  $\xi$  é um campo de vetores do tipo-luz globalmente definidos que está apontando para o futuro que, por sua vez, é normal a subvariedade. Desse modo,  $\xi$  pode ser escolhido como o primeiro campo de vetores tipo-luz globalmente definido para a construção da nossa base pseudo-ortogonal. Defina a função  $u : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $u = -\langle e_0, \psi \rangle = \psi_0$ . Assim, como visto anteriormente  $\nabla u = -e_0^\top$  e  $v$  será dada pela expressão

$$v = \frac{e_0^\perp}{\sqrt{1 + \|\nabla u\|^2 + u^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \|\nabla u\|^2 + u^2}}(e_0 + \nabla u + u\psi)$$

satisfazendo

$$\begin{aligned} \langle \xi, v \rangle &= \left\langle -a, \frac{e_0^\perp}{\sqrt{1 + \|\nabla u\|^2 + u^2}} \right\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + \|\nabla u\|^2 + u^2}} \langle a, e_0^\perp \rangle \\ &< 0. \end{aligned}$$

Verifica-se que,  $\langle a, e_0^\perp \rangle = \langle a, e_0 \rangle$ . De fato,

$$\begin{aligned} \langle a, e_0^\perp \rangle &= \langle a, e_0 + \nabla u + u\psi \rangle \\ &= \langle a, e_0 \rangle + \langle a, \nabla u \rangle + \langle a, u\psi \rangle \\ &= \langle a, e_0 \rangle + 0 + 0 \\ &= \langle a, e_0 \rangle. \end{aligned}$$

2. Construções de subvariedades do tipo-espaço com codimensão 2 através das hipersuperfícies especiais do espaço-tempo de Sitter

---

Nestas condições, segue da equação (2.2) que

$$\eta = -\frac{1 + \|\nabla u\|^2 + u^2}{2\langle a, e_0 \rangle^2} \xi + \frac{1}{\langle a, e_0 \rangle} e_0^\perp.$$

Assim, como anteriormente podemos enunciar a próxima Proposição.

**Proposição 2.8.** Seja  $\psi : \Sigma^n \rightarrow \mathcal{I}^- \subset \mathbb{S}_1^{n+2}$  uma subvariedade do tipo-espaço de codimensão 2 que fatoriza através do passado infinito  $\mathcal{I}^-$  do modelo steady state space. Então,

$$\xi = -a \quad \text{e} \quad \eta = -\frac{1 + \|\nabla u\|^2 + u^2}{2\langle a, e_0 \rangle^2} \xi + \frac{1}{\langle a, e_0 \rangle} e_0^\perp$$

são dois campos de vetores normais do tipo-luz globalmente definidos ao longo da subvariedade que estão apontando para o futuro e que satisfaz  $\langle \xi, \eta \rangle = -1$ .

**Proposição 2.9.** Seja  $\psi : \Sigma^n \rightarrow \mathcal{I}^- \subset \mathbb{S}_1^{n+2}$  uma subvariedade do tipo-espaço de codimensão 2 que fatoriza através do passado infinito  $\mathcal{I}^-$  do modelo steady state space. Então, os operadores de Weingarten associados a  $\xi$  e  $\eta$  são, respectivamente,

$$A_\xi = 0 \quad \text{e} \quad A_\eta = \frac{1}{\langle a, e_0 \rangle} (\nabla^2 u + uI).$$

Em particular,

$$\theta_\xi = 0 \quad \text{e} \quad \theta_\eta = \frac{1}{n\langle a, e_0 \rangle} (\Delta u + nu). \quad (2.26)$$

*Demonstração.* Note que  $\bar{\nabla}_X \xi = 0$ . De fato,

$$\bar{\nabla}_X \xi = \bar{\nabla}_X (-a) = 0$$

Aplicando a fórmula de Weingarten (1.7) em  $\bar{\nabla}_X \xi$ , obtemos a expressão

$$0 = \bar{\nabla}_X \xi = \nabla_X^\perp \xi + A_\xi X = 0 + A_\xi X \Rightarrow A_\xi X = 0.$$

Portanto,  $A_\xi = 0$ .

Note que, dados  $X, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma)$  temos

$$\begin{aligned}
\langle \text{II}(X, Y), \eta \rangle &= \left\langle \text{II}(X, Y), -\frac{1 + \|\nabla u\|^2 + u^2}{2 \langle a, e_0 \rangle^2} \xi + \frac{1}{\langle a, e_0 \rangle} e_0^\perp \right\rangle \\
&= \left\langle \text{II}(X, Y), -\frac{1 + \|\nabla u\|^2 + u^2}{2 \langle a, e_0 \rangle^2} \xi \right\rangle + \left\langle \text{II}(X, Y), \frac{1}{\langle a, e_0 \rangle} e_0^\perp \right\rangle \\
&= -\frac{1 + \|\nabla u\|^2 + u^2}{2 \langle a, e_0 \rangle^2} \langle \text{II}(X, Y), \xi \rangle + \frac{1}{\langle a, e_0 \rangle} \langle \text{II}(X, Y), e_0^\perp \rangle \quad (2.27) \\
&= -\frac{1 + \|\nabla u\|^2 + u^2}{2 \langle a, e_0 \rangle^2} \langle A_\xi X, Y \rangle + \frac{1}{\langle a, e_0 \rangle} \langle A_{e_0^\perp} X, Y \rangle \\
&= \frac{1}{\langle a, e_0 \rangle} \langle A_{e_0^\perp} X, Y \rangle.
\end{aligned}$$

Uma vez que,

$$\langle \text{II}(X, Y), \eta \rangle = \langle A_\eta X, Y \rangle \quad (2.28)$$

temos

$$\langle A_\eta X, Y \rangle = \frac{1}{\langle a, e_0 \rangle} \langle A_{e_0^\perp} X, Y \rangle.$$

Desse modo,

$$A_\eta X = \frac{1}{\langle a, e_0 \rangle} A_{e_0^\perp} X$$

Segue que o Operador de Weingarten  $A_\eta$  será dado por

$$A_\eta = \frac{1}{\langle a, e_0 \rangle} A_{e_0^\perp}.$$

Usando a fórmula (2.9), para cada  $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$

$$0 = \nabla_X^0 e_0 = \nabla_X^0 e_0^\perp - \nabla_X^0 \nabla u - \nabla_X^0 (u\psi) \quad (2.29)$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
\nabla_X^0 e_0^\perp &= \nabla_X^\perp e_0^\perp + A_{e_0^\perp} X, \\
\nabla_X^0 \nabla u &= \bar{\nabla}_X \nabla u - \langle X, \nabla u \rangle \psi = \nabla_X \nabla u - \text{II}(\nabla u, X) - X(u)\psi \text{ e} \\
\nabla_X^0 (u\psi) &= X(u)\psi + uX.
\end{aligned}$$

Desse modo, inserindo as expressões (2.29) temos que

$$0 = \nabla_X^\perp e_0^\perp + A_{e_0^\perp} X - \nabla_X \nabla u + \text{II}(\nabla u, X) - uX.$$

E, em particular,

$$A_{e_0^\perp} X = \nabla_X \nabla u + uX.$$

Portanto, temos

$$A_\eta = \frac{1}{\langle a, e_0 \rangle} (\nabla^2 u + uI)$$

Como queríamos demonstrar. Finalmente, tomando o traço nas expressões  $A_\xi$  e  $A_\eta$  obtemos (2.26).  $\square$

**Observação 2.2.** Segue da Proposição 2.9 e da fórmula (1.18) que o campo de vetores curvatura média será dada por

$$\mathbf{H} = -\frac{1}{n \langle a, e_0 \rangle} (\Delta u + nu) \xi = \frac{1}{n \langle a, e_0 \rangle} (\Delta u + nu) a. \quad (2.30)$$

Nestas condições,  $\langle \mathbf{H}, \mathbf{H} \rangle = 0$ .

Devido a Observação 2.2 temos o seguinte resultado.

**Proposição 2.10.** Seja  $\psi : \Sigma^n \rightarrow \mathcal{S}^- \subset \mathbb{S}_1^{n+2}$  uma subvariedade do tipo-espaço de codimensão 2 que fatoriza através do passado infinito  $\mathcal{S}^-$  do modelo steady state space. Então,  $\Sigma$  é marginalmente aprisionada com exceção do ponto onde  $u = -\langle \psi, e_0 \rangle$  que satisfaz  $\Delta u + nu = 0$  em  $\Sigma$ .

O resultado segue, e sem perda de generalidade, se assumirmos  $a = (-1, 0, \dots, 0, -1)$  um vetor do tipo-luz que está apontando para o passado.

