

Universidade Federal da Paraíba
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Doutorado em Matemática

Sobre Soluções para Equações de
Schrödinger Quasilineares
Generalizada com Crescimento Crítico

por

Diogo de Santana Germano

João Pessoa - PB

Dezembro/2020

Sobre Soluções para Equações de Schrödinger Quasilineares Generalizada com Crescimento Crítico

por

Diogo de Santana Germano

sob orientação do

Prof. Dr. Uberlandio Batista Severo

e co-orientação do

Prof. Dr. Claudianor Oliveira Alves

Tese apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Matemática.

João Pessoa - PB

Dezembro/2020

Catalogação na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

G373s Germano, Diogo de Santana.
Sobre soluções para equações de Schrödinger
quasilineares generalizada com crescimento crítico /
Diogo de Santana Germano. - João Pessoa, 2020.
128 f. : il.

Orientação: Uberlandio Batista Severo.
Coorientação: Claudianor Oliveira Alves.
Tese (Doutorado) - UFPB/CCEN.

1. Matemática. 2. Equação de Schrödinger. 3.
Crescimento crítico. 4. Ponto fixo. 5. Métodos
variacionais. 6. Ondas estacionárias. I. Severo,
Uberlandio Batista. II. Alves, Claudianor Oliveira.
III. Título.

UFPB/BC

CDU 51(043)

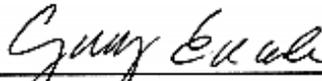
Universidade Federal da Paraíba
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Doutorado em Matemática

Área de Concentração: Análise

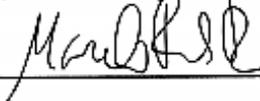
Aprovada em 21 de dezembro de 2020.



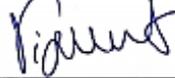
Prof. Dr. Manassés Xavier de Souza - UFPB



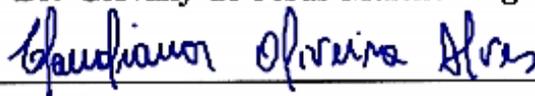
Prof. Dr. Grey Ercole - UFMG



Prof. Dr. Marcelo Fernandes Furtado - UnB

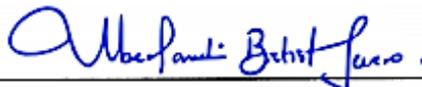


Prof. Dr. Giovany de Jesus Malcher Figueiredo - UnB



Prof. Dr. Claudianor Oliveira Alves - UFCG

Coorientador



Prof. Dr. Uberlândia Batista Severo - UFPB

Orientador

Tese apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Matemática.

Dezembro/2020

Resumo

Neste trabalho, estudamos questões relacionadas à existência, não-existência e comportamento de concentração de soluções do tipo onda estacionária, para uma classe de equações de Schrödinger quasilineares generalizada com crescimento crítico, as quais modelam fenômenos físicos, tais como, mecânica dos fluidos, física dos plasmas e mecânica quântica dissipativa. Na obtenção de nossos resultados, usamos uma identidade de Pohozaev, teoria de ponto fixo em espaços ordenados e métodos variacionais, tais como, teoremas do tipo mini-max.

Palavras-chave: Equação de Schrödinger; Crescimento crítico; Ponto fixo; Métodos variacionais; Ondas estacionárias.

Abstract

In this work, we study questions related to the existence, non-existence and concentration behavior of stationary wave solutions for a class of Generalized Quasilinear Schrödinger Equations with critical growth, such as which model physical elements, such as fluid mechanics, plasmas and dissipative quantum mechanics. In obtaining our results, we used a Pohozaev identity, fixed point theory in ordered spaces and variational methods, such as mini-max theorems.

Keywords: Schrödinger equation; Critical growth; Fixed point; Variational methods; Stationary waves.

Agradecimentos

A Deus, em primeiro lugar, que por sua infinita graça me proporcionou saúde, paciência, proteção nas inúmeras viagens e me guiou até este momento. Sem Ele a caminhada teria sido insuportável.

A minha família pelo apoio, carinho e incentivo. Em especial a minha esposa Julyanna que, quando distante nos cursos que fiz em outras cidades, estava sempre perto dando força e carinho. Ou quando perto, confinados por causa da pandemia do COVID-19, abdicou de tantas coisas se distanciando um pouco, para que eu não perdesse o foco nos estudos. A minha filha Jade, que sempre deixava minhas folhas de estudo ou cadernos cheios de vida e alegria com seus lindos desenhos.

Ao meu orientador Uberlandio Batista Severo, pelo incentivo, paciência, disponibilidade e conselhos. Enfim, pela excelente orientação.

Aos queridos irmãos da Igreja Cristã Nova Vida de Campina Grande, pelas orações, comunhão e amizade.

Aos meus pais e sogros, que sempre deram suporte e incentivo em momentos de dificuldade.

Ao meu coorientador Claudianor Oliveira Alves, que além de ter me indicado um excelente orientador, foi meu professor de Teoria dos Pontos Críticos e Teoria do Grau, base para construção desse trabalho.

A Unidade Acadêmica de Matemática da Universidade Federal de Campina Grande, por ter concedido minha liberação para cursar o Verão de Análise Funcional e posteriormente para capacitação no curso de doutorado. Em especial, ao professor Marco Aurélio Soares Souto pelas discussões e dicas na minha preparação para o Verão e no curso de EDP, base para esse projeto. Também, ao professor e amigo José Fernando Leite Aires pelo o apoio e incentivo.

Aos professores Manassés Souza, Grey Ercole, Marcelo Furtado e Giovany Figueiredo, por terem aceitado participar da banca examinadora.

Aos Programas de Pós-Graduação em Matemática da UAMat-UFCG e do DM-UFPB, por sempre oferecerem cursos e orientações de excelência.

Ao aplicativo de caronas BlaBlaCar, que possibilitou suporte financeiro nas viagens, concedeu o privilégio de conhecer novas pessoas e fez com que o trajeto ida e volta de Campina a João Pessoa fosse mais prazeroso.

Aos professores do curso de doutorado: Nacib, Ricardo e Adriano da UFPB, Henrique e Jógli da UFCG e Eduardo Shirlippe da UFPE, pelos ótimos cursos lecionados.

Aos amigos e colegas do doutorado: Calvi, Laise, Weiller, Roseane, Pedro, Ismael, André, João Henrique, Kleber, Oslene, Tiago Fiel, Tony, dentre outros, e aos funcionários da Secretaria de Pós-Graduação do DM-UFPB.

Enfim, a todos que, direta ou indiretamente contribuíram de alguma forma para a realização desta empreitada.

“Ao Rei eterno, ao Deus único, imortal e invisível, sejam honra e glória para todo o sempre. Amém.”

1 Timóteo 1:17 (NVI)

Dedicatória

A minha esposa Julyanna e a minha
filha Jade.

Lista de Símbolos

Neste trabalho, faremos uso da seguinte simbologia:

- C, C_0, C_1, \dots denotam constantes positivas (possivelmente diferentes);
- $|A|$ denota a medida de Lebesgue de um subconjunto A em \mathbb{R}^N , $N \geq 2$;
- $\text{supp}(f)$ denota o suporte da função f ;
- $B_R(x)$ denota a bola aberta de centro x e raio R e B_R quando estiver centrada na origem;
- $\rightharpoonup, \rightarrow$ denotam convergência fraca e forte, respectivamente, em um espaço normado X ;
- $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota o par dualidade entre o espaço X e o seu dual X' ;
- $u^+ = \max\{u, 0\}$ and $u^- = \max\{-u, 0\}$;
- $\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_N} \right)$ denota o gradiente da função u ;
- $\Delta u = \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$ denota o laplaciano de u ;
- $L^p(\Omega) = \left\{ u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ mensurável} : \int_{\Omega} |u|^p dx < \infty \right\}$, em que $1 \leq p < \infty$ e $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ é um aberto conexo, com norma dada por

$$\|u\|_p = \left(\int_{\Omega} |u|^p dx \right)^{1/p};$$

- Para $p \geq 2$ e $a > 0$,

$$L^p(\mathbb{R}^2, |x|^{-a} dx) = \left\{ u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}; u \text{ é mensurável e } \int_{\mathbb{R}^2} \frac{|u|^p}{|x|^a} dx < \infty \right\}$$

com norma dada por

$$\|u\|_{p,|x|^{-a}} = \left(\int_{\mathbb{R}^2} \frac{|u|^p}{|x|^a} dx \right)^{1/p};$$

- $L^\infty(\Omega)$ denota o espaço das funções mensuráveis que são limitadas quase sempre em Ω com norma dada por

$$\|u\|_\infty = \inf\{C > 0 : |u(x)| \leq C \text{ quase sempre em } \Omega\};$$

- $C(\Omega)$ denota o espaço das funções contínuas em Ω e $C_0(\Omega)$ são as funções contínuas de suporte compacto em Ω ;
- $C^k(\Omega)$, $k \geq 1$ inteiro, denota o espaço das funções k vezes continuamente diferenciáveis sobre Ω e $C^\infty(\Omega) = \bigcap_{k \geq 1} C^k(\Omega)$;
- $C_0^k(\Omega) = C^k(\Omega) \cap C_0(\Omega)$ e $C_0^\infty(\Omega) = C^\infty(\Omega) \cap C_0(\Omega)$;
- $C^{0,\alpha}(\bar{\Omega}) = \left\{ u \in C(\Omega) : \sup_{x,y \in \Omega} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\alpha} < \infty \right\}$ com $0 < \alpha < 1$, e $C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$ são as funções em $C^k(\Omega)$ tais que todas as derivadas parciais até ordem k estão em $C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$;

- Para $N \geq 2$,

$$H^1(\mathbb{R}^N) = \left\{ u \in L^p(\mathbb{R}^N) \left| \begin{array}{l} \exists g_1, g_2, \dots, g_N \in L^2(\mathbb{R}^N) \text{ tais que} \\ \int_{\mathbb{R}^N} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = - \int_{\mathbb{R}^N} g_i \varphi dx, \\ \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N) \text{ e } i = 1, \dots, N \end{array} \right. \right\}$$

com norma dada por

$$\|u\|_{1,2} = \left[\int_{\Omega} (|\nabla u|^2 + |u|^2) dx \right]^{1/2}$$

Se $u \in W^1(\mathbb{R}^N)$ denota-se $g_i \doteq \partial u / \partial x_i$;

- Para $N \geq 3$,

$$D^{1,2}(\mathbb{R}^N) = \left\{ u \in L^{2^*}(\mathbb{R}^N) : \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\mathbb{R}^N) \right\}$$

com norma dada por

$$\|u\| = \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx \right)^{1/2}$$

- Para $N \geq 3$, $2^* = \frac{2N}{N-2}$ é o expoente crítico de Sobolev.

Sumário

Introdução	1
1 Existência e não-existência de solução para problemas críticos em \mathbb{R}^N	15
1.1 Resultados Preliminares	19
1.2 Identidade de Pohozaev e um resultado de não-existência	25
1.3 Prova do Teorema 1.0.4	28
2 Existência de solução para um problema crítico assintoticamente periódico no plano	33
2.1 Estrutura Variacional e Preliminares	38
2.2 Propriedades Geométricas	42
2.3 Sequências de Cerami	44
2.4 Estimativa do nível do passo da montanha	49
2.5 Prova do Teorema 2.0.1	51
3 Existência de solução para um problema crítico singular em dimensão dois	58
3.1 Preliminares e Estrutura Variacional	61
3.2 Propriedades Geométricas	63
3.3 Sequências de Cerami	65
3.4 Estimativa do nível do passo da montanha	70
3.5 Prova do Teorema 3.0.1	74
4 Existência e concentração de soluções para uma classe de problemas críticos em \mathbb{R}^2	75
4.1 Estrutura Variacional e Preliminares	80
4.2 Equações auxiliares	82
4.2.1 Equação equivalente (4.11)	82

4.2.2	Um problema autônomo	88
4.2.3	Equação auxiliar	91
4.3	Prova dos principais resultados	93
4.3.1	Comportamento de concentração	106
4.3.2	Prova dos Teoremas 4.0.1 e 4.0.2	107
	Referências	109

Introdução

Neste trabalho, estudamos questões relacionadas à existência, não-existência e concentração de soluções para equações de Schrödinger quasilineares do tipo

$$-\operatorname{div}(g^2(u)\nabla u) + g(u)g'(u)|\nabla u|^2 + V(x)u = p(x, u) \quad \text{em } \mathbb{R}^N, \quad (1)$$

em que $N \geq 2$, $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ é uma função de classe C^1 , $V : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função mensurável chamada de potencial e $p : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função mensurável. Mais especificamente, quanto a função g , consideramos as seguintes hipóteses:

(g_0) $g \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$ é par, $g'(s) \geq 0$ para todo $s \geq 0$ e $g(0) = 1$;

(g_1) existe $\alpha \geq 1$ tal que $(\alpha - 1)g(s) \geq g'(s)s$ para todo $s \geq 0$;

(g_2) $\lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{g(s)}{s^{\alpha-1}} =: \beta > 0$.

Condições deste tipo também foram introduzidas, por exemplo, em [18, 21, 57]. Uma consequência direta de (g_2) é a existência de uma constante $M_1 > 0$ satisfazendo

$$g^2(s) \leq M_1 + \beta_1 s^{2\alpha-2} \quad \text{para todo } s \in [0, +\infty), \quad (2)$$

onde $\beta_1 = (\beta + 1)^2 > 0$. Ao longo deste trabalho, teremos hipóteses adicionais sobre as funções V e p .

Ao tratar existência de solução para a equação (1), utilizamos métodos topológicos ou variacionais. No caso em que usamos resultados de ponto fixo, analisamos o conceito de solução fraca no espaço de Banach que consideramos. Em seguida, introduzimos uma mudança de variável adequada a fim de obter uma equação semilinear na qual tenhamos uma definição de solução fraca consistente com o espaço de Banach do nosso contexto e, a partir disso, relacionamos as soluções desta nova equação com as soluções do problema (1). Quanto aos casos em que fazemos uso de métodos variacionais,

analisamos o funcional energia associado a (1) no que diz respeito a obtenção de pontos críticos. Também introduzimos uma mudança de variável a fim de obter um novo funcional que esteja bem definido em um espaço de Sobolev e, com isso, relacionamos os pontos críticos deste funcional com as soluções de (1).

Quanto a não-existência de solução, trabalhamos diretamente com a equação (1). Mais precisamente, provamos uma identidade de Pohozaev para obter não apenas um resultado de não-existência mas também para exibir o expoente crítico para uma equação do tipo (1).

O estudo da equação (1) está relacionado com a existência de soluções de ondas estacionárias para equações de Schrödinger quasilineares da forma

$$i\varepsilon\partial_t w = -\Delta w + W(x)w - \tilde{p}(x, |w|^2)w - \Delta[\rho(|w|^2)]\rho'(|w|^2)w, \quad (3)$$

onde $w : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{C}$ é uma função a ser determinada, $W : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ é um potencial dado, $\rho : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ e $\tilde{p} : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ são funções satisfazendo condições apropriadas. A equação (3) é conhecida na literatura atual como *Equação de Schrödinger Quasilinear Generalizada* e tem sido aceita como modelo em muitos fenômenos físicos dependendo da função ρ . Por exemplo, se $\rho(s) = 1$ temos a equação de Schrödinger semilinear clássica (ver [41]). Quando $\rho(s) = s$, a equação surge em mecânica dos fluidos, física do plasma e mecânica quântica dissipativa (veja por exemplo [39, 46, 50]). Para $\rho(s) = (1 + s)^{1/2}$, a equação (3) modela a propagação de um laser de alta irradiância num plasma, bem como a autocalização de um laser ultracurto de alta potência na matéria (ver [40]). Para outras aplicações físicas o leitor pode consultar [9, 52].

Quando consideramos soluções do tipo ondas estacionárias para (3), ou seja, soluções da forma $w(t, x) = \exp(-iEt)u(x)$, onde $E \in \mathbb{R}$ e u é uma função real, sabemos que w satisfaz (3) se, e somente se, a função $u(x)$ resolve a equação elíptica (ver [16])

$$-\Delta u + V(x)u - \Delta[\rho(u^2)]\rho'(u^2)u = p(x, u) \quad \text{em } \mathbb{R}^N, \quad (4)$$

onde $V(x) = W(x) - E$ e $p(x, u) = \tilde{p}(x, u^2)$. Agora, se tomarmos

$$g^2(u) = 1 + \frac{[(\rho(u^2))']^2}{2},$$

então (4) se transforma na equação elíptica quasilinear (ver [57])

$$-\operatorname{div}(g^2(u)\nabla u) + g(u)g'(u)|\nabla u|^2 + V(x)u = p(x, u) \quad \text{em } \mathbb{R}^N.$$

Por exemplo, quando temos $g^2(s) = 1 + 2s^2$, ou seja, $\rho(s) = s$, obtemos uma equação de superfluido na física dos plasmas

$$-\Delta u + V(x)u - \Delta(u^2)u = p(x, u) \quad \text{em } \mathbb{R}^N,$$

que tem sido extensivamente estudada, como podemos ver em [6, 15, 31, 32, 33, 48, 25, 26, 52, 55, 56, 67, 68, 71, 74]. De forma mais geral, se colocarmos $g^2(s) = 1 + 2\gamma^2(s^2)^{2\gamma-1}$, $\gamma > 1/2$, que corresponde a $\rho(s) = s^\gamma$, obtemos a equação

$$-\Delta u + V(x)u - \gamma\Delta(|u|^{2\gamma})|u|^{2\gamma-2}u = p(x, u) \quad \text{em } \mathbb{R}^N,$$

que foi abordada em [3, 44, 47, 66]. Agora, se consideramos $\rho(s) = (1 + s)^{1/2}$, isto é, $g^2(s) = 1 + s^2/[2(1 + s^2)]$ obtemos

$$-\Delta u + V(x)u - \Delta[(1 + u^2)^{1/2}] \frac{u}{2(1 + u^2)^{1/2}} = p(x, u) \quad \text{em } \mathbb{R}^N,$$

que foi estudada, por exemplo, em [14, 19, 69].

Recentemente, houve um grande interesse no estudo da equação (1), como podemos verificar em [13, 19, 20, 21, 22, 29, 42, 57, 58, 59, 60]. Até onde sabemos, o primeiro resultado de existência para um problema elíptico quasilinear generalizado do tipo (1) em domínios ilimitados através de métodos variacionais foi desenvolvido em [57]. Os autores usaram uma mudança de variável e o Teorema do Passo da Montanha sem a condição PS para obter soluções positivas para (1) quando p é uma função de uma variável real superlinear e subcrítica. Posteriormente, usando a mesma mudança de variável, muitos autores propuseram o problema crítico em que $p(x, u)$ é substituída por $|u|^{\alpha^*-2}u + f(u)$; por exemplo, Shen, Wang em [58] e Deng, Peng, Yan em [21, 22] obtiveram soluções positivas para o caso em tela. Estes últimos trabalhos destacam-se por obter soluções do tipo ondas estacionárias trabalhando em $H_{\text{rad}}^1(\mathbb{R}^N)$ e usando lemas de compacidade devido a P. L. Lions. Destacamos ainda o trabalho realizado em [29], cuja ideia é fazer uma mudança de variável, trabalhar numa estrutura de espaço de Orlicz e provar a existência de soluções positivas através do Teorema do Passo da Montanha. Nesse caso, foi obtida a existência de uma solução não-trivial para (1) onde a não-linearidade se comporta como t na origem e t^3 no infinito além de satisfazer uma condição global de não-quadraticidade. Em um trabalho recente, usando variedade de Nehari, Chen, Tang e Cheng em [13] provaram que (1) admite uma

solução de energia mínima sob uma condição de monotonicidade e algumas condições de crescimento padrão em p . Também usando um argumento de monotonicidade devido a Jeanjean em [36], Deng e Huang em [19] provaram a existência de soluções de energia mínima para (1).

Levando em consideração o comportamento da função g , do potencial $V(x)$ e os tipos de não-linearidades $p(x, s)$, obtemos vários resultados de existência, não-existência e concentração de soluções para as equações do tipo (1).

Nosso trabalho está dividido em quatro capítulos.

Inicialmente no *Capítulo 1*, estudamos a não-existência de soluções para uma equação do tipo (1) com condições específicas sobre as funções g, V e $p(s)$. Mais precisamente, vamos provar uma identidade de Pohozaev para a equação

$$-\operatorname{div}(g^2(u)\nabla u) + g(u)g'(u)|\nabla u|^2 + V(x)u = p(u) \quad \text{em } \mathbb{R}^N, \quad (5)$$

onde $N \geq 3$. Como consequência desta identidade, obtemos um resultado de não-existência e exibimos o expoente crítico para este tipo de equação. Este último fato é importante quando queremos impor o crescimento crítico para não-linearidades mais gerais, como veremos nas hipóteses do nosso resultado de existência neste mesmo capítulo.

A seguir, enunciaremos os principais resultados relacionados a não-existência de solução:

Teorema 0.0.1 (Identidade de Pohozaev) *Suponha que $u \in C^2(\mathbb{R}^N)$ é uma solução clássica para o problema (5) com $g \in C^1(\mathbb{R})$, $V \in C^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ e $p \in C(\mathbb{R})$. Mais ainda, suponha que*

$$\int_{\mathbb{R}^N} [g^2(u)|\nabla u|^2 + (|x \cdot \nabla V(x)| + |V(x)|)u^2 + |P(u)|] dx < \infty, \quad (6)$$

onde $P(s) = \int_0^s p(\tau)d\tau$. Então, u satisfaz a identidade

$$\begin{aligned} \frac{N-2}{2} \int_{\mathbb{R}^N} g^2(u)|\nabla u|^2 dx + \frac{N}{2} \int_{\mathbb{R}^N} V(x)u^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} [x \cdot \nabla V(x)] u^2 dx \\ = N \int_{\mathbb{R}^N} P(u) dx. \end{aligned} \quad (7)$$

Como consequência desta identidade, obtemos o seguinte resultado de não-existência:

Teorema 0.0.2 *Suponha que $g \in C^1(\mathbb{R})$ satisfaz, para algum $\alpha \geq 1$, a condição*

$$(\alpha - 1)g^2(s) - g(s)g'(s)s \geq 0, \quad \text{para todo } s \in \mathbb{R} \quad (8)$$

e seja $p(s) = |s|^{q-2}s$ com $q \geq \alpha 2^ = 2\alpha N/(N - 2)$. Além disso, suponha que $V \in C^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ é tal que*

$$x \cdot \nabla V(x) + \frac{(\alpha - 1)N + 2}{\alpha} V(x) > 0 \text{ para quase todo } x \in \mathbb{R}^N. \quad (9)$$

Se $u \in C^2(\mathbb{R}^N)$ é uma solução clássica para (5) satisfazendo

$$\int_{\mathbb{R}^N} [g^2(u)|\nabla u|^2 + (|x \cdot \nabla V(x)| + |V(x)|)u^2 + |u|^q] dx < \infty,$$

então $u \equiv 0$.

Observamos que sob a condição (8), o número $\alpha 2^*$ se comporta como o expoente crítico para esta classe de equações. Em [21], os autores justificam que $\alpha 2^*$ é o expoente crítico para uma equação, que é obtida de (5) por meio de uma mudança de variável. Além disso, eles provam a não-existência de solução positiva para este problema semilinear. Enfatizamos que nossa abordagem é mais geral e obtemos a não-existência de solução diferente de zero para a equação original, adaptando ideias de [54] para uma classe de Equações de Schrödinger Quasilineares, em que $g^2(s) = 1 + 2s^2$.

Ainda neste capítulo, tratamos o caso de existência de solução para uma equação do tipo (1) em que $V(x)$ pode mudar de sinal e a não-linearidade $p(x, s)$ pode apresentar discontinuidades bem como crescimento crítico. Mais especificamente, estudamos a equação

$$-\operatorname{div}(g^2(u)\nabla u) + g(u)g'(u)|\nabla u|^2 + V(x)u = f(x, u) + h(x)g(u) \quad \text{em } \mathbb{R}^N, \quad (10)$$

em que $N \geq 3$, $h \in L^{2N/(N+2)}(\mathbb{R}^N)$, $h \neq 0$, g satisfaz $(g_0) - (g_2)$ e o potencial V satisfaz a seguinte hipótese:

(V_0) $V \in L^{\frac{N}{2}}(\mathbb{R}^N)$ e $\frac{1}{S}\|V^-\|_{\frac{N}{2}} < 1$, onde

$$S = \inf_{u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N); u \neq 0} \frac{\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx}{\left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2^*} dx\right)^{2/2^*}}.$$

Este tipo de condição no potencial foi imposta, por exemplo, em [12]. Quanto a não-linearidade $f(x, s)$ consideramos as seguintes hipóteses:

(f_0) para cada $u : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ mensurável, a função de Nemytskii $N_f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $N_f(x) = f(x, u(x))$ é mensurável;

(f_1) para cada $x \in \mathbb{R}^N$, o quociente $\frac{f(x, s)}{g(s)}$ é não-decrescente em s ;

(f_2) existe $C > 0$, $2\alpha < r < \alpha 2^*$ e $k \in L^{\frac{\alpha 2^*}{\alpha 2^* - r}}(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$|f(x, s)| \leq k(x)|s|^{r-1} + C|s|^{\alpha 2^* - 1}, \quad \text{para todo } (x, s) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}.$$

Note que (f_2) juntamente com o Teorema 0.0.2, permite que o nosso problema tenha crescimento crítico.

O resultado de existência desse capítulo é o seguinte:

Teorema 0.0.3 *Suponha que (V_0) , $(g_0) - (g_2)$ e $(f_0) - (f_2)$ são satisfeitas. Além disso, supondo que $\alpha \leq 2$ e $h \in L^{2N/(N+2)}(\mathbb{R}^N)$, existe $\delta_0 > 0$ tal que se $\|h\|_{2N/(N+2)} \leq \delta_0$ então a equação (10) possui pelo menos uma solução fraca.*

O estudo da equação (10) está intimamente relacionado com as equações não-homogêneas de Schrödinger não-lineares. Quando $g(s) \equiv 1$, (10) torna-se a equação semilinear

$$-\Delta u + V(x)u = f(x, u) + h(x) \quad \text{em } \mathbb{R}^N, \quad (11)$$

que foi estudada por muitos pesquisadores (veja, por exemplo, [2, 1, 11, 12, 75]). Geralmente, para obter a existência de soluções, os autores exigem uma restrição à norma do termo não homogêneo $h(x)$ e, portanto, a equação (11) é considerada uma perturbação do problema $-\Delta u + V(x)u = f(x, u)$, $x \in \mathbb{R}^N$. Na equação mais geral (10), o termo de perturbação pode ser visto como sendo $h(x)g(u)$.

Para provar o Teorema 0.0.3 vamos usar um teorema de ponto fixo (ver Lema 1.1.3) em Espaços de Banach ordenados. A escolha do método está muito relacionada ao comportamento de $V(x)$ e $f(x, s)$ que podem mudar de sinal e apresentar descontinuidades, respectivamente. Para aplicar este método, usamos uma mudança de variável para reformular o problema, obtendo uma equação semilinear que possui uma definição de solução consistente com um espaço de Banach. Encontramos solução para esta equação semilinear através de um teorema de ponto fixo e, a partir desta solução, provamos o resultado de existência para (10). Vale observar que não conhecemos

na literatura nenhum resultado de existência para o problema crítico (10) com tais características em $V(x)$ e $f(x, s)$.

O *Capítulo 2* trata o problema (1) em que $N = 2$ e o potencial $V(x)$ assim como a não-linearidade $f(x, s)$ são assintoticamente periódicos no infinito. Além disso $f(x, s)$ pode apresentar crescimento crítico exponencial. Mais especificamente, consideramos a equação

$$-\operatorname{div}(g^2(u)\nabla u) + g(u)g'(u)|\nabla u|^2 + V(x)u = f(x, u) \quad \text{em } \mathbb{R}^2. \quad (12)$$

Exigimos que o potencial V seja assintoticamente periódico no infinito, isto é, supomos a seguinte hipótese:

(V) existe uma constante $a_0 > 0$ e uma função $V_0 \in C(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, 1-periódica em x_i , $i = 1, 2$, tal que $V_0(x) - V(x) \rightarrow 0$ quando $|x| \rightarrow +\infty$ e

$$V_0(x) \geq V(x) \geq a_0 > 0 \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}^2.$$

Em relação à não-linearidade $f(x, s)$, precisamos que a mesma seja contínua e possua crescimento crítico exponencial, ou seja, existe $\varsigma_0 > 0$ tal que

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} f(x, s)e^{-\varsigma s^{2\alpha}} = \begin{cases} 0, & \text{para todo } \varsigma > \varsigma_0 \\ +\infty, & \text{para todo } \varsigma < \varsigma_0 \end{cases}, \quad (13)$$

uniformemente em $x \in \mathbb{R}^2$. Semelhantemente aos trabalhos [24, 49, 64], esta definição de crescimento crítico, que introduzimos aqui, só é possível devido as propriedades da função g . Tal crescimento é melhor do que o usual, quando $\alpha = 1$. Além disso, $f(x, s)$ deve cumprir as condições

(f₁) $f(x, s) = o(s)$ quando $s \rightarrow 0^+$, uniformemente em $x \in \mathbb{R}^2$;

(f₂) existe uma função contínua $f_0 : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, 1-periódica em x_i , $i = 1, 2$, tal que $f(x, s) \geq f_0(x, s)$ e para todo $\varepsilon > 0$, existe $\eta > 0$ tal que para $s \geq 0$ e $|x| > \eta$ vale

$$|f(x, s) - f_0(x, s)| \leq \varepsilon e^{\varsigma_0 s^{2\alpha}}, \quad \text{para todo } (x, s) \in \mathbb{R}^2 \times [0, +\infty);$$

(f₃) existe $\theta > \alpha > 0$ tal que

$$0 < 2\theta F(x, s) = 2\theta \int_0^s f(x, t)dt \leq s f_0(x, s), \quad \text{para todo } (x, s) \in \mathbb{R}^2 \times (0, +\infty);$$

(f_4) a função $f(x, s)/s^{2\alpha-1}$ é crescente para todo $s > 0$.

Para estudar a equação (12), além dos artigos específicos sobre Equações de Schrödinger Quasilineares Generalizada, já mencionados no início dessa Introdução, nos inspiramos em trabalhos como [5], onde os autores tratam equações não-lineares do tipo

$$-\Delta u + V(x)u = p(x, u) \quad \text{em } \mathbb{R}^2,$$

com $V(x), p(x, s)$ sendo assintoticamente periódicos no infinito e $p(x, s)$ podendo apresentar crescimento crítico exponencial, o que representa um caso particular do problema (12). Também nos artigos [7, 62] encontramos as mesmas condições sobre potenciais e não-linearidades. Porém em [7] temos a presença de um termo não-local junto da função p e em [62] o problema é estudado na reta com o laplaciano fracionário. Neste sentido, nosso trabalho é inédito, pois não conhecemos nenhum resultado que trate da equação generalizada (12) com tais condições sobre g, V e $f(x, s)$.

O principal resultado deste capítulo é enunciado como segue:

Teorema 0.0.4 *Suponha que as hipóteses (V), (g_0)–(g_2) e (f_1)–(f_4) sejam satisfeitas. Além disso, assumimos a condição*

(f_5) *existem $\lambda > 0$ e $p > 2\theta$ tais que $F(x, s) \geq \lambda s^p$, para todo $(x, s) \in \mathbb{R}^2 \times [0, +\infty)$*

com $\lambda > \lambda_*$, onde

$$\lambda_* := \max \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{p-2}{2} \right)^{\frac{p-2}{2}} \left(\frac{4\pi(M_1 + \beta_1) + \|V\|_{L^1(B_{\sqrt{5}})}}{2} \right)^{\frac{p}{2}} \frac{2}{p\pi} \left(\frac{2\theta}{\theta - \alpha} \frac{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 \zeta_0}{2\pi} \right)^{\frac{p-2}{2}}, \\ \frac{4\pi(M_1 + \beta_1) + M_1 \|V\|_{L^1(B_{\sqrt{5}})}}{2\pi} \end{array} \right\}$$

e as constantes M_1 e $\beta_1 > 0$ são dadas na estimativa (2). Então o problema (12) possui uma solução não-negativa.

Para provar o Teorema 0.0.4 usamos métodos variacionais. Porém, precisamos de uma mudança de variável para reformular o problema, obtendo uma equação semilinear que tem um funcional associado bem definido e Gateaux-diferenciável em $H^1(\mathbb{R}^2)$. Este funcional satisfaz as hipóteses geométricas do Teorema do Passo da Montanha sem condição PS (Teorema 2.1.5). Obtemos o nosso resultado de existência, trabalhando

com uma sequência transladada (obtida a partir de uma sequência de Cerami), com convergências decorrentes das periodicidades assintóticas e aplicando uma outra versão do Teorema do Passo da Montanha (Teorema 2.1.6). Neste processo vale ressaltar um fato fundamental: a obtenção de uma estimativa do nível do passo da montanha a partir de (f_5) , nos permite aplicar uma versão da desigualdade de Trundiger-Moser em \mathbb{R}^2 que nos ajuda a obter um resultado do tipo Lions, donde é possível definir a sequência transladada citada anteriormente. A desigualdade de Trundiger-Moser também é de grande importância pois, juntamente com a mudança de variável, motivam a noção de criticalidade que introduzimos em (13).

No *Capítulo 3*, consideramos o problema (1) em \mathbb{R}^2 com $p(x, s)$ sendo singular na origem. Mais precisamente, estudamos a equação

$$-\operatorname{div}(g^2(u)\nabla u) + g(u)g'(u)|\nabla u|^2 + V(x)u = \frac{f(u)}{|x|^a} \quad \text{em } \mathbb{R}^2, \quad (14)$$

onde $a \in (0, 2)$, $V : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua apenas limitada por baixo longe da origem e $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ possui crescimento crítico exponencial. Vamos supor a seguinte condição sobre V :

(V) existe uma constante $V_0 > 0$ tal que $V(x) \geq V_0 > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^2$.

Com respeito a função $f(s)$, pedimos que a mesma seja contínua e que tenha crescimento crítico exponencial, isto é, existe $\varsigma_0 > 0$ tal que

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} f(s)e^{-\varsigma s^{2\alpha}} = \begin{cases} 0, & \text{para todo } \varsigma > \varsigma_0 \\ +\infty, & \text{para todo } \varsigma < \varsigma_0 \end{cases}. \quad (15)$$

Além disso, $f(s)$ deve satisfazer as seguintes hipóteses:

(f₁) $f(s) = o(s)$ quando $s \rightarrow 0^+$;

(f₂) existe $\theta > \alpha > 0$ tal que

$$0 < 2\theta F(s) = 2\theta \int_0^s f(t)dt \leq sf(s), \quad \text{para todo } s > 0.$$

Mais uma vez, o que nos motivou ao estudo da equação (14) foram, tanto os artigos já citados sobre equações generalizadas, quanto problemas do tipo

$$-\Delta u + V(x)u - \gamma \Delta(u^{2\gamma})u^{2\gamma-2}u = p(x, u) \quad \text{em } \mathbb{R}^2$$

onde $\gamma > 1/2$. Por exemplo, em [63] foi considerado um caso singular não-homogêneo em que $\gamma = 1$ e $p(x, u) = \frac{f(u)}{|x|^a} + h(x)$. Já em [64] encontramos a própria equação acima com $p(x, u) = \frac{f(u)}{|x|^a}$. Em ambos os casos foram obtidas existência de soluções via teoremas do tipo mini-max com f apresentando crescimento crítico exponencial. Quanto ao potencial $V(x)$, em [64, 63], além de (V) , os autores consideraram uma hipótese adicional para obterem uma imersão compacta. A ausência de hipóteses adicionais em $V(x)$ para obter compacidade tornam o nosso trabalho mais geral. A escolha de (V) foi baseada em [73], onde encontramos uma imersão compacta de um espaço de Sobolev em espaços de Lebesgue com peso.

O principal resultado deste capítulo é o seguinte teorema:

Teorema 0.0.5 *Suponha que as hipóteses (V) , $(g_0)–(g_2)$ e $(f_1)–(f_2)$ sejam satisfeitas. Além disso, assumimos as condições*

(f_3) existem constantes $s_0, M_0 > 0$ tal que

$$F(s) \leq M_0 f(s), \quad \text{para todo } s \geq s_0;$$

(f_4) existe $\xi_0 > 0$ tal que

$$\liminf_{s \rightarrow +\infty} s f(s) e^{-s_0 s^{2\alpha}} \geq \xi_0 > 0.$$

Então, o problema (14) tem uma solução positiva.

Assim como no Capítulo 2, para provar o Teorema 0.0.5 usamos novamente uma mudança de variável para reformular o problema, obtendo uma equação semilinear que tem um funcional associado bem definido e Gateaux-diferenciável em um subespaço X de $H^1(\mathbb{R}^2)$. Mais uma vez, precisamos de uma versão da desigualdade de Trudinger-Moser em \mathbb{R}^2 devido a [27], fundamental ao longo de todo o capítulo. Ela afirma o seguinte: se $u \in H^1(\mathbb{R}^2)$ então, para todo $\varsigma > 0$, a integral $\int_{\mathbb{R}^2} \frac{e^{\varsigma u^2} - 1}{|x|^a} dx$ é finita. Em seguida utilizamos o Teorema do Passo da Montanha sem condição PS para obter uma sequência de Cerami, a qual mostramos ser limitada. Por fim, os resultados de imersão compacta de X em espaços de Lebesgue com peso nos ajudam a obter uma solução fraca para o problema modificado e, portanto uma solução para (14). A condição (f_4) juntamente com sequências de Moser, nos fornecem uma estimativa do nível do passo da montanha, imprescindível para concluirmos que nossa solução é não-nula.

Finalmente, no *Capítulo 4*, lidamos com o problema de existência e concentração de soluções para a seguinte classe de problemas no plano envolvendo crescimento crítico:

$$-\operatorname{div}(\varepsilon^2 g^2(u) \nabla u) + \varepsilon^2 g(u) g'(u) |\nabla u|^2 + V(x)u = Q(x)f(u) \quad \text{em } \mathbb{R}^2, \quad (16)$$

em que ε é um parâmetro positivo pequeno, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua e $V, Q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ são funções contínuas e limitadas.

Não encontramos na literatura muitos trabalhos explorando fenômenos de concentração para a classe de equações (16). Até o momento, temos conhecimento de artigos que exploram essa temática apenas em \mathbb{R}^N , com $N \geq 3$. Por exemplo, em [42] os autores empregaram métodos variacionais para provar a existência de uma solução de energia mínima positiva u_ε quando $\varepsilon > 0$ é suficientemente pequeno, mostrando que estas soluções concentram-se em pontos de máximos globais de $V(x)$ à medida que ε vai para 0, o que é uma ideia já bem concebida quando $g(s) = 1$ (equação semilinear) ou $g^2(s) = 1 + 2s^2$ (equação quasilinear). Muito recentemente (ainda com $N \geq 3$), em [37], verificamos uma abordagem sobre concentração de soluções para (16) com não-linearidade subcrítica e funções V e Q limitadas por baixo e por cima, respectivamente. Usando uma mudança de variável, eles obtiveram existência e o comportamento de concentração das soluções de energia mínima estabelecendo ainda um fenômeno de decaimento exponencial.

Neste capítulo, quanto às funções $V(x)$ e $Q(x)$, precisamos introduzir as seguintes notações:

$$\begin{aligned} \kappa_{\min} &= \min_{x \in \mathbb{R}^2} V(x) > 0, & \widehat{\mathcal{V}} &= \{x \in \mathbb{R}^2; V(x) = \kappa_{\min}\}, \\ \kappa_{\max} &= \sup_{x \in \mathbb{R}^2} V(x), & \kappa_{\infty} &= \liminf_{|x| \rightarrow \infty} V(x) < \infty, \\ \nu_{\max} &= \max_{x \in \mathbb{R}^2} Q(x), & \widehat{\mathcal{Q}} &= \{x \in \mathbb{R}^2; Q(x) = \nu_{\max}\}, \\ \nu_{\min} &= \inf_{x \in \mathbb{R}^2} Q(x) > 0, & \nu_{\infty} &= \limsup_{|x| \rightarrow \infty} Q(x) < \infty. \end{aligned}$$

Vamos supor que os potenciais V e Q satisfaçam as seguintes condições:

(VQ₁) $\nu_{\max} > \nu_{\infty}$ e existe $R > 0$, $x^* \in \widehat{\mathcal{Q}}$ tal que

$$V(x^*) \leq V(x) \quad \text{para todo } |x| \geq R$$

ou

(VQ₂) $\kappa_{min} < \kappa_\infty$ e existe $R > 0$, $x_* \in \widehat{\mathcal{V}}$ tal que

$$Q(x_*) \geq Q(x) \text{ para todo } |x| \geq R.$$

Se (VQ₁) vale, podemos assumir $V(x^*) = \min_{x \in \widehat{\mathcal{Q}}} V(x)$ e denotamos

$$\mathcal{A}_Q = \{x \in \widehat{\mathcal{Q}}; V(x) = V(x^*)\} \cup \{x \notin \widehat{\mathcal{Q}}; V(x) < V(x^*)\},$$

enquanto que, se (VQ₂) vale, podemos assumir $Q(x_*) = \max_{x \in \widehat{\mathcal{V}}} Q(x)$ e denotamos

$$\mathcal{A}_V = \{x \in \widehat{\mathcal{V}}; Q(x) = Q(x_*)\} \cup \{x \notin \widehat{\mathcal{V}}; Q(x) > Q(x_*)\}.$$

A não-linearidade f possui crescimento crítico exponencial do tipo (15) e satisfaz as seguintes hipóteses:

(f₁) $f(s) = o(s)$ quando $s \rightarrow 0^+$;

(f₂) existe $\theta > \alpha > 0$ tal que

$$0 < 2\theta F(s) = 2\theta \int_0^s f(t)dt \leq sf(s), \text{ para todo } s \in (0, +\infty);$$

(f₃) existe $\lambda > 0$ e $p > 2\theta$ tal que $F(s) \geq \lambda s^p$, para todo $s \in [0, +\infty)$ com $\lambda > \bar{\lambda}$, onde

$$\bar{\lambda} := \max \left\{ \left(\frac{p-2}{p} \right)^{\frac{p-2}{2}} \left[\frac{4\pi(M_1 + \beta_1) + M_1 \kappa_{\max} |B_{\sqrt{5}}|}{2} \right]^{\frac{p}{2}} \frac{2}{p\pi\nu_{\min}} \left[\frac{\theta}{(\theta-\alpha)} \frac{(\frac{\alpha}{\beta})^2 s_0}{\pi} \right]^{\frac{p-2}{2}}, \frac{4\pi(M_1 + \beta_1) + M_1 \kappa_{\max} |B_{\sqrt{5}}|}{2\pi\nu_{\min}} \right\},$$

e $M_1, \beta_1 > 0$ são constantes dadas na estimativa (4.2);

(f₄) $\frac{f(s)}{g(s)G^3(s)}$ é não-decrescente em $(-\infty, 0)$ e $(0, \infty)$, onde $G(s) = \int_0^s g(t)dt$.

O estudo de existência e fenômenos de concentração para a classe de problemas (16) possui uma relação estreita com equações de Schrödinger não-lineares do tipo

$$-\varepsilon^2 \Delta u + V(x)u = Q(x)f(u) \text{ em } \mathbb{R}^2,$$

onde $V(x)$, $Q(x)$ satisfazem as mesmas condições já citadas acima e $f(s)$ também possui crescimento crítico exponencial, conforme podemos verificar em [65], onde os autores impuseram ainda que $f(s)$ seja de classe C^1 . Como este caso corresponde à equação

(16) quando $g(s) = 1$ e nossa função $f(s)$ é apenas contínua, nesse sentido, o nosso trabalho é mais geral do que [65]. Além disso, a presença do termo $\varepsilon^2 g(u)g'(u)|\nabla u|^2$ em (16) impõe uma dificuldade a mais em nosso método. Vale mencionar ainda os artigos [7, 70] que tratam a mesma equação com $g(s) = 1$, mas do tipo Choquard, ou seja, a não-linearidade é da forma $\varepsilon^{\mu-2} \left[\frac{1}{|x|^\mu} * (Q(x)F(u)) \right] Q(x)f(u)$ onde $0 < \mu < 2$, $f(s)$ possui crescimento crítico exponencial e $F(s)$ é a primitiva de $f(s)$. Os resultados de existência e concentração obtidos em [7, 65, 70] são basicamente os mesmos que também faremos aqui.

Os principais teoremas deste capítulo são os seguintes:

Teorema 0.0.6 *Suponha que as hipóteses (VQ_1) , $(g_0) - (g_2)$ e $(f_1) - (f_4)$ sejam satisfeitas. Então, para qualquer $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, o problema (16) tem pelo menos uma solução positiva de energia mínima $u_\varepsilon \in C_{loc}^{2,\ell}(\mathbb{R}^2)$ com as seguintes propriedades:*

(i) *Existe um ponto de máximo $x_\varepsilon \in \mathbb{R}^2$ de u_ε tal que*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \text{dist}(x_\varepsilon, \mathcal{A}_V) = 0;$$

(ii) *Exitem constantes positivas c_1 e c_2 tal que para todo $x \in \mathbb{R}^2$*

$$u_\varepsilon(x) \leq c_1 e^{-\frac{c_2}{\varepsilon}|x-x_\varepsilon|};$$

(iii) *Definindo $\bar{u}_\varepsilon(x) := u_\varepsilon(\varepsilon x + x_\varepsilon)$, temos $x_\varepsilon \rightarrow y_0$ e \bar{u}_ε converge em $H^1(\mathbb{R}^2)$ para uma solução de energia mínima \bar{u} de*

$$-\text{div}(g^2(u)\nabla u) + g(u)g'(u)|\nabla u|^2 + V(y_0)u = Q(y_0)f(u) \quad \text{em } \mathbb{R}^2.$$

Em particular, se $\widehat{\mathcal{V}} \cap \widehat{\mathcal{Q}} \neq \emptyset$, então $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \text{dist}(x_\varepsilon, \widehat{\mathcal{V}} \cap \widehat{\mathcal{Q}}) = 0$ e, a menos de subsequência, \bar{u}_ε converge em $H^1(\mathbb{R}^2)$ para uma solução de energia mínima \bar{u} de

$$-\text{div}(g^2(u)\nabla u) + g(u)g'(u)|\nabla u|^2 + \kappa_{\min}u = \nu_{\max}f(u) \quad \text{em } \mathbb{R}^2.$$

Teorema 0.0.7 *Suponha que (VQ_2) , $(g_0) - (g_1)$ e $(f_1) - (f_4)$ valem. Então, todas as afirmações anteriores permanecem verdadeiras com \mathcal{A}_V sendo substituído por \mathcal{A}_Q .*

Assim como nos dois capítulos anteriores, para provar os Teoremas 0.0.6 e 0.0.7 usamos novamente uma mudança de variável para reformular o problema, obtendo uma equação semilinear. Em seguida fazemos o mesmo em relação a outros

problemas auxiliares. Todos os funcionais associados às equações semilineares que surgem, satisfazem a geometria do passo da montanha com seus níveis apresentando caracterizações interessantes em termos de variedades de Nehari. Um argumento simples com sequências minimizantes, nos ajuda a encontrar solução fraca para cada $\varepsilon > 0$. Com ajuda de estimativas entre os níveis do passo da montanha dos funcionais associados aos problemas auxiliares, verificamos a existência de solução não-trivial para (16) quando $\varepsilon > 0$ é pequeno. Mais ainda, estas mesmas estimativas entre os níveis juntamente com uma estimativa em L^∞ nos garantem todo o comportamento de concentração descrito no teorema 0.0.6.

