Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós–Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Uma introdução aos quocientes pela ação de grupos algébricos

Fábio Arceu Ferreira

João Pessoa – PB
Fevereiro de 2021

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós–Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Uma introdução aos quocientes pela ação de grupos algébricos

por

Fábio Arceu Ferreira

sob a orientação do

Prof. Dr. Ugo Bruzzo

João Pessoa – PB
Fevereiro de 2021

Catalogação na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

F383i Ferreira, Fábio Arceu.
Uma introdução aos quocientes pela ação de grupos algébricos / Fábio Arceu Ferreira. - João Pessoa, 2021.
99 f.

Orientação: Ugo Bruzzo.
Dissertação (Mestrado) - UFPB/CCEN.

1. Variedades algébricas. 2. Grupos algébricos lineares. 3. Quocientes. 4. Subgrupos parabólicos. 5. Variedades de bandeira. I. Bruzzo, Ugo. II. Título.

UFPB/BC CDU 512.72(043)

Elaborado por ANNA REGINA DA SILVA RIBEIRO - CRB-15/024

Uma introdução aos quocientes pela ação de grupos algébricos

por

Fábio Arceu Ferreira [1]

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós–Graduação em Matemática da Universidade Federal da Paraíba como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Álgebra

Aprovada em 24 de fevereiro de 2021.

Banca Examinadora:

Prof(a). Dr. Ugo Bruzzo – UFPB
(Orientador)

Prof. Dr. Valeriano Lanza – UFF
(Examinador Externo)

Prof. Dr. Cleto Brasileiro Miranda Neto – UFPB
(Examinador Interno)

[1] O autor foi bolsista da CAPES durante a elaboração desta dissertação.

Aos meus familiares e amigos.

Agradecimentos

Agradeço a Deus pela graça que me deu e por vim iluminando meu caminho desde então. Ao professor Ugo Bruzzo, cuja orientação, concelhos e incentivos foram essenciais para o bom êxito deste trabalho. Aos professores Cleto Miranda Neto e Valeriano Lanza por, gentilmente, aceitarem participar da banca examinadora. Aos meus pais José Arceu e Maria Cicera pelo dom da vida e por todo o apoio. Ao meu irmão Felipe Samuel pelas frases motivacionais. Aos professores da Pós-Graduação, em especial ao professor Allan George pelos valiosos concelhos. Aos meus colegas do apartamento algébrico, Tony Lopes e Ricardo Alves, pela boa convivência. Aos colegas do pensionato da dona Graça, em especial a Émerson, Antônio, Júnior e Felipe pelas boas conversas. Aos meus estimados colegas da Pós-Graduação por toda ajuda e boas conversas, em especial aos colegas Renato, Nany, Milena, Geovane, Gabriel, Vinícius, Cláudia e Guilherme. Aos colegas dos tempos de graduação, em especial a David Almeida, Rosiel Rocha e Rodrigo Costa. Finalmente agradeço a CAPES pelo apoio financeiro.

In these days the angel of topology and the devil of abstract algebra fight for the soul of every indidual discipline of mathematics.
-Hermann Weyl

Resumo

Este trabalho fornece uma introdução à teoria dos grupos algébricos lineares e às suas ações sobre variedades algébricas. Além de uma parte geral sobre variedades afins e grupos algébricos lineares, os seguintes tópicos são discutidos: espaços homogêneos, quocientes, subgrupos parabólicos, grassmannianas e variedades de bandeira.

Palavras-chave: Variedades algébricas, grupos algébricos lineares, quocientes, subgrupos parabólicos, variedades de bandeira.

Abstract

This work provides an introduction to the theory of linear algebraic groups and their action on algebraic varieties. In addition to a general part on affine varieties and linear algebraic groups, the following topics are discussed: homogeneous spaces, quotients, parabolic subgroups, grassmannians and flag varieties.

Keywords: Algebraic varieties, linear algebraic groups, quotients, parabolic subgroups, flag varieties.

Sumário

Introdução

A geometria algébrica inicia-se com o estudo do conjunto de zeros de sistemas de funções polinomiais, em finitas indeterminadas, com coeficientes em um corpo algebricamente fechado (fixado). A partir disso são introduzidos os conceitos de variedades afins, variedades algébricas, morfismos e dimensão. Neste trabalho estudaremos grupos que têm uma estrutura de variedade algébrica tal que a operação do grupo e a inversão de seus elementos são morfismos de variedades algébricas. Há uma grande semelhança entre grupos de tal categoria e os grupos de Lie, que são grupos com uma estrutura de variedade diferenciável tal que a operação do grupo é uma aplicação diferenciável de classe C^∞.

Com um papel central na teoria de Galois de equações diferenciais ordinárias lineares homogêneas, desenvolvida por Picard e Vessiot no final do século 19, o primeiro conceito de grupo algébrico foi o de grupo matricial algébrico complexo, ou seja, em termos gerais, grupo multiplicativo de matrizes definido por equações polinomiais com respeito às entradas das matrizes, as quais pertenciam ao corpo dos números complexos. Casos especiais de tais grupos (como por exemplo: o grupo das matrizes $n \times n$ invertíveis $GL(n, \mathbb{C})$, o grupo das matrizes $n \times n$ triangulares superiores invertíveis $T(n, \mathbb{C})$ e grupos matriciais finitos) foram objetos de pesquisa um tanto exaustiva por muitas décadas, pois a literatura era desprovida de qualquer teoria básica de grupos matriciais algébricos. Por falta de tal teoria, esses grupos, quando encontrados em grande escala (como na teoria de Picard-Vessiot), foram tratados como casos especiais de grupos de Lie. Como resultado, a teoria brilhante de Picard e Vessiot sofreu com a falta de rigor da teoria inicial dos grupos de Lie e por estar intimamente ligada ao analítico ponto de vista da teoria de Lie, obscurecendo assim a natureza algébrica do assunto. Desta maneira grandes matemáticos passaram a se dedicar ao estudo de tais grupos, entre eles os mais famosos foram Weil, Kolchin, Borel e Chevalley.

Com intuito de obter uma independência dos grupos de Lie para a teria de Picard-Vessiot, Kolchin descobriu grandes resultados sobre os grupos matriciais algébricos com entradas em um corpo algebricamente fechado arbitrário $\mathbb{K}$, o quais apelavam somente para a geometria algébrica. Tais resultados foram publicados em 1948 em seu principal artigo [10]. Em particular, nesse artigo, Kolchin provou que todo subgrupo fechado (com relação a topologia de Zariski) e solúvel de $GL(n, \mathbb{K})$ é conjugado de algum subgrupo de $T(n, \mathbb{K})$. Alguns anos depois, Borel publicou um fundamental artigo [4], o qual foi uma especie de continuação de [10], porém com um foco totalmente na teoria dos grupos matriciais algébricos, no qual foram apresentados uma série de resultados sobre subgrupos fechados, solúveis, conexos maximais de $GL(n, \mathbb{K})$, que mais tarde seriam chamados de subgrupos de Borel. Além destes resultados, também destacou-se o teorema do ponto fixo de Borel, o qual possui muitas aplicações, como por exemplo, a partir de tal resultado, podemos verificar que os elementos de $T(n, \mathbb{K})$ possuem um autovetor em comum.

Nesta dissertação os resultados obtidos por Kolchin e Borel serão apresentados sob uma visão moderna, como em [9] e [16]. Em particular, veremos a existência e unicidade da variedade quociente G/H de um grupo algébrico linear G (isto é, um subgrupo fechado de $GL(n, \mathbb{K})$) por um subgrupo fechado H. Com tal noção teremos as ferramentas necessárias para falar sobre os subgrupos parabólicos de G, os quais são os subgrupos fechados P de G tais que o quociente G/P é uma variedade algébrica completa. Nosso objetivo principal é fazer uma caracterização dos subgrupos parabólicos de $GL(n, \mathbb{K})$ com os estabilizadores de bandeiras sobre $\mathbb{K}^n$. Para sermos mais explícitos, veremos que se P é um subgrupo parabólico de $GL(n, \mathbb{K})$ então existe uma sequência $1 \leq n_1 < n_2, \ldots, n_r \leq n$ de números inteiros e uma bandeia sobre $\mathbb{K}^n$ (isto é, uma cadeia de subespaços de $\mathbb{K}^n$)

$$0 \subsetneq V_1 \subseteq V_2 \subseteq \cdots \subseteq V_{n_r}$$

onde $\dim V_i = n_i$, tal que P é o estabilizador de tal bandeira, ou seja, o subgrupo $\{g \in GL(n, \mathbb{K}) | g(V_i) = V_i$, para todo $i = n_1, \ldots, n_r\}$ de $GL(n, \mathbb{K})$ deve ser exatamente P. Reciprocamente veremos que qualquer estabilizador de alguma bandeira é um subgrupo parabólico.

Este trabalho está organizado em três capítulos e três apêndices. No primeiro capítulo são apresentados conceitos gerais sobre variedades algébricas, morfismos e dimensão, onde fazemos algumas construções exaustivas que na maioria dos livros de geometria algébrica são deixadas como exercício, como por exemplo a do feixe de funções de uma variedade afim. Nesse capítulo enunciamos e demonstramos muitos resultados importantes e necessários para a teoria dos grupos algébricos. O segundo capítulo está dividido em quatro seções, onde na 2.1 são introduzidos os conceitos de grupos algébricos juntamente com exemplos e suas principais propriedades; no 2.2 é apresentada a noção de ação de um grupo algébrico em uma variedade algébrica, a qual é uma ferramente importante para este trabalho, que por exemplo nos permite demonstrar que todo grupo algébrico afim é linear; a seção 2.3 traz a noção de espaços homogêneos para grupos algébricos, o que nos permite discutir sobre a variedade quociente; a seção 2.4 trata de subgrupos parabólicos e subgrupos de Borel de um grupo algébrico linear, com resultados importantes, exemplos e aplicações. Por fim, no terceiro capítulo são introduzidos os conceitos de variedades grassmannianas e de bandeira, onde verificamos que tais variedades são projetivas e que são espaços homogêneos para $GL(n, \mathbb{K})$, o que nos permite caracterizarmos os subgrupos parabólicos de $GL(n, \mathbb{K})$ com estabilizadores de bandeiras.

O apêndice A trata de espaços topológicos Noetherianos, onde vemos sua definição, propriedades e resultados importantes. No apêndice B apresentamos alguns resultados sobre a teoria dos feixes de funções, os quais são fundamentais para a definição de variedade algébrica. Finalmente, no apêndice C vemos a definição de ação de um grupo arbitrário em um conjunto e discutimos algumas propriedades básicas sobre tais ações.

Capítulo 1

Variedades algébricas

Neste capítulo serão discutidos alguns resultados básicos de geometria algébrica, os quais são necessárias para o estudo dos grupos algébricos. Iniciaremos com o conceito de variedade afim, que mais adiante nos permite introduzir a noção de variedade algébrica, que é de certo modo uma união finita de variedades afins. Para este capítulo as referências principais são [14], [12] e [6].

1.1 Variedades afins

Neste trabalho $\mathbb{K}$ denota um corpo algebricamente fechado (fixo) de característica arbitrária e $\mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$ o anel de polinômios sobre $\mathbb{K}$ com variáveis $T_1, \ldots, T_n$.

Definição 1.1. *Seja S um subconjunto arbitrário de $\mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$. Definimos*

$$Z(S) := \{x \in \mathbb{K}^n | \textit{ para todo } f \in S, f(x) = 0\},$$

ou seja, $Z(S)$ é o conjunto de zeros comuns dos polinômios pertencentes a S e o chamamos de variedade afim definida por S. Se S é finito nós escrevemos $Z(f_1, \ldots, f_r)$ no lugar de $Z(\{f_1, \ldots, f_r\})$.

Observe que se $S_1 \subseteq S_2$ são subconjuntos de $\mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$ então $Z(S_2) \subseteq Z(S_1)$, ou seja, visto como um função que associa subconjuntos de $\mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$ a subconjuntos de $\mathbb{K}^n$, Z inverte inclusões. Em particular, se $I = (S_1)$ é o ideal gerado por S_1 em $\mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$ temos que $Z(S_1) \subseteq Z(I)$. Desde que todo elemento de I é uma combinação $\mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$-linear de elementos de S_1, segue que $Z(S_1) \supseteq Z(I)$. Assim obtemos a igualdade $Z(S_1) = Z(I)$, a qual nos fornece que uma variedade afim $X \subseteq \mathbb{K}^n$ sempre é o conjunto de zeros de algum ideal I de $\mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$ e os pontos de X são os zeros comuns de um conjunto de geradores de I. Observe que I é gerado por um conjunto finito pois $\mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$ é um anel Noetheriano.

Exemplo 1.1. *Temos que* $Z(1) = \varnothing$ *e* $Z(0) = \mathbb{K}^n$*, assim o vazio e todo o* $\mathbb{K}^n$ *são variedades afins.*

Exemplo 1.2. *Se* $X_1, X_2 \subseteq \mathbb{K}^n$ *são variedades afins então* $X_1 \cup X_2$ *é uma variedade afim. De fato, existem ideais* $I_1, I_2 \subseteq \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$ *tais que* $X_1 = Z(I_1)$ *e* $X_2 = Z(I_2)$*. Tome* $x \in Z(I_1 I_2)$ *e suponha que* $x \notin X_1$*, assim existe* $f \in I_1$ *tal que* $f(x) \neq 0$*. Para todo* $g \in I_2$ *temos que* $f(x).g(x) = 0$*, o que implica* $g(x) = 0$*, logo* $x \in X_2$*; desta forma obtemos que* $Z(I_1 I_2) \subseteq X_1 \cup X_2$*. Por outro lado, se* $x \in X_1 \cup X_2$ *então* $x \in X_1$ *ou* $x \in X_2$*, logo* x *é um zero de qualquer polinômio de* $I_1 I_2$*. Portanto* $X_1 \cup X_2 = Z(I_1 I_2)$*.*

Exemplo 1.3. *Se* $(X_\lambda)_{\lambda \in L}$ *é uma família de variedades afins, tal que cada* $X_\lambda \subseteq \mathbb{K}^n$*, então* $\bigcap_{\lambda \in L} X_\lambda$ *é uma variedade afim. De fato, podemos escrever* $X_\lambda = Z(I_\lambda)$*, onde* $I_\lambda \subseteq \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$ *é um ideal. Se* $x \in \bigcap_{\lambda \in L} X_\lambda$ *então* $x \in Z(I_\lambda)$ *para todo* $\lambda \in L$*, isto significa que* x *é zero de todos os polinômios pertencentes a* I_λ*, para qualquer* $\lambda \in L$*; logo* $x \in Z(\sum_{\lambda \in L} I_\lambda)$*, assim* $\bigcap_{\lambda \in L} X_\lambda \subseteq Z(\sum_{\lambda \in L} I_\lambda)$*. Por outro lado, se* $x \in Z(\sum_{\lambda \in L} I_\lambda)$*, então* x *é um zero de todos os polinômios pertencentes a* I_λ*, para qualquer* $\lambda \in L$*; logo* $Z(\sum_{\lambda \in L} I_\lambda) \subseteq \bigcap_{\lambda \in L} X_\lambda$*. Portanto* $\bigcap_{\lambda \in L} X_\lambda = Z(\sum_{\lambda \in L} I_\lambda)$

Seja Ω a coleção dos complementares em $\mathbb{K}^n$ das variedades afins. Segue dos exemplos acima que $(\mathbb{K}^n, \Omega)$ é um espaço topológico.

Definição 1.2. *A topologia em* $\mathbb{K}^n$ *no qual os fechados são as variedades afins é chamada de topologia de Zariski.* $\mathbb{K}^n$ *munido com tal topologia é denotado por* $\mathbb{A}^n$ *e chamado de n-espaço afim.*

Exemplo 1.4.

1. *Se* $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{A}^n$ *então o subconjunto* $\{x\} \subseteq \mathbb{A}_n$ *é um fechado pois* $Z(T_1 - x_1, \ldots, T_n - x_n) = \{x\}$*. O ideal* $\boldsymbol{m}_x = (T_1 - x_1, \ldots, T_n - x_n) \subseteq \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$ *é maximal. Adiante veremos que todo ideal maximal de* $\mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$ *tem essa forma.*

2. *Seja* $f \in \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$ *um polinômio. Temos que* $D(f) := Z(f)^c = \{x \in \mathbb{A}^n | f(x) \neq 0\}$ *é aberto em* $\mathbb{A}^n$*. Mais além, a coleção* $\{D(f) \subseteq \mathbb{A}^n | f \in \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]\}$ *é uma base para a topologia de Zariski em* $\mathbb{A}^n$*. Os conjuntos* $D(f)$ *são chamados de abertos principais de* $\mathbb{A}^n$*.*

Definição 1.3. *Seja* $X \subseteq \mathbb{A}^n$ *um subconjunto arbitrário. O conjunto*

$$\mathfrak{I}(X) := \{f \in \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n] |\ \textit{para todo}\ x \in X, f(x) = 0\}$$

é chamado de ideal de definição de X*.*

Observação 1.1. *$\mathfrak{I}(X)$ é de fato um ideal de $\mathbb{K}[T_1,\ldots,T_n]$, pois dados $f_1, f_2 \in \mathfrak{I}(X)$ e $g \in \mathbb{K}[T_1,\ldots,T_n]$, temos que $0 \in \mathfrak{I}(X)$, $(f_1+f_2)(x) = f_1(x)+f_2(x) = 0$ e $(g.f_1)(x) = g(x).f_1(x) = 0$, para todo $x \in X$; assim $f_1+f_2, g.f_1 \in \mathfrak{I}(X)$.*

Se $X_1 \subseteq X_2 \subseteq \mathbb{A}^n$ então $\mathfrak{I}(X_2) \subseteq \mathfrak{I}(X_1)$, ou seja, a função $\mathfrak{I}$ que associa subconjuntos de $\mathbb{A}^n$ a subconjuntos de $\mathbb{K}[T_1,\ldots,T_n]$ também inverte inclusões.

Exemplo 1.5. *1. Se $X \subseteq \mathbb{A}^n$ então $\mathfrak{I}(X)$ é um ideal radical. De fato, se $f \in \sqrt{\mathfrak{I}(X)}$ então existe um inteiro positivo r tal que $h^r \in \mathfrak{I}(X)$, logo, para todo $x \in X$, $0 = h^r(x) = [h(x)]^r$; o que implica $h(x) = 0$, donde $h \in \mathfrak{I}(X)$, assim $\sqrt{\mathfrak{I}(X)} \subseteq \mathfrak{I}(X)$ e portanto $\sqrt{\mathfrak{I}(X)} = \mathfrak{I}(X)$.*

2. Se $I \subseteq \mathbb{K}[T_1,\ldots,T_n]$ é um ideal então $\sqrt{I} \subseteq \mathfrak{I}(Z(I))$. De fato, tome $f \in I$, assim $f(x) = 0$ para todo $x \in Z(I)$, logo $f \in \mathfrak{I}(Z(I))$; desta forma $I \subseteq \mathfrak{I}(Z(I))$, o que implica $\sqrt{I} \subseteq \sqrt{\mathfrak{I}(Z(I))} = \mathfrak{I}(Z(I))$.

3. Se $X \subseteq \mathbb{A}^n$ então $Z(\mathfrak{I}(X)) = \overline{X}$. De fato, A partir das definições de Z e $\mathfrak{I}$ temos que $X \subseteq Z(\mathfrak{I}(X))$, logo $\overline{X} \subseteq \overline{Z(\mathfrak{I}(X))} = Z(\mathfrak{I}(X))$. Por outro lado, existem $f_1,\ldots f_r \in \mathbb{K}[T_1,\ldots,T_n]$ tais que $\overline{X} = Z(f_1,\ldots,f_r)$; além disso, $\mathfrak{I}(\overline{X}) \subseteq \mathfrak{I}(X)$. Dado $x \in Z(\mathfrak{I}(X))$, para todo $f \in \mathfrak{I}(X)$ temos $f(x) = 0$, em particular $f_1(x) = \cdots = f_r(x) = 0$, logo $x \in \overline{X}$, ou seja, $Z(\mathfrak{I}(X)) \subseteq \overline{X}$.

Abaixo temos duas propriedades topológicas importantes do espaço afim (e das variedades afins em geral). Detalhes como definições e resultados referentes a tais propriedades podem ser vistas no apêndice A.

Proposição 1.1. *(i) O espaço $\mathbb{A}^n$ é Noetheriano. Em particular, toda variedade afim é espaço topológico Noetheriano (com a topologia induzida);*

(ii) Uma variedade afim $X \subseteq \mathbb{A}^n$ é irredutível se, e somente se, $\mathfrak{I}(X)$ é um ideal primo.

Demonstração. (i) Seja

$$X_1 \supseteq X_2 \supseteq \ldots \supseteq X_r \supseteq \ldots$$

uma cadeia descendente de fechados de $\mathbb{A}^n$. Desta forma

$$\mathfrak{I}(X_1) \subseteq \mathfrak{I}(X_2) \subseteq \ldots \subseteq \mathfrak{I}(X_r) \subseteq \ldots$$

é uma cadeia ascendente de ideais de $\mathbb{K}[T_1,\ldots,T_n]$, logo existe $r_0 \geqslant 1$ tal que $\mathfrak{I}(X_{r_0}) = \mathfrak{I}(X_{r_0+1}) = \ldots$, assim $Z(\mathfrak{I}(X_{r_0})) = Z(\mathfrak{I}(X_{r_0+1})) = \ldots$, ou seja, $X_r = X_{r+1} = \ldots$, desta maneira $\mathbb{A}^n$ satisfaz a condição de cadeia descendente sobre seus fechados. Portanto $\mathbb{A}^n$ é Noetheriano.

(ii) De modo equivalente, basta mostrarmos que X é redutível se, e somente se, $\mathfrak{I}(X)$ não é primo. Se X é redutível então existem fechados próprios $Y, W \subsetneq X$ tais que $X = Y \cup W$, isto nos diz que $\mathfrak{I}(X) \subsetneq \mathfrak{I}(Y)$ e $\mathfrak{I}(X) \subsetneq \mathfrak{I}(W)$. Tome $g \in \mathfrak{I}(Y)$ e $h \in \mathfrak{I}(W)$, com ambos fora de $\mathfrak{I}(X)$. Observe que $gh \in \mathfrak{I}(Y) \cdot \mathfrak{I}(W) \subseteq \mathfrak{I}(Y \cup W) = \mathfrak{I}(X)$, assim $\mathfrak{I}(X)$ não é primo. Reciprocamente, considere $g, h \in \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$ tais que $g, h \notin \mathfrak{I}(X)$ e $gh \in \mathfrak{I}(X)$. Observe que $Z(gh) \supseteq Z(\mathfrak{I}(X)) = X$, assim $X \subseteq Z(g) \cup Z(h)$, o que implica $X = (Z(g) \cap X) \cup (Z(h) \cap X)$. Suponha que $Z(g) \cap X = X$, assim $X \subseteq Z(g)$, logo $\mathfrak{I}(X) \supseteq \mathfrak{I}(Z(g)) \supseteq (g)$, o que é uma contradição. De maneira análoga podemos verificar que $Z(h) \cap X \subsetneq X$. Portanto X é redutível.

□

O teorema dos zeros de Hilbert mostra que de fato vale a igualdade $\sqrt{I} = \mathfrak{I}(Z(I))$, antes de demonstrar tal resultado, vejamos algumas proposições auxiliares.

Proposição 1.2. *Seja R uma $\mathbb{K}$-álgebra finitamente gerada. Se R é corpo então R é uma extensão algébrica finita de $\mathbb{K}$.*

Demonstração. Veja [1] página 67. □

Proposição 1.3. *Se $I \subsetneq \mathbb{K}[T_1, \ldots . T_n]$ é um ideal então $Z(I) \neq \varnothing$.*

Demonstração. Seja $A = \mathbb{K}[T_1, \ldots . T_n]$. Desde que $I \subsetneq A$ existe um ideal maximal $\mathbf{m} \subset A$ tal que $I \subseteq \mathbf{m}$. Observe que $(A/\mathbf{m}) = \mathbb{K}[T_1 + \mathbf{m}, \ldots, T_n + \mathbf{m}]$ é uma $\mathbb{K}$- álgebra finitamente gerada. Desde que $A/\mathbf{m}$ é corpo segue da proposição anterior que $A/\mathbf{m}$ é uma extensão algébrica de $\mathbb{K}$. Sendo $\mathbb{K}$ algebricamente fechado, segue que $A/\mathbf{m} \simeq \mathbb{K}$, logo existem $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$ tais que $a_i + \mathbf{m} = T_i + \mathbf{m}$, assim $T_i - a_i \in \mathbf{m}$, desta maneira $(T_1 - a_1, \ldots, T_n - a_n) \subseteq \mathbf{m}$, desde que $(T_1 - a_1, \ldots, T_n - a_n)$ é um ideal maximal de A, segue que $\mathbf{m} = (T_1 - a_1, \ldots, T_n - a_n)$, assim $(a_1, \ldots, a_n) \in Z(\mathbf{m}) \subseteq Z(I)$. □

Segue da demonstração da proposição 1.3 que para todo ideal maximal $\mathbf{m}$ de $\mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$ existe um ponto $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{A}^n$ tal que $\mathbf{m} = (T_1 - a_1, \ldots, T_n - a_n)$.

Teorema 1.1. *(Teorema dos Zeros de Hilbert) Se $I \subseteq \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$ é um ideal então $\mathfrak{I}(Z(I)) = \sqrt{I}$.*

Demonstração. Seja $A = \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$. Sem perda de generalidade podemos supor $I \subsetneq A$ (se $I = A$ então $\mathfrak{I}(Z(I)) = A$). Segue do exemplo 1.5 que $\sqrt{I} \subseteq \mathfrak{I}(Z(I))$. Reciprocamente, tome $g \in \mathfrak{I}(Z(I))$. Existem $f_1, \ldots, f_r \in I$, tais que $I = (f_1, \ldots, f_r)$ (A é Noetheriano). Considere o ideal $J = (f_1, \ldots, f_r, Tg - 1) \subset A[T]$, onde $A[T]$ é o anel de polinômios na variável T sobre A. Desta forma $Z(J) \subseteq \mathbb{A}^{n+1}$. Afirmamos que $Z(J) = \varnothing$. De fato, suponha por absurdo que existe $x = (b_1, \ldots, b_n, b) \in Z(J)$. Temos que $f_i(b_1, \ldots, b_n) = 0$, para todo $i \in \{1, \ldots, r\}$, isto nos diz que $(b_1, \ldots, b_n) \in Z(I)$. Desde que $g \in \mathfrak{I}(Z(I))$, segue que $g(b_1, \ldots, b_n) = 0$. Tomando $p = Tg - 1$, temos $p(b_1, \ldots, bn, b) = 0$, ou seja, $bg(b_1, \ldots, b_n) - 1 = 0$, o que é uma contradição. Portanto $Z(J) = \varnothing$. A partir da proposição 1.3 segue que $J = A[T]$. Logo $1 \in J$, assim $1 = \sum_{i=1}^{r} H_i \cdot f_i + G \cdot (Tg - 1)$, onde $H_i, G \in A[T]$. Considere o homomorfismo de anéis

$$\begin{aligned} \mu : A[T] &\longrightarrow A_g \\ x_i &\mapsto x_i \\ t &\mapsto \tfrac{1}{g}, \end{aligned}$$

aplicando o homomorfismo μ na expressão $1 = \sum_{i=1}^{r} H_i \cdot f_i + G \cdot (Tg - 1)$, obtemos $1 = \sum_{i=1}^{r} \mu(H_i) \cdot f_i + \mu(G) \cdot (\frac{1}{g} \cdot g - 1)$, logo $1 = \sum_{i=1}^{r} \mu(H_i) \cdot f_i$. Escrevendo $\mu(H_i) = \frac{B_i}{g^{m_i}}$, onde $B_i \in A$, $m_i \in \mathbb{N}$ e $i \in \{1, \ldots, r\}$, obtemos que $1 = \sum_{i=1}^{r} \frac{B_i}{g^{m_i}} \cdot f_i$. Tomando m como o maior elemento do conjunto $\{m_1, \ldots, m_r\}$, segue que $g^m = \sum_{i=1}^{r} (g^{m-m_i} \cdot B_i) \cdot f_i \in I$, assim $g \in \sqrt{I}$. Portando $\mathfrak{I}(Z(I)) \subseteq \sqrt{I}$. □

O teorema dos zeros de Hilbert garante que Z e $\mathfrak{I}$ definem uma bijeção entre os ideais primos de $\mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$ e as variedades afins irredutíveis contidas em $\mathbb{A}^n$. Em particular, definem uma bijeção entre os ideais maximais de $\mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$ e os pontos de $\mathbb{A}^n$.

1.2 Prevariedades

Definição 1.4. *Seja $X \subseteq \mathbb{A}^n$ uma variedade afim. O conjunto*

$$A(X) := \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]/\mathfrak{I}(X)$$

é chamado de anel de coordenadas de X.

Segue da proposição 1.1 que X é irredutível se, e somente se, $A(X)$ é domínio. A partir do teorema de correspondência entre ideais de $A(X)$ e $\mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$ juntamente com o teorema dos zeros de Hilbert, temos uma correspondência entre as variedades afins irredutíveis contidas em X e os ideais primos de $A(X)$. Em particular, temos uma correspondência entre os pontos de X e os ideais maximais de $A(X)$.

Seja Γ a $\mathbb{K}$-álgebra das funções polinomiais pertencentes a $\mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$, restritas a X. Defina $\varphi : A(X) \longrightarrow \Gamma$ por $\varphi(f + \mathfrak{I}(X)) = f|_X$ (f é uma função polinomial de $\mathbb{A}^n$ para $\mathbb{A}^1$ e $f|_X$ simplesmente a restrição de f a X). Observe que φ é um isomorfismo de $\mathbb{K}$-álgebras. Desta forma, cometendo um certo abuso de notação, vamos considerar $A(X) = \Gamma$.

Exemplo 1.6. *(i) Os conjuntos definidos por* $D_X(f) := \{x \in X | f(x) \neq 0\}$, *com* $f \in A(X)$, *formam uma base de abertos para a topologia de Zariski induzida em* X. *Chamaremos tais conjuntos de abertos principais de* X.

(ii) Dado $h \in \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$, *defina* $Z_X(h) := X \cap Z(h)$. *Se* $Z_X(f) \subseteq Z_X(h)$ *então* $(h|_X)^r = f|_X.g|_X$ *para algum* $r > 0$ *e* $g \in \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$. *De fato, tome* $X = Z(f_1, \ldots, f_m)$, *assim* $Z_X(f) = Z(f_1, \ldots, f_m, f)$ *e* $Z_X(h) = Z(f_1, \ldots, f_m, h)$, *logo* $\mathfrak{I}(Z_X(f)) = \sqrt{(f_1, \ldots, f_m, f)}$ *e* $h \in \mathfrak{I}(Z_X(h)) \subseteq \mathfrak{I}(Z_X(f))$, *assim* $h^r = (\sum_{i=1}^{m} g_i f_i) + g.f$, *para algum* $r > 0$ *e* $g_i, g \in \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$, *o que implica* $(h|_X)^r = f|_X.g|_X$.

Sejam $f \in A(X)$ e $\mathcal{F}(D_X(f), \mathbb{K})$ a $\mathbb{K}$-álgebra de todas as funções de $D_X(f)$ para $\mathbb{K}$. Considere o homomorfismo restrição $r : A(X) \longrightarrow \mathcal{F}(D_X(f), \mathbb{K})$ $(r(g) = g|_{D_X(f)})$. Desde que f não se anula em $D_X(f)$, segue que $r(f)$ possui um inverso (multiplicativo) em $\mathcal{F}(D_X(f), \mathbb{K})$, digamos $r(f)^{-1}$. Aplicando a propriedade dos anéis de frações, segue que a aplicação $\rho : A(X)_f \longrightarrow \mathcal{F}(D_X(f), \mathbb{K})$, definida por $\rho(g/f^m) = r(g).r(f)^{-m}$ é um homomorfismo. Afirmamos que ρ é injetiva. De fato, se $\rho(g/f^m) = 0$ então $g|_{D_X(f)} = 0$, consequentemente $f.g = 0$ em $A(X)$, o que implica $g/f^m = 0$ em $A(X)_f$. Desta forma, cometendo novamente um certo abuso notação, iremos considerar $A(X)_f$ como a $\mathbb{K}$-álgebra das funções racionais do tipo $g/f^m : D_X(f) \longrightarrow \mathbb{K}$, onde $g \in A(X)$ e $m \geq 0$.

Queremos definir um feixe $\mathcal{O}_X$ de $\mathbb{K}$-álgebras sobre X (veja apêndiceB) de modo que para todo aberto $U \subseteq X$, $\mathcal{O}_X(U)$ é uma $\mathbb{K}$-álgebra de funções $\mathbb{K}$-avaliativas (definidas em U) os quais são quocientes de funções polinomiais e que tenhamos $\mathcal{O}_X(D_X(f)) = A(X)_f$, para todo $f \in A(X)$.

Proposição 1.4. *Seja* $X \subseteq \mathbb{A}^n$ *uma variedade afim. Os abertos principais de* X *satisfazem as seguintes condições:*

(i) Se $f, g \in A(X)$, $D_X(g) \subseteq D_X(f)$ *e* $s \in A(X)_f$ *então* $s|_{D_X(g)} \in A(X)_g$;

(ii) Se $f \in A(X)$, $D_X(f) = \bigcup_{i \in L} D_X(g_i)$, *com* $g_i \in A(X)$, *e se* $s : D_X(f) \longrightarrow \mathbb{K}$ *é uma função tal que* $s|_{D_X(g_i)} \in A(X)_{g_i}$ *para todo* $i \in L$, *então* $s \in A(X)_f$.

Demonstração.

(i) Se $D_X(g) \subseteq D_X(f)$ então $Z_X(f) \subseteq Z_X(g)$, logo, a partir do exemplo1.6, existe $r > 0$ tal que $g^r = f.h$ com $h \in A(X)$. Podemos escrever $s = u/f^i$, assim sua restrição a $D_X(g)$ pode ser escrita na forma $u.h^i/f^i.h^i = u.h^i/g^{r.i}$, donde $s|_{D_X(g)} \in A(X)_g$.

(ii) Desde que X é Noetheriano podemos supor que L é finito, ou seja, $D_X(f) = \bigcup_{i=1}^{r} D_X(g_i)$. Podemos escrever $s|_{D_X(g_i)} = f_i/g_i^q$, onde $f_i \in A(X)$ (Podemos escolher o mesmo q para todas as restrições de s, pois temos apenas um número finito delas). Observe que $D_X(g_i) \cap D_X(g_j) = D_X(g_i.g_j)$, logo, a partir do procedimento feito em (i), $f_i g_j^q/(g_i g_j)^q = s|_{D_X(g_i.g_j)} = f_j g_i^q/(g_i.g_j)^q$ em $A(X)_{g_i,g_j}$, assim existe $N > 0$ tal que $(g_i.g_j)^N(f_i g_j^q - f_j g_i^q) = 0$ em $A(X)$, o que nos fornece

$$g_i^N f_i g_j^{N+q} = g_j^n f_j g_i^{N+q}. \tag{1.1}$$

Observe que $Z_X(f) = Z_X(g_1, \ldots, g_r) = Z_X(g_1^{N+q}, \ldots, g_r^{N+q})$, assim, fazendo procedimento análogo ao do exemplo1.6, podemos encontrar $m > 0$ tal que

$$f^m = \sum_{i=1}^{r} b_i g_i^{N+q}, \tag{1.2}$$

onde $b_i \in A(X)$. Sejam $u = \sum_{j=1}^{r} b_j f_j g_j^N$ e $s' = u/f^m \in A(X)_f$. Afirmamos que $s = s'$. Para provar tal igualdade, basta verificarmos que $s'|_{D_X(g_i)} = s|_{D_X(g_i)} = f_i/g_i^q$ em $A(X)_{f_i}$, para todo i. Novamente, a partir do procedimento feito em (i), temos que existe $l > 0$ tal que

$$g_i^l = f.h \tag{1.3}$$

para algum $h \in A(X)$, e $s'|_{D_X(g_i)} = uh^m/g_i^{l.m}$. A partir das identidades (1.1), (1.2) e (1.3), observe que

$$\begin{aligned}
g_i^N(g_i^q h^m u - g_i^l f_i) &= h^m(\sum_{j=1}^{r} b_j f_j g_j^N g_i^{N+q}) - h^m f^m g_i^N f_i \\
&= h^m(\sum_{j=1}^{r} b_j f_i g_i^N g_j^{N+q}) - h^m f^m g_i^N f_i \\
&= h^m f_i g_i^N(\sum_{j=1}^{r} b_j g_j^{N+q}) - h^m f^m g_i^N f_i \\
&= h^m f_i g_i^N f^m - h^m f^m g_i^N f_i \\
&= 0
\end{aligned}$$

em $A(X)$, o que implica $uh^m/g_i^{l.m} = f_i/g_i^q$ em $A(X)_{g_i}$. Desde que i é arbitrário, segue que $s = s'$.

□

Aplicando a proposição 1.4 na proposição B.1 do apêndice B, segue que existe um único feixe de funções $\mathcal{O}_X$ em X tal que $\mathcal{O}_X(D_X(f)) = A(X)_f$ para todo $f \in A(X)$. Em particular, dado um aberto $U \subseteq X$, $\mathcal{O}_X(U)$ é a $\mathbb{K}$-álgebra das funções $g : U \longrightarrow \mathbb{K}$ tal que para cada $x \in U$ existe $h \in A(X)$ (dependendo de x) com $x \in D_X(h) \subseteq U$ e $g|_{D_X(h)} \in A(X)_h$.

Definição 1.5. *Com as notações acima, os elementos pertencentes a $\mathcal{O}_X(U)$ são chamados de funções regulares em U.*

Exemplo 1.7. *Se $X \subseteq \mathbb{A}^n$ uma variedade afim então $\mathcal{O}_X(X) = A(X)$. De fato, observe que $D_X(1) = X$, assim $\mathcal{O}_X(X) = \mathcal{O}_X(D_X(1)) = A(X)_1 = A(X)$.*

Proposição 1.5. *Seja U um aberto de uma variedade afim X. Se $f \in \mathcal{O}_X(U)$ então f é contínua com relação as topologias de Zariski em U e $\mathbb{K}$.*

Demonstração. Para verificarmos nossa proposição usaremos o fato de que um subespaço Z de um espaço topológico U é fechado se, e somente se, existe uma cobertura aberta $U = \bigcup_{i \in L} U_i$ tal que $Z \cap U_i$ é fechado em U_i para todo $i \in L$. Temos que U admite uma cobertura aberta finita $U = \bigcup_{i=1}^{r} D_X(h_i)$ para certos $h_i's \in A(X)$. Podemos $f|D_X(h_i) = g_i/h_i^{r_i}$. Desde que todo fechado de $\mathbb{A}^1$ é finito, basta mostrarmos que $f^{-1}(a)$ é fechado em U para todo $a \in \mathbb{A}^1$. Temos que $f^{-1}(a) \cap D_X(h_i) = \{x \in D_X(h_i) | g_i(x)/h_i^{r_i}(x) = a\}$, mas $g_i(x)/h_i^{r_i}(x) = a$ se, e somente se, $(g_i - ah_i^{r_i})(x) = 0$, assim $f^{-1}(a) \cap D_X(h_i) = Z_X(g_i - ah_i^{r_i} \cap D_X(h_i)$, o qual é fechado em $D_X(h_i)$. Portanto $f^{-1}(a)$ é fechado em U. □

Vimos que toda variedade afim está equipada com um feixe de funções racionais, as quais são quocientes de funções pertencentes ao seu anel de coordenadas. A partir dessa noção podemos trabalhar com estruturas geométricas mais gerais e estudar suas propriedades intrínsecas, isto é, o espaço onde estão embutidas não tem influência sobre tais propriedades.

