Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós–Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Espaços de Sobolev de funções simétricas e aplicações

Raoní Cabral Ponciano

João Pessoa – PB
Maio de 2019

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós–Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Espaços de Sobolev de funções simétricas e aplicações

por

Raoní Cabral Ponciano

sob a orientação do

Prof. Dr. João Marcos Bezerra do Ó

João Pessoa – PB
Maio de 2019

Catalogação na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

P795e Ponciano, Raoní Cabral.
Espaços de Sobolev de funções simétricas e aplicações / Raoní Cabral Ponciano. - João Pessoa, 2021.
88 f.

Orientação: João Marcos Bezerra do Ó.
Dissertação (Mestrado) - UFPB/CCEN.

1. Matemática. 2. Imersão de Sobolev. 3. Simetria Radial. 4. Simetria Parcial. I. do Ó, João Marcos Bezerra. II. Título.

UFPB/BC CDU 51(043)

Elaborado por MARILIA RIANNY PEREIRA COSMOS - CRB-15/862

Espaços de Sobolev de funções simétricas e aplicações

por

Raoní Cabral Ponciano [1]

Dissertação apresentada ao corpo docente do programa de pós-graduação em matemática da Universidade Federal da Paraíba como requisito parcial para a obtenção do título de mestre em Matemática.

Área de Concentração: Análise

Aprovada em 10 de maio de 2019.

Banca Examinadora:

João Marcos Bezerra do Ó

Prof. Dr. João Marcos Bezerra do Ó – UFPB
(Orientador)

Ederson Moreira dos Santos

Prof. Dr. Ederson Moreira dos Santos – USP

Prof. Dr. Olimpio Hiroshi Miyagaki – UFJF

Uberlandio Batista Severo

Prof. Dr. Uberlandio Batista Severo – UFPB

[1] O autor foi bolsista do CNPQ durante a elaboração desta dissertação.

“Soli Deo Gloria”.
“Somente a Deus a glória”.

Desconhecido

Agradecimentos

- Sobretudo, agradeço a Deus por me dar capacidade, me guiar e usar pessoas ao meu redor na finalização desta dissertação.

- À minha família (Ronaldo, Igeíze, Rodrigo, Eulaine e etc) por me apoiar financeiramente, emocionalmente e outras ajudas. Além disso, agradeço pelos conselhos importantíssimos que contribuíram na minha vida, incluindo a conclusão do presente trabalho.

- Deixo meu agradecimento aos professores João Marcos e Flávia que guiaram, e guiam, a mim nessa jornada desafiadora na Matemática. Meu agradecimento especial ao professor João Marcos pela orientação nesta dissertação.

- À todos meus amigos do Laboratório Milênio e do Mestrado da UFPB pelo compartilhamento de momentos de dificuldade. Em especial, deixo meu agradecimento a minha noiva, Angélica, por me ajudar na escrita desta dissertação e por estar sempre ao meu lado, me ajudando a ser um homem piedoso.

- Finalmente, agradeço aos professores Ederson Moreira dos Santos, Olimpio Hiroshi Miyagaki e Uberlandio Batista Severo por concordarem participar da banca, e assim, contribuir com este trabalho.

Resumo

Neste trabalho, faremos um estudo detalhado sobre as imersões de Sobolev de espaços com alguma simetria (radial ou parcial) em espaços de Lebesgue com peso. Estes resultados foram desenvolvidos por Djairo Guedes de Figueiredo, Ederson Moreira dos Santos e Olímpio Hiroshi Miyagaki em [8]. Este estudo garante solução (ou soluções) não trivial de equações de Hénon $-\Delta u = |x|^{\alpha}|u|^{p-1}u$ e da equação biharmônica $\Delta^2 u = |x|^{\alpha}|u|^{p-1}u$. Além disso, veremos resultados de regularidade para as equações citadas acima.

Palavras-chave: Imersão de Sobolev, Simetria Radial, Simetria Parcial.

Abstract

In this work, we will detail the study about Sobolev embeddings in spaces with some (radial or parcial) symmetry into the weighted Lebesgue spaces. These results were developed by Djairo Guedes de Figueiredo, Ederson Moreira dos Santos and Olímpio Hiroshi Miyagaki in [8]. This study ensure solution (or solutions) non trivial for the Hénon's equation $-\Delta u = |x|^{\alpha}|u|^{p-1}u$ and for the biharmonic equation $\Delta^2 u = |x|^{\alpha}|u|^{p-1}u$. Futhermore, we will see results of regularity for these equations mentioned above.

Keywords: Sobolev Embedding, Radial Symmetry, Parcial Symmatry.

Sumário

Notações

A seguir, listamos algumas notações utilizadas neste trabalho.

- X' denota o dual topológico de um espaço de Banach X;
- C,C_1,C_2, C_i,C^3_{ijk},... denotam constantes positivas, possivelmente diferentes;
- $\blacksquare$ denota o final de uma demonstração;
- $|\cdot|$ denota a norma euclidiana de $\mathbb{R}^N$;
- $\rightharpoonup$ denota convergência fraca em um espaço normado;
- $\mathrm{supp}(u)$ denota o suporte da função u;
- $u^+ = \max\{u, 0\}$ e $u^- = \max\{-u, 0\}$;
- $S_r(a) = \{x \in \mathbb{R}^N / |x - a| = r\}$;
- ω_N denota o volume $N - 1$-dimensional de $S_1(0)$;
- S^l denota a esfera unitária centrada na origem de $\mathbb{R}^{l+1}$;
- $\lfloor x \rfloor$ denota o maior dos inteiros menores ou iguais a x;
- T^* denota o adjunto de um operador linear T.

Introdução

Sabemos da importância da imersão de Sobolev para a teoria abstrata de Sobolev, bem como suas aplicações. Acrescentando alguma simetria (radial ou parcial) no nosso espaço podemos concluir algum resultado mais forte? Em várias situações, faz-se necessário buscar imersões desse tipo, como nos casos da equação do biharmônico $\Delta^2 u = |x|^\alpha |u|^{p-1}u$ e da equação de Hénon $-\Delta u = |x|^\alpha |u|^{p-1}u$. Esses fatos já são um grande motivo para o nosso interesse em tal teoria.

Ao estudarmos equações diferenciais parciais (EDP's), é de suma importância a utilização de resultados de imersões contínuas e compactas para garantir existência de solução fraca. Nos resultados estudados, obtemos soluções clássicas radiais e não radiais (com simetria parcial) para as equações do birharmônico e de Hénon acima.

Nosso objetivo é estudar esses tipos de imersões e, no presente trabalho, detalhamos o artigo [8] de Djairo Guedes de Figueiredo, Ederson Moreira dos Santos e Olímpio Hiroshi Miyagaki. Portanto, todas as principais demonstrações são devidas aos três autores citados anteriormente. Nosso trabalho, está dividido em três capítulos:

O Capítulo 1 é dedicado às demonstrações dos lemas radiais e da desigualdade de Hardy que serão necessários para demonstrar os principais resultados deste capítulo, os quais são as imersões de Sobolev radial e parcial.

No Capítulo 2, estudamos as aplicações dos resultados mostrados no Capítulo 1 nas equações do biharmônico e de Hénon. Este capítulo contém os resultados, bem como suas provas, para obtenção de solução fraca radial e parcial.

Por fim, o Capítulo 3 possui todos as demonstrações necessárias para garantir que soluções fracas das nossas equações estudadas sejam, de fato, soluções clássicas. Em outras palavras, o estudo de regularidade das soluções obtidas no Capítulo 2.

Apresentaremos os principais resultados deste trabalho começando com algumas estimativas para funções radiais no espaço $W^{m,p}(B)$, onde m é um inteiro positivo, $p \geq 1$ número real e $B \subseteq \mathbb{R}^N$ denota a bola unitária de centro na origem. Denotaremos $W^{m,p}_{\text{rad}}(B)$ como o espaço das funções em $W^{m,p}(B)$ radialmente simétricas.

Além disso, denotaremos

$$L^p(B,|x|^\beta) := \left\{ u : B \to \mathbb{R} \text{ mensurável} : \int_B |u|^p |x|^\beta \mathrm{d}x < \infty \right\}.$$

Teorema 0.1 (Imersões de Sobolev em espaços de funções radiais)**.** *Sejam m inteiro positivo e $p \geq 1$ número real.*

(1) Toda função $u \in W^{m,p}_{\mathrm{rad}}(B)$ é quase sempre igual a uma função $U \in C^{m-1}(\overline{B} \setminus \{0\})$. Além disso, $D^\alpha U(x)$ existe q.t.p. $|x| \in (0,1)$, para todo α com $|\alpha| = m$;

(2) Se $N > mp$, então existe $C > 0$ constante tal que dado $u \in W^{m,p}_{\mathrm{rad}}(B)$ tem-se

$$|U(x)| \leq C \frac{\left[\int_B \left(\sum_{j=0}^m |D^j u|^p \mathrm{d}x\right)\right]^{\frac{1}{p}}}{|x|^{(N-mp)/p}}, \qquad \forall x \in \overline{B} \setminus \{0\}, \tag{1}$$

com U como no item (1). Como consequência, $W^{m,p}_{\mathrm{rad}}(B)$ está continuamente imerso em $L^q(B,|x|^\beta)$ para todos $\beta \geq 0$ e $1 \leq q \leq \frac{p(N+\beta)}{N-mp}$;

(3) Se $N = mp$ e $p > 1$, então existe $C > 0$ constante tal que dado $u \in W^{m,p}_{\mathrm{rad}}(B)$ tem-se

$$|U(x)| \leq C \left[\int_B \left(\sum_{j=0}^n |D^j u|^p\right) \mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{p}} \left(|\log |x||^{\frac{p-1}{p}} + 1\right), \qquad \forall x \in \overline{B} \setminus \{0\}, \tag{2}$$

com U como no item (1);

(4) $W^{N,1}_{\mathrm{rad}}(B)$ está continuamente imerso em $C(\overline{B})$.

Corolário 0.2. *Sejam $N > mp$ e $\beta \geq 0$. Se $1 \leq q < \frac{p(N+\beta)}{N-mp}$, então a imersão $W^{m,p}_{\mathrm{rad}}(B) \hookrightarrow L^q(B,|x|^\beta)$ é compacta.*

Teorema 0.3 (Desigualdades do tipo Hardy)**.** *Sejam $N > mp$ e $p \geq 1$. Para cada $j = 1, \ldots, m$ existe uma constante $C_j > 0$ tal que dado $u \in W^{m,p}_{\mathrm{rad}}(B)$ tem-se*

$$\int_B \left| \frac{|D^{m-j} u(x)|}{|x|^j} \right|^p \mathrm{d}x \leq C_j \int_B \sum_{i=m-j}^m |D^i u(x)|^p \mathrm{d}x. \tag{3}$$

Teorema 0.4 (Imersões de Sobolev em espaços com simetria parcial)**.** *Sejam l um inteiro tal que $2 \leq N - l \leq l$, onde $m \geq 1$ inteiro e $p \geq 1$ real. Defina $p_l := \frac{p(l+1)}{l+1-mp}$ se $l + 1 > mp$ e defina p_l como qualquer número em (p, ∞) se $l + 1 \leq mp$. Também, defina $q_l := N - (N - l + 1)\frac{p}{p_l}$. Seja*

$$W^{m,p}_l(B) = \{u \in W^{m,p}(B) / u(y,z) = u(|y|,|z|), \forall (y,z) \in B\},$$

onde $y = (y_1, \dots, y_l)$, $z = (z_1, \dots, z_{N-l})$ e $x = (y, z)$. Se $\beta > \frac{p_l q_l}{p}$, então existe $C > 0$ constante tal que dado $u \in W_l^{m,p}(B)$ tem-se

$$\left(\int_B |x|^\beta |u|^{p_l} \,\mathrm{d}x \right)^{\frac{p}{p_l}} \leq C \int_B \sum_{j=0}^{m} |D^j u|^p \mathrm{d}x. \tag{4}$$

Corolário 0.5. *Sejam l, m, N, p, p_l, q_l e β como no Teorema 0.4. Então a imersão $W_l^{m,p}(B) \hookrightarrow L^q(B, |x|^\beta)$ é contínua se $1 \leq q \leq p_l$ e é compacta se $1 \leq q < p_l$.*

Estudaremos uma aplicação dessas imersões no seguinte problema de contorno para a equação do biharmônico

$$\begin{cases} \Delta^2 u = |x|^\alpha |u|^{p-1} u \text{ em } B, \\ \mathcal{B}u = 0 \text{ sobre } \partial B, \end{cases} \tag{5}$$

onde $\alpha > 0$ e $\mathcal{B}u = u, \Delta u$ (Condição de Navier) ou $\mathcal{B}u = u, \frac{\partial u}{\partial \nu}$ (Condição de Dirichlet). Nosso foco é estudar existência, multiplicidade e regularidade de soluções obtidas por métodos variacionais.

As soluções de (5) começam em certo espaço de Sobolev de funções simétricas. Neste trabalho daremos atenção especial ao processo de regularização, o qual não está completo nem no caso da equação de Hénon

$$\begin{cases} -\Delta u = |x|^\alpha |u|^{p-1} u \text{ em } B, \\ u = 0 \text{ sobre } \partial B, \end{cases} \tag{6}$$

onde $\alpha > 0$.

Teorema 0.6. *[Existência de uma solução radial de (5) com condição de Navier] Seja $N \geq 5$. Considere (5) com condição de Navier (note que $u > 0$ se, e somente se, $-\Delta u > 0$ em B).*

(1) Se $p \geq \frac{N+2(2+\alpha)}{N-4}$, então (5) não possui solução clássica positiva $u \in C^4(\overline{B})$;

(2) Se $1 < p < \frac{N+2(2+\alpha)}{N-4}$, então (5) possui uma solução positiva $u \in C^4(\overline{B})$. Além disso u e $-\Delta u$ são radiais e estritamente decrescentes.

Teorema 0.7. *[Existência de soluções com simetria parcial de (5) com condição de Dirichlet] Se $N = 4$ ou $N = 5$ suponha $p \geq 1$. Se $N \geq 6$ suponha $1 < p < \frac{N+3}{N-5}$. Então existe $\alpha_0(p, N) > 0$ tal que (5) com $\mathcal{B}u = u, \frac{\partial u}{\partial \nu}$ possui pelo menos $\lfloor \frac{N}{2} \rfloor - 1$ soluções em $C^4(\overline{B})$ não radiais para cada $\alpha > \alpha_0(p, N)$. Para cada uma dessas soluções u, existe um inteiro l com $2 \leq N - l \leq l$ tal que $u(y, z) = u(|y|, |z|)$ com $(y, z) \in B$, onde $y = (y_1, \dots, y_l)$ e*

$z = (z_1, \ldots, z_{N-l})$. *Além disso, todas essas soluções satisfazem* $u > 0$ *e* Δu *muda de sinal em* B.

Teorema 0.8. *[Existência de soluções com simetria parcial de (5) com condições de Navier] Suponha*

(H1) $N \geq 4$ *e* l *é um inteiro tal que* $2 \leq N - l \leq l$;

(H2) $\frac{2(N-l)}{N-l-1} < p + 1 < 2_l$, *onde* $2_l := \frac{2(l+1)}{l-3}$ *se* $l \geq 4$ *e* 2_l *é qualquer número em* $(2, \infty)$ *se* $l < 4$.

Para cada (p, l) *satisfazendo (H1) e (H2) existe* $\alpha_0(p, Nl) > 0$ *tal que para todo* $\alpha > \alpha_0(p, N, l)$, *(5) com* $\mathcal{B}u = u, \Delta u$ *possui uma solução* u_l *em* $C^4(\overline{B})$ *não radial tal que* $u_l(y, z) = u_l(|y|, |z|)$ *com* $(y, z) \in B$, *onde* $y = (y_1, \ldots, y_l)$ *e* $z = (z_1, \ldots, z_{N-l})$. *Além disso, qualquer solução* u_l *satisfaz* $u_l, -\Delta u_l > 0$ *em* B.

Capítulo 1

Demonstrações das imersões e da desigualdade de Hardy

1.1 Os Lemas Radiais e as Imersões

Uma função radial em B pode ser entendida como uma função em $[0,1)$. Associada a uma função em $W^{m,p}_{\text{rad}}(B)$ existe v definida em $(0,1)$ tal que $v(t) = u(x)$ com $t = |x|$.

Dados $m \geq 1$ inteiro e $p \geq 1$ real defina $W^{m,p}((0,1), t^{N-1})$ como o espaço de Sobolev dado por

$$\Big\{ v : (0,1) \to \mathbb{R}; v \text{ possui derivadas fracas até ordem } m \text{ e}$$

$$\int_0^1 |v^{(j)}(t)|^p t^{N-1} \, \mathrm{d}t < \infty \; \forall j = 0, 1, \ldots, m \Big\}.$$

Esse espaço é munido da norma

$$\|v\|_{W^{m,p}_{N-1}} = \left(\int_0^1 \sum_{j=0}^{m} |v^{(j)}(t)|^p t^{N-1} \, \mathrm{d}t \right)^{\frac{1}{p}}, \qquad v \in W^{m,p}((0,1), t^{N-1}).$$

Vejamos que $W^{m,p}((0,1), t^{N-1})$ é espaço de Banach.

Prova. Seja (v_n) sequência de Cauchy em $W^{m,p}((0,1), t^{N-1})$. Então, para cada $i = 0, 1, \ldots, m$, $(v_n^{(i)})$ é sequência de Cauchy em $L^p((0,1), t^{N-1})$. Como $L^p((0,1), t^{N-1})$ é Banach (pois $L^p((0,1), t^{N-1}) = L^p((0,1), \mu)$, com $\mu(E) := \int_E t^{N-1} \mathrm{d}t$, é Banach devido ao Teorema 4.8 em [3]), para cada $i = 0, 1, \ldots, m$, existe $v_i \in L^p((0,1), t^{N-1})$ tal que

$$v_n^{(i)} \to v_i \text{ em } L^p((0,1), t^{N-1}). \tag{1.1}$$

Defina $v = v_0$. Resta ver que, para cada $i = 0, 1, \ldots, m$, existe $v^{(i)}$ (derivada fraca) e $v^{(i)} = v_i$, pois teríamos $v_n^{(i)} \to v^{(i)}$ em $L^p((0,1), t^{N-1})$ para todo $i = 0, 1, \ldots, m$ e, dessa forma, $v_n \to v$ em $W^{m,p}((0,1), t^{N-1})$. Sabemos que, para cada $\varphi \in C_0^\infty(0,1)$,

$$\int_0^1 v_n \varphi^{(i)} \mathrm{d}t = (-1)^i \int_0^1 v_n^{(i)} \varphi \mathrm{d}t, \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{ e } i = 0, 1, \ldots, m. \tag{1.2}$$

Tome $M, \varepsilon > 0$ tais que $\operatorname{supp} \varphi \subset (\varepsilon, 1 - \varepsilon)$ e $|\varphi| \leq M$. Por (1.1) e Hölder tem-se, para todo $i = 1, \ldots, m$,

$$\begin{aligned}
\left| \int_0^1 \left(v_n^{(i)} - v_i \right) \varphi \mathrm{d}t \right| &\leq \int_0^1 \left| v_n^{(i)} - v_i \right| t^{\frac{N-1}{p}} |\varphi| t^{-\frac{N-1}{p}} \mathrm{d}t \\
&\leq \left(\int_0^1 \left| v_n^{(i)} - v_i \right|^p t^{N-1} \mathrm{d}t \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 |\varphi|^{\frac{p}{p-1}} t^{-\frac{N-1}{p-1} p} \mathrm{d}t \right)^{\frac{p-1}{p}} \\
&= \| v_n^{(i)} - v_i \|_{L^p((0,1), t^{N-1})} \left(\int_\varepsilon^{1-\varepsilon} |\varphi|^{\frac{p}{p-1}} t^{-\frac{N-1}{p-1} p} \mathrm{d}t \right)^{\frac{p-1}{p}} \\
&\leq \| v_n^{(i)} - v_i \|_{L^p((0,1), t^{N-1})} \left(M^{\frac{p}{p-1}} \varepsilon^{-\frac{N-1}{p-1} p} \int_\varepsilon^{1-\varepsilon} \mathrm{d}t \right)^{\frac{p-1}{p}} \overset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0.
\end{aligned}$$

Assim

$$\int_0^1 v_n^{(i)} \varphi \mathrm{d}t \to \int_0^1 v_i \varphi \mathrm{d}t \quad \forall i = 1, \ldots, m$$

e, analogamente,

$$\int_0^1 v_n \varphi^{(i)} \mathrm{d}t \to \int_0^1 v \varphi^{(i)} \mathrm{d}t \quad \forall i = 1, \ldots, m.$$

Usando isto em (1.2) temos que

$$\int_0^1 v \varphi^{(i)} \mathrm{d}t = (-1)^i \int_0^1 v_i \varphi \mathrm{d}t \quad \forall i = 1, \ldots, m.$$

Então existe $v^{(i)}$ e $v^{(i)} = v_i$ para todo $i = 1, \ldots, m$. ∎

Observação 1.1. $v \in W^{m,p}((0,1), t^{N-1})$ se, e somente se, existe $V \in C^{m-1}((0,1])$ tal que $V^{(m)}(t)$ existe para quase todo $t \in (0,1)$, $V^{(m)}$ é uma função mensurável, $V^{(j)} = v^{(j)}$ q.t.p. em $(0,1)$ e $\int_0^1 |V^{(j)}(t)|^p t^{N-1} \mathrm{d}t < \infty$ para cada $j = 0, 1, \ldots, m$.

Prova. A recíproca é imediata. Primeiramente suponhamos $v \in W^{1,p}((0,1), t^{N-1})$. Note que

$$v \in W^{1,p}\left(\left(\frac{1}{n}, 1 \right) \right) \quad \forall n = 2, 3, \ldots \tag{1.3}$$

Para verificar isto basta notar que dado $n \in \{2, 3, \ldots\}$ tem-se

$$\int_{\frac{1}{n}}^{1} |v(t)|^p \, \mathrm{d}t \leq n^{N-1} \int_{\frac{1}{n}}^{1} |v(t)|^p t^{N-1} \, \mathrm{d}t \leq n^{N-1} \int_{0}^{1} |v(t)|^p t^{N-1} < \infty$$
$$\int_{\frac{1}{n}}^{1} |v'(t)|^p \, \mathrm{d}t \leq n^{N-1} \int_{\frac{1}{n}}^{1} |v'(t)|^p t^{N-1} \, \mathrm{d}t \leq n^{N-1} \int_{0}^{1} |v'(t)|^p t^{N-1} < \infty.$$

Por (1.3) e pelo Teorema 8.2 de [3], existe (para cada n) $V_n \in C([\frac{1}{n}, 1])$ tal que $V_n = v$ q.t.p. em $(\frac{1}{n}, 1)$. Para cada $t \in (0, 1]$ fixe n com $\frac{1}{n} < t$ e defina $V(t) := V_n(t)$. Note que V está bem definida devido ao fato que $V_n\big|_{(\frac{1}{m}, 1]} = V_m$ se $n \geq m$. Segue da definição de V que a própria V é a função procurada.

Agora suponhamos $v \in W^{m,p}((0,1), t^{N-1})$. Como $v^{(m-1)} \in W^{1,p}((0,1), t^{N-1})$ obtemos que $v^{(m-1)}$ possui um representante contínuo. Assim segue da Observação 6 logo após o Teorema 8.2 de [3]. ∎

Tendo em vista essa observação, vamos denotar o representante contínuo de v por apenas v.

Teorema 1.2. *Se $u \in W^{m,p}_{\text{rad}}(B)$, então $v \in W^{m,p}((0,1), t^{N-1})$. Além disso, para quase todo $|x| \in (0,1)$ tem-se*

$$|D^j u(x)| \geq |v^{(j)}(|x|)|, \qquad \forall j = 0, 1, \ldots, m. \tag{1.4}$$

Prova. Dada $u \in W^{m,p}_{\text{rad}}(B)$, considere $v : (0,1) \to \mathbb{R}$ tal que $v(t) := u(x)$, onde $t = |x|$.

Adotaremos as seguintes notações, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_N) \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^N$, $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_N$, $x_\alpha = \Pi_{i=1}^N x_i^{\alpha_i}$ (adotaremos $0^0 := 1$), $D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial^{\alpha_1} x_1 \cdots \partial^{\alpha_N} x_N}$ e $e_i \in \mathbb{R}^N$ o i-ésimo vetor da base canônica. Por fim, a soma $\sum_{|\alpha|=j} f(\alpha)$ é definida, de forma indutiva, da seguinte maneira:

$$\sum_{|\alpha|=1} f(\alpha) = \sum_{i=1}^{N} f(e_i) \text{ e } \sum_{|\alpha|=j+1} f(\alpha) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{|\alpha|=j} f(\alpha + e_i), \qquad \forall j \geq 1.$$

Afirmação 1: Existem as derivadas fracas de v até ordem m e são dadas pela relação

$$v^{(j)}(|x|) = \sum_{|\alpha|=j} D^\alpha u(x) \frac{x_\alpha}{|x|^j}, \qquad \text{q.t.p. } |x| \in (0,1), \forall j = 1, \ldots, m. \tag{1.5}$$

Afirmação 2: $\operatorname{div}(\frac{x}{|x|^N}) = 0$ e $\nabla(\frac{x_\alpha}{|x|^j}) \cdot \nabla(|x|) = 0$, onde $j = |\alpha|$. Em particular $\nabla(\frac{\partial}{\partial x_i}|x|) \cdot \nabla(|x|) = 0$.

Prova da Afirmação 2: Note que

$$
\begin{aligned}
\operatorname{div}\left(\frac{x}{|x|^N}\right) &= \sum_{i=1}^{N}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{x_i}{|x|^N}\right) = \sum_{i=1}^{N}\frac{1.|x|^N - x_i N|x|^{N-1}.\frac{x_i}{|x|}}{|x|^{2N}}\\
&= \sum_{i=1}^{N}\frac{|x|^{N+1} - Nx_i^2|x|^{N-1}}{|x|^{2N+1}} = \frac{1}{|x|^{2N+1}}\left(N|x|^{N+1} - N|x|^{N-1}\sum_{i=1}^{N}x_i^2\right)\\
&= \frac{1}{|x|^{2N+1}}\left(N|x|^{N+1} - N|x|^{N+1}\right) = 0.
\end{aligned}
$$

Além disso, (defina $x_{\alpha-e_i} = 1$ se $\alpha_i = 0$)

$$
\begin{aligned}
\nabla\left(\frac{x_\alpha}{|x|^j}\right)\cdot\nabla(|x|) &= \sum_{i=1}^{N}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{x_\alpha}{|x|^j}\right)\frac{x_i}{|x|} = \sum_{i=1}^{N}\frac{x_i}{|x|}\frac{\alpha_i x_{\alpha-e_i}|x|^j - x_\alpha j|x|^{j-1}\frac{x_i}{|x|}}{|x|^{2j}}\\
&= \sum_{i=1}^{N}\frac{\alpha_i x_\alpha|x|^{j+1} - x_\alpha x_i^2 j|x|^{j-1}}{|x|^{2j+2}}\\
&= \frac{x_\alpha}{|x|^{2j+2}}\left(|\alpha||x|^{j+1} - j|x|^{j-1}\sum_{i=1}^{N}x_i^2\right) = \frac{x_\alpha}{|x|^{2j+2}}(j|x|^{j+1} - j|x|^{j+1})\\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Prova da Afirmação 1: Sejam $\varphi \in C_c^\infty(0,1)$ e $\psi(x) := \varphi(|x|)$ com $x \in B$. Vejamos que

$$
\varphi^{(j)}(|x|) = \sum_{|\alpha|=j} D^\alpha\psi(x)\frac{x_\alpha}{|x|^j}, \qquad \forall x \in B\backslash\{0\}, \forall j \geq 1. \tag{1.6}
$$

Mostremos por indução em j. Para $j = 1$, como $\frac{\partial\psi}{\partial x_i}(x) = \varphi'(|x|)\frac{x_i}{|x|}$, temos que

$$
\varphi'(|x|) = \frac{\varphi'(|x|)}{|x|^2}\sum_{i=1}^{N}x_i^2 = \sum_{i=1}^{N}\varphi'(|x|)\frac{x_i^2}{|x|^2} = \sum_{i=1}^{N}\frac{\partial\psi}{\partial x_i}(x)\frac{x_i}{|x|} = \sum_{|\alpha|=1}D^\alpha\psi(x)\frac{x_\alpha}{|x|},
$$

para todo $x \in B\backslash\{0\}$. Suponhamos válido para $j \geq 1$. Assim

$$
\varphi^{(j)}(|x|) = \sum_{|\alpha|=j} D^\alpha\psi(x)\frac{x_\alpha}{|x|^j}, \qquad \forall x \in B\backslash\{0\}.
$$

Logo, para todo $i = 1, \ldots, N$, tem-se

$$
\varphi^{(j+1)}(|x|)\frac{x_i}{|x|} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\varphi^{(j)}(|x|)\right) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_{|\alpha|=j}D^\alpha\psi(x)\frac{x_\alpha}{|x|^j}\right) \qquad \forall x \in B\backslash\{0\}.
$$

Portanto, pela Afirmação 2,

$$\begin{aligned}
\varphi^{(j+1)}(|x|) &= \sum_{i=1}^{N} \varphi^{(j+1)}(|x|)\frac{x_i^2}{|x|^2} = \sum_{i=1}^{N}\left(\varphi^{(j+1)}(|x|)\frac{x_i}{|x|}\right)\frac{x_i}{|x|} \\
&= \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_{|\alpha|=j} D^{\alpha}\psi(x)\frac{x_\alpha}{|x|^j}\right)\frac{x_i}{|x|} \\
&= \sum_{i=1}^{N}\sum_{|\alpha|=j} D^{\alpha+e_i}\psi(x)\frac{x_\alpha}{|x|^j}\frac{x_i}{|x|} + \sum_{|\alpha|=j} D^{\alpha}\psi(x)\nabla\left(\frac{x_\alpha}{|x|^j}\right)\cdot\nabla(|x|) \\
&= \sum_{|\alpha|=j+1} D^{\alpha}\psi(x)\frac{x_\alpha}{|x|^{j+1}} \qquad \forall x \in B\backslash\{0\}.
\end{aligned}$$

Isso conclui (1.6).

