Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós–Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Uma prova da conjectura do anulamento de Serre via K-teoria algébrica

José Carlos de Araújo

João Pessoa – PB
Fevereiro de 2021

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós–Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Uma prova da conjectura do anulamento de Serre via K-teoria algébrica

por

José Carlos de Araújo

sob a orientação do

Prof. Dr. Roberto Callejas Bedregal

co-orientação do

Prof. Dr. Napoleón Caro Tuesta

João Pessoa – PB
Fevereiro de 2021

Catalogação na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

A663p Araújo, José Carlos de.
Uma prova da conjectura do anulamento de Serre via K-teoria algébrica / José Carlos de Araújo. - João Pessoa, 2021.
95 f. : il.

Orientação: Roberto Callejas Bedregal.
Coorientação: Napoleon Caro Tuesta.
Dissertação (Mestrado) - UFPB/CCEN.

1. Álgebra. 2. K-teoria com suportes. 3. Operações de Adams. 4. Cup product. 5. Fórmula de interseção. 6. Conjectura de Serre. 7. Grupo de Groethendieck. I. Callejas Bedregal, Roberto. II. Caro Tuesta, Napoleon. III. Título.

UFPB/BC CDU 512(043)

Elaborado por Larissa Silva Oliveira de Mesquita - CRB-15/746

Uma prova da conjectura do anulamento de Serre via K-teoria algébrica

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Federal da Paraíba, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de concentração: Álgebra

Aprovado em: 26 / 02 / 2021

COMISSÃO EXAMINADORA:

Prof. Dr. Roberto Callejas Bedregal - UFPB (Orientador)

Prof. Dr. Napoleón Caro Tuesta - UFPB (Co-Orientador)

Ricardo Burity C. Macedo

Prof. Dr. Ricardo Burity Croccia Macedo - UFPB (Interno)

DocuSigned by:
DANIEL LEVCOVITZ
516AE31165024B7...

Prof. Dr. Daniel Levcovitz - USP (Externo)

Existe uma estrada. Essa estrada é a estrada que eu amo. Eu a escolhi. Quando trilho esta estrada, as esperanças brotam e, o sorriso se abre em meu rosto Dessa estrada nunca, jamais fugirei. (Daisaku Ikeda).

Agradecimentos

Aos meus avós, Napoleão e Doraci.

A Alexandro.

A Tânia, Luis, Ana Olímpia, Thayanne e outros familiares que me auxiliaram nessa jornada.

Em memória ao grande matemático Josenildo. Para sempre amigo!

Aos professores Roberto Bedregal e Napoleón Caro (meu orientador e meu co-orientador), pela oportunidade de aprender e crescer, além de aceitar a missão dessa orientação que foi muito rápida e paciente. Aos professores Ricardo Burity, Daniel Levcovitz, Fernando Xavier e Rodrigo Gondim por participarem da banca e todos os outros professores do departamento, pela contribuição na minha formação. Em especial aos professores Cleto Brasileiro, Fagner Araruna, e as professoras Jacqueline Rojas, Gabriela Wanderley, e Elisandra Gloss.

Aos meus amigos do laboratório Milênio. Em especial, Leon, Marcelo, Maria Raíza, Suelena, Raniere e Victor. As amizades que formei no mestrado. Em especial, Carlos, Joemerson, Joyce, Lázaro, Ozana, Renato, Thaís e Vinicius. Aos meus amigos pessoais. Em especial, Felipe, Alan, Anderson, Douglas, Clayton e Isabele. Agradeço por toda a ajuda, acolhimento e pelos momentos compartilhados.

À CAPES, pelo apoio financeiro.

Resumo

Considere um anel comutativo Noetheriano local regular $(A, \mathfrak{m})$ e sejam $\mathfrak{p}$ e $\mathfrak{q}$ dois ideais primos de A tais que $\ell_A(A/\mathfrak{p} \otimes_A A/\mathfrak{q}) < \infty$. No ano 1958, Jean Pierre Serre definiu a *multiplicidade de interseção* de $A/\mathfrak{p}$ e $A/\mathfrak{q}$ por

$$\chi(A/\mathfrak{p}, A/\mathfrak{q}) := \sum_{i=o}^{\infty}(-1)^i \ell_A(\mathrm{Tor}_A^i(A/\mathfrak{p}, A/\mathfrak{q})),$$

e conjecturou, entre outras coisas, que se

$$\dim(A/\mathfrak{p}) + \dim(A/\mathfrak{q}) < \dim(A),$$

então

$$\chi(A/\mathfrak{p}, A/\mathfrak{q}) = 0.$$

Tal conjectura ficou conhecida como *conjectura do anulamento de Serre* e foi provada em 1985 por Paul C. Roberts e, de maneira independente, por Henri Gillet e Christophe Soulé. O objetivo desta monografia é ilustrar e detalhar, seguindo as ideias de Gillet e Soulé, como algumas ferramentas da K-teoria algébrica podem ser usadas para demonstrar a referida conjectura.

Palavras-chave: grupo de Grothendieck, K-teoria com suportes, operações de Adams, *"cup product"*, fórmula de interseção, conjectura de Serre.

Abstract

Considerer a commutative local Noetherian regular ring $(A, \mathfrak{m})$ and let $\mathfrak{p}$ and $\mathfrak{q}$ be two prime ideals of A such that $\ell_A(A/\mathfrak{p} \otimes_A A/\mathfrak{q}) < \infty$. In 1958, Jean Pierre Serre defined the *intersection multiplicity* of $A/\mathfrak{p}$ e $A/\mathfrak{q}$ by

$$\chi(A/\mathfrak{p}, A/\mathfrak{q}) := \sum_{i=o}^{\infty}(-1)^i \ell_A(\mathrm{Tor}^i_A(A/\mathfrak{p}, A/\mathfrak{q})),$$

and he conjectured, among other things, that if

$$\dim(A/\mathfrak{p}) + \dim(A/\mathfrak{q}) < \dim(A),$$

then

$$\chi(A/\mathfrak{p}, A/\mathfrak{q}) = 0.$$

Such conjecture became known as *Serre vanishing conjecture.* This was proven by Paul C. Roberts and, independently, by Henri Gillet and Christophe Soulé in 1985. The main of this dissertation is to illustrate and detail, following the ideas of Gillet e Soulé, how some notions and machinery of algebraic K-theory can be used to prove such conjecture.

Keywords: Grothendieck group, K-theory with supports, Adams operations, *"cup product"*, intersection formula, Serre's conjecture.

Sumário

Notações

Conjuntos e Operações

$\subset$ - Inclusão.

$=$ - Igualdade.

$\setminus$ - Diferença.

$\subsetneq$ - Subconjunto próprio.

$\supset$ - "Contém".

$\not\subset$ - "Não está contido ".

$\cong$ - Isomorfismo.

$\cup$ - União.

$\cap$ - Interseção.

$\sum$ - Somatório.

∞ - Infinito.

$<, >$ - 'Menor", "Maior"

$\circ$ - Composição.

$\emptyset$ - Conjunto vazio.

$\mathbb{N}$ - Conjunto dos Números Naturais

$\mathbb{Z}$ - Conjunto dos Números Inteiros.

$\mathbb{Q}$ - Conjuntos dos Números Racionais.

$\mathbb{K}$ - Corpo.

$Ker(f)$ - Núcleo de f.

$Im(f)$ - Imagem de f.

$Coker(f)$ - Co-núcleo de f.

Categorias

Mon - Categoria dos Monoides Comutativos.

Mod_A - Categoria dos A- módulos

Ab - Categoria dos grupos abelianos.

$Mfg(A)$ - Categoria dos A- módulos finitamente gerados.

$\mathrm{Perf}^Z(A)$ - Categoria dos complexos limitados de A- módulos finitamente gerados "suportados"em Z.

$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ - Conjunto de todos os homorfismos entre objetos A e B de uma categoria $\mathcal{C}$.

Grupos de Grothendieck

S^+ - Grupo de Grothendieck associado a um monoide comutativo.

$K_0(A)$ - Grupo de Grothendieck dos A- módulos projetivos finitamente gerados.

$G_0(A)$ - Grupo de Grothendieck dos $A-$módulos finitamente gerados.

$K_0^Z(A)$- Grupo de Grothendieck de um anel A suportado em Z.

Homologia

$P \otimes_A Q$ - Produto tensorial de dois elementos sobre um anel A

$P_\bullet \longrightarrow L \longrightarrow 0$ ou P_M - Resolução projetiva de um $A-$módulo M.

P_M- Resolução projetiva de M

$Tor_i^A(M, N)$ - i-ésimo módulo Tor de M em N, em um anel A.

$C_\bullet$ - Complexo de A- módulos.

$Z_n(C)$- Módulo dos n- ciclos.

$B_n(C)$- Módulo das n- limitações.

∂_n- Homomorfismo conector.

$H_i(C)$ - i-ésimo grupo de Homologia do complexo C.

$P \otimes Q$ - produto tensorial de dois complexos $P_\bullet$ e $Q_\bullet$.

$K(a, A)$ - complexo de Koszul associado a um elemento a.

$K(a_1, \ldots, a_t, A)$ - Complexo de Koszul associado a uma sequência finita de elementos $a_1, \ldots, a_t$.

Invariantes Algébricos

$dim_{\mathbb{K}}(V)$ - Dimensão de um espaço vetorial V sobre um corpo K.

$\dim(A)$ - Dimensão de um anel A.

$dim(M)$ - Dimensão de um A- módulo M.

$ht(I)$ - Altura de um ideal I.

$l_A(M)$ - Comprimento de um A- módulo M.

$pd_A(M)$ - Dimensão projetiva de um A- módulo M.

$posto(P)$ - Posto de um módulo projetivo P.

$\chi(M, N)$ - Multiplicidade de interseção de Serre.

Outras Notações

$\langle X \rangle$ - ideal gerado pelo conjunto X.

$\langle a \rangle$ - ideal gerado pelo elemento a.

$I \trianglelefteq A$ - Notação para "I é um ideal de A".

$\mathfrak{q} \cap A$ - Contração de um ideal primo $\mathfrak{p}$.

$\sqrt{I}$ - Radical de um ideal I.

$A[x_1, \ldots, x_n]$ - Anel de polinônios nas indeterminadas $x_1, \ldots, x_n \in A$

$A[[t]]$ - Anel de séries de potências na indeterminada t sobre um anel A.

$S^{-1}A$ - Anel de fração de um anel A

A_P - Localização do anel A sobre um ideal primo P.

$S^{-1}M$- Módulo de fração de um A- módulo M.

$CF(A)$ - Corpo de frações de um anel A.

$K = A/\mathfrak{m}$ - Corpo residual de um anel local $(A, \mathfrak{m})$.

$\Lambda_A^n(M)$ - n-ésima Álgebra exterior de um A- módulo M.

$m_1 \wedge \ldots \wedge m_n$ - *"wedge product"*.

$\bigoplus_{i=0}^{n} M_i$ - Soma direta de A- módulos M_i.

$\mathrm{Ann}_N(t)$- Anulador de um elemento t.

$\mathrm{Ann}_B(W)$ - Anulador de W sobre o anel B.

Spec(A) - Espectro de um anel A, conjunto de todos os ideiais primeos de A.

$\mathrm{Max}(A)$ - Conjunto de todos os ideais maximais de um anel A.

$V(I)$ - Variedade algébrica de um ideal I, conjunto dos zeros de um ideal I.

$\psi^k_{A,Z}$ - Operações de Adams de um anel comutativo A de grau k.

$f \sim g$ - homotopia entre f e g.

$\mathrm{Ass}_A(M)$ - conjuntos dos primos associados.

$\mathrm{Min}_A(M)$ - conjuntos dos primos minimais.

$\mathcal{Z}(M)$ - conjuntos dos zeros de M.

$\mathrm{Supp}(M)$- Suporte de um A-módulo M.

$[P] \cup [Q]$- "cup product"

id_C - Morfismo identidade.

Introdução

Sejam A um anel (neste trabalho iremos supor que A é um anel comutativo com identidade), M, N dois módulos projetivos finitamente gerados. Iremos agora supor que $(A, \mathfrak{m})$ seja um anel local e os suportes de M e N se encontram apenas em $\mathfrak{m}$, ou seja $\mathrm{Supp}(M) \cap \mathrm{Supp}(N) = \{\mathfrak{m}\}$. Com isso, temos que $\mathrm{Tor}_i^A(M, N)$ tem comprimento finito para $i \geq 0$, e ao assumirmos que a dimensão projetiva dos módulos sejam finitas, temos a definição da multiplicidade de interseção definida por Serre, que é o inteiro

$$\chi(M, N) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^j l_A(\mathrm{Tor}_i^A(M, N)).$$

Serre formulou esta definição em 1958, para quocientes de ideais primos, onde a partir dessa ideia ele elaborou quatro propriedades importantes, nos quais se tornaram conjecturas. Dentre elas, temos as seguintes:

Desigualdade das Dimensões: $\dim(M) + \dim(N) \leq \dim(A)$.

Não-Negatividade: $\chi(M, N) \geq 0$.

Positividade: Se

$$\dim(M) + \dim(N) < \dim(A)$$

então

$$\chi(M, N) = 0.$$

A última dessas conjecturas é a conhecida Conjectura do Anulamento de Serre cujo seu enunciado é:

Conjectura do Anulamento de Serre: Seja A um anel local, e M e N dois $A-$módulos finitamente gerados, cuja suas dimensões projetivas sejam finitas. Se $\dim(M) + \dim(N) < \dim(A)$, então $\chi(M, N) = 0$.

Serre afirmou a conjectura quando A é um anel regular, e provou quando A é um anel regular e contém um corpo. Mais tarde, Gillet-Soulé e Roberts estenderam o resultado para anéis locais regulares arbitrários em meados dos anos 80's. Ambos os grupos provaram para anéis de interseções completas e Roberts provou para anéis locais com singularidades isoladas.

Neste trabalho iremos focar na prova baseada em Gillet- Soulé, com uma ligeira simplificação feita pelo Walker. Esta prova é baseada no estudo da K-teoria, em particular a K-teoria Álgébrica. Em um contexto geral, a K-teoria surgiu no final da década de 1950 quando Alexander Grothendieck associou grupos chamados de K_0 a certos objetos da geometria algébrica para dar sua generalização de um resultado nomeado o teorema de Riemann- Roch.

No primeiro capítulo exploraremos os grupos de Grothendieck, objetos de extrema importância na K-teoria algébrica. Estabeleceremos uma definição geral envolvendo monoides e depois iremos particularizar em dois casos, que chamaremos dos grupos $K_0(A)$ e $G_0(A)$. Por fim, iremos provar um resultado envolvendo localizações.

No segundo capítulo iremos exploramos a noção de produto exterior para construirmos as chamadas Operações de Adams. No terceiro capítulo, iremos apresentar o grupo $K_0^Z(A)$, algumas propriedades como funtorialidade, e definiremos o *"cup product".*

No capítulo final iremos apresentar os Axiomas de Gillet-Soulé e demonstraremos a célebre Conjectura de Serre.

Adicionamos um apêndice com definições e resultados que usamos constantemente em nosso trabalho. Esses conceitos servirão para familiarizar o conteúdo ao leitor. Esta leitura é opcional para quem já possui conhecimento de Algébra Comutativa Clássica e Algébra Homológica.

Para o desenvolvimento deste trabalho, as principais referências foram [DUGGER], [GILLET-SOULÉ] [WALKER1], [WALKER2] e [WANG].

Para auxiliar na teoria e nos resultados envolvendo álgebra homológica e da álgebra comutativa clássica utilizamos as referências [KUNZ], [MATSUMURA], [ROTMAN], [SERRE] e [WEIBEL].

Capítulo 1

Os grupos de Grothendieck de um anel

Nesse capítulo introduziremos as ferramentas base da K-teoria algébrica conhecidas como grupos de Grothendieck. Veremos como esses grupos são construídos de modo geral e destacaremos esse momento para duas categorias: módulos projetivos e módulos finitamente gerados.

As principais referências utilizadas nesse capítulo foram [DUGGER] e [ROTMAN].

1.1 O grupo de Grothendieck de um Monoide

Vamos denotar inicialmente por Mon a categoria dos monoides comutativos. Iremos definir um Grupo de Grothendieck de um monoide por uma propriedade universal.

Definição 1.1. *Um grupo de Grothendieck de um monoide comutativo* $(S, *)$ *é um par,* $(L; [\ .\ ])$ *formado por um grupo Abeliano* L *e um homomorfismo de monoides* $[\ .\ ] : S \longrightarrow L$ *com a seguinte propriedade universal: dados um grupo abeliano* G *e um homomorfismo de monoides* $\gamma : S \longrightarrow G$*, existe um único homomorfismo de grupos* $\Gamma : L \longrightarrow G$ *tal que*

$$\Gamma([a]) = \gamma(a),$$

para todo $a \in S$*.*

Observação 1.1. *A propriedade acima nos diz que o seguinte diagrama comuta*

$$\begin{tikzcd} S \arrow[rr, "{[\ .\ ]}"] \arrow[dr, "\gamma"'] & & L \arrow[dl, dotted, "\exists!\ \Gamma"] \\ & G & \end{tikzcd}$$

Exemplo 1.1. *Considere o monoide* $(\mathbb{N}, +)$, *e o homomorfismo inclusão* $[\ .\ ] : \mathbb{N} \hookrightarrow \mathbb{Z}$. *Afirmação:* $(\mathbb{Z}, [\ .\ ])$ *é um grupo de Grothendieck de* $\mathbb{N}$.

De fato: dados G *um grupo abeliano e um homomorfismo de monoides* $\gamma : \mathbb{N} \longrightarrow G$, *defina a seguinte aplicação* $\Gamma : \mathbb{Z} \longrightarrow G$ *como sendo:*

$$\Gamma(n) = \begin{cases} \gamma(n), & se\ n > 0 \\ 0, & se\ n = 0 \\ -\gamma(-n), & se\ n < 0 \end{cases}$$

A função Γ *é construída da seguinte forma : se* $n > 0$ *definimos* $\Gamma(n) = \gamma(n)$; *se* $n = 0$, *temos* $\Gamma(0) = (0)$. *Para* $n < 0$, *temos* $-n > 0$, *e assim* $\Gamma(-n) = \gamma(-n)$.

Porém,

$$0 = \gamma(0) = \gamma(n + (-n)) = \gamma(n) + \gamma(-n),$$

donde segue que $\Gamma(n) = -\gamma(-n)$.

Notamos que Γ *é um homomorfismo de grupos e que* $\Gamma \circ [\ .\ ] = \gamma$. *Perceba que como estamos lidando com o homomorfismo inclusão, temos que dado um* Γ_1 *tal que* $\Gamma_1 \circ [\ .\ ] = \gamma$, $\Gamma_1(n) = \gamma(n)$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$. *Daí,* $\Gamma(n) = \Gamma_1(n)$ *para todo* $n \in N$, *garantindo a unicidade.*

Exemplo 1.2. *Considere agora o monoide aditivo* $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$, *onde adicionamos o elemento "infinito" ao conjunto dos números naturais com a convenção* $a + \infty = \infty + a = \infty$. *Vamos supor que* G *é um grupo abeliano e* $\gamma : \mathbb{N} \cup \{\infty\} \longrightarrow G$ *é um homomorfismo de monoides.*

Note que $\gamma(\infty) = \gamma(\infty + a) = \gamma(\infty) + \gamma(n)$, *consequentemente* $\gamma(n) = 0$, *para todo* $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. *Defininindo* $[\ .\ ] : \mathbb{N} \cup \{\infty\} \longrightarrow \{0\}$ *como* $[\ .\ ](n) = 0$ *temos* $\Gamma : \{0\} \longrightarrow G$ *dada por* $\Gamma(0) = 0$ *e consequentemente* $\Gamma \circ [\ .\ ] = \gamma$. *Em consequência, o grupo abeliano trivial* $\{0\}$ *juntamente com o homomorfismo zero é um grupo de Grothendieck de* $N \cup \{\infty\}$.

Até então, demos exemplos de monoides onde encontramos um grupo de Grothendieck associado. O próximo resultado garantirá que todo monoide comutativo possui um único grupo de Grothendieck associado a menos de um isomorfismo.

Teorema 1.1. *(Existência e Unicidade do grupo de Grothendieck) Todo monoide comutativo* $(S, *)$ *possui um grupo de Grothendieck. Além disso, se* $(L, [\ .\ ])$ *e* $*(L', [\ .\ ]')$ *são dois grupos de Grothendieck de* S, *então existe um único isomorfismo de grupos* $f : L \longrightarrow L'$ *tal que*

$$f \circ [\ .\ ] = [\ .\ ]'.$$

Demonstração. Primeiro construiremos um grupo de Grothendieck de S. Vamos inicialmente considerar o grupo abeliano livre $\mathcal{F}$ com base S. Vamos adotar por $+$ a estrutura aditiva de $\mathcal{F}$ e $i : S \hookrightarrow \mathcal{F}$ a injeção canônica. Seja o subgrupo $\mathcal{H}$ gerado pelos elementos de $\mathcal{F}$ da forma

$$i(a) + i(b) - i(a * b), \quad a, b \in S.$$

Sejam $L := \mathcal{F}/\mathcal{H}$ o grupo quociente, $\pi : \mathcal{F} \longrightarrow L$ a projeção canônica e

$$[\ .\ ] : \pi \circ i : S \longrightarrow L$$

a composição de i e π. Perceba que dados $a, b \in S$, temos que $i(a)+i(b)-i(a*b) \in \mathcal{H}$, e assim

$$\begin{aligned} [a * b] &= \pi(i(a) + i(b)) \\ &= \pi(i(a)) + \pi(i(b)) \\ &= [a] + [b]. \end{aligned}$$

Isto prova que $[\ .\ ]$ é um homomorfismo de anéis.

Afirmação: $(L, [\ .\ ])$ é um grupo de Grothendieck de S. Com efeito, dados um grupo abeliano G e um homomorfismo de monoides $\gamma : S \longrightarrow G$, temos pela propriedade universal do grupo abeliano livre $\mathcal{F}$ que existe um único homomorfismo de grupos $\beta : \mathcal{F} \longrightarrow G$ tal que o seguinte diagrama comuta.

$$\begin{tikzcd} S \arrow[rr, "i"] \arrow[dr, "\gamma"'] & & \mathcal{F} \arrow[dl, dotted, "\exists!\ \beta"] \\ & G & \end{tikzcd}$$

Em outras palavras, $\beta \circ i = \gamma$.

Note que para todo $a, b \in S$,

$$\begin{aligned} \beta(i(a) + i(b) - i(a * b)) &= \beta(i(a)) + \beta(i(b)) - \beta(i(a * b)) \\ &= \gamma(a) + \gamma(b) - \gamma(a * b) = 0. \end{aligned}$$

Portanto, $\mathcal{H} \subseteq \ker\beta$ e segue pelo teorema de fatoração de grupos que existe um único homomorfismo de grupos $\Gamma : L \longrightarrow G$ tal que o seguinte diagrama é comutativo.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F} \arrow[rr, "\beta"] \arrow[dr, "\pi"'] & & G \\
& L \arrow[ur, dotted, "\exists!\ \Gamma"'] &
\end{tikzcd}$$

Consequentemente,

$$\Gamma \circ [\ .\ ] = (\Gamma \circ \pi) \circ i = \beta \circ i = \gamma.$$

Por outro lado, se $\Gamma' : L \longrightarrow G$ é outro homomorfismo de grupos tal que $\Gamma' \circ [\ .\ ] = \gamma$ então $(\Gamma' \circ \pi) \circ i = \beta \circ i$. Como S é uma base de $\mathcal{F}$ segue que $\Gamma' \circ \pi = \beta$. Como Γ é o único homomorfismo tal que $\Gamma \circ \pi = \beta$ concluímos que $\Gamma = \Gamma'$, assim provando nossa primeira afirmação.

Suponhamos agora que $(L, [\ .\ ])$ e $(L', [\ .\ ]')$ são dois grupos de Grothendieck de S. Consideremos o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd}
S \arrow[r, equal] \arrow[d, "{[\ .\ ]}"'] & S \arrow[r, equal] \arrow[d, "{[\ .\ ]'}"'] & S \arrow[d, "{[\ .\ ]}"'] \\
L \arrow[r, dashed, "\exists!\ f"] & L' \arrow[r, dashed, "\exists!\ f'"] & L
\end{tikzcd}$$

Desde que $(L, [\ .\ ])$ é um grupo de Grothendieck de S, existe um único homomorfismo de grupos $f : L \longrightarrow L'$ tal que o quadrado da esquerda é comutativo, isto é, $f \circ [\ .\ ] = [\ .\ ]'$. Analogamente, desde que $(L', [\ .\ ]')$ também é um grupo de Grothendieck de S, existe um único homomorfismo de grupos $f' : L' \longrightarrow L$ tal que o quadrado da direita comuta, isto é, $f' \circ [\ .\ ]' = [\ .\ ]$.

Portanto, o seguinte diagrama é comutativo

$$\begin{tikzcd}
S \arrow[rr, "{[\ .\ ]}"] \arrow[dr, "{[\ .\ ]}"'] & & L \arrow[dl, "f' \circ f"] \\
& L &
\end{tikzcd}$$

Como $\mathrm{id}_L \circ [\ .\ ] = [\ .\ ]$, temos pela unicidade dos homomorfismos com esta propriedade que $f' \circ f = \mathrm{id}_L$. Por um argumento análogo segue que $f \circ f' = \mathrm{id}_{L'}$. Consequentemente, f é um isomorfismo de grupos.