## Capítulo 3

# Subvariedades compactas do tipo-espaço de codimensão 2 através das hipersuperfícies especiais do espaço-tempo de Sitter

Nesta seção iremos caracterizar os subvariedades compactas de codimensão 2 que são determinadas através do cone de luz e do passado infinito do modelo steady state space.

Primeiramente, iniciaremos esse capítulo com um Lema bastante técnico que pode ser encontrado no artigo [3] no Lema 5.2.

**Lema 3.1.** Seja  $\langle, \rangle$  uma métrica completa em uma variedade Riemanniana  $\Sigma$  e seja  $r$  a função distância de origem fixa  $o \in \Sigma$ . Se a função  $w$  satisfaz

$$w^{2/(n-2)}(p) \geq \frac{C}{r(p) \log(r(p))}, \quad r(p) \gg 1, \quad (3.1)$$

com  $C$  uma constante positiva, então a métrica conforme  $\widetilde{\langle, \rangle} = w^{4/(n-2)} \langle, \rangle$  é completa.

*Demonstração.* Seja  $\Omega = \{p \in \Sigma : r(p) < 1\}$  e suponha  $\gamma : [0, b) \rightarrow \Sigma$  uma geodésica para  $\widetilde{\langle, \rangle}$  com  $\gamma(0) = o$  e que não se estenda até  $b$ . Para qualquer conjunto compacto  $\Theta \in \Sigma$  tem-se que  $\gamma$  não está completamente contida em  $\Theta$ . Pois,  $(\Sigma, \langle, \rangle)$  é completo. Em particular, com respeito a  $\Omega$ , existiram duas possibilidades.

- (i)  $\gamma$  passa por  $\Omega$  um número finito de vezes e não retorna, ou
- (ii)  $\gamma$  retorna para  $\Omega$  infinitas vezes.

Em ambos os casos, nos interessa o comprimento de  $\gamma$  fora de  $\Omega$ . Então, suponhamos  $0 < \alpha < \beta < b$  com  $\gamma|_{[\alpha, \beta]} \in \Omega$ .

3. Subvariedades compactas do tipo-espaço de codimensão 2 através das hipersuperfícies especiais do espaço-tempo de Sitter

---

Considere a partição  $\alpha < t_1 < t_2 < \dots < t_n < \beta$  tal que existe uma bola geodésica  $B(\gamma(t_j), \delta_j)$ , com centro em  $\gamma(t_j)$  e raio  $\delta_j$ , tal que

$$\gamma(t_{j+1}) \in B(\gamma(t_j), \delta_j),$$

e que em  $B(\gamma(t_j), \delta_j)$  existe um sistema de coordenadas em que possamos escrever a métrica  $\langle, \rangle$  como

$$\langle, \rangle = (dr_j)^2 + r_j^2 \langle, \rangle_0, \quad (3.2)$$

onde  $r_j$  sendo a distância geodésica de  $\gamma(t_j)$ . Para  $t_{j-1} < t < t_{j+1}$  e  $h > 0$  suficientemente pequenos, temos

$$r(\gamma(t+h)) \leq r(\gamma(t)) + r_j(\gamma(t+h)) - r_j(\gamma(t)),$$

logo,

$$\frac{dr(\gamma(t))}{dt} \leq \frac{dr_j(\gamma(t))}{dt}.$$

O comprimento de  $\widetilde{\langle, \rangle}$  em  $\{\gamma(t) : t_j < t < t_{j+1}\}$  é dada por

$$\begin{aligned} L_{t_j}^{t_{j+1}}(\gamma) &= \int_{t_j}^{t_{j+1}} (\langle \widetilde{\gamma'(t)}, \widetilde{\gamma'(t)} \rangle)^{1/2} dt \\ &= \int_{t_j}^{t_{j+1}} \frac{1}{u^2(\gamma(t))} (\langle \widetilde{\gamma'(t)}, \widetilde{\gamma'(t)} \rangle)^{1/2} dt \end{aligned}$$

Usando (3.1) e (3.2) tem-se que

$$\begin{aligned} L_{t_j}^{t_{j+1}}(\gamma) &\leq \int_{t_j}^{t_{j+1}} \frac{C_1}{r(\gamma(t)) \log(r(\gamma(t)))} \frac{dr_j(\gamma(t))}{dt} dt \\ &= C_1 [\log(\log(r(\gamma(t_{j+1})))) - \log(\log(r(\gamma(t_j))))], \end{aligned}$$

onde  $C_1$  é uma constante. Portanto,

$$L_\alpha^\beta(\gamma) \leq C_1 [\log(\log(r(\gamma(\beta)))) - \log(\log(r(\gamma(\alpha))))] \quad (3.3)$$

Desde que  $\gamma$  não está completamente contida em qualquer compacto  $\Theta$ , podemos tomar uma seqüência  $(b_j)_{j \in \mathbb{N}}$  tal que

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} b_j = b \quad \text{e} \quad \lim_{j \rightarrow +\infty} r(\gamma(b_j)) = +\infty \quad (3.4)$$

3. Subvariedades compactas do tipo-espaço de codimensão 2 através das hipersuperfícies especiais do espaço-tempo de Sitter

---

Agora suponhamos  $\gamma$  satisfazendo o item (i), isto é, para algum  $a \in (0, b)$  tem-se que  $\gamma(t) \notin \Omega$  para  $a < t < b$ . Então, por (3.3) temos

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} L_a^{b_j}(\gamma) = +\infty$$

logo,  $\gamma$  possui comprimento infinito em  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .

Por outro lado, se  $\gamma$  satisfaz o item (ii), então segue que  $\gamma$  passa por  $\Omega$  infinitas vezes. E, desse modo, podemos tomar sequências  $(b_j)_{j \in \mathbb{N}}$ , satisfazendo (3.4), e  $(a_j)_{j \in \mathbb{N}}$  tais que

$$b_{j-1} < a_j < b_j, \quad \gamma(a_j) \in \partial\Omega \quad \text{e} \quad \gamma(t) \notin \Omega \quad \text{para} \quad a_j < t < b_j.$$

Por (3.3) temos

$$\begin{aligned} L_{a_j}^{b_j}(\gamma) &\geq C_1[\log(\log(r(\gamma(b_j)))) - \log(\log(r(\gamma(a_j))))] \\ &\geq C_1[\log(\log(r(\gamma(\beta)))) - \log(\log(r(\gamma(d_0))))] \end{aligned}$$

onde  $d_0 = \max\{r(p) : p \in \partial\Omega\}$ . Resumindo, dado  $j$  nós podemos encontrar  $\gamma$  possuindo comprimento infinito em  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Portanto,  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  é completa.  $\square$

Os próximos Lemas terão um papel importante para as próximas seções, os mesmos podem ser encontrados nas referências [4] e [7] nas páginas 166 e 102, respectivamente.

**Lema 3.2.** Seja  $M$  uma variedade Riemanniana completa e seja  $f : M \rightarrow \overline{M}$  um difeomorfismo local sobre uma variedade Riemanniana  $\overline{M}$  que possui a seguinte propriedade: para todo  $p \in M$  e todo  $v \in T_p M$ , tem-se  $\|df_p(v)\| \geq \|v\|$ . Então  $f$  é uma aplicação de recobrimento.

*Demonstração.* Por uma propriedade de espaços de recobrimento (Cf. [5], pág. 460), basta mostrar que  $f$  possui a propriedade de levantar arcos de  $\overline{M}$ , isto é, dada uma curva diferenciável  $c : [0, 1] \rightarrow \overline{M}$  e um ponto  $q \in M$  com  $f(q) = c(0)$ , existe uma curva  $\bar{c} : [0, 1] \rightarrow M$  com  $\bar{c}(0) = q$  e  $f \circ \bar{c} = c$ .

Para provar pedido, observe que, como  $f$  é um difeomorfismo local em  $q$ , existe  $\varepsilon > 0$  tal que é possível definir  $\bar{c} : [0, \varepsilon] \rightarrow M$  com  $\bar{c}(0) = q$  e  $f \circ \bar{c} = c$ , isto é, é possível levantar  $c$  em um intervalo pequeno a partir de  $q$ . Como  $f$  é um difeomorfismo local em todo  $M$ , o conjunto dos valores  $A \subset [0, 1]$ , tais que  $c$  pode ser levantada em  $A$  a partir de  $q$  é um intervalo aberto à direita, isto é,  $A = [0, t_0)$ . Se mostrarmos que  $t_0 \in A$ , teremos que  $A$  é aberto e fechado em  $[0, 1]$ , logo  $A = [0, 1]$  e  $c$  pode ser inteiramente levantada.

