

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Doutorado em Matemática

Generalização do conceito de lineabilidade e abordagem multipolinomial de desigualdades clássicas

por

Daniel Tomaz de Araújo

João Pessoa - PB
Outubro de 2020

Generalização do conceito de lineabilidade e abordagem multipolinomial de desigualdades clássicas

por

Daniel Tomaz de Araújo ¹

sob a orientação do

Prof. Dr. Nacib Gurgel Albuquerque

Tese apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Matemática.

João Pessoa - PB

Outubro de 2020

¹Este trabalho contou com apoio financeiro da CAPES.

Catálogo na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

A663g Araújo, Daniel Tomaz de.

Generalização do conceito de lineabilidade e abordagem
multipolinomial de desigualdades clássicas / Daniel
Tomaz de Araújo. - João Pessoa, 2020.
92 f.

Orientação: Nacib Gurgel Albuquerque.
Tese (Doutorado) - UFPB/CCEN.

1. Matemática. 2. Espaços de sequências. 3.
Lineabilidade. 4. Operadores absolutamente somantes. 5.
Curvas de Peano. 6. Multipolinômios homogêneos. I.
Albuquerque, Nacib Gurgel. II. Título.

UFPB/BC

CDU 51(043)

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Doutorado em Matemática

Tese apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Matemática.

Área de concentração: Análise

Data de aprovação: 26 de Outubro de 2020

Comissão examinadora:



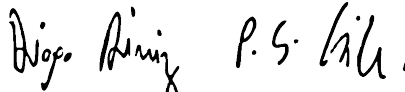
Prof. Dr. Nacib Gurgel Albuquerque

Universidade Federal da Paraíba - Orientador



Profa. Dra. Diana Marcela Serrano Rodríguez

Universidad Nacional de Colombia



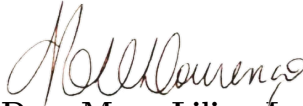
Prof. Dr. Diogo Diniz Pereira da Silva e Silva

Universidade Federal de Campina Grande



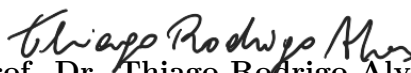
Prof. Dr. Gustavo Adolfo Muñoz Fernández

Universidad Complutense de Madrid



Profa. Dra. Mary Lilian Lourenco

Universidade de São Paulo



Prof. Dr. Thiago Rodrigo Alves

Universidade Federal do Amazonas

João Pessoa - PB

Outubro de 2020

Agradecimentos

A deus.

Aos meus pais pelo amor e força nos momentos mais importantes.

Aos meus irmãos, Douglas (para sempre em meu coração), Diego, Ana Beatriz e Ana Alice, que me motivaram a nunca desistir.

Ao meu amor Renata, pela compreensão nos momentos mais delicados e especialmente pelo seu companheirismo.

Ao meu orientador Nacib Albuquerque, pela paciência, ombridade, respeito e acima de tudo amizade. O conhecimento adquirido nesse período ultrapassou as fronteiras da Matemática.

Ao professor Daniel Pellegrino, pelas dicas, conselhos, sugestões de problemas e inúmeras correções da tese.

Ao professor Vinícius Fávaro, pelo aprendizado durante as conversas sobre o tema lineabilidade, fundamentais para a elaboração do segundo capítulo.

Aos meus colegas de Doutorado, sem os quais jamais alcançaria tal êxito.

Aos meus amigos de longa data, Adailton e Leandro, pela força e amizade durante todo esse tempo.

Aos professores da banca examinadora pela solicitude e sugestões valiosas que agregaram ao trabalho: Diana, Diogo, Gustavo, Mary e Thiago.

Aos professores do DM pelo aprendizado durante as disciplinas. Em especial, aos professores de Análise Funcional, importantes durante meu segundo exame de qualificação: Gustavo Araújo, Joedson Santos e Jamilson Campos.

A CAPES pelo apoio financeiro.

Dedicatória

Aos meus pais.

*“ Se Deus quer alguma coisa, mais cedo ou mais tarde a
realizará, tu, no entanto, arma-te de grande paciência.”*

Diário de Santa Faustina, 270.

Resumo

Neste trabalho investigamos resultados de lineabilidade e versões multipolinomiais de desigualdades clássicas. Na primeira parte, inspirados por um trabalho publicado em 1987, por I. J. Maddox, demonstramos um resultado de lineabilidade relacionado a operadores absolutamente somantes em espaços de sequências. Em seguida, introduzimos uma noção mais restritiva de lineabilidade e generalizamos teoremas relacionados à lineabilidade dos conjuntos $\ell_p \setminus \bigcup_{0 < q < p} \ell_q$ e $L_p[0, 1] \setminus \bigcup_{q > p} L_q[0, 1]$. Além disso, essa nova abordagem foi explorada também no contexto de curvas de Peano, tomando como referência um trabalho de Albuquerque et al., 2014. Na segunda parte, realizamos um breve estudo sobre multipolinômios homogêneos, com o objetivo de obter versões multipolinomiais para as desigualdades de Kahane–Salem–Zygmund e Hardy–Littlewood.