Definição 1.6. *Seja X um espaço topológico Noetheriano equipado com um feixe de funções $\mathbb{K}$-avaliativas $\mathcal{O}_X$(onde $\mathcal{O}_X(U)$ é uma $\mathbb{K}$-álgebra). Dizemos que X é uma prevariedade se existe uma cobertura aberta finita $X = \bigcup_{i \in L} U_i$ tal que cada $(U_i, \mathcal{O}_X|_{U_i})$ é isomorfo a uma variedade afim como espaços anelados (veja definição B.3 no apêndice B).*

Proposição 1.6. *(i) Toda variedade afim é uma prevariedade.*

(ii) Sejam U um subconjunto aberto de alguma variedade afim X e $Y \subseteq \mathbb{A}^n$ uma variedade afim. Se $\varphi : U \longrightarrow Y$ é uma aplicação com funções coordenadas $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, então φ é uma morfismo de espaços anelados se, e somente se, $\varphi_i \in \mathcal{O}_X(U)$, para todo $i = 1, \ldots, n$.

(iii) Se $X \subseteq \mathbb{A}^n$ é uma variedade afim e $f \in A(X)$ então $D_X(f)$ é uma prevariedade.

Demonstração. (i) Segue direto das definições.

(ii) Veja [7] página 34.

(iii) Seja $\mathfrak{I}(X) = (f_1, \ldots, f_r)$. Defina $\varphi : D_X(f) \longrightarrow \mathbb{A}^{n+1}$ por $\varphi(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_n, (f(x))^{-1})$, onde $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Naturalmente φ está bem definida e é injetora. Sejam W a imagem de φ e $J = (f_1, \ldots, f_r, f.T_{n+1} - 1) \subseteq \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_{n+1}]$. Dado $x = (x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) \in W$ temos que $f_i(x_1, \ldots, x_n) = 0$ e $f(x_1, \ldots .x_n).x_{n+1} - 1 = f(x_1, \ldots .x_n).(f(x_1, \ldots .x_n))^{-1} - 1 = 0$ assim $x \in Z(J)$; logo $W \subseteq Z(J)$. Por outro lado, se $x = (x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) \in Z(J)$ então $f_i(x_1, \ldots, x_n) = 0$ e $f(x_1, \ldots .x_n).x_{n+1} - 1 = 0$, logo $(x_1, \ldots, x_n) \in D_X(f)$ e $x_{n+1} = (f(x_1, \ldots, x_n))^{-1}$, assim $x \in W$ e então $Z(J) \subseteq W$. Desta maneira obtemos que $W = Z(J)$ é uma variedade afim. Temos que φ é uma bijeção sobre W, onde sua inversa é a projeção $\rho : W \longrightarrow D_X(f)$, dada por $\rho(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) = (x_1, \ldots, x_n)$. Aplicando (ii) sobre φ e ρ obtemos que ambos são morfismos de espaços anelados. Desta forma φ é um isomorfismo de espaços anelados. Portanto $D_X(f)$ é uma prevariedade.

□

Exemplo 1.8. *Sejam $M(n, \mathbb{K})$ o espaço das matrizes $n \times n$ com entradas em $\mathbb{K}$, f a função determinante definida em $M(n, \mathbb{K})$ (a qual é um polinômio em n^2 variáveis) e $GL(n, \mathbb{K}) := \{x \in M(n, \mathbb{K}) | f(x) \neq 0\}$. Podemos identificar $M(n, \mathbb{K}) = \mathbb{A}^{n^2}$, desta forma $GL(n, \mathbb{K}) = D(f)$ é uma prevariedade.*

Definição 1.7. *Seja X uma prevariedade. Os conjuntos abertos de X isomorfos a variedades afins (como espaços anelados) são chamados de abertos afins de X.*

Proposição 1.7. *Os abertos afins de uma prevariedade X formam uma base para a topologia de X.*

Demonstração. Temos que X pode ser coberto por um número finito de abertos afins (pois X é Noetheriano) assim $X = \bigcup_{i=1}^{r} U_i$, com U_i sendo um aberto afim. Seja U um aberto arbitrário de X. Temos que $U = \bigcup_{i=1}^{r} (U \cap U_i)$. Assim basta provarmos que $U \cap U_i$

pode ser coberto por abertos afins. Existe uma variedade afim V e um isomorfismo de espaços anelados $\varphi : U_i \longrightarrow V$; desde que $U \cap U_i$ é aberto em U_i segue que $\varphi(U \cap U_i)$ é aberto em V, logo existem $h_1, \ldots, h_l \in V$ tais que $\varphi(U \cap U_i) = \bigcup_{j=1}^{l} D_V(h_j)$, assim $U \cap U_i = \bigcup_{j=1}^{l} \varphi^{-1}(D_V(h_j))$. segue da demonstração da proposição 1.6 (iii) que $D_V(h_j)$ é um aberto afim de V, assim cada $\varphi^{-1}(D_V(h_j))$ é um aberto afim de U_i (em particular, aberto afim de X). □

Se X é uma prevariedade e U é um aberto afim de X então existe um isomorfismo de espaços anelados $\varphi : U \longrightarrow V$ (onde V é uma variedade afim). Se $f \in \mathcal{O}_X(U)$, então $f \circ \varphi^{-1} \in \mathcal{O}_V(V) = A(V)$. A partir da proposição 1.5 $f \circ \varphi^{-1}$ é contínua, assim $(f \circ \varphi^{-1}) \circ \varphi = f$ é continua. Ou seja, as funções regulares de qualquer aberto afim de X são contínuas. Aplicando a proposição 1.7, segue que as funções regulares de qualquer aberto de X são contínuas.

Definição 1.8. *Sejam X e Y prevariedades. Uma aplicação $\varphi : X \longrightarrow Y$ é dita um morfismo de prevariedades se é um morfismo de espaços anelados, isto é, φ é contínua e para todo aberto $U \subseteq Y$ e $f \in \mathcal{O}_Y(U)$, $f \circ \varphi \in \mathcal{O}_X(\varphi^{-1}(U))$. Um morfismo de prevariedades bijetor é dito um isomorfismo se sua inversa é um morfismo de prevariedades.*

Definição 1.9. *Com as notações da definição acima, note que temos uma aplicação induzida $\varphi_U^* : \mathcal{O}_Y(U) \longrightarrow \mathcal{O}_X(\varphi^{-1}(U))$ dada por $\varphi_U^*(f) = f \circ \varphi$, a qual é um homomorfismo de $\mathbb{K}$-álgebras. O chamaremos de comorfismo de φ sobre U.*

Vale notar que $(\psi \circ \varphi)^* = \varphi^* \circ \psi^*$ e $(Id_X)^* = Id_{\mathcal{O}_X(X)}$. Dados X e Y duas prevariedades, vamos denotar $Hom_{var}(X, Y)$ o conjunto de todos os morfismos de X em Y e $Hom_{\mathbb{K}-alg}(\mathcal{O}_Y(Y), \mathcal{O}_X(X))$ o conjunto de todos os homomorfismos de $\mathbb{K}$-álgebras de $\mathcal{O}_Y(Y)$ em $\mathcal{O}_X(X)$

Proposição 1.8. *Se $X \subseteq \mathbb{A}^m$ e $Y \subseteq \mathbb{A}^n$ são variedades afins, então a aplicação $\gamma : Hom_{var}(X, Y) \longrightarrow Hom_{\mathbb{K}-alg}(\mathcal{O}_Y(Y), \mathcal{O}_X(X))$ dada por $\gamma(\varphi) = \varphi^*$ é uma bijeção.*

Demonstração. Temos que $\mathcal{O}_Y(Y) = A(Y)$ é uma $\mathbb{K}$-álgebra finitamente gerada por suas funções coordenadas $\eta_1, \ldots, \eta_n$ dadas por $\eta_i(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n) = x_i$ (onde estamos tomando-as como as imagens de $T_1, \ldots, T_n$ em $A(Y)$). Sejam ϕ e ψ dois morfismos de X em Y. Suponha que $\phi^* = \psi^*$. Sejam $\phi_1, \ldots, \phi_n$ e $\psi_1, \ldots, \psi_n$ as funções coordenadas de ϕ e ψ respectivamente. Note que $\phi^*(\eta_i) = \phi_i = \psi^*(\eta_i) = \psi_i$ assim $\phi = \psi$, logo γ é injetora. Agora vamos provar a sobrejetividade de γ. Seja $\theta : \mathcal{O}_Y(Y) \longrightarrow \mathcal{O}_X(X)$ um homomorfismo de $\mathbb{K}$-álgebras. Considere $\phi_i := \theta(\eta_i)$. Segue da proposição 1.6 (ii) que a aplicação $\phi : X \longrightarrow \mathbb{A}^n$, com i-ésima função coordenada ϕ_i, é um morfismo. Se pudermos mostrar que a imagem de φ está contida em Y obteremos que $\theta = \phi^*$. Tome $x \in X$, sabemos que $\phi(x) \in Y$ se, e somente se, para todo $f \in \mathfrak{I}(Y)$, $f(\phi(x)) = 0$. Dado $f(T_1, \ldots, T_n) \in \mathfrak{I}(Y)$, temos que $f(\phi(x)) = f(\theta(\eta_1), \ldots, \theta(\eta_n))(x)$. Observe que $f(\theta(\eta_1), \ldots, \theta(\eta_n)) = \theta(f(\eta_1, \ldots, \eta_n))$, e desde que $f(\eta_1, \ldots, \eta_n)$ é a imagem de f em $A(Y)$ temos que $f(\eta_1, \ldots, \eta_n) = 0$, logo $f(\theta(\eta_1), \ldots, \theta(\eta_n))$=0, o que implica $f(\phi(x)) = 0$. Portanto $\phi(x) \in Y$. □

Corolário 1.1. *Sejam X e Y variedades afins e $\varphi : X \longrightarrow Y$ é um morfismo, então φ é um isomorfismo se, e somente se, $\varphi^* : \mathcal{O}_Y(Y) \longrightarrow \mathcal{O}_X(X)$ é um isomorfismo.*

Exemplo 1.9. *(um morfismo bijetor que não é um isomorfismo) Seja $X = Z(T_2^2 - T_1^3) \subseteq \mathbb{A}^2$. Temos que $\varphi : \mathbb{A}^1 \longrightarrow X$, dado por $\varphi(t) = (t^2, t^3)$ é um morfismo (pois suas funções coordenadas são funções regulares em $\mathbb{A}^1$). Observe que φ é uma bijeção, com inversa dada por $\varphi^{-1}(x_1, x_2) = x_2.x_1^{-1}$ se $x_1 \neq 0$ ou $\varphi^{-1}(x_1, x_2) = 0$ se $x_1 = 0$. Porém φ não pode ser um isomorfismo, caso contrário teriamos que $\mathcal{O}_{\mathbb{A}_1}(\mathbb{A}^1) \simeq \mathcal{O}_X(X)$, o que implica $\mathbb{K}[T_1] \simeq A(X)$, o que é um absurdo pois $K[T_1]$ é integralmente fechado e $A(X)$ não é.*

É importante termos algum método, além das condições da definição de morfismo, para verificarmos se uma determinada aplicação entre prevariedades é um morfismo.

Proposição 1.9. *Sejam X e Y prevariedades e $\phi : X \longrightarrow Y$ uma aplicação qualquer.*

(i) Se $Y = \displaystyle\bigcup_{i=1}^{r} V_i$ é uma cobertura por abertos afins e para cada i, $\phi^{-1}(V_i) = \displaystyle\bigcup_{j=1}^{r_i} U_{ij}$ é uma cobertura por abertos afins, então ϕ é um morfismo se, e somente se, para todo i, j, $\phi_{ij} := \phi|_{U_{ij}} : U_{ij} \longrightarrow V_i$ é um morfismo.

(ii) Se Y é uma variedade afim, então ϕ é um morfismo se, e somente se, para todo $f \in \mathcal{O}_Y(Y)$, $f \circ \phi \in \mathcal{O}_X(X)$.

Demonstração.

(i) Se ϕ é um morfismo segue direto da definição de morfismo que ϕ_{ij} é um morfismo. Por outro lado, se ϕ_{ij} é um morfismo para quaisquer i e j então ϕ é continua e para todo aberto V de Y e $f \in \mathcal{O}_Y(V)$ temos $f_i := f|_{V \cap V_i} \in \mathcal{O}_Y(V \cap V_i)$, logo $f_i \circ \phi_{ij} \in \mathcal{O}_X(\phi_{ij}^{-1}(V \cap V_i))$. Desde que $\{\phi_{ij}^{-1}(V \cap V_i)\}_{i,j}$ é uma cobertura de $\phi^{-1}(V)$ então, a partir da propriedade de colagem proveniente do feixe $\mathcal{O}_X$, $f \circ \phi \in \mathcal{O}_X(\varphi^{-1}(V))$.

(ii) Neste caso basta provarmos a recíproca, pois a ida é imediata. Sejam $\eta_1, \ldots, \eta_n$ as funções coordenadas de Y e $\phi = (\phi_1, \ldots, \phi_n)$. Temos que $\eta_i \circ \phi = \phi_i \in \mathcal{O}_X(X)$. Se X é uma variedade afim, segue da proposição1.6 (ii) que ϕ é um morfismo. Se X não é uma variedade afim, seja $X = \bigcup_{i=1}^{r} U_i$ uma cobertura por abertos afins de X. Temos que $\phi_i|_{U_i} = (\eta_i \circ \phi)|_{U_i} \in \mathcal{O}_X(U_i)$ são as funções coordenadas de $\phi|U_i$, logo $\phi|_{U_i}$ é um morfismo para todo i (isto segue do caso afim), assim, aplicando a parte (i) acima, obtemos que ϕ é um morfismo. $\square$

Proposição 1.10. *Sejam X uma prevariedade e Y um subconjunto fechado de X. Para cada aberto V de Y considere $\mathcal{O}_Y(V)$ sendo o conjunto das funções $f : V \longrightarrow \mathbb{K}$ que satisfazem a seguinte propriedade: para todo $x \in V$, existe um aberto U de X contendo x e $g \in \mathcal{O}_X(U)$ tal que $f|_{U\cap V} = g|_{U\cap V}$. Então $\mathcal{O}_Y$ é um feixe de funções em Y tal que $(Y, \mathcal{O}_Y)$ é uma prevariedade e a inclusão de Y em X é um morfismo. Em particular, se X é uma variedade afim, então tal feixe coincide com o feixe que Y tem como variedade afim.*

Demonstração. Veja [14], página 46. $\square$

Observação 1.2. *Se X é uma prevariedade e U um aberto de X então $(U, \mathcal{O}_X|_U)$ é uma prevariedade (segue da proposição 1.7) tal que a inclusão de U em X é um morfismo.*

Definição 1.10. *Sejam X uma prevariedade e Y um subconjunto localmente fechado de X (isto é, Y é a interseção de um fechado com um aberto, ou equivalentemente, Y é aberto em $\overline{Y}$). Y equipado com estrutura de prevariedade proveniente da observação 1.2 e da proposição 1.10 é chamado de subprevariedade de X.*

Finalizaremos esta seção expondo algumas propriedades dos talos de uma prevariedade arbitrária. Em seguida, apresentaremos o corpo de funções racionais de uma prevariedade irredutível, que tem sua devida importância para caracterizar a noção de dimensão em tal estrutura.

Proposição 1.11. *Seja X uma prevariedade e $x \in X$. O talo $\mathcal{O}_{X,x}$ de X no ponto x é uma $\mathbb{K}$-álgebra local com ideal maximal $\boldsymbol{m}_{X,x} = \{f_x \in \mathcal{O}_{X,x} | f(x) = 0\}$.*

Demonstração. A partir da proposição B.2 do apêndice B segue $\mathcal{O}_{X,x}$ é uma $\mathbb{K}$-álgebra e para qualquer representante g da classe f_x temos $f(x) = g(x)$. Defina $\pi : \mathcal{O}_{X,x} \longrightarrow \mathbb{K}$ por $\pi(f_x) = f(x)$. Desta forma, temos que π é um homomorfismo de anéis sobrejetor, tal que $ker(\pi) = \mathbf{m}_{X,x}$. Para mostrar que $\mathbf{m}_{X,x}$ é único ideal maximal de $\mathcal{O}_{X,x}$ basta verificarmos que todo elemento de $\mathcal{O}_{X,x} - \mathbf{m}_{X,x}$ é invertível (veja [1], página 4). Tome $f_x \in \mathcal{O}_{X,x} - \mathbf{m}_{X,x}$. Existe um aberto U de X tal que $f \in \mathcal{O}_X(U)$. Sem perda de generalidade podemos supor que U é um aberto afim. Desta forma $x \in D_U(f)$, mas f é invertível em $\mathcal{O}_U(U) = \mathcal{O}_X(U)$, assim existe $g \in \mathcal{O}_X(U)$ tal que $f.g = 1$, logo $f_x.g_x = (f.g)_x = 1_x$, donde f_x é invertível em $\mathcal{O}_{X,x}$. $\square$

$\mathcal{O}_{X,x}$ é chamado de anel local de X em x. Em particular temos $\mathcal{O}_{X,x}/\mathbf{m}_{X,x} \simeq \mathbb{K}$. Dado um aberto afim U da prevariedade X, podemos ver U como uma variedade afim, assim, via teorema dos zeros de Hilbert, segue que os fechados irredutíveis de U correspondem (de maneira biunívoca) aos ideais primos de $\mathcal{O}_X(U)$. Em particular os pontos de U correspondem aos ideais maximais de $\mathcal{O}_X(U)$

Proposição 1.12. *Sejam X uma prevariedade, $x \in X$, U um aberto afim de X contendo x e $\mathbf{m}$ o ideal maximal de $\mathcal{O}_X(U)$ que corresponde ao ponto x. Então temos que $\mathcal{O}_{X,x} \simeq \mathcal{O}_X(U)_{\mathbf{m}}$. Em particular, os ideais primos de $\mathcal{O}_{X,x}$ correspondem bijetivamente aos fechados irredutíveis de U contendo x.*

Demonstração. Novamente a partir da proposiçãoB.2 do apêndiceB segue a aplicação $\phi : \mathcal{O}_X(U) \longrightarrow \mathcal{O}_{X,x}$ dada por $\phi(f) = f_x$ é um homomorfismo de $\mathbb{K}$-álgebras. Se $f \notin \mathbf{m}$ então $f(x) \neq 0$, desta forma f_x é invertível em $\mathcal{O}_{X,x}$, logo, a partir da propriedade universal dos anéis de frações, a aplicação $\varphi : \mathcal{O}_X(U)_{\mathbf{m}} \longrightarrow \mathcal{O}_{X,x}$, dada por $\varphi(f/g) = f_x.(g_x)^{-1}$ é um homomorfismo $\mathbb{K}$-álgebras. Suponha que $\varphi(f/g) = 0$, assim $f_x.g_x^{-1} = 0$, logo $(f.g^{-1})_x = 0$, desta maneira existe um aberto $U' \subseteq D_U(g) \subseteq U$ contendo x tal que $f|_{U'}.g^{-1}|_{U'} = 0$, o que implica $f|_{U'} = 0$. Sabemos que existe $h \in \mathcal{O}_X(U)$ tal que $x \in D_U(h) \subseteq U'$, assim $f.h = 0$ em U e $h \in \mathbf{m}$, logo $f/g = 0$, ou seja, φ é injetiva. Tome $f_x \in \mathcal{O}_{X,x}$; existe um aberto $V \subseteq X$ tal que $f \in \mathcal{O}_X(V)$. Desde que $U \cap V \neq \varnothing$ segue que $f|_{V\cap U} \in \mathcal{O}_X(U \cap V)$. Desde que $V \cap U$ é aberto em U, existe $h \in \mathcal{O}_X(U)$ tal que $x \in D_U(h) \subseteq V \cap U$ (pois U é afim), assim $f|_{D_U(h)} \in \mathcal{O}_U(D_U(h)) = \mathcal{O}_X(D_U(h))$, logo existem $g \in \mathcal{O}_X(U)$ e $r > 0$ tais que $f|_{D_U(h)} = g/h^r$, o que implica $f_x = g_x.h_x^{-r}$. Desde que $h \notin \mathbf{m}$ temos que $\varphi(g/h^r) = f_x$, donde φ é sobrejetora. □

Até o final desta seção X é uma prevariedade irredutível. Com esta consideração, temos que quaisquer dois abertos não vazios de X se intersectam. Seja L o conjunto de todos os abertos não vazios de X. Observe que $(L, \supseteq)$ é um conjunto pré-ordenado e dirigido à direita, e os pares $(\mathcal{O}_X(U), r_{V,U})$ (onde $U, V \in L$, $U \supseteq V$ e $r_{V,U}$ é aplicação restrição) formam um sistema direto de $\mathbb{K}$-álgebras e homomorfismos. Aplicando a proposiçãoB.2 do apêndiceB, obtemos uma $\mathbb{K}$-álgebra $K(X) := \lim\limits_{\to U\in L} \mathcal{O}_X(U)$. Dado um aberto $U \in L$ e $f \in \mathcal{O}_X(U)$, denotaremos a classe de f em $K(X)$ por f_X

Proposição 1.13. *Com as notações acima, $K(X)$ é um corpo.*

Demonstração. Tome $f_X \in K(X) - 0$. Existe um aberto $U \in L$ tal que $f \in \mathcal{O}_X(U)$. Sem perda de generalidade podemos supor que U é um aberto afim. Desta forma, $f|_{D_U(f)}$ possui uma inversa $1/f \in \mathcal{O}_U(D_U(f)) = \mathcal{O}_X(D_U(f))$. assim $f_X.(1/f)_X = 1_X$. Portanto $K(X)$ é corpo. □

Definição 1.11. *$K(X)$ é chamado de corpo de funções racionais de X.*

Seja U um aberto afim de X que contém um ponto $x \in X$. Desde que U é irredutível, $\mathcal{O}_X(U)$ é um domínio, logo possui um corpo de frações $frac(\mathcal{O}_X(U))$. A partir da proposição 1.12 segue que $\mathcal{O}_{X,x}$ também é um domínio e $frac(\mathcal{O}_{X,x}) \simeq frac(\mathcal{O}_X(U))$. Dado um aberto arbitrário $V \subseteq X$ contendo x, a partir das propriedades de limite direto sobre $K(X)$, segue que a aplicação $\varphi_V : \mathcal{O}_X(V) \longrightarrow K(X)$ dada por $\varphi(f) = f_X$ é um homomorfismo de $\mathbb{K}$-álgebras. Em particular $\{\varphi_V : \mathcal{O}_X(V) \longrightarrow K(X)\}_{x \in V}$ é um sistema direto sobre $\mathcal{O}_{X,x}$. Aplicando a propriedade universal de limite direto sobre $\mathcal{O}_{X,x}$, segue que $u : \mathcal{O}_{X,x} \longrightarrow K(X)$, dado por $u(f_x) = f_X$ é um homomorfismo de $\mathbb{K}$-álgebras. Seja $f \in \mathcal{O}_X(V)$ tal que $u(f_x) = 0$. Existe um aberto $W \subseteq V$ tal que $f|_W = 0$, isto implica que f se anula no fecho de W em V (pois f é contínua). Desde que V é irredutível, W é denso em V, assim $f = 0$. Desta forma u é injetiva. A partir da propriedade universal dos anéis de fracões segue que a aplicação $\Phi : frac(\mathcal{O}_{X,x}) \longrightarrow K(X)$, dada por $\Phi(f_x/g_x) = f_X.g_X^{-1}$ é um homomorfismo de $\mathbb{K}$-álgebras injetor. Tome $f_X \in K(X)$; existe um aberto $W \subseteq X$ tal que $f \in \mathcal{O}_X(W)$. Dado um aberto afim V contendo x temos que $V \cap W \neq \varnothing$. Desta forma existe $h \in \mathcal{O}_X(V)$, não nulo, tal que $D_V(h) \subseteq V \cap W$, logo $f|_{D_V(h)} \in \mathcal{O}_V(D_V(h))$, assim existem $g \in \mathcal{O}_X(V)$ e $r \geq 0$ tal que $f|_{D_V} = g/h^r$, ou seja, $f_X = g_X h_X^{-r} = \Phi(g_x/h_x^r)$. Desta maneira, obtemos que Φ é sobrejetora e portanto é um isomorfismo, ou seja, $frac(\mathcal{O}_{X,x}) \simeq K(X)$. A partir destas observações obtemos a seguinte resultado.

Proposição 1.14. *Se V uma subprevariedade aberta de X então $K(V) \simeq K(X)$. Se V é um aberto afim então $frac(\mathcal{O}_X(V)) \simeq K(X)$. Em particular o grau de transcendência de $K(X)$ sobre $\mathbb{K}$ (o qual denotamos por $grtr_{\mathbb{K}}K(X)$) é finito.*

Demonstração. Seja U um aberto afim contido em V. Temos que

$$K(V) \simeq frac(\mathcal{O}_X(U)) \simeq K(X).$$

A partir do lema da normalização de Noether (veja [6], página 92), temos que o corpo de frações do anel de coordenadas de uma variedade afim irredutível tem grau de transcendência finito sobre $\mathbb{K}$, desta forma $grtr_{\mathbb{K}}K(X) = grtr_{\mathbb{K}}frac(\mathcal{O}_X(U)) < \infty$ □

1.3 Variedades algébricas

Em geral temos que a topologia produto de $\mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^m$ não coincide com a topologia de Zariski de $\mathbb{A}^{n+m}$, por exemplo, desde que $\mathbb{A}^1$ não é Hausdorff, temos que o conjunto $Z(T_1 - T_2)$ (a diagonal de $\mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^1$) não é fechado em $\mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^1$, porém é fechado $\mathbb{A}^2$. Dessa maneira o nosso guia para o produto de variedades afins ou até de prevariedades é proveniente da teoria das categorias (veja [17]).

Definição 1.12. *Sejam $\mathcal{C}$ uma categoria e X, Y objetos de $\mathcal{C}$. Dado uma tripla (Z, π_X, π_Y), onde Z é um objeto de $\mathcal{C}$ e $\pi_X : Z \longrightarrow X$,$\pi_Y : Z \longrightarrow Y$ são morfismos, dizemos que tal tripla é um produto de X e Y, se a seguinte propriedade universal é satisfeita: Para qualquer objeto W e morfismos $\psi_X : W \longrightarrow X$, $\psi_Y : W \longrightarrow Y$ existe um único morfismo $\psi : W \longrightarrow Z$ tal que $\psi_X = \pi_X \circ \psi$ e $\psi_Y = \pi_Y \circ \psi$. Os morfismos π_X, π_Y são chamados de projeções do produto em seus fatores.*

Observe que quando o produto entre dois objetos de uma categoria existe então ele é único a menos de isomorfismos. Considerando que nossa categoria é a das prevariedades (sobre $\mathbb{K}$), vamos mostrar que quaisquer duas prevariedades admitem um produto. Note que se o produto entre prevariedades X e Y existe, digamos (Z, π_X, π_Y), então existe uma bijeção entre Z e o produto cartesiano $X \times Y$. De fato, considere a aplicação $f : Z \longrightarrow X \times Y$, dada por $f(a) = (\pi_X(a), \pi_Y(a))$. Naturalmente f está bem definida. Dado $(x, y) \in X \times Y$, considere uma prevariedade $W = \{\xi\}$ com apenas um único ponto e $\phi_X : W \longrightarrow X$, $\phi_Y : W \longrightarrow Y$ morfismos tais que $\phi_X(\xi) = x$ e $\phi_Y(\xi) = y$. Aplicando a propriedade universal obtemos um único morfismo $\phi : W \longrightarrow Z$ tal que $x = \phi_X(\xi) = \pi_X(\phi(\xi))$ e $y = \phi_Y(\xi) = \pi_Y(\phi(\xi))$; desta forma segue que f é sobrejetora. A injetividade de f segue da unicidade proveniente da propriedade universal. Para facilitar a notação o produto Z sempre será denotado por $X \times Y$ e quando conveniente denotaremos seus pontos por pares (a, b), com $a \in X$, $b \in Y$.

Proposição 1.15. *Sejam $X \subseteq \mathbb{A}^n$ e $Y \subseteq \mathbb{A}^m$ variedades afins. Então*

(i) O produto cartesiano usual $X \times Y \subseteq \mathbb{A}^{n+m}$ é uma variedade afim tal que $A(X \times Y) \simeq A(X) \otimes_{\mathbb{K}} A(Y)$.

(ii) A tripla $(X \times Y, \pi_X, \pi_Y)$ é um produto de prevariedades, onde $\pi_X : X \times Y \longrightarrow X$, $\pi_Y : X \times Y \longrightarrow Y$, dadas por $\pi_X(a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m) = (a_1, \ldots, a_n)$ e $\pi_Y(a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m) = (b_1, \ldots, b_m)$ são as projeções provenientes do produto cartesiano.

(iii) Se X e Y são irredutíveis então $X \times Y$ é irredutível.

Demonstração. (i) Sejam $\mathfrak{I}(X) = (t_1, \ldots, t_d) \subseteq \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$ e $\mathfrak{I}(Y) = (s_1, \ldots, s_l) \subseteq \mathbb{K}[S_1, \ldots, S_m]$ (onde as $S_i's$ são variáveis). Podemos considerar o produto cartesiano $X \times Y$ como subconjunto de $\mathbb{A}^{n+m}$. Agora observe que $X \times Y = Z(t_1, \ldots, t_d, s_1, \ldots, s_l)$. Desta forma $X \times Y$ é uma variedade afim. Note que a aplicação que associa cada par $(f, g) \in A(X) \times A(Y)$ a $f.g \in A(X \times Y)$ está bem definida e é $\mathbb{K}$-bilinear, desta forma, aplicando a propriedade universal do produto tensorial, segue que a aplicação $\phi : A(X) \otimes_{\mathbb{K}} A(Y) \longrightarrow A(X \times Y)$, tal que

$\phi(f \otimes g) = f.g$, é um homomorfismo de anéis. Vamos mostrar que ϕ é um isomorfismo. Tome $h \in \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n, S_1, \ldots, S_m]$. Podemos escrever $h = \sum_{i=1}^{r} f_i g_i$, onde $f_i \in \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$ e $g_i \in \mathbb{K}[S_1, \ldots, S_m]$, assim $\phi(\sum_{i=1}^{r} f_i|_X \otimes g_i|_Y) = h|_{X \times Y}$, donde ϕ é sobrejetora. Por fim, considere $\xi \in ker(\phi)$. Podemos escrever $\xi = \sum_{i=1}^{r} f_i \otimes g_i$ e assumir que r é o menor inteiro que satisfaz essa propriedade. Suponha que $\xi \neq 0$, então $g_i \neq 0$ e $f_i \neq 0$ para todo i, logo podemos fixar $y \in Y$ tal que nem todos os $g_i's$ se anulam em y. Temos que $0 = \phi(\xi) = \sum_{i=1}^{r} f_i g_i$, assim $0 = \phi(\xi) = \sum_{i=1}^{r} f_i(x) g_i(y)$ para todo $x \in X$, logo $0 = \phi(\xi) = \sum_{i=1}^{r} g_i(y) f_i$ em $A(X)$; desta maneira $f_1, \ldots, f_n$ são linearmente dependentes sobre $\mathbb{K}$. Se $r > 1$ então podemos escrever $f_1 = \sum_{i=2}^{r} \lambda_i f_i$ para certos $\lambda_i \in \mathbb{K}$, desta forma $\xi = \sum_{i=2}^{r} f_i \otimes g_i + \lambda_i g_1$, o que contradiz a minimalidade de r. Assim devemos ter $r = 1$ e neste caso $\xi = f_1 \otimes g_1$, logo $f_1.g_1 = 0$. Se $f_1 \neq 0$ e $g_1 \neq 0$ então existem $x \in X$, $y \in Y$ tais que $f_1(x) \neq 0$ e $g_1(y) \neq 0$, mas $f_1(x).g_1(y) = 0$, o que é um absurdo. Assim $f_1 = 0$ ou $g_1 = 0$, ou seja, $\xi = 0$, o que é uma contradição. Portanto $ker(\phi) = 0$.

(ii) Desde que as funções coordenadas de π_X e π_Y são polinômios segue da proposição 1.6 (ii) que tais aplicações são morfismos. Sejam W uma prevariedade e $\phi_X : W \longrightarrow X$, $\phi_Y : W \longrightarrow Y$ morfismos. Defina $\phi : W \longrightarrow X \times Y$ por $\phi(a) = (\phi_X(a), \phi_Y(a))$. Desta forma temos que $\phi_X = \pi_X \circ \phi$ e $\phi_Y = \pi_Y \circ \phi$. Desde que $X \times Y$ é o produto cartesiano usual, a unicidade de ϕ segue naturalmente. Como $X \times Y$ é uma variedade afim, a partir da proposição 1.9 (ii), para concluir que ϕ é um morfismo basta verificarmos que para todo $h \in A(X \times Y)$, $h \circ \phi \in \mathcal{O}_X(W)$. A partir de (i), podemos escrever $h = \sum_{i=1}^{r} f_i g_i$, onde $f_i \in A(X)$ e $g_i \in A(Y)$. Desta forma $h \circ \phi = \sum_{i=1}^{r} (f_i \circ \phi_X)(g_i \circ \phi_Y) \in A(X \times Y)$, donde ϕ é um morfismo.

(iii) Desde que X e Y são irredutíveis, $A(X)$ e $A(Y)$ são domínios. Dado um ideal maximal $\mathbf{m}$ em $A(X)$ temos que $A(X)/\mathbf{m} = \mathbb{K}$. A partir da projeção canônica $a \mapsto \overline{a} : A(X) \longrightarrow A(X)/\mathbf{m}$ obtemos o homomorfismo

$$a \otimes b \mapsto \overline{a} \otimes b \mapsto \overline{a}.b : A(X) \otimes_{\mathbb{K}} A(Y) \longrightarrow \mathbb{K} \otimes_{\mathbb{K}} A(Y) \longrightarrow A(Y)$$

de $A(X) \otimes_{\mathbb{K}} A(Y)$ em $A(Y)$. Sejam $\alpha, \xi \in A(X) \otimes_{\mathbb{K}} A(Y)$. Podemos escrever $\alpha = \sum_{i=1}^{r} a_i \otimes b_i$, $\xi = \sum_{j=1}^{s} a'_j \otimes b'_j$, onde r e s são os menores inteiros positivos com tal propriedade; assim podemos assumir que os conjuntos $\{b_1, \ldots, b_r\}$, $\{b'_1, \ldots, b'_s\}$ são linearmente independentes sobre $\mathbb{K}$. Se $\alpha.\xi = 0$ então a imagem deste produto em $A(Y)$ é zero, ou seja, $(\sum_{i=1}^{r} \overline{a_i} b_i)(\sum_{j=1}^{s} \overline{a'_j} b'_j) = 0$, o que implica $\sum_{i=1}^{r} \overline{a_i} b_i = 0$ ou $\sum_{j=1}^{s} \overline{a'_i} b'_i = 0$. A independência linear dos b_i's e dos b'_j's implica $\overline{a_i} = 0$ para todo i, ou $\overline{a'_j} = 0$ para todo j, ou seja, $a_i \in \mathbf{m}$ para todo i, ou $a'_j \in \mathbf{m}$ para todo j . Desde que $\mathbf{m}$ é um ideal maximal arbitrário de $A(X)$, segue do teorema dos zeros de Hilbert que $X = V_X(a_1, \ldots, a_r) \cup V_X(a'_1, \ldots, a_s)$. A irredutibilidade de X nos fornece que $X = V_X(a_1, \ldots, a_r)$ ou $X = V_X(a'_1, \ldots, a_s)$. No primeiro caso, temos $a_i = 0$ para todo i, e no segundo $a'_j = 0$ para todo j, assim $\alpha = 0$ ou $\xi = 0$. Desta maneira $A(X) \otimes_{\mathbb{K}} A(Y)$ é um domínio. Portanto $X \times Y$ é irredutível.

$\square$

Para verificarmos a existência entre o produto de prevariedades arbitrárias usaremos a noção de colagem de prevariedades. Seja L um conjunto finito de índices e X_i uma prevariedade, para todo $i \in L$. Para quaisquer $i, j \in L$, com $i \neq j$, suponha que tenhamos abertos $U_{i,j} \subseteq X_i$ e isomorfismos $f_{i,j} : U_{i,j} \longrightarrow U_{j,i}$ tais que para quaisquer $i, j, k \in L$, distintos, tenhamos

(a) $f_{ij}^{-1} = f_{ji}$;

(b) $U_{i,j} \cap f_{i,j}^{-1}(U_{j,i} \cap U_{j,k}) \subseteq U_{i,k}$ e $f_{j,k} \circ f_{i,j}|_{U_{i,j} \cap f_{i,j}^{-1}(U_{j,i} \cap U_{j,k})} = f_{i,k}|_{U_{i,j} \cap f_{i,j}^{-1}(U_{j,i} \cap U_{j,k})}$.

em seguida considere $f_{i,i} = Id_{X_i}$ (a aplicação identidade de X_i), $U_{i,i} = X_i$ e $\Gamma := \bigcup_{i \in L} (X_i \times \{i\})$. Defina a seguinte relação em Γ: $(x, i) \sim (y, j)$ se, e somente se, $x \in U_{i,j}$ e $f_{i,j}(x) = y$. Note que $(x, i) \sim (x, i)$ pois $f_{i,i}(x) = x$, assim vale a reflexividade. Se $(x, i) \sim (y, j)$ então $f_{i,j}(x) = y$ logo por (a) $f_{j,i}(y) = x$, assim $(y, j) \sim (x, i)$, ou seja, vale a simetria. Se $(x, i) \sim (y, j)$ e $(y, j) \sim (z, k)$ para distintos i, j, k, temos que $f_{i,j}(x) = y$ e $f_{j,k}(y) = z$, logo por (b), $f_{i,k}(x) = z$, assim temos a transitivide. Desta forma $\sim$ é uma relação de equivalência sobre Γ. Seja $X = \Gamma / \sim$. Para cada $i \in L$ temos as aplicações naturais $f_i : X_i \longrightarrow X$, onde $f_i(x)$ é a classe de (x, i) em X, as quais são injetoras. Em particular $X = \bigcup_{i \in L} f_i(X_i)$.

Vamos dotar X com a topologia quociente induzida pelas $f'_i s$: $U \subseteq X$ é aberto se, e somente se , $f_i^{-1}(U)$ é aberto em X_i para todo $i \in L$. Neste caso, desde que cada X_i é espaço topológico Noetheirano, assim é X. Para cada aberto U de X, defina

$\mathcal{O}_X(U)$ como o conjunto de todas as funções $\mathbb{K}$- avaliativas $g : U \longrightarrow \mathbb{K}$ tais que $g \circ f_i|_{f_i^{-1}(U)} \in \mathcal{O}_{X_i}(f_i^{-1}(U))$ para todo $i \in L$. Vejamos se $\mathcal{O}_X$ é um feixe sobre X. Se $V \subseteq U$ são abertos de X e $g \in \mathcal{O}_X(U)$ então $g \circ f_i|_{f_i^{-1}(U)} \in \mathcal{O}_{X_i}(f_i^{-1}(U))$ para todo $i \in L$, desde que $f_i^{-1}(V) \subseteq f_i^{-1}(U)$, segue que $g \circ f_i|_{f_i^{-1}(V)} \in \mathcal{O}_{X_i}(f_i^{-1}(V))$ para todo $i \in L$, donde $g|_V \in \mathcal{O}_X(U)$. Por fim, seja $V = \bigcup_{j \in E} V_j$ uma cobertura aberta de V e $g_j \in \mathcal{O}_X(V_j)$ tais que $g_j|_{V_j \cap V_k} = g_k|_{V_j \cap V_k}$ para quaisquer $j, k \in E$. Desta forma temos que $g_j \circ f_i|_{f_i^{-1}(V_j \cap V_k)} = g_k \circ f_i|_{f_i^{-1}(V_j \cap V_k)}$, assim existe uma única $h_i \in \mathcal{O}_{X_i}(f_i^{-1}(V))$ tal que $h_i|_{f_i^{-1}(V_j)} = g_j \circ f_i|_{f_i^{-1}(V_j)}$. Defina $h : V \longrightarrow \mathbb{K}$ por $h(\xi) = h_i(f_i^{-1}(\xi))$, para $f_i^{-1}(\xi) \neq \varnothing$. Temos que $\xi \in V_j$ para algum $j \in E$ e se (x, j) e (y, k) são dois representantes de ξ então $f_i(x) = f_k(y)$ e $h_i(f^{-1}(\xi)) = g_j(f_i(x)) = g_j(f_k(y)) = h_k(f_k^{-1}(\xi))$; desta maneira h está bem definida e $h \circ f_i|_{f_i^{-1}(V)} = h_i$, donde $h \in \mathcal{O}_X(V)$. A unicidade de h é direta. Desta forma $\mathcal{O}_X$ é uma feixe de funções tal que cada f_i é um morfismo (de espaços anelados). Dados $i, j \in L$, distintos, e $W_i \subseteq X_i$ um aberto qualquer, note que $f_j^{-1}(f_i(W_i)) = f_{i,j}(W_i \cap U_{i,j})$ é aberto em X_j, assim a imagem de todo aberto de X_i via f_i é aberto em X; em particular, para todo $i \in L$, $f_i(X_i)$ é aberto em X. Observe que se $X_i = \bigcup_k U_{i,k}$ é uma cobertura por abertos afins, para todo $i \in L$, então $X = \bigcup_{i,k} f_i(U_{i,k})$ é uma cobertura por abertos afins. Portanto X é uma prevariedade, a qual obtemos pela colagem das X_i's via os isomorfismos $f_{i,j}$.

