

Universidade Federal da Paraíba
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Doutorado em Matemática

A Topologia da Fibra de Milnor-Lê para Funções de Três Variáveis Reais

por

Camila Sibelle Marques da Silva

João Pessoa - PB

Dezembro/2020

A Topologia da Fibra de Milnor-Lê para Funções de Três Variáveis Reais

por

Camila Sibelle Marques da Silva [†]

sob orientação do

Prof. Dr. Aurélio Menegon Neto

e coorientação do

Prof. Dr. Marcelo José Saia

Tese apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Doutora em Matemática.

João Pessoa - PB

Dezembro/2020

[†]Este trabalho contou com apoio financeiro da CAPES.

Catálogo na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

S586t Silva, Camila Sibelle Marques da.

A topologia da fibra de milnor-lê para funções de três variáveis reais / Camila Sibelle Marques da Silva. - João Pessoa, 2020.

55 f. : il.

Orientação: Aurélio Menegon Neto.

Coorientador: Marcelo José Saia.

Tese (Doutorado) - UFPB/CCEN.

1. Matemática. 2. Germe de função tipo cone. 3. Conjuntos subanalíticos. 4. Topologia da fibra de milnor real. I. Menegon Neto, Aurélio. II. Saia, Marcelo José. III. Título.

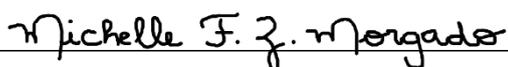
UFPB/BC

CDU 5(043)

Universidade Federal da Paraíba
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Doutorado em Matemática

Área de Concentração: Geometria/Topologia

Aprovada em: 14 de Dezembro de 2020



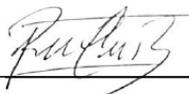
Prof.^a. Dr.^a. Michelle Ferreira Zanchetta Morgado - UNESP



Prof. Dr. José Luis Cisneros-Molina - UNAM



Prof.^a. Dr.^a. Miriam Pereira da Silva - UFPB

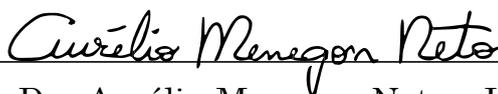


Prof. Dr. Roberto Callejas Bedregal - UFPB



Prof. Dr. Marcelo José Saia - USP

Coorientador



Prof. Dr. Aurélio Menegon Neto - UFPB

Orientador

Tese apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Matemática.

Dezembro/2020

Resumo

Neste trabalho, apresentamos resultados relacionados à topologia da fibra de Milnor de germes de funções em \mathbb{R}^3 . Inicialmente, descrevemos o tipo topológico da fibra de Milnor associada a função $f : (\mathbb{R}^3, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ do tipo cone, de classe C^l , com $l \geq 1$ e valor crítico isolado. Em seguida, estendemos para o caso real o resultado do Lê e Teissier para germes de funções complexas, em outras palavras, provamos que o tipo topológico da fibra não depende da escolha de um sistema fundamental de vizinhanças redondas adequada de 0 em \mathbb{R}^3 .

Descrevemos também o tipo topológico da fibra de Milnor \mathcal{F}_g da função $\|g\|$ definida em um conjunto subanalítico $X \subset \mathbb{R}^3$ de dimensão 3 em termos do mergulho topológico do seu link K_g . Precisamente, provamos que a fibra de Milnor \mathcal{F}_g é homeomorfa à união disjunta de conjuntos conexos e seu interior é homeomorfo ao complemento do link K_g na esfera \mathbb{S}_ϵ^2 .

Palavras-chave: Germe de Função tipo Cone; Sistema Fundamental de Vizinhanças Redondas; Conjuntos Subanalíticos; Topologia da Fibra de Milnor Real.

Abstract

In this work, we describe results relating to topology of the Milnor fibration of function-germs in \mathbb{R}^3 . Initially, we describe the topological type of Milnor fiber in association to the conelike function-germ $f : (\mathbb{R}^3, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}, 0)$ of class C^l , with $l \geq 1$ and isolated critical value. Then, we extend for the real case the result due to Lê and Teissier to complex function-germs, in other words, we prove that the topological type of the fiber does not depend on the choice of a suitable fundamental system of the neighborhoods of 0 in \mathbb{R}^3 .

We also describe the topological type of the Milnor fiber \mathcal{F}_g of the function $\|g\|$ defined in a subanalytic 3-dimensional set $X \subset \mathbb{R}^3$ in terms of the embedded topological type of its link K_g . Precisally, we prove that the interior of the Milnor fiber of \mathcal{F}_g is homeomorphic to the complement of K_g in the sphere \mathbb{S}_ϵ^2 .

Keywords: Conelike function-germ; Fundamental System of Round Neighborhoods; Subanalytic Subset; Topology of Real Milnor Fiber.

Agradecimentos

Encerro mais um ciclo em minha vida agradecendo imensamente à Deus por ter me dado forças pra chegar até aqui. Hoje eu posso dizer: Deus fez um milagre na minha vida.

Agradeço profundamente aos meus pais Cláudia e Reginaldo, que sempre fizeram e fazem tudo por mim. Eles são minha fortaleza, minha força e meu lar. Ao meu irmão Rafinha, por sempre me lembrar que não estou só no mundo e que a alegria está nas pequenas coisas da vida. Amo muito vocês.

Ao meu esposo, amigo e parceiro de loucuras Hector Pereira, que esteve comigo nos momentos mais importantes da minha vida e também nos momentos de maior aflição. Sempre me ajudou, me cuidou e me deu suporte. Chegar até aqui valeu a pena porque eu vivi ao seu lado.

Aos meus amigos de pós-graduação, da vida que permaneceram na luta comigo até aqui. Em especial ao Jhon, meu amigo desde o mestrado e parceiro de área e aos meus padrinhos de casamento: Jane, Linda, Lisiane, Cristiano, Djair, Tarcy e Cássio. Obrigada por tudo, vocês são demais.

Ao meu orientador, Aurélio Menegon que esteve todos esses anos auxiliando na minha jornada e acreditou em mim mesmo quando eu não acreditava mais.

Ao professor Marcelo Saia, meu coorientador, por me acolher e ensinar no período que passei em São Carlos. Obrigada também por estar presente nas etapas mais importantes da minha pós graduação.

À todos os professores da Pós-graduação em Matemática - UFPB que participaram do meu processo de aprendizagem e amadurecimento na matemática desde o mestrado. Cheguei a este dia graças à vocês.

Aos professores da banca examinadora pelo tempo dedicado ao processo de defesa da minha Tese.

Por fim, agradeço à CAPES pelo apoio financeiro durante a maior parte do meu doutorado.

“Para o homem é impossível, mas para Deus não; todas as coisas são possíveis para Deus. ”

Marcos 10:27

Dedicatória

Aos meus pais.

Sumário

Introdução	1
1 Preliminares	4
1.1 Fibrados Topológicos	4
1.2 Conjuntos Analíticos, Semianalíticos e Subanalíticos	5
1.3 Estratificação de Whitney	8
1.4 Outras Definições Topológicas	13
1.5 Fibrção de Milnor Complexa	14
1.6 Fibrção de Milnor Real	16
1.7 Germes de Função do Tipo Cone	17
2 A Fibra de Milnor de Germes de Funções de Classe C^l em \mathbb{R}^3	18
2.1 Links e Gráficos	18
2.2 O Gráfico Γ Associado à K	21
2.3 Gráficos Equivalentes	23
2.4 Fibra de Milnor de funções de classe C^l em \mathbb{R}^3	24
2.5 A Topologia da Fibra de Milnor	26
2.6 Sistema Fundamental de Vizinhanças Circulares	32
3 A Fibra de Milnor de Germes de Funções Subanalíticas em \mathbb{R}^3	34
3.1 O Link	34
3.2 A Topologia da Fibra \mathcal{F}_g	38
Referências	43

Introdução

Uma das maneiras de compreender a topologia de singularidades complexa é o Teorema de Fibrção Milnor.

O primeiro teorema de fibrção desenvolvido por J. Milnor ([MILNOR, 1968](#)) afirma que se 0 é um ponto crítico isolado de uma função analítica complexa $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$, com $f(0) = 0$, então para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, a função $\phi : \mathbb{S}_\epsilon^{2n-1} \setminus K_\epsilon \rightarrow \mathbb{S}^1$ dada por $\phi = f/|f|$ é a projeção de um fibrado diferenciável localmente trivial, onde $\mathbb{S}_\epsilon^{2n-1}$ é a esfera de centro 0 e raio ϵ e o conjunto $K_\epsilon := f^{-1}(0) \cap \mathbb{S}_\epsilon^{2n-1}$ é chamado de *link* da singularidade na origem.

A partir deste resultado, é possível descrever localmente a topologia da fibra singular, analisando a topologia das fibras não singulares que estão suficientemente próximas. Se $V = f^{-1}(0)$ é um espaço analítico (real ou complexo) e tem singularidade isolada na origem, J. Milnor ([MILNOR, 1968](#)) provou que o *link* K_ϵ é uma variedade real, suave de dimensão $m - 1$, onde m é a dimensão real de V e a topologia de V e seu mergulho em \mathbb{C}^n (ou \mathbb{R}^n) são completamente determinadas pelo mergulho de K_ϵ em \mathbb{S}_ϵ .

Usando o Teorema de Fibrção de Ehresmann ([EHRESMANN, 1950](#)), J. Milnor em ([MILNOR, 1968](#)) obteve uma versão do seu teorema de fibrção para o caso de uma função analítica real $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$. Este resultado afirma que se f é uma submersão em cada ponto de uma vizinhança furada da origem, ou seja, para toda esfera suficientemente pequena \mathbb{S}_ϵ em \mathbb{R}^m centrada em zero, e para todo $\eta > 0$ suficientemente menor com respeito ao ϵ , a restrição de f ao complemento de uma vizinhança tubular do link K_ϵ em \mathbb{S}_ϵ é a projeção de um fibrado localmente trivial sobre a esfera \mathbb{S}_η em \mathbb{R}^k .

Nenhum caso $k = 1$ segue do Lema 11.3 do livro do Milnor (MILNOR, 1968) que o interior da fibra $\mathcal{F}(f)$ é homeomorfa ao complemento do link $K(f)$ de f na esfera \mathbb{S}_ϵ . Como a prova deste resultado depende do Lema da Seleção da Curva (MILNOR, 1968), não podemos estendê-lo para o caso não analítico.

Posteriormente, D. T. Lê em (LÊ, 1977) generalizou o Teorema de Fibração de Milnor para o caso de um germe de uma função analítica definida em um subconjunto analítico complexos. Este resultado, conhecido como Teorema de Fibração de Milnor-Lê, afirma que: se $(Y, 0)$ é um germe de espaço analítico complexo em \mathbb{C}^N e se $f : (Y, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ é germe de função holomorfa, então

$$f|_1 : f^{-1}(\mathring{D}_\eta \setminus \{0\}) \cap \mathbb{B}_\epsilon \rightarrow \mathring{D}_\eta \setminus \{0\},$$

é projeção de um fibrado topológico localmente trivial para números reais suficientemente pequenos ϵ e η com $0 < \eta \ll \epsilon$. Aqui, \mathbb{B}_ϵ denota a bola fechada de raio ϵ e centro 0 em \mathbb{C}^N e \mathring{D}_η denota o disco aberto de raio η e centro 0 em \mathbb{C} .

Um das consequências de grande relevância do teorema acima, provada por Lê e Teissier em (LÊ; TEISSIER, 1981), afirma que a menos de homeomorfismo, a fibra de Milnor não depende da escolha da vizinhança, contanto que a fibra seja um elemento suficientemente pequeno do que os autores chamam de *sistema fundamental de boas vizinhanças*. Por exemplo, se considerarmos polidiscos em \mathbb{C}^N no lugar de bolas usuais, então a fibra de Lê-Milnor correspondente é homeomorfa à fibra usual.

Entretanto, pouco sabemos sobre este resultado na configuração real. Atualmente, a maioria dos resultados no caso complexo não são generalizados para o caso real. Mesmo assim, no caso de germe de função $f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ de classe C^l , $l \geq 1$, com valor crítico isolado, ou no caso de germe de função subanalítica $f : (W, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ definida em um conjunto subanalítico W de dimensão 3 em \mathbb{R}^n , podemos mostrar a existência de uma fibração do tipo Milnor-Lê.

Neste trabalho, temos como objetivo estudar a topologia da fibra de Milnor de germes de funções definidas em \mathbb{R}^3 . Especificamente, mostramos através de argumentos topológicos que o resultado acima pode ser estendido para o caso de f ser função de classe C^l , $l \geq 1$, e também para aplicações definidas em subconjuntos subanalíticos de dimensão 3 em \mathbb{R}^3 . Em ambos os casos, também mostramos que a topologia da fibra de Milnor correspondente não depende da escolha da vizinhança no mesmo sentido do

resultado provado por Lê-Teissier citado acima.

Assim, estruturamos a tese da seguinte forma:

No *Capítulo 1*, apresentamos algumas definições fundamentais que são usadas no decorrer do texto tais como fibrados topológicos e estratificação de Whitney. Além disso, apresentamos os conceitos e propriedades de espaços subanalíticos como também um Teorema de Fibração para germes de funções subanalíticas provado por (MARTINS; MENEGON, 2018).

Consequente, no *Capítulo 2*, descrevemos o tipo topológico da fibra de Milnor associada a função $f : (\mathbb{R}^3, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ do tipo cone, de classe C^l , com $l \leq 1$ e valor crítico isolado. Em seguida, estendemos para o caso real o resultado do Lê e Teissier para germes de funções complexas, em outras palavras, provamos que o tipo topológico do link não depende da escolha de um sistema fundamental de vizinhanças circulares adequada de 0 em \mathbb{R}^3 .

Finalmente, no *Capítulo 3*, descrevemos o tipo topológico da fibra de Milnor \mathcal{F}_g da função $\|g\|$ definida em um conjunto subanalítico $X \subset \mathbb{R}$ de dimensão 3 em termos do mergulho topológico do seu link K_g . Precisamente, provamos que a fibra de Milnor \mathcal{F}_g é homeomorfa à união disjunta de conjuntos conexos e seu interior é homeomorfo ao complemento do link K_g na esfera \mathbb{S}_ϵ^2 .

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo abordaremos conceitos básicos necessárias para o desenvolvimento dos principais resultados da Tese. Em resumo, tais resultados são base para a Teoria de Singularidades. As principais referências utilizadas neste capítulo são (BIERSTONE, 1988), (CHIRKA, 1989), (MILNOR, 1968) e (SHIOTA, 1997).

1.1 Fibrados Topológicos

Definição 1.1.1 *Sejam E, B espaços topológicos e $\pi : E \longrightarrow B$ uma aplicação sobrejetiva. Dizemos que (E, π, B) é um fibrado topológico localmente trivial com fibra um espaço topológico F , se o Axioma da Trivialidade Local é satisfeito, isto é, se para cada $b \in B$ existe uma vizinhança U_b de B e um homeomorfismo*

$$f : \pi^{-1}(U_b) \longrightarrow U_b \times F$$

tal que para cada $x \in U_b$, a aplicação

$$f|_{\pi^{-1}(x)} : \pi^{-1}(x) \longrightarrow \{x\} \times F$$

é um isomorfismo.