Com o intuito de não ficarmos recorrendo à Introdução e de tornar os capítulos independentes, enunciaremos novamente, em cada capítulo, os resultados principais, bem como as hipóteses sobre g , sobre as funções potenciais e não-linearidades.

Capítulo 1

Existência e não-existência de solução para problemas críticos em \mathbb{R}^N

Neste capítulo estudamos a existência e não-existência de solução para a seguinte classe de equações de Schrödinger quasilineares generalizada:

$$-\operatorname{div}(g^2(u)\nabla u) + g(u)g'(u)|\nabla u|^2 + V(x)u = f(x, u) + h(x)g(u) \quad \text{em } \mathbb{R}^N, \quad (1.1)$$

onde $N \geq 3$, $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ é uma função de classe C^1 , $V : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ é um potencial que pode mudar de sinal, $f : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função mensurável, que pode ter crescimento crítico e $h \in L^{2N/(N+2)}(\mathbb{R}^N)$, $h \neq 0$.

Inicialmente, pretendemos provar uma identidade de Pohozaev para a equação

$$-\operatorname{div}(g^2(u)\nabla u) + g(u)g'(u)|\nabla u|^2 + V(x)u = p(u) \quad \text{em } \mathbb{R}^N \quad (1.2)$$

e, como consequência desta identidade, exibir o expoente crítico para este tipo de equação. Sob condições adicionais em $g(s)$ e $V(x)$, obtemos um resultado de inexistência e ao mesmo tempo exibimos o expoente crítico para esta equação. Este fato será importante quando quisermos impor crescimento crítico para não linearidades mais gerais, como veremos nas hipóteses de nosso resultado de existência, que será estudado logo em seguida.

Sob condições apropriadas no potencial $V(x)$ e na não-linearidade $p(u)$, temos o seguinte resultado:

Teorema 1.0.1 (Identidade de Pohozaev) *Suponha que $u \in C^2(\mathbb{R}^N)$ é uma solução clássica para o problema (1.2) com $g \in C^1(\mathbb{R})$, $V \in C^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ e $p \in C(\mathbb{R})$.*

Mais ainda, suponha que

$$\int_{\mathbb{R}^N} [g^2(u)|\nabla u|^2 + (|x \cdot \nabla V(x)| + |V(x)|) u^2 + |P(u)|] dx < \infty, \quad (1.3)$$

onde $P(s) = \int_0^s p(\tau) d\tau$. Então, u satisfaz a identidade

$$\begin{aligned} \frac{N-2}{2} \int_{\mathbb{R}^N} g^2(u)|\nabla u|^2 dx + \frac{N}{2} \int_{\mathbb{R}^N} V(x)u^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} [x \cdot \nabla V(x)] u^2 dx \\ = N \int_{\mathbb{R}^N} P(u) dx. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Para a prova dessa identidade, adaptamos alguns argumentos contidos em [54].

Como consequência do Teorema 1.0.1, obtemos o seguinte resultado de não-existência:

Teorema 1.0.2 *Suponha que $g \in C^1(\mathbb{R})$ satisfaz, para algum $\alpha \geq 1$, a condição*

$$(\alpha - 1)g^2(s) - g(s)g'(s)s \geq 0, \quad \text{para todo } s \in \mathbb{R} \quad (1.5)$$

e seja $p(s) = |s|^{q-2}s$ com $q \geq \alpha 2^* = 2\alpha N/(N-2)$. Além disso, suponha que $V \in C^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ é tal que

$$x \cdot \nabla V(x) + \frac{(\alpha - 1)N + 2}{\alpha} V(x) > 0 \text{ para quase todo } x \in \mathbb{R}^N. \quad (1.6)$$

Se $u \in C^2(\mathbb{R}^N)$ é uma solução clássica para (1.2) satisfazendo

$$\int_{\mathbb{R}^N} [g^2(u)|\nabla u|^2 + (|x \cdot \nabla V(x)| + |V(x)|) u^2 + |u|^q] dx < \infty,$$

então $u \equiv 0$.

Observação 1.0.3 *Quando a função $g(s)$ é constante e $\alpha = 1$ os Teoremas 1.0.1 e 1.0.2 correspondem exatamente as equações semilineares, caso este já bastante explorado na literatura.*

Como já foi observado na Introdução, sob a condição (1.5), o número $\alpha 2^*$ é o expoente crítico para a classe de equações (1.2). Aqui nossa abordagem é mais geral, se comparada a [21]. De fato, trabalhando diretamente com (1.2) obtemos o resultado de não-existência enquanto que em [21] os autores fazem o mesmo só que com uma equação semilinear que provém de (1.2).

Agora, a fim de obter existência de solução para (1.1), vamos usar um teorema de ponto fixo (ver Lema 1.1.3). A escolha do método está muito relacionada ao comportamento de $V(x)$ e $f(x, s)$. Aqui, o potencial $V(x)$ pode mudar de sinal e o termo não linear $f(x, s)$ pode ser descontínuo. Além disso, a não-linearidade $f(x, s)$ pode apresentar crescimento crítico.

Vamos assumir as seguintes condições sobre a função g :

(g_0) $g \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$ é par, $g'(s) \geq 0$ para todo $s \geq 0$ e $g(0) = 1$;

(g_1) existe $\alpha \geq 1$ tal que $(\alpha - 1)g(s) \geq g'(s)s$ para todo $s \geq 0$;

(g_2) $\lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{g(s)}{s^{\alpha-1}} =: \beta > 0$.

Hipóteses deste tipo também foram consideradas, por exemplo, em [18, 21]. Enfatizamos que (g_0) – (g_2) são satisfeitos pelas funções

a) $g(s) \equiv 1$ ($\alpha = 1$ e $\beta = 1$);

b) $g(s) = (1 + 2s^2)^{1/2}$ ($\alpha = 2$ e $\beta = \sqrt{2}$);

c) $g(s) = (1 + 2\gamma^2(s^2)^{2\gamma-1})^{1/2}$ ($\alpha = 2\gamma$ e $\beta = \sqrt{2}\gamma$),

que, quando substituídas na equação (1.1) respectivamente, nos fornecem as equações

$$-\Delta u + V(x)u = f(x, u) + h(x) \quad \text{em } \mathbb{R}^N,$$

$$-\Delta u + V(x)u - \Delta(u^2)u = f(x, u) + h(x)g(u) \quad \text{em } \mathbb{R}^N$$

e

$$-\Delta u + V(x)u - \gamma \Delta(u^{2\gamma})u^{2\gamma-2}u = f(x, u) + h(x)g(u) \quad \text{em } \mathbb{R}^N.$$

Para introduzirmos as hipóteses sobre o nosso potencial V , vamos relembrar alguns fatos e definições a respeito dos espaços de funções que utilizamos. Seja $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ o espaço das funções infinitamente diferenciáveis com suporte compacto e $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ o fecho de $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ com respeito a norma $\|u\| := (\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx)^{1/2}$. Mais ainda, sabemos que

$$D^{1,2}(\mathbb{R}^N) = \left\{ u \in L^{2^*}(\mathbb{R}^N) : \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\mathbb{R}^N) \right\}$$

e a imersão $D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$ é contínua. Seja $S > 0$ a melhor constante dessa imersão, isto é,

$$S = \inf_{u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N); u \neq 0} \frac{\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx}{(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2^*} dx)^{2/2^*}}.$$

Inspirados em [12], assumimos a seguinte hipótese sobre V :

(V_0) $V \in L^{\frac{N}{2}}(\mathbb{R}^N)$ e $\frac{1}{S} \|V^-\|_{\frac{N}{2}} < 1$.

A existência de soluções para a equação (1.1) foi discutida sob várias condições no potencial e na não-linearidade (ver, por exemplo, [21, 22, 29, 57, 59, 60] e referências neles contidos). Vale a pena notar que nestes trabalhos diferentes hipóteses são assumidas sobre $V(x)$ a fim de superar o problema da “falta de compacidade”, típico para problemas elípticos em domínios ilimitados. Mais precisamente, geralmente é assumido que o potencial é contínuo, limitado por baixo por uma constante positiva e satisfaz algum tipo de condição no infinito como, por exemplo, coercividade ou $1/V \in L^1(\mathbb{R}^N)$, entre outras. Aqui, inspirados em [12], concentramos nosso esforços para tratar o caso em que V pode mudar de sinal sem exigir qualquer condição adicional a fim de obter compacidade. Até onde sabemos, não há nenhum artigo tratando de Equações de Schrödinger generalizadas como (1.1) cujo potencial muda de sinal. Além disso, nosso potencial pode apresentar singularidades próximas da origem. Fisicamente, isso corresponde à colisão da partícula com o centro de força. Veja por exemplo [51] para mais detalhes.

Em relação a não-linearidade $f(x, s)$ impomos as seguintes hipóteses:

(f_0) para cada $u : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ mensurável, a função de Nemytskiĭ $N_f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $N_f(x) = f(x, u(x))$ é mensurável;

(f_1) para cada $x \in \mathbb{R}^N$, o quociente $\frac{f(x, s)}{g(s)}$ é não-decrescente em s ;

(f_2) existe $C > 0$, $2\alpha < r < \alpha 2^*$ e $k \in L^{\frac{\alpha 2^*}{\alpha 2^* - r}}(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$|f(x, s)| \leq k(x)|s|^{r-1} + C|s|^{\alpha 2^* - 1}, \quad \text{para todo } (x, s) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}.$$

Observamos que a nossa não-linearidade pode apresentar descontinuidades e possuir crescimento crítico. Problemas do tipo

$$-\operatorname{div}(g^2(u)\nabla u) + g(u)g'(u)|\nabla u|^2 + V(x)u = p(x, u) \quad \text{em } \mathbb{R}^N,$$

com não-linearidades crítica foram estudados, por exemplo, em [21, 22, 34, 43, 42]. Em [21, 22] os autores estabelecem a existência de solução positiva usando uma mudança de variáveis e métodos minimax juntamente com lemas de compacidade devido a P. L. Lions. Em [42], existência, multiplicidade e concentração de soluções foram obtidas. No entanto, nesses trabalhos, as não linearidades são contínuas. Neste trabalho,

consideramos uma classe mais geral de não-linearidades $f(x, u)$, ou seja, como visto acima, tais funções podem apresentar descontinuidades.

Nesse contexto, dizemos que uma função $u : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ é uma solução fraca do problema (1.1) se $u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ e para todo $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ vale

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} g^2(u) \nabla u \nabla \varphi dx + \int_{\mathbb{R}^N} g(u) g'(u) |\nabla u|^2 \varphi dx + \int_{\mathbb{R}^N} V(x) u \varphi dx \\ = \int_{\mathbb{R}^N} f(x, u) \varphi dx + \int_{\mathbb{R}^N} h(x) g(u) \varphi dx. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Agora, enunciemos o nosso resultado de existência.

Teorema 1.0.4 *Suponha que (V_0) , $(g_0) - (g_2)$ e $(f_0) - (f_2)$ são satisfeitas. Além disso, supondo que $\alpha \leq 2$ e $h \in L^{2N/(N+2)}(\mathbb{R}^N)$, existe $\delta_0 > 0$ tal que se $\|h\|_{2N/(N+2)} \leq \delta_0$ então a equação (1.1) possui pelo menos uma solução fraca.*

Como $g(0) = 1$, se $h \neq 0$ então a solução obtida no Teorema 1.0.4 é diferente de zero. Para a prova do teorema, adaptamos alguns argumentos em [12]. Porém, em nosso caso, a situação é mais delicada devido à presença do termo quase-linear $-\operatorname{div}(g^2(u) \nabla u) + g(u) g'(u) |\nabla u|^2$.

Observação 1.0.5 *Primeiro, note que se (g_0) e (g_1) são satisfeitas então a condição (1.5) é válida. Considerando $f(x, s) = |s|^{\alpha 2^* - 2} s$, $h \equiv 0$ e $V \in C^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ satisfazendo (1.6), então, pelo Teorema 1.0.2 a equação*

$$-\operatorname{div}(g^2(u) \nabla u) + g(u) g'(u) |\nabla u|^2 + V(x) u = |u|^{\alpha 2^* - 2} u$$

não possui solução diferente de zero. Por outro lado, observando que $f(x, s) = |s|^{\alpha 2^ - 2} s$ satisfaz $(f_0) - (f_2)$ e supondo que $(g_0) - (g_2)$ e (V_0) valem, então se perturbamos a equação acima com o termo $h(x) g(u)$, de acordo com o Teorema 1.0.4 produzimos uma solução não-nula.*

1.1 Resultados Preliminares

Nesta seção, obtemos alguns resultados técnicos e estabelecemos a configuração apropriada para provar o Teorema 1.0.4. Na definição de solução fraca para (1.1) (ver (1.7)), o primeiro problema que surge são as integrais envolvendo a função g , que podem não ser bem definidas, dependendo de g , para funções $u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$. Para contornar

essa dificuldade, seguimos a ideia utilizada em [57] (ver também [22]) e consideramos a mudança de variável

$$v = G(u) = \int_0^u g(s) ds.$$

Por (g_0) temos $g(t) \geq 1$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Logo, G é estritamente crescente e portanto invertível. Para facilitar a leitura, listamos aqui as principais propriedades da função G que serão usadas ao longo de toda a tese.

Lema 1.1.1 *Sob as condições $(g_0) - (g_2)$, temos as seguintes propriedades:*

- (1) G^{-1} é crescente; além disso, G e G^{-1} são funções ímpares;
- (2) $0 < [G^{-1}(t)]' = \frac{1}{g(G^{-1}(t))} \leq 1 = \frac{1}{g(0)}$ para todo $t \in \mathbb{R}$;
- (3) $|G^{-1}(t)| \leq |t|$ para todo $t \in \mathbb{R}$;
- (4) $\frac{G^{-1}(t)}{t} \rightarrow 1$ quando $t \rightarrow 0$;
- (5) $\frac{G^{-1}(t)}{\alpha} \leq \frac{t}{g(G^{-1}(t))} \leq G^{-1}(t)$ para todo $t \geq 0$ e $\frac{[G^{-1}(t)]^2}{\alpha} \leq \frac{G^{-1}(t)t}{g(G^{-1}(t))} \leq [G^{-1}(t)]^2$ para todo $t \in \mathbb{R}$;
- (6) $|G^{-1}(t)|^\alpha \leq \frac{\alpha}{\beta}|t|$ para todo $t \in \mathbb{R}$;
- (7) Se $\alpha > 1$ então $\frac{G^{-1}(t)}{t^{1/\alpha}} \rightarrow \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{1/\alpha}$ quando $t \rightarrow +\infty$;
- (8) Existe uma constante $C > 0$ tal que

$$|G^{-1}(t)| \geq \begin{cases} C|t|, & |t| \leq 1 \\ C|t|^{1/\alpha}, & |t| \geq 1 \end{cases};$$

- (9) existem constantes positivas C_1 e C_2 tal que

$$|t| \leq C_1|G^{-1}(t)| + C_2|G^{-1}(t)|^\alpha \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R};$$

- (10) $\frac{|G^{-1}(t)|^{\alpha-1}}{g(G^{-1}(t))} \leq \frac{1}{\beta}$ para todo $t \in \mathbb{R}$;
- (11) as funções $\frac{G^{-1}(t)}{g(G^{-1}(t))}$ e $\frac{[G^{-1}(t)]^{2\alpha-1}}{g(G^{-1}(t))}$ são não decrescentes para todo $t \in \mathbb{R}$.
- (12) Se $1 \leq \alpha \leq 2$ a função $[G^{-1}(t)]^2$ é convexa.
- (13) Se $1 \leq \alpha \leq 2$ então existem constantes $C_1, C_2 > 0$ tal que

$$|g'(t)| \leq C_1 \quad e \quad g(t) \leq C_2 + (\beta + 1)|t| \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R};$$

Prova: O item (1) segue da monotonicidade de G e do fato de g ser par. Para provar (2), basta derivar a igualdade $G(G^{-1}(t)) = t$. Para o item (3), usamos o Teorema do Valor Médio e (2) para concluir que $|G^{-1}(t)| = |G^{-1}(t) - G^{-1}(0)| = [G^{-1}(\xi)]'|t| \leq |t|$ para algum ξ entre 0 e t . Logo este item está provado. O item (4) é consequência da regra de L'Hôpital.

Para mostrar (5), considere $\sigma_1(t) := \alpha t - g(G^{-1}(t))G^{-1}(t)$ e $\sigma_2(t) := g(G^{-1}(t))G^{-1}(t) - t$. Temos $\sigma_1(0) = \sigma_2(0) = 0$ e por $(g_0) - (g_1)$

$$\sigma_1'(t) = \alpha - 1 - \frac{g'(G^{-1}(t))G^{-1}(t)}{g(G^{-1}(t))} \geq 0 \quad \text{and} \quad \sigma_2'(t) = \frac{g'(G^{-1}(t))G^{-1}(t)}{g(G^{-1}(t))} \geq 0.$$

Então, $\sigma_1(t) \geq 0$, $\sigma_2(t) \geq 0$ para todo $t \geq 0$ e a primeira parte está concluída. Para a segunda parte, basta observar que $G^{-1}(t)t \geq 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Em seguida, de $(g_0) - (g_2)$ deduzimos que $g(s) \geq \beta|s|^{\alpha-1}$ para todo $s \in \mathbb{R}$ e tomando $s = G^{-1}(t)$ obtemos (6).

Agora, vamos verificar o item (7). Pelo limite em (g_2) , dado $\varepsilon > 0$ existe $R > 0$ tal que $g(s) \leq 1 + \beta_\varepsilon s^{\alpha-1}$ para $s \geq R$, onde $\beta_\varepsilon = \beta + \varepsilon$. Fixamos $t_0 > 0$ tal que $t > t_0 \geq R$. Usando (6) e (g_0) , vem

$$\begin{aligned} G^{-1}(t) - G^{-1}(t_0) &= \int_{t_0}^t \frac{1}{g(G^{-1}(s))} ds \geq \int_{t_0}^t \frac{1}{g\left(\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{1/\alpha} s^{1/\alpha}\right)} ds \\ &\geq \int_{t_0}^t \frac{1}{1 + \beta_\varepsilon \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} s^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}} ds. \end{aligned} \tag{1.8}$$

Dado $z > 0$, pelo Teorema do Valor Médio, existe $\vartheta \in (0, 1)$ tal que

$$\frac{1}{1+z} - \frac{1}{z} = -\frac{1}{(z+\vartheta)^2} \geq -\frac{1}{z^2} \quad \text{para } z > 0.$$

Tomando $z = \beta_\varepsilon \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} s^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}$, de (1.8) obtemos

$$G^{-1}(t) - G^{-1}(t_0) \geq \int_{t_0}^t \frac{1}{\beta_\varepsilon \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} s^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}} ds - \int_{t_0}^t \frac{1}{\beta_\varepsilon^2 \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{2(\alpha-1)}{\alpha}} s^{\frac{2(\alpha-1)}{\alpha}}} ds,$$

quando $t > t_0$.

Se $\alpha > 2$, calculando as duas últimas integrais chegamos a

$$G^{-1}(t) - G^{-1}(t_0) \geq \frac{\alpha}{\beta_\varepsilon \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}} (t^{1/\alpha} - t_0^{1/\alpha}) - \frac{\alpha}{\beta_\varepsilon^2 (\alpha - 2) \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{2(\alpha-1)}{\alpha}}} (t^{\frac{2-\alpha}{\alpha}} - t_0^{\frac{2-\alpha}{\alpha}})$$

e como $\beta_\varepsilon > \beta$, obtemos

$$\begin{aligned}
G^{-1}(t) &\geq G^{-1}(t_0) - \frac{\alpha}{\beta_\varepsilon \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}} t_0^{1/\alpha} + \frac{\alpha}{\beta_\varepsilon^2 (\alpha-2) \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}} (t_0^{\frac{2-\alpha}{\alpha}} - t^{\frac{2-\alpha}{\alpha}}) + \frac{\alpha}{\beta_\varepsilon \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}} t^{1/\alpha} \\
&\geq G^{-1}(t_0) - \frac{\alpha}{\beta_\varepsilon \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}} t_0^{1/\alpha} - \frac{\alpha}{\beta_\varepsilon^2 (\alpha-2) \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}} t_0^{\frac{2-\alpha}{\alpha}} - \frac{\alpha}{\beta_\varepsilon \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}} t^{1/\alpha} \\
&\geq G^{-1}(t_0) - \frac{\alpha}{\beta \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}} t_0^{1/\alpha} - \frac{\alpha}{\beta^2 (\alpha-2) \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}} t_0^{\frac{2-\alpha}{\alpha}} + \frac{\alpha}{\beta_\varepsilon \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}} t^{1/\alpha}
\end{aligned}$$

Por (6), temos $G^{-1}(t_0) - \frac{\alpha}{\beta \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}} t_0^{1/\alpha} < 0$. Logo, existe uma constante positiva C_1 tal que

$$G^{-1}(t) \geq -C_1 + \frac{\alpha}{\beta_\varepsilon \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}} t^{1/\alpha},$$

onde $C_1 = -G^{-1}(t_0) + \frac{\alpha}{\beta \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}} t_0^{1/\alpha} + \frac{\alpha}{\beta^2 (\alpha-2) \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}} t_0^{\frac{2-\alpha}{\alpha}} > 0$. Daí,

$$\frac{G^{-1}(t)}{t^{1/\alpha}} \geq -\frac{C_1}{t^{1/\alpha}} + \frac{\alpha}{\beta_\varepsilon \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}},$$

ou seja,

$$\liminf_{t \rightarrow +\infty} \frac{G^{-1}(t)}{t^{1/\alpha}} \geq \frac{\alpha}{\beta_\varepsilon \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}}.$$

Como $\beta_\varepsilon \rightarrow \beta$ quando $\varepsilon \approx 0^+$, concluímos que

$$\liminf_{t \rightarrow +\infty} \frac{G^{-1}(t)}{t^{1/\alpha}} \geq \frac{\alpha}{\beta \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}} = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{1/\alpha}$$

Usando novamente (6), temos

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{G^{-1}(t)}{t^{1/\alpha}} \leq \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{1/\alpha}.$$

Portanto, obtemos o limite desejado para o caso $\alpha > 2$.

Se $\alpha = 2$, novamente calculando as mesmas integrais. Dessa vez, para todo $t > t_0 + 1 \geq$

$R + 1$, temos que existe uma constante positiva C_1 satisfazendo

$$\begin{aligned}
G^{-1}(t) &\geq G^{-1}(t_0) + \frac{2}{\beta_\varepsilon \left(\frac{2}{\beta}\right)^{1/2}} (t^{1/2} - t_0^{1/2}) - \frac{1}{\beta_\varepsilon^2 \left(\frac{2}{\beta}\right)} \int_{t_0}^t \frac{1}{s} ds \\
&\geq -C_1 \log t + \frac{2}{\beta_\varepsilon \left(\frac{2}{\beta}\right)^{1/2}} t^{1/2}.
\end{aligned}$$

Como $\beta_\varepsilon \rightarrow \beta$ quando $\varepsilon \approx 0^+$, concluímos que

$$\liminf_{t \rightarrow +\infty} \frac{G^{-1}(t)}{t^{1/2}} \geq \left(\frac{2}{\beta}\right)^{1/2}$$

Usando novamente (6) obtemos o limite desejado para $\alpha = 2$.

Para $1 < \alpha < 2$ temos a estimativa

$$G^{-1}(t) \geq -\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{1/\alpha} t_0^{1/\alpha} - \frac{\alpha^{2-\alpha}}{\beta^{2/\alpha}(2-\alpha)} t^{2-\alpha} + \frac{\alpha}{\beta_\varepsilon \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}} t^{1/\alpha}$$

e, novamente, trabalhando com limite inferior, obtemos o resultado.

A propriedade (8) segue diretamente de (7) (também é consequência direta de $(g_0) - (g_1)$) e (9) imediatamente de (8). Integrando o item (6) por substituição, segue o item (10).

Agora, derivando o quociente $G^{-1}(t)/g(G^{-1}(t))$ e usando (g_1) obtemos

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{G^{-1}(t)}{g(G^{-1}(t))} \right) = \left(1 - \frac{G^{-1}(t)g'(G^{-1}(t))}{g(G^{-1}(t))} \right) \frac{1}{g^2(G^{-1}(t))} \geq \frac{2-\alpha}{g^2(G^{-1}(t))} \geq 0,$$

o que prova a primeira parte do item (11). A segunda parte é análoga. Desde que $\frac{d}{dt}[G^{-1}(t)]^2 = 2G^{-1}(t)/g(G^{-1}(t))$, pelo item (11), segue que $[G^{-1}(t)]^2$ é convexa, ou seja, temos justificado o item (12).

Finalmente pela condição (g_1) , para $t > 0$ temos

$$g'(t) \leq (\alpha - 1) \frac{g(t)}{t^{\alpha-1}} \frac{1}{t^{2-\alpha}}$$

e usando (g_2) concluímos que $g'(t)$ é limitada para $t \in [0, +\infty)$. Como g' é ímpar, existe $C_1 > 0$ tal que $|g'(t)| \leq C_1$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Novamente por (g_2) , existe $t_1 > 1$ tal que, para todo $|t| \geq t_1$, temos $g(t) \leq (\beta + 1)|t|^{\alpha-1} \leq (\beta + 1)|t|$. Sendo $C_2 = \max_{|t| \leq t_1} g(t)$, a prova do item (8) está completa. ■

Fazendo uso da mudança da variável $v = G(u)$, um cálculo simples mostra que podemos transformar a equação (1.1) na seguinte equação semilinear não homogênea:

$$-\Delta v + V(x) \frac{G^{-1}(v)}{g(G^{-1}(v))} = \frac{f(x, G^{-1}(v))}{g(G^{-1}(v))} + h(x) \quad \text{em } \mathbb{R}^N. \quad (1.9)$$

Uma função $v : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ é uma solução fraca de (1.9) se $v \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ e

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla v \nabla w dx + \int_{\mathbb{R}^N} V(x) \frac{G^{-1}(v)}{g(G^{-1}(v))} w dx = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{f(x, G^{-1}(v))}{g(G^{-1}(v))} w dx + \int_{\mathbb{R}^N} h(x) w dx, \quad (1.10)$$

para todo $w \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$. O próximo lema relaciona soluções fracas de (1.9) com soluções fracas de (1.1).

Lema 1.1.2 Se $v \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ é uma solução fraca de (1.9), então $u = G^{-1}(v)$ é uma solução fraca para (1.1).

Prova: Inicialmente, desde que $\nabla u = \frac{1}{g(G^{-1}(v))} \nabla v$ e $g(t) \geq 1$ para todo $t \in \mathbb{R}$ temos $u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$. Mais ainda, para cada $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, a função $w := g(G^{-1}(v))\varphi$ pertence a $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$. Com efeito, temos

$$\nabla w = \varphi \frac{g'(G^{-1}(v))}{g(G^{-1}(v))} \nabla v + g(G^{-1}(v)) \nabla \varphi.$$

Sendo $\mathcal{K} = \text{supp}(\varphi)$ e usando a propriedade (13) do Lema 1.1.1 obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w|^2 dx &\leq 2 \int_{\mathcal{K}} |\varphi|^2 \frac{[g'(G^{-1}(v))]^2}{[g(G^{-1}(v))]^2} |\nabla v|^2 dx + 4C_2^2 \int_{\mathcal{K}} |\nabla \varphi|^2 dx \\ &\quad + 4(\beta + 1)^2 \int_{\mathcal{K}} v^2 |\nabla \varphi|^2 dx \\ &\leq 2C_1^2 \|\varphi\|_\infty^2 \int_{\mathcal{K}} |\nabla v|^2 dx + 4C_2^2 \int_{\mathcal{K}} |\nabla \varphi|^2 dx \\ &\quad + 4(\beta + 1)^2 \|\nabla \varphi\|_\infty^2 |\mathcal{K}|^{2/N} \|v\|_{2^*}^2 < \infty \end{aligned}$$

e a afirmação está provada. Agora, tomando $w = g(G^{-1}(v))\varphi = g(u)\varphi$ em (1.10), segue que (1.7) é satisfeita para todo $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ e, portanto $u = G^{-1}(v)$ é uma solução fraca para (2.1). ■

De acordo com este lema, para obter soluções fracas de (1.1), é suficiente procurar por soluções fracas de (1.9).

Para finalizar esta seção, lembramos alguns conceitos básicos e notações sobre espaços de Banach ordenados bem como enunciamos um teorema de ponto fixo que é a ferramenta principal para obtermos nossos resultados de existência de soluções. Seja X um espaço de Banach real. Um subconjunto não vazio $X_+ \neq \{0\}$ de X é dito um *cone ordenado* se vale o seguinte:

- (i) X_+ é fechado e convexo;
- (ii) se $u \in X_+$ e $\tau \geq 0$, então $\tau u \in X_+$;
- (iii) se $u \in X_+$ e $-u \in X_+$, então $u = 0$.

Observamos que um cone ordenado X_+ induz de maneira natural uma ordem parcial em X do seguinte modo: $x \preceq y$ se, e somente se $y - x \in X_+$ e (X, \preceq) é chamado

de *espaço de Banach ordenado*. Além disso, se $\inf\{x, y\}$ e $\sup\{x, y\}$ existem para todo $x, y \in X$ com respeito a \preceq então dizemos que $(X, \|\cdot\|)$ é uma *cadeia*. Se $\|x^\pm\| \leq \|x\|$ para todo $x \in X$, com $x^+ := \sup\{0, x\}$ e $x^- := -\inf\{0, x\}$ então $(X, \|\cdot\|)$ é dito uma *semicadeia de Banach*.

Exemplos especiais de semicadeias de Banach são os espaços $L^q(\mathbb{R}^N)$, $W^{1,q}(\mathbb{R}^N)$ e $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ quando consideramos a ordem parcial natural $u \preceq v$ se, e somente se $u \leq v$ quase sempre em Ω .

Seja (X, \preceq) e $(\tilde{X}, \triangleleft)$ espaços de Banach ordenados. Dizemos que um operador $G : X \rightarrow \tilde{X}$ é crescente se, e somente se para todo $x, y \in X$, $x \preceq y$ implica $Gx \triangleleft Gy$.

Um subconjunto B de X é dito ter a propriedade do ponto fixo se todo operador crescente $S : B \rightarrow B$ possui um ponto fixo.

Finalmente apresentamos uma versão de um resultado de ponto fixo devido a S. Carl e S. Heikkilä (ver o Corolário 2.2 em [12]) que é fundamental para chegarmos aos resultados de existência de solução para os nossos problemas.

Lema 1.1.3 *Seja X uma semicadeia de Banach que é reflexivo. Então qualquer bola fechada de X tem a propriedade do ponto fixo.*

Para obter mais detalhes sobre definições e resultados sobre espaços de Banach ordenados, o leitor pode consultar [12] e suas referências.

1.2 Identidade de Pohozaev e um resultado de não-existência

Nesta seção, vamos provar os Teoremas 1.0.1 e 1.0.2. Para isto, primeiro nós deduzimos uma identidade Pohozaev e em decorrência desta, como mencionado na introdução, justificamos que o expoente crítico para esta classe de equações é $\alpha 2^*$. Aqui, ∂B_R denota a fronteira da bola aberta $B_R = B_R(0)$ centrada na origem e de raio $R > 0$. Precisamos do seguinte lema:

Lema 1.2.1 *Se $\mathcal{F} \in C(\mathbb{R}^N) \cap L^1(\mathbb{R}^N)$ então existe uma sequência $(R_n) \subset \mathbb{R}$, $R_n \rightarrow +\infty$ tal que*

$$R_n \int_{\partial B_{R_n}} |\mathcal{F}(\sigma)| d\sigma \rightarrow 0 \quad \text{quando } n \rightarrow \infty. \quad (1.11)$$

Prova: Veja Lema 2.1 em [54]. ■

Prova do Teorema 1.0.1: Desde que $\operatorname{div}(g^2(u)\nabla u) = g^2(u)\Delta u + 2g(u)g'(u)|\nabla u|^2$ podemos reescrever (1.2) como

$$-g^2(u)\Delta u - g(u)g'(u)|\nabla u|^2 + V(x)u = p(u). \quad (1.12)$$

Logo, se u é uma solução para (1.2) então

$$(x \cdot \nabla u) [-g^2(u)\Delta u - g(u)g'(u)|\nabla u|^2 + V(x)u] = (x \cdot \nabla u)p(u) \quad \text{em } \mathbb{R}^N. \quad (1.13)$$

Um cálculo simples mostra que

$$(x \cdot \nabla u)\Delta u = \operatorname{div} \left((x \cdot \nabla u)\nabla u - \frac{|\nabla u|^2}{2}x \right) + \frac{N-2}{2}|\nabla u|^2. \quad (1.14)$$

e

$$(x \cdot \nabla u)V(x)u = \operatorname{div} \left(\frac{1}{2}V(x)u^2x \right) - \frac{N}{2}V(x)u^2 - \frac{1}{2}u^2(x \cdot \nabla V(x)) \quad (1.15)$$

$$(x \cdot \nabla u)p(u) = \operatorname{div} [xP(u)] - NP(u).$$

Então, temos

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \left[g^2(u) \left((x \cdot \nabla u)\nabla u - \frac{|\nabla u|^2}{2}x \right) \right] &= 2g(u)g'(u)\nabla u \cdot \left((x \cdot \nabla u)\nabla u - \frac{|\nabla u|^2}{2}x \right) \\ &\quad + g^2(u)\operatorname{div} \left((x \cdot \nabla u)\nabla u - \frac{|\nabla u|^2}{2}x \right). \end{aligned}$$

Por esta igualdade e por (1.14), segue que

$$\begin{aligned} (x \cdot \nabla u) [g^2(u)\Delta u + g(u)g'(u)|\nabla u|^2] &= \operatorname{div} \left[g^2(u) \left((x \cdot \nabla u)\nabla u - \frac{|\nabla u|^2}{2}x \right) \right] \\ &\quad + \frac{N-2}{2}g^2(u)|\nabla u|^2 \end{aligned} \quad (1.16)$$

Usando as equações (1.13), (1.15), (1.16) e aplicando o teorema da Divergência na bola B_R , encontramos

$$\begin{aligned} & - \int_{\partial B_R} g^2(u) \left[(x \cdot \nabla u)\nabla u - \frac{|\nabla u|^2}{2}x \right] \cdot \nu d\sigma + \frac{1}{2} \int_{\partial B_R} V(x)u^2(x \cdot \nu) d\sigma \\ & - \int_{\partial B_R} P(u)(x \cdot \nu) d\sigma \\ & = \frac{N-2}{2} \int_{B_R} g^2(u)|\nabla u|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{B_R} [NV(x) + (x \cdot \nabla V(x))] u^2 dx - N \int_{B_R} P(u) dx, \end{aligned} \quad (1.17)$$

onde $d\sigma$ é a medida $(N - 1)$ -dimensional ∂B_R e $\nu(x) = x/R$ para $x \in \partial B_R$. Usando a hipótese (1.3) e o Lema 1.2.1 existe uma sequência $(R_n) \subset \mathbb{R}$ tal que $R_n \rightarrow \infty$ e

$$R_n \int_{\partial B_{R_n}} [g^2(u)|\nabla u|^2 + |V(x)|u^2 + |P(u)|] d\sigma \rightarrow 0.$$

Desta convergência e da desigualdade de Cauchy-Schwarz, obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\partial B_{R_n}} g^2(u) \left[(x \cdot \nabla u) \nabla u - \frac{|\nabla u|^2}{2} x \right] \cdot \nu d\sigma &\rightarrow 0, \quad \int_{\partial B_{R_n}} V(x) u^2 (x \cdot \nu) d\sigma \rightarrow 0 \quad \text{and} \\ \int_{\partial B_{R_n}} P(u) (x \cdot \nu) d\sigma &\rightarrow 0. \end{aligned}$$

Por outro lado, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{B_{R_n}} g^2(u) |\nabla u|^2 dx &= \int_{\mathbb{R}^N} g^2(u) |\nabla u|^2 dx, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{B_{R_n}} [NV(x) + (x \cdot \nabla V(x))] u^2 dx &= \int_{\mathbb{R}^N} [NV(x) + (x \cdot \nabla V(x))] u^2 dx \quad \text{and} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{B_{R_n}} P(u) dx &= \int_{\mathbb{R}^N} P(u) dx. \end{aligned}$$

Portanto, tomando $R = R_n$ em (1.17) e fazendo $n \rightarrow \infty$, o resultado está provado. ■

Prova do Teorema 1.0.2: Suponha que u é uma solução não-nula de (1.2) com $p(u) = |u|^{q-2}u$. Multiplicando (1.2) por u/α e integrando em \mathbb{R}^N , vem

$$\frac{1}{\alpha} \int_{\mathbb{R}^N} [g^2(u) + g'(u)g(u)u] |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{\alpha} \int_{\mathbb{R}^N} V(x) u^2 dx = \frac{1}{\alpha} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^q dx \quad (1.18)$$

Pela identidade de Pohozaev (1.4), obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} g^2(u) |\nabla u|^2 dx + \frac{N}{N-2} \int_{\mathbb{R}^N} V(x) u^2 dx + \frac{1}{N-2} \int_{\mathbb{R}^N} [x \cdot \nabla V(x)] u^2 dx = \frac{2^*}{q} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^q dx. \quad (1.19)$$

Logo, por (1.18) e (1.19), segue que

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\alpha} \int_{\mathbb{R}^N} [(\alpha - 1)g^2(u) - g'(u)g(u)u] |\nabla u|^2 dx + \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{N}{N-2} \right) \int_{\mathbb{R}^N} V(x) u^2 dx \\ - \frac{1}{N-2} \int_{\mathbb{R}^N} [x \cdot \nabla V(x)] u^2 dx = \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{2^*}{q} \right) \int_{\mathbb{R}^N} |u|^q dx. \end{aligned}$$

Por esta igualdade e usando (1.5) – (1.6), deduzimos que

$$\left(\frac{1}{\alpha} - \frac{2^*}{q} \right) \int_{\mathbb{R}^N} |u|^q dx \leq -\frac{1}{N-2} \int_{\mathbb{R}^N} \left[x \cdot \nabla V(x) + \frac{(\alpha - 1)N + 2}{\alpha} V(x) \right] u^2 dx < 0,$$

que implica $1/\alpha - 2^*/q < 0$, ou seja, $q < \alpha 2^*$. Isto conclui a prova do resultado. ■

1.3 Prova do Teorema 1.0.4

Esta seção é dedicada a prova do Teorema 1.0.4. Para fazer isto, precisamos introduzir alguns operadores apropriados para aplicar o Lema 1.1.3. Inicialmente, consideramos o operador $L : D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \rightarrow D^{-1,2}(\mathbb{R}^N)$ definido por

$$\langle L(v), \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^N} \nabla v \nabla \varphi dx + \int_{\mathbb{R}^N} V^+(x) \frac{G^{-1}(v)}{g(G^{-1}(v))} \varphi dx - \int_{\mathbb{R}^N} h(x) \varphi dx,$$

para $v, \varphi \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$,

onde $D^{-1,2}(\mathbb{R}^N)$ é o espaço dual de $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ e sua norma será denotada por $\|\cdot\|_*$. Claramente, para cada $v \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$, $L(v)$ é um operador linear. Mais ainda, por (V_0) , a desigualdade de Hölder, o Lema 1.1.1-(3) e as imersões de Sobolev, deduzimos que

$$\begin{aligned} |\langle L(v), \varphi \rangle| &\leq \|v\| \|\varphi\| + \int_{\mathbb{R}^N} V^+(x) |v| |\varphi| dx + \|h\|_{2N/(N+2)} \|\varphi\|_{2^*} \\ &\leq \|v\| \|\varphi\| + \|V^+\|_{N/2} \|v\|_{2^*} \|\varphi\|_{2^*} + \frac{1}{S^{1/2}} \|h\|_{2N/(N+2)} \|\varphi\| \\ &\leq \left(\|v\| + \frac{1}{S} \|V^+\|_{N/2} \|v\| + \frac{1}{S^{1/2}} \|h\|_{2N/(N+2)} \right) \|\varphi\|, \end{aligned}$$

para todo $\varphi \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$. Então, $L(v) \in D^{-1,2}(\mathbb{R}^N)$ para cada $v \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ e portanto L é bem definido.

Lema 1.3.1 *Sob a hipótese (V_0) , $L : D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \rightarrow D^{-1,2}(\mathbb{R}^N)$ é invertível.*

Prova: Devemos mostrar que para cada $\Psi \in D^{-1,2}(\mathbb{R}^N)$ existe um único $v_0 \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ tal que $L(v_0) = \Psi$, que é equivalente a

$$\langle L(v_0), \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^2} \nabla v_0 \nabla \varphi dx + \int_{\mathbb{R}^N} V^+(x) \frac{G^{-1}(v_0)}{g(G^{-1}(v_0))} \varphi dx - \int_{\mathbb{R}^N} h(x) \varphi dx = \langle \Psi, \varphi \rangle, \quad (1.20)$$

para todo $\varphi \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$. Para mostrar esse fato, introduzimos o funcional $I : D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \rightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$I(v) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} V^+(x) [G^{-1}(v)]^2 dx - \int_{\mathbb{R}^N} h(x) v dx - \langle \Psi, v \rangle.$$

Não é difícil verificar que I é bem definido e diferenciável com derivada dada por

$$\langle I'(v), \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^N} \nabla v \nabla \varphi dx + \int_{\mathbb{R}^N} V^+(x) \frac{G^{-1}(v)}{g(G^{-1}(v))} \varphi dx - \int_{\mathbb{R}^N} h(x) \varphi dx - \langle \Psi, \varphi \rangle$$

para $v, \varphi \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$. Além disso,

$$I(v) \geq \frac{1}{2} \|v\|^2 - \frac{1}{S^{1/2}} \|h\|_{2N/(N+2)} \|v\| - \|\Psi\|_* \|v\|,$$

que implica que I é coercivo. Pelo Lema 1.1.1-(9), segue que o funcional $\Phi(v) := \int_{\mathbb{R}^N} V^+(x)[G^{-1}(v)]^2 dx$ é convexo e é fácil ver que Φ é fortemente contínuo. Logo, Φ é fracamente semicontínuo inferiormente. Consequentemente, se $v_n \rightharpoonup v$ em $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ então

$$\begin{aligned} \liminf_{n \rightarrow \infty} I(v_n) &\geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \|v_n\|^2 + \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} V^+(x)[G^{-1}(v_n)]^2 dx \\ &\quad + \liminf_{n \rightarrow \infty} \left(- \int_{\mathbb{R}^N} h(x)v_n dx \right) + \liminf_{n \rightarrow \infty} (-\langle \Psi, v_n \rangle) \geq I(v), \end{aligned}$$

mostrando que I é fracamente semicontínuo inferiormente em $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$. Como $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ é um espaço de Hilbert, concluímos que existe $v_0 \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$I(v_0) = \inf_{v \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)} I(v).$$

Uma vez que I é diferenciável, temos $I'(v_0) = 0$ e desde que I é estritamente convexo, o ponto fixo v_0 de I é único. Portanto, existe um único $v_0 \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ satisfazendo (1.20) e o lema está provado. \blacksquare

Neste ponto, consideramos outro operador $T : D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \rightarrow D^{-1,2}(\mathbb{R}^N)$ dado por

$$\langle T(v), \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^N} V^-(x) \frac{G^{-1}(v)}{g(G^{-1}(v))} \varphi dx + \int_{\mathbb{R}^N} \frac{f(x, G^{-1}(v))}{g(G^{-1}(v))} \varphi dx, \quad v, \varphi \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N).$$

É claro que para cada $v \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$, $T(v)$ é um operador linear. O próximo resultado mostra que T está bem definido e obtemos uma estimativa para a norma de $T(v)$ para $v \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$.