Para cada $j = 1, 2, \ldots, N$ e $\varphi \in C_c^{\infty}(0,1)$ temos que

$$\begin{aligned}
\int_0^1 v(t)\varphi^{(j)}(t)\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{\omega_N}\int_0^1 \frac{v(t)\varphi^{(j)}(t)}{t^{N-1}}\omega_N t^{N-1}\mathrm{d}t = \frac{1}{\omega_N}\int_0^1\int_{S_r(0)} \frac{u(x)\varphi^{(j)}(|x|)}{|x|^{N-1}}\mathrm{d}\sigma_x\mathrm{d}r \\
&= \frac{1}{\omega_N}\int_B u(x)\varphi^{(j)}(|x|)\frac{1}{|x|^{N-1}}\,\mathrm{d}x \\
&\overset{(1)}{=} \frac{1}{\omega_N}\int_B u(x)\left(\sum_{|\alpha|=j} D^{\alpha}\psi(x)\frac{x_\alpha}{|x|^j}\right)\frac{1}{|x|^{N-1}}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\omega_N}\int_B \left(\sum_{|\alpha|=j} u(x)\frac{x_\alpha}{|x|^{j+N-1}}D^{\alpha}\psi(x)\right)\,\mathrm{d}x \\
&\overset{(2)}{=} \frac{(-1)^j}{\omega_N}\int_B \left(\sum_{|\alpha|=j} D^{\alpha}u(x)\frac{x_\alpha}{|x|^j}\right)\psi(x)\frac{1}{|x|^{N-1}}\,\mathrm{d}x \\
&= (-1)^j\int_0^1 g_j(t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t,
\end{aligned}$$

onde $g_j(|x|) := \sum_{|\alpha|=j} D^{\alpha}u(x)\frac{x_\alpha}{|x|^j}$. Resta apenas justificar (1) e (2) para provar a Afirmação 1. (1) é devido a (1.6). Justifiquemos (2). Pela integração por partes e por $\psi \in C_0^{\infty}(B)$, tem-se

$$\begin{aligned}
\int_B \left(\sum_{|\alpha|=j} u(x)\frac{x_\alpha}{|x|^{j+N-1}}D^{\alpha}\psi(x)\right)\mathrm{d}x &= \sum_{|\alpha|=j}\int_B u(x)\frac{x_\alpha}{|x|^{j+N-1}}D^{\alpha}\psi(x)\,\mathrm{d}x \\
&= (-1)^j\sum_{|\alpha|=j}\int_B D^{\alpha}\left(u(x)\frac{x_\alpha}{|x|^{j+N-1}}\right)\psi(x)\,\mathrm{d}x \\
&= (-1)^j\int_B\sum_{|\alpha|=j}\left[D^{\alpha}\left(u(x)\frac{x_\alpha}{|x|^{j+N-1}}\right)\right]\psi(x)\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Assim (2) segue do seguinte fato: se $u \in W^{m,p}(B)$ então, para todo $j = 1, \ldots, m$ e q.t.p. $x \in B \backslash \{0\}$,

$$\sum_{|\alpha|=j} D^{\alpha}\left(u(x)\frac{x_{\alpha}}{|x|^{j+N-1}}\right) = \sum_{|\alpha|=j} D^{\alpha}u(x)\frac{x_{\alpha}}{|x|^{j+N-1}}. \tag{1.7}$$

Mostraremos (1.7) por indução em j. Para $j = 1$, pela Afirmação 2, tem-se

$$\begin{aligned}\sum_{|\alpha|=1} D^{\alpha}\left(u(x)\frac{x_{\alpha}}{|x|^{N}}\right) &= \sum_{i=1}^{N}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(u(x)\frac{x_i}{|x|^N}\right) = \sum_{i=1}^{N}\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\frac{x_i}{|x|^N} + u(x)\operatorname{div}\left(\frac{x}{|x|^N}\right)\\ &= \sum_{|\alpha|=1} D^{\alpha}u(x)\frac{x_{\alpha}}{|x|^N}.\end{aligned}$$

Suponha que (1.7) seja válido para algum $j = 1, \ldots, m-1$. Mostremos que é válido para $j+1$. Pela Afirmação 2, temos que

$$\begin{aligned}\sum_{|\alpha|=j+1} D^{\alpha}\left(u(x)\frac{x_{\alpha}}{|x|^{j+N}}\right) &= \sum_{i=1}^{N}\sum_{|\alpha|=j} D^{\alpha+e_i}\left(u(x)\frac{x_{\alpha+e_i}}{|x|^{j+N}}\right)\\ &= \sum_{|\alpha|=j} D^{\alpha}\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{u(x)x_{\alpha}}{|x|^{j}}\frac{x_i}{|x|^N}\right)\\ &= \sum_{|\alpha|=j} D^{\alpha}\left[\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(u(x)\frac{x_{\alpha}}{|x|^{j}}\right)\frac{x_i}{|x|^N} + u(x)\frac{x_{\alpha}}{|x|^{j}}\operatorname{div}\left(\frac{x}{|x|^N}\right)\right]\\ &= \sum_{|\alpha|=j} D^{\alpha}\left[\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\frac{x_{\alpha}}{|x|^{j}}\frac{x_i}{|x|^N} + \frac{u(x)}{|x|^{N-1}}\nabla\left(\frac{x_{\alpha}}{|x|^{j}}\right)\cdot\nabla(|x|)\right]\\ &= \sum_{i=1}^{N}\sum_{|\alpha|=j} D^{\alpha}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\frac{x_i}{|x|}\right)\frac{x_{\alpha}}{|x|^{j+N-1}}\right]\\ &= \sum_{i=1}^{N}\sum_{|\alpha|=j} D^{\alpha}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\frac{x_i}{|x|}\right)\frac{x_{\alpha}}{|x|^{j+N-1}}\\ &\overset{(3)}{=} \sum_{i=1}^{N}\sum_{|\alpha|=j} D^{\alpha+e_i}u(x)\frac{x_i}{|x|}\frac{x_{\alpha}}{|x|^{j+N-1}}\\ &= \sum_{i=1}^{N}\sum_{|\alpha|=j} D^{\alpha+e_i}u(x)\frac{x_{\alpha+e_i}}{|x|^{j+N}} = \sum_{|\alpha|=j+1} D^{\alpha}u(x)\frac{x_{\alpha}}{|x|^{j+N}}\end{aligned}$$

Por fim (3) segue do seguinte fato: se $u \in W^{m,p}(B)$ então, para todos $i = 1, \ldots, N$, $j = 1, \ldots, m-1$ e q.t.p. $x \in B \backslash \{0\}$,

$$\sum_{|\alpha|=j} D^{\alpha}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\frac{x_i}{|x|}\right)\frac{x_{\alpha}}{|x|^{j}} = \sum_{|\alpha|=j} D^{\alpha+e_i}u(x)\frac{x_i}{|x|}\frac{x_{\alpha}}{|x|^{j}}. \tag{1.8}$$

Para mostrarmos (1.8) façamos indução em j. Para $j=1$ segue da Afirmação 2 que

$$\begin{aligned}
\sum_{|\alpha|=1} D^{\alpha}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\frac{x_i}{|x|}\right)\frac{x_\alpha}{|x|^1} &= \sum_{j=1}^{N}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\frac{x_i}{|x|}\right)\frac{x_j}{|x|} \\
&= \sum_{j=1}^{N}\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i}(x)\frac{x_i x_j}{|x|^2} + \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\frac{x_i}{|x|}\nabla\left(\frac{\partial}{\partial x_i}|x|\right)\cdot\nabla(|x|) \\
&= \sum_{|\alpha|=1} D^{\alpha+e_i}u(x)\frac{x_i}{|x|}\frac{x_\alpha}{|x|}.
\end{aligned}$$

Suponhamos que (1.8) seja válido para algum $j \in \mathbb{N}$, assim usando a Afirmação 2 e a identidade $f'g = (fg)' - fg'$ obtemos

$$\begin{aligned}
\sum_{|\alpha|=j+1} D^{\alpha}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\frac{x_i}{|x|}\right)\frac{x_\alpha}{|x|^{j+1}} &= \sum_{k=1}^{N}\sum_{|\alpha|=j}\frac{\partial}{\partial x_k}\left[D^{\alpha}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\frac{x_i}{|x|}\right)\right]\frac{x_\alpha}{|x|^j}\frac{x_k}{|x|} \\
&= \sum_{k=1}^{N}\sum_{|\alpha|=j}\left[\frac{\partial}{\partial x_k}\left[D^{\alpha}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\frac{x_i}{|x|}\right)\frac{x_\alpha}{|x|^j}\right] - D^{\alpha}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\frac{x_i}{|x|}\right)\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{x_\alpha}{|x|^j}\right)\right]\frac{x_k}{|x|} \\
&= \sum_{k=1}^{N}\frac{x_k}{|x|}\frac{\partial}{\partial x_k}\sum_{|\alpha|=j} D^{\alpha}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\frac{x_i}{|x|}\right)\frac{x_\alpha}{|x|^j} - \sum_{|\alpha|=j} D^{\alpha}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\frac{x_i}{|x|}\right)\nabla\left(\frac{x_\alpha}{|x|^j}\right)\cdot\nabla(|x|) \\
&= \sum_{k=1}^{N}\frac{x_k}{|x|}\frac{\partial}{\partial x_k}\sum_{|\alpha|=j} D^{\alpha+e_i}u(x)\frac{x_i}{|x|}\frac{x_\alpha}{|x|^j} - \sum_{|\alpha|=j} D^{\alpha+e_i}u(x)\frac{x_i}{|x|}\nabla\left(\frac{x_\alpha}{|x|^j}\right)\cdot\nabla(|x|) \\
&= \sum_{k=1}^{N}\sum_{|\alpha|=j}\frac{\partial}{\partial x_k}\left(D^{\alpha+e_i}u(x)\frac{x_i}{|x|}\frac{x_\alpha}{|x|^j}\right)\frac{x_k}{|x|} - \sum_{k=1}^{N}\sum_{|\alpha|=j} D^{\alpha+e_i}u(x)\frac{x_i}{|x|}\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{x_\alpha}{|x|^j}\right)\frac{x_k}{|x|} \\
&= \sum_{k=1}^{N}\sum_{|\alpha|=j}\frac{\partial}{\partial x_k}\left(D^{\alpha+e_i}u(x)\frac{x_i}{|x|}\right)\frac{x_\alpha}{|x|^j}\frac{x_k}{|x|} \\
&= \sum_{k=1}^{N}\sum_{|\alpha|=j} D^{\alpha+e_i+e_k}u(x)\frac{x_i}{|x|}\frac{x_{\alpha+e_k}}{|x|^{j+1}} + \sum_{|\alpha|=j} D^{\alpha+e_i}u(x)\frac{x_\alpha}{|x|^j}\sum_{k=1}^{N}\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{x_i}{|x|}\right)\frac{x_k}{|x|} \\
&= \sum_{|\alpha|=j+1} D^{\alpha+e_i}u(x)\frac{x_i}{|x|}\frac{x_\alpha}{|x|^{j+1}}.
\end{aligned}$$

Ficando assim demonstrada a Afirmação 1.

Afirmação 3: Para todo $j \geq 1$ inteiro tem-se $\sum_{|\alpha|=j}(\frac{x_\alpha}{|x|^j})^2 = 1$. Então $\sum_{|\alpha|=j} x_\alpha^2 = |x|^{2j}$.

Prova da Afirmação 3: Mostremos por indução em j. Para $j=1$:

$$\sum_{|\alpha|=1} x_\alpha^2 = \sum_{i=1}^{N} x_i^2 = |x|^2.$$

Suponhamos que $\sum_{|\alpha|=j} x_\alpha^2 = |x|^{2j}$ para algum $j \geq 1$. Então,

$$\sum_{|\alpha|=j+1} x_\alpha^2 = \sum_{i=1}^{N} \sum_{|\alpha|=j} x_{\alpha+e_i}^2 = \sum_{i=1}^{N} x_i^2 \sum_{|\alpha|=j} x_\alpha^2 = \sum_{i=1}^{N} x_i^2 |x|^{2j} = |x|^{2(j+1)}.$$

Ficando assim provada a Afirmação 3.

Segue da Afirmação 3 que o vetor w_j, de N^j entradas, com todos os termos da soma $\sum_{|\alpha|=j} \frac{x_\alpha}{|x|^j}$ é tal que $|w_j| = 1$. Portanto da Afirmação 1 e da Desigualdade de Cauchy-Schwarz segue que

$$|v^{(j)}(|x|)| = \left| \sum_{|\alpha|=j} D^\alpha u(x) \frac{x_\alpha}{|x|^j} \right| = |D^j u(x) \cdot w_j| \leq |D^j u(x)||w_j| = |D^j u(x)| \quad \forall x \in B \backslash \{0\}.$$

Portanto $|v^{(j)}(|x|)| \leq |D^j u(x)|$. Disto segue que

$$\begin{aligned} \int_B \sum_{j=0}^{m} \left| D^j u(x) \right|^p \mathrm{d}x \geq \sum_{j=0}^{m} \int_B \left| v^{(j)}(|x|) \right|^p \mathrm{d}x &= \sum_{j=0}^{m} \int_0^1 \int_{\partial B(0,t)} \left| v^{(j)}(t) \right|^p \mathrm{d}y\mathrm{d}t \\ &= \omega_N \sum_{j=0}^{m} \int_0^1 \left| v^{(j)}(t) \right|^p t^{N-1} \mathrm{d}t = \omega_N \int_0^1 \sum_{j=0}^{m} \left| v^{(j)}(t) \right|^p t^{N-1} \mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Portanto $v \in W^{m,p}((0,1), t^{N-1})$. ∎

Lema 1.3. Suponha $N > mp$. Então existe $C > 0$ tal que

$$|v(t)| \leq C \frac{\left(\int_0^1 \sum_{j=0}^{m} |v^{(j)}(s)|^p s^{N-1} \, \mathrm{d}s \right)^{\frac{1}{p}}}{t^{\frac{N-mp}{p}}}, \tag{1.9}$$

para todos $t \in (0,1]$ e $v \in W^{m,p}((0,1), s^{N-1})$.

Prova. Façamos, primeiramente, para $m = 1$. Como $v \in W^{1,p}((0,1), s^{N-1})$ então $v \in W^{1,p}(t,1)$ para qualquer $t \in (0,1)$. Dado $t \in (0,1]$, pelo Teorema 8.2 de [3], obtemos

$$v(t) = v(1) - \int_t^1 v'(s) \, \mathrm{d}s = v(1) - \int_t^1 v'(s) s^{\frac{N-1}{p}} s^{\frac{1-N}{p}} \mathrm{d}s. \tag{1.10}$$

Afirmação: Existe $C > 0$ dependendo apenas de N e p tal que

$$\left| \int_t^1 v'(s) s^{\frac{N-1}{p}} s^{\frac{1-N}{p}} \mathrm{d}s \right| \leq C \frac{1}{t^{\frac{N-p}{p}}} \left(\int_0^1 |v'(s)|^p s^{N-1} \mathrm{d}s \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{1.11}$$

Prova da Afirmação: Façamos primeiro para $p = 1$.

$$\left|\int_t^1 v'(s)s^{N-1}s^{1-N}\mathrm{d}s\right| \leq \int_t^1 |v'(s)|s^{N-1}\frac{1}{s^{N-1}}\mathrm{d}s \leq \frac{1}{t^{N-1}}\int_t^1 |v'(s)|s^{N-1}\mathrm{d}s$$
$$\leq \frac{1}{t^{N-1}}\int_0^1 |v'(s)|s^{N-1}\mathrm{d}s.$$

Agora para $p > 1$. Usando Hölder com $\frac{1}{p} + \frac{p-1}{p} = 1$, obtemos

$$\begin{aligned}
\left|\int_t^1 v'(s)s^{\frac{N-1}{p}}s^{\frac{1-N}{p}}\mathrm{d}s\right| &\leq \left(\int_t^1 s^{\frac{1-N}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p}}\left(\int_t^1 |v'(s)|^p s^{N-1}\mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\frac{1}{\frac{1-N}{p-1}+1} - \frac{t^{\frac{1-N}{p-1}+1}}{\frac{1-N}{p-1}+1}\right)^{\frac{p-1}{p}}\left(\int_t^1 |v'(s)|^p s^{N-1}\mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\frac{p-1}{N-p}\frac{1}{t^{\frac{N-p}{p-1}}} - \frac{p-1}{N-p}\right)^{\frac{p-1}{p}}\left(\int_t^1 |v'(s)|^p s^{N-1}\mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\frac{p-1}{N-p}\right)^{\frac{p-1}{p}}\frac{1}{t^{\frac{N-p}{p}}}\left(1 - t^{\frac{N-p}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p}}\left(\int_t^1 |v'(s)|^p s^{N-1}\mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \left(\frac{p-1}{N-p}\right)^{\frac{p-1}{p}}\frac{1}{t^{\frac{N-p}{p}}}\left(\int_t^1 |v'(s)|^p s^{N-1}\mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

Ficando assim demonstrada a Afirmação. Note que, de forma análoga, a Afirmação vale para v no lugar de v'.

Como $v \in C(0,1)$, então existe $s_0 \in (\frac{1}{2}, 1)$ tal que

$$v(s_0) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}}\int_{\frac{1}{2}}^1 v(s)\ \mathrm{d}s = 2\int_{\frac{1}{2}}^1 v(s)s^{\frac{N-1}{p}}s^{\frac{1-N}{p}}\mathrm{d}s. \tag{1.12}$$

Pelo Teorema 8.2 de [3], obtemos

$$v(1) - v(s_0) = \int_{s_0}^1 v'(s)\ \mathrm{d}s = \int_{s_0}^1 v'(s)s^{\frac{N-1}{p}}s^{\frac{1-N}{p}}\mathrm{d}s. \tag{1.13}$$

Assim, por (1.12), (1.13) e a Afirmação, obtemos

$$|v(1)| \leq |v(1) - v(s_0)| + |v(s_0)| = \left|\int_{s_0}^1 v'(s)s^{\frac{N-1}{p}}s^{\frac{1-N}{p}}\mathrm{d}s\right| + 2\left|\int_{\frac{1}{2}}^1 v(s)s^{\frac{N-1}{p}}s^{\frac{1-N}{p}}\mathrm{d}s\right|$$

$$\leq C\frac{1}{s_0^{\frac{N-p}{p}}}\|v\|_{W^{1,p}_{N-1}} + 2C\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{N-p}{p}}}\|v\|_{W^{1,p}_{N-1}} \leq \left(C\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{N-p}{p}}} + 2C\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{N-p}{p}}}\right)\|v\|_{W^{1,p}_{N-1}}.$$

Logo,

$$|v(1)| \leq C\|v\|_{W^{1,p}_{N-1}}, \tag{1.14}$$

onde C depende apenas de N e p. Pela Afirmação, por (1.10) e (1.14) obtemos que

$$\begin{aligned}
|v(t)| &\leq |v(1)| + \left|\int_t^1 v'(s)s^{\frac{N-1}{p}}s^{\frac{1-N}{p}}\mathrm{d}s\right| \leq C\|v\|_{W^{1,p}_{N-1}} + C\frac{1}{t^{\frac{N-p}{p}}}\|v\|_{W^{1,p}_{N-1}} \\
&\leq C\left(1+\frac{1}{t^{\frac{N-p}{p}}}\right)\|v\|_{W^{1,p}_{N-1}} \leq C\left(\frac{1}{t^{\frac{N-p}{p}}}+\frac{1}{t^{\frac{N-p}{p}}}\right)\|v\|_{W^{1,p}_{N-1}} \\
&= C\frac{\|v\|_{W^{1,p}_{N-1}}}{t^{\frac{N-p}{p}}}.
\end{aligned}$$

Ficando assim demonstrado para $m = 1$.

Agora suponhamos que o resultado seja válido para $m \geq 1$ inteiro e suponhamos $N > (m+1)p$. Dados $t \in (0,1]$ e $v \in W^{m+1,p}((0,1), s^{N-1})$ a hipótese de indução e o fato que $v' \in W^{m,p}((0,1), s^{N-1})$ garante

$$|v'(s)| \leq C\frac{\|v'\|_{W^{m,p}_{N-1}}}{s^{\frac{N-mp}{p}}} \leq C\frac{\|v\|_{W^{m+1,p}_{N-1}}}{s^{\frac{N-mp}{p}}}, \quad \forall s \in (0,1).$$

Usando (1.14) obtemos

$$\begin{aligned}
|v(t)| &\leq |v(1)| + \int_t^1 |v'(s)|\,\mathrm{d}s \leq C\|v\|_{W^{1,p}_{N-1}} + C\|v\|_{W^{m+1,p}_{N-1}}\int_t^1 s^{-\frac{N-mp}{p}}\mathrm{d}s \\
&\leq C\|v\|_{W^{m+1,p}_{N-1}} + C\|v\|_{W^{m+1,p}_{N-1}}\left(\frac{1}{-\frac{N-mp}{p}+1} - \frac{t^{-\frac{N-mp}{p}+1}}{-\frac{N-mp}{p}+1}\right) \\
&= C\|v\|_{W^{m+1,p}_{N-1}} + C\frac{p}{N-(m+1)p}\|v\|_{W^{m+1,p}_{N-1}}\left(\frac{1}{t^{\frac{N-(m+1)p}{p}}} - 1\right) \\
&\leq C\frac{\|v\|_{W^{m+1,p}_{N-1}}}{t^{\frac{N-(m+1)p}{p}}},
\end{aligned}$$

onde C depende apenas de m, p e N. ∎

Lema 1.4. Se $N = mp$ e $p > 1$, então existe uma constante $C > 0$ tal que para todo $v \in W^{m,p}((0,1), s^{N-1})$ tem-se

$$|v(t)| \leq C\left(\int_0^1 \sum_{j=0}^{m} |v^{(j)}(s)|^p s^{N-1}\mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{p}}(|\log t|^{\frac{p-1}{p}}+1), \quad \forall t \in (0,1]. \tag{1.15}$$

Prova. Seja $v \in W^{m,p}((0,1), s^{N-1})$.

Afirmação 1: Para todo $m \geq 1$ inteiro tem-se

$$\int_t^1 v^{(m)}(s)s^{m-1}\mathrm{d}s = (-1)^m(m-1)!\sum_{j=0}^{m-1}\left[\frac{(-1)^j}{j!}\left(v^{(j)}(t)t^j - v^{(j)}(1)\right)\right], \quad \forall t \in (0,1].$$

Prova da Afirmação 1: Usemos indução em m. Para $m = 1$ temos, para todo $t \in (0,1]$, que

$$\int_t^1 v^{(1)}(s)s^{1-1}\mathrm{d}s = v(1) - v(t) = (-1)^1(1-1)!\sum_{j=0}^{1-1}\left[\frac{(-1)^j}{j!}(v^{(j)}(t)t^j - v^{(j)}(1))\right]$$

Supondo válido para algum $m \geq 1$, usando integração por partes e a hipótese de indução, temos que

$$\begin{aligned}
\int_t^1 v^{(m+1)}(s)s^{m+1-1}\mathrm{d}s &= v^{(m)}(1) - v^{(m)}(t)t^m - m\int_t^1 v^{(m)}(s)s^{m-1}\mathrm{d}s \\
&= v^{(m)}(1) - v^{(m)}(t)t^m - (-1)^m m!\sum_{j=0}^{m-1}\left[\frac{(-1)^j}{j!}\left(v^{(j)}(t)t^j - v^{(j)}(1)\right)\right] \\
&= (-1)^{m+1}m!\Bigg[\frac{(-1)^{m+1}v^{(m)}(1)}{m!} - \frac{(-1)^{m+1}v^{(m)}(t)t^m}{m!} \\
&\qquad + \sum_{j=0}^{m-1}\left[\frac{(-1)^j}{j!}(v^{(j)}(t)t^j - v^{(j)}(1))\right]\Bigg] \\
&= (-1)^{m+1}m!\Bigg[\frac{(-1)^m}{m!}\left(v^{(m)}(t)t^m - v^{(m)}(1)\right) \\
&\qquad + \sum_{j=0}^{m-1}\left[\frac{(-1)^j}{j!}(v^{(j)}(t)t^j - v^{(j)}(1))\right]\Bigg] \\
&= (-1)^{m+1}m!\sum_{j=0}^{m}\left[\frac{(-1)^j}{j!}(v^{(j)}(t)t^j - v^{(j)}(1))\right], \quad \forall t \in (0,1].
\end{aligned}$$

Ficando assim demonstrada a Afirmação 1.

Usando a Afirmação 1 obtemos, para todo $t \in (0,1]$,

$$\frac{(-1)^m}{(m-1)!}\int_t^1 v^{(m)}(s)s^{m-1}\mathrm{d}s = v(t) - v(1) + \sum_{j=1}^{m-1}\left[\frac{(-1)^j}{j!}(v^{(j)}(t)t^j - v^{(j)}(1))\right].$$

Daí, para todo $t \in (0,1]$,

$$v(t) = v(1) - \sum_{j=1}^{m-1}\left[\frac{(-1)^j}{j!}(v^{(j)}(t)t^j - v^{(j)}(1))\right] + \frac{(-1)^m}{(m-1)!}\int_t^1 v^{(m)}(s)s^{m-1}\mathrm{d}s. \quad (1.16)$$

Afirmação 2: Dado $\tilde{v} \in W^{m,p}((0,1), s^{N-1})$ com $N = mp$, temos que

$$\left| \int_t^1 \tilde{v}^{(m)}(s) s^{m-1} \mathrm{d}s \right| \leq \|\tilde{v}\|_{W^{m,p}_{N-1}} |\log t|^{\frac{p-1}{p}}, \quad \forall t \in (0,1].$$

Prova da Afirmação 2: Basta notar que para todo $t \in (0,1]$ tem-se

$$\begin{aligned}
\left| \int_t^1 \tilde{v}^{(m)}(s) s^{m-1} \mathrm{d}s \right| &\leq \int_t^1 |\tilde{v}^{(m)}(s)| s^{\frac{N-1}{p}} s^{m-1-\frac{N-1}{p}} \mathrm{d}s \\
&\leq \left(\int_t^1 |\tilde{v}^{(m)}(s)|^p s^{N-1} \mathrm{d}s \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_t^1 s^{\frac{p(m-1)-N+1}{p} \frac{p}{p-1}} \mathrm{d}s \right)^{\frac{p-1}{p}} \\
&\leq \|\tilde{v}\|_{W^{m,p}_{N-1}} \left(\int_t^1 s^{\frac{pm-p-pm+1}{p-1}} \mathrm{d}s \right)^{\frac{p-1}{p}} = \|\tilde{v}\|_{W^{m,p}_{N-1}} (\log 1 - \log t)^{\frac{p-1}{p}} \\
&= \|\tilde{v}\|_{W^{m,p}_{N-1}} |\log t|^{\frac{p-1}{p}}.
\end{aligned}$$

Ficando assim demonstrada a Afirmação 2.
Afirmação 3: Existe $C > 0$ tal que para todo $\tilde{v} \in W^{1,p}((0,1), s^{N-1})$ tem-se

$$|\tilde{v}(1)| \leq C \|\tilde{v}\|_{W^{1,p}_{N-1}}.$$

A demonstração dessa Afirmação já foi feita no Lema anterior.

Com todos estes fatos em mente mostraremos o Lema. Para o caso $m = 1$ usemos as Afirmações 2 e 3 da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
|v(t)| = \left| v(1) - \int_t^1 v'(s) \mathrm{d}s \right| &\leq |v(1)| + \int_t^1 |v'(s)| \mathrm{d}s \leq C\|v\|_{W^{1,p}_{N-1}} + \|v\|_{W^{1,p}_{N-1}} |\log t|^{\frac{p-1}{p}} \\
&\leq C\|v\|_{W^{1,p}_{N-1}} \left(|\log t|^{\frac{p-1}{p}} + 1 \right), \qquad \forall t \in (0,1].
\end{aligned}$$

Agora para $m \geq 2$ note que $v^{(j)} \in W^{1,p}((0,1), s^{N-1})$ para todo $j = 0, 1, \ldots, m-1$. Assim usando as Afirmações 2 e 3 na equação (1.16), obtemos, para todo $t \in (0,1]$,

$$\begin{aligned}
|v(t)| &= \left| v(1) - \sum_{j=1}^{m-1} \left[\frac{(-1)^j}{j!} (v^{(j)}(t) t^j - v^{(j)}(1)) \right] + \frac{(-1)^m}{(m-1)!} \int_t^1 v^{(m)}(s) s^{m-1} \mathrm{d}s \right| \\
&\leq |v(1)| + \sum_{j=1}^{m-1} \frac{|v^{(j)}(t)| + |v^{(j)}(1)|}{j!} + \frac{1}{(m-1)!} \left| \int_t^1 v^{(m)}(s) s^{m-1} \mathrm{d}s \right| \\
&\leq C\|v\|_{W^{1,p}_{N-1}} + \sum_{j=1}^{m-1} \frac{C\|v^{(j)}\|_{W^{1,p}_{N-1}} (|\log t|^{\frac{p-1}{p}} + 1) + C\|v^{(j)}\|_{W^{1,p}_{N-1}}}{j!} + C\|v\|_{W^{1,p}_{N-1}} |\log t|^{\frac{p-1}{p}} \\
&\leq C\|v\|_{W^{m,p}_{N-1}} + C\|v\|_{W^{m,p}_{N-1}} (|\log t|^{\frac{p-1}{p}} + 1) + C\|v\|_{W^{m,p}_{N-1}} |\log t|^{\frac{p-1}{p}}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$|v(t) \leq C\|v\|_{W^{m,p}_{N-1}}\left(|\log t|^{\frac{p-1}{p}}+1\right) \quad \forall t \in (0,1].$$

■

Observação 1.5. Se $u \in W^{m,p}_{0,\mathrm{rad}}(B)$ com $N = mp$ e $p > 1$, então $v \in W^{m,p}((0,1), t^{N-1})$ com

$$v(1) = v'(1) = \cdots = v^{(m)}(1) = 0.$$

Pela demonstração do Lema anterior, conseguimos uma limitação da forma

$$|u(x)| \leq C\left(\int_B |D^m u|^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} |\log|x||^{\frac{p-1}{p}}, \quad \forall x \in \overline{B}\backslash\{0\}.$$

Lema 1.6. $W^{N,1}((0,1), s^{N-1})$ está imerso continuamente em $C([0,1])$.

Prova. Como já temos que $W^{N,1}((0,1), s^{N-1}) \hookrightarrow C((0,1])$ então basta concluir que existe $\lim_{t\to 0} v(t)$ para todo $v \in W^{N,1}((0,1), s^{N-1})$ (lembrando que estamos denotando pela mesma letra o representante em $C((0,1]))$. Façamos por indução em N. Para $N = 1$, note que

$$v(t) = v(1) - \int_t^1 v'(s)\,\mathrm{d}s, \qquad \forall t \in (0,1].$$

Como $|v'(s)\chi_{(t,1)}(s)| \leq |v'(s)| \in L^1(0,1)$ para todo $t \in (0,1]$, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue temos que existe $\lim_{t\to 0} v(t)$.

Suponhamos válido para todo $i = 1,\ldots,N$ e tome $v \in W^{N+1,1}((0,1), s^N)$. Por (1.16) obtemos, para todo $t \in (0,1]$,

$$v(t) = v(1) - \sum_{j=1}^{N}\left[\frac{(-1)^j}{j!}(v^{(j)}(t)t^j - v^{(j)}(1))\right] + \frac{(-1)^{N+1}}{N!}\int_t^1 v^{(N+1)}(s)s^N \mathrm{d}s.$$

Como $v^{(j)}(t)t^j \in W^{N+1-j,1}((0,1), s^{N-j})$ $\forall j = 1,\ldots,N$, então pela hipótese de indução obtemos que existe $\lim_{t\to 0} v^{(j)}(t)t^j$ $\forall j = 1,\ldots,N$. Por outro lado, devido ao fato que $|v^{(N+1)}(s)s^N\chi_{(t,1)}(s)| \leq |v^{(N+1)}(s)|s^N \in L^1(0,1)$, obtemos, pelo Teorema da Convergência Dominada,

$$\int_t^1 v^{(N+1)}(s)s^N \mathrm{d}s \xrightarrow{t\to 0} \int_0^1 v^{(N+1)}(s)s^N \mathrm{d}s.$$

Portanto existe $\lim_{t\to 0} v(t)$. ■

Vemos agora a relação completa entre os espaços $W^{m,p}_{\mathrm{rad}}(B)$ e $W^{m,p}((0,1), t^{N-1})$, a qual será dada pelo Teorema 1.8. Porém, necessitamos do seguinte exemplo:

Exemplo 1.7. Sejam $p \geq 1$ real e $m \geq 2$ inteiro tais que $N \leq (m-1)p$. Então $v(t) = t \in W^{m,p}((0,1), t^{N-1})$, porém $u(x) = |x| \notin W^{m,p}_{\text{rad}}(B)$.

Prova. $v \in W^{m,p}((0,1), t^{N-1})$ devido a $v' = 1$ e $v^{(j)} = 0$ para todo $2 \leq j \leq m$. Para verificar que $u \notin W^{m,p}_{\text{rad}}(B)$ note que

$$u(\lambda x) = \lambda u(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^N \backslash \{0\}, \lambda > 0.$$

Por indução e regra da cadeia, obtemos

$$D^m u(\lambda x) = \lambda^{1-m} D^m u(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^N \backslash \{0\}, \lambda > 0.$$

Usando isso tem-se

$$\begin{aligned}\int_B |D^m u(x)|^p \, \mathrm{d}x &= \int_0^1 \int_{\partial B(0,r)} |D^m u(x)|^p \, \mathrm{d}\sigma_x \mathrm{d}r = \int_0^1 \int_{\partial B} |D^m u(ry)|^p \, r^{N-1} \, \mathrm{d}y\mathrm{d}r \\ &= \int_0^1 r^{N-1+(1-m)p} \, \mathrm{d}r \int_{\partial B} |D^m u(y)|^p \, \mathrm{d}y.\end{aligned}$$

Como $N - 1 + (1-m)p \leq (m-1)p - 1 + (1-m)p = -1$ obtemos que a integral $\int_0^1 r^{N-1+(1-m)p} \mathrm{d}r$ diverge. Portanto $u \notin W^{m,p}_{\text{rad}}(B)$. ∎

Teorema 1.8. *Para cada real $p \geq 1$ e inteiro $m \geq 1$, tem-se*

(1) $W^{m,p}_{\text{rad}}(B) \hookrightarrow W^{m,p}((0,1), t^{N-1})$;

(2) $W^{1,p}_{\text{rad}}(B) \equiv W^{1,p}((0,1), t^{N-1})$;

(3) Suponha $m \geq 2$. Então $W^{m,p}_{\text{rad}}(B) \equiv W^{m,p}((0,1), t^{N-1})$ se, e somente se, $N > (m-1)p$.

Prova.

(1) É imediato do Teorema 1.2.

(2) Como

$$|D^0 u(x)| = |u(x)| = |v(|x|)| = \left| v^{(0)}(|x|) \right|$$

e

$$|D^1 u(x)|^2 = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \right)^2 = \sum_{i=1}^{N} \left(v'(|x|) \frac{x_i}{|x|} \right)^2 = \frac{v'(|x|)^2}{|x|^2} \sum_{i=1}^{N} x_i^2 = v'(|x|)^2$$

para todo $x \in B\backslash\{0\}$, então

$$\int_B \sum_{j=0}^{1} \left| D^j u(x) \right|^p \mathrm{d}x \geq \sum_{j=0}^{1} \int_B \left| v^{(j)}(|x|) \right|^p \mathrm{d}x = \sum_{j=0}^{1} \int_0^1 \int_{\partial B(0,t)} \left| v^{(j)}(t) \right|^p \mathrm{d}y\mathrm{d}t$$
$$= \omega_N \sum_{j=0}^{1} \int_0^1 \left| v^{(j)}(t) \right|^p t^{N-1}\mathrm{d}t = \omega_N \int_0^1 \sum_{j=0}^{1} \left| v^{(j)}(t) \right|^p t^{N-1}\mathrm{d}t.$$

(3) Pelo Exemplo 1.7 obtemos que $W^{m,p}((0,1),t^{N-1}) \hookrightarrow W^{m,p}_{\mathrm{rad}}(B)$ implica $N > (m-1)p$. Agora suponhamos $N > (m-1)p$ e $v \in W^{m,p}((0,1),t^{N-1})$. Seja $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_N)$ com $1 \leq |\alpha| \leq m$.