Além disso, dizemos que o fibrado topológico (E, π, B) é diferenciável se os espaços E e B são diferenciáveis, a aplicação π é diferenciável e f é um difeomorfismo.

Exemplo 1.1.2 (Fibrado vetorial) *Quando E, B são espaços vetoriais tais que se para cada $b \in B$ existe uma vizinhança U_b de B e um homeomorfismo*

$$f : \pi^{-1}(U_b) \longrightarrow U_b \times \mathbb{R}^n$$

tal que para cada $x \in U_b$, a aplicação

$$f|_{\pi^{-1}(x)} : \pi^{-1}(x) \longrightarrow \{x\} \times \mathbb{R}^n$$

é um isomorfismo, dizemos que (E, π, B) é um Fibrado Vetorial Localmente Trivial de dimensão n .

Observação 1.1.3 *Seja (E, π, B) um fibrado vetorial de dimensão n . Então as fibras $\pi^{-1}(b)$ e $\pi^{-1}(b')$ são isomorfas para todo b, b' em B . De fato, pelo Axioma de Trivialidade Local, temos que $f|_{\pi^{-1}(b)} : \pi^{-1}(b) \longrightarrow \{b\} \times \mathbb{R}^n$ é isomorfismo para todo elemento em B . Porém, os conjuntos $\{b\} \times \mathbb{R}^n$ e $\{b'\} \times \mathbb{R}^n$ são isomorfos para qualquer b, b' em B . Portanto, $(f|_{\pi^{-1}(b')})^{-1} \circ f|_{\pi^{-1}(b)} : \pi^{-1}(b) \longrightarrow \pi^{-1}(b')$ define um isomorfismo entre as fibras $\pi^{-1}(b)$ e $\pi^{-1}(b')$.*

1.2 Conjuntos Analíticos, Semianalíticos e Subanalíticos

Definição 1.2.1 *Sejam U um aberto de \mathbb{R}^n e $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^∞ . Dizemos que f é uma função analítica se para cada $p \in U$, existe uma vizinhança $V_p \subset U$ de p tal que*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(p)}{n!} (x-p)^n, \quad \forall x \in V_p,$$

isto é, localmente, f pode ser desenvolvida como série de potências.

Munidos desta definição podemos entender o conceito de variedades suaves analíticas.

Definição 1.2.2 *Seja $M \subset \mathbb{R}^n$. Dizemos que M é uma variedade suave analítica se M é uma variedade topológica tal que todas as cartas coordenadas são funções analíticas e as mudanças de coordenadas são de classe C^∞ .*

Assim, ao longo deste texto M denota um variedade analítica suave de dimensão n .

Definição 1.2.3 *Um subconjunto $X \subset M$ é um subconjunto analítico de M se*

- i) X é fechado em M
- ii) Para todo $x \in X$, existe uma vizinhança aberta U de x em M e uma quantidade finita de funções analíticas $f_1, \dots, f_i \in \mathcal{O}_U^{anal}$ tal que

$$V(f_1, \dots, f_i) = U \cap X,$$

onde \mathcal{O}_U^{anal} denota o anel de funções analíticas $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$.

Exemplo 1.2.4 Considere a aplicação $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = y - \epsilon^x$. O conjunto $f^{-1}(0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y = \epsilon^x\}$ é analítico.

Definição 1.2.5 Dizemos que um subconjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ é semianalítico se para todo $x \in X$, existe uma vizinhança aberta U de x em \mathbb{R}^n e uma quantidade finita de funções analíticas $f_{j,k}, g_{j,k} \in \mathcal{O}_U^{\text{anal}}$ tais que

$$U \cap X = \bigcup_{j=1}^r \left(\bigcap_{k=1}^{s_j} \{x \in \mathbb{R}^n; f_{j,k}(x) = 0 \text{ e } g_{j,k}(x) > 0\} \right).$$

onde $\mathcal{O}_U^{\text{anal}}$ denota o anel de funções analíticas $f : U \rightarrow \mathbb{R}$.

Exemplo 1.2.6 Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = \cos y - x$. Observe que o conjunto $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; f(x, y) > 0\}$ é semianalítico.

Teorema 1.2.7 (Teorema de Tarski-Seidenberg) ((BIERSTON; MILMAN, 1988), Teorema 1.5) Sejam $X \subset \mathbb{R}^{n+1}$ um conjunto semialgébrico e $\pi : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ uma aplicação própria. Então, o conjunto $\pi(X)$ é semialgébrico em \mathbb{R}^n .

Dado um conjunto semianalítico, podemos nos questionar se o Teorema de Tarski-Seidenberg é válido, isto é, se a imagem de um conjunto semianalítico por uma aplicação analítica ainda é um conjunto semianalítico. Isto motivou a definição de espaços mais gerais conhecidos como conjuntos subanalíticos. Mostramos agora algumas definições e resultados sobre a teoria destes espaços, apresentados em (BIERSTONE, 1988) e (SHIOTA, 1997).

Definição 1.2.8 Dizemos que um subconjunto $X \subset M$ é subanalítico se para cada ponto $p \in M$, existe uma vizinhança U de p tal que $X \cap U$ é a projeção de um conjunto semianalítico relativamente compacto, ou seja, existe uma variedade suave analítica N e um subconjunto compacto A semianalítico de $M \times N$ tal que $X \cap U = \pi(A)$, onde $\pi : M \times N \rightarrow M$ é a projeção.

Equivalentemente, dizemos que $X \subset M$ é subanalítico se para cada ponto $p \in M$ existe uma vizinhança U_p de p em M e funções reais analíticas próprias $f_{j,k} : A_{j,k} \rightarrow U_p$, com $j = 1, \dots, n$, $k = 1, 2$ e $A_{j,k}$ subconjunto analítico fechado de uma variedade analítica suave $M_{j,k}$, tais que

$$X \cap U_p = \bigcup_{j=1}^n (Im f_{j,1} - Im f_{j,2}).$$

Observação 1.2.9 *Da definição podemos observar que conjuntos analíticos e semianalíticos são conjuntos subanalíticos.*

Definição 1.2.10 *Seja $X \subset \mathbb{R}^n$. Dizemos que uma função $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função subanalítica se seu gráfico $\text{Graf}(f) = \{(x, f(x)); x \in X\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ é um conjunto subanalítico.*

Exemplo 1.2.11 *Considere a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = |\cos x|$. Note que f não é analítica porque não pode ser escrita como série de potências em uma vizinhança do zero. Além disso,*

$$\text{Graf}(f) = \{(x, |\cos x|); x \in \mathbb{R}\}.$$

Considere as funções analíticas $F(x, y) = \cos^2 x - y$ e $g(x, y) = y$. Note que o gráfico da f pode ser escrito como

$$\text{Graf}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; F(x, y) = 0 \text{ e } g(x, y) > 0\}.$$

Assim, $\text{Graf}(f)$ é semianalítico, e portanto, subanalítico, isto é, f é uma função subanalítica.

A seguir, apresentamos algumas propriedades de conjuntos subanalíticos apresentadas em (SHIOTA, 1977), p. 41:

Proposição 1.2.12 (Propriedades) *Sejam X e $Y \subset \mathbb{R}^n$ conjuntos subanalíticos e $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função subanalítica. Então:*

- i) Os conjuntos $X \setminus Y$, \overline{X} , $X \cap Y$ e $X \times Y$ são subanalíticos, onde \overline{X} é o fecho topológico de X em \mathbb{R}^n .*
- ii) Se $f^{-1}(B)$ é limitado para qualquer conjunto $B \subset \mathbb{R}^n$ então $f(X)$ é subanalítico.*
- iii) Se $f(X \cap B)$ é subanalítico para qualquer conjunto limitado $B \subset \mathbb{R}^n$ então $f^{-1}(Y)$ é subanalítico.*
- iv) A família de componentes conexas de X é localmente finita em cada ponto de \mathbb{R}^n , e cada componente conexa é subanalítica.*
- v) Para cada ponto $x \in \overline{X} - X$, existe uma aplicação analítica $\phi : [0, 1] \rightarrow \overline{X}$ tal que $\phi([0, 1]) \subset X$, $\phi(0) = x$, e $\phi|_{]0, 1]}$ é um mergulho analítico.*
- vi) Se f_1, f_2 são funções subanalíticas em X tais que se $f_1(X \cap B)$ e $f_2(X \cap B)$ são limitados para qualquer conjunto $B \subset \mathbb{R}^n$ então o produto $f_1 \cdot f_2$ é subanalítico. A soma $f_1 + f_2$ também é subanalítica.*

- vii) Se X é uma subvariedade de classe C^1 de dimensão m então a união $TX = \bigcup_{x \in X} x \times T_x X \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ dos espaços tangentes de X e o conjunto $\{(x, T_x X) \in X \times G_{n,m}\}$ são subanalíticos.
- iv) Dada uma função subanalítica $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 tal que $g(X \cap B)$ é limitado para qualquer conjunto $B \subset \mathbb{R}^n$, então as derivadas parciais $\frac{\partial g}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial g}{\partial x_n}$ são subanalíticas. Sem a condição de fronteira temos que a aplicação $(g, \frac{\partial g}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial g}{\partial x_n})$ é subanalítica.

1.3 Estratificação de Whitney

Vamos considerar nesta seção X um conjunto analítico em \mathbb{R}^n . Whitney (WHITNEY, 1965) mostrou que sob algumas condições, o conjunto X pode ser particionado em variedades suaves e conexas de forma que estas variedades satisfazem certas propriedades chamadas de condições de Whitney.

Definição 1.3.1 Definimos uma estratificação localmente finita de X como uma partição $\{X_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ de X em subvariedades suaves tais que para todo $p \in X$ existe uma vizinhança aberta U de $p \in \mathbb{R}^n$ que intersecta apenas uma quantidade finita de estratos da partição $\{X_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$. Cada componente de $\{X_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ é denominado estrato.

Exemplo 1.3.2 Considere o cone C dado por $x^2 + y^2 = z^2$, com $z \geq 0$. A estratificação dada por $C \setminus \{0\} \cup \{0\}$ é localmente finita.

Definição 1.3.3 Dizemos que uma estratificação $\{X_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ de X satisfaz a condição de fronteira se para todo par de estratos X_α e X_β tais que $\overline{X_\alpha} \cap X_\beta \neq \emptyset$, temos $X_\beta \subset \overline{X_\alpha}$. Como esta partição é disjunta, na verdade temos que $X_\beta \subset \partial X_\alpha$.

Definição 1.3.4 Seja $\{X_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ uma estratificação de X . Dizemos que a estratificação $\{X_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ satisfaz as condições de Whitney se para todo par (X_α, X_β) tal que $X_\beta \subset \overline{X_\alpha}$ e todo ponto $y \in X_\beta$, temos:

- a) Dada qualquer sequência de pontos $(x_n) \subset X_\alpha$ que converge para y e tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} T_{x_n} X_\alpha = T$ existe, então $T_y X_\beta \subset T$.
- b) Dada qualquer sequência de pontos $(y_n) \subset X_\beta$ que converge para y e tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} \overline{x_n y_n} = \lambda$, então $\lambda \subset T_y X_\beta$ onde $\overline{x_n y_n}$ é a linha que vai de x_n até y_n .

Definição 1.3.5 Quando uma estratificação localmente finita $\{X_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ satisfaz a condição de fronteira e as condições de Whitney, dizemos que esta é uma estratificação de Whitney.

Proposição 1.3.6 Sejam X_α e X_β estratos de X . Se o par (X_α, X_β) satisfaz a condição b) de Whitney em $y \in X$ então o par (X_α, X_β) também satisfaz a condição a) de Whitney.

Demonstração. Como as condições a e b são locais, podemos supor que X_α e X_β são subvariedades do \mathbb{R}^n . Consideramos $\{x_n\}$ uma sequência de pontos em X_α que converge para y e os planos tangentes $T_{x_n}X_\alpha$ convergem para algum $T \subset T_y\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n$. Devemos mostrar que $T_yX_\beta \subset T$. Suponhamos, por absurdo, que $T_yX_\beta \not\subset T$. Então existe uma linha $l \subset \mathbb{R}^n$ passando pela origem tal que $l \subset T_yX_\beta$ mas $l \not\subset T$. Como $l \subset T_yX_\beta$, podemos escolher uma sequência de pontos $\{y_n\}$ em X_β que converge para y tal que $y_i \neq x_n$ e $\overline{x_n y_n} \rightarrow l$. Entretanto, como $l \not\subset T$ segue que a condição b não vale, chegando a uma contradição. ■

Exemplo 1.3.7 Seja C o cone com vértice na origem. Consideramos a estratificação $\{X_1, X_2\}$ com X_1 uma geratriz do cone e $X_2 = C \setminus \{X_1\}$. Então, esta estratificação não satisfaz as condições de Whitney.

De fato, se considerarmos uma sequência $\{x_n\} \subset C$ sobre uma geratriz do cone diferente de X_1 e outra sequência $\{y_n\}$ na geratriz X_1 , ambas convergindo para a origem tal que o seguimento $\overline{x_n y_n}$ tenha sempre a mesma direção λ . A condição a não é satisfeita pois $\lim T_0X_1 \not\subset \lim T_{x_i}X_2$. Além disso, pela Proposição 1.3.6, segue que a condição b de Whitney também não é satisfeita. Geometricamente, é fácil observar que a condição b não é satisfeita porque $\lambda \not\subset \lim T_{x_i}X_2$.

Entretanto, se consideramos a estratificação formada por $\{X_1, X_2, X_3\}$ tal que X_1 é a origem, X_2 é uma geratriz menos a origem e $X_3 = C \setminus (X_1 \cup X_2)$, temos que esta estratificação satisfaz as condições de Whitney.

Definição 1.3.8 Sejam X um conjunto analítico e $\{X_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ uma estratificação de Whitney de X . Dizemos que $\{X_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ é uma estratificação de Whitney forte se ela satisfaz a (w)-condição de Kuo, isto é, se dados $y \in X_\alpha \subset \overline{X_\beta}$ existem uma vizinhança U_y de y em \mathbb{R}^n e uma constante $C > 0$ tais que

$$\delta(T_{y'}S_\alpha, T_xS_\beta) \leq \|y' - x\|,$$

para todo $y' \in U_y \cap X_\alpha$ e $x \in U_y \cap X_\beta$, onde

$$\delta(A, B) = \sup_{a \in A, \|a\|=1} \|a - \pi_B(a)\|,$$

com A, B subespaços vetoriais de \mathbb{R}^n e π_B a projeção ortogonal em B .