$\square$

Ao garantirmos o resultado anterior, podemos falar do grupo de Grothendieck de um monoide comutativo S. Denotaremos o grupo por S^+.

Observação 1.2. *Suponha que S e T sejam dois monoides comutativos e $\gamma : S \longrightarrow T$ um homomorfismo entre os monoides. Para cada monoide, temos associados os seus respectivos grupos de Grothendieck S^+ e T^+. Pela propriedade universal de S^+ temos que dado o grupo T^+ existe um único homomorfismo de grupos $\gamma^+ : S^+ \longrightarrow T^+$ tal que o seguinte diagrama comuta*

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "{[\ \cdot\ ]_S}"'] & T \arrow[d, "{[\ \cdot\ ]_T}"] \\ S^+ \arrow[r, "\exists!\ \gamma^+"] & T^+ \end{tikzcd}$$

Com isso,temos que

i. $id_S^+ = id_{S^+}$.

ii. $(\gamma \circ \theta)^+ = \gamma^+ \circ \theta^+$.

iii. *As correspondências $S \longmapsto S^+$ e $(\gamma : S \longrightarrow T) \longmapsto (\gamma^+ : S^+ \longrightarrow T^+)$ definem um funtor*

$$(-)^+ : Mon \longrightarrow Ab$$

onde Ab denota a categoria dos grupos abelianos.

De iii), temos que a propriedade universal do grupo de Grothendieck garante que $(-)^+$ é um funtor adjunto à esquerda do funtor $Ab \longrightarrow Mon$. Em outras palavras, existe um isomorfismo natural

$$Hom_{Ab}(S^+, G) \cong Hom_{Mon}(S, G)$$

para todo monoide comutativo S e todo grupo abelianno G.

Vamos agora para algumas propriedades do grupo de Grothendieck por meio da próxima proposição.

Proposição 1.2. *Seja $(S, *)$ um monoide comutativo. Então:*

i. *Todo elemento de S^+ pode ser escrito como $[a] - [b]$ onde $a, b \in S$*

ii. *Sejam $a, b \in S$. Então $[a] = [b] \in S^+$ se, e somente se, existe $s \in S$ tal que $a * s = b * s$.*

iii. O homomorfismo de monoides

$$\begin{array}{rccl} \varphi: & S\times S & \longrightarrow & S^+ \\ & (a,b) & \longmapsto & \varphi(a,b) := [a]-[b] \end{array}$$

é sobrejetivo.

iv. Existe uma bijeção entre o conjunto S^+ e o conjunto quociente $(S\times S)/\sim$ onde $\sim$ é a relação de equivalência em $S\times S$ definida por: $(a,b)\sim(c,d)$ se, e somente se, existe $s\in S$ tal que $a*d*s = b*c*s$.

Demonstração. Ao longo de toda demonstração, usaremos como referência o modelo de grupo de Grothendieck apresentado na demonstração do **Teorema 1.1**.

i. Seja x um elemento de S^+. Logo, existe um elemento de $y\in\mathcal{F}$ tal que $x=\pi(y)$. Desde que S é uma base do grupo livre $\mathcal{F}$, podemos escrever $y=\sum_k n_k i(c_k)$ para alguns $n_k\in\mathbb{Z}$ e alguns $c_k\in S$ e assim

$$x=\pi(y)=\sum_k n_k\pi(i(c_k))=\sum_k n_k[c_k].$$

Separando os coeficientes positivos dos negativos, temos que

$$x=\sum_i m_i[a_i]-\sum_j p_j[b_j], m_i, p_j\geq 1 \text{ e } a_i, b_j\in S.$$

Defina $a=\star m_i a_i$ e $b:=\star p_j b_j$. Então $x=[a]-[b]$, (estrela representa a repetição da operação $*$ em S várias vezes).

ii. Sejam $a,b\in S$. Suponhamos que exista $s\in S$ tal que $a*s=b*s$. Então em S^+ temos que $[a]+[s]=[a*s]=[b*s]=[b]+[s]$. Isto implica que $[a]=[b]$. Reciprocamente, suponha que $[a]=[b]\in S^+$, ou seja $\pi(i(a))=\pi(i(b))$. Então $i(a)-i(b)\in\operatorname{Ker}(\pi)=\mathcal{H}$. Logo podemos escrever,

$$i(a)-i(b)=\sum_{k=1}^{m}(i(c_k)+i(d_k)-i(c_k*d_k))-\sum_{j=1}^{n}(i(e_j*f_j)-i(e_j)-i(f_j))$$

para $c_k, d_k, e_j, f_j\in S$ e $m,n\geq 1$. Organizando os termos positivos e negativos, temos que

$$i(a)+\sum_{k=1}^{m} i(c_k*d_k)+\sum_{j=1}^{n}(i(e_j)+i(f_j))=i(b)+\sum_{k=1}^{m}(i(c_k)+i(d_k))+\sum_{j=1}^{n} i(e_j*f_j).$$

Como $\mathcal{F}$ é um grupo Abeliano livre com base S, as duas somas podem ser iguais se, e somente se , m=n e os geradores se diferem por permutação. Assim, ao definirmos $c := \star c_k,\ d := \star d_k,\ e := \star e_j$ e $f := \star f_j$, obtemos a seguinte igualdade em S:

$$a * s = b * s, \text{ onde } s = c * d * e * f.$$

iii. É consequência direta de (i.).

iv. Suponha que $(a, b) \sim (c, d) \in S \times S$. Então, $a * d * s = b * c * s$ para algum $s \in S$. Pela parte (ii.) $[a * d] = [b * c]$, donde $\varphi(a, b) = [a] - [b] = [c] - [d] = \varphi(c, d)$. Consequentemente, φ induz uma aplicação $\tilde{\varphi} : (S \times S)/\sim \longrightarrow S^+$ que faz o seguinte diagrama comutar, onde π é a aplicação quociente $(a, b) \longmapsto \overline{(a, b)}$.

$$\begin{tikzcd}
S \times S \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\pi"] & S^+ \\
(S \times S)/\sim \arrow[ur, "\exists!\ \tilde{\varphi}"'] &
\end{tikzcd}$$

Desde que φ é sobrejetiva pela parte (iii.), a aplicação induzida $\tilde{\varphi}$ também é sobrejetiva. Por outro lado, a parte (ii.) conclui que $\tilde{\varphi}$ é injetiva, sendo assim uma bijeção.

□

Observação 1.3. *A bijeção construída na parte (iv.) da Proposição anterior gera uma forma de obter outro modelo para o grupo de Grothendieck de S.*

1.2 O grupo $K_0(A)$

Consideremos agora um anel comutativo A. Denote por $\Omega(A)$ o conjunto de todos os A-módulos projetivos finitamente gerados e defina a relação de equivalência $\sim$ em $\Omega(A)$ da seguinte maneira: $P \sim Q$, se existe um isomorfismo $P \cong Q$. A classe de isomorfismo de um A-módulo projetivo finitamente gerado P será denotada por $\overline{P}$ e o conjunto quociente $\Omega(A)/\sim$ por $\mathcal{P}(A)$. Desde que a soma direta de dois A-módulos projetivos finitamente gerados também é um A- módulo projetivo finitamente gerado, o conjunto $\mathcal{P}(A)$ equipado com a operação binária

$$\overline{P} * \overline{Q} := \overline{P \oplus Q}$$

é um monoide comutativo.

Definição 1.2. *Seja A um anel comutativo. O grupo $K_0(A)$ é definido como o grupo de Grothendieck $(\mathcal{P}(A))^+$ do monoide $\mathcal{P}(A)$.*

Se $\overline{P}$ e $\overline{Q}$ são duas classes de A-módulos projetivos finitamente gerados, então em $K_0(A)$ cumpre-se a seguinte igualdade

$$[\overline{P \oplus Q}] = [\overline{P}] + [\overline{Q}].$$

Além disso, pela **Proposição 1.2** todo elemento de $K_0(A)$ pode ser expresso da forma $[\overline{P}] - [\overline{Q}]$ onde P e Q são dois A-módulos projetivos finitamente gerados. Desde que todo A-módulo projetivo finitamente gerado é somando direto de algum A-módulo livre de posto finito, existe um inteiro positivo n e um A-módulo Q' projetivo finitamente gerado tal que $Q \oplus Q' = A^n$ em $\mathcal{P}(A)$. Logo,

$$[\overline{P}] - [\overline{Q}] = [\overline{P}] + [\overline{Q'}] - [\overline{A^n}].$$

Isto mostra que todo elemento de $K_0(A)$ é da forma $[\overline{P_1}] - [\overline{A^n}]$ onde P_1 é um A-módulo projetivo finitamente gerado e n é um inteiro positivo.

Definição 1.3. *Sejam P e Q dois A-módulos projetivos finitamente gerados. Dizemos que P e Q são estavelmente isomorfos, se existe um inteiro não negativo $n \geq 0$ tal que $P \oplus A^n \cong Q \oplus A^n$.*

Desde que A-módulos projetivos finitamente gerados são soma direta de A-módulos livres de posto finito, segue que dois A-módulos projetivos finitamente gerados são estavelmente isomorfos se, e somente se, existe um A-módulo projetivo finitamente gerado L tal que $P \oplus L \cong Q \oplus L$.

O próximo resultado nos dará uma condição de igualdade de elementos em $K_0(A)$.

Proposição 1.3. *Sejam P e Q dois A-módulos projetivos finitamente gerados. Então P e Q são estavelmente isomorfos se, e somente se, $[\overline{P}] = [\overline{Q}]$ em $K_0(A)$.*

Demonstração. Pela parte ii.) do **Teorema 1.2**, $[\overline{P}] = [\overline{Q}]$ em $K_0(A)$ se, e somente se, existe um A-módulo projetivo finitamente gerado L tal que $\overline{P} * \overline{L} = \overline{Q} * \overline{L}$ em $\mathcal{P}(A)$. Equivalentemente, existe um A-módulo projetivo finitamente gerado L tal que $\overline{P \oplus L} = \overline{Q \oplus L}$. Em outras palavras, existe um A-módulo projetivo finitamente gerado L tal que $P \oplus L \cong Q \oplus L$. □

Sejam x e y dois elementos de $K_0(A)$. Então existem P, Q A-módulos projetivos finitamente gerados, m, n inteiros positivos tais que $x = [\overline{P}] - [\overline{A^m}] = [\overline{P}] - m[\overline{A}]$ e $y = [\overline{Q}] - n[\overline{A}]$. Desde que produto tensorial de A-módulos projetivos finitamente gerados é também é um A- módulo projetivo finitamente gerado podemos definir uma multiplicação em $K_0(A)$ da seguinte maneira:

$$x \cdot y = [\overline{P \otimes_A Q}] - n[\overline{P}] - m[\overline{Q}] + mn[\overline{A}]$$

Tal multiplicação está bem definida. Com efeito, suponhamos que $x = [\overline{P_1}] - m_1[\overline{A}]$ e $y = [\overline{Q_1}] - n_1[\overline{A}]$ são outras representações dos elementos x e y, respectivamente.

Temos $[\overline{P}] - m[\overline{A}] = [\overline{P_1}] - m_1[A]$, donde $[\overline{P \oplus A^{m_1}}] = [\overline{P_1 \oplus A^m}]$.

Pela **Proposição 1.3** existe $l \geq 0$ inteiro tal que

$$P \oplus A^{m_1+l} = P_1 \oplus A^{m+l}. \tag{1.1}$$

Daí, temos a seguinte igualdade em $K_0(A)$:

$$[\overline{P}] + m_1[\overline{A}] = [\overline{P_1}] + m[\overline{A}]. \tag{1.2}$$

Depois de tensorar por Q o isomofismo em 1.1 obtemos o seguinte isomorfismo

$$(P \otimes_A Q) \oplus Q^{m_1+l} \cong (P_1 \otimes_A Q) \oplus Q^{m+l},$$

que por sua vez origina a seguinte igualdade em $K_0(A)$:

$$[\overline{P \otimes_A Q}] + m_1[\overline{Q}] = [\overline{P_1 \otimes_A Q}] + m[\overline{Q}] \tag{1.3}$$

Por outro lado, $[\overline{Q}] - n[\overline{A}] = [\overline{Q_1}] - n_1[\overline{A}]$, donde $[\overline{Q \oplus A^{n_1}}] = [\overline{Q \oplus A^n}]$.

Pela **Proposição 1.3**, existe um inteiro $p \geq 0$ tal que

$$Q \oplus A^{n_1+p} \cong Q_1 \oplus A^{n+p}. \tag{1.4}$$

Tal isomorfismo gera a seguinte igualdade

$$[\overline{Q}] + n_1[\overline{A}] = [\overline{Q_1}] + n[\overline{A}] \tag{1.5}$$

Depois de tensorar o isomorfismo 1.4 por P_1 obtemos o seguinte isomorfismo

$$(P_1 \otimes_A Q) \oplus P_1^{n_1+p} \cong (P_1 \otimes_A Q_1) \oplus P^{n_1+p}.$$

que por sua vez origina a seguinte igualdade em $K_0(A)$:

$$[\overline{P_1 \otimes_A Q}] + n_1[\overline{P_1}] = [\overline{P_1 \otimes_A Q_1}] + n[\overline{P_1}] \tag{1.6}$$

Usando as relações 1.2, 1.3, 1.5 e 1.6 obtemos que

$$[\overline{P \otimes_A Q}] - n[\overline{P}] - m[\overline{Q}] + mn[\overline{A}] = [\overline{P_1 \otimes Q_1}] - n_1[\overline{P_1}] - m_1[\overline{Q_1}] + m_1n_1[\overline{A}],$$

o que mostra que a operação está bem definida.

Por outro lado, notemos que as leis de distributividade são satisfeitas. Portanto, concluímos que $K_0(A)$ tem estrutura de anel comutativo com identidade $[\overline{A}]$.

Observação 1.4. *Seja $f : A \longrightarrow B$ um homomorfismo de anéis e P um A-módulo projetivo finitamente gerado, então $B \otimes_A P$ é um B- módulo projetivo finitamnte gerado. Desde que o produto tensorial se distribui com relação à soma, a aplicação*

$$\begin{array}{rccl} \gamma : & \mathcal{P}(A) & \longrightarrow & \mathcal{P}(B) \\ & \overline{P} & \longmapsto & \gamma(\overline{P}) := [\overline{B \otimes_A P}] \end{array}$$

é um homomorfismo de monoides. Então, pela propriedade universal do grupo $K_0(A)$, existe um único homomorfismo de anéis

$$K_0(f) : K_0(A) \longrightarrow K_0(B),$$

tal que o seguinte diagrama é comutativo

$$\begin{tikzcd} \mathcal{P}(A) \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "{[\ ]_A}"'] & \mathcal{P}(B) \arrow[d, "{[\ ]_B}"] \\ K_0(A) \arrow[r, dashed, "\exists\ !K_0(f)"] & K_0(B). \end{tikzcd}$$

De maneira mais explícita,

$$K_0(f)[\overline{P}] = [\overline{B \otimes_A P}] \textit{ para todo } A\textit{- módulo projetivo finitamente gerado.}$$

1.3 O grupo $G_0(A)$

Seja A um anel. Vamos denotar por $Mfg(A)$ a categoria dos A-módulos finitamente gerados.

Definição 1.4. *Seja G um Grupo Abeliano. Uma aplicação ψ é dita aditiva sobre $Mfg(A)$ com valores em G se, para qualquer sequência exata*

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

em $Mfg(A)$ vale a igualdade

$$\psi(M) = \psi(M') + \psi(M'').$$

Note que $\psi(0) = 0$. As funções aditivas possuem algumas propriedades importantes, como iremos listar no Lema abaixo.

Lema 1.4. *Sejam A um anel, G um grupo abeliano e $\psi : Mfg(A) \longrightarrow G$ uma função aditiva.*

i. Para qualquer sequência exata em $Mfg(A)$

$$0 \longrightarrow M_n \longrightarrow M_{n-1} \longrightarrow \ldots \longrightarrow M_1 \longrightarrow M_0 \longrightarrow 0$$

temos que

$$\sum_j (-1)^j \psi(M_j) = 0.$$

ii. Se A é Noetheriano, então para todo complexo de A-módulos em $Mfg(A)$

$$C_\bullet : \qquad M_n \xrightarrow{\partial_n} M_{n-1} \xrightarrow{\partial n-1} \ldots \longrightarrow M_1 \xrightarrow{\partial_1} M_0 \longrightarrow 0$$

vale a igualdade

$$\sum_j (-1)^j \psi(M_j) = \sum_j (-1)^j \psi(H_j(C_\bullet)).$$

onde

$$H_j(C_\bullet) = \frac{Ker(\partial_{j-1})}{Im(\partial_j)}$$

é o j-ésimo grupo de homologia do complexo $C_\bullet$.

iii. Se

$$M = M_0 \supseteq M_1 \supseteq M_2 \supseteq \ldots \supseteq M_n \supseteq M_{n+1} = 0$$

é uma filtração de M por A-módulos finitamente gerados, então

$$\psi(M) = \sum_j \psi(M_j/M_{j+1}).$$

Demonstração. i. Seja

$$C_\bullet : \qquad M_n \xrightarrow{\partial_n} M_{n-1} \xrightarrow{\partial n-1} \ldots \longrightarrow M_1 \xrightarrow{\partial_1} M_0 \longrightarrow 0$$

um complexo de A-módulos em $Mfg(A)$.

Considere as sequências exatas curtas

$$0 \longrightarrow Z_j \hookrightarrow M_j \longrightarrow B_{j-1} \longrightarrow 0$$

onde $Z_j := \mathrm{Ker}(\partial_j)$ e $B_j := \mathrm{Im}(\partial_{j+1})$. Desde que cada M_j é finitamente gerado, então B_j também é, pois é a imagem de M_{j+1} via ∂_{j+1}. Portanto, se $C_\bullet$ é exato, então $Z_j = B_j$ e portanto Z_j é finitamente gerado. Logo,

$$\psi(M_j) = \psi(Z_j) + \psi(B_{j-1}) = \psi(Z_j) + \psi(Z_{j-1}) \in G.$$

Assim,

$$\sum_j (-1)^j \psi(M_j) = \sum_j (-1)^j \psi(Z_j) - \sum_j (-1)^{j-1} \psi(Z_{j-1}) = 0.$$

ii. Agora suponhamos A é Noetheriano, mas que o complexo $C_\bullet$ não é necessariamente exato. Considere as seguintes sequências exatas curtas

$$0 \longrightarrow B_j \hookrightarrow Z_j \longrightarrow H_j(C_\bullet) \longrightarrow 0$$

em $Mfg(A)$.

Logo, $\psi(Z_j) = \psi(B_j) + \psi(H_j(C_\bullet))$ em G.

Por outro lado, $\psi(M_j) = \psi(Z_j) + \psi(B_{j-1})$, donde

$$\begin{aligned}\sum_j (-1)^j \psi(M_j) &= \sum_j (-1)^k \psi(Z_j) - \sum_j (-1)^{j-1} \psi(B_{j-1}) \\ &= \sum_j (-1)^j (\psi(B_j) + \psi(H_j(C_\bullet))) - \sum_j (-1)^{j-1} \psi(Z_{j-1}) \\ &= \sum_j (-1)^j \psi(H_j(C_\bullet)).\end{aligned}$$

iii. Das seguintes sequências exatas curtas

$$0 \longrightarrow M_{j+1} \hookrightarrow M_j \longrightarrow M_j/M_{j+1} \longrightarrow 0$$

temos as relações

$$\psi(M_j) - \psi(M_{j+1}) = \psi(M_j/M_{j+1}).$$

Consequentemente,

$$\psi(M) = \psi(M_0) - \psi(M_{n+1}) = \sum_j (\psi(M_j) - \psi(M_{j+1})) = \sum_j \psi(M_j/M_{j+1}).$$

□

Seja $\mathcal{FG}(A)$ o conjunto das classes de isomorfismos $\overline{M}$ dos A-módulos finitamente gerados. Sejam $\mathcal{L}$ o grupo abeliano livre com base $\mathcal{FG}(A)$ e $\mathcal{N}$ o subgrupo de $\mathcal{L}$ gerados pelos elementos $\overline{M} - \overline{M'} - \overline{M''}$, para toda sequência exata curta

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

de A-módulos finitamente gerados.

Definição 1.5. *O grupo de Grothendieck dos A-módulos finitamente gerados é dado por $G_0(A) := \mathcal{L}/\mathcal{N}$.*

Um elemento de $G_0(A)$ é da forma $\langle \overline{M} \rangle$ onde tal elemento é a classe módulo $\mathcal{N}$ do elemento $\overline{M} \in \mathcal{FG}(A)$.

Assim, dada uma sequência exata curta em $Mfg(A)$ (A-módulos finitamente gerados)

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0\ ,$$

temos que
$$\langle \overline{M} \rangle = \langle \overline{M'} \rangle + \langle \overline{M''} \rangle.$$

Concluímos então que a função

$$\begin{array}{rccc} \psi : & Mfg(A) & \longrightarrow & G_0(A) \\ & M & \longmapsto & \psi(\overline{M}) := \langle \overline{M} \rangle \end{array}$$

é aditiva. Além disso, $\psi(Mfg(A))$ gera o grupo $G_0(A)$.

Observação 1.5. *Note que é importante que na definição de $G_0(A)$ usemos apenas A-módulos finitamente gerados, pois caso contrário o grupo pode ser o trivial. Neste caso, vamos considerar para cada módulo M a seguinte seqûencia exata*

$$0 \longrightarrow M \hookrightarrow M^{\infty} \longrightarrow M^{\infty} \longrightarrow 0$$

onde $M^{\infty} := M \oplus M \oplus M \oplus M \oplus \cdots$. Então

$$\langle \overline{M^{\infty}} \rangle = \langle \overline{M} \rangle + \langle \overline{M^{\infty}} \rangle \in G_0(A).$$

Portanto, $\langle \overline{M} \rangle = 0$, concluindo que $G_0(A) = 0$.

O próximo resultado mostrará que $G_0(A)$ pode também ser caracterizado por uma propriedade universal.

Teorema 1.5. *O par $(G_0(A), \psi)$ possui a seguinte propriedade universal: para qualquer função aditiva $\eta : Mfg(A) \longrightarrow G$ existe um único homomorfismo de grupos $\varphi : G_0(A) \longrightarrow G$ tal que*
$$\varphi \circ \psi = \eta.$$

Em outras palavras, o seguinte diagrama é comutativo

$$\begin{tikzcd} Mfg(A) \arrow[rr, "\psi"] \arrow[dr, "\eta"'] & & G_0(A) \arrow[dl, dotted, "\exists!\ \varphi"] \\ & G & \end{tikzcd}.$$

Demonstração. Seja G um grupo abeliano munido com uma função aditiva

$$\eta : Mfg(A) \longrightarrow G.$$

Note que se dois A-módulos finitamente gerados são isomorfos, então a sequência exata curta

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0 \longrightarrow 0$$

implica $\eta(M) = \eta(N)$. Portanto, existe uma única aplicação $\tilde{\eta} : \mathcal{FG}(A) \longrightarrow G$ tal que

$$\tilde{\eta}(\overline{M}) = \eta(M), \text{ para todo } M \in Mfg(A).$$

Pela propriedade universal do grupo abeliano livre $\mathcal{L}$ existe um único homomorfismo de grupos $\beta : \mathcal{L} \longrightarrow G$ que faz comutativo o seguinte diagrama.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{FG}(A) \arrow[rr, hook] \arrow[dr, "\tilde{\eta}"'] & & \mathcal{L} \arrow[dl, dotted, "\exists!\ \beta"] \\
& G &
\end{tikzcd}.$$

Consideremos uma sequência exata curta em $Mfg(A)$

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

Pelo **Lema 1.4**, segue que

$$\begin{aligned}
\beta(\overline{M} - \overline{M'} - \overline{M''}) &= \beta(\overline{M}) - \beta(\overline{M'}) - \beta(\overline{M''}) \\
&= \tilde{\eta}(\overline{M}) - \tilde{\eta}(\overline{M'}) - \tilde{\eta}(\overline{M''}) \\
&= \eta(M) - \eta(M') - \eta(M'') \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Portanto, $\mathcal{N} \subseteq \ker\beta$.

Seja $\pi : \mathcal{L} \longrightarrow G_0(A)$ a projeção canônica. Pelo teorema de fatoração de grupos, existe um único homomorfismo de grupos $\varphi : G_0(A) \longrightarrow G$ tal que o seguinte diagrama é comutativo.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{L} \arrow[rr, "\beta"] \arrow[dr, "\pi"'] & & G \\
& G_0(A) \arrow[ur, dotted, "\exists!\ \varphi"'] &
\end{tikzcd}.$$

Portanto, para $M \in Mfg(A)$

$$\varphi \circ \psi(M) = \varphi(\langle \overline{M} \rangle) = \varphi \circ \pi(\overline{M}) = \beta(\overline{M}) = \tilde{\eta}(\overline{M}) = \eta(M),$$

donde $\varphi \circ \psi = \eta$

Por outro lado, se $\varphi' : G_0(A) \longrightarrow G$ é outro homomorfismo de grupos tal que $\varphi' \circ \psi = \eta$, então

$$\varphi'(\langle \overline{M} \rangle) = \eta(M) = \tilde{\eta}(\overline{M}),$$

para todo A-módulo finitamente gerado M. Portanto, $\varphi' \circ \pi = \beta$, pois $\mathcal{FG}(A)$ é uma base de $\mathcal{L}$. Como φ é o único homomorfismo tal que $\varphi \circ \phi = \beta$ concluímos que $\varphi' = \varphi$, provando o teorema. $\square$

Agora, seja a aplicação $\gamma : \mathcal{P}(A) \longrightarrow G_0(A)$ definida por $\gamma(\overline{M}) = \langle \overline{M} \rangle$.