Afirmação: Para cada α existem $n_i \geq 0$, $m_{ij} \geq 1$ inteiros, $C_{ijk} \in \mathbb{R}$ e $\alpha_{ijk} = (\alpha^1_{ijk}, \ldots, \alpha^N_{ijk})$ para cada $i = 1, \ldots, |\alpha|, j = 0, \ldots, n_i$ e $k = 1, \ldots, m_{ij}$ tais que $|\alpha_{ijk}| = |\alpha| - j$ para todos i, j, k e

$$D^\alpha u(x) = \sum_{i=1}^{|\alpha|} v^{(i)}(|x|) \sum_{j=0}^{n_i} \sum_{k=1}^{m_{ij}} \frac{x_{\alpha_{ijk}} C_{ijk}}{|x|^{2|\alpha|-j-i}}, \quad \forall x \in B\backslash\{0\}.$$

Prova da Afirmação: Façamos por indução em $|\alpha|$. Para $|\alpha| = 1$:

$$\frac{\partial u}{\partial x_l}(x) = v^{(1)}(|x|)\frac{x_l}{|x|} = \sum_{i=1}^{1} v^{(i)}(|x|) \sum_{j=0}^{0} \sum_{k=1}^{1} \frac{x_{\alpha_{ijk}} C_{ijk}}{|x|^{2-j-i}} \quad \forall x \in B\backslash\{0\},$$

onde $n_1 = 0$, $m_{10} = 1$, $C_{101} = 1$ e $\alpha_{101} = e_l$. Agora suponhamos válido para $|\alpha| < m$ e mostremos para $|\alpha| + 1$. Para cada $x \in B\backslash\{0\}$ temos

$$D^{\alpha+e_l} u(x) = \frac{\partial}{\partial x_l} D^\alpha u(x) = \frac{\partial}{\partial x_l} \sum_{i=1}^{|\alpha|} v^{(i)}(|x|) \sum_{j=0}^{n_i} \sum_{k=1}^{m_{ij}} \frac{x_{\alpha_{ijk}} C_{ijk}}{|x|^{2|\alpha|-j-i}}$$
$$= \sum_{i=1}^{|\alpha|} v^{(i+1)}(|x|) \frac{x_l}{|x|} \sum_{j=0}^{n_i} \sum_{k=1}^{m_{ij}} \frac{x_{\alpha_{ijk}} C_{ijk}}{|x|^{2|\alpha|-j-i}} + \sum_{i=1}^{|\alpha|} v^{(i)}(|x|) \sum_{j=0}^{n_i} \sum_{k=1}^{m_{ij}} C_{ijk} \frac{\alpha^l_{ijk} x_{\alpha_{ijk}-e_l}}{|x|^{2|\alpha|-j-i}}$$
$$+ \sum_{i=1}^{|\alpha|} v^{(i)}(|x|) \sum_{j=0}^{n_i} \sum_{k=1}^{m_{ij}} -C_{ijk} \frac{x_{\alpha_{ijk}} (2|\alpha| - j - i) |x|^{2|\alpha|-j-i-1} \frac{x_l}{|x|}}{|x|^{4|\alpha|-2j-2i}}.$$

Então, para cada $x \in B\backslash\{0\}$, tem-se

$$
\begin{aligned}
D^{\alpha+e_l}u(x) &= \sum_{i=2}^{|\alpha|+1} v^{(i)}(|x|) \sum_{j=0}^{n_{i-1}} \sum_{k=1}^{m_{i-1j}} \frac{x_{\alpha_{i-1jk}+e_l} C_{i-1jk}}{|x|^{2(|\alpha|+1)-j-i}} \\
&+ \sum_{i=1}^{|\alpha|} v^{(i)}(|x|) \sum_{j=0}^{n_i} \sum_{k=1}^{m_{ij}} \frac{x_{\alpha_{ijk}-e_l} \alpha^l_{ijk} C_{ijk}}{|x|^{2|\alpha|-j-i}} \\
&+ \sum_{i=1}^{|\alpha|} v^{(i)}(|x|) \sum_{j=0}^{n_i} \sum_{k=1}^{m_{ij}} \frac{x_{\alpha_{ijk}+e_l} (2|\alpha|-j-i)(-C_{ijk})}{|x|^{2|\alpha|-j-i+2}} \\
&= \sum_{i=2}^{|\alpha|+1} v^{(i)}(|x|) \sum_{j=0}^{n_{i-1}} \sum_{k=1}^{m_{i-1j}} \frac{x_{\alpha_{i-1jk}+e_l} C_{i-1jk}}{|x|^{2(|\alpha|+1)-j-i}} \\
&+ \sum_{i=1}^{|\alpha|} v^{(i)}(|x|) \sum_{j=2}^{n_i+2} \sum_{k=1}^{m_{ij-2}} \frac{x_{\alpha_{ij-2k}-e_l} \alpha^l_{ij-2k} C_{ij-2k}}{|x|^{2(|\alpha|+1)-j-i}} \\
&+ \sum_{i=1}^{|\alpha|} v^{(i)}(|x|) \sum_{j=0}^{n_i} \sum_{k=1}^{m_{ij}} \frac{x_{\alpha_{ijk}+e_l} (2|\alpha|-j-i)(-C_{ijk})}{|x|^{2(|\alpha|+1)-j-i}}.
\end{aligned}
$$

Note que $|\alpha_{i-1jk}+e_l| = |\alpha_{i-1jk}|+1 = |\alpha|+1-j$, $|\alpha_{ij-2k}-e_l| = |\alpha_{ij-2k}|-1 = |\alpha|+1-j$ e $|\alpha_{ijk}+e_l| = |\alpha_{ijk}|+1 = |\alpha|+1-j$. Assim $\beta^1_{ijk} := \alpha_{i-1jk}+e_l$, $\beta^2_{ijk} := \alpha_{ij-2k}-e_l$ e $\beta^3_{ijk} := \alpha_{ijk}+e_l$ são tais que $|\beta^1_{ijk}| = |\beta^2_{ijk}| = |\beta^3_{ijk}| = |\alpha|+1-j \,\forall i,j,k$. Além disso, denote $C^1_{ijk} := C_{i-1jk}$, $C^2_{ijk} := \alpha^l_{ij-2k} C_{ij-2k}$ e $C^3_{ijk} := (2|\alpha|-j-i)(-C_{ijk})$. Faremos apenas para $v^{(1)}(|x|)$, pois os casos $v^{(j)}(|x|)$ com $2 \le j \le |\alpha|$ e $v^{(|\alpha|+1)}$ são análogos. Para todo $x \in B\backslash\{0\}$ tem-se

$$
\begin{aligned}
D^{\alpha+e_l}u(x) &= \sum_{i=2}^{|\alpha|+1} v^{(i)}(|x|) \sum_{j=0}^{n_{i-1}} \sum_{k=1}^{m_{i-1j}} \frac{x_{\beta^1_{ijk}} C^1_{ijk}}{|x|^{2(|\alpha|+1)-j-i}} \\
&+ \sum_{i=1}^{|\alpha|} v^{(i)}(|x|) \sum_{j=2}^{n_i+2} \sum_{k=1}^{m_{ij-2}} \frac{x_{\beta^2_{ijk}} C^2_{ijk}}{|x|^{2(|\alpha|+1)-j-i}} \\
&+ \sum_{i=1}^{|\alpha|} v^{(i)}(|x|) \sum_{j=0}^{n_i} \sum_{k=1}^{m_{ij}} \frac{x_{\beta^3_{ijk}} C^3_{ijk}}{|x|^{2(|\alpha|+1)-j-i}} \\
&= v^{(1)}(|x|) \left[\sum_{j=0}^{1} \sum_{k=1}^{m_{1j}} \frac{x_{\beta^3_{1jk}} C^3_{1jk}}{|x|^{2(|\alpha|+1)-j-1}} + \sum_{j=2}^{n_1} \frac{1}{|x|^{2(|\alpha|+1)-j-1}} \left(\sum_{k=1}^{m_{1j-2}} x_{\beta^2_{1jk}} C^2_{1jk} \right.\right. \\
&+ \left.\left. \sum_{k=m_{1j-2}+1}^{m_{1j-2}+m_{1j}} x_{\beta^3_{1jk-m_{1j-2}}} C^3_{1jk-m_{1j-2}} \right) + \sum_{j=n_1+1}^{n_1+2} \sum_{k=1}^{m_{1j-2}} \frac{x^2_{\beta^2_{1jk}} C^2_{1jk}}{|x|^{2(|\alpha|+1)-j-1}} \right] + \cdots \\
&= \sum_{i=1}^{|\alpha|+1} v^{(i)}(|x|) \sum_{j=0}^{\tilde{n}_i} \sum_{k=1}^{\tilde{m}_{ij}} \frac{x_{\tilde{\alpha}_{ijk}} \tilde{C}_{ijk}}{|x|^{2(|\alpha|+1)-j-i}}.
\end{aligned}
$$

Ficando assim demonstrada a Afirmação.

Como $|x_\alpha| \leq |x|^{|\alpha|}$, temos que

$$\begin{aligned}|D^\alpha u(x)| &\leq \sum_{i=1}^{|\alpha|} \left|v^{(i)}(|x|)\right| \sum_{j=0}^{n_i} \sum_{k=1}^{m_{ij}} \frac{|x|^{|\alpha_{ijk}|} C_{ijk}}{|x|^{2|\alpha|-j-i}} = \sum_{i=1}^{|\alpha|} \frac{\left|v^{(i)}(|x|)\right|}{|x|^{|\alpha|-i}} \sum_{j=0}^{n_i} \sum_{k=1}^{m_{ij}} C_{ijk} \\ &\leq C \sum_{i=1}^{|\alpha|} \frac{\left|v^{(i)}(|x|)\right|}{|x|^{|\alpha|-i}}.\end{aligned}$$

Daí $u \in W^{m,p}_{\text{rad}}(B)$ se, trocando $|x|$ por t, cada um dos seguintes termos está em $L^p((0,1), t^{N-1})$:

$$v^{(|\alpha|)}(|x|), \frac{v^{(|\alpha|-1)}(|x|)}{|x|}, \ldots, \frac{v'(|x|)}{|x|^{|\alpha|-1}}. \tag{1.17}$$

Mais ainda, $W^{m,p}((0,1), t^{N-1}) \hookrightarrow W^{m,p}_{\text{rad}}(B)$ é contínua se cada um dos termos em (1.17) é limitado em $L^p((0,1), t^{N-1})$ por uma constante vezes $\|v\|_{W^{m,p}_{N-1}}$. Como $\frac{1}{|x|} \geq 1$, se $x \in B \backslash \{0\}$, basta mostrarmos a limitação dos termos em (1.17) para $|\alpha| = m$. Como $N > (m-1)p$, podemos aplicar o Lema 1.10 (que será visto mais adiante) com $w = v' \in W^{m-1,p}((0,1), t^{N-1})$. Portanto

$$\begin{aligned}\left\| \frac{v^{(m-j)}(t)}{t^j} \right\|_{L^p((0,1),t^{N-1})} &= \left\| \frac{w^{(m-1-j)}}{t^j} \right\|_{L^p((0,1),t^{N-1})} \leq C_j \|w\|_{W^{m,p}_{N-1}} \\ &\leq C_j \|v'\|_{W^{m-1,p}_{N-1}} \leq C_j \|v\|_{W^{m,p}_{N-1}}, \quad \forall j = 0, 1, \ldots, m-1.\end{aligned}$$

Como queríamos demonstrar.

■

Prova do Teorema 0.1:

(1) Para $u \in W^{m,p}_{\text{rad}}(B)$ tem-se $v \in W^{m,p}((0,1), t^{N-1})$. Pela Observação 1.1 tem-se $V \in C^{m-1}((0,1])$ com $V^{(m)}$ existindo q.t.p. em $(0,1)$, $V^{(m)}$ mensurável, $v^{(j)} = V^{(j)}$ q.t.p. em $(0,1)$ e $\int_0^1 |V^{(j)}(t)|^p t^{N-1} \mathrm{d}t < \infty$. Portanto $U(x) := V(|x|)$ é a função procurada.

(2) A equação (1) segue do Lema 1.3 e do Teorema 1.8. Vejamos agora a imersão $W^{m,p}_{\text{rad}}(B) \hookrightarrow L^{\frac{p(N+\beta)}{N-mp}}(B, |x|^\beta)$. Note que

$$(1) \Leftrightarrow |u||x|^{\frac{N-mp}{p}} \leq C\|u\|_{W^{m,p}(B)} \Leftrightarrow |u|^{\frac{\beta p}{N-mp}} |x|^\beta \leq C\|u\|^{\frac{\beta p}{N-mp}}_{W^{m,p}(B)}.$$

Assim,

$$\|u\|_{L^{\frac{p(N+\beta)}{N-mp}}(B,|x|^\beta)} = \left(\int_B |u|^{\frac{p(N+\beta)}{N-mp}}|x|^\beta \mathrm{d}x\right)^{\frac{N-mp}{p(N+\beta)}} = \left(\int_B |u|^{\frac{pN}{N-mp}}|u|^{\frac{\beta p}{N-mp}}|x|^\beta \mathrm{d}x\right)^{\frac{N-mp}{p(N+\beta)}}$$
$$\leq C\|u\|_{W^{m,p}(B)}^{\frac{\beta p}{p(N+\beta)}}\|u\|_{L^{\frac{pN}{N-mp}}(B)}^{\frac{pN}{p(N+\beta)}} \leq C\|u\|_{W^{m,p}(B)}^{\frac{\beta p+pN}{p(N+\beta)}} = C\|u\|_{W^{m,p}(B)},$$

onde usamos a imerão $W^{m,p}(B) \hookrightarrow L^{\frac{pN}{N-mp}}(B)$.

(3) Segue do Lema 1.4 e do Teorema 1.8.

(4) Segue do Lema 1.6 e do Teorema 1.8.

■

Prova do Corolário 0.2: Seja (u_n) em $W^{m,p}_{\text{rad}}(B)$ limitada. Como $W^{m,p}(B) \hookrightarrow L^1(B)$ é compacta, temos que, a menos de subsequência, (u_n) é Cauchy em $L^1(B)$. Como $1 \leq q < \widetilde{p} := \frac{p(N+\beta)}{N-mp}$, pela desigualdade de interpolação, existe $\theta \in (0,1]$ tal que

$$\left\||x|^{\frac{\beta}{q}}u_n - |x|^{\frac{\beta}{q}}u_{\widetilde{n}}\right\|_{L^q(B)} \leq \left\||x|^{\frac{\beta}{q}}u_n - |x|^{\frac{\beta}{q}}u_{\widetilde{n}}\right\|_{L^1(B)}^{\theta}\left\||x|^{\frac{\beta}{q}}u_n - |x|^{\frac{\beta}{q}}u_{\widetilde{n}}\right\|_{L^{\widetilde{p}}(B)}^{1-\theta}.$$

Disso e que $|x|^{\frac{\beta}{q}} \leq |x|^{\frac{\beta}{\widetilde{p}}}$ $\forall x \in B$, obtemos que

$$\begin{aligned}\|u_n - u_{\widetilde{n}}\|_{L^q(B,|x|^\beta)} &\leq \left\||x|^{\frac{\beta}{q}}u_n - |x|^{\frac{\beta}{q}}u_{\widetilde{n}}\right\|_{L^1(B)}^{\theta}\left\||x|^{\frac{\beta}{q}}u_n - |x|^{\frac{\beta}{q}}u_{\widetilde{n}}\right\|_{L^{\widetilde{p}}(B)}^{1-\theta}\\ &\leq \|u_n - u_{\widetilde{n}}\|_{L^1(B)}^{\theta}\left\||x|^{\frac{\beta}{\widetilde{p}}}u_n - |x|^{\frac{\beta}{\widetilde{p}}}u_{\widetilde{n}}\right\|_{L^{\widetilde{p}}(B)}^{1-\theta}\\ &= \|u_n - u_{\widetilde{n}}\|_{L^1(B)}^{\theta}\|u_n - u_{\widetilde{n}}\|_{L^{\widetilde{p}}(B,|x|^\beta)}^{1-\theta}\\ &\leq C\|u_n - u_{\widetilde{n}}\|_{L^1(B)}^{\theta}\|u_n - u_{\widetilde{n}}\|_{W^{m,p}(B)}^{1-\theta} \overset{n,\widetilde{n}\to\infty}{\longrightarrow} 0.\end{aligned}$$

Portanto (u_n) é Cauchy em $L^q(B,|x|^\beta)$, ou seja, (u_n) converge em $L^q(B,|x|^\beta)$.

■

1.2 Desigualdades do tipo Hardy: Prova do Teorema 0.3

Antes da prova do Teorema 0.3 para funções sem condições na fronteira, vejamos o seguinte resultado:

Teorema 1.9. *(Veja Teorema 4.3 e Observação 4.4 em [11]) Seja* $1 < p < \infty$. *Então a desigualdade*

$$\int_0^1 |z(t)|^p u(t)\mathrm{d}t \leq C \int_0^1 \left|z^{(m)}(t)\right|^p v(t)\mathrm{d}t \tag{1.18}$$

é válida para todo $z \in W^{m,p}((0,1),v)$ *tal que* $z^{(j)}(1) = 0$, *para qualquer* $j = 0,1,\ldots,m-1$, *se, e somente se,*

$$\left.\begin{aligned} &\sup_{0<x<1}\left(\int_0^x (x-t)^{(m-1)p}u(t)\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_x^1 (v(t))^{\frac{-1}{p-1}}\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{p-1}{p}} < \infty \quad e \\ &\sup_{0<x<1}\left(\int_0^x u(t)\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_x^1 (t-x)^{\frac{(m-1)p}{p-1}}(v(t))^{\frac{-1}{p-1}}\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{p-1}{p}} < \infty, \end{aligned}\right\} \tag{1.19}$$

onde u *e* v *são funções mensuráveis positivas q.t.p. em* $(0,1)$.

Prova. Consulte [11]. ■

Lema 1.10. Suponha $N > mp$ e $p \geq 1$. Para cada $j = 0,1,\ldots,m$ existe $C_j > 0$ tal que dado $w \in W^{m,p}((0,1),t^{N-1})$ tem-se

$$\int_0^1 \left|\frac{w^{(m-j)}(t)}{t^j}\right|^p t^{N-1}\mathrm{d}t \leq C_j \int_0^1 \sum_{i=m-j}^{m} \left|w^{(i)}(t)\right|^p t^{N-1}\mathrm{d}t. \tag{1.20}$$

Prova. Seja $w \in W^{m,p}((0,1),t^{N-1})$. Basta mostrar (1.20) para $j = m$. Em outras palavras, devemos mostrar apenas que para todo $w \in W^{m,p}((0,1),t^{N-1})$ tem-se

$$\int_0^1 \left|\frac{w(t)}{t^m}\right|^p t^{N-1}\mathrm{d}t \leq C \int_0^1 \sum_{i=0}^{m} \left|w^{(i)}(t)\right|^p t^{N-1}\mathrm{d}t. \tag{1.21}$$

De fato, supondo (1.21), como $w^{(m-j)} \in W^{j,p}((0,1),t^{N-1})$, obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left|\frac{w^{(m-j)}(t)}{t^j}\right|^p t^{N-1}\mathrm{d}t &\leq C \int_0^1 \sum_{i=0}^{j} \left|w^{(m-j+i)}(t)\right|^p t^{N-1}\mathrm{d}t \\ &= C \int_0^1 \sum_{i=m-j}^{m} \left|w^{(i)}(t)\right|^p t^{N-1}\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Agora mostremos (1.21). Defina

$$z(t) := w(t) - \sum_{j=0}^{m-1} \frac{w^{(j)}(1)}{j!}(t-1)^j, \text{ com } t \in (0,1).$$

Daí, $z^{(m)}(t) = w^{(m)}(t)$ e

$$z^{(i)}(t) = w^{(i)}(t) - \sum_{j=i}^{m-1} \frac{w^{(j)}(1)}{(j-i)!}(t-1)^{j-i} \quad \forall i = 0,1,\ldots,m-1 \text{ e q.t.p. } t \in (0,1).$$

Assim $z^{(i)}(1) = 0$ para todo $i = 0,1,\ldots,m-1$ e por (1.14) obtemos

$$\left|w^{(i)}(1)\right| \leq C \left\|w^{(i)}\right\|_{W^{1,p}_{N-1}} \quad \forall i = 0,1,\ldots,m-1. \tag{1.22}$$

Caso $p > 1$: Neste caso vamos aplicar o Teorema 1.9 com $u(t) = t^{N-mp-1}$ e $v(t) = t^{N-1}$. Primeiramente, como $N > mp \geq p$ tem-se

$$\begin{aligned}
&\left(\int_0^x (x-t)^{(m-1)p} t^{N-mp-1} \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_x^1 t^{-\frac{N-1}{p-1}} \mathrm{d}t\right)^{\frac{p-1}{p}} \\
&\leq \left(x^{(m-1)p} \frac{x^{N-mp}-1}{N-mp}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{p-1}{p-N}\left(1 - x^{\frac{p-N}{p-1}}\right)\right)^{\frac{p-1}{p}} \\
&\leq x^{\frac{N-p}{p}} \frac{1}{(N-mp)^{\frac{1}{p}}} \left(\frac{p-1}{N-p}\right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\frac{1}{x^{\frac{N-p}{p-1}}} - 1\right)^{\frac{p-1}{p}} \\
&\leq \frac{1}{(N-mp)^{\frac{1}{p}}} \left(\frac{p-1}{N-p}\right)^{\frac{p-1}{p}} \frac{x^{\frac{N-p}{p}}}{x^{\frac{N-p}{p}}} = \left(\frac{p-1}{N-p}\right)^{\frac{p-1}{p}},
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
&\left(\int_0^x t^{N-mp-1} \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_x^1 (t-x)^{\frac{(m-1)p}{p-1}} t^{-\frac{N-1}{p-1}} \mathrm{d}t\right)^{\frac{p-1}{p}} \\
&\leq \frac{1}{(N-mp)^{\frac{1}{p}}} x^{\frac{N-mp}{p}} \left(\int_x^1 t^{\frac{mp-p-N+1}{p-1}} \mathrm{d}t\right)^{\frac{p-1}{p}} \\
&= \frac{1}{(N-mp)^{\frac{1}{p}}} x^{\frac{N-mp}{p}} \left(\frac{p-1}{mp-N}\left(1 - x^{\frac{mp-N}{p-1}}\right)\right)^{\frac{p-1}{p}} \leq \frac{(p-1)^{\frac{p-1}{p}}}{N-mp} x^{\frac{N-mp}{p}} x^{\frac{mp-N}{p}} \\
&= \frac{(p-1)^{\frac{p-1}{p}}}{N-mp},
\end{aligned}$$

para todo $x \in (0,1)$. Logo

$$\int_0^1 |z(t)|^p t^{N-mp-1} \mathrm{d}t \leq C \int_0^1 \left|z^{(m)}(t)\right|^p t^{N-1} \mathrm{d}t. \tag{1.23}$$

Usando (1.22) e a definição de $z(t)$, obtemos

$$|w(t)| \leq |z(t)| + \sum_{j=0}^{m-1} \frac{\left|w^{(j)}(1)\right|}{j!}|t-1|^j \leq |z(t)| + \sum_{j=0}^{m-1} \left\|w^{(j)}\right\|_{W^{1,p}_{N-1}}$$

Usando isso, (1.23) e $(a+b)^q \leq 2^q a^q + 2^q b^q \ \forall a, b, q \geq 0$ obtemos que

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \left|\frac{w(t)}{t^m}\right|^p t^{N-1}\mathrm{d}t &\leq \int_0^1 \left(|z(t)| + \sum_{j=0}^{m-1} \left\|w^{(j)}\right\|_{W^{1,p}_{N-1}}\right)^p t^{N-mp-1}\mathrm{d}t \\
&\leq C\int_0^1 |z(t)|^p t^{N-mp-1}\mathrm{d}t + C\sum_{j=0}^{m-1} \left\|w^{(j)}\right\|^p_{W^{1,p}_{N-1}} \int_0^1 t^{N-mp-1}\mathrm{d}t \\
&\leq C\int_0^1 \left|z^{(m)}(t)\right|^p t^{N-1}\mathrm{d}t + C\sum_{j=0}^{m-1} \int_0^1 \left|w^{(j)}(t)\right|^p t^{N-1}\mathrm{d}t \\
&\leq C\int_0^1 \sum_{j=0}^{m} \left|w^{(j)}(t)\right|^p t^{N-1}\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Caso $p = 1$: Mostremos que

$$\int_0^1 |z(t)|t^{N-k-1}\mathrm{d}t \leq \frac{2^k(N-k-1)!}{(N-1)!}\int_0^1 \left|z^{(k)}(t)\right| t^{N-1}\mathrm{d}t \quad \forall\, 0 \leq k \leq m.$$

De fato, para $k = 0$ é imediato. Suponhamos válido para $k < m$. Portanto

$$\begin{aligned}
\int_0^1 |z(t)|t^{N-k-2}\mathrm{d}t &= \int_0^1 z^+(t)t^{N-k-2}\mathrm{d}t + \int_0^1 z^-(t)t^{N-k-2}\mathrm{d}t \\
&= z^+(1)\frac{1^{N-k-1}}{N-k-1} - z^+(0)\frac{0^{N-k-1}}{N-k-1} - \int_0^1 \left(z^+(t)\right)'\frac{t^{N-k-1}}{N-k-1}\mathrm{d}t \\
&\quad + z^-(1)\frac{1^{N-k-1}}{N-k-1} - z^-(0)\frac{0^{N-k-1}}{N-k-1} - \int_0^1 \left(z^-(t)\right)'\frac{t^{N-k-1}}{N-k-1}\mathrm{d}t \\
&\leq \frac{2}{N-k-1}\int_0^1 \left|z'(t)\right| t^{N-k-1}\mathrm{d}t \\
&\leq \frac{2^{k+1}(N-k-2)!}{(N-1)!}\int_0^1 \left|z^{(k)}(t)\right| t^{N-1}\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

■

Prova do Teorema 0.3. Pela demonstração do item (3) do Teorema 1.8, obtemos que para um α multi-índice

$$|D^\alpha u(x)| \leq C\sum_{i=0}^{|\alpha|-1} \frac{v^{(|\alpha|-i)}(|x|)}{|x|^i}, \quad \forall x \in B\backslash\{0\}.$$

Assim, para cada $j = 0, 1, \ldots, m$ e $x \in B\backslash\{0\}$,

$$\left|\frac{|D^{m-j}u(x)|}{|x|^j}\right|^p \leq \frac{C_j}{|x|^{pj}}\left(\sum_{|\alpha|=m-j}|D^\alpha u(x)|\right)^p \leq C_j\sum_{i=0}^{m-j-1}\left|\frac{v^{(m-j-i)}(|x|)}{|x|^{i+j}}\right|^p.$$

Logo,

$$\left|\frac{|D^{m-j}u(x)|}{|x|^j}\right|^p \leq C_j\sum_{i=j}^{m-1}\left|\frac{v^{(m-i)}(|x|)}{|x|^i}\right|^p \quad \forall j = 0, 1, \ldots, m \text{ e } x \in B\backslash\{0\}.$$

Pelo Lema 1.10 segue que

$$\begin{aligned}\int_B\left|\frac{|D^{m-j}u(x)|}{|x|^j}\right|^p \mathrm{d}x &\leq C_j\sum_{i=j}^{m-1}\int_0^1\left|\frac{v^{(m-i)}(|x|)}{t^i}\right|^p t^{N-1}\mathrm{d}t\\ &\leq C_j\sum_{i=j}^{m-1}\int_0^1\sum_{k=m-i}^{m}\left|v^{(k)}(t)\right|^p t^{N-1}\mathrm{d}t\\ &\leq C_j\int_0^1\sum_{i=1}^{m}\left|v^{(i)}(t)\right|^p t^{N-1}\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Portanto, pelo Teorema 1.2, tem-que

$$\int_B\left|\frac{|D^{m-j}u(x)|}{|x|^j}\right|^p \mathrm{d}x \leq C_j\int_B\sum_{i=1}^{m}\left|v^{(i)}(|x|)\right|^p \mathrm{d}x \leq C_j\int_B\sum_{i=1}^{m}\left|D^i u(x)\right|^p \mathrm{d}x.$$

■

1.3 Imersões de Sobolev em espaços de funções com simetria parcial

Nosso objetivo nesta seção é demonstrar o Teorema 0.4. Este Teorema é uma importante ferramenta para encontrar soluções de (5) e (6).

Lema 1.11. Sejam l, m, N, p, p_l e q_l como no Teorema 0.4. Fixe $\rho \in (0,1)$. Para cada $j = 1, 2, \ldots$ defina $\Omega_j = \{x \in \mathbb{R}^N : \rho^j < |x| < \rho^{j-1}\}$ e $E_j = \{u \in W^{m,p}(\Omega_j) : u(y,z) = u(|y|,|z|) \quad \forall (y,z) \in \Omega_j\}$ onde $y = (y_1, \ldots, y_l)$, $z = (z_1, \ldots, z_{N-l})$ e $x = (y,z)$. Então existe $C > 0$ (que não depende de j e ρ) tal que para todo $u \in E_j$ tem-se

$$\int_{\Omega_j}\sum_{i=0}^{m}\left|D^i u\right|^p \mathrm{d}x \geq C\rho^{jq_l}\left(\int_{\Omega_j}|u|^{p_l}\mathrm{d}x\right)^{\frac{p}{p_l}}.$$

Prova. Defina os seguintes conjuntos

$$D_1 = \left\{ (y,t) \in \mathbb{R}^{l+1} : 1 < |y|^2 + t^2 < \frac{1}{\rho^2} \text{ e } t > |y| \right\},$$

$$D_2 = \left\{ (s,z) \in \mathbb{R}^{N-l+1} : 1 < s^2 + |z|^2 < \frac{1}{\rho^2} \text{ e } |z| < s \right\},$$

$$\mathcal{O}_{1,j} = \{(y,z) \in \Omega_j : |z| > |y|\} \text{ e } \mathcal{O}_{2,j} = \{(y,z) \in \Omega_j : |z| < |y|\}.$$

Usando as mudanças $h_1 : \mathcal{O}_{1,j} \to \rho^j D_1 \times S^{N-l-1}$ e $h_2 : \mathcal{O}_{2,j} \to \rho^j D_2 \times S^{l-1}$ definidas por $h_1(y,z) = (y, |z|, \frac{z}{|z|})$ e $h_2(y,z) = (y, |z|, \frac{z}{|z|})$ obtemos que

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_j} |f(x)|^p \mathrm{d}x &= \int_{\mathcal{O}_{1,j}} |f(x)|^p \mathrm{d}x + \int_{\mathcal{O}_{2,j}} |f(x)|^p \mathrm{d}x \\
&= \int_{\rho^j D_1} \int_{S^{N-l-1}(0,t)} |f(y,t)|^p \mathrm{d}\sigma_z \mathrm{d}y \mathrm{d}t + \int_{\rho^j D_2} \int_{S^{l-1}(0,s)} |f(s,z)|^p \mathrm{d}\sigma_y \mathrm{d}s \mathrm{d}z \\
&= C \int_{\rho^j D_1} |f(y,t)|^p t^{N-l-1} \mathrm{d}y \mathrm{d}t + C \int_{\rho^j D_2} |f(s,z)|^p s^{l-1} \mathrm{d}s \mathrm{d}z. \qquad (1.24)
\end{aligned}$$

Defina $w_1(y,t) = u(\rho^j y, \rho^j z)$ com $t = |z|$ e $w_2(s,z) = u(\rho^j y, \rho^j z)$ com $s = |y|$. Note que $u(y,z) = w_1(\frac{y}{\rho^j}, \frac{t}{\rho^j})$ e $u(y,z) = w_2(\frac{s}{\rho^j}, \frac{z}{\rho^j})$. Para cada $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_N)$ considere $\alpha_y = (\alpha_1, \ldots, \alpha_l, 0, \ldots, 0)$ e $\alpha_z = (0, \ldots, 0, \alpha_{l+1}, \ldots, \alpha_N)$, assim $D^\alpha u(y,z) = D^{\alpha_y} D^{\alpha_z} u(y,z)$ e, pelo Teorema 1.2,

$$\sum_{|\alpha_z|=k} \left| D^{\alpha_z} \left(D^{\alpha_y} w_1 \left(\frac{y}{\rho^j}, \frac{|z|}{\rho^j} \right) \right) \right|^2 \geq \frac{1}{\rho^{2jk}} \left| \frac{\partial^k}{\partial t^k} D^{\alpha_y} w_1 \left(\frac{y}{\rho^j}, \frac{|z|}{\rho^j} \right) \right|^2,$$

para todos $(y,z) \in \mathbb{R}^N$ e $k = 0, 1, \ldots, m$. Logo, para todo $i = 0, 1, \ldots, m$,

$$\begin{aligned}
\left| D^i u(y,z) \right|^2 &= \sum_{|\alpha|=i} |D^\alpha u(y,z)|^2 = \sum_{|\alpha_y|=0}^{i} \sum_{|\alpha_z|=i-|\alpha_y|} \left| D^{\alpha_z} \left(D^{\alpha_y} \left(w_1 \left(\frac{y}{\rho^j}, \frac{|z|}{\rho^j} \right) \right) \right) \right|^2 \\
&= \sum_{|\alpha_y|=0}^{i} \sum_{|\alpha_z|=i-|\alpha_y|} \frac{1}{\rho^{2j|\alpha_y|}} \left| D^{\alpha_z} \left(D^{\alpha_y} w_1 \left(\frac{y}{\rho^j}, \frac{|z|}{\rho^j} \right) \right) \right|^2 \\
&\geq C \sum_{|\alpha_y|=0}^{i} \frac{1}{\rho^{2j|\alpha_y|}} \frac{1}{\rho^{2ij-2j|\alpha_y|}} \left| \frac{\partial^{i-|\alpha_y|}}{\partial t^{i-|\alpha_y|}} D^{\alpha_y} w_1 \left(\frac{y}{\rho^j}, \frac{|z|}{\rho^j} \right) \right|^2 \\
&= \frac{C}{\rho^{2ij}} \left| D^i w_1 \left(\frac{y}{\rho^j}, \frac{t}{\rho^j} \right) \right|^2.
\end{aligned}$$

Logo, de maneira análoga para w_2, obtemos, para todo $i = 0, 1, \ldots, m$,

$$\left| D^i u(y,z) \right| \geq \frac{C}{\rho^{ij}} \left| D^i w_1 \left(\frac{y}{\rho^j}, \frac{t}{\rho^j} \right) \right| \text{ e } \left| D^i u(y,z) \right| \geq \frac{C}{\rho^{ij}} \left| D^i w_2 \left(\frac{s}{\rho^j}, \frac{z}{\rho^j} \right) \right|.$$

Disso e de (1.24), obtemos

$$\int_{\Omega_j} \sum_{i=0}^{m} \left| D^i u \right|^p \mathrm{d}x \geq C \Bigg(\int_{\rho^j D_1} \sum_{i=0}^{m} \left| D^i w_1 \left(\frac{y}{\rho^j}, \frac{t}{\rho^j} \right) \right|^p t^{N-l-1} \mathrm{d}y \mathrm{d}t$$
$$+ \int_{\rho^j D_2} \sum_{i=0}^{m} \left| D^i w_2 \left(\frac{s}{\rho^j}, \frac{z}{\rho^j} \right) \right|^p s^{l-1} \mathrm{d}s \mathrm{d}z \Bigg) =: C(I_1 + I_2). \quad (1.25)$$

Como D_1 e D_2 satisfazem a condição do cone, pelo Teorema 4.12 de [1], conclui-se $W^{m,p}(D_1) \hookrightarrow L^{r_1}(D_1)$ e $W^{m,p}(D_2) \hookrightarrow L^{r_2}(D_2)$ onde $r_1 = \frac{p(l+1)}{l+1-mp} = p_l$ e $r_2 = \frac{p(N-l+1)}{N-l+1-mp}$. Usando que $l \geq N-l$, tem-se

$$r_2 = \frac{p(N-l+1-mp+mp)}{N-l+1-mp} = p + \frac{mp^2}{N-l+1-mp} \geq p + \frac{mp^2}{l+1-mp} = p_l.$$

Logo

$$\|\tilde{u}\|_{L^{p_l}(D_1)} \leq C \|\tilde{u}\|_{W^{m,p}(D_1)} \quad \forall \tilde{u} \in W^{m,p}(D_1)$$

e

$$\|\tilde{u}\|_{L^{p_l}(D_2)} \leq C \|\tilde{u}\|_{W^{m,p}(D_2)} \quad \forall \tilde{u} \in W^{m,p}(D_2).$$

Usando que $t \geq \rho^j$ se $(y,t) \in \rho^j D_1$, a mudança $h(y,t) = (\rho^j y, \rho^j t)$, a imersão de Sobolev $W^{m,p}(D_1) \hookrightarrow L^{p_l}(D_1)$ e que $l \geq N-l$, temos

$$\begin{aligned}
I_1 &\geq \rho^{j(N-l-1)} \int_{\rho^j D_1} \sum_{i=0}^{m} \left| D^i w_1 \left(\frac{y}{\rho^j}, \frac{t}{\rho^j} \right) \right|^p \mathrm{d}y\mathrm{d}t = \rho^{j(N-l-1)} \rho^{j(l+1)} \|w_1\|^p_{W^{m,p}(D_1)} \\
&\geq C\rho^{jN} \|w_1\|^p_{L^{p_l}(D_1)} = C\rho^{jN} \left(\int_{D_1} \left| u(\rho^j y, \rho^j t) \right|^{p_l} \mathrm{d}y\mathrm{d}t \right)^{\frac{p}{p_l}} \\
&= C\rho^{jN} \rho^{-j(l+1)\frac{p}{p_l}} \left(\int_{\rho^j D_1} |u(y,t)|^{p_l} \mathrm{d}y\mathrm{d}t \right)^{\frac{p}{p_l}} \\
&\geq C\rho^{jN} \rho^{-j(N-l+1)\frac{p}{p_l}} \left(\int_{\rho^j D_1} |u(y,t)|^{p_l} \mathrm{d}y\mathrm{d}t \right)^{\frac{p}{p_l}} = C\rho^{jq_l} \left(\int_{\rho^j D_1} |u(y,t)|^{p_l} \mathrm{d}y\mathrm{d}t \right)^{\frac{p}{p_l}}.
\end{aligned}$$

De forma similar,

$$
\begin{aligned}
I_2 &\geq \rho^{j(l-1)} \int_{\rho^j D_2} \sum_{i=0}^{m} \left| D^i w_2 \left(\frac{s}{\rho^j}, \frac{z}{\rho^j} \right) \right|^p \mathrm{d}s\mathrm{d}z = \rho^{j(l-1)} \rho^{j(N-l+1)} \|w_2\|^p_{W^{m,p}(D_2)} \\
&\geq C\rho^{jN} \|w_2\|^p_{L^{p_l}(D_1)} = C\rho^{jN} \left(\int_{D_2} \left| u\left(\rho^j s, \rho^j z\right) \right|^{p_l} \mathrm{d}s\mathrm{d}z \right)^{\frac{p}{p_l}} \\
&= C\rho^{jN} \rho^{-j(N-l+1)\frac{p}{p_l}} \left(\int_{\rho^j D_2} |u(s,z)|^{p_l} \mathrm{d}s\mathrm{d}z \right)^{\frac{p}{p_l}}.
\end{aligned}
$$

Então,

$$
I_2 \geq C\rho^{j\left(N-(N-l+1)\frac{p}{p_l}\right)} \left(\int_{\rho^j D_2} |u(s,z)|^{p_l} \mathrm{d}s\mathrm{d}z \right)^{\frac{p}{p_l}}.
$$

Portanto, usando (1.24) e as estimativas obtidas para I_1 e I_2 em (1.25), concluímos

$$
\begin{aligned}
\int_{\Omega_j} \sum_{i=0}^{m} \left| D^i u \right|^p \mathrm{d}x &\geq C\rho^{jq_l} \left[\left(\int_{\rho^j D_1} |u(y,t)|^{p_l} \mathrm{d}y\mathrm{d}t \right)^{\frac{p}{p_l}} + \left(\int_{\rho^j D_2} |u(s,z)|^{p_l} \mathrm{d}s\mathrm{d}z \right)^{\frac{p}{p_l}} \right] \\
&\geq C\rho^{jq_l} \left(\int_{\rho^j D_1} |u(y,t)|^{p_l} \mathrm{d}y\mathrm{d}t + \int_{\rho^j D_2} |u(s,z)|^{p_l} \mathrm{d}s\mathrm{d}z \right)^{\frac{p}{p_l}} \\
&\geq C\rho^{jq_l} \left(\int_{\rho^j D_1} |u(y,t)|^{p_l} t^{N-l-1} \mathrm{d}y\mathrm{d}t + \int_{\rho^j D_2} |u(s,z)|^{p_l} s^{l-1} \mathrm{d}s\mathrm{d}z \right)^{\frac{p}{p_l}} \\
&= C\rho^{jq_l} \left(\int_{\Omega_j} |u|^{p_l} \mathrm{d}x \right)^{\frac{p}{p_l}}.
\end{aligned}
$$

■

Prova do Teorema 0.4. Fixe $\rho \in (0,1)$. Para cada $u \in W^{m,p}_l(B)$, usando que $B = \dot\cup_{j=1}^{\infty} \Omega_j \cup \{0\}$, o Lema 1.11 e que $\beta > \frac{p_l q_l}{p}$, obtemos que

$$
\begin{aligned}
\int_B |x|^\beta |u|^{p_l} \mathrm{d}x &= \sum_{j=1}^{\infty} \int_{\Omega_j} |x|^\beta |u|^{p_l} \mathrm{d}x \leq \sum_{j=1}^{\infty} \rho^{\beta(j-1)} \int_{\Omega_j} |u|^{p_l} \mathrm{d}x \\
&\leq C \sum_{j=1}^{\infty} \rho^{\beta(j-1)} \left(\rho^{-jq_l} \int_{\Omega_j} \sum_{i=0}^{m} \left| D^i u \right|^p \mathrm{d}x \right)^{\frac{p_l}{p}} \\
&= C\rho^{-\beta} \left[\sum_{j=1}^{\infty} \rho^{j(\beta - \frac{p_l q_l}{p})} \left(\int_{\Omega_j} \sum_{i=0}^{m} \left| D^i u \right|^p \mathrm{d}x \right)^{\frac{p_l}{p}} \right] \\
&\leq C\rho^{-\beta} \rho^{\beta - \frac{p_l q_l}{p}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} \int_{\Omega_j} \sum_{i=0}^{m} \left| D^i u \right|^p \mathrm{d}x \right)^{\frac{p_l}{p}} = C \left(\int_B \sum_{i=0}^{m} \left| D^i u \right|^p \mathrm{d}x \right)^{\frac{p_l}{p}},
\end{aligned}
$$

pois $\rho^{j(\beta-\frac{p_l q_l}{p})} \leq \rho^{\beta-\frac{p_l q_l}{p}}$ $\forall j = 1, 2, \ldots$, já que $\beta > \frac{p_l q_l}{p}$.