Observação 1.3. *Por construção $f_i(X_i)$ é uma subprevariedade aberta de X e cada f_i é um isomorfismo sobre sua imagem, desta maneira, cometendo um certo abuso de notação iremos considerar cada X_i como uma subprevariedade aberta de X.*

Exemplo 1.10. *Considere $X_1 = X_2 = \mathbb{A}^1$, $U_{1,2} = U_{2,1} = \mathbb{A}^1 - 0$ e $f : U_{1,2} \longrightarrow U_{2,1}$, dada por $f(x) = x$. Seja X a prevariedade obtida pela colagem de X_1 e X_2 ao longo de f. Note que $X - X_1$ é um conjunto com apenas um único ponto, a qual é a origem de X_2 e $X - X_2$ é o conjunto unitário o qual contém a origem de X_1. Desta forma X é uma espécie de "reta afim com duas origens".*

Proposição 1.16. *Se X e Y são prevariedades então admitem um produto.*

Demonstração. Sejam $X = \bigcup_{k \in F} W_k$ e $Y = \bigcup_{l \in E} V_k$ coberturas por abertos afins, com F e E finitos. A partir da proposição 1.15, para cada $k \in F$ e $l \in E$, podemos considerar o produto $W_k \times V_l$ o qual é uma variedade afim. Tome $L = F \times E$ e para cada $i = (k, l) \in L$, considere $X_i = W_k \times V_l$. Dados $i = (k, l), j = (k', l') \in L$ defina $U_{ij} := (W_k \cap W_{k'}) \times (V_l \cap V_{l'}) = X_i \cap X_k$ e $f_{i,j} : U_{i,j} \longrightarrow U_{j,i}$ sendo simplesmente a aplicação identidade de U_{ij} $(= U_{ji})$. Desta maneira $f_{i,j}$ é um isomorfismo entre abertos de X_i e X_k que naturalmente satisfaz as condições (a) e (b) de colagem de prevariedades (vistas acima). Assim, por colagem, existe uma prevariedade Z tal que $Z = \bigcup_{i \in L} X_i$ e cada X_i é um aberto (afim) de Z, Ou seja, como conjunto, Z é o produto cartesiano $X \times Y$. Para cada produto $W_k \times V_l$, temos as projeções π_{W_k} e π_{V_l}. Defina $\pi_X : Z \longrightarrow X$ da seguinte maneira: se $a \in Z$ então existe $i = (k, l) \in L$ tal que $a \in X_i = W_k \times V_l$, desta forma tome $\pi_X(a) = \pi_{W_k}(a)$. Temos que cada $W_k \times V_l$ como conjunto é o produto cartesiano de W_k e V_l e suas projeções são as usuais do produto cartesiano, desta maneira se $a \in (W_k \times V_l) \cap (W_{k'} \times V_{l'})$ naturalmente temos $\pi_{W_k}(a) = \pi_{W_{k'}}(a)$, ou seja, π_X está bem definida e a partir da proposição 1.9 (i) segue que π_X é um morfismo. De maneira análoga, definimos um morfismo $\pi_Y : Z \longrightarrow Y$. Note que π_X e π_Y são as projeções usuais do produto cartesiano.

Vejamos se (Z, π_X, π_Y) é um produto de X e Y. Sejam W uma prevariedade e $\phi_X : W \longrightarrow X$, $\phi_Y : W \longrightarrow Y$ morfismos. Se existe uma aplicação $\phi : W \longrightarrow Z$ tal que $\phi_X = \pi_X \circ f$ e $\phi_Y = \pi_Y \circ f$ então essa aplicação é dada por $\phi(a) = (\phi_X(a), \phi_2(Y))$. Por fim basta mostrarmos que ϕ é um morfismo. Note que $\phi^{-1}(W_k \times V_l) = \phi_X^{-1}(W_k) \cap \phi_Y^{-1}(V_l)$. Se $\phi^{-1}(W_k \times V_l) \neq \varnothing$; considere um aberto afim U, contido em tal conjunto. Assim ϕ mapeia U em $W_k \times V_l$. Em particular ϕ_X mapeia U em W_k e ϕ_Y mapeia U em V_l, ou seja , $\phi_X|_U : U \longrightarrow W_k$ e $\phi_Y|_U : U \longrightarrow V_l$ são morfismos. Logo, pela propriedade universal do produto $W_k \times V_l$, a aplicação que associa cada $a \in U$ em $(\phi_X(a), \phi_Y(a))$ é um morfismo, isto é, $\phi|_U$ é um morfismo. Desta maneira, a partir da proposição 1.9 (i), ϕ é um morfismo. $\square$

Observação 1.4. *A menos que seja mencionado, $X \times Y$ sempre irá denotar o produto de prevariedades X e Y (e não o espaço topológico proveniente da topologia produto).*

Exemplo 1.11. *1. Se X e Y são variedades afins então as projeções $\pi_X : X \times Y \longrightarrow X$, $\pi_Y : X \times Y \longrightarrow Y$ são aplicações abertas. De fato, seja $g \in A(X \times Y) \simeq A(X) \otimes_{\mathbb{K}} A(Y)$, não constante; podemos escrever $g = \sum_{i=1}^{r} f_i.g_i$, onde $f_i \in A(X)$, $g_i \in A(Y)$. Tome $u \in \pi_X(D_X(g))$, assim existe $v \in Y$ tal que $g(u, v) \neq 0$, desta maneira considere $p_u = \sum_{i=1}^{r} f_i.(g_i(v)) \in A(X)$, logo $p_u \neq 0$ e $u \in D_X(p_u)$. Dado $a \in D_X(p_u)$ temos que $(a, v) \in D_{X \times Y}(g)$, assim $a \in \pi_X(D_{X \times Y}(g))$, donde $D_X(p_u) \subseteq \pi_X(D_{X \times Y}(g))$, ou seja,*

$$\pi_X(D_{X \times Y}(g)) = \bigcup_{u \in \pi_X(D_{X \times Y}(g))} D_X(p_u).$$

Desde que os conjuntos do tipo $D_{X \times Y}(g)$ formam uma base para a topologia de $X \times Y$, segue que π_X é uma aplicação aberta. De maneira análoga π_Y também é uma aplicação aberta.

2. *Se X e Y são prevariedades então as projeções $\pi_X : X \times Y \longrightarrow X$, $\pi_Y : X \times Y \longrightarrow Y$ são aplicações abertas. De fato, seja $U \subseteq X \times Y$ um aberto e $X = \bigcup_{k \in F} W_k$ e $Y = \bigcup_{l \in E} V_k$ coberturas por abertos afins, com F e E finitos. Temos que $X \times Y = \bigcup_{k,l} W_k \times V_l$, logo $U = \bigcup_{k,l} [U \cap (W_k \times V_l)]$, assim $\pi_X(U) = \bigcup_{k,l} \pi_X(U \cap (W_k \times V_l))$. Desde que $\pi_X|_{(W_k \times V_l)} = \pi_{W_k} : W_k \times V_l \longrightarrow W_k$ é a projeção do produto $W_k \times V_l$, recaímos no caso afim (visto em 1.), logo $\pi_X(U \cap (W_k \times V_l))$ é aberto em X, assim $\pi_X(U)$ é aberto em X. De maneira análoga, $\pi_Y(U)$ é aberto em Y.*

Definição 1.13. *Seja X uma prevariedade. Dizemos que X é uma variedade algébrica (ou separável) se a diagonal $\Delta_X := \{(x,x) \in X \times X | x \in X\}$ é fechada em $X \times X$.*

Observação 1.5. *Frequentemente chamaremos as variedades algébricas simplesmente por variedades.*

Exemplo 1.12. *(i) Variedades afins são variedades algébricas. De fato, seja $X \subseteq \mathbb{A}^n$ uma variedade afim. Temos que $X \times X \subseteq \mathbb{A}^{2n}$. Observe que $\Delta_X = (X \times X) \cap Z(T_1 - T_{n+1}, \ldots, T_n - T_{2n})$, donde Δ_X é fechado em $X \times X$.*

(ii) Subprevariedades de variedades são variedades. De fato, Seja Y uma subprevariedade de uma variedade X. Aplicando a propriedade universal do produto $X \times X$ sobre as projeções do produto $Y \times Y$ obtemos que a inclusão $i : Y \times Y \longrightarrow X \times X$ é um morfismo. Desde que $\Delta_Y = i^{-1}(\Delta_X)$, segue que Y é uma variedade. Por simplicidade, vamos chamar as subprevariedades de uma variedade por subvariedades.

Proposição 1.17. *Seja X uma prevariedade. Então*

(i) X é uma variedade se, e somente se, para qualquer prevariedade Y e morfismos $\phi, \psi : Y \longrightarrow X$ tivermos que o conjunto $\{y \in Y | \phi(y) = \psi(y)\}$ é fechado em Y.

(ii) Se Y é uma variedade e $\phi : X \longrightarrow Y$ é um morfismo, então o gráfico de ϕ, $\Gamma_\phi := \{(x,y) \in X \times Y | y = \phi(x)\}$, é fechado em $X \times Y$.

Demonstração. (i) Se X é uma variedade então Δ_X é fechado em $X \times X$. Aplicando a propriedade universal do produto $X \times X$ segue que existe um morfismo $\Phi : Y \longrightarrow X \times X$ tal que $\phi = \pi_1 \circ \Phi$ e $\psi = \pi_2 \circ \Phi$, onde π_1, π_2 são as projeções do produto $X \times X$. Desta forma $\Phi^{-1}(\Delta_X) = \{y \in Y | \phi(y) = \psi(y)\}$ é fechado em Y. Reciprocamente tome $X \times X = Y$, $\phi = \pi_1$ e $\psi = \pi_2$, logo $\{y \in X \times X | \pi_1(y) = \pi_2(y)\} = \Delta_X$ é fechado em $X \times X$.

(ii) A partir da propriedade universal do produto $Y \times Y$, existe um único morfismo $\Phi : X \times Y \longrightarrow Y \times Y$ tal que $\phi \circ \pi_X = \pi_1 \circ \Phi$ e $Id_Y \circ \pi_Y = \pi_2 \circ \Phi$, onde π_X, π_Y são as projeções de $X \times Y$,π_1, π_2 são as projeções de $Y \times Y$ e Id_Y é o morfismo identidade de Y. Por fim, observe que $\Phi^{-1}(\Delta_Y) = \Gamma_\phi$.

$\square$

Exemplo 1.13. *A prevariedade X obtida pela colagem de $X_1 = X_2 = \mathbb{A}^1$ via o morfismo identidade de $\mathbb{A}^1 - 0$ no exemplo 1.10 não é uma variedade. De fato os morfismos injetores $f_1 : X_1 \longrightarrow X, f_2 : X_2 \longrightarrow X$, obtidos no processo de colagem, são tais que $\{y \in \mathbb{A}^1 | f_1(y) = f_2(y)\} = \mathbb{A}_1 - 0$. Desde que $\mathbb{A}^1 - 0$ não é fechado em $\mathbb{A}^1$, segue da proposição 1.17 (i) que X não é variedade.*

1.4 Dimensão e morfismos

1.4.1 Dimensão de variedades algébricas

Definição 1.14. *Seja X uma variedade. A dimensão de X é o máximo dos comprimentos de cadeias do tipo $X_0 \subsetneq X_1 \subsetneq \cdots \subsetneq X_n$ (esta cadeia é dita de comprimento n) tal que cada X_i é um fechado irredutível de X. Denotamos a dimensão de X por* $\dim X$. *Tal número é um inteiro não negativo ou infinito.*

Proposição 1.18. *Se Y é uma subvariedade de X então* $\dim Y \leq \dim X$. *Além disso, se X é irredutível e de dimensão finita e Y é um fechado diferente de X então* $\dim Y < \dim X$.

Demonstração. Se $F_1 \subsetneq F_2 \subsetneq \cdots \subsetneq F_r$ é uma cadeia de fechados irredutíveis de Y, segue da proposiçao A.2 (b) que $\overline{F}_1 \subseteq \overline{F}_2 \subseteq \cdots \subseteq \overline{F}_r$ é uma cadeia de fechados irredutíveis de X. Desde que $F_j = \overline{F}_j \cap Y$ devemos ter que $\overline{F}_j \subsetneq \overline{F}_{j+1}$, donde $\dim Y \leq \dim X$.

Suponha que X é irredutível tal que $\dim X < \infty$ e $Y \subsetneq X$ é fechado. Desta forma existe $r > 0$ (inteiro) tal que $dimY = r$. Se $F_1 \subsetneq F_2 \subsetneq \cdots \subsetneq F_r$ é uma cadeia maximal de fechados irredutíveis de Y então $F_1 \subsetneq F_2 \subsetneq \cdots \subsetneq F_r \subsetneq X$ é uma cadeia de fechados irredutíveis de X. Portando $\dim Y < dimX$. $\square$

Proposição 1.19. *Seja X uma variedade e que $X = \bigcup_{i=1}^{r} X_i$, onde X_i é um fechado de X. Então* $\dim X = \max_{1 \leq i \leq r} \dim X_i$.

Demonstração. A partir da proposição anterior temos que $\dim X \geq \max_{1 \leq i \leq r} \dim X_i$. Por outro lado, se $\max_{1 \leq i \leq r} \dim X_i = \infty$ a igualdade segue diretamente. Desta forma admita que $\max_{1 \leq i \leq r} \dim X_i = p$, para algum inteiro $p > 0$. Suponha que X admite uma cadeia $F_1 \subsetneq F_2 \subsetneq \cdots \subsetneq F_{p+1}$ de subespaços fechados irredutíveis. Temos que $F_{p+1} = \bigcup_{i=1}^{r}(F_{p+1} \cap X_i)$. A irredutibilidade de F_{p+1} nos fornece que F_{p+1} está contido em algum X_i, o que contradiz $\dim X_i \leq p$. Portanto $\dim X = p$. □

Dado um anel R, vamos denotar a dimensão de Krull de R simplesmente por $\dim R$.

Proposição 1.20. *Seja V uma variedade afim.*

(i) $\dim V = \dim A(V) < \infty$.

(ii) Se V é irredutível então $\dim V = grtr_{\mathbb{K}} frac(A(V)) = grtr_{\mathbb{K}} K(V)$.

Demonstração. (i) Desde que $\dim \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n] = n$ e $A(V) = \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]/\mathfrak{I}(V)$ temos que $\dim A(V) \leq n$. Se $F_1 \subsetneq F_2 \subsetneq \cdots \subsetneq F_r$ uma cadeia de fechados irredutíveis de V, a partir do teorema dos zeros de Hilbert, segue que $\mathfrak{I}(F_1) \supsetneq \mathfrak{I}(F_2) \supsetneq \ldots \mathfrak{I}(F_r)$ é uma cadeia de ideais primos de $\mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$ que contêm $\mathfrak{I}(V)$, assim $\dim A(V) \geq \dim V$. De maneira análoga, utilizando o teorema dos zeros de Hilbert novamente, obtemos a desigualdade $\dim V \geq \dim A(V)$.

(ii) Em [6], página 100, podemos ver que $\dim A(V) = grtr_{\mathbb{K}} frac(A(V))$. A partir de (i) segue que $\dim V = grtr_{\mathbb{K}} frac(A(V))$ e aplicando a proposição 1.14 obtemos $grtr_{\mathbb{K}} frac(A(V)) = grtr_{\mathbb{K}} K(V)$.

□

Proposição 1.21. *Se X uma variedade irredutível então* $\dim X = grtr_{\mathbb{K}} K(X)$. *Em particular, para qualquer aberto não vazio U de X,* $\dim U = \dim X$.

Demonstração. A partir da proposição 1.14 temos que para qualquer aberto não vazio U de X, $K(U) \simeq K(X)$ e $grtr_{\mathbb{K}} K(X) < \infty$. Desta forma, a partir da proposição 1.20, todo aberto afim de X tem a mesma dimensão $r := grtr_{\mathbb{K}} K(X)$. A partir da proposição 1.18 temos que $\dim X \geq r$. Suponha que $\dim X > r$, assim existe uma cadeia $F_1 \subsetneq F_2 \subsetneq \cdots \subsetneq F_{r+1}$ de fechados irredutíveis de X. Considere $x \in F_{r+1}$ e U um aberto afim contendo x. Para todo i, temos que $F_i \cap U$ é irredutível (pois é um aberto não vazio de F_i) e fechado em U. Desde que $\overline{F_i \cap U} = F_i$, segue que $F_i \cap U \subsetneq F_{i+1} \cap U$. Desta forma temos uma cadeia de comprimento $r+1$ de fechados irredutíveis de U, o que é uma contradição. Portanto $\dim X = r$. □

Observação 1.6. *A proposição acima garante que toda variedade irredutível possui dimensão finita e consequentemente toda coleção não vazia de fechados irredutíveis de uma variadade irredutível possui um elemento maximal. Mais geralmente, a partir da proposição 1.19 temos que a dimensão de uma variedade X é o máximo das dimensões* *de suas componentes irredutíveis, ou seja, qualquer variedade possui dimensão finita. Aplicando a proposição 1.21, podemos ver em [9], página 25, que se X e Y são variedades irredutíveis, então* $\dim X \times Y = \dim X + \dim Y$.

Exemplo 1.14. *Temos que $K(\mathbb{A}^n) \simeq frac(\mathbb{K}[T_1, \dots, T_n])$ assim* $\dim \mathbb{A}^n = n$. *Vimos no exemplo 1.8 que $GL(n, \mathbb{K})$ é um aberto principal de $\mathbb{A}^{n^2}$, assim* $\dim GL(n, \mathbb{K}) = \dim \mathbb{A}^{n^2} = n^2$.

Definição 1.15. *Sejam X uma variedade e Y uma subvariedade fechada irredutível de X. Definimos a codimensão de Y em X sendo o máximo dos comprimentos de cadeias to tipo $F_0 \subsetneq F_1 \subsetneq \cdots \subsetneq F_n$, onde cada F_i é um fechado irredutível de X e $F_0 = Y$. Vamos representar tal número por $codim_X Y$.*

Teorema 1.2. *Seja V uma variedade afim irredutível. Então toda cadeia maximal de ideais primos de $A(V)$ possui comprimento igual a* $\dim A(V)$. *Em particular, se $\boldsymbol{p}$ é um ideal primo de $A(V)$ então* $ht(\boldsymbol{p}) + \dim(A(V)/\boldsymbol{p}) = \dim A(V)$.

Demonstração. Veja [6] página 100. □

Para qualquer variedade afim irredutível V e $Y \subseteq V$ um fechado irredutível, o teorema acima nos fornece a igualdade $\dim X - \dim Y = codim_X Y$.

Definição 1.16. *Seja X uma variedade afim e $f \in A(X) - 0$ não invertível. O conjunto de zeros $Z_X(f)$, de f em X é chamado de hipersuperfície em X.*

Exemplo 1.15. *Temos que $SL(n, \mathbb{K})$ é uma hipersuperfície em $GL(n, \mathbb{K})$ ou até mesmo em $\mathbb{A}^{n^2}$, definida por* $f = \det -1$.

Proposição 1.22. *Seja X uma variedade afim irredutível e Y um subconjunto fechado irredutível de codimensão 1. Então Y é uma componente irredutível de alguma hipersuperfície $Z_X(f)$ para algum $f \in A(X)$.*

Demonstração. Temos que $Y \subsetneq X$, assim, pelo teorema dos zeros de Hilbert, existe um ideal primo $\mathbf{p}$ não nulo de $A(X)$ tal que $Y = Z_X(\mathbf{p})$. Tome $f \in \mathbf{p} - 0$, assim $Y \subseteq Z_X(f) \subsetneq X$. Seja Z uma componente irredutível de $Z_X(f)$ contendo Y. A partir da proposição 1.18 temos que $\dim Y \leq \dim Z < \dim X$, assim $\dim Y \leq \dim Z \leq \dim X - 1 = \dim Y$, logo $\dim Z = \dim Y$ e portanto $Z = Y$. □

A partir do teorema do ideal principal de Krull poderemos provar a recíproca da proposição 1.22 e generalizar tal resultado para uma variedade arbitrária.

Teorema 1.3. *(teorema do ideal principal de Krull) Seja a um elemento não invertível de um anel Noetheriano R. Então todo primo minimal do ideal (a) tem altura no máximo igual a* 1.

Demonstração. Veja [6] página 101. □

Proposição 1.23. *Sejam X uma variedade afim irredutível, $f \in A(X) - 0$ um elemento não invertível e Y uma componente irredutível de $Z_X(f)$. Então $codim_X Y = 1$.*

Demonstração. Temos que toda componente irredutível Y de $Z_X(f)$ corresponde a um ideal primo minimal $\mathbf{p}_Y$ do ideal (f). A partir dos teoremas 1.2 e 1.3 segue que $codim_X Y = ht(\mathbf{p}_Y) \leq 1$. Desde que $A(X)$ é domínio e $f \neq 0$, segue que $0 \subsetneq \mathbf{p}_Y$ e 0 é um ideal primo, assim $1 = ht(\mathbf{p}_Y) = codim_X Y$. □

Teorema 1.4. *Sejam X uma variedade irredutível, $U \subseteq X$ um aberto e $f \in \mathcal{O}_X(U) - 0$ um elemento não invertível. Então cada componente irredutível Y do conjunto $Z_U(f) := \{x \in U | f(x) = 0\}$ é tal que $\dim Y = \dim X - 1$.*

Demonstração. Seja U_0 um aberto afim contido em U tal que $U_0 \cap Y \neq \varnothing$. Assim $U_0 \cap Y$ é irredutível (pois é aberto em Y). Tome $g = f|_{U_0} \in \mathcal{O}_X(U_0)$. Temos que $Z_{U_0}(g) = U_0 \cap V_U$, logo $U_0 \cap Y$ é uma componente irredutível de $Z_{U_0}(g)$. Aplicando a proposição 1.23, segue que $codim_{U_0}(U_0 \cap Y) = 1$, ou seja, $\dim U_0 - \dim(U_0 \cap Y) = 1$. Desde que $\dim U_0 = \dim U = \dim X$ e $\dim(U_0 \cap Y) = \dim Y$ (pois $U_0 \cap Y$ é aberto Y) segue que $\dim X - 1 = \dim Y$. □

Observe que a recíproca do teorema 1.4 é imediata: Se Y é um fechado irredutível de uma variedade irredutível X tal que $\dim Y = \dim X - 1$, então para todo aberto U de X tal que $U \cap Y \neq \varnothing$ e toda função $f \in \mathcal{O}_X(U)$ tal que $Y \cap U \subseteq Z_U(f)$, $Y \cap U$ é uma componente irredutível de $Z_U(f)$. De fato, seja W uma componente irredutível de $Z_U(f)$ que contém $Y \cap U$. Observe que $\dim X - 1 = \dim(Y \cap U) \leq \dim W < \dim U = \dim X$, assim $\dim(Y \cap U) = \dim W$ donde $Y \cap U = W$.

Corolário 1.2. *Sejam X uma variedade irredutível e Y um fechado irredutível maximal contido propriamente em X (isto é, não existe um fechado irredutível Z tal que $Y \subsetneq Z \subsetneq X$). Então $\dim Y = \dim X - 1$.*

Demonstração. Seja U um aberto afim de X tal que $Y \cap U \neq \varnothing$. Assim podemos tomar $f \in \mathcal{O}_X(U) - 0$ tal que $Y \cap U \subseteq Z_U(f)$. Seja W uma componente irredutível de $Z_U(f)$ que contém $Y \cap U$. Observe que $\overline{Y \cap U} \subseteq \overline{W}$, assim $Y \subseteq \overline{W}$. Desde que $\overline{W}$ é irredutível segue que $Y = \overline{W} \supseteq W$, assim $Y \cap U = W$, ou seja, $Y \cap U$ é uma componente irredutível de $V_U(f)$, logo $\dim Y = \dim(Y \cap U) = \dim X - 1$. □

Corolário 1.3. *Se X é uma variedade irredutível e Y um fechado irredutível de X então $codim_X Y = \dim X - \dim Y$.*

Demonstração. Faremos por indução sobre a dimensão n de X. Para $n = 1$, temos $\dim Y = 0 = \dim X - 1 = \dim X - codim_X Y$. Supondo válido para $n-1$, vamos verificar que vale para n. Seja $r = codim_X Y$. Existe uma cadeia maximal $Y \subsetneq Y_1 \subsetneq \cdots \subsetneq Y_{r-1} \subsetneq X$ de fechados irredutíveis. Observe que $\dim Y_{r-1} = \dim X - 1 = n-1$(via corolário 1.2) e $codim_{Y_{r-1}} Y = r-1$, assim, por hipótese de indução, $r = codim_{Y_{r-1}} Y + 1 = (\dim X - 1 - \dim Y) + 1 = \dim X - \dim Y$. □

Corolário 1.4. *Seja X uma variedade irredutível e Y uma componente irredutível de $Z_X(f_1, \ldots, f_r)$, onde $f_1, \ldots, f_r \in \mathcal{O}_X(X)$. Então $codim_X Y \leq r$.*

Demonstração. Faremos por indução sobre r. O caso $r = 1$ segue do teorema 1.4. Supondo válido para $r-1$, vamos verificar que vale para r. Note que Y é um fechado irredutível de $Z_X(f_1, \ldots, f_{r-1})$, assim podemos considerar uma componente irredutível Z de $Z_X(f_1, \ldots, f_{r-1})$ contendo Y. Observe que Y é uma componente irredutível de $Z \cap Z_X(f_r)$, pois $Z \cap Z_X(f_r) \subseteq Z_X(f_1, \ldots, f_r)$. Por hipótese de indução, $codim_X Z \leq r-1$. Se f_r se anula em todo o Z então $Z \cap Z_X(f_r) = Z$, assim $Y = Z$. Se f_r não é nula em todo o Z, segue do teorema 1.4 que $\dim Y = \dim Z - 1$, assim $codim_X Y = \dim X - \dim Y = \dim X - \dim Z + 1 = codim_X Z + 1 \leq r$. □

Proposição 1.24. *Seja X uma variedade afim irredutível e $Z_1 \supseteq Z_2 \supseteq \cdots \supseteq Z_r$ uma cadeia de fechados irredutíveis de X tais que $codim_X Z_i = i$. Então existem $f_1, \ldots, f_r \in A(X)$ tal que Z_s é uma componente irredutível de $Z_X(f_1, \ldots, f_s)$ e todas as componentes de $Z_X(f_1, \ldots, f_s)$ tem codimensão s em X. Em particular se Z é um fechado irredutível de X tal que $codim_X Z = r \geq 1$ então existem $f_1, \ldots, f_r \in A(X)$ tais que Z é uma componente de $Z_X(f_1, \ldots, f_r)$.*

Demonstração. Faremos a prova por indução sobre s. Para $s = 1$ vimos na proposição 1.22 que existe $f_1 \in A(X)$ tal que Z_1 é uma componente de $Z_X(f)$ e pelo teorema 1.4 todas as componentes de $Z_X(f)$ tem codimensão 1 em X. Agora suponha que encontramos $f_1, \ldots f_{s-1}$ satisfazendo a proposição. Sejam $Y_1, \ldots, Y_l$ as componentes irredutíveis de $Z_X(f_1, \ldots, f_{s-1})$, com $Z_{s-1} = Y_1$. Note que $Y_i \not\subseteq Z_s$ para todo i (por causa de suas codimensões em X), assim $\mathfrak{I}(Z_s) \not\subseteq \mathfrak{I}(Y_i)$ para todo i. Desde que $\mathfrak{I}(Y_i)$ é primo, segue que $\mathfrak{I}(Z_s) \not\subseteq \displaystyle\bigcup_{i=1}^{l} \mathfrak{I}(Y_i)$ (Veja [1], página 8). Desta forma, podemos escolher $f_s \in \mathfrak{I}(Z_s)$, tal que $f_s \notin \displaystyle\bigcup_{i=1}^{l} \mathfrak{I}(Y_i)$. Se Y é uma componente irredutível de $Z_X(f_1, \ldots, f_s)$ então existe $i \in \{1, \ldots, l\}$ tal que Y é uma componente irredutível de $Y_i \cap Z_X(f_s)$. Desde que f_s não é identicamente nula em Y_i, segue que $\dim Y = \dim Y_i - 1$, assim $codim_X Y = \dim X - \dim Y = \dim X - \dim Y_i + 1 = s$. Por fim, pela escolha de f_s, temos que $Z_s \subseteq Z_X(f_1, \ldots, f_s)$, e sendo irredutível, Z_s está contido em alguma componente irredutível W de $Z_X(f_1, \ldots, f_s)$. Desde que $\dim Z_s = s = \dim W$ segue que $Z_s = W$. $\square$

1.4.2 Morfismos

Definição 1.17. *Seja $\varphi : X \longrightarrow Y$ um morfismo de variedades. As fibras de φ são os conjuntos $\varphi^{-1}(y)$, com $y \in Y$.*

Dado uma variedade Y e $y \in Y$, afirmamos que o conjunto $\{y\}$ é fechado em Y. De fato, para todo aberto afim U de Y contendo y temos que $\{y\}$ é fechado em U(pois conjuntos com um único elemento são fechados em variedades afins), desta forma lembrando que Y é coberto por abertos afins nossa afirmação conclui-se do seguinte resultado topológico: Em um espaço topológica Z um subconjunto W é fechado se, e somente se, Z admite uma cobertura aberta tal que para cada aberto U dessa cobertura $U \cap W$ é fechado em W.

Desta maneira as fibras de um morfismo de variedades $\varphi : X \longrightarrow Y$ sempre são subconjuntos fechados de X.

Definição 1.18. *Seja $\varphi : X \longrightarrow Y$ um morfismo de variedades. Se X é irredutível e $\varphi(X)$ é denso em Y, dizemos que φ é dominante.*

Proposição 1.25. *Seja $\varphi : X \longrightarrow Y$ um morfismo dominante de variedades. Se U é um aberto de Y então o comorfismo $\varphi_U* : \mathcal{O}_Y(U) \longrightarrow \mathcal{O}_X(\varphi^{-1}(U))$ é injetor.*

Demonstração. Tome $f \in ker(\varphi_U^*)$, assim $f \circ \varphi = 0$, ou seja, f se anula em $\varphi(\varphi^{-1}(U))$, logo $\varphi(X) \subseteq V_U(f)$. Desde que $\varphi(\overline{\varphi^{-1}(U)}) \subseteq \overline{\varphi(\varphi^{-1}(U))}$ (propriedade de funções contínuas entre espaços topológicos) e X é irredutível, segue que $\varphi(\varphi^{-1}(U))$ é denso em Y, assim $\varphi(\varphi^{-1}(U))$ também é denso em U, logo $V_U(f) = U$, ou seja, $f = 0$. Portanto φ_U^* é injetiva. $\square$

Observação 1.7. *No caso que Y é uma variedade afim ainda temos a recíproca: Se $\varphi : X \longrightarrow Y$ é um morfismo tal que $\varphi^* : \mathcal{O}_X(X) \longrightarrow A(Y)$ é injetivo, então φ é dominante. De fato, seja $W = \overline{\varphi(X)}$. Suponha que $W \subsetneq Y$. Desta forma, existe $f \in A(Y) - 0$ tal que $f|_W = 0$, assim $0 = f \circ \varphi = \varphi^*(f)$, o que é uma contradição.*

Observe que se X e Y são variedades irredutíveis e $\varphi : X \longrightarrow Y$ é um morfismo dominante, então a coleção de comorfismos $\{\varphi_U^*\}$, com U variando na coleção dos abertos não vazios de X, induz um homomorfismo injetivo $\overline{\varphi}^* : K(Y) \longrightarrow K(X)$ dado por $\overline{\varphi}^*(f_Y) = (f \circ \varphi)_X$. Desta maneira $grtr_{\mathbb{K}} K(Y) \leq grtr_{\mathbb{K}} K(X)$, ou seja, $\dim Y \leq \dim X$.

Lema 1.1. *Sejam $\varphi : X \longrightarrow Y$ um morfismo dominante de variedades (irredutíveis), W um fechado irredutível de Y e Z uma componente irredutível de $\varphi^{-1}(W)$. Então existem abertos afins não vazios, $U \subseteq X$, $V \subseteq Y$ tais que : (1) $\varphi(U) \subseteq V$, (2) $\varphi|_U : U \longrightarrow V$ é dominante, (3) $W \cap V \neq \varnothing$, (4) $Z \cap U \neq \varnothing$.*

Demonstração. Seja V um aberto afim de Y que intersecta W e que $\varphi^{-1}(V) \cap Z \neq \varnothing$. Tome $z \in \varphi^{-1}(V) \cap Z \neq \varnothing$ e $U \subseteq \varphi(V)$ sendo um aberto afim contendo z. É suficiente mostrarmos que $\varphi|_U : U \longrightarrow V$ é dominante. Seja Ω um aberto não vazio de V. Como φ é dominante, $\Omega \cap \varphi(X) \neq \varnothing$, assim $\varphi^{-1}(\Omega)$ é um aberto não vazio de X. Desde que X é irredutível, então $U \cap \varphi^{-1}(\Omega) \neq \varnothing$, logo $\varphi(U) \cap \Omega \neq \varnothing$. $\square$

Com as notações do lema acima, observe que $\dim X = \dim U$, $\dim Y = \dim V$, $\dim Z = \dim(Z \cap U)$, e $Z \cap U$ é uma componente irredutível de $\varphi|_U^{-1}(V \cap W)$. Com este recurso podemos reduzir muitas afirmações sobre morfismos e dimensões ao caso em que X e Y são variedades afins.

Teorema 1.5. *Sejam $\varphi : X \longrightarrow Y$ um morfismo dominante de variedades (irredutíveis) e $r = \dim X - \dim Y$. Se $W \subseteq Y$ é um fechado irredutível e Z é uma componente irredutível de $\varphi^{-1}(W)$ a qual domina W (isto é, $\overline{\varphi(Z)} = W$), então $\dim(Z) \geq \dim W + r$. Em particular, se $y \in \varphi(X)$ então cada componente de $\varphi^{-1}(y)$ tem dimensão maior do que ou igual a r.*

Demonstração. A partir do lema 1.1 podemos reduzir nossa demonstração ao caso onde Y é uma variedade afim irredutível. Se $s = codim_Y W$, então, a partir da proposição 1.24, existem $f_1, \ldots, f_s \in A(Y)$ tais que W é uma componente irredutível de $V_Y(f_1, \ldots, f_s)$. Tome $g_i := f_i \circ \varphi \in \mathcal{O}_X(X)$. Desta forma, $Z \subseteq V_X(g_1, \ldots, g_s)$. Afirmamos que Z é uma componente irredutível de $V_X(g_1, \ldots, g_s)$. De fato, suponha que Z' é uma componente irredutível de $V_X(g_1, \ldots, g_s)$ que contém Z, assim $W = \overline{\varphi(Z)} \subseteq \overline{\varphi(Z')} \subseteq V_Y(f_1, \ldots, f_s)$. Desde que W é uma componente irredutível de $V_X(f_1, \ldots, f_s)$ e $\overline{\varphi(Z')}$ é irredutível, segue que $W = \overline{\varphi(Z')}$. Desta forma $Z' \subseteq f^{-1}(W)$. Desde que Z é uma componente irredutível de $f^{-1}(W)$, segue que $Z = Z'$. Assim, pelo corolário 1.4 , temos que $codim_X Z \leq s$, ou seja, $\dim Z \geq \dim X - s = \dim X - \dim Y + \dim W = r + \dim W$. $\square$

Definição 1.19. *Seja $\varphi : X \longrightarrow Y$ um morfismo de variedades afins. Dizemos que φ é finito se $A(X)$ é uma extensão inteira de $\varphi^*(A(Y))$ (veja [1], página 60).*

Proposição 1.26. *Seja $\varphi : X \longrightarrow Y$ um morfismo finito de variedades afins irredutíveis.*

(i) Se Z é fechado em X então $\varphi(Z)$ é fechado em Y.

(ii) Para todo $y \in Y$, $\varphi^{-1}(y)$ é um conjunto finito.

(iii) φ é sobrejetivo se, e somente se, φ é dominante.

Demonstração. Veja [12], página 41. □

Exemplo 1.16. *(1) Se X é uma variedade afim e Y é um fechado irredutível de X então o morfismo inclusão $i_Y : Y \longrightarrow X$ é finito. De fato, temos que $i_Y^* : A(X) \longrightarrow A(Y)$ é sobrejetor, assim $A(Y)$ é inteiro sobre $i_Y^*(A(X)) = A(Y)$.*

(2) Se $f : X \longrightarrow Y$ e $g : Y \longrightarrow Z$ são morfismos finitos, então $g \circ f$ é um morfismo finito. De fato, temos que $A(X)$ é inteiro $(f^* \circ g^*)(A(Z)) = (g \circ f)^*(A(Z))$ (Veja [1], página 60).

(3) Seja $\psi : X \longrightarrow Y$ um morfismo finito e $Z \subseteq X$, $W \subseteq Y$, fechados irredutíveis tais que $\psi(Z) \subseteq W$. Então a aplicação $\varphi = \psi|_Z : Z \longrightarrow W$ também é um morfismo finito. De fato, observe que $\varphi^* \circ i_W^* = i_Z^* \circ \psi^*$. Desde que $A(Z)$ é inteiro sobre $(i_Z^* \circ \psi^*)(A(Y))$ e i_W^* é sobrejetor, segue que $A(Z)$ é inteiro sobre $\varphi^*(A(W))$.

Teorema 1.6. *Seja $\varphi : X \longrightarrow Y$ um morfismo dominante de variedades irredutíveis e $r = \dim X - \dim Y$. Então existe um aberto não vazio $U \subseteq Y$ tal que*

(i) $U \subseteq \varphi(X)$;

(ii) Para todo fechado irredutível $W \subseteq Y$ tal que $W \cap U \neq \varnothing$ e para todo componente irredutível Z de $\varphi^{-1}(W)$ tal que $Z \cap \varphi^{-1}(U) \neq \varnothing$, $\dim Z = \dim W + r$.

Demonstração. A partir do lema 1.1, podemos reduzir a demonstração ao caso em que X e Y são variedades afins irredutíveis. Sejam $R = A(X)$, $S = A(Y)$, e E, F os seus corpos de frações respectivamente. Desde que φ é dominante, $\varphi^* : S \longrightarrow R$ é injetivo; desta forma φ^* induz um homomorfismo injetor $\varphi^{**} : E \longrightarrow F$ dada por $\varphi^{**}(a/s) = \varphi^*(a)/\varphi^*(b)$. Seja R' o anel obtido pela localização de R em $\varphi^*(S - 0)$. Observe que $R \otimes_S E \simeq R'$ (veja [1], página 39), onde o isomorfismo é tal que $r \otimes_R (a/b) \mapsto r.\varphi^*(a)/\varphi^*(b)$. Assim $R \otimes_S E$ é um domínio com corpo de frações isomorfo a F, e assim como R', é uma E-álgebra. Desde que $K(X) \simeq F$ e $K(Y) \simeq E$, temos $grtr_E(R \otimes_S E) = grtr_E F = grtr_{K(Y)} K(X) = grtr_{\mathbb{K}} K(X) - grtr_{\mathbb{K}} K(Y) = r$. A partir do lema da normalização de Noether, existem $x_1, \ldots, x_r \in R \otimes_S E$, algebricamente independentes sobre E, tais que $R \otimes_S E$ é inteiro sobre $E[x_1, \ldots, x_r]$. Podemos assumir que cada $x_i \in R$, pois cada elemento de $R \otimes_S E$ é um produto de um elemento de R com um elemento não nulo de E. Desta forma φ^* induz um homomorfismo injetor $\psi : S[x_1, \ldots, x_n] \longrightarrow R$, onde $\psi(s) = \varphi^*(s)$ para $s \in S$ e $\psi(x_i) = x_i$. R não é necessariamente integral sobre $\psi(S[x_1,\ldots,x_n])$, porém R é finitamente gerado como S-álgebra (via φ^*), e cada gerador satisfaz a equação de um polinômio mônico com coeficientes em $E[x_1,\ldots,x_r]$. Tomando $f \in S$ como o denominador comum de tais equações polinomiais, segue que $\psi_f : S_f[x_1,\ldots,x_n] \longrightarrow R_{\varphi^*(f)}$, dado por $\psi_f(a/f^n) = \psi(a)/\psi(f)^n$ é injetor e $R_{\varphi^*(f)}$ é inteiro sobre $\psi_f(S_f[x_1,\ldots,x_r])$.