### 3. Subvariedades compactas do tipo-espaço de codimensão 2 através das hipersuperfícies especiais do espaço-tempo de Sitter

---

Para mostrar que  $t_0 \in A$ , seja  $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$  uma sequência crescente em  $A$  com  $\lim t_n = t_0$ . Então, a sequência  $(\bar{c}(t_n))_{n \in \mathbb{N}}$  está contida em um compacto  $K \subset M$ . com efeito, se isto não acontecer, como  $M$  é completa, a distância de  $\bar{c}(t_n)$  e  $\bar{c}(0)$  será arbitrariamente grande. Como, por hipótese,

$$\begin{aligned} \ell_{0,t_n}(c) &= \int_0^{t_n} \left| \frac{dc}{dt} \right| dt = \int_0^{t_n} \left| df_{\bar{c}(t)} \left( \frac{d\bar{c}}{dt} \right) \right| dt \\ &\leq \int_0^{t_n} \left| \frac{d\bar{c}}{dt} \right| dt \leq d(\bar{c}(t_n), \bar{c}(0)), \end{aligned}$$

isto implica que o comprimento de  $c$  entre 0 e  $t_0$  é arbitrariamente grande, o que é um absurdo, e prova a afirmação feita.

Como  $(\bar{c}(t_n))_{n \in \mathbb{N}} \subset K$ , existe um ponto de acumulação  $r \in M$  de  $(\bar{c}(t_n))_{n \in \mathbb{N}}$ . Seja  $V$  uma vizinhança de  $r$  tal que  $f|V$  é um difeomorfismo. Então,  $c(t_0) \in f(V)$  e, por continuidade, existe um intervalo  $I \subset [0, 1]$ ,  $t_0 \in I$ , tal que  $c(I) \subset f(V)$ . Escolha um índice  $n$  tal que  $\bar{c}(t_n) \in V$  e considere o levantamento  $g$  de  $c$  em  $I$  passando por  $r$ . Os levantamentos  $g$  e  $\bar{c}$  coincidem em  $[0, t_n] \cap I$ , pois  $f|V$  é biunívoca. Portanto,  $g$  é uma extensão de  $\bar{c}$  em  $I$ , donde  $\bar{c}$  em  $I$ , donde  $\bar{c}$  está definido em  $t_0$  e  $t_0 \in A$ .  $\square$

**Lema 3.3.** Seja  $f : \Sigma \rightarrow M$ , com  $\Sigma$  sendo uma variedade Riemanniana completa e conexa e  $M$  sendo uma variedade Riemanniana conexa com a mesma dimensão de  $\Sigma$ . Se  $f$  aumenta a distância então  $f$  é uma aplicação recobrimento e  $M$  é completa.

*Demonstração.* Seja  $\langle \cdot, \cdot \rangle_M$  e  $\langle \cdot, \cdot \rangle_\Sigma$  as métricas de  $M$  e  $\Sigma$ , respectivamente. Desde que,  $f$  aumenta a distância,  $f^*(\langle \cdot, \cdot \rangle_M)$  é também uma métrica Riemanniana em  $\Sigma$ . Para cada curva  $c \in \Sigma$ , seu comprimento de arco com respeito a  $\langle \cdot, \cdot \rangle_\Sigma$  é menor ou igual do que em relação a métrica  $f^*(\langle \cdot, \cdot \rangle_M)$ . Segue-se que, se  $d$  e  $d'$  denotam a funções distâncias de  $\langle \cdot, \cdot \rangle_\Sigma$  e  $f^*(\langle \cdot, \cdot \rangle_M)$ , respectivamente, então

$$d'(x, y) \geq d(x, y) \quad \text{para } x, y \in \Sigma.$$

Então, toda sequência de Cauchy para  $d'$  é uma sequência de Cauchy para  $d$  e, desse modo, é convergente. Logo,  $\Sigma$  é completa com respeito a  $\langle \cdot, \cdot \rangle_\Sigma$ . Desde que a topologia de  $\Sigma$  é compatível com qualquer métrica Riemanniana em  $\Sigma$  tem-se que,  $\Sigma$  é completa com respeito a métrica  $f^*(\langle \cdot, \cdot \rangle_M)$ .

Substituindo  $\langle \cdot, \cdot \rangle_\Sigma$  por  $f^*(\langle \cdot, \cdot \rangle_M)$ , podemos assumir que  $f : \Sigma \rightarrow M$  é uma imersão isométrica, isto é, que  $\langle \cdot, \cdot \rangle_\Sigma = f^*(\langle \cdot, \cdot \rangle_M)$ . Logo,  $\Sigma$  é o espaço de recobrimento de  $M$  com projeção  $f$  e  $M$  é também completo.  $\square$

### 3.1 Caracterização das subvariedades do tipo-espaço compactas através do cone de luz

Nesta seção podemos assumir, sem perda da generalidade, que o cone de luz possui o vértice no ponto  $a = (0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{S}_1^{n+2}$  e, desse modo, a componente futura do cone de luz no espaço-tempo de Sitter será dada por

$$\Lambda^+ = \{x \in \mathbb{S}_1^{n+2} : x_{n+2} = 1, x_0 > 0\}.$$

**Observação 3.1.** Note que nessa seção temos  $u = \psi_0 > 0$ .

Uma vez enunciados e devidamente demonstrados os Lemas acima, podemos introduzir o primeiro resultado dessa seção.

**Proposição 3.4.** Seja  $\psi : \Sigma^n \rightarrow \Lambda^+ \subset \mathbb{S}_1^{n+2}$  uma subvariedade tipo-espaço de codimensão 2 que fatoriza através de  $\Lambda^+$ . Assuma que  $\Sigma$  é completa e que a função positiva  $u$  satisfaz

$$u(p) \leq Cr(p) \log(r(p)), \quad r(p) \gg 1 \tag{3.5}$$

onde  $C$  é uma constante positiva e  $r$  denota a função distância Riemanniana saindo da origem fixada  $o \in \Sigma$ . Então,  $\Sigma$  é compacto e conformemente difeomorfa a esfera  $\mathbb{S}^n$ . Em particular, isto é garantido se  $\sup_{\Sigma} u < +\infty$  e, mais geralmente, se o  $\limsup_{r \rightarrow +\infty} \frac{u}{r \log(r)} < +\infty$ .

*Demonstração.* Note que, para cada  $p \in \Sigma$ ,  $\psi(p) = (u(p), \psi_1(p), \dots, \psi_{n+1}(p), 1)$ , onde

$$\sum_{i=1}^{n+1} \psi_i^2(p) = u^2(p) > 0. \tag{3.6}$$

Defina a função  $\Psi : \Sigma^n \rightarrow \mathbb{S}^n$  por

$$\Psi(p) = \frac{1}{u(p)}(\psi_1(p), \dots, \psi_{n+1}(p)),$$

e então, para cada  $p \in \Sigma$  e  $v \in T_p \Sigma$ , obtemos

$$d\Psi_p(v) = -\frac{v(u)}{u^2(p)}(\psi_1(p), \dots, \psi_{n+1}(p)) + \frac{1}{u(p)}(v(\psi_1), \dots, v(\psi_{n+1})).$$

3. Subvariedades compactas do tipo-espaço de codimensão 2 através das hipersuperfícies especiais do espaço-tempo de Sitter

---

Denote por  $\langle, \rangle_0$  a métrica na esfera  $\mathbb{S}^n$ . Portanto, para cada  $v, w \in T_p\Sigma$  temos

$$\begin{aligned} \langle d\Psi_p(v), d\Psi_p(w) \rangle_0 &= \frac{v(u)w(u)}{u^4(p)} \sum_{i=1}^{n+1} \psi_i^2(p) + \frac{1}{u^2(p)} \sum_{i=1}^{n+1} v(\psi_i)w(\psi_i) \\ &\quad - \frac{v(u)}{2u^3(p)} w \left( \sum_{i=1}^{n+1} \psi_i^2 \right) - \frac{w(u)}{2u^3(p)} v \left( \sum_{i=1}^{n+1} \psi_i^2 \right) \\ &= \frac{1}{u^2(p)} \left( -v(u)w(u) + \sum_{i=1}^{n+1} v(\psi_i)w(\psi_i) \right) \\ &= \frac{1}{u^2(p)} \langle d\psi_p(v), d\psi_p(w) \rangle = \frac{1}{u^2(p)} \langle v, w \rangle \end{aligned}$$

Em outras palavras,

$$\Psi^*(\langle, \rangle_0) = \frac{1}{u^2} \langle, \rangle \quad (3.7)$$

onde  $\langle, \rangle$  é a métrica Riemanniana em  $\Sigma$  induzida pela imersão  $\psi$ .