$\blacksquare$

Prova do Corolário 0.5: A imersão contínua $W_l^{m,p}(B) \hookrightarrow L^q(B, |x|^\beta)$, com $1 \leq q \leq p_l$, segue da equação (4), pois se $q = p_l$ segue imediato de (4) e se $q < p_l$ então, pela desigualdade de Hölder,

$$\begin{aligned}\|u\|_{L^q(B,|x|^\beta)} &= \left(\int_B |x|^{\frac{\beta q}{p_l}} |u|^q \cdot |x|^{\frac{\beta(p_l-q)}{p_l}} \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}} \leq \left(\int_B |x|^\beta |u|^{p_l} \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}\frac{q}{p_l}} \left(\int_B |x|^\beta \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}\frac{p_l-q}{p_l}} \\ &\leq C\|u\|_{L^{p_l}(B,|x|^\beta)}.\end{aligned}$$

Mostremos agora a imersão compacta para $1 \leq q < p_l$. Seja (u_n) em $W_l^{m,p}(B)$ limitada. Como $W^{m,p}(B) \hookrightarrow L^1(B)$ é compacta, temos que, a menos de subsequência, (u_n) é Cauchy em $L^1(B)$. Como $1 \leq q < p_l$, pela desigualdade de interpolação, existe $\theta \in (0, 1]$ tal que

$$\left\| |x|^{\frac{\beta}{q}} u_n - |x|^{\frac{\beta}{q}} u_{\tilde{n}} \right\|_{L^q(B)} \leq \left\| |x|^{\frac{\beta}{q}} u_n - |x|^{\frac{\beta}{q}} u_{\tilde{n}} \right\|_{L^1(B)}^{\theta} \left\| |x|^{\frac{\beta}{q}} u_n - |x|^{\frac{\beta}{q}} u_{\tilde{n}} \right\|_{L^{p_l}(B)}^{1-\theta}.$$

Disso e que $|x|^{\frac{\beta}{q}} \leq |x|^{\frac{\beta}{p_l}}$ $\forall x \in B$, obtemos que

$$\begin{aligned}\|u_n - u_{\tilde{n}}\|_{L^q(B,|x|^\beta)} &\leq \left\| |x|^{\frac{\beta}{q}} u_n - |x|^{\frac{\beta}{q}} u_{\tilde{n}} \right\|_{L^1(B)}^{\theta} \left\| |x|^{\frac{\beta}{q}} u_n - |x|^{\frac{\beta}{q}} u_{\tilde{n}} \right\|_{L^{p_l}(B)}^{1-\theta} \\ &\leq \|u_n - u_{\tilde{n}}\|_{L^1(B)}^{\theta} \left\| |x|^{\frac{\beta}{p_l}} u_n - |x|^{\frac{\beta}{p_l}} u_{\tilde{n}} \right\|_{L^{p_l}(B)}^{1-\theta} \\ &= \|u_n - u_{\tilde{n}}\|_{L^1(B)}^{\theta} \|u_n - u_{\tilde{n}}\|_{L^{p_l}(B,|x|^\beta)}^{1-\theta} \\ &\leq C\|u_n - u_{\tilde{n}}\|_{L^1(B)}^{\theta} \|u_n - u_{\tilde{n}}\|_{W^{m,p}(B)}^{1-\theta} \overset{n,\tilde{n}\to\infty}{\longrightarrow} 0.\end{aligned}$$

Portanto (u_n) é Cauchy em $L^q(B, |x|^\beta)$. Pela completude de $L^q(B, |x|^\beta)$, (u_n) converge em $L^q(B, |x|^\beta)$.

$\blacksquare$

Observação 1.12. Supomos a todo momento que $N - l \leq l$ devido ao fato que, para todo $l = 0, 1, \ldots, N$, tem-se

$$W_l^{m,p}(B) \hookrightarrow L^q(B, |x|^\beta) \Leftrightarrow W_{N-l}^{m,p}(B) \hookrightarrow L^q(B, |x|^\beta).$$

Prova. Segue imediatamente do fato que dado $u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ definindo

$$\tilde{u}(x_1, \ldots, x_l, x_{l+1}, \ldots, x_N) := u(x_{l+1}, \ldots, x_N, x_1, \ldots, x_l)$$

tem-se que

$$\left(u \in W_l^{m,p}(B) \Leftrightarrow \tilde{u} \in W_{N-l}^{m,p}(B)\right) \text{ e } \left(u \in L^q(B, |x|^\beta) \Leftrightarrow \tilde{u} \in L^q(B, |x|^\beta)\right).$$

∎

Capítulo 2

Aplicação em equação do biharmônico do tipo Hénon

2.1 O caso radial e a prova do Teorema 0.6

Através dessa seção, a menos de explicitado, $N \geq 5$ (pois estudaremos o caso que $N > mp = 4$), $\alpha > 0$ e $p \in (1, \frac{N+2(2+\alpha)}{N-4})$. Para sintetizar notação, denotaremos H_{rad} por

$$H^2_{0,\text{rad}}(B) \text{ se } \mathcal{B}u = u, \frac{\partial u}{\partial \nu} \text{ ou por } H^2_{\text{rad}}(B) \cap H^1_0(B) \text{ se } \mathcal{B}u = u, \Delta u.$$

Proposição 2.1. Em $H^2(B) \cap H^1_0(B)$ as seguintes normas são equivalentes:

$$\|u\|_{H^2(B)} = \left(\int_B |u|^2 + |\nabla u|^2 + |D^2 u|^2 \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{2}} \text{ e } \|u\|_{\Delta,B} = \left(\int_B |\Delta u|^2 \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Apresentaremos uma prova de acordo com a referência [12].

Prova. Vejamos que $\|u\|_{\Delta,B} \leq C\|u\|_{H^2(B)}$. Usando que a norma da soma é limitada pelo norma euclidiana em $\mathbb{R}^N$, obtemos

$$\begin{aligned} \|u\|^2_{\Delta,B} = \int_B |\Delta u|^2 \, \mathrm{d}x &\leq \int_B \left(\sum_{i=1}^N \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \right| \right)^2 \mathrm{d}x \leq C \int_B \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \right)^2 \mathrm{d}x \\ &\leq C \int_B \sum_{i,j=1}^N \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right)^2 \mathrm{d}x = C \int_B \left| D^2 u \right|^2 \mathrm{d}x \leq C\|u\|^2_{H^2(B)}. \end{aligned}$$

Mostremos, agora, que $\|u\|_{H^2(B)} \leq C\|u\|_{\Delta,B}$. Para isto, defina

$$\begin{array}{rcl} -\Delta : H^2(B) \cap H_0^1(B) & \longrightarrow & L^2(B) \\ u & \mapsto & -\Delta u. \end{array}$$

Note que $-\Delta$ é linear, contínua (pela primeira desigualdade já demonstrada) e injetora. Vejamos que é sobrejetora. Dado $w \in L^2(B)$ considere o problema

$$\begin{cases} -\Delta u = w \text{ em } B, \\ u = 0 \text{ sobre } \partial B. \end{cases}$$

Usando uma aplicação canônica do Teorema de Lax-Milgram (Vide Corolário 5.8 em [3]) obtemos uma solução fraca $u \in H_0^1(B)$. Por regularidade L^2 (Teorema 9.15 em [9]) e pela integração por partes obtemos uma solução forte $u \in H^2(B) \cap H_0^1(B)$, ou seja, $-\Delta u = w$. Isso conclui que $-\Delta$ é sobrejetora. Portanto, segue do Teorema da Aplicação Aberta (Teorema 2.6 em [3]) que $(-\Delta)^{-1}$ é contínua, ou seja, existe $C > 0$ tal que $\|u\|_{H^2(B)} \leq C\|\Delta u\|_{L^2(B)} = C\|u\|_{\Delta,B}$.

■

Segue imediatamente desta Proposição que $\|\Delta u\|_{L^2(B)}$ é uma norma equivalente a usual em H_{rad}, pois $H_{\text{rad}} \subset H^2(B) \cap H_0^1(B)$. Por isto usaremos a norma em H_{rad} como $\|u\|_{H_{\text{rad}}} := \|\Delta u\|_{L^2(B)}$.

Usando o Teorema 0.1 com $m = p = 2$ e a Proposição 2.1 conclui-se dois Corolários:

Corolário 2.2. Existe $C > 0$ tal que para todo $u \in H_{\text{rad}}$ tem-se

$$|u(x)| \leq C\frac{(\int_B |\Delta u|^2 \mathrm{d}x)^{\frac{1}{2}}}{|x|^{\frac{N-4}{2}}}, \qquad \forall x \in B\backslash\{0\}. \tag{2.1}$$

Corolário 2.3. Se $q \in [1, \frac{2(N+\alpha)}{N-4})$, então a imersão $H_{\text{rad}} \hookrightarrow L^q(B, |x|^\alpha)$ é compacta.

Dizemos que $u_0 \in H_{\text{rad}}$ é solução fraca de (5) se u_0 é ponto crítico do funcional $C^1(H_{\text{rad}}, \mathbb{R})$ dado por

$$\mathrm{J}_{\text{rad}}(u) = \frac{1}{2}\int_B |\Delta u|^2 \mathrm{d}x - \frac{1}{p+1}\int_B |x|^\alpha |u|^{p+1} \mathrm{d}x,$$

ou seja, $u_0 \in H_{\text{rad}}$ satisfaz

$$\int_B \Delta u_0 \Delta v \mathrm{d}x = \int_B |x|^\alpha |u_0|^{p-1} u_0 v \mathrm{d}x, \qquad \forall v \in H_{\text{rad}}. \tag{2.2}$$

Defina

$$m_{\Delta,\alpha,\text{rad}} := \inf_{\substack{u\in H_{\text{rad}}\\ u\neq 0}} \frac{\int |\Delta u|^2 \mathrm{d}x}{\left(\int |x|^\alpha |u|^{p+1}\mathrm{d}x\right)^{\frac{2}{p+1}}} = \inf_{\substack{u\in H_{\text{rad}}\\ u\neq 0}} \frac{\|u\|^2_{H_{\text{rad}}}}{\|u\|^2_{L^{p+1}(B,|x|^\alpha)}}. \tag{2.3}$$

Denotaremos este ínfimo por $m_{\Delta,\alpha,\text{rad},DBC}$ quando $H_{\text{rad}} = H^2_{0,\text{rad}}(B)$ e analisando (5) com condição de Dirichlet. Analogamente $m_{\Delta,\alpha,\text{rad},NBC}$ denota este ínfimo quando $H_{\text{rad}} = H^2_{\text{rad}}(B) \cap H^1_0(B)$ e analisando (5) com condição de Navier.

Proposição 2.4. O ínfimo em (2.3) é atingido para algum $u \in H_{\text{rad}}$ com $u \neq 0$. Além disso, um múltiplo de u será uma solução fraca não nula de (5).

Prova. Seja (v_n) em $H_{\text{rad}}\setminus\{0\}$ tal que

$$\frac{\|v_n\|^2_{H_{\text{rad}}}}{\|v_n\|^2_{L^{p+1}(B,\||x|^\alpha)}} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} m_{\Delta,\alpha,\text{rad}}.$$

Defina $u_n := v_n/\|v_n\|_{H_{\text{rad}}}$. Note que (u_n) é limitada em H_{rad} e pelo Teorema de Kakutani (Teorema 3.17 em [3]) existe $u_0 \in H_{\text{rad}}$ tal que, a menos de subsequência, $u_n \rightharpoonup u_0$ em H_{rad}. Pelo Corolário 2.3, temos que $u_n \to u_0$ em $L^{p+1}(B,|x|^\alpha)$. Veja que $u_0 \neq 0$, pois caso contrário

$$1 = \|u_n\|^2_{H_{\text{rad}}} = \|u_n\|^2_{L^{p+1}(B,|x|^\alpha)} \frac{\|u_n\|^2_{H_{\text{rad}}}}{\|u_n\|^2_{L^{p+1}(B,|x|^\alpha)}} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \|u_0\|^2_{L^{p+1}(B,|x|^\alpha)} m_{\Delta,\alpha,\text{rad}} = 0.$$

Como $u_n \rightharpoonup u_0$ em H_{rad}, pelo item (iii) da Proposição 3.5 em [3], segue que $\|u_0\|_{H_{\text{rad}}} \leq \liminf \|u_n\|_{H_{\text{rad}}} = 1$. Assim

$$m_{\Delta,\alpha,\text{rad}} \leq \frac{\|u_0\|^2_{H_{\text{rad}}}}{\|u_0\|^2_{L^{p+1}(B,|x|^\alpha)}} \leq \frac{1}{\lim \|u_n\|^2_{L^{p+1}(B,|x|^\alpha)}} = \lim \frac{\|u_n\|^2_{H_{\text{rad}}}}{\|u_n\|^2_{L^{p+1}(B,|x|^\alpha)}} = m_{\Delta,\alpha,\text{rad}}.$$

Disso segue que o ínfimo é atingido.

Definindo $f(u) = \|u\|^2_{\Delta,B}$ e $g(u) = \|u\|^2_{L^{p+1}(B,|x|^\alpha)}$ obtemos

$$m_{\Delta,\alpha,\text{rad}} = \inf_{\substack{u\in H_{\text{rad}}\\ u\neq 0}} \frac{\|u\|^2_{H_{\text{rad}}}}{\|u\|^2_{L^{p+1}(B,|x|^\alpha)}} = \inf_{\substack{u\in H_{\text{rad}}\\ \|u\|_{L^{p+1}(B,|x|^\alpha)}=1}} \|u\|^2_{H_{\text{rad}}} = \inf_{\substack{u\in H_{\text{rad}}\\ g(u)=1}} f(u).$$

Como este ínfimo é atingido, temos que existe $u_0 \in H_{\text{rad}}$ com $\|u_0\|_{L^{p+1}(B,|x|^\alpha)} = 1$ e $\|u_0\|^2_{H_{\text{rad}}} = m_{\Delta,\alpha,\text{rad}}$. Pelo Teorema dos Multiplicadores de Lagrange, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$f'(u_0) = \lambda g'(u_0).$$

Daí, $f'(u_0)v = \lambda g'(u_0)v \ \forall v \in H_{\text{rad}}$, ou seja

$$\int_B \Delta u_0 \Delta v \mathrm{d}x = \lambda \int_B |x|^\alpha |u_0|^{p-1} u_0 v \mathrm{d}x, \qquad \forall v \in H_{\text{rad}}. \tag{2.4}$$

Tome $v = u_0$, assim $\|u_0\|^2_{H_{\text{rad}}} = \lambda \|u_0\|^2_{L^{p+1}(B,|x|^\alpha)} = \lambda$. Como $u_0 \neq 0$ então $\lambda > 0$. Afirmamos que $u(x) = \frac{1}{\lambda^{p-1}} u_0(x)$ é solução fraca de (5). De fato, por (2.4), temos que

$$\begin{aligned}\int_B \Delta u \Delta v \mathrm{d}x &= \lambda^{\frac{1}{p-1}} \int_B \Delta u_0 \Delta v \mathrm{d}x = \lambda^{\frac{1}{p-1}} \lambda \int_B |x|^\alpha |u_0|^{p-1} u_0 v \mathrm{d}x \\ &= \int_B |x|^\alpha |\lambda^{\frac{1}{p-1}} u_0|^{p-1} \lambda^{\frac{1}{p-1}} u_0 v \mathrm{d}x = \int_B |x|^\alpha |u|^{p-1} u v \mathrm{d}x \qquad \forall v \in H_{\text{rad}}.\end{aligned}$$

■

Observação 2.5. Sejam $0 < \gamma \leq 1$ e $f \in C^{0,\gamma}(\overline{B})$ uma função satisfazendo $f \geq 0$ em B, $f \neq 0$ e f é radial. Se u é solução clássica de

$$\begin{cases} -\Delta u = f \text{ em } B, \\ u = 0 \text{ sobre } \partial B, \end{cases}$$

então $u > 0$ em B, u é radial, não crescente (quando analisamos para $v(|x|) = u(x)$) e

$$u'(s) = -\frac{1}{s^{N-1}} \int_0^s f(t) t^{N-1} \mathrm{d}t, \qquad \forall s \in (0,1]. \tag{2.5}$$

Segue disso que u é estritamente decrescente se, e somente se, existe $\varepsilon > 0$ tal que $f(x) > 0$ para todo $x \in B(0,\varepsilon)$.

Prova. Como $f \geq 0$, então $\Delta u \leq 0$. Daí, pelo princípio do máximo forte (Teorema 2.2 de [9]), $u > 0$ em B.

Para verificarmos que u é radial devemos mostrar que $u(T(x)) = u(x)$ para todos $x \in B$ e $T : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ operador ortogonal (ou seja T invertível com $T^{-1} = T^*$). Para isso fixe T operador ortogonal e note que $u \circ T - u$ é solução do problema

$$\begin{cases} -\Delta v = 0 \text{ em } B, \\ v = 0 \text{ sobre } \partial B. \end{cases}$$

De fato, $(u \circ T)(x) - u(x) = 0 \ \forall x \in \partial B$ e como Δ é invariante por operadores ortogonais e f é radial, obtemos, para todo $x \in B$, que

$$\Delta(u \circ T - u)(x) = \Delta(u \circ T)(x) - \Delta u(x) = \Delta u(T(x)) - \Delta u(x) = f(T(x)) - f(x) = 0.$$

Logo $u \circ T - u = 0$. Daí $u(T(x)) = u(x)\ \forall x \in B$.

Por fim, mostraremos (2.5) e o resto segue. Usando a identificação $u(t) = u(|x|)$, obtemos

$$\Delta u(x) = u''(t) + \frac{N-1}{t}u'(t).$$

Então

$$\begin{aligned}
-\Delta u = f &\Rightarrow u''(t) + \frac{N-1}{t}u'(t) = -f(t)\\
&\Rightarrow u''(t)t^{N-1} + (N-1)t^{N-2}u'(t) = -f(t)t^{N-1}\\
&\Rightarrow (u'(t)t^{N-1})' = -f(t)t^{N-1}\\
&\Rightarrow u'(s)s^{N-1} - u'(0)0^{N-1} = -\int_0^s f(t)t^{N-1}\mathrm{d}t \quad \forall s \in (0,1]\\
&\Rightarrow u'(s) = -\frac{1}{s^{N-1}}\int_0^s f(t)t^{N-1}\mathrm{d}t \quad \forall s \in (0,1].
\end{aligned}$$

■

Observação 2.6. Se u é solução clássica de (5) com condição de Navier, então

$$u > 0 \text{ em } B \Leftrightarrow -\Delta u > 0 \text{ em } B.$$

Prova. Defina $v := -\Delta u$, assim

$$\begin{aligned}
u > 0 \text{ em } B \Rightarrow \Delta^2 u = |x|^{\alpha}|u|^{p-1}u > 0 \text{ em } B \Rightarrow -\Delta v > 0 \text{ em } B \Rightarrow v > 0 \text{ em } B\\
\Rightarrow -\Delta u > 0 \text{ em } B.
\end{aligned}$$

Note que usamos que $v = 0$ sobre ∂B e o princípio do máximo forte (Teorema 2.2 de [9]) na terceira impli- cação.

Por outro lado, se $-\Delta u > 0$ em B então segue imediatamente do princípio do máximo forte (Teorema 2.2 em [9]) que $u > 0$ em B. ■

Proposição 2.7. Seja $u \in H_{\text{rad}}$ com $u \neq 0$ um mínimo de $m_{\Delta,\alpha,\text{rad}}$ como na Proposição 2.4.

(1) Se $\mathcal{B}u = u, \Delta u$, então u satisfaz $u, -\Delta u > 0$ em B ou $u, -\Delta u < 0$ em B. Além disso, se $u, -\Delta u > 0$ em B, então u e $-\Delta u$ são radialmente estritamente decrescentes;

(2) Se $\mathcal{B}u = u, \frac{\partial u}{\partial \nu}$, então u satisfaz $u > 0$ em B ou $u < 0$ em B. Porém, Δu muda de sinal em B. Além disso, se $u > 0$ em B, então u é radialmente estritamente decrescente.

Prova. Segue das Proposições 3.8 e 3.9, as quais veremos mais adiante, que $u \in H_{\text{rad}} \cap C^{4,\gamma}(\overline{B})$ para algum $0 < \gamma < 1$.
Prova de (1): Suponhamos, por contradição, que u muda de sinal em B. Considere o problema

$$\begin{cases} -\Delta w = |\Delta u| \text{ em } B, \\ w = 0 \text{ sobre } \partial B. \end{cases}$$

Como $|\Delta u| \in L^2(B)$, uma aplicação canônica do Teorema de Lax-Milgram (Corolário 5.8 em [3]) garante uma solução fraca $w \in H_0^1(B)$. Pelo Teorema 9.15 em [9] obtemos que $w \in H^2(B) \cap H_0^1(B)$ e é solução forte. Mostremos agora que w é radial. Tome $T : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ operador ortogonal, usando a invariância de Δ com T, tem-se que

$$\begin{aligned} -\Delta(w - w \circ T)(x) &= -\Delta w(x) + \Delta(w \circ T)(x) = -\Delta w(x) + \Delta w(T(x)) \\ &= |\Delta u(x)| - |\Delta u(T(x))| = |\Delta u(x)| - |\Delta(u \circ T)(x)| \\ &= |\Delta u(x)| - |\Delta u(x)| = 0. \end{aligned}$$

Com isso e $w - w \circ T \in H_0^1(B)$ conclui-se $w = w \circ T$. Portanto w é radial. Pelo Teorema 6.14 em [9], $w \in C^2(\overline{B})$ e é solução clássica. Assim $w \in H_{\text{rad}}$.

Note que

$$-\Delta w = |\Delta u| \Rightarrow -\Delta w \geq \pm \Delta u \Rightarrow -\Delta(w \pm u) \geq 0.$$

Pela hipótese de contradição obtemos que $w \neq u$ e $w \neq -u$, pois $w \geq 0$ devido ao princípio do máximo forte (Teorema 2.2 em [9]). Logo o princípio do máximo forte garante $w \pm u > 0$. Então $w > \pm u$. Daí $w > |u|$ e disso segue que

$$\frac{\|w\|^2_{H_{\text{rad}}}}{\|w\|^2_{L^{p+1}(B,|x|^\alpha)}} = \frac{\int |\Delta w|^2 \mathrm{d}x}{\left(\int |x|^\alpha |w|^{p+1} \mathrm{d}x\right)^{\frac{2}{p+1}}} < \frac{\int |\Delta u|^2 \mathrm{d}x}{\left(\int |x|^\alpha |u|^{p+1} \mathrm{d}x\right)^{\frac{2}{p+1}}} = \frac{\|u\|^2_{H_{\text{rad}}}}{\|u\|^2_{L^{p+1}(B,|x|^\alpha)}},$$

o que contradiz a minimalidade de u.

Pela Observação 2.6 temos que $-\Delta u$ tem o mesmo sinal de u. Defina $v := -\Delta u \in C^{2,\gamma}(\overline{B})$ e dessa forma, por (5), u e v são soluções clássicas, respectivamente, de

$$\begin{cases} -\Delta u = v \text{ em } B, \\ u = 0 \text{ sobre } \partial B. \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} -\Delta v = |x|^\alpha u^p \text{ em } B, \\ v = 0 \text{ sobre } \partial B \end{cases} \tag{2.6}$$

Finalmente, usando a Observação 2.5 obtemos que u, $-\Delta u$ radialmente estritamente decrescente.

Prova de (2): Segue da página 136 de [5] que $u > 0$ ou $u < 0$ e que u é radialmente estritamente decrescente se $u > 0$. Suponhamos $u > 0$ e, por contradição, que Δu possua o mesmo sinal. Como $u > 0$, pelo princípio do máximo forte (Teorema 2.2 em [9]), $\Delta u \leq 0$. Fixado $x_0 \in \partial B$, pelo Lema de Hopf (Lema 3.4 em [9]), temos que $\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) < 0$. Isso contradiz a condição de fronteira. Caso $u < 0$ seguindo um argumento análogo encontra-se um $x_0 \in \partial B$ com $\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) > 0$ contradizendo a condição de fronteira.

∎

Corolário 2.8. Tem-se a seguinte desigualdade

$$m_{\Delta,\alpha,\text{rad},\text{NBC}} < m_{\Delta,\alpha,\text{rad},\text{DBC}}.$$

Prova. Como $H^2_{0,\text{rad}}(B) \subset H^2_{\text{rad}}(B) \cap H^1_0(B)$ temos que

$$m_{\Delta,\alpha,\text{rad},\text{NBC}} \leq m_{\Delta,\alpha,\text{rad},\text{DBC}}.$$

Suponhamos, por contradição, que a igualdade é válida. Assim existe $u \in H^2_{0,\text{rad}}(B)$ com $u \neq 0$ e mínimo de $m_{\Delta,\alpha,\text{rad},\text{DBC}}$ e de $m_{\Delta,\alpha,\text{rad},\text{NBC}}$. Pela Proposição 2.7 obtemos que Δu tem o mesmo sinal e que muda de sinal. Contradição. ∎

Prova do Teorema 0.6

Prova do item (1): Usemos a Proposição 6 de [4] em (2.6). Dessa forma concluímos devido a

$$\begin{aligned}\frac{N+\alpha}{p+1} + \frac{N}{2} \leq \frac{N+\alpha}{\frac{N+4+2\alpha}{N-4}+1} + \frac{N}{2} &= \frac{(N+\alpha)(N-4)}{N+4+2\alpha+N-4} + \frac{N}{2} \\ &= \frac{(N+\alpha)(N-4)}{2N+2\alpha} + \frac{N}{2} = \frac{N-4+N}{2} = N-2.\end{aligned}$$

Prova do item (2): Lembremos que para encontrar essa solução estamos supondo $1 < p < \frac{N+2(2+\alpha)}{N-4}$. Para concluir que u e $-\Delta u$ são radialmente estritamente decrescente basta usar a Proposição 2.7.

∎

2.2 O caso com simetria parcial e provas dos Teoremas 0.7 e 0.8

Nesta seção estamos supondo

(H1) $N \geq 4$;

(H2) $l \in \mathbb{N}$ e $2 \leq N - l \leq l$;

(H3) $2 < p + 1 < 2_l$, onde $2_l := \frac{2(l+1)}{l-3}$ se $l \geq 4$ e 2_l é qualquer elemento de $(2, \infty)$ se $l \leq 3$;

(H4) $\alpha > \frac{2_l q_l}{2}$, onde $q_l := N - (N - l + 1)\frac{2}{2_l}$.

Para simplificar notação, H_l simboliza

$$W_l^{2,2}(B) \cap H_0^2(B) \text{ se } \mathcal{B}u = u, \frac{\partial u}{\partial \nu} \text{ ou } W_l^{2,2}(B) \cap H_0^1(B) \text{ se } \mathcal{B}u = u, \Delta u.$$

Como visto na Proposição 2.1, temos que as normas $(\int_B |u|^2 + |\nabla u|^2 + |D^2 u|^2)^{\frac{1}{2}}$ e $(\int_B |\Delta u|^2)^{\frac{1}{2}}$ são equivalentes em H_l. Portanto, consideremos H_l munido com a norma

$$\|u\|_{H_l} = \left(\int_B |\Delta u|^2 \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Pelo Corolário 0.5 e as hipóteses (H3) e (H4), obtemos

Corolário 2.9. A imersão $H_l \hookrightarrow L^{p+1}(B, |x|^\alpha)$ é compacta.

Definição: Dizemos que $u_0 \in H_l$ é solução fraca de (5) se u_0 é um ponto crítico do funcional $C^1(H_l, \mathbb{R})$ definido por

$$\mathrm{J}_l(u) = \frac{1}{2} \int_B |\Delta u|^2 \mathrm{d}x - \frac{1}{p+1} \int_B |x|^\alpha |u|^{p+1} \mathrm{d}x,$$

ou seja, $u_0 \in H_l$ satisfaz

$$\int_B \Delta u_0 \Delta v \mathrm{d}x = \int_B |x|^\alpha |u_0|^{p-1} u_0 v \mathrm{d}x \quad \forall v \in H_l.$$

Defina

$$m_{\Delta,\alpha,l} := \inf_{\substack{u \in H_l \\ u \neq 0}} \frac{\int |\Delta u|^2 \mathrm{d}x}{\left(\int |x|^\alpha |u|^{p+1} \mathrm{d}x \right)^{\frac{2}{p+1}}} = \inf_{\substack{u \in H_l \\ u \neq 0}} \frac{\|u\|_{H_l}^2}{\|u\|_{L^{p+1}(B,|x|^\alpha)}^2}. \tag{2.7}$$

Denotaremos este ínfimo por $m_{\Delta,\alpha,l,\mathrm{DBC}}$ quando $H_l = W_l^{2,2}(B) \cap H_0^1(B)$ e analisando (5) com condição de Dirichlet. Analogamente denotaremos este ínfimo por $m_{\Delta,\alpha,l,\mathrm{NBC}}$ quando $H_l = W_l^{2,2}(B) \cap H_0^1(B)$ e analisando (5) com condição de Navier.

Proposição 2.10. O ínfimo em (2.7) é atingido para algum $u \in H_l$ com $u \neq 0$. Além disso, um múltiplo de u será solução fraca não nula de (5).

Prova. Seja (v_n) em $H_l\backslash\{0\}$ tal que

$$\frac{\|v_n\|^2_{H_l}}{\|v_n\|^2_{L^{p+1}(B,|x|^\alpha)}} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} m_{\Delta,\alpha,l}.$$

Defina $u_n := v_n/\|v_n\|_{H_l}$. Note que (u_n) é limitada em H_l e pelo Teorema de Kakutani (Teorema 3.17 em [3]) existe $u_0 \in H_l$ tal que, a menos de subsequência, $u_n \rightharpoonup u_0$ em H_l. Pelo Corolário 2.9, temos que $u_n \to u_0$ em $L^{p+1}(B,|x|^\alpha)$. Veja que $u_0 \neq 0$, pois caso contrário

$$1 = \|u_n\|^2_{H_l} = \|u_n\|^2_{L^{p+1}(B,|x|^\alpha)} \frac{\|u_n\|^2_{H_l}}{\|u_n\|^2_{L^{p+1}(B,|x|^\alpha)}} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \|u_0\|^2_{L^{p+1}(B,|x|^\alpha)} m_{\Delta,\alpha,l} = 0.$$

Como $u_n \rightharpoonup u_0$ em H_l, pelo item (iii) da Proposição 3.5 em [3], segue que $\|u_0\|_{H_l} \leq \liminf \|u_n\|_{H_l} = 1$. Assim

$$m_{\Delta,\alpha,l} \leq \frac{\|u_0\|^2_{H_l}}{\|u_0\|^2_{L^{p+1}(B,|x|^\alpha)}} \leq \frac{1}{\lim \|u_n\|^2_{L^{p+1}(B,|x|^\alpha)}} = \lim \frac{\|u_n\|^2_{H_l}}{\|u_n\|^2_{L^{p+1}(B,|x|^\alpha)}} = m_{\Delta,\alpha,l}.$$

Disso segue que o ínfimo é atingido.

