



UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

REINTERPRETAÇÃO E EXTENSÃO DA TEORIA UNIFICADA DE WEYL

THAIS AKEMI TOKUBO SANOMIYA

João Pessoa, 2020

THAIS AKEMI TOKUBO SANOMIYA

REINTERPRETAÇÃO E EXTENSÃO DA TEORIA
UNIFICADA DE WEYL

*Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física, do
Departamento de Física da Universidade Federal da Paraíba, como
requisito parcial para a obtenção do título de doutor em física.*

Orientador: Prof. Dr. Carlos Augusto Romero Filho **Co-
orientador:** Prof. Dr. Jansen Brasileiro Formiga

2020

João Pessoa, PB

Catálogo na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

S228r Sanomiya, Thais Akemi Tokubo.
Reinterpretação e extensão da teoria unificada de Weyl
/ Thais Akemi Tokubo Sanomiya. - João Pessoa, 2020.
109 f. : il.

Orientação: Carlos Augusto Romero Filho.
Coorientação: Jansen Brasileiro Formiga.
Tese (Doutorado) - UFPB/CCEN.

1. Teoria unificada de Weyl. 2. Teorias
escalares-tensoriais. 3. Problema de Cauchy. 4.
Tempo-próprio. 5. Cosmologia. I. Romero Filho, Carlos
Augusto. II. Título.

UFPB/BC

Ata da Sessão Pública da Defesa de Tese de
Doutorado da aluna **Thaís Akemi Tokubo Sanomiya**, candidata ao Título de Doutora em Física na Área de Concentração Gravitação e Cosmologia.

1 Aos vinte dias do mês de fevereiro do ano de dois mil e vinte, às 10:00, no Auditório da
2 Pós-Graduação em Física do Centro de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade
3 Federal da Paraíba, reuniram-se os membros da Banca Examinadora constituída para
4 examinar a candidata ao grau de Doutora em Física na área de Gravitação e Cosmologia.
5 **Thaís Akemi Tokubo Sanomiya**. A comissão examinadora foi composta pelos
6 professores doutores: *Carlos Augusto Romero Filho* (UFPB), orientador e presidente da
7 banca examinadora, *Valdir Barbosa Bezerra* (UFPB), *Albert Petrov* (UFPB), *Eraldo*
8 *Almeida Lima Júnior* (DM/UFPB) e *Raimundo Silva Junior* (UFRN). Dando início aos
9 trabalhos, o Prof. Carlos Augusto Romero Filho comunicou aos presentes a finalidade da
10 reunião. A seguir, passou a palavra para que a candidata fizesse, oralmente, a exposição
11 do trabalho de tese intitulado “*Reinterpretação e extensão da Teoria Unificada de Weyl*”.
12 Concluída a exposição, a candidata foi arguida pela Banca Examinadora, que emitiu o
13 seguinte parecer: “**aprovada**”. Assim sendo, deve a Universidade Federal da Paraíba
14 expedir o respectivo diploma de Doutora em Física na forma da lei. E para constar, eu,
15 Danilo Wilson Lemos Menezes, redigi esta ata que vai assinada por mim e pelos membros
16 da Banca Examinadora. João Pessoa, Paraíba, **20 de fevereiro de 2020**.

17

Prof. Dr. Carlos Augusto Romero Filho

Orientador – PPGF/UFPB

Prof. Dr. Valdir Barbosa Bezerra

PPGF/UFPB

Prof. Dr. Albert Petrov

PPGF/UFPB

Prof. Dr. Eraldo Almeida Lima Júnior

DM/UFPB

Prof. Dr. Raimundo Silva Junior

UFRN

18

Aos meus pais, Gilberto Massashi Sanomiya e Cristina
Harumi Tokubo Sanomiya.

AGRADECIMENTOS

“Aqueles que passam por nós, não vão sós, não nos deixam sós. Deixam um pouco de si, levam um pouco de nós.” (Antoine de Saint-Exupéry)

Agradeço a Deus, meu eterno e grande amigo, pelo fôlego de vida e pela graça derramada sobre a minha vida todos os dias.

Aos meus amados pais Gilberto e Cristina pelo carinho, amor e dedicação. Obrigada por acreditarem em mim e por sempre me incentivarem a seguir em frente. Vocês são minha fonte de inspiração e força, amo vocês.

À Klefson por tornar a minha caminhada mais leve e feliz. Obrigada por estar sempre ao meu lado em todos os momentos, sejam eles felizes ou tristes. Sem você eu nunca teria chegado onde cheguei. Amo você.

Ao professor Carlos Romero, pela orientação ao longo de todos esses anos e por sempre acreditar no meu potencial. Tenho muito orgulho de ter sido sua aluna. Obrigada por tudo, professor.

As minhas queridas amigas, Carla e Mellyssa por todo companheirismo e alegria nos momentos que mais precisei.

Ao meu coorientador Jansen pela disposição em sempre me ajudar e pela paciência.

Aos meus amigos do departamento de física pelos momentos de descontração.

À todos os professores do departamento de física da UFPB por todo conhecimento.

À CAPES pelo suporte financeiro.

“Combati o bom combate, terminei a corrida, guardei a fé.” (2 Timóteo 4:7)

Resumo

Neste trabalho iremos revisitar a teoria unificada de Weyl, que surgiu em 1918, pouco tempo depois do surgimento da relatividade geral. Com o intento de estender o programa de geometrização de Einstein, Hermann Weyl desenvolveu uma generalização da geometria riemanniana. No entanto, apesar do formalismo elegante, Einstein levantou sérias objeções à teoria, considerando-a uma teoria física não-aceitável ao prever um efeito ainda não observado, o chamado “segundo efeito do relógio”. Nesta tese, temos como objetivo discutir a teoria de Weyl sob uma nova perspectiva e examinar sua consistência e completeza como uma teoria física. Finalmente, iremos propor novas direções e possíveis mudanças conceituais do trabalho original de Weyl. Como aplicações, iremos resolver as equações de campo considerando um universo homogêneo e isotrópico, tendo como fonte um fluido perfeito. Iremos apresentar, também, outras soluções para casos estáticos com simetrias esférica e cilíndrica. Alguns aspectos da geometria de Weyl integrável também serão discutidos. Iremos mostrar que a formulação do problema inicial é bem posto e iremos obter uma solução cosmológica, que generaliza alguns resultados encontrados na literatura.

PALAVRAS-CHAVE: *Teoria unificada de Weyl, Teorias escalares-tensoriais, Problema de Cauchy, Tempo-próprio, Cosmologia*

Abstract

We revisit Weyl's unified field theory, which arose in 1918, shortly after general relativity was discovered. As is well known, in order to extend the program of geometrization of physics started by Einstein to include the electromagnetic field, H. Weyl developed a new geometry which constitutes a kind of generalization of Riemannian geometry. However, despite its mathematical elegance and beauty, a serious objection was made by Einstein, who considered Weyl's theory not suitable as a physical theory since it seemed to lead to the prediction of a not yet observed effect, the so-called "second clock effect" . In this thesis, our aim is to discuss Weyl's proposal anew and examine its consistency and completeness as a physical theory. Finally, we propose new directions and possible conceptual changes in the original work. As an application, we solve the field equations assuming a Friedmann-Robertson-Walker universe and a perfect fluid as its source. We also present other solutions for static cases with spherical and cylindrical symmetries. Some aspects of Weyl integral space-times are also discussed. First, we show that the theory can be casted in the initial-value formulation (the so-called Cauchy problem) and that this form is gauge-invariant. Second, we obtain a simple cosmological solution, which generalises some cases found in the literature.

KEYWORDS: *Weyl's unified field theory, Scalar tensor theories, Cauchy problem, Proper time, Cosmology*

Sumário

Resumo	vi
Abstract	vii
Lista de Figuras	xi
Introdução	1
1 A teoria unificada de Weyl	4
1.1 A geometria de Weyl	4
1.2 Transformações de calibre	7
1.3 Geometria de Weyl integrável	8
1.4 Propriedades do tensor $F_{\mu\nu}$	9
1.5 Os invariantes de Weyl	10
1.6 O eletromagnetismo na geometria de Weyl	11
1.7 Equações de campo em um gauge qualquer	17
2 Teoria escalar-tensorial geométrica	22

2.1	O princípio de Mach e a relatividade geral	22
2.2	Teoria de Brans-Dicke	24
2.3	Teoria escalar-tensorial geométrica	25
2.4	Cosmologia na teoria escalar-tensorial geométrica	29
2.4.1	Caso $V(\varphi) = e^{-\varphi}\Lambda$	30
3	O problema de Cauchy na teoria escalar-tensorial geométrica de Weyl	33
3.1	O problema de Cauchy na relatividade geral	33
3.2	O problema de Cauchy na teoria escalar tensorial geométrica de Weyl	45
3.3	O problema de Cauchy e as ondas gravitacionais	61
4	Teoria de Weyl revisitada	65
4.1	O segundo efeito do relógio	65
4.2	A crítica de Einstein revisitada	67
4.3	Tempo próprio na teoria de Weyl	68
4.4	O problema variacional inverso e as geodésicas de Weyl	72
4.4.1	Condições de Helmholtz na geometria riemanniana	73
4.4.2	Condições de Helmholtz na geometria de Weyl	75
4.5	A geometrização do campo eletromagnético	77
4.6	O tempo-próprio invariante e o acoplamento com a matéria	78
5	Soluções das equações de campo na geometria de Weyl não-integrável	81
5.1	Solução com simetria esférica	82
5.2	Aproximação de campo fraco	85
5.3	Solução com simetria cilíndrica	87
5.4	Cosmologia em Weyl não-integrável	90
	Conclusões	93

Lista de Figuras

1.1	Transporte paralelo de um vetor V ao longo de uma curva fechada.	5
3.1	Problema de Cauchy na geometria de Weyl integrável	48
4.1	Segundo efeito do relógio. Fonte: Penrose, R. [49] (2004)	67

Introdução

“O grande arquiteto do Universo agora se mostra como um matemático puro”.

(J. H. Jeans, 1930)

A teoria da relatividade restrita, formulada por Albert Einstein em 1905 e publicada com o título *“sobre a eletrodinâmica dos corpos em movimento”* [1], trouxe uma nova noção do conceito de espaço e tempo, além de reformular a mecânica newtoniana sob a luz do eletromagnetismo. Na física clássica, espaço e tempo compõem de maneira independente um alicerce absoluto e imutável, enquanto que na relatividade restrita todos os processos físicos passam a depender do sistema de referência e, além disso, Einstein mostrou também que o espaço e o tempo são mutuamente dependentes e compõem uma estrutura quadridimensional chamada espaço-tempo. Apesar do sucesso da teoria em conciliar a mecânica e o eletromagnetismo, a relatividade restrita possuía um grande obstáculo conceitual: a incompatibilidade com a gravitação newtoniana [2]. A partir de 1907, Einstein percebeu que esse problema guardava uma relação fundamental com a classe privilegiada de referenciais chamados de *inerciais* e que a solução do mesmo estaria na geometrização da gravitação.

Formulada posteriormente como uma generalização da relatividade restrita, a relatividade geral é a primeira teoria puramente geométrica da gravitação, onde a dinâmica da matéria e da geometria pode ser sintetizada na frase do físico americano John A. Wheeler [3]: “a matéria diz ao espaço como se curvar e o espaço diz a matéria como se mover”. O caminho adotado por Einstein baseava-se nas ideias de Riemann, que acreditava que o universo

poderia ser descrito como uma variedade curva. Do ponto de vista matemático o espaço-tempo, que até então era Minkowski, seria substituído por uma variedade riemanniana, que na presença do campo gravitacional, teria uma curvatura não-nula [4].

Associada ao sucesso da teoria da relatividade geral, a geometria riemanniana passou a ser a geometria do espaço-tempo. No entanto, as quantidades físicas mensuráveis não apresentam nenhum traço associado às propriedades geométricas do espaço-tempo. Posto de outra maneira, a geometria riemanniana é a linguagem matemática usada para descrever o espaço-curvo mas podemos considerá-la apenas como uma ferramenta para descrever a dinâmica do espaço-tempo. Para Poincaré, a escolha da geometria do espaço-tempo é uma convenção, e pode ser feita livremente sem nenhuma imposição *a priori* sobre a natureza da mesma [5]. Desde então, o estudo de geometrias mais gerais para descrever o espaço-tempo tem sido o centro de diversos trabalhos, entre elas, a geometria formulada por Hermann K. H. Weyl [30] em 1918 é um dos primeiros exemplos.

A história da física, desde os seus primórdios, é marcada por tentativas de unificações de áreas que até então eram consideradas independentes: ótica e eletromagnetismo, termodinâmica e mecânica estatística, eletricidade e magnetismo. Em meados do século XX, as únicas interações conhecidas eram a gravitacional e a eletromagnética; após a geometrização da gravitação, Einstein tentou, além da geometrização do eletromagnetismo, a unificação dessas duas forças.

Em 1918, com o mesmo intuito de unificação da gravitação com o eletromagnetismo, Weyl introduziu uma generalização da geometria riemanniana. A principal diferença entre a geometria riemanniana e a geometria de Weyl está no conceito de transporte paralelo de um vetor. No caso riemanniano, ao ser transportado paralelamente ao longo de uma curva fechada, a direção de um vetor pode mudar, no entanto sua norma é preservada; na geometria de Weyl essa condição de invariância da norma passa a ser um caso particular em que agora, sob um transporte paralelo, tanto a direção quanto a norma do vetor podem variar. Weyl atribuiu a mudança da norma à presença de um campo de caráter geométrico que posteriormente recebeu o nome de campo de Weyl.

Com um grau de liberdade a mais que a geometria riemanniana, a teoria formulada por Weyl permite a geometrização do campo eletromagnético, onde o campo de Weyl é identificado com o quadripotencial eletromagnético. Apesar do formalismo elegante, durante muito tempo a teoria de unificação de Weyl não foi aceita pela comunidade científica como uma teoria física. Tal fato se deve às sérias objeções apontadas por Einstein que foram

anexadas no apêndice do trabalho original de Weyl [30]. A crítica de Einstein baseia-se no argumento de que a teoria, interpretada essencialmente como sendo a geometrização do eletromagnetismo, prediz necessariamente a existência do chamado *segundo efeito do relógio*.

Einstein associou o comprimento do vetor ao que chamamos de “tique-taque” de um relógio atômico. Como consequência direta do fato de que na geometria weylana o comprimento dos vetores não são mais invariantes, as taxas medidas pelos relógios atômicos seriam dependentes do passado. Em outras palavras, as linhas espectrais dos átomos teriam uma dependência com o passado. No entanto, como já era sabido na época, as linhas espectrais são bem definidas e, portanto, o segundo efeito do relógio estaria em desacordo com a física experimental.

Este trabalho tem como principal objetivo revisitar a teoria de Weyl e analisar a crítica de Einstein sob uma nova perspectiva. Ademais, como a teoria original de Weyl não faz menção à presença da matéria ela está de certa forma incompleta. Parte de nosso trabalho consistiu em completar a teoria seguindo estritamente o Princípio de Invariância de Gauge adotada por Weyl em sua abordagem original.

A presente tese está organizada com a seguinte estrutura: o capítulo 1 será dedicado a introduzir a geometria de Weyl, bem como toda a sua formulação. No capítulo 2, abordaremos teorias escalares-tensoriais, dando um enfoque especial à teoria escalar-tensorial geométrica, cuja essência é a geometria de Weyl integrável. O capítulo 3 será dedicado ao desenvolvimento do problema de Cauchy na teoria escalar tensorial geométrica e a presença de ondas gravitacionais na geometria de Weyl integrável. No capítulo 4, faremos uma revisão da crítica de Einstein sob uma nova perspectiva e suas consequências, bem como a discussão do acoplamento da geometria com a matéria. O capítulo 5 é uma aplicação direta da teoria de Weyl onde apresentaremos algumas soluções das equações de campo e propomos um modelo cosmológico.

CAPÍTULO 1

A teoria unificada de Weyl

1.1 A geometria de Weyl

Até o aparecimento da teoria da relatividade geral de Einstein, a física estava ambientada na geometria euclidiana, uma vez que a partir de observações e experiências do dia-a-dia sabia-se que os axiomas de Euclides eram plenamente satisfeitos. No entanto, com a formulação da teoria da relatividade, a geometria euclidiana foi substituída pela geometria riemanniana, dando assim início ao estudo de geometrias mais gerais.

A geometria riemanniana é uma generalização da geometria diferencial de superfícies do $\mathbb{R}^3$, onde a grande diferença reside no conceito de transporte paralelo. Na geometria euclidiana, ao transportar paralelamente um vetor V ao longo de uma curva fechada, tanto a direção quanto a norma do vetor são preservadas. Em contrapartida, na geometria de Riemann um vetor transportado pode, ao retornar para o ponto inicial, ter a sua direção alterada, embora sua norma se mantenha inalterada. Sem a restrição de invariância da direção do vetor, a geometria riemanniana oferece um grau de liberdade a mais que a sua precursora, tornando-a um ambiente ideal para a geometrização do campo gravitacional.

Após a geometrização da gravitação, Einstein começou a conjecturar sobre a possibilidade de uma nova teoria ser capaz de unificar as únicas duas forças conhecidas na época,

a gravitacional e a eletromagnética, teoria esta que ficou conhecida como teleparalelismo [6]. Movido pelo mesmo espírito, Hermann Weyl formulou uma geometria mais ampla que a geometria riemanniana, propondo assim uma possível geometrização do campo eletromagnético [30]. A geometria de Weyl propõe uma generalização do conceito de transporte paralelo, onde tanto a direção quanto a norma de um vetor transportado paralelamente não são mais invariantes. Ao transportarmos paralelamente o vetor V ao longo de uma curva fechada temos como resultado o vetor V_W na geometria de Weyl, com sua norma e direção alterados, e V_R na geometria riemanniana, como pode ser visto na figura 1.1.

Ao relaxar o postulado da invariância da norma, a geometria de Weyl admite um novo grau de liberdade, tornando possível assim a introdução do eletromagnetismo de uma maneira geométrica.

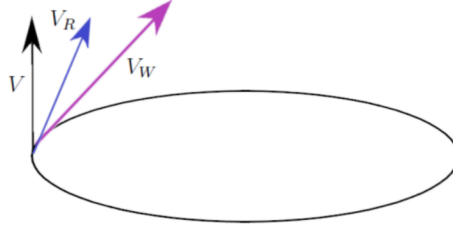


Figura 1.1: Transporte paralelo de um vetor V ao longo de uma curva fechada.

Formalmente, o postulado riemanniano sobre o transporte paralelo está vinculado com a chamada condição de compatibilidade entre a conexão e a métrica, que pode ser enunciada da seguinte maneira:

Definição 1.1.1. *Uma conexão ∇ em uma variedade riemanniana M é compatível com a métrica, se e somente se [7]:*

$$V[g(U, W)] = g(\nabla_V U, W) + g(U, \nabla_V W). \quad (1.1)$$

sendo U , W e V campos vetoriais definidos sobre M .

Em contrapartida, na geometria de Weyl, a condição de compatibilidade é modificada de acordo com a seguinte definição:

Definição 1.1.2. *Seja M uma variedade diferenciável dotada de uma conexão afim ∇ , um tensor métrico g e um campo de 1-forma σ , denominado campo de Weyl, definido sobre toda*

variedade M . Diz-se que a conexão ∇ é compatível com g se satisfaz a seguinte condição:

$$V[g(U, W)] = g(\nabla_V U, W) + g(U, \nabla_V W) + \sigma(V)g(U, W), \quad (1.2)$$

onde U, W e V são campos vetoriais definidos sobre M [8].

Vale ressaltar que se o campo de Weyl σ é nulo, então o último termo da equação (1.2) se anula e recuperamos a condição de compatibilidade riemanniana. Sendo assim, a definição acima constitui uma generalização da condição de compatibilidade de Riemann.

Uma vez definida a conexão em uma variedade riemanniana M , não existe, pelo menos inicialmente, a garantia de que esta seja única. A garantia da existência e unicidade da conexão riemanniana é dada pelo teorema de Levi-Civita. A extensão do teorema de Levi-Civita para a geometria de Weyl é simples e direta:

Teorema de Levi-Civita (estendido). *Dada uma variedade diferenciável M , dotada de uma métrica g e um campo de 1-forma diferenciável σ definido sobre M , existe uma única conexão afim ∇ , tal que [9]:*

(a) ∇ é simétrica;

(b) ∇ é compatível (no sentido de Weyl) com g .

Demonstração. Vamos mostrar inicialmente a unicidade da conexão ∇ . Pela condição de compatibilidade de Weyl (1.2), podemos obter as seguintes expressões fazendo permutações cíclicas dos campos vetoriais V , U e W :

$$V[g(U, W)] = g(\nabla_V U, W) + g(U, \nabla_V W) + \sigma(V)g(U, W), \quad (1.3)$$

$$W[g(V, U)] = g(\nabla_W V, U) + g(V, \nabla_W U) + \sigma(W)g(V, U), \quad (1.4)$$

$$U[g(W, V)] = g(\nabla_U W, V) + g(W, \nabla_U V) + \sigma(U)g(W, V). \quad (1.5)$$

Somando as equações (1.3) e (1.4) e subtraindo (1.5), obtemos a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} g(\nabla_W V, U) &= \frac{1}{2} \{ V[g(U, W)] + W[g(V, U)] - U[g(W, V)] - g([V, W], U) - g([W, U], V) \\ &\quad - g([V, U], W) + \sigma(U)g(V, W) - \sigma(V)g(U, W) - \sigma(W)g(U, V) \}, \end{aligned} \quad (1.6)$$

onde neste último passo admitiu-se que a conexão não tem torção, isto é,

$$\nabla_V U - \nabla_U V = [V, U]. \quad (1.7)$$

Note que o lado direito de (1.6) só possui dependência com g e σ , ou seja, a conexão fica determinada univocamente por g e σ . Uma vez mostrada a unicidade vamos mostrar que ∇ existe. Para mostrar a existência definamos ∇ utilizando (1.6). Em coordenadas locais $\{x^a\}$, com $a = 1, \dots, n$, as componentes da conexão afim são dadas por

$$\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha = \left\{ \begin{smallmatrix} \alpha \\ \beta\gamma \end{smallmatrix} \right\} - \frac{1}{2} g^{\alpha\lambda} (g_{\lambda\beta} \sigma_\gamma + g_{\lambda\gamma} \sigma_\beta - g_{\beta\gamma} \sigma_\lambda), \quad (1.8)$$

onde $\left\{ \begin{smallmatrix} \alpha \\ \beta\gamma \end{smallmatrix} \right\}$ são os símbolos de Christoffel. É imediato ver que (1.8) satisfaz as propriedades de uma conexão afim e está bem definida. Além disso, satisfaz às propriedades de simetria e compatibilidade [7].

□

1.2 Transformações de calibre

Os graus de liberdade procurados por Weyl para geometrizar o eletromagnetismo podem ser encontrados no campo σ , indentificando-o com o quadri-potencial eletromagnético A . No entanto, é sabido que o eletromagnetismo obedece à chamada invariância de calibre. Para ser mais preciso, ao realizar-se a transformação $A \rightarrow A' = A + df$, a teoria como um todo deve ser invariante. Uma vez que o estamos identificando com o quadri-potencial, seria de crucial importância que σ também apresentasse essa característica de invariância sob uma dada transformação [10]. Foi visto no início deste capítulo que a grande diferença entre a geometria de Weyl e a geometria de Riemann está no transporte paralelo de um vetor V , definido sobre a variedade M . Se expressarmos isso matematicamente temos a seguinte expressão:

$$\nabla_\alpha g_{\mu\nu} = \sigma_\alpha g_{\mu\nu}. \quad (1.9)$$

Se procuramos uma invariância da geometria, então a expressão (1.9) deve ser invariante sob quaisquer transformações. Weyl descobriu que se fizermos a transformação conforme

$$\bar{g}_{\mu\nu} = e^{f(x)} g_{\mu\nu}, \quad (1.10)$$

onde $f(x)$ é uma função determinada sobre M , e exigirmos que (1.9) seja invariante, então, σ deverá se transformar segundo $\bar{\sigma}_\alpha = \sigma_\alpha + f(x)_{,\alpha}$, ou seja, como deve se transformar o potencial eletromagnético por transformações de calibre (aqui se dá o nascimento das modernas teorias

de gauge). Para obter essa transformação vamos substituir (1.10) em

$$\bar{\nabla}_\alpha \bar{g}_{\mu\nu} = \bar{\sigma}_\alpha \bar{g}_{\mu\nu}. \quad (1.11)$$

Na parcela esquerda da expressão acima, temos:

$$\nabla_\alpha (e^{f(x)} g_{\mu\nu}) = \nabla_\alpha (e^{f(x)}) g_{\mu\nu} + e^{f(x)} \nabla_\alpha g_{\mu\nu} = \partial_\alpha f(x) e^{f(x)} g_{\mu\nu} + e^{f(x)} g_{\mu\nu}. \quad (1.12)$$

Igualando ao lado direito de (1.11), obtemos:

$$\partial_\alpha f(x) e^{f(x)} g_{\mu\nu} + e^{f(x)} g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu} \bar{\sigma}_\alpha = e^{f(x)} g_{\mu\nu} \bar{\sigma}_\alpha. \quad (1.13)$$

De onde se obtém diretamente que

$$\bar{\sigma}_\alpha = \sigma_\alpha + f(x)_{,\alpha}, \quad (1.14)$$

O conjunto de transformações

$$\begin{cases} \bar{g}_{\mu\nu} = e^{f(x)} g_{\mu\nu}, \\ \bar{\sigma}_\alpha = \sigma_\alpha + f(x)_{,\alpha}. \end{cases} \quad (1.15)$$

são chamadas *transformações de Weyl* ou transformações de calibre. Portanto, ao realizarmos as transformações (1.15) simultaneamente, a condição de compatibilidade de Weyl permanece inalterada. A condição de compatibilidade (1.9) juntamente com as transformações de Weyl (1.15) constituem o núcleo desta geometria. Um ponto que merece um destaque neste momento é o fato de que a conexão definida pela expressão (1.8) também é uma quantidade invariante sob as transformações de Weyl.

1.3 Geometria de Weyl integrável

Seja um vetor de comprimento dl que será transportado paralelamente ao longo de uma curva fechada, sendo x_0 o ponto inicial. Ao retornar para o ponto inicial, a norma é alterada, uma vez que a geometria considerada é a de Weyl, ou seja [31],

$$dl = \sigma_\alpha dx^\alpha l. \quad (1.16)$$

Integrando ambos os lados da equação (1.16), obtemos que

$$l = l_0 \exp \left(\oint \sigma_\alpha dx^\alpha \right), \quad (1.17)$$

onde l_0 é o comprimento inicial. Utilizando o teorema de Stokes, podemos obter que:

$$l = l_0 \exp \left(\int_S F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu \right), \quad (1.18)$$

onde $F_{\mu\nu} = \sigma_{\mu,\nu} - \sigma_{\nu,\mu}$. Para o caso particular em que $\sigma = d\phi$, então $l = l_0$. Posto de outra maneira, quando

$$\sigma_{\mu,\nu} - \sigma_{\nu,\mu} = \phi_{\mu,\nu} - \phi_{\nu,\mu} = 0, \quad (1.19)$$

a geometria é dita “*Weyl integrável*”, caso contrário, é dita “*Weyl não-integrável*”.

O grande diferencial da geometria de Weyl integrável em relação à não-integrável está na expressão (1.19). Sendo assim, é conveniente definir o seguinte campo tensorial antissimétrico:

$$F_{\mu\nu} = \sigma_{\mu,\nu} - \sigma_{\nu,\mu}. \quad (1.20)$$

Na geometria de Weyl esse tensor desempenha um papel análogo à chamada curvatura de comprimento:

$$\begin{aligned} R^\alpha_{\beta\gamma\lambda} &\rightarrow \text{geometria riemanniana} \\ F_{\mu\nu} &\rightarrow \text{geometria weylana} \end{aligned}$$

1.4 Propriedades do tensor $F_{\mu\nu}$

- (a) $F_{\mu\nu}$ é antissimétrico;
- (b) $F_{\mu\nu}$ obedece ao seguinte conjunto de identidade

$$\{F_{\alpha\beta,\gamma}\} = 0; \quad (1.21)$$

- (c) $F_{\mu\nu}$ é invariante sob transformações de Weyl.

Demonstração. Vamos mostrar as propriedades do tensor $F_{\mu\nu}$:

(a) Para demonstrar a primeira propriedade basta utilizar a própria definição (1.19):

$$F_{\mu\nu} = \sigma_{\mu,\nu} - \sigma_{\nu,\mu} = -(\sigma_{\nu,\mu} - \sigma_{\mu,\nu}) = -F_{\nu\mu}. \quad (1.22)$$

(b) Vamos mostrar a expressão (1.21):

$$\begin{aligned} \{F_{\alpha\beta,\gamma}\} &= \frac{1}{6} (F_{\alpha\beta,\gamma} - F_{\beta\alpha,\gamma} + F_{\gamma\alpha,\beta} - F_{\alpha\gamma,\beta} + F_{\beta\gamma,\alpha} - F_{\gamma\beta,\alpha}) = \frac{1}{3} (F_{\alpha\beta,\gamma} + F_{\gamma\alpha,\beta} + F_{\beta\gamma,\alpha}) \\ &= \frac{1}{3} (\sigma_{\alpha,\beta,\gamma} - \sigma_{\beta,\alpha,\gamma} + \sigma_{\gamma,\alpha,\beta} - \sigma_{\alpha,\gamma,\beta} + \sigma_{\beta,\gamma,\alpha} - \sigma_{\gamma,\beta,\alpha}) = 0. \end{aligned} \quad (1.23)$$

(c) Para mostrar a invariância do tensor $F_{\mu\nu}$ por transformações de calibre, considere:

$$\overline{F}_{\mu\nu} = \overline{\sigma}_{\mu,\nu} - \overline{\sigma}_{\nu,\mu}. \quad (1.24)$$

Utilizando a transformação de calibre para o campo de Weyl, (1.15), obtemos:

$$\overline{F}_{\mu\nu} = (\sigma_{\mu} + f_{,\mu})_{,\nu} - (\sigma_{\nu} + f_{,\nu})_{,\mu} = \sigma_{\mu,\nu} - \sigma_{\nu,\mu} = F_{\mu\nu}. \quad (1.25)$$

□

1.5 Os invariantes de Weyl

Ao longo das últimas seções foram estabelecidas as bases para a geometria de Weyl. Além disso foi discutida o núcleo da ideia de Weyl, que seria a invariância dos objetos físicos e geométricos sob transformações de Weyl. Visando facilitar a identificação dos mesmos, Weyl introduziu o conceito de peso de um tensor relativo às transformações de gauge. Diz-se que um tensor $\xi_{\alpha\ldots\beta}$ tem peso n se a seguinte transformação é válida:

$$\overline{\xi}^{\alpha\ldots\beta} = e^{nf(x)} \xi^{\alpha\ldots\beta}. \quad (1.26)$$

O conceito de peso desempenha um papel importante nesta teoria uma vez que indica quando uma quantidade é um invariante de Weyl. Por outro lado, diz-se que um objeto é um invariante de calibre (ou de Weyl) se seu peso é nulo. Considere os seguintes exemplos:

(a) Peso nulo:

$$\overline{F}_{\mu\nu} = e^{0 \cdot f(x)} F_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}. \quad (1.27)$$

(b) Peso 1:

$$\overline{g}_{\mu\nu} = e^{f(x)} g_{\mu\nu}. \quad (1.28)$$

A conexão afim de Weyl Γ , dada pela expressão (1.8) é um invariante de calibre; como consequência, as quantidades que dependem apenas de Γ , como, por exemplo, o tensor de curvatura $R^\alpha_{\beta\gamma\lambda}$ e o tensor de Ricci $R_{\alpha\beta}$ também o serão.

1.6 O eletromagnetismo na geometria de Weyl

A introdução de um campo vetorial na geometria, o campo de Weyl, acrescenta um grau de liberdade à teoria, de modo a possibilitar a geometrização do eletromagnetismo através das seguintes identificações:

1. $F_{\mu\nu}$ corresponde ao tensor eletromagnético;
2. σ_μ corresponde ao 4-potencial eletromagnético.