Verifica-se que, a equação dada em (3.7) garante para  $\Psi$  um difeomorfismo local. Assumindo que  $\Sigma$  é completa (isto é,  $\langle, \rangle$  é uma métrica Riemanniana completa em  $\Sigma$ ) e  $u$  satisfazendo a hipótese dada em (3.5). Tomemos a função  $w = u^{-(n-2)/2}$ , pelo Lema 3.1 e pelo fato de que a métrica

$$\langle, \rangle_0 = \frac{1}{u^2} \langle, \rangle$$

é conforme, segue que a métrica  $\langle, \rangle$  é completa em  $\Sigma$ . Então, a equação (3.7) ditará para a aplicação

$$\Psi : (\Sigma^n, \langle, \rangle) \rightarrow (\mathbb{S}^n, \langle, \rangle_0)$$

uma isometria local entre variedades Riemannianas completas e, pelos Lemas (3.2) e (3.3), um recobrimento. Desde que,  $\mathbb{S}^n$  é simplesmente conexo, tem-se que  $\Psi$  é um difeomorfismo global entre  $\Sigma$  e  $\mathbb{S}^n$ .  $\square$

**Exemplo 3.1.** Seja  $f : \mathbb{S}^n \rightarrow (0, +\infty)$  uma função suave positiva escolhida de modo arbitrário. Podemos construir um mergulho  $\psi_f : \mathbb{S}^n \rightarrow \Lambda^+ \subset \mathbb{S}_1^{n+2}$  dada por

$$\psi_f(p) = (f(p), f(p)p, 1).$$

Para cada  $v, w \in T_p\mathbb{S}^n$  tem-se que

$$d(\psi_f)_p v = (v(f), v(f)p + f(p)v, 0)$$

3. Subvariedades compactas do tipo-espaço de codimensão 2 através das hipersuperfícies especiais do espaço-tempo de Sitter

---

e

$$\begin{aligned}
 \langle d(\psi_f)_p \cdot v, d(\psi_f)_p \cdot w \rangle &= \langle (v(f), v(f)p + f(p)v, 0), (w(f), w(f)p + f(p)w, 0) \rangle \\
 &= -v(f)w(f) + v(f)w(f) \langle p, p \rangle_0 + v(f)f(p) \langle w, p \rangle_0 \\
 &\quad + f(p)w(f) \langle p, w \rangle_0 + f^2(p) \langle v, w \rangle_0 \\
 &= f^2(p) \langle v, w \rangle_0.
 \end{aligned}$$

Isto é,

$$\langle \cdot, \cdot \rangle = \psi_f^* \langle \cdot, \cdot \rangle = f^2 \langle \cdot, \cdot \rangle_0, \quad (3.8)$$

e isso significa que  $\psi_f$  determina uma imersão tipo-espaço de  $\mathbb{S}^n$  através de  $\Lambda^+$  do qual induz uma métrica conforme a esfera.

Verifica-se que, quando  $u = f$  obtém-se a expressão da segunda forma fundamental para  $\psi_f$  em termos da função  $f$ , do gradiente e da Hessiana de  $f$  com respeito a métrica  $\langle \cdot, \cdot \rangle_0$ . Lembrando que  $A_\xi = I$  e  $\theta_\xi = 1$ , podemos determinar  $A_\eta$ . Note que, (3.8) é uma métrica conforme, desse modo determinará as seguintes expressões

$$\|\cdot\|^2 = f^2 \|\cdot\|_0^2, \quad (3.9)$$

$$\nabla f = \frac{1}{f^2} \nabla^0 f, \text{ e} \quad (3.10)$$

$$\text{Hess} f = \text{Hess}_0 f - \frac{2}{f} df \otimes df + \frac{1}{f} \|\nabla^0 f\|_0^2 \langle \cdot, \cdot \rangle_0. \quad (3.11)$$

Portanto, por (3.9) e (3.10) temos

$$\|\nabla f\|^2 = \frac{1}{f^2} \|\nabla^0 f\|_0^2 \quad (3.12)$$

e

$$\frac{1 + \|\nabla f\|^2 - f^2}{2f^2} = \frac{-f^4 + f^2 + \|\nabla^0 f\|_0^2}{2f^4}. \quad (3.13)$$

Enquanto, por (3.11) para todo campo de vetores tangente  $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{S}^n)$ ,

$$\begin{aligned}
 \text{Hess}(X, Y) &= f^2 \langle \nabla_X \nabla f, Y \rangle_0 \\
 &= \langle \nabla_X^0 \nabla^0 f, Y \rangle_0 - \frac{2}{f} \langle X, \nabla^0 f \rangle_0 \langle Y, \nabla^0 f \rangle_0 + \frac{1}{f} \|\nabla^0 f\|_0^2 \langle X, Y \rangle_0,
 \end{aligned}$$

o que nos fornece

$$\nabla_X \nabla f = \frac{1}{f^2} \nabla_X^0 \nabla^0 f - \frac{2}{f^3} \langle X, \nabla^0 f \rangle_0 \nabla^0 f + \frac{1}{f^3} \|\nabla^0 f\|_0^2 X \quad (3.14)$$

3. Subvariedades compactas do tipo-espaço de codimensão 2 através das hipersuperfícies especiais do espaço-tempo de Sitter

---

para todo campo de vetores tangente  $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{S}^n)$ . Portanto, usando (3.13) e (3.14) em (2.12) aplicado ao campo de vetores tangente  $X \in \mathbb{S}^n$ , arbitrário, temos

$$\begin{aligned}
A_\eta(X) &= \left( -\frac{1 + \|\nabla f\|^2 - f^2}{2f^2} I + \frac{1}{f} \nabla^2 f \right) X \\
&= -\frac{1 + \|\nabla f\|^2 - f^2}{2f^2} X + \frac{1}{f} \nabla_X \nabla f \\
&= -\frac{-f^4 + f^2 + \|\nabla^0 f\|_0^2}{2f^4} X + \frac{1}{f} \left( \frac{1}{f^2} \nabla_X^0 \nabla^0 f - \frac{2}{f^3} \langle X, \nabla^0 f \rangle_0 \nabla^0 f + \frac{1}{f^3} \|\nabla^0 f\|_0^2 X \right) \\
&= \frac{1}{f^3} \nabla_X^0 \nabla f - \frac{2}{f^4} \langle X, \nabla^0 f \rangle_0 \nabla^0 f + \frac{f^4 - f^2 + \|\nabla^0 f\|_0^2}{2f^4}.
\end{aligned}$$

Desse modo, obtemos a expressão

$$A_\eta(X) = \frac{1}{f^3} \nabla_X^0 \nabla^0 f - \frac{2}{f^4} \langle X, \nabla^0 f \rangle_0 \nabla^0 f + \frac{\|\nabla^0 f\|_0^2 + f^4 - f^2}{2f^4} X \quad (3.15)$$

para todo  $X \in \mathbb{S}^\times$ . Note-se que, tomando o traço de (3.15) com respeito a  $\langle \cdot, \cdot \rangle_0$  obtemos

$$\theta_\eta = \frac{2f\Delta_0 f + (n-4)\|\nabla^0 f\|_0^2 - nf^2(1-f^2)}{2nf^4}, \quad (3.16)$$

e, em particular,  $\psi_f$  é marginalmente aprisionada se, e somente se,

$$2f\Delta_0 f + (n-4)\|\nabla^0 f\|_0^2 - nf^2(1-f^2) = 0 \quad (3.17)$$

O próximo resultado é uma consequência direta da Proposição 3.4. Daqui por diante, cada subvariedade compacta do tipo-espaço de codimensão 2 fatoriza através de  $\Lambda^+$  e, além disso, admitirá um difeomorfismo conforme de acordo com o Exemplo 3.1.

**Corolário 3.5.** Seja  $\psi : \Sigma^n \rightarrow \Lambda^+ \subset \mathbb{S}_1^{n+2}$  uma subvariedade compacta do tipo-espaço de codimensão 2 que fatoriza através do cone de luz  $\Lambda^+$ . Então, existe um difeomorfismo conforme  $\Psi : (\Sigma^n, \langle \cdot, \cdot \rangle) \rightarrow (\mathbb{S}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle_0)$  tal que

$$\Psi^*(\langle \cdot, \cdot \rangle_0) = \frac{1}{u^2} \langle \cdot, \cdot \rangle$$

com  $u = -\langle \psi, e_0 \rangle = \psi_0 > 0$  e  $\psi = \psi_f \circ \Psi$ , onde  $f = u \circ \Psi^{-1}$  e  $\psi_f : \mathbb{S}^n \rightarrow \Lambda^+ \subset \mathbb{S}_1^{n+2}$  é o mergulho

$$\psi_f(p) = (f(p), f(p)p, 1).$$

3. Subvariedades compactas do tipo-espaço de codimensão 2 através das hipersuperfícies especiais do espaço-tempo de Sitter

---

$$\begin{array}{ccc}
 \Sigma^n & \xrightarrow{u} & (0, +\infty) \\
 \Psi^{-1} \uparrow & \downarrow \Psi & \nearrow f \\
 \mathbb{S}^n & & 
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 \Sigma^n & \xrightarrow{\psi} & \Lambda^+ \subset \mathbb{S}_1^{n+2} \\
 \Psi^{-1} \uparrow & \downarrow \Psi & \nearrow \psi_f \\
 \mathbb{S}^n & & 
 \end{array}$$

Em particular, a imersão  $\psi$  é um mergulho.