Definindo $f(u) = \|u\|^2_{H_l}$ e $g(u) = \|u\|^2_{L^{p+1}(B,|x|^\alpha)}$ obtemos

$$m_{\Delta,\alpha,l} = \inf_{\substack{u\in H_l \\ u\neq 0}} \frac{\|u\|^2_{H_{\text{rad}}}}{\|u\|^2_{L^{p+1}(B,|x|^\alpha)}} = \inf_{\substack{u\in H_l \\ \|u\|_{L^{p+1}(B,|x|^\alpha)}=1}} \|u\|^2_{H_l} = \inf_{\substack{u\in H_l \\ g(u)=1}} f(u).$$

Como este ínfimo é atingido, temos que existe $u_0 \in H_l$ com $\|u_0\|_{L^{p+1}(B,|x|^\alpha)} = 1$ e $\|u_0\|^2_{H_l} = m_{\Delta,\alpha,l}$. Pelo Teorema dos Multiplicadores de Lagrange, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$f'(u_0) = \lambda g'(u_0).$$

Daí, $f'(u_0)v = \lambda g'(u_0)v \ \forall v \in H_l$, ou seja

$$\int_B \Delta u_0 \Delta v dx = \lambda \int_B |x|^\alpha |u_0|^{p-1} u_0 v dx \qquad \forall v \in H_l. \tag{2.8}$$

Tome $v = u_0$, assim $\|u_0\|^2_{H_l} = \lambda \|u_0\|^2_{L^{p+1}(B,|x|^\alpha)} = \lambda$. Como $u_0 \neq 0$ tem-se $\lambda > 0$. Afirmamos que $u(x) = \frac{1}{\lambda^{p-1}} u_0(x)$ é solução fraca de (5). De fato, por (2.8), temos que

$$\begin{aligned}\int_B \Delta u \Delta v \mathrm{d}x &= \lambda^{\frac{1}{p-1}} \int_B \Delta u_0 \Delta v \mathrm{d}x = \lambda^{\frac{1}{p-1}} \lambda \int_B |x|^\alpha |u_0|^{p-1} u_0 v \mathrm{d}x \\ &= \int_B |x|^\alpha |\lambda^{\frac{1}{p-1}} u_0|^{p-1} \lambda^{\frac{1}{p-1}} u_0 v \mathrm{d}x = \int_B |x|^\alpha |u|^{p-1} u v \mathrm{d}x \qquad \forall v \in H_l.\end{aligned}$$

■

Observação 2.11. (1) Seja $f \in L^2(B)$ tal que $f(y,z) = f(|y|,|z|)$ onde $x = (y,z)$. Se $u \in H_0^1(B)$ é solução fraca de

$$\begin{cases} -\Delta u = f \text{ em } B, \\ u = 0 \text{ sobre } \partial B, \end{cases}$$

então $u(y,z) = u(|y|,|z|)$.

(2) Seja $f \in L^2(B)$ tal que $f(y,z) = f(|y|,|z|)$ onde $x = (y,z)$. Seja $u \in H$ solução fraca de

$$\begin{cases} \Delta^2 u = f \text{ em } B, \\ \mathcal{B}u = 0 \text{ sobre } \partial B, \end{cases}$$

onde H denota $H^2(B) \cap H_0^1(B)$ se $\mathcal{B}u = u, \Delta u$ ou H denota $H_0^2(B)$ se $\mathcal{B}u = u, \frac{\partial u}{\partial \nu}$. Então $u(y,z) = u(|y|,|z|)$.

Prova.

Prova de (1): Por regularidade L^2 (Teorema 9.15 em [9]) obtemos que $u \in H^2(B) \cap H_0^1(B)$ e é solução forte. Fixemos $T_l : \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^l$ e $T_{N-l} : \mathbb{R}^{N-l} \to \mathbb{R}^{N-l}$ operadores ortogonais. Queremos mostrar que $u(y,z) = u(T_l(y), T_{N-l}(z))$ $\forall (y,z) \in \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^{N-l}$. Denotando $T_N(y,z) = (T_l(y), T_{N-l}(z))$ obtemos que T_N é ortogonal e

$$\begin{aligned}-\Delta(u - u \circ T_N)(y,z) &= -\Delta u(y,z) + \Delta(u \circ T_N)(y,z) = -\Delta u(y,z) + \Delta u(T_N(y,z)) \\ &= f(y,z) - f(T_N(y,z)) = f(y,z) - f(T_l(y), T_{N-l}(z)) = 0,\end{aligned}$$

para todo $(y,z) \in \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^{N-l}$. E como $u - u \circ T_N|_{\partial B}$ tem-se $u(y,z) = u(T_N(y,z))$ para todo $(y,z) \in \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^{N-l}$, ou seja, $u(y,z) = u(T_l(y), T_{N-l}(z))$ para todo $(y,z) \in \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^{N-l}$.

Prova de (2): Fixe $T_l : \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^l$ e $T_{N-l} : \mathbb{R}^{N-l} \to \mathbb{R}^{N-l}$ operadores ortogonais. Defina $T_N(y,z) = (T_l(y), T_{N-l}(z))$ e, dessa forma, obtemos que T_N é ortogonal. Como $u \in H$ é solução fraca temos que

$$\int_B \Delta u(x) \Delta v(x) \mathrm{d}x = \int_B f(x) v(x) \mathrm{d}x \quad \forall v \in C_c^\infty(B). \tag{2.9}$$

Usando a invariância de Δ com T_N, a equação (2.9) e T_N como mudança de variável, temos que

$$\begin{aligned}
\int_B \Delta(u - u\circ T_N)(x)\Delta v(x)\mathrm{d}x &= \int_B \Delta u(x)\Delta v(x)\mathrm{d}x - \int_B \Delta u(T_N(x))\Delta v(x)\mathrm{d}x \\
&= \int_B \Delta u(x)\Delta v(x)\mathrm{d}x - \left|\det(T_N^{-1})'\right| \int_B \Delta u(y)\Delta(v\circ T_N^{-1})(y)\mathrm{d}y \\
&= \int_B f(x)v(x)\mathrm{d}x - \left|\det(T_N^{-1})'\right| \int_B f(y)v(T_N^{-1}(y))\mathrm{d}y \\
&= \int_B f(x)v(x)\mathrm{d}x - \int_B f(T_N(x))v(x)\mathrm{d}x = 0 \quad \forall v \in C_c^\infty(B).
\end{aligned}$$

Como para cada $\varphi \in C_c^\infty(B)$ existe $v \in C_c^\infty(B)$ tal que $\Delta v = \varphi$, tem-se que

$$\int_B \Delta(u - u\circ T_N)(x)\varphi(x)\mathrm{d}x \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(B).$$

Então $\Delta(u - u\circ T_N) = 0$ em B. Como $u - u\circ T_N \in H_0^1(B)$, então $u = u\circ T_N$ em B. Como queríamos demonstrar. ■

Proposição 2.12. (Os sinais das soluções) Seja $u \in H_l$ um minimizador de $m_{\Delta,\alpha,l}$.

(1) Se $\mathcal{B}u = u, \Delta u$ então $u, -\Delta u > 0$ em B ou $u, -\Delta u < 0$ em B;

(2) Se $\mathcal{B}u = u, \frac{\partial u}{\partial \nu}$ então $u > 0$ em B ou $u < 0$ em B. Entretanto, Δu muda de sinal em B.

Prova. Segue das Proposições 3.10 e 3.11, as quais veremos mais adiante, que $u \in H_l \cap C^{4,\gamma}(\overline{B})$ para algum $0 < \gamma < 1$.

Prova de (1): Suponhamos, por contradição, que u muda de sinal em B. Considere o problema

$$\begin{cases} -\Delta w = |\Delta u| \text{ em } B, \\ w = 0 \text{ sobre } \partial B. \end{cases}$$

Como $|\Delta u| \in L^2(B)$, uma aplicação canônica do Teorema de Lax-Milgram (Corolário 5.8 em [3]) garante uma solução fraca $w \in H_0^1(B)$. Pelo Teorema 9.15 em [9] obtemos que $w \in H^2(B) \cap H_0^1(B)$ e é solução forte. Pelo Teorema 6.14 em [9], $w \in C^2(\overline{B})$ e é solução clássica. Assim $\Delta w = |\Delta u| = 0$ em ∂B. Vejamos agora que $w \in H_l$. Tome $T_l : \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^l$ e $T_{N-l} : \mathbb{R}^{N-l} \to \mathbb{R}^{N-l}$ operadores ortogonais, então $T_N(y,z) := (T_l(y), T_{N-l}(z))$ é ortogonal e

$$\begin{aligned}
-\Delta(w - w\circ T_N)(x) &= -\Delta w(x) + \Delta(w\circ T_N)(x) = -\Delta w(x) + \Delta w(T_N(x)) \\
&= |\Delta u(x)| - |\Delta u(T_N(x))| = |\Delta u(x)| - |\Delta u(x)| = 0.
\end{aligned}$$

Com isso e $w - w \circ T_N \in H_0^1(B)$ obtemos que $w = w \circ T_N$. Dessa forma $w \in H_l$.

Note que

$$-\Delta w = |\Delta u| \Rightarrow -\Delta w \geq \pm \Delta u \Rightarrow -\Delta(w \pm u) \geq 0.$$

Pela hipótese de contradição obtemos que $w \neq u$ e $w \neq -u$, pois $w \geq 0$ devido ao princípio do máximo forte (Teorema 2.2 em [9]). Assim o princípio do máximo forte garante $w \pm u > 0$. Então $w > \pm u$. Daí $w > |u|$ e disso segue que

$$\frac{\|w\|_{H_l}^2}{\|w\|_{L^{p+1}(B,|x|^\alpha)}^2} = \frac{\int |\Delta w|^2 \mathrm{d}x}{\left(\int |x|^\alpha |w|^{p+1} \mathrm{d}x\right)^{\frac{2}{p+1}}} < \frac{\int |\Delta u|^2 \mathrm{d}x}{\left(\int |x|^\alpha |u|^{p+1} \mathrm{d}x\right)^{\frac{2}{p+1}}} = \frac{\|u\|_{H_l}^2}{\|u\|_{L^{p+1}(B,|x|^\alpha)}^2},$$

o que contradiz a minimalidade de u.

Pela Observação 2.6 temos que Δu tem o mesmo sinal de u. Defina $v := -\Delta u \in C^{2,\gamma}(\overline{B})$ e dessa forma, por (5), u e v são soluções clássicas, respectivamente, de

$$\begin{cases} -\Delta u = v \text{ em } B, \\ u = 0 \text{ sobre } \partial B. \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} -\Delta v = |x|^\alpha u^p \text{ em } B, \\ v = 0 \text{ sobre } \partial B \end{cases} \tag{2.10}$$

Finalmente, usando a Observação 2.5 obtemos que u, $-\Delta u$ radialmente estritamente decrescente.

Prova de (2): Pela seção 2 e 3 de [7] temos que $u > 0$ ou $u < 0$ em B. Suponhamos $u > 0$ e, por contradição, que Δu não muda de sinal. Como $u > 0$, pelo princípio do máximo forte (Teorema 2.2 em [9]), $\Delta u \leq 0$. Fixado $x_0 \in \partial B$, pelo Lema de Hopf (Lema 3.4 em [9]), temos que $\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) < 0$. Isso contradiz a condição de fronteira. Caso $u < 0$ seguindo um argumento análogo encontra-se $x_0 \in \partial B$ com $\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) > 0$ contradizendo a condição de fronteira. ■

Corolário 2.13. Podemos observar, mesmo não sendo necessário para os outros resultados dessa dissertação, que

$$m_{\Delta,\alpha,l,\mathrm{NBC}} < m_{\Delta,\alpha,l,\mathrm{DBC}}.$$

Prova. Como $W_l^{2,2}(B) \cap H_0^2(B) \subset W_l^{2,2}(B) \cap H_0^1(B)$ temos que

$$m_{\Delta,\alpha,l,\mathrm{NBC}} \leq m_{\Delta,\alpha,l,\mathrm{DBC}}.$$

Suponhamos, por contradição, que a igualdade é válida. Assim existe $u \in W_l^{2,2}(B) \cap H_0^2(B)$ com $u \neq 0$ e mínimo de $m_{\Delta,\alpha,l,\mathrm{NBC}}$ e $m_{\Delta,\alpha,l,\mathrm{DBC}}$. Pela Proposição 2.12 obtemos que Δu tem o mesmo sinal e que muda de sinal. Contradição. Portanto

$$m_{\Delta,\alpha,l,\text{NBC}} < m_{\Delta,\alpha,l,\text{DBC}}.$$

■

Lema 2.14. Sejam $N \geq 4$ e l_1, l_2 inteiros tais que $l_1 \neq l_2$, $2 \leq N - l_1 \leq l_1$ e $2 \leq N - l_2 \leq l_2$. Então $H_{l_1} \cap H_{l_2} = H_{\text{rad}}$.

Prova. Seja $u \in H_{l_1} \cap H_{l_2}$ com $l_1 < l_2$. Queremos mostrar que se $x_0, x \in B$ com $|x_0| = |x|$ tem-se $u(x_0) = u(x)$. Fixe $x_0, x \in B$ com $|x_0| = |x|$. Digamos

$$x = (x_1, \ldots, x_N) \text{ e } x_0 = (x_1^0, \ldots, x_N^0).$$

Defina $y := (x_1, \ldots, x_{l_1})$, $y_0 := (x_1^0, \ldots, x_{l_1}^0)$, $z := (x_{l_1+1}, \ldots, x_N)$ e $z_0 := (x_{l_1+1}^0, \ldots, x_N^0)$. Como $|x_0| = |x|$ temos que

$$|y_0|^2 + |z_0|^2 = |y|^2 + |z|^2. \tag{2.11}$$

Além disso, sem perda de generalidade, podemos supor $|y_0| \geq |y|$. Por $u \in H_{l_1}$ tem-se

$$u(x) = u(|y|, 0, \ldots, 0, |z|). \tag{2.12}$$

De (2.11), obtemos $|z|^2 = |y_0|^2 - |y|^2 + |z_0|^2$. Usando isso e $u \in H_{l_1}$,

$$u(|y|, 0, \ldots, 0, |z|) = u\left(|y|, 0, \ldots, 0, \sqrt{|y_0|^2 - |y|^2}, 0, \ldots, 0, |z_0|\right), \tag{2.13}$$

onde o termo $\sqrt{|y_0|^2 - |y|}$ está na $(l_1 + 1)$-ésima entrada. Como $u \in H_{l_2}$ tem-se

$$u\left(|y|, 0, \ldots, 0, \sqrt{|y_0|^2 - |y|^2}, 0, \ldots, 0, |z_0|\right) = u(|y_0|, 0, \ldots, 0, |z_0|). \tag{2.14}$$

Devido a $u \in H_{l_1}$ concluí-se

$$u(|y_0|, 0, \ldots, 0, |z_0|) = u(x_0).$$

Portanto, por (2.12), (2.13) e (2.14) segue que $u(x) = u(x_0)$. ■

Proposição 2.15. Sejam $N \geq 4$, $l \in \mathbb{Z}$ com $2 \leq N - l \leq l$ e $p \in \mathbb{R}$ com $2 < p + 1 < 2_l$, onde $2_l := \frac{2(l+1)}{l-3}$ se $l \geq 4$ e 2_l é qualquer elemento de $(2, \infty)$ se $l < 4$. Então existe $\alpha_{0,D}(p, N, l) > 0$ tal que para todo $\alpha > \alpha_{0,D}(p, N, l)$ tem-se que

$$m_{\Delta,\alpha,l,\text{DBC}} < m_{\Delta,\alpha,\text{rad},\text{DBC}}.$$

Exibiremos a demonstração na seção seguinte.

Prova do Teorema 0.7. Fixe l inteiro com $2 \leq N - l \leq l$. Note que temos $\lfloor \frac{N}{2} \rfloor - 1$ possibilidades para a escolha de l, pois se $N = 2\lfloor \frac{N}{2} \rfloor$, então $N - l = 2, 3, \ldots, \lfloor \frac{N}{2} \rfloor$ e se $N = 2\lfloor \frac{N}{2} \rfloor + 1$, então $N - l = 2, 3, \ldots, \lfloor \frac{N}{2} \rfloor$. Se $l < 4$ então $2 < p + 1 < 2_l$, para algum $2_l \in (2, \infty)$. Daí existe $u_l \in H_l$ mínimo de $m_{\Delta,\alpha,l,\mathrm{DBC}}$ para $\alpha > \frac{2_l q_l}{2}$. Se $l \geq 4$ então $N \geq 8 \geq 6$ e, daí, $2 < p + 1 < \frac{2N-2}{N-5}$. Como $l \leq N - 2$, note que

$$\frac{2N-2}{N-5} = \frac{2N-10+8}{N-5} = 2 + \frac{8}{(N-2)-3} \leq 2 + \frac{8}{l-3} = \frac{2(l+1)}{l-3} = 2_l.$$

Então existe $u_l \in H_l$ mínimo de $m_{\Delta,\alpha,l,\mathrm{DBC}}$ para $\alpha > \frac{2_l q_l}{2}$. Pelas Proposições 3.10 e 3.11 obtemos que $u_l \in C^{4,\gamma}(\overline{B})$ e é solução clássica de (5). Além disso, a Proposição 2.12 garante $u_l > 0$ em B e Δu_l muda de sinal em B. Como $2 < p + 1 < 2_l$, pela Proposição 2.15, existe $\alpha_{0,D}(p, N, l) > 0$ tal que

$$m_{\Delta,\alpha,l,\mathrm{DBC}} < m_{\Delta,\alpha,\mathrm{rad},\mathrm{DBC}} \quad \forall \alpha > \alpha_{0,D}(p, N, l). \tag{2.15}$$

Logo u_l não é radial com $\alpha > \alpha_{0,D}(p, N, l)$.

Defina $\alpha_0(p, N) = \max_l \left(\max\{\alpha_{0,D}(p, N, l), \frac{2_l q_l}{2}\} \right)$. Até este momento obtemos para l uma solução clássica u_l para cada $\alpha > \alpha_0(p, N)$. Resta verificar que $u_{l_1} \neq u_{l_2}$ se $l_1 \neq l_2$. Suponhamos $u_{l_1} = u_{l_2}$, pelo Lema 2.14, $u_{l_1} = u_{l_2} \in H_{l_1} \cap H_{l_2} = H_{\mathrm{rad}}$. O que contradiz (2.15).

■

Proposição 2.16. Sejam $N \geq 4$, $l \in \mathbb{Z}$ com $2 \leq N - l \leq l$ e $p \in \mathbb{R}$ com $2\frac{N-l}{N-l-1} < p + 1 < 2_l$, onde $2_l := \frac{2(l+1)}{l-3}$ se $l \geq 4$ e 2_l é qualquer elemento de $(2, \infty)$ se $l < 4$. Então existe $\alpha_{0,N}(p, N, l)$ tal que dado $\alpha > \alpha_{0,N}(p, N, l)$ tem-se

$$m_{\Delta,\alpha,l,\mathrm{NBC}} < m_{\Delta,\alpha,\mathrm{rad},\mathrm{NBC}}.$$

Exibiremos a demonstração na seção seguinte.

Prova do Teorema 0.8. Fixemos $l \in \mathbb{Z}$ com $2 \leq N - l \leq l$ e $p \in \mathbb{R}$ com $\frac{2(N-l)}{N-l-1} < p + 1 < 2_l$. Pela Proposição 2.16 obtemos $\alpha_{0,N}(p, N, l) > 0$ tal que dado $\alpha > \alpha_{0,N}(p, N, l)$ tem-se

$$m_{\Delta,\alpha,l,\mathrm{NBC}} < m_{\Delta,\alpha,\mathrm{rad},\mathrm{NBC}}. \tag{2.16}$$

Defina $\alpha_0(p, N, l) = \max_l \left(\max\{\alpha_{0,N}(p, N, l), \frac{2_l q_l}{2}\} \right)$. Dado $\alpha > \alpha_0(p, N, l)$ temos que existe $u_l \in H_l$ mínimo de $m_{\Delta,\alpha,l,\mathrm{NBC}}$. Pelas Proposições 3.10 e 3.11 obtemos que $u_l \in C^{4,\gamma}(\overline{B})$ e é solução clássica de (5). Além disso, a Proposição 2.12 garante que

$u_l, -\Delta u_l > 0$ em B ou $u_l, -\Delta u_l < 0$ em B. Podemos supor $u_l, -\Delta u_l > 0$ em B, pois caso contrário troque u_l por $-u_l$. Por fim, u_l não é radial devido a minimalidade de u_l e (2.16).

■

2.3 Demonstrações das Proposições 2.15 e 2.16

Devido a grande extensão das provas das Proposições 2.15 e 2.16 separamos uma seção para as mesmas. Primeiramente considere os seguintes Lemas:

Lema 2.17. Sejam $N \geq 4$, $l \in \mathbb{Z}$ com $2 \leq N-l \leq l$ e $p \in \mathbb{R}$ com $2 < p+1 < 2_l$, onde $2_l = \frac{2(l+1)}{l-3}$ se $l \geq 4$ e 2_l é qualquer elemento de $(2, \infty)$ se $l < 4$. Defina $q_l := N - (N-l+1)\frac{2}{2_l}$. Para todo $\alpha_0 > \frac{2_l q_l}{2}$, existe $C(p,N,l) > 0$ tal que

$$m_{\Delta,\alpha,l} \leq C(p,N,l)\alpha^{(N-l-1)\frac{1-p}{p+1}+2\frac{p+3}{p+1}}, \quad \forall \alpha \geq \alpha_0. \tag{2.17}$$

Estaremos considerando $m_{\Delta,\alpha,l}$ com ambas as condições de fronteira.

Prova. Seja $u \in H_l$ e para cada $s, t > 0$ defina $v(s,t) := u(|y|,|z|)$, onde $s = |y|$, $t = |z|$, $y = (y_1, \ldots, y_l)$ e $z = (z_1, \ldots, z_{N-l})$. Veja que

$$\Delta u(x) = \sum_{i=1}^{l} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x) + \sum_{i=l+1}^{N} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x) = \sum_{i=1}^{l} \frac{\partial^2}{\partial y_i^2}[v(|y|,|z|)] + \sum_{i=1}^{N-l} \frac{\partial^2}{\partial z_i^2}[v(|y|,|z|)]. \tag{2.18}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{l} \frac{\partial^2}{\partial y_i^2}[v(|y|,|z|)] &= \sum_{i=1}^{l} \frac{\partial}{\partial y_i}\left[v_s(|y|,|z|)\frac{y_i}{|y|}\right] \\
&= \sum_{i=1}^{l}\left[v_{ss}(s,t)\frac{y_i}{|y|}\frac{y_i}{|y|} + v_s(s,t)\frac{|y| - y_i\frac{y_i}{|y|}}{|y|^2}\right] \\
&= v_{ss}(s,t) + v_s(s,t)\frac{l|y|-|y|}{|y|^2} = v_{ss}(s,t) + \frac{l-1}{s}v_s(s,t).
\end{aligned}$$

Analogamente, obtemos

$$\sum_{i=1}^{N-l} \frac{\partial^2}{\partial z_i^2}[v(|y|,|z|)] = v_{tt}(s,t) + \frac{N-l-1}{t}v_t(s,t).$$

Substituindo em (2.18) temos que

$$\Delta u(x) = v_{ss}(s,t) + \frac{l-1}{s} v_s(s,t) + v_{tt}(s,t) + \frac{N-l-1}{t} v_t(s,t) =: Lv(s,t). \tag{2.19}$$

Utilizando coordenadas polares, para cada $s, t > 0$ existem $\rho > 0$ e $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ tais que $s = \rho\cos\theta$ e $t = \rho\sin\theta$. Além disso, invertendo as variáveis, $\rho = \sqrt{s^2+t^2}$, $\theta = \arctan(\frac{t}{s})$ e suas derivadas são dadas por

$$\frac{\partial\rho}{\partial s} = \cos\theta,\ \frac{\partial\rho}{\partial t} = \sin\theta,\ \frac{\partial\theta}{\partial s} = -\frac{\sin\theta}{\rho},\ \frac{\partial\theta}{\partial t} = \frac{\cos\theta}{\rho}. \tag{2.20}$$

Defina $w(\rho,\theta) := v(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$. Vamos procurar uma expressão como (2.19) para w. Usando (2.20) com alguns cálculos elementares, porém longos, temos

$$\begin{aligned}
v_s &= w_\rho \cos\theta - w_\theta \frac{\sin\theta}{\rho},\\
v_t &= w_\rho \sin\theta + w_\theta \frac{\cos\theta}{\rho},\\
v_{ss} &= \left(w_{\rho\rho}\cos\theta - w_{\rho\theta}\frac{\sin\theta}{\rho}\right)\cos\theta + w_\rho \frac{\sin^2\theta}{\rho}\\
&\quad - \frac{\left[\left(w_{\theta\rho}\cos\theta - w_{\theta\theta}\frac{\sin\theta}{\rho}\right)\sin\theta - w_\theta \frac{\sin\theta\cos\theta}{\rho}\right]\rho - w_\theta \sin\theta\cos\theta}{\rho^2}\\
&= w_{\rho\rho}\cos^2\theta - 2w_{\rho\theta}\frac{\sin\theta\cos\theta}{\rho} + w_{\theta\theta}\frac{\sin^2\theta}{\rho^2} + w_\rho\frac{\sin^2\theta}{\rho} + 2w_\theta\frac{\sin\theta\cos\theta}{\rho^2},\\
v_{tt} &= \left(w_{\rho\rho}\sin\theta + w_{\rho\theta}\frac{\cos\theta}{\rho}\right)\sin\theta + w_\rho \frac{\cos^2\theta}{\rho}\\
&\quad + \frac{\left[\left(w_{\theta\rho}\sin\theta + w_{\theta\theta}\frac{\cos\theta}{\rho}\right)\cos\theta - w_\theta \frac{\sin\theta\cos\theta}{\rho}\right]\rho - w_\theta \cos\theta\sin\theta}{\rho^2}\\
&= w_{\rho\rho}\sin^2\theta + 2w_{\rho\theta}\frac{\sin\theta\cos\theta}{\rho} + w_{\theta\theta}\frac{\cos^2\theta}{\rho^2} + w_\rho\frac{\cos^2\theta}{\rho} - 2w_\theta\frac{\sin\theta\cos\theta}{\rho^2}.
\end{aligned}$$

Substituindo isso em (2.19) temos que

$$\begin{aligned}
\Delta u(x) = w_{\rho\rho} + \frac{w_{\theta\theta}}{\rho^2} + \frac{w_\rho}{\rho} + \frac{l-1}{\rho\cos\theta}\left(w_\rho\cos\theta - w_\theta\frac{\sin\theta}{\rho}\right)\\
+ \frac{N-l-1}{\rho\sin\theta}\left(w_\rho\sin\theta + w_\theta\frac{\cos\theta}{\rho}\right)
\end{aligned}$$

Logo

$$\Delta u(x) = w_{\rho\rho} + \frac{N-1}{\rho} w_\rho + \frac{1}{\rho^2} w_{\theta\theta} + \frac{1}{\rho^2} w_\theta \left[(N-l-1)\frac{\cos\theta}{\sin\theta} - (l-1)\frac{\sin\theta}{\cos\theta} \right] \tag{2.21}$$
$$=: Bw(\rho,\theta).$$

Defina

$$V = \{(s,t) \in \mathbb{R}^2 / s,t > 0 \text{ e } s^2+t^2 < 1\}, W = \left\{(\rho,\theta) \in \mathbb{R}^2 / 0 < \rho < 1 \text{ e } 0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right\}.$$

Fazendo as seguintes mudanças de variáveis $(y,z) \mapsto (|y|,|z|,\frac{y}{|y|},\frac{z}{|z|})$ e $(\rho,\theta) \mapsto (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$ obtemos que

$$\begin{aligned} \int_B |\Delta u|^2 \mathrm{d}x &= \omega_l \omega_{N-l} \int_V |Lv(s,t)|^2 s^{l-1} t^{N-l-1} \mathrm{d}s\mathrm{d}t \\ &= \omega_l \omega_{N-l} \int_W |Bw(\rho,\theta)|^2 \rho^{N-1} H(\theta) \mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta, \end{aligned} \tag{2.22}$$

onde

$$H(\theta) := \cos^{l-1}\theta \sin^{N-l-1}\theta. \tag{2.23}$$

Além disso,

$$\begin{aligned} \int_B |x|^\alpha |u|^{p+1} \mathrm{d}x &= \omega_l \omega_{N-l} \int_V (s^2+t^2)^{\frac{\alpha}{2}} |v(s,t)|^{p+1} s^{l-1} t^{N-l-1} \mathrm{d}s\mathrm{d}t \\ &= \omega_l \omega_{N-l} \int_W \rho^{\alpha+N-1} |w(\rho,\theta)|^{p+1} H(\theta) \mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta. \end{aligned} \tag{2.24}$$

Defina $\widetilde{W} = (\frac{1}{4},\frac{3}{4}) \times (\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3})$. Fixe $\psi \in C_c^\infty(\widetilde{W})$ com $\psi \neq 0$. Também fixe $\varepsilon \in (0,1)$, a ser determinado. Mais ainda, defina $w_\varepsilon(\rho,\theta) = \psi(\rho^{\frac{1}{\varepsilon}},\frac{\theta}{\varepsilon})$ e

$$\widetilde{W}_\varepsilon = \left\{(\rho,\theta) : \left(\frac{1}{4}\right)^\varepsilon < \rho < \left(\frac{3}{4}\right)^\varepsilon \text{ e } \varepsilon\frac{\pi}{6} < \theta < \varepsilon\frac{\pi}{3}\right\}.$$

Note que $\overline{\widetilde{W}_\varepsilon} = [(\frac{1}{4})^\varepsilon, (\frac{3}{4})^\varepsilon] \times [\varepsilon\frac{\pi}{6}, \varepsilon\frac{\pi}{3}] \subset (0,1) \times (0,\frac{\pi}{2}) = W$, pois $\varepsilon \in (0,1)$. Assim $\widetilde{W}_\varepsilon \subset\subset W$.

Afirmação 1: $w_\varepsilon \in C_c^\infty(\widetilde{W}_\varepsilon)$.

Prova da Afirmação 1: É fácil ver que $w_\varepsilon \in C^\infty(\widetilde{W}_\varepsilon)$. Agora fixe $(\rho_0,\theta_0) \in \operatorname{supp} w_\varepsilon$, então existe uma sequência (ρ_n,θ_n) em $\widetilde{W}_\varepsilon$ tal que $w_\varepsilon(\rho_n,\theta_n) \neq 0$ e $(\rho_n,\theta_n) \to (\rho_0,\theta_0)$. Logo $\psi(\rho_n^{\frac{1}{\varepsilon}},\frac{\theta_n}{\varepsilon}) \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Então $(\rho_n^{\frac{1}{\varepsilon}},\frac{\theta_n}{\varepsilon}) \in \operatorname{supp}\psi$, $(\rho_n^{\frac{1}{\varepsilon}},\frac{\theta_n}{\varepsilon}) \to (\rho_0^{\frac{1}{\varepsilon}},\frac{\theta_0}{\varepsilon})$ e, dessa forma, $(\rho_0^{\frac{1}{\varepsilon}},\frac{\theta_0}{\varepsilon}) \in \operatorname{supp}\psi$. Como $\operatorname{supp}\psi \subset \widetilde{W}$ temos que $(\rho_0^{\frac{1}{\varepsilon}},\frac{\theta_0}{\varepsilon}) \in \widetilde{W}$. Daí $(\rho_0,\theta_0) \in \widetilde{W}_\varepsilon$. Portanto $\operatorname{supp} w_\varepsilon \subset \widetilde{W}_\varepsilon$. Concluindo a Afirmação 1.

Para este w_ε defina u_ε e v_ε funções satisfazendo $u_\varepsilon(x) = v_\varepsilon(s,t) = w_\varepsilon(\rho,\theta)$ onde

$x = (y,z)$, $s = |y|$, $t = |z|$, $s = \rho\cos\theta$ e $t = \rho\sin\theta$. Pela Afirmação 1 obtemos $u_\varepsilon \in H_l$. Assim, pela definição de $m_{\Delta,\alpha,l}$,

$$m_{\Delta,\alpha,l} \leq \frac{\int |\Delta u_\varepsilon|^2 \mathrm{d}x}{\left(\int |x|^\alpha |u_\varepsilon|^{p+1}\mathrm{d}x\right)^{\frac{2}{p+1}}}. \tag{2.25}$$

Por (2.24), Afirmação 1 e a mudança $(r,\overline{\theta}) \mapsto (r^\varepsilon, \varepsilon\overline{\theta})$ tem-se

$$\begin{aligned}\int_B |x|^\alpha |u_\varepsilon|^{p+1}\mathrm{d}x &= C\int_W \rho^{\alpha+N-1}|w_\varepsilon(\rho,\theta)|^{p+1}H(\theta)\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta \\ &= C\int_{\widetilde{W}_\varepsilon} \rho^{\alpha+N-1}\left|\psi\left(\rho^{\frac{1}{\varepsilon}}, \frac{\theta}{\varepsilon}\right)\right|^{p+1} H(\theta)\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta \\ &= C\int_{\widetilde{W}} r^{\varepsilon(\alpha+N-1)}|\psi(r,\overline{\theta})|^{p+1}H(\varepsilon\overline{\theta})\varepsilon^2 r^{\varepsilon-1}\mathrm{d}r\mathrm{d}\overline{\theta} \\ &= C\varepsilon^2\int_{\widetilde{W}} r^{\varepsilon(\alpha+N)-1}|\psi(r,\overline{\theta})|^{p+1}H(\varepsilon\overline{\theta})\mathrm{d}r\mathrm{d}\overline{\theta}.\end{aligned}$$

Afirmação 2: Existem constantes $C_1, C_2 > 0$ tais que

$$C_1\varepsilon^{N-l-1} \leq H(\varepsilon\overline{\theta}) \leq C_2\varepsilon^{N-l-1}, \quad \forall\overline{\theta} \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right).$$

Prova da Afirmação 2: Como $0 < \varepsilon < 1$, então $0 < \varepsilon\overline{\theta} < \frac{\pi}{3}$. Assim $\cos(\frac{\pi}{3}) \leq \cos(\varepsilon\overline{\theta}) \leq 1$. Usando estudo de derivadas, obtemos que $\sin x - x\cos(\frac{\pi}{3}) \geq 0$ e $x - \sin x \geq 0\ \forall x \in (0, \frac{\pi}{3})$. Logo $x\cos(\frac{\pi}{3}) \leq \sin x \leq x\ \forall x \in (0, \frac{\pi}{3})$. Por (2.23), temos que

$$\begin{aligned} H(\varepsilon\overline{\theta}) &= \cos^{l-1}(\varepsilon\overline{\theta})\sin^{N-l-1}(\varepsilon\overline{\theta}) \geq \cos^{l-1}\left(\frac{\pi}{3}\right)\left(\varepsilon\overline{\theta}\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)^{N-l-1} \\ &\geq \cos^{N-2}\left(\frac{\pi}{3}\right)\left(\frac{\pi}{6}\right)^{N-l-1}\varepsilon^{N-l-1}, \\ H(\varepsilon\overline{\theta}) &= \cos^{l-1}(\varepsilon\overline{\theta})\sin^{N-l-1}(\varepsilon\overline{\theta}) \leq (\varepsilon\overline{\theta})^{N-l-1} \leq \left(\frac{\pi}{3}\right)^{N-l-1}\varepsilon^{N-l-1}.\end{aligned}$$

Isso conclui a Afirmação 2.