Palavras-chave: Lineabilidade, operadores absolutamente somantes, espaços de sequências, curvas de Peano, multipolinômios homogêneos.

Abstract

In this work we investigate lineability results and multipolynomial variants of classical inequalities. In the first part, inspired by a paper published by I. J. Maddox, in 1987, we prove a lineability result related to absolutely summing operators in sequence spaces. Next, we introduce a more restrictive notion of lineability and generalize theorems on the lineability of the sets $\ell_p \setminus \bigcup_{0 < q < p} \ell_q$ and $L_p[0, 1] \setminus \bigcup_{q > p} L_q[0, 1]$. Moreover, this new approach is also explored in the context of Peano curves, motivated by a paper due to Albuquerque et al., 2014. In the second part, we present a brief study on homogeneous multipolynomials, with the aim to obtain multipolynomial variants of the Kahane–Salem–Zygmund and Hardy–Littlewood inequalities.

Keywords: Lineability, absolutely summing operators, sequence spaces, Peano curves, homogeneous multipolynomials.

Sumário

Introdução	i
I Resultados em lineabilidade e espaçabilidade	1
1 Lineabilidade em espaços quasi-Banach e operadores somantes	3
1.1 Preliminares	4
1.2 Espaços quasi-normados: aspectos básicos	5
1.3 Resultados em lineabilidade relacionados a operadores absolutamente somantes	7
1.4 Resultado principal	8
2 (α, β)-Lineabilidade: uma noção mais restritiva de lineabilidade	13
2.1 Conceitos e exemplos básicos	13
2.2 $(\alpha, \mathfrak{c})$ -espaçabilidade em espaços de sequências	19
2.3 $(1, \mathfrak{c})$ -lineabilidade dos operadores lineares não injetivos	27
2.4 $(1, \mathfrak{c})$ -espaçabilidade em espaços L_p	30
3 Lineabilidade e Curvas de Peano	37
3.1 Noções básicas	37
3.2 Construindo Curvas de Peano	39
3.3 $(1, \mathfrak{c})$ -lineabilidade de $\mathcal{CS}_\infty(\mathbb{R}, \mathcal{X})$	41
3.4 $(1, \mathfrak{c})$ -espaçabilidade de $\mathcal{CS}_\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N)$	43
II Abordagem multipolinomial de desigualdades clássicas	47
4 Multipolinômios homogêneos entre espaços de Banach	49

4.1	Desigualdade multipolinomial de Kahane–Salem–Zygmund	51
4.2	Desigualdade multipolinomial de Hardy–Littlewood	57
4.2.1	Caso $p \geq 2M$	61
4.2.2	Caso $M < p \leq 2M$	63

Referências	67
--------------------	-----------

Introdução

Parte I: Resultados em lineabilidade e espaçabilidade

Lineabilidade é uma linha de pesquisa que tem como propósito a busca por espaços vetoriais (fechados ou não) de dimensão infinita em ambientes *a priori* desprovidos de linearidade. De maneira geral, podemos descrever lineabilidade como um conjunto de técnicas de Álgebra Linear e Análise Real para construção de espaços vetoriais “grandes” em certas estruturas matemáticas.

Historicamente, os primeiros indícios sobre os termos *lineabilidade e espaçabilidade* aparecem no clássico trabalho de V. Gurariy, em 1966 [79], no qual foi provado que a família de funções contínuas definidas no compacto $[0, 1]$ e que não são diferenciáveis em ponto algum contém, exceto pela função identicamente nula, um espaço vetorial de dimensão infinita. Notadamente, o resultado surpreendeu a comunidade acadêmica naquele momento, tendo em vista a dificuldade de se explicitar e exemplificar funções com esse comportamento caótico. Por outro lado, a técnica abordada pelo autor na construção dos espaços vetoriais em questão também é um dos aspectos mais atrativos da pesquisa. A partir daí, vários outros trabalhos começaram a ser produzidos tomando como base a estratégia adotada por Gurariy.