*Demonstração.* Sejam  $u$  e  $\Psi$  como na demonstração da Proposição 2.18, tem-se que  $\Psi : (\Sigma^n, \langle, \rangle) \rightarrow (\mathbb{S}^n, \langle, \rangle_0)$  é um difeomorfismo conforme com

$$\Psi^*(\langle, \rangle_0) = \frac{1}{u^2} \langle, \rangle.$$

Seja  $\Phi : \mathbb{S}^n \rightarrow \Sigma^n$  a inversa de  $\Psi$ . Então, fazendo  $f = u \circ \Phi$ . Verifica-se que,  $u = f \circ \Psi$  e  $\psi = \psi_f \circ \Psi$ , desde que

$$\begin{aligned}
 (\psi_f \circ \Psi)(p) &= (f(\Psi(p)), f(\Psi(p))\Psi(p), 1) \\
 &= (u(p), \psi_1(p), \dots, \psi_{n+1}(p), 1) \\
 &= \psi(p).
 \end{aligned}$$

□

Utilizando das discussões acima, o seguinte exemplo nos fornecerá uma grande ferramenta para a caracterização dos compactos marginalmente aprisionados.

**Exemplo 3.2.** Para cada vetor  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{n+1}$  fixo, seja  $f_{\mathbf{b}} : \mathbb{S}^n \rightarrow (0, +\infty)$  uma função dada por

$$f_{\mathbf{b}}(p) = \frac{1}{\langle p, \mathbf{b} \rangle_0 + \sqrt{1 + \|\mathbf{b}\|_0^2}}$$

onde  $\langle, \rangle_0$  representará, para ambas, a métrica euclidiana em  $\mathbb{R}^{n+1}$  e a métrica padrão induzida na Esfera Euclidiana  $\mathbb{S}^n$ . Observemos agora que, para  $\mathbf{b} = 0 \in \mathbb{R}^{n+1}$  temos  $f_0 \equiv 1$ . Afirmamos que o correspondente mergulho

$$\psi_{\mathbf{b}} := \psi_{f_{\mathbf{b}}} : \mathbb{S}^n \rightarrow \Lambda^+ \subset \mathbb{S}_1^{n+2}$$

é uma subvariedade marginalmente aprisionada (no passado) . De fato, basta provarmos que, para  $f = f_{\mathbf{b}}$  satisfaz a expressão (3.17). E, para isso, façamos  $f_{\mathbf{b}} = 1/g$  com

$$g(p) = \langle p, \mathbf{b} \rangle_0 + \sqrt{1 + \|\mathbf{b}_0\|_0^2}.$$

Além disso, uma vez que  $[g_{i,j}]$ , a matriz métrica de  $\mathbb{S}^n$ , é igual a matriz identidade, tem-se, a matriz inversa  $[g^{i,j}]$  igual a matriz identidade.

3. Subvariedades compactas do tipo-espaço de codimensão 2 através das hipersuperfícies especiais do espaço-tempo de Sitter

---

Daí e das Definições 1.22 e 1.25, obtém-se para  $f_{\mathbf{b}}$

$$\nabla^0 f_{\mathbf{b}} = \nabla^0 \left( \frac{1}{g} \right) = -\frac{\nabla^0 g}{g^2} \Rightarrow \|\nabla^0 f_{\mathbf{b}}\|_0^2 = \frac{1}{g} \|\nabla^0 g\|_0^2 \quad (3.18)$$

e

$$\begin{aligned} \Delta_0(f_{\mathbf{b}}) &= \Delta_0 \left( \frac{1}{g} \right) = -\frac{1}{g^2} \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 g}{\partial x_i^2} + \frac{2}{g^3} \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial g}{\partial x_i} \partial_i \right)^2 \\ &= -\frac{1}{g^2} \Delta_0 g + \frac{2}{g^3} \|\nabla^0 g\|_0^2. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Os quais o Gradiente e a Norma de  $g$  serão dadas por

$$\nabla^0 g(p) = \mathbf{b} - \langle p, \mathbf{b} \rangle_0 p \quad \text{e} \quad \|\nabla^0 g\|_0^2 = \|\mathbf{b}\|_0^2 - \langle p, \mathbf{b} \rangle_0^2, \quad (3.20)$$

donde conclui-se que

$$\|\nabla^0 f_{\mathbf{b}}\|_0^2 = \frac{\|\mathbf{b}\|_0^2 - \langle p, \mathbf{b} \rangle_0^2}{g^4(p)} \quad (3.21)$$

para todo  $p \in \mathbb{S}^n$ . Portanto,

$$\nabla_v^0 \nabla^0 g = -\langle p, \mathbf{b} \rangle_0 v$$

para todo  $v \in T_p \mathbb{S}^n$ , de modo que  $\Delta_0 g(p) = -n \langle p, \mathbf{b} \rangle_0$ . Substituindo isto em (3.19) e usando (3.20) obtemos

$$\Delta_0 f_{\mathbf{b}} = \frac{n \langle p, \mathbf{b} \rangle_0}{g^2(p)} + \frac{2 (\|\mathbf{b}\|_0^2 - \langle p, \mathbf{b} \rangle_0^2)}{g^3(p)},$$

desse modo

$$2f_{\mathbf{b}}(p)\Delta_0 f_{\mathbf{b}}(p) = \frac{2n \langle p, \mathbf{b} \rangle_0}{g^3(p)} + \frac{4 (\|\mathbf{b}\|_0^2 - \langle p, \mathbf{b} \rangle_0^2)}{g^4(p)}. \quad (3.22)$$

Finalmente, aplicando as expressões (3.21) e (3.22) em (3.17) para  $f = f_{\mathbf{b}}$  garantimos que a subvariedade é marginalmente aprisionada (no passado).

Entraremos no principal resultado dessa seção, para mostra que os exemplos acima são as únicas subvariedades compactas marginalmente aprisionadas de codimensão 2 que fatorizam através de  $\Lambda^+ \subset \mathbb{S}_1^{n+2}$ .

**Teorema 3.6.** *Seja  $\psi : \Sigma^n \rightarrow \Lambda^+ \subset \mathbb{S}_1^{n+2}$  uma subvariedade compacta do tipo-espaço marginalmente aprisionada (necessariamente no passado) de codimensão 2 que fatoriza através de  $\Lambda^+$ . Então, existe um difeomorfismo conforme  $\Psi : (\Sigma^n, \langle \cdot, \cdot \rangle) \rightarrow (\mathbb{S}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle_0)$  tal*

3. Subvariedades compactas do tipo-espaço de codimensão 2 através das hipersuperfícies especiais do espaço-tempo de Sitter

---

que  $\psi = \psi_{\mathbf{b}} \circ \Psi$ , onde  $f_{\mathbf{b}} : \mathbb{S}^n \rightarrow (0, +\infty)$  é

$$f_{\mathbf{b}}(p) = \frac{1}{\langle p, \mathbf{b} \rangle_0 + \sqrt{1 + \|\mathbf{b}\|_0^2}}$$

para qualquer  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{n+1}$  e  $\psi_{\mathbf{b}} : \mathbb{S}^n \rightarrow \Lambda^+ \subset \mathbb{S}_1^{n+2}$  é o mergulho

$$\psi_{\mathbf{b}}(p) = (f_{\mathbf{b}}(p), f_{\mathbf{b}}(p)p, 1).$$

Em particular,  $\Sigma$  está mergulhada.