Proposição 1.6. *A aplicação γ é um homomorfismo de monoides.*

Demonstração. Sejam M e N dois A-módulos projetivos finitamente gerados. Considere a sequência exata curta

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow M \oplus N \longrightarrow N \longrightarrow 0$$

Então, $\langle \overline{M \oplus N} \rangle = \langle \overline{M} \rangle + \langle \overline{N} \rangle$ em $G_0(A)$, donde

$$\gamma(\overline{M} * \overline{N}) = \gamma(\overline{M \oplus N}) = \langle \overline{M \oplus N} \rangle = \langle \overline{M} \rangle + \langle \overline{N} \rangle = \gamma(\overline{M}) + \gamma(\overline{N}).$$

$\square$

Com essa proposição, a propriedade universal de $K_0(A)$ garante a existência de um único homomorfismo de grupos $\alpha : K_0(A) \longrightarrow G_0(A)$ tal que

$$\alpha([\overline{M}]) = \langle \overline{M} \rangle,$$

para todo A-módulo projetivo finitamente gerado M.

Vamos definir o que é um *anel regular* de acordo com a definição dada pelo [DUGGER].

Definição 1.6. *Um anel A é dito regular, se todo $A-$ módulo finitamente gerado possui uma uma resolução projetiva finita de M.*

O teorema a seguir nos dará uma condição necessária sobre o anel para que o homomorfismo seja de fato um isomorfismo de grupos.

Teorema 1.7. *Se A é um anel regular então $\alpha : K_0(A) \longrightarrow G_0(A)$ é um isomorfismo de grupos.*

Demonstração. Vamos mostrar primeiro que α é sobrejetiva. Tome um gerador $\langle \overline{M} \rangle$ de $G_0(A)$ e escolha uma resolução projetiva finita de M formada por A-módulos projetivos finitamente gerados de M. Então,

$$\alpha\left(\sum_j (-1)^j [\overline{P_j}] \right) = \sum_j (-1)^j \langle \overline{P_j} \rangle = \langle \overline{M} \rangle,$$

onde a segunda igualdade é conseqûencia da parte (i.) do **Lema 1.4**.

Para provarmos que α é injetiva, construiremos uma inversa à esquerda de α da seguinte forma: considere a função

$$\begin{array}{rccl} \eta : & Mfg(A) & \longrightarrow & K_0(A) \\ & M & \longmapsto & \eta(M) := \sum_j (-1)^j [\overline{P_j}] \end{array}$$

onde $P_\bullet \longrightarrow M \longrightarrow 0$ é uma resolução projetiva finita de M formada por A-módulos projetivos finitamente gerados.

Afirmação 1: η está bem definida. Com efeito, suponhamos que $Q_\bullet \longrightarrow M \longrightarrow 0$ é outra resolução projetiva finita de M. O homomorfismo identidade id_M: M $\longrightarrow$ M induz um morfismo de complexos $f : P_\bullet \longrightarrow Q_\bullet$ dado pelo diagrama

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & P_2 \arrow[r, "\partial_2"] \arrow[d, "f_2"'] & P_1 \arrow[r, "\partial_1"] \arrow[d, "f_1"'] & P_0 \arrow[r] \arrow[d, "f_0"'] & M \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}_M"'] & 0 \\ \cdots \arrow[r] & Q_2 \arrow[r, "\delta_2"] & Q_1 \arrow[r, "\delta_1"] & Q_0 \arrow[r] & M \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

Agora, seja $C_\bullet$ o cone de $f_\bullet$, isto é, o complexo de A-módulos $C_j = P_{j-1} \oplus Q_j$ com diferencial $d_j : C_j \longrightarrow C_{j-1}$ dada por $d_j(a,b) = (-\partial_{j-1}(a), -f_{j-1}(a) + \delta_j(b))$. Então existe uma sequência exata curta de complexos

$$0 \longrightarrow Q_\bullet \xrightarrow{i} C_\bullet \xrightarrow{\pi} (P[-1])_\bullet \longrightarrow 0$$

onde $(P[-1])_j = P_{j-1}$, $i_j(b) = (0,b)$ e $\pi_j(a,b) = a$.

A sequência acima induz uma sequência exata longa

$$\cdots \longrightarrow H_2(Q_\bullet) \xrightarrow{i_*} H_2(C_\bullet) \xrightarrow{\pi_*} H_2(P[-1]_\bullet) \xrightarrow{f_*} H_1(Q_\bullet) \xrightarrow{i_*}$$

$$H_1(C_\bullet) \xrightarrow{\pi_*} H_1(P[-1]_\bullet) \xrightarrow{f_*} H_0(Q_\bullet) \xrightarrow{i_*} H_0(C_\bullet) \xrightarrow{\pi_*} H_0(P[-1]_\bullet) \longrightarrow 0$$

Desde que $H_j(Q_\bullet) = 0$ para todo $j \geq 1$ e $H_j(P[-1]) = H_{j-1}(P_\bullet) = 0$ para todo $j \geq 2$ vemos que $H_j(C_\bullet) = 0$ para todo $j \geq 2$. Note também que $H_1(P[-1]) \cong H_0(Q_\bullet) \cong M$ e $H_0(P[-1]_\bullet) = 0$, donde $H_1(C_\bullet) = H_0(C_\bullet) = 0$. Consequentemente, o complexo $C_\bullet$ é exato.

Um argumento semelhante usado na parte (i.) do **Lema 1.4** mostra que

$$\sum_j (-1)^j [\overline{C_j}] = 0 \text{ em } K_0(A)$$

.

Portanto,

$$\sum_j (-1)^j [\overline{Q_j}] = \sum_j (-1)^j [\overline{P_j}],$$

e assim η está bem definida.

Afirmação 2: η é aditiva. De fato, seja

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{\theta} M \xrightarrow{\varepsilon} N \longrightarrow 0$$

uma sequência exata em $Mfg(A)$. Escolha resoluções projetivas finitas $P_\bullet \longrightarrow L \longrightarrow 0$ e $Q_\bullet \longrightarrow M \longrightarrow 0$ dos módulos L e M respectivamente. O homomorfismo θ induz um morfismo de complexos $g : P_\bullet \longrightarrow Q_\bullet$.

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & P_2 \arrow[r, "\partial_2"] \arrow[d, "g_2"'] & P_1 \arrow[r, "\partial_1"] \arrow[d, "g_1"'] & P_0 \arrow[r] \arrow[d, "g_0"'] & L \arrow[r] \arrow[d, "\theta"] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & Q_2 \arrow[r, "\delta_2"] & Q_1 \arrow[r, "\delta_1"] & Q_0 \arrow[r] & M \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Seja $T_\bullet := Cone(g)$ o cone do morfismo g. Considere como acima, a sequência exata longa (nos módulos de homologia) induzida pela sequência exata curta de complexos

$$0 \longrightarrow Q_\bullet \xrightarrow{i} T_\bullet \xrightarrow{\pi} (P[-1])_\bullet \longrightarrow 0\ .$$

A princípio, $H_j(T_\bullet) = 0$ para $j \geq 2$. Logo, a sequência exata longa se reduz seguinte sequência

$$0 \longrightarrow H_1(T_\bullet) \xrightarrow{\pi_*} L \xrightarrow{\theta} M \xrightarrow{i_*} H_0(T_\bullet) \longrightarrow 0.$$

Desde que θ é injetiva, $H_1(T_\bullet) = 0$. Além disso,

$$H_0(T_\bullet) \cong M/\mathrm{Im}(\theta) = M/\mathrm{Ker}(\varepsilon) \cong N.$$

Em consequência, $T_\bullet \longrightarrow N \longrightarrow 0$ é uma resolução projetiva finita de N. Portanto,

$$\eta(N) = \sum_j (-1)[\overline{T_j}] = -\sum_j (-1)^{j-1}[P_{j-1}] + \sum_j (-1)^j[\overline{Q_j}] = \eta(L) + \eta(M).$$

Pela propriedade universal do grupo $G_0(A)$ existe um único homomorfismo de grupos $\beta : G_0(A) \longrightarrow K_0(A)$ tal que

$$\beta(\langle \overline{M} \rangle) = \sum_j (-1)^j[\overline{P_j}],$$

onde $P_\bullet \longrightarrow M \longrightarrow 0$ é uma resolução projetiva finita de M. Pela aditividade,

$$(\beta \circ \alpha)([\overline{M}]) == \beta(\langle \overline{M} \rangle) = \sum_j (-1)^j[\overline{P_j}] = [\overline{M}]$$

para todo A-módulo projetivo finitamente gerado M. Em particular, α é injetiva.

$\square$

Usaremos o isomorfismo α para equipar o grupo $G_0(A)$ com uma estrutura de anel comutativo da seguinte forma: dados M e N dois A-módulos finitamente gerados, definimos

$$\langle \overline{M} \rangle \odot \langle \overline{N} \rangle := \alpha(\beta(\langle \overline{M} \rangle) \cdot \beta(\langle \overline{N} \rangle)).$$

O próximo resultado mostra como este produto funciona em termos do funtor Tor.

Proposição 1.8.

$$\langle \overline{M} \rangle \odot \langle \overline{N} \rangle = \sum_k (-1)^k \langle Tor_k(M, N) \rangle$$

Demonstração. Sejam $P_\bullet \longrightarrow M \longrightarrow 0$ e $Q_\bullet \longrightarrow N \longrightarrow 0$ duas resoluções projetivas finitas de M e N, respectivamente. Para cada k fixo, o complexo $P_\bullet \otimes_A Q_k$ é uma resolução projetiva finita de $M \otimes_A Q_k$, pois Q_k é um módulo plano.

Logo,

$$\sum_j \langle P_j \otimes_A Q_k \rangle = \langle \overline{M \otimes_A Q_k} \rangle.$$

Usando esta igualdade e a propriedade (ii.) do **Lema 1.4** obtemos que

$$\begin{aligned}
\langle\overline{M}\rangle \odot \langle\overline{N}\rangle &= \alpha\left(\sum_j (-1)^j[\overline{P_j}] \cdot \sum_k (-1)^k[\overline{Q_k}]\right) \\
&= \sum_{j,\ k} (-1)^{j+k}\langle\overline{P_j \otimes_A Q_k}\rangle \\
&= \sum_k (-1)^k \left(\sum_j (-1)^j\langle\overline{P_j \otimes_A Q_k}\rangle\right) \\
&= \sum_k (-1)^k\langle\overline{M \otimes_A Q_k}\rangle \\
&= \sum_k (-1)^k\langle\overline{H_k(M \otimes_A Q_\bullet)}\rangle \\
&= \sum_k (-1)^k\langle\overline{\mathrm{Tor}_k(M, N)}\rangle.
\end{aligned}$$

□

Dado M um A-módulo vamos definir o $A[t]$ módulo

$$M[t] := M \otimes_A A[t],$$

onde t é uma indeterminada sobre A.

Note que se M é finitamente gerado então $M[t]$ é finitamente gerado como $A[t]$-módulo. Além disso, se M e N são dois A-módulos e $f : M \longrightarrow N$ é uma aplicação A-linear temos que $f \otimes 1_{A[t]} : M[t] \longrightarrow N[t]$ define um funtor exato da categoria Mod_A na categoria $\mathrm{Mod}_{A[t]}$. Pela propriedade universal dos grupos de Grothendieck, temos que existe um homomorfismo $\alpha : G_0(A) \longrightarrow G_0(A[t])$ tal que

$$\alpha(\langle\overline{M}\rangle) = \langle\overline{M[t]}\rangle.$$

O próximo resultado exibirá uma condição para α ser um isomorfismo de grupos.

Teorema 1.9. *Se A é um anel Noetheriano, então α é um isomorfismo de grupos.*

Demonstração. Para provarmos a injetividade, iremos encontrar uma inversa à esquerda para α. Seja então

$$0 \longrightarrow A[t] \xrightarrow{t} A[t] \xrightarrow{\pi} A[t]/(t) \longrightarrow 0$$

uma resolução projetiva (livre) de $A[t]/(t)$. Aplicando o produto tensorial por N na resolução anterior, temos

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{t} N \longrightarrow 0\,.$$

Portanto,

$$\mathrm{Tor}_0^{A[t]}(N, A[t]/(t)) = N/tN$$

$$\mathrm{Tor}_1^{A[t]}(N, A[t]/(t)) = \mathrm{Ker}(t : N \longrightarrow N) = \mathrm{Ann}_N(t) = (0 :_N t)$$

$$\text{Para } i \geq 2, \quad \mathrm{Tor}_i^{A[t]}(N, A[t]/(t)) = 0.$$

Definimos então

$$\begin{array}{rccl} \beta : & G_0(A[t]) & \longrightarrow & G_0(A) \\ & \langle\overline{N}\rangle & \longmapsto & \beta(\langle\overline{N}\rangle) := \displaystyle\sum_{i\geq 0}(-1)^i\langle\overline{\mathrm{Tor}_i^{A[t]}(N, A[t]/(t))}\rangle. \end{array}$$

Explicitamente,

$$\beta(\langle\overline{N}\rangle) = \langle\overline{N/tN}\rangle - \langle\overline{\mathrm{Ann}_N(t)}\rangle.$$

Temos que β está bem definida e $\beta \circ \alpha = \mathrm{id}_{G_0(A)}$.

Afirmamos agora que α é sobrejetiva. Temos que se $B = A[t]$ é um anel Noetheriano, então o conjunto $\{\langle\overline{B/\mathfrak{q}}\rangle : \mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}(B)\}$ gera $G_0(B)$. Logo, é suficiente provar que $\langle\overline{B/\mathfrak{q}}\rangle \in \mathrm{Im}\ (\alpha)$. Suponhamos por contradição que exista um elemento $\langle\overline{B/\mathfrak{q}}\rangle \notin \mathrm{Im}\ (\alpha)$.

Considere

$$T = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A) \mid \mathfrak{p} = \mathfrak{q} \cap A, \mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}(B)\ e\ \langle\overline{B/\mathfrak{q}}\rangle \notin \mathrm{Im}\ (\alpha)\}.$$

Como $T \neq \emptyset$, existe um elemento máximal em T que denotaremos por $\mathfrak{p} = \mathfrak{q} \cap A$.

Considere os homomorfismos B-lineares

$$B \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} B/\mathfrak{p}^B \overset{i}{\hookrightarrow} (A - \mathfrak{p})^{-1}((A/\mathfrak{p})[t]).$$

Observe que:

i. $B/\mathfrak{p}^B \cong (A/\mathfrak{p})[t]$, portanto um domínio;

ii.
$$(A - \mathfrak{p})^{-1}((A/\mathfrak{p})[t]) \cong (A_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}A_\mathfrak{p})[t] = K[t],$$

onde $K = (A_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}A_\mathfrak{p})$ e $K \cong CF(A/\mathfrak{p})$, onde $CF(A/\mathfrak{p})$ é o seu corpo de frações.

Com isso, concluímos que $K[t]$ é um domínio de ideais principais e assim seja $\tilde{Q}$ o ideal gerado por $i \circ \pi(\mathfrak{q})$. Como $\tilde{Q} = (\overline{f})$, temos que $\overline{f} = \overline{a_0} + \overline{a_1}t + \ldots + \overline{a_n}t^n$, $\overline{a_i} \in A/\mathfrak{p}$ e assim $f \in \mathfrak{q}$.

Seja então o B-módulo

$$W = \frac{\mathfrak{q}}{\mathfrak{p}B + (f)}.$$

Desde que $(A - \mathfrak{p})^{-1}W = 0$, existe $u \in A - \mathfrak{p}$ tal que $u \in \mathrm{Ann}_B(W)$ (além disso, $\mathfrak{p}W = 0$), portanto $\mathfrak{p} + (u) \subseteq \mathrm{Ann}_B(W)$.

Seja a seguinte cadeia em W,

$$0 \subseteq W_0 \subseteq W_1 \subseteq \ldots \subseteq W,$$

tal que $W_{i+1}/W_i \cong B/\mathfrak{q}_i$ com $\mathfrak{q}_i \in \mathrm{Spec}(B)$.

Perceba que para cada i, $\mathfrak{p} \subsetneq \mathfrak{p} + (u) \subseteq \mathrm{Ann}_B(W) \subseteq \mathfrak{q}_i$, e desde que $\mathfrak{p}$ é maximal em T temos que $\mathfrak{p} \subsetneq \mathfrak{q}_i \cap A$ e assim $\mathfrak{q}_i \cap A \notin T$.

Como $\langle\overline{B/\mathfrak{q}_i}\rangle \in \mathrm{Im}\ \alpha$, então temos que $W = \sum\langle\overline{W_{i+1}/W_i}\rangle \in \mathrm{Im}\ \alpha$.

Seja então a seguinte sequência exata

$$0 \longrightarrow W \hookrightarrow \frac{B}{\mathfrak{p}^B + (f)} \longrightarrow B/\mathfrak{q} \longrightarrow 0$$

Daí, temos que

$$\left\langle\overline{\frac{B}{\mathfrak{p}^B + (f)}}\right\rangle = \langle\overline{W}\rangle + \langle\overline{B/\mathfrak{q}}\rangle.$$

Entretanto, note que se $\mathfrak{p} \subseteq A$ é primo e $f \in B \setminus \mathfrak{p}B$, então a seguinte sequência exata

$$0 \longrightarrow B/\mathfrak{p}^B \xrightarrow{f} B/\mathfrak{p}^B \longrightarrow \frac{B}{\mathfrak{p}^B + (f)} \longrightarrow 0$$

gera a seguinte igualdade

$$\langle\overline{B/\mathfrak{p}^B}\rangle = \langle\overline{B/\mathfrak{p}^B}\rangle + \left\langle\overline{\frac{B}{\mathfrak{p}^B + (f)}}\right\rangle,$$

daí

$$\left\langle\overline{\frac{B}{\mathfrak{p}^B + (f)}}\right\rangle = 0,$$

concluindo que $\langle\overline{B/\mathfrak{q}}\rangle \in \mathrm{Im}\ \alpha$. Contradição!

□

Observação 1.6. *Por questão de notação, vamos denotar os elementos de $G_0(A)$ e $K_0(A)$ por $\langle\ .\ \rangle$ e $[\ .\ ]$, respectivamente (sem a barra).*

Para o próximo corolário, vamos lembrar do seguinte resultado

Lema 1.10. *Seja A um anel noetheriano. Se A é regular , então $A[x_1, \ldots, x_n]$ é um anel regular.*

Demonstração. Ver **Corolário 2.7** em [KUNZ]. □

Esse resultado é um corolário do conhecido "Hilbert Syzygy Theorem". Com isso, temos o seguinte isomorfismo:

Corolário 1.11. *Seja $\mathbb{K}$ um corpo. Então $K_0(\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]) \cong \mathbb{Z}$.*

Demonstração. Pela **Proposição 1.10**, temos que $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ é regular. Portanto vale o **Teorema 1.9**. Como $K_0(\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]) \cong G_0(\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]) \cong G_0(\mathbb{K})$,temos que mostrar que $G_0(\mathbb{K}) \cong \mathbb{Z}$.

Tome $\gamma : Mfg(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{Z}$ tal que $\gamma(F) = n$, para $F \cong \mathbb{K}^n$. Como γ é aditiva, segue pela propriedade universal de $G_0(\mathbb{K})$, $G_0(\mathbb{K}) \cong \mathbb{Z}$. □

1.4 Localização

Dados A um anel e $f \in A$, sejam o anel $A/(f)$ e a localização $A_f = f^{-1}A$. Observe que se M é um (A/f)-módulo finitamente gerado, então M é um A-módulo finitamente gerado. Logo, para cada um dos conjuntos, podemos associar a seus respectivos grupos de Grothendieck.

Antes de seguirmos para os próximos resultados vamos assumir o seguinte lema:

Lema 1.12. *Seja $S \subset A$ um sistema multiplicativo. Assumiremos que todos os A-módulos desse enunciado são finitamente gerados.*

i. Para todo $S^{-1}A$-módulo W, existe um A- módulo M e onde $S^{-1}M \cong W$,

ii. Para quaisquer A- módulos M_1 e M_2 e para qualquer aplicação $S^{-1}A$-linear $f : S^{-1}M_1 \longrightarrow S^{-1}M_2$, existe uma aplicação A-linear $g : M_1 \longrightarrow M_2$ e o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd} S^{-1}M_1 \arrow[r, "S^{-1}g"] \arrow[d, equal] & S^{-1}M_2 \arrow[d, "\cong"] \\ S^{-1}M_1 \arrow[r, "f"] & S^{-1}M_2. \end{tikzcd}$$

iii. Para qualquer sequência exata de $S^{-1}A$-módulos

$$0 \longrightarrow W_1 \longrightarrow W_2 \longrightarrow W_3 \longrightarrow 0,$$

existe uma sequência exata curta de A-módulos

$$0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow M_2 \longrightarrow M_3 \longrightarrow 0$$

e isomorfismos

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & S^{-1}M_1 \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & S^{-1}M_2 \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & S^{-1}M_3 \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & 0 \\
0 \arrow[r] & W_1 \arrow[r] & W_2 \arrow[r] & W_3 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Demonstração. Ver **Lema 4.7** em [DUGGER]. □

Com este lema iremos provar o seguinte resultado:

Proposição 1.13. *Sejam os subgrupos de $G_0(A)$:*

i. $S_1 := \langle \langle M\rangle - \langle N\rangle \mid M_f \cong N_f\rangle$;

ii. $S_2 := \langle \langle M\rangle - \langle N\rangle \mid \exists\ \varphi : M \longrightarrow N$ *tal que* φ_f *é um isomorfismo*$\rangle$;

iii. $S_3 := \langle \langle J\rangle \mid J_f = 0\rangle$.

Então, $S_1 = S_2 = S_3$

Demonstração. Perceba que $S_1 \supseteq S_2 \supseteq S_3$, pois $S_2 \subseteq S_1$ e se $J_f = 0$, então $\langle J\rangle = \langle J\rangle - \langle 0\rangle \in S_2$. Mostremos que $S_1 \subseteq S_2$. Seja $x = \langle M\rangle - \langle N\rangle$ um gerador de S_1, ou seja, existe um isomofismo $\psi : M_f \longrightarrow N_f$. Pelo **Lema 1.12** (item ii.) existe $\alpha : M \longrightarrow N$ A-linear tal que $\psi \circ \alpha_f = \sigma$.

$$\begin{tikzcd}
M_f \arrow[r, "\alpha_f"] \arrow[d, equal] & N_f \arrow[d, "\psi"', "\cong"] \\
M_f \arrow[r, "\sigma"] & N_f.
\end{tikzcd}$$

Como σ é isomorfismo, α_f é isomorfismo e assim $x \in S_2$ e $S_1 \subseteq S_2$.

Provemos que $S_2 \subseteq S_3$. Seja $x = \langle M\rangle - \langle N\rangle$ gerador de S_2, ou seja, existe uma função $\varphi : M \longrightarrow N$ tal que φ_f é isomorfismo.

Considere a sequência exata

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ker}(\varphi) \hookrightarrow M \xrightarrow{\varphi} N \longrightarrow \mathrm{Coker}(\varphi) \longrightarrow 0.$$

Em $G_0(A)$, temos pela aditividade que

$$\langle M\rangle - \langle N\rangle = \langle \mathrm{Ker}(\varphi)\rangle - \langle \mathrm{Coker}(\varphi)\rangle.$$

Aplicando a localização na sequência exata, temos

$$0 \longrightarrow (\mathrm{Ker}(\varphi))_f \longrightarrow M_f \xrightarrow{\varphi_f} N_f \longrightarrow (\mathrm{Coker}(\varphi))_f \longrightarrow 0,$$

donde $(\mathrm{Ker}\varphi)_f = (\mathrm{Coker}\varphi)_f = 0$.
Portanto, $\langle \mathrm{Ker}(\varphi)\rangle - \langle \mathrm{Coker}(\varphi)\rangle \in S_3$ e

$$\langle M\rangle - \langle N\rangle \in S_3.$$

□

Com isso, temos condições de mostrar o seguinte teorema:

Teorema 1.14. *A sequência*

$$G_0(A/f) \xrightarrow{d_1} G_0(A) \xrightarrow{d_0} G_0(A_f) \longrightarrow 0\ ,$$

com $d_1(\langle M\rangle) = \langle M\rangle$ e $d_0(\langle M\rangle) = \langle M_f\rangle$ onde $M_f \cong M \otimes_A A_f$, é exata.