Seja $U := D_Y(f)$. Desta forma $\varphi^{-1}(U) = D_X(\varphi^*(f))$. A partir da proposição 1.15, temos que o anel de coordenadas de $U \times \mathbb{A}^r$ é isomorfo a $S_f \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{K}[T_1,\ldots,T_r] \simeq S_f[x_1,\ldots,x_r]$. A partir da proposição 1.8, existe um morfismo $\pi : \varphi^{-1}(U) \longrightarrow U \times \mathbb{A}^r$ tal que $\pi^* = \psi_f$. Em particular π é finito e dominante, assim também é sobrejetor. Observe que $\varphi_U^* : S_f \longrightarrow R_f$ é tal que $\varphi_U^* = \psi_f \circ i_{S_f}$ (φ_U^* é o comorfismo de $\varphi|_{\varphi^{-1}(U)} : \varphi^{-1}(U) \longrightarrow U$), onde $i_{S_f} : S_f \longrightarrow S_f[x_1,\ldots,x_n]$ é a inclusão. Seja $p_1 : U \times \mathbb{A}^r \longrightarrow U$ a projeção. Note que $p_1^* = i_{S_f}$, assim $\varphi_U^* = (p_1 \circ \pi)^*$, logo $\varphi|_{\varphi^{-1}(U)} = p_1 \circ \pi$. Desde que π é sobrejetor, segue que $\varphi|_{\varphi^{-1}(U)} : \varphi^{-1}(U) \longrightarrow U$ é sobrejetor, assim $U \subseteq \varphi(X)$, o que prova (i).

Para provar (ii) consideramos um fechado irredutível $W \subseteq Y$ tal que $W \cap U \neq \varnothing$ e uma componente irredutível Z de $\varphi^{-1}(W)$ tal que $Z \cap \varphi^{-1}(U) \neq \varnothing$. A partir do teorema 1.5 temos que $\dim Z \geq \dim W + r$. Por outro lado, considere $W_0 = W \cap U$ e $Z_0 = Z \cap \varphi^{-1}(U)$. Desta forma $\overline{\pi(Z_0)} \subseteq W_0 \times \mathbb{A}^r$, assim $\dim \overline{\pi(Z_0)} \leq \dim(W_0 \times \mathbb{A}^r) = \dim W + r$. A partir do exemplo 1.16 (3), segue que o morfismo $\pi' = \pi|_Z : Z \longrightarrow \overline{\pi(Z_0)}$ é finito e dominante, assim $(\pi')^*$ induz um homomorfismo injetor $K(\overline{\pi(Z_0)}) \longrightarrow K(Z)$ que torna $K(Z)$ inteiro sobre $K(\overline{\pi(Z_0)})$, logo $\dim Z = \dim(\overline{\pi(Z_0)}) \leq \dim W + r$. □

Seja $F \subset E$ é uma extensão algébrica e finita de corpos. Os elementos de E que são separáveis sobre F (veja [16], página 63) formam um subcorpo E_s de E e $F \subset E_s$ é uma extensão algébrica separável. Denotamos o grau da extensão $F \subset E_s$ por $[E : F]_s$ e o chamamos de grau de separabilidade de $F \subset E$.

Se X e Y são variedades irredutíveis e $\phi : X \longrightarrow Y$ é um morfismo dominante então ϕ induz homomorfismo injetor $K(Y) \hookrightarrow K(X)$ de $\mathbb{K}$-álgebras assim podemos ver $K(X)$ como uma extensão de $K(Y)$. Além disso, temos que $grtr_{K(Y)} K(X) = grtr_{\mathbb{K}} K(X) - grtr_{\mathbb{K}} K(Y) = \dim X - \dim Y$. Desta forma se $\dim X = \dim Y$ se, e somente se, $K(X)$ é algébrico sobre $K(Y)$.

Definição 1.20. *Com as notações acima, se $K(X) = K(Y)$ então dizemos que ϕ é um morfismo birracional. Se $K(X)$ é uma extensão separavelmente algébrica de $K(Y)$ dizemos que ϕ é separável.*

Agora veremos uma versão mais forte do teorema 1.6, o qual envolve uma aplicação geométrica do número $[K(X) : K(Y)]_s$.

Teorema 1.7. *Sejam X, Y variedades irredutíveis e $\phi : X \longrightarrow Y$ um morfismo dominante. Tome $r = \dim X - \dim Y$. Existe um aberto $U \subseteq X$ com as seguintes propriedades:*

(i) A restrição $\phi|_U : U \longrightarrow Y$ é um morfismo aberto;

(ii) Para qualquer variedade Z, $\phi|_U$ induz um morfismo aberto $U \times Z \longrightarrow Y \times Z$;

(iii) Se W é um fechado irredutível de Y e Z é uma componente irredutível de $\phi^{-1}(W)$ que intersecta U, então $\dim Z = \dim W + r$;

(iv) Se $r = 0$ então para todo $x \in U$, o número de pontos da fibra $\phi^{-1}(\phi(x))$ é igual a $[K(X) : K(Y)]_s$.

Demonstração. Veja [16], página 81. □

Definição 1.21. *Um ponto x de uma variedade irredutível X é dito normal se existe um aberto afim U contendo x tal que $A(U)$ é integralmente fechado. Se todo ponto de X é normal então dizemos que X é normal.*

Nem sempre morfismos bijetivos e birracionais de variedades são isomorfismos. O teorema abaixo garante quando esse tipo de situação pode acontecer.

Teorema 1.8. *Sejam X e Y variedades irredutíveis, com Y normal.*

(i) Se $\phi : X \longrightarrow Y$ é um morfismo bijetivo e birracional então ϕ é um isomorfismo.

(ii) O conjunto dos pontos normais de X é um aberto não vazio.

Demonstração. Veja [16], páginas 85 e 86. □

Definição 1.22. *Seja X uma variedade. Um subconjunto W de X é dito construtível se é uma união finita de subconjuntos localmente fechados de X.*

Exemplo 1.17. *Se Y é um subconjunto construtível de uma variedade X, então Y contém um aberto denso de $\overline{Y}$. De fato, seja $Y = \bigcup_{i=1}^{n} L_i$, onde L_i é localmente fechado em X. Desta forma, $\overline{Y} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{L_i}$. Além disso, L_i é aberto em $\overline{L_i}$, assim $Z_i := \overline{L_i} - L_i$ é fechado em $\overline{Y}$, logo $Z := \bigcup_{i=1}^{n} Z_i$ é fechado em $\overline{Y}$. Desta maneira $W := \overline{Y} - Z$ é aberto em $\overline{Y}$. Observe que*

$$Y \cup Z = (\bigcup_{i=1}^{n} L_i) \cup (\bigcup_{i=1}^{n} Z_i) = \bigcup_{i=1}^{n} (L_i \cup Z_i) = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{L_i} = \overline{Y},$$

assim $W = (Y \cup Z) - Z = Y - Z \subseteq Y$*. Por fim, basta mostrarmos que* W *é denso em* $\overline{Y}$*. Suponha que* W *não é denso em* $\overline{Y}$*, assim existe um aberto não vazio de* $\overline{Y}$ *que está contido em* Z*. Seja* $r \leq n$*, o menor inteiro positivo tal que* $\bigcup_{i=1}^{r} Z_i$ *contém um aberto não vazio* U *de* Y*. Note que* $r > 1$*, pois se* $U \subseteq Z_i$*, então* U *é aberto em* $\overline{L_i}$ *e* $L_i \cap U = \varnothing$*, o que é um absurdo. Em particular,* $U \nsubseteq Z_r$*, logo* $U - Z_r$ *é um aberto não vazio de* $\overline{Y}$ *que está contido em* $\bigcup_{i=1}^{r-1} Z_i$*, o que contradiz a minimalidade de* r*. Portanto todo aberto não vazio de* $\overline{Y}$ *intersecta* W *em algum ponto.*

Proposição 1.27. *(Chevalley) Se* $\varphi : X \longrightarrow Y$ *é um morfismo de variedades e* $W \subseteq X$ *é um subconjunto construtível, então* $\varphi(W)$ *é um subconjunto construtível de* Y*. Em particular* $\varphi(X)$ *é construtível em* Y*.*

Demonstração. Desde que todo subconjunto localmente fechado de X tem estrutura de subvariedade e $\varphi(\bigcup_{i \in L} X_i) = \bigcup_{i \in L} \varphi(X_i)$, basta mostrarmos que $\varphi(X)$ é subconjunto construtível de Y. Além disso, podemos supor que X e Y são irredutíveis, pois para qualquer com ponente irredutível X_i de X, $\varphi(X_i)$ está contida em alguma componente irredutível de Y. Faremos a demonstração por indução sobre a dimensão de Y. Se $\dim Y = 0$ então Y contém um número finito de pontos, desta maneira $\varphi(X)$ é uma união finita de pontos de Y, logo é construtível. Suponha válido para o caso $\dim Y \leq n - 1$ $(n > 0)$, vamos mostrar que vale para $\dim Y = n$. Se φ não é dominante, então considere $Z = \overline{\varphi(X)}$, assim $\varphi(X) \subseteq Z$, e $\dim Z < \dim Y$, logo o resultado segue da hipótese de indução. Se φ é dominante, sejam $U \subseteq Y$ o aberto não vazio satisfazendo as condições do teorema 1.6, $Z_1, \ldots, Z_r$ as componentes irredutíveis de $Y - U$ e $W_{i1}, \ldots, W_{is_i}$ as componentes irredutíveis de $\varphi^{-1}(Z_i)$. Considere o morfismo $g_{ij} = \varphi|_{W_{ij}} : W_{ij} \longrightarrow Z_i$. Desde que $\dim Z_i < Y$, segue da hipótese de indução que $g_{ij}(W_{ij})$ é construtível em Z_i e desde que Z_i é fechado em Y, $g_{ij}(W_{ij})$ é construtível em Y. Observe que $\varphi(X) = U \cup \bigcup_{ij} g_{ij}(W_{ij})$, assim $\varphi(X)$ também é construtível em Y.

□

1.5 Variedades projetivas

Até aqui o nosso conceito mais concreto de variedades são as afins. nesta seção veremos outro tipo concreto de variedade, a qual é construída a partir da seguinte relação de equivalência em $\mathbb{K}^{n+1} - 0$: $x \sim y$ se, e somente se, existe $\lambda \in \mathbb{K} - 0$ tal que $x = \lambda y$.

Definição 1.23. $\mathbb{P}^n := (\mathbb{K}^{n+1} - 0)/\sim$ *é chamado de espaço projetivo n-dimensional sobre* $\mathbb{K}$*. Dado* $x = (x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$*, sua classe em* $\mathbb{P}^n$ *é representada por* $(x_0 : \cdots : x_n)$ *e tal classe é dita estar representada pelo sistema de coordenadas homogêneas de* x*.*

A primeira diferença entre os subconjuntos de $\mathbb{P}^n$ e $\mathbb{K}^n$ é que os polinômios $f \in \mathbb{K}[T_0, \ldots, T_n]$ não definem funções de $\mathbb{P}^n$ para $\mathbb{K}$, desde que sua imagem depende do representante da classe. Por exemplo, se f é um polinômio homogêneo de grau d, então $f(\lambda x_0, \ldots, \lambda x_n) = \lambda^d f(x_0, \ldots, x_n)$. Contudo, certos subconjuntos de $\mathbb{P}^n$ ainda podem ser definidos como o conjunto de zeros de polinômios.

Definição 1.24. *Sejam* $f \in \mathbb{K}[T_0, \ldots, T_n]$ *e* $\overline{x} \in \mathbb{P}^n$*. Dizemos que* $\overline{x}$ *é um zero de* f *se* $f(x) = 0$ *para todo qualquer sistema de coordenadas homogêneas* x *de* $\overline{x}$ *e neste caso escrevemos* $f(\overline{x}) = 0$*.*

Definição 1.25. *Seja* $S \subseteq \mathbb{K}[T_0, \ldots, T_n]$ *um conjunto de polinômios homogêneos. Definimos o conjunto de zeros (projetivos) de* S *por* $V(S) := \{x \in \mathbb{P}^n | f(x) = 0$*, para todo* $f \in S\}$*.*

Observação 1.8. *Mais adiante veremos que* $V(S)$ *tem estrutura de variedade algébrica. Desta forma, cometendo um certo abuso de linguagem até lá, chamaremos* $V(S)$ *de variedade projetiva definida por* S*.*

Vendo $\mathbb{K}[T_0, \ldots, T_n]$ como um anel graduado e a partir de algumas das propriedades dos seus ideais homogêneos (isto é, os ideais gerados por polinômios homogêneos), podemos ver que as variedades projetivas satisfazem propriedades idênticas às propriedades das variedades afins.

Proposição 1.28. *Sejam* I *e* J *ideais de um anel graduado* S*.*

(a) O ideal I *é homogêneo se, e somente se, para todo* $f \in I$*, com decomposição* $f = \sum_{d \in \mathbb{N}} f_d$ *(onde* f_d *é um polinômio homogêneo de grau* d*), tenhamos* $f_d \in I$ *para todo* d*.*

(b) Se I *e* J *são homogêneos então* $I + J$*,* $I.J$*,* $I \cap J$ *e* $\sqrt{I}$ *são ideais homogêneos. Em geral, se* $\{I_\alpha\}_{\alpha \in L}$ *é uma família de ideais homogêneos de* S *então* $\sum_{\alpha \in L} I_\alpha$ *é um ideal homogêneo.*

(c) Se I *é um ideal homogêneo e* $S = \bigoplus_{d \in \mathbb{N}} S_d$ *é a decomposição de* S *como anel graduado então* S/I *é um anel graduado com decomposição* $S/I = \bigoplus_{d \in \mathbb{N}} (S_d / S_d \cap I)$*.*

(d) *Suponha que I é um ideal homogêneo. Então I é primo se, e somente se, $g_i.g_j \in I$ implica $g_i \in I$ ou $g_j \in I$ para $g_i \in S_i$, $g_j \in S_j$.*

Demonstração. Veja [7], página 48. $\square$

Se $S \subseteq \mathbb{K}[T_0, \ldots, T_n]$ é um conjunto de polinômios homogêneos e I é o ideal gerado por S, então naturalmente $V(S) = V(I)$, ou seja, as variedades projetivas sempre são conjunto de zeros de ideais homogêneos. De maneira análoga às variedades afins, temos que $V(1) = \varnothing$, $V(0) = \mathbb{P}^n$, $\bigcap_{\alpha \in L} V(I_\alpha) = V(\sum_{\alpha \in L} I_\alpha)$ e $V(I_1) \cup V(I_2) = V(I_1 I_2)$, onde cada I_α, I_1 e I_2 são ideais homogêneos. Assim, a partir da proposição acima, temos que a coleção das variedades projetivas em $\mathbb{P}^n$ é fechada para uniões finitas e interseções arbitrárias. Portando a topologia que iremos trabalhar sobre $\mathbb{P}^n$ é tal que seus fechados sejam as variedades projetivas e tal topologia é chamada de topologia de Zariski no espaço projetivo.

Definição 1.26. *Seja $\pi : \mathbb{K}^{n+1} - 0 \longrightarrow \mathbb{P}^n$ a projeção canônica.*

(a) *Uma variedade afim $X \subseteq \mathbb{A}^n$ é dita um cone se $0 \in X$ e para todo $x \in X$ tivermos $\lambda x \in X$, para qualquer $\lambda \in \mathbb{K}$.*

(b) *Para um cone $X \subseteq \mathbb{A}^{n+1}$, o conjunto $\mathbb{P}(X) := \pi(X - 0) \subseteq \mathbb{P}^n$ é chamado de projetivização de X.*

(c) *Seja $V \subseteq \mathbb{P}^n$ uma variedade projetiva. O conjunto $C(V) := \pi^{-1}(V) \cup \{0\}$ é chamado de cone sobre X.*

Exemplo 1.18. *(i) Se $I \subsetneq \mathbb{K}[T_0, \ldots, T_n]$ é um ideal homogêneo então $C(V(I)) = Z(I) \subseteq \mathbb{A}^{n+1}$. De fato, desde que I é homogêneo temos que $0 \in Z(I)$. Dado $x \in C(V(I))$, temos que $f(\lambda x) = 0$ para todo $\lambda \in \mathbb{K} - 0$, assim $C(V) \subseteq Z(I)$. Por outro lado, se $x \in Z(I)$ então $f(x) = 0$, para todo $f \in I$; desde que I é homogêneo, devemos ter $f(\lambda x) = 0$ para todo $\lambda \in \mathbb{K}$, assim $\pi(x) \in V(I)$, logo $x \in C(V(I))$, ou seja, $Z(I) \subseteq C(V(I))$.*

(ii) Se $I = R$ então $C(V(I)) = Z(T_0, \ldots, T_n) = \{0\}$.

(iii) Se $X = Z(I) \subseteq \mathbb{A}^n$ é um cone, então I é um ideal homogêneo. De fato, dados $x \in X$ e $f \in I$, com decomposição $f = f_d + \cdots + f_1 + f_0$, onde f_i é um polinômio homogêneo de grau i, temos que $0 = f(\lambda x) = \lambda^d f_d(x) + \cdots + \lambda f_1(x) + f_0(x)$ para todo $\lambda \in \mathbb{K}$. Desde que $\mathbb{K}$ é algebricamente fechado devemos ter que $f_i(x) = 0$ para todo i, assim $f_i \in I$ para todo i (pois x é arbitrário). A partir da proposição 1.28 segue que I é um ideal homogêneo.

Se $I \subsetneq \mathbb{K}[T_0, \ldots, T_n]$ é um ideal homogêneo, vimos no exemplo acima que $Z(I)$ é um cone e, por construção, temos que $\mathbb{P}(Z(I)) = V(I)$ e $C(V(I)) = Z(I)$. Desta forma obtemos uma correspondência biunívoca entre os cones de $\mathbb{A}^{n+1}$ e as variedades projetivas de $\mathbb{P}^n$.

Definição 1.27. *Seja $X \subseteq \mathbb{P}^n$. O ideal $\mathbf{I}(X) := \{f \in \mathbb{K}[T_0, \ldots, T_n] | f(x) = 0$ para todo $x \in X\}$ é chamado ideal de definição de X.*

Exemplo 1.19. *1. $\mathbf{I}(X)$ é um ideal radical homogêneo. De fato, se $X = \varnothing$ então $I(X) = (1)$. Desta forma assuma que $X \neq \varnothing$. Desta maneira $\mathbf{I}(X) = \mathfrak{I}(C(X))$, assim I é um ideal radical. Com argumento análogo ao que foi visto no exemplo 1.18 (iii), obtemos que $\mathbf{I}(X)$ é homogêneo.*

2. Com demostrações análogas ao caso afim, temos que $V(\mathbf{I}(X)) = \overline{X}$, $I \subseteq \mathbf{I}(V(I))$, e as aplicações $\mathbf{I}(\cdot)$ e $V(\cdot)$ invertem inclusões. Em particular $\mathbb{P}^n$ é um espaço topológico Noetheriano. Desta forma, toda variedade projetiva é espaço topológico Noetheriano.

Teorema 1.9. *(Versão projetiva do teorema dos zeros de Hilbert) Seja $I \subseteq \mathbb{K}[T_0, \ldots, T_n]$.*

(i) $V(I) = \varnothing$ se, e somente se, $(T_0, \ldots, T_n) \subseteq \sqrt{I}$.

(ii) Se $V(I) \neq \varnothing$ então $\mathbf{I}(V(I)) = \sqrt{I}$.

Demonstração. Se $I = \mathbb{K}[T_0, \ldots, T_n]$ então $V(I) = \varnothing$ e (i) é trivialmente satisfeito. Assuma que $I \neq \mathbb{K}[T_0, \ldots, T_n]$. Desta forma $Z(I) = C(V(I)) \subseteq \mathbb{A}^n$, assim $V(I) = \varnothing$ se, e somente se $Z(I) = \{0\} = Z(T_0, \ldots, T_n)$ se, e somente se, $\sqrt{(I)} = (T_0, \ldots, T_n)$ (via versão afim do teorema dos zeros de Hilbert), assim (i) está provado. Agora vamos provar (ii). Se $V(I) \neq \varnothing$ então $\mathbf{I}(V(I)) = \mathfrak{I}(C(V)) = \mathfrak{I}(Z(I)) = \sqrt{I}$. □

A partir do teorema acima, temos uma correspondência biunívoca entre os ideais radicais homogêneos de $\mathbb{K}^n[T_0, \ldots, T_n]$, que não contêm $(T_0, \ldots, T_n)$, e as variedades projetivas não vazias de $\mathbb{P}^n$. Em particular, as variedades projetivas irredutíveis ainda correspondem aos ideais homogêneos primos. Mas em geral, os pontos não necessariamente correspondem aos ideais maximais. Desde que $\mathbf{I}(\mathbb{P}^n) = (0)$, segue que $\mathbb{P}^n$ é irredutível.

Definição 1.28. *Dado uma variedade projetiva $X \subseteq \mathbb{P}^n$, o anel*

$$A_h(X) := \mathbb{K}[T_0, \ldots, T_n]/\mathbf{I}(X)$$

é chamado de anel graduado associado a X.

A partir da proposição 1.28 (d), temos que de fato $A_h(X)$ é um anel graduado. Quando $X \neq \varnothing$, $A_h(X) = A(C(X))$. Assim como no caso afim ainda temos a correspondência entre os fechados de X e os ideais homogêneos radicais de $A_h(X)$. Contudo os elementos $f \in A_h(X)$ não definem funções em X, porém, a noção de zeros de f em X ainda está bem definida, isto é, são independentes do representante da classe.

Definição 1.29. *Sejam $X \subseteq \mathbb{P}^n$ uma variedade projetiva e $f \in A_h(X)$ um elemento homogêneo de grau positivo. O conjunto $D_X^+(f) := \{x \in X | f(x) \neq 0\}$ é chamado de aberto principal de X com relação a f.*

Proposição 1.29. *Com as notações da definição 1.29, todo aberto não vazio de X é uma união finita de abertos da forma $D_X^+(f)$.*

Demonstração. Seja U um aberto não vazio de X. Assim $X - U = V(I)$, para algum ideal homogêneo $I \subseteq \mathbb{K}[T_0, \ldots, T_n]$. Desta forma $I = (f_1, \ldots, f_r)$, onde f_i é um polinômio homogêneo de grau positivo. Se $\overline{f_i}$ é a imagem de f_i em $A_h(X)$, segue que $U = D_X^+(\overline{f_1}) \cup \cdots \cup D_X^+(\overline{f_r})$. $\square$

Nosso objetivo é tornar qualquer variedade projetiva $X \subseteq \mathbb{P}^n$ um espaço anelado. De maneira análoga às variedades afins, iremos definir um feixe de funções para os abertos principais de X e em seguida estendê-lo. Para isto precisamos associar cada aberto principal a uma $\mathbb{K}$-álgebra de funções definidas em tais abertos.

Proposição 1.30. *Seja $R = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} R_n$ um anel graduado e $S \subseteq R$ um sistema multiplicativo tal que seus elementos são homogêneos. Considere $S_n := \{a/s \in S^{-1}R | a$ é homogêneo e $n = grau(s) - grau(a)\}$. Então $S^{-1}R = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} S_n$ é um anel graduado.*

Demonstração. Veja [13], página 224. $\square$

Seja X uma variedade projetiva e $f \in A_h(X)$ homogêneo de grau positivo. Aplicando a proposição 1.30 sobre o anel localizado $A_h(X)_f$, obtemos que tal anel é graduado e o subanel de seus elementos de grau 0, o qual iremos denotar por $A_h(X)_{(f)}$, pode ser visto como uma $\mathbb{K}$-álgebra de funções ($\mathbb{K}$-avaliativas) definidas em $D_X^+(f)$, pois seus elementos são quocientes de funções homogêneas da forma g/f^i, onde $grau(g) = grau(f^i)$.

Proposição 1.31. *Seja $X \subseteq \mathbb{P}^n$ uma variedade projetiva. Os abertos principais de X satisfazem as seguintes condições:*

(i) Se $f, g \in A_h(X)$ são homogêneos de grau positivo, $D_X^+(g) \subseteq D_X^+(f)$ e $s \in A_h(X)_{(f)}$, então $s|_{D_X^+(g)} \in A_h(X)_{(g)}$.

(ii) *Se* $f \in A_h(X)$ *é homogêneo de grau positivo,* $D_X^+(f) = \bigcup_{i \in L} D_X^+(g_i)$ *com* $g_i \in A_h(X)$ *homogêneo de grau positivo, e se* $s : D_X^+(f) \longrightarrow \mathbb{K}$ *é uma função tal que* $s|_{D_X^+(g_i)} \in A_h(X)_{(g_i)}$ *para todo* $i \in L$*, então* $s \in D_X^+(f)$.

Demonstração. Desde que temos uma versão projetiva para o teorema dos zeros de Hilbert, a demonstração desta proposição torna-se inteiramente análoga a da proposição1.4, assim iremos omiti-la. □

Aplicando a proposição 1.31 na proposição B.1 do apêndice B, segue que existe um único feixe de funções $\mathcal{O}_X$ em X tal que $\mathcal{O}_X(D_X^+(f)) = A_h(X)_{(f)}$ para todo $f \in A_h(X)$ homogêneo de grau positivo. Em particular, dado um aberto $U \subseteq X$, $\mathcal{O}_X(U)$ é a $\mathbb{K}$-álgebra das funções $g : U \longrightarrow \mathbb{K}$ tal que, para cada $x \in U$, existe $f \in A_h(X)$ (dependendo de x), homogêneo, com $x \in D_X^+(f) \subseteq U$ e $g|_{D_X^+(f)} \in A_h(X)_{(f)}$.

Proposição 1.32. *Munidas com o feixe de funções encontrado a partir da proposição 1.31 temos que*

(i) *Variedades projetivas são prevariedades. Em particular* $\mathbb{P}^n$ *é coberta pelos abertos* $D_{\mathbb{P}^n}^+(T_i) = \{(x_0 : \cdots : x_n) \in \mathbb{P}^n) | x_i \neq 0\}$*, e a aplicação* $\psi_i : D_{\mathbb{P}^n}^+(T_i) \longrightarrow \mathbb{A}^n$ *dada por* $\psi_i(x_0 : \cdots : x_n) = (x_0/x_i, \ldots, x_{i-1}/x_i, x_{i+1}/x_i, \ldots, x_n/x_i)$*, é um isomorfismo des espaços anelados;*

(ii) *Variedades projetivas são separáveis, ou seja, são variedades algébricas;*

(iii) *O produto de variedades projetivas é novamente uma variedade projetiva.*

Demonstração.

(i) Veja [7], página 57.

(ii) Veja [7], página 60.

(iii) Veja [12], página 36. □

Exemplo 1.20. *Desde que* $D_{\mathbb{P}^n}^+(T_i)$ *é um aberto da variedade irredutível* $\mathbb{P}^n$ *e* $D_{\mathbb{P}^n}^+(T_i) \simeq \mathbb{A}^n$*, segue que* $n = dim\mathbb{A}^n = dimD_{\mathbb{P}^n}^+(T_i) = dim\mathbb{P}^n$.

Observação 1.9. *Dado um* $\mathbb{K}$*-espaço vetorial* V *de dimensão* n*, temos que* $V \simeq \mathbb{K}^n$*. De maneira análoga a* $\mathbb{K}^n$*, podemos definir o espaço projetivo* $\mathbb{P}(V)$*. Em particular temos um bijeção entre* $\mathbb{P}^{n-1}$ *e* $\mathbb{P}(V)$*. Assim podemos munir* $\mathbb{P}(V)$ *com uma estrutura de variedade algébrica, de modo que tal bijeção se torne um isomorfismo de variedades (de maneira análoga ao processo que usamos para encontrar a colagem de variedades).*

1.6 Variedades completas

Para finalizar este capítulo veremos algumas propriedades de variedades completas, as quais serão importantes para a definição de grupos algébricos parabólicos no próximo capítulo.

Definição 1.30. *Seja X uma variedade. Dizemos que X é completa se para qualquer variedade Y o morfismo projeção $X \times Y \longrightarrow Y$ é fechado.*

Exemplo 1.21. *Considere a projeção $\pi_2 : \mathbb{A}^2 \longrightarrow \mathbb{A}^1$, dada por $\pi_2(x, y) = y$, e $X = \{(x, y) \in \mathbb{A}^2 | xy = 1\}$. Desde que $\pi_2(X) = \mathbb{A}^1 - 0$ não é fechado em $\mathbb{A}^1$ segue que $\mathbb{A}^1$ não é uma variedade completa.*

Proposição 1.33. *Seja X uma variedade completa.*

(a) Se Y é uma subvariedade fechada de X então Y é completa;

(b) Se Y é uma variedade completa (arbitrária) então $X \times Y$ é uma variedade completa;

(c) Se $\varphi : X \longrightarrow Y$ é um morfismo então $\varphi(X)$ é fechada e completa;

(d) Se X é uma subvariedade de Y então X é fechado;

(e) Se X é irredutível então qualquer função regular em X é constante;

(f) Se X é afim então X é finito.

Demonstração. Veja [9], página 45. □

Teorema 1.10. *Qualquer variedade projetiva é completa.*

Demonstração. Veja [9], página 46. □

Capítulo 2

Grupos algébricos

De acordo com [3] (página 100) o conceito de grupo algébrico ocorreu pela primeira vez em meados de 1880 em um dos trabalhos de Émile Picard sobre a teoria de Galois de equações diferencias. Os grupos de Galois que apareceram em tal trabalho eram de fato grupos algébricos sobre o corpo dos números complexos. Neste capítulo veremos exemplos e resultados importantes de grupos algébricos, onde sua grande parte foi desenvolvida por Ellis Kolchin e Armand Borel durante o século 20. Para este capítulo as referências principais são [9] e [16].

2.1 Grupos algébricos

Definição 2.1. *Uma variedade algébrica G dotada com uma estrutura de grupo $(G, \cdot)$ é chamada de grupo algébrico se as aplicações $\mu : G \times G \longrightarrow G, i : G \longrightarrow G$, dadas por $\mu(a,b) = a \cdot b$ e $i(a) = a^{-1}$, são morfismos de variedades.*

Todo grupo algébrico G de dimensão não nula não é um grupo topológico, pois G satisfaz o axioma de separabilidade T_1 (isto é, todo subconjunto finito de G é fechado), mas não é Hausdorff (Todo grupo topológico que satisfaz T_1 é Hausdorff).

Exemplo 2.1. *(i) Seja $G_a := (\mathbb{A}^1, \mu)$, onde $\mu(x,y) = x + y$. Com esta configuração temos que G_a é um grupo, onde $i(x) = -x$. assim μ e i são morfismos. Portanto G_a é um grupo algébrico, o qual chamamos de grupo aditivo.*

(ii) Seja $G_m := (\mathbb{A}^1 - 0, \mu)$, onde $\mu(x,y) = xy$. De maneira análoga ao exemplo anterior, temos que G_m é um grupo algébrico, o qual chamamos de grupo multiplicativo.

(iii) Vimos no exemplo 1.8 que $GL(n, \mathbb{K})$ é uma variedade afim em $\mathbb{A}^{n^2}$. Dotando tal variedade com a multiplicação usual de matrizes, temos que $GL(n, \mathbb{K})$ é um

grupo algébrico (desde as funções coordenadas da multiplicação de matrizes e da inversão são polinomiais, aplicando a proposição 1.6 obtemos que tais aplicações são morfismos), o qual chamamos de grupo geral linear. Em particular, $G_m = GL(1, \mathbb{K})$.

Dado um subgrupo fechado H de um grupo algébrico G, vimos na proposição 1.10 que H tem uma estrutura de variedade tal que a inclusão de H em G é um morfismo. Desde que a operação de H provém da composição de tal inclusão com a operação de G, segue H é algébrico. Ou seja, todo subgrupo fechado de um grupo algébrico também é um grupo algébrico.

Exemplo 2.2. *(i) Seja* $T(n, \mathbb{K}) \subseteq GL(n, \mathbb{K})$ *o conjunto das matrizes triangulares superiores de invertíveis. Observe que* $T(n, \mathbb{K})$ *é um subgrupo fechado de* $GL(n, \mathbb{K})$*, pois é o conjunto de zeros dos polinômios* T_{ij} *com* $i > j$*. Desta forma* $T(n, \mathbb{K})$ *é um grupo algébrico. De maneira análoga, o subgrupo* $D(n, \mathbb{K})$ *das matrizes diagonais, o subgrupo* $U(n, \mathbb{K})$ *das matrizes triangulares superiores com elementos da diagonal iguais a* 1 *e o subgrupo* $SL(n, \mathbb{K})$ *das matrizes com determinante igual a* 1 *são grupos algébricos.*

(ii) Sejam G_1*,* G_2 *grupos algébricos. Dotando* $G_1 \times G_2$ *com a estrutura de produto direto, segue que* $G_1 \times G_2$ *é um grupo algébrico. Por exemplo,* $D(n, \mathbb{K})$ *pode ser visto como o produto de* n *cópias de* G_a.

Exemplo 2.3. *Seja* G *um grupo algébrico e* $x \in G$*. A translação* $\varphi_x : G \longrightarrow G$*, dada por* $\varphi_x(y) = y.x$ *é isomorfismo de* G *em sí mesmo como variedade. De fato, naturalmente* φ_x *tem inversa* $\varphi_{x^{-1}}$*, assim basta verificarmos que* φ_x *é um morfismo. Lembre que* $\{x\}$ *tem estrutura de subvariedade fechada de* G*. Considere a projeção* $p_2 : \{x\} \times G \longrightarrow G$*, e a operação de* G*,* $\mu : G \times G \longrightarrow G$*. Observe que* p_2 *é um isomorfismo de variedades e* $\varphi_x = \mu \circ p_2^{-1}$*, logo* φ_x *também é um morfismo de variedades.*

Definição 2.2. *Sejam* G, G' *grupos algébricos. Dizemos que uma aplicação* $\varphi : G \longrightarrow G'$ *é um morfismo de grupos algébricos se* φ *é um morfismo de variedades e um homomorfismo de grupos. Além disso, se* φ *também é um isomorfismo de variedades, então dizemos que* φ *é um isomorfismo de grupos algébricos.*

Entre as várias propriedades de um grupo algébrico, existe uma em especial para suas componentes irredutíveis.

Proposição 2.1. *Se* G *um grupo algébrico com elemento neutro* e *então apenas uma de suas componentes irredutíveis contém* e.

Demonstração. Sejam $X_1, X_2 \ldots, X_n$ as componentes de G contendo e. A imagem da variedade irredutível $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ sob o morfismo $\mu : X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n \longrightarrow G$, dado por $\mu(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1.x_2 \ldots x_n$, é o subconjunto irredutível $X_1.X_2 \ldots X_n$ de G, o qual novamente contém e. Desta forma, $X_1.X_2 \ldots X_n \subseteq X_i$ para algum i. Por outro lado, cada componente $X_1, \ldots, X_n$ está contido em $X_1.X_2 \ldots X_n$, o que implica $n = 1$. □

Definição 2.3. *Seja G um grupo algébrico. A única componente irredutível de G que contém seu elemento neutro é denotada por G° e a chamamos de componente identidade de G.*

Proposição 2.2. *Seja G um grupo algébrico.*

(a) G° é um subgrupo normal de índice finito, no qual as classes do quociente G/G° estão em uma correspondência biunívoca tanto com as componentes irredutíveis de G quanto as componentes conexas de G.

(b) Cada subgrupo fechado de G de índice finito contém G°.

Demonstração. (a) Para cada $x \in G^\circ$, a imagem de G° sob a translação $\varphi_{x^{-1}}$ é o conjunto $G^\circ x^{-1}$, o qual é uma componente irredutível de G que contém e, logo $G^\circ = G^\circ x^{-1}$, assim $x^{-1} \in G^\circ$, ou seja, $G^\circ = (G^\circ)^{-1}$. Desde que $\mu : G^\circ \times G^\circ \longrightarrow G$, dado por $\mu(x, y) = x.y$, é um morfismo, temos que a imagem $(G^\circ)^2$ de μ é um subconjunto irredutível de G que contém G°, assim $G^\circ = (G^\circ)^2$, donde G° é um subgrupo fechado de G. Tome $x \in G$, observe que $xG^\circ x^{-1}$ é uma componente irredutível de G, contendo e, assim $G^\circ = xG^\circ x^{-1}$, ou seja, G° é subgrupo normal de G. Observe que as classes de G/G° são translações de G°, desta forma são as componentes irredutíveis de G (desde que são disjuntas, também são as componentes conexas de G), ou seja, G° tem índice finito em G.

(b) Seja $H \subseteq G$ um subgrupo fechado de índice finito. Cada classe (à esquerda) de G/H é um subconjunto fechado de G, pois são translações de H. Se $\overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_n$ são tais classes, com $\overline{a}_1 = H$, então $H = G - (\bigcup_{i=2}^{n} \overline{a}_i)$, logo H também é aberto em G, assim $H \cap G^\circ$ é aberto e fechado em G°. A conexidade de G° implica $H \cap G^\circ = \varnothing$ ou $H \cap G^\circ = G^\circ$. Desde que $e \in H \cap G^\circ$, segue que $H \cap G^\circ = G^\circ$, isto é, $G^\circ \subseteq H$.

□

Daqui em diante quando $G = G^\circ$ diremos que G é conexo ao invés de irredutível, pois além dessas conceitos serem equivalentes quando se trata de grupos algébricos, em teoria das representações de grupos o termo irredutível tem um significado distinto do que vemos em variedades.

Lema 2.1. *Se U, V são abertos densos de um grupo algébrico G, então $G = U.V$.*

Demonstração. Desde que a inversão é um homeomorfismo, segue que V^{-1} é um aberto denso de G e para todo $x \in G$ a translação xV^{-1} também é um aberto denso. Desta forma $U \cap xV^{-1} \neq \varnothing$, logo existe $u \in U$ tal que $u = x.v^{-1}$ para algum $v \in V$, assim $x = u.v \in U.V$. □

Proposição 2.3. *Seja H um subgrupo de um grupo algébrico G e $\overline{H}$ seu fecho.*

(a) $\overline{H}$ é um subgrupo de G.

(b) Se H é construtível então $H = \overline{H}$.

Demonstração. (a) Desde que a inversão é um homeomorfismo, segue que $\overline{H}^{-1} = \overline{H^{-1}} = \overline{H}$. Desde que a translação por $x \in H$ também é um homeomorfismo, temos $x\overline{H} = \overline{xH} = \overline{H}$, ou seja, $H.\overline{H} \subseteq \overline{H}$. Desta forma, para todo $x \in \overline{H}$, temos que $H. \subseteq \overline{H}$, logo $\overline{H} \supseteq \overline{Hx} = \overline{H}x$, o que implica $\overline{H}.\overline{H} \subseteq \overline{H}$, donde $\overline{H}$ é um subgrupo de G.

(b) Desde que H é construtível, a partir do exemplo 1.17, segue que H contém um aberto denso U de $\overline{H}$. Aplicando o lema 2.1, obtemos $\overline{H} = U.U \subseteq H$. Portanto $H = \overline{H}$.