*Demonstração.* Pelos Corolários 2.7 e 3.5 a demonstração do Teorema 3.6 reduzirá na solução da equação diferencial

$$2u\Delta u - n(1 + \|\nabla u\|^2 - u^2) = 0$$

em  $(\mathbb{S}^n, \langle, \rangle)$ . De acordo com a informações apresentadas anteriormente, nessa seção, isto é equivalente a determinar as soluções positivas da equação diferencial

$$2f\Delta_0 f - n(1 + \|\nabla^0 f\|_0^2 - f^2) = 0 \tag{3.23}$$

em  $(\mathbb{S}^n, \langle, \rangle_0)$ , onde  $\langle, \rangle = f^2 \langle, \rangle_0$ . Iremos denotar por  $\|\cdot\|_0^2$ ,  $\nabla^0$  e  $\Delta_0$  a norma, o gradiente e o operador Laplaciano na  $\mathbb{S}^n$  com respeito a métrica  $\langle, \rangle_0$ . Pelo Corolário 2.7, temos  $(\mathbb{S}^n, \langle, \rangle)$  possuindo curvatura escalar constante  $n(n-1)$  e, desse modo, o mesmo valerá para  $(\mathbb{S}^n, \langle, \rangle_0)$ . Obata em [12], garante o resultado de que uma métrica conforme na esfera euclidiana  $\mathbb{S}^n$  possui curvatura escalar constante  $n(n-1)$  se, e somente se, possui curvatura seccional constante 1.

Assim, o problema de caracterizar subvariedades compactas marginalmente aprisionadas através do cone de luz do espaço-tempo de Sitter torna-se equivalente a resolver o problema de Yamabe<sup>1</sup> na esfera unitária. Isto é, determinando as funções positivas  $f$  na  $\mathbb{S}^n$  para o qual a métrica conforme  $f^2 \langle, \rangle_0$  possui curvatura seccional constante 1.

Este problema foi resolvido por Obata em [12] (ver também [13]), que provou que a métrica conforme  $f^2 \langle, \rangle_0$  é obtida de  $\langle, \rangle$  por um difeomorfismo conforme da esfera. Em particular,  $f$  é o fator conforme de um difeomorfismo conforme da esfera unitária. Lembrando que (Veja [11]), a menos de uma transformação ortogonal, todo difeomorfismo conforme de  $(\mathbb{S}^n, \langle_0, \rangle)$  é uma aplicação  $F_{\mathbf{c}} : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$  dada por

$$F_{\mathbf{c}}(p) = \frac{p + (\mu \langle p, \mathbf{c} \rangle_0 + \lambda)\mathbf{c}}{\lambda(1 + \langle p, \mathbf{c} \rangle_0)}$$

---

<sup>1</sup>O problema de Yamabe, em geometria diferencial refere-se à existência de métricas Riemannianas com curvatura escalar constante, e recebe seu nome do matemático Hidehiko Yamabe.

3. Subvariedades compactas do tipo-espaço de codimensão 2 através das hipersuperfícies especiais do espaço-tempo de Sitter

---

para todo  $p \in \mathbb{S}^n$ , onde  $\mathbf{c} \in \mathbb{B}^{n+1}$ , a bola aberta unitária em  $\mathbb{R}^{n+1}$ ,

$$\lambda = (1 - \|\mathbf{c}\|_0^2)^{-1/2} \quad \text{e} \quad \mu = (\lambda - 1) \|\mathbf{c}\|_0^{-2}.$$

Para cada  $v \in T_p\mathbb{S}^n$  tem-se que

$$dF_{\mathbf{c}}(p) \cdot v = \lambda^{-2}(\langle p, \mathbf{c} \rangle_0 + 1)^{-2} \{ \lambda(\langle p, \mathbf{c} \rangle_0 + 1)v - \lambda \langle v, \mathbf{c} \rangle_0 p + \langle v, \mathbf{c} \rangle_0 (1 - \lambda) \|\mathbf{c}\|_0^{-2} \mathbf{c} \}.$$

Assim, para quaisquer dois vetores  $v, w \in T_p\mathbb{S}^n$  temos

$$\langle dF_{\mathbf{c}}(p) \cdot v, dF_{\mathbf{c}}(p) \cdot w \rangle_0 = \frac{1 - \|\mathbf{c}\|_0^2}{(\langle p, \mathbf{c} \rangle_0 + 1)^2} \langle v, w \rangle_0.$$

Portanto, o fator conforme  $f$  é dado por

$$f(p) = \frac{\sqrt{1 - \|\mathbf{c}\|_0^2}}{1 + \langle p, \mathbf{c} \rangle_0} = \frac{1}{\langle p, \mathbf{b} \rangle_0 + \sqrt{1 + \|\mathbf{b}\|_0^2}}$$

para qualquer  $\mathbf{c} \in \mathbb{B}^{n+1}$ , temos

$$\mathbf{b} = \frac{\mathbf{c}}{\sqrt{1 - \|\mathbf{c}\|_0^2}} \in \mathbb{R}^{n+1},$$

completando a prova do teorema. □

**Observação 3.2.** Vale ressaltar que embora todo mergulho através de  $\psi_{\mathbf{b}}$ , dado pelo Exemplo 3.2, é conforme na esfera e possui curvatura seccional constante 1, eles não congruentes um com o outro. Com efeito, assuma que  $\psi_{\mathbf{b}_1}$  é congruente a  $\psi_{\mathbf{b}_2}$  para  $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2 \in \mathbb{R}^{n+1}$ . Então, existe uma isometria  $A \in \mathbf{Iso}(\mathbb{S}_1^{n+2}) = O_1(n+3)$  que torna comutativo o seguinte diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{S}^n & \xrightarrow{\psi_{\mathbf{b}_1}} & \Lambda^+ \subset \mathbb{S}_1^{n+2} \\ \psi_{\mathbf{b}_2} \downarrow & & \swarrow A \\ \Lambda^+ \subset \mathbb{S}_1^{n+2} & & \end{array}$$

Então,

$$d\psi_{\mathbf{b}_2}(p) \cdot v = d(A \circ \psi_{\mathbf{b}_1})(p) \cdot v = A(d\psi_{\mathbf{b}_1}(p)) \cdot v, \quad (3.24)$$

e, em particular,

$$f_{\mathbf{b}_2}^2(p) \|v\|_0^2 = \|d\psi_{\mathbf{b}_2}(p) \cdot v\|^2 = \|d\psi_{\mathbf{b}_1}(p) \cdot v\|^2 = f_{\mathbf{b}_1}^2(p) \|v\|_0^2$$

3. Subvariedades compactas do tipo-espaço de codimensão 2 através das hipersuperfícies especiais do espaço-tempo de Sitter

---

para cada  $p \in \mathbb{S}^n$  e  $v \in T_p\mathbb{S}^n$ . Daí, segue-se que,  $f_{\mathbf{b}_1} = f_{\mathbf{b}_2}$  ou, equivalentemente,  $\mathbf{b}_1 = \mathbf{b}_2$ .

### 3.2 Caracterização das subvariedades do tipo-espaço compactas através do passado infinito do modelo steady state space

Nesta seção, caracterizaremos as subvariedades compactas de codimensão 2 contidas no passado infinito do steady state space.

**Proposição 3.7.** Seja  $\psi : \Sigma^n \rightarrow \mathcal{S}^- \subset \mathbb{S}_1^{n+2}$  uma subvariedade do tipo-espaço de codimensão 2 que fatoriza através de  $\mathcal{S}^-$  e assumamos que  $\Sigma$  é completo. Então,  $\Sigma$  é compacto e isométrica a esfera  $(\mathbb{S}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle_0)$ .

*Demonstração.* Observe que, para cada  $p \in \Sigma$  podemos escrever

$$\psi(p) = (u(p), \psi_1(p), \dots, \psi_{n+1}(p), u(p))$$

onde

$$\sum_{i=1}^{n+1} \psi_i^2(p) = 1.$$

Defina a aplicação  $\Psi : \Sigma^n \rightarrow \mathbb{S}^n$  por

$$\Psi(p) = (\psi_1(p), \dots, \psi_{n+1}(p)).$$

Para cada  $p \in \Sigma$  e  $v \in T_p\Sigma$  obtemos

$$d\Psi_p \cdot v = (v(\psi_1), \dots, v(\psi_{n+1})),$$

e portanto, para cada  $v, w \in T_p\Sigma$  temos

$$\begin{aligned} \langle d\Psi_p \cdot v, d\Psi_p \cdot w \rangle_0 &= \sum_{i=1}^{n+1} v(\psi_i)w(\psi_i) \\ &= -v(u)w(u) + \sum_{i=1}^{n+1} v(\psi_i)w(\psi_i) + v(u) + w(u) \\ &= \langle d\psi_p \cdot v, d\psi_p \cdot w \rangle = \langle v, w \rangle. \end{aligned}$$

Em outras palavras,  $\Psi^*(\langle \cdot, \cdot \rangle_0) = \langle \cdot, \cdot \rangle$ , isto significa que  $\Psi : (\Sigma^n, \langle \cdot, \cdot \rangle) \rightarrow (\mathbb{S}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle_0)$  é uma isometria local. Desde que  $(\Sigma^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  é completa e  $\mathbb{S}^n$  é simplesmente conexa, isto

3. Subvariedades compactas do tipo-espaço de codimensão 2 através das hipersuperfícies especiais do espaço-tempo de Sitter

---

implica que  $\Psi$  é de fato uma isometria global.  $\square$

O Resultado acima acaba motivando o seguinte exemplo.