Lema 1.3.2 *Suponha que (V_0) , $(g_0) - (g_2)$, (f_0) and (f_2) sejam satisfeitas. Então,*

$$\begin{aligned} |\langle T(v), \varphi \rangle| \leq & \left[\frac{1}{S} \|V^-\|_{\frac{N}{2}} \|v\| + \frac{1}{\beta S^{\frac{r}{2\alpha}}} \left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^{\frac{r}{\alpha}-1} \|k\|_{\frac{\alpha 2^*}{\alpha 2^* - r}} \|v\|^{\frac{r}{\alpha}-1} + \right. \\ & \left. + \frac{C}{\beta S^{\frac{2^*}{2}}} \left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^{2^*-1} \|v\|^{2^*-1} \right] \|\varphi\| \end{aligned}$$

para $v, \varphi \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$. Em particular,

$$\|T(v)\|_* \leq \frac{1}{S} \|V^-\|_{\frac{N}{2}} \|v\| + \frac{1}{\beta S^{\frac{r}{2\alpha}}} \left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^{\frac{r}{\alpha}-1} \|k\|_{\frac{\alpha 2^*}{\alpha 2^* - r}} \|v\|^{\frac{r}{\alpha}-1} + \frac{C}{\beta S^{\frac{2^*}{2}}} \left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^{2^*-1} \|v\|^{2^*-1}.$$

Prova: Usando a condição (f_2) , a desigualdade de Hölder e o Lema 1.1.1-(5),(6),

obtemos

$$\begin{aligned}
& |\langle T(v), \varphi \rangle| \\
& \leq \int_{\mathbb{R}^N} V^-(x) |v| |\varphi| + \int_{\mathbb{R}^N} |k(x)| \frac{|G^{-1}(v)|^{r-1}}{g(G^{-1}(v))} |\varphi| + C \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|G^{-1}(v)|^{\alpha 2^* - 1}}{g(G^{-1}(v))} |\varphi| \\
& \leq \|V^-\|_{\frac{N}{2}} \|v\|_{2^*} \|\varphi\|_{2^*} + \int_{\mathbb{R}^N} |k(x)| \frac{|G^{-1}(v)|^{\alpha-1}}{g(G^{-1}(v))} |G^{-1}(v)|^{\alpha(\frac{r}{\alpha}-1)} |\varphi| \\
& \quad + C \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|G^{-1}(v)|^{\alpha-1}}{g(G^{-1}(v))} |G^{-1}(v)|^{\alpha(2^*-1)} |\varphi| \\
& \leq \frac{1}{S} \|V^-\|_{\frac{N}{2}} \|v\| \|\varphi\| + \frac{1}{\beta} \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{r}{\alpha}-1} \int_{\mathbb{R}^N} |k(x)| |v|^{\frac{r}{\alpha}-1} |\varphi| + \frac{C}{\beta} \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{2^*-1} \int_{\mathbb{R}^N} |v|^{2^*-1} |\varphi| \\
& \leq \frac{1}{S} \|V^-\|_{\frac{N}{2}} \|v\| \|\varphi\| + \frac{1}{\beta} \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{r}{\alpha}-1} \|k\|_{\frac{\alpha 2^*}{\alpha 2^* - r}} \|v\|_{2^*}^{\frac{r}{\alpha}-1} \|\varphi\|_{2^*} + \frac{C}{\beta} \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{2^*-1} \|v\|_{2^*}^{2^*-1} \|\varphi\|_{2^*} \\
& \leq \frac{1}{S} \|V^-\|_{\frac{N}{2}} \|v\| \|\varphi\| + \frac{1}{\beta S^{\frac{r}{2\alpha}}} \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{r}{\alpha}-1} \|k\|_{\frac{\alpha 2^*}{\alpha 2^* - r}} \|v\|_{2^*}^{\frac{r}{\alpha}-1} \|\varphi\| \\
& \quad + \frac{C}{\beta S^{\frac{2^*}{2}}} \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{2^*-1} \|v\|_{2^*}^{2^*-1} \|\varphi\|,
\end{aligned}$$

provando a primeira estimativa. A segunda é imediata. \blacksquare

Agora, para aplicar o Lema 1.1.3, consideramos a seguinte ordem parcial em $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$:

$$v_1, v_2 \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N), \quad v_1 \preceq v_2 \Leftrightarrow v_1 \leq v_2 \quad \text{quase sempre em } \mathbb{R}^N. \quad (1.21)$$

É claro que $(D^{1,2}(\mathbb{R}^N), \preceq)$ é um espaço de Banach ordenado e para todo $u, v \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$, existe $\sup\{u, v\}$ e $\inf\{u, v\}$ com respeito a ordem \preceq . Mais ainda, lembrando que $v^+ = \sup\{v, 0\}$ e $v^- = -\inf\{v, 0\}$, por (1.21), v^+ e v^- são a parte positiva e negativa de v . Como $|\nabla v^\pm| \leq |\nabla v|$ quase sempre em \mathbb{R}^N , vemos que $\|v^\pm\| \leq \|v\|$. Então, $(D^{1,2}(\mathbb{R}^N), \preceq)$ é uma semicadeia de Banach que é reflexivo. Observamos também que o espaço dual $D^{-1,2}(\mathbb{R}^N)$, munido com a ordem

$$\Phi_1, \Phi_2 \in D^{-1,2}(\mathbb{R}^N), \quad \Phi_1 \triangleleft \Phi_2 \Leftrightarrow \langle \Phi_1, \varphi \rangle \leq \langle \Phi_2, \varphi \rangle, \quad \text{para todo } \varphi \in D_+^{1,2}(\mathbb{R}^N),$$

onde $D_+^{1,2}(\mathbb{R}^N) = \{v \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N); v \geq 0 \text{ quase sempre em } \mathbb{R}^N\}$ é um espaço de Banach ordenado.

Neste ponto, precisamos checar a monotonicidade dos operadores T e L^{-1} .

Lema 1.3.3 $T : (D^{1,2}(\mathbb{R}^N), \preceq) \rightarrow (D^{-1,2}(\mathbb{R}^N), \triangleleft)$ é um operador crescente.

Prova: Sejam $v_1, v_2 \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ tal que $v_1 \preccurlyeq v_2$, isto é, $v_1 \leq v_2$ quase sempre em \mathbb{R}^N . Pelo Lema 1.1.1-(7) e (f_1) , obtemos

$$\begin{aligned} \langle T(v_1), \varphi \rangle &= \int_{\mathbb{R}^N} V^-(x) \frac{G^{-1}(v_1)}{g(G^{-1}(v_1))} \varphi dx + \int_{\mathbb{R}^N} \frac{f(x, G^{-1}(v_1))}{g(G^{-1}(v_1))} \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^N} V^-(x) \frac{G^{-1}(v_2)}{g(G^{-1}(v_2))} \varphi dx + \int_{\mathbb{R}^N} \frac{f(x, G^{-1}(v_2))}{g(G^{-1}(v_2))} = \langle T(v_2), \varphi \rangle, \end{aligned}$$

para todo $\varphi \in D_+^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ e isto prova que $T(v_1) \triangleleft T(v_2)$. \blacksquare

Lema 1.3.4 *O operador $L^{-1} : (D^{-1,2}(\mathbb{R}^N), \triangleleft) \rightarrow (D^{1,2}(\mathbb{R}^N), \preccurlyeq)$ é crescente.*

Prova: Sejam $\Phi_1, \Phi_2 \in D^{-1,2}(\mathbb{R}^N)$ tal que $\Phi_1 \triangleleft \Phi_2$, isto é,

$$\langle \Phi_1, \varphi \rangle \leq \langle \Phi_2, \varphi \rangle, \quad \text{para todo } \varphi \in D_+^{1,2}(\mathbb{R}^N).$$

Sendo $v_1 = L^{-1}(\Phi_1)$ e $v_2 = L^{-1}(\Phi_2)$, para $\varphi \in D_+^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ temos $\langle L(v_1), \varphi \rangle \leq \langle L(v_2), \varphi \rangle$ e, portanto

$$0 \leq \int_{\mathbb{R}^N} (\nabla v_2 - \nabla v_1) \nabla \varphi dx + \int_{\mathbb{R}^N} V^+(x) \left[\frac{G^{-1}(v_2)}{g(G^{-1}(v_2))} - \frac{G^{-1}(v_1)}{g(G^{-1}(v_1))} \right] \varphi dx.$$

Agora, tomando $\varphi = (v_2 - v_1)^- = -\min\{v_2 - v_1, 0\} \in D_+^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ e usando o Lema 1.1.1-(7) encontramos

$$\begin{aligned} 0 &\leq -\|(v_2 - v_1)^-\|^2 - \int_{\{v_2 < v_1\}} V^+(x) \left[\frac{G^{-1}(v_2)}{g(G^{-1}(v_2))} - \frac{G^{-1}(v_1)}{g(G^{-1}(v_1))} \right] (v_2 - v_1) dx \\ &\leq -\|(v_2 - v_1)^-\|^2, \end{aligned}$$

donde concluímos que $(v_2 - v_1)^- = 0$ e assim $v_1 \leq v_2$ quase sempre em \mathbb{R}^N , isto é, $L^{-1}(\Phi_1) \preccurlyeq L^{-1}(\Phi_2)$. \blacksquare

Neste momento, definimos o operador $S : D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \rightarrow D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ por $S = L^{-1} \circ T$ e nosso objetivo é mostrar que existe uma bola em $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ invariante por S . Vamos usar a notação

$$\mathbf{B}_{D^{1,2}}[0, R] = \{v \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N) : \|v\| \leq R\}.$$

Lema 1.3.5 *Sob as hipóteses do Teorema 1.0.4, existe $R_0 > 0$ e $\delta_0 > 0$ tal que se $\|h\|_{2N/(N+2)} \leq \delta_0$ então*

$$S(\mathbf{B}_{D^{1,2}}[0, R_0]) \subset \mathbf{B}_{D^{1,2}}[0, R_0].$$

Prova: Seja $v \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ e $w = S(v) = L^{-1}(T(v))$. Pelo Lema 1.1.1-(4), temos

$$\begin{aligned} \langle L(w), w \rangle &= \|w\|^2 + \int_{\mathbb{R}^N} V^+(x) \frac{G^{-1}(w)w}{g(G^{-1}(w))} dx - \int_{\mathbb{R}^N} h(x)w dx \\ &\geq \|w\|^2 - \frac{1}{S^{1/2}} \|h\|_{2N/(N+2)} \|w\|. \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} \|S(v)\|^2 &= \|w\|^2 \leq \langle L(w), w \rangle + \frac{1}{S^{1/2}} \|h\|_{2N/(N+2)} \|w\| \\ &\leq \langle T(v), S(v) \rangle + \frac{1}{S^{1/2}} \|h\|_{2N/(N+2)} \|S(v)\| \\ &\leq \left(\|T(v)\|_* + \frac{1}{S^{1/2}} \|h\|_{2N/(N+2)} \right) \|S(v)\|. \end{aligned}$$

Conseqüentemente, pelo Lema 1.3.2 segue que

$$\|S(v)\| \leq \frac{1}{S} \|V^-\|_{\frac{N}{2}} \|v\| + C_1 \|v\|^{\frac{r}{\alpha}-1} + C_2 \|v\|^{2^*-1} + \frac{1}{S^{1/2}} \|h\|_{2N/(N+2)},$$

onde

$$C_1 = \frac{1}{\beta S^{\frac{r}{2\alpha}}} \left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^{\frac{r}{\alpha}-1} \|k\|_{\frac{\alpha 2^*}{\alpha 2^* - r}} \quad \text{and} \quad C_2 = \frac{C}{\beta S^{\frac{2^*}{2}}} \left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^{2^*-1}.$$

Assim, se $R > 0$ e $\|v\| \leq R$ então

$$\frac{\|S(v)\|}{R} \leq \frac{1}{S} \|V^-\|_{\frac{N}{2}} + C_1 R^{\frac{r-2\alpha}{\alpha}} + C_2 R^{2^*-2} + \frac{1}{S^{1/2} R} \|h\|_{2N/(N+2)}. \quad (1.22)$$

Em seguida, escolhemos $R_0 > 0$ suficientemente pequeno tal que

$$C_1 R_0^{\frac{r-2\alpha}{\alpha}} + C_2 R_0^{2^*-2} \leq \frac{1 - S^{-1} \|V^-\|_{\frac{N}{2}}}{2}.$$

Considerando

$$\delta_0 := \frac{S^{1/2} R_0 (1 - S^{-1} \|V^-\|_{\frac{N}{2}})}{2} > 0$$

e tomando $R = R_0$ em (1.22), deduzimos que se $\|h\|_{2N/(N+2)} \leq \delta_0$ então $\frac{\|S(v)\|}{R_0} \leq 1$.

Portanto, $S(\mathbf{B}_{D^{1,2}}[0, R_0]) \subset \mathbf{B}_{D^{1,2}}[0, R_0]$ e a prova está completa. \blacksquare

Finalmente, vamos concluir a prova do Teorema 1.0.4. Pela definição do operador S e usando os Lemas 1.3.3 e 1.3.4, segue que S é crescente. Em vista do Lema 1.3.5, $\mathbf{B}_{D^{1,2}}[0, R_0]$ é invariante por S e de acordo com o Lema 1.1.3, $\mathbf{B}_{D^{1,2}}[0, R_0]$ possui a *propriedade do ponto fixo*. Portanto, existe $v \in \mathbf{B}_{D^{1,2}}[0, R_0]$ tal que $S(v) = v$. Desde que $S = L^{-1} \circ T$ temos

$$\langle L(v), w \rangle = \langle T(v), w \rangle, \quad \text{para todo } w \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$$

e por (1.10) v é uma solução fraca para o problema (1.9). Invocando o Lema 1.1.2, $u = G^{-1}(v)$ é uma solução fraca para (1.1) e o Teorema 1.0.4 está provado.

Capítulo 2

Existência de solução para um problema crítico assintoticamente periódico no plano

Neste capítulo, estabelecemos a existência de solução para o problema elíptico generalizado

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(g^2(u)\nabla u) + g(u)g'(u)|\nabla u|^2 + V(x)u = f(x, u), \\ u \in H^1(\mathbb{R}^2), u > 0 \text{ em } \mathbb{R}^2 \end{cases} \quad (2.1)$$

onde $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ é uma função de classe C^1 , o potencial $V : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ e $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ são assintoticamente periódicas no infinito com $f(x, s)$ podendo apresentar crescimento crítico exponencial.

A fim de obter existência de solução positiva para (2.1), vamos usar métodos variacionais. A escolha do método está muito relacionada ao comportamento de $V(x)$ e $f(x, s)$.

Motivados por trabalhos como [18] e [21], assumimos as seguintes hipóteses (já mencionadas na Introdução) sobre a função g :

(g_0) $g \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$ é uma função par, $g'(s) \geq 0$ para todo $s \geq 0$ e $g(0) = 1$;

(g_1) $(\alpha - 1)g(s) \geq g'(s)s$ para todo $s \geq 0$ e para alguma constante $\alpha \geq 1$;

(g_2) $\lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{g(s)}{s^{\alpha-1}} =: \beta > 0$.

Por (g_2), dado $\varepsilon > 0$ existem constantes positiva M_ε e β_ε tais que $g^2(s) \leq M_\varepsilon + \beta_\varepsilon s^{2\alpha-2}$, para todo $s \in [0, +\infty)$. Em particular, para $\varepsilon = 1$ existe uma constante $M_1 > 0$ tal

que

$$g^2(s) \leq M_1 + \beta_1 s^{2\alpha-2}, \quad \text{para todo } s \in [0, +\infty), \quad (2.2)$$

onde $\beta_1 = (\beta + 1)^2 > 0$.

Alguns exemplos típicos de equações que se enquadram nas hipóteses acima são

$$-\Delta u + V(x)u - \Delta(u^2)u = f(x, u) \quad \text{em } \mathbb{R}^2$$

e

$$-\Delta u + V(x)u - \gamma \Delta(u^{2\gamma})u^{2\gamma-2}u = f(x, u) \quad \text{em } \mathbb{R}^2$$

que surgem quando substituimos $g^2(s) = 1 + 2s^2$ e $g^2(s) = 1 + 2\gamma^2(s^2)^{2\gamma-1}$ ($\gamma > 1/2$) em (2.1), respectivamente. Em \mathbb{R}^2 , tais problemas já foram exaustivamente estudados por diversos autores sob os mais variados tipos de hipóteses sobre o potencial V e a não-linearidade f (veja, por exemplo, [3, 6, 15, 25, 26, 31, 32, 33, 44, 47, 48, 52, 55, 56, 66, 67, 68, 71, 74]). Contudo, neste trabalho, consideramos hipóteses sobre V e f que ainda não foram exploradas para estas classes de equações quasilineares. Vejamos a seguir.

Neste capítulo supomos que o potencial V é assintoticamente periódico no infinito, isto é, assumimos a condição

(V) existe uma constante $a_0 > 0$ e uma função $V_0 \in C(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, 1-periódica em x_i , $i = 1, 2$, tal que $V_0(x) - V(x) \rightarrow 0$ quando $|x| \rightarrow +\infty$ e

$$V_0(x) \geq V(x) \geq a_0 > 0 \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}^2.$$

Esta classe de funções potenciais foi abordada, por exemplo, nos trabalhos [5, 62] onde os autores consideram uma equação semilinear e uma fracionária, respectivamente. Não conhecemos nenhum resultado a cerca de equações de Schrödinger generalizadas abordando este tipo de potencial. Como exemplo de função que satisfaz (V), podemos citar a função $V(x) = e^{-\frac{1}{|x|+1}}$, onde $a_0 = e^{-1}$ e $V_0 \equiv 1$. Vale ressaltar ainda que, com respeito as equações de Schrödinger quasilineares, temos os resultados [45, 61, 72] que também consideram um potencial assintoticamente periódico, só que mais geral (os autores trabalharam com não-linearidades subcríticas e críticas em que $N \geq 3$).

Em relação à não-linearidade f , assumimos que a mesma possui crescimento crítico exponencial, ou seja, existe $\varsigma_0 > 0$ tal que

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} f(x, s)e^{-\varsigma s^{2\alpha}} = \begin{cases} 0, & \text{para todo } \varsigma > \varsigma_0 \\ +\infty, & \text{para todo } \varsigma < \varsigma_0 \end{cases} \quad (2.3)$$

uniformemente em $x \in \mathbb{R}^2$. Destacamos novamente aqui nosso pioneirismo no sentido de que, pela primeira vez, a equação de Schrödinger generalizada é explorada com crescimento crítico exponencial. Aqui assumimos que f deva satisfazer as condições

(f_1) $f(x, s) = o(s)$ quando $s \rightarrow 0^+$, uniformemente em $x \in \mathbb{R}^2$;

(f_2) existe uma função contínua $f_0 : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, 1-periódica em x_i , $i = 1, 2$, tal que $f(x, s) \geq f_0(x, s)$ e para todo $\varepsilon > 0$, existe $\eta > 0$ tal que para $s \geq 0$ e $|x| > \eta$ vale

$$|f(x, s) - f_0(x, s)| \leq \varepsilon e^{\varsigma_0 s^{2\alpha}}, \quad \text{para todo } (x, s) \in \mathbb{R}^2 \times [0, +\infty);$$

(f_3) existe $\theta > \alpha > 0$ tal que

$$0 < 2\theta F(x, s) = 2\theta \int_0^s f(x, t) dt \leq s f_0(x, s), \quad \text{para todo } (x, s) \in \mathbb{R}^2 \times (0, +\infty);$$

(f_4) a função $f(x, s)/s^{2\alpha-1}$ é crescente para todo $s > 0$.

Em relação a condição (f_2), nos inspiramos, por exemplo, em [5, 17, 62] que também consideram $f(x, s)$ com o mesmo comportamento assintótico.

Para encontrar uma solução positiva para (2.1), colocamos $f(x, s) = 0$, para todo $(x, s) \in \mathbb{R}^2 \times (-\infty, 0]$ e $f_0(x, s) = 0$, para todo $(x, s) \in \mathbb{R}^2 \times (-\infty, 0]$.

Antes de definirmos o que venha a ser uma solução para (2.1), seja $C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ o espaço de funções infinitamente diferenciáveis com suporte compacto e $H^1(\mathbb{R}^2)$ o espaço usual de Sobolev com as normas

$$\|u\| = \left[\int_{\mathbb{R}^2} (|\nabla u|^2 + V(x)u^2) dx \right]^{1/2}, \quad \|u\|_0 = \left[\int_{\mathbb{R}^2} (|\nabla u|^2 + V_0(x)u^2) dx \right]^{1/2}$$

Tendo em vista a hipótese (V), ambas as normas acima são equivalentes à norma usual de $H^1(\mathbb{R}^2)$. Além disso, $H^1(\mathbb{R}^2)$ é um espaço de Hilbert quando equipado com um dos seguintes produtos internos:

$$\langle u, v \rangle = \int_{\mathbb{R}^2} (\nabla u \nabla v + V(x)uv) dx$$

ou

$$\langle u, v \rangle_0 = \int_{\mathbb{R}^2} (\nabla u \nabla v + V_0(x)uv) dx$$

para todo $u, v \in H^1(\mathbb{R}^2)$.

Nesse contexto, dizemos que uma função $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é uma solução fraca para o problema (2.1) se $u \in H^1(\mathbb{R}^2) \cap L_{loc}^\infty(\mathbb{R}^2)$ e para todo $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ vale

$$\int_{\mathbb{R}^2} g^2(u) \nabla u \nabla \varphi dx + \int_{\mathbb{R}^2} g(u) g'(u) |\nabla u|^2 \varphi dx + \int_{\mathbb{R}^2} V(x) u \varphi dx - \int_{\mathbb{R}^2} f(x, u) \varphi dx = 0 \quad (2.4)$$

Agora podemos enunciar o resultado principal deste capítulo.

Teorema 2.0.1 *Suponha que as hipóteses (V), (g₀)–(g₂) e (f₁)–(f₄) sejam satisfeitas. Além disso, assumimos a condição*

(f₅) *existem $\lambda > 0$ e $p > 2\theta$ tais que $F(x, s) \geq \lambda s^p$, para todo $(x, s) \in \mathbb{R}^2 \times [0, +\infty)$*

com $\lambda > \lambda_*$, onde

$$\lambda_* := \max \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{p-2}{2} \right)^{\frac{p-2}{2}} \left(\frac{4\pi(M_1 + \beta_1) + \|V\|_{L^1(B_{\sqrt{5}})}}{2} \right)^{\frac{p}{2}} \frac{2}{p\pi} \left(\frac{2\theta}{\theta - \alpha} \frac{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 c_0}{2\pi} \right)^{\frac{p-2}{2}}, \\ \frac{4\pi(M_1 + \beta_1) + M_1 \|V\|_{L^1(B_{\sqrt{5}})}}{2\pi} \end{array} \right\}$$

e as constantes M_1 e $\beta_1 > 0$ são dadas na estimativa (2.2). Então o problema (2.1) possui uma solução não-negativa.

Observação 2.0.2 *Observamos que, no caso específico $V = V_0$, $f = f_0$, o Teorema 2.0.1 claramente nos fornece uma solução para o problema periódico. De fato, para mostrar a existência de uma solução para o problema periódico, a condição (f₂) não é necessária, isto é, considerando o problema*

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(g^2(u)\nabla u) + g(u)g'(u)|\nabla u|^2 + V_0(x)u = f_0(x, u), \\ u \in H^1(\mathbb{R}^2), u \geq 0 \end{cases} \quad (2.5)$$

este tem uma solução positiva quando assumimos (f₁) e (f₃)–(f₅). A justificativa para esse fato segue similarmente à demonstração do Teorema 1.2, em [61].

As principais dificuldades no tratamento dessa classe de equações de Schrödinger são a possível falta de compacidade, o crescimento crítico exponencial e justificar que a solução encontrada é não nula. Além disso, não há um espaço de funções natural para que o funcional energia associado a (2.1) seja bem definido. Assim, para provar

o Teorema 2.0.1, como em [57], usamos uma mudança de variáveis para reformular o problema, obtendo um semilinear. À equação semilinear associamos um novo funcional energia, o qual denotamos por I , que é bem definido e diferenciável (consulte a Seção 3.1). Logo, a partir de um ponto crítico de I é possível encontrar uma solução fraca para o problema (2.1). Para encontrar pontos críticos do funcional I o caminho é o seguinte: explorar as propriedades da mudança de variáveis e uma desigualdade de Trudinger-Moser, verificar aspectos geométricos deste funcional para usar uma versão do Teorema do Passo da Montanha sem a condição de compacidade e trabalhar com sequências de Cerami.

Finalmente devemos justificar que o ponto crítico de I é não-nulo. Supomos que o mesmo seja zero. A partir de uma sequência de Cerami, podemos definir uma sequência transladada, com ajuda de uma estimativa do nível mini-max e da desigualdade de Trudinger-Moser. Em seguida, usamos esta sequência para obter um ponto crítico não trivial do funcional associada a um problema periódico. Voltamos para I e justificamos que este funcional é menor ou igual ao nível minimax do passo da montanha e que esse nível é atingido. Finalmente, empregamos uma versão local do Teorema do Passo de Montanha (Teorema 2.1.6) para obter um ponto crítico não trivial para I , donde é possível obter uma solução não negativa para (2.1).

As hipóteses (f_1) e (f_3) são condições suficientes para garantir a geometria de uma versão do teorema do passo da montanha. Além disso, (f_3) é importante para provar a limitação de sequências de Cerami (consulte Lema 2.3.1). Por sua vez, a hipótese (f_2) serve para provar resultados técnicos de convergência que são fundamentais na demonstração do Teorema 2.0.1 (consulte Lema 2.5.1). Com relação à hipótese (f_5) , essa é uma condição global da não-linearidade $f(x, s)$ que serve para obter uma estimativa crucial para o nível minimax (consulte Corolário 5.2). Com esta estimativa em mãos, é possível provar que

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 \varsigma_0 \|\nabla v_n\|_2^2 < 4\pi$$

para n suficientemente grande, onde (v_n) é uma sequência de Cerami. Essa estimativa é fundamental para chegarmos a um resultado do tipo Lions (Lema 2.3.6). Finalmente, a hipótese (f_4) é utilizada para concluir (ver Afirmação 2.5.5) a prova do Teorema 2.0.1.

2.1 Estrutura Variacional e Preliminares

Nesta seção, semelhantemente ao que foi feito no Capítulo 1, obtemos alguns resultados técnicos e estabelecemos a configuração necessária para provar o Teorema 2.0.1.

Inicialmente, observamos que formalmente (2.1) é a equação de Euler-Lagrange associada ao funcional energia

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} g^2(u) |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} V(x) u^2 dx - \int_{\mathbb{R}^2} F(x, u) dx \quad (2.6)$$

Do ponto de vista variacional, a primeira dificuldade que enfrentamos é a necessidade de encontrar uma configuração apropriada para aplicar métodos variacionais e estudar a existência de ponto crítico para J . Por exemplo, conforme citado em [15], para alguns exemplos importantes de funções g , a integral $\int_{\mathbb{R}^2} g^2(u) |\nabla u|^2 dx$ pode assumir o valor $+\infty$. Para superar essa dificuldade, seguimos a ideia usada em [57] (veja também [22]), ou seja, usamos a mudança de variáveis

$$v = G(u) = \int_0^u g(s) ds.$$

Assim, após essa mudança de variáveis, obtemos o novo funcional

$$I(v) = J(G^{-1}(u)) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} (|\nabla v|^2 + V(x)[G^{-1}(v)]^2) dx - \int_{\mathbb{R}^2} F(x, G^{-1}(v)) dx \quad (2.7)$$

que é bem definido em $H^1(\mathbb{R}^2)$ sob as hipóteses impostas sobre as funções V , g e f . No Capítulo 1 já listamos as propriedades de G^{-1} no Lema 1.1.1. A seguir fizemos um acréscimo de mais duas propriedades, fundamentais neste novo contexto.

Lema 2.1.1 *Sob as condições $(g_0) - (g_1)$, temos as seguintes propriedades:*

- (1) a função $\frac{G^{-1}(t)}{g(G^{-1}(t))t}$ é decrescente para todo $t > 0$;
- (2) a função $\frac{[G^{-1}(t)]^{2\alpha-1}}{g(G^{-1}(t))t}$ é crescente para todo $t > 0$.

Prova: Derivando a função $\frac{G^{-1}(t)}{g(G^{-1}(t))t}$ para todo $t > 0$, obtemos

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{G^{-1}(t)}{g(G^{-1}(t))t} \right) = \frac{\frac{t}{g(G^{-1}(t))} - G^{-1}(t)}{t^2} - \frac{G^{-1}(t)g'(G^{-1}(t))}{t[g(G^{-1}(t))]^3} < 0,$$

pois, pelo Lema 1.1.1-(5), temos $\frac{t}{g(G^{-1}(t))} - G^{-1}(t) < 0$ para todo $t > 0$. Assim, temos provado (1). Semelhantemente, para provar (2) derivamos a função $\frac{[G^{-1}(t)]^{2\alpha-1}}{g(G^{-1}(t))t}$ para todo $t > 0$. Temos

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{[G^{-1}(t)]^{2\alpha-1}}{g(G^{-1}(t))t} \right) = \frac{(2\alpha-1)[G^{-1}(t)]^{2\alpha-2}}{[g(G^{-1}(t))]^2 t} + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{g(G^{-1}(t))} \right) \frac{[G^{-1}(t)]^{2\alpha-1}}{t} - \frac{[G^{-1}(t)]^{2\alpha-1}}{t^2 g(G^{-1}(t))}. \quad (2.8)$$

Usando a hipótese (g_1) segue que

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{g(G^{-1}(t))} \right) = -\frac{g'(G^{-1}(t))}{[g(G^{-1}(t))]^3} \geq -\frac{\alpha-1}{G^{-1}(t)[g(G^{-1}(t))]^2}.$$

Esta última estimativa juntamente com o Lema 1.1.1-(5) aplicados a (2.8), nos fornecem

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{G^{-1}(t)}{g(G^{-1}(t))t} \right) \geq \frac{[G^{-1}(t)]^{2\alpha-2}}{t^2 g(G^{-1}(t))} \left(\frac{\alpha t}{g(G^{-1}(t))} - G^{-1}(t) \right) > 0$$

para todo $t > 0$. Isto conclui a prova do lema. \blacksquare

É fácil ver que sob as hipóteses impostas sobre V , g e f o funcional I é de classe C^1 em $H^1(\mathbb{R}^2)$ com

$$I'(v)\varphi = \int_{\mathbb{R}^2} \left(\nabla v \nabla \varphi + V(x) \frac{G^{-1}(v)}{g(G^{-1}(v))} \varphi \right) dx - \int_{\mathbb{R}^2} \frac{f(x, G^{-1}(v))}{g(G^{-1}(v))} \varphi dx, \quad (2.9)$$

para $v, \varphi \in H^1(\mathbb{R}^2)$ e, portanto aos pontos críticos de \mathcal{I} correspondem exatamente as soluções fracas da equação semilinear

$$-\Delta v + V(x) \frac{G^{-1}(v)}{g(G^{-1}(v))} = \frac{f(x, G^{-1}(v))}{g(G^{-1}(v))} \text{ em } \mathbb{R}^2. \quad (2.10)$$

De maneira semelhante, associado ao problema periódico, temos o funcional $I_0 \in C^1(H^1(\mathbb{R}^2), \mathbb{R})$, definido por

$$I_0(v) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} (|\nabla v|^2 + V_0(x)[G^{-1}(v)]^2) dx - \int_{\mathbb{R}^2} F_0(x, G^{-1}(v)) dx. \quad (2.11)$$

Observamos ainda que dados $\varepsilon > 0$, $q \geq 1$ e $\varsigma > \varsigma_0$, devido a hipótese (f_1) e o crescimento crítico exponencial de f existe uma constante $C_\varepsilon > 0$ tal que

$$|f(x, s)| \leq \varepsilon |s| + C_\varepsilon |s|^{q-1} (e^{\varsigma s^{2\alpha}} - 1), \quad (2.12)$$

para todo $(x, s) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$. Temos também, por (f_2) , que dado $\varepsilon > 0$ e $q \geq 1$, existe uma constante $\eta > 0$ tal que

$$|f(x, s) - f_0(x, s)| \leq \varepsilon |s|^q (e^{\varsigma_0 s^{2\alpha}} - 1), \quad (2.13)$$

para todo $(x, s) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ com $|s| > \eta$.

No que segue enunciamos a desigualdade de Trudinger-Moser em \mathbb{R}^2 que pode ser encontrada em [4, 10].

Lema 2.1.2 *Se $\varsigma > 0$ e $u \in H^1(\mathbb{R}^2)$, então*

$$\int_{\mathbb{R}^2} (e^{\varsigma u^2} - 1) dx < \infty. \quad (2.14)$$

Mais ainda, se $0 < \varsigma < 4\pi$ e $\|u\|_2 \leq M$, então existe uma constante positiva, que depende apenas de M e ς , tal que

$$\sup_{\|\nabla u\|_2 \leq 1} \int_{\mathbb{R}^2} (e^{\varsigma u^2} - 1) dx \leq C(\varsigma, M). \quad (2.15)$$

Em alguns argumentos, precisamos ainda do seguinte lema:

Lema 2.1.3 *Seja $\varsigma > 0$ e $r \geq 1$. Então*

$$(e^{\varsigma s^2} - 1)^r \leq e^{r\varsigma s^2} - 1, \quad \text{para todo } s \in \mathbb{R}.$$

Prova: Basta analisar os limites da função $\xi(s) = (e^{\varsigma s^2} - 1)^r / (e^{r\varsigma s^2} - 1)$ na origem e no infinito aplicando a regra de L'Hôpital. ■

A seguir, na Proposição 2.1.4, vemos que se $v \in H^1(\mathbb{R}^2)$ é um ponto crítico para o funcional I , então $u = G^{-1}(v)$ é uma solução fraca para (2.1). Portanto, para obter soluções fracas de (2.1), é suficiente procurar pontos críticos para I .

Proposição 2.1.4 (Pontos críticos de I e soluções de (2.1)) *Todo ponto crítico v de I pertence a $C_{loc}^{0,\vartheta}(\mathbb{R}^2)$ para algum $\vartheta \in (0, 1)$ e $u = G^{-1}(v)$ é uma solução fraca de (2.1).*

Prova: Todo ponto crítico v de I satisfaz a equação $-\Delta v = w$ em \mathbb{R}^2 no sentido fraco, onde

$$w(x) = \frac{1}{g(G^{-1}(v))} [f(x, G^{-1}(v)) - V(x)G^{-1}(v)].$$

A partir disso, para $t > 1$ e $R > 0$, de acordo com (2.12), usando (6) e (10) do Lema 1.1.1 e o Lema 2.1.3, para quase todo $x \in B_R \equiv B_R(0)$, obtemos

$$\begin{aligned} |w(x)|^t &\leq \left[\frac{|G^{-1}(v)|}{g(G^{-1}(v))} \right]^t \left[C_1 + C_2(e^{\varsigma[G^{-1}(v)]^{2\alpha}} - 1) + V(x) \right]^t \\ &\leq C_3 \left[1 + \left(e^{t(\frac{\alpha}{\beta})^2 \varsigma v^2} - 1 \right) + M_R^t \right], \end{aligned}$$

onde $\varsigma > \varsigma_0$ e $M_R = \sup\{V(x); x \in \overline{B_R}\}$. Pelo Lema 2.1.2 concluímos que $w \in L^t(B_R)$, para todo $t > 1$. Então, aplicando teoria de regularidade elíptica, segue que $v \in C_{loc}^{0,\vartheta}(\mathbb{R}^2)$ para algum $\vartheta \in (0, 1)$. Em particular, temos $v \in L_{loc}^\infty(\mathbb{R}^2)$. Neste ponto, a conclusão de que $u = G^{-1}(v)$ é solução fraca de (2.1) pode ser provada de modo similar a Proposição 2.2 de [53]. ■

Para concluir esta seção, apresentamos uma versão do Teorema do Passo da Montanha, que é uma consequência do Princípio Variacional de Ekeland, conforme desenvolvido em [8]. Também precisamos de uma versão local do mesmo teorema enunciado a seguir.

Teorema 2.1.5 (Teorema do Passo da Montanha) *Seja X um espaço de Banach e $\Phi \in C^1(X; \mathbb{R})$ com $\Phi(0) = 0$. Seja \mathcal{S} um subconjunto fechado de X que desconecta X . Seja $v_0 = 0$ e $v_1 \in X$ pertencentes a diferentes componentes conexas de $X \setminus \mathcal{S}$. Suponha que*

$$\inf_{\mathcal{S}} \Phi \geq \sigma > 0 \quad e \quad \Phi(v_1) \leq 0 \quad (2.16)$$

e seja

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0, 1]; X) : \gamma(0) = 0 \quad e \quad \gamma(1) = v_1\}. \quad (2.17)$$

Então

$$c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0, 1]} \Phi(\gamma(t)) \geq \sigma$$

e existe uma sequência de Cerami¹ para Φ no nível c . O número c é chamado o nível do passo da montanha de Φ .

Prova: Ver [8]. ■

Agora, apresentamos uma versão local do Teorema 2.1.5, que foi provada por Lins e Silva em [45] (veja também [35]).

Teorema 2.1.6 *Seja X um espaço de Banach real. Suponha que $\Phi \in C^1(X; \mathbb{R})$ satisfaz $\Phi(0) = 0$ e (2.16). Se existe $\gamma_0 \in \Gamma$ definido por (2.17), tal que*

$$c = \max_{t \in [0, 1]} \Phi(\gamma_0(t)) > 0,$$

então Φ possui um ponto crítico não-trivial $u \in K_c \cap \gamma_0([0, 1])$, onde K é o conjunto dos pontos críticos de Φ e $K_c = \{u \in X : u \in K, \Phi(u) = c\}$.

¹ (v_n) tal que $\Phi(v_n) \rightarrow c$ e $\|\Phi'(v_n)\|(1 + \|v_n\|)$

2.2 Propriedades Geométricas

A seguir, mostraremos que o funcional I satisfaz as condições geométricas (2.16).

Para isso, precisamos obter alguns lemas técnicos.

Lema 2.2.1 *Suponha que as hipóteses (V) e $(g_0) - (g_2)$ sejam satisfeitas. Se $v \in H^1(\mathbb{R}^2)$, $\varsigma > 0$, $t > 0$ e $\|v\|_2 \leq M$ com $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 \varsigma \|\nabla v\|_2^2 < 4\pi$, então existe $C = C(\alpha, \varsigma, M, t) > 0$ tal que*

$$\int_{\mathbb{R}^2} (e^{\varsigma |G^{-1}(v)|^{2\alpha}} - 1) |G^{-1}(v)|^t dx \leq C \|G^{-1}(v)\|^t.$$

Prova: Considere $r > 1$ perto de 1 tal que $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 r \varsigma \|\nabla v\|_2^2 < 4\pi$ e $ts \geq 2$, onde $s = r/(r-1)$. Usando o Lema 1.1.1-(6) e a desigualdade de Hölder, temos

$$\int_{\mathbb{R}^2} (e^{\varsigma |G^{-1}(v)|^{2\alpha}} - 1) |G^{-1}(v)|^t dx \leq \left[\int_{\mathbb{R}^2} \left(e^{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 \varsigma v^2} - 1 \right)^r dx \right]^{1/r} \|G^{-1}(v)\|_{ts}^t$$

e pelos Lemas 2.1.2, 2.1.3 e a imersão contínua $H^1(\mathbb{R}^2) \hookrightarrow L^{ts}(\mathbb{R}^2)$, concluimos que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} (e^{\varsigma |G^{-1}(v)|^{2\alpha}} - 1) |G^{-1}(v)|^t dx &\leq \left[\int_{\mathbb{R}^2} \left(e^{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 r \varsigma \|\nabla v\|_2^2 \left(\frac{v}{\|\nabla v\|_2}\right)^2} - 1 \right) dx \right]^{\frac{1}{r}} \|G^{-1}(v)\|_{ts}^t \\ &\leq C_1 \|G^{-1}(v)\|_{ts}^t \leq C \|G^{-1}(v)\|^t \end{aligned}$$

provando o lema. ■

Lema 2.2.2 *Suponha que a hipótese (V) seja satisfeita. Se $v \in H^1(\mathbb{R}^2)$ e $t \geq 2$, então existe $C = C(t) > 0$ tal que*

$$\int_{\mathbb{R}^2} |G^{-1}(v)|^t dx \leq C \|G^{-1}(v)\|^t.$$

Prova: Segue diretamente da imersão contínua de Sobolev $H^1(\mathbb{R}^2) \hookrightarrow L^t(\mathbb{R}^2)$, para todo $t \geq 2$. ■

Tendo em vista as últimas estimativas, podemos provar que o funcional I possui a geometria do passo da montanha. Neste sentido, para $\rho > 0$, definimos

$$S_\rho = \left\{ v \in H^1(\mathbb{R}^2) : \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla v|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^2} V(x) [G^{-1}(v)]^2 dx = \rho^2 \right\}.$$

Desde que $Q : H^1(\mathbb{R}^2) \rightarrow \mathbb{R}$ definido por

$$Q(v) = \int_{\mathbb{R}^2} \{ |\nabla v|^2 + V(x) [G^{-1}(v)]^2 \} dx$$

é um funcional contínuo, segue que S_ρ é um subconjunto que desconecta o espaço $H^1(\mathbb{R}^2)$.

Lema 2.2.3 *Suponha que (V), (g₀) e (f₁) sejam satisfeitas. Então existe ρ > 0 e σ > 0 satisfazendo*

$$I(v) \geq \sigma, \quad \text{para todo } v \in S_\rho.$$

Prova: Segue de (2.12) que dados ε > 0, t > 2 e ζ > ζ₀ existe C_ε > 0 tal que

$$|F(x, s)| \leq \frac{\varepsilon}{2}s^2 + C_\varepsilon |s|^t (e^{\zeta s^{2\alpha}} - 1), \quad \text{para todo } (x, s) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}. \quad (2.18)$$

Agora, se escolhermos ρ > 0 tal que $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 \zeta \rho^2 < 4\pi$, usando (2.18), os Lemas 2.2.1, 2.2.2, 1.1.1-(2) e a imersão contínua $H^1(\mathbb{R}^2) \hookrightarrow L^t(\mathbb{R}^2)$, obtemos

$$\begin{aligned} I(v) &\geq \frac{1}{2}Q(v) - \frac{\varepsilon}{2}C\|G^{-1}(v)\|^2 - C_1\|G^{-1}(v)\|^t \\ &\geq \left(\frac{1}{2} - \frac{\varepsilon}{2}C\right)Q(v) - C_1Q(v)^{t/2} \end{aligned}$$

Tomando $0 < \varepsilon < 1/C$ e desde que $t > 2$ e $0 < \rho < \left(\frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{4\pi}{\zeta}\right)\right)^{1/2}$ obtemos $\left(\frac{1}{2} - \frac{\varepsilon}{2}C\right)\rho^2 - C_1\rho^t > 0$. Então, considerando $\sigma = \left(\frac{1}{2} - \frac{\varepsilon}{2}C\right)\rho^2 - C_1\rho^t > 0$ concluímos que $I(v) \geq \sigma$ para todo $v \in S_\rho$. ■

Lema 2.2.4 *Suponha que (V), (g₀) – (g₂) e (f₂) – (f₃) são satisfeitas. Então existe e ∈ H¹(ℝ²) com Q(e) > ρ² tal que*

$$I(e) < 0 < \sigma \leq \inf_{v \in S_\rho} I(v).$$

Prova: Primeiro, considere φ ∈ C₀[∞](ℝ², [0, 1]) \ {0} tal que supp(φ) = $\overline{B_1}$. Por (f₂)–(f₃), existem constantes positivas C₁ e C₂ tal que

$$F(x, s) \geq C_1|s|^{2\theta} - C_2, \quad \text{para todo } (x, s) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}.$$

Então, para t > 0, temos

$$\begin{aligned} I(t\varphi) &= \frac{1}{2} \int_{\overline{B_1}} (|\nabla(t\varphi)|^2 + V(x)[G^{-1}(t\varphi)]^2) dx - \int_{\overline{B_1}} F(x, G^{-1}(t\varphi)) dx \\ &\leq \frac{t^2}{2} \int_{\overline{B_1}} (|\nabla\varphi|^2 + V(x)\varphi^2) dx - C_1 \int_{\overline{B_1}} |G^{-1}(t\varphi)|^{2\theta} dx + C_2\mu(\overline{B_1}) \\ &\leq t^2 \left[\frac{\|\varphi\|^2}{2} - C_1 \int_{\overline{B_1}} \frac{|G^{-1}(t\varphi)|^{2\theta}}{t^2} dx + \frac{C_2\mu(\overline{B_1})}{t^2} \right] \end{aligned}$$

Desde que $2\theta - 2\alpha > 0$, para $x \in \overline{B_1}$, usando o Lema 1.1.1-(7), segue que

$$\frac{|G^{-1}(t\varphi(x))|^{2\theta}}{t^2} = \left(\frac{G^{-1}(t\varphi(x))}{\sqrt[t]{t\varphi(x)}} \right)^{2\alpha} |G^{-1}(t\varphi(x))|^{2\theta-2\alpha} \varphi(x)^2 \rightarrow +\infty \quad \text{quando } t \rightarrow +\infty.$$

Então, de acordo com o Lema de Fatou, obtemos

$$\int_{\overline{B_1}} \frac{|G^{-1}(t\varphi)|^{2\theta}}{t^2} dx \rightarrow +\infty \text{ quando } t \rightarrow +\infty.$$

e portanto $I(t\varphi) \rightarrow -\infty$. Sendo $e := t\varphi$ com t suficientemente grande, a prova está finalizada. \blacksquare

2.3 Sequências de Cerami

O propósito desta seção é provar alguns resultados acerca de sequências de Cerami para o funcional I . O primeiro de tais resultados é o seguinte:

Lema 2.3.1 *Suponha que (V) , $(g_0) - (g_1)$ e (f_3) são satisfeitas. Seja (v_n) em $H^1(\mathbb{R}^2)$ tal que $I(v_n) \rightarrow c \in \mathbb{R}$ e $I'(v_n)v_n \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow +\infty$. Então (v_n) é limitada em $H^1(\mathbb{R}^2)$.*

Prova: Usando o Lema 1.1.1-(5) e (f_3) , obtemos

$$\begin{aligned} I(v_n) - \frac{\alpha}{2\theta} I'(v_n)v_n &= \left(\frac{1}{2} - \frac{\alpha}{2\theta}\right) \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla v_n|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} V(x)[G^{-1}(v_n)]^2 dx - \\ &\quad - \frac{\alpha}{2\theta} \int_{\mathbb{R}^2} V(x) \frac{G^{-1}(v_n)}{g(G^{-1}(v_n))} v_n dx - \int_{\mathbb{R}^2} F(x, G^{-1}(v_n)) dx + \\ &\quad + \frac{\alpha}{2\theta} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{f(x, G^{-1}(v_n))}{g(G^{-1}(v_n))} v_n dx \\ &\geq \left(\frac{1}{2} - \frac{\alpha}{2\theta}\right) Q(v_n) + \\ &\quad + \frac{1}{2\theta} \int_{\{G^{-1}(v_n) > 0\}} f(x, G^{-1}(v_n)) G^{-1}(v_n) - 2\theta F(x, G^{-1}(v_n)) dx \\ &\geq \left(\frac{1}{2} - \frac{\alpha}{2\theta}\right) Q(v_n). \end{aligned}$$

Desde que $I(v_n) = c + o_n(1)$ e $I'(v_n)v_n = o_n(1)$, onde $n \rightarrow +\infty$, segue que

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{\alpha}{2\theta}\right) Q(v_n) \leq c + o_n(1). \quad (2.19)$$

Como $\theta > \alpha$, encontramos uma constante positiva C tal que

$$Q(v_n) = \int_{\mathbb{R}^2} \{|\nabla v_n|^2 + V(x)[G^{-1}(v_n)]^2\} dx \leq C \quad (2.20)$$

Tendo em vista (2.19), resta mostrar que $\int_{\mathbb{R}^2} v_n^2 dx$ é limitada. Pela condição (V) e Lema 1.1.1-(8) encontramos uma constante $C_1 > 0$ tal que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} v_n^2 dx &= \int_{\{|v_n| \leq 1\}} v^2 dx + \int_{\{|v_n| > 1\}} v_n^2 dx \\ &\leq \frac{1}{C_1^2 a_0} \int_{\mathbb{R}^2} V(x)[G^{-1}(v_n)]^2 dx + \frac{1}{C_1^{2\alpha}} \int_{\mathbb{R}^2} [G^{-1}(v_n)]^{2\alpha} dx \end{aligned} \quad (2.21)$$

Agora, faremos uso da desigualdade de Gagliardo-Nirenberg (veja Kavian em [38], p. 31), que nos fornece

$$\|u\|_q \leq C(\vartheta) \|u\|_r^{1-\vartheta} \|\nabla u\|_2^\vartheta \quad (2.22)$$

para todo $u \in H^1(\mathbb{R}^2) \cap L^r(\mathbb{R}^2)$, onde $1 \leq r < \infty$, $0 < \vartheta \leq 1$ e $\frac{1}{q} = \frac{1-\vartheta}{r}$. Sendo $u = G^{-1}(v_n)$, $\vartheta = 1 - \frac{1}{\alpha}$ e $r = 2$, temos $q = 2\alpha$. Então, usando (V) e (2.22), segue que

$$\int_{\mathbb{R}^2} |G^{-1}(v_n)|^{2\alpha} dx \leq \frac{C(\vartheta)^{2\alpha}}{V_0} \left(\int_{\mathbb{R}^2} V(x) [G^{-1}(v_n)]^2 dx \right) \left(\int_{\mathbb{R}^2} |\nabla v_n|^2 dx \right)^{\alpha-1} \quad (2.23)$$

Por (2.20), (2.21) e (2.23) obtemos que $\int_{\mathbb{R}^2} v_n^2 dx$ é limitada e o lema está provado. ■

Corolário 2.3.2 *Suponha que as hipóteses (V), $(g_0) - (g_1)$ e (f_3) sejam satisfeitas. Seja (v_n) uma sequência de Cerami para I em $H^1(\mathbb{R}^2)$. Então, existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$\int_{\mathbb{R}^2} \frac{|f(x, G^{-1}(v_n))v_n|}{g(G^{-1}(v_n))} dx \leq C.$$

Prova: Pelo Lema 1.1.1-(5) e desde que $I'(v_n)v_n \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow +\infty$, temos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{f(x, G^{-1}(v_n))v_n}{g(G^{-1}(v_n))} dx &\leq \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla v_n|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^2} V(x) [G^{-1}(v_n)]^2 dx + o_n(1) \\ &\leq Q(v_n) + o_n(1) \end{aligned}$$

A limitação de $Q(v_n)$, devido ao lema anterior, finaliza a prova do corolário. ■

Lema 2.3.3 *Suponha que as hipóteses (V), $(g_0) - (g_1)$ e $(f_1) - (f_3)$ sejam satisfeitas. Seja (v_n) uma sequência de Cerami para I em $H^1(\mathbb{R}^2)$. Então, (v_n) possui uma subsequência, ainda denotada por (v_n) , tal que*

$$\frac{f(x, G^{-1}(v_n))}{g(G^{-1}(v_n))} \rightarrow \frac{f(x, G^{-1}(v))}{g(G^{-1}(v))} \quad \text{em } L^1_{loc}(\mathbb{R}^2), \quad \text{quando } n \rightarrow +\infty,$$

onde v é o limite fraco de (v_n) em $H^1(\mathbb{R}^2)$.