□

Corolário 2.1. *Sejam A, B subgrupos fechados de um grupo algébrico G. Se B normaliza A (isto é, para todo $x \in B$, $xAx^{-1} = A$) então AB é um subgrupo fechado de G.*

Demonstração. Desde que B normaliza A, $AB = BA$ é um subgrupo de G. Observe que $\mu(A \times B) = A.B$. Desde que $A \times B$ é construtível, a partir da proposição 1.27 temos que $A.B$ é construtível, assim $A.B = \overline{A.B}$. □

Proposição 2.4. *Seja $\varphi : G \longrightarrow G'$ um morfismo de grupos algébricos.*

(a) $Ker(\varphi)$ é um subgrupo fechado de G.

(b) $\varphi(G)$ é um subgrupo fechado de G'.

(c) $\varphi(G^\circ) = \varphi(G)^\circ$.

(d) $\dim Ker(\varphi) = \dim \varphi^{-1}(x)$ para todo $x \in \varphi(G)$.

(e) $\dim G = \dim Ker(\varphi) + \dim \varphi(G)$.

Demonstração. (a) Note que $Ker(\varphi) = \varphi^{-1}(\{e'\})$ (onde e' é o elemento neutro de G'), desde que $\{e'\}$ é fechado em G', segue que $Ker(\varphi)$ é um subgrupo fechado de G.

(b) A partir da proposição 1.27 temos que $\varphi(G)$ é um subconjunto construtível de G'. Aplicando a proposição 2.3 (b) obtemos que $\varphi(G)$ é um subgrupo fechado de G'.

(c) $\varphi(G^\circ)$ é um subgrupo fechado e conexo de $\varphi(G)$ e contém e', assim $\varphi(G^\circ) \subseteq \varphi(G)^\circ$. Observe que a aplicação $\overline{\varphi} : G/Ker(\varphi)G^\circ \longrightarrow \varphi(G)/\varphi(G^\circ)$, dada por $\overline{\varphi}(a.Ker(\varphi)G^\circ) = \varphi(a).\varphi(G^\circ)$, é uma bijeção, assim $(\varphi(G) : \varphi(G^\circ)) = (G : Ker(\varphi)G^\circ)$ (aqui usamos $(\varphi(G) : \varphi(G^\circ))$ para indicar o índice de $\varphi(G^\circ)$ em $\varphi(G)$). Desde que $(G : G^\circ) = (G : Ker(\varphi)G^\circ).(Ker(\varphi)G^\circ : G^\circ)$ (veja [11], página 12) segue que $(G : Ker(\varphi)G^\circ)$ é finito, assim $(\varphi(G) : \varphi(G^\circ))$ também é finito. A partir da proposição 2.2 (b) segue que $\varphi(G)^\circ \subseteq \varphi(G^\circ)$.

(d) Sejam $y \in \varphi^{-1}(x)$ e $\varphi_y : G \longrightarrow G$ a translação $\varphi_y(a) = ay$. Afirmamos que $\varphi_y(Ker(\varphi)) = \varphi^{-1}(x)$. De fato, se $a \in \varphi_y(Ker(\varphi))$ então $a = hy$ para algum $h \in Ker(\varphi)$, assim $\varphi(a) = x$. Desde que a é arbitrário temos $\varphi_y(Ker(\varphi)) \subseteq \varphi^{-1}(x)$. Por outro lado, se $a \in \varphi^{-1}(x)$ então $\varphi(a) = x = \varphi(y)$, assim $ay^{-1} \in Ker(\varphi)$, desta forma $a \in \varphi_y(Ker(\varphi))$, logo $\varphi^{-1}(x) \subseteq \varphi_y(Ker(\varphi))$. Portanto $\dim(Ker(\varphi)) = \dim \varphi_y(Ker(\varphi)) = \dim \varphi^{-1}(x)$.

(e) A partir do teorema 1.6, existe um aberto não vazio U de $\varphi(G^\circ)$ tal que para todo $x \in U$, temos $\dim \varphi^{-1}(x) = \dim G^\circ - \dim \varphi(G^\circ)$. Por (c) e (d), segue que $\dim G = \dim Ker(\varphi) + \dim \varphi(G)$.

$\square$

Exemplo 2.4. *Seja* $\varphi = det : GL(n, \mathbb{K}) \longrightarrow GL(1, \mathbb{K})$. *Temos que* φ *é um morfismo sobrejetor de grupos algébricos tal que* $Ker(\varphi) = SL(n, \mathbb{K})$, *desta forma reencontramos o fato de que* $\dim SL(n, \mathbb{K}) = \dim GL(n, \mathbb{K}) - \dim GL(1, \mathbb{K}) = n^2 - 1$.

Definição 2.4. *Dado um subconjunto arbitrário* M *de um grupo algébrico* G, *denote por* $\mathcal{A}(M)$ *a interseção de todos os subgrupos fechados de* G *que contém* M. *O chamamos de grupo fechamento de* M.

Proposição 2.5. *Sejam* G *um grupo algébrico,* I *um conjunto de índices e* $\Gamma = \{f_i : X_i \longrightarrow G | i \in I\}$ *uma família de morfismos, onde cada* X_i *é uma variedade irredutível tal que* $e \in Y_i := f_i(X_i)$. *Tome* $M = \bigcup_{i \in I} Y_i$.

(a) $\mathcal{A}(M)$ *é um subgrupo conexo de* G.

(b) Para alguma sequência finita $a = (a(1), \ldots, a(n))$ *em* I, $\mathcal{A}(M) = Y_{a(1)}^{e_1}.Y_{a(2)}^{e_2} \ldots Y_{a(n)}^{e_n}$ *onde* e_i *é igual a* 1 *ou* -1.

Demonstração. (a) Desde que todo grupo que contém Y_i também contém $(Y_i)^{-1}$, sem perda de generalidade podemos aumentar I de modo que os morfismos do tipo $a \longmapsto (f_i(a))^{-1}$ de X_i em G também apareçam em Γ. Para cada sequência finita $a = (a(1), \ldots, a(n))$ em I seja $Y_a := Y_{a(1)}.Y_{a(2)} \ldots Y_{a(n)}$. Sendo a imagem da variedade irredutível $X_{a(1)} \times \ldots X_{a(n)}$ sob o morfismo $f_{a(1)} \times \ldots f_{a(n)}$ composto com a multiplicação de G, Y_a é construtível e $\overline{Y_a}$ é uma variedade irredutível passando por e. Desta forma $\overline{Y_a} \subseteq G^\circ$. A partir da observação 1.6, podemos usar a condição maximal sobre os fechados irredutíveis de G° para encontrar uma sequencia a tal que $\overline{Y_a}$ é maximal.

Dados quaisquer duas sequências b e c em I, afirmamos que $\overline{Y_b}.\overline{Y_c} \subseteq \overline{Y_{(b,c)}}$, onde (b, c) é a sequencia obtida pela justaposição de b e c. De fato, para $x \in Y_c$ o morfismo $y \longmapsto y.x$ mapeia Y_b em $Y_{(b,c)}$ e consequentemente $\overline{Y_b}$ em $\overline{Y_{(b,c)}}$, ou seja, $\overline{Y_b}.Y_c \subseteq \overline{Y_{(b,c)}}$. Desta forma, dado $x \in \overline{Y_b}$, temos que o morfismo $y \longmapsto xy$ mapeia Y_c em $\overline{Y_{(b,c)}}$, logo mapeia $\overline{Y_c}$ em $\overline{Y_{(b,c)}}$, donde $\overline{Y_b}.\overline{Y_c} \subseteq \overline{Y_{(b,c)}}$.

Desde que $\overline{Y_a}$ é maximal e $e \in \overline{Y_b}$ temos que $\overline{Y_a} \subseteq \overline{Y_a}.\overline{Y_b} \subseteq \overline{Y_{(a,b)}} = \overline{Y_a}$, para qualquer sequência finita b em I. Tomando $b = a$, obtemos que $\overline{Y_a}$ é estável sob a multiplicação. Tomando b de modo que $Y_b = (Y_a)^{-1}$ obtemos que $\overline{Y_a}$ é estável sob a inversão. Desta forma $\overline{Y_a}$ é um subgrupo fechado de G contendo todos os Y_i's, assim $\mathcal{A}(M) = \overline{Y_a}$.

(b) Desde que Y_a é construtível, segue que Y_a contém um aberto denso U de $\overline{Y_a}$. Aplicando o lema 2.1 obtemos $Y_{(a,a)} = Y_a.Y_a \subseteq \overline{Y_a} = U.U \subseteq Y_a.Y_a$. Portanto $Y_{(a,a)} = \mathcal{A}(M)$ e a sequência (a, a) satisfaz (b).

□

Corolário 2.2. *Se* G *um grupo algébrico e* $\{Y_i\}_{i \in I}$ *é uma família de subgrupos fechados conexos de* G *os quais geram* G *(como grupo abstrato) então* G *é conexo e existe* $a = (a(1), \ldots, a(n)) \in I^n$ *(para algum* $n > 0$*) tal que* $G = Y_{a(1)} \ldots Y_{a(n)}$.

Exemplo 2.5. *Para* $n > 0$ *e para cada* $i, j = 1, \ldots, n$ *seja* e_{ij} *a matriz de ordem* n *com todas as entradas nulas exceto na posição* (ij) *onde a entrada é* 1. *Para cada* $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, *com* $i \neq j$, *considere o subgrupo fechado* $G_{ij} := \{Id_n + k.e_{ij} | k \in \mathbb{K}\}$ *de* $\mathbb{A}^{n^2}$, *onde* Id_n *é a matriz identidade de ordem* n. *Desde que a aplicação* $\varphi : G_a \longrightarrow G_{ij}$, *dada por* $\varphi(k) = Id_n + ke_{ij}$ *é um isomorfismo de grupos algébricos, seque que* G_{ij} *é conexo. Observe que* $SL(n, \mathbb{K})$ *é gerado pela coleção* $\{G_{ij} | 1 \leq i \neq j \leq n\}$ *(veja [11], página 541), desta forma* $SL(n, \mathbb{K})$ *é conexo.*

Sejam H, K subgrupos de um grupo G. Denotamos por $[H, K]$ o subgrupo gerado pelo conjunto dos comutadores $xyx^{-1}y^{-1}$ tais que $x \in H, y \in K$.

Corolário 2.3. *Sejam H e K subgrupos fechados de um grupo algébrico G. Se H ou K é conexo então $[H, K]$ é fechado e conexo.*

Demonstração. Assuma que H é conexo. Aplicando a proposição 2.5, com $I = K$, $X_i = H$ para todo $i \in K$, e $f_i(x) = xix^{-1}i^{-1}$, temos que o menor subgrupo fechado J que contém $f_i(H)$, para todo $i \in K$, é conexo e contém $[H, K]$. Desde que existe $n > 0$ e $a = (a(1), \ldots, a(n)) \in K^n$ tal que $J = (f_{a(1)}(H))^{e_1} \ldots (f_{a(n)}(H))^{e_n}$, onde e_i é 1 ou -1, segue que $J \subseteq [H, K]$. Portanto $[H, K]$ é fechado e conexo. $\square$

2.2 Ações de grupos algébricos

Definição 2.5. *Sejam G um grupo algébrico e X uma variedade. Se temos um morfismo $\phi : G \times X \longrightarrow X$, o qual também é uma ação de G em X (Veja apêndice C), dizemos que G age morficamente em X e neste caso a tripla (G, X, ϕ) é chamada de G-variedade.*

Quando não houver confusão iremos denotar uma G-variedade (G, X, ϕ) simplesmente por X.

Exemplo 2.6. *(i) Seja G um grupo algébrico. Observe que a ação interna $\boldsymbol{C} : G \times G \longrightarrow G$, dada por $\boldsymbol{C}(x, y) = xyx^{-1}$ também é um morfismo de variedades, assim G age morficamente sobre si mesmo.*

(ii) G também age morficamente sobre si mesmo via translações à esquerda $y \longmapsto xy$ e translações à direita $y \longmapsto yx^{-1}$.

Definição 2.6. *Sejam G um grupo algébrico, X uma G-variedade e $Y, Z \subseteq X$. Definimos o transporte de Y em Z por $Tran_G(Y, Z) := \{x \in G | x \cdot Y \subseteq Z\}$ e o centralizador de Y por $C_G(Y) := \bigcap_{y \in Y} G_y$, onde G_y é o grupo de isotropia de y.*

Proposição 2.6. *Sejam G um grupo algébrico, X uma G-variedade e $Y, Z \subseteq X$, onde Z é um fechado de X.*

(a) $Tran_G(Y, Z)$ é um subgrupo fechado de G.

(b) Para cada $y \in X$, G_y é um subgrupo fechado de G. Em particular $C_G(Y)$ é fechado.

(c) *O conjunto dos pontos fixos de $x \in G$ (isto é, o conjunto $\{y \in X | x \cdot y = y\}$) é fechado em X. Em particular, $X^G := \{y \in X | x \cdot y = y$, para todo $x \in G\}$ é fechado em X.*

(d) *Se G é conexo, G estabiliza cada componente irredutível de X (isto é, $\{x \in G | x \cdot X_i = X_i\} = G$, onde X_i é uma componente irredutível de X).*

Demonstração. (a) Para cada $y \in X$, note que o mapa $\phi_y : G \longrightarrow X$, dado por $\phi_y(x) = x \cdot y$, é uma composição do mapa $x \longmapsto (x, y)$ com a ação de G em X, assim ϕ_y é um morfismo. Observe que $\phi_y^{-1}(Z)$ é fechado em G e $Tran_G(Y, Z) = \bigcap_{y \in Y} \phi_y^{-1}(Z)$, donde $Tran_G(Y, Z)$ é fechado em G.

(b) Note que $G_y = Tran_G(\{y\}, \{y\})$ assim (b) segue de (a).

(c) Para cada $x \in G$, considere o morfismo $\psi_x : X \longrightarrow X \times X$, dado por $\psi_x(y) = (y, x \cdot y)$. Note que o conjunto dos pontos fixos de x é precisamente $\psi^{-1}(\Delta_X)$. Desde que X é uma variedade, $\psi_x^{-1}(\Delta_X)$ é fechado em X. Em particular $X^G = \bigcap_{x \in G} \psi_x^{-1}(\Delta_X)$ é fechado em X.

(d) Sejam $X_1, \ldots, X_r$ as componentes irredutíveis de X e H_i o estabilizador de X_i. Naturalmente $H_i \subseteq Tran_G(X_i, X_i)$. Por outro lado, dado $x \in Tran_G(X_i, X_i)$, temos que a aplicação $\pi_x : X \longrightarrow X$, dada por $\pi_x(y) = x \cdot y$, é um isomorfismo de variedades, logo leva componente irredutível em componente irredutível. Desde que $\pi_x(X_i) \subseteq X_i$, segue que $\pi_x(X_i) = X_i$, assim $Tran_G(X_i, X_i) = H_i$. Desta forma H_i é um subgrupo fechado de G. Tome $aH_i \in G/H_i$ (classe lateral à esquerda de $a \in G$). Se $\pi_a(X_i) = X_j$, com $1 \leq j \leq n$, então para todo $b \in aH_i$ temos que $\pi_b(X_i) = X_j$ (pois $\pi_b(X_i) = \pi_{ah}(X_i) = (ah) \cdot X_i = a \cdot (h \cdot X_i) = \pi_a(X_i) = X_j$, para algum $h \in H_i$) e para todo $c \in G$ tal que $\pi_c(X_i) = X_j$, segue que $c \in aH_i$ (pois $\pi_{c^{-1}a}(X_i) = X_i$). Desta forma, devemos ter que $(G : H_i) \leq r$. Aplicando a proposição 2.2 (b), obtemos que $G = G^\circ \subseteq H_i$.

□

Exemplo 2.7. *Seja G é um grupo algébrico agindo sobre si mesmo por ação interna $(x, y) \longmapsto xyx^{-1}$. Se H um subgrupo fechado de G e $N_G(H) := \{x \in G | xHx^{-1} = H\}$ é o normalizador de H em G, então $N_G(H) = Tran_G(H, H)$. De fato, naturalmente $N_G(H) \subseteq Tran_G(H, H)$. Por outro lado, se $g \in Tran_G(H, H)$, então $gHg^{-1} \subseteq H$. Vamos mostrar que $H \subseteq gHg^{-1}$. Observe que $h = g(g^{-1}hg)g^{-1} \in g(g^{-1}Hg)g^{-1} \subseteq gHg^{-1}$. Desta forma $H = gHg^{-1}$ e portanto $g \in N_G(H)$.*

Corolário 2.4. *Se G um grupo algébrico e H é um subgrupo fechado, então $N_G(H)$ e $C_G(H)$ são subgrupos fechados, assim como $C_G(x)$, para todo $x \in G$.*

Demonstração. A parte (b) da proposição 2.6 nos fornece que $C_G(H)$ e $C_G(x)$ são subgrupos fechados. A partir do exemplo acima e da parte (a) da proposição 2.6 obtemos que $N_G(H)$ também é subgrupo fechado de G. □

Já vimos que normalizadores, centralizadores e conjuntos de pontos fixos são fechados. Porém, nem sempre órbitas são fechadas.

Exemplo 2.8. *Seja $X \subseteq \mathbb{A}^4$ o conjunto das matrizes triangulares superiores 2×2 (o qual é uma variedade) e $G := T(2, \mathbb{K})$ o grupo (algébrico) das matrizes triangulares superiores invertíveis. Note que G age em X por conjugação, isto é, se $x \in G$ e $y \in X$ então $x \cdot y = xyx^{-1} \in X$. Considere*

$$y = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad x = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$$

desta maneira $xyx^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & a/d \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, assim $G \cdot y = \{(\begin{smallmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}) | k \in \mathbb{K} - 0\}$. Observe que $\overline{G \cdot y} = G \cdot y \cup \{Id_2\}$. Portanto $G \cdot y$ é uma órbita que não é fechada.

Apesar de nem sempre as órbitas serem fechadas, ainda sim podemos verificar a existência de tais órbitas na ação de um grupo algébrico sobre uma variedade qualquer. Tal resultado é de extrema importância para o desenvolvimento da teoria dos grupos algébricos, como por exemplo na demonstração do teorema do ponto fixo de Borel, que veremos adiante.

Proposição 2.7. *Seja X uma G-variedade.*

(i) Para todo $x \in X$, a órbita $G \cdot x$ é localmente fechada.

(ii) Existem órbitas fechadas em X.

Demonstração. (i) Sejam $y \in X$ e $Y = G \cdot y$. Considere o morfismo $\phi_y : G \longrightarrow X$, dado por $\phi_y(x) = x \cdot y$. Desta maneira $Y = \phi_y(G)$ é construtível, logo contém um aberto denso U de $\overline{Y}$. Dado $g \in G$, note que a aplicação $\psi_g : X \longrightarrow X$, dada por $\psi_g(x) = g \cdot x$, é um isomorfismo de variedades. Observe que $\psi_g(Y) = Y$ (dado $w \in Y$, temos que $g^{-1} \cdot w \in Y$, logo $\psi_g(g^{-1}w) = w$), assim $\psi_g(\overline{Y}) = \overline{\psi_g(Y)} = \overline{Y}$, ou seja, $\psi_g|_{\overline{Y}} : \overline{Y} \longrightarrow \overline{Y}$ é um isomorfismo. Desta maneira $\psi_g(U) = g \cdot U$ é um aberto denso de $\overline{Y}$ para todo $g \in G$. Para todo $x \in U$, temos que $G \cdot x = Y$, assim, dado $w \in Y$, existe $g \in G$ tal que $g \cdot x = w$, logo $Y = \bigcup_{g \in G} g \cdot U$. Portanto Y é um aberto denso de $\overline{Y}$, isto é, Y é localmente fechado.

(ii) Seja $S_y := \overline{G \cdot y} - G \cdot y$ a fronteira de $G \cdot y$ em X. Por (i), S_y é fechado, para todo $y \in X$. Assim a coleção $\{S_y | y \in X\}$ possui um elemento minimal (pois X é espaço topológico Noetheriano). Seja S_y um elemento minimal de tal coleção. Observe que $\psi_g(S_y) = \psi_g(\overline{G \cdot y}) - \psi_g(G \cdot y) = \overline{G \cdot y} - G \cdot y = S_y$. Suponha que existe $x \in S_y$, assim $g \cdot x \in S_y$ para todo $g \in G$, ou seja, $G \cdot x \subseteq S_y$, logo $\overline{G \cdot x} \subseteq S_y$; desta forma $S_x \subseteq S_y$, o que contradiz a minimalidade de S_y. Portanto $S_y = \varnothing$, isto é, $G \cdot y = \overline{G \cdot y}$.

□

Observação 2.1. *A proposição acima implica que toda órbita de uma G-variedade é novamente uma G-variedade. Além disso, se G é conexo, segue que as órbitas de dimensão mínima de uma G-variedade são fechadas.*

Definição 2.7. *Seja G um grupo algébrico. Uma representação racional de G é um morfismo de grupos algébricos $G \longrightarrow GL(n, \mathbb{K})$, $n \geq 1$.*

Seja V um espaço vetorial n-dimensional sobre $\mathbb{K}$ e $(GL(V), \circ)$ o grupo dos automorfismos de V. Escolhendo uma base para V podemos obter que $GL(V)$ é isomorfo a $GL(n, \mathbb{K})$ como grupos. Desta forma podemos identificar $GL(V)$ como um grupo algébrico (a topologia e o feixe de funções de $GL(V)$ podem ser obtidos a partir do isomorfismo de grupos encontrado, de maneira análoga ao que fizemos na colagem de variedades no capítulo 1). Assim um morfismo $G \longrightarrow GL(V)$ também é chamado de representação racional de G.

Seja G um grupo algébrico agindo em uma variedade afim X. Dado $x \in G$, considere o morfismo $\pi_{x^{-1}} : X \longrightarrow X$, dado por $\pi_{x^{-1}}(y) = x^{-1} \cdot y$, denote por τ_x o comorfismo de $\pi_{x^{-1}}$. Desta maneira, se $f \in A(X)$, temos que $\tau_x f(y) = f(x^{-1} \cdot y)$, assim a aplicação $\tau : G \longrightarrow GL(A(X))$, dada por $\tau(x) = \tau_x$, é um homomorfismo de grupos. Desde que $\pi_{x^{-1}}$ é um isomorfismo, segue da proposição 1.8 que τ_x é um automorfismo de $\mathbb{K}$-álgebras de $A(X)$, o qual chamamos de translações de funções por $x \in G$.

Exemplo 2.9. *Seja G um grupo algébrico afim agindo sobre si mesmo por translações à esquerda (resp. à direta) $y \longmapsto xy$ (resp. $y \longmapsto yx^{-1}$). Seguindo as notações acima, temos que $\pi_{x^{-1}}(y) = x^{-1}y$ (resp. $\pi_{x^{-1}}(y) = yx$) e seu comorfismo λ_x (resp. ρ_x) é chamado de translação de funções à esquerda (resp. à direita) por x. Em particular, $\lambda_x f(y) = f(x^{-1}y)$ e $\rho_x f(y) = f(yx)$. As aplicações $\lambda : G \longrightarrow GL(A(G))$, $\rho : G \longrightarrow GL(A(G))$, dadas por $\lambda(x) = \lambda_x$ e $\rho(x) = \rho_x$ são ambas homomorfismos de grupos.*

O exemplo a seguir nos fornece uma aplicação muito usual para a translação à direita ρ_x sobre subgrupos fechados de grupos algébricos afins.

Exemplo 2.10. *Se H um subgrupo fechado de um grupo algébrico afim G então $H = \{x \in G | \rho_x(\mathfrak{I}(H)) = \mathfrak{I}(H)\}$. De fato, se $x \in H$ e $f \in \mathfrak{I}(H)$ temos que, para todo $y \in H$, $\rho_x f(y) = f(yx) = 0$, (pois $yx \in H$), assim $\rho_x(\mathfrak{I}(H)) \subseteq \mathfrak{I}(H)$, consequentemente $\mathfrak{I}(H) = \rho_{x^{-1}}(\rho_x(\mathfrak{I}(H))) \subseteq \rho_{x^{-1}}(\mathfrak{I}(H))$, desde que x é arbitrário, segue que $\rho_x(\mathfrak{I}(H)) = \mathfrak{I}(H)$, assim $H \subseteq \{x \in G | \rho_x(\mathfrak{I}(H)) = \mathfrak{I}(H)\}$. Por outro lado, se $x \in \{x \in G | \rho_x(\mathfrak{I}(H)) = \mathfrak{I}(H)\}$ então $\rho_x(f) \in I$ para todo $f \in \mathfrak{I}(H)$, logo $f(xe) = 0$ (onde e é o elemento neutro de G), ou seja, $f(x) = 0$ para todo $f \in \mathfrak{I}(H)$, donde $x \in H$ e portanto $\{x \in G | \rho_x(\mathfrak{I}(H)) = \mathfrak{I}(H)\} \subseteq H$.*

Proposição 2.8. *Sejam G um grupo algébrico afim agindo morficamente em uma variedade afim X e F um subespaço vetorial de dimensão finita de $A(X)$.*

(a) Existe um subespaço de dimensão finita E de $A(X)$, contendo F, o qual é estável sob todas as translações τ_x, $x \in G$.

(b) F é estável sob todas as translações τ_x ($x \in G$) se, e somente se, $\varphi^*(F) \subseteq A(G) \otimes_{\mathbb{K}} F$, onde $\varphi : G \times X \longrightarrow X$ é dado por $\varphi(x, y) = x^{-1} \cdot y$.

Demonstração. (a) Faremos a demonstração por indução sobre a dimensão n de F. Para $n = 1$ temos que F é gerado por um único $f \in A(X)$. Desde que $\varphi^*(f) \in A(G \times X) \simeq A(G) \otimes_{\mathbb{K}} A(X)$, podemos escrever $\varphi^*(f) = \sum_{i=1}^{r} g_i \otimes h_i$ para algum $r > 0$. Para cada $x \in G, y \in X$ temos $\tau_x f(y) = f(x^{-1} \cdot y) = \sum_{i=1}^{r} g_i(x) h_i(y)$, assim $\tau_x f = \sum_{i=1}^{r} g_i(x) h_i$, para todo $x \in G$. Desta maneira as funções h_i's geram um subespaço (de dimensão finita) de $A(X)$ que contém todas as translações de f, logo o subespaço E gerado por todas as translações de f tem dimensão finita e contém F (pois $f = \tau_e(f)$). Dado $v \in E$, temos que $v = \sum_{i=1}^{s} \alpha_i \tau_{x_i}(f)$, para certos $\alpha_i \in \mathbb{K}$, $x_i \in G$ e $s > 0$. Observe que $\tau_x(v) = \sum_{i=1}^{s} \alpha_i \tau_x(\tau_{x_1}(s)) = \sum_{i=1}^{s} \alpha_i \tau_{xx_i}(f) \in E$, assim $\tau_x(E) \subseteq E$. Desde que τ_x é injetiva, segue que $\tau_x(E) = E$. Assim (a) é válida para $n = 1$. Agora assuma que seja válida para $1, \ldots, n-1$ ($n > 1$), vamos mostrar que vale para n. Sejam $\{f, f_1, \ldots, f_{n-1}\}$ uma base para F, F' o subespaço gerado por $\{f\}$ e F'' o subespaço gerado por $\{f_1, \ldots, f_{n-1}\}$. A partir da hipótese de indução, existem subespaços $E' \supseteq F'$, $E'' \supseteq F''$ satisfazendo (a). Seja E o espaço gerado por E' e E''. Temos que E tem dimensão finita e contém F e por construção $\tau_x(E) = E$ para todo $x \in G$.

(b) Suponha que $\varphi^*(F) \subseteq A(G) \otimes_{\mathbb{K}} F$. Dado $f \in F$, podemos escrever $\varphi^*(f) =$

$\sum_{i=1}^{m} g_i \otimes h_i$, $h_i \in F$. Assim $\tau_x f = \sum_{i=1}^{m} g_i(x) h_i \in F$, donde $\tau_x(F) = F$. Reciprocamente, suponha que F é estável sob todas as translações τ_x, $x \in G$. Dado uma base $\{f_t\}_{t\in L}$ (L finito) de F, podemos encontrar uma base $\{f_t\}_{t\in L} \cup \{g_j\}_{j\in L'}$ (L' não necessariamente finito) de $A(X)$. Dado $f \in F$, podemos escrever $\varphi^*(f) = \sum_{t\in L} s_t \otimes f_t + \sum_{j\in L'} r_j \otimes g_j$, $s_t, r_j \in A(G)$ (apenas um número finito de r_j's são diferentes de zero). Assim $\tau_x f = \sum_{t\in L} s_t(x) f_t + \sum_{j\in L'} r_j(x) g_j \in F$, o que implica $r_j(x) = 0$ para todo $x \in G$, assim $r_j = 0$ para todo $j \in L'$. Desta maneira $\varphi^*(f) = \sum_{t\in L} s_t \otimes f_t \in A(G) \otimes_{\mathbb{K}} F$, donde $\varphi^*(F) \subseteq A(G) \otimes_{\mathbb{K}} F$.

□

Já vimos que todo subgrupo fechado de $GL(n, \mathbb{K})$ é algébrico. Agora vamos mostrar uma espécie de recíproca para esta afirmação.

Teorema 2.1. *Todo grupo algébrico afim G é isomorfo a uma subgrupo fechado de $GL(n, \mathbb{K})$ para algum $n > 0$.*

Demonstração. Sejam $f_1, \ldots, f_m \in A(G)$ tais que $A(G) = \mathbb{K}[f_1, \ldots, f_m]$ e F o subespaço vetorial gerado por $f_1, \ldots, f_m$. Aplicando a parte (a) da proposição 2.8, podemos encontrar um subespaço de dimensão finita E de $A(G)$ contendo F e estável sob todas as translações à direita ρ_x, $x \in G$. Seja $\{g_1, \ldots, g_n\}$ uma base de E. Desde que $f_i \in E$, segue $g_1, \ldots, g_n$ também geram $A(G)$ como $\mathbb{K}$-álgebra. Se $\varphi : G \times G \longrightarrow G$ é dado por $\varphi(x, y) = yx$, pela parte (b) da proposição 2.8, temos que $\varphi^*(E) \subseteq A(G) \otimes_{\mathbb{K}} E$, assim podemos escrever $\varphi^*(g_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \otimes g_i$, $a_{ij} \in A(G)$. Desta forma $\rho_x g_j(y) = g_j(yx) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}(x) g_i(y)$, logo $\rho_x g_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}(x) g_i$, ou seja, a matriz de $\rho_x|_E$ com relação a base $\{g_1, \ldots, g_n\}$ é $(a_{ij}(x))$. Observe que $\rho_{xy} g_j = \rho_x(\rho_y(g_j)) = \rho_x(\sum_{k=1}^{n} a_{kj}(y) g_k) = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}(y) \rho_x(g_k) = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}(y)(\sum_{i=1}^{n} a_{ik}(x) g_i) = \sum_{i=1}^{n}(\sum_{k=1}^{n} a_{kj}(y) a_{ik}(x)) g_i$, assim $a_{ij}(xy) = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}(y) a_{ik}(x)$. Desta maneira a aplicação $\psi : G \longrightarrow GL(n, \mathbb{K})$, dada por $\psi(x) = (a_{ij}(x))$ é um homomorfismo de grupos algébricos.

Note que $g_j(x) = \rho_x g_j(e) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}(x) g_i(e)$, ou seja, $g_j = \sum_{i=1}^{n} g_i(e) a_{ij}$, assim os elementos a_{ij}, $1 \leq i, j \leq n$, também geram $A(X)$ como $\mathbb{K}$-álgebra. Em particular ψ é injetiva (pois as funções coordenadas de $A(G)$ escrevem-se como uma função polinomial sobre a_{ij}, $1 \leq i, j \leq n$, assim $a_{ij}(x) = a_{ij}(y)$ implica $x = y$). A partir da proposição 2.4

(b), segue que $G' := \psi(G)$ é um subgrupo fechado de $GL(n, \mathbb{K})$. Para completarmos a demonstração basta mostrarmos que $\psi : G \longrightarrow G'$ é um isomorfismo de variedades. Graças a proposição 1.8, basta mostrarmos que o comorfismo $\psi^* : A(G') \longrightarrow A(G)$ é um isomorfismo de $\mathbb{K}$-álgebras. Desde que $\psi : G \longrightarrow G'$ é dominante, segue que ψ^* é injetora. Sejam η_{ij}, $1 \leq i, j \leq n$, as funções coordenadas de $A(G')$. Observe que $\psi^*(\eta_{ij}) = \eta_{ij} \circ \psi = a_{ij}$. Desde que a_{ij}, $1 \leq i, j \leq n$, geram $A(G)$ como $\mathbb{K}$-álgebra, segue que ψ^* é sobrejetora.

□

Simplesmente como no teorema de Cayley em grupos abstratos, que reduz o estudo de grupos abstratos para o estudo de grupos de permutações, o teorema acima reduz o estudo de grupos algébricos afins para o estudo de grupos lineares (um grupo algébrico é dito linear quando é subgrupo fechado de $GL(n, \mathbb{K})$).

2.3 Espaços homogêneos e quocientes

Definição 2.8. *Seja G um grupo algébrico e X uma G-variedade. Dizemos que X é um espaço homogêneo para G quando $X = G \cdot y$ para algum $y \in X$.*

Lema 2.2. *Seja X uma G-variedade homogênea.*

(i) Cada componente irredutível de X é um espaço homogêneo para G°;

(ii) As componentes irredutíveis de X são abertas e fechadas e X é uma união disjunta de suas componentes.

Demonstração. Dado $y \in X$, temos que o morfismo ${}^y\varphi : G \longrightarrow X$, dado por ${}^y\varphi(g) = g \cdot y$, é sobrejetor. Lembre que existem $e = x_1, x_2, \ldots, x_r \in G$ tais que $G = \bigcup_{i=1}^{r} G^\circ x_i$ e tal união é disjunta. Desta forma $X = {}^y\varphi(G) = \bigcup_{i=1}^{r} G^\circ x_i \cdot y = \bigcup_{i=1}^{r} G^\circ \cdot (x_i \cdot y)$, onde $G^\circ \cdot (x_i \cdot y)$ é uma G°-órbita. Desde que órbitas distintas devem ser disjuntas X escreve-se como uma união disjunta de tais órbitas distintas, desta forma, sem perda de generalidade, podemos supor que $X = \bigcup_{i=1}^{r} G^\circ \cdot (x_i \cdot y)$ é uma união disjunta. A partir da proposição 2.2, temos que G° é um subgrupo normal de G, assim $x_i G^\circ = G^\circ x_i$, logo ${}^y\varphi(G^\circ x_i) = {}^y\varphi(x_i G^\circ)$. Considere o isomorfismo $\varphi_{x_i} : X \longrightarrow X$, dado por $\varphi_{x_i}(w) = x_i \cdot w$. Note que $\varphi_{x_i}(G^\circ \cdot y) = {}^y\varphi(x_i G^\circ) = G^\circ \cdot (x_i \cdot y)$, ou seja, $G^\circ \cdot y \simeq G^\circ \cdot (x_i \cdot y)$; logo $\dim G^\circ \cdot y = \dim G^\circ (x_i \cdot y)$. A partir da observação 2.1, segue que $G^\circ \cdot (x_i \cdot y)$ é fechado para todo i. Portanto $G^\circ \cdot (x_1 \cdot y), \ldots, G^\circ \cdot (x_r \cdot y)$ são as componentes irredutíveis de X, o que prova (i), e desde que X escreve-se como uma união disjunta delas, segue que suas componentes são abertas e fechadas, o que prova (ii). $\square$

Definição 2.9. *Sejam X e Y G-variedades e $\phi : X \longrightarrow Y$ um morfismo de variedades. Dizemos que ϕ é equivariante para G, ou simplesmente um G-morfismo, se $\phi(g \cdot y) = g \cdot \phi(y)$ para quaisquer $g \in G$ e $y \in X$.*

Teorema 2.2. *Sejam G um grupo algébrico e $\phi : X \longrightarrow Y$ um morfismo equivariante de G-variedades homogêneas. Tome $r = \dim X - \dim Y$.*

(i) Para qualquer variedade Z o morfismo $(\phi, Id_Z) : X \times Z \longrightarrow Y \times Z$ é aberto.

(ii) Se Y' é uma subvariedade fechada e irredutível de Y e X' é uma componente irredutível de $\phi^{-1}(Y')$, então $\dim X' = \dim Y' + r$. Em particular, para todo $y \in Y$, toda componente de $\phi^{-1}(y)$ tem dimensão r.

Demonstração. A partir do lema 2.2 podemos reduzir nossa demonstração ao caso em que X e Y são irredutíveis e G é conexo (pois X escreve-se como uma união disjunta de suas componentes, logo todo aberto de uma de suas componentes também é aberto em X, além disso suas componentes possuem a mesma dimensão). Note que ϕ é sobrejetora (se $y \in \phi(X)$ então $Y = G \cdot y \subseteq \phi(X)$), consequentemente é dominante. Desta forma existe um aberto U de X satisfazendo as propriedades do teorema 1.7. Em particular todas as translações $g \cdot U$ ($g \in G$) possuem as mesmas propriedades e cobrem X, assim obtemos (i) e (ii). $\square$

Corolário 2.5. *Se $\phi : X \longrightarrow Y$ é um morfismo equivariante de G-variedades homogêneas então ϕ é aberto.*

Demonstração. Aplicando a parte (i) do teorema 2.2 para $Z = \{x\}$ temos que o morfismo $(\phi, Id_Z) : X \times Z \longrightarrow Y \times Z$ é aberto. Se U é um aberto de X, segue que $(\phi, Id_Z)(U \times \{x\})$ é aberto em $Y \times \{x\}$, ou seja, $\phi(U) \times \{x\}$ é aberto em $Y \times \{x\}$, a partir do exemplo 1.11 temos que as projeções de abertos são abertos, assim $\phi(U)$ é aberto em Y. $\square$

Lema 2.3. *Se X uma G-variedade homogênea então suas componentes irredutíveis são normais.*

Demonstração. Seja X_i uma componente irredutível de X. Se $U \subseteq X_i$ é o conjunto de seus pontos normais, pelo teorema 1.8 (ii) U é um aberto não vazio de X_i. Pelo lema 2.2, cada componente X_i de X é homogênea para G°, assim as translações $g \cdot U$ cobrem X_i (pois se $y \in X_i$ temos que o morfismo ${}^y\phi : G^\circ \longrightarrow X_i$, dado por ${}^y\phi(g) = g \cdot y$, é sobrejetor, logo dado $u \in U$, existe $g \in G^\circ$ tal que $g \cdot y = u$, desta maneira $y \in g^{-1} \cdot U$). Desde que $g \cdot U$ é isomorfo a U, segue que $g \cdot U$ é normal, logo $g \cdot U \subseteq U$ para todo $g \in G^\circ$. Portanto $X_i = U$. $\square$

Lema 2.4. *Sejam G um grupo algébrico linear e H um subgrupo fechado. Existe um subespaço de dimensão finita V de $A(G)$ e um subespaço W de V tais que*

(a) V é estável sob todas as translações à direita ρ_x, $x \in G$;

(b) $H = \{x \in G | \rho_x(W) = W\}$.

Demonstração. (a) Sejam $f_1, \ldots, f_r$ os geradores de $\mathfrak{I}(H)$. Tome F como o subespaço vetorial de $A(G)$ gerado por $f_1, \ldots, f_r$. A partir da proposição 2.8 (a), segue que existe um subespaço de dimensão finita de $A(G)$, contendo F e estável sob todas as translações ρ_x, $x \in G$.