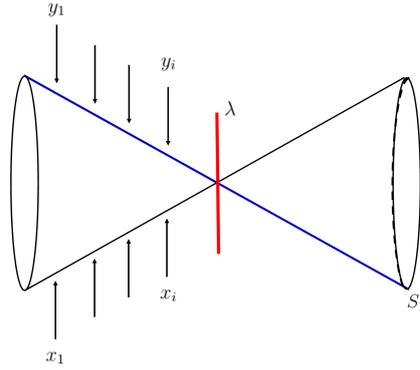


Figura 1.1: Estratificação do cone C

Definição 1.3.9 *Uma estratificação subanalítica $\{X_i\}$ de um conjunto subanalítico em \mathbb{R}^n é uma estratificação analítica localmente finita em cada ponto de \mathbb{R}^n tal que cada estrato é subanalítico em \mathbb{R}^n .*

Exemplo 1.3.10 (Cúspide de Whitney) *Seja $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ a função definida por $f(x, y, z) = y^2 - x^2z^2 - x^3$. Então a variedade V_f definida por $V_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; f(x, y, z) = 0\}$ pode ser estratificada das seguintes formas:*

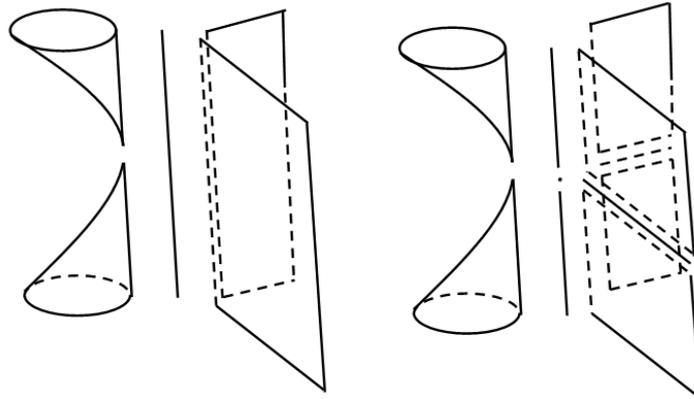


Figura 1.2: Estratificações da Cúspide de Whitney.

Teorema 1.3.11 (Existência de Estratificação Subanalítica de Whitney) *Seja $\{A_\gamma\}$ uma família de conjuntos subanalíticos contida em \mathbb{R}^n localmente finita em cada ponto de \mathbb{R}^n . Então qualquer conjunto subanalítico $X \subset \mathbb{R}^n$ admite uma estratificação de Whitney canônica de classe C^r subanalítica compatível com $\{A_\gamma\}$, onde r é um inteiro possível.*

Antes de enunciarmos o próximo teorema, apresentamos alguns resultados de (Verdier, 1976):

Proposição 1.3.12 ((Verdier, 1976), Observação 3.7) *Sejam X e Y como acima, A um subconjunto de X com uma estratificação de Whitney \mathcal{S} e $f : X \rightarrow Y$ uma aplicação. Suponha que Y seja suave e f transversal a \mathcal{S} . Então, para qualquer subespaço suave localmente fechado $Z \subset Y$, $f^{-1}(Z) \cap \mathcal{S}$ é uma estratificação de Whitney de $A \cap f^{-1}(Z)$ satisfazendo a propriedade (w).*

Proposição 1.3.13 ((Verdier, 1976), Proposição 4.6) *Seja X um espaço analítico real e seja A um subespaço localmente fechado de X , munido de uma estratificação de Whitney \mathcal{S} . Seja Y um espaço analítico real suave de \mathbb{R}^n , $f : X \rightarrow Y$ uma aplicação transversal a \mathcal{S} e η um campo de vetores C^∞ em Y . Então existe um campo rugoso ξ de vetores tangentes a (A, \mathcal{S}) que levanta η , isto é, tal que para todo $x \in A$, temos $Df_x(\xi_x) = \eta_{f(x)}$.*

Proposição 1.3.14 ((Verdier, 1976), Proposição 4.8) *Existe uma vizinhança aberta $U \subset A \times \mathbb{R}$ de $A \times \{0\}$ e uma aplicação rugosa $\theta : U \rightarrow A$ com as seguintes propriedades:*

- (i) *para todo estrato \mathcal{S}_α de \mathcal{S} , $\theta((\mathcal{S}_\alpha \times \mathbb{R}) \cap U) \subset \mathcal{S}_\alpha$;*
- (ii) *para todo estrato \mathcal{S}_α e para cada $x \in \mathcal{S}_\alpha$ tal que $(x, t) \in (\mathcal{S}_\alpha \times \mathbb{R}) \cap U$, temos que $\frac{\partial}{\partial t} \theta(x, t) = \eta_{\theta(x, t)}$.*

Teorema 1.3.15 *Todo conjunto subanalítico $X \subset \mathbb{R}^n$ admite uma Estrutura Cônica Local, isto é, para todo $x_0 \in X$ existe $\epsilon_0 > 0$ suficientemente pequeno tal que para qualquer $0 < \epsilon \leq \epsilon_0$ temos que $X \cap \mathbb{B}_\epsilon$ é homeomorfo ao cone sobre $X \cap \mathbb{S}_\epsilon$, onde \mathbb{B}_ϵ é uma bola fechada em torno de x_0 e \mathbb{S}_ϵ é sua fronteira.*

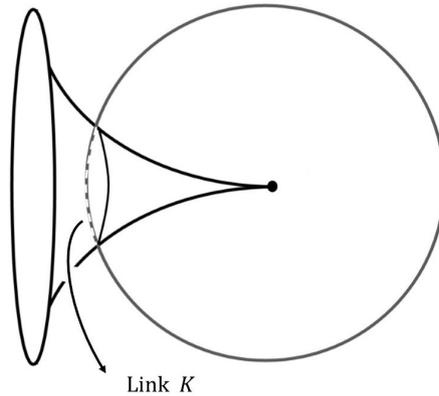


Figura 1.3: Estrutura Cônica Local

Demonstração. Pelo Teorema 1.3.11 existe uma estratificação de Whitney $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ de X . Seja X_0 o estrato que contém $\{x_0\}$. Afirmamos que $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A} \cup X_0 - \{x_0\} \cup \{x_0\}$

é uma estratificação de Whitney. Basta verificar que o par $(x_0, X_0 - \{x_0\})$ satisfaz a condição b de Whitney.

Fixamos $x \in X$ e tomamos \mathbb{B}_ξ uma bola fechada em \mathbb{R}^n de centro x tal que \mathbb{B}_ξ intersecta uma quantidade finita de extratos, digamos X_1, \dots, X_k .

Note que a estratificação de Whitney $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ induz uma estratificação de Whitney em $X \cap \mathbb{B}_\xi$. Esta estratificação é formada por interseções do tipo $X_\alpha \cap \mathbb{B}_\xi$ e $X_\alpha \cap \mathbb{S}_\xi$.

Considere $d_x : X \cap \mathbb{B}_\xi \rightarrow \mathbb{R}$ a aplicação distância ao quadrado de um ponto de $X \cap \mathbb{B}_\xi$ até x . Afirmamos que d_x é uma aplicação estratificada, isto é:

- i) d_x é contínua.
- ii) $d_x(X \cap \mathbb{B}_\xi) \subset \mathbb{R}$
- iii) $(d_x)_i : X_i \cap \mathbb{B}_\xi \rightarrow \mathbb{R}$ é suave.

Como o número de valores críticos de $(d_x)_i$ é finito ((MILNOR, 1968), Corolário 2.8), existe $\epsilon_0 > 0$ suficientemente pequeno tal que

$$(d_x)_i : X_i \cap \mathbb{B}_{\epsilon_0} \rightarrow (0, \epsilon_0)$$

é uma submersão para cada $i = 1, \dots, k$.

Portanto,

$$d_x : X \cap \mathbb{B}_{\epsilon_0}^* \rightarrow (0, \epsilon_0)$$

é uma submersão estratificada. Observamos que na esfera \mathbb{S}_ϵ a função d_x é constante.

Afirmamos que d_x é própria. De fato, seja K compacto em $(0, \epsilon_0]$, então K é fechado e limitado. Como d_x é contínua, temos que $d_x^{-1}(K)$ é um fechado em $X \cap \mathbb{B}_{\epsilon_0}^*$, que é um compacto. Portanto $d_x^{-1}(K)$ é compacto.

Vamos considerar um campo de vetores $\vec{\omega}$ em $[0, \epsilon_0]$, não nulo em $(0, \epsilon_0]$, nulo em 0 e apontando para a origem.

Pelo Teorema 1.3.13 podemos levantar esse campo a um campo de vetores estratificado e não nulo \vec{v} em $X \cap \mathbb{B}_{\epsilon_0}^*$ que é integrável.

Observamos que toda curva integral associada a \vec{v} converge para x . Então o fluxo

$$\sigma : \mathbb{R} \times (X \cap \mathbb{B}_{\epsilon_0}^*) \rightarrow X \cap \mathbb{B}_{\epsilon_0}^*$$

associado a \vec{v} nos dá um homeomorfismo

$$\text{Cone}(X \cap \mathbb{S}_{\epsilon_0}) \longrightarrow X \cap \mathbb{B}_{\epsilon_0}$$

■

1.4 Outras Definições Topológicas

Definição 1.4.1 *Se M é uma superfície compacta em \mathbb{R}^3 e $c > 0$ é um número inteiro, denotamos por $(M)_c$ a superfície obtida removendo de M uma união disjunta de c discos abertos.*

Observação 1.4.2 *$(M)_c$ é uma superfície compacta com fronteira dada por c círculos disjuntos e $\chi((M)_c) = \chi(M) - c$.*

Reciprocamente, se F é uma superfície compacta em \mathbb{R}^3 com fronteira dada por c círculos disjuntos, então, vamos denotar por \bar{F} a superfície fechada obtida por anexar um disco fechado a cada componente de F .

Observação 1.4.3 *Observe que $(\bar{F})_c$ é difeomorfo a F e que $\chi(\bar{F}) = \chi(F) + c$.*

Definição 1.4.4 *Para qualquer espaço triangulável Y seja $\chi_C(Y)$ a característica de Euler com suporte compacto de Y (veja [\(EHRENBOTG; READDY, 2014\)](#) e [\(GUSEINZADE, 2010\)](#) para uma referência). Observe que as seguintes propriedades são verdadeiras:*

- i) $\chi_C(\{p\}) = 1$, se p é um ponto;
- ii) $\chi_C(Y) = \chi_C(Y')$ se Y é homeomorfo à Y' ;
- iii) $\chi_C(Y) = \chi_C(Y')$ para quaisquer espaços homotópicos compactos Y' e Y ;
- iv) $\chi_C(Y) = \chi_C(A) + \chi_C(Y \setminus A)$ para todo subconjunto fechado $A \subset Y$;
- v) $\chi_C(Y \times Y') = \chi_C(Y)\chi_C(Y')$;
- vi) Se M é uma variedade suave de dimensão n (não necessariamente compacta), então $\chi_C(M) = (-1)^n \chi(M)$, onde $\chi(M)$ é a característica de Euler de M .

Então, para qualquer $n \in \mathbb{N}$, temos:

$$\begin{cases} \chi_C(\mathbb{B}^n) & = & 1 \\ \chi_C(\mathring{\mathbb{B}}^n) = \chi_C(\mathbb{R}^n) & = & (-1)^n \\ \chi_C(\mathbb{S}^n) & = & 1 + (-1)^n \end{cases}$$

Além disso, para qualquer espaço triangulável Y nós temos:

$$\chi_C(\text{Cone}(Y)) = \chi_C(Y) + \chi_C(Y \times (0, 1)) + \chi_C(\{\text{point}\}) = 1.$$

1.5 Fibrção de Milnor Complexa

Nesta seção estudamos os principais Teoremas de Fibrção em conjuntos complexos. Inicialmente, vamos considerar uma aplicação diferenciável entre variedades diferenciáveis.

Sabemos que uma projeção de um fibrado localmente trivial é sempre sobrejetora. Uma pergunta natural é sob que condições uma aplicação sobrejetora entre variedades diferenciáveis é a projeção de um fibrado localmente trivial. Uma condição é dada pelo Teorema de Fibrção de Ehresmann que apresentamos a seguir:

Teorema 1.5.1 (Teorema de Fibrção de Ehresmann) ([EHRESMANN, 1950](#)) *Sejam N, P variedades suaves e $f : N \rightarrow P$ uma submersão própria. Então f é a projeção de um fibrado suave localmente trivial.*

O teorema [1.5.1](#) pode ser generalizado para N, P variedades diferenciáveis com bordo.

Se temos agora uma estratificação de Whitney de um subconjunto fechado S de N e $f : N \rightarrow P$ uma aplicação própria que é uma submersão em cada estrato, o Primeiro Lema de Isotopia de Thom ([THOM, 1969](#)) nos garante que f é a projeção de um fibrado localmente trivial:

Proposição 1.5.2 (Primeiro Lema de Isotopia de Thom) ([MATHER, 1970](#)), *Proposição 11.1*) *Seja $f : N \rightarrow P$ uma aplicação diferenciável. Supomos que a aplicação $f|_S : S \rightarrow P$ seja própria, sobrejetiva e que $f|_X : X \rightarrow P$ seja uma submersão para cada estrato X de S . Então, f é a projeção de um fibrado localmente trivial.*

Teorema 1.5.3 (Teorema de Fibrção de Milnor) ((MILNOR, 1968), Teorema 4.8) *Sejam $f : (\mathbb{C}^{n+1}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ um germe de aplicação holomorfa, $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno e $K = \mathbb{S}_\epsilon \cap V$. Então, a aplicação*

$$\phi = \frac{f}{|f|} : \mathbb{S}_\epsilon \setminus K \rightarrow \mathbb{S}^1$$

é a projeção de um fibrado localmente trivial.

O Teorema 1.5.3 além de ser a formulação original dada por Milnor em (MILNOR, 1968), fornece várias ideias geométricas da topologia de singularidades (ver (MILNOR, 1968) p. 45). Porém, existe uma outra formulação do Teorema de Fibrção de Milnor que possibilita generalizações e pode ser mais apropriado do ponto de vista da Geometria Algébrica. Esta formulação é conhecida como Teorema de Fibrção de Milnor-Lê.

Teorema 1.5.4 *Existem \mathbb{S}_ϵ uma esfera suficientemente pequena centrada em 0 em \mathbb{C}^{n+1} e δ suficientemente pequeno com relação à ϵ tal que as fibras $f^{-1}(t)$ com $|t| \leq \delta$ encontrem \mathbb{S}_ϵ transversalmente. Além disso, $N(\epsilon, \delta) = f^{-1}(\partial D_\delta) \cap B_\epsilon$, então*

$$f|_{N(\epsilon, \delta)} : N(\epsilon, \delta) \rightarrow \partial D_\delta \tag{1.1}$$

é um fibrado diferenciável localmente trivial.