**Exemplo 3.3.** Para cada função suave  $f : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}$  podemos construir um mergulho  $\phi_f : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathcal{I}^- \subset \mathbb{S}_1^{n+2}$  dada por

$$\phi_f(p) = (f(p), p, f(p)).$$

Para cada  $v, w \in T_p \Sigma$  obtemos

$$d(\psi_f)_p(v) = (v(f), v, v(f))$$

e

$$\langle d(\phi_f)_p(v), d(\phi_f)_p(w) \rangle = \langle v, w \rangle_0.$$

Isto é,  $\phi_f^*(\langle, \rangle) = \langle, \rangle_0$  e  $\phi_f$  determina uma imersão isométrica tipo-espaço da esfera euclidiana através de  $\mathcal{I}^-$ . Nestas condições, a imersão é marginalmente aprisionada com exceção dos pontos onde  $\Delta_0 f + n f = 0$  em  $\mathbb{S}^n$ .

**Corolário 3.8.** Seja  $\psi : \Sigma^n \rightarrow \mathcal{I}^- \subset \mathbb{S}_1^{n+2}$  uma subvariedade do tipo-espaço completa de codimensão 2 que fatoriza através de  $\mathcal{I}^-$ . Então,  $\Sigma$  é compacta e existe uma isometria  $\Psi : (\Sigma^n, \langle, \rangle) \rightarrow (\mathbb{S}^n, \langle, \rangle_0)$  tal que  $\psi = \phi_f \circ \Psi$ , onde  $f = u \circ \Psi^{-1}$  com  $u = -\langle \psi, e_0 \rangle = \psi_0$  e  $\phi_f : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathcal{I}^- \subset \mathbb{S}_1^{n+2}$  é o mergulho

$$\phi_f(p) = (f(p), p, f(p)).$$

$$\begin{array}{ccc} \Sigma^n & \xrightarrow{u} & \mathbb{R} \\ \Psi^{-1} \uparrow & \downarrow \Psi & \nearrow f \\ \mathbb{S}^n & & \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \Sigma^n & \xrightarrow{\psi} & \mathcal{I}^- \subset \mathbb{S}_1^{n+2} \\ \Psi^{-1} \uparrow & \downarrow \Psi & \nearrow \phi_f \\ \mathbb{S}^n & & \end{array}$$

Em particular, a imersão  $\psi$  é um mergulho e marginalmente aprisionada exceto nos pontos onde  $\Delta u + n u = 0$  em  $\Sigma$ .

Como uma consequência, podemos caracterizar as subvariedades do tipo-espaço de codimensão 2 que fatorizam através de  $\mathcal{I}^-$  e tendo o vetor curvatura média paralelo.

**Corolário 3.9.** Seja  $\psi : \Sigma^n \rightarrow \mathcal{I}^- \subset \mathbb{S}_1^{n+2}$  uma subvariedade do tipo-espaço completa de codimensão 2 que fatoriza através de  $\mathcal{I}^-$  e tendo vetor curvatura média paralelo. Então,  $\Sigma$  é compacto e existe uma isometria  $\Psi : (\Sigma^n, \langle, \rangle) \rightarrow (\mathbb{S}^n, \langle, \rangle_0)$  tal que  $\psi = \phi_{\mathbf{b},c} \circ \Psi$  e  $\phi_{\mathbf{b},c} : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathcal{I}^- \subset \mathbb{S}_1^{n+2}$  é um mergulho

$$\phi_{\mathbf{b},c}(p) = (\langle p, \mathbf{b} \rangle_0 + c, p, \langle p, \mathbf{b} \rangle_0 + c).$$

3. Subvariedades compactas do tipo-espaço de codimensão 2 através das hipersuperfícies especiais do espaço-tempo de Sitter

---

para algum  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{n+1}$  e  $c \in \mathbb{R}$ . Mais ainda:

- (i)  $\Sigma$  é mínima se, e somente se,  $c = 0$ ;
- (ii)  $\Sigma$  é marginalmente aprisionada no futuro se, e somente se,  $c < 0$ ; e
- (iii)  $\Sigma$  é marginalmente aprisionada no passado se, e somente se,  $c > 0$ .

*Demonstração.* Desde que  $\langle a, e_0 \rangle = 1$ , segue que (2.2) que

$$\mathbf{H} = \frac{1}{n}(\Delta u + nu)a. \quad (3.25)$$

Então,  $\mathbf{H}$  é paralelo se, e somente se,  $\Delta u + nu = \text{constante}$  em  $(\Sigma, \langle, \rangle)$ . Equivalentemente, desde que  $u = f \circ \Psi$  com  $\Psi$  uma isometria entre  $(\Sigma, \langle, \rangle)$  e  $(\mathbb{S}^n, \langle, \rangle_0)$ ,  $\mathbf{H}$  é paralelo se, e somente se,  $\Delta_0 f + nf = \text{constante}$  em  $(\mathbb{S}^n, \langle, \rangle_0)$ .

Portanto, o laplaciano de  $f$  satisfaz

$$\Delta_0 f = -n(f - c)$$

para alguma constante  $c$ . Defina a função  $g = f - c$ , daí

$$\Delta_0 g + ng = 0,$$

onde implica que ou  $g \equiv 0$  ou  $g \in \text{Spec}(\mathbb{S}^n, \langle, \rangle_0)$  é a primeira autofunção da esfera euclidiana. No primeiro caso  $f \equiv c$  é constante (e corresponderá a  $\mathbf{b} = 0$ ). No segundo caso  $g(p) = \langle p, \mathbf{b} \rangle_0$  para algum vetor  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{n+1}$ ,  $\mathbf{b} \neq 0$ . Isto então segue que  $f(p) = \langle p, \mathbf{b} \rangle_0 + c$ . Enquanto o terceiro caso segue de (3.25) desde que  $\mathbf{H} = ca$ , com  $a$  apontando para o passado.  $\square$

Em particular, para os casos em que a subvariedade é mínima temos o seguinte resultado.

**Corolário 3.10.** Seja  $\psi : \Sigma^n \rightarrow \mathcal{I}^- \subset \mathbb{S}_1^{n+2}$  uma subvariedade do tipo-espaço completa de codimensão 2 que fatoriza através de  $\mathcal{I}^-$ .  $\Sigma$  é mínima se, e somente se, ela é compacta e existe uma isometria  $\Psi : (\Sigma^n, \langle, \rangle) \rightarrow (\mathbb{S}^n, \langle, \rangle_0)$  tal que  $\psi = \phi_{\mathbf{b}} \circ \Psi$ , onde  $\phi_{\mathbf{b}} : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathcal{I}^- \subset \mathbb{S}_1^{n+2}$  é o mergulho

$$\phi_{\mathbf{b},c}(p) = (\langle p, \mathbf{b} \rangle_0, p, \langle p, \mathbf{b} \rangle_0).$$

### 3.3 Um resultado de unicidade para a equação diferencial do tipo marginalmente aprisionadas em variedades compactas

Nesta seção, motivado pelo significado geométrico das soluções para a equação diferencial parcial (2.20), estabelecemos o seguinte resultado de unicidade intrínseca.

**Teorema 3.11.** *Seja  $(\Sigma^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  uma variedade Riemanniana compacta de dimensão  $n \geq 2$  e curvatura Ricci satisfazendo*

$$\text{Ric} \geq K \quad (3.26)$$

para alguma constante  $K > (n-1)$ . A única solução positiva para a equação diferencial parcial

$$2u\Delta u - n(1 + \|\nabla u\|^2 - u^2) = 0 \text{ em } \Sigma \quad (3.27)$$

é a função constante  $u \equiv 1$ .