(b) Tome $W = V \cap \mathfrak{I}(H)$. Se $x \in H$, a partir do exemplo 2.10 temos que $\phi_x(\mathfrak{I}(H)) = \mathfrak{I}(H)$ e $\rho_x(V) = V$ assim $\rho_x(W) = W$. Reciprocamente, se $x \in G$ e $\rho_x(W) = W$, então para todo i, $\rho_x f_i \in W \subset \mathfrak{I}(H)$, desta forma $\rho_x(\mathfrak{I}(H)) \subseteq H$, donde $x \in H$. □

Considere um espaço vetorial de dimensão finita V e W um subespaço de V de dimensão d. A d-ésima potência exterior $\bigwedge^d V$ contém um unidimensional subespaço $L = \bigwedge^d W$. Se $a \in GL(V)$ então a aplicação $\phi(a) : \bigwedge^d V \longrightarrow \bigwedge^d V$, dada por $\phi(a)(v_1 \wedge \cdots \wedge v_d) = a(v_1) \wedge \cdots \wedge a(v_d)$, é um automorfismo de $GL(\bigwedge^d V)$, assim a aplicação $\phi : GL(V) \longrightarrow GL(\bigwedge^d V)$ é uma representação racional de $GL(V)$, a qual chamaremos simplesmente por representação de $GL(V)$ em $\bigwedge^d V$.

Lema 2.5. *Com as notações acima, considere $x \in GL(V)$. Então $x(W) = W$ se, e somente se, $\phi(x)(L) = L$.*

Demonstração. A ida é imediata, temos que demonstrar apenas a recíproca. Suponha que $\phi(x)(L) = L$. Podemos considerar uma base $\{v_1, \ldots, v_n\}$ de V tal que $\{v_1, \ldots, v_d\}$ é uma base de W. Os produtos exteriores $v_{j_1} \wedge \cdots \wedge v_{j_d}$, com $j_1 < \cdots < j_d$ formam uma base de $\bigwedge^d V$ e $\{v_1 \wedge \cdots \wedge v_d\}$ é uma base de L. Podemos escolher nossa base de modo que $\{v_{l+1}, \ldots, v_{l+d}\}$ seja uma base de $x(W)$, para algum l inteiro não negativo. Tome $g = v_1 \wedge \cdots \wedge v_d$ e $f = v_{l+1} \wedge \cdots \wedge v_{l+d}$. Desta forma $\phi(x)(g)$ é um múltiplo de f. Se $l > 0$ então g e f são linearmente independentes, assim o espaço gerado por f é diferente de L, logo $\phi(x)(g) \notin L$, o que é uma contradição. Desta forma devemos ter $l = 0$ e portanto $x(W) = W$. □

Teorema 2.3. *Sejam G um grupo algébrico linear e H um subgrupo fechado. Existe uma representação racional $\phi : G \longrightarrow GL(V)$ e um subespaço unidimensional L de V tal que $H = \{x \in G | \phi(x)(L) = L\}$.*

Demonstração. A partir do lema 2.4, existe um subespaço de dimensão finita V' de $A(G)$ e um subespaço W de V tais que V' é estável sob todas as translações à direita ρ_x, $x \in G$, e $H = \{x \in G | \rho_x(W) = W\}$. Em particular, temos um homomorfismo de grupos algébricos $\xi : G \longrightarrow GL(V')$, dado por $\xi(x) := \xi_x = \rho_x|_{V'}$. Sejam $d = dimW$, $V = \bigwedge^d V'$ e $\phi' : GL(V') \longrightarrow GL(V)$ a representação de $GL(V')$ em V. Aplicando o lema 2.5, temos que $\xi_x(W) = W$ se, e somente se, $\phi'(\xi_x)(\bigwedge^d W) = \bigwedge^d W$. Tome $\phi := \phi' \circ \xi : G \longrightarrow GL(V)$ e $L := \bigwedge^d W$, assim obtemos o resultado.

□

Corolário 2.6. *Sejam G um grupo algébrico linear e H um subgrupo fechado de G. Existe um G-espaço homogêneo, quase-projetivo X (isto é, X é uma subvariedade aberta de alguma variedade projetiva) e um ponto $x \in X$ tal que*

(a) O grupo de isotropia de x em G é H;

(b) O morfismo $\psi : G \longrightarrow X$, dado por $\psi(g) = g \cdot x$, define um morfismo separável $G^\circ \longrightarrow \psi(G^\circ)$;

(c) As fibras de ψ são as classes gH, $g \in G$.

Demonstração. (a) Utilizando as notações do teorema acima, temos que existe $v \in L$ tal que L é gerado por v. Desta forma

$$H = \{g \in G | \phi(g)(v) \in \mathbb{K}v\}. \tag{2.1}$$

Sejam x um ponto no espaço projetivo $\mathbb{P}(V)$ definido pela reta $\mathbb{K}v$ e $\pi : V - 0 \longrightarrow \mathbb{P}(V)$ a projeção canônica. Defina $\varphi : G \times \mathbb{P}(V) \longrightarrow \mathbb{P}(V)$ por $\varphi(g, \pi(u)) = \pi(\phi(g)(u))$. Note que G age morficamente em $\mathbb{P}(V)$ via φ. Denote por X a G-órbita de x. Desde que toda órbita é localmente fechada, segue que X é uma variedade quase-projetiva. Por (2.1) segue que o grupo de isotropia de x é H.

(b) Veja [16], página 93.

(c) Sejam $w \in X$ e $g \in \psi^{-1}(w)$. Vamos mostrar que $\psi^{-1}(w) = gH$. Se $a \in gH$ então $a = gh$, para algum $h \in H$, assim $\psi(a) = \psi(gh) = (gh) \cdot x = g \cdot (h \cdot x) = g \cdot x = w$, logo $a \in \psi^{-1}(w)$, ou seja, $gH \subseteq \psi^{-1}(w)$. Por outro lado, se $a \in \psi^{-1}(w)$ então $\psi(a) = w = \psi(g)$, assim $\psi(g^{-1}a) = x$, logo $g^{-1}a \in H$, desta forma existe $h \in H$ tal que $a = gh$, donde $a \in gH$ e portanto $\psi^{-1}(w) \subseteq gH$.

□

Lema 2.6. *Sejam (X, x) e ψ como no corolário 2.6, U um aberto de X e $V = \psi^{-1}(U)$. Se $f \in \mathcal{O}_G(V)$ é tal que $f(gh) = f(g)$, para quaisquer $g \in V$ e $h \in H$, então existe uma única $F \in \mathcal{O}_X(U)$ tal que $F(\psi(g)) = f(g)$, para todo $g \in V$.*

Demonstração. Aplicando o lema 2.2 podemos supor que G é conexo. De fato, suponha que a propriedade é válida para o caso conexo. Sabemos que existem $e = g_1, \dots g_r \in G$ tais que $G^\circ g_1, \dots, G^\circ g_r$ são as componentes conexas de G, desta forma, assim como na demonstração do lema 2.2, obtemos que as componentes irredutíveis de X são da forma $X_i = G^\circ \cdot (y_i)$ (onde $y_i = g_i \cdot x$) e são abertas em X. Em particular, a partir da proposição C.2 do apêndice C, temos que o grupo de isotropia de y_i é $g_i H g_i^{-1}$. Sem perda de generalidade podemos supor que $\psi^{-1}(X_i) = G^\circ g_i$, assim temos a aplicação sobrejetora $\psi_i := \psi|_{G^\circ g_i} : G^\circ g_i \longrightarrow X_i$. Observe que $f_i := f|_{\psi^{-1}(U \cap X_i)} \in \mathcal{O}_G(\psi^{-1}(U \cap X_i)) = \mathcal{O}_{G^\circ g_i}(\psi_i^{-1}(U \cap X_i))$. Desde que G° age transitivamente em X_i, temos que o mapa órbita $\eta_i : G^\circ \longrightarrow X_i$, dado por $\eta_i(g) = g \cdot y_i$, é sobrejetor. Além disso, o grupo de isotropia de y_i em G° é $g_i(H \cap G^\circ)g_i^{-1}$. Considere o isomorfismo $\varphi_i : G^\circ \longrightarrow G^\circ g_i$, dado por $\varphi_i(g) = gg_i$. Note que $\eta_i = \psi_i \circ \varphi_i$, assim $f_i \circ \varphi_i \in \mathcal{O}_{G^\circ}(\eta_i^{-1}(U \cap X_i))$. Dado $g \in \eta_i^{-1}(U \cap X_i)$ e $h \in g_i(H \cap G^\circ)g_i^{-1}$, existe $h' \in H \cap G^\circ$ tal que $h = g_i h' g_i$, logo $f_i \circ \varphi_i(gh) = f_i \circ \varphi_i(gg_i h' g_i^{-1}) = f_i(gg_i h') = f_i(gg_i) = f_i \circ \varphi_i(g)$, desta forma existe uma única $F_i \in \mathcal{O}_{X_i}(U \cap X_i)$ tal que $F_i \circ \eta_i(g) = f_i \circ \varphi_i(g)$, para todo $g \in \eta_i^{-1}(U \cap X_i)$, o que implica $F_i \circ \psi_i(g) = f_i(g)$ para todo $g \in \psi_i^{-1}(U \cap X_i)$. Por colagem, segue que existe uma única $F \in \mathcal{O}_X(U)$ tal que $F \circ \psi(g) = f(g)$, para todo $g \in \psi^{-1}(U)$.

Agora vamos provar a propriedade requerida para o caso onde G é conexo. Seja $\Gamma = \{(g, f(g)) | g \in V\} \subseteq V \times \mathbb{A}^1$ o gráfico de f e $\Gamma' \subseteq U \times \mathbb{A}^1$ a imagem de Γ via o morfismo $(\psi, Id_{\mathbb{A}^1})$. A partir da proposição 1.17 (ii), temos que Γ é fechado em $V \times \mathbb{A}^1$, assim, a partir do teorema 2.2 (i), temos que $(\psi, Id_{\mathbb{A}^1})(V \times \mathbb{A}^1 - \Gamma)$ é aberto em $U \times \mathbb{A}^1$. Desde que $(\psi, Id_{\mathbb{A}^1})$ é sobrejetiva segue que $U \times \mathbb{A}^1 - \Gamma' \subseteq (\psi, Id_{\mathbb{A}^1})(V \times \mathbb{A}^1 - \Gamma)$; por outro lado, se $(g, y) \in (\psi, Id_{\mathbb{A}^1})(V \times \mathbb{A}^1 - \Gamma)$ então existe $(x_1, y_1) \in V \times \mathbb{A}^1 - \Gamma$ tal que $(\psi, Id_{\mathbb{A}^1})(x_1, y_1) = (g, y)$. Em particular $y_1 = y$. Suponha que $(g, y) \in \Gamma'$, assim existe $(x_2, y_2) \in \Gamma$ tal que $(\psi, Id_{\mathbb{A}^1})(x_2, y_2) = (g, y)$, logo $y_2 = y$ e $\psi(x_1) = \psi(x_2)$; desta maneira existe $h \in H$ tal que $x_1 = x_2 h$ assim $f(x_1) = f(x_2 h) = f(x_2) = y_2 = y_1$, o que é uma contradição; logo devemos ter $(g, y) \in U \times \mathbb{A}^1 - \Gamma'$, ou seja, $(\psi, Id_{\mathbb{A}^1})(V \times \mathbb{A}^1 - \Gamma) \subseteq U \times \mathbb{A}^1 - \Gamma'$. Desta forma Γ' é fechado em $U \times \mathbb{A}^1$.

Seja $\lambda : \Gamma' \longrightarrow U$ o morfismo induzido pela primeira projeção. Por definição, λ é sobrejetora. Sejam $(g, f(g)), (y, f(y)) \in \Gamma$. Se $\lambda(\psi(g), f(g)) = \lambda(\psi(y), f(y))$ então $\psi(g) = \psi(y)$, logo existe $h \in H$ tal que $g = yh$ assim $f(g) = f(yh) = f(y)$, desta maneira λ é injetora, ou seja, λ é uma bijeção. A partir do corolário 2.6 (b), temos que ψ é separável, isto é, a extensão $K(X) \subset K(G)$, induzida por ψ, é separavelmente algébrica. Desde que $K(U) = K(X)$, $K(\Gamma) = K(G)$ e $K(\Gamma') \subset K(\Gamma)$, segue que a extensão $K(U) \subset K(\Gamma')$, induzida por λ, é separavelmente algébrica, assim λ é separável. Aplicando o teorema 1.7 (iv) em λ obtemos que $[K(\Gamma') : K(U)] = 1$, assim λ é birracional. Pelo lema 2.3 temos que U é normal. Desta forma, aplicando o teorema 1.8 (i), segue que λ é um isomorfismo. Se $\lambda' : \Gamma \longrightarrow \mathbb{A}^1$ é o morfismo induzido pela segunda projeção, então λ' é uma função regular em Γ', assim existe uma única $F \in \mathcal{O}_X(U)$ tal que $F \circ \lambda = \lambda'$, desta forma $\Gamma' = \{(u, F(u)) | u \in U\}$. Portanto $F \circ \psi = f$. $\square$

Definição 2.10. *Seja G um grupo algébrico linear e H um subgrupo fechado de G. Um quociente de G por H é um par $(G/H, a)$ de um G-espaço homogêneo G/H e um ponto $a \in G/H$, onde H é seu grupo de isotropia, tal que a seguinte propriedade universal é satisfeita: Para qualquer par (Y, b) de uma G-variedade Y e um ponto $b \in Y$, o qual o grupo de isotropia contém H, existe um único morfismo equivariante $\phi : G/H \longrightarrow Y$ tal que $\phi(a) = b$.*

Teorema 2.4. *Com as notações da definição acima, um quociente $(G/H, a)$ existe e é único a menos de G-isomorfismos. O par (X, x) do corolário 2.6 é um tal quociente.*

Demonstração. A unicidade segue direto da propriedade universal. Para provar a existência nós vamos definir $(G/H, a)$ na categoria dos espaços anelados e em seguida vamos mostrar que existe um isomorfismo de espaços anelados entre (G/H) e (X, x). Os pontos de G/H são simplesmente as classes gH, com $g \in G$ e $a := eH = H$. Seja $\pi : G \longrightarrow G/H$ o mapa canônico. Vamos dotar G/H com a seguinte topologia: $U \subseteq G/H$ é aberto se $\pi^{-1}(U)$ é aberto em G. Desta forma G/H é um espaço topológico tal que π é contínua. Observe que se U é aberto em G e $g \in \pi^{-1}(\pi(U))$ então existe $u \in U$ tal que $\pi(g) = \pi(u)$ assim existe $h \in H$ tal que $g = uh$, desde que a translação $Uh \subseteq \pi^{-1}(\pi(U))$, para todo $h \in H$, temos que $\pi^{-1}(\pi(U)) = \bigcup_{h \in H} Uh$ é aberto, logo $\pi(U)$ é aberto, desta forma π é uma aplicação aberta.

Nós definimos o feixe de funções em G/H da seguinte maneira: Se U é aberto em G/H, defina $\mathcal{O}_{G/H}(U)$ como o conjunto de todas as funções $\mathbb{K}$-avaliativas $g : U \longrightarrow \mathbb{K}$ tais que $g \circ \pi|_{\pi^{-1}(U)} \in \mathcal{O}_G(\pi^{-1}(U))$. Com verificação análoga ao caso de colagem de variedades, visto no capítulo 1, segue que $\mathcal{O}_{G/H}$ de fato é um feixe de funções em G/H, que torna π um morfismo de espaços anelados.

A aplicação $\xi : G \times G/H \longrightarrow G/H$ dada por $\xi(g, yH) = (gy)H$ define uma ação de G em G/H, e neste caso G age transitivamente em G/H. Desta forma, dado $x \in G$ temos que a aplicação $\xi_x : G/H \longrightarrow G/H$ dada por $\xi_x(gH) = (xg)H$ é uma bijeção. Observe que se U é aberto em G/H então $\pi^{-1}(\xi_x^{-1}(U)) = x^{-1}\pi^{-1}(U)$ é aberto em G, logo $\xi_x^{-1}(U)$ é aberto em G/H, assim ξ_x é contínua. Desde que $\xi_x^{-1} = \xi_{x^{-1}}$ segue que ξ_x é um homeomorfismo. Se $f \in \mathcal{O}_{G/H}(U)$, temos que $f \circ \xi_x \in \mathcal{O}_{G/H}(\xi_{x^{-1}}(U))$ se $(f \circ \xi_x) \circ \pi \in \mathcal{O}_{G/H}(\xi_{x^{-1}}(U))$. Considere o isomorfismo de variedades $\varphi_x : G \longrightarrow G$, dado por $\varphi_x(g) = xg$. Note que $\xi_x \circ \pi = \pi \circ \varphi$, assim $\xi_x \circ \pi$ é um morfismo, logo devemos ter que $(f \circ \xi_x) \circ \pi \in \mathcal{O}_{G/H}(\xi_{x^{-1}}(U))$ e portanto ξ_x é um isomorfismo de espaços anelados.

Seja (Y, b) um par como na definição de quociente, vamos mostrar que existe um único G-morfismo $G/H \longrightarrow Y$ que leva a em b. Defina $\phi : G/H \longrightarrow Y$ por $\phi(gH) = g \cdot b$. Note que ϕ está bem definida, pois se $gH = g'H$ então existe $h \in H$ tal que $g = g'h$, logo $\phi(gH) = \phi(g'h) = (g'h) \cdot b = g' \cdot (h \cdot b)$. Sendo H subgrupo do grupo isotropia de b segue que $g' \cdot (h \cdot b) = g' \cdot b = \phi(g'H)$. Desde que Y é uma G-variedade, temos que a aplicação $\phi' : G \longrightarrow Y$, dada por $\phi'(g) = g \cdot b$ é um morfismo. Em particular, temos que $\phi' = \phi \circ \pi$. Seja U um aberto de Y. Note que $(\phi')^{-1}(U) = (\phi \circ \pi)^{-1}(U) = \pi^{-1}(\phi^{-1}(U))$ é aberto em G, assim $\phi^{-1}(U)$ é aberto em G/H, logo ϕ é contínua. Seja $f \in \mathcal{O}_Y(Y)$. Temos que $(f \circ \phi) \circ \pi = f \circ (\phi \circ \pi) = f \circ \phi' \in \mathcal{O}_G((\phi')^{-1}(U))$, o que implica $f \circ \phi \in \mathcal{O}_{G/H}(\phi^{-1}(U))$. Desta forma ϕ é um morfismo de espaços anelados. Em particular $\phi(g \cdot g'H) = \phi(gg'H) = (gg') \cdot b = g \cdot (g' \cdot b) = g \cdot \phi(g'H)$, logo ϕ é um G-morfismo tal que $\phi(a) = b$. Desde que G age transitivamente em G/H, segue que se $\theta : G/H \longrightarrow Y$ é outro G-morfismo tal que $\theta(a) = b$ então para todo $g \in G$ temos $\phi(gH) = \phi(g \cdot a) = g \cdot b = g \cdot \theta(a) = \theta(g \cdot a) = \theta(gH)$, donde $\phi = \theta$, o que prova a unicidade de ϕ.

Sejam (X, x) e ψ como no corolário 2.6. Existe um único G-morfismo de espaços anelados $\phi : G/H \longrightarrow X$ tal que $\phi(gH) = g \cdot x$. Se provarmos que ϕ é um isomorfismo de espaços anelados, obteremos que G/H é uma variedade algébrica e que a ação de G em G/H é um morfismo (de fato, se ϕ é um isomorfismo e ξ' é a ação de G em X então $\xi = \phi^{-1} \circ \xi' \circ (Id_G, \phi)$). Assim finalizaremos a parte da existência.

Note que $\psi = \phi \circ \pi$. Se $w \in X$, a partir da parte (c) do corolário 2.6 temos que $\pi^{-1}(\phi^{-1}(w)) = \psi^{-1}(w) = gH$ onde g é tal que $g \cdot x = w$, isto implica em $\phi^{-1}(w) = gH$; desta forma ϕ é uma bijeção contínua. A partir do corolário 2.5, segue que ψ é uma aplicação aberta, desta maneira, se $U \subseteq G/H$ é um aberto então $\phi(U) = \psi(\pi^{-1}U)$ é aberto em X, logo ϕ é uma aplicação aberta, ou seja, ϕ é um homeomorfismo. Para mostrarmos que ϕ é um isomorfismo de espaços anelados basta verificarmos o seguinte: Se U é aberto em X então o comorfismo $\phi^* : \mathcal{O}_X(U) \longrightarrow \mathcal{O}_{G/H}(\phi^{-1}(U))$, dado por $\phi^*(f) = f \circ \phi$, é um isomorfismo de $\mathbb{K}$-álgebras. Seja $V = \psi^{-1}(U)$. Pela definição de $\mathcal{O}_{G/H}$, existe uma bijeção entre $\mathcal{O}_{G/H}(\phi^{-1}(U))$ e o conjunto $\Sigma = \{f \in \mathcal{O}_G(V) | f(gh) = f(g)$ para quaisquer $g \in V$ e $h \in H\}$, assim é suficiente mostrarmos que para cada $f \in \Sigma$ existe uma única função $F \in \mathcal{O}_X(U)$ tal que $F(\psi(g)) = f(g)$, para todo $g \in V$, porém, isto segue diretamente do lema 2.6. $\square$

Corolário 2.7. *Sejam G um grupo algébrico linear e H um subgrupo fechado.*

(i) G/H é uma variedade quase-projetiva de dimensão $\dim G - \dim H$*;*

(ii) Se G é conexo, o morfismo canônico $\pi : G \longrightarrow G/H$ ($\pi(g) = g \cdot a$) é separável;

(iii) Se H é um subgrupo normal de G então G/H é uma variedade afim, e com sua estrutura natural de grupo, G/H é um grupo algébrico linear.

Demonstração. O fato de que G/H é uma variedade quase-projetiva e a afirmação (ii) seguem do corolário 2.6 e do teorema 2.4. Desde que $\pi^{-1}(a) = H$, a partir do teorema 2.2 (ii), temos que $\dim H = \dim\{a\} + \dim G - \dim(G/H)$, logo $\dim(G/H) = \dim G - \dim H$.

Para a demonstração de (iii), veja [16], página 96.

□

2.4 Subgrupos parabólicos e subgrupos de Borel

Nesta seção G denota um grupo algébrico linear.

Lema 2.7. *Sejam X e Y G-variedades homogêneas e $\phi : X \longrightarrow Y$ um G-morfismo bijetivo. X é completa se, e somente se, Y é completa.*

Demonstração. A partir do teorema 2.2 (i), temos que para toda variedade Z o morfismo $(\phi, Id_Z) : X \times Z \longrightarrow Y \times Z$ é um homeomorfismo de espaços topológicos. Sejam $\xi : X \times Z \longrightarrow Z$ e $\eta : Y \times Z \longrightarrow Z$ projeções. Note que $\xi = \eta \circ (\phi, Id_Z)$, assim X é completa se, e somente se, Y é completa. □

Definição 2.11. *Um subgrupo fechado P de G é dito parabólico se a variedade quociente G/P é completa.*

Lema 2.8. *Se P é um subgrupo parabólico de G então G/P é uma variedade projetiva.*

Demonstração. Sabemos que G/P é uma subvariedade aberta de alguma variedade projetiva Y. A partir da proposição 1.33 (d), segue que G/P é fechado em Y, e portanto é uma variedade projetiva. □

Lema 2.9. *Se P é um subgrupo parabólico de G e Q é um subgrupo parabólico de P então Q é um subgrupo parabólico de G.*

Demonstração. Queremos mostrar que para toda variedade X a projeção $\eta : G/Q \times X \longrightarrow X$ é fechada. Seja $\pi : G \longrightarrow G/Q$ o morfismo canônico e Γ a coleção dos subconjuntos fechados A de $G \times X$ tais que $(g, x) \in A$ implica $(gQ, x) \subseteq A$. Observe que o morfismo (π, Id_X) induz uma bijeção entre Γ e os subconjuntos fechados de $G/Q \times X$. Além disso, se $\xi : G \times X \longrightarrow X$ é a projeção, então para todo $A \in \Gamma$ temos que $\xi(A) = \eta \circ (\pi, Id_X)(A)$. Desta forma, G/Q é completa se, e somente se, $\xi(A)$ é fechado em X, para todo $A \in \Gamma$. Considere o morfismo $\sigma : P \times G \times X \longrightarrow G \times X$, dado por $\sigma(p, g, x) = (gp, x)$. Observe que $\sigma^{-1}(A) = \{(p, g, x) \in P \times G \times X | (gp, x) \in A\}$ é fechado em $P \times G \times X$. Desde que P/Q é completa e $\sigma^{-1}(A)$ é tal que $(p, g, x) \in \sigma^{-1}(A)$ implica $(pQ, g, x) \subseteq \sigma^{-1}(A)$, segue que a projeção de $\sigma^{-1}(A)$ em $G \times X$ é fechada, isto é, o conjunto $\bigcup_{(g,x) \in A} (gP, x)$ é fechado em $G \times X$. Desde que G/P é completo, a projeção de $\bigcup_{(g,x) \in A} (gP, x)$ em X é fechada. Observe que tal projeção é exatamente $\xi(A)$. Portanto G/Q é completa. □

Lema 2.10. *(i) Seja P um subgrupo parabólico de G. Se Q é um subgrupo fechado de G contendo P então Q é parabólico;*

(ii) P é parabólico em G se, e somente se, P° é parabólico em G°.

Demonstração. (i) Sejam $(G/Q, a_Q)$ e $(G/P, a_P)$ as variedades quocientes. Desde que o grupo de isotropia de a_Q é Q, segue da propriedade universal de G/P que existe um único G-morfismo $\phi : G/P \longrightarrow G/Q$ tal que $\phi(a_P) = a_Q$. Em particular ϕ é sobrejetora. Aplicando a proposição 1.33 (c), segue que G/Q é completa.

(ii) Lembre que G/G° é finito, logo é uma variedade completa, ou seja, G° é subgrupo parabólico de G. Se P é parabólico em G então P° é parabólico em G pelo lema 2.9. Desde que G°/P° é fechado em G/P°, segue da proposição 1.33 (a), que G°/P° é completa, assim P° é subgrupo parabólico de G°. Reciprocamente, se P° é subgrupo parabólico de G° então, pelo lema 2.9, P° é subgrupo parabólico de G. Aplicando (i), segue que P é subgrupo parabólico de G.

□

Seja G um grupo arbitrário. Considere a seguinte notação

$$G^{(0)} := G, G^{(1)} := [G, G], G^{(i)} := [G^{(i-1)}, G^{(i-1)}]$$

sempre que $i > 1$. Dizemos que G é um grupo solúvel se existe $n > 0$ tal que $G^{(n)} = \{e\}$. Em [5], página 302, podemos ver que se H é um subgrupo normal de G então G é solúvel se, e somente se, os grupos H e G/H são solúveis. Usaremos esse resultado para demonstrar o lema abaixo.

Lema 2.11. *$T(n, \mathbb{K})$ é um subgrupo fechado, conexo e solúvel de $GL(n, \mathbb{K})$.*

Demonstração. A partir do exemplo 2.2 temos que $T(n, \mathbb{K})$ é fechado em $GL(n, \mathbb{K})$.

Considere a aplicação $\phi : G_m^n \times \mathbb{A}^{n(n-1)/2} \longrightarrow T(n, \mathbb{K})$, dada por

$$\phi((a_1, \ldots, a_n), (b_{12}, \ldots, \underbrace{b_{ij}}_{i<j}, \ldots, b_{n-1n})) = (c_{ij}),$$

onde $c_{ii} = a_i$, $c_{ij} = b_{ij}$, se $i < j$, e $c_{ij} = 0$ se $i > j$. Desde que as funções coordenadas de ϕ são regulares, segue que ϕ é um morfismo. Além disso ϕ é sobrejetora (pois os elementos da diagonal de qualquer matriz triangular invertível são diferentes de zero). Desde que o produto de variedades irredutíveis é irredutível, segue que $G_m^n \times \mathbb{A}^{n(n-1)/2}$ é uma variedade irredutível, assim $\phi(G_m^n \times \mathbb{A}^{n(n-1)/2})$ é irredutível, ou seja, $T(n, \mathbb{K})$ é conexo.

Observe que $U(n, \mathbb{K})$ é o núcleo do homomorfismo de grupos $\psi : T(n, \mathbb{K}) \longrightarrow D(n, \mathbb{K})$, dado por $\psi((a_{ij})) = (b_{ij})$, onde $b_{ii} = a_{ii}$ e $b_{ij} = 0$ sempre que $i \neq j$. Desta forma $U(n, \mathbb{K})$ é um subgrupo normal de $T(n, \mathbb{K})$. Desde que $D(n, \mathbb{K})$ é abeliano, temos que $D^{(1)} = \{Id_n\}$ (Id_n denota a matriz identidade), assim $T(n, \mathbb{K})/U(n, \mathbb{K})$ é solúvel. Desta forma, se verificarmos que $U(n, \mathbb{K})$ é solúvel, iremos obter que $T(n, \mathbb{K})$ é solúvel. Seja $H_n := \{(a_{ij}) \in GL(n, \mathbb{K}) | a_{ii} = 1 \text{ e } a_{ij} = 0 \text{ sempre que } i \neq j \text{ e } j \neq n\}$. Seja $\xi : U(n, \mathbb{K}) \longrightarrow U(n-1, \mathbb{K})$ o homomorfismo de grupos que associa cada matriz $A \in U(n, \mathbb{K})$ na matriz $\xi(A) \in U(n, \mathbb{K})$ obtida pelas eliminações da n-ésima linha e n-ésima coluna de A. Observe que ξ é sobrejetora e H_n é o seu núcleo, assim H_n é subgrupo normal de $U(n, \mathbb{K})$ e $U(n, \mathbb{K})/H_n \simeq U_(n-1, \mathbb{K})$. Desde que H_n é abeliano, segue por indução que $U(n, \mathbb{K})$ é solúvel. □

Proposição 2.9. *Assuma que G é conexo. G possui um subgrupo parabólico próprio se, e somente se, G não é solúvel.*

Demonstração. Suponha que G não possui subgrupos parabólicos próprios. Temos que G é um subgrupo fechado de algum $GL(V)$. Seja $\pi : V - 0 \longrightarrow \mathbb{P}(V)$ a projeção canônica. Defina $\varphi : G \times \mathbb{P}(V) \longrightarrow \mathbb{P}(V)$, por $\varphi(g, \pi(u)) = \pi(g(u))$. Note que G age morficamente em $\mathbb{P}(V)$ via φ. Seja X uma órbita fechada de tal ação. Tome $\pi(x_1) \in X$ um ponto arbitrário e denote por P o seu grupo de isotropia. Aplicando a propriedade universal do quociente temos que existe um G-morfismo de espaços homogêneos $\phi : G/P \longrightarrow X$, onde $\phi(gP) = g \cdot \pi(x_1)$. Observe que se $g \cdot \pi(x_1) = h \cdot \pi(h(x_1))$ então $h^{-1}g \in P$, logo $gP = hP$, desta maneira ϕ é uma bijeção. Desde que X é fechado, segue que X é uma variedade projetiva, assim, pelo teorema 1.10, X é uma variedade completa. Aplicando o lema 2.7 em ϕ segue que P é subgrupo parabólico de G. Desta forma $G = P$. Tome $V_1 = V/\pi(x_1)$, assim cada $g \in G$, induz um automorfismo $g' : V_1 \longrightarrow V_1$, logo G também age em $\mathbb{P}(V_1)$. Por argumentos análogos, podemos encontrar um $\overline{x_2} \in V_1$ tal que, para todo $g \in G$, $g'(\overline{x_2}) = \lambda_g \overline{x_2}$, assim existe um escalar α_g tal que $g(x_2) = \alpha_g x_1 + \lambda_g x_2$. Continuando esse processo, indutivamente, podemos encontrar uma base $\{x_1, \ldots, x_n\}$ de V, tal que para todo $g \in G$, temos que $g(x_j) = \sum_{i=1}^{n} \beta_{ij} x_i$, onde para $i > j$, $\beta_{ij} = 0$. Desta forma G é isomorfo (como grupo abstrato) a um subgrupo de $T(n, \mathbb{K})$. Desde que $T(n, \mathbb{K})$ é solúvel, segue que seus subgrupos são solúveis, e portanto G é solúvel.

Agora vamos provar a outra direção, isto é, se G é conexo e solúvel então não possui subgrupos parabólicos próprios. Seja Γ a coleção dos subgrupos parabólicos próprios de G. Suponha que $\Gamma \neq \varnothing$. Desta forma, existe $P \in \Gamma$ com dimensão maximal. A partir do lema 2.10 (ii), podemos supor que P é conexo. A partir do corolário 2.3, temos que o subgrupo dos comutadores $[G, G]$ é fechado e conexo em G. Desde que G é solúvel, $[G, G] \subsetneq G$. Observe que $Q := P.[G, G]$ é um subgrupo conexo e fechado de G que contém P, assim, pelo lema 2.10, Q é um subgrupo parabólico de G. Por nossas considerações, devemos ter $Q = P$ ou $Q = G$. Se $Q = G$ então a variedade G/P é um espaço homogêneo para $[G, G]$. Aplicando a propriedade universal de $[G, G]/(P \cap [G, G])$, obtemos um $[G, G]$-morfismo

$$[G, G]/(P \cap [G, G]) \longrightarrow G/P$$

que leva $P \cap [G, G]$ em P. Em particular esse $[G, G]$-morfismo é bijetor, assim, pelo lema 2.7, $P \cap [G, G]$ é subgrupo parabólico de $[G, G]$. Por indução sobre $\dim G$, podemos supor que nossa afirmação vale para os subgrupos de dimensão menor que $\dim G$, desta forma obtemos que $P \cap [G, G] = [G, G]$, assim $[G, G] \subseteq P$, o que contradiz a hipótese $Q = G$. Se $Q = P$ então $[G, G] \subseteq P$, logo P é subgrupo normal de G. Aplicando o corolário 2.7 (iii), segue que G/P é uma variedade afim, assim, pela proposição 1.33, G/P é finito, ou seja, P tem índice finito em G. Aplicando a proposição 2.2 (b), segue que $P = G$, o que é uma contradição. $\square$

Teorema 2.5. *(teorema do ponto fixo de Borel) Seja G um grupo algébrico linear, conexo e solúvel e X uma G-variedade completa. Existe um ponto em X que é fixado por todos os elementos em G.*

Demonstração. A partir da proposição 2.7, G possui uma órbita fechada em X. O grupo de isotropia de um ponto de tal órbita é parabólico (pois tal órbita é uma variedade completa). A partir da proposição 2.9, tal subgrupo parabólico deve ser exatamente G. $\square$

O teorema do ponto fixo de Borel possui muitas aplicações, uma delas é descrita no exemplo abaixo.

Exemplo 2.11. *Os elementos de $T(n,\mathbb{K})$ possuem um autovetor não nulo em comum. De fato, o lema 2.11 nos fornece que $T(n,\mathbb{K})$ é um grupo algébrico linear conexo e solúvel. Desde que $GL(n,\mathbb{K})$ age em $\mathbb{P}^{n-1}$ via aplicação $(g,\pi(u)) \longmapsto \pi(g(u))$, onde $\pi : \mathbb{A}^n - 0 \longrightarrow \mathbb{P}^{n-1}$ é a projeção canônica, $T(n,\mathbb{K})$ também age em $\mathbb{P}^{n-1}$ por restrição. Aplicando o teorema do ponto fixo de Borel, segue que existe $u \in \mathbb{A}^n - 0$ tal que $\pi(g(u)) = \pi(u)$, para todo $g \in T(n,\mathbb{K})$. Portanto u é um autovetor de todos os elementos de $T(n,\mathbb{K})$.*

Definição 2.12. *Dizemos que um subgrupo H de G é de Borel se H é um subgrupo fechado, conexo, solúvel e maximal com tais propriedades.*

Teorema 2.6. *(i) Um subgrupo fechado de G é parabólico se, e somente se, contém um subgrupo de Borel de G;*

(ii) Subgrupos de Borel são parabólicos;

(iii) Quaisquer dois subgrupos de Borel de G são conjugados.

Demonstração. A partir do lema 2.10 podemos assumir que G é conexo. Seja B um subgrupo de Borel e P um subgrupo parabólico. Note que B age em G/P pela ação que leva $(x, yP) \in B \times (G/P)$ em $xyP \in G/P$. Aplicando o teorema do ponto fixo de Borel em B e na B-variedade completa G/P, segue que existe $aP \in G/P$ tal que $b(aP) = aP$ para todo $b \in B$, ou seja, $a^{-1}ba \in P$, logo $a^{-1}Ba \subseteq P$. Desde que $a^{-1}Ba$ é um subgrupo de Borel, temos uma direção de (i) provada. Antes de provar a outra direção de (i), vamos provar (ii). Podemos assumir que G não é solúvel. Desta forma G admite um subgrupo parabólico próprio P. Pelo o que ja foi provado, podemos assumir que $B \subseteq P$. Naturalmente B também é subgrupo de Borel de P. Por indução sobre $\dim G$ podemos assumir que (ii) é válida para grupos algébricos de dimensão menor do que $\dim G$. Desta forma B é parabólico em P. Aplicando o lema 2.9, segue que B é subgrupo parabólico de G. Agora vamos provar a outra direção de (i). Se H é um subgrupo fechado de G, contendo um subgrupo parabólico B, segue do lema 2.10 (i) que H é subgrupo parabólico de G.

Se B e B' são dois subgrupos de Borel então B contem um conjugado de B', digamos P', e B' contém um conjugado de B, digamos P. Desta maneira $\dim B = \dim B'$. Portando $B = P'$ e $B' = P$, o que prova (iii).

$\square$

Corolário 2.8. *Seja $\phi : G \longrightarrow G'$ um homomorfismo sobrejetor de grupos algébricos lineares. Se P é um subgrupo parabólico (respectivamente, subgrupo de Borel) de G então $\phi(P)$ é um subgrupo parabólico (respectivamente, subgrupo de Borel) de G'.*

Demonstração. A partir do teorema 2.6 é suficiente provarmos para o caso onde P é um subgrupo de Borel. Neste caso temos $\phi(P)$ é um subgrupo fechado, conexo e solúvel de G'. Além disso, o morfismo $G/P \longrightarrow G/\phi(P)$, induzido por ϕ, é sobrejetor; desta maneira, aplicando a proposição 1.33 (c), segue que $G/\phi(P)$ é completa, assim $\phi(P)$ é um subgrupo parabólico de G. A partir do teorema 2.6 (i), segue que $\phi(P)$ contém um subgrupo de Borel de G'. Portanto $\phi(P)$ é um subgrupo de Borel de G'. $\square$

Recordamos que o centro de G é denotado por $C_G(G)$ e o corolário 2.4 nos mostra que $C_G(G)$ é um subgrupo fechado de G.

Corolário 2.9. *Seja B um subgrupo de Borel de G. Se G é conexo então $C_G(G)^\circ \subseteq C_B(B) \subseteq C_G(G)$.*

Demonstração. Observe que $C_G(G)^\circ$ é um subgrupo fechado, conexo e comutativo de G, assim está contido em um subgrupo de Borel B' de G. Pelo teorema 2.6 (iii), existe $a \in G$ tal que $B' = aBa^{-1}$. Dado $c \in C_G(G)^\circ$ existe $b \in B$ tal que $c = aba^{-1}$, o que implica $c = a$, ou seja, $C_G(G)^\circ \subseteq B$, logo $C_G(G)^\circ \subseteq C_B(B)$. Seja $g \in C_B(B)$. Considere o morfismo $\xi : G \longrightarrow G$, dado por $\xi(x) = gxg^{-1}x^{-1}$. Agora defina $\eta : G/B \longrightarrow G$, por $\eta(xB) = \xi(x)$. Desde que g está no centralizador de B, η está bem definida. Além disso, $\xi = \eta \circ \pi$, onde $\pi : G \longrightarrow G/B$ é a projeção canônica. A partir da demonstração do teorema 2.4, segue que η é um morfismo de variedades. Desde que G é afim, as partes (e) e (f) da proposição 1.33 implicam que $\eta(G/B)$ é finito. Note que $\eta(G/B)$ é irredutível, logo deve consistir de apenas um único ponto, ou seja, η é constante. Temos $\eta(B) = e$, assim $\eta(xB) = e$, para todo $x \in G$. Desta maneira $\xi(x) = e$, para todo $x \in G$; assim $g \in C_G(G)$ e portanto $C_B(B) \subseteq C_G(G)$. $\square$

Teorema 2.7. *(teorema de Lie-Kolchin) Seja G um subgrupo fechado, conexo e solúvel de $GL(n, \mathbb{K})$. Existe $x \in GL(n, \mathbb{K})$ tal que $xGx^{-1} \subseteq T(n, \mathbb{K})$.*

Demonstração. Desde que G não possui subgrupos parabólicos próprios, usando os mesmos argumentos feitos na demonstração da proposição 2.9, podemos encontrar uma base de $\mathbb{K}^n$ tal que os elementos de G são representados por matrizes triangulares superiores em tal base. Desta forma, se $x \in GL(n, \mathbb{K})$ é a matriz mudança de base, segue que $xGx^{-1} \subseteq T(n, \mathbb{K})$. $\square$

Uma consequência direta do teorema de Lie-Kolchin é que $T(n, \mathbb{K})$ é um subgrupo de Borel de $GL(n, \mathbb{K})$. De fato, seja Γ a coleção de todos os subgrupos fechados, solúveis e conexos de $GL(n, \mathbb{K})$ que contém $T(n, \mathbb{K})$. Desde que Γ é diferente do vazio (pois $T(n, \mathbb{K}) \in \Gamma$ via lema 2.11), segue da observação 1.6 que Γ possui um elemento maximal B. Note que B é um subgrupo de Borel de $GL(n, \mathbb{K})$ (caso contrário B não seria um elemento maximal de Γ). A partir do teorema de Lie-Kolchin, segue que existe $x \in GL(n, \mathbb{K})$ tal que $xBx^{-1} \subseteq T(n, \mathbb{K})$, assim $\dim B = \dim T(n, \mathbb{K})$ o que implica $B = T(n, \mathbb{K})$.