Demonstração. Vamos mostrar primeiro que d_0 é sobrejetiva. Seja Z um A_f-módulo finitamente gerado, ou seja, existem $z_1, \ldots, z_k \in Z$ tais que $Z = A_f\langle z_1, \ldots, z_k\rangle$ (gerados por $z_1, \ldots, z_k$ com coeficientes em A_f).

Defina $W := A\langle z_1, \ldots, z_k\rangle$

Afirmação: $W_f \cong Z$. De fato: primeiramente note que $W_f \cong W \otimes_A A_f$. Com a aplicação bilinear de $W \times A_f$ em Z dada por $(w, a/f^n) \longmapsto (a/f^n) \cdot w$, temos pela propriedade universal do produto tensorial que existe $\varphi : W \otimes_A A_f \longrightarrow Z$ tal φ é isomorfismo e o diagrama abaixo comuta. Em outras palavras, $\varphi(W \otimes a/f^n) = (a_f^n \cdot w)$.

$$\begin{tikzcd} W \times A_f \arrow[rr] \arrow[dr] & & W \otimes_A A_f \arrow[dl, "\varphi"] \\ & Z & \end{tikzcd}$$

Definimos então a seguinte aplicação:

$$\begin{array}{rccl} \tilde{\varphi}: & W_f & \longrightarrow & Z \\ & (w/f^n) & \longmapsto & \tilde{\varphi}(w/f^n) := (1/f^n)\cdot w. \end{array}$$

Por construção, temos que $\tilde{\varphi}$ é sobrejetiva.

Vamos supor que $(w/f^n) \in \mathrm{Ker}(\tilde{\varphi})$, ou seja $\tilde{\varphi}(w/f^n) = 0$. Portanto, $w = 0$ e assim $w/f^n = 0/f^n = 0$, donde $w/f^n = 0$. Concluímos que $\tilde{\varphi}$ é injetiva e, portanto um isomorfismo.

Assim, $d_0(\langle W\rangle) = \langle W_f\rangle = \langle Z\rangle$ e d_0 é sobrejetiva.

Provaremos agora que $d_0 \circ d_1 = 0$. Se M é um $A/f-$módulo finitamente gerado, então $f \in \mathrm{Ann}_A(M)$. Assim, $fM = 0 \Longrightarrow M_f = 0$. Portanto,

$$d_0 \circ d_1(\langle M\rangle) = d_0(\langle M\rangle) = \langle M_f\rangle = 0.$$

Por fim, vamos mostrar que $\mathrm{Ker}(d_0) \subseteq \mathrm{Im}(d_1)$. Seja então o grupo de Grothendieck $G_0(\{M \mid M_f = 0\})$. E assim temos uma sequência exata natural

$$G_0(\{M \mid M_f = 0\} \xrightarrow{\tilde{d_1}} G_0(A) \xrightarrow{d_0} G_0(A_f) \longrightarrow 0$$

Mostremos que a função $\phi : G_0(A) \longrightarrow G_0(\{M \mid M_f = 0\})$ é um isomorfismo.

De fato, seja M um A-módulo finitamente gerado tal que $M_f = 0$. Existe $N \in \mathbb{N}$ tal $f^N \cdot M = 0$, onde este N é mínimo com tal propriedade. Temos então a seguinte cadeia

$$M \supseteq fM \supseteq f^2M \supseteq \ldots \supseteq f^NM = 0.$$

Vamos denotar $M_0 = M$ e $M_i = f^iM$ para $1 \leq i \leq N$. Perceba que M_i/M_{i+1} é um $(A/f)-$módulo. Assim, defina a função

$$\begin{array}{rccl} \Psi: & G_0(\{M \mid M_f = 0\}) & \longrightarrow & G_0(A/f) \\ & \langle M\rangle & \longmapsto & \Psi(\langle M\rangle) := \displaystyle\sum_{i=0}^{N} \left\langle \frac{M_i}{M_{i+1}} \right\rangle \end{array}$$

Temos que Ψ está bem definida, $\Psi \circ \Phi = \mathrm{Id}$ e $\Phi \circ \Psi = \mathrm{Id}$

Provemos então que Ker $(d_0) \subseteq$ Im $(\tilde{d_1})$. Sabemos que $G_0(A) = \mathcal{L}/\mathcal{N}$, onde $\mathcal{R}el(A) = \mathcal{N}$ são as relações e $\mathcal{L}$ é o grupo abeliano livre com base M, com M finitamente gerado.

Seja o diagrama comutativo:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{R}el(A) \arrow[r, hook] \arrow[d, "\pi"] & \mathcal{L}(A) \arrow[r, "P_A"] \arrow[d, "\pi"] & G_0(A) \arrow[r] \arrow[d, "d_0"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{R}el(A_f) \arrow[r, hook] & \mathcal{L}(A_f) \arrow[r, "P_A"] & G_0(A_f) \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Perceba que π é sobrejetiva. Seja então $\mathrm{Ker}(d_0) = P_A(\mathrm{Ker}(\pi))$, e vamos denotar $\mathrm{Im}(\tilde{d_1}) = S_3$.

Seja $x \in \mathrm{Ker}(\pi)$. Daí,

$$x = M_1 + \ldots + M_k - N_1 + \ldots + N_l \in \mathcal{L}(A)$$

e desde que $\pi(x) = 0$ segue que

$$0 = \pi(x) = f^{-1}M_1 + \ldots + f^{-1}M_k + f^{-1}N_1 + \ldots + f^{-1}N_l \in \mathcal{L}(A_f).$$

Como $k = l$, temos que $f^{-1}M_j = f^{-1}N_{i(j)}$, onde $0 \leq j \leq k$ e $0 \leq i(j) \leq l$, com $Z_j = N_{i(j)}$.

Portanto,

$$x = (M_1 - N_1) + \ldots + M_k - N_l,$$

com $f^{-1}M_j \cong f^{-1}N_{i(j)}$. Concluímos que $P_A(x) \in S_1 = S_3 = \mathrm{Im}(\tilde{d_1})$.

$\square$

Vejamos um exemplo de como esse resultado se aplica.

Exemplo 1.3. *Seja F um corpo e defina $A = F[t]/(t^2)$. Perceba que $G_0(A)$ é gerado por F. De fato: para qualquer A-módulo M sobre A temos a filtração $M \supset tM$, e assim $\langle M \rangle = \langle M/tM \rangle + \langle tM \rangle$. Entretanto, ao fazer o produto por t, M/tM e tM desaparecem no quociente. Portanto, ambos são soma direta de cópias de F ou seja, qualquer elemento de $G_0(A)$ é gerado por F. Desde que $G_0(A)$ é um domínio de ideais principais (todo elemento é gerado por nF,onde $n \in \mathbb{Z}$), segue que $G_0(A) \cong \mathbb{Z}$.*

Agora, seja $B = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ e $f = (2)$. Note que R não é um domínio de ideais principais, porém $f^{-1}B$ é, e assim $G_0(B) \cong \mathbb{Z}$.

Temos que

$$B/f = \frac{\mathbb{Z}/2[x]}{(x^2+5)} = \frac{\mathbb{Z}/2[x]}{(x^2+1)} = \frac{\mathbb{Z}/2[x]}{(x+1)^2} \cong \frac{\mathbb{Z}/2[t]}{(t^2)}.$$

Portanto, $G(B/f) \cong \mathbb{Z}$, pois $F = \mathbb{Z}/(2)$ é corpo.

Temos que $G(B/f) = \langle B/(2, x+1) \rangle = \langle B/(2, 1-\sqrt{-5}) \rangle$

Calculando a sequência exata, temos a seguinte forma

$$\mathbb{Z} \xrightarrow{d_1} G(B) \xrightarrow{d_0} \mathbb{Z} \longrightarrow 0 \,,$$

onde $d_1(1) = \langle B/(2, 1-\sqrt{-5})\rangle$ e $d_0(\langle B\rangle) = 1$. Seja, $I = (2, 1+\sqrt{-5})$ e temos então que $G(B)$ é gerado por B ou B/I.

Capítulo 2

As Operações de Adams

Neste capítulo iremos mostrar, a partir da noção de produto exterior, a existência das chamadas Operações de Adams. Essas operações serão primordiais para o Capítulo 4.

A principal referência utilizada foi [WALKER1].

2.1 Produto exterior

Sejam A um anel Noetheriano, M um A-módulo e n ≥ 0. A *n-ésima potência exterior* de M é um par (H, φ) formado por um A-módulo H e uma aplicação multilinear alternada $\varphi : \underbrace{M \times_A \ldots \times_A M}_{n-vezes} \longrightarrow H$ com a seguinte propriedade universal: dado um A-módulo L juntamente com uma aplicação multilinear alternada ψ existe um único homomorfismo A-linear $\sigma : H \longrightarrow L$ tal que o seguinte diagrama é comutativo

$$\begin{tikzcd}
M \times \ldots \times M \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr] & & H \arrow[dl, dotted, "\sigma"] \\
& L &
\end{tikzcd}$$

Em outras palavras, temos que $\sigma \circ \varphi = \psi$.

Observação 2.1. *a. Lembremos que uma aplicação multilinear*

$$\varphi : M \times \ldots \times M \longrightarrow H$$

é dita alternada, se $\varphi(m_1, \ldots, m_n) = 0$, *para todos* $(m_1, \ldots, m_n) \in M \times \ldots \times M$ *tais que* $m_i = m_j$, *com* $i \neq j$.

b. Como a n-ésima potência exterior foi definida via uma propriedade universal, temos que a existência garante unicidade, a menos de isomorfismo canônico.

O próximo resultado garante a existência de potência exterior para qualquer A-módulo M.

Teorema 2.1. *Dados um A-módulo M e $n \geq 0$, existe a n-ésima potência exterior de M.*

Demonstração. Seja N o submódulo de $\bigotimes_A^n M := \underbrace{M \otimes_A \ldots \otimes_A M}_{n-vezes}$ gerado pelos elementos $m_1 \otimes \ldots \otimes m_n$ tais que $m_i = m_j$ para alguns índices $i \neq j$.

Defina $H := \bigotimes_A^n M/N$ e $\varphi : M \times \ldots \times M \longrightarrow H$ como a composição dos mapas naturais

$$\begin{tikzcd} M \times \ldots \times M \arrow[r, "\theta"] \arrow[rr, bend right, "\varphi"'] & \bigoplus_A^n M \arrow[r, "\pi"] & H \end{tikzcd}$$

onde $\theta(m_1, \ldots, m_n) = m_1 \otimes \ldots \otimes m_n$. Como θ é multilinear, segue que φ é uma aplicação multilinear alternada.

Vejamos que o par (H, φ) satisfaz a propriedade universal. Sejam L um A-módulo $\psi : M \times \ldots \times M \longrightarrow L$ uma aplicação multilinear alternada. Pela propriedade universal do produto tensorial $\bigotimes_A^n M$, existe um único homomorfismo de A-módulos $\eta : \otimes_A^n M \longrightarrow L$ tal que $\eta \circ \theta = \psi$.

Note que se $m_1 \otimes \ldots \otimes m_i \otimes \ldots \otimes m_i \ldots \otimes m_n$ é um gerador de N, então

$$\eta(m_1 \otimes \ldots \otimes m_i \otimes \ldots \otimes m_i \ldots \otimes m_n) = \psi(m_1 \otimes \ldots \otimes m_i \otimes \ldots \otimes m_i \ldots \otimes m_n) = 0,$$

pois ψ é alternada. Com isso $N \subseteq \text{Ker } \eta$. Logo, pelo Teorema fundamental dos homomorfismos, existe um único homomorfismo de A-módulos $\sigma : H \longrightarrow L$ tal que $\sigma \circ \pi = \eta$. Portanto, $\sigma \circ \varphi = \sigma \circ (\pi \circ \theta) = \eta \circ \theta = \psi$.

Se $\sigma' : H \longrightarrow L$ é um homomorfismo de A-módulos tal que $\sigma' \circ \varphi = \psi$, então $\sigma' \circ \varphi = \sigma \circ \varphi$. Portanto, $(\sigma' \circ \varphi) \circ \theta = (\sigma \circ \varphi) \circ \theta$, e pela propriedade universal do tensor, $\sigma' \circ \pi = \sigma \circ \pi$. Como π é um epimorfismo, segue que $\sigma' = \sigma$. $\square$

Notação: denotamos $H := \Lambda_A^n(M)$ para denotar a n-ésima álgebra exterior de M. Com relação à notação dos elementos, é usual denotarmos

$$\varphi(m_1, \ldots, m_n) := m_1 \wedge \ldots \wedge m_n.$$

Chamaremos a função φ de *"wedge product"*.

Observação 2.2. *Note que* $\Lambda_A^0(M) \cong A$ *e* $\Lambda_A^1(M) \cong M$.

Nesta seção, iremos omitir algumas demonstrações. Porém, o livro texto para base dessa seção estará disponível na bibliografia.

Teorema 2.2. *Sejam* S *um subconjunto multiplicativo de* A, M *um* A*-módulo e* $n \geq 0$. *Então,*

$$(\Lambda_A^n M)_S \cong (\Lambda_{A_S}^n M_S).$$

Demonstração. Ver **Teorema 10.2.15** em [WANG]. □

Sejam M, N A-módulos e $f : M \longrightarrow N$ um homomorfismo de $A-$módulos. Defina

$$\begin{array}{rccl} F: & M \times \ldots \times M & \longrightarrow & N \\ & (m_1, \longrightarrow, m_n) & \longmapsto & F(m_1, \ldots, m_n) := f(m_1) \wedge \ldots \wedge f(m_n). \end{array}$$

Note que F é uma aplicação multilinear alternada, e pela propriedade universal de $\Lambda_A^n M$ existe um único homomorfismo $f_\Lambda : \Lambda_A^n M \longrightarrow \Lambda_A^n N$ tal que $f_\Lambda \circ \varphi = F$.

Assim,

$$f_\Lambda(m_1 \wedge \ldots \wedge m_n) = f(m_1) \wedge \ldots \wedge f(m_n).$$

Note que

i. $(id_M)_\Lambda = id_{\Lambda_A^n M}$;

ii. Se $f : M \longrightarrow N$ e $g : N \longrightarrow L$ são homomorfismos de A-módulos então

$$(g \circ f)_\Lambda = g_\Lambda \circ f_\Lambda.$$

Portanto, as correspondências $M \longmapsto \Lambda_A^n M$ e $f \longmapsto f_\Lambda$ definem um funtor

$$\Lambda_A^n(-) : \mathrm{Mod}_A \longrightarrow \mathrm{Mod}_A$$

.

Notação: f_Λ pode também ser escrito como $\Lambda_A^n(f)$.

Proposição 2.3. *i. Se* f *é um epimorfismo, então* f_Λ *é também um epimorfismo;*

ii. Se f *é um isomorfismo, então* f_Λ *é um isomorfismo.*

Demonstração. Ver **Teorema 10.2.16** em [WANG]. □

Teorema 2.4. *Sejam M e N dois A-módulos e $n \geq 0$. Então*

$$\Lambda_A^n(M \oplus N) \cong \bigoplus_{i=0}^{n} (\Lambda_A^i(M) \otimes_A \Lambda_A^{n-i} N).$$

Demonstração. Ver **Teorema 10.2.17** em [WANG]. □

Corolário 2.5. *Se L é um A-módulo livre de posto k, então $\Lambda_A^n(L)$ é um módulo livre de posto $\binom{n}{k}$. Em particular, se $n > k$ então $\Lambda_A^n(L) = 0$.*

Demonstração. Ver **Corolário 10.2.18** em [WANG]. □

Observação 2.3. *Se $\{e_1, \ldots, e_k\}$ é uma base de $L \cong A^k$ e $n \leq k$, então*

$$\{e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_n} \, | i_1 < i_2 < \ldots < i_n \}$$

é uma base de $\Lambda_A^n(L)$

Lembremos do seguinte resultado:

Proposição 2.6. *Seja P um A-módulo. As seguintes afirmações são equivalentes:*

i. *P é projetivo finitamente gerado;*

ii. *P é de apresentação finita e $P_{\mathfrak{m}}$ é um $A_{\mathfrak{m}}$-módulo livre para todo $\mathfrak{m} \in Max(A)$, onde $Max(A)$ conjunto de todos os ideais maximais do anel A;*

iii. *Para todo $\mathfrak{m} \in Max(A)$ existe $f \in A \setminus \mathfrak{m}$ tal que P_f é livre de posto finito sobre A_f.*

Temos que dado P um A-módulo projetivo finitamente gerado e $\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(A)$, segue que

$$(\Lambda_A^n(P))_{\mathfrak{m}} \cong \Lambda_{A_{\mathfrak{m}}}^n(P_{\mathfrak{m}}).$$

Como $P_{\mathfrak{m}}$ é um A-módulo livre de posto finito, o corolário anterior implica que $\Lambda_{A_{\mathfrak{m}}}^n(P_{\mathfrak{m}})$ é livre sobre $A_{\mathfrak{m}}$. Logo, $(\Lambda_A^n(P))_{\mathfrak{m}}$ é livre sobre $A_{\mathfrak{m}}$. Por outro lado, como P é de apresentação finita, $\Lambda_A^n(P)$ também é.

De fato, dada a seguinte sequência exata curta

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{f} L \xrightarrow{g} P \longrightarrow 0$$

onde L é livre de posto finito e N é finitamente gerado. Como g é sobrejetiva, segue que g_Λ é sobrejetiva.

Assim, seja

$$\Lambda_A^n(L) \xrightarrow{g_\Lambda} \Lambda_A^n(P) \longrightarrow 0,$$

onde $\Lambda_A^n(L)$ tem posto finito.

Como A é Noetheriano, $K = \mathrm{Ker}(g_\Lambda)$ é finitamente gerado. Logo,

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow \Lambda_A^n(L) \longrightarrow \Lambda_A^n(P) \longrightarrow 0$$

é uma sequência exata curta. Então $\Lambda_A^n(P)$ é de apresentação finita. Usando a proposição anterior, concluímos que $\Lambda_A^n(P)$ é projetivo finitamente gerado.

2.2 Operações Lambda

Seja $0 \longrightarrow P' \longrightarrow P \longrightarrow P'' \longrightarrow 0$ uma sequência exata curta de A-módulos projetivos finitamente gerados. Como P'' é projetivo, temos $P \cong P' \oplus P''$. Pelo **teorema 2.4**

$$\Lambda_A^n P \cong \bigoplus_{i=0}^{n} (\Lambda_A^i(P') \otimes_A \Lambda_A^{n-i}(P'')).$$

Com isso, temos em $K_0(A)$ a seguinte relação

$$[\Lambda_A^n(P)] = \sum_{i=0}^{n} [\Lambda_A^i(P')][\Lambda_A^{n-i}(P'')]. \tag{2.1}$$

Lema 2.7. *Para cada $n \geq 0$ existem funções*

$$\lambda^n : K_0(A) \longrightarrow K_0(A)$$

unicamente determinadas pelas seguintes propriedades:

i. Para todo $A-$módulo projetivo finitamente gerado P

$$\lambda^n([P]) = [\Lambda_A^n(P)];$$

ii. Para todo $\alpha, \beta \in K_0(A)$,

$$\lambda^n(\alpha + \beta) = \sum_{i=0}^{n} \lambda^i(\alpha)\lambda^{n-i}(\beta).$$

Além disso, tais operações são naturais para homomorfismos de anéis.

Demonstração. Considere o anel $K_0(A)[[t]]$ e para cada módulo finitamente gerado P, defina

$$\lambda_t(P) = \sum_{n=0}^{\infty}[\Lambda^n(P)]t^n \in K_0(A)[[t]].$$

Desde que o termo constante de $\lambda_t(P)$ é $[\Lambda^0(P)] = 1 \in (K_0(A))^*$, segue que

$$\lambda_t(P) \in (K_0(A)[[t]])^*.$$

Note que a relação 2.1 nos diz que

$$\lambda_t(P) = \lambda_t(P')\lambda_t(P'').$$

Consequentemente $\lambda_t : \mathcal{P}(A) \longrightarrow (K_0(A)[[t]])^*$ é uma aplicação aditiva e pela propriedade universal de $K_0(A)$ existe um único homomorfismo de grupos

$$\tilde{\lambda}_t : K_0(A) \longrightarrow (K_0(A)[[t]])^*$$

que estende λ_t.

Agora, considere a aplicação

$$\begin{array}{rccl} \alpha^n : & (K_0(A)[[t]])^* & \longrightarrow & K_0(A) \\ & (a_0 + a_1 t + \ldots) & \longmapsto & \alpha^n(a_0 + a_1 t + \ldots) := a_n, \end{array}$$

e defina

$$\lambda^n := \alpha^n \circ (\tilde{\lambda}_t).$$

Note que λ^n satisfaz (i.) e (ii.) (por 2.1). A unicidade segue por indução sobre o índice n.

Note que, se $f : A \longrightarrow B$ é um homomorfismo de anéis então

$$\Lambda^n_A(P) \otimes_A B \cong \Lambda^n_B(P \otimes_A B).$$

Portanto, dado P um $A-$módulo projetivo finitamente gerado, temos que

$$\begin{aligned} \lambda^n_B \circ K_0(f)([P]) &= \lambda^n_B([P \otimes_A B]) \\ &= [\Lambda^n_B(P \otimes_A B)] \\ &= [\Lambda^n_A(P) \otimes_A B] \\ &= K_0(f)([\Lambda^n_A(P)]) \\ &= K_0(f) \circ \lambda^n_A([P]). \end{aligned}$$

$\square$

Observação 2.4. $\lambda^0([P]) = [A] = 1$ *e* $\lambda^1[P] = [P]$.

Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 2.1. *Vamos calcular* $\lambda^2(-[P])$. *Sabemos que* $0 = \lambda^2([P] + [-P])$. *Aplicando ii. obtemos*

$$0 = \lambda^2([P])\lambda^0(-[P]) + \lambda^1([-P])\lambda^1([-P]) + \lambda^0([P])\lambda^2([-P]),$$

ou seja,

$$0 = [\Lambda_A^2(P)] + \underbrace{[P](-[P])}_{-[P\otimes_A P]} + \lambda^2([-P]).$$

Portanto,

$$\lambda^2([-P]) = [P \otimes_A P] - [\Lambda_A^2(P)]$$

Antes de ilustrarmos o próximo exemplo, vamos relembrar alguns resultados envolvendo o Spec(A).

Observação 2.5. *Sejam* $S \subset A$ *um conjunto multiplicativo e* P *um* A*-módulo projetivo. Então* $S^{-1}P$ *é um* $S^{-1}A$*-módulo projetivo. Se* P *é um* A*-módulo projetivo finitamente gerado e* $\mathfrak{p} \in Spec(A)$ *então* $P_\mathfrak{p}$ *é um* $A_\mathfrak{p}-$*módulo projetivo finitamente gerado. Como* $A_\mathfrak{p}$ *é um anel local,* $P_\mathfrak{p}$ *é livre de posto finito. Além disso,*

$$posto(P_\mathfrak{p}) = dim_K(\mathfrak{p})(P \otimes_A K(\mathfrak{p})),$$

onde

$$K(\mathfrak{p}) = \frac{A_\mathfrak{p}}{\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}} \cong CF(A/\mathfrak{p}).$$

Podemos então considerar a função,

$$\begin{array}{rccl} \varphi : & Spec(A) & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ & \mathfrak{p} & \longmapsto & \varphi(\mathfrak{p}) = posto(P_\mathfrak{p}) = dim_K(\mathfrak{p})(P \otimes_A K(\mathfrak{p})) \end{array}$$

Afirmação: φ *é localmente constante. De fato, seja* $\mathfrak{p} \in Spec(A)$ *e escolha* $\mathfrak{m} \in Max(A)$ *tal que* $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{m}$. *Pela parte (iii.) da* ***Proposição 2.6****, existe* $f \in A \setminus \mathfrak{m}$ *tal que* P_f *é* A_f-*livre de posto finito. Com isso, temos que* $D(f) = A \setminus V(f)$ *é uma vizinhança aberta de* $\mathfrak{p}$ *tal que* φ *restrita ao conjunto* $D \setminus V(f)$ *é constante.*

Quando φ é constante, dizemos que o módulo projetivo finitamente gerado tem posto bem definido. Neste caso,

$$posto(P) := posto(P_{\mathfrak{p}}) = dim_K(\mathfrak{p})(P \otimes_A K(\mathfrak{p})).$$

Observação 2.6. *i. Se Spec(A) é conexo (com respeito a topologia de Zariski), então φ é constante e P tem posto bem definido.*

ii. Se A é um domínio, φ é constante. Por exemplo, em anéis regulares esse resultado é válido, pois anéis regulares são domínios.