Tal identificação é sugerida pelo fato do tensor $F_{\mu\nu}$ ter uma relação com o campo de Weyl σ exatamente igual à do caso eletromagnético, a saber, a equação (1.20). Aliado a esse fato $F_{\mu\nu}$ obedece à equação (1.21), que, no eletromagnetismo, é responsável pelo primeiro par de equações de Maxwell. O segundo par de equações de Maxwell nesta teoria, corresponde à equação:

$$\mathcal{F}^{\alpha\beta}_{;\beta} = \mathcal{J}^\alpha, \quad (1.29)$$

onde $\mathcal{F}^{\alpha\beta} = \sqrt{-g}F^{\alpha\beta}$ e $\mathcal{J}^\alpha = (\sqrt{-g}F^{\alpha\beta})_{;\beta}$ são densidades tensoriais de ordem zero, sendo a última, de maneira análoga ao que se tem no eletromagnetismo, a densidade de corrente.

Uma vez definidos os conceitos nesta nova geometria o próximo passo será encontrar as equações de campo. Note que a ação que será utilizada não pode ser a mesma da relatividade geral, cuja forma é $\mathcal{S} = \int \sqrt{-g}[R + (1/16\pi)F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}]d^4x$, pois, esta ação não é invariante sob as transformações de Weyl. A nova expressão deverá ser algo do tipo

$$\mathcal{S} = \int W \sqrt{-g} d^4x. \quad (1.30)$$

Analisando esta última expressão, conclui-se, logo de início, que W deve ter peso -2 , uma vez que $\sqrt{-g}$ tem peso 2 . A forma mais simples e que se aproxima mais da ação relativística deverá levar em conta o quadrado do escalar de curvatura R , uma vez que este tem peso -1 . Assim, teremos a seguinte ação:

$$\mathcal{S} = \int (R^2 + \omega F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}) \sqrt{-g} d^4x, \quad (1.31)$$

sendo ω uma constante arbitrária e R o escalar de curvatura calculado com a conexão de Weyl. De posse da ação, pode-se utilizar o princípio variacional para se obter as equações de campo, efetuando-se a variação da métrica $g_{\mu\nu}$ e do campo de Weyl σ_μ de maneira independente.

Uma vez definido, via conexão de Weyl, o escalar de curvatura mantém uma relação com o campo σ_μ . Portanto, precisamos da expressão explícita de R antes de fazermos a variação. Por ser um escalar, adota-se, por simplicidade, o sistema de coordenadas geodésico riemanniano, ou seja, os símbolos de Christoffel da conexão (1.8) podem ser anulados num ponto.

De (1.8), tem-se

$$\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha = -\frac{1}{2}(\delta_\beta^\alpha \sigma_\gamma + \delta_\gamma^\alpha \sigma_\beta - g_{\beta\gamma} \sigma^\alpha). \quad (1.32)$$

Por definição, o escalar de curvatura é dado por $R = g^{\beta\lambda} R^\alpha_{\beta\alpha\lambda}$, por outro lado, a expressão do tensor de curvatura é dado por

$$R^\alpha_{\beta\gamma\lambda} = \Gamma_{\beta\gamma,\lambda}^\alpha - \Gamma_{\beta\lambda,\gamma}^\alpha + \Gamma_{\beta\gamma}^\tau \Gamma_{\tau\lambda}^\alpha - \Gamma_{\beta\lambda}^\tau \Gamma_{\tau\gamma}^\alpha. \quad (1.33)$$

Contraindo os índices α e γ e multiplicando por $g^{\beta\lambda}$, temos:

$$R = g^{\beta\lambda} \Gamma_{\beta\alpha,\lambda}^\alpha - (g^{\beta\lambda} \Gamma_{\beta\lambda}^\alpha)_{,\alpha} + g^{\beta\lambda} \Gamma_{\beta\alpha}^\tau \Gamma_{\tau\lambda}^\alpha - g^{\beta\lambda} \Gamma_{\beta\lambda}^\tau \Gamma_{\tau\alpha}^\alpha, \quad (1.34)$$

onde nesta expressão está implícito o fato de que $g^{\beta\lambda}_{,\alpha}$ seja zero em um ponto. Olhando para o termo entre parênteses em (1.34), obtemos que

$$g^{\beta\lambda} \Gamma_{\beta\lambda}^\alpha = g^{\beta\lambda} \tilde{\Gamma}_{\beta\lambda}^\alpha - \frac{1}{2} g^{\beta\lambda} (\delta_\beta^\alpha \sigma_\lambda + \delta_\lambda^\alpha \sigma_\beta - g_{\beta\lambda} \sigma^\alpha) = -\frac{1}{2} (\sigma^\alpha + \sigma^\alpha - n \sigma^\alpha),$$

$$g^{\beta\lambda} \Gamma_{\beta\lambda}^\alpha = \frac{1}{2} (n - 2) \sigma^\alpha. \quad (1.35)$$

sendo n a dimensão da variedade e estamos representando as quantidades riemannianas com

“ $\sim$ ”. Olhando para o primeiro termo da equação (1.34), temos:

$$\begin{aligned}\Gamma_{\beta\alpha}^\alpha &= \tilde{\Gamma}_{\beta\alpha}^\alpha - \frac{1}{2}(\delta_\beta^\alpha \sigma_\alpha + \delta_\alpha^\alpha \sigma_\beta - g_{\beta\alpha} \sigma^\alpha) = -\frac{1}{2}(\sigma_\beta + n\sigma_\beta - \sigma_\beta) \\ \Gamma_{\beta\alpha}^\alpha &= -\frac{n}{2}\sigma_\beta\end{aligned}\tag{1.36}$$

Os dois últimos termos da equação (1.34) podem ser reescritos da seguinte maneira

$$\begin{aligned}g^{\beta\lambda}\Gamma_{\beta\alpha}^\tau\Gamma_{\tau\lambda}^\alpha &= \frac{1}{4}g^{\beta\lambda}(\delta_\beta^\tau \sigma_\alpha + \delta_\alpha^\tau \sigma_\beta - g_{\beta\alpha} \sigma^\tau)(\delta_\tau^\alpha \sigma_\lambda + \delta_\lambda^\alpha \sigma_\tau - g_{\tau\lambda} \sigma^\alpha) \\ &= \frac{1}{4}g^{\beta\lambda}(\delta_\beta^\alpha \sigma_\alpha \sigma_\lambda + \delta_\beta^\tau \delta_\lambda^\alpha \sigma_\alpha \sigma_\tau - g_{\beta\lambda} \sigma_\alpha \sigma^\alpha + n\sigma_\beta \sigma_\lambda + \delta_\lambda^\tau \sigma_\tau \sigma_\beta - g_{\alpha\lambda} \sigma_\beta \sigma_\alpha \\ &\quad - g_{\beta\tau} \sigma^\tau \sigma_\lambda - g_{\beta\lambda} \sigma^\tau \sigma_\tau + g_{\beta\alpha} g_{\tau\lambda} \sigma^\tau \sigma^\alpha).\end{aligned}$$

Portanto,

$$g^{\beta\lambda}\Gamma_{\beta\alpha}^\tau\Gamma_{\tau\lambda}^\alpha = -\frac{1}{4}(n-2)\sigma_\alpha \sigma^\alpha.\tag{1.37}$$

Substituindo as equações (1.35), (1.36) e (1.37) na expressão (1.34) obtemos a seguinte expressão final:

$$R = \tilde{R} + \frac{1}{4}(n-1)(n-2)\sigma_\alpha \sigma^\alpha - \frac{(n-1)}{\sqrt{-g}}(\sqrt{-g}\sigma^\alpha)_{,\alpha}.\tag{1.38}$$

O último termo foi escrito acrescentando-se $\sqrt{-g}$ de maneira a ter uma expressão escalar, pois $(\sqrt{-g})_{,\alpha} = 0$. Como estamos trabalhando com uma variedade 4-dimensional a expressão (1.38) assume a forma:

$$R = \tilde{R} + \frac{3}{2}\sigma_\alpha \sigma^\alpha - \frac{3}{\sqrt{-g}}(\sqrt{-g}\sigma^\alpha)_{,\alpha}.\tag{1.39}$$

Utilizando o conceito de derivada covariante riemanniana, pode-se obter ainda

$$R = \tilde{R} + \frac{3}{2}\sigma_\alpha \sigma^\alpha - 3\tilde{\nabla}_\alpha \sigma^\alpha.\tag{1.40}$$

Consideremos, agora, a variação da ação (1.31).

$$\delta\mathcal{S} = \delta \int (R^2 + \omega F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) \sqrt{-g} d^4x.\tag{1.41}$$

Aqui, efetuaremos o cálculo da variação por partes. Considere, portanto, o primeiro termo. Temos:

$$\delta(R^2\sqrt{-g}) = 2R\sqrt{-g}\delta R + R^2\delta(\sqrt{-g}).$$

Ou ainda,

$$\delta(R^2\sqrt{-g}) = 2R\delta(R\sqrt{-g}) - R^2\delta(\sqrt{-g}). \quad (1.42)$$

Substituindo (1.42) em (1.41), temos a seguinte expressão

$$\delta\mathcal{S} = \int \left[2R\delta(R\sqrt{-g}) + R^2\delta(\sqrt{-g}) + \omega\delta(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\sqrt{-g}) \right] d^4x. \quad (1.43)$$

No trabalho original de Weyl [30], ao calcular as equações de campo, ele adotou o chamado *gauge natural* ou *gauge de Weyl*, onde o escalar de curvatura R é uma constante, ou seja,

$$R = \Lambda, \quad (1.44)$$

sendo Λ uma constante. É importante destacar neste ponto que a escolha (1.44) é uma escolha local e Λ corresponde a curvatura do espaço. Aplicando o gauge natural na expressão (1.43), tem-se

$$\delta\mathcal{S} = \delta \int \left(R - \frac{\Lambda}{2} + \frac{\omega}{2\Lambda} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \right) \sqrt{-g} d^4x = 0. \quad (1.45)$$

Na expressão anterior está implícito o fato de que em geral $\delta R \neq 0$ e que o gauge natural só pode ser aplicado após a variação e não antes.

Substituindo (1.39) em (1.45), teremos:

$$\begin{aligned} \delta \int \left[\tilde{R} + \frac{3}{2} \sigma_\alpha \sigma^\alpha - \frac{3}{\sqrt{-g}} (\sqrt{-g} \sigma^\alpha)_{,\alpha} - \frac{\Lambda}{2} + \frac{\omega}{2\Lambda} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \right] \sqrt{-g} d^4x &= 0, \\ \delta \int \left(\tilde{R} + \frac{3}{2} \sigma_\alpha \sigma^\alpha - \frac{\Lambda}{2} + \frac{\omega}{2\Lambda} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \right) \sqrt{-g} d^4x &= 0. \end{aligned} \quad (1.46)$$

Na última passagem, o termo $\int \delta(\sqrt{-g} \sigma^\alpha)_{,\alpha} d^4x$ foi descartado por se tratar de um termo de fronteira. Portanto, a expressão final da variação será

$$\delta \int \left(\tilde{R} + \frac{3}{2} \sigma_\alpha \sigma^\alpha - \frac{\Lambda}{2} + \frac{\omega}{2\Lambda} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \right) \sqrt{-g} d^4x = 0. \quad (1.47)$$

A expressão (1.47) será submetida a duas variações, uma em relação à métrica e outra em relação ao campo de Weyl de maneira independente.

Considere como ponto de partida a variação com respeito ao campo de Weyl. Na expressão (1.47) os termos que possuem dependência com σ_μ são $\delta(\sigma_\alpha\sigma^\alpha)$ e $\delta(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu})$. Variando o primeiro termo, tem-se:

$$\delta(\sigma_\alpha\sigma^\alpha)\sqrt{-g} = 2\sqrt{-g}\sigma^\mu\delta\sigma_\mu. \quad (1.48)$$

Já o segundo termo pode ser escrito como:

$$\begin{aligned} \delta(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\sqrt{-g}) &= \sqrt{-g}g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}\delta(F_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}) = 2\sqrt{-g}F^{\mu\nu}\delta(F_{\mu\nu}) = 2\sqrt{-g}F^{\mu\nu}[(\sigma_\mu)_{,\nu} - (\sigma_\nu)_{,\mu}] \\ &= 2\sqrt{-g}F^{\mu\nu}[(\sigma_\mu)_{,\nu} - (\sigma_\nu)_{,\mu}] + 4\sqrt{-g}F^{\mu\nu}(\delta\sigma_\mu)_{,\nu}. \end{aligned}$$

A última expressão pode ser reescrita como

$$\delta(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\sqrt{-g}) = 4[(\sqrt{-g}F^{\mu\nu}\delta\sigma_\mu)_{,\nu} - (\sqrt{-g}F^{\mu\nu})_{,\nu}\delta\sigma_\mu]. \quad (1.49)$$

Substituindo (1.48) e (1.49) em (1.47), temos:

$$\delta \int \left[\tilde{R} + \frac{3}{2}(\sigma_\alpha\sigma^\alpha) - \frac{\Lambda}{2} + \frac{\omega}{2\Lambda}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \right] \sqrt{-g}d^4x = 0.$$

Como a variação que estamos considerando é no campo de Weyl, então, os termos $\tilde{R}$ e $\Lambda/2$ não irão contribuir na variação. Portanto, obtemos:

$$\begin{aligned} \int \left[\frac{3}{2}\delta(\sigma_\alpha\sigma^\alpha) + \frac{\omega}{2\Lambda}\delta(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}) \right] \sqrt{-g}d^4x &= 0, \\ \int \left\{ 3\sigma^\mu\delta\sigma_\mu\sqrt{-g} + \frac{2\omega}{\Lambda}[\sqrt{-g}F^{\mu\nu}\delta\sigma_\mu]_{,\nu} - \frac{2\omega}{\Lambda}(\sqrt{-g}F^{\mu\nu})_{,\nu}\delta\sigma_\mu \right\} d^4x &= 0. \end{aligned}$$

Note que o segundo termo entre chaves é um termo de fronteira e, portanto, não irá contribuir para a variação. Rearranjando a expressão acima, tem-se:

$$\int \left[3\sigma^\mu\sqrt{-g} - \frac{2\omega}{\Lambda}(\sqrt{-g}F^{\mu\nu})_{,\nu} \right] \delta\sigma_\mu d^4x = 0.$$

Admitindo que a variação seja arbitrária, temos como resultado a seguinte equação

de campo:

$$(\sqrt{-g}F^{\mu\nu})_{,\nu} = \frac{3\Lambda\sqrt{-g}}{2\omega}\sigma^\mu. \quad (1.50)$$

Note que a equação (1.50) é válida apenas no calibre natural $R = \Lambda$.

Considere agora, a variação de (1.47) em relação ao tensor métrico $g_{\mu\nu}$. Diferentemente do caso anterior todas as parcelas da ação terão uma contribuição não-nula, sendo assim, a mesma pode ser reescrita da seguinte maneira

$$\delta \int \left[\tilde{R} + \frac{3}{2}(\sigma_\alpha\sigma^\alpha) - \frac{\Lambda}{2} + \frac{\omega}{2\Lambda}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \right] \sqrt{-g}d^4x = 0. \quad (1.51)$$

Alguns termos da variação da ação acima já nos são familiares, uma vez que são utilizados na relatividade geral. Considere, portanto os seguintes resultados:

$$\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}\delta g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}, \quad (1.52)$$

$$\delta(\tilde{R}\sqrt{-g}) = \left(\tilde{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\tilde{R}g_{\mu\nu} \right) \sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu} + g^{\mu\nu}\sqrt{-g}\delta\tilde{R}_{\mu\nu}. \quad (1.53)$$

Para os termos da ação envolvendo o campo de Weyl, a variação com respeito à métrica nos dá:

$$\begin{aligned} \delta(\sigma_\alpha\sigma^\alpha\sqrt{-g}) &= \delta(\sigma_\mu\sigma_\nu g^{\mu\nu})\sqrt{-g} + \sigma_\alpha\sigma^\alpha\delta(\sqrt{-g}) = \sigma_\mu\sigma_\nu\sqrt{-g}\delta(g^{\mu\nu}) - \frac{1}{2}\sigma_\alpha\sigma^\alpha\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta(g^{\mu\nu}) \\ &= \left(\sigma_\mu\sigma_\nu - \frac{1}{2}\sigma_\alpha\sigma^\alpha g_{\mu\nu} \right) \sqrt{-g}\delta(g^{\mu\nu}). \end{aligned} \quad (1.54)$$

Por outro lado, temos

$$\begin{aligned} \delta(F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\sqrt{-g}) &= \delta(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu})\sqrt{-g} + F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\delta(\sqrt{-g}) = F_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}\sqrt{-g}\delta(g^{\alpha\mu}g^{\beta\nu}) \\ &\quad - \frac{1}{2}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} = F_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}g^{\beta\nu}\sqrt{-g}\delta g^{\alpha\mu} + F_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}g^{\alpha\mu}\sqrt{-g}\delta g^{\nu\beta} \\ &\quad - \frac{1}{2}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} = F_{\mu\alpha}F_{\nu\beta}\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu} + F_{\beta\nu}F_{\alpha\mu}g^{\alpha\beta}\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu} - \frac{1}{2}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}g_{\mu\nu}\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu} \\ &= 2g^{\alpha\beta}F_{\mu\beta}F_{\nu\alpha}\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu} - \frac{1}{2}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} \\ &= -2\left(g^{\alpha\beta}F_{\mu\beta}F_{\alpha\nu} + \frac{1}{4}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}g_{\mu\nu} \right) \sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu} \\ \therefore \delta(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\sqrt{-g}) &= -2T_{\mu\nu}\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (1.55)$$

onde $T_{\mu\nu} = g^{\alpha\beta} F_{\mu\beta} F_{\alpha\nu} + \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}$. Substituindo as expressões (1.52) (1.55) em (1.51), obtemos:

$$\int \left[\tilde{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \tilde{R} g_{\mu\nu} + \frac{3}{2} (\sigma_\mu \sigma_\nu - \frac{1}{2} \sigma_\alpha \sigma^\alpha g_{\mu\nu}) + \frac{\Lambda}{4} g_{\mu\nu} - \frac{\omega}{\Lambda} T_{\mu\nu} \right] \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} d^4x = 0. \quad (1.56)$$

Neste último passo utilizou-se do resultado conhecido da relatividade geral em que $\int g^{\mu\nu} \sqrt{-g} \delta \tilde{R}_{\mu\nu} d^4x = 0$ [31]. Já que a variação $\delta g_{\mu\nu}$ é arbitrária, portanto, como resultado final temos a seguinte equação de campo:

$$\frac{\omega}{\Lambda} T_{\mu\nu} = \tilde{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \tilde{R} g_{\mu\nu} + \frac{\Lambda}{4} g_{\mu\nu} + \frac{3}{2} (\sigma_\mu \sigma_\nu - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \sigma_\alpha \sigma^\alpha) \quad (1.57)$$

Assim como a equação de campo (1.51), advinda da variação do campo de Weyl, a equação (1.57) é satisfeita apenas no gauge natural. Além disso, pode-se observar que, se $\sigma_\mu = 0$, as equações de campo de Weyl recaem nas equação da relatividade geral com constante cosmológica que descreve o espaço-tempo vazio sem o campo eletromagnético:

$$\tilde{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \tilde{R} g_{\mu\nu} + \frac{\Lambda}{4} g_{\mu\nu} = 0. \quad (1.58)$$

1.7 Equações de campo em um gauge qualquer

As equações de campo obtidas na seção anterior foram obtidas a partir da escolha do gauge natural, onde o escalar de curvatura de Weyl é igual a uma constante, a qual poderia ser interpretada como sendo a constante cosmológica Λ . Esta seção será dedicada a encontrar as equações de campo que sejam válidas para qualquer gauge.

Ao definirmos o espaço-tempo de Weyl, as transformações de Weyl (1.15) definem uma classe de equivalência de variedades weylianas. Consideremos uma variedade M dotada de uma métrica g e uma conexão ∇ . Iremos supor que seja possível encontrar um gauge em que $R = \Lambda$, e ao mesmo tempo determinar qual deve ser a forma da transformação de gauge necessária.

Para isso, consideremos a passagem do gauge $(M, g, R = \Lambda)$ para um gauge qualquer $(M, \bar{g}, \bar{R})$. Pelas transformações de Weyl, temos:

$$g_{\mu\nu} = e^f \bar{g}_{\mu\nu}, \quad (1.59)$$

$$\sigma_\mu = \bar{\sigma}_\mu + \partial_\mu f. \quad (1.60)$$

Por outro lado, no gauge de Weyl temos que $R = \Lambda$, então, utilizando as transformações (1.59) e (1.60) teremos:

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = e^{-f} \bar{g}^{\mu\nu} \bar{R}_{\mu\nu} = e^{-f} \bar{R} \quad \therefore \quad e^f = \frac{\bar{R}}{\Lambda}. \quad (1.61)$$

Se substituirmos (1.61) em (1.60) e (1.59), as transformações de gauge podem ser escritas como:

$$g_{\mu\nu} = e^f \bar{g}_{\mu\nu} = \frac{\bar{R}}{\Lambda} g_{\mu\nu}, \quad (1.62)$$

$$\sigma_\mu = \bar{\sigma}_\mu + \frac{1}{\bar{R}} \partial_\mu \bar{R}. \quad (1.63)$$

No gauge de Weyl, as equações de campo são:

$$\frac{\omega}{\Lambda} T_{\mu\nu} = \tilde{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \tilde{R} g_{\mu\nu} + \frac{\Lambda}{4} g_{\mu\nu} + \frac{3}{2} \left(\sigma_\mu \sigma_\nu - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \sigma_\alpha \sigma^\alpha \right), \quad (1.64)$$

$$(\sqrt{-g} F^{\mu\nu})_{,\nu} = \frac{3\Lambda}{2\omega} \sqrt{-g} \sigma^\mu. \quad (1.65)$$

Vamos aplicar as transformações (1.62) e (1.63) em (1.65). Lembrando que $\bar{F}_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}$, temos, então:

$$(\sqrt{-g} F^{\mu\nu})_{,\nu} = (\sqrt{-g} g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} F_{\alpha\beta})_{,\nu} = (\sqrt{-g} \bar{F}^{\mu\nu})_{,\nu}. \quad (1.66)$$

Por outro lado,

$$\sqrt{-g} \sigma^\mu = \sqrt{-g} g^{\mu\alpha} \sigma_\alpha = e^f \sqrt{-\bar{g}} \bar{g}^{\mu\alpha} (\bar{\sigma}_\alpha + \partial_\alpha f) = \frac{\bar{R}}{\Lambda} \sqrt{-\bar{g}} \bar{g}^{\mu\alpha} \left(\bar{\sigma}_\alpha + \frac{1}{\bar{R}} \partial_\alpha \bar{R} \right). \quad (1.67)$$

Substituindo (1.66) e (1.67) em (1.65), teremos:

$$\frac{1}{\sqrt{-\bar{g}}} (\sqrt{-\bar{g}} \bar{F}^{\mu\nu})_{,\nu} = \frac{3\Lambda}{2\omega} \frac{\bar{R}}{\Lambda} \bar{g}^{\mu\alpha} \left(\bar{\sigma}_\alpha + \frac{1}{\bar{R}} \partial_\alpha \bar{R} \right),$$

ou ainda,

$$\frac{1}{\sqrt{-\bar{g}}} (\sqrt{-\bar{g}} \bar{F}^{\mu\nu})_{,\nu} = \frac{3}{2\omega} \bar{g}^{\mu\alpha} (\bar{R} \bar{\sigma}_\alpha + \partial_\alpha \bar{R}). \quad (1.68)$$

A equação (1.68) que já havia sido obtida por Weyl em 1918 [36], é a equação para o campo $\bar{\sigma}$, válida para qualquer gauge.

De maneira semelhante, pode-se obter a equação para o campo $g_{\mu\nu}$, válida em qualquer gauge. Para tal, consideremos novamente o conjunto de transformações (1.62) e (1.63).

Vimos anteriormente que algumas grandezas geométricas construídas com a conexão de Weyl, como por exemplo o tensor $R_{\mu\nu}$, são invariantes sob as transformações de gauge. Sendo assim, vamos escrever a equação (1.64) em termos dessas grandezas.

O tensor de Ricci riemanniano pode ser decomposto da seguinte maneira [11]:

$$\tilde{R}_{\mu\nu} = R_{(\mu\nu)} + \frac{1}{2}(\tilde{\nabla}_\nu \sigma_\mu + \tilde{\nabla}_\mu \sigma_\nu + g_{\mu\nu} \tilde{\nabla}_\alpha \sigma^\alpha) + \frac{1}{2}(\sigma_\mu \sigma_\nu - g_{\mu\nu} \sigma_\alpha \sigma^\alpha), \quad (1.69)$$

onde $R_{(\mu\nu)}$ representa a parte simétrica do tensor $R_{\mu\nu}$ de Weyl, isto é, $R_{(\mu\nu)} = \frac{1}{2}(R_{\mu\nu} + R_{\nu\mu})$. Contraindo (1.69) com $g^{\mu\nu}$, pode-se obter ainda:

$$\tilde{R} = R - \frac{3}{2}\sigma_\alpha \sigma^\alpha + 3\tilde{\nabla}_\alpha \sigma^\alpha. \quad (1.70)$$

Por outro lado, no gauge de Weyl o campo σ obedece a equação (1.65). Se derivarmos ambos os lados em relação à x^μ , por simetria o lado esquerdo é nulo, portanto, obtemos o seguinte resultado:

$$\tilde{\nabla}_\alpha \sigma^\alpha = 0. \quad (1.71)$$

Utilizando (1.71) em (1.69) e (1.70), teremos:

$$\tilde{R}_{\mu\nu} = R_{(\mu\nu)} + \frac{1}{2}(\tilde{\nabla}_\nu \sigma_\mu + \tilde{\nabla}_\mu \sigma_\nu + g_{\mu\nu}) + \frac{1}{2}(\sigma_\mu \sigma_\nu - g_{\mu\nu} \sigma_\alpha \sigma^\alpha), \quad (1.72)$$

$$\tilde{R} = R - \frac{3}{2}\sigma_\alpha \sigma^\alpha. \quad (1.73)$$

Substituindo (1.72) e (1.73) em (1.64), obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{\omega}{\Lambda} T_{\mu\nu} &= R_{(\mu\nu)} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \frac{\Lambda}{4}g_{\mu\nu} + \frac{1}{2}(\tilde{\nabla}_\nu \sigma_\mu + \tilde{\nabla}_\mu \sigma_\nu) + \frac{1}{2}(\sigma_\mu \sigma_\nu - g_{\mu\nu} \sigma_\alpha \sigma^\alpha) + \frac{3}{4}g_{\mu\nu} \sigma_\alpha \sigma^\alpha \\ &\quad + \frac{3}{2}\left(\sigma_\mu \sigma_\nu - \frac{1}{2}g_{\mu\nu} \sigma_\alpha \sigma^\alpha\right). \end{aligned} \quad (1.74)$$

Podemos ainda expressar a derivada covariante riemanniana em termos da derivada

covariante weylana:

$$\nabla_\alpha \sigma_\beta = \tilde{\nabla}_\alpha \sigma_\beta + \sigma_\alpha \sigma_\beta - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} \sigma_\lambda \sigma^\lambda. \quad (1.75)$$

Substituindo (1.75) em (1.74) e rearranjando a equação obtemos a seguinte expressão:

$$\frac{\omega}{\Lambda} T_{\mu\nu} = R_{(\mu\nu)} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + \frac{\Lambda}{4} g_{\mu\nu} + \frac{1}{2} (\nabla_\nu \sigma_\mu + \nabla_\mu \sigma_\nu) + \sigma_\mu \sigma_\nu. \quad (1.76)$$

Aplicando as transformações (1.62) e (1.63) em (1.76), teremos:

$$\begin{aligned} \frac{\omega}{\Lambda} \bar{T}_{\mu\nu} e^{-f} &= \bar{R}_{(\mu\nu)} - \frac{1}{2} \bar{g}_{\mu\nu} \bar{R} + \frac{\Lambda}{4} e^f \bar{g}_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \left[\nabla_\nu \left(\bar{\sigma}_\mu + \frac{1}{\bar{R}} \partial_\mu \bar{R} \right) + \nabla_\mu \left(\bar{\sigma}_\nu + \frac{1}{\bar{R}} \partial_\nu \bar{R} \right) \right] \\ &+ \left(\bar{\sigma}_\mu + \frac{1}{\bar{R}} \partial_\mu \bar{R} \right) \left(\bar{\sigma}_\nu + \frac{1}{\bar{R}} \partial_\nu \bar{R} \right) \\ &= \bar{R}_{(\mu\nu)} - \frac{1}{4} \bar{g}_{\mu\nu} \bar{R} + \frac{1}{2} (\nabla_\nu \bar{\sigma}_\mu + \nabla_\mu \bar{\sigma}_\nu) + \frac{1}{\bar{R}} \nabla_{(\nu} \nabla_{\mu)} \bar{R} + \bar{\sigma}_\mu \bar{\sigma}_\nu + \frac{1}{\bar{R}} (\bar{\sigma}_\mu \nabla_\nu \bar{R} + \bar{\sigma}_\nu \nabla_\mu \bar{R}). \end{aligned} \quad (1.77)$$

Definindo o tensor $D_{(\mu\nu)}$ como sendo

$$D_{(\mu\nu)} = \nabla_{(\nu} \nabla_{\mu)} \bar{R} + \frac{1}{2} R (\nabla_\nu \sigma_\mu + \nabla_\mu \sigma_\nu) + R \sigma_\mu \sigma_\nu + \sigma_\nu \nabla_\mu R + \sigma_\mu \nabla_\nu R, \quad (1.78)$$

podemos reescrever (1.77) como

$$\omega \bar{T}_{\mu\nu} = \bar{R} \left(\bar{R}_{(\mu\nu)} - \frac{1}{4} \bar{R} \bar{g}_{\mu\nu} \right) + \bar{D}_{(\mu\nu)}. \quad (1.79)$$

A equação (1.79) é válida para qualquer gauge. As equações de campo num gauge qualquer (1.68) e (1.79) também podem ser obtidas através do princípio variacional [11].

Partindo do fato de que a geometria Weyl é uma generalização da geometria riemanniana, podemos mostrar que as equações de campo da relatividade geral podem ser reobtidas no limite quando $\sigma = 0$. Vamos assumir, então, que em um certo gauge o campo de Weyl σ seja nulo, portanto,

$$R_{(\mu\nu)} = \tilde{R}_{\mu\nu}.$$

Como consequência direta de que $\sigma_\mu = 0$, as quantidades $F_{\mu\nu}$ e $T_{\mu\nu}$ serão nulas e, de (1.69) temos

$$R = \tilde{R} = \Lambda = \text{constante}.$$

O fato de R ser uma constante implica diretamente que $D_{\mu\nu} = 0$. A equação (1.79) nos

dá duas possibilidades: $\tilde{R} = 0$ ou $\tilde{R}_{\mu\nu} = \frac{1}{4}\Lambda g_{\mu\nu}$. Se $\tilde{R} = 0$, as soluções da teoria de Weyl serão idênticas às soluções das equações de Einstein no vázio ($\tilde{R}_{\mu\nu} = 0$). Por outro lado, se $\tilde{R}_{\mu\nu} = \frac{1}{4}\Lambda g_{\mu\nu}$ as soluções no vácuo das equações de Weyl correspondem aos espaços cuja curvatura de Ricci é constante. Vemos aqui que a constante cosmológica aparece naturalmente, uma vez que Λ advém das equações de campo. Note que se $\Lambda > 0$ o espaço-tempo pode ser identificado com o espaço de de Sitter, espaço este que tem ganhado atenção após a descoberta da expansão acelerada do universo [12][13]. Se Λ for suficientemente pequeno o efeito sobre a equação de campo pode ser desprezado e as equações weylianas tornam-se idênticas às equações de Einstein no vácuo, consequentemente, os resultados dos chamados testes do sistema solar (avanço do periélio do Mercúrio, red shift da luz e entre outros) são preservados na teoria de Weyl. Ademais, se $\Lambda = 0$, então, a relatividade geral será um caso particular da teoria de Weyl.

2.1 O princípio de Mach e a relatividade geral

Desde os primórdios da mecânica clássica, a chave para todo o estudo da mecânica newtoniana reside no conceito de inércia. A primeira lei de Newton atribui, a um corpo físico, propriedades de resistência ou tendência, na ausência de forças externas, a permanecer em repouso ou em movimento retilíneo uniforme. Além disso, a segunda lei de Newton fornece a condição matemática para que um corpo consiga romper a inércia e entrar em movimento uniformemente variado [18]. A força necessária para realizar tal mudança é proporcional à quantidade de matéria do corpo, ou seja, sua massa m . No entanto, como consequência natural das leis de Newton, surgiram questões como: o corpo está em repouso ou em movimento retilíneo uniforme em relação à quem, ou a quê [19]?