Prova: Dado $R > 0$ é suficiente provar que

$$\int_{B_R} \frac{|f(x, G^{-1}(v_n))|}{g(G^{-1}(v_n))} dx \rightarrow \int_{B_R} \frac{|f(x, G^{-1}(v))|}{g(G^{-1}(v))} dx \quad \text{quando } n \rightarrow +\infty.$$

Usando os Lemas 2.3.1, 1.1.1-(3) e o teorema de imersão de Rellich-Kondrachov ($H^1(\mathbb{R}^2) \hookrightarrow L^t_{loc}(\mathbb{R}^2)$ para todo $t \geq 1$), podemos assumir que $G^{-1}(v_n) \rightarrow G^{-1}(v)$ fortemente em $L^t(B_R)$ para qualquer $t \in [1, +\infty)$. Mais ainda, pelos Lemas 1.1.1-(2),(3), 2.1.2, o Corolário 2.3.2, a estimativa (2.12) e a desigualdade de Hölder,

$$|G^{-1}(v)| \in L^1(B_R), \quad \frac{f(x, G^{-1}(v))}{g(G^{-1}(v))} \in L^1(B_R) \quad \text{e} \quad \int_{\mathbb{R}^2} \frac{|f(x, G^{-1}(v_n))v_n|}{g(G^{-1}(v_n))} \leq C.$$

O resto do argumento segue os mesmos passos da prova do Lema 4.3 em [63]. ■

Lema 2.3.4 *Suponha que as hipóteses (V) , $(g_0) - (g_1)$, (f_1) e (f_3) sejam satisfeitas. Se $(v_n) \subset H^1(\mathbb{R}^2)$ é uma sequência de Cerami para I em $H^1(\mathbb{R}^2)$ tal que $v_n \rightharpoonup v$ fracamente em $H^1(\mathbb{R}^2)$, então*

$$\int_{\mathbb{R}^2} \nabla v \nabla \varphi dx + \int_{\mathbb{R}^2} \frac{V(x)G^{-1}(v)}{g(G^{-1}(v))} \varphi dx = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{f(x, G^{-1}(v))}{g(G^{-1}(v))} \varphi dx, \quad \text{para todo } \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2).$$

Prova: Basta provar que $I'(v)\varphi = 0$ para todo $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$. Note que

$$\begin{aligned} I'(v_n)\varphi - I'(v)\varphi - \int_{\mathbb{R}^2} (\nabla v_n - \nabla v) \nabla \varphi &= \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \left[\frac{G^{-1}(v_n)}{g(G^{-1}(v_n))} - \frac{G^{-1}(v)}{g(G^{-1}(v))} \right] V(x)\varphi + \int_{\mathbb{R}^2} \left[\frac{f(x, G^{-1}(v_n))}{g(G^{-1}(v_n))} - \frac{f(x, G^{-1}(v))}{g(G^{-1}(v))} \right] \varphi \end{aligned} \quad (2.24)$$

Em vista de $v_n \rightharpoonup v$ fracamente em $H^1(\mathbb{R}^2)$, temos que $v_n \rightarrow v$ em $L_{loc}^p(\mathbb{R}^2)$, com $p \geq 1$.

Então, a menos de subsequência,

$$v_n(x) \rightarrow v(x) \quad \text{quase sempre em } \mathcal{K} := \text{supp } \varphi, \quad \text{quando } n \rightarrow +\infty,$$

$$|v_n(x)| \leq |w_p(x)| \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N} \quad \text{e quase sempre em } \mathcal{K}, \quad \text{com } w_p \in L^p(\mathcal{K}).$$

Consequentemente,

$$\frac{G^{-1}(v_n)}{g(G^{-1}(v_n))} \rightarrow \frac{G^{-1}(v)}{g(G^{-1}(v))} \quad \text{quase sempre em } \mathcal{K}, \quad \text{quando } n \rightarrow +\infty.$$

Além disso, pela continuidade de V e pelo Lema 1.1.1-(2),(3) existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\frac{|V(x)G^{-1}(v_n)\varphi|}{g(G^{-1}(v_n))} \leq |V(x)v_n\varphi| \leq C|w_2|\varphi \in L^1(\mathcal{K}).$$

Usando estas estimativas, o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue e a convergência $v_n \rightharpoonup v$ em $H^1(\mathbb{R}^2)$, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^2} (\nabla v_n - \nabla v) \nabla \varphi dx \rightarrow 0 \quad \text{e} \quad \int_{\mathbb{R}^2} \left[\frac{G^{-1}(v_n)}{g(G^{-1}(v_n))} - \frac{G^{-1}(v)}{g(G^{-1}(v))} \right] V(x)\varphi dx \rightarrow 0,$$

onde $n \rightarrow +\infty$. Pelo Lema 2.3.3, temos

$$\int_{\mathbb{R}^2} \frac{f(x, G^{-1}(v_n))}{g(G^{-1}(v_n))} \varphi dx \rightarrow \int_{\mathbb{R}^2} \frac{f(x, G^{-1}(v))}{g(G^{-1}(v))} \varphi dx.$$

Assim, tomando limite em (2.24), vem

$$I'(v_n)\varphi - I'(v)\varphi \rightarrow 0, \quad \text{para todo } \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2),$$

e, como $I'(v_n) \rightarrow 0$, concluímos que $I'(v)\varphi = 0$ para todo $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$. Isto completa a demonstração do lema. ■

Agora, apresentamos um resultado do tipo Lions que aplicamos ao nosso estudo.

Lema 2.3.5 *Suponha que as hipóteses (V), $(g_0) - (g_2)$ e $(f_1) - (f_3)$ sejam satisfeitas. Seja $(v_n) \subset H^1(\mathbb{R}^2)$ uma sequência tal que $v_n \rightharpoonup 0$ fracamente em $H^1(\mathbb{R}^2)$ com $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 s_0 \|\nabla v_n\|_2^2 < 4\pi$. Se existe $r > 0$ tal que*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{y \in \mathbb{R}^2} \int_{B(y,r)} |v_n|^2 = 0 \quad (2.25)$$

então, (v_n) possui uma subsequência, ainda denotada por (v_n) , tal que

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x, G^{-1}(v_n)) G^{-1}(v_n) dx \rightarrow 0 \quad e \quad \int_{\mathbb{R}^2} F(x, G^{-1}(v_n)) dx \rightarrow 0.$$

Prova: Devido a hipótese (2.25), segue pelo Lema 4.8 de [38] que $v_n \rightarrow 0$ em $L^p(\mathbb{R}^2)$, para todo $p > 2$. Assim, pelo Lema 1.1.1-(3), obtemos a convergência

$$G^{-1}(v_n) \rightarrow 0 \quad \text{em } L^p(\mathbb{R}^2), \quad \text{para todo } p > 2. \quad (2.26)$$

Por (2.12), dado $\varepsilon > 0$ existe $C_\varepsilon > 0$ tal que

$$|f(x, G^{-1}(v_n)) G^{-1}(v_n)| \leq \varepsilon |G^{-1}(v_n)|^2 + C_\varepsilon (e^{(s_0+\varepsilon)|G^{-1}(v_n)|^{2\alpha}} - 1) |G^{-1}(v_n)|.$$

Agora, escolhemos $1 \leq t \leq 2$ tal que $t' = \frac{t}{t-1} \geq 2$. Integrando a estimativa acima, usando a desigualdade de Hölder, os Lemas 1.1.1-(3), 2.1.3 e a limitação de (v_n) , obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} |f(x, G^{-1}(v_n)) G^{-1}(v_n)| &\leq \varepsilon \int_{\mathbb{R}^2} v_n^2 + C_\varepsilon \int_{\mathbb{R}^2} (e^{(s_0+\varepsilon)|G^{-1}(v_n)|^{2\alpha}} - 1) |G^{-1}(v_n)| \\ &\leq \varepsilon C + C_\varepsilon \left[\int_{\mathbb{R}^2} (e^{t(s_0+\varepsilon)|G^{-1}(v_n)|^{2\alpha}} - 1) \right]^{1/t} \|G^{-1}(v_n)\|_{t'} \end{aligned}$$

Note que para todo n , existe $t > 1$ suficientemente perto de 1 e $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno tal que

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 t (s_0 + \varepsilon) \|\nabla v_n\|_2^2 < 4\pi.$$

De acordo com os Lemas 1.1.1-(6) e 2.1.2, chegamos a

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} |f(x, G^{-1}(v_n)) G^{-1}(v_n)| &\leq \varepsilon C + \\ &+ C_\varepsilon \left[\int_{\mathbb{R}^2} (e^{t(s_0+\varepsilon)\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 \|\nabla v_n\|_2^2 \left(\frac{v_n}{\|\nabla v_n\|_2}\right)^2} - 1) \right]^{1/t} \|G^{-1}(v_n)\|_{t'} \leq \varepsilon C + C_\varepsilon \|G^{-1}(v_n)\|_{t'} \end{aligned}$$

Portanto, a primeira convergência é obtida por (2.26) e pelo fato de $\varepsilon > 0$ poder ser escolhido arbitrariamente pequeno. A segunda convergência é feita de modo análogo.

■

Neste ponto, lembramos que o nível minimax de I é dado por

$$0 < c_m = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} I(\gamma(t))$$

onde $\Gamma = \{\gamma \in C([0, 1]; X) : \gamma(0) = 0 \text{ e } \gamma(1) = e\}$ e e foi dado no Lema 2.2.4.

Lema 2.3.6 *Suponha que as hipóteses (V), $(g_0) - (g_2)$ e $(f_1) - (f_3)$ sejam satisfeitas. Seja (v_n) uma sequência de Cerami para I em $H^1(\mathbb{R}^2)$ no nível c_m satisfazendo $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 c_0 \|\nabla v_n\|_2^2 < 4\pi$ e $v_n \rightharpoonup 0$ fracamente em $H^1(\mathbb{R}^2)$. Então existe uma sequência $(y_n) \in \mathbb{R}^2$ ($|y_n| \rightarrow +\infty$) e $R, \varepsilon > 0$ tal que*

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_{B_R(y_n)} v_n^2 > \varepsilon.$$

Prova: Suponha por contradição que

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \sup_{y \in \mathbb{R}^2} \int_{B_R(y)} v_n^2 = 0.$$

Então pelo Lema 1.1.1-(2) $\liminf_{n \rightarrow +\infty} \sup_{y \in \mathbb{R}^2} \int_{B_R(y)} |G^{-1}(v_n)|^2 = 0$. Segue pelo lema anterior que

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x, G^{-1}(v_n)) G^{-1}(v_n) dx \rightarrow 0 \text{ e } \int_{\mathbb{R}^2} F(x, G^{-1}(v_n)) dx \rightarrow 0. \quad (2.27)$$

Afirmamos que $c_m = 0$. De fato, como $I'(v_n)v_n \rightarrow 0$,

$$\int_{\mathbb{R}^2} |\nabla v_n|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^2} \frac{V(x)G^{-1}(v_n)}{g(G^{-1}(v_n))} v_n = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{f(x, G^{-1}(v_n))}{g(G^{-1}(v_n))} v_n + o_n(1).$$

Logo, pelo Lema 1.1.1-(5) temos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla v_n|^2 dx + \frac{1}{\alpha} \int_{\mathbb{R}^2} V(x)[G^{-1}(v_n)]^2 dx &\leq \int_{\mathbb{R}^2} \frac{f(x, G^{-1}(v_n))}{g(G^{-1}(v_n))} v_n + o_n(1) \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^2} f(x, G^{-1}(v_n)) G^{-1}(v_n) + o_n(1). \end{aligned} \quad (2.28)$$

Mais ainda, como $I(v_n) \rightarrow c_m$ obtemos

$$c_m = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla v_n|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} V(x)[G^{-1}(v_n)]^2 dx - \int_{\mathbb{R}^2} F(x, G^{-1}(v_n)) dx + o_n(1). \quad (2.29)$$

Então, por (2.27), (2.28) e (2.29), segue que $c_m = 0$. Mas isto contradiz o fato de que $c_m > 0$ e o lema está provado. ■

2.4 Estimativa do nível do passo da montanha

Nesta seção, obtemos uma estimativa para o nível do passo da montanha de I , que é crucial para o estudo das seqüências Cerami de I . Estudamos o caso em que a não-linearidade satisfaz (f_5) . Para isso, consideramos uma função $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ satisfazendo as condições

$$(\varphi_1) \quad \varphi \equiv 1 \text{ em } B_1 = B_1(0) \text{ e } \varphi \equiv 0 \text{ em } B_{\sqrt{5}}^c = B_{\sqrt{5}}^c(0);$$

$$(\varphi_2) \quad 0 \leq \varphi \leq 1 \text{ em } \mathbb{R}^2;$$

$$(\varphi_3) \quad |\nabla\varphi| \leq 1 \text{ em } \mathbb{R}^2.$$

Agora, podemos apresentar a seguinte proposição:

Proposição 2.4.1 *Suponha que (V) , $(g_0) - (g_2)$ e (f_5) sejam satisfeitas. Se*

$$\lambda > \lambda_* := \max \left\{ \left(\frac{p-2}{2} \right)^{\frac{p-2}{2}} \left(\frac{4\pi(M_1 + \beta_1) + \|V\|_{L^1(B_{\sqrt{5}})}}{2} \right)^{\frac{p}{2}} \frac{2}{p\pi} \left(\frac{2\theta}{\theta - \alpha} \frac{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 \varsigma_0}{2\pi} \right)^{\frac{p-2}{2}}, \frac{4\pi(M_1 + \beta_\varepsilon) + M_1\|V\|_{L^1(B_{\sqrt{5}})}}{2\pi} \right\},$$

onde $M_1 > 0$ e β_1 são dadas na estimativa (2.2), então

$$\max_{t \in [0,1]} I(G(t\varphi)) < \frac{(\theta - \alpha)}{\theta} \frac{\pi}{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 \varsigma_0}.$$

Prova: Desde que $G'(s) = g(s)$, por (f_5) , usando as propriedades de φ e a estimativa (2.2), temos

$$\begin{aligned} I(G(t\varphi)) &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} (|\nabla(G(t\varphi))|^2 + V(x)t^2\varphi^2) - \int_{\mathbb{R}^2} F(x, t\varphi) \\ &\leq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} g^2(t\varphi)t^2|\nabla\varphi|^2 + \frac{t^2}{2} \int_{\mathbb{R}^2} V(x)\varphi^2 - \lambda t^p \int_{\mathbb{R}^2} |\varphi|^p \\ &\leq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} (M_1 + \beta_1 t^{2\alpha-2} \varphi^{2\alpha-2}) t^2 |\nabla\varphi|^2 + \frac{t^2}{2} \int_{\mathbb{R}^2} V(x)\varphi^2 - \lambda t^p \int_{\mathbb{R}^2} |\varphi|^p \\ &\leq \frac{M_1 t^2}{2} \int_{\mathbb{R}^2} (|\nabla\varphi|^2 + V(x)\varphi^2) + \frac{\beta_1 t^{2\alpha}}{2} \int_{B_{\sqrt{5}} \setminus B_1} |\varphi|^{2(\alpha-1)} |\nabla\varphi|^2 - \lambda t^p \int_{\mathbb{R}^2} |\varphi|^p \\ &\leq \left(2\pi + \frac{\|V\|_{L^1(B_{\sqrt{5}})}}{2} \right) M_1 t^2 + 2\pi\beta_1 t^{2\alpha} - \lambda t^p, \quad \text{para todo } t \geq 0 \end{aligned} \tag{2.30}$$

que implica

$$\max_{t \in [0,1]} I(G(t\varphi)) \leq \max_{t \in [0,1]} \left[\left(2\pi + \frac{\|V\|_{L^1(B_{\sqrt{5}})}}{2} \right) M_1 t^2 + 2\pi\beta_1 t^{2\alpha} - \lambda\pi t^p \right].$$

Como $\alpha > 1$, temos

$$\left(2\pi + \frac{\|V\|_{L^1(B_{\sqrt{5}})}}{2} \right) M_1 t^2 + 2\pi\beta_1 t^{2\alpha} - \lambda\pi t^p \leq \left(2\pi M_1 + \frac{M_1\|V\|_{L^1(B_{\sqrt{5}})}}{2} + 2\pi\beta_1 \right) t^2 - \lambda\pi t^p$$

para $t \in [0, 1]$. Note que o máximo da função

$$H(t) = \left(2\pi M_1 + \frac{M_1\|V\|_{L^1(B_{\sqrt{5}})}}{2} + 2\pi\beta_1 \right) t^2 - \lambda\pi t^p$$

para $t \geq 0$ ocorre no ponto

$$t_* = \left(2\pi M_1 + \frac{M_1\|V\|_{L^1(B_{\sqrt{5}})}}{2} + 2\pi\beta_1 \right)^{\frac{1}{p-2}} \left(\frac{2}{\lambda p \pi} \right)^{\frac{1}{p-2}}$$

e $t_* \in [0, 1]$ sempre que

$$\lambda > \left(\frac{4\pi(M_1 + \beta_1) + M_1\|V\|_{L^1(B_{\sqrt{5}})}}{2\pi} \right) \frac{2}{p}.$$

Como

$$\lambda > \frac{4\pi(M_1 + \beta_1) + M_1\|V\|_{L^1(B_{\sqrt{5}})}}{2\pi} > \left(\frac{4\pi(M_1 + \beta_1) + M_1\|V\|_{L^1(B_{\sqrt{5}})}}{2\pi} \right) \frac{2}{p}$$

pois $2/p < 1$ então, de fato, $t^* \in [0, 1]$. Assim, calculando o máximo de $H(t)$, encontramos

$$\begin{aligned} \max_{t \in [0,1]} I(G(t\varphi)) &\leq \left(\frac{2}{p} \right)^{\frac{2}{p-2}} \left(\frac{p-2}{p} \right) \left(2\pi M_1 + \frac{M_1\|V\|_{L^1(B_{\sqrt{5}})}}{2} + 2\pi\beta_1 \right)^{\frac{p}{p-2}} \left(\frac{1}{\pi\lambda} \right)^{\frac{2}{p-2}} \\ &< \frac{(\theta - \alpha)}{\theta} \frac{\pi}{\left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^2 \varsigma_0} \end{aligned}$$

desde que

$$\lambda > \left(\frac{p-2}{p} \right)^{\frac{p-2}{2}} \left(\frac{4\pi(M_1 + \beta_1) + M_1\|V\|_{L^1(B_{\sqrt{5}})}}{2} \right)^{\frac{p}{2}} \frac{2}{p\pi} \left(\frac{\theta}{(\theta - \alpha)} \frac{\left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^2 \varsigma_0}{\pi} \right)^{\frac{p-2}{2}}.$$

A proposição está provada. ■

Como consequência desse resultado temos

Corolário 2.4.2 *Se (V) , $(g_0) - (g_2)$ e (f_5) são satisfeitas, então*

$$c_m < \frac{(\theta - \alpha)}{\theta} \frac{\pi}{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 \varsigma_0}$$

Prova: Por (2.30) temos $I(G(t\varphi)) \rightarrow -\infty$ quando $t \rightarrow +\infty$. Sem perda de generalidade, podemos assumir que $G(\varphi) = e$. De fato, como

$$\lambda > \frac{4\pi(M_1 + \beta_1) + M_1\|V\|_{L^1(B_{\sqrt{5}})}}{2\pi},$$

segue por (2.30) que

$$I(G(\varphi)) \leq \left(2\pi + \frac{\|V\|_{L^1(B_{\sqrt{5}})}}{2}\right) M_1 + 2\pi\beta_1 - \lambda\pi < 0.$$

Agora, definimos $\hat{\gamma} : [0, 1] \rightarrow H^1(\mathbb{R}^2)$ por $\hat{\gamma}(t) = G(t\varphi)$. Observe que $\hat{\gamma} \in \Gamma$. Então pela proposição anterior,

$$c_m = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0, 1]} I(\gamma(t)) \leq \max_{t \in [0, 1]} I(\hat{\gamma}(t)) = \max_{t \in [0, 1]} I(G(t\varphi)) < \frac{(\theta - \alpha)}{\theta} \frac{\pi}{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 \varsigma_0},$$

o que finaliza a prova. ■

2.5 Prova do Teorema 2.0.1

Inicialmente, precisamos do seguinte lema para provar o Teorema 2.0.1:

Lema 2.5.1 *Assuma que (V) , $(g_0) - (g_2)$ e (f_2) são satisfeitas. Seja $(v_n) \subset H^1(\mathbb{R}^2)$ tal que $v_n \rightarrow 0$ e suponha que $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 \varsigma_0 \|\nabla v_n\|_2^2 < 4\pi$. Então, para $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ temos*

$$(1) \int_{\mathbb{R}^2} [f_0(x, G^{-1}(v_n)) - f(x, G^{-1}(v_n))] G^{-1}(v_n) dx \rightarrow 0 \quad \text{quando } n \rightarrow +\infty;$$

$$(2) \int_{\mathbb{R}^2} [F_0(x, G^{-1}(v_n)) - F(x, G^{-1}(v_n))] dx \rightarrow 0 \quad \text{quando } n \rightarrow +\infty;$$

$$(3) \int_{\mathbb{R}^2} [V_0(x) - V(x)] [G^{-1}(v_n)]^2 dx \rightarrow 0 \quad \text{quando } n \rightarrow +\infty;$$

$$(4) \int_{\mathbb{R}^2} \frac{f_0(x, G^{-1}(v_n)) - f(x, G^{-1}(v_n))}{g(G^{-1}(v_n))} \varphi dx \rightarrow 0 \quad \text{quando } n \rightarrow +\infty;$$

$$(5) \int_{\mathbb{R}^2} [V_0(x) - V(x)] \frac{G^{-1}(v_n)}{g(G^{-1}(v_n))} \varphi dx \rightarrow 0 \quad \text{quando } n \rightarrow +\infty.$$

Prova: Por (2.13), dado $\varepsilon > 0$ existe $\eta > 0$ tal que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2 \setminus B_\eta(0)} |f_0(x, G^{-1}(v_n)) - f(x, G^{-1}(v_n))| |G^{-1}(v_n)| dx &\leq \\ &\leq \varepsilon \int_{\mathbb{R}^2 \setminus B_\eta(0)} \left(e^{s_0 [G^{-1}(v_n)]^{2\alpha}} - 1 \right) |G^{-1}(v_n)| dx. \end{aligned}$$

Então, considere $r_1 > 1$ suficientemente perto de 1 tal que $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 r_1 s_0 \|\nabla v_n\|_2^2 < 4\pi$ e $r_2 > 1$ tal que $1/r_1 + 1/r_2 = 1$. Então, pelos Lemas 1.1.1-(2),(3),(6), 2.1.2 e 2.1.3, as estimativas (2.13) e (2.15), a desigualdade de Hölder e a limitação de $(v_n) \subset H^1(\mathbb{R}^2)$, encontramos uma constante $C > 0$ tal que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2 \setminus B_\eta(0)} |f_0(x, G^{-1}(v_n)) - f(x, G^{-1}(v_n))| |G^{-1}(v_n)| dx &\leq \\ &\leq \varepsilon \int_{\mathbb{R}^2 \setminus B_\eta(0)} \left(e^{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 s_0 v_n^2} - 1 \right) |v_n| dx \\ &\leq \varepsilon \left[\int_{\mathbb{R}^2} \left(e^{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 r_1 s_0 \|\nabla v_n\|_2^2 \left(\frac{v_n}{\|\nabla v_n\|_2}\right)^2} - 1 \right) dx \right]^{\frac{1}{r_1}} \|v_n\|_{r_2} \\ &\leq C\varepsilon. \end{aligned} \tag{2.31}$$

donde segue que

$$\int_{\mathbb{R}^2 \setminus B_\eta(0)} |f_0(x, G^{-1}(v_n)) - f(x, G^{-1}(v_n))| |G^{-1}(v_n)| dx \rightarrow 0 \text{ quando } n \rightarrow \infty. \tag{2.32}$$

De modo análogo a estimativa anterior, mas agora usando a estimativa (2.12) no lugar de (2.13) e (f_2) ($f(x, s) \geq f_0(x, s)$), obtemos

$$\begin{aligned} \int_{B_\eta(0)} |f_0(x, G^{-1}(v_n)) - f(x, G^{-1}(v_n))| |G^{-1}(v_n)| dx &\leq \\ &\leq 2\varepsilon \int_{B_\eta(0)} [G^{-1}(v_n)]^2 dx + 2C_\varepsilon \int_{B_\eta(0)} \left(e^{s_0 [G^{-1}(v_n)]^{2\alpha}} - 1 \right) |G^{-1}(v_n)| dx. \end{aligned}$$

donde,

$$\begin{aligned} \int_{B_\eta(0)} |f_0(x, G^{-1}(v_n)) - f(x, G^{-1}(v_n))| |G^{-1}(v_n)| dx &\leq \\ &\leq 2\varepsilon \|v_n\|_2^2 + 2C_\varepsilon \left[\int_{\mathbb{R}^2} \left(e^{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 r_1 s_0 \|\nabla v_n\|_2^2 \left(\frac{v_n}{\|\nabla v_n\|_2}\right)^2} - 1 \right) dx \right]^{\frac{1}{r_1}} \left[\int_{B_\eta(0)} |v_n|^{r_2} dx \right]^{\frac{1}{r_2}} \\ &\leq 2C\varepsilon + 2\widetilde{C}_\varepsilon \left[\int_{B_\eta(0)} |v_n|^{r_2} dx \right]^{\frac{1}{r_2}} \end{aligned} \tag{2.33}$$

Pelo teorema de imersão de Rellich-Kondrachov temos $\|v_n\|_{L^{r_2}(B_{R_2}(0))} \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow +\infty$, donde segue que

$$\int_{B_\eta(0)} |f_0(x, G^{-1}(v_n)) - f(x, G^{-1}(v_n))| |G^{-1}(v_n)| dx \rightarrow 0 \text{ quando } n \rightarrow \infty. \quad (2.34)$$

Portanto, por (2.32) e (2.34) deduzimos (1).

Segue pela primeira parte da hipótese (f_2) que

$$|F(x, s) - F_0(x, s)| \leq |f(x, s) - f_0(x, s)| |s|$$

para todo $(x, s) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$. Então, (2) segue diretamente de (1).

Agora, vamos provar (3). Pela hipótese (V) dado $\varepsilon > 0$, existe $R > 0$ suficientemente grande tal que $V_0(x) - V(x) < \varepsilon$ para $x \in \mathbb{R}^2 \setminus B_R(0)$. Usando este fato e o Lema 1.1.1-(3), temos

$$0 \leq \int_{\mathbb{R}^2} [V_0(x) - V(x)] [G^{-1}(v_n)]^2 dx \leq C \int_{B_R(0)} v_n^2 dx + \varepsilon \int_{\mathbb{R}^2 \setminus B_R(0)} v_n^2 dx.$$

Pelo teorema de imersão de Rellich-Kondrachov temos $\|v_n\|_{L^2(B_R(0))} \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow +\infty$ e desde que $\|v_n\|_2 \leq C$ obtemos a convergência de (3).

Para provar (4) vamos usar novamente a estimativa (2.12) e a hipótese (f_2). Sendo $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$, vem

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{|f_0(x, G^{-1}(v_n)) - f(x, G^{-1}(v_n))|}{g(G^{-1}(v_n))} \varphi dx &\leq \\ &\leq 2\varepsilon \int_{\mathbb{R}^2} \frac{G^{-1}(v_n)}{g(G^{-1}(v_n))} \varphi dx + 2C_\varepsilon \int_{\text{supp}\varphi} \frac{e^{s_0[G^{-1}(v_n)]^{2\alpha}} - 1}{g(G^{-1}(v_n))} |G^{-1}(v_n)| \varphi dx. \end{aligned}$$

Logo, de modo análogo ao que foi feito para obter a estimativa (2.33), chegamos a

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{|f_0(x, G^{-1}(v_n)) - f(x, G^{-1}(v_n))|}{g(G^{-1}(v_n))} \varphi dx &\leq \\ &\leq 2\varepsilon \|\varphi\|_2 \|v_n\|_2 + C_\varepsilon \|\varphi\|_\infty \left[\int_{\mathbb{R}^2} \left(e^{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 r_1 s_0 \|\nabla v_n\|_2^2 \left(\frac{v_n}{\|\nabla v_n\|_2}\right)^2} - 1 \right) \right]^{\frac{1}{r_1}} \left[\int_{\text{supp}\varphi} |v_n|^{r_2} \right]^{\frac{1}{r_2}} \\ &\leq 2C\varepsilon \|\varphi\|_2 + \widetilde{C}_\varepsilon \|\varphi\|_\infty \left[\int_{\text{supp}\varphi} |v_n|^{r_2} \right]^{\frac{1}{r_2}}. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Novamente pelo teorema de imersão de Rellich-Kondrachov provamos (4).

Por fim, vamos justificar (5). Com ajuda do Lema 1.1.1-(2),(3) e da desigualdade de Hölder, obtemos

$$\left| \int_{\mathbb{R}^2} [V_0(x) - V(x)] \frac{G^{-1}(v_n)}{g(G^{-1}(v_n))} \varphi dx \right| \leq C \int_{\text{supp}\varphi} |v_n| \varphi dx \leq C \|\varphi\|_2 \|v_n\|_{L^2(\text{supp}\varphi)}$$

A conclusão de (5) segue da mesma forma que os itens anteriores. ■

Agora, vamos começar a prova do Teorema 2.0.1.

Pelos lemas 2.2.3 e 2.2.4, as hipóteses do Teorema 2.1.5 são verificadas. Assim, o nível minimax c_m de I é positivo e existe uma sequência de Cerami (v_n) para I no nível c_m . Aplicando o Lema 2.3.1, podemos assumir, sem perda de generalidade, que $v_n \rightharpoonup v$ fracamente em $H^1(\mathbb{R}^2)$ para algum $v \in H^1(\mathbb{R}^2)$. Pelo Lema 2.3.4, v é uma solução fraca da Equação (2.10), ou seja, $I'(v) = 0$. Logo, se $v \neq 0$ a prova está completa (a justificativa de que v é positiva é feita da mesma maneira que a afirmação 2.5.4 abaixo). Portanto para provar o Teorema 2.0.1, basta supor $v = 0$ e, a partir disto, encontrar outra solução não nula. De (2.19) e do Corolário (2.4.2), para $\lambda > \lambda_*$, obtemos

$$\frac{\theta - \alpha}{2\theta} Q(v_n) \leq c_m + o_n(1) < \frac{\theta - \alpha}{2\theta} \frac{\pi}{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 \varsigma_0} + o_n(1).$$

Então, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 \varsigma_0 \|\nabla v_n\|_2^2 < 4\pi$, para todo $n \geq n_0$. Pelo Lema 2.3.6, existe uma sequência $(y_n) \subset \mathbb{R}^2$ e $R, \varepsilon > 0$ tal que $|y_n| \rightarrow +\infty$, quando $n \rightarrow \infty$ e

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \int_{B_R(y_n)} v_n^2 \geq \varepsilon > 0, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}. \quad (2.36)$$

Sem perda de generalidade podemos assumir que $(y_n) \subset \mathbb{Z}^2$. Assim, definindo $u_n(x) = v_n(x + y_n)$, $n \in \mathbb{N}$, temos $\|u_n\|_0 = \|v_n\|_0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo, tomando uma subsequência se necessário, existe $u \in H^1(\mathbb{R}^2)$ tal que $u_n \rightharpoonup u$ fracamente em $H^1(\mathbb{R}^2)$, $u_n \rightarrow u$ fortemente em $L^p_{loc}(\mathbb{R}^2)$, $p \geq 1$ e $u_n(x) \rightarrow u(x)$ quase sempre em \mathbb{R}^2 .

Afirmção 2.5.2 u é um ponto crítico do funcional I_0 , isto é, $I'_0(u) = 0$.

Prova: De fato, pelo Lema 2.5.1-(2),(3),(4),(5) obtemos

$$\begin{aligned} |I_0(v_n) - I(v_n)| &\leq \int_{\mathbb{R}^2} |V_0(x) - V(x)| [G^{-1}(v_n)]^2 dx + \\ &+ \int_{\mathbb{R}^2} |F_0(x, G^{-1}(v_n)) - F(x, G^{-1}(v_n))| dx \rightarrow 0 \quad \text{quando } n \rightarrow +\infty \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} |I'_0(v_n)\varphi - I'(v_n)\varphi| &\leq \left| \int_{\mathbb{R}^2} [V_0(x) - V(x)] \frac{G^{-1}(v_n)}{g(G^{-1}(v_n))} \varphi \right| + \\ &+ \left| \int_{\mathbb{R}^2} \frac{f_0(x, G^{-1}(v_n)) - f(x, G^{-1}(v_n))}{g(G^{-1}(v_n))} \varphi \right| \rightarrow 0 \quad \text{quando } n \rightarrow +\infty, \end{aligned}$$

para todo $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$. Como $\overline{C_0^\infty(\mathbb{R}^2)} = H^1(\mathbb{R}^2)$ usando um argumento padrão de densidade chegamos a

$$\|I'_0(v_n) - I'(v_n)\| \rightarrow 0 \text{ quando } n \rightarrow +\infty$$

As últimas convergências implicam em

$$I_0(v_n) \rightarrow c_m \text{ e } I'_0(v_n) \rightarrow 0$$

quando $n \rightarrow +\infty$, pois $I(v_n) \rightarrow c_m$ e $I'(v_n) \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow +\infty$. A periodicidade de V_0 e f_0 nos asseguram que

$$I_0(v_n) = I_0(u_n) \text{ para todo } n \in \mathbb{N}$$

e

$$|I'_0(u_n)\varphi| \leq \|I'_0(v_n)\| \|\varphi\|.$$

Portanto $I_0(u_n) \rightarrow c_m$ e $I'_0(u_n) \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow +\infty$. Então, através do Lema 2.3.4 chegamos a $I'_0(u) = 0$. ■

Afirmção 2.5.3 $I_0(u) \leq c_m$.

Prova: Com efeito, pelo Lema 1.1.1-(5) temos

$$V_0(x) \left[[G^{-1}(s)]^2 - \frac{G^{-1}(s)}{g(G^{-1}(s))}s \right] \geq 0 \text{ para todo } s \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^2$$

e por (f_3) mais o Lema 1.1.1-(5), deduzimos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{f_0(x, G^{-1}(s))}{g(G^{-1}(s))}s - F_0(x, G^{-1}(s)) &\geq \frac{1}{2\alpha} f_0(x, G^{-1}(s))G^{-1}(s) - F_0(x, G^{-1}(s)) \\ &> \frac{1}{2\theta} f_0(x, G^{-1}(s))G^{-1}(s) - F_0(x, G^{-1}(s)) \geq 0, \end{aligned}$$

para todo $(x, s) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$. Agora, passando a uma subsequência se necessário, o Lema de Fatou nos fornece

$$\begin{aligned} c_m &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[I_0(u_n) - \frac{1}{2} I'_0(u_n)(u_n) \right] \\ &\geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^2} \left[\frac{1}{2} \frac{f_0(x, G^{-1}(u_n))}{g(G^{-1}(u_n))}u_n - F_0(x, G^{-1}(u_n)) \right] + \\ &\quad + \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^2} V_0(x) \left[[G^{-1}(u_n)]^2 - \frac{G^{-1}(u_n)}{g(G^{-1}(u_n))}u_n \right] \\ &\geq \int_{\mathbb{R}^2} \left[\frac{1}{2} \frac{f_0(x, G^{-1}(u))}{g(G^{-1}(u))}u - F_0(x, G^{-1}(u)) \right] + \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^2} V_0(x) \left[[G^{-1}(u)]^2 - \frac{G^{-1}(u)}{g(G^{-1}(u))}u \right] = I_0(u) - \frac{1}{2} I'_0(u)u = I_0(u), \end{aligned}$$

provando nossa afirmação. ■

Afirmação 2.5.4 A função u é positiva em \mathbb{R}^2 .

Prova: De fato, como $I_0'(u)(u^-) = 0$, onde $u^- = \max\{-u, 0\} \in H^1(\mathbb{R}^2)$, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^2} |\nabla u^-|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^2} V_0(x) \frac{G^{-1}(u)}{g(G^{-1}(u))} (-u^-) dx = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{f_0(x, G^{-1}(u))}{g(G^{-1}(u))} (-u^-) dx \leq 0$$

Por outro lado, sabemos que $\frac{G^{-1}(u)}{g(G^{-1}(u))} (-u^-) \geq 0$ e isto implica que $\int_{\mathbb{R}^2} |\nabla u^-|^2 dx = 0$. Logo, $u^- = 0$ quase sempre em \mathbb{R}^2 e portanto $u \geq 0$. A seguir, para provar que $u > 0$ em \mathbb{R}^2 , supomos que existe $x_0 \in \mathbb{R}^2$ tal que $u(x_0) = 0$. Note que a equação (2.10) pode ser escrita como

$$-\Delta u + c(x)u = V_0(x) \frac{u - G^{-1}(u)}{g(G^{-1}(u))} + \frac{f_0(x, G^{-1}(u))}{g(G^{-1}(u))} \geq 0,$$

onde $c(x) = \frac{V_0(x)}{g(G^{-1}(u(x)))} > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^2$. Lembrando que $u \in C_{loc}^{0,\gamma}(\mathbb{R}^2)$, usando o Princípio de Máximo Forte (veja o Teorema 8.19 em [30]) numa bola arbitrária centrada em x_0 , podemos concluir que $u \equiv 0$, o que é impossível. Portanto, u tem que ser estritamente positiva. ■

Afirmção 2.5.5 $I_0(u) = \max_{t \geq 0} I_0(tu)$.

Prova: Definimos a função $\eta(t) := I_0(tu)$, para $t \geq 0$. Como u é um ponto crítico de I_0 , temos $u > 0$ (veja o lema anterior). Então, podemos escrever

$$\eta'(t) = t \left\{ \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla u|^2 dx - \int_{\mathbb{R}^2} \left[\frac{f_0(x, G^{-1}(t|u|))}{g(G^{-1}(t|u|))t|u|} - \frac{V_0(x)G^{-1}(t|u|)}{g(G^{-1}(t|u|))t|u|} \right] u^2 dx \right\}.$$

Note que, para $x \in \mathbb{R}^2$ fixado, a função $\zeta : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\zeta(s) = \frac{f_0(x, G^{-1}(s))}{g(G^{-1}(s))s} - \frac{V_0(x)G^{-1}(s)}{g(G^{-1}(s))s}$$

é crescente. De fato, isto é uma consequência direta de (f_4) e do Lema 2.1.1-(1),(2) aplicados a

$$\zeta(s) = \frac{f_0(x, G^{-1}(s))}{[G^{-1}(s)]^{2\alpha-1}} \frac{[G^{-1}(s)]^{2\alpha-1}}{g(G^{-1}(s))s} + V_0(x) \left(-\frac{G^{-1}(s)}{g(G^{-1}(s))s} \right)$$

Agora observamos que $\eta'(1) = 0$ pois u é um ponto crítico de I_0 . Logo, usando o fato de $-\zeta(s)$ ser decrescente temos que $\eta'(t) > 0$ para $0 < t < 1$ e $\eta'(t) < 0$ para $t > 1$. Portanto, $I_0(u) = \eta(1) = \max_{t \geq 0} \eta(t) = \max_{t \geq 0} I_0(tu)$. ■

Consequentemente, pela Afirmação 2.5.3, (f_2) e a definição de c_m , vem

$$c_m \leq \max_{t \geq 0} I(tu) \leq \max_{t \geq 0} I_0(tu) = I_0(u) \leq c_m.$$

Isto implica que existe $\gamma \in \Gamma$ tal que $c_m = \max_{t \in [0,1]} I(\gamma(t))$. De fato, como $I(tu) \rightarrow -\infty$ quando $t \rightarrow +\infty$, sem perda de generalidade, podemos assumir que existe $t_e > 0$ tal que $t_e u = e$. Assim, definimos $\gamma : [0, 1] \rightarrow H^1(\mathbb{R}^2)$ por $\gamma(t) = tt_e u$. Note que $\gamma \in \Gamma$. Logo,

$$\max_{t \in [0,1]} I(\gamma(t)) = \max_{t \in [0,1]} I(tt_e u) = \max_{t \geq 0} I(tu) = c_m.$$

isto é, $c_m = \max_{t \in [0,1]} I(\gamma(t))$. Em vista do Teorema 2.1.6, I possui um ponto crítico não-trivial \bar{v} no nível $c_m \geq \tau > 0$. Isto juntamente com a Proposição 2.1.4 conclui a prova do Teorema 2.0.1.

Capítulo 3

Existência de solução para um problema crítico singular em dimensão dois

Neste capítulo consideramos a equação generalizada singular

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(g^2(u)\nabla u) + g(u)g'(u)|\nabla u|^2 + V(x)u = \frac{f(u)}{|x|^a}, \\ u \in H^1(\mathbb{R}^2), u > 0 \text{ em } \mathbb{R}^2 \end{cases} \quad (3.1)$$

onde $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ é uma função de classe C^1 , a função potencial $V : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é limitada inferiormente, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ possui crescimento crítico exponencial e $a \in (0, 2)$.

A fim de obter existência de solução positiva para (3.1), novamente usamos métodos variacionais.

Para comodidade do leitor, mais uma vez, mencionamos as hipóteses sobre a função g . São as seguintes:

(g_0) $g \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$ é uma função par, $g'(s) \geq 0$ para todo $s \geq 0$ e $g(0) = 1$;

(g_1) $(\alpha - 1)g(s) \geq g'(s)s$ para todo $s \geq 0$ e para alguma constante $\alpha \geq 1$;

(g_2) $\lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{g(s)}{s^{\alpha-1}} =: \beta > 0$.