Exemplo 2.2. *Suponhamos que $(A, \mathfrak{m}, K)$ é local, onde K é seu corpo residual, então todo $A-$módulo projetivo finitamente gerado P é livre, cujo posto é igual a*

$$dim_K(P \otimes_A K).$$

A função

$$\begin{array}{rccl} \gamma : & \mathcal{P}(A) & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ & P & \longmapsto & \gamma([P]) = dim_K P \otimes_A K \end{array}$$

é aditiva. Pela propriedade universal de $K_0(A)$ existe um único homomorfismo $\tilde{\gamma} : K_0(A) \longrightarrow \mathbb{Z}$ tal que $\tilde{\gamma}([P]) = dim_K P \otimes_A K$. Por outro lado, a função $\beta : \mathbb{N} \longrightarrow K_0(A)$ definida por $\beta(k) = [A^k]$ é aditiva. Como $\mathbb{Z}$ é o grupo de Grothendieck associado a $\mathbb{N}$, existe um único homomorfismo de grupos $\tilde{\beta} : \mathbb{Z} \longrightarrow K_0(A)$ tal que $\tilde{\beta}(k) = [A^k]$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Note que $\tilde{\gamma}$ e $\tilde{\beta}$ também são homomorfismos de anéis, e que $\tilde{\beta} \circ \tilde{\gamma} = id$ e $\tilde{\gamma} \circ \tilde{\beta} = id$. Concluímos que $\tilde{\gamma} : K_0(A) \longrightarrow \mathbb{Z}$ é um isomorfismo.

Denotaremos a aplicação $\theta^n := \tilde{\gamma} \circ \lambda^n \circ \tilde{\beta}$ como sendo a "tradução"de λ^n, de $K_0(A)$ para $\mathbb{Z}$.

$$\begin{tikzcd} K_0(A) \arrow[r, "\lambda^n"] & K_0(A) \arrow[d, "\tilde{\gamma}"] \\ \mathbb{Z} \arrow[u, "\tilde{\beta}"] \arrow[r, "\theta^n"] & \mathbb{Z} \end{tikzcd}$$

Para $k \in \mathbb{N}$,

$$\theta^n(k) = \tilde{\gamma} \circ \lambda^n(\tilde{\beta}(k)) = \tilde{\gamma} \circ \lambda^n[A^k] = \tilde{\gamma} \circ ([\Lambda_A^n(A^k)]) = \tilde{\gamma}([A^{\binom{k}{n}}]) = \binom{k}{n},$$

ou seja,

$$\theta^n(k) = \binom{k}{n} = \frac{k!}{n!(k-n)!} = \frac{k(k-1)\dots(k-(n-1)}{n\cdot(n-1)\cdot\dots\cdot 1} \tag{2.2}$$

Para $k < 0$, primeiro observe que $\tilde{\beta}(k) = -\tilde{\beta}(-k) = -[A^{-k}]$. Por outro lado, temos que $\tilde{\lambda}_t(-[P]) = (\tilde{\lambda}_t[P])^{-1}$, para P projetivo finitamente gerado.

Logo,

$$\begin{aligned}
\theta^n(k) \;=\; \tilde{\gamma}\circ\lambda^n\circ\tilde{\beta}(k) &= \tilde{\gamma}\circ\lambda^n(-[A^{-k}]) \\
&= \tilde{\gamma}\circ\big(\alpha^n\circ\tilde{\lambda}_t\big(-[A^{-k}]\big)\big) \\
&= \tilde{\gamma}\circ\alpha^n(\tilde{\lambda}_t([A^{-k}])^{-1}).
\end{aligned}$$

Note que,

$$\tilde{\lambda}_t([A^{-k}]) = \sum_{i=0}^{\infty}[\Lambda_A^i(A^{-k})]t^i = \sum_{i=0}^{\infty}[A^{\binom{-k}{i}}]t^i.$$

Sejam

$$\tilde{\lambda}_t([A^{-k}])^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} b_i t^i,$$

com $b_i \in K_o(A)$ *e* $a_i = [A^{\binom{-k}{i}}]$, *onde* $a_i = 0$ *para* $i > -k$ *e* $a_0 = 1$. *Temos então:*

$$\begin{aligned}
b_0a_0 = 1 &\implies b_0 = 1; \\
b_0a_1 + b_1a_0 = 0 &\implies b_1 = -a_1; \\
b_0a_2 + b_1a_1 + b_2a_0 = 0 &\implies b_2 = -a_2 + a_1^2; \\
b_0a_3 + b_1a_2 + b_2a_1 + b_3a_0 = 0 &\implies b_3 = -a_3 + 2a_1a_2 - a_1^3 \\
&\;\;\vdots
\end{aligned}$$

Assim, obtemos que

$$\begin{aligned}
\theta^0(k) &= \tilde{\gamma}(b_0) = \tilde{\gamma}(1) = 1; \\
\theta^1(k) &= \tilde{\gamma}(b_1) = -\tilde{\gamma}(a_1) = -\binom{-k}{1} = k; \\
\theta^2(k) &= \tilde{\gamma}(b_2) = \tilde{\gamma}(-a_2 + a_1^2) = -\tilde{\gamma}(a_2) + \tilde{\gamma}(a_1)^2 = -\binom{-k}{2} + \binom{-k}{1}^2 = \frac{k(k-1)}{2\cdot 1}; \\
\theta^3(k) &= \tilde{\gamma}(b_3) = -\tilde{\gamma}(a_3) + 2\tilde{\gamma}(a_1)\tilde{\gamma}(a_2) - \tilde{\gamma}(a_1)^3 = -\binom{-k}{3} + 2\binom{-k}{1}\binom{-k}{2} - k^3 \\
&= \frac{k}{6}\Big(k^2 + 3k + 2 - 6k(k+1) + 6k^2\Big) = \frac{k}{6}(k^2 - 3k + 2) = \frac{k(k-1)(k-2)}{3\cdot 2\cdot 1}.
\end{aligned}$$

Seguindo o mesmo processo, para o caso geral temos :

$$\theta^n(k) = \frac{k(k-1)\dots(k-(n-1))}{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot 1},\ \textit{para todo } k\in\mathbb{Z},\ n\geq 0.$$

2.3 Operações de Adams

Dado um anel comutativo A defina o homomorfismo de grupos abelianos *dlog* como sendo a função

$$\begin{array}{rccl} \mathrm{dlog}: & A[[t]]^* & \longrightarrow & A[[t]] \\ & p(t) & \longmapsto & dlog(p(t)) = \dfrac{p'(t)}{p(t)} \end{array}$$

Suponhamos agora que A é um anel tal que $\mathrm{Spec}(A)$ é conexo. Defina

$$\begin{array}{rccl} \psi_t: & \mathcal{P}(A) & \longrightarrow & K_0(A)[[t]] \\ & P & \longmapsto & \mathrm{posto}(P) - t\ dlog(\lambda_{-t}(P)). \end{array}$$

Temos que ψ_t é aditiva e pela propriedade universal de $K_0(A)$ existe um único homomorfismo de grupos abelianos

$$\tilde{\psi}: K_0(A) \longrightarrow K_0(A)[[t]]$$

tal que $\tilde{\psi}_t([P]) = \psi_t(P)$, para todo A-módulo projetivo finitamente gerado P.

Seja a função $\alpha^n : K_0(A)[[t]] \longrightarrow K_0(A)$ definida por

$$\alpha^n(a_0 + a_1 t + \dots) = a_n.$$

Seja, $\psi^n : K_0(A) \longrightarrow K_0(A)$ a composição $\psi^n := \alpha^n \circ \tilde{\psi}_t$. Por construção, ψ^n é um homomorfismo de grupos abelianos. Chamaremos ψ^n das *operações de Adams.*

Lembremos da demonstração do **Lema 2.7** no qual

$$\lambda_t(P) = \sum_{k=0}^{\infty}[\Lambda^k(P)]t^k,\ \text{para } P\in\mathcal{P}(A).$$

Entretanto, $\lambda^k([P]) = [\Lambda^k(P)]$. Consequentemente

$$\lambda_{-t}(P) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\lambda^k([P])t^k,$$

e assim temos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(log\lambda_{-t}(P)) &= \frac{\lambda_t'(P)}{\lambda_{-t}(P)} = \frac{-\lambda^1([P]) + 2\lambda^2([P])t + -3\lambda^3([P])t^3 + 4\lambda^4([P])t^4 + \dots}{1 + \lambda^1([P])t + \lambda^2([P])t^2 + \lambda^3([P])t^3 + \dots} \\
&= \frac{-[P] + 2\lambda^2([P])t + -3\lambda^3([P])t^3 + 4\lambda^4([P])t^4 + \dots}{1 - [P]t + \lambda^2([P])t^2 - \lambda^3([P])t^3 + \dots} \\
&= (-[P] + 2\lambda^2([P])t + -3\lambda^3([P])t^3 + 4\lambda^4([P])t^4 + \dots)(1 + [P]t + ([P]^2 \\
&\quad -\lambda^2([P]))t^2 + ([P]^3 - 2[P]\lambda^2[P] + \lambda^3([P]))t^3 + \dots),
\end{aligned}$$

pois se $g = 1 + a_1t + a_2t^2 + \dots$ e $h = (g^{-1}) = b_0 + b_1t + b_2t^2 + \dots$, com gh $= 1$, então

$$\begin{aligned}
& b_0 = 1; & \\
b_1 + b_0a_1 = 0 \quad &\Longrightarrow \quad b_1 = -a_1 \\
b_3 + b_2a_1 + b_1a_2 + b_0a_3 = 0 \quad &\Longrightarrow \quad b_3 = -a_3 + 2a_1a_2 - a_1^3 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{d}{dt}(log\lambda_{-t}(P)) = -[P] + (-[P]^2 + 2\lambda^2([P]))t + (-3\lambda^3([P]) + 3[P]\lambda^2([P]) - [P]^3)t^2 + \dots$$

Sabendo que

$$\psi_t(P) = \text{posto}(P) - t\frac{d}{dt}log\lambda_{-t}(P),$$

temos que

$$\begin{aligned}
\psi^0([P]) &= \text{posto}(P); \\
\psi^1([P]) &= [P]; \\
\psi^2([P]) &= [P]^2 - \lambda^2([P]) \\
\psi^3([P]) &= 3\lambda^3([P]) - 3[P]\lambda^2([P]) + [P]^3 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Note que,

$$\underbrace{\psi^2([P])}_{[P]^2-2\lambda^2([P])} - \underbrace{\psi^1([P])}_{[P]}\underbrace{\lambda^1([P])}_{[P]} + 2\lambda^2([P]) = 0$$

e

$$\underbrace{\psi^3([P]) - \psi^2([P])\lambda^1([P])}_{3\lambda^3 - [P]\lambda^2([P])} + \underbrace{\psi^1([P])\lambda^2([P])}_{[P]\lambda^2([P])} - 3\psi_0([P])\lambda^3([P]) = 0.$$

Com esses exemplos, temos em geral que a equação funcional que define as operações de Adams é dada pela seguinte fórmula recursiva.

$$\psi^k - \psi^{k-1}\lambda^1 + \psi^{k-2}\lambda^2 + \ldots + (-1)^{k-1}\psi^1\lambda^{k-1} + k(-1)^k\lambda^k = 0.$$

Assim, podemos dar continuidade com a seguinte proposição:

Proposição 2.8. *Para cada* $k \geq 0$,

i. $\psi^k : K_0(A) \longrightarrow K_0(A)$ *é um endomorfismo de anéis.*

ii. ψ^k *é natural para homomorfismo de anéis;*

iii. Se L *é um* $A-$*módulo projetivo finitamente gerado de posto* 1, *então*

$$\psi^k([L]) = [L^{\otimes k}].$$

Observação 2.7. ψ^k *é natural para homomorfismo de anéis se dado* $f : A \longrightarrow B$ *um homomorfismo de anéis temos que*

$$K_0(f) \circ \psi^k_A = \psi^k_B \circ K_0(f).$$

Observação 2.8. *A demonstração da última proposição encontra-se no material [WALKER1].*

Capítulo 3

K-teoria com suportes

Neste capítulo estudaremos o grupo de Grothendieck associado à categoria de complexos limitados de módulos projetivos finitamente gerados sobre um anel Noetheriano A cuja homologia está suportada em um fechado de Spec(A), seu comportamento funtorial e o produto "cup".

3.1 O grupo $K_0^Z(A)$

Definição 3.1. *Sejam A um anel Noetheriano e $Z \subseteq Spec(A)$ fechado. Um complexo*

$$P_\bullet \qquad \cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow P_m \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_{n+1} \longrightarrow P_n \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots,$$

com $P_i \in Mfg(A)$, é "suportado"em Z se para cada $\mathfrak{p} \in Spec(A) \setminus Z$, o complexo

$$(P_\mathfrak{p})_\bullet \qquad \cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow (P_m)_\mathfrak{p} \longrightarrow \cdots \longrightarrow (P_n)_\mathfrak{p} \longrightarrow \cdots$$

é exato.

Vamos denotar o complexo $P_\bullet = P$.

Observação 3.1. *i. $(P_\mathfrak{p})_\bullet$ é exato se, ao tomarmos as seguintes sequências exatas curtas*

$$P_{i+1} \xrightarrow{\varphi} P_i \xrightarrow{\psi} P_{i-1}$$

e localizarmos em $\mathfrak{p}$, temos que a seguinte sequência exata

$$(P_{i+1})_\mathfrak{p} \xrightarrow{\varphi_\mathfrak{p}} (P_i)_\mathfrak{p} \xrightarrow{\psi_\mathfrak{p}} (P_{i-1})_\mathfrak{p}$$

gera a seguinte igualdade: $Ker(\psi_\mathfrak{p}) = Im(\varphi_\mathfrak{p})$.

Portanto,

$$\begin{aligned} Ker(\psi_{\mathfrak{p}}) = Im(\varphi_{\mathfrak{p}}) &\iff \left(\frac{Ker(\psi)}{Im(\varphi)}\right)_{\mathfrak{p}} = 0 \\ &\iff \mathfrak{p} \notin \left(\frac{Ker(\psi)}{Im(\varphi)}\right) \\ &\iff \mathfrak{p} \in Spec(A) \setminus Supp(H_i(P)). \end{aligned}$$

ii. Denotaremos $Perf^Z(A)$ a categoria dos complexos limitados de A-módulos projetivos finitamente gerados "suportados" em Z. Note que a observação dada em i. implica que

$$P \in Perf^Z(A) \iff Supp(H_i(P)) \subseteq Z, \quad \textit{para todo } i.$$

Definição 3.2. *O grupo de Grothendieck de A com suporte em Z, denotado por $K_0^Z(A)$, é o grupo abeliano gerado pelas classes de isomorfismos dos elementos de $Perf^Z(A)$ vindo das seguintes relações:*

i. $[P] = [Q]$ se P e Q são homotópicamente equivalentes.

ii. $[P] = [P'] + [P'']$ para toda sequência exata curta de complexos

$$P' \longrightarrow P \longrightarrow P''$$

Em outras palavras

$$K_0^Z(A) := \frac{\langle \overline{P}, P \in Perf^Z(A)\rangle}{\langle \textit{relação i., relação ii.}\rangle}$$

Observação 3.2. *P e P' são homotopicamente equivalentes se existirem $f : P \longrightarrow P'$ $g : P' \longrightarrow P$ tais que $f \circ g \sim 1_{P'}$ e $g \circ f \sim 1_P$. Equivalentemente, dizemos que f é um quase-isomorfismo e que $H_i(f) : H_i(P) \longrightarrow H_i(P')$ é um isomorfismo para todo i.*

Proposição 3.1. *$K_0^{Spec(A)}(A) \cong K_0(A)$.*

Demonstração. Considere $\varphi : K_0^{\mathrm{Spec}(A)}(A) \longrightarrow K_0(A)$ por $\varphi([P]) = \sum_i (-1)^i [P_i]$. Dado $[M] \in K_0(A)$ defina o complexo

$$0 \longrightarrow \cdots \longrightarrow \overbrace{0}^{1} \longrightarrow \overbrace{M}^{0} \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots.$$

A função $\psi : K_0(A) \longrightarrow K_0^{\mathrm{Spec}(A)}(A)$ dada por $\psi([M]) = [M]$ é tal que $\psi = \varphi^{-1}$.

□

Propriedade Universal: Denotemos por $\mathrm{Perf}^Z(A)$ o conjunto formado pelas classes de isomorfismos de objetos de $\mathrm{Perf}^Z(A)$. Se G é um grupo abeliano e ρ : $\mathrm{Perf}^Z(A) \longrightarrow G$ é uma aplicação tal que $\rho(P) = \rho(Q)$, se P e Q são quase isomorfos e $\rho(P) = \rho(P') + \rho(P'')$ para toda sequência exata curta de complexos $P' \longrightarrow P \longrightarrow P''$, então existe $\sigma : K_0^Z(A) \longrightarrow G$ tal que

$$\sigma([P]) = \rho(P), \text{ para todo } P \in \mathrm{Perf}^Z(A).$$

3.1.1 Funtorialidade

Seja $\phi : A \longrightarrow B$ um homomorfismo de anéis. ϕ induz a função contínua

$$\phi^* : \mathrm{Spec}(B) \longrightarrow \mathrm{Spec}(A).$$

Sejam $Z = V(I),\ I \trianglelefteq A$ e $W = V(J),\ J \trianglelefteq B$, tal que $W \supseteq (\phi^*)^{-1}(Z)$. Note que

$$V(J) \supseteq V(\langle \phi(I) \rangle) = V(IB) \iff \sqrt{I}B \supseteq J.$$

Afirmação: Se $P \in Perf^Z(A)$, então $P \otimes_A B \in Perf^W(B)$.
De fato, se $P \in Perf^Z(A)$, então $\mathrm{Supp}(H_i(P)) \subseteq Z$, para todo i. Perceba que

$$\begin{aligned} \mathrm{Supp}(H_i(P)) = V(\mathrm{Ann}(H_i(P)) \subseteq V(I) &\iff I \subseteq \sqrt{\mathrm{Ann}(H_i(P))} \\ &\iff I^n \subseteq \mathrm{Ann}_A(H_i(P)) \quad (*). \end{aligned}$$

Note que ao tensorizar por B sobre o anel A a sequência exata curta

$$P_{i+1} \xrightarrow{\varphi} P_i \xrightarrow{\psi} P_{i-1}$$

obtemos

$$P_{i+1} \otimes_A B \xrightarrow{\varphi \otimes 1_B} P_i \otimes_A B \xrightarrow{\psi \otimes 1_B} P_{i-1} \otimes_A B\,.$$

Onde

$$H_i(P \otimes B) = \frac{\mathrm{Ker}(\psi \otimes 1_B)}{\mathrm{Im}(\varphi \otimes 1_B)} \cong \frac{\mathrm{Ker}(\psi)}{\mathrm{Im}(\varphi)} = H_i(P) \otimes_A B.$$

Por $(*)$,

$$J \subseteq I^n B \subseteq \mathrm{Ann}_B(H_i(P \otimes B)).$$

Como consequência, temos que $\mathrm{Supp}(H_i(P \otimes B)) \subseteq V(J) = W$. Portanto, $P \otimes B \in Perf^W(B)$, concluindo a afirmação.

Com isso, definimos

$$\begin{array}{rccl} \phi_*^{Z,W}: & K_0^Z(A) & \longrightarrow & K_0^W(B) \\ & [P] & \longmapsto & \phi_*^{Z,W}([P]) := [P \otimes B]. \end{array}$$

Exemplo 3.1. *i. Se $\phi = id_A$ e $W \supseteq Z$, temos o mapa $K_0^Z(A) \longrightarrow K_0^W(A)$ com $Perf^Z(A) \subseteq Perf^W(A)$.*

ii. Sejam $B = A_f$, com $f \in A$, e $\phi : A \longrightarrow A_f$ o mapa de localização. Lembre que

$$Spec(A_f) = \{\mathfrak{p}_f \ : \ \mathfrak{p} \in Spec(A), \ f \notin \mathfrak{p}\} \cong D(f) = Spec(A) \setminus V(f).$$

Sejam $Z = V(I)$, com $I \trianglelefteq A$ e $W = Z \setminus D(f)$.

Nesse caso teremos o mapa

$$\begin{array}{rccl} \phi_*^{Z,W}: & K_0^Z(A) & \longrightarrow & K_0^{D \setminus D(f)}(A_f) \\ & [P] & \longmapsto & \phi_*^{Z,W}([P]) := [P_f]. \end{array}$$

3.1.2 Produtos

Sejam P e Q dois complexos de $A-$módulos. Definimos o complexo $C \otimes D$ por:

$$(C \otimes D)_n := \bigoplus_{i+j=n} (C_i \otimes_A D_j),$$

onde $\partial : (C \otimes D)_n \longrightarrow (C \otimes D)_{n-1}$ é dado por

$$\partial(a \otimes b) = \partial_i^C(a) \otimes b + (-1)^i a \otimes \partial_j^D(b),$$

com $a \in C_i$, $b \in D_j$ tal que $i + j = n$.

Sejam Z e W fechados em Spec(A) . Note que é possível definir $K_0^{Z \cap W}(A)$, pois se Supp$(H_i(P)) \subseteq Z$ e Supp$(H_j(Q)) \subseteq W$, então $Supp(H_n(P \otimes Q)) \subseteq Z \cap W$. Portanto, defina

$$\begin{array}{ccc} K_0^Z(A) \times K_0^W(A) & \longrightarrow & K_0^{Z \cap W}(A) \\ ([P], [Q]) & \longmapsto & [P \otimes Q]. \end{array}$$

chamaremos de *"cup product"* e a notação será dada por

$$[P] \cup [Q] := [P \otimes Q].$$

3.2 O grupo $K_0^{\mathfrak{m}}(A)$

Sejam $(A, \mathfrak{m})$ um anel local e $P \in Perf^{\mathfrak{m}}(A)$. Como $\mathrm{Supp}(H_i(P)) \subseteq \{\mathfrak{m}\}$ temos que $l_A(H_i(P)) < \infty$ e podemos definir

$$\begin{array}{rccl} \rho: & \mathcal{P}^{\mathfrak{m}}(A) & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ & \overline{P} & \longmapsto & \rho(\overline{P}) := \sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i l_A(H_i(P)). \end{array}$$

Note que se P e Q são quase-isomorfos então $H_i(P) = H_i(Q)$ para todo i . Logo, $\rho(\overline{P}) = \rho(\overline{Q})$. Além disso, se

$$0 \longrightarrow P' \xrightarrow{\varphi} P \xrightarrow{\psi} P'' \longrightarrow 0.$$

é uma sequência exata curta em $Perf^{\mathfrak{m}}(A)$, então ela induz uma sequência exata longa

$$\cdots \xrightarrow{\psi_{i-1}^*} H_{i+1}(P'') \xrightarrow{\Delta} H_i(P') \xrightarrow{\varphi_i^*} H_i(P) \xrightarrow{\psi_i^*} H_i(P'') \xrightarrow{\Delta} H_{i-1}(P') \xrightarrow{\varphi_{i-1}^*} \cdots$$

Temos então a sequências exatas curtas:

i.
$$0 \longrightarrow \mathrm{Ker}(\psi_i^*) \longrightarrow H_i(P) \xrightarrow{\psi_i^*} \mathrm{Im}(\psi_i^*) \longrightarrow 0,$$

que nos fornece

$$l_A(H_i(P)) = l_A(\mathrm{Im}(\varphi_i^*)) + l_A(\mathrm{Im}(\psi_i^*));$$

ii.
$$0 \longrightarrow \mathrm{Ker}(\Delta) \longrightarrow H_i(P'') \xrightarrow{\Delta} \mathrm{Im}(\Delta) \longrightarrow 0\ ;$$

onde

$$l_A(H_i(P'')) = l_A(\mathrm{Im}(\psi_i^*)) + l_A(\mathrm{Ker}(\varphi_{i-1}^*));$$

iii.
$$0 \longrightarrow \mathrm{Ker}(\varphi_i^*) \longrightarrow H_i(P') \xrightarrow{\varphi_i^*} \mathrm{Im}(\varphi_i^*) \longrightarrow 0.$$

que nos gera

$$l_A(H_i(P')) = l_A(\mathrm{Ker}(\varphi_i^*)) + l_A(\mathrm{Im}(\varphi_i^*))$$

Portanto,

$$
\begin{aligned}
\rho(P) &= \sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i l_A(H_i(P)) \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} l_A(\mathrm{Im}(\varphi_i^*)) + l_A(\mathrm{Im}(\psi_i^*)) \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} l_A(H_i(P'')) - \sum_{i=0}^{\infty} l_A(\mathrm{Ker}(\varphi_{i-1}^*)) + \sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i l_A(\mathrm{Im}(\psi_i^*)) \\
&= \sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i l_A(H_i(P'')) + \sum_{i=0}^{\infty}(l_A(\mathrm{Ker}(\varphi_i^*)) + l_A(\mathrm{Im}(\varphi_i^*))) \\
&= \sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i l_A(H_i(P'')) + \sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i l_A(H_i(P')) \\
&= \rho(P') + \rho(P'').
\end{aligned}
$$

Temos então que ρ é aditiva e pela propriedade universal de $K_0^{\mathfrak{m}}(A)$ existe um único homomorfismo de grupos $l : K_0^{\mathfrak{m}}(A) \longrightarrow \mathbb{Z}$. tal que

$$l([P]) = \sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i l_A(H_i(P)).$$

Iremos provar que se A for um anel regular, l é de fato um isomorfismo de grupos. Antes disso, vamos relembrar o complexo de Koszul.