Essas questões foram o centro de inúmeras discussões e uma das soluções foi proposta pelo próprio Newton. Segundo ele, todos os estados de movimento estariam definidos em relação a um *referencial inercial absoluto*, imóvel e eterno. Uma boa aproximação para esse referencial seriam as estrelas distantes que estão em repouso. A concepção newtoniana de referenciais absolutos foi duramente refutado por Gottfried Wilhelm von Leibniz [20], que acreditava só fazer sentido falar em movimentos relativos entre corpos físicos em oposição à

ideia de movimentos absolutos de Newton.

Em 1883, em seu livro *The Science of Mechanics* [21], o físico austríaco Ernst Mach retomou a discussão sobre os referenciais. Mach mostrou em particular que o conceito de tempo absoluto de Newton não existia, uma vez que um evento físico seria mutuamente interdependente de outros eventos, sendo assim, o tempo não poderia ser medido de maneira absoluta. Outro ponto levantado por Mach em seu trabalho estava relacionado ao conceito de movimento: toda espécie de movimento, seja ele de rotação ou outros, são relativos às massas distantes do universo.

Um dos grandes diferenciais da relatividade restrita, seguida pela relatividade geral, é a concepção da estrutura do espaço e do tempo. Einstein, unificou essas duas estruturas que até então tinham existências independentes colocando-as em uma única estrutura denominada espaço-tempo. Dito dessa maneira, Einstein também adotou a postura de que os estados de movimento são relativos, e além disso, ele mostrou que essa nova estrutura quadridimensional é influenciada pela matéria circundante.

A relatividade geral, parece, em princípio estar em concordância com o princípio de Mach uma vez que nela o espaço-tempo, incluindo os referenciais inerciais, tem as suas propriedades determinadas pela distribuição da matéria. Entretanto, em uma análise mais cuidadosa notamos algumas inconsistências entre o princípio de Mach e a relatividade geral. As propriedades inerciais dos corpos, pelo princípio de Mach, são regidas por toda a matéria ao seu redor. Sendo assim, se a distribuição de matéria for isotrópica, então, as propriedades inerciais também o serão; como consequência direta, na presença de distribuições anisotrópicas as propriedades inerciais devem apresentar algum tipo de anisotropia. No entanto a relatividade geral não prevê nenhum tipo de anisotropia inercial. Do ponto de vista experimental, sendo a nossa galáxia uma gigante distribuição de massa anisotrópica, nenhum experimento conseguiu detectar uma anisotropia na inércia, colocando assim em cheque a aplicabilidade do princípio de Mach em sua versão original na relatividade geral.

Em 1961, Brans e Dicke [22] abriram caminho para teorias alternativas à relatividade geral que incluem, além do campo gravitacional, um campo escalar. Com a inclusão desse campo essa nova classe de teorias, que ficaram conhecidas como teorias escalares-tensoriais, tem como propósito incorporar o princípio de Mach.

2.2 Teoria de Brans-Dicke

Na teoria escalar tensorial de Brans-Dicke a variedade espaço-tempo continua sendo riemanniana, mas a interação gravitacional é descrita por dois campos: o tensor métrico $g_{\mu\nu}$ e um campo escalar ϕ . Esses dois campos possuem naturezas totalmente diferentes; enquanto $g_{\mu\nu}$ é essencialmente geométrico o campo escalar ϕ não tem um caráter de matéria nem um caráter geométrico e tradicionalmente é interpretado como o inverso do parâmetro de acoplamento gravitacional.

A teoria de Brans-Dicke parte de uma ação, no referencial conhecido como referencial de Jordan, cuja expressão é dada por:

$$S_{(BD)} = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\phi \tilde{R} + \frac{\omega}{\phi} g^{\mu\nu} \phi_{;\mu} \phi_{;\nu} - V(\phi) \right] + S_{(m)}, \quad (2.1)$$

onde,

$$S_{(m)} = \frac{16\pi}{c^4} \int d^4x \sqrt{-g} L_{(m)}, \quad (2.2)$$

sendo ω um parâmetro adimensional. Ademais, o potencial escalar $V(\phi)$ constitui uma generalização natural da constante cosmológica.

Variando a ação (2.1) em relação a $g_{\mu\nu}$, obtemos a equação de campo:

$$\tilde{G}_{\mu\nu} = -\frac{\kappa'}{\phi} T_{\mu\nu}^{(m)} + \frac{\omega}{\phi^2} (\phi_{;\mu} \phi_{;\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \phi^{;\alpha} \phi_{;\alpha}) - \frac{1}{\phi} (\phi_{;\mu;\nu} - g_{\mu\nu} \phi^{;\alpha}_{;\alpha}) - \frac{V}{2\phi} g_{\mu\nu}, \quad (2.3)$$

onde

$$T_{\mu\nu}^{(m)} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g} L^{(m)})}{\delta g^{\mu\nu}}, \quad (2.4)$$

é o tensor momento-energia associado à matéria. A variação da ação em relação a ϕ tem como resultado a seguinte equação:

$$\tilde{R} - \frac{2\omega}{\phi} \phi^{;\alpha}_{;\alpha} + \frac{\omega}{\phi^2} \phi^{;\alpha} \phi_{;\alpha} - \frac{dV}{d\phi} = 0. \quad (2.5)$$

Tomando o traço da equação (2.5), temos:

$$\tilde{R} = \kappa' \frac{T^{(m)}}{\phi} + \frac{\omega}{\phi^2} \phi^{;\alpha} \phi_{;\alpha} - 3 \frac{\phi^{;\alpha}_{;\alpha}}{\phi} + 2 \frac{V}{\phi}. \quad (2.6)$$

Substituindo (2.6) em (2.5), obtemos:

$$\phi^{;\alpha}_{;\alpha} = \frac{1}{2\omega + 3} \left(\kappa' T^{(m)} + \phi \frac{dV}{d\phi} - 2V \right), \quad (2.7)$$

para $\omega \neq -3/2$. Se $\omega = -3/2$, temos

$$\tilde{R} + \frac{3}{\phi} \phi^{;\alpha}_{;\alpha} - \frac{3}{2\phi^2} \phi^{;\alpha}_{;\alpha} - \frac{dV}{d\phi} = 0. \quad (2.8)$$

Além disso, por (2.3), temos também

$$\tilde{G}_{\mu\nu} = -\frac{\kappa'}{\phi} T^{(m)}_{\mu\nu} - \frac{3}{2\phi^2} (\phi_{;\mu} \phi_{;\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \phi^{;\alpha}_{;\alpha}) - \frac{1}{\phi} (\phi_{;\mu;\nu} - g_{\mu\nu} \phi^{;\alpha}_{;\alpha}) - \frac{V}{2\phi} g_{\mu\nu}, \quad (2.9)$$

cujos traço é

$$\tilde{R} = \kappa' \frac{T^{(m)}}{\phi} - \frac{3}{2\phi^2} \phi^{;\alpha}_{;\alpha} - 3 \frac{\phi^{;\alpha}_{;\alpha}}{\phi} + 2 \frac{V}{\phi}. \quad (2.10)$$

Vale salientar nesse ponto que as equações (2.8) e (2.10) são incompatíveis, exceto para $T = 0$ e $V = \phi^2$. Dito de outra forma, para $\omega = -3/2$ o sistema de equações diferenciais para $g_{\mu\nu}$ e ϕ , (2.3) e (2.5), fica indeterminado. Portanto, pode-se obter uma solução para $g_{\mu\nu}$ estabelecendo um valor fixo para o campo ϕ . Como exemplo, se $\phi = \phi_0$ onde ϕ_0 é uma constante, então (2.3) assume a forma

$$\tilde{G}_{\mu\nu} = -\frac{\kappa'}{\phi_0} T^{(m)}_{\mu\nu} - \frac{V}{2\phi_0} g_{\mu\nu}, \quad (2.11)$$

que são as equações de Einstein sem constante cosmológica sendo a constante G substituída por ϕ_0^{-1} .

2.3 Teoria escalar-tensorial geométrica

Como visto anteriormente, na teoria de Brans-Dicke a interação gravitacional é descrita por dois campos de naturezas distintas: o tensor métrico $g_{\mu\nu}$ que tem um caráter puramente geométrico e o campo escalar ϕ que, em princípio, não tem um caráter geométrico nem material. Esse caráter não-geométrico de ϕ leva à seguinte especulação: o que acontece se admitirmos que o campo escalar ϕ faz parte da geometria? Posto dessa forma, o campo gravitacional não seria descrito apenas por $g_{\mu\nu}$ mas pelo par $(g_{\mu\nu}, \phi)$. No entanto, como consequência direta dessa escolha, a geometria do espaço-tempo não seria mais a riemanniana uma vez que o campo ϕ passa a ser parte da estrutura da variedade espaço-tempo.

Existem dois principais métodos para determinar a geometria, a primeira seria postular *a priori* a geometria, à semelhança da relatividade geral, que postula o espaço-tempo como uma variedade riemanniana, e o segundo método seria extrair a geometria diretamente da ação a partir de um princípio variacional. O método variacional de Palatini, toma variações da ação em relação à métrica e, de maneira independente, uma variação em relação à conexão afim. No caso da relatividade geral a variação em relação à métrica fornece as equações de campo e a variação em relação à conexão fornece a condição $\nabla_\alpha g_{\mu\nu} = 0$, que caracteriza a geometria riemanniana [33]. Lindström aplicou o método variacional de Palatini para investigar diversas classes de teorias escalares tensoriais [34]. Ele mostrou que a extremização da ação nessas teorias fornece conexões mais gerais que a riemanniana. A partir disso, podemos concluir que o método de Palatini possibilita a exploração de estruturas mais gerais que a riemanniana.

Partindo da ação de Brans-Dicke

$$S_G = \int d^4x \sqrt{-g} (\Phi R + \frac{\omega}{\Phi} \Phi^{;\alpha} \Phi_{;\alpha}), \quad (2.12)$$

para encontrar a geometria do espaço-tempo, faremos uso do método de Palatini em uma versão estendida onde a ação terá uma variação extra em relação ao campo escalar além da métrica e da conexão afim. Fazendo a mudança de variável $\Phi = e^{-\phi}$ a ação (2.12) assume a seguinte forma:

$$S_G = \int d^4x \sqrt{-g} e^{-\phi} (R + \omega \phi^{;\alpha} \phi_{;\alpha}). \quad (2.13)$$

Variando a ação (2.13) em relação à conexão afim, temos:

$$\delta S_G = \int d^4x \sqrt{-g} e^{-\phi} g^{\mu\nu} \delta(R_{\mu\nu}). \quad (2.14)$$

Utilizando que [23]:

$$\delta(R_{\mu\nu}) = \nabla_\alpha (\delta\Gamma_{\mu\nu}^\alpha) - \nabla_\nu (\delta\Gamma_{\alpha\mu}^\alpha), \quad (2.15)$$

obtemos:

$$\delta S_G = \int d^4x \sqrt{-g} e^{-\phi} g^{\mu\nu} [\nabla_\alpha (\delta\Gamma_{\mu\nu}^\alpha) - \nabla_\nu (\delta\Gamma_{\alpha\mu}^\alpha)]. \quad (2.16)$$

Os dois últimos termos de (2.16) podem ser escritos como:

$$\begin{aligned}\sqrt{-g}e^{-\phi}g^{\mu\nu}\nabla_{\alpha}(\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}) &= \nabla_{\alpha}(\sqrt{-g}e^{-\phi}g^{\mu\nu}\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}) - \nabla_{\alpha}(\sqrt{-g}e^{-\phi}g^{\mu\nu})\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}, \\ \sqrt{-g}e^{-\phi}g^{\mu\nu}\nabla_{\nu}(\delta\Gamma_{\alpha\mu}^{\nu}) &= \nabla_{\nu}(\sqrt{-g}e^{-\phi}g^{\mu\nu}\delta\Gamma_{\alpha\mu}^{\nu}) - \nabla_{\nu}(\sqrt{-g}e^{-\phi}g^{\mu\nu})\delta\Gamma_{\alpha\mu}^{\nu}.\end{aligned}$$

Substituindo esses resultados em (2.16) e descartando os termos de fronteira, temos:

$$\delta S_G = \int d^4x \left[\nabla_{\nu}(\sqrt{-g}e^{-\phi}g^{\mu\nu})\delta\Gamma_{\alpha\mu}^{\nu} - \nabla_{\alpha}(\sqrt{-g}e^{-\phi}g^{\mu\nu})\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} \right].$$

Simetrizando o primeiro termo, a expressão anterior pode ser reescrita como

$$\delta S_G = \int d^4x \left[\frac{1}{2}\delta_{\alpha}^{\nu}\nabla_{\beta}(\sqrt{-g}e^{-\phi}g^{\mu\beta}) + \frac{1}{2}\delta_{\alpha}^{\mu}\nabla_{\beta}(\sqrt{-g}e^{-\phi}g^{\nu\beta}) - \nabla_{\alpha}(\sqrt{-g}e^{-\phi}g^{\mu\nu}) \right] \delta\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}.$$

Tomando $\delta S_G = 0$ e multiplicando a expressão acima por δ_{μ}^{α} , obtemos:

$$\nabla_{\alpha}g_{\mu\nu} = \phi_{,\alpha}g_{\mu\nu}. \quad (2.17)$$

A equação (2.17) apresenta a primeira diferença em relação à teoria de Brans-Dicke, uma vez que no cenário riemanniano a condição de compatilidade da métrica tem o lado direito igual a zero. A expressão (2.17) é conhecida como condição de não-metricidade de Weyl. Sendo assim, a asserção de que o campo escalar possui um caráter geométrico induz naturalmente o espaço-tempo a ser uma variedade de Weyl integrável [24].

Vale salientar nesse ponto que a condição de compatilidade é invariante sob as transformações de Weyl

$$\bar{g} = e^f g, \quad (2.18)$$

$$\bar{\phi} = \phi + f, \quad (2.19)$$

onde f é uma função escalar definida sobre a variedade M . O termo (M, g, ϕ) , que consiste em uma variedade diferenciável M dotada com a métrica g e o campo escalar ϕ , é dito ser um referencial de Weyl. Note que, se $f = -\phi$, então, $\bar{\phi} = 0$ e a variedade passa a ser uma variedade riemanniana. Neste caso, o conjunto $(M, \bar{g} = e^{-\phi}g, \bar{\phi} = 0)$ é chamado de referencial de Riemann.

Variando a ação (2.13) em relação à métrica, obtemos:

$$\delta S_G = \int d^4x e^{-\phi} \{ \delta(\sqrt{-g})(R + \phi^{,\alpha} \phi_{,\alpha}) + \sqrt{-g} [\delta(g^{\mu\nu}) R_{\mu\nu} + \omega \phi_{,\mu} \phi_{,\nu} \delta(g^{\mu\nu})] \}. \quad (2.20)$$

Utilizando o resultado conhecido

$$\delta(\sqrt{-g}) = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta(g^{\mu\nu}), \quad (2.21)$$

a variação (2.20) se torna

$$\begin{aligned} \delta S_G &= \int d^4x \sqrt{-g} e^{-\phi} \{ R_{\mu\nu} + \omega \phi_{,\mu} \phi_{,\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (R + \omega \phi^{,\alpha} \phi_{,\alpha}) \} \delta(g^{\mu\nu}) \\ &= \int d^4x e^{-\phi} \sqrt{-g} \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \omega g_{\mu\nu} R - \frac{1}{2} \omega g_{\mu\nu} \phi_{,\alpha} \phi^{,\alpha} + \omega \phi_{,\mu} \phi_{,\nu} \right) \delta(g^{\mu\nu}). \end{aligned}$$

Utilizando o princípio fundamental do cálculo de variações, obtemos a seguinte equação de campo:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R - \frac{1}{2} \omega g_{\mu\nu} \phi^{,\alpha} \phi_{,\alpha} + \omega \phi_{,\mu} \phi_{,\nu} = 0. \quad (2.22)$$

Finalmente, consideremos agora a variação da ação (2.13) em relação ao campo escalar ϕ .

$$\delta S_G = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\delta(e^{-\phi})(R + \omega \phi^{,\alpha} \phi_{,\alpha}) + \omega \delta(\phi^{,\alpha} \phi_{,\alpha}) e^{-\phi} \right]. \quad (2.23)$$

O último termo de (2.23) pode ser escrito como:

$$\delta(\phi_{,\alpha} \phi^{,\alpha}) = 2[\partial_\alpha(\delta\phi \partial^\alpha \phi) - \partial_\alpha \partial^\alpha \phi (\delta\phi)]. \quad (2.24)$$

Substituindo (2.24) em (2.23) e descartando os termos de fronteira, temos:

$$\delta S_G = \int d^4x \sqrt{-g} e^{-\phi} \left[-(R + \omega \phi^{,\alpha} \phi_{,\alpha}) - 2\omega \partial_\alpha \partial^\alpha \phi \right] (\delta\phi). \quad (2.25)$$

Portanto,

$$R + \omega \phi^{,\alpha} \phi_{,\alpha} + 2\omega \square \phi = 0, \quad (2.26)$$

sendo $\square$ o operador d'Alembertiano. Tomando o traço de (2.23), obtemos também que

$$R = \omega \phi^{,\alpha} \phi_{,\alpha}. \quad (2.27)$$

Substituindo (2.27) em (2.26), obtemos uma forma alternativa da equação para o campo escalar ϕ :

$$\square\phi + \phi^{\cdot\alpha}\phi_{,\alpha} = 0. \quad (2.28)$$

2.4 Cosmologia na teoria escalar-tensorial geométrica

As equações de campo são (vide [17]):

$$\tilde{G}_{\mu\nu} = \omega(\varphi) \left(\frac{\varphi_{,\alpha}\varphi^{\cdot\alpha}}{2} \gamma_{\mu\nu} - \varphi_{,\mu}\varphi_{,\nu} \right) - \frac{e^{2\varphi}}{2} \gamma_{\mu\nu} V(\varphi) - \kappa T_{\mu\nu}(\gamma), \quad (2.29)$$

$$\tilde{\square}\varphi = -\frac{1}{2\omega} \frac{d\omega}{d\varphi} \varphi_{,\alpha}\varphi^{\cdot\alpha} - \frac{e^{2\varphi}}{\omega} \left(V(\varphi) + \frac{1}{2} \frac{dV(\varphi)}{d\varphi} \right), \quad (2.30)$$

onde, $\gamma_{\mu\nu} = e^{-\varphi} g_{\mu\nu}$ e as quantidades com “ $\sim$ ” são riemannianas.

Considere a métrica de Friedmann-Robertson-Walker em coordenadas cartesianas:

$$\gamma_{\mu\nu} = dt^2 - a^2(t)(dx^2 + dy^2 + dz^2), \quad (2.31)$$

Além disso, vamos considerar o tensor momento-energia de um fluido perfeito, ou seja,

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)u_\mu u_\nu - p\gamma_{\mu\nu}, \quad (2.32)$$

com u_μ sendo a quadrivelocidade e vamos assumir também que o campo de Weyl tenha apenas dependência temporal:

$$\varphi = \varphi(t). \quad (2.33)$$

Consideremos inicialmente que ω seja constante, sendo assim, a equação (2.30) assume a forma simplificada

$$\tilde{\square}\varphi = -\frac{e^{2\varphi}}{\omega} \left(V(\varphi) + \frac{1}{2} \frac{dV(\varphi)}{d\varphi} \right). \quad (2.34)$$

O lado esquerdo da equação (2.34) pode ser reescrito como:

$$\tilde{\square}\varphi = \tilde{\nabla}^\mu \tilde{\nabla}_\mu \varphi = g^{\mu\alpha} \tilde{\nabla}_\alpha (\partial_\mu \varphi) = \partial^\mu \partial_\mu \varphi - g^{\mu\alpha} \tilde{\Gamma}_{\alpha\mu}^\lambda \partial_\lambda \varphi. \quad (2.35)$$

As componentes não nulas da conexão são:

$$\tilde{\Gamma}_{ij}^0 = \delta_{ij} \dot{a} a \quad \tilde{\Gamma}_{0j}^i = \frac{\dot{a}}{a} \delta_j^i. \quad (2.36)$$

Portanto, podemos escrever (2.35) como:

$$\tilde{\square} \varphi = \ddot{\varphi} - g^{ij} \tilde{\Gamma}_{ij}^0 \partial_0 \varphi = \ddot{\varphi} + \frac{3}{a^2} (a \dot{a}) \dot{\varphi} = \ddot{\varphi} + 3 \frac{\dot{a}}{a} \dot{\varphi}.$$

Substituindo esse resultado em (2.34), obtemos:

$$\ddot{\varphi} + 3 \frac{\dot{a}}{a} \dot{\varphi} = -\frac{e^{2\varphi}}{\omega} \left(V(\varphi) + \frac{1}{2} \frac{dV(\varphi)}{d\varphi} \right). \quad (2.37)$$

Vamos analisar a equação de campo (2.29), para ω constante. Para $\mu = \nu = 0$, temos

$$\begin{aligned} \tilde{G}_{00} &= \omega \left(\frac{\dot{\varphi}^2}{2} \gamma_{00} - \dot{\varphi}^2 \right) - \frac{e^{2\varphi}}{2} \gamma_{00} V(\varphi) - \kappa T_{00}, \\ 3 \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 &= \frac{\omega}{2} \dot{\varphi}^2 + \frac{e^{2\varphi}}{2} V(\varphi) + \kappa \rho. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Para $\mu = \nu = 1$, a equação de campo (2.29) assume forma:

$$\begin{aligned} \tilde{G}_{11} &= \omega \left(\frac{\dot{\varphi}^2}{2} \gamma_{11} - \dot{\varphi}^2 \right) - \frac{e^{2\varphi}}{2} \gamma_{11} V(\varphi) - \kappa T_{11}, \\ 2 \frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 &= -\frac{\omega}{2} \dot{\varphi}^2 + \frac{e^{2\varphi}}{2} V(\varphi) - \kappa p. \end{aligned} \quad (2.39)$$

2.4.1 Caso $V(\varphi) = e^{-\varphi} \Lambda$

Para esta escolha de potencial em particular, as equações (2.37), (2.38) e (2.39) assumem a forma simplificada

$$3 \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{\omega}{2} \dot{\varphi}^2 + \frac{\Lambda}{2} + \kappa \rho, \quad (2.40)$$

$$2 \frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = -\frac{\omega}{2} \dot{\varphi}^2 + \frac{\Lambda}{2} - \kappa p, \quad (2.41)$$

$$\ddot{\varphi} = 3 \frac{\dot{a}}{a} \dot{\varphi}. \quad (2.42)$$

Note que, a partir da equação (2.42) podemos obter, a partir de uma integração simples, que o campo de Weyl é dado por

$$\varphi(t) = C_1 + C_2 \int \frac{1}{a^3(t)} dt, \quad (2.43)$$

sendo C_1 e C_2 constantes.

Para resolver o sistema (2.40) - (2.43) podemos usar ainda [23]:

$$\frac{d}{dt}(\rho a^3) + p \frac{d}{dt}(a^3) = 0. \quad (2.44)$$

Demonstração da equação (2.44). Derivando (2.40) e dividindo por 3, obtemos a seguinte expressão:

$$2 \frac{\dot{a}\ddot{a}}{a^2} - 2 \frac{\dot{a}^3}{a^3} = \frac{\omega}{3} \dot{\varphi}\ddot{\varphi} + \kappa \dot{\rho}. \quad (2.45)$$

Multiplicando (2.41) por $-\dot{a}/a$, temos

$$-2 \frac{\dot{a}\ddot{a}}{a^2} - \frac{\dot{a}^3}{a^3} = \frac{\omega}{2} \frac{\dot{a}}{a} \dot{\varphi}^2 - \frac{\dot{a}}{a} \frac{\Lambda}{2} + \frac{\dot{a}}{a} \kappa p. \quad (2.46)$$

Somando (2.45) e (2.46) obtemos

$$-3 \frac{\dot{a}^3}{a^3} = \frac{\omega}{3} \dot{\varphi}\ddot{\varphi} + \frac{\omega}{2} \frac{\dot{a}}{a} \dot{\varphi}^2 - \frac{\dot{a}}{a} \frac{\Lambda}{2} + \kappa \frac{\dot{a}}{a} p + \frac{\kappa}{3} \dot{\rho}. \quad (2.47)$$

Utilizando (2.42) na expressão anterior, teremos

$$-\frac{\dot{a}}{a} \left(3 \frac{\dot{a}^2}{a^2} - \frac{\omega}{2} \dot{\varphi}^2 - \frac{\Lambda}{2} \right) = \frac{\kappa}{3} \dot{\rho} + \frac{\dot{a}}{a} \kappa p.$$

Note que, por (2.40) a expressão entre parênteses é $\kappa\rho$, portanto,

$$-\frac{\dot{a}}{a} \kappa \rho = \frac{\kappa}{3} \dot{\rho} + \frac{\dot{a}}{a} \kappa p.$$

Multiplicando a expressão anterior por $3a^3/\kappa$ e rearranjando, como resultado obtemos

$$\frac{d}{dt}(a^3 \rho) + p \frac{d}{dt}(a^3) = 0.$$

□

Inicialmente, vamos considerar o caso em que $p = 0$ (poeira). Neste caso, por (2.44), obtemos diretamente que

$$\rho = \frac{C}{a^3}, \quad (2.48)$$

sendo C uma constante.

Substituindo (2.48) em (2.40) e fazendo $p = 0$ em (2.41), obtemos as seguintes equações:

$$3\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{\omega}{2}\dot{\varphi}^2 + \frac{\Lambda}{2} + \frac{\kappa C}{a^3}, \quad (2.49)$$

$$2\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = -\frac{\omega}{2}\dot{\varphi}^2 + \frac{\Lambda}{2}. \quad (2.50)$$

Somando (2.49) e (2.50), teremos

$$2\frac{\ddot{a}}{a} + 4\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \Lambda + \frac{\kappa C}{a^3}, \quad (2.51)$$

cujas solução geral é

$$a(t) = \frac{1}{\Lambda^{1/3}} \left[-C\kappa + \sqrt{\frac{3\Lambda}{2}} \left(C_2 e^{-\frac{1}{2}\sqrt{6\Lambda}t} - C_1 e^{\frac{1}{2}\sqrt{6\Lambda}t} \right) \right]^{1/3}. \quad (2.52)$$

Tomando $C_1 = C_2$ a solução acima pode ser reescrita ainda como:

$$a(t) = \frac{1}{\Lambda^{1/3}} [-C\kappa - 2\theta C_1 \sinh(\theta t)]^{1/3}, \quad (2.53)$$

onde $\theta = \sqrt{3\Lambda/2}$. Substituindo (2.53) em (2.43) podemos encontrar a expressão para o campo φ .

A solução cosmológica na ausência de matéria foi obtida em 2016 por Laura Pucheu et al [17] e pode ser reobtida fazendo-se $C = 0$ em (2.53).

O problema de Cauchy na teoria escalar-tensorial geométrica de Weyl

Grande parte da dinâmica dos sistemas físicos conhecidos são regidos por equações diferenciais, sejam elas ordinárias ou parciais. Entende-se por problema de Cauchy ou problema de valor inicial encontrar a solução desse conjunto de equações, juntamente com um número apropriado de condições iniciais pré-determinadas. Diz-se que um sistema físico possui uma formulação de valor inicial se é possível especificar um conjunto de condições iniciais de modo que este e a sua subsequente evolução dinâmica seja determinada de maneira única [38].

3.1 O problema de Cauchy na relatividade geral

Considere uma folheação local do espaço-tempo na forma $M = \Sigma \times R$, com uma métrica hiperbólica g tal que as subvariedades $M_t \equiv \Sigma \times \{t\}$ sejam do tipo-espaço. Considere também, um referencial denominado *referencial adaptado de Cauchy* cujos eixos espaciais e_i são tangentes à hipersuperfície M_t , e o eixo temporal e_0 ortogonal à M_t . Usando um sistema de coordenadas locais adaptadas à M_t , podemos escrever este referencial na forma [39]:

$$e_i \equiv \partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad (3.1)$$

cujas bases dual é

$$\theta^i = dx^i + \beta^i dt \quad \text{e} \quad \theta^0 = dt, \quad (3.2)$$

onde, β , chamado de vetor de deslocamento (*shift*), possui uma dependência temporal e é tangente à M_t .

Em termos da base dual θ^α a métrica pode ser decomposta da seguinte maneira¹ [37]:

$$ds^2 = -N^2(\theta^0)^2 + g_{ij}\theta^i\theta^j, \quad (3.3)$$

onde N é uma função chamada *lapso*, que iremos admitir ser positiva. Um espaço-tempo (M, g) com $M = \Sigma \times R$ e uma métrica na forma (3.3) é dito folheado. Tal folheação faz-se necessária, uma vez que na relatividade geral o problema de Cauchy consiste em encontrar a dinâmica do “espaço”. Fazendo uso dessa folheação, a métrica do espaço-tempo $g_{\mu\nu}$ induz uma métrica tridimensional riemanniana $\bar{g}_{\mu\nu}$.

Sendo a métrica a variável dinâmica, definimos também um tensor chamado curvatura extrínseca $K_{\mu\nu}$ que está diretamente relacionada com a noção de derivada temporal da métrica induzida cuja definição é

$$K_{ij} \equiv -\frac{1}{2N}\bar{\partial}_0 g_{ij}, \quad (3.4)$$

onde o operador $\bar{\partial}$ é por definição $\bar{\partial}_0 := \partial/\partial t - \bar{\mathcal{L}}_\beta$ sendo $\bar{\mathcal{L}}_\beta$ a derivada de Lie em M_t com respeito ao vetor espacial β . Assim como a métrica pode ser decomposta na forma (3.3), quantidades como o tensor de Ricci também podem ser escritas em termos da função lapso:

Lema 3.1.1. *No referencial adaptado de Cauchy valem as seguintes relações:*

$$NR_i^j = N\bar{R}_i^j - \bar{\partial}_0 K_i^j + NK_i^j K_h^h - \bar{\nabla}_i \partial^j N, \quad (3.5)$$

$$\bar{\partial}_0 g^{ij} = 2NK^{ij}. \quad (3.6)$$

Nas decomposições do tensor de Ricci acima não aparecem derivadas das funções N e β . Em outras palavras, as equações de Einstein formam um sistema de equações que dá a dinâmica de duas quantidades fundamentais, o tensor métrico $\bar{g}$ e a curvatura extrínseca K definidos sobre a hipersuperfície M_t . No entanto, das dez componentes do tensor de Einstein, apenas uma parcela das componentes fornecem a dinâmica do sistema. Assim, quando as

¹Neste capítulo, estamos adotando como convenção, a assinatura da métrica dada por $(-, +, +, +)$.

equações de Einstein são satisfeitas, ou seja, quando

$$G_{\alpha\beta} \equiv R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}R = T_{\alpha\beta} \equiv \rho_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}\rho, \quad (3.7)$$

onde $\rho_{\alpha\beta} = T_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}T$, para $\alpha = 0$, temos as seguintes equações:

$$\frac{1}{N} (R_{0i} - \rho_{0i}) \equiv -\bar{\nabla}_h K_i^h + \bar{\nabla}_i K_h^h - \frac{1}{N} \rho_{0i} = 0, \quad (3.8)$$

$$\frac{2}{N^2} (G_{00} - T_{00}) \equiv \bar{R} - K_j^i K_i^j + (K_h^h)^2 + 2T_0^0 = 0. \quad (3.9)$$

As equações (3.8) e (3.9) são chamadas de equações de vínculo. As demais componentes do tensor de Einstein são

$$R_{ij} \equiv \bar{R}_{ij} - \frac{\bar{\partial}_0 K_{ij}}{N} - 2K_{jh} K_i^h + K_{ij} K_h^h - \frac{\bar{\nabla}_j \partial_i N}{N} = \rho_{ij}. \quad (3.10)$$

As equações (3.10) juntamente com a definição

$$\bar{\partial}_0 g_{ij} = -2N K_{ij}, \quad (3.11)$$

determinam as derivadas transversais a M_t de $\bar{g}$ e K quando esses tensores, assim como as funções N e β são conhecidos em M_t .