É válido mencionar que, para muitos autores, a grande inspiração para Gurariy foi o trabalho de Levine e Milman, em 1940 [98]. Essencialmente, eles provaram que o subconjunto de $C[0, 1]$ de todas as funções com variação limitada, não contém um subespaço fechado de dimensão infinita. Seria, portanto, um dos primeiros resultados em espaçabilidade (no caso, não-espaçabilidade) a contribuir para o surgimento dessa profícua teoria.

Nos últimos anos, a busca por estruturas vetoriais em ambientes exóticos ganhou notoriedade e muitos trabalhos foram desenvolvidos nas mais diversas áreas como, por exemplo, Teoria dos Conjuntos, Probabilidade, Teoria da Medida, Análise Complexa, Geometria dos

Espaços de Banach, Topologia, Caos Linear, etc. Apenas para citar alguns, há resultados de lineabilidade e espaçabilidade nos seguintes temas: *subconjuntos de funções reais, funções contínuas e diferenciáveis em nenhum ponto, funcionais que atingem a norma, hiperciclicidade, séries e somabilidade, polinômios e conjuntos de zeros em espaços de Banach, operadores não-absolutamente somantes, ideais de operadores, análise complexa e holomorfia, funções mensuráveis e não-mensuráveis, curvas de Peano em espaços vetoriais topológicos*. Recomendamos, por exemplo, os trabalhos [2, 4, 18, 24, 25, 38, 39, 44–49, 52, 53, 68, 80, 83, 111, 116].

A abordagem de lineabilidade/espaçabilidade em ambientes exóticos permitiu a investigação de fenômenos patológicos que acabam ocorrendo em Análise Real como, por exemplo, as famosas classes de “*strange functions*” [32]. Uma referência recente sobre o tema é [13]. Formalmente, se V é um espaço vetorial, α um número cardinal e $A \subset V$ um subconjunto, então A é dito ser:

- α -*lineável* se existe um espaço vetorial W com $\dim W = \alpha$ e $W \setminus \{0\} \subset A$.

Além disso, se V for um espaço vetorial topológico, dizemos que A é:

- α -*espaçável* se existe um espaço vetorial fechado W com $\dim W = \alpha$ e $W \setminus \{0\} \subset A$.

Em geral, dizemos simplesmente que A é *lineável* ou *espaçável* quando o respectivo espaço vetorial existente possui dimensão infinita, isto é, se $\alpha \geq \aleph_0$, onde $\aleph_0$ denota a cardinalidade de $\mathbb{N}$. Nesse mesmo contexto, outros termos foram cunhados como, por exemplo, a noção de *lineabilidade maximal* introduzida por L. Bernal-González em [37]. Dizemos que A é *lineável maximal* quando A é $\dim(V)$ -lineável, ou seja, quando o resultado é ótimo em termos de dimensão. É importante mencionar que a “ordem” de lineabilidade pode não ser atingida, i.e., pode ocorrer que não exista um cardinal máximo μ tal que um conjunto A seja μ -lineável (ver [21, Example V.2]). Geralmente, a grande motivação nos resultados de lineabilidade e espaçabilidade é construir espaços vetoriais que sejam os melhores possíveis (em termos de dimensão). Além disso, quando trocamos o espaço vetorial W por uma álgebra M , obtêm-se as noções de *algebrabilidade*, α -*algebrabilidade* e α -*algebrabilidade forte*. Estas e outras nomenclaturas podem ser encontradas em [14, 19, 20, 27–29, 31, 33, 34, 38, 52] e na recente monografia [21].

No primeiro capítulo, apresentamos a noção clássica de lineabilidade/ espaçabilidade e obtivemos um resultado relacionado com operadores absolutamente somantes. O artigo central deste tópico foi [118]:

- D. Tomaz, *Linear structure in certain subsets of quasi-Banach sequence spaces*, *Linear Multilinear Algebra*. **67** (2019), 1561–1566.

Em 1987, a partir de resultados obtidos por M. S. Macphail em 1947 [101], Maddox em [102] provou o seguinte resultado:

Teorema. [102, Theorem 4]. *Sejam $0 < p < 1$ e $1 \leq s \leq r < \infty$. Então o operador identidade $i : \ell_p \longrightarrow \ell_p$ não é (r, s) -absolutamente somante.*

Ou seja, nas hipóteses anteriores, o conjunto dos operadores lineares limitados em ℓ_p com $0 < p < 1$ que não são absolutamente somantes é não vazio. O nosso objetivo foi tentar construir um espaço vetorial de dimensão máxima possível contido no conjunto acima. Usando o teorema anterior e denotando por $\mathfrak{c}$ a cardinalidade de $\mathbb{R}$, o resultado central do primeiro capítulo é:

Teorema. *Sejam $0 < p < 1$ e $1 \leq s \leq r < \infty$. Então $\mathcal{L}(\ell_p; \ell_p) \setminus \bigcup_{1 \leq s \leq r < \infty} \prod_{r,s}(\ell_p; \ell_p)$ é $\mathfrak{c}$ -lineável. Além disso, o resultado é ótimo no sentido de que não é válido para $p \geq 1$.*

O segundo capítulo possui como objetivo essencial apresentar uma noção mais restritiva do conceito de lineabilidade/espacabilidade. O sentimento de que aparentemente “tudo é lineável”, tendo em vista que resultados positivos nessa teoria são muito comuns, nos levaram à investigação de uma definição mais refinada, que exige propriedades geométricas mais robustas dos conjuntos investigados. Outra motivação consiste em explorar as limitações provenientes da conhecida técnica do “vetor mãe”, bastante utilizada na abordagem clássica. Perceberemos ao longo dos resultados, que somente a aplicação da referida técnica não será suficiente em geral para a obtenção das estruturas vetoriais. Nessa etapa, o artigo central do nosso texto [70] foi construído em colaboração com V. V. Fávaro e D. M. Pellegrino:

- V. V. Fávaro, D. Pellegrino and D. Tomaz, *Lineability and spaceability: a new approach*, *Bull. Braz. Math. Soc. (N.S)* **51** (2020), 27–46.

Uma motivação inicial neste capítulo foi o trabalho [106], no qual os autores, de maneira intuitiva, chamavam atenção dos leitores para um fortalecimento do conceito de lineabilidade, apresentando a noção de lineabilidade λ -pontual, onde λ é um número cardinal. Com isso, introduzimos a seguinte definição que recupera a noção usual apresentada anteriormente:

Definição. *Sejam α, β, λ números cardinais e V um espaço vetorial, com $\dim V = \lambda$ e $\alpha < \beta \leq \lambda$. Um conjunto $A \subset V$ é dito:*

- (i) *(α, β) -lineável se é α -lineável e para todo subespaço $W_\alpha \subset V$ com $W_\alpha \subset A \cup \{0\}$ e $\dim W_\alpha = \alpha$, existe um subespaço $W_\beta \subset V$ com $\dim W_\beta = \beta$ e $W_\alpha \subset W_\beta \subset A \cup \{0\}$.*

(ii) (α, β) -espaçável se é α -lineável e para todo subespaço $W_\alpha \subset V$ com $W_\alpha \subset A \cup \{0\}$ e $\dim W_\alpha = \alpha$, existe um subespaço vetorial fechado $W_\beta \subset V$ com $\dim W_\beta = \beta$ e $W_\alpha \subset W_\beta \subset A \cup \{0\}$.

Note que a noção original de lineabilidade/espaçabilidade é exatamente o caso em que $\alpha = 0$, ou seja, o caso $(0, \beta)$ -lineável é precisamente o caso β -lineável. Intuitivamente, essa noção possui um caráter geométrico. No capítulo 2, os principais resultados do texto aparecem em espaços ℓ_p e em espaços $L_p[0, 1]$. Um deles consistiu na generalização do resultado obtido por Botelho et al. em (2011) na referência [46], relacionado à espaçabilidade do conjunto $\ell_p \setminus \bigcup_{0 < q < p} \ell_q$. A estratégia adotada pelos autores foi utilizar uma classe de espaços de sequências mais abrangente, chamados espaços de sequências invariantes. Esses espaços formalmente são definidos da seguinte forma:

Definição. [46, Definition 1.1] *Seja $X \neq \{0\}$ um espaço de Banach sobre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.*

(a) *Dado $x \in X^{\mathbb{N}}$, definimos x^0 da seguinte forma: se x tem apenas um número finito de coordenadas não nulas, então $x^0 = 0$; caso contrário, $x^0 = (x_j)_{j=1}^{\infty}$ onde x_j é a j -ésima coordenada não nula de x .*

(b) *Um espaço de sequências invariante sobre X é um espaço de dimensão infinita E Banach ou quasi-Banach de sequências de elementos de X que satisfaz às seguintes condições:*

(b₁) *Para $x \in X^{\mathbb{N}}$ tal que $x^0 \neq 0$, $x \in E$ se, e somente se, $x^0 \in E$ e, além disso, $\|x\| \leq K \|x^0\|$ para alguma constante K que depende de E .*

(b₂) $\|x_j\| \leq \|x\|$, para cada $x = (x_j)_{j=1}^{\infty} \in E$ e cada $j \in \mathbb{N}$.