Capítulo 3

Variedades de bandeira

Os subgrupos parabólicos de $GL(n, \mathbb{K})$ podem ser definidos como estabilizadores de bandeiras, veja por exemplo [2](seção 2.5, página 49). Neste capítulo veremos que variedades grassmannianas e variedades de bandeiras possuem estrutura de variedade projetiva nas quais $GL(n, \mathbb{K})$ age transitivamente e a partir da nossa definição de grupos parabólicos veremos essa caracterização com os estabilizadores de bandeiras. Para este capítulo as referências principais foram [2] e [8].

3.1 Variedades grassmannianas

Definição 3.1. *Seja V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial de dimensão n. Para todo $m \leq n$, a variedade grassmanniana de V com relação a m é o conjunto de todos os subespaços m-dimensionais de V. Denotamos tal conjunto por $Gr(m, V)$.*

Naturalmente $Gr(1, V) = \mathbb{P}(V)$. Desejamos mostrar que para qualquer $m \leq n$, $Gr(m, V)$ tem uma estrutura de variedade projetiva. Para isto, primeiramente devemos fazer uma imersão de $Gr(m, V)$ em algum espaço projetivo. Considere a projeção canônica $\pi : \bigwedge^m V - 0 \longrightarrow \mathbb{P}(\bigwedge^m V)$ e em seguida defina $\Phi_m : Gr(m, V) \longrightarrow \mathbb{P}(\bigwedge^m V)$ da seguinte maneira: Se $U \in Gr(m, V)$ e $\{u_1, \ldots, u_m\}$ é uma base de U então $\Phi_m(U) := \pi(u_1 \wedge \cdots \wedge u_m)$. Note que Φ_m está bem definida, pois se $\{u'_1, \ldots, u'_n\}$ é outra base de U então $u'_1 \wedge \cdots \wedge u'_m = \det(M).(u_1 \wedge \cdots \wedge u_m)$, onde M é a matriz mudança de base de tais bases, logo $\pi(u'_1 \wedge \cdots \wedge u'_m) = \pi(u_1 \wedge \cdots \wedge u_m)$.

Agora vamos verificar que a aplicação Φ_m é injetiva. Seja $\mu := u_1 \wedge \cdots \wedge u_m$. Considere a aplicação linear $\varphi_\mu : V \longrightarrow \bigwedge^{m+1} V$, dada por $\varphi_\mu(v) = v \wedge \mu$. Naturalmente $U \subseteq \ker(\varphi_\mu)$. Por outro lado, tome $v \in \ker(\varphi_\mu)$, podemos estender $\{u_1, \ldots, u_m\}$ para uma base $\{u_1, \ldots, u_m, \ldots, u_n\}$ de V, assim $v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i$, onde $\alpha_i \in \mathbb{K}$. Desta forma

$$\begin{aligned} 0 = v \wedge \mu &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (u_i \wedge \mu) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (u_i \wedge u_1 \wedge \cdots \wedge u_m) \\ &= \sum_{i=m+1}^{n} \alpha_i (u_i \wedge u_1 \wedge \cdots \wedge u_m) \\ &= \sum_{i=m+1}^{n} \alpha_i (-1)^m (u_1 \wedge \cdots \wedge u_m \wedge u_i). \end{aligned}$$

Os termos $u_1 \wedge \cdots \wedge u_m \wedge u_i$ $(i > m)$ são elementos de uma base de $\bigwedge^{m+1} V$, assim $\alpha_i = 0$ sempre que $i > m$, desta forma $v = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i u_i \in U$, donde $\ker(\varphi_\mu) = U$. Sejam $W \in Gr(m, V)$, $\{w_1, \ldots, w_m\}$ uma base de W e $\omega := w_1 \wedge \cdots \wedge w_m$. Observe que se $\Phi_m(U) = \Phi_m(W)$ então $\mu = \lambda\omega$, para algum $\lambda \in \mathbb{K} - 0$. Dado $v \in \ker(\varphi_\omega)$, temos que $\varphi_\mu(v) = v \wedge \mu = \lambda(v \wedge \omega) = 0$, logo $v \in \ker(\varphi_\mu)$, assim $\ker(\varphi_\omega) \subseteq \ker(\varphi_\mu)$. De maneira análoga podemos encontrar $\ker(\varphi_\mu) \subseteq \ker(\varphi_\omega)$, assim $\ker(\varphi_\mu) = \ker(\varphi_\omega)$, ou seja, $U = W$ e portanto Φ_m é injetiva.

Definição 3.2. *Com as notações acima, Φ_m é chamada de imersão de Plücker de $Gr(m, V)$ em $\mathbb{P}(\bigwedge^m V)$.*

A partir das considerações acima podemos ver $Gr(m, V)$ como um subconjunto de $\mathbb{P}(\bigwedge^m V)$. Fixando uma base de V, nós obtemos uma base de $\bigwedge^m V$, a partir disso podemos identificar $\mathbb{P}(\bigwedge^m V)$ com $\mathbb{P}^N$ (via o isomorfismo que leva a base de $\bigwedge^m V$ na base canônica de $\mathbb{K}^{dim \bigwedge^m V}$), onde $N = \dim \bigwedge^m V - 1$. As coordenadas de um ponto $W \in Gr(m, V)$ em $\mathbb{P}^N$, descritas acima, são chamadas de coordenadas de Plücker de W.

Dizemos que $v \in V$ divide $\mu \in \bigwedge^m V$ se $\mu = v \wedge \omega$, para algum $\omega \in \bigwedge^{m-1} V$. O seguinte lema irá nos ajudar a mostrar que $Gr(m, V)$ é fechado em $\mathbb{P}(\bigwedge^m V)$.

Lema 3.1. *Se $v \in V$ e $\mu \in \bigwedge^m V$, então v divide μ se, e somente se, $v \wedge \mu = 0$ em $\bigwedge^{m+1} V$.*

Demonstração. Se v divide μ então $\mu = v \wedge \omega$, para algum $\omega \in \bigwedge^{m-1} V$, assim $v \wedge \mu = v \wedge v \wedge \omega = 0$. Seja $\Gamma := \{(j_1, \ldots, j_m) \in \mathbb{N}^m | 1 \leq j_1 < \ldots, < j_m \leq n\}$. Se $v \wedge \mu = 0$, nós escolhemos uma base $\{v_1, \ldots, v_n\}$ de V tal que $v = v_1$, assim obtemos a base correspondente $\{v_{j_1} \wedge \cdots \wedge v_{j_m} | (j_1, \ldots, j_m) \in \Gamma\}$ de $\bigwedge^m V$, em seguida podemos escrever

μ em relação a tal base, isto é

$$\mu = \sum_{(j_1,\dots j_m)\in\Gamma} \alpha_{(j_1,\dots j_m)}(v_{j_1} \wedge \cdots \wedge v_{j_m}), \tag{3.1}$$

desta forma $v \wedge \mu$ é uma soma de termos onde cada um ou tem dois v's ou é um elemento da base de $\bigwedge^{m+1} V$. Estes elementos da base aparecem uma única vez. Desde que $v \wedge \mu = 0$, segue que μ é uma soma de termos nos quais v aparece. Portanto $\mu = v \wedge \omega$ para algum $\omega \in \bigwedge^{m-1} V$. $\square$

Agora veremos que $Gr(m, V)$ é uma variedade projetiva. Seja $\mu \in \bigwedge^m(V)$. Se $u_1, \dots, u_t$ são elementos linearmente independentes de $\ker(\varphi_\mu)$ então $u_i \wedge \mu = 0$, para todo $i = 1, \dots, t$. Aplicando o lema 3.1 temos que $\mu = u_i \wedge \omega_i$, para algum $\omega_i \in \bigwedge^{m-1}(V)$. Desde que $u_1, \dots, u_t$ são linearmente independentes segue que $\mu = u_1 \wedge \cdots \wedge u_t \wedge \omega$ para algum $\omega \in \bigwedge^{m-t} V$. Desta forma $t \leq m$, consequentemente $\dim\ker(\varphi_\mu) \leq m$, assim $rank(\varphi_\mu) \geq n - m$. Além disso, se $t = m$ então $\mu = u_1 \wedge \cdots \wedge u_m$, logo $rank(\varphi_\mu) = n - m$. Desta maneira obtemos que $\mu \in \bigwedge^m V$ é decomponível se, e somente se, $rank(\varphi_\mu) \leq n - m$ (um elemento $\mu \in \bigwedge^m V$ é dito decomponível se $\mu = a_1 \wedge \cdots \wedge a_m$ com $a_i \in V$). Em outras palavras $\pi(\mu)$ (o qual a priore está em $\mathbb{P}(\bigwedge^m V)$) pertence a $Gr(m, V)$ se, e somente se, $rank(\varphi_\mu) \leq n - m$. Isto é exatamente uma condição polinomial para as coordenadas de Plücker dos elementos de $Gr(m, V)$. De fato, dada uma base $\{v_1, \dots, v_n\}$ de V, podemos escrever μ como em (3.1), desta forma

$$\varphi_\mu(v_j) = \sum_{(j_1,\dots j_m)\in\Gamma} \alpha_{(j_1,\dots j_m)}(v_j \wedge v_{j_1} \wedge \cdots \wedge v_{j_m}).$$

Note que ou $\alpha_{(j_1,\dots j_m)}(v_j \wedge v_{j_1} \wedge \cdots \wedge v_{j_m}) = 0$ ou $\alpha_{(j_1,\dots j_m)}(v_j \wedge v_{j_1} \wedge \cdots \wedge v_{j_m})$ é um múltiplo de algum elemento da base $\bigwedge^{m+1} V$, assim as linhas matriz A que representa φ_μ consistem de zeros e dos coeficientes de μ (a manos do sinal). Observe que $rank(\varphi_\mu) \leq n - m$ implica que o determinante das submatrizes $(n-m+1) \times (n-m+1)$ de A são iguais a zero, o que nos fornece condições polinomiais para as coordenadas de μ em $\mathbb{K}^{dim \bigwedge^m V}$. Desde que o determinante é um polinômio homogêneo, obtemos condições polinomiais para $\pi(\mu)$. Portanto $Gr(m, V)$ é fechado em $\mathbb{P}(\bigwedge^m V)$.

Exemplo 3.1. *Tome $r = 4$ e $n = 2$. Se $\mu = \sum_{i<j} \alpha_{ij}(v_i \wedge v_j) \in \bigwedge^2 V$, então a matriz que representa φ_μ com respeito a base*

$$\{v_1 \wedge v_2 \wedge v_3, v_1 \wedge v_2 \wedge v_4, v_1 \wedge v_3 \wedge v_4, v_2 \wedge v_3 \wedge v_4\}$$

é dada por

$$[\varphi_\mu] = \begin{bmatrix} \alpha_{23} & -\alpha_{13} & \alpha_{12} & 0 \\ \alpha_{24} & -\alpha_{14} & 0 & \alpha_{12} \\ \alpha_{34} & 0 & -\alpha_{12} & \alpha_{13} \\ 0 & \alpha_{34} & -\alpha_{24} & \alpha_{23} \end{bmatrix}.$$

Seja $[\varphi_\mu^{ij}]$ *a submatriz* 3×3 *de* $[\varphi_\mu]$ *obtida pela eliminação da i-ésima linha e a j-ésima coluna de* $[\varphi_\mu]$*. Desde que* $\mu \in Gr(2,V)$ *se, e somente se,* $rank(\varphi_\mu) \leq 2$ *segue que* $Gr(2,V) = \{\pi(\mu) \in \mathbb{P}(\bigwedge^2 V) | \det[\varphi_\mu^{ij}] = 0$ *para quaisquer* $i, j \in \{1,2,3,4\}\}$

3.2 Variedades de bandeira

Definição 3.3. *Seja* $1 \leq n_1 < n_2 \cdots < n_r \leq n$ *uma sequencia de números inteiros. Uma bandeira em* V *com relação a* $n_1, \ldots, n_r$ *é uma cadeia de subespaços*

$$0 \subsetneq V_1 \subseteq V_2 \cdots \subseteq V_r \subseteq V$$

tais que $\dim V_i = n_i$*. O conjunto de todas as bandeiras em* V *com relação a* $n_1, \ldots, n_r$ *é denotado por* $\mathcal{F}(V; n_1, \ldots, n_r)$ *e o chamamos de variedade de bandeira. Em particular os elementos de* $\mathcal{F}(V; 1, \ldots, n)$ *são chamados de bandeiras completas.*

Note que as variedades grassmannianas são casos particulares de variedade de bandeira, isto é, $Gr(m,V) = \mathcal{F}(V; m)$. A partir da estrutura de variedade projetiva das grassmannianas, vamos mostrar que as variedades de bandeira também têm estrutura de variedade projetiva. Considere a aplicação

$$\begin{array}{rccc} \Psi : & \mathcal{F}(V; n_1, \ldots, n_r) & \longrightarrow & Gr(n_1, V) \times \cdots \times Gr(n_r, V) \\ & 0 \subsetneq V_1 \subseteq V_2 \cdots \subseteq V_r \subseteq V & \longmapsto & (V_1, \ldots, V_r) \end{array}$$

a qual naturalmente é injetiva. Desta forma podemos ver $\mathcal{F}(V; n_1, \ldots, n_r)$ como um subconjunto de $Gr(n_1, V) \times \cdots \times Gr(n_r, V)$. Desde que $Gr(n_1, V) \times \cdots \times Gr(n_r, V)$ é uma variedade projetiva (via proposição 1.32 (iii)), se mostrarmos que $\mathcal{F}(V; n_1, \ldots, n_r)$ é fechado em $Gr(n_1, V) \times \cdots \times Gr(n_r, V)$, obteremos a estrutura de variedade projetiva de $\mathcal{F}(V; n_1, \ldots, n_r)$.

Seja

$$\xi_{ij} : Gr(n_1, V) \times \cdots \times Gr(n_r, V) \longrightarrow Gr(n_i, V) \times Gr(n_j, V)$$

$(i < j)$ a projeção. Afirmamos que $\mathcal{F}(V; n_1, \ldots, n_r) = \bigcap_{i<j} \xi_{ij}^{-1}(\mathcal{F}(V; n_i, n_j))$. De fato, se $F = (V_1, \ldots, V_n) \in \mathcal{F}(V; n_1, \ldots, n_r)$ então $\xi_{ij}(F) = (V_i, V_j) \in \mathcal{F}(V; n_i, n_j)$ sempre

que $i < j$ assim $F \in \xi_{ij}^{-1}(\mathcal{F}(V; n_i, n_j))$ sempre que $i < j$, logo $\mathcal{F}(V; n_1, \ldots, n_r) \subseteq \bigcap_{i<j} \xi_{ij}^{-1}(\mathcal{F}(V; n_i, n_j))$. Por outro lado, se $F \in \bigcap_{i<j} \xi_{ij}^{-1}(\mathcal{F}(V; n_i, n_j))$ então $\xi_{ij}(F) \in \mathcal{F}(V; n_i, n_j)$, logo $F \in \mathcal{F}(V; n_1, \ldots, n_r)$, donde $\bigcap_{i<j} \xi_{ij}^{-1}(\mathcal{F}(V; n_i, n_j)) \subseteq \mathcal{F}(V; n_1, \ldots, n_r)$.

A partir das considerações feitas nos parágrafos acima, para mostrarmos que as variedades de bandeira são projetivas basta verificarmos que se $r < s$ então $\mathcal{F}(V; r, s)$ é fechado em $Gr(r, V) \times Gr(s, V)$. Sejam $(U, W) \in Gr(r, V) \times Gr(s, V)$ e $\{u_1, \ldots, u_r\}$, $\{w_1, \ldots, w_s\}$ bases de U e W respectivamente. Defina $\mu := u_1 \wedge \cdots \wedge u_r$ e $\omega := w_1 \wedge \cdots \wedge w_s$. As aplicações lineares $\varphi_\mu : V \longrightarrow \bigwedge^{r+1} V$ e $\varphi_\omega : V \longrightarrow \bigwedge^{s+1} V$ induzem uma aplicação linear

$$\begin{array}{rccc} \varphi_\mu \oplus \varphi_\omega : & V & \longrightarrow & \bigwedge^{r+1} V \oplus \bigwedge^{s+1} V \\ & v & \longmapsto & (\varphi_\mu(v), \varphi_\omega(v)) \end{array}$$

a qual o núcleo é exatamente $U \cap W$, assim

$$\begin{aligned} rank(\varphi_\mu \oplus \varphi_\omega) &= \dim V - \dim \ker(\varphi_\mu \oplus \varphi_\omega) \\ &= n - \dim(U \cap W) \\ &\geq n - \dim U. \end{aligned}$$

Desta forma $U \subseteq W$ se, e somente se, $rank(\varphi_\mu \oplus \varphi_\omega) \leq n - r$. Fixando uma base de V, as entradas da matriz M que representa $\varphi_\mu \oplus \varphi_\omega$ ou são nulas ou são, a menos do sinal, coeficientes de μ e ω. Logo esta condição para o $rank(\varphi_\mu \oplus \varphi_\omega)$ nos fornece condições polinomiais para os coeficientes de μ e ω (os determinantes das submatrizes $(n - r + 1) \times (n - r + 1)$ de M são iguais a zero). Logo $\mathcal{F}(V; r, s)$ é o conjunto de zeros destes polinômios (homogêneos) e portanto é um subconjunto fechado de $Gr(r, V) \times Gr(s, V)$.

3.3 A ação de $GL(n, \mathbb{K})$ em $\mathcal{F}(\mathbb{K}^n; n_1, \ldots, n_r)$

Nesta seção vamos denotar $\mathbb{K}^n := V$. Dado uma sequência $1 \leq n_1 < \cdots < n_r \leq n$ de números inteiros, observe que $GL(V)$ age (morficamente) em $Gr(n_1, V) \times \cdots \times Gr(n_r, V)$ da seguinte maneira: se $g \in GL(V)$ e $(V_1, \ldots, V_r) \in Gr(n_1, V) \times \cdots \times Gr(n_r, V)$ então $g \cdot (V_1, \ldots, V_n) := (g(V_1), \ldots, g(V_n))$. Em particular $GL(V)$ também age em $\mathcal{F}(V; n_1, \ldots, n_r)$. Afirmamos que tal ação é transitiva. De fato, considere $F = (V_1, \ldots, V_n) \in \mathcal{F}(V; n_1, \ldots, n_r)$ e escolha uma base $\{v_1, \ldots, v_n\}$ de V tal que $\{v_1, \ldots, v_i\}$ é uma base de V_i. Se $(U_1, \ldots U_n)$ é um elemento arbitrário de $\mathcal{F}(V; n_1, \ldots, n_r)$, escolha uma base $\{u_1, \ldots, u_n\}$ de V tal que $\{u_1, \ldots, u_i\}$ é uma base de U_i. Existe $g \in GL(V)$

tal que $g(v_i) = u_i$, desta forma $g \cdot F = (U_1, \ldots, U_r)$; logo $\mathcal{F}(V; n_1, \ldots, n_r) \subseteq GL(V) \cdot F$, o que implica $GL(V) \cdot F = \mathcal{F}(V; n_1, \ldots, n_r)$.

Proposição 3.1. *Os subgrupos de Borel de $GL(V)$ são exatamente os estabilizadores das bandeiras completas de $\mathcal{F}(V; 1, \ldots, n)$.*

Demonstração. Seja $\{e_1, \ldots, e_n\}$ a base canônica de V. Tome $L_1 := \mathbb{K}e_1$ e para cada $1 < i \leq n$ seja $L_i := L_{i-1} \oplus \mathbb{K}e_i$. Afirmamos que o estabilizador P de $L := (L_1, \ldots, L_n)$ é $T(n, \mathbb{K})$. De fato, se $g \in P$ então $g(L_i) = L_i$, assim $g(e_j) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} v_i \in L_j$, logo $\alpha_{ij} = 0$ sempre que $i > j$, o que implica $P \subseteq T(n, \mathbb{K})$. Desde que o $GL(V)$-morfismo $G/P \longrightarrow \mathcal{F}(V; 1, \ldots, n)$, que leva gP em $g \cdot L$, é bijetor, segue do lema 2.7 que P é subgrupo parabólico de $GL(V)$, logo contém algum subgrupo de Borel. Desde que $T(n, \mathbb{K})$ é subgrupo de Borel de $GL(V)$ e quaisquer dois subgrupos de Borel são conjugados, devemos ter que $P = T(n, \mathbb{K})$. Seja B um subgrupo de Borel de $GL(V)$. Existe $g \in GL(V)$ tal que $B = gT(n, \mathbb{K})g^{-1}$. Aplicando a proposição C.2 temos que B é o estabilizador de $g \cdot L \in \mathcal{F}(V; 1, \ldots, n)$. Reciprocamente, suponha que P é o estabilizador de algum $F \in \mathcal{F}(V; 1, \ldots, n)$. Sabemos que $GL(V)$ age transitivamente em $\mathcal{F}(V; 1, \ldots, n)$ assim existe $g \in GL(V)$ tal que $g \cdot L = F$, logo $P = gT(n, \mathbb{K})g^{-1}$ é um subgrupo de Borel de $GL(V)$. $\square$

Lema 3.2. *Seja $\{e_1, \ldots, e_n\}$ a base canônica de V. Tome $L_1 := \mathbb{K}e_1$ e para cada $1 < i \leq n$ seja $L_i := L_{i-1} \oplus \mathbb{K}e_i$(em iremos denotar por $L := (L_1, \ldots, L_n)$ tal bandeira). Então os únicos subespaços não nulos de V que são invariantes por $T(n, \mathbb{K})$ são $L_1, \ldots, L_n$.*

Demonstração. Vimos na proposição acima que cada L_i é invariante sobre $T(n, \mathbb{K})$. Por outro lado, considere um subespaço não nulo W de V invariante sobre $T(\mathbb{K}, n)$. Naturalmente $W \subseteq L_i$ para algum i. Assim existe $1 \leq k \leq n$ tal que $W \subseteq L_k$ e $W \nsubseteq L_{k-1}$. Desta forma existe $v \in W$ tal que $v = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \alpha_i e_i$, onde $\alpha_k \neq 0$. Seja $b = (b_{ij}) \in T(n, \mathbb{K})$ tal que a i-ésima coluna de b é igual ao vetor e_i sempre que $i \neq k$ e $b_{ik} = \alpha_i$. Note que $b.e_k = v$, assim $b^{-1}v = e_k$, logo $e_k \in W$ (pois $T(n, \mathbb{K})$ estabiliza W). Seja $u = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \beta_i e_i \in L_k$, onde $\beta_k \neq 0$. Tome $b' \in T(n, K)$ definida de maneira similar a b, porém com $b'_{ik} = \beta_i$. Note que $b'e_k = u$, assim $u \in W$. Em particular, para $i \leq k$, $e_i + e_k \in V$, logo $e_i \in V$, assim $L_k \subseteq W$. Portanto $W = L_k$. $\square$

Definição 3.4. *Seja $(V_1, \ldots, V_s)$ uma bandeira. Dizemos que uma bandeira $(W_1, \ldots, W_r)$, com $r \leqslant s$, é uma sub-bandeira de $(V_1, \ldots, V_s)$ se cada W_i é igual a algum V_j.*

Sejam $1 \leq a_1 < \cdots < a_r = n$ uma sequência de inteiros. Tome $n_1 := a_1$ e $n_i := a_i - a_{i-1}$ sempre que $i > 1$. Denote por $P(n; a_1, \ldots, a_n)$ o estabilizador da sub-bandeira $(L_{a_1}, \ldots, L_{a_r})$ de L (onde L é como na demonstração da proposição 3.1). Observe que $P(n; a_1, \ldots, a_n)$ é o grupo de todas as matrizes triangulares superiores por blocos do tipo

$$\begin{bmatrix} A_1 & * & * & \ldots & * \\ 0 & A_2 & * & \ldots & * \\ 0 & 0 & A_3 & \ldots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & * \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & A_r \end{bmatrix} \tag{3.2}$$

onde $A_i \in GL(n_i, \mathbb{K})$.

Definição 3.5. *Os estabilizadores das sub-bandeiras $(L_{a_1}, \ldots, L_{a_r})$ de $(L_1, \ldots, L_n)$, com $L_{a_r} = L_n$, são chamados de subgrupos escadas de $GL(V)$.*

Naturalmente os subgrupos escadas são subgrupos parabólicos de $GL(V)$ pois são fechados e contêm $T(n, \mathbb{K})$.

Teorema 3.1. *Se G um grupo algébrico linear conexo e B é um subgrupo de Borel de G então $G = \bigcup\limits_{x \in G} xBx^{-1}$.*

Demonstração. Veja [16], página 109. □

Observação 3.1. *Em particular, o teorema acima implica*

$$GL(n, \mathbb{K}) = \bigcup_{x \in GL(n, \mathbb{K})} xT(n, \mathbb{K})x^{-1}$$

.

Proposição 3.2. *Os subgrupos escadas de $GL(V)$ são conexos.*

Demonstração. Seja $P := P(n; a_1, \ldots, a_r)$ um subgrupo escada. Considere o homomorfismo de grupos algébricos

$$\phi : P \longrightarrow GL(n_1, \mathbb{K}) \times \cdots \times GL(n_r, \mathbb{K})$$

que associa cada matriz do tipo (3.2) a $(A_1, \ldots, A_r)$. Note que $\ker(\phi) \subseteq T(n, \mathbb{K}) \subseteq P^\circ \subseteq P$. Seja $G := GL(n_1, \mathbb{K}) \times \cdots \times GL(n_r, \mathbb{K})$. Desde que ϕ é sobrejetora e G é irredutível, partir da proposição 2.4 (c), temos que $\phi(P^\circ) = \phi(P)^\circ = G^\circ = G$, desta forma

$$P^\circ / \ker(\phi) \simeq G \simeq P / \ker(\phi),$$

donde $P^\circ = P$. □

Teorema 3.2. *Os únicos subgrupos fechados de $GL(V)$ que contêm $T(n,\mathbb{K})$ são os subgrupos escadas.*

Demonstração. Seja H um subgrupo fechado de $GL(V)$ contendo $T(n,\mathbb{K})$. Se um subespaço não nulo W de V é invariante sobre H então W também deve ser invariante sobre $T(n,\mathbb{K})$, assim, pelo lema 3.2, $W = L_i$ para algum i. Sejam $L_{a_1},\dots,L_{a_r}$ todos os subespaços invariantes por H, onde $1 \leq a_1 < \cdots < a_r = n$. Desta forma, temos que $H \subseteq P(n;a_1,\dots,a_r) := P$. Note que r é o maior inteiro tal que H está contido em um grupo escada. Vamos mostrar que $H = P$ para o caso em que $r > 1$. Para o caso em que $r = 1$ veja [2], página 54. Considere ϕ e G como na demonstração da proposição 3.2. Desde que $\ker(\phi) \subseteq H$, usando o mesmo argumento da proposição 3.2, é suficiente mostrarmos que $\phi(H) = G$. Observe que se $N := (N_1,\dots,N_r) \in G$ então

$$N = \prod_{i=1}^{r}(Id_{n_1},\dots,Id_{n_{i-1}},N_i,Id_{n_{i+1}},\dots,Id_{n_r}),$$

onde Id_{n_i} é a matriz identidade de $GL(n_i,\mathbb{K})$. Desde que $\phi(H)$ é subgrupo de G, basta verificarmos que $(Id_{n_1},\dots,Id_{n_{i-1}},N_i,Id_{n_{i+1}},\dots,Id_{n_r}) \in \phi(H)$ para todo i. Verificaremos apenas para o caso $i = 1$, pois os outros casos são análogos. A partir da observação 3.1, temos que $N_1 = A_1MA_1^{-1}$ com $A_1 \in GL(n_1,\mathbb{K})$ e $M \in T(n_1,\mathbb{K})$. Desde que a matriz

$$\begin{bmatrix} M & * & * & \dots & * \\ 0 & Id_{n_2} & * & \dots & * \\ 0 & 0 & Id_{n_3} & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & * \\ 0 & 0 & 0 & \dots & Id_{n_r} \end{bmatrix}$$

está em $T(n,\mathbb{K}) \subseteq H$, segue que $M' := (M,Id_{n_2},\dots,Id_{n_r}) \in \phi(H)$. Considere a projeção $\pi_1 : G \longrightarrow GL(n_1,\mathbb{K})$. Observe que $\pi_1(\phi(H))$ é um subgrupo fechado de $GL(n_1,\mathbb{K})$ e contém $T(n_1,\mathbb{K})$. Por indução sobre n, podemos supor que o teorema é válido para inteiros positivos menores do que n. Desta forma $\pi_1(\phi(H))$ é um subgrupo escada de $GL(n_1,\mathbb{K})$, assim existem $1 \leq b_1 < \cdots < b_s = n_1$ tais que $\pi_1(\phi(H)) = P(n_1,b_1,\dots,b_r)$. Observe que se $s \neq 1$ então $H \subseteq P(n;b_1,\dots,b_s,a_2,\dots,a_r)$, o que contradiz a maximalidade de r, logo devemos ter que $s = 1$, assim $\pi_1(\phi(H)) = GL(n_1,\mathbb{K})$. Desta maneira existe $C = (C_1,\dots,C_r) \in \phi(H)$ tal que $C_1 = A_1$. Finalmente temos que

$$CM'C^{-1} = (A_1MA_1^{-1},C_2Id_{n_2}C_2^{-1},\dots,C_rId_{n_r}C_r^{-1}) = (N_1,Id_{n_2},\dots,Id_{n_r})$$

é um elemento de $\phi(H)$. $\square$

Proposição 3.3. *Os subgrupos parabólicos de $GL(V)$ são exatamente os subgrupos que estabilizam alguma bandeira.*

Demonstração. Desde que $GL(V)$ age transitivamente nas variedades de bandeiras e tais variedades são projetivas, segue que os subgrupos que estabilizam alguma bandeira são parabólicos. Reciprocamente, se P é um subgrupo parabólico de $GL(V)$ então P contém um subgrupo de Borel B de $GL(V)$. Desde que quaisquer dois subgrupos de Borel são conjugados, existe $x \in GL(V)$ tal que $T(n, \mathbb{K}) = xBx^{-1}$, desta forma xPx^{-1} é um subgrupo parabólico o qual contém $T(n, \mathbb{K})$. Aplicando o teorema 3.2, segue que existem $1 \leq a_1 < \cdots < a_r = n$ tais que xPx^{-1} é o estabilizador da bandeira $(L_{a_1}, \ldots, L_{a_r})$. Portanto P é o estabilizador da bandeira $(x^{-1}(L_{a_1}), \ldots, x^{-1}(L_{a_r}))$. $\square$

Apêndice A

Espaços topológicos Noetherianos

Proposição A.1. *Seja X um espaço topológico não vazio. São equivalentes:*

a) A interseção de dois abertos não vazios de X é não vazia;

b) Todo aberto não vazio de X é denso;

c) Todo aberto de X é conexo;

d) X não pode ser escrito como a união de dois fechados próprios.

Demonstração. Basta mostrarmos as seguintes implicações

(a) $\Rightarrow$ (b): Seja A um aberto não vazio de X. Suponha que $X - \overline{A} \neq \varnothing$. Assim $A \cap (X - \overline{A}) \neq \varnothing$, o que é uma contradição. Portanto $\overline{A} = X$.

(b) $\Rightarrow$ (c): Sejam A um aberto não vazio de X e V_1, V_2 abertos em A (consequentemente, abertos em X) tais que $A = V_1 \cup V_2$ e $V_1 \cap V_2 = \varnothing$. Se $V_1 \neq \varnothing$, segue da hipótese que $V_2 = \varnothing$. Portanto A é conexo.

(c) $\Rightarrow$ (d): Suponha que $X = Y \cup Z$ onde Y, Z são dois fechados próprios de X. Assim $Y^c \neq \varnothing$, $Z^c \neq \varnothing$ e $Y^c \cap Z^c = \varnothing$, logo $Y^c \cup Z^c$ é um aberto não conexo de X, o que é uma contradição.

(d)$\Rightarrow$ (a): Sejam A e B dois abertos não vazios de X. Suponha que $A \cap B = \varnothing$, assim $X = A^c \cup B^c$, onde A^c e B^c são dois fechados próprios de X, o que é uma contradição. Portanto $A \cap B \neq \varnothing$.

□

Definição A.1. *Um espaço topológico satisfazendo as condições equivalentes acima é chamado de irredutível.*

Proposição A.2. *Seja X um espaço topológico.*

a) Se X é irredutível, então todo aberto não vazio de X é irredutível;

b) $Y \subseteq X$ *é um subespaço irredutível se, e somente se,* $\overline{Y}$ *é irredutível;*

c) Todo subespaço irredutível de X *está contido em um subespaço irredutível maximal (estes últimos são chamados de componentes irredutíveis de* X*);*

d) X *é a união de suas componentes irredutíveis;*

e) Se $f : X \longrightarrow X'$ *é uma aplicação continua (*X' *espaço topológico arbitrário) e* X *é irredutível então* $f(X)$ *é irredutível.*

Demonstração. a) Seja A um aberto de X. Observe que todo aberto de A é também aberto em X. Desde que todo aberto de X é conexo, segue que todo aberto de A é conexo, assim A é irredutível.

b) Sejam A, B dois abertos não vazios de $\overline{Y}$. Existem $A^{'}, B^{'}$ abertos em X tais que $A = \overline{Y} \cap A^{'}$ e $B = \overline{Y} \cap B^{'}$. Deste modo, $V := Y \cap A^{'} \neq \varnothing$ e $W := Y \cap B^{'} \neq \varnothing$ são dois abertos de Y tais que $V \subseteq A$ e $W \subseteq B$ assim $V \cap W \subseteq A \cap B$. Se Y é irredutível segue que $V \cap W \neq \varnothing$, consequentemente, $A \cap B \neq \varnothing$, logo $\overline{Y}$ é irredutível. Reciprocamente, dados abertos não vazios V e W de Y, existem $A^{'}, B^{'}$ abertos em X tais que $V = Y \cap A^{'}$ e $W = Y \cap B^{'}$, assim $A := \overline{Y} \cap A^{'}$ e $B := \overline{Y} \cap B^{'}$ são abertos não vazios de $\overline{Y}$, logo $A \cap B \neq \varnothing$, ou seja, $\overline{Y} \cap (A^{'} \cap B^{'}) \neq \varnothing$, isto implica $V \cap W = Y \cap (A^{'} \cap B^{'}) \neq \varnothing$, donde Y é irredutível.

c) Sejam $Y \subseteq X$ um subespaço irredutível e Γ a coleção de todos os subespaços irredutíveis de X que contém Y. Observe que $\Gamma \neq \varnothing$, pois $Y \in \Gamma$. Note que Γ é parcialmente ordenado com a relação de inclusão "$\subseteq$". Seja $(Y_\alpha)_{\alpha \in L}$ uma cadeia em Γ, tome $W = \bigcup_{\alpha \in L} Y_\alpha$. Sejam A, B dois abertos não vazios de W, assim existem $A^{'}, B^{'}$ abertos em X tais que $A = W \cap A^{'}$ e $B = W \cap B^{'}$, ou seja, $A = \bigcup_{\alpha \in L} (Y_\alpha \cap A^{'})$ e $B = \bigcup_{\alpha \in L} (Y_\alpha \cap B^{'})$, logo existe $\alpha \in L$, tal que $V_1 := Y_\alpha \cap A^{'} \neq \varnothing$ e $V_2 := Y_\alpha \cap B^{'} \neq \varnothing$. Logo $V_1 \cap V_2 \neq \varnothing$. Desde que $V_1 \subseteq A$ e $V_2 \subseteq B$, segue que $A \cap B \neq \varnothing$, assim W é irredutível e naturalmente contém Y, desta maneira W é uma cota superior para a cadeia $(Y_\alpha)_{\alpha \in L}$ em Γ. Logo, pelo lema de Zorn, Γ admite elemento maximal M.

Afirmação: M é um subespaço irredutível maximal de X.

De fato, seja H um subespaço irredutível de X, tal que $M \subseteq H$. Em particular, $Y \subseteq H$, assim $H \in \Gamma$. Segue da maximalidade de M em Γ que $H = M$.

Portanto Y está contido em um subspaço irredutível maximal de X.

Observação A.1. *Note que a afirmação acima implica que todo espaço irredutível maximal de* X *é também um subespaço fechado de* X*.*

d) Seja W a união de todas as componentes irredutíveis de X. Dado $x \in X$, temos que $\{x\}$ é um subespaço irredutível de X, segue do item anterior que $x \in W$, logo $X \subseteq W$. Portanto $X = W$.

e) Sejam U e V abertos de X' que intersectam $f(X)$. Basta mostrarmos que $U \cap V$ intersecta $f(X)$. Temos que $f^{-1}(U)$ e $f^{-1}(V)$ são abertos não vazios de X, assim $f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V) \neq \varnothing$, ou seja, $f^{-1}(U \cap V) \neq \varnothing$, donde $U \cap V$ intersecta $f(X)$.

□

Proposição A.3. *Seja X um espaço topológico. As seguintes afirmações são equivalentes:*

a) Qualquer cadeia ascendente de subespaços abertos de X é estacionária;

b) Qualquer cadeia descendente de subespaços fechados de X é estacionária;

c) Qualquer família não vazia de subespaços abertos de X admite um elemento maximal;

d) Qualquer família não vazia de subespaços fechados de X admite um elemento minimal;

e) Qualquer subespaço aberto de X é quasi-compacto;

f) Qualquer subespaço de X é quasi-compacto.

Demonstração. Basta mostrar que $(a) \Rightarrow (c)$, $(c) \Rightarrow (d)$, $(d) \Rightarrow (b)$,$(b) \Rightarrow (a)$, $(c) \Rightarrow (f)$, $(f) \Rightarrow (e)$ e $(e) \Rightarrow (a)$.

$(a) \Rightarrow (c)$: Seja τ uma família não vazia de subespaços abertos de X e $Y_1 \in \tau$. Suponha que τ não possui elemento maximal. Assim existe $Y_2 \in \tau$, tal que $Y_1 \subsetneq Y_2$, por argumento análogo, existe $Y_3 \in \tau$, tal que $Y_2 \subsetneq Y_3$, ou seja, $Y_1 \subsetneq Y_2 \subsetneq Y_3$. Seguindo este processo indutivamente, teremos

$$Y_1 \subsetneq Y_2 \subsetneq \cdots \subsetneq Y_n \subsetneq \ldots$$

uma cadeia ascendente de abertos em X que não é estacionária, o que contradiz nossa hipótese. Portanto τ admite um elemento maximal.

$(c) \Rightarrow (d)$: Seja $\tau = (Y_i)_{i \in L}$ uma família não vazia de fechados em X. Assim $\tau^{'} = (Y_i^c)_{i \in L}$ é uma família não vazia de abertos em X, logo $\tau^{'}$ admite um elemento maximal Y_i^c, para algum $i \in L$. Dado $Y_j \in \tau$ tal que $Y_j \subseteq Y_i$, teremos que $Y_i^c \subseteq Y_j^c$, isto implica em $Y_i^c = Y_j^c$, assim $Y_i = Y_j$, e então Y_j é elemento minimal de τ.