Teorema 3.1.1. *Se $R_{ij} = 0$, então as equações de vínculo satisfazem um sistema linear hiperbólico, homogêneo e simétrico de primeira ordem. Se o sistema é satisfeito inicialmente, então ele será satisfeito para qualquer t posterior.*

Demonstração. Por definição,

$$R - \rho = g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} - g^{\alpha\beta} \rho_{\alpha\beta} = g^{ij} (R_{ij} - \rho_{ij}) + g^{00} (R_{00} - \rho_{00}). \quad (3.12)$$

Mas, se $R_{ij} - \rho_{ij} = 0$, e a métrica é dada por (3.3), então

$$R - \rho = g_{00} (R^{00} - \rho^{00}) = -N^2 (R^{00} - \rho^{00}). \quad (3.13)$$

Sabemos também que

$$G_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}R = \rho_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}\rho.$$

Então,

$$G^{00} - T^{00} = R^{00} - \rho^{00} - \frac{1}{2}g^{00}(R - \rho). \quad (3.14)$$

Mas,

$$-\frac{1}{2}g^{00}(R - \rho) = -\frac{1}{2}g^{00}(g^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta} - g^{\alpha\beta}\rho_{\alpha\beta}) = -\frac{1}{2}(R^{00} - \rho^{00}). \quad (3.15)$$

Substituindo (3.15) em (3.14), obtemos:

$$G^{00} - T^{00} = \frac{1}{2}(R^{00} - \rho^{00}). \quad (3.16)$$

De (3.13),

$$R - \rho = -N^2(R^{00} - \rho^{00}) = -2N^2(G^{00} - T^{00}) = 2g_{00}(G^{00} - T^{00}).$$

Portanto,

$$R - \rho = 2(G_0^0 - T_0^0). \quad (3.17)$$

Além disso, pelas equações de Einstein (3.7),

$$\begin{aligned} G^{ij} - T^{ij} &= -\frac{1}{2}\bar{g}^{ij}(R - \rho) = -\bar{g}^{ij}(G_0^0 - T_0^0) \\ \Rightarrow G^{ij} - T^{ij} &= -\bar{g}^{ij}(G_0^0 - T_0^0). \end{aligned} \quad (3.18)$$

Consideremos agora as identidades de Bianchi, dadas por:

$$\nabla_\alpha G^{\alpha\beta} - \nabla_\alpha T^{\alpha\beta} = 0. \quad (3.19)$$

Separando a derivada temporal da parte espacial em (3.19), obtemos:

$$\nabla_0(G^{0\beta} - T^{0\beta}) + \nabla_i(G^{i\beta} - T^{i\beta}) = 0. \quad (3.20)$$

Para $\beta = 0$, temos:

$$\nabla_0(G^{00} - T^{00}) + \nabla_i(G^{i0} - T^{i0}) = 0.$$

Usando (3.3) na equação acima para descer o segundo índice, vemos que

$$-N^{-2}\partial_0\Sigma_0^0 - N^{-2}\partial_i\Sigma_0^i + A(\Gamma, \Sigma_i^0, \Sigma_0^0) = 0, \quad (3.21)$$

onde $\Sigma_0^i \equiv G_0^i - T_0^i$, $\Sigma_0^0 \equiv G_0^0 - T_0^0$. De maneira semelhante, para $\beta = j$, tem-se

$$-N^{-2}\partial_0\Sigma_0^j - g^{ij}\partial_i\Sigma_0^0 + B(\Gamma, \Sigma_0^i, \Sigma_0^0) = 0, \quad (3.22)$$

onde A, B são funções contendo termos com conexão.

O sistema composto por (3.21) e (3.22) é um sistema de equações hiperbólico simétrico; sendo assim, pela teoria das equações diferenciais, o sistema possui solução e a solução é única. $\square$

Definição 3.1.1. 1. O conjunto de condições iniciais é um tripleto $(M, \bar{g}, K)$ onde M é uma variedade suave n -dimensional, $\bar{g}$ é a métrica riemanniana induzida em M , e K um tensor simétrico de ordem 2.

2. O desenvolvimento de um conjunto de dados iniciais é um espaço-tempo (V, g) , tal que existe uma imersão i de M em V dotada das seguintes propriedades:

(a) A métrica $\bar{g}$ é o “pullback” de g por i , $\bar{g} = i^*g$, em outras palavras, $\bar{g}$ é a métrica induzida por g em M_0 .

(b) A imagem de K por i é a curvatura extrínseca de $i(K)$ da subvariedade de (V, g) .

3. O desenvolvimento (V, g) de $(M, \bar{g}, K)$ é chamado de desenvolvimento einsteiniano se a métrica g satisfaz, em V , as equações de Einstein.

As condições iniciais $(\bar{g}, K)$ não podem ser escolhidas de maneira arbitrária, pois estas devem satisfazer as equações de vínculo. A expressão da curvatura extrínseca, é, por definição,

$$\bar{\partial}_0 g_{ij} = -2N K_{ij}.$$

Usando o fato de

$$\bar{\partial}_0 = \partial_t - \bar{L}_\beta, \quad (3.23)$$

com $\bar{L}_\beta$ representando a derivada de Lie em relação à função deslocamento, a curvatura extrínseca pode ser escrita como

$$\partial_t g_{ij} = -2N K_{ij} + \bar{\nabla}_i \beta_j + \bar{\nabla}_j \beta_i. \quad (3.24)$$

A partir da equação de evolução (3.10) podemos obter [39]:

$$\partial_t K_{ij} = N \left(\bar{R}_{ij} - 2K_{ih}K_j^h + K_{ij}K_h^h \right) - \bar{\nabla}_i \partial_j N + \beta^h \bar{\nabla}_h K_{ij} + K_{ih} \bar{\nabla}_j \beta^h + K_{hj} \bar{\nabla}_i \beta^h - N \rho_{ij}. \quad (3.25)$$

O conjunto de equações (3.24) e (3.25) é conhecido como equações de Arnowitt-Deser-Misner [37], abreviadamente, equações ADM.

Lema 3.1.2. *Se as funções β e N são analíticas e definidas em V , então, o sistema (3.24), (3.25) é do tipo Cauchy-Kowalewskaya para as variáveis $\bar{g}$ e K .*

Demonstração. Um sistema de equações é dito do tipo Cauchy-Kowalewskaya se a derivada temporal de cada variável é igual a uma função analítica das coordenadas e de suas derivadas espaciais. Vemos que as equações (3.24) e (3.25), claramente satisfazem a essa condição. $\square$

Teorema 3.1.2. *Se as condições iniciais são analíticas em M_0 e se as funções N e β também são analíticas em uma vizinhança de M_0 em $M \times R$, então existe uma vizinhança de M_0 em $M \times R$ tal que as equações de evolução (3.24) e (3.25) tem soluções analíticas nessa vizinhança.*

A demonstração do teorema 3.1.2 segue diretamente do próximo teorema:

Teorema 3.1.3. *Um conjunto de condições iniciais admite um desenvolvimento einsteiniano sem fonte se, e somente se, os dados iniciais satisfazem as equações de vínculo no vácuo.*

Demonstração. Vejamos a condição necessária: suponha que os dados iniciais satisfazem as equações de vínculo no vácuo, ou seja,

$$\begin{aligned} C_i &\equiv \frac{1}{N} R_{0i} = -\bar{\nabla}_h K_i^h + \bar{\nabla}_i K_h^h = 0, \\ C_0 &\equiv \frac{2}{N^2} G_{00} = \bar{R} - K_j^i K_i^j + (K_h^h)^2 = 0. \end{aligned} \quad (3.26)$$

O tensor de Einstein é, por definição,

$$G_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R$$

Das equações de vínculo (3.26) podemos ver que as componentes $G_{\alpha 0}$ são nulas. Por outro lado, pelo teorema 3.1.1, as condições iniciais são satisfeitas se $R_{ij} = 0$, consequentemente

$G_{ij} = 0$. Com isso, concluímos que se os dados iniciais satisfazem as equações de vínculo no vácuo, então as equações de Einstein são satisfeitas.

Agora vejamos a condição de suficiência: suponha agora que existe um desenvolvimento einsteiniano, ou seja, para N e β analíticas o conjunto de equações ADM tem solução analítica. As condições iniciais são satisfeitas pelas equações de vínculo numa vizinhança da hipersuperfície inicial M_0 . Portanto, as equações de Einstein também são satisfeitas nessa vizinhança. $\square$

As soluções das equações de Einstein devem, por sua natureza física, exibir uma propagação causal. Isto é, a métrica $g_{\alpha\beta}$ num ponto x deve depender apenas do passado desse ponto, em outras palavras, dadas as condições iniciais, definidas sobre M_0 , o ponto x pode ser conectado por curvas tipo-tempo direcionadas para o futuro ou curvas tipo-luz. No entanto, as funções analíticas são definidas em conjuntos abertos, de modo que não temos nenhuma garantia da natureza causal das soluções.

As equações de Einstein são invariantes sob isometrias. Sendo assim, o desenvolvimento einsteiniano de um determinado sistema pode ter diferentes formas de representação. Existe uma classe especial de equações diferenciais que exibem naturalmente uma propagação causal, a classe das equações diferenciais hiperbólicas. Embasados na invariância por difeomorfismo isométrico, podemos escolher um gauge em que as equações de Einstein sejam postas na forma hiperbólica, garantindo assim, a propagação causal das soluções. O gauge que desempenha esse papel é o chamado *gauge harmônico*.

Um sistema de coordenadas x^α é dito harmônico, num conjunto aberto U , se e somente se cada x^α , considerado como uma função real da variedade é uma função harmônica em relação à métrica g , isto é,

$$g^{\lambda\mu} \nabla_\lambda \partial_\mu x^\alpha \equiv g^{\lambda\mu} (\partial_{\lambda\mu}^2 x^\alpha - \Gamma_{\lambda\mu}^\rho \partial_\rho x^\alpha) \equiv -g^{\lambda\mu} \Gamma_{\lambda\mu}^\alpha = 0. \quad (3.27)$$

A expressão acima usa o fato de que em coordenadas locais, a função x^α satisfaz

$$\partial_{\lambda\mu}^2 x^\alpha = \frac{\partial}{\partial x^\lambda} \left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial x^\mu} \right) = \partial_\lambda (\delta_\mu^\alpha) = 0.$$

Portanto, as coordenadas locais x^α são harmônicas em U , para um espaço-tempo cuja métrica é g , se e somente se os símbolos de Christoffel definidos com g satisfazem, em U , a seguinte equação:

$$F^\alpha \equiv g^{\lambda\mu} \Gamma_{\lambda\mu}^\alpha = 0. \quad (3.28)$$

Teorema 3.1.4. *Se as $n + 1$ coordenadas locais são harmônicas para a métrica g , então*

o tensor de Ricci definido a partir de g leva a um sistema de equações quase-diagonais de segunda ordem para as componentes da métrica, dada por:

$$R_{\alpha\beta}^{(h)} \equiv -\frac{1}{2}g^{\lambda\mu}\partial_{\lambda\mu}^2 g_{\alpha\beta} + P_{\alpha\beta}(g, \partial g), \quad (3.29)$$

onde P contém termos das componentes da métrica e suas derivadas parciais.

Demonstração. Por definição, o tensor de Ricci é dado por

$$R_{\alpha\beta} = \partial_\beta \Gamma_{\lambda\alpha}^\lambda - \partial_\lambda \Gamma_{\alpha\beta}^\lambda + \Gamma_{\beta\tau}^\lambda \Gamma_{\lambda\alpha}^\tau - \Gamma_{\lambda\tau}^\lambda \Gamma_{\alpha\beta}^\tau. \quad (3.30)$$

Utilizando a expressão dos símbolos de Christoffel, pode-se mostrar que o tensor de Ricci pode ser reescrito como:

$$R_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta}^{(h)} + \frac{1}{2} (g_{\alpha\lambda} \partial_\beta F^\lambda + g_{\beta\lambda} \partial_\alpha F^\lambda), \quad (3.31)$$

com F^α dado por (3.28) e

$$R_{\alpha\beta}^{(h)} \equiv -\frac{1}{2}g^{\lambda\mu}\partial_{\lambda\mu}^2 g_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} (\partial_\beta g^{\lambda\mu} \partial_\lambda g_{\alpha\mu} + \partial_\alpha g^{\lambda\mu} \partial_\lambda g_{\beta\mu}) - \Gamma_{\alpha\lambda}^\mu \Gamma_{\beta\mu}^\lambda. \quad (3.32)$$

Definindo

$$P_{\alpha\beta}(g, \partial g) \equiv -\frac{1}{2} (\partial_\beta g^{\lambda\mu} \partial_\lambda g_{\alpha\mu} + \partial_\alpha g^{\lambda\mu} \partial_\lambda g_{\beta\mu}) - \Gamma_{\alpha\lambda}^\mu \Gamma_{\beta\mu}^\lambda,$$

então, a expressão (3.31) pode ser escrita como:

$$R_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}g^{\lambda\mu}\partial_{\lambda\mu}^2 g_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} (g_{\alpha\lambda} \partial_\beta F^\lambda + g_{\beta\lambda} \partial_\alpha F^\lambda) + P_{\alpha\beta}(g, \partial g). \quad (3.33)$$

Se as coordenadas são harmônicas, então $F^\alpha = 0$ e, portanto,

$$R_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}g^{\lambda\mu}\partial_{\lambda\mu}^2 g_{\alpha\beta} + P_{\alpha\beta}(g, \partial g).$$

□

Corolário 3.1.5. *O tensor de Einstein satisfaz a identidade*

$$G^{\alpha\beta} := R^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}Rg^{\alpha\beta} \equiv G_{(h)}^{\alpha\beta} + \frac{1}{2} (g^{\alpha\lambda} \partial_\lambda F^\beta + g^{\beta\lambda} \partial_\lambda F^\alpha - g^{\alpha\beta} \partial_\lambda F^\lambda), \quad (3.34)$$

onde $G_{(h)}^{\alpha\beta}$ é um sistema quase-diagonal para a métrica g .

O gauge harmônico faz com que o tensor de Ricci e, conseqüentemente, as equações de Einstein, fiquem na forma de um sistema quase-diagonal, embora, essa forma diagonal seja apenas local. Agora, vamos estabelecer, em uma variedade pseudo-riemanniana (V, g) uma condição de gauge que torna o tensor de Ricci um operador quase-linear e quase-diagonal globalmente.

Considere em V uma métrica $\hat{e}$. Diz-se que a métrica g é um gauge de onda em relação a $\hat{e}$ se a aplicação identidade $V \rightarrow V$ é uma aplicação de onda de (V, g) em $(V, \hat{e})$.

Definição 3.1.2. Um mapeamento $f : V \rightarrow \hat{V}$, dado pelas coordenadas locais $(x^\alpha) \mapsto (y^A = f^A(x^\alpha))$, é denominado aplicação de onda de (V, G) em $(\hat{V}, \hat{e})$ se f satisfaz a equação semi-linear

$$g\hat{\nabla}^2 f = 0, \quad (3.35)$$

que, em coordenadas locais, assume a forma

$$g^{\alpha\beta} (\partial_{\alpha\beta}^2 f^A - \Gamma_{\alpha\beta}^\lambda \partial_\lambda f^A - \Gamma_{BC}^A(f) \partial_\alpha f^B \partial_\beta f^C) = 0, \quad (3.36)$$

onde $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$ e Γ_{BC}^A são as conexões de g e $\hat{e}$, respectivamente.

Para uma métrica arbitrária $\hat{e}$ e para f sendo a aplicação identidade, a condição harmônica (3.36) fornece:

$$\hat{F}^\lambda \equiv g^{\alpha\beta} (\Gamma_{\alpha\beta}^\lambda - \hat{\Gamma}_{\alpha\beta}^\lambda) = 0. \quad (3.37)$$

A grande diferença entre (3.28) e (3.37) é que esta última é uma diferença entre conexões, ou seja, uma quantidade tensorial, sendo portanto, independente de coordenadas.

Nesse novo gauge o tensor de Ricci assume a forma

$$Ric(g)^{(\hat{e})} \equiv -\frac{1}{2}gD^2g + P(g)(Dg, Dg) - g\hat{Riemann}, \quad (3.38)$$

onde D denota a derivada covariante definida com a métrica $\hat{e}$.

Teorema 3.1.6. O conjunto de dados iniciais admite um desenvolvimento (V_T, g) , com $V_T \equiv M \times [0, T)$, tal que, a métrica g é uma métrica que admite uma folheação no espaço $\tilde{E}_S(T)$ ²

² $\tilde{E}_S(T)$ é o espaço dos campos tensoriais $\mathcal{T}$ tal que $\mathcal{T} \in \overline{C}(V_t)$, espaço das funções contínuas e limitadas em V_T .

e satisfaz em V_T as equações de Einstein no gauge harmônico $\hat{e}$. Sejam dois desenvolvimentos num gauge de onda $\hat{e}$ (V_T, g_1) e (V_T, g_2) , que estão em $\tilde{E}_s(T)$ com $s > \frac{n}{2} + 1$, e que tem o mesmo conjunto de dados iniciais $(\bar{g}, K, \bar{N}, \bar{\beta})$ em M . Então, esses dois desenvolvimentos coincidem em V_T .

Vimos, anteriormente, que existe solução das equações e um desenvolvimento adotando um gauge. No entanto, precisamos mostrar que a solução obtida no gauge harmônico satisfaz as equações de Einstein completas, ou seja, $G^{\alpha\beta} - T^{\alpha\beta} = 0$.

Para mostrar que as soluções encontradas no gauge harmônico satisfazem as equações de Einstein, precisamos mostrar que as soluções satisfazem o gauge harmônico. Considere, portanto, o gauge harmônico. Nesse gauge, seja g solução das equações reduzidas de Einstein:

$$R_{(h)}^{\alpha\beta} = \rho^{\alpha\beta}. \quad (3.39)$$

Considere as equações de Einstein na sua forma completa:

$$G^{\alpha\beta} = T^{\alpha\beta}. \quad (3.40)$$

Pelo corolário 3.1.5, o tensor de Einstein satisfaz a seguinte identidade:

$$G^{\alpha\beta} := G_{(h)}^{\alpha\beta} + \frac{1}{2} (g^{\alpha\lambda} \partial_\lambda F^\beta + g^{\beta\lambda} \partial_\lambda F^\alpha - g^{\alpha\beta} \partial_\lambda F^\lambda). \quad (3.41)$$

Substituindo em (3.40), tem-se

$$\begin{aligned} G^{\alpha\beta} - T^{\alpha\beta} &= G_{(h)}^{\alpha\beta} + \frac{1}{2} (g^{\alpha\lambda} \partial_\lambda F^\beta + g^{\beta\lambda} \partial_\lambda F^\alpha - g^{\alpha\beta} \partial_\lambda F^\lambda) - \rho^{\alpha\beta} + \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \rho \\ &= R_{(h)}^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} R_{(h)} + \frac{1}{2} (g^{\alpha\lambda} \partial_\lambda F^\beta + g^{\beta\lambda} \partial_\lambda F^\alpha - g^{\alpha\beta} \partial_\lambda F^\lambda) - \rho^{\alpha\beta} + \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \rho. \end{aligned}$$

Portanto,

$$G^{\alpha\beta} - T^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (g^{\alpha\lambda} \partial_\lambda F^\beta + g^{\beta\lambda} \partial_\lambda F^\alpha - g^{\alpha\beta} \partial_\lambda F^\lambda). \quad (3.42)$$

As identidades de Bianchi implicam na seguinte identidade:

$$\nabla_\alpha G^{\alpha\beta} = 0. \quad (3.43)$$

Aplicando a divergência em (3.42) e utilizando (3.43), temos:

$$\begin{aligned}\nabla_\alpha G^{\alpha\beta} - \nabla_\alpha T^{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} \left[g^{\alpha\lambda} \nabla_\alpha (\partial_\lambda F^\beta) + g^{\beta\lambda} \nabla_\alpha (\partial_\lambda F^\alpha) - g^{\alpha\beta} \nabla_\alpha (\partial_\lambda F^\lambda) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[g^{\alpha\lambda} (\partial_{\alpha\lambda}^2 F^\beta - \Gamma_{\alpha\lambda}^\mu \partial_\mu F^\beta) + g^{\beta\lambda} (\partial_{\alpha\lambda}^2 F^\alpha - \Gamma_{\alpha\lambda}^\mu \partial_\mu F^\alpha) - g^{\alpha\beta} (\partial_{\alpha\lambda}^2 F^\lambda - \Gamma_{\alpha\lambda}^\mu \partial_\mu F^\lambda) \right].\end{aligned}$$

Portanto,

$$g^{\alpha\lambda} \partial_{\alpha\lambda}^2 F^\beta + A^{\beta\lambda}_\alpha \partial_\lambda F^\alpha = 0. \quad (3.44)$$

As identidades de Bianchi impõem a condição F^α um sistema linear homogêneo hiperbólico. Pode-se mostrar, por um cálculo análogo, que para o gauge harmônico $\hat{e}$ o tensor $\hat{F}$ satisfaz o seguinte sistema de equações:

$$g^{\alpha\lambda} D_\alpha D_\lambda \hat{F}^\beta + \hat{A}^{\beta\lambda}_\alpha D_\lambda \hat{F}^\alpha = 0, \quad (3.45)$$

onde $\hat{A}$ é um tensor de terceira ordem que depende apenas de g e Dg .

Lema 3.1.3. *O desenvolvimento do conjunto de dados iniciais em M das equações de Einstein reduzidas, no gauge harmônico, é um desenvolvimento einsteiniano se, e somente se, para conjunto de dados iniciais do sistema reduzido o conjunto de funções $\hat{F}^\alpha$ satisfaz*

$$F^\alpha|_M = 0 \quad e \quad \partial_t F^\alpha|_M = 0. \quad (3.46)$$

A prova do lema 3.1.3 é uma consequência direta do seguinte lema:

Lema 3.1.4. *As condições $\partial_t F^\alpha|_M = 0$ são satisfeitas, para uma solução das equações de Einstein reduzidas com as condições iniciais satisfazendo $F^\alpha|_M = 0$, se, e somente se, o conjunto de condições iniciais satisfazem as equações de vínculo.*

Demonstração. As equações de vínculo, sobre a hipersuperfície M_{t_0} , são

$$G^{\alpha 0} - T^{\alpha 0} = 0. \quad (3.47)$$

Pelo corolário 3.1.5 sabemos que

$$G^{\alpha 0} = G^{\alpha 0}_{(h)} + \frac{1}{2} (g^{\alpha\lambda} \partial_\lambda F^0 + g^{0\lambda} \partial_\lambda F^\alpha - g^{\alpha 0} \partial_\lambda F^\lambda). \quad (3.48)$$

Suponha que em $t = t_0$ tenhamos $F^\alpha|_{t=t_0} = 0$. Podemos afirmar também que $\partial_i F^\alpha|_{t=t_0} = 0$. Explicitando a expressão (3.48), tem-se

$$\begin{aligned} G^{\alpha 0} &= G_{(h)}^{\alpha 0} + \frac{1}{2} (g^{\alpha 0} \partial_0 F^0 + g^{00} \partial_0 F^\alpha - g^{\alpha 0} \partial_0 F^0) \\ G^{\alpha 0} &= G_{(h)}^{\alpha 0} + \frac{1}{2} g^{00} \partial_0 F^\alpha. \end{aligned}$$

Portanto,

$$G^{\alpha 0} - T^{\alpha 0} = \frac{1}{2} g^{00} \partial_0 F^\alpha.$$

Se as equações de vínculo (3.47) são satisfeitas, então, o lado esquerdo da última expressão se anula e consequentemente temos $\partial_0 F^\alpha = 0$, ou seja, $\partial_t F^\alpha|_M = 0$. $\square$

Vimos anteriormente que as identidades de Bianchi impõem sobre F^α um sistema linear, dado por (3.44); para que esse sistema seja satisfeito, é necessário que as equações (3.46) sejam satisfeitas. Note, no entanto, que se as equações de vínculo são satisfeitas, então, pelo lema anterior $\partial_\lambda F^\alpha = 0$ e o lado direito equação (3.42) se anula, e assim podemos concluir, que as equações de Einstein na sua forma completa, são satisfeitas.

Teorema da existência geométrica local. *Se o conjunto de dados iniciais $(M, \bar{g}, K)$ satisfaz a hipótese de existência do teorema 3.1.6 em algum gauge harmônico, assim como os vínculos, então, as soluções das equações de Einstein obtidas nesse gauge satisfazem as equações completas de Einstein.*

Uma questão que surge naturalmente do problema de Cauchy diz respeito à arbitrariedade da escolha dos dados iniciais para as funções N e β . Para uma determinada escolha de condições iniciais para N e β , temos como resultado um conjunto de condições iniciais para o nosso sistema de equações diferenciais parciais. Em outras palavras, teremos diferentes soluções para cada caso. A solução desse problema reside no fato de que o espaço-tempo é dotado de uma estrutura difeomorfa, ou seja, duas escolhas diferentes de condições iniciais para N e β geram dois espaços-tempo que são difeomorfos, sendo assim, equivalentes.

Teorema da unicidade geométrica. *Sejam (V_1, g_1) e (V_2, g_2) duas soluções, em $\tilde{E}_s(T)$ com $s > \frac{n}{2} + 2$, do problema de Cauchy $(M, \bar{g}, \bar{K})$ das equações de Einstein no vácuo. Então, existe uma isometria de (U_1, g_1) em (U_2, g_2) , onde U_1 e U_2 são vizinhanças da imersão M_0 de M , respectivamente em V_1 e V_2 .*

Para provarmos esse teorema, precisamos de dois lemas:

Lema 3.1.5. *Se $g \in \tilde{E}_s(V_T)$ com $s > n/2 + 1$ existe uma aplicação de onda f , difeomorfismo de uma faixa $W_\tau := M \times (-\tau, \tau)$ de uma vizinhança U de $M \times 0$ em $M \times R$, tal que f assume os seguintes valores iniciais*

$$f(\cdot, 0) = \text{Identidade}, \quad \partial_t f(\cdot, 0) = (a, b),$$

com $a > 0$ um escalar definido sobre M e b um vetor tangente à M .

Lema 3.1.6. *Seja f a única aplicação de onda correspondente ao conjunto de dados $g^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \partial_\beta f^{(\lambda)} = 0$, sendo um difeomorfismo entre as vizinhanças de M_0 em V . Seja $\underline{g} := f^*g$ a métrica no gauge de onda via “pullback” de g por f , sendo essa última a evolução do conjunto de dados $(\bar{g}, K)$. É possível escolher a e b tais que os valores iniciais da métrica no gauge de onda $\underline{g}(\cdot, 0)$ e $(\partial_{\underline{g}} \underline{g})(\cdot, 0)$ assumam valores específicos que dependem apenas dos dados geométricos $\bar{g}$ e $\bar{K}$.*

Demonstração. Utilizando os dois últimos lemas podemos construir dois mapas f_1 e f_2 tais que $f_1^*g_1$ e $f_2^*g_2$ são gauges de onda na mesma vizinhança, consequentemente na mesma faixa e satisfazem as mesmas equações de Einstein reduzidas. Eles coincidem em uma vizinhança de M_0 , uma vez que tomam os mesmos dados iniciais $g(\cdot, 0)$ e $\partial_t g(\cdot, 0)$, se eles pertencem a $\tilde{E}_s$, $s > n/2 + 1$. $\square$

Com esses dois últimos teoremas, podemos concluir que o problema de Cauchy para a relatividade geral é bem posto.

3.2 O problema de Cauchy na teoria escalar tensorial geométrica de Weyl

Na seção anterior, analisamos o problema de Cauchy na relatividade geral e vimos que o problema é bem definido e bem posto. Iremos, agora, investigar o problema de Cauchy na geometria de Weyl integrável [52].

Teoria escalar tensorial geométrica de Weyl

Uma variedade weylana é um triplete (M, g, σ) , onde M é uma variedade diferenciável, e g é a métrica semi-riemanniana definida sobre M , e σ um campo de 1-forma

sobre M . Estamos supondo que a variedade M é sem torção e a conexão ∇ obedece à seguinte condição de compatibilidade:

$$\nabla g = \sigma \otimes g, \quad (3.49)$$

onde ∇g denota um campo tensorial do tipo $(0, 3)$ definido por $\nabla g(X, Y, Z) = (\nabla_X g)(Y, Z)$, onde X, Y e Z são campos vetoriais definidos sobre M . Ademais, a variedade é dita Weyl integrável se o campo de 1-forma σ é uma forma exata, ou seja, $\sigma = d\phi$ sendo ϕ uma função escalar definida sobre M .

Em coordenadas locais a conexão de Weyl integrável é dada pela expressão

$$\Gamma_{bc}^a = \{_{bc}^a\} + \frac{1}{2} (\delta_b^a \phi_{,c} + \delta_c^a \phi_{,b} - g_{bc} \phi^{,a}). \quad (3.50)$$

Como visto no capítulo 1, a geometria de Weyl é fundamentada sobre um conjunto de transformações chamada de transformações de Weyl (1.15). A condição de compatibilidade (3.49) é invariante sob as transformações de Weyl (1.15); se a geometria é Weyl integrável, então, as transformações de Weyl assumem a forma simplificada:

$$\begin{cases} \bar{g} = e^{-f} g, \\ \bar{\phi} = \phi - f \end{cases} \quad (3.51)$$

onde f é uma função arbitrária sobre M .

A conexão ∇ dada por (3.50) é invariante sob as transformações de Weyl (3.51); consequentemente, todas as quantidades definidas a partir de ∇ , como por exemplo, geodésicas e o tensor de curvatura, também são quantidades invariantes por transformações de Weyl. A geometria de Weyl é construída com quantidades que são invariantes por (3.50), uma vez que essas transformações definem uma classe de equivalência entre as variedades weylianas. Em outras palavras, se ∇ é compatível no sentido (3.49) com (M, g, φ) , então, ∇ também será compatível com $(M, \bar{g}, \bar{\varphi})$.

Equações de campo

Consideremos a seguinte ação [24]:

$$S(\nabla, g, \phi) = \int_V e^{-\phi} (R(\nabla) + \omega \langle d\phi, d\phi \rangle) \mu_g, \quad (3.52)$$

onde g é uma métrica lorentziana, ϕ é um campo escalar, ω é uma constante de acoplamento e μ_g é uma forma diferencial de volume associada com g . Variando a ação (3.52) pelo método variacional de Palatini, onde a métrica e a conexão são consideradas independentes, obtém-se, de forma natural, a condição de compatibilidade entre a métrica, conexão e o campo escalar. Como consequência imediata, toda teoria física advinda de (3.52) estará ambientada na geometria de Weyl integrável. Vale salientar neste ponto que o segundo termo de (3.52) não é invariante sob as transformações de Weyl, portanto, espera-se que as equações de campo resultantes também carreguem uma dependência com o referencial adotado. Sendo assim, as soluções das equações de campo definem uma classe de equivalência na forma $\{(V, g, \phi)\}$. Uma vez dentro dessa classe de equivalência, quaisquer propriedades físicas descritas por tais soluções devem ser invariantes sob as transformações de Weyl.

Ambientando (1.47) na geometria de Weyl integrável, em d -dimensões, a ação assume a forma:

$$S(g, \phi) = \int_V e^{-\frac{d-2}{2}\phi} (R + \omega \langle d\phi, d\phi \rangle - V(\phi)) \mu_g, \quad (3.53)$$

onde incluímos um termo de potencial para contemplar cenários cosmológicos. Variando em relação à métrica e ao campo de Weyl, obtemos as seguintes equações de campo:

$$G_{\alpha\beta} = -\omega \nabla_\alpha \phi \nabla_\beta \phi + \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} (\omega \nabla_\sigma \phi \nabla^\sigma \phi - V(\phi)), \quad (3.54)$$

$$2\omega \nabla_\sigma \nabla^\sigma \phi + \frac{d+2}{2} \omega \nabla_\sigma \phi \nabla^\sigma \phi + \frac{d-2}{2} R + V'(\phi) - \frac{d-2}{2} V(\phi) = 0. \quad (3.55)$$

Tomando o traço de (3.54) e substituindo em (3.55), obtemos uma forma mais simplificada, dada por

$$G_{\alpha\beta} = -\omega \nabla_\alpha \phi \nabla_\beta \phi + \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} (\omega \nabla_\sigma \phi \nabla^\sigma \phi - V(\phi)), \quad (3.56)$$

$$g^{\sigma\mu} \nabla_\sigma \nabla_\mu \phi + \frac{1}{2\omega} (V'(\phi) + V(\phi)) = 0. \quad (3.57)$$

Como mencionado anteriormente, a solução dessas equações de campo definem uma classe de equivalência $\{(V, g, \phi)\}$. Uma variedade weyliana (V, g', ϕ') é equivalente a uma segunda $(V, e^{-f}g, \phi - f)$, obtida por uma transformação (3.53). Para (g', ϕ') , as equações de

campo assumem a forma

$$\begin{aligned}
 G_{\alpha\beta}(g', \phi') &= -\omega \nabla_\alpha(\phi' + f) \nabla_\beta(\phi' + f) + \frac{\omega}{2} g'_{\alpha\beta} g'^{\mu\nu} \nabla_\mu(\phi' + f) \nabla_\nu(\phi' + f) - \frac{1}{2} e^f g'_{\alpha\beta} V(\phi' + f), \\
 g'^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu(\phi' + f) + \frac{e^f}{2\omega} (V'(\phi' + f) + V(\phi' + f)) &= 0.
 \end{aligned} \tag{3.58}$$

Nas equações acima foi utilizado o fato de que o tensor de Einstein é invariante sob as transformações de Weyl, isto é, $G_{\alpha\beta}(e^f g', \phi' + f) = G_{\alpha\beta}(g', \phi')$ para uma função arbitrária f .