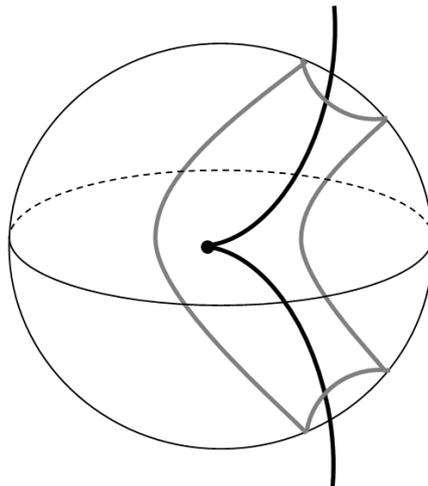


Figura 1.4: Fibrção no Tubo $N(\epsilon, \delta)$

Este resultado foi obtido por Milnor em (MILNOR, 1966) e (MILNOR, 1968) quando $0 \in \mathbb{C}^{n+1}$ é um ponto crítico isolado de f . Milnor também mostrou no mesmo

trabalho que para f qualquer a fibra $f^{-1}(t) \cap B_\epsilon$ no Teorema 1.5.4 é difeomorfa à fibra no Teorema 1.5.3.

Contudo, se X é um conjunto analítico complexo e f é uma função holomorfa de X em \mathbb{C} , usando o Teorema de Hironaka (HIRONAKA, 1977), D. T. Lê (LÊ, 1968) mostrou que em uma vizinhança suficientemente pequena de um ponto crítico, a restrição da f a esta vizinhança é a projeção de um fibrado localmente trivial, como vemos a seguir:

Teorema 1.5.5 (Teorema de Fibração de Milnor-Lê) ((HIRONAKA, 1977), Teorema 1.1) *Sejam $X \subset U \subset \mathbb{C}^n$ um subconjunto analítico de um aberto U de \mathbb{C}^n , $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ uma função analítica e x um ponto em X tal que $f(x) = 0$. Então, se $\epsilon > 0$ é suficientemente pequeno e $\eta > 0$ com $\epsilon \gg \eta$, a aplicação induzida por f :*

$$\Psi_{\epsilon, \eta} : f^{-1}(\mathring{D}_\eta - \{0\}) \cap X \cap B_\epsilon \rightarrow \mathring{D}_\eta - \{0\}$$

onde B_ϵ é a bola real fechada em \mathbb{C}^n de centro x e raio $\epsilon > 0$, \mathring{D}_η é o disco aberto de \mathbb{C} centrado em 0 e de raio $\eta > 0$, é a projeção de um fibrado topológico localmente trivial.

1.6 Fibração de Milnor Real

Como podemos ver em (MILNOR, 1968), uma questão natural é se é possível obter um teorema de fibração análogo ao caso complexo quando consideramos o germe de uma aplicação analítica real $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$. Nesta seção apresentamos um teorema obtido por J. Milnor em (MILNOR, 1968), que é o primeiro passo no sentido de responder esta questão.

Teorema 1.6.1 (Teorema de Fibração de Milnor Real) ((MILNOR, 1968),) *Seja $f : (\mathbb{R}^n; 0) \rightarrow (\mathbb{R}^k; 0)$ germe de função polinomial com $k \geq 2$, $f(0) = 0$ e $0 \in \mathbb{R}^n$ um ponto crítico isolado. Então existe $\epsilon_0 > 0$ suficientemente pequeno tal que para todo $0 < \epsilon < \epsilon_0$, existe $\eta > 0$, com $0 < \eta \ll \epsilon$, tal que a aplicação*

$$\frac{1}{\eta} f| : \mathbb{B}_\epsilon \cap f^{-1}(\mathbb{S}_\eta^{k-1}) \rightarrow \mathbb{S}^{k-1}$$

é a projeção de um fibrado suave localmente trivial. Além disso, cada fibra F é uma variedade diferenciável compacta de dimensão $m - k$ tal que o bordo é uma cópia do link K .

A hipótese do Teorema 1.6.1 pede que localmente a aplicação f tenha singularidade isolada na origem. Porém, segundo Milnor em (MILNOR, 1968), o fato desta hipótese ser forte, implica na dificuldade de encontrar exemplos não triviais que mostram a aplicabilidade do resultado.

Recentemente, (MENEGON, 2016) provou um teorema de fibração de Lê-Milnor para funções subanalíticas definidas em conjuntos subanalíticos. Vamos considerar $f : X \rightarrow Y$ uma função subanalítica entre espaços subanalíticos.

Teorema 1.6.2 (Teorema de Fbração para Conjuntos Subanalíticos) *Sejam B um conjunto subanalítico compacto e $C \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto unidimensional contido em $f(X) \cap B$ para qualquer $y \in C$, existe um número positivo real $\delta > 0$ tal que a restrição*

$$f| : f^{-1}((C \setminus \{y\}) \cap \mathbb{D}_\delta(y)) \cap B \rightarrow (C \setminus \{y\}) \cap \mathbb{D}_\delta(y)$$

é a projeção de um fibrado topológico localmente trivial.

1.7 Germes de Função do Tipo Cone

Definição 1.7.1 *Sejam x^0 um ponto de \mathbb{R}^n e A um subconjunto de \mathbb{R}^n . Definimos o cone sobre A com base em x^0 , como a união de todos segmentos de reta*

$$ta + (1 - t)x^0, \quad 0 \leq t \leq 1$$

ligando os pontos a em A ao ponto base x^0 . Denotamos o cone sobre A com base x^0 por $\text{Cone}(A)$.

Inspirados no trabalho de (KING, 1980), dizemos que um germe de função $f : (\mathbb{R}^3, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ é *do tipo cone* se existem $\epsilon_0 > 0$ suficientemente pequeno tal que para ϵ com $0 < \epsilon < \epsilon_0$ existe um homeomorfismo de pares:

$$h : (\mathbb{B}_\epsilon, V(f) \cap \mathbb{B}_\epsilon) \rightarrow (\text{Cone}(\mathbb{S}_\epsilon), \text{Cone}(K(f))),$$

onde $K(f) = V(f) \cap \mathbb{S}_\epsilon$. Em particular, o tipo topológico do link $K(f)$ é constante para ϵ com $0 < \epsilon < \epsilon_0$.

São exemplos de germes de função do tipo cone os germes de funções analíticas, e de modo mais geral, germes de funções diferenciáveis $f : (\mathbb{R}^3, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ tais que $V(f)$ é um conjunto subanalítico (veja (COSTE, 1999), Teorema 4.10).

Capítulo 2

A Fibra de Milnor de Germes de Funções de Classe C^l em \mathbb{R}^3

Neste capítulo mostramos, na configuração real, que a topologia da fibra de Milnor não depende da escolha da vizinhança, contanto que a fibra seja um elemento suficientemente pequeno no sentido do trabalho de Lê-Teissier (ver (LÊ; TEISSIER, 1981)).

2.1 Links e Gráficos

Nesta seção, consideramos o *link* K um subconjunto de uma esfera \mathbb{S}_ϵ^2 formada pela união finita de círculos e pontos que podem se intersectar em um ponto tangente ou em um par de pontos. Dado um germe de função analítica $f : (\mathbb{R}^3, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ ou de forma mais geral, um germe de função do tipo cone, como definido em ??) definimos o link:

$$K(f) := f^{-1}(0) \cap \mathbb{S}_\epsilon^2,$$

com $\epsilon > 0$ um número real suficientemente pequeno e positivo.

Definição 2.1.1 Dizemos que dois links K e K' são equivalentes, e denotamos por $K \simeq K'$, se existe um homeomorfismo $h : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ tal que $h(K) = K'$.

Dado K um link não vazio, consideramos $K = K_1 \cup \dots \cup K_r$ uma decomposição em componentes conexas não vazias do link K . Cada componente conexa K_i , com $i = 1, \dots, r$, é formada por um ponto ou uma união de círculos que se intersectam em uma quantidade finita de pontos.

Note que $\mathbb{S}_\epsilon^2 \setminus K_i$ é homeomorfa à união finita de discos abertos em \mathbb{S}_ϵ^2 .

Definimos o coeficiente d_j como o número de conjuntos conexos que formam $\mathbb{S}_\epsilon^2 \setminus K_j$. Fixamos um ponto P em $\mathbb{S}_\epsilon^2 \setminus K$ o qual será chamado de ponto base, tal que $\mathbb{S}_\epsilon^2 \setminus \{p\}$ é homeomorfo ao \mathbb{R}^2 e para todo $j = 1, \dots, r$ temos que $\mathcal{D}_{j,1}$ é o conjunto conexo que contém o ponto base P .

Exemplo 2.1.2 Na Figura 2.2 abaixo, que representa a planificação da Figura 2.1, observamos o link K com 8 componentes conexas K_1, \dots, K_8 com $d_1 = d_2 = d_4 = 2$, $d_3 = d_6 = d_8 = 1$, $d_5 = 4$ e $d_7 = 8$.

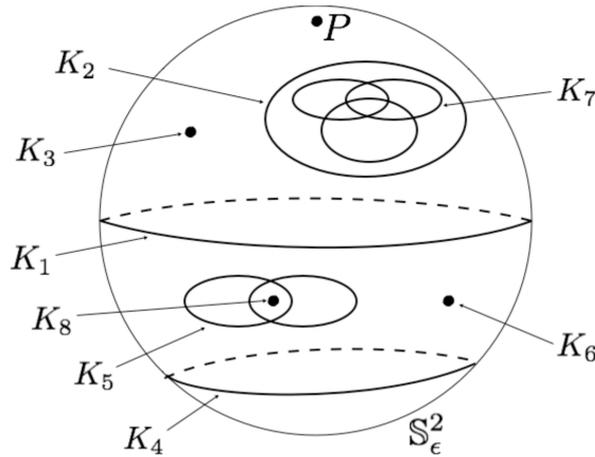


Figura 2.1: Link K .

Para cada componente conexa K_i de K escrevemos:

$$\mathbb{S}_\epsilon^2 \setminus K_i = D_{i,1} \cup \dots \cup D_{i,d_i},$$

de modo que $P \in D_{i,1}$.

Definição 2.1.3 Dizemos que uma componente conexa K_i de K está contida em uma componente conexa K_j de K , e escrevemos $K_i \subset K_j$, se $K_i \not\subset \mathcal{D}_{j,1}$.

Exemplo 2.1.4 A figura abaixo representa o link da imagem 2.1 planificado, observe que $K_8 \subset K_5 \subset K_1$ e $K_4, K_6 \subset K_1$. Temos também que $K_7 \subset K_2$.

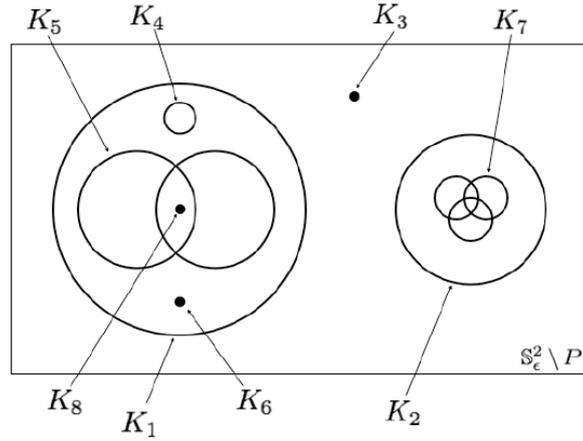


Figura 2.2: Planificação do link K

Definição 2.1.5 Seja $A = \{K_{j_1}, \dots, K_{j_n}\}$ uma coleção de componentes conexas de K , com $n \geq 1$. Dizemos que $K_i \in A$ é de nível 1 com relação à coleção A se $K_i \subset K_{j_k}$ então $i = j_k$.

Definição 2.1.6 Dizemos que uma componente conexa K_j do link K é de nível 1 se K_j é de nível 1 com relação à coleção $\{K_1, \dots, K_r\}$ de todas as componentes conexas de K .

Vamos supor que o link K possui uma quantidade r_1 de componentes conexas de nível 1. Podemos reordenar a coleção $\{K_1, \dots, K_r\}$ de modo que as r_1 primeiras componentes sejam as componentes conexas de nível 1 do link.

Analogamente à definição 2.1.6 podemos definir as componentes conexas de nível 2. As componentes conexas de nível 2 são aquelas de nível 1 referentes à coleção $\{K_{r_1}, \dots, K_r\}$. Por indução, conseguimos definir as componentes conexas de nível l , para l um número natural.

Afirmção 2.1.7 O link K possui uma quantidade finita de componentes conexas.

Demonstração. Supomos por contradição que o link possui uma quantidade infinita de componentes conexas. Então existem duas possibilidades:

- i) Existe uma quantidade infinita de componentes conexas de nível 1.
- ii) Existe uma quantidade finita de componentes conexas de nível 1.

Suponha o item *ii*) verdadeiro. Então dentro de alguma componente conexa de nível 1 existem infinitos discos. Novamente caímos nos seguintes casos:

- i) Existe uma quantidade infinita de componentes conexas de nível 2.
- ii) Existe uma quantidade finita de componentes conexas de nível 2.

Suponha que este processo é infinito. Significa que temos componentes conexas do link encaixadas, o que não acontece, porque cada componente conexa do link tem vizinhança tubular de mesmo raio. A fronteira de do tubo de Milnor fornece vizinhanças de raio constante para cada componente 2 a 2 disjuntas pela Fibrção de Milnor. ■

Como o número de componeres conexas do link K é finito, este processo para em um nível final n , para algum $n \geq 1$. Então, temos que:

$$r = r_1 + \dots + r_n.$$

2.2 O Gráfico Γ Associado à K

Associamos um gráfico Γ ao link K como a seguir:

- Cada componente conexa K_i de K é representada pelo gráfico Γ_i formado por um círculo e $(d_i - 1)$ pontos, todos eles ligados por segmentos de retas. O círculo correspondente ao disco aberto $D_{i,1}$, e os pontos correspondentes aos discos abertos $D_{i,k}$ com $k = 2, \dots, d_i$. Na Figura 2.3 apresentamos o gráfico de alguns links conectados.

K_i	d_i	Γ_i
$D_{i,1} \bullet$	1	\circ
$D_{i,1} \text{ (circulo)} \text{ } D_{i,2}$	2	$\circ \text{---} \bullet$
$D_{i,1} \text{ (circulo)} \text{ } D_{i,2} \text{ (circulo)} \text{ } D_{i,3}$	3	$\circ \text{---} \bullet \text{---} \bullet$
$D_{i,1} \text{ (circulo)} \text{ } D_{i,2} \text{ (circulo)} \text{ } D_{i,3} \text{ (circulo)} \text{ } D_{i,4}$	4	$\circ \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet$

Figura 2.3: Tabela de representação do link K

- No topo de Γ colocamos um Δ , que representamos pelo ponto P .
- Na primeira linha de Γ colocamos todos os gráficos Γ_i com $1 \leq i \leq r_1$ (que é o gráfico corresponde das componentes conexas de grau 1), e juntamos cada um deles ao triângulo Δ usando uma linha reta.
- Na segunda linha de Γ colocamos todos os gráficos Γ_i com $r_1 + 1 \leq i \leq r_1 + r_2$ (que são aqueles associados às componentes conexas de grau 2). Lembrando que para cada $i = r_1 + 1, \dots, r_1 + r_2$ temos que K_i está contido em alguma componente K_j de nível 1, então $K_i \subset D_{j,k}$ para algum $j \in \{1, \dots, r_1\}$ e para algum $k \in \{2, \dots, d_j\}$. Então juntamos Γ_i ao ponto correspondente $D_{j,k}$ na linha abaixo, usando uma linha reta.
- Indutivamente, na l -ésima linha de Γ , para $1 < l \leq n$, colocamos todos os gráficos Γ_i com $r_1 + \dots + r_{l-1} < i \leq r_1 + \dots + r_l$ (então K_i é de nível l), e juntamos cada Γ_i ao ponto $D_{j,k}$ na linha abaixo tal que $K_i \subset D_{j,k}$. Veja a Figura 2.4.