Um exemplo típico de equação que se enquadra nas hipóteses acima é

$$-\Delta u + V(x)u - \gamma \Delta(u^{2\gamma})u^{2\gamma-2}u = \frac{f(u)}{|x|^a} \text{ em } \mathbb{R}^2$$

que surgem quando substituimos $g^2(s) = 1 + 2\gamma^2(s^2)^{2\gamma-1}$ ($\gamma > 1/2$) em (2.1). Tal equação foi estudada, por exemplo, em [64].

Assumimos que $V : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua satisfazendo

(V) existe uma constante $V_0 > 0$ tal que

$$V(x) \geq V_0 > 0 \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^2.$$

A condição (V) mais outras hipóteses garantem uma imersão compacta de um subespaço de $H^1(\mathbb{R}^2)$ nos espaços de Lebesgue. A ausência de hipóteses adicionais no potencial nos impõe uma dificuldade para obter compacidade. Para contornar esse empecilho, usamos uma imersão de um subespaço X de $H^1(\mathbb{R}^2)$ em $L^p(\mathbb{R}^2, |x|^{-a} dx)$, que é contínua e compacta, como pode ser encontrado no trabalho de Zang e Chen em [73]. Para mais detalhes, consulte a próxima seção.

Em relação à não-linearidade f , assumimos que a mesma pode apresentar crescimento crítico exponencial do tipo (2.3) visto no início do Capítulo 2, hipótese pioneira em equações elípticas generalizadas. Além disso, pedimos que f satisfaça as condições

(f₁) $f(s) = o(s)$ quando $s \rightarrow 0^+$;

(f₂) existe $\theta > \alpha > 0$ tal que

$$0 < 2\theta F(s) = 2\theta \int_0^s f(t) dt \leq sf(s), \text{ para todo } s \in (0, +\infty).$$

Visto que queremos encontrar solução positiva para (3.1) consideramos $f(s) = 0$, para todo $s \in (-\infty, 0]$.

Assim como no Capítulo 2, consideramos os espaços de funções $C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ e $H^1(\mathbb{R}^2)$ com norma $\|u\|_{1,2} = [\int_{\mathbb{R}^2} (|\nabla u|^2 + u^2) dx]^{1/2}$. Uma função $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é uma solução fraca do problema (3.1) se $u \in H^1(\mathbb{R}^2) \cap L_{loc}^\infty(\mathbb{R}^2)$ e para todo $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ vale

$$\int_{\mathbb{R}^2} g^2(u) \nabla u \nabla \varphi dx + \int_{\mathbb{R}^2} g(u) g'(u) |\nabla u|^2 \varphi + \int_{\mathbb{R}^2} V(x) u \varphi dx - \int_{\mathbb{R}^2} \frac{f(u)}{|x|^a} \varphi dx = 0. \quad (3.2)$$

Agora podemos enunciar o nosso resultado principal.

Teorema 3.0.1 *Suponha que as hipóteses (V), (g₀)–(g₂) e (f₁)–(f₂) sejam satisfeitas. Além disso, assumimos as condições*

(f₃) *existem constantes $s_0, M_0 > 0$ tal que*

$$F(s) \leq M_0 f(s), \text{ para todo } s \geq s_0;$$

(f_4) existe $\xi_0 > 0$ tal que

$$\liminf_{s \rightarrow +\infty} sf(s)e^{-\varsigma_0 s^{2\alpha}} \geq \xi_0 > 0.$$

Então o problema (3.1) tem uma solução positiva.

As principais dificuldades no tratamento dessa classe de equação generalizada são praticamente as mesmas já mencionadas no Capítulo 2. Assim, para provar o Teorema 2.0.1, mais uma vez, usamos uma mudança de variáveis obtendo um problema semilinear. O funcional energia, denotado por I , associado ao problema semilinear é bem definido e diferenciável em um subespaço conveniente X de $H^1(\mathbb{R}^2)$ (consulte a próxima seção). Logo, a partir de um ponto crítico de I é possível encontrar uma solução fraca para o problema (2.1). Para encontrar um ponto crítico não-trivial para o funcional I o caminho é o seguinte: verificar aspectos geométricos de I , trabalhar com sequências de Cerami, usar um resultado de compacidade do subespaço X em espaços do tipo $L^p(\mathbb{R}^2, |x|^{-a} dx)$, explorar as propriedades da mudança de variáveis juntamente com uma desigualdade singular de Trudinger-Moser (devida a [27]) e aplicar uma estimativa do nível do passo da montanha, obtida via sequências de Moser. A partir deste ponto crítico é possível obter uma solução não negativa para (3.1).

As hipóteses (f_1) e (f_2) são condições suficientes para garantir a geometria de uma versão do teorema do passo de montanha. Além disso, (f_2) é importante para provar a limitação de sequências de Cerami (consulte Lema 3.3.1). Com relação à hipótese (f_4), esta é fundamental para provar a estimativa do nível minimax contida na Proposição 3.4.1 e a hipótese (f_3) é central para a prova de uma convergência feita no Lema 3.3.4. Juntos, esses dois últimos resultados nos permitem chegar a estimativa

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 \varsigma_0 \|\nabla v_n\|_2^2 < 2\pi(2-a)$$

para n suficientemente grande, onde (v_n) é uma sequência de Cerami. Essa estimativa é fundamental para a aplicação do Corolário 3.3.7, que será usado na prova do Teorema 3.0.1 para justificar que o ponto crítico de I é diferente de zero. As condições do tipo (f_3) e (f_4) foram usadas no trabalho pioneiro de Figueiredo *et al.* em [28].

3.1 Preliminares e Estrutura Variacional

Iniciamos esta seção definindo o seguinte subespaço X de $H^1(\mathbb{R}^2)$:

$$X = \left\{ v \in H^1(\mathbb{R}^2); \int_{\mathbb{R}^2} V(x)v^2 dx < \infty \right\},$$

que é um espaço de Hilbert munido com o produto interno

$$\langle u, v \rangle_X = \int_{\mathbb{R}^2} (\nabla u \nabla v + V(x)uv) dx, \quad u, v \in X \quad (3.3)$$

e com norma correspondente $\|v\|_X = \langle v, v \rangle_X^{1/2}$. É claro que a hipótese (V) implica na continuidade da imersão $X \hookrightarrow H^1(\mathbb{R}^2)$. Mais ainda, sendo

$$L^p(\mathbb{R}^2, |x|^{-a} dx) = \left\{ u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}; u \text{ é mensurável e } \int_{\mathbb{R}^2} \frac{|u|^p}{|x|^a} dx < \infty \right\}$$

temos o seguinte resultado de imersão compacta (veja [73]):

Lema 3.1.1 *Suponha $p \geq 2$ e $a \in (0, 2)$. Então X pode ser imerso compactamente em $L^p(\mathbb{R}^2, |x|^{-a} dx)$.*

Prova: Veja Teorema 1.2 e Observação 1.3 em [73]. ■

A próxima proposição apresenta o principal resultado de compacidade do qual faremos uso.

Proposição 3.1.2 *Suponha que as hipóteses (V) e $(g_0) - (g_1)$ sejam satisfeitas. Então a aplicação $v \rightarrow G^{-1}(v)$ de X em $L^p(\mathbb{R}^2, |x|^{-a} dx)$ é compacta para $2 \leq p < \infty$.*

Prova: Seja $(v_n) \subset X$ uma sequência limitada em X . Pelo Lema 1.1.1-(2),(3) temos $\|G^{-1}(v_n)\|_X \leq \|v_n\|_X$; então, $(G^{-1}(v_n))$ é limitada em X e desde que a imersão $X \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^2, |x|^{-a} dx)$ é compacta para $2 \leq p < \infty$, a menos de subsequência, existe $w \in L^p(\mathbb{R}^2, |x|^{-a} dx)$ tal que $G^{-1}(v_n) \rightarrow w$ em $L^p(\mathbb{R}^2, |x|^{-a} dx)$, e a prova está completa. ■

Agora vamos introduzir nossa estrutura variacional. Em primeiro lugar, observamos que formalmente (3.1) é a equação de Euler-Lagrange associada ao funcional energia

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} g^2(u) |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} V(x)u^2 dx - \int_{\mathbb{R}^2} \frac{F(u)}{|x|^a} dx \quad (3.4)$$

Do ponto de vista variacional, a primeira dificuldade que surge é a de encontrar uma configuração apropriada para aplicar métodos variacionais e estudar a existência de ponto crítico para J . Por exemplo, como já foi mencionado no capítulo anterior, para alguns exemplos importantes de funções g , a integral $\int_{\mathbb{R}^2} g^2(u)|\nabla u|^2 dx$ pode assumir o valor $+\infty$. Para superar essa dificuldade usamos a mudança de variáveis

$$v = G(u) = \int_0^u g(s) ds.$$

Então, após esta mudança, obtemos o novo funcional

$$I(v) = J(G^{-1}(u)) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} (|\nabla v|^2 + V(x)[G^{-1}(v)]^2) dx - \int_{\mathbb{R}^2} \frac{F(G^{-1}(v))}{|x|^a} dx \quad (3.5)$$

que é bem definido no espaço X sob as hipóteses impostas sobre as funções V , g e f . Todas as propriedades da função G estão listadas nos Capítulos 1 e 2 (veja Lemas 1.1.1 e 2.1.1).

É fácil ver que sob as hipóteses impostas sobre V , g e f o funcional I é de classe C^1 em X com

$$I'(v)\varphi = \int_{\mathbb{R}^2} \left(\nabla v \nabla \varphi + V(x) \frac{G^{-1}(v)}{g(G^{-1}(v))} \varphi \right) dx - \int_{\mathbb{R}^2} \frac{f(G^{-1}(v))}{g(G^{-1}(v))|x|^a} \varphi dx, \quad (3.6)$$

para $v, \varphi \in X$ e, portanto aos pontos críticos de \mathcal{I} correspondem exatamente as soluções fracas da equação semilinear

$$-\Delta v + V(x) \frac{G^{-1}(v)}{g(G^{-1}(v))} = \frac{f(G^{-1}(v))}{g(G^{-1}(v))|x|^a} \quad \text{em } \mathbb{R}^2. \quad (3.7)$$

Observamos ainda que dados $\varepsilon > 0$, $q \geq 1$ e $\varsigma > \varsigma_0$, devido a hipótese (f_1) e ao crescimento crítico exponencial de f , existe uma constante $C_\varepsilon > 0$ tal que

$$|f(s)| \leq \varepsilon |s| + C_\varepsilon |s|^{q-1} (e^{\varsigma s^{2\alpha}} - 1), \quad (3.8)$$

para todo $s \in \mathbb{R}$.

A Proposição 3.1.4, no final desta seção, nos garante que se $v \in H^1(\mathbb{R}^2)$ é um ponto crítico do funcional I , então $u = G^{-1}(v)$ é uma solução fraca (3.1). Portanto, para obter solução fraca de (2.1), é suficiente buscar pontos críticos para I .

Primeiro relembremos a seguinte desigualdade de Trudinger-Moser devida a [27]:

Lema 3.1.3 *Se $\varsigma > 0$, $a \in (0, 2)$ e $u \in H^1(\mathbb{R}^2)$, então*

$$\int_{\mathbb{R}^2} \frac{(e^{\varsigma u^2} - 1)}{|x|^a} dx < \infty. \quad (3.9)$$

Mais ainda, se $0 < \varsigma < 2\pi(2 - a)$ e $\|u\|_2 \leq M$, então existe uma constante positiva, que depende apenas de M , a e ς , tal que

$$\sup_{\|\nabla u\|_2 \leq 1} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{(e^{\varsigma u^2} - 1)}{|x|^a} dx \leq C(\varsigma, a, M). \quad (3.10)$$

Proposição 3.1.4 (Pontos críticos de I e soluções de (3.1)) *Todo ponto crítico v de I pertence a $C_{loc}^{0,\vartheta}(\mathbb{R}^2)$ para algum $\vartheta \in (0, 1)$ e $u = G^{-1}(v)$ é uma solução fraca de (3.1).*

Prova: A prova segue os mesmos passos da demonstração da Proposição 2.1.4. Vejamos. Todo ponto crítico v de I satisfaz a equação $-\Delta v = w$ em \mathbb{R}^2 no sentido fraco, onde

$$w(x) = \frac{1}{g(G^{-1}(v))} \left[\frac{f(G^{-1}(v))}{|x|^a} - V(x)G^{-1}(v) \right].$$

A partir disso, para $t > 1$ e $R > 0$, de acordo com (2.12), usando (6) e (10) do Lema 1.1.1 e o Lema 2.1.3, para quase todo $x \in B_R \equiv B_R(0)$, obtemos

$$\begin{aligned} |w(x)|^t &\leq \left[\frac{|G^{-1}(v)|}{g(G^{-1}(v))} \right]^t \left[\frac{C_1}{|x|^a} + \frac{C_2}{|x|^a} (e^{\varsigma[G^{-1}(v)]^{2\alpha}} - 1) + V(x) \right]^t \\ &\leq C_3 \left[\frac{1}{|x|^{at}} + \frac{1}{|x|^{at}} \left(e^{t(\frac{\alpha}{\beta})^2 \varsigma v^2} - 1 \right) + M_R^t \right], \end{aligned}$$

onde $\varsigma > \varsigma_0$ e $M_R = \sup\{V(x); x \in \overline{B_R}\}$. Agora, considerando $t > 1$ tal que $0 < at < 2$ e usando o Lema 3.1.3 concluímos que $w \in L^t(B_R)$. Então, aplicando teoria de regularidade elíptica, segue que $v \in C_{loc}^{0,\vartheta}(\mathbb{R}^2)$ para algum $\vartheta \in (0, 1)$. Em particular, temos $v \in L_{loc}^\infty(\mathbb{R}^2)$. Neste ponto, a conclusão de que $u = G^{-1}(v)$ é solução fraca de (3.1) pode ser provada de modo similar a Proposição 2.2 de [53]. \blacksquare

3.2 Propriedades Geométricas

Em ordem, mostramos que o funcional I satisfaz as condições geométricas (2.16).

Para isso, precisamos obter alguns lemas técnicos.

Lema 3.2.1 *Suponha que as hipóteses (V) e $(g_0) - (g_2)$ sejam satisfeitas. Se $v \in X$, $\varsigma > 0$, $t > 0$ e $\|v\|_2 \leq M$ com $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 \varsigma \|\nabla v\|_2^2 < 2\pi(2 - a)$, então existe $C = C(a, \alpha, \varsigma, M, t) > 0$ tal que*

$$\int_{\mathbb{R}^2} \frac{e^{\varsigma[G^{-1}(v)]^{2\alpha}} - 1}{|x|^a} |G^{-1}(v)|^t dx \leq C \|G^{-1}(v)\|_X^t.$$

Prova: Considere $r > 1$ próximo de 1 tal que $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 r\zeta \|\nabla v\|_2^2 < 2\pi(2 - ar)$, $ar < 2$ e $ts \geq 2$, onde $s = r/(r - 1)$. Usando (6) do Lema 1.1.1 e a desigualdade de Hölder, temos

$$\int_{\mathbb{R}^2} \frac{e^{\zeta|G^{-1}(v)|^{2\alpha}} - 1}{|x|^a} |G^{-1}(v)|^t dx \leq \left[\int_{\mathbb{R}^2} \frac{\left(e^{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 \zeta v^2} - 1\right)^r}{|x|^{ar}} dx \right]^{1/r} \|G^{-1}(v)\|_{ts}^t$$

e pelos Lemas 2.1.2, 2.1.3 e as imersões contínuas $X \hookrightarrow L^{ts}(\mathbb{R}^2)$, concluímos que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{e^{\zeta|G^{-1}(v)|^{2\alpha}} - 1}{|x|^a} |G^{-1}(v)|^t dx &\leq \left[\int_{\mathbb{R}^2} \frac{e^{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 r\zeta \|\nabla v\|_2^2 \left(\frac{v}{\|\nabla v\|_2}\right)^2} - 1}{|x|^{ar}} dx \right]^{\frac{1}{r}} \|G^{-1}(v)\|_{ts}^t \\ &\leq C_1 \|G^{-1}(v)\|_{ts}^t \leq C \|G^{-1}(v)\|_X^t \end{aligned}$$

provando o lema. ■

Lema 3.2.2 *Suponha que (V) seja satisfeita. Se $v \in X$ e $t \geq 2$, então existe $C = C(t) > 0$ tal que*

$$\int_{\mathbb{R}^2} \frac{|G^{-1}(v)|^t}{|x|^a} dx \leq C \|G^{-1}(v)\|_X^t.$$

Prova: Seja $r > 1$ próximo a 1 tal que $ar < 2$ e seja $s = r/(r - 1)$. Usando a desigualdade de Hölder e a imersão contínua $X \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^2)$ para todo $2 \leq q < \infty$, temos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{|G^{-1}(v)|^t}{|x|^a} dx &\leq \int_{|x|>1} |G^{-1}(v)|^t dx + \left(\int_{|x|\leq 1} \frac{1}{|x|^{ar}} dx \right)^{1/r} \left(\int_{|x|\leq 1} |G^{-1}(v)|^{ts} dx \right)^{1/s} \\ &\leq \|G^{-1}(v)\|_t^t + C_1 \|G^{-1}(v)\|_{ts}^t \\ &\leq C \|G^{-1}(v)\|_X^t \end{aligned}$$

e a prova está finalizada. ■

Tendo em vista das últimas estimativas, podemos provar que o funcional I possui a geometria do passo da montanha. Para esse propósito, sendo $\rho > 0$, definimos

$$S_\rho = \left\{ v \in X : \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla v|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^2} V(x)[G^{-1}(v)]^2 dx = \rho^2 \right\}.$$

e

$$Q(v) = \int_{\mathbb{R}^2} \{|\nabla v|^2 + V(x)[G^{-1}(v)]^2\} dx.$$

Já sabemos que S_ρ é um subconjunto fechado que desconecta o espaço $H^1(\mathbb{R}^2)$.

Lema 3.2.3 *Suponha que (V) , (g_0) e (f_1) são satisfeitas. Então existe $\rho > 0$ e $\sigma > 0$ tal que*

$$I(v) \geq \sigma, \quad \text{para todo } v \in S_\rho.$$

Prova: Se $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 \varsigma \rho^2 < 2\pi(2-a)$, usando (2.18), o Lema 3.2.1 e 3.2.2, o Lema 1.1.1-(2) e as imersões contínuas $H^1(\mathbb{R}^2) \hookrightarrow L^t(\mathbb{R}^2)$, de modo análogo ao Lema 2.2.3, obtemos

$$I(v) \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{\varepsilon}{2}C\right) Q(v) - C_1 Q(v)^{t/2}.$$

O resto é idêntico ao que foi feito no Lema 2.2.3. ■

Lema 3.2.4 *Suponha que (V) , $(g_0) - (g_2)$ e (f_2) são satisfeitas. Então existe $e \in H^1(\mathbb{R}^2)$ com $Q(e) > \rho^2$ tal que*

$$I(e) < 0 < \sigma \leq \inf_{v \in S_\rho} I(v).$$

Prova: Análoga a prova do Lema 2.2.4. ■

3.3 Sequências de Cerami

O objetivo desta seção é estabelecer alguns resultados sobre sequências Cerami para o funcional I . O primeiro é o seguinte:

Lema 3.3.1 *Suponha que as hipóteses (V) , $(g_0) - (g_1)$ e (f_2) sejam satisfeitas. Considere (v_n) em X tal que $I(v_n) \rightarrow c \in \mathbb{R}$ e $I'(v_n)v_n \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow +\infty$. Então (v_n) é limitada em $H^1(\mathbb{R}^2)$.*

Prova: Pelo Lema 1.1.1-(5) e pela condição (f_2) , obtemos

$$\begin{aligned} I(v_n) - \frac{\alpha}{2\theta} I'(v_n)v_n &\geq \left(\frac{1}{2} - \frac{\alpha}{2\theta}\right) Q(v_n) + \\ &\quad + \frac{1}{2\theta} \int_{\{G^{-1}(v_n) > 0\}} \frac{f(G^{-1}(v_n))G^{-1}(v_n) - 2\theta F(G^{-1}(v_n))}{|x|^a} dx \\ &\geq \left(\frac{1}{2} - \frac{\alpha}{2\theta}\right) Q(v_n) \end{aligned}$$

O resto da demonstração é análoga a prova do Lema 2.3.1 do Capítulo 2. ■

Corolário 3.3.2 *Suponha que (V) , $(g_0) - (g_1)$ e (f_2) sejam satisfeitas. Considere (v_n) uma seqüência de Cerami para I em X . Então, existe uma constante $C > 0$, tal que*

$$\int_{\mathbb{R}^2} \frac{|f(G^{-1}(v_n))v_n|}{g(G^{-1}(v_n))|x|^a} dx \leq C.$$

Prova: Pelo Lema 1.1.1-(5) e desde que $I'(v_n)v_n \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow +\infty$, temos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{f(G^{-1}(v_n))v_n}{g(G^{-1}(v_n))|x|^a} dx &\leq \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla v_n|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^2} V(x)[G^{-1}(v_n)]^2 dx + o_n(1) \\ &\leq Q(v_n) + o_n(1) \end{aligned}$$

A limitação de $Q(v_n)$, garantida pelo lema anterior, finaliza a prova do corolário. ■

Lema 3.3.3 *Suponha que as hipóteses (V) , $(g_0) - (g_1)$ e $(f_1) - (f_2)$ sejam satisfeitas. Considere (v_n) uma seqüência de Cerami para I em $H^1(\mathbb{R}^2)$. Então, (v_n) possui uma subseqüência, ainda denotada por (v_n) , tal que*

$$\frac{f(G^{-1}(v_n))}{g(G^{-1}(v_n))|x|^a} \rightarrow \frac{f(G^{-1}(v))}{g(G^{-1}(v))|x|^a} \quad \text{em } L^1_{loc}(\mathbb{R}^2), \quad \text{quando } n \rightarrow +\infty,$$

onde v é o limite fraco de (v_n) em $H^1(\mathbb{R}^2)$.

Prova: A prova deste resultado é análoga a demonstração do Lema 2.3.3 do Capítulo 2. ■

Lema 3.3.4 *Suponha que as hipóteses (V) , $(g_0) - (g_1)$ e $(f_1) - (f_3)$ sejam satisfeitas. Considere (v_n) uma seqüência de Cerami para I em X . Então (v_n) possui uma subseqüência, ainda denotada por (v_n) , tal que*

$$\frac{F(G^{-1}(v_n))}{|x|^a} \rightarrow \frac{F(G^{-1}(v))}{|x|^a} \quad \text{em } L^1(\mathbb{R}^2), \quad \text{quando } n \rightarrow +\infty,$$

onde v é o limite fraco de (v_n) em $H^1(\mathbb{R}^2)$.

Prova: Pelo Lema 1.1.1-(5) e pelo Corolário 3.3.2 temos

$$\frac{1}{\alpha} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{|f(G^{-1}(v_n))G^{-1}(v_n)|}{|x|^a} dx \leq \int_{\mathbb{R}^2} \frac{|f(G^{-1}(v_n))v_n|}{g(G^{-1}(v_n))|x|^a} dx \leq C.$$

Assim, de modo similar ao Lema 3.3.3, obtemos

$$\frac{f(G^{-1}(v_n))}{|x|^a} \rightarrow \frac{f(G^{-1}(v))}{|x|^a} \quad \text{em } L^1_{loc}(\mathbb{R}^2), \quad \text{quando } n \rightarrow +\infty. \quad (3.11)$$

Em seguida, usando (f_2) e (f_3) , para cada $R > 0$, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$F(G^{-1}(v_n)) \leq C[f(G^{-1}(v_n))], \quad \text{para todo } x \in \overline{B_R}.$$

Isto juntamente com (3.11) e o teorema da convergência dominada de Lebesgue implica, a menos de subsequência, que

$$\frac{F(G^{-1}(v_n))}{|x|^a} \rightarrow \frac{F(G^{-1}(v))}{|x|^a} \text{ em } L^1(B_R), \text{ para todo } R > 0.$$

Para concluir a convergência do lema, é suficiente provar que dado $\delta > 0$, existe $R > 0$ tal que

$$\int_{B_R^c} \frac{F(G^{-1}(v_n))}{|x|^a} dx \leq \delta \text{ e } \int_{B_R^c} \frac{F(G^{-1}(v))}{|x|^a} dx \leq \delta.$$

Para isto, note que por (f_2) e (f_3) , existe uma constante $C_1 > 0$ satisfazendo

$$|F(s)| \leq C_1 |f(s)|, \text{ para todo } s \in \mathbb{R}.$$

Logo, para cada $A > 0$, obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\substack{|x|>R \\ |G^{-1}(v_n)|>A}} \frac{F(G^{-1}(v_n))}{|x|^a} dx &\leq C_1 \int_{\substack{|x|>R \\ |G^{-1}(v_n)|>A}} \frac{|f(G^{-1}(v_n))|}{|x|^a} dx \\ &\leq \frac{C_1}{A} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{|f(G^{-1}(v_n))G^{-1}(v_n)|}{|x|^a} dx. \end{aligned}$$

Como

$$\int_{\mathbb{R}^2} \frac{|f(G^{-1}(v_n))G^{-1}(v_n)|}{|x|^a} dx \leq C$$

dado $\delta > 0$, podemos escolher $A > 0$ tal que

$$\frac{C_1}{A} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{|f(G^{-1}(v_n))G^{-1}(v_n)|}{|x|^a} dx < \frac{\delta}{2}.$$

Então,

$$\int_{\substack{|x|>R \\ |G^{-1}(v_n)|>A}} \frac{F(G^{-1}(v_n))}{|x|^a} dx \leq \frac{\delta}{2}. \quad (3.12)$$

Por outro lado, desde que f possui crescimento crítico exponencial e satisfaz (f_1) e (f_2) , existe uma constante $C(A) > 0$ tal que

$$F(G^{-1}(s)) \leq C(A) |G^{-1}(s)|^2, \text{ para todo } G^{-1}(s) \in [-A, A].$$

Assim, obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\substack{|x|>R \\ |G^{-1}(v_n)| \leq A}} \frac{F(G^{-1}(v_n))}{|x|^a} dx &\leq C(A) \int_{\substack{|x|>R \\ |G^{-1}(v_n)| \leq A}} \frac{|G^{-1}(v_n)|^2}{|x|^a} dx \\ &\leq 2C(A) \int_{\mathbb{R}^2} \frac{|G^{-1}(v_n) - G^{-1}(v)|^2}{|x|^a} dx + \\ &\quad + 2C(A) \int_{|x|>R} \frac{|G^{-1}(v)|^2}{|x|^a} dx \end{aligned}$$

Então, usando que a aplicação $v \mapsto G^{-1}(v)$ de X em $L^p(\mathbb{R}^2, |x|^{-a} dx)$ é compacto para todo $p \in [2, +\infty)$, dado $\delta > 0$, podemos escolher $R > 0$ satisfazendo

$$\int_{\substack{|x|>R \\ |G^{-1}(v_n)| \leq A}} \frac{F(G^{-1}(v_n))}{|x|^a} dx \leq \frac{\delta}{2}. \quad (3.13)$$

De (3.12) e (3.13), dado $\delta > 0$, existe $R > 0$ tal que

$$\int_{|x|>R} \frac{F(G^{-1}(v_n))}{|x|^a} dx \leq \delta.$$

Analogamente, provamos que

$$\int_{|x|>R} \frac{F(G^{-1}(v))}{|x|^a} dx \leq \delta.$$

Combinando todas as estimativas acima e desde que $\delta > 0$ é arbitrário, segue que

$$\int_{\mathbb{R}^2} \frac{F(G^{-1}(v_n))}{|x|^a} dx \rightarrow \int_{\mathbb{R}^2} \frac{F(G^{-1}(v))}{|x|^a} dx, \quad \text{quando } n \rightarrow +\infty,$$

e isto completa a prova do lema. ■

Lema 3.3.5 *Suponha que as hipóteses (V), $(g_0) - (g_1)$ e $(f_1) - (f_2)$ sejam satisfeitas. Se $(v_n) \subset H^1(\mathbb{R}^2)$ é uma sequência de Cerami para I em X tal que $v_n \rightharpoonup v$ fracamente em $H^1(\mathbb{R}^2)$, então*

$$\int_{\mathbb{R}^2} \nabla v \nabla \varphi dx + \int_{\mathbb{R}^2} \frac{V(x)G^{-1}(v)}{g(G^{-1}(v))} \varphi dx = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{f(G^{-1}(v))}{g(G^{-1}(v))|x|^a} \varphi dx, \quad \text{para todo } \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2).$$

Prova: A demonstração é análoga a prova do Lema 2.3.4 do Capítulo 2. ■

Lema 3.3.6 *Suponha que (V), $(g_0) - (g_2)$ e $(f_1) - (f_2)$ sejam satisfeitas. Seja (v_n) uma sequência de Cerami para I em X tal que $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 c_0 \|\nabla v_n\|_2^2 < 2\pi(2-a)$. Então, (v_n) tem uma subsequência, ainda denotada por (v_n) , tal que*

$$\int_{\mathbb{R}^2} \frac{f(G^{-1}(v_n))(v - v_n)}{g(G^{-1}(v_n))|x|^a} dx \rightarrow 0,$$

quando $n \rightarrow +\infty$, onde v é o limite fraco da sequência (v_n) em $H^1(\mathbb{R}^2)$.

Prova: Por (3.8), dado $\varepsilon > 0$, existe uma constante $C_\varepsilon > 0$ tal que

$$\left| \frac{f(G^{-1}(v_n))(v - v_n)}{g(G^{-1}(v_n))} \right| \leq \varepsilon |G^{-1}(v_n)| |v - v_n| + C_\varepsilon [e^{(s_0+\varepsilon)|G^{-1}(v_n)|^{2\alpha}} - 1] |v - v_n|.$$

Então, pelo Lema 1.1.1-(9), temos

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\mathbb{R}^2} \frac{f(G^{-1}(v_n))(v - v_n)}{g(G^{-1}(v_n))|x|^a} dx \right| &\leq \varepsilon C_1 \int_{\mathbb{R}^2} \frac{|G^{-1}(v_n)||G^{-1}(v - v_n)|}{|x|^a} dx \\
&+ \varepsilon C_1 \int_{\mathbb{R}^2} \frac{|G^{-1}(v_n)||G^{-1}(v - v_n)|^\alpha}{|x|^a} dx + \\
&+ C_\varepsilon \int_{\mathbb{R}^2} \frac{[e^{(s_0+\varepsilon)|G^{-1}(v_n)|^{2\alpha}} - 1]|G^{-1}(v - v_n)|}{|x|^a} dx + \\
&+ C_\varepsilon \int_{\mathbb{R}^2} \frac{[e^{(s_0+\varepsilon)|G^{-1}(v_n)|^{2\alpha}} - 1]|G^{-1}(v - v_n)|^\alpha}{|x|^a} dx.
\end{aligned}$$

Pela desigualdade de Hölder e escolhendo $t > 1$ tal que $t' = t/(t-1) \geq 2$, obtemos

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\mathbb{R}^2} \frac{f(G^{-1}(v_n))(v - v_n)}{g(G^{-1}(v_n))|x|^a} dx \right| &\leq \varepsilon C_1 \left(\int_{\mathbb{R}^2} \frac{|G^{-1}(v_n)|^2}{|x|^a} dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^2} \frac{|G^{-1}(v - v_n)|^2}{|x|^a} dx \right)^{\frac{1}{2}} + \\
&+ \varepsilon C_1 \left(\int_{\mathbb{R}^2} \frac{|G^{-1}(v_n)|^2}{|x|^a} dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^2} \frac{|G^{-1}(v - v_n)|^{2\alpha}}{|x|^a} dx \right)^{\frac{1}{2}} \\
&+ C_\varepsilon \left\{ \int_{\mathbb{R}^2} \frac{[e^{t(s_0+\varepsilon)|G^{-1}(v_n)|^{2\alpha}} - 1]}{|x|^a} dx \right\}^{\frac{1}{t}} \left\{ \int_{\mathbb{R}^2} \frac{|G^{-1}(v - v_n)|^{t'}}{|x|^a} dx \right\}^{\frac{1}{t'}} \\
&+ C_\varepsilon \left\{ \int_{\mathbb{R}^2} \frac{[e^{t(s_0+\varepsilon)|G^{-1}(v_n)|^{2\alpha}} - 1]}{|x|^a} dx \right\}^{\frac{1}{t}} \left\{ \int_{\mathbb{R}^2} \frac{|G^{-1}(v - v_n)|^{\alpha t'}}{|x|^a} dx \right\}^{\frac{1}{t'}}
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Em seguida, note que existe $t > 1$ suficientemente próximo de 1, $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno e $C > 0$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^2} \frac{e^{t(s_0+\varepsilon)|G^{-1}(v_n)|^{2\alpha}} - 1}{|x|^a} dx \leq C. \tag{3.15}$$

Com efeito, podemos supor que para n suficientemente grandes existem $t > 1$, suficientemente próximo de 1, e $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno tal que $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 t(s_0 + \varepsilon) \|\nabla v_n\|_2^2 < 2\pi(2-a)$.

Logo, pelos Lemas 1.1.1-(7) e 3.1.3, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^2} \frac{e^{t(s_0+\varepsilon)|G^{-1}(v_n)|^{2\alpha}} - 1}{|x|^a} dx \leq \int_{\mathbb{R}^2} \frac{e^{t(s_0+\varepsilon)\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 \|\nabla v_n\|_2^2 \left(\frac{|v_n|}{\|\nabla v_n\|_2}\right)^2} - 1}{|x|^a} dx \leq C$$

o que justifica (3.15).

Como $G^{-1}(v_n - v)$ é uma sequência limitada em X (veja (2.20)) e para $p \in [2, +\infty)$ a imersão $X \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^2, |x|^{-a} dx)$ é compacta, a menos de subsequência, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^2} \frac{|G^{-1}(v - v_n)|^{t'}}{|x|^a} dx \rightarrow 0 \quad \text{e} \quad \int_{\mathbb{R}^2} \frac{|G^{-1}(v - v_n)|^{\alpha t'}}{|x|^a} dx \rightarrow 0.$$

Assim, usando o Lema 3.2.2 e (3.14) juntamente com (3.15) concluímos a prova do lema. ■

Neste ponto, lembramos que o nível minimax de I é dado por

$$0 < c_m = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} I(\gamma(t)) \quad (3.16)$$

onde $\Gamma = \{\gamma \in C([0,1]; X) : \gamma(0) = 0 \text{ e } \gamma(1) = e\}$ e e foi dado no Lema 3.2.4.

Como consequência do Lema 3.3.6, temos o seguinte corolário:

Corolário 3.3.7 *Suponha que (V) , $(g_0) - (g_2)$ e $(f_1) - (f_3)$ sejam satisfeitas. Seja (v_n) uma sequência de Cerami para I em X no nível c_m satisfazendo $(\alpha/\beta)^2 \varsigma_0 \|\nabla v_n\|_2^2 < 2\pi(2-a)$ e $v_n \rightarrow 0$ fracamente em X . Então $c_m = 0$, onde c_m é dado em (3.16).*

Prova: De fato, como $I'(v_n)v_n \rightarrow 0$,

$$\int_{\mathbb{R}^2} |\nabla v_n|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^2} \frac{V(x)G^{-1}(v_n)}{g(G^{-1}(v_n))} v_n = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{f(G^{-1}(v_n))}{g(G^{-1}(v_n))|x|^a} v_n + o_n(1).$$

Então, pelo Lema 1.1.1-(5) temos

$$\int_{\mathbb{R}^2} |\nabla v_n|^2 dx + \frac{1}{\alpha} \int_{\mathbb{R}^2} V(x)[G^{-1}(v_n)]^2 dx \leq \int_{\mathbb{R}^2} \frac{f(G^{-1}(v_n))}{g(G^{-1}(v_n))|x|^a} v_n + o_n(1) \quad (3.17)$$

Mais ainda, como $I(v_n) \rightarrow c_m$ obtemos

$$c_m = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla v_n|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} V(x)[G^{-1}(v_n)]^2 dx - \int_{\mathbb{R}^2} \frac{F(G^{-1}(v_n))}{|x|^a} dx + o_n(1). \quad (3.18)$$

Logo, por (3.17), (3.18) e pelos Lemas 3.3.4, 3.3.6, encontramos $c_m = 0$, como queríamos. ■

3.4 Estimativa do nível do passo da montanha

No Capítulo 2, obtemos uma estimativa para o nível do passo da montanha, que depende do número real θ da condição de Ambrosetti-Rabinowitz (ver (f_2) e (f_3) do Capítulo 2). Nesta seção, obtemos uma estimativa ainda mais precisa para o nível do passo da montanha de I , o que será crucial para estudar as sequências de Cerami para I . Estudamos o caso em que a não-linearidade satisfaz (f_4) . Para isso, sendo $r > 0$,

consideramos a sequência de Moser definida por

$$M_n(x, r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \begin{cases} \sqrt{\log n}, & \text{se } |x| \leq \frac{r}{n}, \\ \frac{\log(r/|x|)}{\sqrt{\log n}}, & \text{se } \frac{r}{n} \leq |x| \leq r, \\ 0, & \text{se } |x| > r, \end{cases}$$

que satisfaz $M_n \in H_0^1(B_r)$, $\|\nabla M_n\|_2 = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e

$$\|M_n\|_2^2 = \frac{r^2}{4 \log n} - \frac{r^2}{2n^2} - \frac{r^2}{4n^2 \log n}.$$

Proposição 3.4.1 *Suponha que as hipóteses (V), $(g_0) - (g_2)$, $(f_1) - (f_2)$ e (f_4) sejam satisfeitas. Então o nível minimax satisfaz*

$$c_m < \frac{(2-a)\pi}{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 \varsigma_0}. \quad (3.19)$$

Prova: Inicialmente, para provar (3.19), é suficiente encontrar $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\max_{t \geq 0} I(t\widetilde{M}_n) < \frac{(2-a)\pi}{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 \varsigma_0},$$

onde $\widetilde{M}_n = M_n/\|M_n\|_X$. Suponha, para efeito de contradição, que para todo $n \in \mathbb{N}$, temos

$$\max_{t \geq 0} I(t\widetilde{M}_n) \geq \frac{(2-a)\pi}{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 \varsigma_0}. \quad (3.20)$$

Tendo em vista os lemas 3.2.3 e 3.2.4, para todo $n \in \mathbb{N}$, existe $t_n > 0$ tal que

$$I(t_n\widetilde{M}_n) = \max_{t \geq 0} I(t\widetilde{M}_n). \quad (3.21)$$

Pelo Lema 1.1.1-(3), pela estimativa (3.20), pela identidade (3.21), pela condição (f_2) e como $\|\widetilde{M}_n\|_X = 1$, segue que

$$t_n^2 \geq \frac{2(2-a)\pi}{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 \varsigma_0}, \quad (3.22)$$

pois

$$\begin{aligned} \frac{t_n^2}{2} &= \frac{t_n^2}{2} \int_{\mathbb{R}^2} (|\nabla \widetilde{M}_n|^2 + V(x)\widetilde{M}_n^2) dx \\ &\geq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} \left\{ |\nabla t_n \widetilde{M}_n|^2 + V(x)[G^{-1}(t_n \widetilde{M}_n)]^2 \right\} dx - \int_{\mathbb{R}^2} \frac{F(G^{-1}(t_n \widetilde{M}_n))}{|x|^a} dx = \\ &= I(t_n \widetilde{M}_n) \geq \frac{(2-a)\pi}{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 \varsigma_0}. \end{aligned}$$

Agora, mostremos que a sequência (t_n) é limitada. Para alcançar este objetivo, lembramos que $\frac{d}{dt}I(t\widetilde{M}_n) = 0$ em $t = t_n$, isto é, $I'(t_n\widetilde{M}_n) \cdot \widetilde{M}_n = 0$. Disto, obtemos

$$t_n^2 \int_{\mathbb{R}^2} \left[|\nabla \widetilde{M}_n|^2 + t_n^{-2} V(x) \frac{G^{-1}(t_n \widetilde{M}_n)}{g(G^{-1}(t_n \widetilde{M}_n))} t_n \widetilde{M}_n \right] dx - \int_{\mathbb{R}^2} \frac{f(G^{-1}(t_n \widetilde{M}_n))}{g(G^{-1}(t_n \widetilde{M}_n)) |x|^a} t_n \widetilde{M}_n dx = 0$$

Logo, pelo Lema 1.1.1-(3),(5), (f_2) e como $\|\nabla \widetilde{M}_n\|_2 \leq 1$, segue que

$$\begin{aligned} t_n^2 &= t_n^2 \|\widetilde{M}_n\|_X \\ &= t_n^2 \int_{\mathbb{R}^2} \left[|\nabla \widetilde{M}_n|^2 + V(x) \frac{t_n^2 \widetilde{M}_n^2}{t_n^2} \right] dx \\ &\geq t_n^2 \int_{\mathbb{R}^2} \left[|\nabla \widetilde{M}_n|^2 + V(x) \frac{[G^{-1}(t_n \widetilde{M}_n)]^2}{t_n^2} \right] dx \\ &\geq t_n^2 \int_{\mathbb{R}^2} \left[|\nabla \widetilde{M}_n|^2 + V(x) \frac{G^{-1}(t_n \widetilde{M}_n) t_n \widetilde{M}_n}{t_n^2 g(G^{-1}(t_n \widetilde{M}_n))} \right] dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \frac{f(G^{-1}(t_n \widetilde{M}_n))}{g(G^{-1}(t_n \widetilde{M}_n)) |x|^a} t_n \widetilde{M}_n dx \\ &\geq \int_{B_{\frac{r}{n}}(0)} \frac{f(G^{-1}(t_n \widetilde{M}_n))}{g(G^{-1}(t_n \widetilde{M}_n)) |x|^a} t_n \widetilde{M}_n dx \\ &\geq \frac{1}{\alpha} \int_{B_{\frac{r}{n}}(0)} \frac{f(G^{-1}(t_n \widetilde{M}_n)) G^{-1}(t_n \widetilde{M}_n)}{|x|^a} dx. \end{aligned} \tag{3.23}$$

Por (f_4) , dado $\varepsilon > 0$ existe $R_\varepsilon > 0$ tal que

$$sf(s) \geq (\xi_0 - \varepsilon) e^{\xi_0 |s|^{2\alpha}}, \quad \text{para todo } s \geq R_\varepsilon. \tag{3.24}$$

Pela definição da função $M_n(x, r)$ para $|x| \leq \frac{r}{n}$, segue que $G^{-1}(t_n \widetilde{M}_n) > R_\varepsilon$ em $B_{\frac{r}{n}}(0)$, para n suficientemente grande. Usando (3.23) e (3.24), vem

$$t_n^2 \geq \frac{\xi_0 - \varepsilon}{\alpha} \int_{B_{\frac{r}{n}}(0)} \frac{e^{\xi_0 |G^{-1}(t_n \widetilde{M}_n)|^{2\alpha}}}{|x|^a} dx \tag{3.25}$$

Pelo Lema 1.1.1-(7), dado $\eta > 0$ existe $R_\eta > 0$ tal que

$$|G^{-1}(s)|^{2\alpha} \geq \left[\left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^2 - \eta \right] s^2, \quad \text{para todo } s \geq R_\eta. \tag{3.26}$$

Assim, para n suficientemente grande (sem perda de generalidade podemos assumir

$R_\varepsilon > R_\eta$), usando (3.25) e (3.26) obtemos

$$\begin{aligned}
e^{\log t_n^2} = t_n^2 &\geq \frac{\xi_0 - \varepsilon}{\alpha} \int_{B_{\frac{r}{n}}(0)} \frac{e^{\varsigma_0 \left[\left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^2 - \eta \right] t_n^2 \widetilde{M}_n^2}}{|x|^a} dx \\
&= \frac{\xi_0 - \varepsilon}{\alpha} e^{\varsigma_0 \left[\left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^2 - \eta \right] \frac{1}{2\pi} \frac{\log n}{\|M_n\|_X^2} t_n^2} \frac{2\pi}{2-a} \left(\frac{r}{n} \right)^{2-a} \\
&= \frac{\xi_0 - \varepsilon}{\alpha} e^{\varsigma_0 \left[\left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^2 - \eta \right] \frac{1}{2\pi} \frac{\log n}{\|M_n\|_X^2} t_n^2} \frac{2\pi}{2-a} e^{\log n^{a-2} r^{2-a}} \\
&= \frac{\xi_0 - \varepsilon}{\alpha} \frac{2\pi}{2-a} r^{2-a} e^{\varsigma_0 \left[\left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^2 - \eta \right] \frac{1}{2\pi} \frac{\log n}{\|M_n\|_X^2} t_n^2 - (2-a) \log n}.
\end{aligned} \tag{3.27}$$

Então,

$$1 \geq \frac{\xi_0 - \varepsilon}{\alpha} \frac{2\pi}{2-a} r^{2-a} e^{\varsigma_0 \left[\left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^2 - \eta \right] \frac{1}{2\pi} \frac{\log n}{\|M_n\|_X^2} t_n^2 - (2-a) \log n - 2 \log t_n}, \tag{3.28}$$

que implica

$$\varsigma_0 \left[\left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^2 - \eta \right] \frac{1}{2\pi} \frac{\log n}{\|M_n\|_X^2} t_n^2 - (2-a) \log n - 2 \log t_n \leq C. \tag{3.29}$$

Logo (t_n) é limitada, pois caso contrário, como $\|M_n\|_X^2 \leq 1 + \|V\|_{L^\infty(B_r)} \|M_n\|_2^2$, teríamos

$$\begin{aligned}
&\varsigma_0 \left[\left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^2 - \eta \right] \frac{1}{2\pi} \frac{\log n}{\|M_n\|_X^2} t_n^2 - (2-a) \log n - 2 \log t_n \\
&\geq t_n^2 \log n \left\{ \frac{\varsigma_0 \left[\left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^2 - \eta \right]}{2\pi (1 + \|V\|_{L^\infty(B_r)} \|M_n\|_2^2)} - \frac{2-a}{t_n^2} - \frac{2 \log t_n}{t_n^2 \log n} \right\} \rightarrow +\infty
\end{aligned}$$

quando $n \rightarrow \infty$, o que contradiz (3.29).