*Demonstração.* Considere o campo de vetores

$$V = u^{-(n-1)} \left( \frac{1}{2} \nabla \|\nabla u\|^2 - \frac{\Delta u}{n} \nabla u \right).$$

O divergente de  $V$  é dado por

$$\begin{aligned} \text{div}(V) &= u^{-(n-1)} \left( \frac{1}{2} \Delta \|\nabla u\|^2 - \frac{1}{n} ((\Delta u)^2 + \langle \nabla \Delta u, \nabla u \rangle) \right) \\ &\quad - \frac{n-1}{2} u^{-n} \langle \nabla \|\nabla u\|^2, \nabla u \rangle + \frac{n-1}{n} u^{-n} \Delta u \|\nabla u\|^2. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Pela fórmula de Bochner - Lichnerowicz temos

$$\frac{1}{2} \Delta (\|\nabla u\|^2) = \langle \nabla \Delta u, \nabla u \rangle + \|\nabla^2 u\|^2 + \text{Ric}(\nabla u, \nabla u).$$

Sob essas condições, verifica-se que, a expressão (3.28) será reescrita como

$$\begin{aligned} \text{div}(V) &= u^{-(n-1)} \left( \|\nabla^2 u\|^2 + \text{Ric}(\nabla u, \nabla u) - \frac{(\Delta u)^2}{n} \right) \\ &\quad + \frac{n-1}{n} u^{-(n-1)} \langle \nabla \Delta u, \nabla u \rangle - \frac{n-1}{2} u^{-n} \langle \nabla \|\nabla u\|^2, \nabla u \rangle \\ &\quad + \frac{n-1}{n} u^{-n} \Delta u \|\nabla u\|^2. \end{aligned} \quad (3.29)$$

3. Subvariedades compactas do tipo-espaço de codimensão 2 através das hipersuperfícies especiais do espaço-tempo de Sitter

---

Usando agora (3.27), temos

$$\Delta u = \frac{n}{2}u^{-1}(1 - u^2 + \|\nabla u\|^2) \quad (3.30)$$

e, daí,

$$\nabla \Delta u = -\frac{n}{2}u^{-2}(1 + u^2 + \|\nabla u\|^2)\nabla u + \frac{n}{2}u^{-1}\nabla \|\nabla u\|^2. \quad (3.31)$$

Aplicando as contas (3.30) e (3.31), na expressão (3.29) obtemos

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(V) &= u^{-(n-1)} \left( \|\nabla^2 u\|^2 - \frac{(\Delta u)^2}{n} \right) \\ &+ u^{-(n-1)} (\operatorname{Ric}(\nabla u, \nabla u) - (n-1)\|\nabla u\|^2). \end{aligned} \quad (3.32)$$

Então, integrando e usando o teorema do divergência obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} u^{-(n-1)} \left( \|\nabla^2 u\|^2 - \frac{(\Delta u)^2}{n} \right) \\ + \int_{\Sigma} u^{-(n-1)} (\operatorname{Ric}(\nabla u, \nabla u) - (n-1)\|\nabla u\|^2) = 0. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Verifica-se que, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz,

$$\|\nabla^2 u\|^2 - \frac{(\Delta u)^2}{n} \geq 0,$$

com igualdade se, e somente se,  $\nabla u$  é um campo de vetores conforme em  $\Sigma$ . Por outro lado, no momento em que assumimos (3.26) temos

$$\operatorname{Ric}(\nabla u, \nabla u) - (n-1)\|\nabla u\|^2 \geq (K - (n-1))\|\nabla u\|^2 \geq 0$$

Portanto, de (3.33) podemos concluir que

$$\|\nabla^2 u\|^2 - \frac{(\Delta u)^2}{n} = 0 \quad (3.34)$$

e

$$\operatorname{Ric}(\nabla u, \nabla u) - (n-1)\|\nabla u\|^2 = (K - (n-1))\|\nabla u\|^2 = 0. \quad (3.35)$$

Desde que  $K > (n-1)$ , (3.35) implica que  $u$  é constante e, por (3.27) tem-se que  $u \equiv 1$ .  $\square$

**Observação 3.3.** Quando  $K = n-1$ , se  $u$  é não constante, conclui-se de (3.34) e (3.35) que  $\nabla u$  é um campo de vetores conforme em  $\Sigma$  que está na direção da menor curvatura de Ricci em pontos onde  $\nabla u(p) \neq 0$ . Isto, de fato, ocorre quando fazemos  $u(p) = f_{\mathbf{b}}(p)$ , onde  $f_{\mathbf{b}}$  é tomado sob as condições do Exemplo 3.2 e  $\Sigma = \mathbb{S}^n$  com a

3. Subvariedades compactas do tipo-espaço de codimensão 2 através das hipersuperfícies especiais do espaço-tempo de Sitter

---

métrica  $\langle, \rangle = f^2 \langle, \rangle_0$ .

# Referências Bibliográficas

- [1] A. ALBUJER AND L. ALÍAS, *Spacelike hypersurfaces with constant mean curvature in the steady state space*, Proceedings of the American Mathematical Society, 137 (2009), pp. 711–721.
- [2] L. J. ALÍAS, V. L. CÁNOVAS, AND M. RIGOLI, *Trapped submanifolds contained into a null hypersurface of de sitter spacetime*, Communications in Contemporary Mathematics, 20 (2018), p. 1750059.
- [3] P. AVILES, R. C. MCOWEN, ET AL., *Conformal deformation to constant negative scalar curvature on noncompact riemannian manifolds*, Journal of differential geometry, 27 (1988), pp. 225–239.
- [4] M. P. DO CARMO, *Geometria riemanniana*, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1979.
- [5] M. P. DO CARMO, *Geometria diferencial de curvas e superficies*, Sociedade Brasileira de Matemática, 2010.
- [6] S. W. HAWKING AND G. F. R. ELLIS, *The large scale structure of space-time*, vol. 1, Cambridge university press, 1973.
- [7] S. KOBAYASHI AND K. NOMIZU, *Foundations of differential geometry, ii interscience, new york, 1969*, MR, 38 (1969), p. 6501.
- [8] J. LEE, *Introduction to topological manifolds*, vol. 202, Springer Science & Business Media, 2010.
- [9] J. M. LEE, *Smooth manifolds*, in Introduction to Smooth Manifolds, Springer, 2013, pp. 1–31.
- [10] S. MONTIEL, *Complete non-compact spacelike hypersurfaces of constant mean curvature in de sitter spaces*, Journal of the Mathematical Society of Japan, 55 (2003), pp. 915–938.

- [11] S. MONTIEL AND A. ROS, *Minimal immersions of surfaces by the first eigenfunctions and conformal area*, *Inventiones mathematicae*, 83 (1986), pp. 153–166.
- [12] M. OBATA, *The conjectures on conformal transformations of riemannian manifolds*, *Bulletin of the American Mathematical Society*, 77 (1971), pp. 265–270.
- [13] M. OBATA, *Conformal changes of riemannian metrics on a euclidean sphere*, *Differential geometry (in honor of Kentaro Yano)*, (1972), pp. 347–353.
- [14] H. OGAWA ET AL., *A theory of pseudoorthogonal bases.*, (1975).
- [15] B. O'NEILL, *Semi-Riemannian geometry with applications to relativity*, Academic press, 1983.
- [16] R. PENROSE, *Gravitational collapse and space-time singularities*, *Phys. Rev. Lett.*, 14 (1965), pp. 57–59.
- [17] R. SCHOEN AND S.-T. YAU, *Proof of the positive mass theorem. ii*, *Communications in Mathematical Physics*, 79 (1981), pp. 231–260.

# Índice Remissivo

- Aplicação de Recobrimento, 63, 64
- Base Pseudo-Ortogonal, 41
- Carater Causal, 4
- Cone
  - de Luz, 19, 36
  - Temporal, 36
- Cone de Luz, 45
- Conexão
  - de Levi-Civita, 7
- Curvatura
  - de Ricci, 11, 35
  - Escalar, 11, 35
  - Média, 35
  - Riemanniana, 9, 35
  - Seccional, 10
- Desigualdade
  - de Cauchy-Schwarz, 37
  - triangular, 38
- Equação
  - de Codazzi, 21
  - de Gauss, 14, 15, 18, 32
- Espaço-Tempo
  - de Sitter, 42
  - Lorentz-Minkowski, 40
  - Lorentziano, 40
- Fórmula
  - de Gauss, 14, 29
  - de Koszul, 8
  - de Weingarten, 21, 29
- Função
  - Distância Riemanniana, 61
  - Tipo-Curvatura, 10
- Hipersuperfícies, 16
- Identidade
  - Bianchi, 9
- Imersão, 12
- Mergulho, 12
  - no Cone de Luz, 68
- Operador
  - de Weingarten, 17
  - divergente, 23
  - gradiente, 23
  - hessiano, 24
  - laplaciano, 24
- Orientação Temporal, 39
- Ponto Umbílico, 18
- Segunda Forma Fundamental, 14, 28, 35
- Subvariedade
  - Aprisionada, 29
  - Causalidade, 28
  - Lorentziana, 12
  - Marginalmente Aprisionadas Mergulhadas, 70
  - Minima Compacta, 75
  - Totalmente Umbílica, 19
- Tempo-Orientação, 39

Variedade

Flat, 9

Lorentziana, 4