Na Figura 2.4 abaixo, ilustramos o gráfico Γ que representa o link K correspondente às Figuras 2.1 e 2.2.

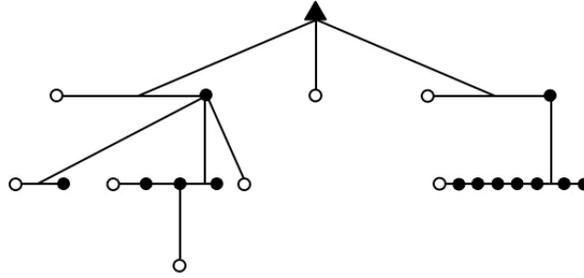


Figura 2.4: Gráfico associado ao link K

Para cada par (i, k) com $i \in \{1, \dots, r\}$ e $k \in \{2, \dots, d_i\}$, seja $b_{i,k}$ o número de componentes conexas K_j de K tal que:

- (i) K_j está contida (como conjunto) no disco aberto $D_{i,k}$ (que implica que $K_j \subset K_i$);
- (ii) K_j é de nível 1 relativa à coleção $A = \{K_{i+1}, \dots, K_r\}$.

Olhando para o gráfico Γ , cada número $b_{i,k}$, para $i \in \{1, \dots, r\}$ e $k \in \{2, \dots, d_i\}$, é o número de linhas retas não horizontais que contém o ponto correspondente à $D_{i,k}$.

Notamos que $\sum_{i=1}^r \sum_{k=2}^{d_i} b_{i,k}$ nos dá o número de componentes conexas que não são de nível 1, pois como $k > 1$, temos $K_j \not\subseteq \mathcal{D}_{i,1}$, para todo $i = 1, \dots, r$. Portanto,

$$r = r_1 + \sum_{i=1}^r \sum_{k=2}^{d_i} b_{i,k}.$$

2.3 Gráficos Equivalentes

Dado um link K , o gráfico $\Gamma(K)$ (e seus coeficientes) construídos como acima, não dependem de um ponto base P , bem como a ordem dos componentes conectados K_i e dos discos $D_{i,k}$.

Agora, definimos uma relação de equivalência entre os gráficos tais que a classe de equivalência $[\Gamma(K)]$ de $\Gamma(K)$ não depende da escolha do ponto base.

Dizemos que dois gráficos Γ e Γ' são equivalentes, e denotamos $\Gamma \sim \Gamma'$, se Γ' pode ser obtido de Γ executando uma combinação das seguintes ações:

- (i) trocando duas componentes Γ_i e Γ_j (e todos os subgráficos subjacentes) obtido no mesmo ponto (que corresponde a reordenar as componentes conexas contidas em um disco);
- (ii) alternando dois pontos na mesma componente Γ_i (que corresponde a reordenar os discos determinado por uma componente conexa);
- (iii) Alternando o ponto de Γ por um triângulo Δ (que corresponde a mudar o ponto base P).

Exemplo 2.3.1 *Consideramos o gráfico na Figura 2.4, como também as modificações mostradas em 2.5 abaixo. O gráfico pode ser reescrito conforme o gráfico mostrado na Figura 2.6 abaixo e ele corresponde ao mesmo link K da Figura 2.1, onde o ponto base P' é escolhido como representamos em Figura 2.8.*

Podemos ver que a relação \sim é de fato uma relação de equivalência, e que a classe de equivalência $[\Gamma(K)]$ é independente da escolha do ponto base P . Além disso, se K é homeomorfo à K' então $[\Gamma(K)] = [\Gamma(K')]$.

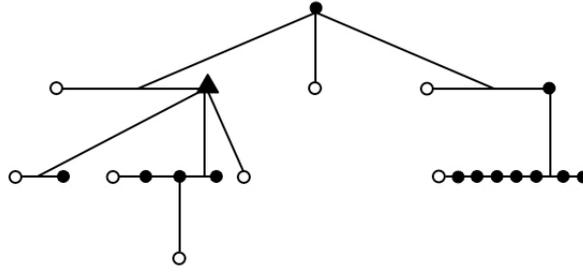


Figura 2.5: Gráfico associado ao link K

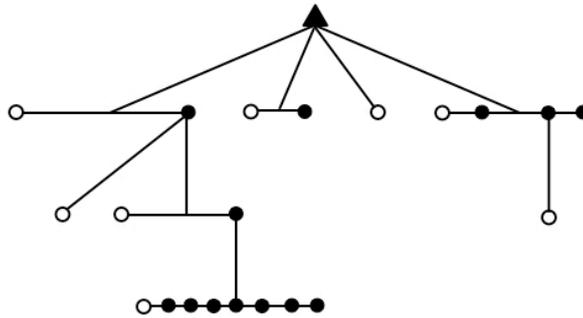


Figura 2.6: Gráfico associado ao link K

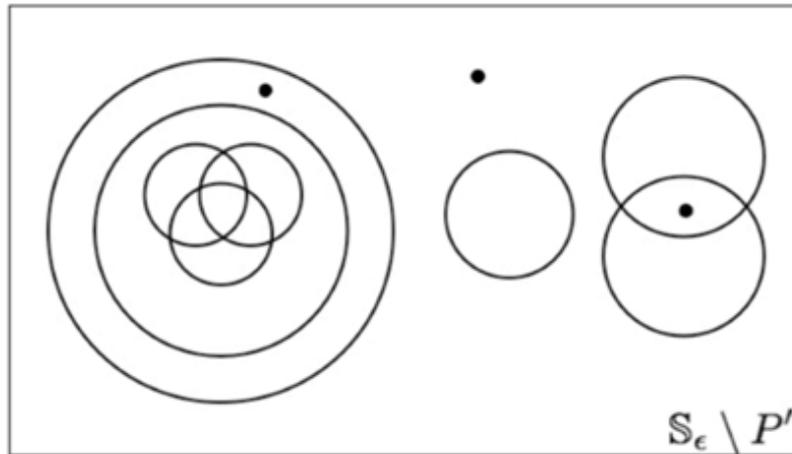


Figura 2.7: Planificação do link K com ponto base P'

2.4 Fibra de Milnor de funções de classe C^l em \mathbb{R}^3 .

Nesta seção, consideramos germes de função $f : (\mathbb{R}^3, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ de classe C^l , com $l \geq 1$. Nosso objetivo é descrever a topologia da fibra de Milnor associada a aplicação f .

Consideramos um germe de função do tipo cone, $f : (\mathbb{R}^3, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ de classe C^l , com $l \geq 1$, e suponha que admite fibração de Milnor-Lê e tenha um valor crítico

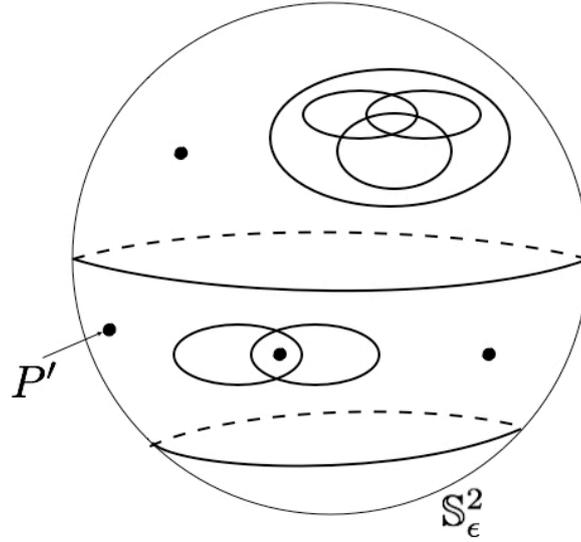


Figura 2.8: Link K com ponto base P'

isolado (observe que se f é analítico, isso sempre acontece, uma vez que o conjunto discriminante de uma função analítica é um conjunto subanalítico). O Lema da fibração de Ehresmann afirma que existe ϵ_1 , com $0 < \epsilon_1 < \epsilon_0$, tal que para cada ϵ com $0 < \epsilon < \epsilon_1$ existe η suficientemente pequeno, com $0 < \eta \ll \epsilon$, tal que a restrição

$$f|_1 : f^{-1}((-\eta, 0) \cup (0, \eta)) \cap \mathbb{B}_\epsilon \rightarrow (-\eta, 0) \cup (0, \eta)$$

é a projeção de um fibrado localmente trivial de classe C^l .

Observação 2.4.1 *Notamos que o espaço base do fibrado acima é desconexo, então é formado pela união disjunta de duas fibras sobre o intervalo $(-\eta, 0)$ e sobre o intervalo $(0, \eta)$. Se o germe de função f não é sobrejetivo, então um destes conjuntos é vazio.*

Para $t \in (-\eta, 0)$ dizemos que a variedade $F_-(f) := f^{-1}(t) \cap \mathbb{B}_\epsilon$ é a *fibra de Milnor à esquerda de f* , para qualquer $t \in (0, \eta)$ dizemos que a variedade $F_+(f) := f^{-1}(t) \cap \mathbb{B}_\epsilon$ é a *fibra de Milnor à direita de f* . Observamos que $F_-(f)$ não é necessariamente homeomorfa à $F_+(f)$, e então podemos definir a “fibra de Milnor” de f . Consideramos a união disjunta

$$\mathcal{F}(f) := F_-(f) \cup F_+(f),$$

que é a fibra de Milnor do germe de função $f^2 : (\mathbb{R}^3, 0) \rightarrow (\mathbb{R}_+, 0)$ dada por $(f^2)(p) := (f(p))^2$. Chamamos de $\mathcal{F}(f)$ a *fibra estendida de Milnor de f* .

2.5 A Topologia da Fibra de Milnor

Apresentamos uma descrição completa da topologia de $\mathcal{F}(f)$ em termos do link $K(f)$. Inicialmente, consideramos os conjuntos

$$X_-(f) := f^{-1}((- \eta, 0)) \cap \mathbb{B}_\epsilon$$

e

$$X_+(f) := f^{-1}((0, \eta)) \cap \mathbb{B}_\epsilon.$$

Definimos também os conjuntos

$$X(f) := X_-(f) \cup X_+(f)$$

e

$$\bar{X}(f) := f^{-1}((- \eta, \eta)) \cap \mathbb{B}_\epsilon.$$

Provamos agora o seguinte teorema:

Teorema 2.5.1 *Sejam $f : (\mathbb{R}^3, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ um germe de função do tipo cone de classe C^l , $l \geq 1$, com um valor crítico isolado que admite fibração do tipo Milnor-Lê. Seja $\Gamma(f)$ o gráfico associado ao link $K(f)$, com coeficientes r_1 e $b_{i,k}$, para $i = 1, \dots, r$ e $k = 2, \dots, d_i$. Então a fibra $\mathcal{F}(f)$ é homeomorfa à seguinte união disjunta:*

$$(\mathbb{S}^2)_{r_1} \cup \left(\bigcup_{i=1}^r \bigcup_{k=2}^{d_i} (\mathbb{D})_{b_{i,k}} \right).$$

Demonstração. Seja Q_0 o conjunto dos pontos em \mathcal{S}_ϵ que são componentes conexas de nível 1 do link $K(f)$. Considere

$$R_0 := (\cup_{i=1}^{r_1} \cup_{k=2}^{d_i} \mathcal{D}_{i,k}) \cup Q_0$$

e

$$\bar{S}_0 := h^{-1}(\text{Cone}(\bar{R}_0)),$$

onde \bar{R}_0 é o fecho de R_0 em \mathcal{S}_ϵ e h é o homeomorfismo dado pela estrutura cônica local de $f^{-1}(0)$ (ver Teorema 1.3.15). Então $\mathcal{S}_\epsilon^2 \setminus R_0$ é homeomorfo à $(\mathbb{S}^2)_{r_1}$ e $\chi_C(\bar{S}_0) = 1$.

Definimos

$$X_0 := X(f) \setminus (\bar{S}_0 \cap X).$$

Como $X \cup \bar{S}_0$ é a união disjunta de X_0 e \bar{S}_0 , segue que:

$$\chi_C(X \cup \bar{S}_0) = \chi_C(X_0) + \chi_C(\bar{S}_0).$$

Vamos mostrar que $\chi_C(X \cup \bar{S}_0) = r - 1$, e assim:

$$\chi_C(X_0) = r - 2.$$

Inicialmente, observamos que a restrição

$$f|_1 : X_0 \rightarrow f(X_0)$$

é a projeção de um fibrado localmente trivial. De fato, como ambas restrições, $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ e $f|_1 : \mathbb{S}_\epsilon^2 \rightarrow \mathbb{R}$ possuem valor crítico isolado, e se restringem à submersões $f|_1 : X_0 \cap \mathring{\mathcal{B}}_\epsilon \rightarrow \mathbb{R}$ e $f|_1 : X_0 \cap \mathbb{S}_\epsilon \rightarrow \mathbb{R}$ respectivamente. Então os fibrados seguem do Lema de Ehresmann.

Então, a restrição $f|_1 : X_0 \rightarrow f(X_0)$ é de fato a projeção de um fibrado localmente trivial, com fibra uma superfície compacta e conexa $F_0 \subset \mathcal{F}(f)$, e se restringe à um fibrado localmente trivial:

$$f|_1 : X_0 \cap \mathbb{S}_\epsilon \rightarrow f(X_0)$$

com fibra $\partial F_0 := F_0 \cap \mathbb{S}_\epsilon$. Além disso, como X_0 é conexo, segue que $f(X_0)$ é o intervalo $(-\eta, 0)$ ou o intervalo $(0, \eta)$.

Note que a união $X(f) \cup \bar{S}_0$ é vizinhança regular de \bar{S}_0 em \mathbb{B}_ϵ . De fato, se \vec{v} é um campo de vetor suave em $f(X_0)$ apontando para o 0 em um tempo finito, seja \vec{v} o levantamento deste campo pela restrição de f à X_0 . O fluxo associado a \vec{v} nos dá um retrato por deformação de X_0 na fronteira de \bar{S}_0 . Assim $X(f) \cup \bar{S}_0$ é homeomorfo à união disjunta de pequenas bolas abertas em \mathbb{B}_ϵ e c_1 cilindros do tipo $\mathbb{D}^2 \times [0, 1]$, onde \mathbb{D}^2 é um disco aberto. Veja a Figura 2.9. Logo, $\chi_C(X \cup \bar{S}_0) = r - 1$.