Diferentemente do caso da relatividade geral, como comentado anteriormente, nessa geometria estamos trabalhando com uma classe de equivalência $\{(V, g, \phi)\}$. Sendo assim, se o problema de Cauchy é bem posto em um determinado referencial para o conjunto de equações (3.56) e (3.57), então, ele também deverá ser para a classe $\{(V, g, \phi)\}$. Se um conjunto de dados iniciais $(M, \bar{g}, \bar{\phi}, K, \bar{\phi}_t)$ evolui para o espaço-tempo (V, g, ϕ) , então, esse espaço-tempo deve estar relacionado com um segundo espaço-tempo equivalente (V, g', ϕ') através das transformações de Weyl. Paralelamente a esse fato, o espaço-tempo (V, g', ϕ') deve ser o desenvolvimento do conjunto de dados iniciais $(M, \bar{g}', \bar{\phi}', K', \bar{\phi}'_t)$, sendo este último conjunto equivalente, do ponto de vista físico, ao primeiro. Posto em outras palavras, dados dois conjuntos de dados iniciais relacionados através das transformações de Weyl, se um tem como desenvolvimento um espaço-tempo que satisfaz (3.56) e (3.57), então o outro conjunto também terá um desenvolvimento num espaço-tempo onde as equações passam a ser o conjunto de equações (3.58) para uma função arbitrária f .

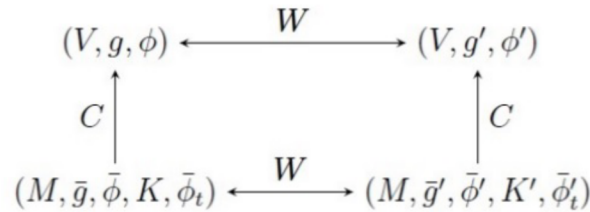


Figura 3.1: Problema de Cauchy na geometria de Weyl integrável

Seguindo os mesmos passos para a formulação do problema de Cauchy da relatividade geral, vamos considerar um espaço-tempo globalmente hiperbólico. Seja $V = M \times R$, onde V é um espaço-tempo de dimensão $(n + 1)$ e M uma hipersuperfície n dimensional. Sendo globalmente hiperbólico, o espaço-tempo admite a folheação, ou seja, podemos escolher a

seguinte base sobre a hipersuperfície

$$\begin{aligned} e_0 &= \partial_t - \beta, \\ e_i &= \partial_i, \quad i = 1, \dots, n, \end{aligned} \quad (3.59)$$

onde ∂_i denota um campo vetorial associado às coordenadas x^i . O campo vetorial β é o vetor deslocamento e e_0 é, por construção, ortogonal a cada $M \times \{t\}$. A base dual a (3.59) é dada por

$$\begin{aligned} \theta^0 &= dt \\ \theta^i &= dx^i - \beta^i dt, \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (3.60)$$

É importante salientar neste ponto que, uma vez que todas as métricas da classe de equivalência $[g, \phi]$ estão conformalmente relacionadas, elas produzem a mesma folheação, e sendo assim, o vetor β não depende da escolha do referencial.

Se escolhermos um referencial adaptado, assim como na relatividade geral, podemos escrever a métrica como

$$g = -N^2 \theta^0 \otimes \theta^0 + g_{ij} \theta^i \otimes \theta^j, \quad (3.61)$$

onde N é a função lapso.

Vimos anteriormente que o conjunto de condições iniciais estão relacionadas entre si por uma transformação de Weyl. No entanto, as transformações de Weyl não fornecem a lei de transformação de quantidades como por exemplo, a curvatura extrínseca K . Para descobrir a lei de transformação dessas quantidades vamos olhar para a imersão $\Sigma \hookrightarrow \Sigma \times \mathbb{R}$. Consideremos novamente as transformações de Weyl

$$g' = e^{-f} g, \quad (3.62)$$

$$\phi' = \phi - f. \quad (3.63)$$

Por (3.61), sabemos que $N^2 = g_{00}$, então, utilizando (3.62) obtemos diretamente que $N'^2 = e^{-f} N^2$, onde N e N' são as funções deslocamento nos frames (V, g, ϕ) e (V', g', ϕ') , respectivamente. Então, como consequência

$$n' = \frac{1}{N'} e_0 = e^{\frac{f}{2}} n, \quad (3.64)$$

onde n é o campo vetorial unitário ortogonal à hipersuperfície $M \times \{t\}$. Por definição, a curvatura extrínseca é

$$K'(X, Y) \equiv g'(\nabla_X Y, n'). \quad (3.65)$$

Por (3.64), a curvatura extrínseca transforma-se de acordo com a expressão

$$K' = e^{-\frac{f}{2}} K(X, Y). \quad (3.66)$$

Para a hipersuperfície inicial $M \cong M \times \{0\}$, com $h(\cdot) \doteq f(\cdot, 0) \in C^\infty(M)$, temos a seguinte lei de transformação

$$K' \big|_{t=0} = e^{-\frac{h}{2}} K \big|_{t=0}. \quad (3.67)$$

De maneira semelhante, a derivada do campo de Weyl na hipersuperfície $t = 0$ pode ser escrita como $\partial_t \phi'(\cdot, 0) = \partial_t \phi(\cdot, 0) - \partial_t f(\cdot, 0)$. Se definirmos $\eta(\cdot) = \partial_t f(\cdot, 0)$ como sendo uma função arbitrária suave sobre M , o conjunto de dados iniciais obedece às seguintes regras de transformações:

$$\begin{aligned} \bar{g}' &= e^{-h} \bar{g} & \bar{\phi}' &= \bar{\phi} - h \\ \bar{K}' &= e^{-\frac{h}{2}} \bar{K} & \bar{\phi}'_t &= \bar{\phi}_t - \eta \end{aligned} \quad (3.68)$$

Em termos das coordenadas locais, a curvatura extrínseca pode ser escrita como

$$K'_{ij} = -\frac{1}{2N'} \left[\partial_t g'_{ij} - (\nabla_i \beta_j + \nabla_j \beta_i) \right]. \quad (3.69)$$

Para um outro referencial qualquer, sabemos de (3.68) que $K(g, \phi) = e^{\frac{\phi}{2}} K'(g', 0)$ e $N' = e^{-\frac{\phi}{2}} N$. Então,

$$K_{ij}(g, \phi) = -\frac{1}{2N} \left[\partial_t g_{ij} - g_{ij} \partial_t \phi - e^\phi (\nabla_i \beta_j + \nabla_j \beta_i) \right]. \quad (3.70)$$

Se a hipersuperfície é a inicial, ou seja, $M = M \times \{0\}$, então a expressão (3.70) assume a forma

$$\bar{K}_{ij}(g, \phi) = -\frac{1}{2\bar{N}} \left[\partial_t g_{ij} \big|_{t=0} - \bar{g}_{ij} \bar{\phi}_t - e^{\bar{\phi}} (\bar{\nabla}_i \bar{\beta}_j + \bar{\nabla}_j \bar{\beta}_i) \right], \quad (3.71)$$

onde as quantidades com a barra são aquelas definidas em $t = 0$.

As equações de vínculo

Assim como na relatividade geral, o conjunto de equações (3.56) e (3.57) representam as equações de vínculo sobre os dados iniciais. Vamos definir o seguinte tensor:

$$T_{\alpha\beta} = -\omega \nabla_\alpha \phi \nabla_\beta \phi + \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} (\omega \nabla_\sigma \phi \nabla^\sigma \phi - V(\phi)). \quad (3.72)$$

Em termos do tensor $T_{\alpha\beta}$, as equações de campo podem ser escritas como

$$G_{\alpha\beta} = T_{\alpha\beta}, \quad (3.73)$$

$$g^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \phi \nabla_\beta \phi + \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} (\omega \nabla_\sigma \phi \nabla^\sigma \phi - V(\phi)) = 0. \quad (3.74)$$

As equações acima são satisfeitas em todo o espaço-tempo, e em particular, na folha inicial $M = M \times \{0\}$. Em outras palavras, para (3.73), devemos ter:

$$G(e_0, e_0) = T(e_0, e_0), \quad (3.75)$$

$$G(e_0, e_i) = T(e_0, e_i).$$

O conjunto (3.75) é a origem das equações de vínculo e veremos mais adiante que essas equações só dependem das condições iniciais. De (3.8) e (3.9), podemos obter as componentes do tensor de Einstein:

$$\begin{aligned} G(e_0, e_0) &= \frac{N'^2}{2} [(K_l'^l)^2 - K'^{ij} K'_{ij} + R'(\bar{g}')], \\ G(e_0, e_i) &= N' (\bar{\nabla}_i K_l'^l - \bar{\nabla}_j K_i'^j), \end{aligned}$$

onde $g' = e^{-\phi} g$ e $K' = e^{-\frac{1}{2}} K$. O símbolo $\bar{\nabla}$ denota a conexão de Weyl induzida em M e compatível com a estrutura weylana induzida $(M, [\bar{g}, \bar{\phi}])$.

Utilizando o conjunto de transformações de Weyl (3.68), teremos:

$$\begin{aligned} G(e_0, e_0) &= \frac{N^2}{2} [(K_l^l)^2 - K^{ij} K_{ij} + R(\bar{g}, \bar{\phi})], \\ G(e_0, e_i) &= N \bar{g}^{uj} (\bar{\nabla}_i K_{uj} - \bar{\nabla}_j K_{ui}) + \frac{N}{2} (\bar{\nabla}_j \phi K_i^j - \bar{\nabla}_i \phi K_l^l). \end{aligned} \quad (3.76)$$

As componentes do tensor $T_{\alpha\beta}$ no referencial adaptado serão dadas por:

$$T_{g,\phi} = \left[-\omega e_\alpha(\phi) e_\beta(\phi) + \frac{1}{2} \omega g_{\alpha\beta} g^{\mu\nu} e_\mu(\phi) e_\nu(\phi) - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} V(\phi) \right] \theta^\alpha \otimes \theta^\beta. \quad (3.77)$$

Para a hipersuperfície $M \times \{0\}$, temos:

$$\begin{aligned} T(e_0, e_0) &= \frac{N^2}{2} \left[-\omega \left(\pi^2 + |\bar{\nabla} \phi|_{\bar{g}}^2 \right) + V(\phi) \right], \\ T(e_i, e_j) &= -\omega N \pi \bar{\nabla}_i \phi. \end{aligned} \quad (3.78)$$

onde $\pi = \frac{1}{N} e_0(\phi)$, $\bar{g}$ denota a métrica induzida sobre $M \times \{t\}$ e $\bar{\nabla}$ denota a conexão de Weyl induzida.

Substituindo (3.76) e (3.78) em (3.75) obtemos as seguintes equações de vínculo:

$$(K_l^l)^2 - K^{ij} K_{ij} + R = -\omega \left(\pi^2 + |\bar{\nabla} \phi|_{\bar{g}}^2 \right) + V(\phi), \quad (3.79)$$

$$\bar{g}^{uj} (\bar{\nabla}_i K_{uj} - \bar{\nabla}_j K_{ui}) + \frac{1}{2} (\bar{\nabla}_j \phi K_i^j - \bar{\nabla}_i \phi K_l^l) = -\omega \pi \bar{\nabla}_i \phi. \quad (3.80)$$

É importante notarmos que as equações (3.79) e (3.80) dependem apenas das condições iniciais, como comentado inicialmente. Assim como foi analisado o comportamento da curvatura extrínseca sob as transformações de Weyl, podemos analisar como π se comporta sob as transformações de Weyl. Definimos anteriormente que

$$\pi = \frac{1}{N} e_0(\phi), \quad (3.81)$$

e assim vemos que π guarda uma relação direta com a função lapse N , e esta função depende do referencial, é de se esperar que π também dependa.

Vamos aplicar a transformação geral

$$\begin{aligned} g^* &= e^{-f} g, \\ \phi^* &= \phi - f, \end{aligned}$$

em (3.79) e (3.80):

$$\begin{aligned} (K_l^{*l})^2 - K^{*ij} K_{ij}^* + R(\bar{g}^*, \bar{\phi}^*) &= -\omega \left\{ \left| \frac{e^{\frac{f(\cdot, 0)}{2}}}{N} e_0(\bar{\phi}^* + f) \right|_{t=0}^2 + |\bar{\nabla}(\bar{\phi}^* + f(\cdot, 0))|_{\bar{g}^*}^2 \right\} + e^{f(\cdot, 0)} V(\phi^* + f)|_{t=0} \\ \bar{g}^{*uj} (\bar{\nabla}_i K_{uj}^* - \bar{\nabla}_j K_{ui}^*) + \frac{1}{2} (\bar{\nabla}_j \bar{\phi}^* K_i^{*j} - \bar{\nabla}_i \bar{\phi}^* K_l^{*l}) &= -\omega \left(\frac{e^{\frac{f(\cdot, 0)}{2}}}{N} e_0(\bar{\phi}^* + f)|_{t=0} \bar{\nabla}_i(\bar{\phi}^* + f(\cdot, 0)) \right). \end{aligned} \quad (3.82)$$

A partir das expressões acima podemos concluir que para um referencial arbitrário a função π se transforma segundo a equação:

$$\pi^* = \frac{e^{\frac{f}{2}}}{N} e_0(\phi^* + f) = \frac{e^{\frac{f}{2}}}{N} e_0(\phi - f + f) = e^{\frac{f}{2}} \pi. \quad (3.83)$$

Então, de maneira geral, as equações de vínculo podem ser escritas como

$$\begin{aligned} (K_l^{*l})^2 - K^{*ij} K_{ij}^* + R(\bar{g}^*, \bar{\phi}^*) &= -\omega \left[\pi^{*2} + |\bar{\nabla}(\bar{\phi}^* + f(\cdot, 0))|_{\bar{g}^*}^2 \right] + e^{f(\cdot, 0)} V(\phi^* + f)|_{t=0}, \\ \bar{g}^{*uj} (\bar{\nabla}_i K_{uj}^* - \bar{\nabla}_j K_{ui}^*) + \frac{1}{2} (\bar{\nabla}_j \bar{\phi}^* K_i^{*j} - \bar{\nabla}_i \bar{\phi}^* K_l^{*l}) &= -\omega \pi^* \bar{\nabla}_i(\bar{\phi}^* + f(\cdot, 0)). \end{aligned} \quad (3.84)$$

Com a inclusão da função π , além da condição $\partial_t \bar{g}|_{t=0}$, considera-se como parte do conjunto de condições iniciais a curvatura extrínseca K , π e $\bar{\phi}_t$. Portanto, dado o conjunto $(\bar{g}, \bar{\phi}, K, \pi)$ temos a possibilidade de duas escolhas de gauge: uma escolha para as funções β e N e outra para os valores de f e $\partial_t f|_{t=0}$.

Formulação do problema de Cauchy

Munidos de todo aparato geométrico, podemos analisar o problema da evolução do conjunto de dados iniciais para a teoria de Weyl integrável. Seguindo a mesma formulação da relatividade geral, iremos analisar o conjunto de equações (3.54) e (3.55) juntamente com as equações de vínculo (3.79) e (3.80).

Vimos na seção anterior que as identidades de Bianchi desempenham um papel fundamental na formulação do problema de Cauchy, uma vez que possibilitam mostrar que a condição harmônica $F^\alpha = g^{\lambda\mu} \Gamma_{\lambda\mu}^\alpha = 0$ obedece ao sistema hiperbólico linear (3.44).

Tendo isto em mente, precisamos de uma identidade análoga as identidades de Bianchi para a geometria de Weyl, e para tal, pode-se mostrar que a identidade de Bianchi contraída é válida nessa nova geometria. Dada a estrutura weylana $\{(V, g, \phi)\}$, para o ele-

mento riemanniano na classe $(V, e^{-\phi}g, 0)$, na sua forma contraída, as identidades de Bianchi assumem a forma

$$e^{\phi}g^{\mu\nu}\nabla_{\mu}G_{\nu\sigma}=0, \quad (3.85)$$

onde $G_{\nu\sigma}$ é o tensor de Einstein riemanniano associado com a métrica conforme $e^{-\phi}g$. Como visto anteriormente, o tensor de Einstein é invariante sob as transformações de Weyl. Assim, $G_{\nu\sigma}$ representa o tensor de Einstein para todos os elementos da classe $(V, [g, \phi])$. De modo que temos:

$$g^{\mu\nu}\nabla_{\mu}G_{\nu\sigma}(g, \phi) = e^{-\phi} \left(e^{\phi}g^{\mu\nu}\nabla_{\mu}G_{\nu\sigma}(e^{-\phi}g, 0) \right) = 0.$$

Então,

$$g^{\mu\nu}\nabla_{\mu}G_{\nu\sigma}(g, \phi) = 0,$$

sendo essa identidade válida para todos os elementos da classe $(V, [g, \phi])$.

Podemos reescrever a equação de campo (3.56) em termos do tensor de curvatura. Tomando-se o traço, obtemos:

$$R = -\omega g^{\mu\nu}\nabla_{\mu}\phi\nabla_{\nu}\phi + \frac{n+1}{n-1}V(\phi). \quad (3.86)$$

Substituindo (3.68) em (3.56), temos:

$$R_{\alpha\beta} = -\omega\nabla_{\alpha}\phi\nabla_{\beta}\phi + \frac{1}{n-1}g_{\alpha\beta}V(\phi).$$

De modo que o sistema de equações é dada por

$$\begin{aligned} R_{\alpha\beta} &= -\omega\nabla_{\alpha}\phi\nabla_{\beta}\phi + \frac{1}{n-1}g_{\alpha\beta}V(\phi), \\ g^{\alpha\beta}\nabla_{\alpha}\nabla_{\beta}\phi + \frac{1}{2\omega}(V'(\phi) + V(\phi)) &= 0. \end{aligned} \quad (3.87)$$

Ademais, o tensor de Ricci pode ser escrito ainda em termos das quantidades riemannianas:

$$R_{\alpha\beta} = \tilde{R}_{\alpha\beta} + \frac{n-1}{2}\tilde{\nabla}_{\alpha}\tilde{\nabla}_{\beta}\phi + \frac{n-1}{4}\tilde{\nabla}_{\alpha}\phi\tilde{\nabla}_{\beta}\phi + \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}\left(g^{\mu\nu}\tilde{\nabla}_{\mu}\tilde{\nabla}_{\nu}\phi - \frac{n-1}{2}\tilde{\nabla}_{\mu}\phi\tilde{\nabla}^{\mu}\phi\right), \quad (3.88)$$

onde os termos com “ $\sim$ ” denotam quantidades riemannianas. Podemos mostrar ainda que

$$g^{\mu\nu}\nabla_{\mu}\nabla_{\nu}\phi = g^{\mu\nu}\tilde{\nabla}_{\mu}\tilde{\nabla}_{\nu}\phi - \frac{n-1}{2}\tilde{\nabla}_{\mu}\phi\tilde{\nabla}^{\mu}\phi. \quad (3.89)$$

Sendo assim, o sistema (3.87) equivale a

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{\alpha\beta} + \frac{n-1}{2}\tilde{\nabla}_\alpha\tilde{\nabla}_\beta\phi + \frac{n-1}{4}\tilde{\nabla}_\alpha\phi\tilde{\nabla}_\beta\phi - \frac{1}{4\omega}g_{\alpha\beta}(V'(\phi) + V(\phi)) &= -\omega\tilde{\nabla}_\alpha\phi\tilde{\nabla}_\beta\phi + \frac{1}{n-1}g_{\alpha\beta}V(\phi), \\ g^{\mu\nu}\tilde{\nabla}_\mu\tilde{\nabla}_\nu\phi - \frac{n-1}{2}\tilde{\nabla}_\mu\phi\tilde{\nabla}^\mu\phi + \frac{1}{2\omega}(V'(\phi) + V(\phi)) &= 0. \end{aligned} \quad (3.90)$$

Analisando a equação para o campo ϕ , vemos claramente que este é um sistema quase-linear hiperbólico e, do ponto de vista das equações diferenciais parciais, não temos nenhum problema em lidar com este tipo de sistema. Em contrapartida, na equação para a métrica temos a presença do termo $\tilde{\nabla}_\alpha\tilde{\nabla}_\beta\phi$, que é um termo indesejável e pode nos trazer problemas.

Tendo como base a formulação do problema de evolução na relatividade geral, iremos adotar condições de gauge mais gerais, uma vez que estas precisam ser invariantes sob as transformações de gauge.

Considere a métrica, cuja decomposição pode ser feita como

$$\hat{e} \doteq dt \otimes dt + e,$$

onde e é uma métrica riemanniana sobre M . Vamos definir um campo vetorial no espaço-tempo, cuja forma é

$$F^\lambda \doteq g^{\alpha\beta} \left(\Gamma_{\alpha\beta}^\lambda - \hat{\Gamma}_{\alpha\beta}^\lambda \right), \quad (3.91)$$

onde $\Gamma_{\alpha\beta}^\lambda$ são as componentes da conexão de Weyl associada com o espaço-tempo weyliano (g, ϕ) e $\hat{\Gamma}_{\alpha\beta}^\lambda$ são as componentes da conexão riemanniana associada à métrica $\hat{e}$. Analisando a expressão (3.91) vemos claramente que F é um campo vetorial, pois é a diferença entre duas conexões. Podemos escrever F como

$$F^\lambda = \tilde{F}^\lambda + g^{\alpha\beta} \left(\Gamma_{\alpha\beta}^\lambda - \tilde{\Gamma}_{\alpha\beta}^\lambda \right),$$

onde $\tilde{F}^\lambda = g^{\alpha\beta} \left(\tilde{\Gamma}_{\alpha\beta}^\lambda - \hat{\Gamma}_{\alpha\beta}^\lambda \right)$. Além disso, utilizando a definição da conexão de Weyl podemos escrever:

$$g^{\alpha\beta} \left(\Gamma_{\alpha\beta}^\lambda - \tilde{\Gamma}_{\alpha\beta}^\lambda \right) = \frac{n-1}{2}\tilde{\nabla}^\lambda\phi.$$

Portanto,

$$F^\lambda = \tilde{F}^\lambda + \frac{n-1}{2}\tilde{\nabla}^\lambda\phi. \quad (3.92)$$

Vamos relembrar algumas expressões riemannianas que serão utilizadas de agora em diante

$$\tilde{R}_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta}^{(\hat{e})} + \frac{1}{2} (g_{\alpha\lambda} D_\beta \tilde{F}^\lambda + g_{\beta\lambda} D_\alpha \tilde{F}^\lambda), \quad (3.93)$$

$$R_{\alpha\beta}^{(\hat{e})} = -\frac{1}{2} g^{\lambda\mu} D_\lambda D_\mu g_{\alpha\beta} + f_{\alpha\beta}(g, Dg), \quad (3.94)$$

onde D representa a derivada covariante com relação à métrica $\hat{e}$ e $f_{\alpha\beta}$ são funções que dependem da métrica g e Dg . Utilizando essas expressões juntamente com (3.92), obtemos

$$\tilde{R}_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta}^{(\hat{e})} + \frac{1}{2} (g_{\alpha\lambda} D_\beta F^\lambda) - \frac{n-1}{4} (g_{\alpha\lambda} D_\beta g^{\lambda\mu} D_\mu \phi + g_{\beta\lambda} D_\alpha g^{\lambda\mu} D_\mu \phi) - \frac{n-1}{2} D_\alpha D_\beta \phi. \quad (3.95)$$

É importante ressaltar neste ponto que a escolha de F é bastante apropriada, uma vez que o último termo de (3.95) irá cancelar o termo problemático que apareceu na equação de campo (3.90). Utilizando a decomposição do tensor de Ricci (3.95) em (3.90), e escrevendo em termos das derivadas covariantes em relação à métrica $\hat{e}$, obtemos o seguinte sistema de equações

$$\bar{R}_{\alpha\beta} - \rho_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} (g_{\alpha\lambda} D_\beta F^\lambda) = 0, \quad (3.96)$$

$$g^{\alpha\beta} D_\alpha D_\beta \phi - \tilde{F}^\sigma D_\sigma \phi - \frac{n-1}{2} D_\sigma \phi D^\sigma \phi + \frac{1}{2\omega} (V'(\phi) + V(\phi)) = 0, \quad (3.97)$$

onde

$$\begin{aligned} \bar{R}_{\alpha\beta} &\doteq R_{\alpha\beta}^{(\hat{e})} - \frac{n-1}{4} (g_{\alpha\lambda} D_\beta g^{\lambda\mu} D_\mu \phi + g_{\beta\lambda} D_\alpha g^{\lambda\mu} D_\mu \phi) - \frac{n-1}{2} \Delta \tilde{\Gamma}_{\alpha\beta}^\sigma D_\sigma \phi + \frac{n-1}{4} D_\alpha \phi D_\beta \phi \\ &\quad - \frac{1}{4\omega} g_{\alpha\beta} (V'(\phi) + V(\phi)), \\ \rho_{\alpha\beta} &\doteq -\omega D_\alpha \phi D_\beta \phi + \frac{1}{n-1} g_{\alpha\beta} V(\phi), \\ \Delta \tilde{\Gamma}_{\alpha\beta}^\sigma &\doteq \tilde{\Gamma}_{\alpha\beta}^\sigma - \hat{\Gamma}_{\alpha\beta}^\sigma. \end{aligned}$$

O sistema reduzido tem a forma

$$\bar{R}_{\alpha\beta} - \rho_{\alpha\beta} = 0, \quad (3.98)$$

$$g^{\alpha\beta} D_\alpha D_\beta \phi - \tilde{F}^\sigma D_\sigma \phi - \frac{n-1}{2} D_\sigma \phi D^\sigma \phi + \frac{1}{2\omega} (V'(\phi) + V(\phi)) = 0. \quad (3.99)$$

Utilizando a expressão para $R_{\alpha\beta}^{(\hat{e})}$ em (3.98), vemos que (3.98) e (3.99) formam um sistema de equações hiperbólicas quase-lineares para (g, ϕ) , ou seja, dado o conjunto de

condições iniciais, esse sistema tem uma única solução em $M \times [0, T)$ para algum $T > 0$.

Sabemos que $T_{\alpha\beta} = \rho_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}g^{\mu\nu}\rho_{\mu\nu}$, então, dada uma solução (g, ϕ) para (3.98) e (3.99), o tensor de Einstein satisfaz a seguinte identidade

$$G_{\alpha\beta} - T_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(g_{\alpha\lambda}D_{\beta}F^{\lambda} - g_{\beta\lambda}D_{\alpha}F^{\lambda} - g_{\alpha\beta}D_{\lambda}F^{\lambda}). \quad (3.100)$$

As identidades de Bianchi contraídas para a conexão de Weyl juntamente com a equação (3.99) implicam que a divergência de (3.100) é igual a zero. Aplicando a divergência e rearranjando a equação obtemos uma identidade para o tensor F . Podemos mostrar que F obedece o seguinte sistema linear homogêneo:

$$g^{\alpha\mu}D_{\alpha}D_{\mu}F^{\lambda} + A_{\nu}^{\alpha\lambda}(g, \phi, D\phi)D_{\alpha}F^{\lambda} - g_{\alpha\beta}D_{\lambda}F^{\lambda} + g^{\beta\lambda}R_{\mu\beta}(\hat{e})F^{\mu} = 0, \quad (3.101)$$

onde $A_{\nu}^{\alpha\lambda}$ é um tensor do tipo-(2,1) que depende de $(g, \phi, Dg, D\phi)$. A unicidade e existência desse sistema nos é garantido, ou seja, se $F(\cdot, 0) = 0$ e $\partial_t F(\cdot, 0) = 0$, então $F \equiv 0$. Então, se o conjunto de dados iniciais para o sistema reduzido (3.98) e (3.99) satisfazem essas condições, então a solução do sistema reduzido também será solução das equações na sua forma completa (3.96) e (3.97).

Lema 3.2.1. *Seja (g, ϕ) solução do sistema de equações na sua forma reduzida (3.98) e (3.99). Além disso, suponha que os dados iniciais satisfaçam $F(\cdot, 0) = 0$. Então, $\partial_t F(\cdot, 0) = 0$ se e somente se, as equações de vínculo (3.79) e (3.80) são satisfeitas.*

Demonstração. O tensor de Einstein pode ser escrito como

$$G_{\alpha\beta} = \bar{G}_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}(g_{\alpha\lambda}D_{\beta}F^{\lambda} + g_{\beta\lambda}D_{\alpha}F^{\lambda} - g_{\alpha\beta}D_{\lambda}F^{\lambda}),$$

onde $\bar{G}_{\alpha\beta} = \bar{R}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}(g^{\mu\nu}\bar{R}_{\mu\nu})$. Note que, se $F|_{t=0} = 0$, teremos $D_i F|_{t=0} = 0$. De modo que, para a hipersuperfície inicial $t = 0$, obtemos:

$$G_{\alpha 0}|_{t=0} = \bar{G}_{\alpha 0}|_{t=0} + \frac{1}{2}(g_{\alpha i}D_0 F^i - N^2 D_{\alpha} F^0)|_{t=0},$$

onde utilizamos $g_{00} = -N^2$. Então,

$$(G_{\alpha 0} - T_{\alpha 0})|_{t=0} = (\bar{G}_{\alpha 0} - T_{\alpha 0})|_{t=0} + \frac{1}{2}(g_{\alpha i}D_0 F^i - N^2 D_{\alpha} F^0)|_{t=0}.$$

Se (g, ϕ) é solução do sistema reduzido, então, o primeiro termo entre parênteses é zero, e

ficamos com

$$(G_{\alpha 0} - T_{\alpha 0})|_{t=0} = \frac{1}{2}(g_{\alpha i} D_0 F^i - N^2 D_\alpha F^0)|_{t=0}.$$

As equações de vínculo serão satisfeitas se e somente se

$$(g_{\alpha i} D_0 F^i - N^2 D_\alpha F^0)|_{t=0} = 0.$$

Fazendo $\alpha = 0$, então, a expressão anterior resulta diretamente em $\partial_t F^0 = 0$. Já para $\alpha = j$, teremos $\partial_t F^j = 0$. $\square$

O conjunto de condições iniciais para o sistema (3.98) e (3.99) é $(M, \bar{g}, \bar{\phi}, K, \pi)$. No entanto, não temos nenhuma condição imposta para (g, ϕ) . Sabemos que $\bar{g}$ e $\bar{\phi}$ determinam $g_{ij}|_{t=0}$ e $\phi|_{t=0}$. Além disso, uma vez fixadas as funções lapso e deslocamento, K e β , respectivamente, pode-se determinar a condição inicial $\partial_t g_{ij}|_{t=0}$ e $\partial_t \phi|_{t=0}$. Podemos, portanto, escolher $g_{00}|_{t=0} = -1$ e $g_{0i}|_{t=0} = 0$ juntamente com $N|_{t=0} = 1$ e $\beta|_{t=0} = 0$. Contudo, precisamos dos dados $\partial_t g_{00}|_{t=0}$ e $\partial_t g_{0i}|_{t=0}$. Essas duas condições remanescentes virão das condições de gauge, assim como na relatividade geral. Note que:

$$F^\lambda|_{t=0} = \left(g^{\alpha\beta} \tilde{\Gamma}_{\alpha\beta}^\lambda + \frac{n-1}{2} \tilde{\nabla}^\lambda \phi - g^{\alpha\beta} \hat{\Gamma}_{\alpha\beta}^\lambda \right) \Big|_{t=0}. \quad (3.102)$$

Então, tendo em mãos

$$\begin{aligned} g^{\alpha\beta} \tilde{\Gamma}_{\alpha\beta}^0|_{t=0} &= \frac{1}{2} \partial_t g_{00}|_{t=0} - \bar{g}^{ij} \tilde{K}_{ij}, \\ g^{\alpha\beta} \tilde{\Gamma}_{\alpha\beta}^i|_{t=0} &= -\bar{g}^{ij} \partial_t g_{j0}|_{t=0} + \bar{g}^{kl} \tilde{\Gamma}_{kl}^i, \end{aligned}$$

podemos resolver as equações algébricas $F^\lambda|_{t=0} = 0$ para $\partial_t g_{00}|_{t=0}$ e $\partial_t g_{0i}|_{t=0}$. Com essas escolhas para $\partial_t g_{00}|_{t=0}$ e $\partial_t g_{0i}|_{t=0}$ completamos o conjunto de dados iniciais para o sistema reduzido. Da teoria das equações diferenciais parciais hiperbólicas, podemos garantir a existência e unicidade para esse sistema, bem como a sua regularidade.