Logo, por (3.22), (3.27) e pelo fato de (t_n) ser limitada, temos

$$C \geq \frac{\xi_0 - \varepsilon}{\alpha} \frac{2\pi}{2-a} r^{2-a} e^{\varsigma_0 \left[\left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^2 - \eta \right] \frac{1}{2\pi} \frac{\log n}{\|M_n\|_X^2} \frac{2(2-a)\pi}{\left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^2 \varsigma_0} - (2-a) \log n}.$$

Portanto, existem constantes $C_1 = C_1(a, \varsigma_0, \alpha, \beta, \eta) > 0$ e $C_2 > 0$ tal que

$$C_1 \frac{\log n}{\|M_n\|_X^2} - \log n \leq C_2. \tag{3.30}$$

Mas,

$$\begin{aligned}
C_1 \frac{\log n}{\|M_n\|_X^2} - \log n &= \frac{C_1 \log n - \|M_n\|_X^2 \log n}{\|M_n\|_X^2} \\
&\geq \frac{C_1 \log n - \left[1 + \|V\|_{L^\infty(B_r)} \left(\frac{r^2}{4 \log n} - \frac{r^2}{2n^2} - \frac{r^2}{4n^2 \log n} \right) \right] \log n}{1 + \|V\|_{L^\infty(B_r)} \left(\frac{r^2}{4 \log n} - \frac{r^2}{2n^2} - \frac{r^2}{4n^2 \log n} \right)} \\
&= \frac{(C_1 - 1) \log n + \|V\|_{L^\infty(B_r)} \left(\frac{r^2}{4n^2} + \frac{r^2 \log n}{2n^2} - \frac{r^2}{4} \right)}{1 + \|V\|_{L^\infty(B_r)} \left(\frac{r^2}{4 \log n} - \frac{r^2}{2n^2} - \frac{r^2}{4n^2 \log n} \right)} \rightarrow +\infty,
\end{aligned}$$

quando $n \rightarrow +\infty$, o que contradiz (3.30). A proposição está provada. \blacksquare

3.5 Prova do Teorema 3.0.1

Pelos lemas 3.2.3 e 3.2.4, as hipóteses do Teorema 2.1.5 são satisfeitas. Assim, o nível minimax c_m de I é positivo e existe uma sequência de Cerami (v_n) para I no nível c_m . Aplicando o Lema 3.3.1, podemos assumir, sem perda de generalidade, que $v_n \rightharpoonup v$ fracamente em $H^1(\mathbb{R}^2)$ para algum $v \in H^1(\mathbb{R}^2)$. No Lema 3.3.5, v é uma solução fraca da Equação (3.7). Agora, suponha por contradição, que v é zero. Em vista do Lema 3.3.4 e desde que $I(v_n) \rightarrow c_m$ quando $n \rightarrow +\infty$, obtemos

$$\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} \left\{ |\nabla v_n|^2 + V(x) [G^{-1}(v_n)]^2 \right\} dx = c_m + o_n(1). \quad (3.31)$$

Pela Proposição 3.4.1, temos

$$c_m < \frac{(2-a)\pi}{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 \varsigma_0}. \quad (3.32)$$

Usando (V), (3.31) e (3.32), existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 \varsigma_0 \|\nabla v_n\|_2^2 < 2\pi(2-a), \quad \text{para todo } n \geq n_0.$$

Logo, em vista do Corolário 3.3.7, encontramos $c_m = 0$, que é uma contradição. Portanto, $v \neq 0$.

Agora, a prova de que v é estritamente positiva é completamente análoga a justifica da Afirmação 2.5.4 do Capítulo 2. Pela Proposição 3.1.4 concluímos que $u = G^{-1}(v)$ é uma solução positiva de (3.1) e a prova do Teorema 3.0.1 está completa.

Capítulo 4

Existência e concentração de soluções para uma classe de problemas críticos em \mathbb{R}^2

Neste capítulo estudamos fenômenos de concentração para a equação generalizada

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\varepsilon^2 g^2(u) \nabla u) + \varepsilon^2 g(u) g'(u) |\nabla u|^2 + V(x)u = Q(x)f(u), \\ u \in H^1(\mathbb{R}^2), u > 0 \text{ em } \mathbb{R}^2, \end{cases} \quad (4.1)$$

em que ε é um parâmetro positivo pequeno, $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ é uma função de classe C^1 , as funções potenciais $V, Q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ são limitadas e $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ pode apresentar crescimento crítico exponencial.

A fim de estudar existência e comportamentos de concentração de soluções para a equação quasilinear generalizada (4.1), mais uma vez, utilizamos métodos variacionais. Quanto aos fenômenos de concentração seguimos uma metodologia que leva em conta uma interação entre os potenciais V e Q , conforme podemos conferir nos trabalhos [7, 65, 67, 70, 74].

Como temos feito ao longo desta tese, mencionamos novamente as hipóteses sobre a função g .

(g_0) $g \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$ é uma função par, $g'(s) \geq 0$ para todo $s \geq 0$ e $g(0) = 1$;

(g_1) $(\alpha - 1)g(s) \geq g'(s)s$ para todo $s \geq 0$ e para alguma constante $\alpha \geq 1$;

(g_2) $\lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{g(s)}{s^{\alpha-1}} =: \beta > 0$.

Conforme já foi visto no início do Capítulo 2, existe uma constante $M_1 > 0$ tal que

$$g^2(s) \leq M_1 + \beta_1 s^{2\alpha-2}, \quad \text{para todo } s \in [0, +\infty), \quad (4.2)$$

onde $\beta_1 = (\beta + 1)^2 > 0$.

Alguns exemplos típicos de equações que se enquadram nas hipóteses acima são

$$-\varepsilon^2 \Delta u + V(x)u = Q(x)f(u) \quad \text{em } \mathbb{R}^2 \quad (4.3)$$

e

$$-\varepsilon^2 \Delta u + V(x)u - \varepsilon^2 \Delta(u^2)u = Q(x)f(u) \quad \text{em } \mathbb{R}^2, \quad (4.4)$$

que surgem quando substituimos $g^2(s) = 1$ e $g^2(s) = 1 + 2s^2$ em (4.1), respectivamente. Problemas do tipo (4.4) foram abordados por diversos autores (por exemplo, em [6, 26, 31, 32, 44, 55, 67, 69, 74]). Porém, nenhum deles considerou a interação entre V e Q , com o tipo de crescimento em $f(s)$, conforme enunciaremos a seguir. Já em relação a equações do tipo (4.3) mencionamos apenas os trabalhos [7, 65, 70] cujas hipóteses sobre V , Q e f são praticamente as mesmas que assumiremos aqui. Vamos as hipóteses.

Supomos que $V, Q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ são duas funções positivas, contínuas e limitadas. Para apresentar nossos principais resultados, precisamos introduzir as seguintes notações:

$$\begin{aligned} \kappa_{\min} &= \min_{x \in \mathbb{R}^2} V(x) > 0, & \widehat{\mathcal{V}} &= \{x \in \mathbb{R}^2; V(x) = \kappa_{\min}\}, \\ \kappa_{\max} &= \sup_{x \in \mathbb{R}^2} V(x), & \kappa_{\infty} &= \liminf_{|x| \rightarrow \infty} V(x) < \infty, \\ \nu_{\max} &= \max_{x \in \mathbb{R}^2} Q(x), & \widehat{\mathcal{Q}} &= \{x \in \mathbb{R}^2; Q(x) = \nu_{\max}\}, \\ \nu_{\min} &= \inf_{x \in \mathbb{R}^2} Q(x) > 0, & \nu_{\infty} &= \limsup_{|x| \rightarrow \infty} Q(x) < \infty. \end{aligned}$$

Além disso, assumimos as condições

(VQ₁) $\nu_{\max} > \nu_{\infty}$ e existe $R > 0$, $x^* \in \widehat{\mathcal{Q}}$ tal que

$$V(x^*) \leq V(x) \quad \text{para todo } |x| \geq R$$

ou

(VQ₂) $\kappa_{\min} < \kappa_{\infty}$ e existe $R > 0$, $x_* \in \widehat{\mathcal{V}}$ tal que

$$Q(x_*) \geq Q(x) \quad \text{para todo } |x| \geq R.$$

Se (VQ_1) vale, podemos assumir $V(x^*) = \min_{x \in \widehat{Q}} V(x)$ e denotamos

$$\mathcal{A}_Q = \{x \in \widehat{Q}; V(x) = V(x^*)\} \cup \{x \notin \widehat{Q}; V(x) < V(x^*)\},$$

enquanto que se (VQ_2) vale, podemos assumir $Q(x_*) = \max_{x \in \widehat{V}} Q(x)$ e denotamos

$$\mathcal{A}_V = \{x \in \widehat{V}; Q(x) = Q(x_*)\} \cup \{x \notin \widehat{V}; Q(x) > Q(x_*)\}.$$

Na figura abaixo temos um esboço de um possível comportamento das funções V e Q .

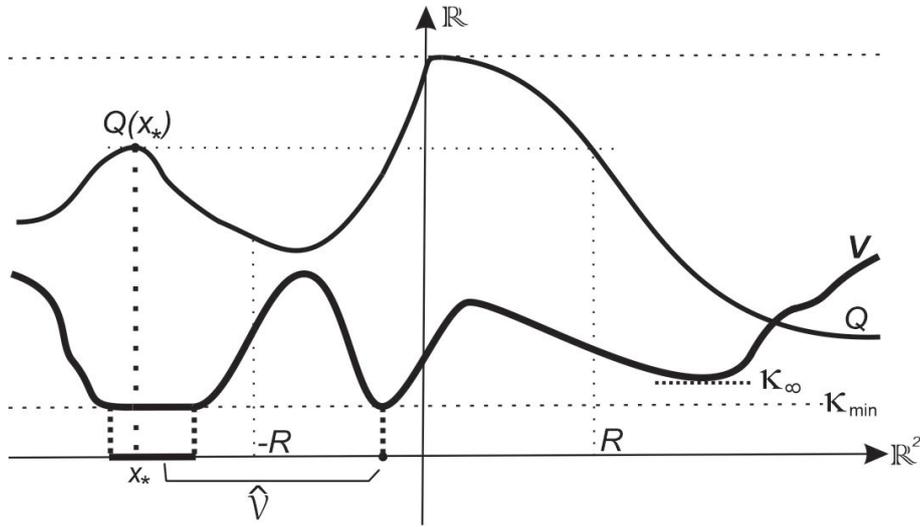


Figura 4.1: Hipótese (VQ_2) .

Este tipo de estrutura foi tratada recentemente em [7, 23, 65, 67, 70, 74]. Obviamente, \mathcal{A}_V e \mathcal{A}_Q são limitados. Além disso, $\mathcal{A}_V = \mathcal{A}_Q = \widehat{V} \cap \widehat{Q}$ se $\widehat{V} \cap \widehat{Q} \neq \emptyset$. Em particular, $\mathcal{A}_V = \widehat{V}$ se Q é uma função constante, e $\mathcal{A}_Q = \widehat{Q}$ se V é uma função constante.

Em relação à não linearidade f assumimos que a mesma possui crescimento crítico exponencial, ou seja, existe $\varsigma_0 > 0$ tal que

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} f(s)e^{-\varsigma s^{2\alpha}} = \begin{cases} 0, & \text{para todo } \varsigma > \varsigma_0 \\ +\infty, & \text{para todo } \varsigma < \varsigma_0 \end{cases}. \quad (4.5)$$

Além disso, a função f satisfaz as condições

$$(f_1) \quad f(s) = o(s) \text{ quando } s \rightarrow 0^+;$$

(f_2) existe $\theta > \alpha > 0$ tal que

$$0 < 2\theta F(s) = 2\theta \int_0^s f(t)dt \leq sf(s), \quad \text{para todo } s \in (0, +\infty);$$

(f_3) existe $\lambda > 0$ e $p > 2\theta$ tal que $F(s) \geq \lambda s^p$, para todo $s \in [0, +\infty)$ com $\lambda > \bar{\lambda}$, onde

$$\bar{\lambda} := \max \left\{ \left(\frac{p-2}{p} \right)^{\frac{p-2}{2}} \left[\frac{4\pi(M_1+\beta_1)+M_1\kappa_{\max}|B_{\sqrt{5}}|}{2} \right]^{\frac{p}{2}} \frac{2}{p\pi\nu_{\min}} \left[\frac{\theta}{(\theta-\alpha)} \frac{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 c_0}{\pi} \right]^{\frac{p-2}{2}}, \frac{4\pi(M_1+\beta_1)+M_1\kappa_{\max}|B_{\sqrt{5}}|}{2\pi\nu_{\min}} \right\},$$

e $M_1, \beta_1 > 0$ são constantes dadas na estimativa (4.2);

(f_4) $\frac{f(s)}{g(s)G^3(s)}$ é não-decrescente em $(-\infty, 0)$ e $(0, \infty)$, onde $G(s) = \int_0^s g(t)dt$.

Para encontrar solução positiva para a equação (4.1) consideramos $f(s) = 0$, para todo $s \in (-\infty, 0]$.

Não conhecemos na literatura nenhum trabalho sobre concentração de soluções para equações do tipo (4.1) com competição entre potenciais e não-linearidade crítica exponencial.

A seguir, para introduzir nossos principais resultados, consideramos o espaço de funções $H^1(\mathbb{R}^2)$ com as normas

$$\|u\| = \left[\int_{\mathbb{R}^2} (|\nabla u|^2 + u^2)dx \right]^{1/2}, \quad \|u\|_\varepsilon = \left[\int_{\mathbb{R}^2} (|\nabla u|^2 + V(\varepsilon x)u^2)dx \right]^{1/2}$$

Tendo em vista as hipóteses sob V , ambas as normas acima são equivalentes. Além disso, $H^1(\mathbb{R}^2)$ é um espaço de Hilbert quando equipado com um dos seguintes produtos internos:

$$\langle u, v \rangle_\varepsilon = \int_{\mathbb{R}^2} (\nabla u \nabla v + V(\varepsilon x)uv)dx$$

ou

$$\langle u, v \rangle = \int_{\mathbb{R}^2} (\nabla u \nabla v + uv)dx$$

para todos $u, v \in H^1(\mathbb{R}^2)$.

Dizemos que uma função $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é uma solução fraca da equação (2.1) se $u \in H^1(\mathbb{R}^2) \cap L_{loc}^\infty(\mathbb{R}^2)$ e para todo $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ vale

$$\varepsilon^2 \int_{\mathbb{R}^2} g^2(u) \nabla u \nabla \varphi dx + \varepsilon \int_{\mathbb{R}^2} g(u)g'(u)|\nabla u|^2 \varphi dx + \int_{\mathbb{R}^2} V(x)u\varphi dx - \int_{\mathbb{R}^2} Q(x)f(u)\varphi dx = 0. \quad (4.6)$$

Agora podemos apresentar nosso principal resultado.

Teorema 4.0.1 *Suponha que as hipóteses (VQ_1) , $(g_0) - (g_2)$ e $(f_1) - (f_4)$ sejam satisfeitas. Então, para qualquer $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, o problema (4.1) tem pelo menos uma solução positiva de energia mínima $u_\varepsilon \in C_{loc}^{2,\ell}(\mathbb{R}^2)$ com as seguintes propriedades:*

(i) *Existe um ponto de máximo $x_\varepsilon \in \mathbb{R}^2$ de u_ε tal que*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \text{dist}(x_\varepsilon, \mathcal{A}_V) = 0;$$

(ii) *Existem constantes positivas c_1 e c_2 tal que para todo $x \in \mathbb{R}^2$*

$$u_\varepsilon(x) \leq c_1 e^{-\frac{c_2}{\varepsilon}|x-x_\varepsilon|};$$

(iii) *Definindo $\bar{u}_\varepsilon(x) := u_\varepsilon(\varepsilon x + x_\varepsilon)$, temos $x_\varepsilon \rightarrow y_0$ e \bar{u}_ε converge em $H^1(\mathbb{R}^2)$ para uma solução de energia mínima \bar{u} de*

$$-\text{div}(g^2(u)\nabla u) + g(u)g'(u)|\nabla u|^2 + V(y_0)u = Q(y_0)f(u) \quad \text{em } \mathbb{R}^2.$$

Em particular, se $\widehat{\mathcal{V}} \cap \widehat{\mathcal{Q}} \neq \emptyset$, então $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \text{dist}(x_\varepsilon, \widehat{\mathcal{V}} \cap \widehat{\mathcal{Q}}) = 0$ e, a menos de subsequência, \bar{u}_ε converge em $H^1(\mathbb{R}^2)$ para uma solução de energia mínima \bar{u} de

$$-\text{div}(g^2(u)\nabla u) + g(u)g'(u)|\nabla u|^2 + \kappa_{\min}u = \nu_{\max}f(u) \quad \text{in } \mathbb{R}^2.$$

Teorema 4.0.2 *Suponha que (VQ_2) , $(g_0) - (g_2)$ e $(f_1) - (f_4)$ valem. Então, todas as afirmações anteriores permanecem verdadeiras com \mathcal{A}_V sendo substituído por \mathcal{A}_Q .*

Inicialmente, as principais dificuldades para obter uma solução para o problema (4.1) são basicamente as mesmas já descritas nos Capítulos 2 e 3. Ao reformular o problema por meio de uma mudança de variáveis, obtemos uma equação semilinear com funcional energia denotado por I_ε .

Neste ponto, a falta de uma condição sobre V para obter uma imersão compacta ou mesmo para trabalhar diretamente com lemas do tipo de Lions (quando V é periódico, por exemplo) impõe uma dificuldade para verificar se o ponto crítico encontrado é não trivial. No entanto, superamos essa dificuldade considerando algumas equações auxiliares juntamente com estimativas entre diferentes níveis do passo da montanha. Assim, conseguimos mostrar a não trivialidade de um ponto crítico de I_ε para ε suficientemente pequeno (ver Lema 4.3.1). Também verificamos que nossa solução é de energia mínima e positiva. Finalmente, usando novamente a relação entre os níveis do passo da montanha junto com a desigualdade de Trudinger-Moser, funções

do tipo corte e uma estimativa em L^∞ obtemos os fenômenos de concentração descritos no Teorema 4.0.1.

As hipóteses (f_1) e (f_2) são condições suficientes para garantir a geometria do passo da montanha. Além disso, (f_2) é importante para provar a limitação das sequências de Cerami (ver Lema 4.2.8). Com relação à hipótese (f_3) , esta é fundamental para comprovar a estimativa do nível minimax contida no Corolário 4.2.7. Em posse desta estimativa, é possível mostrar que

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 c_0 \|\nabla v_n\|_2^2 < 4\pi$$

para n suficientemente grande, onde (v_n) é uma sequência de Cerami. Essa estimativa é fundamental para obtenção de ponto crítico para o funcional I_ε . Por fim, a condição de monotonicidade (f_4) é de fundamental relevância para todos os resultados que aparecem ao longo do trabalho concernentes a variedade de Nehari. Este tipo de hipótese aparece, por exemplo, em [13].

4.1 Estrutura Variacional e Preliminares

Começamos esta seção observando que formalmente (4.1) é a equação de Euler-Lagrange associada ao funcional energia

$$\mathcal{J}_\varepsilon(u) = \frac{\varepsilon^2}{2} \int_{\mathbb{R}^2} g^2(u) |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} V(x) u^2 dx - \int_{\mathbb{R}^2} Q(x) F(u) dx \quad (4.7)$$

Do ponto de vista variacional, a primeira dificuldade que enfrentamos é a necessidade de encontrar uma configuração apropriada para aplicar métodos variacionais e estudar a existência de ponto crítico para \mathcal{J}_ε . Já sabemos que podem existir funções g , tal que a integral $\int_{\mathbb{R}^2} g^2(u) |\nabla u|^2 dx$ pode assumir o valor $+\infty$. Para superar essa dificuldade, usamos a mudança de variáveis

$$v = G(u) = \int_0^u g(s) ds.$$

Assim, após essa mudança, obtemos o novo funcional

$$\mathcal{I}_\varepsilon(v) = \mathcal{J}_\varepsilon(G^{-1}(u)) = \frac{\varepsilon^2}{2} \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla v|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} V(x) [G^{-1}(v)]^2 dx - \int_{\mathbb{R}^2} Q(x) F(G^{-1}(v)) dx \quad (4.8)$$

que é bem definido em $H^1(\mathbb{R}^2)$ sob as hipóteses impostas sobre as funções V, Q, g e f . Nos Capítulos 1 e 2 já listamos as propriedades da função G^{-1} nos Lemas 1.1.1 e 2.1.1. A seguir fizemos um acréscimo de mais uma propriedade, fundamental para no nosso estudo.

Lema 4.1.1 *A função G^{-1} também satisfaz a seguintes propriedade: $[G^{-1}(st)]^2 \leq s^2[G^{-1}(t)]^2$ para todo $t \in \mathbb{R}, s \geq 1$.*

Prova: A justificativa dessa propriedade pode ser encontrada no Lema 2.1 em [29]. ■

É fácil verificar que sob as hipóteses impostas sobre V, Q, g e f o funcional \mathcal{I}_ε é de classe C^1 em $H^1(\mathbb{R}^2)$ com

$$\mathcal{I}'_\varepsilon(v)\varphi = \varepsilon^2 \int_{\mathbb{R}^2} \nabla v \nabla \varphi dx + \int_{\mathbb{R}^2} V(x) \frac{G^{-1}(v)}{g(G^{-1}(v))} \varphi dx - \int_{\mathbb{R}^2} Q(x) \frac{f(G^{-1}(v))}{g(G^{-1}(v))} \varphi dx, \quad (4.9)$$

para $v, \varphi \in H^1(\mathbb{R}^2)$ e, portanto aos pontos críticos de \mathcal{I}_ε correspondem exatamente as soluções fracas da equação semilinear

$$-\varepsilon^2 \Delta v + V(x) \frac{G^{-1}(v)}{g(G^{-1}(v))} = Q(x) \frac{f(G^{-1}(v))}{g(G^{-1}(v))} \quad \text{em } \mathbb{R}^2. \quad (4.10)$$

Fazendo a mudança de variável $v(x) = w(\varepsilon x)$, é possível ver que (4.10) equivale ao problema

$$-\Delta v + V(\varepsilon x) \frac{G^{-1}(v)}{g(G^{-1}(v))} = Q(\varepsilon x) \frac{f(G^{-1}(v))}{g(G^{-1}(v))} \quad \text{em } \mathbb{R}^2. \quad (4.11)$$

O problema (4.11) tem uma estrutura variacional completamente análoga a (4.10).

Denotamos o funcional energia associado a (4.11) por I_ε , ou seja,

$$I_\varepsilon(v) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} (|\nabla v|^2 + V(\varepsilon x)[G^{-1}(v)]^2) dx - \int_{\mathbb{R}^2} Q(\varepsilon x) F(G^{-1}(v)) dx.$$

A seguir, na Proposição 4.1.2, vemos que se $v_\varepsilon \in H^1(\mathbb{R}^2)$ é um ponto crítico do funcional \mathcal{I}_ε , então $u_\varepsilon = G^{-1}(v_\varepsilon)$ é uma solução fraca para (4.1). Portanto, para obter soluções fracas de (4.1), é suficiente procurar pontos críticos para \mathcal{I}_ε .

Proposição 4.1.2 (Pontos críticos de \mathcal{I}_ε e soluções de (2.1)) *Todo ponto crítico v_ε de \mathcal{I}_ε pertence a $C_{loc}^{0,\vartheta}(\mathbb{R}^2)$ para algum $\vartheta \in (0, 1)$ e $u_\varepsilon = G^{-1}(v_\varepsilon)$ é uma solução fraca de (2.1).*

Prova: Devido a limitação dos potenciais V e Q a prova deste resultado é completamente análoga a demonstração da Proposição 2.1.4. ■

4.2 Equações auxiliares

Nesta seção, estudamos a equação (4.10) bem como algumas equações auxiliares via métodos variacionais.

4.2.1 Equação equivalente (4.11)

Considere a equação (4.11). Vamos mostrar que o funcional I_ε satisfaz a geometria do passo da montanha. Para isso, fazemos uso dos Lemas 2.2.1 e 2.2.2 do Capítulo 2, bem como de alguns lemas técnicos.

Dado $\rho > 0$ e $\varepsilon > 0$, definimos

$$S_{\varepsilon,\rho} = \left\{ v \in H^1(\mathbb{R}^2) : \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla v|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^2} V(\varepsilon x) [G^{-1}(v)]^2 dx = \rho^2 \right\}.$$

Desde que o funcional $\mathcal{Q}_{V,\varepsilon} : H^1(\mathbb{R}^2) \rightarrow \mathbb{R}$ definido por

$$\mathcal{Q}_{V,\varepsilon}(v) = \int_{\mathbb{R}^2} \{ |\nabla v|^2 + V(\varepsilon x) [G^{-1}(v)]^2 \} dx$$

é contínuo, segue que $S_{\varepsilon,\rho}$ é um subconjunto fechado que desconecta o espaço $H^1(\mathbb{R}^2)$.

Como os potenciais V e Q são limitados, do mesmo modo como foi feito nos Capítulos 2 e 3 (veja Lemas 2.2.3, 2.2.4, 3.2.3 e 3.2.4), obtemos os seguintes lemas:

Lema 4.2.1 *Existe $\rho > 0$ e $\sigma > 0$ satisfazendo*

$$I_\varepsilon(v) \geq \sigma, \quad \text{para todo } v \in S_{\varepsilon,\rho}.$$

Lema 4.2.2 *Existe $e \in H^1(\mathbb{R}^2)$ com $\mathcal{Q}_{V,\varepsilon}(e) > \rho^2$ tal que*

$$I_\varepsilon(e) < 0 < \sigma \leq \inf_{v \in S_{\varepsilon,\rho}} I_\varepsilon(v).$$

A variedade de Nehari associada ao funcional I_ε é definida por

$$\mathcal{N}_\varepsilon = \{v \in H^1(\mathbb{R}^2); v \neq 0, I'_\varepsilon(v)v = 0\}.$$

No próximo lema demonstramos que $\mathcal{Q}_{V,\varepsilon}$ é limitado por baixo na variedade de Nehari e perto da origem.

Lema 4.2.3 *Se $\varsigma > 0$ e $\|v\|_2 \leq M$ com $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 \varsigma \|\nabla v\|_2^2 < 4\pi$, então existe $C > 0$, independente de ε , tal que*

$$\mathcal{Q}_{V,\varepsilon}(v) \geq C, \quad \text{para todo } v \in \mathcal{N}_\varepsilon.$$

Prova: De fato, se $v \in \mathcal{N}_\varepsilon$ então

$$\int_{\mathbb{R}^2} \left(|\nabla v|^2 + V(\varepsilon x) \frac{G^{-1}(v)}{g(G^{-1}(v))} v \right) dx = \int_{\mathbb{R}^2} Q(\varepsilon x) \frac{f(G^{-1}(v))}{g(G^{-1}(v))} v dx.$$

Usando os Lemas 1.1.1-(5), 2.2.1 e a estimativa (3.8), dados $\delta > 0$ e $q > 2$ existe uma constante $C_\delta > 0$ tal que

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha} \mathcal{Q}_{V,\varepsilon}(v) &\leq \int_{\mathbb{R}^2} Q(\varepsilon x) \frac{f(G^{-1}(v))}{g(G^{-1}(v))} v dx \leq \int_{\mathbb{R}^2} Q(\varepsilon x) f(G^{-1}(v)) G^{-1}(v) dx \\ &\leq \delta \nu_{\max} \int_{\mathbb{R}^2} [G^{-1}(v)]^2 dx + C_\delta \nu_{\max} \int_{\mathbb{R}^2} [G^{-1}(v)]^q \left(e^{\delta [G^{-1}(v)]^{2\alpha}} - 1 \right) dx \\ &\leq \delta C_1 \mathcal{Q}_{V,\varepsilon}(v) + C_\delta \nu_{\max} \|G^{-1}(v)\|_\varepsilon^q \\ &\leq \delta C_1 \mathcal{Q}_{V,\varepsilon}(v) + C_\delta \nu_{\max} [\mathcal{Q}_{V,\varepsilon}(v)]^{\frac{q}{2}}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

onde $C_1 > 0$ é uma constante. Para chegar à última linha da estimativa anterior, usamos $|\nabla G^{-1}(v)|^2 \leq |\nabla v|^2$. Logo, temos

$$\left(\frac{1}{\alpha} - \delta C_1 \right) \mathcal{Q}_{V,\varepsilon}(v) \leq C_\delta \nu_{\max} [\mathcal{Q}_{V,\varepsilon}(v)]^{\frac{q}{2}}$$

e a conclusão segue. ■

Lema 4.2.4 *Para qualquer $v \in \mathcal{N}_\varepsilon$ e $t \geq 0$, vale a desigualdade $I_\varepsilon(v) \geq I_\varepsilon(tv)$.*

Prova: Aqui, a monotonicidade em (f_4) e o Lema 1.1.1-(11) são fundamentais. Veja o Lema 2.2 e o Corolário 2.3 em [13] para a prova. ■

Temos ainda o seguinte lema:

Lema 4.2.5 *Para cada $v \in H^1(\mathbb{R}^2) \setminus \{0\}$, existe um único $t_v > 0$ tal que $t_v v \in \mathcal{N}_\varepsilon$. Mais ainda o máximo de $I_\varepsilon(tv)$ para $t \geq 0$ é atingido em $t = t_v$.*

Prova: Mais uma vez, a monotonicidade em (f_4) e o Lema 1.1.1-(11) são fundamentais. Seja $v \in H^1(\mathbb{R}^2) \setminus \{0\}$ fixado e defina a função $h(t) = I_\varepsilon(tv)$ para $t \geq 0$. Por um argumento completamente análogo ao contido no Lema 3.7 de [26], obtemos

$$h(t) = I_\varepsilon(tv) > 0 \quad \text{para } t > 0 \text{ pequeno.} \quad (4.13)$$

Além disso, $h(0) = 0$ e

$$h(t) = I_\varepsilon(tv) < 0 \quad \text{para } t > 0 \text{ grande.} \quad (4.14)$$

De fato, suponha por contradição que exista uma sequência $\{t_n\}$ com $t_n \rightarrow \infty$ tal que $I_\varepsilon(t_n v) > 0$ para todo n . Sendo $w = \frac{v}{\|v\|_\varepsilon}$, pelo Lema 1.1.1-(3) temos

$$\begin{aligned} 0 < \frac{I_\varepsilon(t_n v)}{t_n^2 \|v\|_\varepsilon^2} &= \frac{1}{2t_n^2 \|v\|_\varepsilon^2} \int_{\mathbb{R}^2} \left[t_n^2 |\nabla v|^2 + V(\varepsilon x) (G^{-1}(t_n v))^2 \right] dx - \\ &\quad - \int_{\mathbb{R}^2} Q(\varepsilon x) \frac{F(G^{-1}(t_n v))}{t_n^2 \|v\|_\varepsilon^2} dx \\ &\leq \frac{1}{2} - \int_{\mathbb{R}^2} Q(\varepsilon x) \frac{F(G^{-1}(t_n v))}{(G^{-1}(t_n v))^{2\alpha}} \left[\frac{G^{-1}(t_n v)}{|t_n v|^{\frac{1}{\alpha}}} \right]^{2\alpha} w^2 dx \end{aligned}$$

Desde que $v \neq 0$, obtemos $|t_n v| \rightarrow \infty$. Então, por (f_2) sabemos que $\frac{F(G^{-1}(t_n v))}{(G^{-1}(t_n v))^{2\alpha}} \rightarrow \infty$. Portanto pelo Lema 1.1.1-(7) e o Lema de Fatou, vem

$$\int_{\mathbb{R}^2} Q(\varepsilon x) \frac{F(G^{-1}(t_n v))}{(G^{-1}(t_n v))^{2\alpha}} \left[\frac{G^{-1}(t_n v)}{|t_n v|^{\frac{1}{\alpha}}} \right]^{2\alpha} w^2 dx \rightarrow \infty,$$

que nos fornece uma contradição.

Concluimos por (4.13) e (4.14) que existe um único $t_v > 0$ tal que $h'(t_v) = 0$, isto é, $t_v v \in \mathcal{N}_\varepsilon$. Além disso, $h(t_v) = \max_{t \geq 0} h(t)$. ■

É fácil verificar que o nível mini-max $c_\varepsilon := \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} I_\varepsilon(\gamma(t))$ pode ser caracterizado por

$$c_\varepsilon = \inf_{\substack{v \in H^1(\mathbb{R}^2) \\ v \neq 0}} \max_{t \geq 0} I_\varepsilon(tv) = \inf_{v \in \mathcal{N}_\varepsilon} I_\varepsilon(v) \quad (4.15)$$

onde $\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], H^1(\mathbb{R}^2)); \gamma(0) = 0, I_\varepsilon(\gamma(1)) < 0\}$. Pelos lemas 4.2.1 e 4.2.2, sabemos que $c_\varepsilon > 0$. Para verificar (4.15), o leitor pode observar o Lema 3.8 em [26].

Agora, obtemos uma estimativa para o nível do passo da montanha c_ε de I_ε , que será crucial para o nosso estudo. Para este fim, consideramos uma função $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ (assim como no Capítulo 2) satisfazendo as condições:

$$(\varphi_1) \quad \varphi \equiv 1 \text{ em } B_1 = B_1(0) \text{ e } \varphi \equiv 0 \text{ em } B_{\sqrt{5}}^c = B_{\sqrt{5}}^c(0);$$

$$(\varphi_2) \quad 0 \leq \varphi \leq 1 \text{ em } \mathbb{R}^2;$$

$$(\varphi_3) \quad |\nabla \varphi| \leq 1 \text{ em } \mathbb{R}^2.$$

Também, como no Capítulo 2, podemos obter a seguinte proposição:

Proposição 4.2.6 *Suponha que $(g_0) - (g_2)$ e (f_3) sejam satisfeitas. Se $\lambda > \bar{\lambda}$, então*

$$\max_{t \in [0,1]} I_\varepsilon(G(t\varphi)) < \frac{(\theta - \alpha)}{\theta} \frac{\pi}{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 s_0}.$$

Prova: Desde que $G'(s) = g(s)$, por (f_3) , usando as propriedades de φ e a estimativa (4.2), temos

$$\begin{aligned} I_\varepsilon(G(t\varphi)) &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} (|\nabla(G(t\varphi))|^2 + V(\varepsilon x)t^2\varphi^2)dx - \int_{\mathbb{R}^2} Q(\varepsilon x)F(t\varphi)dx \\ &\leq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} g^2(t\varphi)t^2|\nabla\varphi|^2dx + \frac{t^2}{2} \int_{\mathbb{R}^2} V(\varepsilon x)\varphi^2dx - \lambda\nu_{\min}t^p \int_{\mathbb{R}^2} |\varphi|^pdx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^2} [M_1 + \beta_1(t\varphi)^{2\alpha-2}] \frac{t^2}{2} |\nabla\varphi|^2dx + \int_{\mathbb{R}^2} V(\varepsilon x) \frac{(t\varphi)^2}{2} dx - \lambda\nu_{\min} \int_{\mathbb{R}^2} |t\varphi|^p dx \\ &\leq \frac{M_1 t^2}{2} \|\varphi\|_\varepsilon^2 + \frac{\beta_1 t^{2\alpha}}{2} \int_{B_{\sqrt{5}} \setminus B_1} |\varphi|^{2(\alpha-1)} |\nabla\varphi|^2 dx - \lambda\nu_{\min} t^p \int_{\mathbb{R}^2} |\varphi|^p dx \\ &\leq \left(2\pi + \frac{\kappa_{\max}|B_{\sqrt{5}}|}{2}\right) M_1 t^2 + 2\pi\beta_1 t^{2\alpha} - \lambda\nu_{\min}\pi t^p, \end{aligned}$$

que implica

$$\max_{t \in [0,1]} I_\varepsilon(G(t\varphi)) \leq \max_{t \in [0,1]} \left[\left(2\pi + \frac{\kappa_{\max}|B_{\sqrt{5}}|}{2}\right) M_1 t^2 + 2\pi\beta_\delta t^{2\alpha} - \lambda\nu_{\min}\pi t^p \right]$$

Desde que $\alpha > 1$, obtemos

$$\begin{aligned} \left(2\pi + \frac{\kappa_{\max}|B_{\sqrt{5}}|}{2}\right) M_1 t^2 + 2\pi\beta_1 t^{2\alpha} - \lambda\nu_{\min}\pi t^p &\leq \left(2\pi M_1 + \frac{M_1 \kappa_{\max}|B_{\sqrt{5}}|}{2} + 2\pi\beta_1\right) t^2 - \\ &\quad - \lambda\nu_{\min}\pi t^p \end{aligned}$$

para $t \in [0, 1]$. Note que o máximo da função

$$H(t) = \left(2\pi M_1 + \frac{M_1 \kappa_{\max}|B_{\sqrt{5}}|}{2} + 2\pi\beta_1\right) t^2 - \lambda\nu_{\min}\pi t^p$$

para $t \geq 0$ é atingido no ponto

$$\bar{t} = \left(2\pi M_1 + \frac{M_1 \kappa_{\max}|B_{\sqrt{5}}|}{2} + 2\pi\beta_1\right)^{\frac{1}{p-2}} \left(\frac{2}{\lambda\nu_{\min}p\pi}\right)^{\frac{1}{p-2}}$$

e $\bar{t} \in [0, 1]$ sempre que

$$\lambda > \left(\frac{4\pi(M_1 + \beta_\delta) + M_1 \kappa_{\max}|B_{\sqrt{5}}|}{2\pi}\right) \frac{2}{\nu_{\min}p}.$$

Como

$$\lambda > \frac{4\pi(M_1 + \beta_1) + M_1 \kappa_{\max}|B_{\sqrt{5}}|}{2\pi\nu_{\min}} > \left(\frac{4\pi(M_1 + \beta_1) + M_1 \kappa_{\max}|B_{\sqrt{5}}|}{2\pi}\right) \frac{2}{\nu_{\min}p}$$

pois $2/p < 1$ então, de fato, $\bar{t} \in [0, 1]$. Assim, calculando o máximo de $H(t)$, encontramos

$$\begin{aligned} \max_{t \in [0, 1]} I_\varepsilon(G(t\varphi)) &\leq \left(\frac{2}{p}\right)^{\frac{2}{p-2}} \left(\frac{p-2}{p}\right) \left[\frac{4\pi(M_1 + \beta_\delta) + M_1\kappa_{\max}|B_{\sqrt{5}}|}{2} \right]^{\frac{p}{p-2}} \left(\frac{1}{\pi\lambda\nu_{\min}}\right)^{\frac{2}{p-2}} \\ &< \frac{(\theta - \alpha)}{\theta} \frac{\pi}{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 \varsigma_0} \end{aligned}$$

desde que

$$\lambda > \left(\frac{p-2}{p}\right)^{\frac{p-2}{2}} \left[\frac{4\pi(M_1 + \beta_\delta) + M_1\kappa_{\max}|B_{\sqrt{5}}|}{2} \right]^{\frac{p}{2}} \frac{2}{p\pi\nu_{\min}} \left[\frac{\theta}{(\theta - \alpha)} \frac{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 \varsigma_0}{\pi} \right]^{\frac{p-2}{2}}.$$

A proposição está provada. ■

Como consequência da proposição acima, de forma análoga ao Corolário 2.4.2 do Capítulo 2, temos o

Corolário 4.2.7 *Suponha que $(g_0) - (g_2)$ e (f_3) sejam satisfeitas com $\lambda > \bar{\lambda}$. Então*

$$c_\varepsilon < \frac{(\theta - \alpha)}{\theta} \frac{\pi}{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 \varsigma_0}.$$

Neste momento vamos provar alguns resultados a cerca de seqüências de Cerami para o funcional I_ε . O primeiro é o seguinte:

Lema 4.2.8 *Suponha que $(g_0) - (g_1)$ e (f_2) são satisfeitas. Seja (v_n) uma seqüência em $H^1(\mathbb{R}^2)$ tal que $I_\varepsilon(v_n) \rightarrow c_\varepsilon \in \mathbb{R}$ e $I'_\varepsilon(v_n)v_n \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow +\infty$. Então (v_n) é limitada em $H^1(\mathbb{R}^2)$.*

Prova: Usando o Lema 1.1.1-(5) e (f_3) , obtemos

$$\begin{aligned} I_\varepsilon(v_n) - \frac{\alpha}{2\theta} I'_\varepsilon(v_n)v_n &= \left(\frac{1}{2} - \frac{\alpha}{2\theta}\right) \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla v_n|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} V(\varepsilon x) [G^{-1}(v_n)]^2 dx \\ &\quad - \frac{\alpha}{2\theta} \int_{\mathbb{R}^2} V(\varepsilon x) \frac{G^{-1}(v_n)}{g(G^{-1}(v_n))} v_n dx - \int_{\mathbb{R}^2} Q(\varepsilon x) F(G^{-1}(v_n)) dx \\ &\quad + \frac{\alpha}{2\theta} \int_{\mathbb{R}^2} Q(\varepsilon x) \frac{f(G^{-1}(v_n))}{g(G^{-1}(v_n))} v_n dx \\ &\geq \left(\frac{1}{2} - \frac{\alpha}{2\theta}\right) \mathcal{Q}_{V,\varepsilon}(v_n) + \\ &\quad \frac{\nu_{\min}}{2\theta} \int_{\{G^{-1}(v_n) > 0\}} f(G^{-1}(v_n)) G^{-1}(v_n) - 2\theta F(G^{-1}(v_n)) dx \\ &\geq \left(\frac{1}{2} - \frac{\alpha}{2\theta}\right) \mathcal{Q}_{V,\varepsilon}(v_n). \end{aligned}$$

Desde que $I_\varepsilon(v_n) = c_\varepsilon + o_n(1)$ e $I'_\varepsilon(v_n)v_n = o_n(1)$, quando $n \rightarrow +\infty$, segue que

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{\alpha}{2\theta}\right) \mathcal{Q}_{V,\varepsilon}(v_n) \leq c_\varepsilon + o_n(1). \quad (4.16)$$

O restante da prova é análoga a demonstração do Lema 2.3.1 do Capítulo 2. \blacksquare

Devido a limitação dos potenciais V e Q , os próximos resultados apresentam demonstrações análogas àqueles já apresentados na seção 2.3 do Capítulo 2.

Corolário 4.2.9 *Suponha que $(g_0) - (g_1)$ e (f_2) são satisfeitas. Seja (v_n) uma sequência de Cerami para I_ε em $H^1(\mathbb{R}^2)$. Então, existe uma constante $C > 0$, tal que*

$$\int_{\mathbb{R}^2} Q(\varepsilon x) \frac{|f(G^{-1}(v_n))v_n|}{g(G^{-1}(v_n))} dx \leq C.$$

Lema 4.2.10 *Suponha que $(g_0) - (g_1)$ e $(f_1) - (f_2)$ são satisfeitas. Seja (v_n) uma sequência de Cerami para I_ε em $H^1(\mathbb{R}^2)$. Então, (v_n) tem uma subsequência, ainda denotada por (v_n) , tal que*

$$Q(\varepsilon x) \frac{f(G^{-1}(v_n))}{g(G^{-1}(v_n))} \rightarrow Q(\varepsilon x) \frac{f(G^{-1}(v))}{g(G^{-1}(v))} \text{ em } L^1_{loc}(\mathbb{R}^2), \text{ quando } n \rightarrow +\infty,$$

onde v é o limite fraco de (v_n) em $H^1(\mathbb{R}^2)$.

Lema 4.2.11 *Suponha que $(g_0) - (g_1)$ e $(f_1) - (f_2)$ são satisfeitas. Se $(v_n) \subset H^1(\mathbb{R}^2)$ é uma sequência de Cerami para I_ε em $H^1(\mathbb{R}^2)$ tal que $v_n \rightharpoonup v$ fracamente em $H^1(\mathbb{R}^2)$, então*

$$\int_{\mathbb{R}^2} \nabla v \nabla \varphi dx + \int_{\mathbb{R}^2} \frac{V(\varepsilon x)G^{-1}(v)}{g(G^{-1}(v))} \varphi dx = \int_{\mathbb{R}^2} Q(\varepsilon x) \frac{f(G^{-1}(v))}{g(G^{-1}(v))} \varphi dx,$$

para todo $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$.

Observação 4.2.12 (Uma solução para o problema (4.11)) *Desde que c_ε pode ser caracterizado por*

$$0 < c_\varepsilon = \inf_{v \in \mathcal{N}_\varepsilon} I_\varepsilon(v)$$

podemos escolher uma sequência minimizante $(v_n) \subset \mathcal{N}_\varepsilon$ de I_ε tal que $I_\varepsilon(v_n) \rightarrow c_\varepsilon$ e $I'_\varepsilon(v_n)v_n = 0$. Aplicando o Lema 2.3.1, podemos assumir sem perda de generalidade, que $v_n \rightharpoonup v_\varepsilon$ fracamente em $H^1(\mathbb{R}^2)$ para algum $v_\varepsilon \in H^1(\mathbb{R}^2)$. Pelo Lema 4.2.11, v_ε é uma solução fraca da Equação (4.11), isto é, $I'_\varepsilon(v_\varepsilon) = 0$. Concluimos apenas que v_ε é um ponto crítico do funcional I_ε . No entanto, ainda não está claro se este ponto crítico é não-trivial e se c_ε é atingido. A fim de provar que c_ε é atingido por uma função não-trivial, usaremos um argumento do tipo corte para os potenciais por meio de uma equação auxiliar; desenvolvemos este trabalho na seção 4.3.

4.2.2 Um problema autônomo

Para estudar a existência e concentração de soluções para a equação (4.1), precisamos de algumas estimativas envolvendo os níveis do passo da montanha do problema dual com diferentes coeficientes. Assim, consideramos a equação autônoma

$$-\Delta v + \kappa \frac{G^{-1}(v)}{g(G^{-1}(v))} = \nu \frac{f(G^{-1}(v))}{g(G^{-1}(v))} \text{ em } \mathbb{R}^2. \quad (4.17)$$

onde $\kappa \in [\kappa_{\min}, \kappa_{\max}]$, $\nu \in [\nu_{\min}, \nu_{\max}]$ são duas constantes.