Agora, por outro lado, nós temos que:

$$\chi(F_0) = \chi_C(F_0) = -\chi_C(X_0) = 2 - r.$$

Observamos também que $X_0 \cap \mathbb{S}_\epsilon = (f^{-1}((-\eta, \eta)) \cap \mathbb{S}_\epsilon) \setminus \bar{R}_0$, que é homeomorfo à união de r_1 cilindros $\mathbb{S}^1 \times (0, 1)$. Assim, $\partial F_0 \times (0, 1)$ é homeomorfo à união de r_1 cilindros $\mathbb{S}^1 \times (0, 1)$. Portanto F_0 tem r_1 componentes na fronteira. Assim F_0 é homeomorfo à $(\mathbb{S}^2)_{r_1}$.

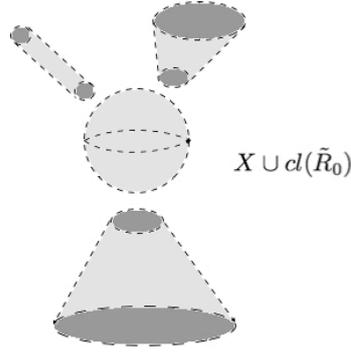


Figura 2.9: Conjunto $X(f) \cup \bar{S}_0$

Agora, para cada par (i, k) fixado, com $i = 1, \dots, r$ e $k = 1, \dots, d_i$, considere o disco aberto $\mathcal{D}_{i,k}$. Seja $R_{i,k}$ a união de todos os discos abertos $\mathcal{D}_{j,m}$ tais que $K_j \subset \mathcal{D}_{i,k}$ e $m = 1, \dots, d_j$. Além disso, seja

$$\bar{P}_{i,k} := h^{-1}(\text{Cone}(\bar{\mathcal{D}}_{i,k}))$$

e

$$\bar{S}_{i,k} := h^{-1}(\text{Cone}(\bar{R}_{i,k})).$$

Então $\bar{S}_{i,k} \subset \bar{P}_{i,k}$ e $\chi_C(\bar{S}_{i,k}) = \chi_C(\bar{P}_{i,k}) = 1$. Agora, consideramos

$$A_{i,k} := h^{-1}(\text{Cone}(\mathcal{D}_{i,k} \setminus \bar{R}_{i,k})).$$

Ele é homeomorfo ao cone sobre um disco aberto removendo dele $b_{i,k}$ discos fechados.

Finalmente, considere:

$$X_{i,k} := X(f) \cap A_{i,k}.$$

Vamos mostrar que $\chi_C(X_{i,k}) = b_{i,k} - 1$.

Claramente, $X_{i,k}$ é conexo e então $f(X_{i,k})$ é um dos intervalos $(-\eta, 0)$ ou $(0, \eta)$.

Então, podemos provar como acima que a restrição:

$$f|_X : X_{i,k} \rightarrow f(X_{i,k})$$

é a projeção de um fibrado localmente trivial com fibra uma superfície compacta e conexa $F_{i,k} \subset \mathcal{F}(f)$, e que se restringe a um fibrado:

$$f|_X : X_{i,k} \cap \mathbb{S}_\epsilon^2 \rightarrow f(X_{i,k})$$

com fibra $\partial F_{i,k} := F_{i,k} \cap \mathbb{S}_\epsilon$.

Também como acima, podemos mostrar que o fecho $\bar{X}_{i,k}$ de $X_{i,k}$ é uma vizinhança regular de $V(f) \cap \bar{P}_{i,k}$. Logo, $X_{i,k}$ é homeomorfo ao produto $(\mathcal{D})_{b_{i,k}} \times (0, 1)$. Então:

$$\chi_C(X_{i,k}) = -\chi_C((\mathcal{D})_{b_{i,k}}) = b_{i,k} - 1.$$

Então, temos que:

$$\chi(F_{i,k}) = \chi_C(F_{i,k}) = -\chi_C(X_{i,k}) = 1 - b_{i,k}.$$

Por um lado, observamos que $X_{i,k} \cap \mathbb{S}_\epsilon$ é homeomorfo à união disjunta de $(b_{i,k} + 1)$ cilindros $\mathbb{S}^1 \times (0, 1)$. Assim, $\partial F_{i,k} \times (0, 1)$ é a união disjunta de $(b_{i,k} + 1)$ cilindros $\mathbb{S}^1 \times (0, 1)$. Consequentemente $F_{i,k}$ tem $(b_{i,k} + 1)$ componentes na fronteira. Portanto $F_{i,k}$ é homeomorfo à $(\mathbb{D})_{b_{i,k}}$. ■

Corolário 2.5.2 *Se $f : (\mathbb{R}^3, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ é um germe de função do tipo cone de classe C^l , $l \geq 1$, com um valor crítico isolado, então o interior de $\mathcal{F}(f)$ é homeomorfo ao complemento do link $K(f)$ em \mathbb{S}_ϵ^2 .*

Observamos que d_i é o número de componentes conexas de $\mathbb{S}_\epsilon \setminus K_i$, para cada componente conexa K_i do link $K(f)$, com $i = 1, \dots, r$. Note que:

$$d_i = 2 - \chi_C(K_i).$$

Em particular, temos:

$$\chi_C(K(f)) = 2r - \sum_{i=1}^r d_i.$$

Então, temos o seguinte Corolário:

Corolário 2.5.3 (i) *A extensão da fibra de Milnor $\mathcal{F}(f)$ de f tem $(r+1-\chi_C(K(f)))$ componentes conexas.*

(ii) *Sua característica de Euler $\chi(\mathcal{F}(f)) = 2(1-r) + \sum_{i=1}^r d_i = 2 - \chi_C(K(f))$.*

(iii) *Assim, o número de componentes conexas e característica de Euler de $\mathcal{F}(f)$ é um invariante do tipo topológico abstrato de $K(f)$.*

Exemplo 2.5.4 Considere as funções sobrejetivas $f, g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por $f(x, y, z) = (x^2 + y^2 - z^2)(x^2 + y^2 - \frac{1}{3}z^2)$ e $g(x, y, z) = (x^2 + y^2 - \frac{1}{3}z^2)(x^2 - \frac{1}{3}y^2 + z^2)$. Ambos

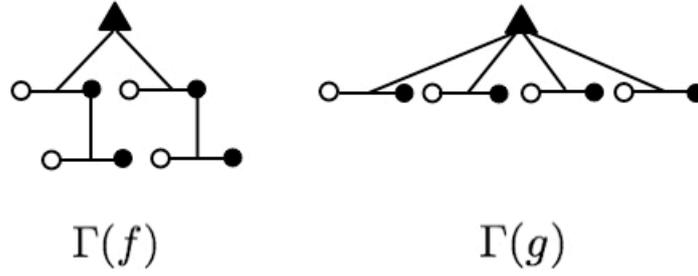


Figura 2.10: Gráficos $\Gamma(f)$ e $\Gamma(g)$

os links $K(f)$ e $K(g)$ são homeomorfos à união disjunta de quatro círculos, embora eles estejam mergulhados em \mathbb{S}_c^2 de formas diferentes. Os gráficos $\Gamma(f)$ e $\Gamma(g)$ estão representados na Figura 2.10 acima.

Então $\mathcal{F}(f)$ é homeomorfo a união disjunta $(\mathbb{S})_2 \cup (\mathbb{D})_1 \cup (\mathbb{D})_1 \cup \mathbb{D} \cup \mathbb{D}$, que é a união de três cilindros e dois discos, e $\mathcal{F}(g)$ é homeomorfo a união disjunta $(\mathbb{S})_4 \cup \mathbb{D} \cup \mathbb{D} \cup \mathbb{D} \cup \mathbb{D}$, que é a união de $(\mathbb{S})_4$ e quatro discos. Assim, ambos $\mathcal{F}(f)$ e $\mathcal{F}(g)$ tem cinco componentes conexas e $\chi(\mathcal{F}(f)) = \chi(\mathcal{F}(g)) = 2$.

O corolário a seguir é consequência imediata do Teorema 2.5.1.

Corolário 2.5.5 *Se $f : (\mathbb{R}^3, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ é um germe de função do tipo cone de classe C^l , $l \geq 1$, com um valor crítico isolado, então:*

- (i) $\mathcal{F}(f)$ é homeomorfo à esfera se, e somente se, $\dim V(f) = 0$.
- (ii) $\mathcal{F}(f)$ é homeomorfa à esfera da qual retiramos r discos, com $r > 0$ se, e somente se, $\dim V(f) = 1$.

Por outro lado, temos:

Proposição 2.5.6 *Seja $f : (\mathbb{R}^3, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ germe de função tipo cone de classe C^l , $l \geq 1$, com valor crítico isolado. Se f é sobrejetiva então $\dim V(f) = 2$.*

Demonstração. Pela estrutura cônica local de $V(f)$, temos que $V(f)$ é conexa por caminhos. Mas como a restrição $f|_V$ é a projeção de um fibrado localmente trivial, também temos que dado um ponto $p \in X_+(f)$, podemos levantar $(0, \eta)$ por f a uma função contínua por partes em $X_+(f)$ que contém p e que tem um ponto $p' \in V(f)$ em seu fecho. O mesmo acontece para qualquer ponto em $X_-(f)$. Assim, $\bar{X}(f)$ é uma

vizinhança aberta conexa por caminhos de $V(f)$ em \mathbb{R}^3 . Então, se $\dim V(f) < 2$ temos que $X(f) = \bar{X}(f) \setminus V(f)$ é conexo.

Por outro lado, ambos $X_-(f)$ e $X_+(f)$ são discos abertos em \mathbb{B}_ϵ e assim f é sobrejetiva, ambos são não vazios. Logo, $X(f) = X_-(f) \cup X_+(f)$ não é conexo e assim, temos uma contradição. ■

Portanto, temos:

Corolário 2.5.7 *Seja $f : (\mathbb{R}^3, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ um germe de função do tipo cone de classe C^l , $l \geq 1$, com um valor crítico isolado. Se $V(f)$ tem dimensão 1, então $\Sigma(f) = V(f)$. Em particular, f tem um ponto crítico não isolado.*

Demonstração. Suponha que $\Sigma(f) \neq V(f)$. Como f é sobrejetiva, então f é localmente a projeção em um ponto $p \in V(f) \setminus \Sigma(f)$. Então a Proposição 2.5.6 nos dá $\dim V(f) = 2$, isto é, uma contradição. ■

Finalmente, consideramos o caso onde $f : (\mathbb{R}^3, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ é um germe de função tipo cone de classe C^l , $l \geq 1$, com um ponto crítico isolado. Então existe ϵ e η suficientemente pequenos com $0 < \eta \ll \epsilon$, tais que as restrições:

$$f|_1 : f^{-1}(\mathbb{I}_\eta \setminus \{0\}) \cap \mathbb{B}_\epsilon \rightarrow \mathbb{I}_\eta \setminus \{0\}$$

e

$$f|_1 : f^{-1}(\mathbb{I}_\eta) \cap \mathbb{S}_\epsilon \rightarrow \mathbb{I}_\eta$$

, onde $\mathbb{I}_\eta = (-\eta, \eta)$, são fibrados localmente triviais. Assim, $K(f)$ é vazio ou é uma variedade suave compacta de dimensão 1. Portanto $\chi_C(K(f)) = 0$ e $\chi(F_-) + \chi(F_+) = 2$, por (ii) do Corolário 2.5.3.

Logo, obtemos:

Corolário 2.5.8 *Seja $f : (\mathbb{R}^3, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ um germe de função do tipo cone de classe C^l , $l \geq 1$, com ponto crítico isolado. Então as seguintes condições são equivalentes:*

- (i) f não é sobrejetiva;
- (ii) $V(f) = \{0\}$;
- (iii) $\mathcal{F}(f)$ é homeomorfa à esfera.

Demonstração. Se f não é sobrejetiva, logo o próprio $F_-(f)$ ou $F_+(f)$ é vazio, e então a fibração acima implica que $K(f)$ é vazio. Assim $V(f) = \{0\}$. Por outro lado, o Corolário 2.5.5 nos dá que $V(f) = \{0\}$ implicando que $\mathcal{F}(f)$ é homeomorfo à esfera, implicando que $F_-(f)$ ou $F_+(f)$ é vazio. ■

2.6 Sistema Fundamental de Vizinhanças Circulares

Seja $d' : (\mathbb{R}^3, 0) \rightarrow (\mathbb{R}_+, 0)$ um germe de função tipo cone de classe C^l , $l \geq 1$, que têm um ponto crítico isolado. Segue do Corolário 2.5.8 que $V(d') = \{0\}$ e que existe $\epsilon_0 > 0$ suficientemente pequeno tal que para qualquer $0 < \epsilon < \epsilon_0$ temos que

$$\mathcal{S}_\epsilon := (d')^{-1}(\epsilon)$$

é homeomorfo à esfera e $\mathcal{B}_\epsilon := (d')^{-1}([0, \epsilon])$ é homeomorfo à bola fechada. Assim, obtemos um sistema de vizinhanças fundamentais de 0 em \mathbb{R}^3 .

Definição 2.6.1 Dizemos que um sistema de vizinhanças $(\mathcal{B}_\epsilon)_{0 < \epsilon < \epsilon_0}$ de 0 dada por uma função d' como acima é um sistema fundamental de vizinhanças circulares.

Como todos os passos e argumentos das Seção 2.5 acima são puramente topológicos, verificamos que praticamente todos eles podem ser adaptados a qualquer sistema fundamental de vizinhanças circulares de 0 em \mathbb{R}^3 . Assim, temos:

Teorema 2.6.2 Seja $f : (\mathbb{R}^3, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ germe de função do tipo cone de classe C^l , $l \geq 1$, com valor crítico isolado, e seja $(\mathcal{B}_\epsilon)_{0 < \epsilon < \epsilon_0}$ um sistema fundamental de vizinhanças circulares 0 em \mathbb{R}^3 como acima. Então existe ϵ_1 , com $0 < \epsilon_1 < \epsilon_0$, tal que para cada $\epsilon \in (0, \epsilon_1)$ existe $\eta > 0$ tal que a restrição:

$$f|_1 : f^{-1}((-\eta, 0) \cup (0, \eta)) \cap \mathcal{B}_\epsilon \rightarrow (-\eta, 0) \cup (0, \eta)$$

é a projeção de um fibrado localmente trivial de classe C^l . Além disso, para cada $t \in (0, \eta)$ temos

$$\mathcal{F}_{\mathcal{B}_\epsilon}(f) := (f^{-1}(t) \cup f^{-1}(-t)) \cap \mathcal{B}_\epsilon$$

é homeomorfo ao complemento em \mathcal{S}_ϵ do link $K_{\mathcal{B}_\epsilon}(f) := V(f) \cap \mathcal{S}_\epsilon$.

Como o tipo topológico do link $V(f) \cap \mathcal{S}_\epsilon$ não muda em $0 < \epsilon < \epsilon_0$, segue do Teorema 2.6.2 que dado ϵ' e ϵ com $0 < \epsilon' < \epsilon < \epsilon_0$ existe $\eta' > 0$ suficientemente pequeno tal que $f^{-1}(t) \cap \mathcal{B}_\epsilon$ é homotopicamente equivalente a $f^{-1}(t) \cap \mathcal{B}_{\epsilon'}$ quando $0 < |t| < \eta'$.