Segue, da Afirmação 2 e de uma mudança de notação, que

$$\begin{aligned}\int_B |x|^\alpha |u_\varepsilon|^{p+1}\mathrm{d}x &\geq C\varepsilon^2\int_{\widetilde{W}} r^{\varepsilon(\alpha+N)-1}|\psi(r,\overline{\theta})|^{p+1}\varepsilon^{N-l-1}\mathrm{d}r\mathrm{d}\overline{\theta} \\ &= C\varepsilon^{N-l+1}\int_{\widetilde{W}} r^{\varepsilon(\alpha+N)-1}|\psi(r,\overline{\theta})|^{p+1}\mathrm{d}r\mathrm{d}\overline{\theta} \\ &= C\varepsilon^{N-l+1}\int_{\widetilde{W}} \rho^{\varepsilon(\alpha+N)-1}|\psi(\rho,\theta)|^{p+1}\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta. \end{aligned} \tag{2.26}$$

Por outro lado, (2.22) garante que

$$\int_B |\Delta u_\varepsilon|^2 \mathrm{d}x = C \int_{\widetilde{W}_\varepsilon} |Bw_\varepsilon(\rho,\theta)|^2 \rho^{N-1} H(\theta) \mathrm{d}\rho d\theta. \tag{2.27}$$

Note que a Afirmação 2 garante $\sin x \geq x\cos(\frac{\pi}{3})\ \forall x \in (0, \frac{\pi}{3})$. Suponha $\theta \in (\varepsilon\frac{\pi}{6}, \varepsilon\frac{\pi}{3})$. Então

$$\left|(N-l-1)\frac{\cos\theta}{\sin\theta} - (l-1)\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right| \leq C\left(\frac{1}{\theta\cos(\frac{\pi}{3})} + \frac{1}{\cos(\frac{\pi}{3})}\right) \leq C\left(\frac{1}{\varepsilon\frac{\pi}{6}} + 1\right) \leq \frac{C}{\varepsilon}.$$

Assim, para $(\rho,\theta) \in \widetilde{W}_\varepsilon$,

$$|Bw_\varepsilon(\rho,\theta)|^2 \leq C\left[(w_\varepsilon)^2_{\rho\rho} + \frac{(w_\varepsilon)^2_\rho}{\rho^2} + \frac{(w_\varepsilon)^2_{\theta\theta}}{\rho^4} + \frac{(w_\varepsilon)^2_\theta}{\rho^4\varepsilon^2}\right].$$

Usando isso em (2.27) obtemos

$$\int_B |\Delta u_\varepsilon|^2 \mathrm{d}x \leq C\int_{\widetilde{W}_\varepsilon} \rho^{N-1}\left[(w_\varepsilon)^2_{\rho\rho} + \frac{(w_\varepsilon)^2_\rho}{\rho^2} + \frac{(w_\varepsilon)^2_{\theta\theta}}{\rho^4} + \frac{(w_\varepsilon)^2_\theta}{\rho^4\varepsilon^2}\right] H(\theta)\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta.$$

Usando $w_\varepsilon(\rho,\theta) = \psi(\rho^{\frac{1}{\varepsilon}}, \frac{\theta}{\varepsilon})$ e denotando $r = \rho^{\frac{1}{\varepsilon}}$ e $\overline{\theta} = \frac{\theta}{\varepsilon}$ tem-se

$$\begin{aligned}\int_B |\Delta u_\varepsilon|^2 \mathrm{d}x &\leq C\int_{\widetilde{W}_\varepsilon} \rho^{N-1}\left[\psi^2_{rr}\frac{\rho^{\frac{4-4\varepsilon}{\varepsilon}}}{\varepsilon^4} + \psi^2_r\frac{(1-\varepsilon)^2}{\varepsilon^4}\rho^{\frac{2-4\varepsilon}{\varepsilon}} + \psi^2_r\frac{\rho^{\frac{2-4\varepsilon}{\varepsilon}}}{\varepsilon^2}\right.\\ &\quad \left. + \psi^2_{\theta\theta}\frac{\rho^{-4}}{\varepsilon^4} + \psi^2_\theta\frac{\rho^{-4}}{\varepsilon^4}\right] H(\theta)\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta \\ &\leq C\int_{\widetilde{W}_\varepsilon}\frac{\rho^{N-1}}{\varepsilon^4}\left[\psi^2_{rr}\rho^{\frac{4-4\varepsilon}{\varepsilon}} + \psi^2_r\rho^{\frac{2-4\varepsilon}{\varepsilon}} + \psi^2_{\theta\theta}\rho^{-4} + \psi^2_\theta\rho^{-4}\right] H(\theta)\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta.\end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variável (ρ,θ) para $(r,\overline{\theta})$, obtem-se

$$\begin{aligned}\int_B |\Delta u_\varepsilon|^2 \mathrm{d}x \leq \frac{C}{\varepsilon^4}\int_{\widetilde{W}} r^{\varepsilon(N-1)}&\left[\psi^2_{rr}r^{4-4\varepsilon} + \psi^2_r r^{2-4\varepsilon} + \psi^2_{\theta\theta}r^{-4\varepsilon} + \psi^2_\theta r^{-4\varepsilon}\right] \\ &H(\varepsilon\overline{\theta})\varepsilon^2 r^{\varepsilon-1}\mathrm{d}r\mathrm{d}\overline{\theta}.\end{aligned}$$

Pela Afirmação 2,

$$\begin{aligned}\int_B |\Delta u_\varepsilon|^2 \mathrm{d}x &\leq C\frac{\varepsilon^{N-l-1}}{\varepsilon^4}\varepsilon^2\int_{\widetilde{W}}\frac{r^{\varepsilon(N-1)}r^{\varepsilon-1}}{r^{4\varepsilon}}\left[\psi^2_{rr}r^4 + \psi^2_r r^2 + \psi^2_{\theta\theta} + \psi^2_\theta\right]\mathrm{d}r\mathrm{d}\overline{\theta} \\ &= C\varepsilon^{N-l-3}\int_{\widetilde{W}} r^{\varepsilon(N-4)-1}\left[\psi^2_{rr}r^4 + \psi^2_r r^2 + \psi^2_{\theta\theta} + \psi^2_\theta\right]\mathrm{d}r\mathrm{d}\overline{\theta}.\end{aligned}$$

Como $N \geq 4$,

$$\int_B |\Delta u_\varepsilon|^2 \mathrm{d}x \leq C\varepsilon^{N-l-3} \int_{\widetilde{W}} r^{-1} \left[\psi_{rr}^2 r^4 + \psi_r^2 r^2 + \psi_{\overline{\theta}\overline{\theta}}^2 + \psi_{\overline{\theta}}^2\right] \mathrm{d}r\mathrm{d}\overline{\theta}. \tag{2.28}$$

Nosso propósito é usar (2.26) e (2.28) em (2.25). Para a integral em (2.26) não depender de α devemos tomar $\varepsilon \in (0,1)$ como algum termo dividido por $\alpha + N$. Veremos que limitaremos $m_{\Delta,\alpha,l}$ por uma potência de ε^{-1}. Dessa forma tomando ε o maior possível encontramos uma melhor estimativa. Tomando $\varepsilon = \frac{N}{\alpha+N}$ e usando (2.26) e (2.28) em (2.25), obtemos

$$m_{\Delta,\alpha,l} \leq C\frac{\varepsilon^{N-l-3}}{\left(\varepsilon^{N-l+1}\right)^{\frac{2}{p+1}}} = C(\varepsilon^{-1})^{(N-l+1)\frac{2}{p+1}-(N-l-3)}. \tag{2.29}$$

Agora suponnha $\alpha \geq \alpha_0$. Como $\alpha_0 > \frac{2_l q_l}{2} = N\frac{2_l}{2} - (N-l+1) > N - N + l - 1 = l - 1 \geq 1$, tem-se

$$\varepsilon^{-1} = \frac{\alpha+N}{N} \leq \frac{\alpha+\alpha_0 N}{N} \leq \frac{\alpha+\alpha N}{N} = \alpha\left(\frac{1+N}{N}\right). \tag{2.30}$$

Como $p+1 < 2_l$, em ambos os casos da definição de 2_l, temos que

$$(l-3)(p+1) < 2(l+1).$$

Disso e de $N - l \leq l$ obtemos

$$\begin{aligned}(N-l+1)\frac{2}{p+1} - (N-l-3) &\geq \frac{2(N-l+1)-(l-3)(p+1)}{p+1} \\ &> \frac{2(N-l+1)-2(l+1)}{p+1} = \frac{2}{p+1}(N-2l) \geq 0.\end{aligned}$$

Usando isso e (2.30) em (2.29) concluímos que

$$\begin{aligned} m_{\Delta,\alpha,l} &\leq C\left(\frac{\alpha+N}{N}\right)^{(N-l+1)\frac{2}{p+1}-(N-l-3)} \\ &\leq C\left(\frac{1+N}{N}\right)^{(N-l+1)\frac{2}{p+1}-(N-l-3)} \alpha^{(N-l+1)\frac{2}{p+1}-(N-l-3)} \\ &= C\alpha^{(N-l+1)\frac{2}{p+1}-(N-l-3)} \quad \forall \alpha \geq \alpha_0. \end{aligned}$$

Para concluir, note que

$$
\begin{aligned}
(N-l+1)\frac{2}{p+1}-(N-l-3) &= (N-l-1)\frac{2}{p+1}+2\frac{2}{p+1}-(N-l-1)+2\\
&= (N-l-1)\left(\frac{2}{p+1}-1\right)+\frac{4}{p+1}+2\\
&= (N-l-1)\frac{1-p}{p+1}+2\frac{p+3}{p+1}.
\end{aligned}
$$

■

Lema 2.18. Sejam $N \geq 4$, $l \in \mathbb{Z}$ com $2 \leq N-l \leq l$ e $p \in \mathbb{R}$ com $2 < p+1 < 2_l$, onde $2_l := \frac{2(l+1)}{l-3}$ se $l \geq 4$ e 2_l é qualquer elemento de $(2,\infty)$ se $l < 4$. Então existem $\alpha_0(p,N)$ e $C(p,N) > 0$ tais que

$$m_{\Delta,\alpha,\mathrm{rad,DBC}} \geq C(p,N)\alpha^{\frac{2}{p+1}+3}, \quad \forall \alpha \geq \alpha_0(p,N), \tag{2.31}$$

$$m_{\Delta,\alpha,\mathrm{rad,NBC}} \geq C(p,N)\alpha^{\frac{2}{p+1}+2}, \quad \forall \alpha \geq \alpha_0(p,N). \tag{2.32}$$

Prova. Considere $u \in H_{\mathrm{rad}}$ com $u \neq 0$ e v tal que $v(|x|) = u(x)$. Pelo item (i) do Teorema 0.1, $u \in C^1(\overline{B}\backslash\{0\})$ e $D^\alpha u$ existe q.t.p. em $B\backslash\{0\}$ para $|\alpha| = 2$. Denotando $\varepsilon = \frac{N}{N+\alpha}$ e

$$w(\rho) = v\left(e^{-\varepsilon\rho}\right), \tag{2.33}$$

tem-se $w \in C^1([0,\infty))$, w'' existe q.t.p. em $(0,\infty)$ e $w(0) = 0$. Derivando (2.33) obtemos

$$
\begin{aligned}
w'(\rho) &= v'\left(e^{-\varepsilon\rho}\right)e^{-\varepsilon\rho}(-\varepsilon) \text{ e}\\
w''(\rho) &= v''\left(e^{-\varepsilon\rho}\right)e^{-\varepsilon\rho}(-\varepsilon)e^{-\varepsilon\rho}(-\varepsilon)+v'\left(e^{-\varepsilon\rho}\right)e^{-\varepsilon\rho}(-\varepsilon)(-\varepsilon).
\end{aligned}
$$

Assim

$$
\begin{aligned}
v'\left(e^{-\varepsilon\rho}\right) &= -\varepsilon^{-1}e^{\varepsilon\rho}w'(\rho) \text{ e}\\
v''\left(e^{-\varepsilon\rho}\right) &= \varepsilon^{-2}e^{2\varepsilon\rho}\left[w''(\rho)+\varepsilon w'(\rho)\right].
\end{aligned} \tag{2.34}
$$

Pela definição de ε e fazendo as mudanças $x \mapsto (|x|, \frac{x}{|x|})$ e $\rho \mapsto e^{-\varepsilon\rho}$, obtemos

$$\int_B |u|^{p+1}|x|^\alpha \mathrm{d}x = \omega_N \int_0^1 |v|^{p+1}t^{\alpha+N-1}\mathrm{d}t = \varepsilon\omega_N \int_0^\infty |w|^{p+1}e^{-N\rho}\mathrm{d}\rho. \tag{2.35}$$

Por $u(x) = v(|x|)$, temos que, se $x \neq 0$,

$$\begin{aligned}
\Delta u(x) &= \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(v'(|x|)\frac{x_i}{|x|}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{N} \frac{\left[v''(|x|)\frac{x_i}{|x|}x_i + v'(|x|)\right]|x| - v'(|x|)x_i\frac{x_i}{|x|}}{|x|^2} \\
&= v''(|x|) + N\frac{v'(|x|)}{|x|} - \frac{v'(|x|)}{|x|} = v''(t) + \frac{N-1}{t}v'(t),
\end{aligned}$$

onde $t = |x|$. Com isso, (2.34) e as mudanças $x \mapsto (|x|, \frac{x}{|x|})$ e $\rho \mapsto e^{-\varepsilon\rho}$ tem-se

$$\begin{aligned}
\int_B |\Delta u|^2 \mathrm{d}x &= \omega_N \int_0^1 \left| v''(t) + \frac{N-1}{t}v'(t)\right|^2 t^{N-1}\mathrm{d}t \\
&= \omega_N \int_0^\infty \left| v''\left(e^{-\varepsilon\rho}\right) + \frac{N-1}{e^{-\varepsilon\rho}}v'\left(e^{-\varepsilon\rho}\right)\right|^2 e^{-\varepsilon\rho(N-1)}\varepsilon e^{-\varepsilon\rho}\mathrm{d}\rho \\
&= \omega_N \int_0^\infty \left| \varepsilon^{-2}e^{2\varepsilon\rho}\left[w''(\rho) + \varepsilon w'(\rho)\right] - \frac{N-1}{e^{-\varepsilon\rho}}\varepsilon^{-1}e^{\varepsilon\rho}w'(\rho)\right|^2 \varepsilon e^{-\varepsilon\rho N}\mathrm{d}\rho \\
&= \omega_N \int_0^\infty \left| \varepsilon^{-2}e^{2\varepsilon\rho}w''(\rho) + \varepsilon^{-1}e^{2\varepsilon\rho}w'(\rho) - (N-1)\varepsilon^{-1}e^{2\varepsilon\rho}w'(\rho)\right|^2 \varepsilon e^{-\varepsilon\rho N}\mathrm{d}\rho \\
&= \omega_N \varepsilon^{-3} \int_0^\infty \left| w''(\rho) - (N-2)\varepsilon w'(\rho)\right|^2 e^{\varepsilon\rho(4-N)}\mathrm{d}\rho \\
&= \omega_N \varepsilon^{-3} \int_0^\infty \left| w''(\rho)e^{-\varepsilon\rho(N-2)} - \varepsilon(N-2)e^{-\varepsilon\rho(N-2)}w'(\rho)\right|^2 e^{2\varepsilon\rho(N-2)}e^{\varepsilon\rho(4-N)}\mathrm{d}\rho \\
&= \omega_N \varepsilon^{-3} \int_0^\infty \left| \left(e^{-\varepsilon\rho(N-2)}w'(\rho)\right)'\right|^2 e^{\varepsilon\rho N}\mathrm{d}\rho.
\end{aligned}$$

Por isso e (2.35), obtemos

$$\frac{\int_B |\Delta u|^{\mathrm{d}}x}{\left(\int_B |u|^{p+1}|x|^\alpha \mathrm{d}x\right)^{\frac{2}{p+1}}} = \omega_N^{\frac{p-1}{p+1}} \varepsilon^{-(3+\frac{2}{p+1})} \frac{\int_0^\infty |(e^{-\varepsilon\rho(N-2)}w'(\rho))'|^2 e^{\varepsilon\rho N}\mathrm{d}\rho}{\left(\int_0^\infty |w|^{p+1}e^{-N\rho}\mathrm{d}\rho\right)^{\frac{2}{p+1}}}. \tag{2.36}$$

Defina $z : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ por

$$z(\rho) := e^{-(N-2)\varepsilon\rho}w'(\rho). \tag{2.37}$$

Note que $z \in C([0,\infty))$ e z' existe q.t.p. em $(0, \infty)$.

Caso 1: Condição de Dirichlet.

Nesse caso $\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$. Logo $v'(1) = 0$, $w'(0) = 0$ e $z(0) = 0$. Note que, para todo $t \in [0, \infty)$,

$$\begin{aligned}
|w(t)| &= \left|\int_0^t w'(s)\mathrm{d}s\right| = \left|\int_0^t e^{(N-2)\varepsilon s} z(s)\mathrm{d}s\right| = \left|\int_0^t e^{(N-2)\varepsilon s} \int_0^s z'(\rho)\mathrm{d}\rho\mathrm{d}s\right| \\
&\leq \int_0^t e^{(N-2)\varepsilon s} \int_0^s |z'(\rho)| e^{\frac{N\varepsilon\rho}{2}} e^{-\frac{N\varepsilon\rho}{2}} \mathrm{d}\rho\mathrm{d}s \\
&\leq \int_0^t e^{(N-2)\varepsilon s} \left(\int_0^s |z'(\rho)|^2 e^{N\varepsilon\rho}\mathrm{d}\rho\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^s e^{-N\varepsilon\rho}\mathrm{d}\rho\right)^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}s \\
&\leq \int_0^t \left(\int_0^\infty |z'(\rho)|^2 e^{N\varepsilon\rho}\mathrm{d}\rho\right)^{\frac{1}{2}} e^{(N-2)\varepsilon t} \left(\int_0^t e^{-N\varepsilon\rho}\mathrm{d}\rho\right)^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}s \\
&= \left(\int_0^\infty |z'(\rho)|^2 e^{N\varepsilon\rho}\mathrm{d}\rho\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{e^{2(N-2)\varepsilon t}(1-e^{-N\varepsilon t})}{N\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}} t \\
&= \left(\int_0^\infty |z'(\rho)|^2 e^{N\varepsilon\rho}\mathrm{d}\rho\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{e^{2(N-2)\varepsilon t}-e^{(N-4)\varepsilon t}}{N\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}} t.
\end{aligned}$$

Assim

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty |w(t)|^{p+1} e^{-Nt}\mathrm{d}t \qquad (2.38) \\
&\leq \left(\int_0^\infty |z'(\rho)|^2 e^{N\varepsilon\rho}\mathrm{d}\rho\right)^{\frac{p+1}{2}} \int_0^\infty \left(\frac{e^{2(N-2)\varepsilon t}-e^{(N-4)\varepsilon t}}{N\varepsilon}\right)^{\frac{p+1}{2}} t^{p+1} e^{-Nt}\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Mostraremos, pelo Teorema da Convergência Dominada, que

$$\int_0^\infty \left(\frac{e^{2(N-2)\varepsilon t}-e^{(N-4)\varepsilon t}}{N\varepsilon}\right)^{\frac{p+1}{2}} t^{p+1} e^{-Nt}\mathrm{d}t \xrightarrow{\varepsilon\to 0} \int_0^\infty t^{\frac{3(p+1)}{2}} e^{-Nt}\mathrm{d}t. \qquad (2.39)$$

Para provar (2.39) pensemos $\varepsilon > 0$ qualquer. Usando a função auxiliar $f(x) = e^{xt}$ obtemos, pelo Teorema do Valor Médio, $c \in ((N-4)\varepsilon, 2(N-2)\varepsilon)$ tal que

$$\frac{f(2(N-2)\varepsilon) - f((N-4)\varepsilon)}{2(N-2)\varepsilon - (N-4)\varepsilon} = f'(c).$$

Ou seja,

$$\frac{e^{2(N-2)\varepsilon t}-e^{(N-4)\varepsilon t}}{N\varepsilon} = te^{ct} \in \left(te^{(N-4)\varepsilon t}, te^{2(N-2)\varepsilon t}\right) \quad \forall t \in [0,\infty) \text{ e } \varepsilon > 0.$$

Disso segue a convergência q.t.p. quando $\varepsilon \to 0$ em (2.39). Além disso, tem-se

$$
\begin{aligned}
\left|\left(\frac{e^{2(N-2)\varepsilon t}-e^{(N-4)\varepsilon t}}{N\varepsilon}\right)^{\frac{p+1}{2}} t^{p+1}e^{-Nt}\right| &= t^{\frac{p+1}{2}} e^{ct\frac{p+1}{2}} t^{p+1}e^{-Nt} \\
&\leq e^{2(N-2)\varepsilon t\frac{p+1}{2}} t^{\frac{3(p+1)}{2}} e^{-Nt} \\
&= e^{[(N-2)(p+1)\varepsilon - N]t} t^{\frac{3(p+1)}{2}}, \quad \forall t \in [0,\infty).
\end{aligned}
$$

Para $\varepsilon \leq \frac{N}{2(N-2)(p+1)}$ temos que

$$
\left|\left(\frac{e^{2(N-2)\varepsilon t}-e^{(N-4)\varepsilon t}}{N\varepsilon}\right)^{\frac{p+1}{2}} t^{p+1}e^{-Nt}\right| \leq e^{-\frac{N}{2}t} t^{\frac{3(p+1)}{2}} \in L^1(0,\infty).
$$

Com essa limitação e a convergência pontual, o Teorema da convergência Dominada garante (2.39).

Como $\varepsilon \to 0$ quando $\alpha \to \infty$, então (2.39) obtém $\alpha_0(p,N) > 0$ tal que

$$
\int_0^\infty \left(\frac{e^{2(N-2)\varepsilon t}-e^{(N-4)\varepsilon t}}{N\varepsilon}\right)^{\frac{p+1}{2}} t^{p+1}e^{-Nt}\mathrm{d}t \leq 2\int_0^\infty t^{\frac{3(p+1)}{2}} e^{-Nt}\mathrm{d}t, \quad \forall \alpha \geq \alpha_0(p,N).
$$

Usando (2.38) e a definição de $z(\rho)$ dada em (2.37) obtemos, para $\alpha \geq \alpha_0(p,N)$,

$$
\int_0^\infty |w(t)|^{p+1}e^{-Nt}\mathrm{d}t \leq 2\left(\int_0^\infty \left|\left(e^{-(N-2)\varepsilon\rho}w'(\rho)\right)'\right|^2 e^{N\varepsilon\rho}\mathrm{d}\rho\right)^{\frac{p+1}{2}} \int_0^\infty t^{\frac{3(p+1)}{2}} e^{-Nt}\mathrm{d}t. \tag{2.40}
$$

Por (2.36) e (2.40), temos que

$$
\frac{\int_B |\Delta u|^2\mathrm{d}x}{\left(\int_B |u|^{p+1}|x|^\alpha \mathrm{d}x\right)^{\frac{2}{p+1}}} \geq \omega_N^{\frac{p-1}{p+1}} \varepsilon^{-(3+\frac{2}{p+1})} \frac{1}{\left(\int_0^\infty t^{\frac{3(p+1)}{2}} e^{-Nt}\mathrm{d}t\right)^{\frac{2}{p+1}}}. \tag{2.41}
$$

Note que, para cada $\alpha \geq \alpha_0(p,N)$,

$$
\varepsilon^{-1} = \frac{N+\alpha}{N} \geq \frac{\alpha}{N}.
$$

Denotando

$$
C(p,N) := \omega_N^{\frac{p-1}{p+1}} \frac{1}{\left(\int_0^\infty t^{\frac{3(p+1)}{2}} e^{-Nt}\mathrm{d}t\right)^{\frac{2}{p+1}}} \frac{1}{N^{3+\frac{2}{p+1}}}
$$

temos em (2.41) que

$$\frac{\int_B |\Delta u|^2 \mathrm{d}x}{\left(\int_B |u|^{p+1}|x|^\alpha \mathrm{d}x\right)^{\frac{2}{p+1}}} \geq C(p,N)\alpha^{3+\frac{2}{p+1}}, \quad \forall \alpha \geq \alpha_0(p,N).$$

Concluindo (2.31).

Caso 2: Condição de Navier.

Pela equação (2.34), $w'(\rho) \overset{\rho\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Além disso por (2.37), $z(\rho) \overset{\rho\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Assim $z(s) = -\int_s^\infty z'(\rho)\mathrm{d}\rho$. Note que, para todo $t \in [0,\infty)$,

$$\begin{aligned}
|w(t)| &= \left|\int_0^t w'(s)\mathrm{d}s\right| = \left|\int_0^t e^{(N-2)\varepsilon s} z(s)\mathrm{d}s\right| = \left|\int_0^t e^{(N-2)\varepsilon s}\int_s^\infty z'(\rho)\mathrm{d}\rho\mathrm{d}s\right| \\
&\leq \int_0^t e^{(N-2)\varepsilon s}\int_s^\infty |z'(\rho)| e^{\frac{N\varepsilon\rho}{2}} e^{-\frac{N\varepsilon\rho}{2}}\mathrm{d}\rho\mathrm{d}s \\
&\leq \int_0^t e^{(N-2)\varepsilon s}\left(\int_s^\infty |z'(\rho)|^2 e^{N\varepsilon\rho}\mathrm{d}\rho\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_s^\infty e^{-N\varepsilon\rho}\mathrm{d}\rho\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}s \\
&\leq \int_0^t e^{(N-2)\varepsilon s}\left(\int_0^\infty |z'(\rho)|^2 e^{N\varepsilon\rho}\mathrm{d}\rho\right)^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{N\varepsilon}} e^{-\frac{N\varepsilon s}{2}}\mathrm{d}s \\
&= \left(\int_0^\infty |z'(\rho)|^2 e^{N\varepsilon\rho}\mathrm{d}\rho\right)^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{N\varepsilon}}\int_0^t e^{\frac{N-4}{2}\varepsilon s}\mathrm{d}s \\
&= \left(\int_0^\infty |z'(\rho)|^2 e^{N\varepsilon\rho}\mathrm{d}\rho\right)^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{N\varepsilon}}\frac{e^{\frac{N-4}{2}\varepsilon t}-1}{\frac{N-4}{2}\varepsilon},
\end{aligned}$$

se $N > 4$. Caso $N = 4$ tem-se (2.44) pois (2.42) torna-se mais simples. Logo

$$\int_0^\infty |w(t)|^{p+1} e^{-Nt}\mathrm{d}t \leq \left(\int_0^\infty |z'(\rho)|^2 e^{N\varepsilon\rho}\mathrm{d}\rho\right)^{\frac{1}{2}} N^{-\frac{p+1}{2}}\varepsilon^{-\frac{p+1}{2}} \cdot \int_0^\infty \left(\frac{e^{\frac{N-4}{2}\varepsilon t}-1}{\frac{N-4}{2}\varepsilon}\right)^{p+1} e^{-Nt}\mathrm{d}t. \tag{2.42}$$

Mostraremos, pelo Teorema da Convergência Dominada, que

$$\int_0^\infty \left(\frac{e^{\frac{N-4}{2}\varepsilon t}-1}{\frac{N-4}{2}\varepsilon}\right)^{p+1} e^{-Nt}\mathrm{d}t \overset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} \int_0^\infty t^{p+1}e^{-Nt}\mathrm{d}t. \tag{2.43}$$

Para provar (2.43) pensemos $\varepsilon > 0$ qualquer. Usando a função auxiliar $g(x) = e^{xt}$ obtemos, pelo Teorema do Valor Médio, $c \in (0, \frac{N-4}{2}\varepsilon)$ tal que

$$\frac{g(\frac{N-4}{2}\varepsilon) - g(0)}{\frac{N-4}{2}\varepsilon - 0} = g'(c).$$

Ou seja, para todos $t \in (0,\infty)$ e $\varepsilon > 0$,

$$\frac{e^{\frac{N-4}{2}\varepsilon t} - 1}{\frac{N-4}{2}\varepsilon} = te^{c} \in (t, te^{\frac{N-4}{2}\varepsilon t}).$$

Disso segue a convergência q.t.p. quando $\varepsilon \to 0$ em (2.43). Além disso, tem-se

$$\left| \left(\frac{e^{\frac{N-4}{2}\varepsilon t} - 1}{\frac{N-4}{2}\varepsilon} \right)^{p+1} e^{-Nt} \right| \leq t^{p+1} e^{\frac{N-4}{2}(p+1)\varepsilon t - Nt} = t^{p+1} e^{[\frac{N-4}{2}(p+1)\varepsilon - N]t}, \quad \forall t \in (0,\infty).$$

Para $\varepsilon \leq \frac{N}{(N-4)(p+1)}$ temos que

$$\left| \left(\frac{e^{\frac{N-4}{2}\varepsilon t} - 1}{\frac{N-4}{2}\varepsilon} \right)^{p+1} e^{-Nt} \right| \leq t^{p+1} e^{-\frac{Nt}{2}} \in L^1(0,\infty).$$

Com essa limitação e a convergência pontual, o Teorema da Convergência Dominada garante (2.43).

Como $\varepsilon \to 0$ quando $\alpha \to \infty$, então (2.43) obtém $\alpha_0(p,N) > 0$ tal que

$$\int_0^\infty \left(\frac{e^{\frac{N-4}{2}\varepsilon t} - 1}{\frac{N-4}{2}\varepsilon} \right)^{p+1} e^{-Nt} \mathrm{d}t \leq 2 \int_0^\infty t^{p+1} e^{-Nt} \mathrm{d}t \quad \forall \alpha \geq \alpha_0(p,N).$$

Usando (2.42) e a definição de $z(\rho)$ dada em (2.37) obtemos

$$\int_0^\infty |w(t)|^{p+1} e^{-Nt} \mathrm{d}t \leq \widetilde{C}(p,N) \left(\int_0^\infty \left| \left(e^{-(N-2)\varepsilon\rho} w'(\rho) \right)' \right|^2 e^{N\varepsilon\rho} \mathrm{d}\rho \right)^{\frac{p+1}{2}}, \tag{2.44}$$

para todo $\alpha \geq \alpha_0(p,N)$, onde

$$\widetilde{C}(p,N) := 2N^{-\frac{p+1}{2}} \int_0^\infty t^{p+1} e^{-Nt} \mathrm{d}t.$$

Por (2.36) e (2.44) temos que

$$\frac{\int_B |\Delta u|^2 \mathrm{d}x}{\left(\int_B |u|^{p+1} |x|^\alpha \mathrm{d}x \right)^{\frac{2}{p+1}}} \geq \frac{\omega_N^{\frac{p-1}{p+1}} \varepsilon^{-(\frac{2}{p+1}+2)}}{\widetilde{C}(p,N)}. \tag{2.45}$$

Note que, para $\alpha \geq \alpha_0(p,N)$,

$$\varepsilon^{-1} = \frac{N+\alpha}{N} \geq \frac{\alpha}{N}.$$

Denotando

$$C(p,N) := \frac{\omega_N^{\frac{p-1}{p+1}}}{\widetilde{C}(p,N)} \frac{1}{N^{-(\frac{2}{p+1}+2)}}$$

temos em (2.45) que

$$\frac{\int_B |\Delta u|^2 \mathrm{d}x}{\left(\int_B |u|^{p+1}|x|^\alpha \mathrm{d}x\right)^{\frac{2}{p+1}}} \geq C(p,N)\alpha^{\frac{2}{p+1}+2}, \quad \forall \alpha \geq \alpha_0(p,N).$$

Concluindo (2.32). ■

Prova da Proposição 2.15: Pelos Lemas 2.17 e 2.18 existem $C_1(p,N,l), C_2(p,N) > 0$ constantes e $\widetilde{\alpha}_{0,D}(p,N,l) > 0$ tais que, para todo $\alpha \geq \widetilde{\alpha}_{0,D}(p,N,l) > 0$,

$$\begin{cases} m_{\Delta,\alpha,l,\mathrm{DBC}} \leq C_1(p,N,l)\alpha^{(N-l-1)\frac{1-p}{p+1}+2\frac{p+3}{p+1}}, \\ m_{\Delta,\alpha,\mathrm{rad},\mathrm{DBC}} \geq C_2(p,N)\alpha^{\frac{2}{p+1}+3}. \end{cases} \tag{2.46}$$

Note que

$$\begin{aligned} (N-l-1)\frac{1-p}{p+1}+2\frac{p+3}{p+1} < \frac{2}{p+1}+3 &\Leftrightarrow (N-l-1)(1-p)+2p+6<2+3p+3 \\ &\Leftrightarrow (N-l-1)(1-p)+1 < p \Leftrightarrow N-l-p(N-l)-1+p+1 < p \\ &\Leftrightarrow N-l < p(N-l) \Leftrightarrow p > 1. \end{aligned}$$

Assim existe $\lambda(p,N,l) > 0$ tal que $\frac{2}{p+1}+3 > (N-l-1)\frac{1-p}{p+1}+2\frac{p+3}{p+1}+\lambda(p,N,l)$. Usando (2.46) tem-se, para $\alpha \geq \widetilde{\alpha}_{0,D}(p,N,l) > 0$,

$$\begin{aligned} m_{\Delta,\alpha,l,\mathrm{DBC}} &\leq C_1(p,N,l)\alpha^{(N-l-1)\frac{1-p}{p+1}+2\frac{p+3}{p+1}} < C_1(p,N,l)\frac{C_2(p,N)}{C_2(p,N)}\frac{\alpha^{\frac{2}{p+1}+3}}{\alpha^{\lambda(p,N,l)}} \\ &\leq m_{\Delta,\alpha,\mathrm{rad},\mathrm{DBC}}\frac{C_1(p,N,l)}{C_2(p,N)}\frac{1}{\alpha^{\lambda(p,N,l)}}. \end{aligned}$$

Considere $\alpha_{0,D}(p,N,l) \geq \widetilde{\alpha}_{0,D}(p,N,l)$ tal que

$$\frac{C_1(p,N,l)}{C_2(p,N)}\frac{1}{\alpha_{0,D}(p,N,l)^{\lambda(p,N,l)}} < 1.$$

Portanto,

$$m_{\Delta,\alpha,l,\mathrm{DBC}} < m_{\Delta,\alpha,\mathrm{rad},\mathrm{DBC}}, \quad \forall \alpha \geq \alpha_{0,D}(p,N,l).$$

■

Prova da Proposição 2.16: Pelos Lemas 2.17 e 2.18 existem $C_1(p,N,l), C_2(p,N) > 0$

constantes e $\widetilde{\alpha}_{0,N}(p,N,l) > 0$ tais que, para todo $\alpha \geq \widetilde{\alpha}_{0,N}(p,N,l) > 0$,

$$\begin{cases} m_{\Delta,\alpha,l,\text{NBC}} \leq C_1(p,N,l)\alpha^{(N-l-1)\frac{1-p}{p+1}+2\frac{p+3}{p+1}}, \\ m_{\Delta,\alpha,\text{rad},\text{NBC}} \geq C_2(p,N)\alpha^{\frac{2}{p+1}+2}. \end{cases} \tag{2.47}$$

Note que

$$\begin{aligned} &(N-l-1)\frac{1-p}{p+1}+2\frac{p+3}{p+1} < \frac{2}{p+1}+2 \Leftrightarrow (N-l-1)(1-p)+2p+6<2+2p+2 \\ &\Leftrightarrow (N-l-1)(1-p)+2<0 \Leftrightarrow (p-1)(N-l-1)>2 \\ &\Leftrightarrow p > \frac{2}{N-l-1}+1 \Leftrightarrow p > \frac{N-l+1}{N-l-1}. \end{aligned}$$

Assim existe $\lambda(p,N,l) > 0$ tal que $\frac{2}{p+1}+2 > (N-l-1)\frac{1-p}{p+1}+2\frac{p+3}{p+1}+\lambda(p,N,l)$. Usando (2.47) tem-se, para $\alpha \geq \widetilde{\alpha}_{0,N}(p,N,l) > 0$,

$$\begin{aligned} m_{\Delta,\alpha,l,\text{NBC}} &\leq C_1(p,N,l)\alpha^{(N-l-1)\frac{1-p}{p+1}+2\frac{p+3}{p+1}} < C_1(p,N,l)\frac{C_2(p,N)}{C_2(p,N)}\frac{\alpha^{\frac{2}{p+1}+2}}{\alpha^{\lambda(p,N,l)}} \\ &\leq m_{\Delta,\alpha,\text{rad},\text{NBC}}\frac{C_1(p,N,l)}{C_2(p,N)}\frac{1}{\alpha^{\lambda(p,N,l)}}. \end{aligned}$$

Considere $\alpha_{0,N}(p,N,l) \geq \widetilde{\alpha}_{0,N}(p,N,l)$ tal que

$$\frac{C_1(p,N,l)}{C_2(p,N)}\frac{1}{\alpha_{0,N}(p,N,l)^{\lambda(p,N,l)}} < 1.$$

Portanto,

$$m_{\Delta,\alpha,l,\text{NBC}} < m_{\Delta,\alpha,\text{rad},\text{NBC}}, \quad \forall \alpha \geq \alpha_{0,N}(p,N,l).$$

■

Capítulo 3

Regularidade

Neste capítulo apresentaremos resultados de regularidade clássica de soluções fraca e radial de (6) para $1 < p < \frac{N+2(1+\alpha)}{N-2}$ e (5) para $1 < p < \frac{N+2(2+\alpha)}{N-4}$. Além disso, estudaremos os casos de (5) e (6) com simetria parcial.