$(d) \Rightarrow (b)$ Seja

$$Y_0 \supseteq Y_1 \supseteq \cdots \supseteq Y_n \supseteq \ldots \tag{A.1}$$

uma cadeia descendente de fechados em X. Em particular $\tau = (Y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ é uma família não vazia de fechados em X, logo possui um elemento minimal Y_n, para algum $n \in \mathbb{N}$, deste modo $Y_n = Y_{n+1} = \ldots$, donde a cadeia (A.1) é estacionária.

$(b) \Rightarrow (a)$: Seja

$$Y_0 \subseteq Y_1 \subseteq \ldots \subseteq Y_n \subseteq \ldots \tag{A.2}$$

uma cadeia ascendente de abertos em X. Deste modo

$$Y_0^c \supseteq Y_1^c \supseteq \ldots \supseteq Y_n^c \supseteq \ldots \tag{A.3}$$

é uma cadeia descendente de fechados em X, logo existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $Y_k^c = Y_{k+1}^c = \ldots$, assim $Y_k = Y_{k+1} = \ldots$, donde a cadeia (A.2) é estacionária.

$(c) \Rightarrow (f)$: Seja Y um subespaço de X e $Y \subseteq \bigcup\limits_{i\in L} X_i$ uma cobertura aberta de Y. Em particular $\tau = (X_i)_{i\in L}$ é uma família não vazia de abertos de X. Seja Γ a coleção de todas as uniões finitas de elementos de τ, logo Γ é uma família não vazia de abertos de X e então, por hipótese, possui um elemento maximal $W = \bigcup\limits_{k=1}^{n} X_{i_k}$. Dado $x \in Y$ temos que existe $i \in L$ tal que $x \in X_i$. Como $W \subseteq W \cup X_i$ e $W \cup X_i \in \Gamma$ segue que $W = W \cup X_i$, donde $x \in W$, assim $Y \subseteq W$. Portanto Todo subespaço de X é quase-compacto.

$(f) \Rightarrow (e)$: Se todo subespaço de X é quase-compacto, então, em particular, todo subespaço aberto de X é quase-compacto.

$(e) \Rightarrow (a)$: Seja

$$Y_0 \subseteq Y_1 \subseteq \ldots \subseteq Y_n \subseteq \ldots \tag{A.4}$$

uma cadeia ascendente de abertos em X. Tome $B = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} Y_i$. Note que B é aberto e $B \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} Y_i$ é uma cobertura aberta, logo admite subcobertura finita, ou seja, $B \subseteq \bigcup\limits_{k=1}^{n} Y_{i_k}$, com $i_k \in \mathbb{N}$. Assim $B = \bigcup\limits_{k=1}^{n} Y_{i_k}$. Seja $n = max\{i_1, \ldots, i_n\}$. Segue que $B = Y_n$ e, consequentemente, $Y_n = Y_{n+1} = \ldots$, donde a cadeia (A.4) é estacionária.

□

Definição A.2. *Um espaço topológico satisfazendo as condições equivalentes acima é chamado Noetheriano.*

Adiante veremos que todo espaço topológico Noetheteriano admite um número finito de componentes irredutíveis, mas antes, vejamos o seguinte lema auxiliar.

Lema A.1. *Sejam X um espaço topológico, Γ a coleção de todas as componentes irredutíveis de X e $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n \in \Gamma$. Se $X = \bigcup_{i=1}^{n} Y_i$ então $\Gamma = \{Y_1, Y_2, \ldots, Y_n\}$.*

Demonstração. Seja Z uma componente irredutível de X. Temos que $Z = Z \cap X = \bigcup_{i=1}^{n} Z \cap Y_i$, desde que toda componente irredutível de X é um fechado, segue que $Z = Z \cap Y_j$ para algum $j \in \{1, \ldots, n\}$, donde $Z \subseteq Y_j$ e, consequentemente, $Z = Y_j$. □

Proposição A.4. *Seja X um espaço topológico. Se X é Noetheriano, então admite uma quantidade finita de componentes irredutíveis.*

Demonstração. Seja Γ a coleção de todos os subespaços fechados de X que não admite uma quantidade finita de componentes irredutíveis. Suponha que $\Gamma \neq \varnothing$. Desta forma possui um elemento minimal Z. Como Z não admite um número finito de componentes irredutíveis, em particular Z não é irredutível, assim podemos escrever $Z = Z_1 \cup Z_2$, onde Z_1 e Z_2 são dois fechados próprios de Z. Deste modo, Z_1 e Z_2 admitem uma quantidade finita de componentes irredutíveis; podemos escrever $Z_1 = \bigcup_{i=1}^{k} Z_{1i}$ e $Z_2 = \bigcup_{j=1}^{n} Z_{2j}$, onde Z_{1i} e Z_{2j} são componentes irredutíveis de Z_1 e Z_2, respectivamente, logo $Z = \bigcup_{i=1}^{k} Z_{1i} \cup \bigcup_{j=1}^{n} Z_{2j}$. Observe Z_{1i} e Z_{2j} são irredutíveis em Z, assim existem componentes irredutíveis Y_{1i} e Y_{2j} de Z tais que $Z_{1i} \subseteq Y_{1i}$ e $Z_{2j} \subseteq Y_{2j}$, desta forma $Z = \bigcup_{i=1}^{k} Y_{1i} \cup \bigcup_{j=1}^{n} Y_{2j}$. Segue do lema A.1 que Z tem um número finito de componentes irredutíveis, o que é uma contradição. Portanto $\Gamma = \varnothing$. Em particular, X admite um número finito de componentes irredutíveis.

□

Apêndice B

Teoria dos feixes

Definição B.1. *Seja X um espaço topológico. Um pré-feixe de K-álgebras (K um corpo) $\mathcal{F}$ sobre X é uma aplicação que associa cada aberto $U \subseteq X$ a uma K-álgebra $\mathcal{F}(U)$ (os elementos de $\mathcal{F}(U)$ são chamados de seções de $\mathcal{F}$ sobre U) juntamente com a condição de que para quaisquer abertos $V \subseteq U$ de X existe um homomorfismo $r_{V,U} : \mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{F}(V)$ (chamado de mapa de restrição) tal que duas condições são satisfeitas:*

(i) Se $W \subseteq V \subseteq U$ são abertos de X então $r_{W,U} = r_{W,V} \circ r_{V,U}$;

(ii) Se $V = U$ então $r_{V,U} = Id_{\mathcal{F}(U)}$.

Definição B.2. *Sejam X um espaço topológico, $\mathcal{F}$ um pré-feixe de K-álgebras sobre X, $W \subseteq X$ um aberto e $W = \bigcup_{i \in L} U_i$ uma cobertura aberta de W. Se para toda família de seções $(s_i)_{i \in L}$ tais que $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$ e $r_{U_i \cap U_j, U_i}(s_i) = r_{U_i \cap U_j, U_j}(s_j)$ (para quaisquer $i, j \in L$), existe uma única seção $s \in \mathcal{F}(U)$ tal que $r_{U_i, W}(s) = s_i$, então dizemos que $\mathcal{F}$ é um feixe de anéis sobre X e $(X, \mathcal{F})$ é um espaço topológico anelado. A seção s é dita obtida por colagem das seções $s_i's$.*

Observação B.1. *Normalmente em um espaço topológico anelado X denotamos seu feixe por $\mathcal{O}_X$.*

Definição B.3. *Seja X e $\mathcal{F}$ um feixe. Dizemos que $\mathcal{F}$ é um feixe de funções quando, para todo aberto $U \subseteq X$, $\mathcal{F}(U)$ é uma K-álgebra de funções K-avaliativas definidas em U (isto é, funções do tipo $f : U \longrightarrow K$) e se $V \subseteq U$ então $r_{V,U}(f) = f|_V$ (ou seja a aplicação de restrição é simplesmente a restrição usual de funções).*

Definição B.4. *Sejam $(X, \mathcal{O}_X)$ e $(Y, \mathcal{O}_Y)$ espaços anelados, com $\mathcal{O}_X$ e $\mathcal{O}_Y$ sendo feixe de funções K-avaliativas. Dizemos que $\varphi : X \longrightarrow Y$ é um morfismo de espaços anelados se φ é contínuo e para todo aberto $U \subseteq Y$ e $g \in \mathcal{O}_Y(U)$ devemos ter que $g \circ \varphi|_{\varphi^{-1}(U)} \in \mathcal{O}_X(\varphi^{-1}(U))$.*

Proposição B.1. *Seja X um espaço topológico e $\mathcal{U}$ uma base de abertos em X. Suponha que para todo aberto $U \in \mathcal{U}$ tenhamos uma K-álgebra $\mathcal{F}(U)$ de funções de U para K, satisfazendo as seguintes condições:*

(i) Se $V, U \in \mathcal{U}$, $V \subseteq U$ e $s \in \mathcal{F}(U)$ então $s|_V \in \mathcal{F}(V)$.

(ii) Se um aberto $U \in \mathcal{U}$ é coberto por abertos U_i $i \in I$ (I uma família arbitrária de índices) tais que $U_i \in \mathcal{U}_i$ e se $s : U \longrightarrow K$ é uma função tal que $s|_{U_i} \in \mathcal{F}(U_i)$, então $s \in \mathcal{F}(U)$.
Então existe uma único feixe de funções $\mathcal{G}$ (em X) tal que para todo aberto $U \in \mathcal{U}$, $\mathcal{G}(U) = \mathcal{F}(U)$.

Demonstração. Todo aberto U se X pode ser escrito como $U = \bigcup_{i \in L} U_i$, com $U_i \in \mathcal{U}$, desta forma defina $\mathcal{G}(U) := \{s : U \longrightarrow K | \forall i, s|_{U_i} \in \mathcal{F}(U_i)\}$. Devemos mostrar que $\mathcal{G}(U)$ independe da cobertura escolhida. Seja $U = \bigcup_{j \in I} W_j$, com $W_j \in \mathcal{U}$, outra cobertura de U. Basta verificarmos que se $s : U \longrightarrow K$ é uma função tal que $s|_{W_j} \in \mathcal{F}(W_j)$ então $s \in \mathcal{G}(U)$. Note que $U = \bigcup_{i,j} (U_i \cap W_j)$ (com i variando em L e j em I). Dado $x \in U$, existem $i \in I$, $j \in L$ tal que $x \in U_i \cap W_j$, assim existe um aberto $V_{i,j,x} \in \mathcal{U}$ tal que $x \in V_{i,j,x} \subseteq U_i \cap W_j$. Desta forma, obtemos que $U = \bigcup_{i,j,x} V_{i,j,x}$ (com i variando em L, j em I e x em U), $U_i = \bigcup_{i,j,x} V_{i,j,x}$ (com i fixo, j variando em I e x em U_i) e $W_j = \bigcup_{i,j,x} V_{i,j,x}$ (com j fixo, i variando em L e x em W_j). Desde que $s|_{W_j} \in \mathcal{F}(W_j)$, por (i) segue que $s|_{V_{i,j,x}} \in \mathcal{F}(V_{i,j,x})$ para todo $i \in L, j \in I$ e $x \in U$, assim, por (ii), segue que $s|_{U_i} \in \mathcal{F}(U_i)$ para todo $I \in L$, logo $s \in \mathcal{G}(U)$.

Naturalmente $\mathcal{U}$ é uma K-álgebra (com soma e multiplicação definidas ponto a ponto). Agora vamos mostrar que $\mathcal{G}$ é um feixe. Sejam $V \subseteq U$ abertos de X e $s \in \mathcal{G}(U)$. Podemos considerar uma cobertura $\{V_i\}$ de V com $V_i \in \mathcal{U}$ e $V_i \subseteq U_i$, assim $s|_{U_i} \in \mathcal{F}(U_i)$ implica $s|_{V_i} \in \mathcal{F}(V_i)$, logo $s|_V \in \mathcal{G}(V)$, assim a aplicação restrição $r_{V,U} : \mathcal{G}(U) \longrightarrow \mathcal{G}(V)$, dada por $r_{V,U}(s) = s|_V$ está bem definida. Seja $U = \bigcup_{i \in L} X_i$ uma cobertura aberta arbitrária de U e $(s_i)_{\in L}$ uma família de funções tais que $s_i \in \mathcal{G}(U_i)$ e $s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j}$. Dado $a \in U$ existe $i \in L$ tal que $x \in U_i$ desta forma defina $s(x) = s_i(x)$, desta forma $s : U \longrightarrow K$ está bem definida, é a única função tal que $s|U_i = s_i$ e naturalmente pertence a $\mathcal{G}(U)$. Por tanto $\mathcal{G}$ é um feixe de funções.

Por fim, a unicidade segue da construção da $\mathcal{G}$.

□

A proposição B.1 nos garante que para definir um determinado feixe de funções sobre um espaço topológico, basta definirmos um "feixe"sobre uma base de abertos de tal espaço.

A seguir veremos alguns fatos sobre limite direto, os quais permitem falarmos sobre os talos de um feixe.

Definição B.5. *Seja $(I, \leqslant)$ um conjunto pré-ordenado (isto é, $\leqslant$ satisfaz a reflexividade e a transitividade). Chamamos de sistema direto de conjuntos a um par (A_i, f_{ji}) formado por uma família de conjuntos $\{A_i\}_{i\in I}$ e uma família de funções $f_{ji} : A_i \to A_j$ que estão definidas sempre que $i \leqslant j$ tais que:*

- $f_{ki} = f_{kj} \circ f_{ji}$ *sempre que* $i \leqslant j \leqslant k$*;*
- $f_{ii} = Id_{A_i}$ *=identidade de* A_i*.*

Definição B.6. *Dizemos que uma família de funções $\{u_i : A_i \to B\}_{i\in I}$ é um sistema direto de funções se $u_i = u_j \circ f_{ji}$ sempre que $i \leqslant j$.*

Proposição B.2. *Seja $(I, \leqslant)$ um conjunto pré-ordenado e dirigido à direita (isto é, para cada $i, j \in I$ existe $k \in I$ tal que $i \leqslant k$ e $j \leqslant k$) e (A_i, f_{ji}) um sistema direto de conjuntos.*

(a) A relação $(x, i) \sim (y, j)$ se, e somente se, existe $k \in I$ tal que $i \leqslant k, j \leqslant k$ e $f_{ki}(x) = f_{kj}(y)$ é uma relação de equivalência sobre o conjunto $\Gamma = \bigcup_{i\in I} A_i \times \{i\}$;

(b) A família de funções $\{f_i\}_{i\in I}$ definidas pela composição das aplicações canônicas $A_i \to \Gamma \to \varinjlim A_i = \Gamma/\sim$ é um sistema direto de mapas e $\varinjlim A_i = \bigcup_{i\in I} f_i(A_i)$;

(c) O par $(\varinjlim A_i, \{f_i\}_{i\in I})$ definido em (b) é solução do seguinte problema universal: Para cada sistema direto de conjuntos $\{u_i : A_i \to B\}_{i\in I}$ existe uma única função $u : \varinjlim A_i \to B$ tal que $u \circ f_i = u_i$ para cada $i \in I$;

(d) Se os A_i's são K-álgebras e os f_{ji} são homomorfismos de anéis, então $\varinjlim A_i$ admite uma estrutura de K-álgebras que torna os f_i's homomorfismos de K-álgebras;

(e) Sob as condições de (d) se $\{u_i : A_i \to B\}_{i\in I}$ é um sistema direto de K-álgebras e homomorfismos, então a função u definida em (c) é um homomorfismo de K-álgebras;

(f) Se cada A_i é um corpo, então $\varinjlim A_i$ é um corpo.

Demonstração. (a) **Reflexividade:** Tomando $k = i$ temos que $i \leqslant i$ e $f_{ki}(x) = f_{ki}(x)$ logo $(x, i) \sim (x, i)$.

Simetria: Temos que $(x,i) \sim (y,j)$ se, e somente se, existe $k \in I$ tal que $i \leqslant k, j \leqslant k$ e $f_{ki}(x) = f_{kj}(y)$ se, e somente se, $(y,j) \sim (x,i)$.
Transitividade: Se $(x,i) \sim (y,j)$ e $(y,j) \sim (z,k)$, segue que existem $l_1, l_2 \in I$ tais que $i \leqslant l_1, j \leqslant l_1$, $f_{l_1 i}(x) = f_{l_1 j}(y)$, $j \leqslant l_2, k \leqslant l_2$ e $f_{l_2 j}(y) = f_{l_2 k}(z)$. Desde que $(I, \leqslant)$ é dirigido à direita, existe $l \in I$ tal que $l_1 \leqslant l$ e $l_2 \leqslant l$, logo temos

$$i \leqslant l_1 \leqslant l$$
$$j \leqslant l_1 \leqslant l$$
$$j \leqslant l_2 \leqslant l$$
$$k \leqslant l_2 \leqslant l$$

desta forma $i \leqslant l$, e $k \leqslant l$ e $f_{li}(x) = f_{ll_1}(f_{l_1 i}(x)) = f_{ll_1}(f_{l_1 j}(y)) = f_{lj}(y) = f_{ll_2}(f_{l_2 j}(y)) = f_{ll_2}(f_{l_2 k}(z)) = f_{lk}(z)$, donde $(x,i) \sim (z,k)$.
Portanto $\sim$ é uma relação de equivalência em Γ.

(b) Dado $(x,i) \in \Gamma$ vamos denotar sua classe em $\varinjlim A_i$ por $\overline{(x,i)}$. Para cada $i \in I$, temos $f_i : A_i \longrightarrow \varinjlim A_i$, dada por $f_i(x) = \overline{(x,i)}$. Sejam $i, j \in I$, tais que $i \leqslant j$. Temos que $(f_j \circ f_{ji})(x) = f_j(f_{ji}(x)) = \overline{(f_{ji}(x), j)}$. Observe que $i \leqslant j$, $j \leqslant j$ e $f_{ji}(x) = Id_{A_j}(f_{ji}(x)) = f_{jj}(f_{ji}(x))$, assim $(x,i) \sim (f_{ji}(x), j)$, logo $\overline{(x,i)} = \overline{(f_{ji}(x), j)}$, ou seja, $f_i(x) = (f_j \circ f_{ji})(x)$ para todo $x \in A_i$, logo $f_i = f_j \circ f_{ji}$ sempre que $i \leqslant j$, donde $\{f_i\}_{i \in I}$ é um sistema direto de mapas.

Por construção, temos que $\bigcup_{i \in I} f_i(A_i) \subseteq \varinjlim A_i$. Dado $(x,i) \in \Gamma$ temos que $x \in A_i$, assim $f_i(x) = \overline{(x,i)}$, donde $\varinjlim A_i \subseteq \bigcup_{i \in I} f_i(A_i)$. Portanto $\varinjlim A_i = \bigcup_{i \in I} f_i(A_i)$.

(c) Defina $u : \varinjlim A_i \longrightarrow B$, por $u(\overline{(x,i)}) = u_i(x)$. Vamos mostrar que u está bem definida. Sejam $\overline{(x,i)}, \overline{(y,j)} \in \varinjlim A_i$ tais que $\overline{(x,i)} = \overline{(y,j)}$, assim existe $k \in I$ tal que $i \leqslant k$, $j \leqslant k$ e $f_{ki}(x) = f_{kj}(y)$. Observe que $u_i(x) = u_k(f_{ki}(x) = u_k(f_{kj}(y)) = u_j(u)$, ou seja, $u(\overline{(x,i)}) = u(\overline{(y,j)})$.

Note que $u \circ f_i = u_i$. Suponha que existe $u' : \varinjlim A_i \longrightarrow B$ tal que $u' \circ f_i = u_i$, segue que $u'(\overline{(x,i)}) = u_i(x) = u(\overline{(x,i)})$ para todo $(x,i) \in \Gamma$, logo $u' = u$. Portanto u é única.

d) A partir de (b) temos que $\varinjlim A_i = \bigcup_{i \in I} f_i(A_i)$. Assim, dados $z, t \in \varinjlim A_i$, existem $i, j \in I$ tais que $z = f_i(x)$ e $t = f_j(y)$ para certos $x \in A_i, y \in A_j$. Desde que $(I, \leqslant)$ é dirigido à direita existe $k \in I$ tal que $i \leqslant k$, $j \leqslant k$. Assim $f_i(x) = f_k(f_{ki}(x))$

e $f_j(y) = f_k(f_{kj}(y))$. Desde que $f_{ki}(x), f_{kj}(y) \in A_k$, segue que as operações $f_{ki}(x) + f_{kj}(y)$ e $f_{ki}(x).f_{kj}(y)$ provenientes de A_k estão bem definidas. Desta forma defina:

$$\begin{array}{rccc} + : & \lim\limits_{\rightarrow} A_i \times \lim\limits_{\rightarrow} A_i & \longrightarrow & \lim\limits_{\rightarrow} A_i \\ & (z,t) & \longmapsto & z+t = f_k(f_{ki}(x) + f_{kj}(y)) \end{array}$$

e

$$\begin{array}{rccc} . : & \lim\limits_{\rightarrow} A_i \times \lim\limits_{\rightarrow} A_i & \longrightarrow & \lim\limits_{\rightarrow} A_i \\ & (z,t) & \longmapsto & z.t = f_k(f_{ki}(x).f_{kj}(y)) \end{array}$$

vamos mostrar que tais operações estão bem definidas. Suponha que $z = f_i(x) = f_{i'}(x')$ e $t = f_j(y) = f_{j'}(y')$, e sejam $k, m \in I$ tais que $f_i(x) = f_k(f_{ki}(x))$, $f_j(y) = f_k(f_{kj}(y))$, $f_{i'}(x') = f_m(f_{mi'}(x'))$ e $f_{j'}(y') = f_m(f_{mj'}(y'))$. Queremos mostrar que

$$f_k(f_{ki}(x) + f_{kj}(y)) = f_m(f_{mi'}(x') + f_{mj'}(y')) \tag{B.1}$$

$$f_k(f_{ki}(x).f_{kj}(y)) = f_m(f_{mi'}(x').f_{mj'}(y')) \tag{B.2}$$

Para que (B.1) (respectivamente (B.2)) seja verdadeira é suficiente encontrar $l \in I$ tal que $k \leqslant l, m \leqslant l$ e $f_{lk}(f_{ki}(x) + f_{kj}(y)) = f_{lm}(f_{mi'}(x') + f_{mj'}(y'))$ (respectivamente $f_{lk}(f_{ki}(x).f_{kj}(y)) = f_{lm}(f_{mi'}(x').f_{mj'}(y'))$), o que é equivalente a

$$f_{lk}(f_{ki}(x)) + f_{lk}(f_{kj}(y)) = f_{lm}(f_{mi'}(x')) + f_{lm}(f_{mj'}(y'))$$

$$f_{lk}(f_{ki}(x)).f_{lk}(f_{kj}(y)) = f_{lm}(f_{mi'}(x')).f_{lm}(f_{mj'}(y'))$$

que por sua vez é equivalente a

$$f_{li}(x) + f_{lj}(y) = f_{li'}(x') + f_{lj'}(y') \tag{B.3}$$

$$f_{li}(x) + f_{lj}(y) = f_{li'}(x') + f_{lj'}(y'). \tag{B.4}$$

Temos que existem $i_1, j_1 \in I$ tais que $i \leqslant i_1$, $i' \leqslant i_1$, $f_{i_1 i}(x) = f_{i_1 i'}(x'), j \leqslant j_1, j' \leqslant j_1$ e $f_{j_1 j}(y) = f_{j_1 j'}(y')$. Desde que $(I, \leqslant)$ é dirigido à direita, existe $l \in I$ tal que $i_i \leqslant l$, $j_1 \leqslant l$. Observe que

$$f_{li}(x) = f_{li_1}(f_{i_1 i}(x)) = f_{li_1}(f_{i_1 i'}(x')) = f_{li'}(x') \tag{B.5}$$

e analogamente

$$f_{lj}(x) = (f_{lj'}(x')). \tag{B.6}$$

Somando $(B.5)$ e $(B.6)$ obtemos $(B.3)$ e multiplicando $(B.5)$ e $(B.6)$ obtemos $(B.4)$, logo $+$ e $.$ estão bem definidas em $\varinjlim A_i$.

Observação B.2. *Note que $+$ e $.$ em $\varinjlim A_i$ independe do k escolhido na definição.*

Agora vamos mostrar que $(\varinjlim A_i, +, .)$ é uma K-álgebra. Dados $w, t, z \in \varinjlim A_i$ existem $i, j, k \in I$ tais que $w = f_i(x)$, $t = f_j(y)$ e $z = f_k(a)$. Logo

(i) $w + (t + z) = f_i(x) + (f_j(y) + f_k(a))$, dado $l \in I$ tal que $j \leqslant l$, $k \leqslant l$, temos que $w + (t + z) = f_i(x) + f_l(f_{lj}(y) + f_{lk}(a))$, assim para qualquer $u \in I$ tal que $i \leqslant u$ e $l \leqslant u$ temos $w + (t + z) = f_u(f_{ui}(x) + f_{ul}(f_{lj}(y) + f_{lk}(a)) = f_u(f_{ui}(x)+(f_{ul}(f_{lj}(y))+f_{ul}(f_{lk}(a))) = f_u((f_{ui}(x)+f_{ul}(f_{lj}(y)))+f_{ul}(f_{lk}(a)) = f_u((f_{ui}(x)+f_{uj}(y))+f_{uk}(a)) = f_u(f_{uu}(f_{ui}(x)+f_{uj}(y))+f_{uk}(a)) = f_u(f_{iu}(x)+f_{uj}(y)) + f_k(a) = (f_i(x) + f_j(y)) + f_k(a)$, ou seja, $w + (t + z) = (w + t) + z$;

(ii) $w + t = f_i(x) + f_j(y)$, dado $l \in I$ tal que $i \leqslant l, j \leqslant l$ segue que $w + t = f_l(f_{li}(x) + f_{lj}(y)) = f_l(f_{lj}(y) + f_{li}(x)) = f_j(y) + f_i(x) = t + w$;

(iii) Observe que $f_i(0) = f_j(0)$, para quaisquer $i, j \in I$, pois para qualquer $l \in I$ tal que $i \leqslant l$,$j \leqslant l$, segue que $f_{li}(0) = 0 = f_{lj}(0)$, donde $(0, i) \sim (0, j)$. Denotaremos $f_i(0) = 0$ para todo $i \in I$. Observe que $w+0 = f_i(x)+f_i(0) = f_i(f_{ii}(x) + f_{ii}(0)) = f_i(f_{ii}(x)) = f_i(x) = w$, logo 0 é o elemento neutro na soma em $\varinjlim A_i$;

(iv) Desde que $x \in A_i$ então $-x \in A_i$, logo $w + f_i(-x) = f_i(x) + f_i(-x) = f_i(f_{ii}(x) + f_{ii}(-x)) = f_i(0) = 0$, donde w possui inverso na soma em $\varinjlim A_i$;

(v) $w.t = f_i(x) + f_j(y)$, dado $l \in I$ tal que $i \leqslant l, j \leqslant l$ segue que $w.t = f_l(f_{li}(x).f_{lj}(y) = f_l(f_{lj}(y).f_{li}(x)) = t.w$;

(vi) $w(t + z) = f_i(x)(f_j(y) + f_k(a))$, dado $l \in I$ tal que $j \leqslant l$, $k \leqslant l$, temos que $w(t+z) = f_i(x)(f_l(f_{lj}(y)+f_{lk}(a)))$, assim para qualquer $u \in I$ tal que $i \leqslant u$ e $l \leqslant u$ temos $w(t + z) = f_u(f_{ui}(x).f_{ul}(f_{lj}(y) + f_{lk}(a))) = f_u(f_{ui}(x).f_{uj}(y) + f_{ui}(x).f_{uk}(a)) = f_u(f_{uu}(f_{ui}(x).f_{uj}(y))+f_{uu}(f_{ui}(x).f_{uk}(a))) = f_u((f_{ui}(x).f_{uj}(y))+ f_u(f_{ui}(x).f_{uk}(a)) = f_i(x)f_j(y) + f_i(x)f_k(a) = wt + wz$;

(vii) Observe que $f_i(1) = f_j(1)$, para quaisquer $i, j \in I$, pois para qualquer $l \in I$ tal que $i \leqslant l$,$j \leqslant l$, segue que $f_{li}(1) = 1 = f_{lj}(1)$, donde $(1, i) \sim (1, j)$. Denotaremos $f_i(1) = 1$ para todo $i \in I$. Observe que $w.1 = f_i(x).f_i(1) = f_i(f_{ii}(x).f_{ii}(1)) = f_i(f_{ii}(x)) = f_i(x) = w$, donde 1 é o elemento neutro de $.$ em $\varinjlim A_i$;

(viii) De maneira análoga a (vii) observe que $f_i(a) = f_j(a)$ para todo $a \in K$, donde $K \subseteq \varinjlim A_i$.

Segue dos itens acima que $\varinjlim A_i$ é uma K-álgebra.

Dado $i \in I$ e $x, y \in A_i$, seja $j \in I$ tal que $i \leqslant J$. Logo $f_i(x) + f_i(y) = f_j(f_{ji}(x) + f_{ji}(y)) = f_j(f_{ji}(x+y)) = f_i(x+y)$, analogamente $f_i(x).f_i(y) = f_i(x.y)$. Por fim, $f_i(a) = a$ como definimos em (viii). Portanto f_i é homomorfismo de K-álgebras para todo $i \in I$.

(e) Dados $w, t \in \varinjlim A_i$, existem $i, j \in I$ tais que $w = f_i(x)$ e $t = f_j(y)$. Desde que $(I, \leqslant)$ é dirigido à direta, existe $k \in I$ tal que $i \leqslant k$ e $j \leqslant k$, assim $w + t = f_k(f_{ki}(x) + f_{kj}(y))$, logo $u(w+t) = u(f_k(f_{ki}(x) + f_{kj}(y))) = u_k((f_{ki}(x) + f_{kj}(y)) = u_k(f_{ki}(x)) + u_k(f_{kj}(y)) = u_i(x) + u_j(y) = u(f_i(x)) + u(f_j(y)) = u(w) + u(t)$, analogamente $u(w.t) = u(w).u(t)$. Por fim, temos que $u(1) = u(f_i(1))$ para qualquer $i \in I$, logo $u(1) = u_i(1) = 1$. Portanto u é homomorfismo de anéis.

(f) Seja $w \in \varinjlim A_i - 0$, logo existe $i \in I$ tal que $w = f_i(x)$ para algum $x \in A_i - 0$, assim $x^{-1} \in A_i$, logo $f_i(x^{-1}) = (f_i(x))^{-1} := w^{-1}$ pois f_i é homomorfismo. Portanto $\varinjlim A_i$ é corpo.

$\square$

Definição B.7. *O conjunto* $\varinjlim A_i$ *é chamado de limite direto do sistema* (A_i, f_{ji}).

Seja $(X, \mathcal{O}_X)$ um espaço topológico anelado. Dado $x \in X$, considere L_x sendo a coleção de todos os abertos de X contendo x. Observe que $(L_x, \supseteq)$ (relação de inclusão contrária) é um conjunto pré-ordenado e dirigido à direita, e os pares $(\mathcal{O}_X(U), r_{V,U})$ (onde $U, V \in L_x$ e $U \supseteq V$) formam um sistema direto de K-álgebras e homomorfismos. Aplicando a proposição acima obtemos a K-álgebra $\mathcal{O}_{X,x} := \lim\limits_{\to x \in U} \mathcal{O}_X(U)$.

Definição B.8. *Com as notações acima* $\mathcal{O}_{X,x}$ *é chamado de talo de* $\mathcal{O}_X$ *no ponto* x. *Se* $s \in \mathcal{O}_X(U)$, $x \in U$, *denotamos a classe de* s *em* $\mathcal{O}_{X,x}$ *por* s_x *e a chamamos de germe de* s *em* x.

Observação B.3. *Quando* $\mathcal{O}_X$ *é um feixe de funções, temos que se* $f_x = g_x$, *com* $f \in \mathcal{O}_X(U)$ *e* $g \in \mathcal{O}_X(V)$ *(*U *e* V *abertos contendo* x*) então existe um aberto* W *contendo* x *tal que* $W \subseteq U \cap V$ *e* $f|W = g|W$. *Em particular* $f(x) = g(x)$.

Apêndice C

Ações de grupos

Definição C.1. *Sejam G um grupo e X um conjunto. Dizemos que G age em X se existe um mapa $\phi : G \times X \longrightarrow X$, denotado por $\phi(x, y) = x \cdot y$, tal que:*

(A_1) $x_1 \cdot (x_2 \cdot y) = (x_1 x_2) \cdot y$, para quaisquer $x_1, x_2 \in G$ e $y \in X$;

(A_2) $e \cdot y = y$, para todo $y \in X$.

E neste caso dizemos que X é um G-conjunto.

Proposição C.1. *Sejam G um grupo, X um conjunto e $P(X)$ o grupo das permutações de X. Dada uma aplicação $\phi : G \times X \longrightarrow X$ e $x \in G$ seja $\phi_x : X \longrightarrow X$, definida $\phi_x(y) = \varphi(x, y)$. Então ϕ é uma ação de G em X se, e somente se, a aplicação $\psi : G \longrightarrow P(X)$, dada por $\psi(x) = \phi_x$, é um homomorfismo de grupos.*

Demonstração. Suponha que ϕ é uma ação de G em X. Dados $x_1, x_2 \in G$ e $y \in X$ temos que $\psi(x_1 x_2)(y) = (x_1 x_2) \cdot y = x_1 \cdot (x_2 \cdot y) = \psi(x_1)(\psi(x_2(y)))$, desde que y é arbitrário, segue que $\psi(x_1 x_2) = \psi(x_1) \circ \psi(x_2)$. Naturalmente $\psi(e)$ é a aplicação identidade de X graças a condição (A_2), assim ψ é um homomorfismo de grupos. A recíproca segue direto da definição de ψ. $\square$

Exemplo C.1. *Para cada $x \in G$ seja $\boldsymbol{c}_x : G \longrightarrow G$ dado por $\boldsymbol{c}_x(y) = xyx^{-1}$. Naturalmente a aplicação $Inner : G \longrightarrow Aut(G)$, dada por $Inner(x) = \boldsymbol{c}_x$ é um homomorfismo de grupos, assim o mapa $\boldsymbol{C} : G \times G \longrightarrow G$, dado por $\boldsymbol{C}(x, y) = \boldsymbol{c}_x(y)$ é uma ação de G em sí mesmo, o qual chamamos de ação interna de G.*

Definição C.2. *Seja X um G-conjunto. Dado $y \in X$, chamamos o conjunto $G \cdot y := \{x \cdot y | x \in G\}$ de órbita de y (com relação a G).*

Observe que $y \in G \cdot y$ e se $G \cdot z \cap G \cdot y \neq \varnothing$ $(z \in X)$ então $G \cdot z = G \cdot y$ (de fato, se $g \cdot z = h \cdot y$, com $g, h \in G$, então $z = g^{-1} \cdot (g \cdot z) = g^{-1} \cdot (h \cdot y) \in G \cdot y$, assim $x \cdot z \in G \cdot y$, para todo $x \in G$, logo $G \cdot z \subseteq G \cdot y$). Portanto X escreve-se como uma união disjunta de suas órbitas distintas.

Definição C.3. *Seja X um G-conjunto. Dizemos que G age transitivamente em X se $G \cdot y = X$ para algum $y \in X$.*

Desde que cada órbita é fechada sobre a ação de G em X, temos que G age transitivamente sobre cada órbita em X.

Definição C.4. *Seja X um G-espaço e $y \in X$. O subgrupo $G_y = \{x \in G | x \cdot y = y\} \subseteq G$ é chamado de grupo de isotropia (ou estabilizador) de y.*

Proposição C.2. *Com as notações da definição acima, temos que:*

(i) A cardinalidade da órbita $G \cdot y$ é igual a $(G : G_y)$.

(ii) Se $z = x \cdot y$, para algum $x \in G$, os grupos G_y e G_z são conjugados, isto é, $xG_yx^{-1} = G_z$.

Demonstração. (i) Considere a aplicação $\xi : G/G_y \longrightarrow G \cdot y$, dada por $\xi(xG_y) = x \cdot y$ (G/G_y é o conjunto das classes laterais à esquerda). Naturalmente ξ está bem definida. Se $x_1 \cdot y = x_2 \cdot y$ então $(x_2^{-1}x_1) \cdot y = y$, logo $x_2^{-1}x_1 \in G_y$, assim $x_2G_y = x_1G_y$, donde ξ é injetiva. Dado $z \in G \cdot y$, existe $x \in G$ tal que $z = x \cdot y$, desta forma ξ é naturalmente sobrejetora.

(ii) Tome $w \in G_y$, note que $(xwx^{-1}) \cdot z = (xwx^{-1}) \cdot (x \cdot y) = (xw) \cdot y = x \cdot (w \cdot y) = x \cdot y = z$, assim $xwx^{-1} \in G_z$, logo $xG_yx^{-1} \subseteq G_y$. Por outro lado, se $w \in G_z$, temos que $(x^{-1}wx) \cdot y = (x^{-1}w) \cdot z = x^{-1} \cdot z = x^{-1} \cdot (x \cdot y) = y$, assim $x^{-1}wx \in G_y$, logo $x^{-1}G_zx \subseteq G_y$, o que implica $G_z \subseteq xG_yx^{-1}$.

$\square$

Definição C.5. *Seja X um G-conjunto. Dizemos que $y \in X$ é um ponto fixo de G se $x \cdot y = y$ para todo $x \in G$, ou seja, $G = G_y$. O conjunto dos pontos fixados de G é denotado por X^G.*

Exemplo C.2. *Considerando a ação interna de G, $Inner : G \longrightarrow Aut(G)$, temos que a órbita de $y \in G$ é a classe de conjugação de y e seu grupo de isotropia é seu centralizador $C_G(y) = \{x \in G | xyx^{-1} = y\}$. O conjunto dos pontos fixos é justamente o centro de G, o qual é denotado por $C_G(G)$.*

Referências Bibliográficas

[1] Atiyah, M. F., Macdonald, I. G., *Introduction to Commutative Algebra*. Addison-Wesley Publishing Company, Reading, Massachusetts, 1969.

[2] Alperin, J. L., Bell, R. B., *Groups and Representations*. Springer, New York, 1995.

[3] Borel, A., *Essays in the history of Lie groups and algebraic groups*. American Mathematical Soc., 2001.

[4] Borel, A., *Groupes linéaires algébriques*. Annals of mathematics, p. 20-82, 1956.

[5] Garcia, A., Lequain, Y, *Elementos de álgebra*. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2006.

[6] Gathmann, A., *Commutative Algebra*. Class notes TU Kaiserslautern, 2014. Disponível em: www.mathematik.uni-kl.de/gathmann/commalg.

[7] Gathmann, A., *Algebraic Geometry*, class notes TU Kaiserslautern, 2014. Disponível em: http://www.math.ias.edu/andreas/pub.

[8] Geck, M., *An introduction to algebraic geometry and algebraic groups*. Oxford University Press, 2013.

[9] Humphreys, J.E., *Linear Algebraic Groups*. Springer-Verlag, Berlin, 1975.

[10] Kolchin, E. R, *Algebraic matric groups and the Picard-Vessiot theory of homogeneous linear ordinary differential equations*. Annals of Mathematics, p. 1-42, 1948.

[11] Lang, S., *Algebra*. Springer-Verlag, New York, 2002.

[12] Mumford, D., *The Red Book of Varities and Schemes*. Lecture Notes in Mathematics 1358, Springer-Verlag, Berlin, 1988.

[13] Nastasescu, C., Van Oystaeyen, F., *Methods of graded rings*. Springer-Verlag, 2004.

[14] Perrin, D., *Algebraic geometry: an introduction*. Springer Science & Business Media, 2007.

[15] Shafarevich, I. R., *Basic Algebraic Geometry 1*. Springer-Verlag, Berlin, 1994.

[16] Springer, T.A., *Linear Algebraic Groups*. Birkhauser, 1981.

[17] Van Oosten, Jaap, *Basic category theory*. Aarhus Universitet. Basic Research in Computer Science [BRICS], 1995.