Consequente, dado $0 < \epsilon < \epsilon_0$ escolhemos $0 < \xi_3 < \xi_2 < \xi_1 < \epsilon$ tal que

$$\mathcal{B}_\epsilon \supset \mathbb{B}_{\xi_1} \supset \mathcal{B}_{\xi_2} \supset \mathbb{B}_{\xi_3},$$

para cada $t \neq 0$ suficientemente pequeno tem que as inclusões

$$(f^{-1}(t) \cap \mathcal{B}_\epsilon) \supset (f^{-1}(t) \cap \mathbb{B}_{\xi_1}) \supset (f^{-1}(t) \cap \mathcal{B}_{\xi_2}) \supset (f^{-1}(t) \cap \mathbb{B}_{\xi_3})$$

são homotopicamente equivalentes. Assim, temos:

Corolário 2.6.3 *O tipo topológico do link (e da Fibra de Milnor estendida) de f é a mesma para toda escolha de um sistema fundamental de vizinhanças circulares em $(\mathcal{B}_\epsilon)_{0 < \epsilon < \epsilon_0}$ de 0 em \mathbb{R}^3 .*

Capítulo 3

A Fibra de Milnor de Germes de Funções Subanalíticas em \mathbb{R}^3

Na literatura, pouco se sabe sobre a topologia das fibras laterais de Milnor de uma função analítica real. Alguns resultados nesta linha são vistos em (DURTETRE, 2015), (HAMM, 1971), (MILNOR, 1968) e (MENEGON, 2016).

Neste capítulo estudamos a topologia da fibra de Milnor lateral em conjuntos subanalíticos, isto é, consideramos $f : (\mathbb{R}^3, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ germe de função analítica real, $X \subset \mathbb{R}^3$ um conjunto subanalítico de dimensão 3 e a função $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ como a restrição da função f ao conjunto X e descrevemos o tipo topológico da fibra $\mathcal{F}(g)$ da função $\|g\|$ em termos do mergulho topológico do link K na esfera \mathbb{S}_ϵ^2 . Provamos que $\mathcal{F}(g)$ é homeomorfa à união disjunta de conjuntos conexos 'furados' e seu interior é homeomorfo ao complemento de K na esfera \mathbb{S}_ϵ^2 .

3.1 O Link

Assim como dito anteriormente, sejam $f : (\mathbb{R}^3, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ germe de função analítica real, $X \subset \mathbb{R}^3$ um conjunto subanalítico de dimensão 3 e a função $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ como a restrição da função f ao conjunto X , ou seja, $g := f|_X$.

Pela Proposição 1.2.12, sabemos que g é uma função subanalítica real com fibração

de Milnor no sentido do Capítulo 2.

Observe que X tem dimensão 3, \mathbb{S}_ϵ^2 tem dimensão 2 e $g^{-1}(0)$ tem dimensão no máximo 1. Assim, o link $K = g^{-1}(0) \cap \mathbb{S}_\epsilon^2$ tem dimensão máxima 1.

Pelo Teorema 1.3.11 sabemos que X possui uma estratificação de Whitney forte compatível com $g^{-1}(0)$. Como as esferas cortam os estratos transversalmente, pela estrutura cônica local, temos uma estratificação de Whitney para K , onde os estratos são conjuntos analíticos suaves de dimensão 0 (pontos) e dimensão 1 (intervalos abertos e círculos). Logo, o link e consequentemente, suas componentes conexas são formadas por uniões desses elementos.

Afirmção 3.1.1 *O Link possui uma quantidade finita de estratos*

Prova da Afirmção.

Sabemos que K possui uma estratificação de Whitney induzida. Considerando os estratos de dimensão 1 do link, observamos que K possui uma quantidade finita de estratos porque a estratificação (em X) é localmente finita. Esses estratos formam as componentes conexas de K e portanto, K possui uma quantidade finita de componentes conexas. ■

Portanto, podemos considerar que o link K é dado como a união $K_1 \cup \dots \cup K_r$, onde cada K_j , com $j = 1, \dots, r$ é uma componente conexa de K .

A Figura 3.1 abaixo, por exemplo, representa o link K com 8 componentes conexas.

Observação 3.1.2 *O conjunto $\mathbb{S}_\epsilon^2 \setminus K_j$ é uma união de conjuntos conexos.*

Assim como no Capítulo 2, definimos o coeficiente d_j como o número de conjuntos conexos que formam $\mathbb{S}_\epsilon^2 \setminus K_j$. Fixamos um ponto p em $\mathbb{S}_\epsilon^2 \setminus K$ o qual será chamado de ponto base, tal que $\mathbb{S}_\epsilon^2 \setminus \{p\}$ é homeomorfo ao \mathbb{R}^2 e para todo $j = 1, \dots, r$ temos que $\mathcal{D}_{j,1}$ é o conjunto conexo que contém o ponto base p .

Na Figura 3.2 abaixo, que representa a planificação da Figura 3.1, observamos que $K_4 \subset K_2 \subset K_1$, $K_3 \subset K_1$, $K_5 \subset K_1$ e $K_8 \subset K_7$. Além disso, $d_3 = d_4 = d_6 = d_8 = 1$, $d_1 = d_5 = d_7 = 2$ e $d_2 = 4$.

Assim, escrevemos

$$\mathbb{S}_\epsilon \setminus K_j = \mathcal{D}_{j,1} \cup \dots \cup \mathcal{D}_{j,d_j} \text{ e } p \in \mathcal{D}_{j,1} \forall j = 1, \dots, r.$$

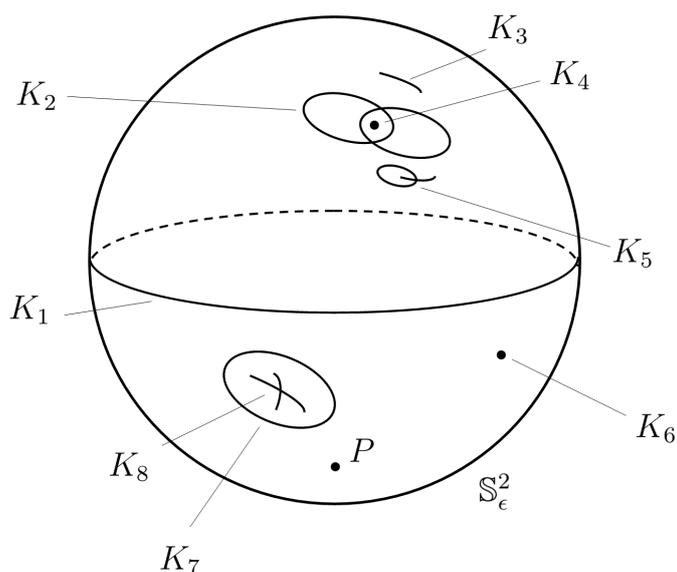


Figura 3.1: Componentes conexas do Link K

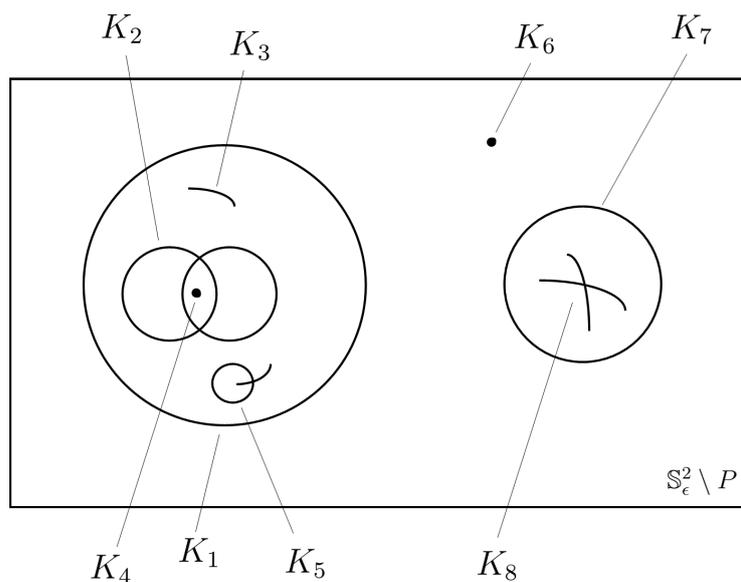


Figura 3.2: Planificação do link K

Definição 3.1.3 Dizemos que uma componente conexa K_i de K está contida em uma componente conexa K_j de K , e escrevemos $K_i \subset K_j$, se $K_i \not\subseteq \mathcal{D}_{j,1}$.

Definição 3.1.4 Seja $A = \{K_{j_1}, \dots, K_{j_n}\}$ uma coleção de componentes conexas de K , com $n \geq 1$. Dizemos que $K_i \in A$ é de nível 1 com relação à coleção A se $K_i \subset K_{j_k}$ então $i = j_k$.

Definição 3.1.5 Dizemos que uma componente conexa K_j do link K é de nível 1 se K_j é de nível 1 com relação à coleção $\{K_1, \dots, K_r\}$ de todas as componentes conexas de K .

Vamos supor que o link K possui uma quantidade r_1 de componentes conexas de nível 1. Podemos reordenar a coleção $\{K_1, \dots, K_r\}$ de modo que as r_1 primeiras componentes sejam as componentes conexas de nível 1 do link.

Analogamente à definição 3.1.5 podemos definir as componentes conexas de nível 2. As componentes conexas de nível 2 são aquelas de nível 1 referentes à coleção $\{K_{r_1}, \dots, K_r\}$. Por indução, conseguimos definir as componentes conexas de nível l , para l um número natural.

Definição 3.1.6 Para cada par (i, k) com $i \in \{1, \dots, r\}$ e $k \in \{2, \dots, d_i\}$, seja $b_{i,k}$ o número de componentes conexas K_j do link K tais que

- i) K_j está contido como conjunto no disco $\mathcal{D}_{i,k}$, e, conseqüentemente, temos que $K_j \subset K_i$;
- ii) K_j é de nível 1 referente à coleção $A = \{K_{i+1}, \dots, K_r\}$.

Organizamos o conjunto de componentes conexas de modo que as primeiras r_1 componentes sejam de nível 1. Considerando $k = 2, \dots, d_i$ e $i = 1, \dots, r$, temos que a soma $\sum_{i=1}^r \sum_{k=2}^{d_i} b_{i,k}$ nos dá o número de componentes conexas que não são de nível 1, pois como $k > 1$, temos $K_j \not\subset \mathcal{D}_{i,1}$, para todo $i = 1, \dots, r$. Portanto,

$$r = r_1 + \sum_{i=1}^r \sum_{k=2}^{d_i} b_{i,k}.$$

Sejam $W_-(g) := f^{-1}((- \eta, 0)) \cap \mathbb{B}_\epsilon$ e $W_+(g) := f^{-1}((0, \eta)) \cap \mathbb{B}_\epsilon$. Definimos os seguintes conjuntos:

$$W(g) := W_-(g) \cup W_+(g)$$

$$W^{\bar{}}(g) := g^{-1}((- \eta, \eta)) \cap \mathbb{B}_\epsilon.$$

3.2 A Topologia da Fibra \mathcal{F}_g

Sejam $f : (\mathbb{R}^3, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ germe de função analítica real, $X \subset \mathbb{R}^3$ um conjunto subanalítico de dimensão 3 e a função $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ como a restrição da função f ao conjunto X , isto é, $g := f|_X$.

Pelo Teorema 1.3.15, se \mathbb{B}_ϵ representa a bola fechada de centro 0 e raio ϵ e \mathbb{S}_ϵ^2 sua fronteira, sabemos que existe ϵ suficientemente pequeno tal que para qualquer $0 < \epsilon \leq \epsilon_0$ temos um homeomorfismo entre os pares $(\mathbb{B}_\epsilon, X \cap \mathbb{B}_\epsilon)$ e $(\text{Cone}(\mathbb{S}_\epsilon^2), \text{Cone}(X \cap (\mathbb{S}_\epsilon^2)))$.

Além disso, pelo Teorema 1.6.2, existe fibração de Milnor para a função g .

Seja $\mathcal{F}(g)$ a fibra da função $\|g\|$.

Teorema 3.2.1 *Sejam $g : (X, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ germe de função subanalítica com $X \subset \mathbb{R}^3$ um conjunto subanalítico de dimensão 3. Considere também os coeficientes r_1 e $b_{i,k}$, para $i = 1, \dots, r$ e $k = 2, \dots, d_i$ associados ao link $K(g)$. Então a fibra $\mathcal{F}(g)$ é homeomorfa a:*

- i) $(\mathbb{S}^2)_{r_1}$, se só existem componentes conexas do link de nível 1.
- ii) $(\mathbb{S}^2)_{r_1} \dot{\cup} \left(\bigcup_{i=1}^r \bigcup_{k=2}^{d_i} (\mathbb{D})_{b_{i,k}} \right)$, se existem componentes conexas de diversos níveis.

Demonstração. Vamos considerar Q_0 o conjunto de todas as componentes conexas do link de nível 1 em \mathbb{S}^2 cujo complementar seja homeomorfo a um disco aberto, por exemplo, pontos, intervalos ou união de dois intervalos que se cruzam. Agora vamos considerar o conjunto

$$R_0 := \left(\bigcup_{i=1}^{r_1} \bigcup_{k=2}^{d_i} \mathcal{D}_{i,k} \right) \cup Q_0,$$

isto é, este conjunto é formado pelos discos $\mathcal{D}_{i,k}$ que estão relacionado com as componentes conexas de nível 1 que não são pontos, intervalos, ou união de intervalos que se intersectam em apenas um ponto unidos com o conjunto Q_0 .

Definimos também o conjunto

$$\bar{S}_0 := h^{-1}(\text{Cone}(\bar{R}_0)),$$

onde h é o homeomorfismo dado pela estrutura cônica local de $f^{-1}(0)$ e \bar{R}_0 é o fecho do conjunto R_0 em \mathbb{S}_ϵ .

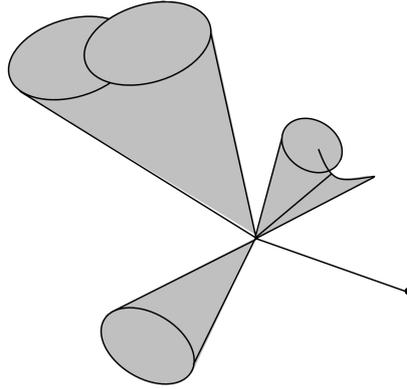


Figura 3.3: $\text{Cone}(\bar{R}_0)$

Pela definição 1.4.1, temos que o conjunto $(\mathbb{S}_\epsilon^2)_{r_1}$ é formado por \mathbb{S}_ϵ^2 retirando dele uma quantidade r_1 de discos abertos. Logo, $\mathbb{S}_\epsilon^2 \setminus R_0$ é homeomorfo a $(\mathbb{S}_\epsilon^2)_{r_1}$.