3.1 Regularidade de soluções radiais de (6)

Nesta seção assumiremos

$$N \geq 3,\ \alpha > 0 \text{ e } 1 < p < \frac{N+2(1+\alpha)}{N-2}. \tag{3.1}$$

Como $p+1 < \frac{2(N+\alpha)}{N-2}$, pelo Corolário 0.2 obtemos a seguinte imersão compacta $H^1_{0,\mathrm{rad}}(B) \hookrightarrow L^{p+1}(B, |x|^\alpha)$. Dizemos que $u_0 \in H^1_{0,\mathrm{rad}}(B)$ é solução fraca de (6) se é ponto crítico do funcional em $C^1(H^1_{0,\mathrm{rad}}(B), \mathbb{R})$ dado por

$$I_{\mathrm{rad}}(u) = \frac{1}{2}\int_B |\nabla u|^2 \mathrm{d}x - \frac{1}{p+1}\int_B |x|^\alpha |u|^{p+1} \mathrm{d}x, \quad u \in H^1_{0,\mathrm{rad}}(B). \tag{3.2}$$

Proposição 3.1. Supondo (3.1) existe um ponto crítico não nulo para I_{rad}.

Prova. Denote $\|u\| := \|\nabla u\|_{L^2(B)}$. Veja que pela desigualdade de Poincaré, $\|\cdot\|$ é equivalente a $\|\cdot\|_{H^1(B)}$ em $H^1_{0,\mathrm{rad}}(B)$. Vamos mostrar que I_{rad} está nas condições do Teorema do Passo da Montanha.

Primeiramente, usando a imersão $H^1_{0,\mathrm{rad}}(B) \hookrightarrow L^{p+1}(B, |x|^\alpha)$, temos que

$$\begin{aligned} I_{\mathrm{rad}}(u) &= \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{1}{p+1}\|u\|^{p+1}_{L^{p+1}(B,|x|^\alpha)} \geq \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{C^{p+1}}{p+1}\|u\|^{p+1} \\ &= \|u\|^2\left(\frac{1}{2} - \frac{C^{p+1}}{p+1}\|u\|^{p-1}\right), \quad \forall u \in H^1_{0,\mathrm{rad}}(B). \end{aligned}$$

Como $p-1>0$, então considere $\rho>0$ suficientemente pequeno e $b>0$ tais que $I_{\text{rad}}(u)\geq b$ para todo $u\in H^1_{0,\text{rad}}(B)$ com $\|u\|_{H^1(B)}=\rho$. Agora fixe $\varphi\in C^\infty_{0,\text{rad}}(B)$ com $\varphi\neq 0$. Daí, se $t>0$,

$$I_{\text{rad}}(t\varphi)=\frac{t^2}{2}\|\varphi\|^2-\frac{t^{p+1}}{p+1}\|\varphi\|^{p+1}_{L^{p+1}(B,|x|^\alpha)}=t^{p+1}\left(\frac{1}{2t^{p-1}}\|\varphi\|^2-\frac{1}{p+1}\|\varphi\|^{p+1}_{L^{p+1}(B,|x|^\alpha)}\right).$$

Como $p-1>0$ segue que $I_{\text{rad}}(t\varphi)\overset{t\to\infty}{\longrightarrow}-\infty$. Logo existe $t_0>0$ tal que $I_{\text{rad}}(t_0\varphi)<0$.

Assim, pelo Teorema do Passo da Montanha, existem (u_n) em $H^1_{0,\text{rad}}(B)$ e $c\geq b>0$ tais que

$$I_{\text{rad}}(u_n)\to c \text{ e } I'_{\text{rad}}(u_n)\to 0. \tag{3.3}$$

Afirmação: (u_n) é limitada em $H^1_{0,\text{rad}}(B)$.
Prova da Afirmação: Como $(I_{\text{rad}}(u_n))$ e $(I'_{\text{rad}}(u_n))$ são limitadas, temos, para todo $n\in\mathbb{N}$, que

$$I_{\text{rad}}(u_n)-\frac{1}{p+1}I'_{\text{rad}}(u_n)u_n\leq|I_{\text{rad}}(u_n)|+\frac{1}{p+1}\left\|I'_{\text{rad}}(u_n)\right\|\|u_n\|\leq C_1+C_2\|u_n\|.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}I_{\text{rad}}(u_n)-\frac{1}{p+1}I'_{\text{rad}}(u_n)u_n&=\frac{1}{2}\int_B|\nabla u_n|^2\mathrm{d}x-\frac{1}{p+1}\int_B|x|^\alpha|u_n|^{p+1}\mathrm{d}x\\&\quad-\frac{1}{p+1}\int_B|\nabla u_n|^2\mathrm{d}x+\frac{1}{p+1}\int_B|x|^\alpha|u_n|^{p+1}\mathrm{d}x\\&=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p+1}\right)\|u_n\|^2=:C_3\|u_n\|^2,\quad\forall n\in\mathbb{N}.\end{aligned}$$

Então,

$$C_3\|u_n\|^2\leq C_1+C_2\|u_n\|,\quad\forall n\in\mathbb{N}.$$

Como $C_3=\frac{p-1}{2p+2}>0$ segue a Afirmação.

Pela Afirmação e o Teorema de Kakutani (Teorema 3.18 em [3]) temos que, a menos de subsequência, existe $u_0\in H^1_{0,\text{rad}}(B)$ tal que $u_n\rightharpoonup u_0$ em $H^1_{0,\text{rad}}(B)$. Pela imersão compacta $H^1_{0,\text{rad}}(B)\hookrightarrow L^{p+1}(B,|x|^\alpha)$, temos que $u_n\to u_0$ em $L^{p+1}(B,|x|^\alpha)$. Por (3.3) temos que

$$\begin{aligned}\left|I'_{\text{rad}}(u_n)-I'_{\text{rad}}(u_0)(u_n-u_0)\right|&\leq\left\|I'_{\text{rad}}(u_n)\right\|\|u_n-u_0\|+\left|I'_{\text{rad}}(u_0)(u_n-u_0)\right|\\&\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}0.\end{aligned}\tag{3.4}$$

Por outro lado,

$$
\begin{aligned}
I'_{\mathrm{rad}}&(u_n)(u_n-u_0) - I'_{\mathrm{rad}}(u_0)(u_n-u_0)\\
&= I'_{\mathrm{rad}}(u_n)u_n - I'_{\mathrm{rad}}(u_n)u_0 - I'_{\mathrm{rad}}(u_0)u_n + I'_{\mathrm{rad}}(u_0)u_0\\
&= \int |\nabla u_n|^2 - \int |x|^\alpha |u_n|^{p+1} - \int \nabla u_n \nabla u_0 + \int |x|^\alpha |u_n|^{p-1}u_n u_0\\
&\quad - \int \nabla u_0 \nabla u_n + \int |x|^\alpha |u_0|^{p-1}u_0 u_n + \int |\nabla u_0|^2 - \int |x|^\alpha |u_0|^{p+1}\\
&= \int |\nabla (u_n-u_0)|^2 + \int \left(|x|^\alpha |u_n|^{p-1}u_n - |x|^\alpha |u_0|^{p-1}u_0\right)(u_n-u_0)\\
&=: \|u_n-u_0\|^2 + A, \quad \forall n \in \mathbb{N}.
\end{aligned}
$$

Note, pela desigualdade de Hölder com $\frac{p}{p+1} + \frac{1}{p+1} = 1$, que

$$
\begin{aligned}
|A| &\leq \int |x|^\alpha |u_n|^p |u_n-u_0| \mathrm{d}x + \int |x|^\alpha |u_0|^p |u_n-u_0| \mathrm{d}x\\
&= \int |x|^{\frac{\alpha p}{p+1}} |u_n|^p |x|^{\frac{\alpha}{p+1}} |u_n-u_0| \mathrm{d}x + \int |x|^{\frac{\alpha p}{p+1}} |u_0|^p |x|^{\frac{\alpha}{p+1}} |u_n-u_0| \mathrm{d}x\\
&\leq \left(\int |x|^\alpha |u_n|^{p+1} \mathrm{d}x\right)^{\frac{p}{p+1}} \left(\int |x|^\alpha |u_n-u_0|^{p+1} \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p+1}}\\
&\quad + \left(\int |x|^\alpha |u_0|^{p+1} \mathrm{d}x\right)^{\frac{p}{p+1}} \left(\int |x|^\alpha |u_n-u_0|^{p+1} \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p+1}}\\
&\overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.
\end{aligned}
$$

Portanto $\|u_n - u_0\| \to 0$. Ou seja, $u_n \to u_0$ em $H^1_{0,\mathrm{rad}}(B)$. Por fim, por (3.3), segue que $I'_{\mathrm{rad}}(u_0) = 0$. Então u_0 é ponto crítico de I_{rad}. Além disso, $u_0 \neq 0$, pois $I_{\mathrm{rad}}(u_0) = c \geq b > 0$. ■

Proposição 3.2. Seja $u \in H_{\mathrm{rad}}$ solução fraca de (5). Então $u \in W^{2,q}_{\mathrm{rad}}(B) \cap W^{1,q}_0(B)$ para todo $q \geq 1$ com $q[p(N-4) - 2\alpha] \leq 2N$ e u é solução forte de (5).

Prova. Considere o problema

$$
\begin{cases}
-\Delta w = |x|^\alpha |u|^{p-1}u & \text{em} \quad B,\\
w = 0 & \text{sobre} \quad \partial B.
\end{cases}
\tag{3.5}
$$

Primeiramente, encontremos alguns valores de $q \geq 1$ tais que $|x|^\alpha |u|^{p-1}u \in L^q(B)$. Note que

$$
|x|^\alpha |u|^{p-1}u \in L^q(B) \Leftrightarrow \int_B |x|^{\alpha q} |u|^{pq} \mathrm{d}x < \infty \Leftrightarrow u \in L^{pq}(B, |x|^{\alpha q}). \tag{3.6}
$$

Assim, pelo Teorema 0.1, usando que $u \in H^1_{\mathrm{rad}}(B)$,

$$u \in L^{pq}(B, |x|^{\alpha q}) \Leftarrow pq \leq \frac{2(N+\alpha q)}{N-2} \Leftrightarrow pq(N-2) \leq 2N + 2\alpha q$$
$$\Leftrightarrow q[p(N-2) - 2\alpha] \leq 2N.$$

Logo, $|x|^\alpha |u|^{p-1}u \in L^q(B)$ se $q \geq 1$ e $q[p(N-2)-2\alpha] \leq 2N$. Note que existe $q > 1$ com $q[p(N-2)-2\alpha] \leq 2N$, pois como

$$q[p(N-2)-2\alpha] < q(N+2+2\alpha-2\alpha) = q(N+2) \text{ e } \frac{2N}{N+2} > \frac{2N}{N+N} = 1,$$

então basta tomar $q \in (1, \frac{2N}{N+2}]$.

Aplicando regularidade L^p (Teorema 9.15 de [9]) em (3.5) obtemos que $w \in W^{2,q}(B) \cap W^{1,q}(B)$ (para todo $q > 1$ com $q[p(N-2)-2\alpha] \leq 2N$) e é solução forte de (6). Como B é limitado obtemos que $w \in W^{2,q}(B) \cap W^{1,q}_0(B)$ para todo $q \geq 1$ com $q[p(N-2)-2\alpha] \leq 2N$. Além disso, usando que Δ é invariante por operadores ortogonais, w é radial.

Como w é solução forte (3.5) e u é solução fraca de (6) temos que

$$\int_B w(-\Delta\varphi)\mathrm{d}x = \int_B (-\Delta w)\varphi\mathrm{d}x = \int_B |x|^\alpha |u|^{p-1}u\varphi\mathrm{d}x = \int_B \nabla u \nabla\varphi\mathrm{d}x$$
$$= \int_B u(-\Delta\varphi)\mathrm{d}x \quad \forall \varphi \in C^\infty_{0,\mathrm{rad}}(\overline{B}).$$

Logo

$$\int_B (w-u)\Delta\varphi\mathrm{d}x = 0 \quad \forall \varphi \in C^\infty_{0,\mathrm{rad}}(B). \tag{3.7}$$

Fixe $\psi \in C^\infty_0(0,1)$ e tome $\varphi \in C^\infty_{0,\mathrm{rad}}(B)$ solução de

$$\begin{cases} \Delta\varphi(x) = \psi(|x|) & \text{em} \quad B, \\ \varphi = 0 & \text{sobre} \quad \partial B. \end{cases}$$

Assim

$$0 = \int_B (w-u)\Delta\varphi\mathrm{d}x = \int_B (w-u)\psi(|x|)\mathrm{d}x = \omega_N \int_0^1 (w(t)-u(t))\psi(t)t^{N-1}\mathrm{d}t.$$

Como $\psi \in C^\infty_0(0,1)$ foi arbitrária, temos que $w = u$ q.t.p. em $(0,1)$. Então,

$$0 = \omega_N \int_0^1 |w(t)-u(t)|t^{N-1}\mathrm{d}t = \int_B |w(x)-u(x)|\mathrm{d}x.$$

Portanto, $w = u$ q.t.p. em B. Isso conclui que $u = w \in W^{2,q}(B) \cap W^{1,q}_0(B)$ para todo

$q \geq 1$ com $q[p(N-2) - 2\alpha] \leq 2N$. ∎

Lema 3.3. Seja $\alpha > 0$. Então

(i) $|x|^\alpha \in C^{0,\gamma}(\overline{B})$, onde $\gamma = \min\{\alpha, 1\}$;

(ii) Se $\alpha > 1$, então $|x|^\alpha \in C^{1,\gamma}(\overline{B})$, onde $\gamma = \min\{\alpha - 1, 1\}$;

(iii) Se $f \in C^{0,\eta}(\overline{B})$ e $g \in C^{0,\mu}(\overline{B})$, então $f \cdot g \in C^{0,\lambda}(\overline{B})$ onde $\lambda = \min\{\eta, \mu\}$. Além disso, se $f \in C^{1,\eta}(\overline{B})$ e $g \in C^{1,\mu}(\overline{B})$ temos que $f \cdot g \in C^{1,\lambda}(\overline{B})$;

(iv) Se $p > 1$ então $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ com $\phi(x) = x|x|^{p-1}$ é tal que $\phi \in C^1(\mathbb{R})$,

Além disso, segue que se $u \in C^{1,\beta}(\overline{B})$ para todo $0 < \beta < 1$, então $|x|^\alpha |u|^{p-1} u \in C^{0,\alpha}(\overline{B})$ se $\alpha \leq 1$ e $|x|^\alpha |u|^{p-1} u \in C^{1,\gamma}(\overline{B})$ se $\alpha > 1$, onde $\gamma = \min\{1, \alpha - 1\}$.

Prova.
Prova do item (i): Caso $\alpha = 1$ temos que $|x| \in C^{0,1}(\overline{B})$, pois $||x| - |y|| \leq |x - y|$. Caso $\alpha > 1$ tem-se $|x|^\alpha \in C^1(\overline{B})$. Logo, pelo Teorema do Valor Médio, $|x|^\alpha \in C^{0,1}(\overline{B})$. Caso $\alpha < 1$, mostremos primeiro que

$$a^\alpha + b^\alpha \geq (a+b)^\alpha \quad \forall a, b \geq 0. \tag{3.8}$$

Suponhamos $a, b \neq 0$. Como $c^\alpha \geq c \ \forall c \in [0, 1]$ temos que

$$\frac{a^\alpha}{(a+b)^\alpha} + \frac{b^\alpha}{(a+b)^\alpha} \geq \frac{a}{a+b} + \frac{b}{a+b} = 1.$$

Disso segue (3.8). Mostremos agora que $|x|^\alpha \in C^{0,\alpha}(\overline{B})$. Dados $x, y \in \overline{B}$ com $|x| \geq |y|$, por (3.8), temos que

$$||x|^\alpha - |y|^\alpha| = |x - y + y|^\alpha - |y|^\alpha \leq |x-y|^\alpha + |y|^\alpha - |y|^\alpha = |x-y|^\alpha.$$

Prova de (ii): Defina $f(x) = |x|^\alpha$. Então

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \alpha |x|^{\alpha-1} \frac{x_i}{|x|}, \text{ se } x \neq 0.$$

Como $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \overset{x \to 0}{\longrightarrow} 0 = \frac{\partial f}{\partial x_i}(0)$ temos que $f \in C^1(\overline{B})$. Se $\alpha = 2$, então $|x|^2 = \langle x, x \rangle \in C^\infty(\mathbb{R}^N) \subset C^{1,1}(\overline{B})$. Se $\alpha > 2$, então

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \alpha(\alpha-2)|x|^{\alpha-2} \frac{x_i}{|x|} \frac{x_j}{|x|}, \text{ se } x \neq 0 \text{ e } i \neq j,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x) = \alpha(\alpha-2)|x|^{\alpha-2} \frac{x_i}{|x|} \frac{x_i}{|x|} + \alpha|x|^{\alpha-2}, \text{ se } x \neq 0.$$

Como $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) \overset{x\to 0}{\longrightarrow} 0 = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(0)$ temos que $f \in C^2(\overline{B}) \subset C^{1,1}(\overline{B})$.

Agora suponhamos $1 < \alpha < 2$. Note que, por (i),

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(y)\right| &= \left|\alpha|x|^{\alpha-1}\frac{x_i}{|x|} - \alpha|y|^{\alpha-1}\frac{y_i}{|y|}\right| \\ &\leq \alpha\left||x|^{\alpha-1} - |y|^{\alpha-1}\right|\frac{|x_i|}{|x|} + \alpha|y|^{\alpha-1}\left|\frac{x_i}{|x|} - \frac{y_i}{|y|}\right| \\ &\leq \alpha|x-y|^{\alpha-1} + \alpha|y|^{\alpha-1}\left|\frac{x_i}{|x|} - \frac{y_i}{|y|}\right| \quad \forall x,y \in \overline{B}\backslash\{0\}. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Resta ver que

$$|y|^{\alpha-1}\left|\frac{x_i}{|x|} - \frac{y_i}{|y|}\right| \leq C|x-y|^{\alpha-1} \quad \forall x,y \in \overline{B}\backslash\{0\}. \tag{3.10}$$

Caso $|y| \leq |x-y|$ basta notar que

$$|y|^{\alpha-1}\left|\frac{x_i}{|x|} - \frac{y_i}{|y|}\right| \leq |x-y|^{\alpha-1}2.$$

Caso $|y| > |x-y|$ note que

$$\begin{aligned}|y|^{\alpha-1}\left|\frac{x_i}{|x|} - \frac{y_i}{|y|}\right| &= |y|^{\alpha-1}\frac{|x_i|y| - y_i|x||}{|x||y|} \leq |y|^{\alpha-1}\frac{|x_i||\,|y|-|x|\,| + |x||x_i - y_i|}{|x||y|} \\ &\leq |y|^{\alpha-1}2\frac{|x-y|}{|y|} \leq 2|y|^{\alpha-1}\frac{|x-y|^{\alpha-1}}{|y|^{\alpha-1}} = 2|x-y|^{\alpha-1}.\end{aligned}$$

Concluindo (3.10). Usando (3.10) em (3.9) temos que $f \in C^{1,\alpha-1}(\overline{B})$.

Prova de (iii): Seja $M > 0$ tal que $|f(x)| \leq M$ e $|g(x)| \leq M$ para todo $x \in \overline{B}$. Dados $x, y \in \overline{B}$, temos que

$$\begin{aligned}|(f\cdot g)(x) - (f\cdot g)(y)| &\leq |f(x)g(x) - f(y)g(x)| + |f(y)g(x) - f(y)g(y)| \\ &\leq M|x-y|^{\eta} + M|x-y|^{\mu} \\ &= M\left(|x-y|^{\eta-\lambda} + |x-y|^{\mu-\lambda}\right)|x-y|^{\lambda} \\ &\leq M(2^{\eta-\lambda} + 2^{\mu-\lambda})|x-y|^{\lambda}.\end{aligned}$$

Por fim, se $f \in C^{1,\eta}(\overline{B})$ e $g \in C^{1,\mu}(\overline{B})$ então, pelo já mostrado, tem-se $(f\cdot g)' = f'\cdot g + f\cdot g' \in C^{0,\lambda}(\overline{B})$, onde $\lambda = \min\{\eta, \mu\}$.

Prova de (iv): Basta notar que

$$\phi'(x) = |x|^{p-1} + x(p-1)|x|^{p-2}\frac{x}{|x|}, \text{ se } x \neq 0$$

e que $\phi'(x) \overset{x\to 0}{\longrightarrow} 0 = \phi'(0)$.

Finalizaremos o Lema. Se $\alpha \leq 1$, então por (i), (iii) e (iv) tem-se $|x|^\alpha |u|^{p-1}u \in C^{0,\alpha}(\overline{B})$. Se $\alpha > 1$, então por (ii), (iii) e (iv) tem-se $|x|^\alpha |u|^{p-1}u \in C^{1,\gamma}(\overline{B})$ onde $\gamma = \min\{1, \alpha - 1\}$. ■

Proposição 3.4. Seja $u \in W^{2,q}_{\text{rad}}(B) \cap W^{1,q}_0(B)$, para todo $q \geq 1$ satisfazendo $q[p(N-2) - 2\alpha] \leq 2N$, solução forte de (6). Então $u \in C^{2,\gamma}(\overline{B})$, com $\gamma = \min\{1, \alpha\}$ se $\alpha \neq 1$ e qualquer elemento de $(0,1)$ se $\alpha = 1$, e é solução clássica de (6).

Prova. Seja $u \in W^{2,q}_{\text{rad}}(B) \cap W^{1,q}_0(B)$, para todo $q \geq 1$ satisfazendo $q[p(N-2) - 2\alpha] \leq 2N$, solução forte de (6). Nosso foco, inicialmente, é mostrar que $u \in W^{2,\theta}_{\text{rad}}(B)$ $\forall \theta \in [1, \infty)$.

Afirmação 1: Podemos supor $p(N-2) - 2\alpha > 0$.

Prova da Afirmação 1: Se $p(N-2) - 2\alpha \leq 0$ então todo $q \in [1, \infty)$ satisfaz $q[p(N-2) - 2\alpha] \leq 2N$. Logo $u \in W^{2,q}_{\text{rad}}(B)$ para todo $q \in [1, \infty)$. Ficando assim demonstrada a Afirmação 1.

Afirmação 2: Podemos supor $N > \frac{4N}{p(N-2)-2\alpha}$.

Prova da Afirmação 2: Caso contrário obtemos $N \leq \frac{4N}{p(N-2)-2\alpha}$, ou seja, $p(N-2) - 2\alpha \leq 4$. Assim $u \in W^{2,q}_{\text{rad}}(B)$ $\forall q \in [1, \frac{N}{2})$ e pelo Teorema 6 do capítulo 5 em [6] temos que $u \in L^{r_q}(B)$ onde $r_q = \frac{qN}{N-2q}$. Como $r_q \overset{q \to \frac{N}{2}}{\longrightarrow} \infty$ temos que $u \in L^\theta(B)$ $\forall \theta \in [1, \infty)$. Assim $|x|^\alpha |u|^{p-1}u \in L^\theta(B)$ $\forall \theta \in [1, \infty)$ e pelo Teorema 9.15 em [9] aplicado em (3.5) (já vimos na proposição anterior que $w = u$ q.t.p.) obtemos $u \in W^{2,\theta}_{\text{rad}}(B)$ $\forall \theta \in [1, \infty)$. Ficando assim demonstrada a Afirmação 2.

Afirmação 3: Fixe $q \geq 1$ com $q[p(N-2) - 2\alpha] \leq 2N$. Dado $\theta \in [1, \infty)$ com $\theta\frac{p(N-2q)-q\alpha}{q} \leq N$ temos que $u \in W^{2,\theta}_{\text{rad}}(B)$.

Prova da Afirmação 3: Dado $\theta \in [1, \infty)$ com $\theta\frac{p(N-2q)-q\alpha}{q} \leq N$, pela Afirmação 2, podemos usar o item (2) do Teorema 0.1 obtendo $u \in L^r(B, |x|^{\alpha\theta})$ para todo $1 \leq r \leq \frac{q(N+\alpha\theta)}{N-2q}$. Note que

$$\theta\frac{p(N-2q) - q\alpha}{q} \leq N \Rightarrow \theta p(N-2q) - q\theta\alpha \leq qN \Rightarrow p\theta \leq \frac{q(N+\alpha\theta)}{N-2q}.$$

Então $u \in L^{p\theta}(B, |x|^{\alpha\theta})$ e, por (3.6), $|x|^\alpha |u|^{p-1}u \in L^\theta(B)$. Portanto, pelo Teorema 9.15 em [9] no problema (3.5), obtemos $u \in W^{2,\theta}_{\text{rad}}(B)$. Ficando assim demonstrada a Afirmação 3.

Afirmação 4: Podemos supor $p[p(N-2) - 2\alpha - 4] - 2\alpha > 0$.

Prova da Afirmação 4: Denotando $Q = \{q \geq 1/q[p(N-2) - 2\alpha] \leq 2N\}$ temos

$$\begin{aligned}\frac{p(N-2q) - q\alpha}{q} \leq 0,\ \exists q \in Q &\Leftrightarrow p(N-2q) - q\alpha \leq 0,\ \exists q \in Q \\ &\Leftrightarrow pN \leq q(\alpha + 2p),\ \exists q \in Q \\ &\Leftrightarrow pN[p(N-2) - 2\alpha] \leq q[p(N-2) - 2\alpha](\alpha + 2p),\ \exists q \in Q \\ &\Leftrightarrow pN[p(N-2) - 2\alpha] \leq 2N(\alpha + 2p) \\ &\Leftrightarrow p[p(N-2) - 2\alpha - 4] - 2\alpha \leq 0.\end{aligned}$$

Se $p[p(N-2) - 2\alpha - 4] - 2\alpha \leq 0$ segue que todo $\theta \in [1, \infty)$ satisfaz $\theta \frac{p(N-2q)-\alpha q}{q} \leq N$. Portanto, pela Afirmação 3, $u \in W^{2,\theta}_{\text{rad}}(B)$ $\forall \theta \in [1, \infty)$. Ficando assim demonstrada a Afirmação 4.

Denote $k = \frac{p(N-2)-2\alpha}{p[p(N-2)-2\alpha-4]-2\alpha}$. Como $p < \frac{N+2+2\alpha}{N-2}$ então

$$k = \frac{p(N-2) - 2\alpha}{p^2(N-2) - 2p\alpha - 4p - 2\alpha} > \frac{p(N-2) - 2\alpha}{pN + 2p + 2p\alpha - 2p\alpha - 4p - 2\alpha} = 1.$$

Afirmação 5: Se $u \in W^{2,r}_{\text{rad}}(B)$ para algum $r \geq \frac{2N}{p(N-2)-2\alpha}$, então $u \in W^{2,kr}_{\text{rad}}(B)$.

Prova da Afirmação 5: Faremos esta demonstração de forma recurssiva. Por regularidade elíptica (Teorema 9.15 de [9]) basta mostrar que $|x|^\alpha |u|^{p-1} u \in L^{kr}(B)$. Por (3.6) é suficiente mostrar que $u \in L^{pkr}(B, |x|^{\alpha kr})$. Se $N \leq 2r$, por $u \in W^{2,r}_{\text{rad}}(B)$, segue do Teorema 6 do capítulo 5 em [6] que $u \in L^\theta(B)$ $\forall \theta \geq 1$. Então $u \in L^\theta(B, |x|^{\alpha kr})$ e, dessa maneira, seguiria o resultado. Se $N > 2r$ segue do Teorema 0.1 que

$$u \in L^s(B, |x|^{\alpha kr}) \quad \forall 1 \leq s \leq \frac{r(N + \alpha kr)}{N - 2r}.$$

Para mostrar que $u \in L^{pkr}(B, |x|^{\alpha kr})$ é suficiente que $pkr \leq \frac{r(N+\alpha kr)}{N-2r}$. Note que

$$\begin{aligned}pkr \leq \frac{r(N + \alpha kr)}{N - 2r} &\Leftrightarrow pkN - 2pkr \leq N + \alpha kr \Leftrightarrow r(\alpha k + 2pk) \geq pkN - N \\ &\Leftrightarrow r \geq \frac{pkN - N}{\alpha k + 2pk} \Leftrightarrow r \geq \frac{pN - Nk^{-1}}{\alpha + 2p}.\end{aligned}$$

Finalmente, a Afirmação 5 segue das seguintes igualdades

$$\begin{aligned}\frac{pN - Nk^{-1}}{\alpha + 2p} &= \frac{1}{\alpha + 2p}\left(pN - N\frac{p[p(N-2) - 2\alpha - 4] - 2\alpha}{p(N-2) - 2\alpha}\right) \\ &= \frac{1}{\alpha + 2p}\frac{pN[p(N-2) - 2\alpha] - Np[p(N-2) - 2\alpha] + 4Np + 2N\alpha}{p(N-2) - 2\alpha}\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\alpha + 2p} \frac{2N(2p+\alpha)}{p(N-2)-2\alpha} = \frac{2N}{p(N-2)-2\alpha}.$$

Ficando assim demonstrada a Afirmação 5.

Como $u \in W^{2,r_0}_{\text{rad}}(B)$ onde $r_0 := \frac{2N}{p(N-2)-2\alpha}$, pela Afirmação 5, segue que $u \in W^{2,kr_0}_{\text{rad}}(B)$. Novamente, pela Afirmação 5 obtemos $u \in W^{2,k^2 r_0}_{\text{rad}}(B)$. Indutivamente, segue que para cada $n \in \mathbb{N}$, $u \in W^{2,k^n r_0}_{\text{rad}}(B)$. Como $k > 1$, então $k^n \to \infty$ e, dessa forma, $u \in W^{2,\theta}_{\text{rad}}(B)$ para todo $\theta \in [1, \infty)$. Pelo Teorema 6 do capítulo 5 em [6] obtemos $u \in C^{1,\gamma}(\overline{B})$ para todo $0 < \gamma < 1$.

Pelo Lema 3.3 e por regularidade de Schauder (Teorema 6.13 em [9]) segue que $u \in C^{2,\gamma}(\overline{B})$, onde $\gamma = \min\{1, \alpha\}$ se $\alpha \neq 1$ e γ é qualquer elemento de $(0,1)$ se $\alpha = 1$, e é solução clássica. ∎

3.2 Regularidade de soluções com simetria parcial de (6)

Nessa seção assumiremos

(H1) $N \geq 4$ e $l \in \mathbb{Z}$ com $2 \leq N - l \leq l$;

(H2) $2 < p + 1 < 2_l$, onde $2_l := 2\frac{l+1}{l-1}$;

(H3) $q_l := N - (N - l + 1)\frac{2}{2_l}$ e $\alpha > \frac{2_l q_l}{2}$.

Denotamos $H^1_{0,l}(B) := W^{1,2}_l(B) \cap H^1_0(B)$. Como $p + 1 < 2_l$, pelo Corolário 0.5, temos a seguinte imersão compacta $H^1_{0,l}(B) \hookrightarrow L^{p+1}(B, |x|^\alpha)$. Dizemos que $u_0 \in H^1_{0,l}(B)$ é solução fraca de (6) se é ponto crítico do funcional $C^1(H^1_{0,l}(B), \mathbb{R})$ dado por

$$I_l(u) = \frac{1}{2} \int_B |\nabla u|^2 \mathrm{d}x - \frac{1}{p+1} \int_B |x|^\alpha |u|^{p+1} \mathrm{d}x, \quad u \in H^1_{0,l}(B).$$

Definimos também

$$m_{\nabla,\alpha,l} := \inf_{\substack{u \in H^1_{0,l}(B) \\ u \neq 0}} \frac{\int |\nabla u|^2 \mathrm{d}x}{\left(\int |x|^\alpha |u|^{p+1} \mathrm{d}x\right)^{\frac{2}{p+1}}}.$$

Badiale e Sierra em [2] mostraram que I_l tem um ponto crítico positivo não radial. Além disso, provaram que cada l gera uma solução diferente. Figueiredo, Santos e Miyagaki contribuiram com estudo de regularidade de soluções fracas de (6) com as próximas duas proposições.