Seja A um anel e $a \in A$. Seja o complexo

$$K(a, A) : \qquad 0 \longrightarrow A \xrightarrow{a} A \longrightarrow 0\ .$$

Definição 3.3. *Seja $\underline{a} : a_1, a_2, \ldots, a_t \in A$ uma sequência finita de elementos de A. O complexo de Koszul de A associado a $\underline{a}$ é dado por*

$$K(\underline{a}, A) := K(a_1, A) \otimes \ldots \otimes K(a_t, A).$$

Exemplo 3.2. *Para $t = 2$ temos*

$$K(a_1, a_2; A) : \qquad 0 \longrightarrow A \otimes A \xrightarrow{d_2^K} (A \otimes A) \oplus (A \otimes A) \xrightarrow{d_1^K} A \otimes A \longrightarrow 0.$$

Entretanto, $A \cong A \otimes A$, pela aplicação $x \longmapsto x \otimes 1$ e $A^2 \cong (A \otimes A) \oplus (A \otimes A)$ com a identificação $(x, y) \longmapsto (x \otimes 1, 1 \otimes y)$. Consequentemente, o complexo de Koszul para $t = 2$ será dado por

$$K(a_1, a_2; A) : \qquad 0 \longrightarrow A \xrightarrow{d_2^K} A^2 \xrightarrow{d_1^K} A \longrightarrow 0,$$

onde $d_1(x,y) = a_1x + a_1y$ *e* $d_2(x) = (-a_2x, a_1x)$.

Portanto,

$$\begin{aligned} H_0(K(a_1,a_2;A)) &= \frac{A}{\langle a_1,a_2\rangle}; \\ H_1(K(a_1,a_2;A)) &= \frac{\{(x,y)\in A^2 \mid a_1x+a_2y=0\}}{\{(-a_2x,a_1x) \mid x\in A\}}; \\ H_2(K(a_1,a_2;A)) &= \{x\in A \mid a_1x = a_2x = 0\}. \end{aligned}$$

Suponhamos agora que a_1, a_2 *é uma sequência regular em* A*, isto é,* a_1 *não é divisor de zero de* A*,* a_2 *não é divisor de zero de* $A/\langle a_1\rangle$ *e* $\langle a_1,a_2\rangle \subsetneqq A$*. Temos então que* $H_i(K(a_1,a_2;A)) = 0$*, para* $i = 1,2$*.*

Com efeito:

a. Se $x \in H_2(K(a_1,a_2;A)$ *então* $a_1x = 0$*. Logo,* $x = 0$*. Se* $(x,y) \in A^2$ *é tal que* $a_1x + a_2y = 0$ *então* $y\overline{a_2} = \overline{0}$ *em* $A/\langle a_1\rangle$*. Consequentemente* $y = 0$ *e assim,* $a_1x = 0$ *em* A*, concluindo que* $x = 0$*. Assim,* $Ker(d_1^K) = 0$*, donde* $H_1(K(a_1,a_2;A)) = 0$*.*

b. $H_2(K(a_1,a_2;A)) = 0$ *pelo mesmo argumento inicial do item a.*

De maneira geral, se $\underline{a} = a_1,\ldots,a_t$ é uma sequência regular, então

$$H_i(K(\underline{a},A)) = \begin{cases} \dfrac{A}{\langle a_1,\ldots,a_t\rangle}, & \text{se i=0} \\ 0, & \text{se } i\neq 0 \end{cases}$$

Com isso, temos o seguinte resultado:

Teorema 3.2. *Se* $(A,\mathfrak{m})$ *é regular, então* $l : K_0^{\mathfrak{m}}(A) \longrightarrow \mathbb{Z}$ *é um isomorfismo de grupos.*

Demonstração. Vamos supor que $\dim(A) = d$. Denotemos por K o complexo de Koszul $K(a_1,\ldots,a_d;A)$. Então,

$$l([K]) = \sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i l_A(H_i(K)) = l_A(H_0(K)) = l_A(A/\mathfrak{m}) = 1.$$

Isto implica que l é sobrejetiva.

Considere o complexo ΣK definido por $(\sum K)_n = K_{n-1}$. Então, $l([\Sigma K]) = -1$. Para finalizarmos o teorema, provaremos que $K_0^{\mathfrak{m}}(A)$ é um grupo cíclico gerado por $[K]$.

Com efeito, dado $E \in Perf^{\mathfrak{m}}(A)$ defina

$$h = h(E) := \sum_{i=0}^{\infty} l_A(H_i(E)) \geq 0.$$

Demonstraremos por indução em h que $[E] \in \langle [K] \rangle$.

Se $h = 0$, então $H_i(E) = 0$ para todo i. Portanto, E e 0 são quase isomorfos e assim $[E] = [0] \in \langle [K] \rangle$. Vamos supor que $h > 0$. Escolha $i \in \mathbb{Z}$ tal que $H_i(E) \neq 0$ e $H_j(E) = 0$ para todo $j > i$.

Considere $\tilde{E}$ dado pelo diagrama a seguir

$$\begin{tikzcd}
E : \arrow[d] & \cdots \arrow[r] & E_{i+1} \arrow[r, "d^E_{i+1}"] \arrow[d] & E_i \arrow[r, "d^E_i"] \arrow[d, "\pi"'] & E_{i-1} \arrow[r, "d^E_{i-1}"] \arrow[d, "id"] & E_{i-2} \arrow[r] \arrow[d, "id"] & \cdots \\
\tilde{E} : & \cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \dfrac{E_i}{\mathrm{Im}(d_{i+1})} \arrow[r, "\tilde{\pi}"] & E_{i-1} \arrow[r, "d^E_{i-1}"] & E_{i-2} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Como $\mathrm{Ker}(\pi) = \mathrm{Im}(d^E_{i+1}) \subseteq \mathrm{Ker}(d^E_i)$ existe um único morfismo

$$\tilde{\pi} : E_i/\mathrm{Im}(d^E_{i+1}) \longrightarrow E_{i-1}$$

tal que

$$\tilde{\pi} \circ \pi = d^E_i$$

Note que $(d^E_{i-1} \circ \tilde{\pi}) \circ \pi = d^E_{i-1} \circ (\tilde{\pi} \circ \pi) = d^E_{i-1} \circ d^E_i = 0$. Como π é sobrejetiva, segue que $d^E_{i-1} \circ \tilde{\pi} = 0$ e assim, $\tilde{E}$ é um complexo.

Perceba que

$$H_i(\tilde{E}) = \mathrm{Ker}(\tilde{\pi}) = \mathrm{Ker}(d^E_i)/\mathrm{Im}(d^E_{i+1}) = H_i(E)$$

e que

$$H_{i-1}(\tilde{E}) = \mathrm{Ker}(d^E_{i-1})/\mathrm{Im}(\tilde{\pi}) = \mathrm{Ker}(d^E_{i-1})/\mathrm{Im}(d^E_i) = H_{i-1}(E).$$

Isso mostra que os mapas verticais dos diagramas definem um quase-isomorfismo e portanto $[E] = [\tilde{E}]$. Portanto, podemos assumir que $E_j > 0$ para todo $j > i$.

Perceba que como $H_i(E) = \mathrm{Ker}(d^E_i)$ e $\mathrm{Supp}(H_i(E)) = \{\mathfrak{m}\}$ segue que existe $k \geq 1$ tal que $\mathfrak{m}^k \mathrm{Ker}(d^E_i) = 0$ e $\mathfrak{m}^{k-1}\mathrm{Ker} d^E_i \neq 0$. Tome $\alpha \in \mathfrak{m}^{k-1}\mathrm{Ker} d^E_i$, com $\alpha \neq 0$ e $\mathfrak{m}\alpha = 0$.

Seja $\Sigma^i K = \underbrace{\Sigma(\Sigma(\Sigma(\ldots(\Sigma K))))}_{i-vezes}$ ou seja, $(\Sigma^i K)_n = K_{n-i}$.

$$\begin{tikzcd}
E: & \cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & E_i \arrow[r, "d_i^E"] & E_{i-1} \arrow[r] & \cdots \\
\Sigma^i K: \arrow[u, "g"] & \cdots \arrow[r] & (\Sigma^i K)_{i+2} \arrow[r] \arrow[u] & \underbrace{(\Sigma^i K)_{i+1}}_{=K_1=A^d} \arrow[r, "d_{i+1}^{\Sigma^i K}"] \arrow[u] & \underbrace{(\Sigma^i K)_i}_{=K_0=A} \arrow[r] \arrow[u, "g_i"] & 0 \arrow[r] \arrow[u] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Vamos definir $g : \Sigma^i K \longrightarrow E$ com $g_i : A \longrightarrow E_i$ dada por $g_i(x) = x\alpha$.

Note que $g_i \circ d_{i+1}^{\Sigma^i K} = 0$, pois $\mathfrak{m}\alpha = 0$. Além disso, como $d_i^E(\alpha) = 0$, segue que

$$d_i^E \circ g_i(x) = x d_i^E(\alpha) = 0.$$

Vamos considerar $C := Cone(g)$ onde $C_n = (\Sigma^i K)_{n-1} \oplus E_n$ e

$$d^C(x, y) = (-d^{\Sigma^i K} x, -gx + d^E y).$$

Temos

$$C_j = K_{j-i-1}, \text{ para todo } j \geq i+1.$$

Perceba ainda que

$$\begin{aligned}
C_{i+2} &= (\Sigma^i K)_{i+1} \oplus E_{i+2} = K_1 \oplus 0 = K_1 = A^d; \\
C_{i+1} &= (\Sigma^i K)_i \oplus E_{i+1} = K_0 \oplus 0 = K_0 = A; \\
C_i &= (\Sigma^i K)_{i-1} \oplus E_i = 0 \oplus E_i = E_i; \\
C_j &= E_j, \text{ para todo } j \leq i.
\end{aligned}$$

Portanto, o cone será dado por

$$C: \qquad \longrightarrow K_1 \xrightarrow{d_{i+1}^{\Sigma^i K}} K_0 \xrightarrow{d_{i+1}^C} E_i \xrightarrow{d_i^E} E_{i-1} \longrightarrow \cdots,$$

one $d_{i+1}^C(x, 0) = (0, -x\alpha)$. Portanto, $\mathrm{Ker}(d_{i+1}^C) = \mathfrak{m} = \mathrm{Im}(d_{i+2})$, que nos diz $H_{i+1}(C) = 0$.

Além disso, $H_i(C) = \mathrm{Ker}(d_i^E)/\langle\alpha\rangle$.

Temos então que

$$\begin{aligned} h(E) - h(C) &= l_A(H_i(E)) - l_A(H_i(C)) &= l_A(\mathrm{Ker}(d_i^E)) - l_A(\mathrm{Ker}(d_i^E)/\langle\alpha\rangle) \\ & &= l_A(\langle\alpha\rangle), \end{aligned}$$

devido a sequência exata

$$0 \longrightarrow \langle\alpha\rangle \longrightarrow \mathrm{Ker}(d_i^E) \longrightarrow \mathrm{Ker}(d_i^E)/\langle\alpha\rangle \longrightarrow 0.$$

No entanto, $A/\mathfrak{m} \cong \langle\alpha\rangle$, via a aplicação $r + \mathfrak{m} \longmapsto r\alpha$.
Assim, $h(C) = h(E) - 1$. Por hipótese de indução, $[C] \in \langle[K]\rangle$.
Por fim, note que a sequência exata

$$0 \longrightarrow E \longrightarrow C \longrightarrow \Sigma(\Sigma^i K)) \longrightarrow 0$$

implica que

$$\underbrace{[C]}_{\in\langle[K]\rangle} = [E] + [\Sigma^{i+1}K] = [E] + \underbrace{(-1)^{i+1}[K]}_{\in\langle[K]\rangle}.$$

Portanto, $[E] \in [\langle[K]\rangle]$. $\square$

Lema 3.3. *Seja A um anel regular e $I \trianglelefteq A$. Então*

$$G_0(A/I) \cong K_0^{V(I)}(A)$$

Demonstração. Defina,

$$\begin{aligned} \rho: \quad Mfg(A/I) &\longrightarrow K_0^{V(I)}(A) \\ M &\longmapsto \rho(M) := [P_M], \end{aligned}$$

onde P_M é uma resolução projetiva de M como A-módulo,

$$\cdots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\alpha} M \longrightarrow 0,$$

onde $[P_M] \in K_0^{V(I)}(A)$ pois A é regular.

Temos então que

$$H_0(P_M) = P_0/\mathrm{Im}(d_1) = P_0/\mathrm{Ker}(\alpha) \cong M,$$

e consequentemente,

$$\mathrm{Supp}(H_0(P_M)) = \mathrm{Supp}(M) \subseteq V(I).$$

Além disso, $H_i(P_M) = 0$, para $i \neq 0$. Assim, ρ está bem definida.

Note que, se

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

é uma sequência exata curta de A/I-módulos finitamente gerados, então ela também é vista como uma sequência exata curta de A-módulos finitamente gerados. Além disso, se $P_{M'}$ e $P_{M''}$ são resoluções projetivas de M' e M'', repectivamente, então $P_{M'} \oplus P_{M''}$ é uma resolução projetiva de M.

$$\begin{tikzcd}
 & 0 & & 0 & \\
0 \arrow[r] & M' \arrow[u] \arrow[r] & M \arrow[r] & M'' \arrow[u] \arrow[r] & 0 \\
 & P_{M'} \arrow[u] & & P_{M''} \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

Logo, $\rho(M) = [P_{M'} \oplus P_{M''}] = [P_{M'}] + [P_{M''}] = \rho(M') + \rho(M'')$.

Pela propriedade universal de $G_0(A/I)$ existe um único homomorfismo de grupos $\varphi : G_0(A/I) \longrightarrow K_0^{V(I)}(A)$ tal que o seguinte diagrama comuta

$$\begin{tikzcd}
Mfg(A/I) \arrow[r, "\rho"] \arrow[d] & K_0^{V(I)}(A) \\
G_0(A/I) \arrow[ur, "\varphi"'] &
\end{tikzcd}$$

Assim, $\varphi(\langle M \rangle) = [P_M]$.

Agora se $P \in Perf^{V(I)}(A)$ então

$$V(\mathrm{Ann}_A(H_i(P))) = \mathrm{Supp}(H_i(P)) \subseteq V(I), \text{ para todo } i.$$

Desde que P seja um complexo finito, existe $n \geq 1$ tal que $I^n \cdot H_i(P)$ para todo i. Isto implica que cada $H_i(P)$ tem estrutura de A/I^n-módulo. Desde que A/I é de maneira natural um A/I^n-módulo, então $H_i(P) \otimes_{A/I^n} A/I$ é um A/I-módulo.

Vamos defnir a aplicação

$$\begin{array}{rccl}
\sigma : & Perf^{V(I)}(A) & \longrightarrow & G_0(A/I) \\
 & P & \longmapsto & \sigma(P) := \displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} (-1)^n \langle H_i(P) \otimes_{A/I^n} A/I \rangle.
\end{array}$$

Note que se $P, Q \in Perf^{V(I)}(A)$ são quase isomorfos, então $H_i(P) \cong H_i(Q)$ como A-módulos para todo i. Logo, $H_i(P) \otimes_{A/I^n} A/I \cong H_i(Q) \otimes_{A/I^n} A/I$ como A/I-módulo, e assim temos que $\sigma(P) = \sigma(Q)$.

Se $0 \longrightarrow P' \longrightarrow P \longrightarrow P'' \longrightarrow 0$ é uma sequência exata curta em $Perf^{V(I)}(A)$, pelo mesmo argumento da sequência exata longa induzida já feita, é possível ver que $\sigma(P) = \sigma(P') + \sigma(P'')$. Temos pela propriedade universal de $K_0^{V(I)}(A)$ que existe um único homomorfismo de grupos

$$\psi : K_0^{V(I)}(A) \longrightarrow G_0(A/I)$$

tal que o seguinte diagrama é comutativo;

$$\begin{tikzcd}
Perf^{V(I)}(A) \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d] & G_0(A/I) \\
K_0^{V(I)}(A) \arrow[ur, "\psi"'] &
\end{tikzcd}$$

Em outras palavras,

$$\psi([P]) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \langle H_i(P) \otimes_{A/I^n} A/I \rangle.$$

Perceba que para $A/I-$módulo finitamente gerado M temos

$$(\psi \circ \varphi)([M]) = \psi([P_M]).$$

No entanto,

$$H_i(P_M) = \begin{cases} M, & \text{se i=0} \\ 0, & \text{se } i \neq 0 \end{cases}$$

E como $I \cdot M = 0$,

$$(\psi \circ \varphi)([M]) = [M \otimes_{A/I} A/I] = [M].$$

Portanto, $\psi \circ \varphi = id_{G_0(A/I)}$, e em particular, φ é injetiva.

Agora, seja $E \in Perf^{V(I)}(A)$. Defina

$$h = h(E) := \sum_{i=0}^{\infty} l_A(H_i(E)) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}.$$

Provaremos por indução sobre h que $[E] \in \mathrm{Im}(\varphi)$, o que mostrará que φ é sobrejetiva.

Se $h = 0$ então $H_i(E) = 0$ para todo i e, como consequência segue que E e 0 são quase isomorfos e $[E] = [0] \in \mathrm{Im}(\varphi)$.

Suponhamos que $h > 0$. Escolha $i \in \mathbb{Z}$ tal que $H_i(E) \neq 0$ e $H_j(E) = 0$ para $j > i$.

Como no resultado anterior, podemos supor $E_j = 0$, para todo $j > i$. Daí, $H_i(E) = \mathrm{Ker}(d_i^E)$.

Considere uma resolução projetiva $P = P_{H_i(E)}$ de $H_i(E)$, da seguinte forma:

$$P: \qquad \cdots \longrightarrow P_2 \xrightarrow{d_2^P} P_1 \xrightarrow{d_1^P} P_0 \xrightarrow{\alpha} H_i(E) \longrightarrow 0.$$

Iremos definir novamente um morfismo $g : \Sigma^i P \longrightarrow E$ como se pode ver no próximo diagrama

$$\begin{tikzcd}
E: & \cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & E_i \arrow[r, "d_i^E"] & E_{i-1} \arrow[r] & \cdots \\
\Sigma^i P: \arrow[u, "g"] & \cdots \arrow[r] & \underbrace{(\Sigma^i P)_{i+1}}_{=P_1} \arrow[u] \arrow[r, "d_{i+1}^{\Sigma^i P}"] & \underbrace{(\Sigma^i P)_i}_{=P_0} \arrow[u, "j\circ\alpha"] \arrow[r] & 0 \arrow[u] \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Neste diagrama a função $j : \mathrm{Ker}(d_i^E) \longrightarrow E_i$ é a inclusão natural.

Perceba que $d_i \circ (j \circ \alpha) = 0$.

Seja $C := Cone(g)$.

Então,

$$\begin{aligned}
C_{i-1} &= 0 \oplus E_{i-1} = E_{i-1}; \\
C_i &= 0 \oplus E_i = E_i; \\
C_{i+1} &= P_0 \oplus 0 = P_0; \\
C_j &= E_j, \text{ para todo } j \leq i; C_j = P_{j-i-1}, \text{ para todo } j \geq i+1.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$C: \qquad \cdots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{d_1^P} P_0 \xrightarrow{\alpha} E_i \xrightarrow{d_i^E} E_{i-1} \longrightarrow \cdots,$$

e temos que

$$H_{i+i}(C) = \frac{\mathrm{Ker}(\alpha)}{\mathrm{Im}(d_1^P)} = H_1(P) = 0;$$
$$H_i(C) = \frac{\mathrm{Ker}(d_i^E)}{\mathrm{Im}(\alpha)} = \frac{\mathrm{Ker}(d_i^E)}{\mathrm{Ker}(d_i^E)} = 0.$$

Com isso, segue que $h(E) - h(C) = l_A(H_i(E)) > 0$ e assim, $h(C) < h(E)$.

Pela hipótese de indução, $[C] \in \mathrm{Im}(\varphi)$. Finalmente, a sequência exata curta,

$$0 \longrightarrow E \longrightarrow C \longrightarrow \underbrace{\Sigma(\Sigma^i P)}_{\Sigma^{i+1}P} \longrightarrow 0$$

implica que

$$[E] = [C] - (-1)^{i+1}[P] \in \mathrm{Im}(\varphi),$$

pois $[P] = \varphi(\langle H_i(E)\rangle)$.

$\square$

Consideremos A um anel regular, $Z = V(I)$ um fechado do $\mathrm{Spec}(A)$ e $f \in A$. Por funtorialidade, existem homomorfismo de grupos

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & K_0(A)^{Z\cap V(f)} & \longrightarrow & K_0^Z(A) \\ & [P] & \longmapsto & \varphi([P]) := [P]. \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} \psi: & K_0^Z(A) & \longrightarrow & K_0^{Z\setminus V(f)}(A_f) \\ & [P] & \longmapsto & \psi([P]) := [P \otimes_A A_f]. \end{array}$$

Observação 3.3. *Utilizamos o seguinte abuso de notação:* $K_0^{Z\setminus V(f)}(A_f)$ *no lugar de* $K_0^{V(IA_f)}(A_f)$.

Teorema 3.4. ***(Gillet-Soulé)*** *A sequência*

$$K_0(A)^{Z\cap V(f)} \xrightarrow{\varphi} K_0^Z(A) \xrightarrow{\psi} K_0^{Z\setminus V(f)}(A_f) \longrightarrow 0$$

é exata.

Demonstração. Note que

$$Z \cap V(f) = V(I) \cap V(f) = V(I + (f)).$$

Pelo Lema 3.3

$$K_0^{Z\cap V(f)}(A) \cong G_0\left(\frac{A}{I+(f)}\right).$$

Perceba que

$$\frac{A}{I+(f)} \cong \frac{A/I}{\frac{I+(f)}{I}}.$$

Escrevendo $B := A/I$ e $g = \pi(f)$, onde $\pi : A \longrightarrow A/I$ é a projeção natural, segue que

$$\frac{A}{I+(f)} \cong \frac{B}{(g)} \implies K_0^{Z\cap V(f)}(A) \cong G_0(B/(g)).$$

Por outro lado, o mapa localização $\gamma : A \longrightarrow A_f$ induz um homomeomorfismo $\gamma_* :$ $\mathrm{Spec}(A_f) \longrightarrow D(f)$, onde $D(f) := \mathrm{Spec}(A) \setminus V(f) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A) \mid f \notin \mathfrak{p}\}$. Como $Z \setminus V(f) = Z \cap D(f)$ é um fechado de $D(f)$ então $\tilde{Z} := (\gamma_*)^{-1}(Z \cap D(f))$ é um fechado de $\mathrm{Spec}(A_f)$. Mais ainda $\tilde{Z} = V(IA_f)$.

Como A é um anel regular, sua localização A_f também é regular. Pelo Lema 3.3,

$$K_0^{V(IA_f)}(A_f) \cong G_0(A_f/IA_f) \cong G_0((A/I)_{\pi(f)}) = G_0(B_g).$$

Portanto, provar que a sequência do enunciado é exata é equivalente a provar que a sequência

$$G_0(B/I) \longrightarrow G_0(B) \longrightarrow G_0(B_g) \longrightarrow 0$$

é exata. No entanto, esse caso é o **Teorema 1.14**.

□

Com isso, temos o seguinte resultado

Corolário 3.5. *Seja A um anel regular $Z = V(I)$ um fechado do $\mathrm{Spec}(A)$ e $\mathfrak{p}$ um primo minimal de I. Então existe uma sequênca exata à direita*

$$\bigoplus_{f \in A \setminus \mathfrak{p}} K_0^{Z \cap V(f)}(A) \longrightarrow K_0^Z(A) \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

onde o mapa $\eta : K_0^Z(A) \longrightarrow \mathbb{Z}$ é a composição dada pelo diagrama

$$K_0^Z(A) \xrightarrow{\delta} K_0^{\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}}(A_\mathfrak{p}) \xrightarrow[\cong]{l} \mathbb{Z}\,,$$

com $\delta([P]) = [P_\mathfrak{p}]$.

Demonstração. Pelo **Teorema 3.4** , para cada $f \in A \setminus \mathfrak{p}$ existe uma sequência exata à direita

$$K_0^{Z \cap V(f)}(A) \xrightarrow{\varphi_f} K_0^Z(A) \xrightarrow{\psi_f} K_0^{Z \setminus V(f)}(A_f) \longrightarrow 0.$$

Ordene o conjunto multiplicativo $S := A \setminus \mathfrak{p}$ da seguinte forma: $f \leq g$ se existe $a \in A$ tal que $g = af$. Para $f \leq g$, o mapa

$$\begin{array}{rccc} \phi_{f,g} : & A_f & \longrightarrow & A_g \\ & \dfrac{r}{f} & \longmapsto & \phi_{f,g}\Big(\dfrac{r}{f}\Big) := \dfrac{ar}{g}. \end{array}$$

é um homomorfismo de anéis.

Sejam $Z' = V(IA_f)$ e $W' = V(IA_g)$.

Considere o mapa induzido, $(\phi_{f,g})_* : \mathrm{Spec}(A_g) \longrightarrow \mathrm{Spec}(A_f)$.