O funcional energia correspondente ao problema (4.17) é definido por

$$I_{\kappa, \nu}(v) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} \left(|\nabla v|^2 + \kappa [G^{-1}(v)]^2 \right) dx - \int_{\mathbb{R}^2} \nu F(G^{-1}(v)) dx.$$

Sob as hipóteses impostas sobre g e f é fácil verificar que $I_{\kappa, \nu}$ é bem definido em $H^1(\mathbb{R}^2)$ e é de classe C^1 com derivada dada por

$$I'_{\kappa, \nu}(v)\varphi = \int_{\mathbb{R}^2} \left(\nabla v \nabla \varphi + \kappa \frac{G^{-1}(v)}{g(G^{-1}(v))} \varphi \right) dx - \int_{\mathbb{R}^2} \nu \frac{f(G^{-1}(v))}{g(G^{-1}(v))} \varphi dx.$$

Portanto, a partir de pontos críticos do funcional energia $I_{\kappa, \nu}$ obtemos soluções para a equação (4.17).

De forma semelhante ao que foi feito na última subseção, o funcional $I_{\kappa, \nu}$ satisfaz a geometria do passo da montanha.

A seguir, definimos a variedade de Nehari associada ao funcional $I_{\kappa, \nu}$ por

$$\mathcal{N}_{\kappa, \nu} = \{v \in H^1(\mathbb{R}^2); v \neq 0, I'_{\kappa, \nu}(v)v = 0\}.$$

De modo análogo ao que foi feito na subseção anterior, temos os seguintes lemas:

Lema 4.2.13 *Se $\varsigma > 0$ e $\|v\|_2 \leq M$ com $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 \varsigma \|\nabla v\|_2^2 < 4\pi$, então existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$\mathcal{Q}_{\kappa}(v) = \int_{\mathbb{R}^2} \left(|\nabla v|^2 + \kappa [G^{-1}(v)]^2 \right) dx \geq C, \text{ para todo } v \in \mathcal{N}_{\kappa, \nu}.$$

Lema 4.2.14 *Para cada $v \in \mathcal{N}_{\kappa, \nu}$ e $t \geq 0$, vale a desigualdade $I_{\kappa, \nu}(v) \geq I_{\kappa, \nu}(tv)$.*

Lema 4.2.15 *Para cada $v \in H^1(\mathbb{R}^2) \setminus \{0\}$, existe um único $t_v > 0$ tal que $t_v v \in \mathcal{N}_{\kappa, \nu}$. Mais ainda, o máximo de $I_{\kappa, \nu}(tv)$ para $t \geq 0$ é atingido em $t = t_v$.*

O nível minimax $c_{\kappa,\nu} := \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} I_{\kappa,\nu}(\gamma(t)) > 0$ pode ser caracterizado por

$$c_{\kappa,\nu} = \inf_{\substack{v \in H^1(\mathbb{R}^2) \\ v \neq 0}} \max_{t \geq 0} I_{\kappa,\nu}(tv) = \inf_{v \in \mathcal{N}_{\kappa,\nu}} I_{\kappa,\nu}(v) \quad (4.18)$$

onde $\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], H^1(\mathbb{R}^2)); \gamma(0) = 0, I_{\kappa,\nu}(\gamma(1)) < 0\}$.

Como $\kappa \in [\kappa_{\min}, \kappa_{\max}]$ e $\nu \in [\nu_{\min}, \nu_{\max}]$, obtemos também a seguinte estimativa para o nível do passo de montanha:

$$c_{\kappa,\nu} < \frac{(\theta - \alpha)}{\theta} \frac{\pi}{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 c_0}. \quad (4.19)$$

Seguindo a mesma ideia da Observação 4.2.12, podemos escolher uma sequência minimizante $(v_n) \subset \mathcal{N}_{\kappa,\nu}$ de $I_{\kappa,\nu}$ tal que $I_{\kappa,\nu}(v_n) \rightarrow c_{\kappa,\nu}$ e $I'_{\kappa,\nu}(v_n)v_n = 0$. Segue que (v_n) é limitada. Logo podemos assumir, sem perda de generalidade, que $v_n \rightharpoonup v_{\kappa,\nu}$ fracamente em $H^1(\mathbb{R}^2)$ para algum $v_{\kappa,\nu} \in H^1(\mathbb{R}^2)$ e $v_{\kappa,\nu}$ é uma solução fraca da equação (4.17), isto é, $I'_{\kappa,\nu}(v_{\kappa,\nu}) = 0$.

Logo, $v_{\kappa,\nu} \neq 0$. De fato, como os potenciais aqui são constantes (ou seja, periódicos) basta trabalhar com a ideia de anulamento ou não-anulamento e um Lema do tipo Lions, muito comum em problemas com potencial periódicos. Para mais detalhes sobre este argumento, o leitor pode verificar o Teorema 3.1 em [70] ou a Observação 2.0.2 do Capítulo 2.

Finalmente, resta provar que $v_{\kappa,\nu}$ é uma solução de energia mínima. Com efeito, como $v_{\kappa,\nu} \in \mathcal{N}_{\kappa,\nu}$, por (4.18) temos $I_{\kappa,\nu}(v_{\kappa,\nu}) \geq c_{\kappa,\nu}$. Por outro lado, por (f_2) , pela convergência fraca $v_n \rightharpoonup v_{\kappa,\nu}$ em $H^1(\mathbb{R}^2)$ e pelo Lema de Fatou, obtemos

$$\begin{aligned} I_{\kappa,\nu}(v_{\kappa,\nu}) - \frac{1}{2} I'_{\kappa,\nu}(v_{\kappa,\nu})v_{\kappa,\nu} &= \int_{\mathbb{R}^2} \left\{ \frac{\kappa}{2} \left[(G^{-1}(v_{\kappa,\nu}))^2 - \frac{G^{-1}(v_{\kappa,\nu})v_{\kappa,\nu}}{g(G^{-1}(v_{\kappa,\nu}))} \right] + \right. \\ &\quad \left. + \nu \left(\frac{1}{2} \frac{f(G^{-1}(v_{\kappa,\nu}))v_{\kappa,\nu}}{g(G^{-1}(v_{\kappa,\nu}))} - F(G^{-1}(v_{\kappa,\nu})) \right) \right\} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \liminf_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\kappa}{2} \left[(G^{-1}(v_n))^2 - \frac{G^{-1}(v_n)v_n}{g(G^{-1}(v_n))} \right] + \right. \\ &\quad \left. + \nu \left(\frac{1}{2} \frac{f(G^{-1}(v_n))v_n}{g(G^{-1}(v_n))} - F(G^{-1}(v_n)) \right) \right\} dx \quad (4.20) \\ &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^2} \left\{ \frac{\kappa}{2} \left[(G^{-1}(v_n))^2 - \frac{G^{-1}(v_n)v_n}{g(G^{-1}(v_n))} \right] + \right. \\ &\quad \left. + \nu \left(\frac{1}{2} \frac{f(G^{-1}(v_n))v_n}{g(G^{-1}(v_n))} - F(G^{-1}(v_n)) \right) \right\} dx \\ &= \liminf_{n \rightarrow \infty} \left[I_{\kappa,\nu}(v_n) - \frac{1}{2} I'_{\kappa,\nu}(v_n)v_n \right] = c_{\kappa,\nu}, \end{aligned}$$

isto é, $I_{\kappa,\nu}(v_{\kappa,\nu}) \leq c_{\kappa,\nu}$. Acabamos de provar o seguinte lema:

Lema 4.2.16 *Suponha que as hipóteses $(f_1) - (f_4)$ sejam satisfeitas. Então, para qualquer $\kappa \in [\kappa_{\min}, \kappa_{\max}]$ e qualquer $\nu \in [\nu_{\min}, \nu_{\max}]$, o problema (4.17) possui uma solução de energia mínima $v_{\kappa,\nu}$ com $I_{\kappa,\nu}(v_{\kappa,\nu}) = c_{\kappa,\nu}$.*

O seguinte lema descreve o comportamento dos níveis do passo da montanha para diferentes parâmetros $\kappa, \nu > 0$. Isto terá um papel importante na demonstração dos principais resultados deste trabalho.

Lema 4.2.17 *Seja $\kappa_i \in [\kappa_{\min}, \kappa_{\max}]$, $\nu_i \in [\nu_{\min}, \nu_{\max}]$, $i = 1, 2$, com $\min\{\kappa_2 - \kappa_1, \nu_1 - \nu_2\} \geq 0$. Então $c_{\kappa_1, \nu_1} \leq c_{\kappa_2, \nu_2}$. Se adicionamos a hipótese $\max\{\kappa_2 - \kappa_1, \nu_1 - \nu_2\} > 0$ então $c_{\kappa_1, \nu_1} < c_{\kappa_2, \nu_2}$. Em particular, $c_{\kappa_1, \nu_i} < c_{\kappa_2, \nu_i}$ se $\kappa_2 - \kappa_1 > 0$ e $c_{\kappa_i, \nu_2} < c_{\kappa_i, \nu_1}$, se $\nu_2 - \nu_1 > 0$.*

Prova: Consideramos apenas o caso $\min\{\kappa_2 - \kappa_1, \nu_1 - \nu_2\} \geq 0$. A prova dos outros casos é similar. Escolha v uma solução do problema (4.17) com coeficientes κ_2, ν_2 tal que $I_{\kappa_2, \nu_2}(v) = c_{\kappa_2, \nu_2}$. Pelo Lema 4.2.14 vale $I_{\kappa_2, \nu_2}(v) \geq I_{\kappa_2, \nu_2}(tv)$, para todo $t \geq 0$ e pelo Lema 4.2.15 existe $t_0 > 0$ tal que

$$I_{\kappa_1, \nu_1}(t_0v) = \max_{t \geq 0} I_{\kappa_1, \nu_1}(tv).$$

Então

$$\begin{aligned} c_{\kappa_1, \nu_1} &\leq \inf_{\substack{v \in H^1(\mathbb{R}^2) \\ n \neq 0}} \max_{t \geq 0} I_{\kappa_1, \nu_1}(tv) \\ &\leq \max_{t \geq 0} I_{\kappa_1, \nu_1}(tv) \\ &= I_{\kappa_1, \nu_1}(t_0v) \\ &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} [|\nabla(t_0v)|^2 + \kappa_1 (G^{-1}(t_0v))^2] dx - \nu_1 \int_{\mathbb{R}^2} F(G^{-1}(t_0v)) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla(t_0v)|^2 dx + \frac{\kappa_2}{2} \int_{\mathbb{R}^2} (G^{-1}(t_0v))^2 dx - \frac{\kappa_2}{2} \int_{\mathbb{R}^2} (G^{-1}(t_0v))^2 dx + \\ &+ \frac{\kappa_1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} (G^{-1}(t_0v))^2 dx - \nu_2 \int_{\mathbb{R}^2} F(G^{-1}(t_0v)) dx + \nu_2 \int_{\mathbb{R}^2} F(G^{-1}(t_0v)) dx - \\ &- \nu_1 \int_{\mathbb{R}^2} F(G^{-1}(t_0v)) dx \\ &= I_{\kappa_2, \nu_2}(t_0v) - \frac{1}{2}(\kappa_2 - \kappa_1) \int_{\mathbb{R}^2} [G^{-1}(t_0v)]^2 dx - (\nu_2 - \nu_1) \int_{\mathbb{R}^2} F(G^{-1}(t_0v)) dx \\ &\leq I_{\kappa_2, \nu_2}(t_0v) \leq I_{\kappa_2, \nu_2}(v) = c_{\kappa_2, \nu_2}. \end{aligned}$$

■

4.2.3 Equação auxiliar

Para provar que c_ε em (4.15) pode ser atingido por uma função não-trivial para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, precisamos introduzir algumas técnicas envolvendo funções do tipo corte para o problema (4.11). Sejam $a \in [\kappa_{\min}, \kappa_\infty]$, $b \in [\nu_\infty, \nu_{\max}]$ e

$$V_\varepsilon^a(x) := \max\{a, V(\varepsilon x)\}, \quad Q_\varepsilon^b(x) := \min\{b, Q(\varepsilon x)\}$$

e considere

$$-\Delta v + V_\varepsilon^a(x) \frac{G^{-1}(v)}{g(G^{-1}(v))} = Q_\varepsilon^b(x) \frac{f(G^{-1}(v))}{g(G^{-1}(v))} \quad \text{em } \mathbb{R}^2. \quad (4.21)$$

Usando as notações anteriores, vamos estudar o funcional

$$I_\varepsilon^{ab}(v) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} \left[|\nabla v|^2 + V_\varepsilon^a(x) (G^{-1}(v))^2 \right] dx - \int_{\mathbb{R}^2} Q_\varepsilon^b(x) F(G^{-1}(v)) dx$$

e a variedade de Nehari associada

$$\mathcal{N}_\varepsilon^{ab} = \left\{ v \in H^1(\mathbb{R}^2); v \neq 0, (I_\varepsilon^{ab})'(v)v = 0 \right\},$$

que corresponde a energia mínima c_ε^{ab} definida por

$$c_\varepsilon^{ab} := \inf_{\substack{v \in H^1(\mathbb{R}^2) \\ n \neq 0}} \max_{t \geq 0} I_\varepsilon^{ab}(tv).$$

Lema 4.2.18 *Suponha que as hipóteses $(f_1) - (f_4)$ são satisfeitas. Então,*

(a) $c_{a,b} \leq c_\varepsilon^{ab};$

(b) $\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} c_\varepsilon^{ab} \leq c_{V^a(0), Q^b(0)}$, onde $V^a(0) := \max\{a, V(0)\}$, $Q^b(0) := \min\{b, Q(0)\}$.
 Mais ainda, se $V(0) \leq a$ e $Q(0) \geq b$, então

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} c_\varepsilon^{ab} = c_{a,b}.$$

Prova: (a) Primeiro, observe que

$$I_\varepsilon^{ab}(v) = I_{a,b}(v) + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} (V_\varepsilon^a(x) - a) [G^{-1}(v)]^2 dx + \int_{\mathbb{R}^2} (b - Q_\varepsilon^b(x)) F(G^{-1}(v)) dx.$$

Usando a definição de $V_\varepsilon^a(x)$ e $Q_\varepsilon^b(x)$, os mesmos argumentos explorados na prova do Lema 4.2.17 levam a

$$c_{a,b} \leq c_\varepsilon^{ab}.$$

(b) Seja v uma solução do problema (4.17) com coeficientes $\kappa = V^a(0)$, $\nu = Q^b(0)$ tal que $I_{V^a(0), Q^b(0)}(v) = c_{V^a(0), Q^b(0)}$. Então existe um único $t_\varepsilon := t_\varepsilon(v)$ tal que $t_\varepsilon v \in \mathcal{N}_\varepsilon^{ab}$. Logo,

$$0 < c_\varepsilon^{ab} \leq I_\varepsilon^{ab}(t_\varepsilon v) = \max_{s \geq 0} I_\varepsilon^{ab}(sv) \quad (4.22)$$

Pela limitação de V e Q , por um argumento completamente análogo ao usado para mostrar a estimativa (4.14), existe $T > 0$ independente de ε tal que $I_\varepsilon^{ab}(sv) < 0$ para todo $s \geq T$. Conseqüentemente, por (4.22), $t_\varepsilon < T$ e podemos assumir que $t_\varepsilon \rightarrow t_0$. Observe ainda que

$$\begin{aligned} I_\varepsilon^{ab}(t_\varepsilon v) &= I_{V^a(0), Q^b(0)}(t_\varepsilon v) + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} (V_\varepsilon^a(x) - V^a(0)) [G^{-1}(t_\varepsilon v)]^2 dx \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^2} (Q^b(0) - Q_\varepsilon^b(x)) F(G^{-1}(t_\varepsilon v)) dx. \end{aligned}$$

Uma vez que Q é limitado, F é crescente e $t_\varepsilon \rightarrow t_0$, o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue implica que

$$\int_{\mathbb{R}^2} [Q^b(0) - Q_\varepsilon^b(x)] F(G^{-1}(t_\varepsilon v)) dx \rightarrow 0 \quad \text{quando } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Analogamente, temos

$$\int_{\mathbb{R}^2} [V_\varepsilon^a(x) - V^a(0)] [G^{-1}(t_\varepsilon v)]^2 dx \rightarrow 0 \quad \text{quando } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Logo usando novamente o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue e o Lema 4.2.14 vem

$$\begin{aligned} \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} c_\varepsilon^{ab} &\leq \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} I_\varepsilon^{ab}(t_\varepsilon v) \\ &= \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} [I_{V^a(0), Q^b(0)}(t_\varepsilon v) + o_\varepsilon(1)] \\ &= I_{V^a(0), Q^b(0)}(t_0 v) \\ &\leq I_{V^a(0), Q^b(0)}(v), \end{aligned}$$

finalizando a prova. ■

Sem perda de generalidade, podemos assumir que $x^* = 0 \in \widehat{\mathcal{Q}}$ em (VQ_1) ou $x^* = 0 \in \widehat{\mathcal{V}} \cap \widehat{\mathcal{Q}}$ se $\widehat{\mathcal{V}} \cup \widehat{\mathcal{Q}} \neq \emptyset$. Usamos a notação

$$d := V(0) = \min_{x \in \widehat{\mathcal{Q}}} V(x) \leq V(x) \quad \text{para todo } |x| \geq R. \quad (4.23)$$

Temos um limitante superior importante para o nível do passo da montanha c_ε .

Lema 4.2.19 *Vale a estimativa*

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} c_\varepsilon \leq c_{d, \nu_{\max}}.$$

Prova: Desde que $V_\varepsilon^a(x) = \max\{a, V(\varepsilon x)\}$ e $Q_\varepsilon^b(x) = \min\{b, Q(\varepsilon x)\}$, se escolhermos $a = \kappa_{\min}$ e $b = \nu_{\max}$, então $V_\varepsilon^a(x) = V(\varepsilon x)$ e $Q_\varepsilon^b(x) = Q(\varepsilon x)$. Consequentemente pela definição de I_ε^{ab} , vale

$$c_\varepsilon^{ab} = c_\varepsilon, \quad \text{com } a = \kappa_{\min} \text{ e } b = \nu_{\max}.$$

Pelo Lema 4.2.18 (note que $Q^b(0) = \min\{\nu_{\max}, Q(0)\}$)

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} c_\varepsilon \leq c_{V^a(0), Q^b(0)} = c_{V(0), Q(0)} = c_{d, \nu_{\max}}.$$

■

4.3 Prova dos principais resultados

Nesta seção vamos provar a existência e concentração de soluções de energia mínima descritas no Teorema 4.0.1.

Lema 4.3.1 *O nível minimax c_ε é atingido se ε suficientemente pequeno. Logo, o problema (4.11) possui uma solução de energia mínima v_ε se ε é suficientemente pequeno.*

Prova: Pela Observação 4.2.12 já sabemos que existe uma sequência $(v_n) \subset \mathcal{N}_\varepsilon$ tal que $v_n \rightharpoonup v_\varepsilon$ fracamente em $H^1(\mathbb{R}^2)$ e v_ε é uma solução fraca para (4.11), isto é, $I'_\varepsilon(v_\varepsilon) = 0$, para cada $\varepsilon > 0$. Como $f(s) = 0$ para $s \leq 0$, um cálculo simples nos fornece $\|v_n^-\| = 0$ (veja Afirmação 2.5.4 do Capítulo 2). Então podemos assumir que $v_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ o que leva a $v_\varepsilon \geq 0$.

Para completar a prova, precisamos mostrar que $v_\varepsilon \neq 0$ para ε suficientemente pequeno. Suponha o contrário, ou seja, existe uma sequência $\varepsilon_j \rightarrow 0$ com $v_{\varepsilon_j} = 0$. Para cada j fixado, assim como na Observação 4.2.12, seja $(v_n) \subset \mathcal{N}_{\varepsilon_j}$ uma sequência minimizante de I_{ε_j} tal que $I_{\varepsilon_j}(v_n) \rightarrow c_{\varepsilon_j}$ e $I'_{\varepsilon_j}(v_n)v_n = 0$. A sequência (v_n) é limitada e $v_n \rightharpoonup v_{\varepsilon_j} = 0$ em $H^1(\mathbb{R}^2)$.

Afirmação 4.3.2 *Existe uma sequência $y_n \subset \mathbb{R}^2$ e $R, \rho > 0$ tal que*

$$\int_{B_R(y_n)} |v_n|^2 dx \geq \rho. \quad (4.24)$$

Caso contrário, temos que

$$v_n \rightarrow 0 \text{ em } L^s(\mathbb{R}^2), \quad 2 < s < \infty.$$

Por (4.16) e pelo Corolário 2.4.2, para $\lambda > \bar{\lambda}$, encontramos

$$\frac{\theta - \alpha}{2\theta} \mathcal{Q}_{V, \varepsilon_j}(v_n) \leq c_{\varepsilon_j} + o_n(1) < \frac{\theta - \alpha}{2\theta} \frac{\pi}{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 \varsigma_0} + o_n(1).$$

Então, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 \varsigma_0 \|\nabla v_n\|_2^2 < 4\pi$, para todo $n \geq n_0$. Logo, assim como na estimativa (4.12) e usando (3.8), os Lemas 2.1.3, 1.1.1-(3),(5),(6) e a desigualdade de Hölder, para todo $\delta > 0$ existe $C_\delta > 0$ tal que

$$\frac{1}{\alpha} \mathcal{Q}_{V, \varepsilon_j}(v_n) \leq \nu_{\max} \delta \|v_n\|_2^2 + \nu_{\max} C_\delta \|v_n\|_{ts}^t \left\{ \int_{\mathbb{R}^2} \left[e^{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 r(\varsigma_0 + \xi) \|\nabla v_n\|_2^2 \left(\frac{v_n}{\|\nabla v_n\|_2}\right)^2} - 1 \right] dx \right\}^{\frac{1}{r}} \quad (4.25)$$

onde $r > 1$ está perto de 1, ξ é suficientemente pequeno tal que $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 r(\varsigma_0 + \xi) \|\nabla v_n\|_2^2 < 4\pi$ e $ts \geq 2$ com $s = \frac{r}{r-1}$. Aplicando o Lema 2.1.2, podemos deduzir por (4.25) que

$$\mathcal{Q}_{V, \varepsilon_j}(v_n) \rightarrow 0, \quad \text{quando } n \rightarrow \infty$$

que é uma contradição com o Lema 4.2.3. Logo a afirmação está provada.

Agora, escolhemos $b \in [\nu_{\min}, \nu_{\max}]$ e consideramos o funcional $I_{\varepsilon_j}^{db}$ com constante d definida em (4.23). Note que para cada v_n existe um único número positivo t_n tal que $t_n v_n \in \mathcal{N}_{\varepsilon_j}^{db}$.

Afirmção 4.3.3 *A sequência (t_n) é limitada.*

De fato, suponha por contradição que $t_n \rightarrow \infty$ quando $n \rightarrow \infty$. Como a sequência $w_n(x) := v_n(x + y_n) \geq 0$ é limitada em $H^1(\mathbb{R}^2)$, segue por (4.24) que seu limite fraco $w \in H^1(\mathbb{R}^2)$ é diferente de zero, isto é, $w \neq 0$. Então existe um subconjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ com $|\Omega| > 0$ e $w(x) > 0$, para todo $x \in \Omega$.

Desde que (v_n) é limitada em $H^1(\mathbb{R}^2)$ e $\nu_{\min} = \inf_{x \in \mathbb{R}^2} Q(x) > 0$, existe uma constante positiva C_1 satisfazendo

$$\int_{\Omega} \frac{f(G^{-1}(t_n w_n)) t_n w_n}{g(G^{-1}(t_n w_n)) t_n^2} dx \leq C_1, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}. \quad (4.26)$$

De fato, como $I'(t_n v_n)(t_n v_n) = 0$, usando o Lema 1.1.1-(5),(13) temos

$$\begin{aligned}
\nu_{\min} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{f(G^{-1}(t_n w_n)) t_n w_n}{g(G^{-1}(t_n w_n))} dx &\leq \int_{\mathbb{R}^2} Q_{\varepsilon_j}^b(x + y_n) \frac{f(G^{-1}(t_n w_n)) t_n w_n}{g(G^{-1}(t_n w_n))} dx \\
&= t_n^2 \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla w_n|^2 dx + \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^2} V_{\varepsilon_j}^d(x + y_n) \frac{f(G^{-1}(t_n w_n)) t_n w_n}{g(G^{-1}(t_n w_n))} dx \\
&\leq t_n^2 \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla w_n|^2 dx + t_n^2 \int_{\mathbb{R}^2} V_{\varepsilon_j}^d(x + y_n) [G^{-1}(w_n)]^2 dx \\
&\leq C t_n^2 \|w_n\|_{\varepsilon_j}^2 \leq \tilde{C} t_n^2.
\end{aligned}$$

e a limitação em (4.26) segue.

Usando (f_4) , sabemos que

$$\frac{G^{-1}(t_n w_n)}{g(G^{-1}(t_n w_n))} \frac{t_n w_n}{t_n^2} = \frac{f(G^{-1}(t_n w_n))}{g(G^{-1}(t_n w_n)) t_n^3 w_n^3} t_n^2 w_n^4 \rightarrow \infty \text{ quase sempre em } \mathbb{R}^2$$

e o Lema de Fatou implica

$$C_1 \geq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} \frac{f(G^{-1}(t_n w_n)) t_n w_n}{g(G^{-1}(t_n w_n)) t_n^2} dx = +\infty$$

que é um absurdo. Assim, (t_n) é uma sequência limitada.

No que segue assumimos $t_n \rightarrow t_0$, quando $n \rightarrow \infty$. Notando que $c_{\varepsilon_j}^{db}$ é a energia mínima do funcional $I_{\varepsilon_j}^{db}$ em $\mathcal{N}_{\varepsilon_j}^{db}$, temos

$$\begin{aligned}
c_{\varepsilon_j}^{db} &\leq I_{\varepsilon_j}^{db}(t_n v_n) \\
&= I_{\varepsilon_j}(t_n v_n) + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} [V_{\varepsilon_j}^d(x) - V(\varepsilon_j x)] [G^{-1}(t_n v_n)]^2 dx + \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^2} [Q(\varepsilon_j x) - Q_{\varepsilon_j}^b(x)] F(G^{-1}(t_n v_n)) dx.
\end{aligned} \tag{4.27}$$

Desde que $v_n \rightarrow 0$ em $L_{\text{loc}}^q(\mathbb{R}^2)$, $2 < q < \infty$ e $\{x \in \mathbb{R}^2; V(\varepsilon_j x) \leq d\}$ é limitado, é fácil ver que

$$\int_{\mathbb{R}^2} [V_{\varepsilon_j}^d(x) - V(\varepsilon_j x)] [G^{-1}(t_n v_n)]^2 dx \leq \int_{\{x \in \mathbb{R}^2; V(\varepsilon_j x) \leq d\}} [d - V(\varepsilon_j x)] |t_n v_n|^2 dx = o_n(1). \tag{4.28}$$

Usando a estimativa (2.18), $v_n \rightarrow 0$ em $L_{\text{loc}}^q(\mathbb{R}^2)$ e o fato de que $\{x \in \mathbb{R}^2; Q(\varepsilon_j x) \leq b\}$ é limitado, é possível checar que

$$\int_{\mathbb{R}^2} [Q(\varepsilon_j x) - Q_{\varepsilon_j}^d(x)] F(t_n v_n) dx \leq \int_{\{x \in \mathbb{R}^2; Q(\varepsilon_j x) \leq b\}} [Q(\varepsilon_j x) - b] F(t_n v_n) dx = o_n(1). \tag{4.29}$$

Consequentemente por (4.27) a (4.29) e pelo Lema 4.2.4, chegamos a

$$c_{\varepsilon_j}^{db} \leq I_{\varepsilon_j}(t_n v_n) + o_n(1) \leq I_{\varepsilon_j}(v_n) + o_n(1).$$

e passando ao limite quando $n \rightarrow \infty$ obtemos $c_{\varepsilon_j}^{db} \leq c_{\varepsilon_j}$. No entanto, do Lema 4.2.18-(a), temos

$$c_{d,b} \leq c_{\varepsilon_j}^{db} \leq c_{\varepsilon_j}.$$

Tomando limite quando $j \rightarrow \infty$ e usando o Lema 4.2.19, obtemos

$$c_{d,b} \leq \limsup_{j \rightarrow \infty} c_{\varepsilon_j} \leq c_{d, \nu_{\max}}$$

o que contradiz o Lema 4.2.17, pois $b < \nu_{\max}$. Portanto, $v_\varepsilon \neq 0$ para ε suficientemente pequeno.

Finalmente vamos verificar que $I_\varepsilon(v_\varepsilon) = c_\varepsilon$ também para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno. Como $v_\varepsilon \neq 0$, por (4.15) segue que $I_\varepsilon(v_\varepsilon) \geq c_\varepsilon$. Por outro lado, de modo análogo a estimativa (4.20), é fácil verificar a desigualdade contrária, com ajuda de (f_2) e do Lema de Fatou. \blacksquare

Observação 4.3.4 *Podemos provar que $v_\varepsilon > 0$ em \mathbb{R}^2 de modo análogo a Afirmação 2.5.4 do Capítulo 2.*

Lema 4.3.5 *Para $\varepsilon_n \rightarrow 0$, seja $v_n := v_{\varepsilon_n}$ a sequência de soluções obtida no Lema 4.3.1. Então existe uma sequência $(y_n) \subset \mathbb{R}^2$ com $\varepsilon_n y_n \rightarrow y_0 \in \mathcal{A}_Q$, quando $n \rightarrow \infty$, isto é,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{dist}(\varepsilon_n y_n, \mathcal{A}_Q) = 0.$$

Definindo $w_n(x) := v_n(x + y_n)$, então w_n converge forte em $H^1(\mathbb{R}^2)$ para uma solução de energia mínima w de

$$-\Delta w + V(y_0) \frac{G^{-1}(w)}{g(G^{-1}(w))} = Q(y_0) \frac{f(G^{-1}(w))}{g(G^{-1}(w))} \quad \text{em } \mathbb{R}^2. \quad (4.30)$$

Em particular, se $\widehat{\mathcal{V}} \cap \widehat{\mathcal{Q}} \neq \emptyset$, segue que $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{dist}(\varepsilon_n y_n, \widehat{\mathcal{V}} \cap \widehat{\mathcal{Q}}) = 0$ e, a menos de subsequência, w_n converge em $H^1(\mathbb{R}^2)$ para uma solução de energia mínima w de

$$-\Delta w + \kappa_{\min} \frac{G^{-1}(w)}{g(G^{-1}(w))} = \nu_{\max} \frac{f(G^{-1}(w))}{g(G^{-1}(w))} \quad \text{em } \mathbb{R}^2, \quad w > 0. \quad (4.31)$$

Prova: Seja (v_n) a sequência de soluções do problema (4.11) obtida no Lema 4.3.1 com parâmetro $\varepsilon_n \rightarrow 0$. Existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\|v_n\|_{\varepsilon_n} \leq C, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}. \quad (4.32)$$

Com efeito, como em (4.16), obtemos

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{\alpha}{2\theta}\right) \mathcal{Q}_{V,\varepsilon_n}(v_n) \leq c_{\varepsilon_n} \leq \frac{(\theta - \alpha)}{\theta} \frac{\pi}{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 \varsigma_0} \quad (4.33)$$

onde na última desigualdade usamos a estimativa no Lema 2.4.2. Portanto, usando a desigualdade de Gagliardo-Nirenberg obtemos (4.32), da mesma forma que no Lema 2.3.1.

Do mesmo modo como foi justificada a estimativa (4.24) no Lema 4.3.1, conseguimos obter $r, \varrho > 0$ e uma sequência $(y_n) \subset \mathbb{R}^2$ tal que

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{B_r(y_n)} |v_n|^2 dx \geq \varrho. \quad (4.34)$$

Sendo $w_n(x) := v_n(x + y_n)$, $\tilde{V}_{\varepsilon_n}(x) = V(\varepsilon_n(x + y_n))$ e $\tilde{Q}_{\varepsilon_n}(x) = Q(\varepsilon_n(x + y_n))$, vemos que w_n resolve o problema abaixo

$$-\Delta w + \tilde{V}_{\varepsilon_n}(x) \frac{G^{-1}(w)}{g(G^{-1}(w))} = \tilde{Q}_{\varepsilon_n}(x) \frac{f(G^{-1}(w))}{g(G^{-1}(w))} \quad \text{em } \mathbb{R}^2,$$

com funcional energia dado por

$$\begin{aligned} \tilde{I}_{\varepsilon_n}(w_n) &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} \left\{ |\nabla w_n|^2 + \tilde{V}_{\varepsilon_n}(x) [G^{-1}(w_n)]^2 \right\} dx - \int_{\mathbb{R}^2} \tilde{Q}_{\varepsilon_n}(x) F(G^{-1}(w_n)) dx \\ &= \frac{1}{2} \mathcal{Q}_{\tilde{V}_{\varepsilon_n}}(w_n) - \int_{\mathbb{R}^2} \tilde{Q}_{\varepsilon_n}(x) F(G^{-1}(w_n)) dx. \end{aligned}$$

Desde que w_n também é limitada temos $w_n \rightharpoonup w$ em $H^1(\mathbb{R}^2)$ e, por (4.34), podemos assumir que $w \neq 0$.

Afirmção 4.3.6 *A sequência $(\varepsilon_n y_n)$ é limitada.*

Caso contrário $|\varepsilon_n y_n| \rightarrow \infty$, quando $n \rightarrow \infty$. Então, devido a limitação de V e Q , podemos supor que $V(\varepsilon_n y_n) \rightarrow V_0 \geq d$ e $Q(\varepsilon_n y_n) \rightarrow Q_0 \leq \nu_\infty < \nu_{\max}$. Como $\tilde{I}'_{\varepsilon_n}(w_n)\varphi = 0$ para qualquer $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$, devemos ter

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\mathbb{R}^2} \left[\nabla w_n \nabla \varphi + \tilde{V}_{\varepsilon_n}(x) \frac{G^{-1}(w_n)}{g(G^{-1}(w_n))} \varphi \right] dx - \int_{\mathbb{R}^2} \tilde{Q}_{\varepsilon_n}(x) \frac{f(G^{-1}(w_n))}{g(G^{-1}(w_n))} \varphi dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \left[\nabla w_n \nabla \varphi + V(\varepsilon_n y_n) \frac{G^{-1}(w_n)}{g(G^{-1}(w_n))} \varphi \right] dx - Q(\varepsilon_n y_n) \int_{\mathbb{R}^2} \frac{f(G^{-1}(w_n))}{g(G^{-1}(w_n))} \varphi dx + \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^2} \left[\tilde{V}_{\varepsilon_n}(x) - V(\varepsilon_n y_n) \right] \frac{G^{-1}(w_n)}{g(G^{-1}(w_n))} \varphi dx + \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^2} \left[Q(\varepsilon_n y_n) - \tilde{Q}_{\varepsilon_n}(x) \right] \frac{f(G^{-1}(w_n))}{g(G^{-1}(w_n))} \varphi dx. \end{aligned} \quad (4.35)$$

Desde que V é uma função contínua e $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$, vale

$$\int_{\mathbb{R}^2} \left[\tilde{V}_{\varepsilon_n}(x) - V(\varepsilon_n y_n) \right] \frac{G^{-1}(w_n)}{g(G^{-1}(w_n))} \varphi dx = o_n(1). \quad (4.36)$$

Agora, note que a desigualdade (4.33) nos fornece $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 s_0 \|\nabla w_n\|_2^2 < 4\pi$. Portanto, por (3.8), pelos Lemas 1.1.1-(2),(3),(6), 2.1.2, 2.1.3, pela continuidade de Q e a desigualdade de Hölder, vem

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\mathbb{R}^2} \left[Q(\varepsilon_n y_n) - \tilde{Q}_{\varepsilon_n}(x) \right] \frac{f(G^{-1}(w_n))}{g(G^{-1}(w_n))} \varphi dx \right| \leq \int_{\mathbb{R}^2} \left| Q(\varepsilon_n y_n) - \tilde{Q}_{\varepsilon_n}(x) \right| f(G^{-1}(w_n)) \varphi dx \\ & \leq \delta \int_{\mathbb{R}^2} \left| Q(\varepsilon_n y_n) - \tilde{Q}_{\varepsilon_n}(x) \right| |w_n \varphi| dx \\ & \quad + C_\delta \left\{ \int_{\mathbb{R}^2} \left[e^{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 s(s_0 + \xi) \|\nabla w_n\|_2^2 \left(\frac{w_n}{\|\nabla w_n\|_2}\right)^2} - 1 \right] dx \right\}^{\frac{1}{s}} \\ & \quad \times \left\{ \int_{\mathbb{R}^2} \left| Q(\varepsilon_n y_n) - \tilde{Q}_{\varepsilon_n}(x) \right|^{s'} |w_n \varphi|^{s'} dx \right\}^{\frac{1}{s'}} = o_n(1), \end{aligned} \quad (4.37)$$

onde $\delta > 0$ é arbitrário, $C_\delta > 0$ é uma constante, $\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = 1$, com $s > 1$ suficientemente próximo de 1 e $\xi > 0$ é suficientemente pequeno tal que $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 s(s_0 + \xi) \|\nabla w_n\|_2^2 < 4\pi$. Usando (4.36), (4.37) e passando ao limite em (4.35) (veja também (2.24) no Lema 2.3.4), obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^2} \left[\nabla w \nabla \varphi + V_0 \frac{G^{-1}(w)}{g(G^{-1}(w))} \varphi \right] dx - Q_0 \int_{\mathbb{R}^2} \frac{f(G^{-1}(w))}{g(G^{-1}(w))} \varphi dx = 0$$

para qualquer $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$. Isto significa que w uma solução fraca da equação

$$-\Delta w + V_0 \frac{G^{-1}(w)}{g(G^{-1}(w))} = Q_0 \frac{f(G^{-1}(w))}{g(G^{-1}(w))}, \quad \text{em } \mathbb{R}^2.$$

Observe que $I_{\varepsilon_n}(v_n) = \tilde{I}_{\varepsilon_n}(w_n)$. Como $\min\{V_0 - d, \nu_{\max} - Q_0\} > 0$, pelo Lema 4.2.17 e pelo Lema de Fatou

$$\begin{aligned} c_{d, \nu_{\max}} &< c_{V_0, Q_0} \leq I_{V_0, Q_0}(w) = I_{V_0, Q_0}(w) - \frac{1}{2} I'_{V_0, Q_0}(w)w \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \liminf_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{2} \tilde{V}_{\varepsilon_n}(x) \left[(G^{-1}(w_n))^2 - \frac{G^{-1}(w_n)}{g(G^{-1}(w_n))} w_n \right] + \right. \\ & \quad \left. + \tilde{Q}_{\varepsilon_n}(x) \left[\frac{1}{2} \frac{f(G^{-1}(w_n))}{g(G^{-1}(w_n))} w_n - F(G^{-1}(w_n)) \right] \right\} dx \\ &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \left[\tilde{I}_{\varepsilon_n}(w_n) - \frac{1}{2} \tilde{I}'_{\varepsilon_n}(w_n)w_n \right] = \liminf_{n \rightarrow \infty} c_{\varepsilon_n}. \end{aligned}$$

Isto contradiz o Lema 4.2.19, que afirma o seguinte:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} c_{\varepsilon_n} \leq c_{d, \nu_{\max}}.$$

Logo a sequência $(\varepsilon_n y_n)$ é limitada, e podemos assumir $\varepsilon_n y_n \rightarrow y_0$ quando $n \rightarrow \infty$.

Afirmção 4.3.7 $y_0 \in \mathcal{A}_Q := \{x \in \widehat{\mathcal{Q}}; V(x) = V(0)\} \cup \{x \notin \widehat{\mathcal{Q}}; V(x) < V(0)\}$.

Seguindo os argumentos usados na prova da Afirmção 4.3.6, sabemos que o limite fraco w é uma solução da equação

$$-\Delta w + V(y_0) \frac{G^{-1}(w)}{g(G^{-1}(w))} = Q(y_0) \frac{f(G^{-1}(w))}{g(G^{-1}(w))}, \quad \text{em } \mathbb{R}^2 \quad (4.38)$$

Se $y_0 \notin \mathcal{A}_Q$, então $V(y_0) > V(0) = d$ (e sabemos que $\nu_{\max} > Q(y_0)$); temos $c_{d, \nu_{\max}} < c_{V(y_0), Q(y_0)}$. Repetindo os argumentos da Afirmção 4.3.6 novamente chegamos à seguinte contradição:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} c_{\varepsilon_n} \leq c_{d, \nu_{\max}} < c_{V(y_0), Q(y_0)} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} c_{\varepsilon_n}.$$

Logo $y_0 \in \mathcal{A}_Q$, isto é, $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{dist}(\varepsilon_n y_n, \mathcal{A}_Q) = 0$. Em particular, se $\widehat{\mathcal{V}} \cap \widehat{\mathcal{Q}} \neq \emptyset$, então $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{dist}(\varepsilon_n y_n, \widehat{\mathcal{V}} \cap \widehat{\mathcal{Q}}) = 0$.

Agora, repetimos os argumentos na prova do Lema 4.2.18 -(b) e obtemos

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} \widetilde{I}_{\varepsilon_n}(w_n) &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \widetilde{c}_{\varepsilon_n} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \widetilde{I}_{\varepsilon_n}(t_{\varepsilon_n} w) \\ &= \limsup_{n \rightarrow \infty} [I_{V(y_0), Q(y_0)}(t_{\varepsilon_n} w) + o_n(1)] \\ &\leq I_{V(y_0), Q(y_0)}(w). \end{aligned} \quad (4.39)$$

Por outro lado, novamente pelo Lema de Fatou

$$\begin{aligned} c_{V(y_0), Q(y_0)} &\leq I_{V(y_0), Q(y_0)}(w) - \frac{1}{2} I'_{V(y_0), Q(y_0)}(w)w \\ &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \left[\widetilde{I}_{\varepsilon_n}(w_n) - \frac{1}{2} I'_{\varepsilon_n}(w_n)w_n \right] = \liminf_{n \rightarrow \infty} \widetilde{I}_{\varepsilon_n}(w_n). \end{aligned}$$

Assim, $\lim_{n \rightarrow \infty} \widetilde{I}_{\varepsilon_n}(w_n) = I_{V(y_0), Q(y_0)}(w)$. Como em (4.39), sendo \bar{w} uma solução do problema autônomo (4.38) tal que $I_{V(y_0), Q(y_0)}(\bar{w}) = c_{V(y_0), Q(y_0)}$, temos

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \widetilde{I}_{\varepsilon_n}(w_n) \leq I_{V(y_0), Q(y_0)}(\bar{w}) = c_{V(y_0), Q(y_0)},$$

donde, $\lim_{n \rightarrow \infty} \widetilde{I}_{\varepsilon_n}(w_n) = c_{V(y_0), Q(y_0)}$. Logo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \widetilde{I}_{\varepsilon_n}(w_n) = c_{V(y_0), Q(y_0)} = I_{V(y_0), Q(y_0)}(w). \quad (4.40)$$

Logo, a menos de subsequência, (w_n) converge fracamente em $H^1(\mathbb{R}^2)$ para uma solução de energia mínima w de

$$-\Delta w + V(y_0) \frac{G^{-1}(w)}{g(G^{-1}(w))} = Q(y_0) \frac{f(G^{-1}(w))}{g(G^{-1}(w))} \quad \text{em } \mathbb{R}^2.$$

Afirmação 4.3.8 w_n converge forte para w em $H^1(\mathbb{R}^2)$.