Teorema 3.2.1. *Dado o conjunto de dados iniciais $(M, \bar{g}, \bar{\phi}, K, \pi)$ que satisfazem as equações de vínculo (3.79) e (3.80), então, existe um desenvolvimento de Cauchy desse conjunto em um espaço-tempo (V, g, ϕ) que satisfaz as equações de campo (3.90).*

Como discutido inicialmente, diferentemente do problema de Cauchy na relatividade geral, precisamos mostrar que o problema de Cauchy formulado previamente é invariante sob as transformações de Weyl. Por invariância entende-se que efetuando as transformações

de Weyl sobre um espaço-tempo weyliano com o problema de Cauchy bem posto, então, o espaço-tempo descrito nesse outro frame é resultado da evolução do conjunto de dados iniciais equivalentes à $(\bar{g}, \bar{\phi}, K, \pi)$. Reciprocamente, dado um conjunto de dados iniciais $(\bar{g}, \bar{\phi}, K, \pi)$, então, esse conjunto admite um desenvolvimento em um espaço-tempo equivalente ao gerado por $(\bar{g}, \bar{\phi}, K, \pi)$.

Considere o conjunto de dados iniciais $(\bar{g}, \bar{\phi}, K, \pi)$ que satisfazem as equações de vínculo (3.79) e (3.80) para o sistema (3.56) e (3.57). Pelo teorema 3.2.1, sabemos que esse conjunto de dados iniciais admitem a evolução em um espaço-tempo (V, g, ϕ) satisfazendo as equações de campo (3.56) e (3.57). Então, vamos fazer uma transformação de Weyl na forma

$$g' = e^{-f} g, \quad \phi' = \phi - f. \quad (3.103)$$

No entanto, sabemos que (g', ϕ') satisfaz o sistema de equações (3.58). Ademais, se a condição de gauge $F = 0$ é satisfeita em um referencial, então, ela será satisfeita para qualquer referencial equivalente uma vez que esta condição é invariante sob as transformações de Weyl. Utilizando o mesmo procedimento feito para transformar o sistema de equações (3.56) e (3.57) em (3.58), é possível ver que o sistema (3.58) é equivalente ao conjunto de equações reduzidas advindo da condição $F(g', \phi') = 0$. Consequentemente, (g', ϕ') será solução de um sistema de equações não-lineares hiperbólicas para o espaço-tempo cuja métrica é g' , análogo ao sistema (3.98) e (3.99). Além disso, o conjunto de dados iniciais satisfaz as equações de vínculo (3.84). Isto mostra que, considerando as transformações de Weyl sobre os dados $(\bar{g}, \bar{\phi}, K, \pi)$ dadas por

$$\bar{g}' = e^{-h} \bar{g}, \quad \bar{\phi}' = \bar{\phi} - h, \quad K' = e^{-\frac{h}{2}} K, \quad \pi' = e^{\frac{h}{2}} \pi, \quad (3.104)$$

e fazendo $h \doteq f(\cdot, 0)$, então (V, g', ϕ') é resultado da evolução do conjunto $(\bar{g}', \bar{\phi}', K', \pi')$, que é equivalente a $(\bar{g}, \bar{\phi}, K, \pi)$.

De maneira semelhante, se fizermos uma transformação de Weyl nos dados iniciais $(\bar{g}, \bar{\phi}, K, \pi)$ na forma (3.104), então, o sistema transformado irá satisfazer as equações de vínculo (3.84) se considerarmos $f|_{t=0} = h$. Com isso em mente, se escolhermos uma função f definida no espaço-tempo satisfazendo $f|_{t=0} = h$, então, ao aplicarmos as transformações de Weyl sobre o espaço-tempo (g, ϕ) na forma (3.103), veremos que (g', ϕ') satisfaz, em M_0 , as condições iniciais $(\bar{g}', \bar{\phi}', K', \pi')$. Concluimos, então, que qualquer conjunto de dados iniciais equivalente à $(\bar{g}, \bar{\phi}, K, \pi)$ tem um desenvolvimento num espaço-tempo equivalente ao espaço (V, g, ϕ) .

Teorema 3.2.2. *Dado um conjunto de dados iniciais $(M, \bar{g}, \bar{\phi}, K, \pi)$ satisfazendo as equações de vínculo (3.79) e (3.80), então, o problema de Cauchy é bem posto para a geometria de Weyl integrável.*

Unicidade geométrica

Como visto na seção 3.1 a unicidade geométrica na relatividade geral está relacionada com a arbitrariedade da escolha dos dados iniciais para as funções N e β . Além disso, vimos também que a solução desse problema reside no fato de que o espaço-tempo é dotado com uma estrutura difeomorfa. Em outras palavras, duas escolhas diferentes de condições iniciais para N e β geram dois espaços-tempo que são difeomorfos, sendo assim, equivalentes.

No caso da estrutura weylana, além dessa arbitrariedade de escolha, precisamos levar em conta ainda as transformações de Weyl. Iremos mostrar nessa seção que o procedimento descrito no caso da relatividade continua sendo válido na teoria escalar tensorial geométrica de Weyl.

Neste cenário, dadas duas soluções (V_1, g_1, ϕ_1) e (V_2, g_2, ϕ_2) para o problema de Cauchy para o mesmo conjunto de dados $(M, \bar{g}, \bar{\phi}, K, \pi)$, vamos construir um difeomorfismo da vizinhança U_1 de $M_0 \subset V_1$ em uma vizinhança U_2 de $M_0 \subset V_2$. Para tal propósito, considere os seguintes lemas

Lema 3.2.2. *Suponha que $(M \times \mathbb{R}, g)$ é uma variedade globalmente hiperbólica com g suave. Existe uma aplicação de onda f , que é um difeomorfismo da faixa $W_\tau \doteq M \times (-\tau, \tau)$ na vizinhança de $M \times \{0\}$ em $M \times \mathbb{R}$, tal que f assume os seguintes valores iniciais*

$$f(\cdot, 0) = \text{Identidade}, \quad \partial_t f(\cdot, 0) = (a, b), \quad (3.105)$$

onde $a > 0$ é um escalar em M e b um vetor tangente à M .

Lema 3.2.3. *Seja f a única aplicação de onda correspondente aos dados (3.105). Tal aplicação define um difeomorfismo entre as vizinhanças de M_0 em V . Sejam $\underline{g} \doteq f^*g$ e $\underline{\phi} \doteq f^*\phi$ a métrica e campo escalar pullback por f de uma métrica lorentziana g e um campo escalar ϕ , resultados da evolução do conjunto de dados iniciais $(\bar{g}, \bar{\phi}, K, \pi)$. Então, podemos escolher a e b tais que os valores da métrica $\underline{g}$ e do campo escalar $\underline{\phi}$ e das primeiras derivadas temporais assumam valores predefinidos e que tenham uma dependência apenas dos dados geométricos $(\bar{g}, \bar{\phi}, K, \pi)$.*

Teorema da unicidade geométrica. *Sejam $(V_1, [g_1, \phi_1])$ e $(V_2, [g_2, \phi_2])$ duas soluções do problema de Cauchy para a teoria escalar-tensorial geométrica no vácuo satisfazendo os dados iniciais $(M, \bar{g}, \bar{\phi}, \bar{K}, \bar{\pi})$. Existe uma isometria de $(U_1, [g_1, \phi_1])$ em $(U_2, [g_2, \phi_2])$, onde U_1 e U_2 são vizinhanças de M_0 , respectivamente em V_1 e V_2 .*

Para demonstração do teorema vide [52]. Com esse teorema podemos concluir que o problema de Cauchy para a teoria escalar-tensorial geométrica sem matéria é bem posto.

3.3 O problema de Cauchy e as ondas gravitacionais

O problema de Cauchy, quando foi formulado, tinha como objetivo analisar a existência e unicidade de soluções das equações de Einstein, sem levar em conta o comportamento global da mesma [41]. No entanto, sendo a representação matemática de uma teoria física, esse mesmo problema levantou questionamentos ligados à causalidade, bem como à velocidade de propagação do campo gravitacional [40].

O problema da velocidade de propagação do campo gravitacional já havia sido abordado por Einstein em 1916 [42]. Considerando a situação em que a métrica é Minkowski com uma pequena perturbação, o método seguido por Einstein foi o da linearização das equações de campo. Através de uma escolha de coordenadas, é possível concluir que o campo gravitacional se propaga com a velocidade da luz. Através desse tratamento, as equações de Einstein formam um sistema de equações de onda e torna-se necessária a análise do mesmo à luz do problema de valor inicial. Sob essa perspectiva, existe uma relação inerente entre o problema de valor inicial e a velocidade de propagação do campo gravitacional.

Como visto anteriormente, o problema de Cauchy é bem posto na teoria escalar tensorial geométrica. Sendo assim, é de se esperar a existência de ondas gravitacionais também nesse novo cenário. Afim de investigar essa questão, vamos analisar a linearização das equações de campo:

$$G_{\mu\nu} = -\kappa^* T_{\mu\nu} - \omega \phi_{,\mu} \phi_{,\nu} + \frac{\omega}{2} g_{\mu\nu} \phi^{,\alpha} \phi_{,\alpha}, \quad (3.106)$$

$$\square \phi + \varphi_{,\alpha} \phi^{,\alpha} = 0. \quad (3.107)$$

Ondas gravitacionais na teoria escalar tensorial

Seja a métrica do espaço-tempo a métrica de Minskowski com uma perturbação e suponha que o campo de Weyl ϕ também seja proporcional à essa perturbação, ou seja,

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} &= \eta_{\mu\nu} + \varepsilon h_{\mu\nu}, \\ \phi_\mu &= \varepsilon \phi_\mu. \end{aligned} \quad (3.108)$$

Com essa hipótese, a conexão de Weyl (3.50), e desprezando os termos de ordem superior a ε , obtemos:

$$\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha = \frac{\varepsilon}{2} \eta^{\alpha\lambda} (\partial_\beta h_{\lambda\gamma} + \partial_\gamma h_{\lambda\beta} - \partial_\lambda h_{\beta\gamma}) - \frac{\varepsilon}{2} (\delta_\beta^\alpha \phi_{,\gamma} + \delta_\gamma^\alpha \phi_{,\beta} - \eta_{\beta\gamma} \phi^{,\alpha}). \quad (3.109)$$

Já, o tensor de Ricci e o escalar de curvatura assumem as seguintes formas:

$$R_{\alpha\beta} = \frac{\varepsilon}{2} (\partial_\beta \partial^\lambda h_{\lambda\alpha} + \partial_\alpha \partial^\lambda h_{\lambda\beta} - \partial_\alpha \partial_\beta h^\lambda_\lambda - \square h_{\alpha\beta}) + \frac{\varepsilon}{2} (2\phi_{,\alpha,\beta} + \eta_{\alpha\beta} \phi^{,\lambda}_{,\lambda}), \quad (3.110)$$

$$R = \varepsilon (\partial_\beta \partial_\lambda h^{\lambda\beta} - \square h^\lambda_\lambda + 3\phi^{,\alpha}_{,\alpha}). \quad (3.111)$$

Considere a seguinte definição:

$$\psi_{\alpha\beta} = h_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \eta_{\alpha\beta} h. \quad (3.112)$$

Em termos dessa nova métrica, as quantidades (3.110) e (3.111) podem ser reescritas como:

$$R_{\alpha\beta} = \frac{\varepsilon}{2} (\partial_\beta \partial^\lambda \psi_{\lambda\alpha} + \partial_\alpha \partial^\lambda \psi_{\lambda\beta} - \square h_{\alpha\beta}) + \frac{\varepsilon}{2} (2\phi_{,\alpha,\beta} + \eta_{\alpha\beta} \phi^{,\lambda}_{,\lambda}), \quad (3.113)$$

$$R = \varepsilon \left(\partial_\beta \partial_\lambda \psi^{\lambda\beta} - \frac{1}{2} \eta^{\lambda\beta} \partial_\beta \partial_\lambda \psi + \square \psi + 3\phi^{,\alpha}_{,\alpha} \right). \quad (3.114)$$

Portanto, o tensor de Einstein linearizado fica

$$G_{\alpha\beta} = \frac{\varepsilon}{2} (\partial_\beta \partial^\lambda \psi_{\lambda\alpha} + \partial_\alpha \partial^\lambda \psi_{\lambda\beta} + \eta_{\alpha\beta} \partial_\mu \partial_\nu \psi^{\mu\nu} - \square \psi_{\alpha\beta}) + \frac{\varepsilon}{2} (3\phi_{,\alpha,\beta} - 2\phi^{,\lambda}_{,\lambda}). \quad (3.115)$$

Adotando o gauge de Einstein,

$$\partial_\alpha \psi^\alpha_\beta = 0, \quad (3.116)$$

obtemos,

$$G_{\alpha\beta} = -\frac{\varepsilon}{2} \square \psi_{\alpha\beta} + \frac{\varepsilon}{2} (3\phi_{,\alpha\beta} - 2\eta_{\alpha\beta} \phi_{,\lambda}^{\lambda}). \quad (3.117)$$

Substituindo (3.117) em (3.106) e descartando termos de segunda ordem em ε , obtemos:

$$-\frac{\varepsilon}{2} \square \psi_{\alpha\beta} + \frac{\varepsilon}{2} (3\phi_{,\alpha\beta} - 2\phi_{,\lambda}^{\lambda}) = -\kappa^* T_{\alpha\beta}. \quad (3.118)$$

Usando a equação (3.107) na equação acima, chega-se a

$$\square \psi_{\alpha\beta} = \frac{2}{\varepsilon} \kappa^* T_{\alpha\beta} + 3\phi_{,\alpha,\beta}. \quad (3.119)$$

Na ausência da matéria, a equação (3.119) assume a forma simplificada

$$\square \psi_{\alpha\beta} = 3\phi_{,\alpha,\beta}, \quad (3.120)$$

ou, em termos de h ,

$$\square h_{\alpha\beta} = 3\phi_{,\alpha,\beta}. \quad (3.121)$$

Para o caso em que ϕ é nulo, retomamos o resultado conhecido da relatividade geral. Comparando a equação (3.121) com a da relatividade geral, vemos que o campo ϕ desempenha o papel de fonte. É importante notarmos também que o campo de Weyl também obedece uma equação de onda,

$$\tilde{\square} \phi = 0, \quad (3.122)$$

proveniente da linearização da equação (3.107). Ou seja, a velocidade de propagação do campo ϕ , assim como o do campo gravitacional, também é a velocidade da luz.

Note que, assim como na relatividade geral, a equação $\square h_{\alpha\beta} = 0$ está intimamente ligada com a escolha de gauge. Sendo assim, essa equação não dá nenhuma garantia da existência de ondas gravitacionais uma vez que há uma dependência com o sistema de coordenadas [23]. O critério de existência pode ser estabelecido pelo tensor de curvatura. Diferentemente do caso riemanniano, o tensor de curvatura $R_{\alpha\beta\gamma\lambda}$ não é um invariante de Weyl; portanto, precisamos mostrar que neste caso, temos algo como

$$\square R_{\beta\gamma\lambda}^{\alpha} = 0, \quad (3.123)$$

uma vez que $R_{\beta\gamma\lambda}^{\alpha}$ é invariante sob as transformações de Weyl.

Adotando novamente (3.108) e usando (3.109), obtemos

$$R_{\beta\gamma\lambda}^{\alpha} = \frac{\varepsilon}{2}(\partial_{\lambda}\partial^{\alpha}h_{\beta\gamma} + \partial_{\gamma}\partial_{\beta}h_{\lambda}^{\alpha} - \partial_{\lambda}\partial_{\beta}h_{\gamma}^{\alpha} - \partial_{\gamma}\partial^{\alpha}h_{\beta\lambda}) + \frac{\varepsilon}{2}(\delta_{\gamma}^{\alpha}\phi_{,\beta,\lambda} - \delta_{\lambda}^{\alpha}\phi_{,\beta,\lambda} - \delta_{\lambda}^{\alpha}\phi_{,\beta,\gamma} + \eta_{\beta\lambda}\phi_{,\gamma}^{\alpha} - \eta_{\beta\gamma}\phi_{,\lambda}^{\alpha}).$$

Aplicando o d'Alembertiano e simplificando o resultado, obtemos que

$$\square R_{\beta\gamma\lambda}^{\alpha} = 0,$$

como desejávamos mostrar.

CAPÍTULO 4

Teoria de Weyl revisitada

A teoria de Weyl carrega consigo uma estrutura nova cujo objetivo é a unificação do eletromagnetismo com a gravitação. A generalização da geometria riemanniana possibilita, através do campo de Weyl, uma associação elegante com o eletromagnetismo, permitindo sua geometrização. No entanto, apesar da elegância e beleza, a teoria formulada por Weyl não foi considerada como uma teoria física aceitável por muitos físicos.

A dificuldade maior da teoria de Weyl reside numa objeção feita por Einstein. De fato, como consequência direta dessa nova geometria aparece o chamado “segundo efeito do relógio” que, do ponto de vista experimental não seria um efeito físico observado até então [30]. A crítica de Einstein tem como epicentro a definição do tempo-próprio, no entanto, como veremos mais adiante, o tempo-próprio utilizado por Einstein para deduzir tal efeito é riemanniano. Sendo assim, esse mesmo problema precisa ser ponderado do ponto de vista dos invariantes da teoria de Weyl.

4.1 O segundo efeito do relógio

Como foi visto no segundo capítulo, a generalização da geometria riemanniana proposta por Weyl é feita abrindo-se mão da invariância do comprimento de um vetor sob

transporte paralelo ao longo de uma curva. Ao ser transportado paralelamente ao longo de um caminho, um vetor tem sua norma alterada segundo a expressão [31]:

$$dl = (\sigma_\beta dx^\beta)l, \quad (4.1)$$

onde l é a norma inicial do vetor e σ é o campo de Weyl. Por simplicidade vamos considerar um campo gravitacional estático com simetria radial e que σ_α só tenha uma componente não-nula σ_0 , ademais que também seja estático com simetria radial. De acordo com (4.1), podemos escrever, supondo também um observador estático, que $t = \lambda, r = r_0, \theta = \theta_0$ e $\sigma = \sigma_0$

$$l = l_0 \exp\left(\int_0^{x_0} \sigma_0 dx^0\right) = l_0 \exp(\sigma_0 x^0). \quad (4.2)$$

Seguindo o mesmo raciocínio proposto por Einstein iremos associar o comprimento l_0 ao período τ_0 de um relógio de uma determinada partícula no momento $x^0 = 0$. Portanto, de acordo com (4.2) passado um tempo x^0 o período do relógio será:

$$\tau = \tau_0 \exp(\sigma_0 x^0). \quad (4.3)$$

Suponha que tenhamos dois relógios idênticos em um mesmo ponto no espaço-tempo, sendo que um irá seguir um percurso onde não temos a presença do campo de Weyl e o outro irá percorrer um caminho que o campo de Weyl assume um valor φ_0 . Após um tempo, esses dois relógios voltam a se encontrar, no entanto, ao compararmos os dois relógios nota-se que o relógio que sofreu a influência do campo de Weyl apresenta uma mudança no período, dada por (4.3).

Em particular, se considerarmos dois relógios atômicos idênticos A e B a frequência de radiação emitida pelos relógios pode ser considerada uma medida do tempo e representaria o “tique-taque” dos relógios. Suponha que o relógio A permaneça em repouso e o relógio B passe por uma região do espaço onde o campo de Weyl seja diferente de zero, como mostra a figura (4.1). A peculiaridade aparece quando os relógios A e B voltam a se encontrar e seguem a partir daí o mesmo caminho. Por causa da influência do campo de Weyl o relógio B continuará emitindo radiação numa frequência diferente da que emite o do relógio A , ou seja, esse fenômeno resultaria na mudança da frequência dos espectros atômicos. Posto de outra forma, as linhas espectrais dependeriam do passado dos átomos. Esse fenômeno entraria em total contradição com o fato observado de que as linhas espectrais são bem definidas e não possuem nenhuma dependência com a história do átomo em questão [49].



Figura 4.1: Segundo efeito do relógio. Fonte: Penrose, R. [49] (2004)

4.2 A crítica de Einstein revisitada

A objeção de Einstein, como vista anteriormente, é fundamentada sobre duas hipóteses:

1. Um relógio viajando ao longo de uma curva $\alpha = \alpha(\lambda)$ mede um tempo próprio $\Delta\tau$ dado pela expressão riemanniana

$$\Delta\tau = \frac{1}{c} \int [g(V, V)]^{1/2} d\lambda = \frac{1}{c} \int [g_{\mu\nu} V^\mu V^\nu]^{1/2} d\lambda, \quad (4.4)$$

onde V denota o vetor tangente à linha de universo do relógio e c , a velocidade da luz. Essa primeira hipótese é conhecida como a hipótese do relógio [23].

2. O período do relógio considerado por Einstein é associado ao comprimento de um vetor γ , ou seja, $L = \sqrt{g(\gamma, \gamma)}$. Se o relógio em questão se move através do espaço-tempo, então o vetor γ é transportado paralelamente ao longo da sua linha de universo de um ponto P_0 até P , de modo que, $L = L_0 e^{\frac{1}{2} \int \sigma_\alpha dx^\alpha}$, com L_0 e L denotando a duração da tique-taque do relógio nos pontos P_0 e P respectivamente.

A teoria de Weyl é construída a partir de quantidades que são invariantes sob as transformações de Weyl. Assim, é de se esperar que o tempo próprio sendo uma quantidade física fundamental também obedeça ao princípio da invariância de gauge. No entanto, analisando a hipótese do relógio claramente não temos um tempo próprio invariante de Weyl. Ademais, $\Delta\tau$, como definido acima, depende apenas da velocidade instantânea do relógio e não leva em conta a influência do campo de Weyl σ_μ . Sendo assim, a definição de tempo próprio adotada não é compatível com a teoria de Weyl.

Na segunda hipótese, o período do relógio é associado ao comprimento de um vetor e novamente o princípio de invariância de gauge é violado, pois $L = \sqrt{g(\gamma, \gamma)}$ não é invariante sob as transformações de Weyl. Sendo assim, sem a definição do tempo próprio invariante não é possível fazer nenhuma previsão em relação a fenômenos envolvendo o conceito de tempo.

A definição de tempo próprio compatível com a teoria de Weyl deve obedecer algumas condições [50]:

- (i) $\Delta\tau$ deve ser invariante sob as transformações de Weyl;
- (ii) $\Delta\tau$ deve ter uma dependência tanto da métrica $g_{\mu\nu}$ quanto do campo de gauge σ_μ ;
- (iii) No limite quando σ_μ for igual a zero $\Delta\tau$ deve se reduzir a (4.4);
- (iv) Para garantir a condição de invariância sob reparametrização é esperado que $\Delta\tau = \int \mathcal{F}(V, g, \sigma) d\lambda$ com $\mathcal{F}$ sendo uma função homogênea de primeira ordem com respeito ao vetor tangente V [28].

4.3 Tempo próprio na teoria de Weyl

Uma definição de tempo-próprio consistente com as condições acima pode ser construída a partir de uma formulação axiomática do espaço-tempo [25]. Nessa formulação axiomática, proposta por Ehlers, Pirani e Schild, a estrutura do espaço-tempo é inteiramente determinada pelo movimento de partículas livres e pelas trajetórias dos raios luminosos. Eles mostraram que a partir dessa formulação o espaço-tempo resultante é weyliano, ou seja, a variedade é caracterizada pelo tripleto (M, g, σ) , onde M é uma variedade diferenciável, g é uma métrica semi-riemanniana e σ um campo de 1-forma sobre M . Doravante iremos assumir que M é dotado de uma conexão ∇ sem torção e satisfaz a condição de compatibilidade

$$\nabla g = g \otimes \sigma. \quad (4.5)$$

Uma partícula livre em queda $\gamma : I \rightarrow M, u \mapsto \gamma(u)$ é uma pre-geodésica se

$$\frac{D\gamma'(u)}{du} = f(\gamma(u))\gamma'(u). \quad (4.6)$$

O que iremos chamar de tempo próprio será a reparametrização de γ que torna (4.6) uma geodésica. Portanto, se $\gamma(\tau)$ é uma curva tipo-tempo que representa uma partícula livre

sob a ação da gravidade γ será reparametrizada pelo tempo próprio se, e somente se,

$$g(\gamma'(\tau), \frac{D\gamma'(\tau)}{d\tau}) = 0. \quad (4.7)$$

Definição 4.3.1. *Uma curva tipo-tempo $\gamma : T \mapsto M, u \mapsto \gamma(u)$ é chamada de relógio padrão se $\frac{D\gamma'}{du}$ é ortogonal a $\gamma'(u)$.*

Seja g uma métrica pertencente ao conjunto de métricas $[g]$, então, a definição acima se escreve como

$$g(\gamma'(u), \frac{D\gamma'(u)}{du}) = 0. \quad (4.8)$$

Mas, sabemos que a conexão ∇ é independente da escolha de coordenadas, sendo assim, a derivada covariante também não dependerá dessa escolha. Se considerarmos uma segunda métrica $\tilde{g} \in [g]$, uma vez que todas métricas da classe $[g]$ estão relacionadas entre si por uma transformação conforme, então a ortogonalidade dos vetores (4.8) é preservada. Portanto, podemos concluir que a definição (4.8) é invariante sob as transformações de Weyl.

Podemos mostrar também que qualquer curva tipo-tempo pode ser parametrizada por relógio padrão. Considere uma curva tipo-tempo

$$\begin{aligned} \gamma & : T \mapsto M \\ t & \mapsto \gamma(t) \end{aligned}$$

Para que γ seja um relógio padrão, precisamos encontrar um difeomorfismo

$$\begin{aligned} \mu & : I \mapsto I' \\ t & \mapsto \tau \end{aligned}$$

tal que,

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma} = \gamma \circ \mu^{-1} & : I' \mapsto M \\ \tau & \mapsto \gamma(\mu^{-1}(\tau)) \end{aligned}$$

seja um relógio padrão. Se $\tilde{\gamma}$ é uma reparametrização de γ , então, podemos escrever que [26]:

$$\gamma'(t) = \frac{d\mu}{dt} \tilde{\gamma}'(\mu). \quad (4.9)$$

Portanto,

$$\frac{D\gamma'(t)}{dt} = \frac{d^2\mu}{dt^2} \tilde{\gamma}'(\mu(t)) + \left(\frac{d\mu}{dt}\right)^2 \frac{D\tilde{\gamma}}{d\tau}(\mu(t)). \quad (4.10)$$

Tomando o produto interno de (4.10) com $\gamma'(t)$, obtemos:

$$g\left(\frac{D\gamma'(t)}{dt}, \gamma'(t)\right) = \frac{d^2\mu}{dt^2} g(\tilde{\gamma}'(\mu(t)), \gamma'(t)) + \left(\frac{d\mu}{dt}\right)^2 g\left(\frac{D\tilde{\gamma}'}{d\tau}(\mu(t)), \gamma'(t)\right). \quad (4.11)$$

Utilizando que $\tilde{\gamma}'(t) = \frac{\gamma'(t)}{d\mu/dt}$, podemos reescrever a expressão anterior como sendo

$$g\left(\frac{D\gamma'(t)}{dt}, \gamma'(t)\right) = \frac{1}{d\mu/dt} \frac{d^2\mu}{dt^2} g(\gamma'(t), \gamma'(t)) + \left(\frac{d\mu}{dt}\right)^3 g\left(\frac{D\tilde{\gamma}'}{d\tau}(\mu(t)), \tilde{\gamma}'(\mu)\right). \quad (4.12)$$

Rearranjando e impondo a condição de ortogonalidade obtemos a seguinte equação diferencial

$$\frac{d^2\mu}{dt^2} - \frac{g(\gamma'(t), \frac{D\gamma'(t)}{dt})}{g(\gamma'(t), \gamma'(t))} \frac{d\mu}{dt} + \left(\frac{d\mu}{dt}\right)^4 \frac{g(\frac{D\tilde{\gamma}'}{d\tau}(\mu(t)), \tilde{\gamma}'(\mu(t)))}{g(\gamma'(t), \gamma'(t))} = 0. \quad (4.13)$$

A partir de (4.13) podemos concluir que $\tilde{\gamma}$ será um relógio padrão se, e somente se, μ satisfaz a equação diferencial

$$\frac{d^2\mu}{dt^2} - \frac{g(\gamma'(t), \frac{D\gamma'(t)}{dt})}{g(\gamma'(t), \gamma'(t))} \frac{d\mu}{dt} = 0. \quad (4.14)$$

Dada uma solução de (4.14) com a condição inicial tal que $\frac{d\mu}{dt}(t_0) \neq 0$, então, existe uma vizinhança I de t_0 onde $\mu : T \mapsto \mu(I) = I'$ é um difeomorfismo, e portanto, a reparametrização $\gamma \circ \mu^{-1} : I' \mapsto M$ será um relógio padrão. Dadas as condições iniciais $\mu(t_0)$, $\mu'(t_0)$ a equação (4.14) sempre admite uma solução, em outras palavras, qualquer curva γ tipo-tempo pode ser reparametrizada de modo a torná-la um relógio padrão.

Definição 4.3.2. *Uma curva γ tipo-tempo é parametrizada pelo tempo próprio se a curva parametrizada é um relógio padrão.*

Podemos obter ainda a solução geral da equação (4.14): uma conexão ∇ é dita ser compatível com a estrutura weylana (M, g, ω) se, e somente se, para quaisquer $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$ tivermos

$$X(g(Y, Z)) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z) + \sigma(X)g(Y, Z). \quad (4.15)$$

Utilizando a condição acima, podemos obter que

$$\frac{d}{dt} \ln(-g(\gamma'(t), \gamma'(t))) = \frac{1}{g(\gamma'(t), \gamma'(t))} \left[2g(\gamma'(t), \frac{D\gamma'(t)}{dt}) + \sigma(\gamma'(t))g(\gamma'(t), \gamma'(t)) \right].$$

Rearranjando, obtemos

$$\frac{g(\gamma'(t), \frac{D\gamma'(t)}{dt})}{g(\gamma'(t), \gamma'(t))} = \frac{1}{2} \left[\frac{d}{dt} \ln(-g(\gamma'(t), \gamma'(t))) - \sigma(\gamma'(t)) \right]. \quad (4.16)$$

Substituindo (4.16) em (4.14), temos

$$\frac{d^2\mu}{dt^2} - \frac{1}{2} \left[\frac{d}{dt} \ln(-g(\gamma'(t), \gamma'(t))) - \sigma(\gamma'(t)) \right] \frac{d\mu}{dt} = 0. \quad (4.17)$$

Fazendo a mudança de variável $\psi = \frac{d\mu}{dt}$, a equação (4.17) assume a forma

$$\dot{\psi} - \frac{1}{2} \left\{ \frac{d}{dt} \ln[-g(\gamma'(t), \gamma'(t))] - \sigma(\gamma'(t)) \right\} \psi = 0. \quad (4.18)$$

Integrando (4.18) e substituindo em (4.17), temos

$$\frac{d\mu}{dt} = \frac{d\mu(t_0)}{dt} \left[\frac{g(\gamma'(t), \gamma'(t))}{g(\gamma'(t_0), \gamma'(t_0))} \right]^{1/2} e^{-\frac{1}{2} \int_{t_0}^t \sigma(\gamma'(u)) du}. \quad (4.19)$$

Integrando a expressão anterior, obtemos:

$$\mu(t) = \frac{\frac{d\mu(t_0)}{dt}}{(-g(\gamma'(t_0), \gamma'(t_0)))^{1/2}} \int_{t_0}^t e^{-\frac{1}{2} \int_{t_0}^u \sigma(\gamma'(s)) ds} (-g(\gamma'(u), \gamma'(u)))^{1/2} du + \mu_0.$$

Denotando $\Delta\tau(t)$ como tempo próprio entre os tempos t_0 e t , podemos escrever

$$\Delta\tau(t) = \frac{\frac{d\tau(t_0)}{dt}}{(-g(\gamma'(t_0), \gamma'(t_0)))^{1/2}} \int_{t_0}^t e^{-\frac{1}{2} \int_{t_0}^u \sigma(\gamma'(s)) ds} (-g(\gamma'(u), \gamma'(u)))^{1/2} du. \quad (4.20)$$

Analisando (4.20) nota-se que $\Delta\tau$ é invariante sob as transformações de Weyl e apresenta uma dependência tanto na métrica $g_{\mu\nu}$ quanto no campo de Weyl σ . Se o campo de Weyl σ_μ for igual a zero, recuperamos a expressão do tempo próprio riemanniano (4.4). Podemos concluir, então, que $\Delta\tau$ definido em (4.20) é matematicamente consistente e portanto

poderia representar o tempo próprio na teoria de Weyl. É importante destacar que mesmo com a definição do tempo próprio invariante o segundo efeito do relógio continua presente. Sendo assim, adotaremos mais adiante uma definição de tempo-próprio diferente da proposta (4.20).