Então ,

$$(\phi_{f,g})_*^{-1}(Z') \subseteq W'.$$

De fato: seja $\mathfrak{q}A_g \in (\phi_{f,g})_*^{-1}(Z')$, com $\mathfrak{q} \in D(f)$. Portanto,

$$\begin{aligned}
(\phi_{f,g})_*(\mathfrak{q}A_g) \in Z' &\implies (\phi_{f,g})^{-1}(\mathfrak{q}A_g) \in V(IA_f) \\
&\implies IA_f \subseteq (\phi_{f,g})^{-1}(\mathfrak{q}A_g) \\
&\implies \underbrace{\phi_{f,g}(IA_f)}_{IA_g} \subseteq \phi_{f,g}(\phi_{f,g}^{-1}(\mathfrak{q}A_g)) \subseteq \mathfrak{q}A_g \\
&\implies \mathfrak{q}A_g \in V(IA_g) = W'.
\end{aligned}$$

Por funtorialidade, existe um mapa induzido

$$\theta_{f,g} : \underbrace{K_0^{Z'}(A_f)}_{K_0^{Z\setminus V(f)}(A_f)} \longrightarrow \underbrace{K_0^{W'}(A_g)}_{K_0^{Z\setminus V(g)}(A_g)}$$

□

Note que, como estamos lidando com um anel comutativo com unidade, existe $1 \in A$, *tal que* $1 \cdot f = f$. *Portanto,* $\phi_{f,f} = id_{A_f}$ *onde chegamos a conclusão que* $\theta_{f,f} = id_{K_0(A_f)}$.

Além disso, se $f \leq g \leq h$,*temos que* $\phi_{g,h} \circ \phi_{f,g} = \phi_{f,h}$. *Portanto,*

$$\theta_{g,h} \circ \theta f, g = \theta_{f,h}.$$

Assim, o conjunto

$$\{K_0^{Z\setminus V(f)}(A_f),\ \theta_{f,g} \text{ se } f \leq g\},$$

é um sistema direto de grupos abelianos.

Portanto,

$$\exists \varinjlim K_0(A_f) \cong K_0(\varinjlim A_f) \cong K_0(A_{\mathfrak{p}}).$$

Capítulo 4

A Conjectura do Anulamento de Serre

Neste capítulo iremos provar a conjectura do anulamento de Serre usando as ferramentas de K-teoria algébrica estudadas nos capítulos anteriores.

As principais referências utilizadas neste capitulo foram [GILLET-SOULÉ] e [WALKER2].

4.1 Interpretação da Conjectura do Anulamento de Serre em termos da K-teoria

Seja $(A, \mathfrak{m})$ um anel local noetheriano, M um $A-$módulo finitamente gerado com dimensão projetiva finita. Defina

$$[M] := [P_M] \in K_0^{\mathrm{Supp}M}(A),$$

onde P_M é uma resolução projetiva finita de M, onde a resolução

$$0 \longrightarrow P_m \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\alpha} M \longrightarrow 0,$$

gera o complexo

$$P_M : \qquad 0 \longrightarrow P_m \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \longrightarrow 0.$$

Se $\mathfrak{p} \notin \mathrm{Supp}M$, então $0 = M_{\mathfrak{p}} \cong (\mathrm{Coker}(d_1))_{\mathfrak{p}}$ e assim $(P_M)_{\mathfrak{p}}$ é exata e $[M]$ está bem definida.

Seja então M, N dois $A-$módulos finitamente gerados tais que

$$\mathrm{Supp}(M) \cap \mathrm{Supp}(N) = \{\mathfrak{m}\},$$

e suas dimensões projetivas são finitas.

Portanto,

$$[M] \cup [N] := [P_M] \cup [P_N] = [P_M \otimes P_N] \in K_0^{\mathfrak{m}}(A).$$

Seja $P \in Perf^{\mathfrak{m}}(A)$. Como $\mathrm{Supp}(H_i(P)) \subseteq \{\mathfrak{m}\}$ temos que $l_A(H_i(P)) < \infty$ e assim podemos definir $\rho : \mathcal{P}^{\mathfrak{m}}(A) \longrightarrow \mathbb{Z}$ como

$$\rho(\overline{P}) := \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i l_A(H_i(P))$$

Nós mostramos que a partir de ρ, existe

$$l : K_0(A) \longrightarrow \mathbb{Z}$$

tal que se A for um anel regular então l é isomorfismo.

Note que $H_i(P_M \otimes_A P_N) = \mathrm{Tor}_i^A(M, N)$, e assim

$$\begin{aligned} l([M] \cup [N]) &= \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i l_A(H_i(P_M \otimes_A P_N)) \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i l_A(Tor_i^A(M, N)) \\ &= \chi(M, N). \end{aligned}$$

Neste capítulo iremos mostrar que se $\dim(M) + \dim(N) < \dim(A)$ então

$$\chi(M, N) = 0.$$

4.2 Os axiomas de Gillet-Soulé e a Conjectura de Serre

Definição 4.1. *(Axiomas de Gillet-Soulé) Seja $\mathcal{C}$ uma subcategoria da categoria dos anéis comutativos Noetherianos tais que são fechados sobre a localização, isto é, se $Q \in \mathcal{C}$ então $S^{-1}Q \in \mathcal{C}$ para todo subconjunto multiplicativo S de A. Dado um inteiro positivo, k, uma operação de Adams de grau k definida em $\mathcal{C}$ é uma coleção de funções*

$$\psi^k_{A,Z} : K_0^Z(A) \longrightarrow K_0^Z(A)$$

tais que satisfazem os seguinte axiomas:

i. (Aditividade) Cada $\psi^k_{A,Z}$ é um endomorfismo de grupos;

ii. *(Compatibilidade com a multiplicação) Para cada $A \in \mathcal{C}$ e cada par de fechados Z, W de Spec(A) temos,*

$$\psi^k_{A,Z\cap W}(\alpha \cup \beta) = \psi^k_{A,Z}(\alpha) \cup \psi^k_{A,W}(\beta)$$

para todo $\alpha \in K_0^Z(A)$ e $\beta \in K_0^W(A)$; Em outras palavras, o seguinte diagrama é comutativo

$$\begin{tikzcd}
K_0^Z(A) \times K_0^W(A) \arrow[r, "\cup"] \arrow[d, "\psi^k_{A,Z}\times\psi^k_{A,W}"'] & K_0^{Z\cap W}(A) \arrow[d, "\psi^k_{A,Z\cap W}"] \\
K_0^Z(A) \times K_0^W(A) \arrow[r, "\cup"] & K_0^{Z\cap W}(A)
\end{tikzcd}$$

iii. *(Naturalidade) Dados A e B em $\mathcal{C}$, $\varphi : A \longrightarrow B$ um homomorfismo de anéis, e dois subconjuntos fechados $Z \subseteq$ Spec(A) e $W \subseteq$ Spec(B) tal que $(\varphi)^{-1}(Z) \subseteq W$, o seguinte diarama é comutativo*

$$\begin{tikzcd}
K_0^Z(A) \arrow[r, "\varphi_*^{Z,W}"] \arrow[d, "\psi^k_{A,Z}"'] & K_0^W(B) \arrow[d, "\psi^k_{B,W}"] \\
K_0(A) \arrow[r, "\varphi_*^{Z,W}"] & K_0^W(B)
\end{tikzcd}$$

iv. *(Normalização) Para todo $A \in \mathcal{C}$ e $a \in A$,*

$$\psi^k_{A,V(a)}[K(a, A)] = k \cdot [K(a, A)].$$

No caso de uma sequência finita de elementos $a_1, \dots, a_d$ de A, concluímos a partir dos axiomas (i.) e (iv.) a seguinte igualdade

$$\begin{aligned}
\psi^k([K(a_1, \dots, a_d; A)]) &= \psi^k([K(a_1, A) \otimes \ldots \otimes K(a_d, A)]) \\
&= \psi^k([K(a_1, A)]) \cup \ldots \cup \psi^k([K(a_d, A)]) \\
&= k^d[K(a_1, \dots, a_d; A)] \in K_0^{V(a_1,\dots,a_d)}
\end{aligned}$$

Em particular, se $(A, \mathfrak{m})$ é uma anel regular local, ou seja $K_0^{\mathfrak{m}}(A) \cong \mathbb{Z}$, toda operação de Adams de grau k atua como k^d, onde $d = dim(A)$.

Os próximos resultados tem uma grande relevância para o resultado principal deste trabalho, cuja demonstrações desses resultados serão omitidas nesta dissertação.

Teorema 4.1. *(Gillet- Soulé) Para cada $k \geq 1$, existe uma operação de Adams ψ^k_{GS} de grau k definida sobre a categoria dos anéis comutativos Noetherianos. Mais ainda, esses operadores satisfazem a seguinte igualdade:*

$$\psi^k_{GS} \circ \psi^j_{GS} = \psi^{kj}_{GS},\ \textit{para todo } j, k \geq 1.$$

Em particular, tais operadores são comutativos.

Demonstração. Ver **Teorema 3.4** em [WALKER2]. □

Teorema 4.2. *Suponhamos que ψ^k é uma operação de Adams de grau $k \geq 2$ sobre uma categoria de anéis comutativos $\mathcal{C}$ que é fechada por localização. Se $A \in \mathcal{C}$ é regular e $Z = V(I)$ é um fechado em Spec(A) então*

$$K_0^Z(A) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = \bigoplus_{j=ht(I)}^{dim(A)} K_0^Z(A)^{(j)}$$

onde $K_0^Z(A)^{(j)} := Ker(K_0^Z(A) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \xrightarrow{\psi^k - k^j} K_0^Z(A) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q})$.

Demonstração. Ver **Teorema 3.7** em [WALKER2]. □

Em outras palavras, o teorema diz que o operador $\psi^k \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ é diagonalizável e seus autovalores estão contidos no conjunto $\{k^j \mid \mathrm{ht}(I) \leq j \leq \dim(A)\}$.

Antes de demonstrarmos a conjectura de Serre, iremos provar o seguinte resultado auxiliar.

Lema 4.3. *Seja $(A, \mathfrak{m})$ um anel local regular. Se M, N são dois A- módulos finitamente gerados tais que $Supp(M) \cap Supp(N) = \{\mathfrak{m}\}$. então*

$$l_A(Tor_i^A(M, N)) < \infty.$$

Demonstração. Primeiramente, temos que

$$\mathrm{Supp}(M \otimes N) = \mathrm{Supp}(M) \cap \mathrm{Supp}(N) = \{\mathfrak{m}\}.$$

Portanto, $\mathrm{Supp}(M \otimes N) = \{\mathfrak{m}\}$.

Seja P_M uma resolução projetiva de M (pois M é finitamente gerado) como sendo

$$0 \longrightarrow P_m \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\alpha} M \longrightarrow 0.$$

Ao tensorizar P_M por $\otimes_A N$, temos o complexo

$$P_M \otimes_A N \qquad 0 \longrightarrow P_m \otimes_A N \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \otimes_A N \xrightarrow{d_1 \otimes_A 1} P_0 \longrightarrow 0,$$

em que cada $P_i \otimes N$ está suportado em em $\{\mathfrak{m}\}$, para cada i. Portanto, $P_i \otimes_A N$ terá comprimento finito, para cada i.

No entanto,

$$\operatorname{Tor}_i^A(M,N) = H_i(P_M \otimes_A N) = \frac{Ker(d_i \otimes_A 1)}{Im(d_{i+1} \otimes_A 1)}.$$

Como $\operatorname{Ker}(d_i \otimes_A 1) \subseteq P_i \otimes_A N$ é um A- submódulo, segue que $l_A(\operatorname{Tor}_i^A(M,N)) < \infty$.

□

Com este resultado, temos que a fórmula de interseção de Serre tem comprimento finito e assim podemos enunciar com precisão a célebre Conjectura do Anulamento de Serre (CAS).

Teorema 4.4. *(Conjectura do anulamento de Serre (CAS)) Sejam $(A,\mathfrak{m})$ um anel Noetheriano local e M,N dois $A-$módulos finitamente gerados de dimensão projetiva finita tais que $Supp(M) \cap Supp(N) = \{\mathfrak{m}\}$. Se $\dim(M) + \dim(N) < \dim(A)$, então*

$$\chi(M,N) = 0.$$

Demonstração. Sejam $(A,\mathfrak{m})$ um anel noetheriano regular local com $d = \dim(A)$, M e N dois $A-$módulos finitamente gerados de dimensões $\dim(M) = d_M$ e $\dim(N) = d_N$, respectivamente. Seja então ψ^k uma operação de Adams de grau $k \geq 2$ (de acordo com o **Teorema 4.1**) e duas resoluções projetivas P_M e P_N de M e N respectivamente. Pelo **Teorema 4.2**, temos:

i.
$$[M] \otimes 1 = [P_M] \otimes 1 \in K_0^{\operatorname{Supp}(M)}(A) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = \bigoplus_{i=d-d_M}^{d} K_0^{\operatorname{Supp}(M)}(A)^{(i)};$$

ii.
$$[N] \otimes 1 = [P_N] \otimes 1 \in K_0^{\operatorname{Supp}(N)}(A) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = \bigoplus_{j=d-d_N}^{d} K_0^{\operatorname{Supp}(N)}(A)^{(j)}.$$

Pelo item (i.) temos que existem α_i, tais que

$$[P_M] \otimes 1 = \sum_{i=d-d_M}^{d} \alpha_i,$$

onde $\alpha_i \in K_0^{\mathrm{Supp}(M)}(A)^{(i)}$.

Portanto, $(\psi^k_{A,\mathrm{Supp}(M)} - k^i)(\alpha_i) = 0$ e assim $\psi^k_{A,\mathrm{Supp}(M)}(\alpha_i) = k^i\alpha_i$.

Analogamente,

$$[P_N] \otimes 1 = \sum_{j=d-d_N}^{d} \beta_j,$$

com $\psi^k_{A,\mathrm{Supp}(N)}(\beta_j) = k^j\beta_j$.

Perceba que

$$\big([M] \cup [N]\big) \otimes 1 = [M \otimes N] \otimes 1 = [P_M \otimes P_N] \otimes 1 \in K_0^{\mathrm{Supp}(M)\cap\mathrm{Supp}(N)}(A) = K_0^{\mathfrak{m}}(A),$$

e pelo **Teorema 4.2**

$$[P_M \otimes P_N] \otimes 1 \in \bigoplus_{i \geq d-d_M;\ j\geq d-d_N} K_0^{\mathfrak{m}}(A)^{(i+j)},$$

com

$$[P_M \otimes P_N] = \sum_{\substack{i\geq d-d_M \\ j\geq d-d_N}} (\alpha_i \cup \beta_j).$$

Desde que ψ^k é multiplicativa e $K_0^{\mathfrak{m}}(A) \cong \mathbb{Z}$, temos

$$\begin{aligned} k^d(\alpha_i \cup \beta_j) \;=\; \psi^k_{\mathfrak{m}}(\alpha_i \cup \beta_j) &= \psi^k_{\mathrm{Supp}(M)}(\alpha_i) \cup \psi^k_{\mathrm{Supp}(N)}(\beta_j) \\ &= (k^i\alpha_i) \cup (k_j\beta_j) \\ &= k^ik^j(\alpha_i \cup \beta_j) \\ &= k^{i+j}(\alpha_i \cup \beta_j) \in \mathbb{Q}. \end{aligned}$$

Além disso, como $d_M + d_N < d$, segue que

$$i + j \geq (d - d_N) + (d - d_M) = 2d - (d_M + d_N) > 2d - d = d.$$

Portanto, temos que

$$k^d(\alpha_i\beta_j) = k^{i+j}(\alpha_i \cup \beta_j) \ \ e \ \ i + j > d.$$

Consequentemente, $\alpha_i \cup \beta_j = 0$ para todo i, j, donde $[P_M \otimes P_N] = 0$. Isto implica que

$$[M] \cup [N] = [P_M] \cup [P_N] = [P_M \otimes P_N] = 0 \in K_0^{\mathfrak{m}}(A).$$

Pela fórmula de interseção, temos

$$\chi(M, N) = l([M] \cup [N]) = 0.$$

□

Apêndice A

Um breve momento sobre a Teoria das Categorias

Neste apêndice, iremos adentrar nas definições de categoria e subcategoria e funtores. Na matemática, a teoria das categorias provê uma linguagem interdisciplinar capaz de delinear resultados e construções gerais, separando-os dos específicos a cada área, possibilitando a simplificação e clarificação de demonstrações. A teoria é centrada nos conceitos de categoria, que é uma abstração do conceito de composição de funções e de funtor. Sendo de alto nível de abstração, é recomendada, antes do estudo de teoria das categorias, familiaridade de conceitos básicos de álgebra linear, álgebra abstrata e topologia, por exemplo.

A principal referencia utilizada para esse capítulo foi o [ROTMAN].

A.1 Categoria e Subcategoria

Definição A.1. *Uma categoria $\mathcal{C}$ consiste em uma classe de objetos $Obj(\mathcal{C})$, um conjunto de morfismos $Hom(A, B)$ para todo par ordenado (A, B) de objetos e uma composição $Hom(A, B) \times Hom(B, C) \longrightarrow Hom(A, C)$ denotada por $(f, g) \longmapsto g \circ f$ para qualquer tripla de objetos, que obedecem os seguintes axiomas*

i. *Cada $f \in Hom(A, B)$ possui um único domínio A e um único contradomínio B;*

ii. *Para cada objeto A, temos um morfismo indentidade $1_A \in Hom(A, A)$ tal que $f \circ 1_A = f$ e $1_A \circ f = f$ para todo $f : A \longrightarrow B$;*

iii. *A composição é associativa: dados homomorfismos*

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D ,$$

segue que

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

Exemplo A.1. *Categoria Sets: esta categoria os objetos são conjuntos, os morfismos são as funções e a composição é a composição de funções.*

Exemplo A.2. *Os anéis comutativos com unidade munidos com seus homomorfismos de anés formam a categoria dos anéis comutativos com unidade.*

Exemplo A.3. *Seja A um anel comutativo com identidade. Sejam os A-módulos como sendo os objetos com suas aplicações A-lineares sendo os morfismos. Elas definem a categoria dos A- módulos denotada por A-Mod.*

Exemplo A.4. *Um monoide é um conjunto não vazio G munido de uma operação binária associativa $*$ e um elemento neutro e: isto é , $ge = g = eg$ para todo $g \in G$. Dados os monoides $(G_1.*)$ e $(G_2, \Box)$, definimos um homomorfismo de monoide como sendo o morfismo $f : G_1 \longrightarrow G_2$ tal que $f(a_1 * a_2) = f(a_1)\Box f(a_2)$, para todo $a_1, a_2 \in G_1$ e $f(e_{G_1}) = e_{G_2}$, onde e_{G_1} e e_{G_2} são seus respectivos elementos neutros. Temos que o conjunto de todos os monoides junto a seus morfismos é uma categoria. Denotaremos de Mon a categoria de todos os monoides comutativos, ou seja, dado um monoide $(G, *)$ temos $a_1 * a_2 = a_2 * a_1$., para quaisquer $a_1, a_2 \in G$.*

Exemplo A.5. *Sejam, f_0 , f_1 duas funções continuas onde X e Y são espaços topoógicos. Dizemos que f_0 é homotópico a f_1 ($f_0 \sim f_1$) se existem funções contínuas $h_0, h_1 : [0, 1] \times X \longrightarrow Y$ tais que $h(0, x) = f_0(x)$ e $h(1, x) = f_1(x)$ para todo $x \in X$. Chamamos h de uma homotopia. Uma equivalência homotópica é um mapa contínuo $f : X \longrightarrow Y$ para qual existe um mapa $g : Y \longrightarrow X$ contínuo tal que $g \circ f \sim 1_X$ e $f \circ g \sim 1_Y$. Se X e Y admitem uma equivalência homotópica, dizemos que X e Y são homotópicamente equivalentes.*

Podemos mostrar que a homotopia é uma relação de equivalência de todas as funções contínuas $X \longrightarrow Y$, e a classe de equivalência $[f]$ é chamada de classe de homotopia. A categoria das homotopias Htp é formada pelos objetos que são os espaços topológicos e seus morfismos são as classes de homotopia das funções contínuas.

Para mais exemplos, consulte [ROTMAN], página 9.

Definiremos agora a noção de subcategoria.

Definição A.2. *Uma categoria $\mathcal{S}$ é uma subcategoria de $\mathcal{C}$ se*

i. $Obj(\mathcal{S}) \subseteq Obj(\mathcal{C})$;

ii. $Hom_{\mathcal{S}}(A, B) \subseteq Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$, *para todo* $A, B \in Obj(\mathcal{S})$.

iii. Se $f \in Hom_{\mathcal{S}}(A,B)$ e $g \in Hom_{\mathcal{S}}(B,C)$, então $g \circ f \in Hom_{\mathcal{S}}(A,C)$ é igual a $g \circ f \in Hom_{\mathcal{C}}(A,C)$.

iv. Se $A \in Obj(\mathcal{S})$, então $1_A \in Hom_{\mathcal{S}}(A,A)$ é igual a $1_A \in\in Hom_{\mathcal{C}}(A,A)$.

Uma subcategoria $\mathcal{S}$ de $\mathcal{C}$, é uma subcategoria completa se para todo $A, B \in Obj(\mathcal{S})$ temos $Hom_{\mathcal{S}}(A,B) = Hom_{\mathcal{C}}(A,B)$.

Exemplo A.6. *Ab é uma subcategoria completa da categoria dos Grupos.*

Exemplo A.7. *Uma categoria é dita discreta se os morfismos são apenas os morfismos identidade. Se $\mathcal{S}$ é a categoria discreta com $Obj(\mathcal{S}) = Obj(Sets)$, então $\mathcal{S}$ não é uma subcategoria completa.*

A.2 Funtores

Vamos agora definir dois tipos de "homomorfismos"entre categorias.

Definição A.3. *Sejam $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ duas categorias. Um funtor é uma função $T : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ tal que obedece as seguintes condições:*

i. Se $A \in Obj(C)$ então $T(A) \in Obj(D)$;

ii. Se $f : A \longrightarrow B \in \mathcal{C}$ então $T(f) : T(A) \longrightarrow T(B) \in \mathcal{D}$;

iii. Se $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \in \mathcal{C}$, então $T(A) \xrightarrow{T(f)} T(B) \xrightarrow{T(g)} T(C) \in \mathcal{D}$, e

$$T(g \circ f) = T(g) \circ T(f);$$

iv. $T(1_A) = 1_{T(A)}$ para todo $A \in Obj(\mathcal{C})$.

Podemos mostrar que existe uma bijeção entre os objetos A e o morfismo identidade 1_A. Assim, podemos considerar uma categoria consistindo apenas dos morfismos. Ver como categoria mostra que a notação $T : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ é coerente com a notação padrão de funções. Vamos ilustrar a definição com um exemplo.

Exemplo A.8. *Se $\mathcal{C}$ é uma categoria e $A \in Obj(\mathcal{C})$, então podemos definir o funtor Hom, $T_A : \mathcal{C} \longrightarrow Sets$, usualmente denotado por $Hom(A, \square)$, definido por*

$$T_A(B) = Hom(A,B)$$

para todo $B \in Obj(\mathcal{C})$*, e se* $f : B \longrightarrow C \in \mathcal{C}$*, então*

$$T_A(f) : Hom(A, B) \longrightarrow Hom(A, C)$$

é dado por

$$T_A(f) : h \longmapsto f \circ h.$$

Nós chamamos o mapa $T_A(f) = Hom(A, f)$ *como sendo o mapa induzido, denotado por* f_*.

Para mais detalhes e exemplos, consulte [ROTMAN], página 18.

A definição que damos de funtor é a que chamamos de funtor *covariante.* É possivel mostrar que o funtor do exemplo anterior é um funtor covariante. Vamos definir o que é um funtor contravariante.

Definição A.4. *Sejam* $\mathcal{C}$ *e* $\mathcal{D}$ *duas categorias. Um funtor contravariante é uma função* $T : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ *tal que obedece as seguintes condições:*

i. Se $A \in Obj(C)$ *então* $T(A) \in Objs(D)$;

ii. Se $f : A \longrightarrow B \in \mathcal{C}$ *então* $T(f) : T(B) \longrightarrow T(A) \in \mathcal{D}$;

iii. Se $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \in \mathcal{C}$*, então* $T(C) \xrightarrow{T(g)} T(B) \xrightarrow{T(f)} T(A) \in \mathcal{D}$*, e*

$$T(g \circ f) = T(f) \circ T(g);$$

iv. $T(1_A) = 1_{T(A)}$ *para todo* $A \in Obj(\mathcal{C})$.

Em outras palavras, o funtor contravariante "inverte a seta". Vamos ilustrar esta definição com o seguinte exemplo:

Exemplo A.9. *Se* $\mathcal{C}$ *é uma categoria e* $B \in Obj(\mathcal{C})$ *então o funtor contravariante Hom,* $T^B : \mathcal{C} \longrightarrow Sets$*, usualmente denotado por* $Hom(\square, B)$ *é definido por*

$$T^B(C) = Hom(C, B), \text{ para todo } C \in Obj(\mathcal{C})$$

e se $f : C \longrightarrow D \in \mathcal{C}$*, então*

$$T^B(f) : Hom(D, B) \longrightarrow Hom(C, B)$$

é dado por

$$T^B(f) : h \longmapsto h \circ f.$$

Também chamamos o mapa $T^B(f) = Hom(f, B)$ de mapa induzido e nós denotamos f^*.

É possível mostrar que o funtor T^B é um funtor contravariante.

Para mais exemplos de funtores contravariantes consulte [ROTMAN], página 20.

Sejam uma categoria $\mathcal{C}$ e $A, B \in \mathcal{C}$.