Proposição 3.5. Seja $u \in H^1_{0,l}(B)$ solução fraca de (6). Então $u \in W_l^{2,\frac{2_l}{p}}(B) \cap W_0^{1,\frac{2_l}{p}}(B)$ e é solução forte de (6).

Prova. Pelo Corolário 0.5, (H1), (H2) e (H3), obtemos $u \in L^{2_l}(B, |x|^\alpha)$. Assim $|x|^\alpha |u|^{p-1}u \in L^{\frac{2_l}{p}}(B)$. Considere o problema

$$\begin{cases} -\Delta w = |x|^\alpha |u|^{p-1}u & \text{em} \quad B, \\ w = 0 & \text{sobre} \quad \partial B. \end{cases} \tag{3.11}$$

Aplicando regularidade L^p (Teorema 9.15 em [9]) obtemos $w \in W^{2,\frac{2_l}{p}}(B) \cap W_0^{1,\frac{2_l}{p}}(B)$ solução forte de (3.11). Além disso, usando que Δ é invariante por operadores ortogonais como na Observação 2.11, obtemos $w \in W_l^{2,\frac{2_l}{p}}(B) \cap W_0^{1,\frac{2_l}{p}}(B)$. Como w é solução forte de (3.11) e u é solução fraca de (6) temos, para toda $\varphi \in C^\infty_{0,l}(\overline{B})$, que

$$\int_B w(-\Delta\varphi)\mathrm{d}x = \int_B (-\Delta w)\varphi \mathrm{d}x = \int_B |x|^\alpha |u|^{p-1}u\varphi \mathrm{d}x = \int_B \nabla u \nabla \varphi \mathrm{d}x = \int_B u(-\Delta\varphi)\mathrm{d}x.$$

Logo

$$\int_B (w-u)\Delta\varphi \mathrm{d}x = 0 \quad \forall \varphi \in C^\infty_{0,l}(B) \tag{3.12}$$

Fixe $\psi \in C_0^\infty((0,1)\times(0,1))$ tome $\varphi \in C_0^\infty(B)$ solução clássica de

$$\begin{cases} \Delta\varphi(x) = \psi(|y|,|z|) & \text{em} \quad B, \\ \varphi = 0 & \text{sobre} \quad \partial B. \end{cases}$$

Para verificar que $\varphi \in C^\infty_{0,l}(B)$ basta usar um argumento análogo a Observação 2.11. Assim

$$\begin{aligned} 0 = \int_B (w-u)\Delta\varphi \mathrm{d}x &= \int_B (w-u)\psi(|y|,|z|)\mathrm{d}x \\ &= \omega_{N-l}\omega_l \int_0^1 \int_0^1 [w(s,t) - u(s,t)]\, \psi(s,t) s^{l-1} t^{N-l-1} \mathrm{d}s\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Como $\psi \in C_0^\infty((0,1)\times(0,1))$ foi arbitrária, temos que $w = u$ q.t.p. em $(0,1)\times(0,1)$. Logo,

$$0 = \omega_{N-l}\omega_l \int_0^1 \int_0^1 |w(s,t) - u(s,t)|\, s^{l-1}t^{N-l-1}\mathrm{d}s\mathrm{d}t = \int_B |w(x) - u(x)|\mathrm{d}x.$$

Portanto $w = u$ q.t.p. em B e, dessa forma, $u = w \in W_l^{2,\frac{2_l}{p}}(B) \cap W_0^{1,\frac{2_l}{p}}(B)$. ∎

Proposição 3.6. Seja $u \in W_l^{2,\frac{2_l}{p}}(B) \cap W_0^{1,\frac{2_l}{p}}(B)$ uma solução forte de (6). Então existe

$\alpha_0 > 0$ tal que, dado $\alpha > \alpha_0$, tem-se que u é solução clássica de (6) e $u \in C^{2,\gamma}(\overline{B})$, onde $\gamma = \min\{1, \alpha\}$ se $\alpha \neq 1$ e γ é qualquer elemento de $(0,1)$ se $\alpha = 1$.

Prova. Seja $u \in W_l^{2,\frac{2_l}{p}}(B) \cap W_0^{1,\frac{2_l}{p}}(B)$ solução forte de (6). Fixe $\alpha_0 > 0$ a ser determinado. Dado $\alpha > \alpha_0$, inicialmente, vamos mostrar que $u \in W^{2,\theta}(B)\ \forall \theta \in [1, \infty)$. Primeiramente, observe que

$$|x|^\alpha |u|^{p-1} u \in L^{\tilde{q}}(B) \Leftrightarrow \int_B |x|^{\alpha\tilde{q}} |u|^{p\tilde{q}} \mathrm{d}x < \infty \Leftrightarrow u \in L^{p\tilde{q}}(B, |x|^{\alpha\tilde{q}}). \tag{3.13}$$

Afirmação 1: Podemos supor $p(l-1) - 4 > 0$.
Prova da Afirmação 1: Suponhamos $p(l-1) - 4 \leq 0$. Note que

$$l + 1 \leq 2\frac{2_l}{p} \Leftrightarrow l + 1 \leq \frac{4(l+1)}{p(l-1)} \Leftrightarrow p(l-1) \leq 4 \Leftrightarrow p(l-1) - 4 \leq 0.$$

Por (H3) e o Corolário 0.5 obtemos $u \in L^{p\theta}(B, |x|^{\alpha\theta})\ \forall \theta \in [1, \infty)$. Pela equação (3.13) tem-se $|x|^\alpha |u|^{p-1} u \in L^\theta(B)\ \forall \theta \in [1, \infty)$. Pelo Teorema 9.15 em [9] aplicado em (3.11), temos que $u \in W^{2,\theta}(B)\ \forall \theta \in [1, \infty)$. Ficando assim demonstrada a Afirmação 1.

Denote $k := \frac{l-1}{p(l-1)-4}$. Por (H2) tem-se $p < 2_l - 1 = \frac{l+3}{l-1}$. Daí,

$$k = \frac{l-1}{p(l-1)-4} > \frac{l-1}{l+3-4} = 1.$$

Além disso denote, para cada $q \in [1, \infty)$,

$$\alpha_{0,q} = \begin{cases} \frac{N(l+1)}{kq(l+1-2q)} - \frac{N-l+1}{kq} & \text{se} \quad 2q < l+1, \\ \frac{Np}{q} - \frac{N-l+1}{kq} & \text{se} \quad q \geq l+1. \end{cases}$$

Afirmação 2: Se $\alpha > \alpha_{0,q}$ e $u \in W_l^{2,q}(B)$ com $q \geq \frac{2_l}{p}$, então $u \in W_l^{2,kq}(B)$.
Prova da Afirmação 2: Se $l + 1 > 2q$ então

$$\begin{aligned} \alpha kq > \alpha_{0,q} kq &= \frac{N(l+1)}{l+1-2q} - (N-l+1) \\ &= \frac{1}{q} \frac{q(l+1)}{l+1-2q} \left[N - (N-l+1) \frac{q(l+1-2q)}{q(l+1)} \right]. \end{aligned}$$

Daí, pelo Corolário 0.5, temos que $u \in L^{\frac{q(l+1)}{l+1-2q}}(B, |x|^{\alpha kq})$. Como $q \geq \frac{2_l}{p}$ tem-se

$$\frac{q(l+1)}{l+1-2q} \geq \frac{q(l+1)}{l+1-2\frac{2(l+1)}{p(l-1)}} = \frac{p(l-1)q}{p(l-1)-4} = pkq.$$

Então $u \in L^{pkq}(B, |x|^{\alpha kq})$. Por (3.13) obtemos $|x|^{\alpha}|u|^{p-1}u \in L^{kq}(B)$. Usando regularidade elíptica (Teorema 9.15 em [9]) em (3.11) temos que $u \in W_l^{2,kq}(B)$. Agora suponha $l+1 \leq 2q$, então

$$\begin{aligned} \alpha kq > \alpha_{0,q} kq &= Npk - (N-l+1) \\ &= \frac{1}{q} pkq \left[N - (N-l+1)\frac{q}{pkq} \right]. \end{aligned}$$

Daí, pelo Corolário 0.5, temos que $u \in L^{pkq}(B, |x|^{\alpha kq})$. Devido à (3.13), obtemos $|x|^{\alpha}|u|^{p-1}u \in L^{kq}(B)$. Usando regularidade elíptica (Teorema 9.15 em [9]) em (3.11) temos que $u \in W_l^{2,kq}(B)$. Ficando assim demonstrada a Afirmação 2.

Como $\alpha_{0,k^n\frac{2l}{p}} \xrightarrow{n\to\infty} 0$, temos que $\alpha_0 := \sup_{n\in\mathbb{N}} \alpha_{0,k^n\frac{2l}{p}} < \infty$. Assim, para $\alpha > \alpha_0$, a Afirmação 2 garante que $u \in W_l^{2,k^n\frac{2l}{p}}(B)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Então $u \in W_l^{2,\theta}(B)$ para todo $\theta \in [1,\infty)$ se $\alpha > \alpha_0$.

Suponhamos $\alpha > \alpha_0$. Pelo Teorema 6 do capítulo 5 de [6], $u \in C^{1,\gamma}(\overline{B})$ para todo $\gamma \in (0,1)$.Pelo Lema 3.3 e por regularidade de Schauder (Teorema 6.13 em [9]), segue que u é solução clássica e $u \in C^{2,\gamma}(\overline{B})$, onde $\gamma = \min\{1,\alpha\}$ se $\alpha \neq 1$ e γ é qualquer elemento de (0,1) se $\alpha = 1$. ∎

3.3 Regularidade de soluções radiais de (5)

Lema 3.7. Considere o problema

$$\begin{cases} \Delta^2 u = f & \text{em} \quad B, \\ \mathcal{B}u = 0 & \text{sobre} \quad \partial B. \end{cases}$$

1. Se $f \in L^p(B)$, com $1 < p < \infty$, então o problema possui única solução $u \in W^{4,p}(B)$ que satisfaz a condição de fronteira $\mathcal{B}u = 0$ no sentido do traço;

2. Se $f \in C^{0,\gamma}(\overline{B})$, com $0 < \gamma < 1$, então o problema possui única solução clássica $u \in C^{4,\gamma}(\overline{B})$.

Prova. Segue dos Teoremas 2.19 e 2.20 em [10]. ∎

Nesta seção assumiremos

$$N \geq 5,\ \alpha > 0 \text{ e } 1 < p < \frac{N+2(2+\alpha)}{N-4}. \tag{3.14}$$

A teoria de regularidade para solução fraca e radial de (5) segue das duas proposições seguintes:

Proposição 3.8. Seja $u \in H_{\text{rad}}$ solução fraca de (5). Então $u \in W^{4,q}_{\text{rad}}(B)$ para todo $q \geq 1$ com $q[p(N-4)-2\alpha] \leq 2N$, u é solução forte de (5) e satisfaz a condição $\mathcal{B}u = 0$ no sentido do traço.

Prova. Considere o problema

$$\begin{cases} \Delta^2 w = |x|^\alpha |u|^{p-1}u & \text{em} \quad B, \\ \mathcal{B}w = 0 & \text{sobre} \quad \partial B. \end{cases} \tag{3.15}$$

Primeiramente, encontremos alguns valores de $q \geq 1$ tais que $|x|^\alpha |u|^{p-1}u \in L^q(B)$. Note que

$$|x|^\alpha |u|^{p-1}u \in L^q(B) \Leftrightarrow \int_B |x|^{\alpha q}|u|^{pq}\mathrm{d}x < \infty \Leftrightarrow u \in L^{pq}(B, |x|^{\alpha q}). \tag{3.16}$$

Assim, pelo Teorema 0.1, usando que $u \in H^2_{\text{rad}}(B)$,

$$\begin{aligned} u \in L^{pq}(B, |x|^{\alpha q}) \Leftarrow pq \leq \frac{2(N+\alpha q)}{N-4} &\Leftrightarrow pq(N-4) \leq 2N + 2\alpha q \\ &\Leftrightarrow q[p(N-4)-2\alpha] \leq 2N. \end{aligned}$$

Logo, $|x|^\alpha |u|^{p-1}u \in L^q(B)$ se $q \geq 1$ e $q[p(N-4)-2\alpha] \leq 2N$. Note que existe $q > 1$ com $q[p(N-4)-2\alpha] \leq 2N$, pois como

$$q[p(N-4)-2\alpha] < q(N+4+2\alpha-2\alpha) = q(N+4) \text{ e } \frac{2N}{N+4} > \frac{2N}{N+N} = 1,$$

então basta tomar $q \in (1, \frac{2N}{N+4}]$.

Pelo Lema 3.7 obtemos única solução forte ($w \in W^{4,q}(B)$ para todo $q > 1$ com $q[p(N-4)-2\alpha] \leq 2N$) de (3.15) satisfazendo a condição de fronteira no sentido do traço. Como B é limitado obtemos que $w \in W^{4,q}(B)$ para todo $q \geq 1$ com $q[p(N-4)-2\alpha] \leq 2N$. Além disso, usando que Δ^2 é invariante por operadores ortogonais, w é radial. Note que, para cada $\varphi \in C^\infty_{0,\text{rad}}(\overline{B})$, como w é solução forte e u é solução fraca tem-se

$$\int_B w\Delta^2\varphi \mathrm{d}x = \int_B \Delta^2 w\varphi \mathrm{d}x = \int_B |x|^\alpha |u|^{p-1}u\varphi \mathrm{d}x = \int_B \Delta u \Delta\varphi \mathrm{d}x = \int_B u\Delta^2\varphi \mathrm{d}x. \tag{3.17}$$

Fixe $\psi \in C^\infty_0(0,1)$ e tome $\varphi \in C^\infty_{0,\text{rad}}(B)$ solução de

$$\begin{cases} \Delta^2 \varphi(x) = \psi(|x|) & \text{em} \quad B, \\ \varphi = 0 & \text{sobre} \quad \partial B. \end{cases}$$

Assim, por (3.17),

$$0 = \int_B (w-u)\Delta^2 \varphi \mathrm{d}x = \int_B (w-u)\psi(|x|)\mathrm{d}x = \omega_N \int_0^1 (w(t)-u(t))\psi(t)t^{N-1}\mathrm{d}t.$$

Como $\psi \in C_0^\infty(0,1)$ foi arbitrária, temos que $w = u$ q.t.p. em $(0,1)$. Logo,

$$0 = \omega_N \int_0^1 |w(t)-u(t)|t^{N-1}\mathrm{d}t = \int_B |w(x)-u(x)|\mathrm{d}x.$$

Portanto $w = u$ q.t.p. em B. Daí $u = w \in W^{4,q}_{\mathrm{rad}}(B)$ para todo $q \geq 1$ com $q[p(N-4)-2\alpha] \leq 2N$. ■

Proposição 3.9. Seja $u \in W^{4,q}_{\mathrm{rad}}(B)$, para todo $q \geq 1$ e $q[p(N-4)-2\alpha] \leq 2N$, uma solução forte de (5) satisfazendo $\mathcal{B}u = 0$ no sentido do traço. Então u é solução clássica de (5) e $u \in C^{4,\gamma}(\overline{B})$ com $\gamma = \min\{1,\alpha\}$ se $\alpha \neq 1$ e qualquer número em $(0,1)$ se $\alpha = 1$.

Prova. Seja $u \in W^{4,q}_{\mathrm{rad}}(B)$, para todo $q \geq 1$ com $q[p(N-4)-2\alpha] \leq 2N$, solução forte de (5). Nosso foco, inicialmente, é mostrar que $u \in W^{4,\theta}(B)$ $\forall \theta \in [1,\infty)$.
Afirmação 1: Podemos supor $p(N-4)-2\alpha > 0$.
Prova da Afirmação 1: Se $p(N-4)-2\alpha \leq 0$ então todo $q \in [1,\infty)$ satisfaz $q[p(N-4)-2\alpha] \leq 2N$. Logo $u \in W^{4,q}(B)$ para todo $q \in [1,\infty)$. Ficando assim demonstrada a Afirmação 1.
Afirmação 2: Podemos supor $N > \frac{8N}{p(N-4)-2\alpha}$.
Prova da Afirmação 2: Caso contrário obtemos $N \leq \frac{8N}{p(N-4)-2\alpha}$, ou seja, $p(N-4)-2\alpha \leq 8$. Assim $u \in W^{4,q}_{\mathrm{rad}}(B)$ $\forall q \in [1, \frac{N}{4})$ e pelo Teorema 6 do capítulo 5 em [6] temos que $u \in L^{r_q}(B)$ com $r_q = \frac{qN}{N-4q}$. Como $r_q \overset{q \to \frac{N}{4}}{\longrightarrow} \infty$ temos que $u \in L^\theta(B)$ $\forall \theta \in [1,\infty)$. Logo, por (3.16), $|x|^\alpha |u|^{p-1}u \in L^\theta(B)$ $\forall \theta \in [1,\infty)$ e pelo Lema 3.7 em (3.15) obtemos $u \in W^{4,\theta}(B)$ $\forall \theta \in [1,\infty)$. Ficando assim demonstrada a Afirmação 2.
Afirmação 3: Fixe $q \geq 1$ com $q[p(N-4)-2\alpha] \leq 2N$. Dado $\theta \in [1,\infty)$ satisfazendo $\theta \frac{p(N-4q)-q\alpha}{q} \leq N$, temos que $u \in W^{4,\theta}(B)$.
Prova da Afirmação 3: Dado $\theta \in [1,\infty)$ com $\theta \frac{p(N-4q)-q\alpha}{q} \leq N$, pela Afirmação 2, podemos usar o item (2) do Teorema 0.1 obtendo $u \in L^r(B, |x|^{\alpha\theta})$ para todo $1 \leq r \leq \frac{q(N+\alpha\theta)}{N-4q}$. Note que

$$\theta \frac{p(N-4q)-q\alpha}{q} \leq N \Rightarrow \theta p(N-4q) - q\theta\alpha \leq qN \Rightarrow p\theta \leq \frac{q(N+\alpha\theta)}{N-4q}.$$

Assim $u \in L^{p\theta}(B, |x|^{\alpha\theta})$ e, por (3.16), $|x|^\alpha |u|^{p-1}u \in L^\theta(B)$. Pelo Lema 3.7 no problema (3.15) obtemos $u \in W^{4,\theta}(B)$. Ficando assim demonstrada a Afirmação 3.

Afirmação 4: Podemos supor $p[p(N-4)-2\alpha-8]-2\alpha>0$.
Prova da Afirmação 4: Denotando $Q=\{q\geq 1/q[p(N-4)-2\alpha]\leq 2N\}$ temos que

$$\begin{aligned}
\frac{p(N-4q)-q\alpha}{q}\leq 0\ \exists q\in Q &\Leftrightarrow p(N-4q)-q\alpha\leq 0\ \exists q\in Q\\
&\Leftrightarrow pN\leq q(\alpha+4p)\ \exists q\in Q\\
&\Leftrightarrow pN[p(N-4)-2\alpha]\leq q[p(N-4)-2\alpha](\alpha+4p)\ \exists q\in Q\\
&\Leftrightarrow pN[p(N-4)-2\alpha]\leq 2N(\alpha+4p)\\
&\Leftrightarrow p[p(N-4)-2\alpha-8]-2\alpha\leq 0.
\end{aligned}$$

Se $p[p(N-4)-2\alpha-8]-2\alpha\leq 0$ segue que todo $\theta\in[1,\infty)$ satisfaz $\theta\frac{p(N-4q)-q\alpha}{q}\leq N$. Portanto, pela Afirmação 3, $u\in W^{4,\theta}(B)$ $\forall\theta\in[1,\infty)$. Ficando assim demonstrada a Airmação 4.

Denote $k:=\frac{p(N-4)-2\alpha}{p[p(N-4)-2\alpha-8]-2\alpha}$. Como $p<\frac{N+2(2+\alpha)}{N-4}$ então

$$k=\frac{p(N-4)-2\alpha}{p^2(N-4)-2p\alpha-8p-2\alpha}>\frac{p(N-4)-2\alpha}{pN+4p-8p-2\alpha}=\frac{p(N-4)-2\alpha}{p(N-4)-2\alpha}=1.$$

Afirmação 5: Se $u\in W^{4,r}_{\text{rad}}(B)$ para algum $r\geq\frac{2N}{p(N-4)-2\alpha}$, então $u\in W^{4,kr}_{\text{rad}}(B)$.
Prova da Afirmação 5: Faremos esta demonstração de forma recurssiva. Pelo Lema 3.7 basta mostrar que $|x|^\alpha|u|^{p-1}u\in L^{kr}(B)$. Por (3.16) é suficiente mostrar que $u\in L^{pkr}(B,|x|^{\alpha kr})$. Por hipótese $u\in W^{4,r}_{\text{rad}}(B)$. Se $N\leq 4r$ segue do Teorema 6 do capítulo 5 em [6] que $u\in L^\theta(B)$ $\forall\theta\in[1,\infty)$ e, dessa forma, $u\in L^\theta(B,|x|^{\alpha kr})$ seguiria o resultado. Se $N>4r$ segue do Teorema 0.1 que

$$u\in L^s(B,|x|^{\alpha kr})\quad\forall 1\leq s\leq\frac{r(N+\alpha kr)}{N-4r}.$$

Para mostrar que $u\in L^{pkr}(B,|x|^{\alpha kr})$ é suficiente que $pkr\leq\frac{r(N+\alpha kr)}{N-4r}$. Note que

$$\begin{aligned}
pkr\leq\frac{r(N+\alpha kr)}{N-4r}&\Leftrightarrow pkN-4pkr\leq N+\alpha kr\Leftrightarrow r(\alpha k+4pk)\geq pkN-N\\
&\Leftrightarrow r\geq\frac{pkN-N}{\alpha k+4pk}\Leftrightarrow r\geq\frac{pN-Nk^{-1}}{\alpha+4p}.
\end{aligned}$$

Finalmente, Afirmação 5 segue das seguintes igualdades

$$\begin{aligned}
\frac{pN-Nk^{-1}}{\alpha+4p}&=\frac{1}{\alpha+4p}\left(pN-N\frac{p[p(N-4)-2\alpha-8]-2\alpha}{p(N-4)-2\alpha}\right)\\
&=\frac{1}{\alpha+4p}\frac{pN[p(N-4)-2\alpha]-Np[p(N-4)-2\alpha]+8Np+2N\alpha}{p(N-4)-2\alpha}
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\alpha+4p}\frac{2N(4p+\alpha)}{p(N-4)-2\alpha} = \frac{2N}{p(N-4)-2\alpha}.$$

Ficando assim demonstrada a Afirmação 5.

Como $u \in W^{4,r_0}_{\mathrm{rad}}(B)$ onde $r_0 := \frac{2N}{p(N-4)-2\alpha}$, pela Afirmação 5, obtemos $u \in W^{4,k^2 r_0}_{\mathrm{rad}}(B)$. Indutivamente, segue que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $u \in W^{4,k^n r_0}_{\mathrm{rad}}(B)$. Como $k > 1$, então $k^n \to \infty$ e, portanto, $u \in W^{4,\theta}_{\mathrm{rad}}(B)$ $\forall \theta \in [1, \infty)$.

Pelo Teorema 6 do capítulo 5 em [6] obtemos $u \in C^{3,\gamma}(\overline{B})$ para todo $0 < \gamma < 1$. Pelos Lemas 3.3 e 3.7 temos que u é solução clássica com $u \in C^{4,\gamma}(\overline{B})$, onde $\gamma = \min\{1, \alpha\}$ se $\alpha \neq 1$ e γ é qualquer elemento de (0,1) se $\alpha = 1$. ■

3.4 Regularidade de soluções com simetria parcial de (5)

Nessa seção assumiremos

(H1) $N \geq 4$; l inteiro com $2 \leq N - l \leq l$;

(H2) $2 < p + 1 < 2_l$ onde $2_l := \frac{2(l+1)}{l-3}$ se $l \geq 4$ e 2_l é qualquer elemento de $(2, \infty)$ se $l < 4$;

(H3) $q_l := N - (N - l + 1)\frac{2}{2_l}$ e $\alpha > \frac{2_l q_l}{2}$.

Façamos o estudo de regularidade de (5) através das seguintes proposições:

Proposição 3.10. Seja $u \in H_l(B)$ solução fraca de (5). Então $u \in W_l^{4,\frac{2_l}{p}}(B)$ é uma solução forte de (5) satisfazendo $\mathcal{B}u = 0$ no sentido do traço.

Prova. Pelo Corolário 0.5, (H1), (H2) e (H3) obtemos $u \in L^{2_l}(B, |x|^\alpha)$. Assim, por $|x| < 1$, $|x|^\alpha |u|^{p-1} u \in L^{\frac{2_l}{p}}(B)$. Considere o problema

$$\begin{cases} \Delta^2 w = |x|^\alpha |u|^{p-1} u & \text{em} \quad B, \\ \mathcal{B}w = 0 & \text{sobre} \quad \partial B. \end{cases} \tag{3.18}$$

Pelo Lema 3.7, obtemos $w \in W^{4,\frac{2_l}{p}}(B)$ solução forte satisfazendo a condição da fronteira no sentido do traço. Além disso, usando que Δ é invariante por operadores ortogonais como na Observação 2.11, obtemos $w \in W_l^{4,\frac{2_l}{p}}(B)$. Como w é solução forte de (3.18) e u é solução fraca de (5) temos, para toda $\varphi \in C^\infty_{0,l}(\overline{B})$, que

$$\int_B w\Delta^2\varphi dx = \int_B \Delta^2 w\varphi dx = \int_B |x|^\alpha |u|^{p-1} u\varphi dx = \int_B \Delta u \Delta\varphi dx = \int_B u\Delta^2\varphi dx.$$

Fixe $\psi \in C_0^\infty((0,1)\times(0,1))$ e tome $\varphi \in C_0^\infty(B)$ solução clássica de

$$\begin{cases} \Delta^2\varphi = \psi(|y|,|z|) & \text{em} \quad B, \\ \mathcal{B}\varphi = 0 & \text{sobre} \quad \partial B. \end{cases}$$

Para verificar que $\varphi \in C_{0,l}^\infty(B)$ basta usar um argumento análogo a Observação 2.11. Assim

$$\begin{aligned} 0 &= \int_B (w-u)\Delta^2\varphi \mathrm{d}x = \int_B (w-u)\psi(|y|,|z|)\mathrm{d}x \\ &= \omega_{N-l}\omega_l \int_0^1\int_0^1 [w(s,t)-u(s,t)]\psi(s,t)s^{l-1}t^{N-l-1}\mathrm{d}s\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Como $\psi \in C_0^\infty((0,1)\times(0,1))$ foi arbitrária, temos que $w = u$ q.t.p. em $(0,1)\times(0,1)$. Logo,

$$0 = \omega_{N-l}\omega_l \int_0^1\int_0^1 |w(s,t)-u(s,t)|s^{l-1}t^{N-l-1}\mathrm{d}s\mathrm{d}t = \int_B |w(x)-u(x)|\mathrm{d}x.$$

Portanto $w = u$ q.t.p. em B e, dessa forma, $u = w \in W_l^{4,\frac{2_l}{p}}(B)$. ∎

Proposição 3.11. Seja $u \in W_l^{4,\frac{2_l}{p}}(B)$ uma solução forte de (5) satisfazendo $\mathcal{B}u = 0$ no sentido do traço. Então existe $\alpha_0 > 0$ tal que dado $\alpha > \alpha_0$ tem-se u solução clássica de (5) com $u \in C^{4,\gamma}(\overline{B})$, onde $\gamma = \min\{1,\alpha\}$ se $\alpha \neq 1$ e γ é qualquer elemento de $(0,1)$ se $\alpha = 1$.

Prova. Seja $u \in W_l^{4,\frac{2_l}{p}}(B)$ uma solução forte de (5) satisfazendo a condição de fronteira $\mathcal{B}u = 0$ no sentido do traço. Nosso foco, inicialmente, é mostrar que $u \in W^{4,\theta}(B)$ $\forall\theta \in [1,\infty)$ para $\alpha > \alpha_0$ onde $\alpha_0 > 0$ a ser determinado. Primeiramente, observe que

$$|x|^\alpha|u|^{p-1}u \in L^{\tilde{q}}(B) \Leftrightarrow \int_B |x|^{\alpha\tilde{q}}|u|^{p\tilde{q}}\mathrm{d}x < \infty \Leftrightarrow u \in L^{p\tilde{q}}(B,|x|^{\alpha\tilde{q}}). \tag{3.19}$$

Afirmação 1: Podemos supor $p(l-3)-8>0$.
Prova da Afirmação 1: Suponhamos $p(l-3)-8 \leq 0$. Note que

$$l+1 \leq 4\frac{2_l}{p} \Leftrightarrow l+1 \leq \frac{8(l+1)}{p(l-3)} \Leftrightarrow p(l-3) \leq 8 \Leftrightarrow p(l-3)-8 \leq 0.$$

Por (H3) e Corolário 0.5 obtemos $u \in L^{p\theta}(B,|x|^{\alpha\theta})$ $\forall\theta \in [1,\infty)$. Por (3.19) tem-se $|x|^\alpha|u|^{p-1}u \in L^\theta(B)$ $\forall\theta \in [1,\infty)$. Pelo Lema 3.7 em (3.18) temos que $u \in W^{4,\theta}(B)$ $\forall\theta \in [1,\infty)$. Ficando assim demonstrada a Afirmação 1.

Pela Afirmação 1 podemos assumir $l \geq 4$ e, dessa forma, $2_l = \frac{2(l+1)}{l-3}$. Denote $k := \frac{l-3}{p(l-3)-8}$. Por (H2) tem-se $p < 2_l - 1 = \frac{l+5}{l-3}$. Daí

$$k = \frac{l-3}{p(l-3)-8} > \frac{l-3}{l+5-8} = 1.$$

Além disso denote, para cada $q \in [1, \infty)$,

$$\alpha_{0,q} = \begin{cases} \frac{N(l+1)}{kq(l+1-4q)} - \frac{N-l+1}{kq} & \text{se} \quad 4q < l+1, \\ \frac{Np}{q} - \frac{N-l+1}{kq} & \text{se} \quad 4q \geq l+1. \end{cases}$$

Afirmação 2: Se $\alpha > \alpha_{0,q}$ e $u \in W_l^{4,q}(B)$ com $q \geq \frac{2_l}{p}$, então $u \in W^{4,kq}(B)$.
Prova da Afirmação 2: Se $4q < l+1$ então

$$\begin{aligned} \alpha kq > \alpha_{0,q} kq &= \frac{N(l+1)}{l+1-4q} - (N-l+1) \\ &= \frac{1}{q} \frac{q(l+1)}{l+1-4q} \left[N - (N-l+1) \frac{q(l+1-4q)}{q(l+1)} \right]. \end{aligned}$$

Daí, pelo Corolário 0.5, temos que $u \in L^{\frac{q(l+1)}{l+1-4q}}(B, |x|^{\alpha kq})$. Como $q \geq \frac{2_l}{p}$ tem-se

$$\frac{q(l+1)}{l+1-4q} \geq \frac{q(l+1)}{l+1-\frac{8(l+1)}{p(l-3)}} = \frac{p(l-3)q}{p(l-3)-8} = pkq.$$

Então $u \in L^{pkq}(B, |x|^{\alpha kq})$. Por (3.19) obtemos $|x|^{\alpha}|u|^{p-1}u \in L^{kq}(B)$. Pelo Lema 3.7 em (3.18), conclui-se $u \in W^{4,kq}(B)$.

Agora, suponha $4q \geq l+1$, então

$$\alpha kq > \alpha_{0,q} kq = Npk - (N-l+1) = \frac{1}{q} pkq \left[N - (N-l+1) \frac{q}{pkq} \right].$$

Daí, pelo Corolário 0.5, temos que $u \in L^{pkq}(B, |x|^{\alpha kq})$. Por (3.19) obtemos $|x|^{\alpha}|u|^{p-1}u \in L^{kq}(B)$. Pelo Lema 3.7 em (3.18) temos que $u \in W^{4,kq}(B)$. Ficando assim demonstrada a Afirmação 2.

Como $\alpha_{0,k^n \frac{2_l}{p}} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, temos que $\alpha_0 := \sup_{n \in \mathbb{N}} \alpha_{0,k^n \frac{2_l}{p}} < \infty$. Assim para $\alpha > \alpha_0$, Afirmação 2 garante que $u \in W_l^{4,k^n \frac{2_l}{p}}(B)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Então $u \in W_l^{4,\theta}(B)$ para todo $\theta \in [1, \infty)$ se $\alpha > \alpha_0$.

Suponhamos $\alpha > \alpha_0$. Pelo Teorema 6 do capítulo 5 de [6] $u \in C^{3,\gamma}(\overline{B})$ para todo $\gamma \in (0,1)$. Pelos Lemas 3.3 e 3.7 segue que u é solução clássica com $u \in C^{4,\gamma}(\overline{B})$, onde $\gamma = \min\{1, \alpha\}$ se $\alpha \neq 1$ e γ é qualquer elemento de $(0,1)$ se $\alpha = 1$. ∎

Referências Bibliográficas

[1] ADAMS, R. A.; FOURNIER, J. J. F. **Sobolev Spaces**, second edition, Academic Press, Amsterdam, 2003.

[2] BADIALE, M.; SERRA, E. **Multiplicity results for the supercritical Hénon equation**, Adv. Nonlinear Stud. 4 (4) (2004) 453-467.

[3] BREZIS, H. **Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations**, Springer, 2010.

[4] CALANCHI, M.; RUF, B. **Radial an non radial solutions for Hardy-Hénon type elliptic systems**, Calc. Var. Partial Differential Equations 38 (2010) 111-133.

[5] DALMASSO, R. **Problème de Dirichlet homogène pour une équation biharmonique semi-linéaire dans une boule**, Bull. Sci. Math. 114 (2) (1990) 123-137.

[6] EVANS, L. C. **Partial Differential Equations**, American Mathematical Society, 1997.

[7] FERRERO, A.; GAZZOLA, F.; WETH, T. **Positivity, symmetry and uniqueness for minimizers of second-order Sobolev inequalities**, Ann. Mat. Pura Appl. 186 (4)(2007) 565-578.

[8] FIGUEIREDO, D. G.; SANTOS, E. M.; MIYAGAKI, O. H. **Sobolev spaces of symmetric functions and applications**, Journal of Functional Analysis 261 (2011) 3735-3770.

[9] GILBARG, D.; TRUDINGER, N. S. **Elliptic Partial Differential Equations of Second Order**, Springer-Verlag, Berlin, 1997.

[10] GRUANAU, H. C.; SWEERS, G. **Polyharmonic Boundary Value Problems: Positivity Preserving and Non-linear Higher Order Elliptic Equations in Bounded Domains**, Lecture Notes in Math., vol.1991, Springer, Berlin, 2010.

[11] KUFNER, A.; PERSSON, L. E. **Weighted Inequalities of Hardy Type**, World Scientific Publishing Co., Singapore, 2003.

[12] MEDEIROS, L. A.; MIRANDA, M. M. **Introdução aos Espaços de Sobolev e às Equações Diferenciais Parciais**, Instituto de Matemática da UFRJ, Rio de Janeiro, 2011.