Desde que V e Q são duas funções contínuas, sabemos que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} \tilde{V}_{\varepsilon_n}(x) [G^{-1}(w)]^2 dx &= V(y_0) \int_{\mathbb{R}^2} [G^{-1}(w)]^2 dx + o_n(1) \quad e \\ \int_{\mathbb{R}^2} \tilde{Q}_{\varepsilon_n}(x) F(G^{-1}(w)) dx &= Q(y_0) \int_{\mathbb{R}^2} F(G^{-1}(w)) dx + o_n(1), \end{aligned}$$

o que implica

$$\tilde{I}_{\varepsilon_n}(w) \rightarrow I_{V(y_0), Q(y_0)}(w) \quad \text{quando } n \rightarrow \infty. \quad (4.41)$$

Note que

$$\begin{aligned} \tilde{I}_{\varepsilon_n}(w_n - w) - \tilde{I}_{\varepsilon_n}(w_n) + \tilde{I}_{\varepsilon_n}(w) &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} [|\nabla(w_n - w)|^2 - |\nabla w_n|^2 + |\nabla w|^2] dx + \\ &+ \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} \tilde{V}_{\varepsilon_n}(x) [|G^{-1}(w_n - w)|^2 - |G^{-1}(w_n)|^2 + |G^{-1}(w)|^2] dx - \\ &- \int_{\mathbb{R}^2} \tilde{Q}_{\varepsilon_n}(x) [F(G^{-1}(w_n - w)) - F(G^{-1}(w_n)) + F(G^{-1}(w))] dx. \end{aligned} \quad (4.42)$$

É fácil ver que

$$\int_{\mathbb{R}^2} [|\nabla(w_n - w)|^2 - |\nabla w_n|^2 + |\nabla w|^2] dx = 2 \int_{\mathbb{R}^2} \nabla(w - w_n) \cdot \nabla w dx \rightarrow 0. \quad (4.43)$$

Sendo $\bar{w}_n := w_n - w$, temos

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_{\varepsilon_n}(x) [F(G^{-1}(\bar{w}_n + w)) - F(G^{-1}(\bar{w}_n))] &= \tilde{Q}_{\varepsilon_n}(x) \int_0^1 \frac{d}{dt} F(G^{-1}(\bar{w}_n + tw)) dt \\ &= \tilde{Q}_{\varepsilon_n}(x) \int_0^1 \frac{f(G^{-1}(\bar{w}_n + tw))}{g(G^{-1}(\bar{w}_n + tw))} w dt. \end{aligned}$$

Pelo Lema 1.1.1-(3) e pela estimativa (3.8), dados $q \geq 1$ e $\xi > 0$, existe uma constante

$C > 0$ tal que

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_{\varepsilon_n}(x) [F(G^{-1}(\bar{w}_n + w)) - F(G^{-1}(\bar{w}_n))] &\leq \\ &\leq \nu_{\max} \int_0^1 [|G^{-1}(\bar{w}_n + tw)| |w| + C |G^{-1}(\bar{w}_n + tw)|^q |w| (e^{\varsigma [G^{-1}(\bar{w}_n + tw)]^{2\alpha}} - 1)] dt \\ &\leq \nu_{\max} |\bar{w}_n| |w| + \nu_{\max} |w|^2 + C |\bar{w}_n|^q |w| [e^{\varsigma (\frac{\alpha}{\beta})^2 |w_n|^2} - 1] + C |w|^{q+1} [e^{\varsigma (\frac{\alpha}{\beta})^2 |w_n|^2} - 1], \end{aligned}$$

onde $\varsigma = \varsigma_0 + \xi$ é tal que $(\frac{\alpha}{\beta})^2 r_1 (\varsigma_0 + \xi) \|\nabla w_n\|_2^2 < 4\pi$. Logo, sendo $r_2 = \frac{r_1}{r_1 - 1}$, usando

a desigualdade de Young, para cada $\delta > 0$ existe uma constante $C_\delta > 0$, tal que

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_{\varepsilon_n}(x) | F(G^{-1}(w_n - w)) - F(G^{-1}(w_n)) + F(G^{-1}(w)) | &\leq \delta C_1 |\bar{w}_n|^2 + C_\delta |w|^2 + \\ &+ \delta C |\bar{w}_n|^{qr_1} [e^{\varsigma r_1 (\frac{\alpha}{\beta})^2 |w_n|^2} - 1] + C_\delta |w|^{r_2} + \delta C [e^{\varsigma r_1 (\frac{\alpha}{\beta})^2 |w_n|^2} - 1] + C_\delta |w|^{r_2(q+1)} + \\ &+ C_\delta [e^{\varsigma (\frac{\alpha}{\beta})^2 |w|^2} - 1]. \end{aligned}$$

Consideramos uma função $G_{\delta,n}$ dada por

$$G_{\delta,n}(x) = \max \left\{ \tilde{Q}_{\varepsilon_n}(x) |F(G^{-1}(w_n - w)) - F(G^{-1}(w_n)) + F(G^{-1}(w))| - \delta C_1 |\bar{w}_n|^2 - \right. \\ \left. - \delta C |\bar{w}_n|^{q_{r_1}} \left[e^{s_{r_1} \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 |w_n|^2} - 1 \right] - \delta C \left[e^{s_{r_1} \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 |w_n|^2} - 1 \right], 0 \right\},$$

que satisfaz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} G_{\delta,n}(x) = \max \left\{ -\delta C \left[e^{s_{r_1} \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 |w_n|^2} - 1 \right], 0 \right\} = 0 \text{ quase sempre em } \mathbb{R}^2, \\ 0 \leq G_{\delta,n}(x) \leq C_\delta |w|^2 + C_\delta |w|^{r_2} + C_\delta |w|^{r_2(q+1)} + C_\delta \left[e^{s \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 |w|^2} - 1 \right] \in L^1(\mathbb{R}^2).$$

Portanto, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, temos

$$\int_{\mathbb{R}^2} G_{\delta,n}(x) dx \rightarrow 0.$$

Pela definição de $G_{\delta,n}$, segue que

$$\tilde{Q}_{\varepsilon_n}(x) |F(G^{-1}(w_n - w)) - F(G^{-1}(w_n)) + F(G^{-1}(w))| \leq \delta C_1 |\bar{w}_n|^2 + \delta C |\bar{w}_n|^{q_{r_1}} \\ \times \left[e^{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 r_1 \varsigma \|\nabla w_n\|_2^2 \left(\frac{w_n}{\|\nabla w_n\|_2}\right)^2} - 1 \right] + \delta C \left[e^{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 r_1 \varsigma \|\nabla w_n\|_2^2 \left(\frac{w_n}{\|\nabla w_n\|_2}\right)^2} - 1 \right] + |G_{\delta,n}(x)|.$$

Logo, usando novamente a desigualdade de Hölder e o Lema 2.1.2, obtemos a seguinte desigualdade:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^2} \tilde{Q}_{\varepsilon_n}(x) |F(G^{-1}(w_n - w)) - F(G^{-1}(w_n)) + F(G^{-1}(w))| dx \leq C\delta,$$

o que implica

$$\int_{\mathbb{R}^2} \tilde{Q}_{\varepsilon_n}(x) |F(G^{-1}(w_n - w)) - F(G^{-1}(w_n)) + F(G^{-1}(w))| dx = o_n(1). \quad (4.44)$$

Usando a mesma ideia acima obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^2} \tilde{V}_{\varepsilon_n}(x) \left| [G^{-1}(w_n - w)]^2 - [G^{-1}(w_n)]^2 + [G^{-1}(w)]^2 \right| dx = o_n(1). \quad (4.45)$$

Segue por (4.40)-(4.45) que

$$\begin{aligned} \tilde{I}_{\varepsilon_n}(w_n - w) &= \tilde{I}_{\varepsilon_n}(w_n) - \tilde{I}_{\varepsilon_n}(w) + o_n(1) \\ &= c_{V(y_0), Q(y_0)} - c_{V(y_0), Q(y_0)} + o_n(1) \\ &= o_n(1). \end{aligned} \quad (4.46)$$

Analogamente,

$$\tilde{I}'_{\varepsilon_n}(w_n - w)(w_n - w) = o_n(1). \quad (4.47)$$

Assim, por (4.46) e (4.47) e a estimativa feita no início da prova do Lema 2.3.1, vem

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{\alpha}{2\theta}\right) \mathcal{Q}_{\tilde{V}_{\varepsilon_n}}(w_n - w) \leq \tilde{I}_{\varepsilon_n}(w_n - w) - \frac{\alpha}{2\theta} \tilde{I}'_{\varepsilon_n}(w_n - w)(w_n - w) = o_n(1),$$

donde

$$\int_{\mathbb{R}^2} |\nabla w_n - \nabla w|^2 dx = o_n(1) \quad \text{e} \quad \int_{\mathbb{R}^2} \tilde{V}_{\varepsilon_n}(x) [G^{-1}(w_n - w)]^2 dx = o_n(1).$$

Novamente, como na prova do Lema 2.3.1, através da desigualdade de Gagliardo-Nirenberg, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^2} |w_n - w|^2 dx = o_n(1).$$

Portanto $\|w_n - w\| \rightarrow 0$, provando a Afirmação 4.3.8. \blacksquare

Lema 4.3.9 Para $\varepsilon_n \rightarrow 0$, seja $v_n := v_{\varepsilon_n}$ a seqüências de soluções do problema (4.11) e $y_n \in \mathbb{R}^2$ a seqüência obtida no Lema 4.3.5 e defina $w_n(x) := v_n(x + y_n)$, $\tilde{V}_{\varepsilon_n}(x) = V(\varepsilon_n(x + y_n))$ e $\tilde{Q}_{\varepsilon_n}(x) = Q(\varepsilon_n(x + y_n))$. Então existe uma constante $C > 0$ tal que $|w_n|_{\infty} \leq C$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Além disso,

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} w_n(x) = 0 \quad \text{uniformemente em } n \in \mathbb{N}$$

e existem constantes $M, \zeta > 0$ tal que

$$|w_n(x)| \leq M e^{-\zeta|x|}, \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}^2.$$

Prova: Pelo Lema 4.3.5 sabemos que $\varepsilon_n y_n \rightarrow y_0 \in \mathcal{A}_Q$, quando $n \rightarrow \infty$ e $w_n(x) := v_n(x + y_n)$ converge fortemente em $H^1(\mathbb{R}^2)$ para uma solução de energia mínima w do problema (4.30). Para quaisquer $R > 0$, $0 < r \leq \frac{R}{2}$, seja $\eta \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, $0 \leq \eta \leq 1$ com $\eta(x) = 1$ se $|x| \geq R$ e $\eta(x) = 0$ se $|x| \leq R - r$ e $|\nabla \eta| \leq \frac{2}{r}$. Para $L > 0$, seja

$$w_{L,n}(x) = \begin{cases} w_n(x), & w_n(x) < L \\ L, & w_n(x) \geq L \end{cases}$$

e

$$z_{L,n} = \eta^2 w_{L,n}^{2(\gamma-1)} w_n \quad \text{e} \quad \tilde{z}_{L,n} = \eta w_n w_{L,n}^{\gamma-1},$$

com $\gamma > 1$ a ser determinada mais adiante. Tomando $z_{L,n}$ como função teste obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} \eta^2 w_{L,n}^{2(\gamma-1)} |\nabla w_n|^2 dx &= -2(\gamma - 1) \int_{\mathbb{R}^2} w_n w_{L,n}^{2\gamma-3} \eta^2 \nabla w_n \nabla w_{L,n} dx + \\ &+ \int_{\mathbb{R}^2} \tilde{Q}_{\varepsilon_n}(x) \frac{f(G^{-1}(w_n))}{g(G^{-1}(w_n))} \eta^2 w_n w_{L,n}^{2(\gamma-1)} dx - \int_{\mathbb{R}^2} \tilde{V}_{\varepsilon_n}(x) \frac{G^{-1}(w_n)}{g(G^{-1}(w_n))} w_n \eta^2 w_{L,n}^{2(\gamma-1)} dx - \\ &- 2 \int_{\mathbb{R}^2} \eta w_{L,n}^{2(\gamma-1)} w_n \nabla w_n \nabla \eta dx. \end{aligned}$$

Pelo Lema 1.1.1-(2),(3),(6) e (3.8), para qualquer $\delta > 0$ suficientemente pequeno, existe uma constante $C_\delta > 0$ tal que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} \eta^2 w_{L,n}^{2(\gamma-1)} |\nabla w_n|^2 dx &\leq \delta \nu_{\max} \int_{\mathbb{R}^2} w_n^2 \eta^2 w_{L,n}^{2(\gamma-1)} dx + \\ &+ \nu_{\max} C_\delta \int_{\mathbb{R}^2} \left[e^{\varsigma \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 w_n} - 1 \right] |w_n|^p \eta^2 w_{L,n}^{2(\gamma-1)} dx + \int_{\mathbb{R}^2} \eta w_{L,n}^{2(\gamma-1)} w_n |\nabla w_n| |\nabla \eta| dx \leq \\ &\leq C_\delta \int_{\mathbb{R}^2} |w_n|^p \eta^2 w_{L,n}^{2(\gamma-1)} \left[e^{\varsigma \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 w_n} - 1 \right] dx + 2 \int_{\mathbb{R}^2} \eta w_{L,n}^{2(\gamma-1)} w_n |\nabla w_n| |\nabla \eta| dx, \end{aligned}$$

onde $\varsigma = \varsigma_0 + \xi$ para $\xi > 0$ suficientemente pequeno. Para cada $\tau > 0$, usando a desigualdade de Young

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} \eta^2 w_{L,n}^{2(\gamma-1)} |\nabla w_n|^2 dx &\leq C_\delta \int_{\mathbb{R}^2} |w_n|^p \eta^2 w_{L,n}^{2(\gamma-1)} \left[e^{\varsigma \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 w_n} - 1 \right] dx + \\ &+ 2\tau \int_{\mathbb{R}^2} \eta^2 w_{L,n}^{2(\gamma-1)} |\nabla w_n|^2 dx + 2C_\tau \int_{\mathbb{R}^2} w_n^2 w_{L,n}^{2(\gamma-1)} |\nabla \eta|^2 dx. \end{aligned}$$

Novamente, escolhendo $\tau > 0$ suficientemente pequeno,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} \eta^2 w_{L,n}^{2(\gamma-1)} |\nabla w_n|^2 dx &\leq C_\delta \int_{\mathbb{R}^2} |w_n|^p \eta^2 w_{L,n}^{2(\gamma-1)} \left[e^{\varsigma \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 w_n} - 1 \right] dx + \\ &+ C_\tau \int_{\mathbb{R}^2} w_n^2 w_{L,n}^{2(\gamma-1)} |\nabla \eta|^2 dx. \end{aligned} \quad (4.48)$$

Por outro lado, pelas imersões de Sobolev,

$$\begin{aligned} |\tilde{z}_{L,n}|_p^2 &\leq C \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla (\eta w_n w_{L,n}^{\gamma-1})|^2 dx \\ &= C \int_{\mathbb{R}^2} |w_n w_{L,n}^{\gamma-1} \nabla \eta + \eta w_{L,n}^{\gamma-1} \nabla w_n + (\gamma-1) w_n w_{L,n}^{\gamma-2} \eta \nabla w_{L,n}|^2 dx \\ &\leq C_1 \left[\int_{\mathbb{R}^2} \gamma^2 w_n^2 w_{L,n}^{2(\gamma-1)} |\nabla \eta|^2 dx + \right. \\ &\quad \left. + \int_{\mathbb{R}^2} |\eta w_{L,n}^{\gamma-1} \nabla w_n + (\gamma-1) w_n w_{L,n}^{\gamma-2} \eta \nabla w_{L,n}|^2 dx \right] \\ &\leq C\gamma^2 \left[\int_{\mathbb{R}^2} w_n^2 w_{L,n}^{2(\gamma-1)} |\nabla \eta|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^2} \eta^2 w_{L,n}^{2(\gamma-1)} |\nabla w_n|^2 dx \right]. \end{aligned} \quad (4.49)$$

Usando (4.48) e (4.49),

$$|\tilde{z}_{L,n}|_p^2 \leq C\gamma^2 \left[\int_{\mathbb{R}^2} w_n^2 w_{L,n}^{2(\gamma-1)} |\nabla \eta|^2 dx + \int_{|x| \geq \frac{R}{2}} |w_n|^p \eta^2 w_{L,n}^{2(\gamma-1)} \left[e^{\varsigma \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 w_n} - 1 \right] dx \right] \quad (4.50)$$

e por (4.50)

$$\begin{aligned} |\tilde{z}_{L,n}|_p^2 &\leq C\gamma^2 \left[\int_{R-r \leq |x| \leq R} w_n^2 w_{L,n}^{2(\gamma-1)} dx + \int_{|x| \geq R-r} |w_n|^p w_{L,n}^{2(\gamma-1)} \left[e^{\varsigma \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 w_n} - 1 \right] dx \right] \\ &\leq C\gamma^2 \left[\int_{R-r \leq |x| \leq R} w_n^{2\gamma} dx + \int_{|x| \geq R-r} w_n^{p-2} w_n^{2\gamma} \left[e^{\varsigma \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 w_n} - 1 \right] dx \right]. \end{aligned}$$

A desigualdade de Hölder com expoentes $\frac{t}{t-1}$ e t , nos fornece

$$|\tilde{z}_{L,n}|_p^2 \leq C\gamma^2 \left\{ \left[\int_{R-r \leq |x| \leq R} w_n^{\frac{2\gamma t}{t-1}} dx \right]^{\frac{t-1}{t}} \left[\int_{R-r \leq |x| \leq R} dx \right]^{\frac{1}{t}} + \right. \\ \left. + \left[\int_{|x| \geq R-r} w_n^{(p-2)t} \left[e^{t\varsigma \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 w_n} - 1 \right] dx \right]^{\frac{1}{t}} \left[\int_{|x| \geq R-r} w_n^{\frac{2\gamma t}{t-1}} dx \right]^{\frac{t-1}{t}} \right\}.$$

Considerando $t > 1$ perto de 1 e $\xi > 0$ suficientemente pequeno tal que $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 t(\varsigma_0 + \xi) \|\nabla w_n\|_2^2 < 4\pi$, mais uma vez pela desigualdade de Hölder e pelo Lemma 2.1.2, chegamos a

$$|\tilde{z}_{L,n}|_p^2 \leq C\gamma^2 \left\{ \left[\int_{|x| \geq R-r} w_n^{\frac{2\gamma t}{t-1}} dx \right]^{\frac{t-1}{t}} \left[\int_{R-r \leq |x| \leq R} dx \right]^{\frac{1}{t}} + \left[\int_{|x| \geq R-r} w_n^{\frac{(p-2)t^2}{t-1}} dx \right]^{\frac{t-1}{t^2}} \right. \\ \left. \times \left[\int_{|x| \geq R-r} \left[e^{t^2\varsigma \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 \|\nabla w_n\|_2^2 \left(\frac{w_n}{\|\nabla w_n\|_2}\right)^2} - 1 \right] dx \right]^{\frac{1}{t^2}} \left[\int_{|x| \geq R-r} w_n^{\frac{2\gamma t}{t-1}} dx \right]^{\frac{t-1}{t}} \right\} \\ \leq C\gamma^2 \left[\int_{|x| \geq R-r} w_n^{\frac{2\gamma t}{t-1}} dx \right]^{\frac{t-1}{t}}.$$

Agora, usando os mesmos argumentos da prova do Lema 4.3 em [65], determinamos $\gamma = \frac{p(t-1)}{2t}$ para obter

$$|w_n|_{L^\infty(|x| \geq R)} \leq C|w_n|_{p(|x| \geq R-r)} \leq C|w_n|_{p(|x| \geq \frac{R}{2})}. \quad (4.51)$$

Vamos descrever aqui tais argumentos: Note que

$$|w_{L,n}|_{p\gamma(|x| \geq R)}^{2\gamma} = \left(\int_{|x| \geq R} w_{L,n}^{p\gamma} dx \right)^{\frac{2}{p}} = \left(\int_{|x| \geq R} \eta^p w_n^p w_{L,n}^{p(\gamma-1)} \right)^{\frac{2}{p}} \\ \leq |\tilde{z}_{L,n}|_p^2 \leq C\gamma^2 \left[\int_{|x| \geq R-r} w_n^{\frac{2\gamma t}{t-1}} dx \right]^{\frac{t-1}{t}} \\ = C\gamma^2 |w_n|_{\frac{2\gamma t}{t-1}(|x| \geq R-r)}^{2\gamma}.$$

Aplicando o Lema de Fatou vem

$$|w_n|_{p\gamma(|x| \geq R)} \leq C^{\frac{1}{2\gamma}} \gamma^{\frac{1}{\gamma}} |w_n|_{\frac{2\gamma t}{t-1}(|x| \geq R-r)}.$$

Combinando $\gamma = \frac{p(t-1)}{2t}$, $q = \frac{2t}{t-1}$ e a última desigualdade, obtemos

$$|w_n|_{\gamma^2 q} = |w_n|_{\frac{p(t-1)}{2t} \frac{p(t-1)}{2t} \frac{2t}{t-1}} = |w_n|_{p \frac{p(t-1)}{2t}} = |w_n|_{p\gamma},$$

isto é,

$$|w_n|_{\gamma^2 q(|x| \geq R)} \leq C^{\frac{1}{2\gamma}} \gamma^{\frac{1}{\gamma}} |w_n|_{\frac{2\gamma t}{t-1}(|x| \geq R-r)} = C^{\frac{1}{2\gamma}} \gamma^{\frac{1}{\gamma}} |w_n|_{p(|x| \geq R-r)}.$$

Prosseguindo com este processo de iteraçãõ, vem

$$|w_n|_{\gamma^{m+1}q(|x|\geq R)} \leq C^{\sum_{i=1}^m \frac{1}{2\gamma^i}} \gamma^{\sum_{i=1}^m \frac{1}{\gamma^i}} |w_n|_{p(|x|\geq R-r)},$$

que implica em

$$|w_n|_{L^\infty(|x|\geq R)} \leq C |w_n|_{p(|x|\geq R-r)} \leq C |w_n|_{p(|x|\geq \frac{R}{2})}. \quad (4.52)$$

Para $x_0 \in B_R$, podemos usar o mesmo argumento tomando $\eta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2, [0, 1])$ com $\eta(x) = 1$ se $|x - x_0| \leq \rho'$ e $\eta(x) = 0$ se $|x - x_0| > 2\rho'$ e $|\nabla\eta| \leq \frac{2}{\rho'}$, para proar que

$$|w_n|_{L^\infty(|x-x_0|\leq\rho')} \leq C |w_n|_{p(|x|\leq 2\rho')}. \quad (4.53)$$

Com (4.52) e (4.53), por um argumento de cobertura usual, podemos mostrar que existe $C > 0$ tal que

$$|w_n|_\infty < C. \quad (4.54)$$

Agora, pela teoria de regularidade elíptica clássica, sabemos que as funções w_n são soluções clássicas. De fato,

$$-\Delta w_n = K_n \text{ em } \mathbb{R}^2,$$

no sentido fraco, onde

$$K_n(x) = -\tilde{V}_{\varepsilon_n}(x) \frac{G^{-1}(w_n)}{g(G^{-1}(w_n))} + \tilde{Q}_{\varepsilon_n}(x) \frac{f(G^{-1}(w_n))}{g(G^{-1}(w_n))}.$$

As estimativas (3.8), (4.54) e o Lema 1.1.1-(2),(3) implicam que $K_n \in L_{\text{loc}}^s(\mathbb{R}^2)$, para todo $s \geq 1$. Usando teoria de regularidade (veja [30] por exemplo), $w_n \in W_{\text{loc}}^{2,s}(\mathbb{R}^2)$, para todo $s \geq 1$ e disto $w_n \in C_{\text{loc}}^{1,\ell}(\mathbb{R}^2)$ para algum $\ell \in (0, 1)$. Pela Teoria de Regularidade de Schauder (veja novamente [30]) obtemos $w_n \in C_{\text{loc}}^{2,\ell}(\mathbb{R}^2)$.

Usando a convergência forte $w_n \rightarrow w$ em $H^1(\mathbb{R}^2)$ na estimativa (4.52), para cada $\delta > 0$ fixado existe $R > 0$ tal que $|w_n|_{L^\infty(|x|\geq R)} < \delta$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo,

$$\lim_{|x|\rightarrow\infty} w_n(x) = 0 \text{ uniformemente em } n \in \mathbb{N}.$$

Finalmente, a propriedade do decaimento exponencial é verificada por um argumento de comparação. Vejamos: pelo Lema 1.1.1-(4), $\frac{G^{-1}(s)}{g(G^{-1}(s))s} \rightarrow 1$ quando $s \rightarrow 0$ e juntamente com (f_1) podemos escolher $R_0 > 0$ tal que, para todo $n \in \mathbb{N}$ e para todo x com $|x| \geq R_0$, vale

$$\frac{G^{-1}(w_n(x))}{g(G^{-1}(w_n(x)))} \geq \frac{3}{4} w_n(x) \text{ e } f(G^{-1}(w_n(x))) \leq \frac{\kappa_{\min} w_n(x)}{2\nu_{\max}}. \quad (4.55)$$

Definimos $\psi(x) = Me^{-\zeta|x|}$, onde ζ e M são tais que $4\zeta^2 < \kappa_{\min}$ e $Me^{-\zeta R_0} \geq w_n(x)$ para todo x satisfazendo $|x| = R_0$. Não é difícil checar que

$$\Delta\psi \leq \zeta^2\psi \quad \text{para todo } x \neq 0. \quad (4.56)$$

Em seguida, consideramos a função $\psi_n = \psi - w_n$. Logo, por (4.55), (4.56) e

$$-\Delta w_n + \tilde{V}_{\varepsilon_n}(x) \frac{G^{-1}(w_n)}{g(G^{-1}(w_n))} = \tilde{Q}_{\varepsilon_n}(x) \frac{f(G^{-1}(w_n))}{g(G^{-1}(w_n))} \quad \text{em } \mathbb{R}^2$$

obtemos

$$-\Delta\psi_n + \frac{\kappa_{\min}}{4}\psi_n \geq 0 \quad \text{em } |x| \geq R_0,$$

$$\psi_n \geq 0 \quad \text{em } |x| = R_0,$$

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \psi_n(x) = 0.$$

Pelo princípio do máximo, temos que $\psi_n(x) \geq 0$ para todo $|x| \geq R_0$. Então, $w_n(x) \leq Me^{\zeta|x|}$ para todo $|x| \geq R_0$. Isto implica que

$$|w_n(x)| \leq Me^{-\zeta|x|}, \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}^2.$$

■

Lema 4.3.10 *Existe $\varrho' > 0$ tal que $|w_n|_{\infty} \geq \varrho'$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Prova: Por (4.34) temos

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{B_r(y_n)} |v_n|^2 dx \geq \varrho.$$

Então

$$\varrho \leq \int_{B_r(0)} |w_n|^2 dx \leq |B_r| |w_n|_{\infty}^p$$

donde segue que

$$|w_n|_{\infty} \geq \varrho'$$

mostrando o lema. ■

4.3.1 Comportamento de concentração

Se (v_n) é uma sequência de soluções do problema (4.11) obtida no Lema 4.3.1, então $w_n(x) = v_n(x + y_n)$ é uma solução do problema

$$\begin{cases} -\Delta w_n + \tilde{V}_{\varepsilon_n}(x)w_n = \tilde{Q}_{\varepsilon_n}(x)f(w_n) & \text{em } \mathbb{R}^2, \\ v_n \in H^1(\mathbb{R}^2), v_n(x) > 0, & \text{para todo } x \in \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

com $\tilde{V}_{\varepsilon_n}(x) = V(\varepsilon_n x + \varepsilon_n y_n)$, $\tilde{Q}_{\varepsilon_n}(x) = Q(\varepsilon_n x + \varepsilon_n y_n)$ e $(y_n) \subset \mathbb{R}^2$ dada no Lema 4.3.5. Mais ainda, a menos de subsequência,

$$w_n \rightarrow w \text{ em } H^1(\mathbb{R}^2), \quad \tilde{y}_n \rightarrow y_0 \in \mathcal{A}_V,$$

onde $\tilde{y}_n = \varepsilon_n y_n$. Se b_n denota um ponto de máximo de w_n , pelos Lemas 4.3.9 e 4.3.10, sabemos que ela é uma sequência limitada em \mathbb{R}^2 . Então, existe $R > 0$ tal que $b_n \in B_R(0)$. Assim, um ponto de máximo global de v_n é $z_{\varepsilon_n} = b_n + y_n$ e

$$\varepsilon_n z_{\varepsilon_n} = \varepsilon_n b_n + \varepsilon_n y_n = \varepsilon_n b_n + \tilde{y}_n.$$

Pela limitação de (b_n) , obtemos o limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n z_{\varepsilon_n} = y_0,$$

que juntamente com a continuidade de V e Q nos fornece

$$\lim_{n \rightarrow \infty} V(\varepsilon_n z_{\varepsilon_n}) = V(y_0) \quad \text{e} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} Q(\varepsilon_n z_{\varepsilon_n}) = Q(y_0).$$

Também ressaltamos que para qualquer $\varepsilon > 0$, o conjunto dos pontos $\varepsilon z_\varepsilon$ é limitado, onde z_ε é um ponto de máximo da solução v_ε obtida no Lema 4.3.1. De fato, suponha que existem $\varepsilon_j \rightarrow 0$ e z_{ε_j} ponto de máximo de v_j tal que $|\varepsilon_j z_{\varepsilon_j}| \rightarrow \infty$. No entanto, pelos argumentos acima, sabemos que

$$\varepsilon_j z_{\varepsilon_j} = \varepsilon_j b_j + \varepsilon_j y_j,$$

onde y_j é obtida em (4.24) pelo argumento de não-anulamento, com $\varepsilon_j y_j$ limitada e b_j ponto de máximo de $w_{\varepsilon_j} = v_j(x + y_j)$. Consequentemente, $|\varepsilon_j z_{\varepsilon_j} - \varepsilon_j y_j| = |\varepsilon_j b_j| \rightarrow \infty$, o que contradiz o fato de b_j pertencer a uma bola $B_R(0)$.

4.3.2 Prova dos Teoremas 4.0.1 e 4.0.2

Prova do Teorema 4.0.1: Pelo Lema 4.3.1, existe uma solução não-nula da equação (4.11) para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno. Logo, a função $v_\varepsilon(x) = v_\varepsilon\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ é uma solução positiva da equação (4.10). Agora, note que os pontos de máximo x_ε e z_ε de v_ε e v_ε satisfazem a igualdade $x_\varepsilon = \varepsilon z_\varepsilon$. Pela Proposição 4.1.2 a função $u_\varepsilon(x) = G^{-1}(v_\varepsilon(x)) = G^{-1}\left(v_\varepsilon\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right) = u_\varepsilon\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ é uma solução positiva do problema (4.1) para todo $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno. Como a função G^{-1} é estritamente

crescente, o ponto de máximo de $u_\varepsilon = G^{-1}(v_\varepsilon)$ é o mesmo de v_ε . Logo, os pontos de máximo x_ε e z_ε de v_ε e u_ε , e portanto de u_ε e u_ε , satisfazem a equação $x_\varepsilon = \varepsilon z_\varepsilon$. Sendo $w_\varepsilon(x) := v_\varepsilon(\varepsilon x + x_\varepsilon)$ e $\bar{u}_\varepsilon(x) = u_\varepsilon(\varepsilon x + x_\varepsilon) = G^{-1}(w_\varepsilon(x))$, para qualquer $\varepsilon > 0$ com $\varepsilon \rightarrow 0$ e $x_\varepsilon = \varepsilon z_\varepsilon \rightarrow y_0$, segue pelo Lema 4.3.5 que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \text{dist}(x_\varepsilon, \mathcal{A}_Q) = 0$$

e w_ε converge em $H^1(\mathbb{R}^2)$ para uma solução de energia mínima w de

$$-\Delta w + V(x_0) \frac{G^{-1}(w)}{g(G^{-1}(w))} = Q(x_0) \frac{f(G^{-1}(w))}{g(G^{-1}(w))} \quad \text{em } \mathbb{R}^2.$$

Assim $\bar{u}_\varepsilon = G^{-1}(w_\varepsilon)$ converge em $H^1(\mathbb{R}^2)$ para uma solução de energia mínima $\bar{u} = G^{-1}(w)$ de

$$-\text{div}(g^2(u)\nabla u) + g(u)g'(u)|\nabla u|^2 + V(y_0)u = Q(y_0)f(u) \quad \text{em } \mathbb{R}^2.$$

Finalmente, como

$$u_\varepsilon(x) = G^{-1}(v_\varepsilon) \leq v_\varepsilon(x) = w_\varepsilon\left(\frac{x - x_\varepsilon}{\varepsilon}\right)$$

pelo Lema 4.3.9, para algum $M, \zeta > 0$

$$|u_\varepsilon(x)| \leq M e^{-\frac{\zeta}{\varepsilon}|x - x_\varepsilon|}.$$

Prova do Teorema 4.0.2: Sem perda de generalidade, podemos assumir $x_* = 0 \in \widehat{\mathcal{V}}$ em (VQ_2) ou $x_* = 0 \in \widehat{\mathcal{V}} \cap \widehat{\mathcal{Q}}$ se $\widehat{\mathcal{V}} \cup \widehat{\mathcal{Q}} \neq \emptyset$. Usamos a notação

$$e := Q(0) = \max_{x \in \widehat{\mathcal{V}}} Q(x) \leq Q(x) \quad \text{para todo } |x| \geq R.$$

Semelhante ao que foi feito no Lemas 4.2.19 e 4.3.1, temos

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} c_\varepsilon \leq c_{\kappa_{\min}, e}$$

e o valor

$$c_\varepsilon = \inf_{v \in \mathcal{N}_\varepsilon} I_\varepsilon(v) = \max_{t \geq 0} I_\varepsilon(tv)$$

pode ser atingido. A prova restante é semelhante à prova do Teorema 4.0.1.

Referências Bibliográficas

- [1] S. Adachi and K. Tanaka, *Existence of positive solutions for a class of nonhomogeneous elliptic equations in \mathbb{R}^N* , *Nonlinear Anal. Ser. A: Theory Methods*, **48** (2002), 685-705. 6
- [2] S. Adachi and K. Tanaka, *Four positive solutions for the semilinear elliptic equation: $-\Delta u + u = a(x)u^p + f(x)$ in \mathbb{R}^N* , *Calc. Var. Partial Differential Equations* **11** (2000), 63-95. 6
- [3] S. Adachi and T. Watanabe, *Uniqueness of the ground state solutions of quasilinear Schrödinger equations*, *Nonlinear Anal.* **75** (2012), 819-833. 3, 34
- [4] R. A. Adams, *Sobolev spaces*, *Pure and Applied Mathematics*, vol. 65, Academic Press, New York-London, 1975. 40
- [5] C. O. Alves, J. M. do Ó and O. H. Miyagaki, *On nonlinear perturbations of a periodic elliptic problem in \mathbb{R}^2 involving critical growth*, *Nonlinear Anal.* **56** (2004), 781-791. 8, 34, 35
- [6] C. O. Alves, O. H. Miyagaki and S.H. Monari Soares, *On the existence and concentration of positive solutions to a class of quasilinear elliptic problems on \mathbb{R}* , *Math. Nachr.* **284** (2011), 1784-1795. 3, 34, 76
- [7] C. O. Alves and M. Yang, *Existence of semiclassical ground state solutions for a generalized Choquard equation*, *J. Differential Equations* **257** (2014), 4133-4164. 8, 13, 75, 76, 77
- [8] J. P. Aubin and I. Ekeland, *Applied nonlinear analysis. Pure and Applied Mathematics*, A Wiley-Interscience Publication. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1984. 41

- [9] L. Brull and H. Lange, *Solitary waves for quasilinear Schrödinger equations*, Expo. Math. **4** (1986), 279-288. 2
- [10] D. M. Cao, *Nontrivial solution of semilinear elliptic equation with critical exponent in \mathbb{R}^2* , Comm. Partial Differential Equation **17** (1992) 407-435. 40
- [11] D. M. Cao and H. S. Zhou, *Multiple positive solutions of nonhomogeneous semilinear elliptic equations in \mathbb{R}^N* , Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **126** (1996), 443-463. 6
- [12] S. Carl and S. Heikkilä, *Elliptic problems with lack of compactness via a new fixed point theorem*, J. Differential Equations **186** (2002), 122-140. 5, 6, 17, 18, 19, 25
- [13] J. Chen, X. Tang and B. Cheng, *Non-Nehari manifold method for a class of generalized quasilinear Schrödinger equations*, Appl. Math. Lett. **74** (2017), 20-26. 3, 80, 83
- [14] C. Chu and H. Liu, *Existence of positive solutions for a quasilinear Schrödinger equation*. Nonlinear Anal. Real World Appl. **44** (2018), 118-127. 3
- [15] M. Colin and L. Jeanjean, *Solutions for a quasilinear Schrödinger equation: A dual approach*, Nonlinear Anal. **56** (2004), 213-226. 3, 34, 38
- [16] S. Cuccagna, *On instability of excited states of the nonlinear Schrödinger equation*, Phys. D **238** (2009), 38-54. 2
- [17] J. C. de Albuquerque, Y. L. Araújo and R. Clemente, *Existence of bound and ground states for a class of Kirchhoff-Schrödinger equations involving critical Trudinger-Moser growth*, Math. Meth. Appl. Sci. **42** (2019), 806-820. 35
- [18] Y. Deng and W. Huang, *Ground state solutions for generalized quasilinear Schrödinger equations without (AR) condition*. J. Math. Anal. Appl. **456** (2017), 927-945. 1, 17, 33
- [19] Y. Deng and W. Huang, *Positive ground state solutions for a quasilinear elliptic equation with critical exponent*. Discrete Contin. Dyn. Syst. **37** (2017), 4213-4230. 3, 4

- [20] Y. Deng, S. Peng and J. Wang, *Nodal soliton solutions for generalized quasilinear Schrödinger equations*, J. Math. Phys. **55** (2014), 16pp. 3
- [21] Y. Deng, S. Peng and S. Yan, *Critical exponents and solitary wave solutions for generalized quasilinear Schrödinger equations*, J. Differential Equations **260** (2016), 1228-1262. 1, 3, 5, 16, 17, 18, 33
- [22] Y. Deng and S. Peng and S. Yan, *Positive soliton solutions for generalized quasilinear Schrödinger equations with critical growth*, J. Differential Equations **258** (2015), 115-147. 3, 18, 20, 38
- [23] Y.H. Ding and X.Y. Li, *Semiclassical solutions of Schrödinger equations with magnetic fields and critical nonlinearities*, Manuscripta Math. **140** (2013), 51-82. 77
- [24] J. M. do Ó, O. Miyagaki and S. Soares, *Soliton solutions for quasilinear Schrödinger equations: the critical exponential case*, Nonlinear Anal. **67** (2007) 3357-3372. 7
- [25] J. M. do Ó and U. Severo, *Quasilinear Schrödinger equations involving concave and convex nonlinearities*, Commun. Pure Appl. Anal. **8** (2009) 621-644. 3, 34
- [26] J. M. do Ó and U. Severo, *Solitary waves for a class of quasilinear Schrödinger equations in dimension two*, Calc. Var. Partial Differential Equations **38** (2010) 275-315. 3, 34, 76, 83, 84
- [27] J. M. do Ó and M. de Souza, *On a class of singular Trudinger-Moser type inequalities and its applications*, Mathematische Nachrichten **284** (2011) 1754-1776. 10, 60, 62
- [28] D. G. de Figueiredo, O. H. Miyagaki and B. Ruf, *Elliptic equations in \mathbb{R}^2 with nonlinearities in the critical growth range*, Calc. Var. Partial Differential Equations **3** (1995), 139-153. 60
- [29] M. F. Furtado, E. D. Silva and M. L. Silva, *Existence of solution for a generalized quasilinear elliptic problem*, J. Math. Phys. **58** (2017), 14 pp. 3, 18, 81

- [30] D. Gilbarg and N. S. Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Reprint of the 1998 edition, Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2001. 56, 105
- [31] E. Gloss, *Existence and concentration of positive solutions for a quasilinear elliptic equation in \mathbb{R}* , Electron. J. Differential Equations **61** (2010), 1-23. 3, 34, 76
- [32] E. Gloss, *Existence and concentration of positive solutions for a quasilinear equation in \mathbb{R}^N* , J. Math. Anal. Appl. **371** (2010), 465-484. 3, 34, 76
- [33] Y. He, G. Li, *Concentrating soliton solutions for quasilinear Schrödinger equations involving critical Sobolev exponents*, Discrete Contin. Dyn. Syst. **36** (2016), 731-762. 3, 34
- [34] W. Huang and J. Xiang, *Soliton solutions for a quasilinear Schrödinger equation with critical exponent*, Comm. Pure Appl. Anal. **15** (2016), 1309-1333. 18
- [35] Y. Jabri, *The Mountain Pass Theorem – variants, generalizations and some applications*, in: Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Cambridge University Press, 2003. 41
- [36] L. Jeanjean, *On the existence of bounded Palais-Smale sequences and application to a Landesman-Lazer-type problem set on \mathbb{R}^N* , Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **129** (1999), 787-809. 4
- [37] C. Jianhua, H. Xianjiu, C. Bitao and T. Xianhua, *Existence and concentration behavior of ground state solutions for a class of generalized quasilinear Schrödinger equations in \mathbb{R}^N* , Acta Math. Sci. Ser. B (Engl. Ed.) **40** (2020), 1495-1524. 11
- [38] O. Kavian, *Introduction à la théorie des points critiques et applications aux problèmes elliptiques*, Springer-Verlag, Paris (1993). 45, 47
- [39] S. Kurihara, *Large-amplitude quasi-solitons in superfluid films*, J. Phys. Soc. Jap. **50** (1981), 3263-3267. 2
- [40] E. W. Laedke, K. H. Spatschek, and L. Stenflo, *Evolution theorem for a class of perturbed envelope soliton solutions*, J. Math. Phys. **24** (1983), 2764-2769. 2

- [41] L. D. Landau and E. M. Lifschitz, *Quantum Mechanics, Non-relativistic Theory*, (Addison-Wesley, Reading, MA, 1968). 2
- [42] Q. Li and X. Wu, *Existence, multiplicity, and concentration of solutions for generalized quasilinear Schrödinger equations with critical growth*, J. Math. Phys. **58** (2017), 30 pp. 3, 11, 18
- [43] Q. Li and X. Wu, *Existence of nontrivial solutions for generalized quasilinear Schrödinger equations with critical growth*, Acta Math. Sci. Ser. B (Engl. Ed.) **37** (2017), 1870-1880. 18
- [44] Z. Li, and Y. Zhang, *Solutions for a class of quasilinear Schrödinger equations with critical Sobolev exponents*, J. Math. Phys. **58** (2017), 15 pp. 3, 34, 76
- [45] H. F. Lins, E. A. B. Silva, *Quasilinear asymptotically periodic elliptic equations with critical growth*, Nonlinear Anal. **71** (2009), 2890-2905. 34, 41
- [46] A. G. Litvak and A. M. Sergeev, *One-dimensional collapse of plasma waves*, JETP Lett. 27, 517-520 (1978), available at <http://www.jetpletters.ac.ru/ps/1553/article23768.pdf>. 2
- [47] J. Liu and Z. Q. Wang, *Soliton solutions for quasilinear Schrödinger equations*, Proc. Amer. Math. Soc. **131** (2003), 441-448. 3, 34
- [48] J. Liu, Y. Wang and Z. Q. Wang, *Soliton solutions for quasilinear Schrödinger equations II*, J. Differential Equations **187** (2003), 473-493. 3, 34
- [49] A. Moameni, *On a class of periodic quasilinear Schrödinger equations involving critical growth in \mathbb{R}^2* , J. Math. Anal. Appl. **334** (2007), 775-786. 7
- [50] A. Nakamura, *Damping and modification of exciton solitary waves*, J. Phys. Soc. Jpn. **42** (1977), 1824-1835. 2
- [51] E. Nelson, *Feynman integrals and the Schrödinger equation*, J. Mathematical Phys. **5** (1964), 332-343. 18
- [52] M. Poppenberg, K. Schmitt and Z. Wang, *On the existence of soliton solutions to quasilinear Schrödinger equations*, Calc. Var. Partial Differential Equations **14** (2002), 329-344. 2, 3, 34

- [53] U. B. Severo, *Existence of weak solutions for quasilinear elliptic equations involving the p -Laplacian*, Elec. J. Differential Equations **56** (2008), 1-16. 41, 63
- [54] U. B. Severo, E. Gloss and E. D. da Silva, *On a class of quasilinear Schrödinger equations with superlinear or asymptotically linear terms*, J. Differential Equations **263** (2017), 3550-3580. 5, 16, 26
- [55] X. Shang, J. Zhang, *Existence and concentration behavior of positive solutions for a quasilinear Schrödinger equation*, J. Math. Anal. Appl. **414** (2014), 334-356. 3, 34, 76
- [56] L. Shao, H. Chen, *Existence and concentration result for a quasilinear Schrödinger equation with critical growth*, Z. Angew. Math. Phys. **68** (2017), 16pp. 3, 34
- [57] Y. Shen and Y. Wang, *Soliton solutions for generalized quasilinear Schrödinger equations*, Nonlinear Anal. **80** (2013), 194-201. 1, 2, 3, 18, 20, 37, 38
- [58] Y. T. Shen and Y. J. Wang, *A class of generalized quasilinear Schrödinger equations*, Comm. Pure Appl. Anal. **15** (2016), 853-870. 3
- [59] H. Shi and H. Chen, *Existence and multiplicity of solutions for a class of generalized quasilinear Schrödinger equations*, J. Math. Anal. Appl. **452** (2017), 578-594. 3, 18
- [60] H. Shi and H. Chen, *Generalized quasilinear asymptotically periodic Schrödinger equations with critical growth*, Comput. Math. Appl. **71** (2016), 849-858. 3, 18
- [61] E. A. B. Silva and G. F. Vieira, *Quasilinear asymptotically periodic Schrödinger equations with subcritical growth*, Nonlinear Anal. **72** (2010), 2935-2949. 34, 36
- [62] M. de Souza and Y. L. Araújo, *On nonlinear perturbations of a periodic fractional Schrödinger equation with critical exponential growth*, Math. Nachr. **289** (2016), 610-625 (2016). 8, 34, 35
- [63] M. de Souza, U. B. Severo and G. F. Vieira, *On a nonhomogeneous and singular quasilinear equation involving critical growth in \mathbb{R}^2* , Comput. Math. Appl. **74** (2017), 513-531. 10, 45

- [64] M. de Souza, U. B. Servero and G. F. Vieira, *Solutions for a class of singular quasilinear equations involving critical growth in \mathbb{R}^2* , Math. Nachr. (2019). To appear. 7, 10, 58
- [65] B. Tao, Z. Liu, M. Yang, *Semiclassical ground state solutions for a Schrödinger equation in \mathbb{R}^2 with critical exponential growth*, Math. Nachr. **289** (2016), 727-747. 12, 13, 75, 76, 77, 104
- [66] Y. Wang, *Multiplicity of solutions for singular quasilinear Schrödinger equations with critical exponents*, J. Math. Anal. Appl. **458** (2018), 1027-1043. 3, 34
- [67] W. Wang, X. Yang and F. Zhao, *Existence and concentration of ground state solutions for a subcubic quasilinear problem via Pohozaev manifold*, J. Math. Anal. Appl. **424** (2015), 1471-1490. 3, 34, 75, 76, 77
- [68] W. Wang, X. Yang and F. Zhao, *Existence and concentration of ground states to a quasilinear problem with competing potentials*, Nonlinear Analysis **102** (2014), 120-132. 3, 34
- [69] C. Xie, Y. Cheng, *Singularly perturbed quasilinear Schrödinger equations with negative parameters*, Appl. Anal. **98** (2019), 2239-2251. 3, 76
- [70] M. Yang, *Semiclassical ground state solutions for a Choquard type equation in \mathbb{R}^2 with critical exponential growth*, ESAIM: COCV **24** (2018), 177-209. 13, 75, 76, 77, 89
- [71] M. Yang and Y. Ding, *Existence of semiclassical states for a quasilinear Schrödinger equation with critical exponent in \mathbb{R}^N* , Ann. Mat. Pura Appl. **192** (2013), 783-804. 3, 34
- [72] L. Y. -Yong, X. Y. -Fang and T. C. -Lei, *Ground state solutions for asymptotically periodic modified Schrödinger-Poisson system involving critical exponent*, Commun. Pure Appl. Anal. **18** (2019), 2299-2324. 34
- [73] C. Zhang and L. Chenn, *Concentration-compactness principle of singular Trudinger-Moser inequalities in \mathbb{R}^N and n -Laplace equations*, Adv. Nonlinear Stud. **18** (2018), 567-585. 10, 59, 61

- [74] H. Zhang and F. Zhang, *Semiclassical ground states for quasilinear Schrödinger equations with three times growth*, J. Math. Anal. Appl. **456** (2017), 1129-1149. 3, 34, 75, 76, 77
- [75] X. P. Zhu, *A perturbation result on positive entire solutions of a semilinear elliptic equation*. J. Differential Equations **92** (1991), 163-178. 6