Definição A.5. *Um morfismo de $f : A \longrightarrow B$ um isomorfismo se existe um morfismo $g : B \longrightarrow A \in \mathcal{C}$ tal que*

$$g \circ f = 1_A \ e \ f \circ g = 1_B.$$

O morfismo g é chamado de morfismo inverso de f. É possível mostrar que um isomorfismo possui um único morfismo inverso.

Observação A.1. *Morsfimos identidade em categorias são sempre isomorfismos. Na categoria Sets, morfismos são bijeções. Na categoria dos grupos, módulos, anéis os isomorfismos são os definidos de modo usual. Na categoria dos espaços topológicos, os isomorfismos são os homeomorfismos.*

Daí, temos o seguinte resultado para funtores:

Proposição A.1. *Seja $T : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ um funtor covariante (contravariante). Se f é um isomorfismo em $\mathcal{C}$, então $T(f)$ é um isomorfismo em $\mathcal{D}$*

Em outras palavras, os funtores preservam isomorfismos.

Apêndice B

Alguns invariantes algébricos

O objetivo deste apêndice é apresentar um pouco da teoria da álgebra comutativa, explorando a teoria da decomposição primária para ideais e as noções de dimensão, altura e comprimento.

As principais referências utilizadas nesse apêndice foram [ATIYAH] e [KUNZ].

B.1 Teoria da Decomposição Primária

Vamos supor que A seja um anel comutativo com identidade.

Definição B.1. *Sejam A um anel e M- um A- módulo. Um ideal $\mathfrak{p} \subset A$ é dito um primo associado de M se P é o anulador de algum elemento $m \in M$, ou seja,*

$$\mathfrak{p} = 0 :_A m.$$

O conjunto dos primos associados de M é denotado por $\mathrm{Ass}_A(M)$. Perceba que $\mathrm{Ass}_A(M) \subset \mathrm{Spec}(A)$.

Exemplo B.1. *Se $A \neq 0$ é um domínio de integridade e $M = A$. Então*

$$Ass_A(M) = \{0\}.$$

Podemos caracterizar o conjunto dos primos associados pela seguinte proposição:

Proposição B.1.

$$Ass_A(M) = \{\mathfrak{p} \in Spec(A) \mid \exists \text{ isomorfismo } A/\mathfrak{p} \cong N, \text{para algum submódulo } N \subseteq M\}.$$

Demonstração. Ver página 176, em [KUNZ]. □

Seja $N \subseteq M$ um A- submódulo de M.

Proposição B.2.

$$Ass_A(N) \subset Ass_A(M) \subset Ass_A(N) \cup Ass_A(M/N).$$

Demonstração. Ver **Lemma 2.3**, em [KUNZ]. □

Proposição B.3. *Se A é um anel Noetheriano e $M \neq 0$ então $Ass_A(M) \neq \emptyset$.*

Demonstração. Ver **Proposition 2.4** em [KUNZ]. □

O próximo resultado garante que a união de todos os primos associados é igual aos zeros do A- módulo M.

Proposição B.4.

$$\bigcup_{\mathfrak{p} \in Ass_A(M)} \mathfrak{p} = \mathcal{Z}_A(M),$$

onde

$$\mathcal{Z}_A(M) = \bigcup_{m \in M \setminus \{0\}} 0 :_A m$$

é o conjunto dos zeros de M.

Demonstração. Ver **Proposition 2.5** em [KUNZ]. □

Proposição B.5. *Suponha que M seja um A- módulo finitamente gerado sobre um anel Noetheriano A. Então existe uma cadeia de A- submódulos de M*

$$0 = M_0 \subset M_1 \subset \ldots \subset M_n = M,$$

tais que $M_i/M_{i-1} \cong A/\mathfrak{p}_i$, com $\mathfrak{p}_i \in Spec(A)$.

Demonstração. Ver **Proposition 2.6** em [KUNZ]. □

Como consequência do resultado anterior, temos

Corolário B.6. *Para um A- módulo finitamente gerado M sobre um anel Noetheriano A, $Ass_A(M)$ é finito.*

Seja agora M um A- módulo. O *suporte* de um A-módulo M é o conjunto

$$\text{Supp}(M) = \{\mathfrak{p} \in \text{Spec}(A) \mid M_{\mathfrak{p}} \neq 0\}.$$

Proposição B.7. *Se M e N são dois A- módulos finitamente gerados então:*

$$Supp(M \otimes N) = Supp(M) \cap Supp(N).$$

Demonstração. Ver **Proposition 4** do Capítulo I em [SERRE]. $\square$

Assim, temos o seguinte resultado:

Proposição B.8. *Seja A- um anel Noetheriano, $M \neq 0$ um A- módulo finitamente gerado. Então,*

$$Supp\ (M) = \{\mathfrak{p} \in Spec(A) \mid \mathfrak{p} \supseteq Ann(M)\}.$$

Demonstração. Ver **Proposition 2.9** em [KUNZ]. $\square$

É possível mostrar que $\mathrm{Supp}(M) = V(Ann(M))$.

Utilizando localização e a **Proposição B. 1.** podemos mostrar que

$$\mathrm{Ass}_A(M) \subset \mathrm{Supp}(M).$$

Observação B.1. *Se A é um anel e $I \subsetneq A$ é um ideal próprio de A tempos pela proposição anterior que*

$$Supp(A/I) = \{\mathfrak{p} \in Spec(A) \mid \mathfrak{p} \supseteq I\}.$$

Portanto, M é um A- módulo finitamente gerado e $I = Ann(M)$, segue que

$$Supp(M) = Supp(Ann(M)).$$

Como $\mathrm{Ass}_A(M)$ é um conjunto parcialmente ordenado com respeito a inclusão, podemos definir o conjunto $\mathrm{Min}_A(M) := \mathrm{Min}(\mathrm{Ass}_A(M))$, dos primos associados minimais, ou simplesmente, primos minimais.

Perceba que, $\mathrm{Min}_A(M) \subseteq \mathrm{Ass}_A(M)$, e $\mathrm{Min}_A(M) = \mathrm{Min}(\mathrm{Supp}(M))$.

Definição B.2. *Cada elemento de $Min_A(M)$ é chamado de primo associado minimal. Um elemento de $Ass_A(M) \setminus Min_A(M)$, caso exista, é chamado de primo associado imerso.*

Em outras palavras, um primo associado é imerso se ele contém algum primo minimal.

Seja $N \subset N$ um A- submódulo de M. N é dito $\mathfrak{p}$- *primário* se

$$\mathrm{Ass}_A(M/N) = \{\mathfrak{p}\}.$$

Lema B.9. *Seja A um anel Noetheriano A interseção de uma quantidade finita de ideais $\mathfrak{p}$- primários é também um ideal $\mathfrak{p}$- primário.*

Demonstração. Ver **Lemma 2.13** em [KUNZ]. □

Diremos então que $N \subset M$ possui uma *decomposição primária* se existem submódulos primários $N_1, \ldots, N_s$ de M tais que

$$N = N_1 \cap \ldots \cap N_s.$$

Uma decomposição primária é dita *reduzida* se obedece as seguintes condições:

i. Se N_i é $\mathfrak{p}_\mathfrak{i}$- primário, então $\mathfrak{p}_\mathfrak{i} \neq \mathfrak{p}_\mathfrak{j}$, para $i \neq j$;

ii. $\bigcap\limits_{j \neq i} N_j \not\subset N_i$, para todo $1 \leq i \leq s$.

Caso N admita uma decomposição primária, os N_i's são chamados de componentes primárias de N

Com isso, enunciaremos o célebre teorema que Emmy Noether provou para o caso em que I é um ideal. Mais tarde, houve uma generalização que será afirmada nesse trabalho, cuja demonstração está no material do [KUNZ], na página 180.

Teorema B.10. *(Existência de uma Decomposição primária) Seja A um anel Noetheriano, M um A- módulo finitamente gerado. Então qualquer A- submódulo de M, com $M \neq N$ possui uma decomposição primária reduzida $N = N_1 \cap \ldots \cap N_s$ onde N_i é $\mathfrak{p}_\mathfrak{i}$-primário, para $1 \leq i \leq s$;*

É possível mostrar que $\mathrm{Ass}(M/N) = \{\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_s\}$.

B.2 Dimensão

Seja A um anel não nulo.

Definição B.3. *A dimensão de Krull de A, denotada por* $\dim(A)$*, é dada por*

$$\dim(A) := \sup\{n \in \mathbb{N} \mid \exists\ \mathfrak{p}_0 \subsetneq \ldots \subsetneq \mathfrak{p}_n, \mathfrak{p}_i \in Spec(A)\}$$

Exemplo B.2. *Seja $\mathbb{K}$ um corpo. Então* $\dim(\mathbb{K}) = 0$*. Mais precisamente, um anel $A \neq 0$ é um domínio com* $\dim(A) = 0$ *se, e somente se, A é um corpo.*

Exemplo B.3. *Seja A um domínio de ideais principais que não seja um corpo. Então* $\dim(A) = 1$.

Exemplo B.4. *Se $\mathbb{K}$ é um corpo , então $\mathbb{K}[x]$ tem dimensão 1. Pode se mostrar que se A é um anel Noetheriano, então o anel de polinômios $A[x_1, \ldots, x_n]$ tem dimensão*

$$\dim A[x_1, \ldots, x_n] = n + \dim(A).$$

Definição B.4. *A altura de $P \in Spec(A)$, denotada por $ht(P)$, é dada por*

$$ht(P) := \sup\{n \in \mathbb{N} \mid \exists\ P_0 \subsetneq \ldots \subsetneq P_n = P, P_i \in Spec(A)\}$$

Equivalentemente,

$$ht(P) = \dim(A_{\mathfrak{p}}).$$

Com a teoria da decomposição primária, podemos definir a altura de um ideal qualquer em um anel Noetheriano.

Definição B.5. *Sejam A um anel comutativo Noehteriano com identidade e I um ideal de A. Definimos a altura do ideal I como sendo*

$$ht(I) := \min\{ht(P) \mid P \in Min_A(A/I)\}$$

Definição B.6. *Seja M um A- módulo a dimensão do módulo M, denotada por $dim(M)$ é dada por*

$$\dim(M) = \dim\left(\frac{A}{Ann(M)}\right)$$

Uma cadeia de A- submódulos de um A- módulo M é uma sequência $(M_i)_{i=1}^n$ de submódulos de M tal que

$$M = M_0 \supsetneq M_1 \supsetneq \ldots \supsetneq M_n = \langle 0 \rangle.$$

O comprimento da cadeia é n (número de conexões). Uma *série de composição* de M é uma cadeia maximal, isto é, uma cadeia no qual submódulos extras não podem ser acrescidos. Isto nos quer dizer que cada quociente M_{i-1}/M_i, $i = 1, \ldots, n$ é simples, ou seja, os únicos submódulos de M_{i-1}/M_i são 0 ou ele próprio.

Então temos a seguinte proposição:

Proposição B.11. *Suponha que M póssua uma série de composição de comprimento n. Então, toda série de composição de M tem comprimento n e toda cadeia em M pode ser estendida a uma série de composição.*

Demonstração. Ver **Proposition 6.7** em [ATIYAH]. □

Proposição B.12. *Um A- módulo M possui uma série de composição se, e somente se, M é Noetheriano e Artiniano.*

Demonstração. Ver **Proposition 6.8** em [ATIYAH]. □

Definiremos o comprimento de M como sendo o menor comprimeno de uma série de composição de um módulo M, e será denotado por $l_A(M)$.

Uma fato importante vem da seguinte proposição:

Proposição B.13. *O comprimento $l_A(M)$ é uma função aditiva na classe dos A-módulos de comprimento finito.*

Demonstração. Ver **Proposition 6.8** em [ATIYAH]. $\square$

Podemos mostrar que se $(A, \mathfrak{m})$ é um anel local, então $l_A(A/\mathfrak{m})$ tem comprimento igual a 1.

Apêndice C

Noções de Álgebra Homológica

Neste apêndice, iremos dar algumas noções de algumas ferramentas da Álgebra Homológica, como Complexos, Módulos Projetivos e Resoluções Projetivas. Por fim, falaremos do funtor Tor. A Álgebra homológica é o ramo da matemática que estuda os métodos da homologia e da cohomologia em um contexto geral, conceitos esses que se originaram na topologia algébrica.

As principais referências utilizadas nesse Apêndice foram [ROTMAN], e [WEIBEL].

C.1 Módulos Projetivos

Vamos iniciar relembrando a definição de um A- módulo livre. Posteriormente, introduziremos a noção de A- módulo projetivo.

Definição C.1. *Um A- módulo M é um A - módulo livre se*

$$M \cong \bigoplus_{b \in B} A_m$$

onde $A_m = \langle m \rangle \cong A$, para todo $m \in B$.

Chamaremos de B como sendo a base de M.

Em outras palavras, cada $x \in M$ é escrito de forma única coomo sendo

$$x = \sum_{m \in B} a_m m,$$

onde $a_m \in A$, e quase todos $a_m = 0$. Isto segue que $M = \langle B \rangle$.

Observação C.1. *Um $\mathbb{Z}$- módulo livre é chamado de grupo abeliano livre.*

Definição C.2. *Sejam P e Q dois A- módulos. Dizemos que P é um somando direto de Q se existem aplicações lineares $\alpha : P \longrightarrow Q$ e $\beta : Q \longrightarrow P$ tais que $\pi \circ i = 1_P$.*

Podemos então introduzir a noção de um A -módulo projetivo com a seguinte definição:

Definição C.3. *Um A- módulo é dito projetivo se é um somando direto de algum A-módulo livre.*

Uma equivalência encontrada em [ROTMAN], página 99, dada como definição é enunciada pela seguinte proposição:

Proposição C.1. *Um A- módulo P é projetivo se, e somente se, para toda aplicação linear sobrejetiva $\alpha : M \longrightarrow N$ e toda aplicação linear $\beta : P \longrightarrow N$, existe uma aplicação linear $\gamma : P \longrightarrow M$ tal que*

$$\beta = \alpha \circ \gamma.$$

Os próximos resultados serão omitidas suas demonstrações. Porém pode encontrá-las em [ROTMAN].

Teorema C.2. *Se M é um A- módulo projetivo, então M é uma soma direta de A-módulos projetivos, cada um deles gerado por uma quantidade enúmerável de elementos.*

Demonstração. Ver **Corollary 3.9**, [ROTMAN]. □

Teorema C.3. *(Kaplansky) Seja $(A, \mathfrak{m})$ um anel local. Então, M é um $A-$módulo livre.*

Teorema C.4. *Dado A um anel comutativo, temos as seguintes afirmações:*

i. Soma direta de A- módulos projetivos finitamnete gerados é também um A-módulo projetivo finitamente gerado.

ii. Produto tensorial de A- módulos projetivos finitamente gerados é um A- módulo projetivo finitamente gerado.

Demonstração. Ver **Corollary 3.6**, e **Exercise 3.6** , [ROTMAN]. □

Observação C.2. *O **Teorema B.4** também é válido para A- módulos projetivos finitamente gerados.*

Por fim, vamos definir o que é uma resolução projetiva de um A- módulo M.

Definição C.4. *Seja M um A- módulo. Uma resolução projetiva P_M de M é uma sequência exata*

$$P_M \qquad \longrightarrow P_2 \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \xrightarrow{\varepsilon} M \longrightarrow 0$$

onde cada P_i é um A- módulo projetivo.

Definição C.5. *Seja M um A- módulo. M possui dimensão projetiva finita se sua resolução projetiva é da forma*

$$0 \longrightarrow P_n \longrightarrow P_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0.$$

Denotamos a dimensão projetiva de um A- módulo M por $pd_A(M)$, e é dada pelo ínfimo do comprimento das resoluções projetivas de M.

C.2 Complexos

Definição C.6. *Seja A um anel comutativo com identidade. Um complexo $C_\bullet$ de A- módulos é uma família $\{C_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ de A- módulos, munido a aplicações A- lineares $d_n : C_n \longrightarrow C_{n-1}$ (chamados de diferenciais)*

$$C_\bullet : \qquad \longrightarrow C_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} C_n \xrightarrow{d_n} C_{n-1} \longrightarrow \ ,$$

tais que $d_n \circ d_{n-1} = 0$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Observação C.3. *Seja C um complexo como dado anteiormente. O núcleo de d_n é o módulo de $n-$ciclos de C, denotado por $Z_n = Z_n(C)$. A imagem de d_{n+1} é o módulo das $n-$limitações, denotado por $B_n = B_n(C)$.*

Como, $d_n \circ d_{n-1} = 0$, segue que

$$0 \subseteq B_n \subseteq Z_n \subseteq C_n$$

para todo n.

Definimos o $n-$ésimo módulo de homologia de C como sendo o conjunto quociente,

$$H_n(C) = \frac{Z_n(C)}{B_n(C)}.$$

Em uma notação mais simplificada, denotamos $C_\bullet = C$.

Seja $Ch(C)$ a categoria dos complexos, onde seus morfismos serão dados pela seguinte definição:

Definição C.7. *Um morfismo $f : C \longrightarrow D$ entre complexos, é uma família de aplicações A- lineares $f_n : C_n \longrightarrow D_n$ tais que*

$$f_{n-1} \circ d_n = d_{n-1} \circ f_n.$$

Em outras palavras, o seguinte diagrama comuta

$$
\begin{array}{ccccccccc}
C: & & \cdots \longrightarrow & C_{n+1} & \xrightarrow{d_{n+1}} & C_n & \xrightarrow{d_n} & C_{n-1} & \xrightarrow{d_{n-1}} \cdots \\
\downarrow f & & & \downarrow f_{n+1} & & \downarrow f_n & & \downarrow f_{n-1} & \\
D: & & \cdots \longrightarrow & D_{n+1} & \xrightarrow{d_{n+1}} & D_n & \xrightarrow{d_n} & D_{n-1} & \xrightarrow{d_{n-1}} \cdots
\end{array}
$$

Observação C.4. *Podemos mostrar que um morfismo de complexos leva limitações em limitações, ciclos em ciclos, e grupos de homologia em grupos de homologia.*

Definição C.8. *Um morfismo $f : C \longrightarrow D$ é um quase-isomorfismo se os mapa $H_i(f) : H_i(C) \longrightarrow H_i(D)$ é um isomorfismo para todo $i \in \mathbb{Z}$.*

Os próximos resultados estão no capítulo 1 do livro do [WEIBEL], cujas demonstrações serão omitidas.

Proposição C.5. *São equivalentes:*

i. O complexo C é exato, ou seja exato para todo C_n;

ii. C é acíclico , ou seja $H_n(C) = 0$, para todo n;

iii. O mapa $0 \longrightarrow C$ é um quase isomorfismo onde 0 é o complexo formado pelos A-módulos nulos e seus mapas nulos.

Demonstração. Ver **Exercise 1.1.5** em [WEIBEL]. □

Teorema C.6. *Seja $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$ uma sequência exata curta de complexos.*

Então existem homomorfismos conectores,

$$\partial_n : H_n(C) \longrightarrow H_{n-1}(A),$$

tais que a sequência

$$\longrightarrow H_{n+1}(C) \xrightarrow{\partial_{n+1}} H_n(A) \longrightarrow H_n(B) \longrightarrow H_n(C)\partial_n \longrightarrow H_{n-1}(A) \longrightarrow$$

é exata.

Demonstração. Ver **Theorem 1.3.1** em [WEIBEL]. □

C.3 O funtor Tor

Suponha que A seja um anel comutativo com unidade. Dado M um A-módulo, escolha

$$P_M \qquad \cdots \longrightarrow P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\varepsilon} M \longrightarrow 0$$

uma resolução projetiva de M.

Vamos aplicar o produto tensorial $\otimes_A N$ para o seguinte complexo:

$$P'_M \qquad \cdots \longrightarrow P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \longrightarrow 0.$$

Obtemos então o seguinte complexo

$$P'_M \otimes_A N \qquad \cdots \longrightarrow P_2 \otimes_A N \xrightarrow{d_2 \otimes_A 1} P_1 \otimes_A N \xrightarrow{d_1 \otimes_A 1} P_0 \otimes_A N \longrightarrow 0\ ,$$

donde definiremos para cada i, o funtor Tor_i^A, que vai da categoria dos A- módulos à categoria dos grupos abelianos, como sendo

$$\mathrm{Tor}_i^A(M, N) = H_i(P_M \otimes_A N).$$

Temos então a seguinte proposição:

Proposição C.7. *Os A- módulos $Tor_i^A(M, N)$ estão bem definidos independente da escolha da resolução projetiva P_M de M.*

Demonstração. Ver **Proposition 6.20** e **Corollary 6.21** em [ROTMAN]. □

Proposição C.8.

$$Tor_i^A(M, N) = Tor_i^A(N, M).$$

Demonstração. Ver **Theorem 7.1** em [ROTMAN]. □

Observação C.5. $Tor_0^A(M, N) = M \otimes_A N$.

Observação C.6. *Para qualquer sequência exata curta de A- módulos*

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow M \longrightarrow P \longrightarrow 0\ ,$$

induzimos uma sequência exata longa

$$\cdots \xrightarrow{\partial_{i+1}} Tor_i^A(N, T) \longrightarrow Tor_i^A(M, T) \longrightarrow Tor_i^A(P, T) \xrightarrow{\partial_n}$$

$$\xrightarrow{\partial_n} Tor_{i-1}^A(N, T) \longrightarrow Tor_{i-1}^A(M, T) \longrightarrow Tor_{i-1}^A(P, T) \xrightarrow{\partial_{n-1}} \cdots$$

onde termina em

$$\cdots \xrightarrow{\partial_2} Tor_1^A(N,T) \longrightarrow Tor_1^A(M,T) \longrightarrow Tor_1^A(P,T) \xrightarrow{\partial_1} \quad .$$

$$\longrightarrow N \otimes_A T \longrightarrow M \otimes_A T \longrightarrow P \otimes_A T \longrightarrow 0$$

A prova desta observação encontra-se no ***Theorem 6.27*** *do livro do [ROTMAN].*

Definição C.9. *Um A- módulo T é plano se qualquer sequência exata ao ser tensorizada por T continua sendo exata.*

Temos então que

Proposição C.9. *T é um A-módulo plano se, e somente se, $Tor_i^A(N,T) = 0$, para todo A- módulo N.*

Demonstração. Ver **Theorem 7.2** em [ROTMAN]. □

Corolário C.10. *Seja M, N e P A- módulos. Então P é um A- módulo plano se, e somente se a sequência*

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow M \longrightarrow P \longrightarrow 0$$

é exata.

Demonstração. Ver **Corollary 7.3** em [ROTMAN]. □

Vejamos como o funtor Tor se comporta com somas diretas.

Proposição C.11. *Se $(N_k)_{k \in K}$ é uma família de A- módulos então*

$$Tor_i^A\Big(M, \bigoplus_{k \in K} N_k\Big) \cong \bigoplus_{k \in K} Tor(M, N_k).$$

Demonstração. Ver **Proposition 7.6** em [ROTMAN]. □

Como $S^{-1}A$ é um módulo plano, temos que $S^{-1}(A)$ comuta com Tor.

Proposição C.12. *Se S é um sistema multiplicativo de um anel comutativo A, então para todo $n \geq 0$ e A- módulos M e N*

$$S^{-1}(Tor_i^A(M,N)) \cong Tor_i^{S^{-1}(A)}(S^{-1}M, S^{-1}N).$$

Demonstração. Ver **Proposition 7.17** em [ROTMAN]. □

Por fim, iremos anunciar uma condição para que o Tor seja um A- módulo finitamente gerado, cuja prova está no **Theorem 7.20** no livro do [ROTMAN].

Teorema C.13. *Sejam A um anel comutativo Noetheriano. Se M e N são A- módulos finitamente gerados então Tor_i^A é um A- módulo finitamente gerado.*

Referências Bibliográficas

[ATIYAH] Atiyah, M., I. G. Macdonald *Introduction to Commutative Algebra*, Univeristy of Oxford, 1969.

[DUGGER] Dugger, D., *A geometric introduction to K-Theory*, University of Oregon, 2012.

[GILLET-SOULÉ] Gillet, H., Soulé, C., *Intersection Theory using Adams Operations*, Inventiones Mathematicae, vol. 90, p.243, 1987.

[HARTSHORNE] Hartshorne, H., *Algebraic Geometry*, Springer Science Business Media, 1977.

[KUNZ] Kunz, E., *Introduction to Commutative Algebra and Algebraic Geometry*, Springer New York Heidelberg Dordrecht London, 2013.

[MATSUMURA] Matsumura, H., *Commutative Ring Theory*, Faculty of Sciences Nagoya University,1986.

[SERRE] Serre, J., *Local Álgebra*, Springer Science Business Media, 2000.

[ROTMAN] Rotman, J. J., *An introduction to Homological Álgebra*, Springer Science+Business Media, 2009.

[WALKER1] Walker, M. E., *Adams Operations in Commutative Álgebra*

[WALKER2] Walker, M. E., *Tackling Homological Conjectures Using Algebraic K-Theory*, University of Nebraska, 2016.

[WANG] Wang, F., Kim, H., *Foundations of Commutative Rings and Their Modules*, Springer Nature Singapore Pte Ltd., 2016.

[WEIBEL] Weibel, C.A., *An Introduction to homolocial algebra*, Cambridge University Press, 1994.