A expressão do tempo próprio (4.20) foi proposto inicialmente por V. Perlick em [27] e posteriormente foi demonstrado que a definição dada por Perlick guarda uma relação com a proposta axiomática do artigo publicado por Ehlers, Pirani e Schild ¹.

A estrutura de um espaço-tempo pode ser inteiramente construída a partir da definição da distância entre dois eventos, sendo assim, a expressão (4.2) fornece uma nova geometria mais geral que a geometria riemanniana.

4.4 O problema variacional inverso e as geodésicas de Weyl

A trajetória das partículas ou equação geodésica, como é sabido da relatividade geral, pode ser obtida diretamente da extremização do funcional (4.4). Sendo uma generalização do caso riemanniano é razoável esperar que o movimento das partículas livres correspondam às geodésicas afim de Weyl (autoparalelas) [25]. No entanto, nesta seção, mostraremos que na teoria de Weyl o movimento das partículas não pode advir de um princípio variacional.

O problema acima é conhecido como *problema variacional inverso* do cálculo das variações: dado um sistema diferencial de equações investiga-se se esse conjunto pode ser obtido a partir das equações de Euler-Lagrange para algum funcional [29].

Dada a lagrangiana de um determinado sistema, as equações que regem o movimento do mesmo podem ser obtidas através das equações de Euler-Lagrange, ou seja,

$$\mathcal{L}(x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n, t) \Rightarrow \text{equações de movimento}$$

No entanto, dado um conjunto de equações de movimento nem sempre é possível encontrar uma lagrangiana cuja equações de Euler-Lagrange coincidam com o mesmo conjunto de equações diferenciais ordinárias.

Esse trabalho foi inicialmente investigado por Hermann Ludwig Ferdinand von Helmholtz

¹Para mais detalhes vide [32]

[35]. Para um sistema de n equações diferenciais de segunda ordem na forma geral

$$G_\mu = (\ddot{x}, \dot{x}, x) = 0, \quad (4.21)$$

com $\mu = 1, \dots, n$, Helmholtz provou que as equações (4.21) só podem ser derivadas de um funcional lagrangiano $\mathcal{L}$ se, e somente se as seguintes condições são satisfeitas:

$$\frac{\partial G_\mu}{\partial \ddot{x}^\nu} = \frac{\partial G_\nu}{\partial \ddot{x}^\mu} \quad (4.22)$$

$$\frac{\partial G_\mu}{\partial \dot{x}^\nu} + \frac{\partial G_\nu}{\partial \dot{x}^\mu} = 2 \frac{d}{dt} \frac{\partial G_\mu}{\partial \ddot{x}^\nu}, \quad (4.23)$$

$$\frac{\partial G_\mu}{\partial x^\nu} - \frac{\partial G_\nu}{\partial x^\mu} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial G_\mu}{\partial \dot{x}^\nu} - \frac{\partial G_\nu}{\partial \dot{x}^\mu} \right). \quad (4.24)$$

O conjunto de equações acima ficou conhecido como as condições de Helmholtz.

4.4.1 Condições de Helmholtz na geometria riemanniana

Na relatividade geral, construída sobre a geometria riemanniana, as partículas seguem geodésicas cujas equações podem ser diretamente obtidas da variação da ação

$$\mathcal{L} = \sqrt{g_{\mu\nu}(x) \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu}, \quad (4.25)$$

sendo $\dot{x}^\mu$ e $\dot{x}^\nu$ vetores tangentes. A equação geodésica tem a seguinte forma

$$\ddot{x}^\alpha + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = 0. \quad (4.26)$$

Vamos testar as condições de Helmholtz na equação (4.26). Para tal objetivo, definimos:

$$G_\mu = g_{\mu\alpha} \ddot{x}^\alpha + g_{\mu\alpha} \Gamma_{\beta\lambda}^\alpha \dot{x}^\beta \dot{x}^\lambda = 0. \quad (4.27)$$

Para verificar as condições (4.22) - (4.24), note o seguinte:

$$\frac{\partial G_\mu}{\partial \ddot{x}^\nu} = g_{\mu\nu}, \quad (4.28)$$

$$\frac{\partial G_\mu}{\partial \dot{x}^\nu} = 2g_{\alpha\mu} \Gamma_{\beta\nu}^\alpha \dot{x}^\beta. \quad (4.29)$$

A condição (4.22) é automaticamente satisfeita uma vez que o tensor métrico $g_{\mu\nu}$ é simétrico. Para (4.23), tem-se:

$$\begin{aligned}\frac{\partial G_\mu}{\partial \dot{x}^\nu} + \frac{\partial G_\nu}{\partial \dot{x}^\mu} &= 2\dot{x}^\beta \frac{1}{2} [g_{\alpha\nu} g^{\alpha\sigma} (\partial_\beta g_{\sigma\nu} + \partial_\nu g_{\sigma\beta} - \partial_\sigma g_{\beta\nu}) + g_{\alpha\nu} g^{\alpha\sigma} (\partial_\beta g_{\mu\sigma} + \partial_\mu g_{\beta\sigma} - \partial_\sigma g_{\mu\beta})] \\ &= \dot{x}^\beta (\partial_\beta g_{\mu\nu} + \partial_\nu g_{\mu\beta} - \partial_\mu g_{\beta\nu} + \partial_\beta g_{\mu\nu} + \partial_\mu g_{\beta\nu} - \partial_\nu g_{\beta\mu}) \\ \frac{\partial G_\mu}{\partial \dot{x}^\nu} + \frac{\partial G_\nu}{\partial \dot{x}^\mu} &= 2\partial_\beta g_{\mu\nu} \dot{x}^\beta.\end{aligned}\tag{4.30}$$

Por outro lado,

$$2\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial G_\mu}{\partial \ddot{x}^\nu} \right) = 2\frac{d}{dt} (g_{\mu\nu}) = 2\partial_\beta g_{\mu\nu} \dot{x}^\beta.\tag{4.31}$$

Como (4.30) e (4.31) são iguais, então,

$$\frac{\partial G_\mu}{\partial \dot{x}^\nu} + \frac{\partial G_\nu}{\partial \dot{x}^\mu} = 2\frac{d}{dt} \frac{\partial G_\mu}{\partial \ddot{x}^\nu},$$

satisfazendo, portanto, a condição (4.23).

Para a última condição de Helmholtz, vamos utilizar as seguintes expressões:

$$\frac{\partial G_\mu}{\partial x^\nu} = \partial_\nu g_{\mu\alpha} \ddot{x}^\alpha + (\partial_\nu g_{\mu\alpha} \Gamma_{\beta\lambda}^\alpha + g_{\mu\alpha} \Gamma_{\beta\lambda,\nu}^\alpha) \dot{x}^\beta \dot{x}^\lambda.\tag{4.32}$$

$$\frac{\partial G_\nu}{\partial x^\mu} = \partial_\mu g_{\nu\alpha} \ddot{x}^\alpha + (\partial_\mu g_{\nu\alpha} \Gamma_{\beta\lambda}^\alpha + g_{\nu\alpha} \Gamma_{\beta\lambda,\mu}^\alpha) \dot{x}^\beta \dot{x}^\lambda.\tag{4.33}$$

Podemos reescrever o último termo entre parênteses como:

$$g_{\mu\alpha} \Gamma_{\beta\lambda,\nu}^\alpha = -\partial_\nu g_{\mu\alpha} \Gamma_{\beta\lambda}^\alpha + \frac{1}{2} (g_{\mu\lambda,\beta,\nu} + g_{\mu\beta,\nu,\lambda} - g_{\beta\lambda,\mu,\nu}).\tag{4.34}$$

Utilizando esses três últimos resultados, tem-se:

$$\frac{\partial G_\mu}{\partial x^\nu} - \frac{\partial G_\nu}{\partial x^\mu} = (\partial_\nu g_{\mu\alpha} - \partial_\mu g_{\nu\alpha}) \ddot{x}^\alpha + (g_{\mu\beta,\nu,\lambda} - g_{\nu\beta,\mu,\lambda}) \dot{x}^\beta \dot{x}^\lambda.\tag{4.35}$$

Por outro lado, utilizando (4.29) obtém-se

$$\frac{\partial G_\mu}{\partial \dot{x}^\nu} - \frac{\partial G_\nu}{\partial \dot{x}^\mu} = 2(\partial_\nu g_{\mu\beta} - \partial_\mu g_{\beta\nu}) \dot{x}^\beta.\tag{4.36}$$

Então,

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial G_\mu}{\partial \dot{x}^\nu} - \frac{\partial G_\nu}{\partial \dot{x}^\mu} \right] = (\partial_\nu g_{\mu\alpha} - \partial_\mu g_{\nu\alpha}) \ddot{x}^\alpha + (g_{\mu\beta,\nu,\lambda} - g_{\nu\beta,\mu,\lambda}) \dot{x}^\beta \dot{x}^\lambda. \quad (4.37)$$

Comparando (4.35) e (4.37) vemos que

$$\frac{\partial G_\mu}{\partial x^\nu} - \frac{\partial G_\nu}{\partial x^\mu} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial G_\mu}{\partial \dot{x}^\nu} - \frac{\partial G_\nu}{\partial \dot{x}^\mu} \right).$$

Sendo assim a última condição de Helmholtz é satisfeita.

Conclui-se, portanto, que existe um funcional lagrangiano $\mathcal{L}$, tal que, as equações de Euler-Lagrange de $\mathcal{L}$ coincidem com o conjunto de equações (4.26). Este já era um resultado esperado uma vez que conhecemos da relatividade geral que a equação geodésica advém da extremização do funcional (4.25).

4.4.2 Condições de Helmholtz na geometria de Weyl

Na seção anterior vimos que na relatividade geral a equação geodésica pode ser obtida diretamente de um princípio variacional. Seria razoável que, sendo uma generalização da geometria riemanniana, o movimento de partículas livres correspondam a geodésicas afins de Weyl (autoparalelas) e que a mesma possa ser obtida diretamente de um princípio variacional.

Na geometria de Weyl as equações geodésicas são dadas por

$$\ddot{x}^\alpha + \tilde{\Gamma}_{\beta\lambda}^\alpha \dot{x}^\beta \dot{x}^\lambda = 0, \quad (4.38)$$

onde as componentes da conexão $\tilde{\Gamma}$ de Weyl são dados por $\tilde{\Gamma}_{bc}^a = \{^a_{bc}\} - \frac{1}{2} g^{ad} (g_{db} \sigma_c + g_{dc} \sigma_b - g_{bc} \sigma_d)$.

Precisamos, portanto, verificar se (4.38) satisfaz ou não as condições de Helmholtz. Assim como foi feito no caso riemanniano a equação geodésica precisa estar na forma covariante, sendo assim, iremos multiplicar (4.38) pelo fator $\phi(x)g_{\mu\alpha}$, onde $\phi(x)$ é uma função arbitrária. Então, a equação geodésica adquire a forma

$$G_\mu = \phi(x)g_{\mu\alpha} (\ddot{x}^\alpha + \tilde{\Gamma}_{\beta\lambda}^\alpha \dot{x}^\beta \dot{x}^\lambda). \quad (4.39)$$

Note que se $\sigma_\mu = 0$ e $\phi(x) = 0$ retomamos o caso riemanniano (4.27). A primeira

condição de Helmholtz é diretamente satisfeita, pois

$$\frac{\partial G_\mu}{\partial \dot{x}^\nu} = \phi g_{\mu\nu} \quad (4.40)$$

e assim como no caso riemanniano, a métrica é simétrica.

Para a condição (4.23), tem-se

$$\frac{\partial G_\mu}{\partial \dot{x}^\nu} = 2\phi g_{\mu\alpha} \tilde{\Gamma}_{\beta\nu}^\alpha \dot{x}^\beta = 2\phi \dot{x}^\beta [g_{\mu\alpha} \{\}_{\beta\nu}^\alpha - \frac{1}{2} g_{\mu\alpha} (\delta_\beta^\alpha \sigma_\nu + \delta_\nu^\alpha \sigma_\beta - g_{\nu\beta} \sigma^\alpha)] \quad (4.41)$$

que é,

$$\frac{\partial G_\mu}{\partial \dot{x}^\nu} = \phi \dot{x}^\beta (\partial_\beta g_{\mu\nu} + \partial_\nu g_{\mu\beta} - \partial_\mu g_{\beta\nu} - g_{\mu\beta} \sigma_\nu - g_{\mu\nu} \sigma_\beta + g_{\beta\nu} \sigma_\mu). \quad (4.42)$$

De maneira análoga, pode-se obter ainda

$$\frac{\partial G_\nu}{\partial \dot{x}^\mu} = \phi \dot{x}^\beta (\partial_\beta g_{\mu\nu} + \partial_\mu g_{\nu\beta} - \partial_\nu g_{\beta\mu} - g_{\nu\beta} \sigma_\mu - g_{\mu\nu} \sigma_\beta + g_{\beta\mu} \sigma_\nu). \quad (4.43)$$

Adicionando (4.42) e (4.43), tem-se

$$\frac{\partial G_\mu}{\partial \dot{x}^\nu} + \frac{\partial G_\nu}{\partial \dot{x}^\mu} = 2\phi \dot{x}^\beta (\partial_\beta g_{\mu\nu} - g_{\mu\nu} \sigma_\beta). \quad (4.44)$$

Por outro lado, temos

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial G_\mu}{\partial \dot{x}^\nu} \right) = \dot{x}^\beta \frac{\partial}{\partial x^\beta} (\phi g_{\mu\nu}) = \dot{x}^\beta (g_{\mu\nu} \partial_\beta \phi + \phi \partial_\beta g_{\mu\nu}). \quad (4.45)$$

Substituindo (4.44) e (4.45) em (4.23) obtém-se a seguinte expressão para a função $\phi(x)$:

$$\phi(x) = C e^{-\int \sigma_\beta dx^\beta}, \quad (4.46)$$

onde C é uma constante. A equação (4.46) equivale à

$$\sigma_\beta = -\partial_\beta \ln \phi = \partial_\beta \varphi, \quad (4.47)$$

com $\varphi = -\ln \phi$. A condição (4.47) significa que σ é uma forma exata, isto é, $\sigma = d\varphi$. Em outras palavras, as condições de Helmholtz só são satisfeitas se a geometria for Weyl integrável. Concluimos, então, que não é possível derivar as equações de movimento de partículas livres a partir de um princípio variacional a menos que estejamos ambientados no caso integrável.

O fato mostrado serve de base matemática para a afirmação feita por Weyl, “[a geodésica] não pode, é claro, ser interpretada como a linha de menor comprimento porque o conceito de comprimento ao longo de uma curva não tem significado [36]”.

4.5 A geometrização do campo eletromagnético

A estrutura geométrica encontrada por Weyl, inegavelmente tem como objetivo a unificação do eletromagnetismo com a gravitação. De fato, essa nova estrutura consegue de maneira elegante incluir o eletromagnetismo a partir da identificação do campo de Weyl σ_μ com o quadripotencial eletromagnético A_μ . No entanto, analisando as equações de campo (1.50) e (1.57) é possível encontrar algumas divergências em relação às equações de Maxwell.

Por (1.50) nota-se que o campo eletromagnético é acoplado com ele mesmo, de modo que o campo σ atua como sendo a própria fonte o que, difere conceitualmente, da equação de Maxwell $\nabla_\alpha F^{\alpha\beta} = \mu_0 J^\beta$, sendo J^β a quadricorrente.

A equação (1.57) apresenta termos não-lineares em σ , que são mais característicos em teorias não-lineares da eletrodinâmica. Ademais, a ação (1.31), que pode ser reescrita no gauge natural ($R = \Lambda$) como [31]:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left(\tilde{R} + \frac{\omega}{2\Lambda} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + 6\sigma_\mu \sigma^\mu - \frac{\Lambda}{2} \right), \quad (4.48)$$

guarda uma semelhança muito grande com a ação de Proca para o campo de spin-1 neutro no espaço curvo com constante cosmológica [43].

Outro problema que aparece na geometrização do eletromagnetismo está relacionado ao movimento de partículas neutras e partículas carregadas. As únicas curvas que são invariantes sob as transformações de Weyl são as geodésicas afins; sendo assim, é de se esperar que elas descrevam o movimento de partículas interagindo apenas com os campos gravitacional e eletromagnético. No entanto, não temos nenhuma equação de movimento para partículas carregadas no espaço curvo, ou seja, o análogo à equação contendo a força de Lorentz.

Diante desses argumentos, a teoria de Weyl pode ser considerada como uma teoria modificada da gravitação e não mais como uma teoria de unificação do eletromagnetismo com a gravitação. Sendo assim, não iremos mais associar o campo de Weyl σ ao quadripotencial eletromagnético [53].

4.6 O tempo-próprio invariante e o acoplamento com a matéria

Quando o trabalho original de Weyl [30] foi publicado tornou-se o centro de grandes discussões, tanto por sua elegância, quanto pela possibilidade da geometrização do eletromagnetismo. No entanto, a crítica de Einstein à teoria de Weyl foi devastadora [44] e certamente cooperou para que Weyl não fosse adiante e completasse a teoria, considerando, por exemplo, a presença de matéria.

Antes de construir um acoplamento com a matéria que esteja de acordo com a invariância de gauge, note que na teoria escalar tensorial geométrica a definição do tempo próprio é dada pela expressão invariante [24]

$$\Delta\tau = \int_a^b e^{-\frac{\phi}{2}} \left(g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \right)^{1/2} d\lambda. \quad (4.49)$$

A estrutura geométrica nesse caso é conhecida como espaço-tempo de Weyl integrável (WIST) ² e pode ser vista como sendo um caso particular da geometria de Weyl quando $\sigma = d\phi$. Para essa escolha particular as transformações de Weyl são

$$\begin{aligned} \bar{g} &= e^f g \\ \bar{\phi} &= \phi + f, \end{aligned}$$

e a condição de compatibilidade assume a forma

$$\nabla_V [g(W, U)] = g(\nabla_V W, U) + g(W, \nabla_V U) + d\phi(V)g(W, U),$$

em que U, V e W são campos vetoriais. Note que a expressão (4.49) é a hipótese do relógio (4.20) redefinida em termos da métrica invariante $\gamma_{\mu\nu} = e^{-\frac{\phi}{2}} g_{\mu\nu}$. Seguindo esse mesmo princípio, podemos construir um acoplamento entre a geometria e a matéria que seja invariante de gauge e uma nova definição do tempo-próprio.

Trabalhando com a ideia original de Weyl, vamos definir esse novo tensor métrico no gauge $R = \Lambda$. Seja $\mathcal{M} = \{(g, \nabla, \sigma)\}$ o conjunto de todas as variedades de Weyl, onde todas as variedades M estão relacionadas por uma transformação conforme. Considere a variedade $M = (g, \nabla, \sigma)$ e considere uma segunda variedade $\bar{M} = (\bar{g}, \bar{\nabla}, \bar{\sigma})$. Podemos escrever, então,

²Diversos trabalhos foram feitos explorando esse espaço-tempo [45], [46], [47], [48]

que

$$\begin{aligned}\bar{g}_{\mu\nu} &= e^f g_{\mu\nu}, \\ \bar{\sigma}_\mu &= \sigma_\mu + \partial_\mu f.\end{aligned}\tag{4.50}$$

Se adotarmos o gauge de Weyl ($R = \Lambda$) em $\bar{M}$ teremos

$$\bar{R} = \bar{g}^{\mu\nu} \bar{R}_{\mu\nu} = \Lambda$$

Utilizando o fato de que $R_{\mu\nu}$ é um invariante de gauge e por (4.50), obtemos

$$e^{-f} = \frac{\Lambda}{R}.\tag{4.51}$$

Vamos definir então o tensor

$$\gamma_{\mu\nu} = \frac{R}{\Lambda} g_{\mu\nu},\tag{4.52}$$

para algum $\Lambda > 0$. O fato de que $\bar{R} = \bar{g}^{\mu\nu} \bar{R}_{\mu\nu} = \bar{g}^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = e^{-f} R$ implica imediatamente que $\bar{\gamma} = \frac{\bar{R}}{\Lambda} \bar{g} = \frac{R}{\Lambda} g = \gamma$, significando que γ é um objeto invariante de gauge. Posto de outra maneira, todos os objetos construídos a partir de γ também serão invariantes por transformações de gauge. De maneira semelhante, para o campo de Weyl, podemos escrever que

$$\xi = \sigma + d(\ln R).\tag{4.53}$$

Consideremos a definição do tempo-próprio riemanniano

$$\Delta\tau = \int \frac{1}{c} [g(V, V)]^{1/2} d\lambda.\tag{4.54}$$

Utilizando (4.52) podemos definir agora um tempo-próprio invariante de gauge:

$$\Delta\tau = \frac{1}{c} \int \gamma[(V, V)]^{1/2} d\lambda.\tag{4.55}$$

Note que com essa definição do tempo-próprio o segundo efeito do relógio não aparece mais e o “tique-taque” dos relógios são inteiramente determinados pelas propriedades da métrica γ .

De maneira semelhante podemos definir o tensor energia-momento invariante, ou seja, definindo a ação

$$\delta S^{(m)} = \kappa \int d^4x \sqrt{|\gamma|} T_{\mu\nu}^{(m)} \delta \gamma^{\mu\nu}, \quad (4.56)$$

juntamente com (1.31) as equações de campo na presença da matéria são [51]:

$$\tilde{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \tilde{R} g_{\mu\nu} + \frac{\Lambda}{4} g_{\mu\nu} + \frac{3}{2} (\sigma_\mu \sigma_\nu - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \sigma^\alpha \sigma_\alpha) = \frac{\omega}{\Lambda} T_{\mu\nu} - \kappa T_{\mu\nu}^*, \quad (4.57)$$

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\nu (\sqrt{-g} F^{\mu\nu}) = \frac{3\Lambda}{2\omega} \sigma^\mu, \quad (4.58)$$

onde $T_{\mu\nu}$ é o tensor momento-energia associado ao campo de Weyl e $T_{\mu\nu}^*$ é o tensor momento-energia da matéria, notando que $\tilde{R}_{\mu\nu}$ e $\tilde{R}$ são calculados com a conexão riemanniana.

Soluções das equações de campo na geometria de Weyl não-integrável

Após a publicação das equações da gravitação de Einstein, iniciou-se uma corrida para encontrar as soluções exatas desse conjunto de equações diferenciais. No entanto, devido a sua não-linearidade o conjunto de equações encontrado por Einstein nem sempre admite soluções analíticas. A primeira solução exata veio em 1916 em um trabalho publicado pelo físico alemão Karl Schwarzschild [14], que descreve o campo gravitacional no vácuo e externo a um corpo com massa e simetria esférica. Posteriormente, foram acrescentadas inúmeras soluções das equações de Einstein em diversos tipos de sistemas, como por exemplo, a solução encontrada pelos físicos Hans Reissner e Gunnar Nordström [15] [16], que descreve um sistema mais geral do que o considerado por Schwarzschild. A solução de Reissner-Nordström, como ficou conhecida, descreve o campo gravitacional gerado por um corpo com massa e carga elétrica.

No capítulo 1 do presente trabalho foram desenvolvidos todos os aparatos geométricos da geometria de Weyl, incluindo também as equações de campo. Este capítulo será, portanto, dedicado a mostrar algumas soluções das equações de campo de Weyl e suas possíveis interpretações.

As equações de campo na geometria de Weyl, adotando o gauge natural, são dadas

por:

$$\frac{\omega}{\Lambda} T_{\mu\nu} = \tilde{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \tilde{R} g_{\mu\nu} + \frac{\Lambda}{4} g_{\mu\nu} + \frac{3}{2} \left(\sigma_\mu \sigma_\nu - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \sigma_\alpha \sigma^\alpha \right), \quad (5.1)$$

$$(\sqrt{-g} F^{\mu\nu})_{,\nu} = \frac{3\Lambda}{2\omega} \sqrt{-g} \sigma^\mu. \quad (5.2)$$

A equação de campo (5.1) pode ser reescrita se levarmos em conta o fato de que o tensor energia momento $T_{\mu\nu}$ tem traço nulo:

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} &= g^{\alpha\beta} F_{\mu\beta} F_{\alpha\nu} + \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}, \\ T &= F^{\nu\alpha} F_{\alpha\nu} + F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} = 0. \end{aligned}$$

Multiplicando (5.1) por $g^{\mu\nu}$, tem-se:

$$\begin{aligned} \tilde{R} - 2\tilde{R} - \Lambda + \frac{3}{2} (\sigma^\alpha \sigma_\alpha - 2\sigma^\alpha \sigma_\alpha) &= 0, \\ \tilde{R} &= \Lambda - \frac{3}{2} \sigma^\alpha \sigma_\alpha. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Substituindo (5.3) em (5.1), ficamos com:

$$\frac{\omega}{\Lambda} T_{\mu\nu} = \tilde{R}_{\mu\nu} - \frac{\Lambda}{4} g_{\mu\nu} + \frac{3}{2} \sigma_\mu \sigma_\nu. \quad (5.4)$$

5.1 Solução com simetria esférica

A primeira solução que iremos investigar será o caso de um sistema estático com simetria esférica. Sendo assim, a métrica adotada será:

$$ds^2 = e^{\nu(r)} dt^2 - e^{\lambda(r)} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2. \quad (5.5)$$

Diferentemente do caso da solução de Schwarzschild, o sistema terá a presença do campo de Weyl, σ_μ , que possui uma natureza geométrica. A simetria esférica do sistema refletirá sobre σ_μ , portanto, este será estático e terá apenas dependência na coordenada radial r :

$$\sigma_\mu = (\varphi(r), 0, 0, 0). \quad (5.6)$$

É importante salientar neste ponto a semelhança do campo de Weyl com o quadripotencial eletromagnético. Sendo assim, vamos fazer a seguinte identificação,

$$E(r) = -\varphi'(r), \quad (5.7)$$

onde φ' representa a derivada de φ em relação à coordenada radial r .

Utilizando a definição do tensor $F_{\mu\nu}$ dada pela expressão (1.20), tem-se as seguintes matrizes:

$$F_{\mu\nu} = E(r) \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad F^{\mu\nu} = \frac{E(r)}{e^{(\nu+\lambda)}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.8)$$

Analisando a equação de campo (5.2), a única expressão não-trivial será para $\mu = 0$ e $\nu = 1$, uma vez que as únicas componentes não-nulas do tensor $F_{\mu\nu}$ são F_{01} e F_{10} e temos apenas a dependência radial r . Portanto,

$$\begin{aligned} (\sqrt{-g}F^{01})_{,1} &= \frac{3\Lambda}{2\omega} \sqrt{-g} \sigma^0, \\ [e^{(\nu+\mu)/2} r^2 \sin \theta e^{-(\nu+\lambda)} E(r)]_{,1} &= \frac{3\Lambda}{2\omega} e^{(\nu+\lambda)/2} r^2 \sin \theta \varphi(r) e^{-\nu}, \\ [r^2 e^{-(\nu+\lambda)/2} E(r)]_{,1} &= \frac{3\Lambda}{2\omega} r^2 e^{(\lambda-\nu)/2} \varphi(r). \end{aligned} \quad (5.9)$$

Por simplicidade, vamos definir as seguintes funções:

$$\vartheta = e^{-(\nu+\lambda)/2}, \quad (5.10)$$

$$\psi = e^{(\lambda-\nu)/2}. \quad (5.11)$$

O tensor energia momento, por definição, é dado por

$$T_{\mu\nu} = g^{\alpha\beta} F_{\mu\beta} F_{\alpha\nu} + \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}. \quad (5.12)$$

Note que, uma vez que $g_{\mu\nu}$ é uma matriz diagonal as componentes fora da diagonal de $T_{\mu\nu}$ serão iguais a zero. Ademais, as únicas componentes não-nulas de $F_{\mu\nu}$ são $F_{01} = -F_{10}$,

portanto, a matriz $T_{\mu\nu}$ será:

$$T_{\mu\nu} = \frac{E^2(r)}{2} \begin{pmatrix} e^{-\lambda} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^{-\nu} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 e^{-(\nu+\lambda)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta e^{-(\nu+\lambda)} \end{pmatrix}. \quad (5.13)$$

Para calcularmos o sistema de equações (5.4) vamos precisar de alguns resultados conhecidos da relatividade geral. A solução de um sistema com simetria esférica, dado pela métrica (5.5), fornece as seguintes componentes do tensor de Ricci:

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{00} &= e^{\nu-\lambda} \left(-\frac{\nu''}{2} + \frac{\lambda'\nu'}{4} - \frac{\nu'^2}{4} - \frac{\nu'}{r} \right) & \tilde{R}_{11} &= \frac{\nu''}{2} - \frac{\lambda'\nu'}{4} + \frac{\nu'^2}{4} - \frac{\lambda'}{r} \\ \tilde{R}_{22} &= e^{-\lambda} \left[1 + \frac{r}{2}(\nu' - \lambda') \right] - 1 & \tilde{R}_{33} &= \sin^2 \theta \tilde{R}_{22} \end{aligned} \quad (5.14)$$

Se analisarmos (5.4) com base nas componentes não-nulas dos tensores $\tilde{R}_{\mu\nu}$ e $T_{\mu\nu}$ pode-se concluir diretamente que as equações não-triviais de (5.4) serão aquelas com índices $\mu = \nu = 0, 1, 2, 3$. Portanto, para $\mu = \nu = 0$, obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{\omega}{\Lambda} T_{00} &= \tilde{R}_{00} - \frac{\Lambda}{4} g_{00} + \frac{3}{2} \sigma_0 \sigma_0, \\ \frac{\omega E^2}{2\Lambda} e^{-\lambda} &= e^{(\nu-\lambda)} \left(-\frac{\nu''}{2} + \frac{\lambda'\nu'}{4} - \frac{\nu'^2}{4} - \frac{\nu'}{r} \right) - \frac{\Lambda}{4} e^\nu + \frac{3}{2} \varphi^2. \end{aligned} \quad (5.15)$$

De maneira análoga, as outras expressões advindas de (5.4) são:

$$-\frac{\omega E^2}{2\Lambda} e^{-\nu} = \frac{\nu''}{2} - \frac{\lambda'\nu'}{4} + \frac{\nu'^2}{4} - \frac{\lambda'}{r} + \frac{\Lambda}{4} e^\lambda, \quad (5.16)$$

$$\frac{\omega r^2 E^2}{2\Lambda} e^{-(\nu+\lambda)} = e^{-\lambda} \left[1 + \frac{r}{2}(\nu' - \lambda') \right] - 1 + \frac{\Lambda}{4} r^2, \quad (5.17)$$

onde, omitimos a equação para $\mu = \nu = 3$ uma vez que esta é idêntica à equação (5.17) a menos de uma constante.