Além disso, como \bar{S}_0 é homeomorfo a um cone topológico, temos que $\chi_C(\bar{S}_0) = 1$. Vamos definir um tubo em torno de $g^{-1}(0)$ da seguinte forma:

$$W_0 := W(g) \setminus (\bar{S}_0 \cap \bar{W}(g)).$$

Observe que $\bar{W}(g) \cup \bar{S}_0$ é a união disjunta dos conjuntos W_0 e \bar{S}_0 , assim temos:

$$\begin{aligned} \chi_C(\bar{W}(g) \cup \bar{S}_0) &= \chi_C(W_0 \dot{\cup} \bar{S}_0) \\ &= \chi_C(W_0) + \chi_C(\bar{S}_0) \\ &= \chi_C(W_0) + 1. \end{aligned}$$

Afirmção 3.2.2 *Afirmamos que*

$$\chi_C(\bar{W}(g) \cup \bar{S}_0) = r - 1$$

e, conseqüentemente, $\chi_C(W_0) = r - 2$.

Prova da Afirmção. Inicialmente, vamos provar que a restrição

$$g| : W_0 \rightarrow g(W_0)$$

é a projeção de um fibrado topológico localmente triviais. De fato, vamos tomar \vec{v} campo de vetor suave em $g(W_0) \subset \mathbb{R}$ pelo Teorema 1.3.13 podemos levantar esse campo de vetor a um campo de vetor estratificado \vec{w} em X_0 que é integrável. Logo, o fluxo associado ao campo \vec{w} nos dá o difeomorfismo que queremos.

Então, pelo Teorema 1.6.2, a restrição $g| : W_0 \rightarrow g(W_0)$ é a projeção de um fibrado topológico localmente trivial cuja fibra \mathcal{F}_0 é um conjunto subanalítico conexo contido em $\mathcal{F}(g)$ e

$$g| : W_0 \cap \mathbb{S}_\epsilon \rightarrow g(W_0)$$

é a projeção de um fibrado topológico localmente trivial com fronteira da fibra $\partial\mathcal{F}_0 := \mathcal{F}_0 \cap \mathbb{S}_\epsilon$. Além disso, como W_0 é um conjunto conexo, temos que $g(W_0)$ é o conjunto $(-\eta, 0)$ ou $(0, \eta)$.

Além disso, observe que $W(g) \cup \bar{S}_0$ é uma vizinhança regular de \bar{S}_0 em \mathbb{B}_ϵ . Basta considerar um campo de vetor suave \vec{v} em $g(W_0)$ apontando pra 0. Assim como fizemos anteriormente, podemos levantar esse campo a um campo de vetor estratificado \vec{v} pela restrição $g|W_0$. Seja $\sigma : W_0 \times \mathbb{R} \rightarrow W_0$ o fluxo associado ao campo \vec{v} , temos:

$$\sigma(x, 0) = x, \quad \forall x \in W_0$$

$$\sigma(x, 1) \in \partial\bar{S}_0$$

$$\sigma(a, 1) = a, \quad \forall a \in \partial\bar{S}_0$$

isto é, um retrato por deformação de W_0 em $\partial\bar{S}_0$. Logo, $W(g) \cup \bar{S}_0 = W_0 \dot{\cup} \bar{S}_0$ é homeomorfo a união de r_1 cilindros do tipo $D^2 \times [0, 1]$, sendo D^2 um disco aberto, e uma bola aberta \mathbb{B}_ϵ^3 . Portanto,

$$\begin{aligned} \chi_C(\bar{W}(g) \cup \bar{S}_0) &= \chi_C(W_0) + \chi_C(\bar{S}_0) \\ &= (-1)^3 + r(-1)^2 \\ &= r - 1, \end{aligned}$$

como queríamos. ■

Por um lado, temos:

$$\chi(F_0) = (-1)^2 \chi_C(F_0) = \chi_C(F_0) = -\chi_C(W_0) = -\chi_C(W(g) \cup \bar{S}_0) = 1 - r + 1 = 2 - r.$$

Por outro lado, percebemos que

$$W_0 \cap \mathbb{S}_\epsilon^2 = \left(g^{-1}((-\eta, \eta)) \cap \mathbb{S}_\epsilon^2 \right) \setminus \bar{R}_0,$$

que é homeomorfo à união disjunta de r_1 cilindros $\mathbb{S}^1 \times (0, 1)$. Assim, $\partial F_0 \times (0, 1)$ é homeomorfo à r_1 cilindros $\mathbb{S}^1 \times (0, 1)$. Logo, F_0 tem r_1 componentes conexas na fronteira tal como $(\mathbb{S}_\epsilon^2)_{r_1}$.

Agora, para cada (i, k) fixado, com $i = 1, \dots, r$ e $k = 1, \dots, d_i$, vamos considerar os conjuntos conexos abertos $\mathcal{D}_{i,k}$ e definimos $R_{i,k}$ a união disjunta de todos os conjuntos $\mathcal{D}_{j,m}$ tais que

- i) $K_j \subset \mathcal{D}_{i,k}$,
- ii) $m = i, \dots, d_j$.

Isto significa que estamos trabalhando com demais conjuntos $\mathcal{D}_{j,m}$ que formam o complementar das componentes conexas de nível maior que 1.

Consideramos os seguintes conjuntos:

$$\begin{aligned}\bar{P}_{i,k} &:= h^{-1}(\text{cone}(\bar{\mathcal{D}}_{i,k})) \\ \bar{S}_{i,k} &:= h^{-1}(\text{cone}(\bar{R}_{i,k}))\end{aligned}$$

Então $\bar{S}_{i,k} \subset \bar{P}_{i,k}$ e $\chi_c(\bar{S}_{i,k}) = \chi_c(\bar{P}_{i,k}) = 1$.

Definimos o conjunto $A_{i,k} := h^1(\text{cone}(\mathcal{D}_{i,k}) \setminus \bar{R}_{i,k})$. Observe que $A_{i,k}$ é homeomorfo a um cone sobre um conjunto conexo removendo dele $b_{i,k}$ conjuntos conexos fechados. Finalmente, seja $W_{i,k}$ o conjunto formado pela interseção $W(g) \cap A_{i,k}$. Observe que este conjunto possui pontos em sua fronteira.

Afirmção 3.2.3 *Afirmamos que $\chi_C(W_{i,k}) = b_{i,k} - 1$.*

Prova da Afirmção. O conjunto $W_{i,j}$ é conexo, então $g(W_{i,k})$ é o conjunto $(-\eta, 0)$ ou $(0, \eta)$.

Assim como provamos anteriormente, $g : W_{i,k} \rightarrow g(W_{i,k})$ e $f| : W_{i,k} \cap \mathbb{S}_\epsilon \rightarrow W_{i,k}$ são fibrados topológicos localmente trivial com fibras $F_{i,k} \subset \mathcal{F}(g)$ e $\partial\mathcal{F}_{i,k} := \mathcal{F}_{i,k} \cap \mathbb{S}_\epsilon$, respectivamente. Assim como provamos no Capítulo 2, podemos mostrar que $\bar{W}_{i,k}$ é vizinhança regular de $X \cap \bar{P}_{i,k}$. Então, os conjuntos $W_{i,k}$ e $(\mathcal{D})_{b_{i,k}} \times (0, 1)$ são homeomorfos. Assim, $\chi_C(W_{i,k}) = -\chi_C(\mathcal{D}_{b_{i,k}} - 1)$ e temos

$$\chi(\mathcal{F}_{i,k}) = \chi_C(\mathcal{F}_{i,k}) = -\chi_C(W_{i,k}) = 1 - b_{i,k}.$$

■

Por outro lado, observamos que o conjunto $W_{i,k} \cap \epsilon$ é homeomorfo à união disjunta de $b_{i,k+1}$ cilindros $\mathbb{S}^1 \times (0, 1)$. Logo, a fronteira $\partial\mathcal{F}_{i,k} \times (0, 1)$ é homeomorfo a união

disjunta de $(b_i, k + 1)$ cilindros $\mathbb{S}^1 \times [0, 1]$. Então, $\mathcal{F}_{i,k}$ tem $b_{i,k+1}$ componentes na fronteira, isto é, $\mathcal{F}_{i,k}$ é homeomorfo à $(\mathcal{D}_{b_i,k})$.

Como $\mathcal{F}(g)$ é a união das fibras \mathcal{F}_0 e $\mathcal{F}_{i,k}$, com $i = 1, \dots, c$ e $k = 2, \dots, d_i$, temos o resultado que queríamos.

■

Corolário 3.2.4 *Se $f : (\mathbb{R}^3, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ é um germe de função analítica e $W \subset \mathbb{R}^3$ é um subconjunto subanalítico, então o interior da fibra $\mathcal{F}(f)$ é homeomorfo ao complemento do link $K(f)$ em \mathbb{S}_ϵ^2 .*

Referências Bibliográficas

- [1] E. Bierstone & D. Milman. *Semianalytic and Subanalytic sets*. Mathématiques l'I.H.É.S. 67, p. 5 - 42 (1988). 2
- [2] S. S. Cairns, *An Elementary Proof of the Jordan-Schoenflies Theorem*. Proc. of the American Math. Soc., Vol. 2, No. 6 (1951), pp. 860-867.
- [3] E. M. Chirka. *Complex Analytic Sets*. Kluwer Academic Publishers, Boston, 1989.
- [4] M. Coste. *An introduction to o-minimal Geometry*. Université de Rennées, 1999. Disponível em: <<https://perso.univ-rennes1.fr/michel.coste/polyens/OMIN.pdf>>. Acesso em: 20 de Outubro de 2020.
- [5] B. I. DUNDAS. *Differential Topology*. 2013.
- [6] N. Dutertre & R.N.A. Santos. *Topology of Real Milnor Fibrations for Non-isolated Singularities*. International Mathematics Research Notices, rst published online October 14, 2015, DOI 10.1093/imrn/rnv286.
- [7] R. Ehrenborg and M. Readdy, *Manifold arrangements*. J. of Combinatorial Theory, Series A, Volume 125, July 2014, 214-239.
- [8] C. Ehresmann, *Les connexions infinitésimales dans un espace fibré différentiable*. Colloque de topologie (espaces fibrés), Bruxelles, 1950 , Georges Thone, Liège; Masson et Cie., Paris, pp. 29-55.
- [9] V. Guillemin & A. Pollaek. *Differential Topology*. Prentice-Hall, New Jersey, 1974.

- [10] S. M. Gusein-Zade, *Integration with respect to the Euler characteristic and its applications*. Russian Math. Surveys 65 (2010), 399-432.
- [11] H. Hamm. *Lokale Topologische Eigenschaften Komplexer Räume*. Math. Ann. 191, 1971, 235-252.
- [12] H. Hamm. *Zur Analytischen und Algebraischen Beschreibung der Picard-Lefschetz Monodromie*. Habilitationsschrift, Göttingen, 1974.
- [13] H. Hamm. *On the Euler characteristic of real Milnor*. Proc. of 12th International Workshop on Singularities, São Carlos 2012, Journal of Singularities, Vol. 10 (2014), 147-156.
- [14] A. Hatcher. *Algebraic Topology*. Cambridge University, Press, 2002.
- [15] H. Hironaka. *Stratification and Flatness*. In P. Holm, editor, Real and Complex Singularities (Proc. Ninth Nordic Summer School/NAVF Sympos. Math., Oslo, August 5-25, 1976), p. 199 - 265. Sijthoff and Noordhoff, Alphen aan den Rijn, 1977.
- [16] H. C. King. *Topological Type in families of germs*. Inv. Math. 62, p. 1-13. 1980.
- [17] D. T. Lê. *Notes on Non-isolated Singularities*. Advanced Studies in Pure Mathematics, 68, p. 143-170. 2016
- [18] D. T. Lê. *Some Remarks on Relative Monodromy*. In P. Holm, editor, Real and Complex Singularities (Proc. Ninth Nordic Summer School/NAVF Sympos. Math., Oslo, August 5-25, 1976), p. 397-403. Sijthoff and Noordhoff, Alphen aan den Rijn, 1977.
- [19] D. T. Lê and B. Teissier, *Cycles evanescents, sections planes et conditions de Whitney II*. In: Singularities, Part 2. Proc. Sympos. Pure Math. 40, p. 65-103. Amer. Math. Soc., Arcata, 1981..
- [20] E. L. Lima. *Variedades Diferenciáveis*. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2001.

- [21] E. Looijenga. *Isolated Singular Points on Complete Intersections*. London Math. Soc. Lect. Notes. Ser. 77, 1984.
- [22] J. N. Mather. *Notes on Topological Stability*. Lectures Notes, Harvard University, 1970.
- [23] A. Menegon Neto & J. Seade. *On the Lê-Milnor Fibration for Real Analytic Maps*, to appear in Math. Nach.
- [24] R. S. Martins and A. Menegon, *Milnor-Lê fibration theorems for subanalytic maps*. Preprint, arXiv:1806.05349.
- [25] J. Milnor. *On isolated singularities of hypersurfaces*. 1966. Unpublished.
- [26] J. Milnor. *Singular Points of Complex Hypersurfaces*. Princeton, 1968.
- [27] M. J. Pflaum. *Analytic and Geometric Study of Stratified Spaces*. Springer Verlag, New York, 2001.
- [28] A. Pichon & J. Seade. *Fibered Multilinks and Real Singularities fg* . Preprint math. AG/0505312.
- [29] M. A. S. Ruas, J. Seade & A. Verjovsky. *On Real Singularities with a Milnor Fibration*. Trends in Singularities, Birkhauser, 2002.
- [30] J. Seade. *Isolated singularities in analytic spaces*. Notes on the Lecture "On the Geometry and Topology of Singularities", in honor of the 60th Birthday of Lê Dũng Tráng.
- [31] J. Seade, *On Milnor's fibration theorem and its offspring after 50 years*. Bulletin of the AMS, Vol. 56, n. 2 (2019) 281-348.
- [32] J. Seade. *On the Topology of Isolated Singularities in Analytic Spaces*. Birkhäuser Verlag, Basel - Boston - Berlin, 2006.
- [33] J. Seade. *Vector Fields on Singular Varieties*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2009.

- [34] M. Shiota. *Geometry of Subanalytic and Semialgebraic Sets*. Springer Science Business Media, New York, 1997.2, 2.1, 2.2.
- [35] B. Teissier. *Variétés Polaires. II. Multiplicités Polaires, Sections Planes, et Conditions de Whitney*. In Algebraic geometry (La Rábida, 1981), volume 961 of Lecture Notes in Math., pages 314-491. Springer, Berlin, 1982.
- [36] R. Thom. *Ensembles et morphismes stratifiés*. Bull. Amer. Math. Soc. Volume 75, Number 2 (1969), 240-284.
- [37] J. L. Verdier, *Stratifications de Whitney et théorème de Bertini-Sard*. Inv. Math. 36, 295-312 (1976).
- [38] H. Whitney. *Tangents to an Analytic Variety*. The Annals of Mathematics, Second Series, Vol. 81, No. 3, May, 1965, p. 496-549.
- [39] H. Whitney. *Elementary structure of real Algebraic Singularities*. The Annals of Mathematics, Second Series, Vol. 66, 1957, p. 545-556.
- [40] H. Whitney. *Local Properties of Analytic Varieties, Differential and Combinatorial Topology*. Princeton Univ. Press, 1965, 205-244.