Se multiplicarmos a equação (5.15) por $e^{\lambda-\nu}$ e somar com (5.16), tem-se:

$$-\frac{1}{r} (\nu + \lambda)' + \frac{3}{2} \varphi^2 e^{\lambda-\nu} = 0. \quad (5.18)$$

O sistema de equações resultante será, portanto,

$$-\left[e^{-\frac{(\lambda+\nu)}{2}}r^2\varphi'\right]' = \frac{3\Lambda}{2\omega}e^{\frac{(\lambda-\nu)}{2}}r^2\varphi, \quad (5.19)$$

$$-\frac{(\lambda' + \nu')}{r} + \frac{3}{2}\varphi^2e^{(\lambda-\nu)} = 0, \quad (5.20)$$

$$\frac{\omega}{2\Lambda}(\varphi')^2r^2e^{-(\lambda+\nu)} = e^{-\lambda}\left[1 + \frac{r}{2}(\nu' - \lambda')\right]. \quad (5.21)$$

5.2 Aproximação de campo fraco

Na seção anterior discutimos o conjunto de equações de campo de Weyl para um sistema com simetria esférica, no entanto, o sistema de equações resultante é não-linear e acoplado o que dificulta a obtenção de uma solução analítica. Sendo assim, vamos considerar a aproximação em que o campo de Weyl tenha uma magnitude muito pequena, além disso, vamos assumir que a métrica com simetria esférica será aproximada para:

$$ds^2 = (1 + \varepsilon\nu)dt^2 - (1 + \varepsilon\lambda)dr^2 - r^2d\theta^2 - r^2\sin^2\theta d\phi^2, \quad (5.22)$$

onde $\varepsilon \ll 1$. Ademais, considere as seguintes hipóteses:

$$\sigma_\mu = (\varepsilon\varphi(r), 0, 0, 0), \quad (5.23)$$

$$F_{\mu\nu} = E(r) \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -\varepsilon\varphi'(r) \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.24)$$

Considerando as hipóteses acima a equação de campo (5.4) assume a seguinte forma simplificada:

$$\tilde{R}_{\mu\nu} - \frac{\Lambda}{4}g_{\mu\nu} = 0. \quad (5.25)$$

Tanto o termo com o tensor $T_{\mu\nu}$ quanto o termo com o campo $\varphi(r)$ de (5.25) serão ambos da ordem de $O(\varepsilon^2)$ e não irão contribuir de maneira significativa. É importante ressaltar nesse ponto que a constante Λ também será da ordem de ε .

A única equação não-trivial de (5.2) será:

$$\begin{aligned}
 (\sqrt{-g}F^{01})_{,1} &= \frac{3\Lambda}{2\omega}\sqrt{-g}\sigma^0 \\
 \left\{-r^2\sin\theta\left[1+\frac{\varepsilon}{2}(\nu+\lambda)\right]\varepsilon\varphi'\right\}' &= \frac{3\Lambda}{2\omega}r^2\sin\theta\left[1+\frac{\varepsilon}{2}(\nu+\lambda)\right](1-\varepsilon\nu)\varepsilon\varphi \\
 (r^2\varepsilon\varphi')' &= -\frac{3\Lambda}{2\omega}r^2\varphi\varepsilon \\
 \varphi'' + \frac{2\varphi'}{r} + \frac{3\Lambda}{2\omega}\varphi &= 0.
 \end{aligned} \tag{5.26}$$

A solução da equação (5.26) pode ser dividida em duas classes:

1. Para $\Lambda, \omega > 0$

$$\varphi(r) = \frac{C_1}{r}e^{-i\sqrt{\frac{3\Lambda}{2\omega}}r} + \frac{iC_2}{r\sqrt{6}}e^{i\sqrt{\frac{3\Lambda}{2\omega}}r}, \tag{5.27}$$

2. Para $\Lambda < 0$ ou $\omega < 0$

$$\varphi(r) = \frac{C_1}{r}e^{-\sqrt{\frac{3\Lambda}{2\omega}}r} + \frac{C_2}{r\sqrt{6}}e^{\sqrt{\frac{3\Lambda}{2\omega}}r}. \tag{5.28}$$

Portanto, a partir da equação de campo (1.2) foi possível a obtenção da forma do campo de Weyl, sendo que dependendo do sinal das constantes Λ e ω o campo $\varphi(r)$ apresenta comportamentos distintos. No primeiro caso, o potencial é algo oscilatório enquanto no segundo caso, o comportamento do campo é idêntico ao potencial de Yukawa.

Resta-nos agora, analisar as equações (5.25). Para $\mu = \nu = 0, 1$ teremos, respectivamente, as seguintes expressões:

$$-\frac{1}{2}\varepsilon\nu'' - \frac{\varepsilon\nu'}{r} - \frac{\Lambda}{4}(1+\varepsilon\nu) = 0, \tag{5.29}$$

$$\frac{1}{2}\varepsilon\nu'' - \frac{\varepsilon\lambda'}{r} + \frac{\Lambda}{4}(1+\varepsilon\lambda) = 0. \tag{5.30}$$

Somando (5.29) e (5.30), obtemos:

$$-\frac{\varepsilon}{r}(\nu+\lambda)' + \frac{\Lambda}{4}\varepsilon(\lambda-\nu) = 0. \tag{5.31}$$

Como dito anteriormente Λ é da ordem de ε , sendo assim, o último termo da equação acima pode ser descartado. A equação resultante será:

$$(\nu+\lambda)' = 0 \quad \therefore \quad \nu = -\lambda. \tag{5.32}$$

A equação remanescente de (5.25) para $\mu = \nu = 2$, é dada por:

$$\frac{1}{2}r\varepsilon(\nu - \lambda)' - \varepsilon\lambda + \frac{\Lambda}{4}r^2 = 0. \quad (5.33)$$

Substituindo (5.32) em (5.33) teremos a seguinte equação diferencial ordinária:

$$\lambda' + \frac{\lambda}{r} - \frac{\Lambda}{4\varepsilon}r = 0. \quad (5.34)$$

Cuja solução é:

$$\lambda(r) = \frac{C_1}{r} + \frac{\Lambda}{12\varepsilon}r^2, \quad (5.35)$$

onde C_1 é uma constante de integração. Como consequência direta de (5.32) obtemos também que:

$$\nu(r) = -\frac{C_1}{r} - \frac{\Lambda}{12\varepsilon}r^2. \quad (5.36)$$

Como resultado final, temos a seguinte solução aproximada:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{\varepsilon C_1}{r} - \frac{\Lambda}{12}r^2\right)dt^2 - \left(1 + \frac{\varepsilon C_1}{r} + \frac{\Lambda}{12}r^2\right)dr^2 - r^2d\theta^2 - r^2\sin^2\theta d\phi^2. \quad (5.37)$$

Note que, a solução obtida acima guarda uma semelhança muito grande com a solução de de Sitter.

5.3 Solução com simetria cilíndrica

Vamos considerar um espaço-tempo estático com simetria cilíndrica, cuja métrica é

$$ds^2 = e^{2u(r)}dt^2 - e^{2(k(r)-u(r))}(dr^2 + dz^2) - r^2e^{-2u(r)}d\varphi^2. \quad (5.38)$$

Vamos assumir também que o campo de Weyl tenha a seguinte forma:

$$\sigma_\mu = (0, 0, \varphi(r), 0). \quad (5.39)$$

Com esta escolha de σ_μ o tensor $F_{\mu\nu}$ será

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{d\varphi}{dr} & 0 \\ 0 & \frac{d\varphi}{dr} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.40)$$

Podemos calcular ainda o tensor $T_{\mu\nu}$:

$$T_{\mu\nu} = \left(\frac{d\varphi}{dr}\right)^2 \begin{pmatrix} \frac{e^{6u-2k}}{2r^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{e^{2u}}{2r^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}e^{2(u-k)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{e^{2u}}{2r^2} \end{pmatrix}. \quad (5.41)$$

As componentes do tensor de Ricci riemanniano para a métrica (5.38) são:

$$\tilde{R}_{00} = -\frac{e^{4u-2k}}{r} \left(r \frac{d^2u}{dr^2} + \frac{du}{dr} \right), \quad (5.42)$$

$$\tilde{R}_{11} = \frac{1}{r} \left[2 \left(\frac{du}{dr} \right)^2 r - \frac{du}{dr} - r \frac{d^2u}{dr^2} - \frac{dk}{dr} + r \frac{d^2k}{dr^2} \right], \quad (5.43)$$

$$\tilde{R}_{22} = -re^{-2k} \left(r \frac{d^2u}{dr^2} + \frac{du}{dr} \right), \quad (5.44)$$

$$\tilde{R}_{33} = \frac{1}{r} \left(r \frac{d^2k}{dr^2} - r \frac{d^2u}{dr^2} + \frac{dk}{dr} - \frac{du}{dr} \right). \quad (5.45)$$

As equações de campo no gauge de Weyl são:

$$\frac{\omega}{\Lambda} T_{\mu\nu} - \tilde{R}_{\mu\nu} + \frac{\Lambda}{4} g_{\mu\nu} - \frac{3}{2} \sigma_\mu \sigma_\nu = 0, \quad (5.46)$$

$$\tilde{\nabla}_\nu F^{\mu\nu} = \frac{3\Lambda}{2\omega} \sigma^\mu. \quad (5.47)$$

Utilizando (5.42)-(5.45) em (5.46), obtemos o seguinte conjunto de equações:

$$\frac{e^{2(u-k)}}{4\Lambda r^2} (2\omega e^{4u} \varphi'^2 + 4e^{2u} \Lambda r^2 u'' + 4e^{2u} \Lambda r u' + \Lambda^2 r^2 e^{2k}) = 0, \quad (5.48)$$

$$\begin{aligned} & \frac{e^{-2u}}{4\Lambda r^2} (4\omega e^{4u} \varphi'^2 - 8e^{2u} \Lambda r^2 u'^2 + 4e^{2u} \Lambda r u' + 4e^{2u} \Lambda r^2 u'' + 4e^{2u} \Lambda r k') \\ & - 4e^{2u} \Lambda r u'' - \Lambda^2 r^2 e^{2k}) = 0, \end{aligned} \quad (5.49)$$

$$\frac{e^{-2(u+k)}}{4\Lambda} (2\omega e^{4u} \varphi'^2 + 4e^{2u} \Lambda r^2 u'' + 4e^{2u} \Lambda r u' - \Lambda^2 r^2 e^{2k} - 6\varphi^2 \Lambda e^{2(u+k)}) = 0, \quad (5.50)$$

$$-\frac{e^{-2u}}{4\Lambda r^2} (2\omega e^{4u} \varphi'^2 + 4e^{2u} \Lambda r^2 k'' - 4e^{2u} \Lambda r^2 u'' + 4e^{2u} \Lambda r u' + \Lambda^2 r^2 e^{2k}) = 0, \quad (5.51)$$

onde (5.48) corresponde à equação (5.46) para $\mu = \nu = 0$ e na sequência, para $\mu = \nu = 1$, $\mu = \nu = 2$ e $\mu = \nu = 3$.

Multiplicando (5.48) por $4\Lambda r^2/e^{2(u-k)}$ e subtraindo por (5.50) multiplicada por $4\Lambda/e^{-2(u+k)}$, resulta na seguinte equação

$$2\Lambda r^2 e^{2k} + 6\varphi^2 e^{2(k+u)} = 0, \quad (5.52)$$

cujas soluções é

$$u(r) = \frac{1}{2} \ln \left(-\frac{1}{3} \frac{\Lambda}{\varphi^2} r^2 \right). \quad (5.53)$$

Por outro lado a equação (5.47), para $\mu = 2$, resulta em

$$\frac{e^{(u-k)}}{2\omega r^3} (3\Lambda \varphi r e^{2k} + 4e^{2u} \varphi' u' \omega r - 2e^{2u} \omega \varphi' + 2e^{2u} r \omega \varphi'') = 0. \quad (5.54)$$

Por sua vez, se substituirmos (5.54) em (5.48), pode-se obter a seguinte expressão

$$(\omega + 6)(r\varphi'^2 - r\omega\varphi'' - \omega\varphi') = 0, \quad (5.55)$$

cujas soluções para $\omega \neq -6$ é

$$\varphi(r) = br^\beta, \quad (5.56)$$

onde b e β são constantes.

Substituindo (5.53) em (5.54) e simplificando, obtemos

$$9e^{2k} \varphi^4 - 2r\omega\varphi \frac{d\varphi}{dr} + 4\omega r^2 \left(\frac{d\varphi}{dr} \right)^2 - 2r^2 \omega \varphi \frac{d^2\varphi}{dr^2} = 0, \quad (5.57)$$

cujas soluções é

$$k(r) = \frac{1}{2} \ln \left\{ \frac{2r\omega}{9\varphi^4} \left[\varphi \frac{d\varphi}{dr} - 2r \left(\frac{d\varphi}{dr} \right)^2 + r\varphi \frac{d^2\varphi}{dr^2} \right] \right\}. \quad (5.58)$$

A expressão para o campo de Weyl impõe um vínculo entre as constantes ω e β .

Este fato pode ser verificado se utilizarmos (5.58) nas equações (5.48)-(5.51) e (5.54); a única equação que não é satisfeita é a (5.48), sendo assim, para que esta seja satisfeita é necessário que

$$(6 + \omega)\beta^2 - 6\beta + 6 = 0. \quad (5.59)$$

Por fim, substituindo (5.56) nas expressões (5.53) e (5.59), obtemos a seguinte forma para as funções $u(r)$ e $k(r)$:

$$u(r) = \frac{1}{2} \ln \left(-\frac{\Lambda}{3b^2} r^{2(1-\beta)} \right), \quad (5.60)$$

$$k(r) = \frac{1}{2} \ln \left(-\frac{2\omega\beta^2}{9b^2} r^{-2\beta} \right). \quad (5.61)$$

Portanto, a solução será

$$ds^2 = -\frac{\Lambda}{3b^2} r^{2(1-\beta)} dt^2 - \frac{2\omega\beta^2}{3\Lambda r^2} dr^2 + \frac{3b^2}{\Lambda} r^{2\beta} d\varphi^2 - \frac{2\omega\beta^2}{3\Lambda r^2} dz^2. \quad (5.62)$$

5.4 Cosmologia em Weyl não-integrável

Interpretando a teoria de Weyl como uma teoria modificada da gravitação iremos estudar a solução das equações de campo no cenário cosmológico [53].

As equações de campo são [51],

$$\tilde{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \tilde{R} g_{\mu\nu} + \frac{\Lambda}{4} g_{\mu\nu} + \frac{3}{2} (\sigma_\mu \sigma_\nu - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \sigma^\alpha \sigma_\alpha) = \frac{\omega}{\Lambda} T_{\mu\nu} - \kappa T_{\mu\nu}^*, \quad (5.63)$$

$$(\sqrt{-g} F^{\mu\nu})_{,\nu} = \frac{3\Lambda}{2\omega} \sqrt{-g} \sigma^\mu, \quad (5.64)$$

onde $T_{\mu\nu}$ é o tensor momento-energia do campo de Weyl e vamos assumir que $T_{\mu\nu}^* = (\rho + p)u_\mu u_\nu - pg_{\mu\nu}$ e, além disso, vamos considerar que o campo de Weyl seja dado por

$$\sigma_\mu = (\phi(t), \vec{\psi}(t)). \quad (5.65)$$

O modelo cosmológico adotado será homogêneo e isotrópico tanto na métrica quanto no campo de Weyl. Sendo assim a métrica é dado pelo elemento de linha de Friedmann-

Robertson-Walker (2.31) para ($k = 0$):

$$F^{\mu\nu} = \frac{\dot{\psi}}{a^2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad T_{\mu\nu} = \frac{\dot{\psi}^2}{2} \begin{pmatrix} \frac{3}{a^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Fazendo $\mu = 0$ em (5.64), teremos

$$(a^3 F^{0\nu})_{,\nu} = \frac{3\Lambda}{2\omega} a^3 \sigma^0 \Rightarrow \sigma^0 = 0, \quad (5.66)$$

onde utilizamos o fato de que as componentes $F^{0\nu}$ são iguais a zero.

Para $\nu = 1$ em (5.64), obtemos

$$\ddot{\psi} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)\dot{\psi} = \frac{3\Lambda}{2\omega}\psi. \quad (5.67)$$

Analisando agora a equação de campo (5.63), fazendo $\mu = 1$ e $\nu = 2$, obtemos

$$\frac{\dot{\psi}}{\psi} = \pm \sqrt{-\frac{3\Lambda}{2\omega}}, \quad (5.68)$$

cuja solução é

$$\psi(t) = e^{\pm \sqrt{-\frac{3\Lambda}{2\omega}} t}, \quad (5.69)$$

onde escolhemos a constante de integração igual a um por reescalonamento do elemento de linha. A expressão (5.69) fornece duas soluções possíveis. Se adotarmos a raiz positiva e substituindo (5.69) em (5.67) obtemos a seguinte expressão para o fator de escala

$$a(t) = e^{-2\sqrt{-\frac{3\Lambda}{2\omega}} t}, \quad (5.70)$$

onde novamente a constante de integração foi considerada igual a um. Note que este fator de escala resulta em um universo em contração uma vez que o fator Λ/ω deve ser negativo por (5.68). Por sua vez, se considerarmos a raiz negativa em (5.69), o campo de Weyl assume a forma:

$$\psi(t) = e^{-\sqrt{-\frac{3\Lambda}{2\omega}} t}, \quad (5.71)$$

e como resultado o fator de escala será

$$a(t) = e^{2\sqrt{-\frac{3\Lambda}{2\omega}}t}. \quad (5.72)$$

O fator de escala (5.72) corresponde a um universo em expansão uma vez que o termo $\sqrt{-\frac{3\Lambda}{2\omega}}$ é positivo. A expansão, neste caso, pode ter sua origem associada tanto à presença da constante cosmológica Λ quanto ao campo de Weyl que possui um caráter geométrico.

A solução final, portanto, será

$$ds^2 = dt^2 - e^{2\sqrt{-\frac{3\Lambda}{2\omega}}t}(dx^2 + dy^2 + dz^2). \quad (5.73)$$

Fazendo $\mu = \nu = 0$ na equação de campo (5.63), teremos

$$-3\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{\Lambda}{4} + \frac{9}{4}\frac{\psi^2}{a^2} = \frac{3\omega}{2\Lambda}\frac{\dot{\psi}^2}{a^2} - \kappa\rho. \quad (5.74)$$

Substituindo (5.69) e (5.70) em (5.74) obtemos a seguinte expressão para ρ :

$$\rho(t) = -\frac{\Lambda}{\kappa}\left(\frac{18}{\omega} + \frac{1}{4}\right) - \frac{9}{2\kappa}\exp\left(-6\sqrt{-\frac{3\Lambda}{2\omega}}t\right). \quad (5.75)$$

Para $\mu = \nu = 1$ em (5.63), obtemos

$$\kappa p(t) = -\frac{\dot{a}^2}{a^2} - \frac{2\ddot{a}}{a} + \frac{\Lambda}{4} + \frac{3}{4}\frac{\psi^2}{a^2} + \frac{\omega}{2\Lambda}\frac{\dot{\psi}^2}{a^2}. \quad (5.76)$$

Substituindo (5.69) e (5.70) em (5.76), temos como resultado final

$$p(t) = \frac{\Lambda}{\kappa}\left(\frac{18}{\omega} + \frac{1}{4}\right). \quad (5.77)$$

É interessante destacar que $\psi(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$, ou seja por (5.71), o campo de Weyl tende a desaparecer à medida que o universo se expande, enquanto que a equação de estado do fluido se torna $p = -\rho$, que é a equação de estado típica de modelos de energia escura. A solução encontrada representa um universo não-singular em expansão. Soluções com essas características sugerem a possibilidade de descrição da energia escura no nosso universo ou a inflação na fase inicial do universo.

Conclusão

A teoria formulada por Weyl, apesar de não triunfar inicialmente como uma teoria da gravitação, trouxe inúmeras riquezas tanto para a física quanto para a matemática. Suas contribuições mais importantes estão no âmbito da geometria através da generalização da geometria riemanniana e na física, como sendo a precursora das modernas teorias de gauge.

As teorias escalares tensoriais receberam uma atenção especial após a descoberta do bóson de Higgs, uma vez que os campos escalares aparecem como candidatos à descrição da partícula de Higgs e ademais, os campos escalares também desempenham um papel fundamental no cenário da cosmologia. No entanto, a natureza e a origem do campo escalar têm sido discutida em diversos trabalhos, sendo assim, a teoria escalar tensorial geométrica permite uma associação natural do campo escalar à geometria. Além de uma breve revisão da teoria escalar tensorial geométrica, examinamos a solução cosmológica do tipo Friedmann-Robertson-Walker na presença de matéria e mostramos que para este caso temos um universo em expansão acelerada, onde podemos associar à essa expansão tanto a constante cosmológica quanto o campo de Weyl. Ainda no âmbito da teoria escalar tensorial geométrica discutimos o problema de Cauchy nessa teoria e mostramos que o problema é bem posto.

Como ponto central deste trabalho, a teoria de Weyl foi revisitada tendo como principais objetivos analisar a crítica feita por Einstein sob uma nova perspectiva e completar a teoria de Weyl no que diz respeito a definição de um tempo-próprio invariante de gauge bem como o acoplamento com a matéria. Mostramos que a objeção feita por Einstein não estava de acordo com a exigência natural da teoria de Weyl, uma vez que neste novo cenário

todas as quantidades físicas devem ser invariantes sob as transformações de gauge. Uma definição de tempo-próprio que satisfaz a condição de invariância de gauge foi proposta por V. Perlick [27], no entanto, o problema do segundo efeito do relógio permanece. Sendo assim, através da definição de uma métrica γ , invariante sob as transformação de Weyl, juntamente com a transformação do campo de Weyl, mostramos que é possível definir um tempo-próprio invariante de gauge dado por $\Delta\tau = \int [\gamma(V, V)]^{1/2} d\lambda$. Definido desta forma o problema do segundo efeito do relógio é removido da teoria de Weyl. Ainda utilizando a métrica invariante, mostramos que é possível fazer o acoplamento com a matéria, sendo as equações de campo dadas por (4.57).

Como aplicação direta das equações na presença de matéria apresentamos, no capítulo 5, soluções considerando tanto o espaço vazio quanto a presença da matéria. Neste último caso, mostramos que para uma métrica do tipo Friedmann-Robertson-Walker a solução encontrada descreve um universo não-singular em expansão. Ademais a solução encontrada é semelhante às soluções que aparecem em diferentes contextos e sugere a possibilidade de descrição da energia escura presente no universo, bem como a expansão na fase inicial do universo. É interessante destacar que à medida que o universo se expande, o campo de Weyl tende a desaparecer e a equação de estado do fluido cosmológico passa a ser $p = -\rho$, que é a equação de estado de modelos com energia escura.

A teoria original de Weyl, além da objeção de Einstein, apresenta alguns problemas conceituais quando associada à geometrização do eletromagnetismo, como por exemplo, a geometria de Weyl não faz nenhuma distinção entre o movimento de partículas neutras e partículas carregadas. Diante desse e de outros problemas comentados no capítulo 4, a teoria de Weyl pode ser interpretada como uma teoria alternativa da gravitação e não mais como a geometrização do eletromagnetismo.

Como continuação do trabalho aqui exposto pretendemos explorar a formulação do problema de Cauchy para a geometria de Weyl não-integrável e consequentemente a investigação das ondas gravitacionais nessa nova geometria. Ademais, a partir da consideração da teoria de Weyl como uma teoria modificada da gravitação é de grande importância investigar a extensão do teorema de singularidade de Hawking-Penrose, a existência de buracos negros, bem como a formulação da cosmologia quântica levando-se em consideração agora o campo de Weyl.

O funcional de Perlick, citado no capítulo 5, fornece uma generalização da geometria riemanniana. Sendo assim, pode-se investigar a extremização do funcional de Perlick.

Referências Bibliográficas

- [1] EINSTEIN, A. *Zur Elektrodynamik bewegter Körper*, in *Annalen der Physik*, 17:891, 1905.
- [2] FALCIANO, F. T. *Geometria, espaço-tempo e gravitação: conexão entre conceitos da relatividade geral*, *Revista Brasileira de Ensino de Física*, **31**, n.4, 4308, 2009.
- [3] WHEELER, J. A. *A journey into gravity and spacetime*, Scientific American Library, n.31. 1991.
- [4] SABBATA, V.; GASPERINI, M. *Intodruction to gravitation*, World Scientific, Singapore, 1985.
- [5] POINCARÉ, H. *La Science et l'Hypothèse*, Gauthier-Villars, Paris, 1902.
- [6] SAUER, T. *Field equations in teleparallel spacetime: Einstein's Fernparallelismus approach towards unified field theory*, *Historia Math.*, **33**, 399-439, 2006.
- [7] CARMO, M. P. *Riemannian Geometry*, Birkhäuser, Boston, 1992.
- [8] PUCHEU, M. L. *Teorias da gravitação e geometria de Weyl*, tese de doutorado, João Pessoa, Universidade Federal da Paraíba, 2013.
- [9] ALVES JÚNIOR, F. A. P. *Modelos cosmológicos numa teoria geométrica escalar-tensorial da gravitação: aspectos clássicos e quânticos*, tese de doutorado, João Pessoa, Universidade Federal da Paraíba, 2016.

- [10] LOBO, I. P. *Singularidades do espaço-tempo em variedades de Weyl*, dissertação de mestrado, João Pessoa, Universidade Federal da Paraíba, 2013.
- [11] LIMA, R. G. *Teoria da gravitação num espaço-tempo de Weyl não-integrável*, dissertação de mestrado, João Pessoa, Universidade Federal da Paraíba, 2016.
- [12] CACCIATORI, S.; Gorini, V.; KAMENSGCHIK, A. *Special relativity in the 21st century*, Annalen der Physik, **17**, 9-10, 728-768, 2008.
- [13] ALDROVANDI, R.; PEREIRA, J. G. *de Sitter relativity: a new road to quantum gravity?*, Foundations of Physics, **39**, (2):1-19, 2009.
- [14] SCHWARZSCHILD, K. Sitzungsber. *On the gravitational field of a mass point according to Einstein's theory*, Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.) **1916**, 189, 1916. Tradução para o inglês disponível em <http://arxiv.org/abs/physics/9905030>.
- [15] REISSNER, H. *Über die Eigengravitation des elektrischen Feldes nach der Einstein'schen Theorie*, Annalen der Physik 50: 106-120, 1916.
- [16] NORDSTRÖM, G. *On the Energy of the Gravitational Field in Einstein's Theory*, Verhandl. Koninkl. Ned. Akad. Wetenschap., Afdel. Natuurk., Amsterdam 26: 1201-1208, 1918.
- [17] PUCHEU, M. L.; ALVES JÚNIOR, F. A. P.; BARRETO, A. B.; ROMERO, C. *Cosmological models in Weyl geometrical scalar-tensor theory*, Physical Review D, **94**, p. 064010-064023, 2016.
- [18] NEWTON, I., *The Mathematical Principles of Natural Philosophy*, 1729.
- [19] ABDALLA, E.; SAA, A. *Cosmologia: dos mitos ao centenário da relatividade*, São Paulo: Editora Edgard Blücher Ltda, 2010.
- [20] LEIBNIZ, G.W. Correspondência com Clarke - coleção *Os pensadores* (Trad. Carlos Lopes de Mattos), São Paulo: Abril Cultural, 2^a edição, p. 177, 1983.
- [21] MACH, E. *Die Mechanik in ihrer Entwicklung*, . Leipzig, 1883.
- [22] BRANS, C. H.; DICKE, R. H. *Mach's principle and a relativistic theory of gravitation*, Phys. Rev., **124**, 925, 1961.

-
- [23] D'INVERNO R. *Introducing Einstein's Relativity*, Oxford University Press, Oxford, 1992.
- [24] ALMEIDA, T. S.; PUCHEU, L. M.; ROMERO, C; FORMIGA, J. B. *From Brans-Dicke gravity to a geometrical scalar-tensor theory*, Phys. Rev. D, **89**, 064047, 2014.
- [25] EHLERS, J.; PIRANI, F.; SCHILD, A. *Republication of: The geometry of free fall and light propagation*, Gen. Rel.Grav. **44**, Issue 6, 1587, 2012.
- [26] O'NEILL, B., *Semi-Riemannian Geometry With Applications to Relativity*. Academic Press., 1983.
- [27] PERLICK., V., *Characterization of standard clocks by means of light rays and freely falling particles*, Gen. Relativ. Gravit., **19**:1059-1073, 1987.
- [28] BAO, D.; CHERN, S. S; CHEN, Z. *An introduction to Riemann-Finsler geometry*, Springer, 1991.
- [29] DMITRY, V. Z., *The Inverse Problem of the Calculus of Variations*, Springer, 2015.
- [30] WEYL, H. *Gravitation und Elektrizität*, Sitzungsber Deutsch. Akad. Wiss. Berlin, 465, 1918.
- [31] ADLER, A.; BAZIN, M.; SCHIFFER, M. *Introduction to General Relativity*, Ch. 15, McGraw-Hill, 1975.
- [32] AVALOS, R.; DAHIA, F.; ROMERO, C. *A note on the problem of proper time in Weyl spacetime*, Foundations of Physics, **48**, 253, 2018.
- [33] NOVELLO, M., *Theoretical Cosmology Proceedings of VII Brazilian School of Cosmology and Gravitation*, pag. 344, 1972.
- [34] LINDSTRÖM, U. *The Palatini variational principle and class of scalar-tensor theories*, Nuovo Cimento B 35, 1976.
- [35] HELMHOLTZ, H. *Ueber die physikalische bedeutung des prinicips der Kleinsten wirkung*, Journal für die reine and angewandte Mathematik, **100**, 137, 1887.
- [36] LORENTZ, A. et al. *The principle of relativity*, New York: Dover publications, 1952.
- [37] ARNOWITT, R.; DESER, S.; MISNER, C. *Dynamical structure and definition of energy in general relativity*, Phys. Rev, **116**, 5, 1959.

- [38] WALD, R. M., *General relativity*, The University of Chicago Press, 1984.
- [39] YVONNE, C. B. *General Relativity and Einstein's equations*, Oxford University Press, Oxford, 2009.
- [40] RINGSTRÖM, H., *Origins and development of the Cauchy problem in general relativity*, Classical and quantum gravity, vol. 32, no. 12, 2015.
- [41] FOURÈS-BRUHAT, Y. *Théorème d'existence pour certains systèmes d'équations aux dérivées partielles non linéaires*, Acta Math. 88, 141-225, 1952.
- [42] EINSTEIN, A. *Näherungsweise Integration der Feldgleichungen der Gravitation*, Sitz. Ber. der Königlich Preußichen Akad. Wiss. Berl. 688-96, 1916.
- [43] GREINER, W.; REINHARDT, J. *Field Quantization*, Springer, 1996.
- [44] ATIYAH, M. *Einstein and geometry*, Current Science, **89**, 25, 2041-2044, 2005.
- [45] NOVELLO, M.; OLIVEIRA, L. A. R.; SALIM, J. M.; ELBAZ, E. *Geometrized instatons and the creation of the universe*, International Journal of Modern Physics 1, **3**, 641-677, 1993.
- [46] SALIM, J. M.; SAUTÚ, S. L. *Gravitational theory in Weyl integrable spacetime*, Classical and Quantum Gravity, **13**, 353-360, 1996.
- [47] MIRITZIS, J. *Isotropic cosmologies in Weyl geometry*, Classical and Quantum Gravity, **21**, 3043, 2004.
- [48] LOBO, I. P.; BARRETO, A. B.; ROMERO, C. *Space-time singularities in Weyl manifolds*, Europhysics Journal, **C75**, 448, 2015.
- [49] PENROSE, R. *Road to Reality: A Complete Guide to the Laws of the Universe*, Jonathan Cape, London, 2004.
- [50] ROMERO, C.; LIMA, R. G; SANOMIYA, T. A. T. *One hundred years of Weyl's (unfinished) unified field theory*, Studies in history and philosophy of modern physics, **66**, p. 019.02.005, 2019.
- [51] SANOMIYA, T. A. T.; LOBO, I.; FORMIGA, J. B.; ROMERO, C. *Weyl's unified field theory: perspectives for a new approach*, International Journal of Modern Physics A, **35**, 204005, 2020.

-
- [52] AVALOS, R.; LOBO, I. P.; SANOMIYA, T.; ROMERO, C. *On the Cauchy problem for Weyl-geometric scalar-tensor theories of gravity*, Journal of Mathematical Physics, v. 59, p. 062502, 2018.
- [53] SANOMIYA T. A. T.; LOBO I. P.; FORMIGA J. B.; DAHIA F.; ROMERO, C. *An Invariant Approach to Weyl's unified field theory*, ArXiv 2002.00285, 2020.