Utilizando essa noção de espaço invariante, os autores em [46, Corollary 1.6], provaram que o conjunto $\ell_p \setminus \bigcup_{0 < q < p} \ell_q$ é $\mathfrak{c}$ -espaçável. Invocando a definição anterior de lineabilidade, mostramos um dos resultados principais do nosso texto:

Teorema. *Para todo $p > 0$ o conjunto $\ell_p \setminus \bigcup_{0 < q < p} \ell_q$ é $(\alpha, \mathfrak{c})$ -espaçável em ℓ_p se, e somente se, $\alpha < \aleph_0$.*

No contexto de espaços $L_p[0, 1]$, $p > 0$, adaptando de maneira criativa as técnicas de [46, Corollary 1.6], Botelho et al. no artigo [48], provaram que o conjunto $L_p[0, 1] \setminus \bigcup_{q > p} L_q[0, 1]$ é $\mathfrak{c}$ -espaçável em $L_p[0, 1]$. Nesse contexto, nosso principal resultado prova que o referido conjunto é $(1, \mathfrak{c})$ -espaçável; ao contrário do que fizemos para espaços de sequências, não conseguimos um resultado englobando $(\alpha, \mathfrak{c})$ -espaçabilidade para $\alpha > 1$:

Teorema. $L_p[0, 1] \setminus \bigcup_{q > p} L_q[0, 1]$ é $(1, \mathfrak{c})$ -espaçável em $L_p[0, 1]$ para todo $p > 0$.

No terceiro capítulo, investigamos os conceitos de lineabilidade e espaçabilidade no contexto das curvas de Peano. Historicamente, as curvas de Peano foram introduzidas em meados de 1890 pelo matemático italiano Giuseppe Peano (1858–1932). Contrariando a intuição de muitos matemáticos da época, Peano construiu, em [110], uma aplicação contínua e sobrejetiva (*curva de Peano*) do intervalo unitário $I = [0, 1]$ no quadrado $I^2 = [0, 1] \times [0, 1]$. Esse resultado motivou a construção de outras aplicações contínuas e sobrejetivas entre espaços euclidianos e espaços topológicos mais gerais e, posteriormente, à investigação de propriedades exóticas como lineabilidade, espaçabilidade e algebrabilidade. Veja, por exemplo, os trabalhos [2–4, 40]. No nosso caso, motivados por resultados obtidos por Albuquerque, Bernal, Pellegrino e Seoane, em [4], aplicamos a técnica de lineabilidade apresentada anteriormente e investigamos a presença de estruturas lineares no âmbito de aplicações contínuas e sobrejetivas, em espaços euclidianos e numa classe particular de espaços topológicos, conhecidos como espaços σ -Peano.

Um resultado que merece destaque nesse contexto é o Teorema de Hahn-Mazurkiewicz (veja [84] ou [126, Theorem 31.5]), que caracteriza topologicamente os espaços de Peano.

Teorema (Hahn-Mazurkiewicz). *Um espaço topológico de Hausdorff não-vazio é a imagem contínua do intervalo unitário se, e somente se, é compacto, conexo, localmente conexo e metrizável.*

Espaços de Hausdorff, que são a imagem contínua do intervalo unitário, são chamados de *espaços de Peano*, ou seja, um *espaço de Peano* é um espaço topológico de Hausdorff compacto, conexo, localmente conexo e metrizável.

Fixemos algumas notações que serão usadas. Dados $M, N \in \mathbb{N}$, denotamos por $\mathcal{C}(\mathbb{R}^M, \mathbb{R}^N)$ o espaço das funções contínuas de $\mathbb{R}^M$ em $\mathbb{R}^N$ e por $\mathcal{CS}(\mathbb{R}^M, \mathbb{R}^N)$ o conjunto de todas as funções *contínuas e sobrejetivas* de $\mathbb{R}^M$ em $\mathbb{R}^N$. Para nossa abordagem em lineabilidade, consideraremos o seguinte subconjunto:

$$\mathcal{CS}_\infty(\mathbb{R}^M, \mathbb{R}^N) := \{f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^M, \mathbb{R}^N) : f^{-1}(a) \text{ é ilimitada para todo } a \in \mathbb{R}^N\}.$$

Nos resultados de lineabilidade, como foi destacado, utilizaremos também uma noção mais geral de espaços de Peano, conhecidos como espaços σ -Peano.

Definição. [4, Definition 3.1] *Um espaço topológico $\mathcal{X}$ é um espaço σ -Peano se existe uma sequência crescente de subconjuntos*

$$K_1 \subset K_2 \subset \cdots \subset K_m \subset \cdots \subset \mathcal{X},$$

tais que cada um deles é um espaço de Peano munido com a topologia herdada de $\mathcal{X}$ e cuja união é o espaço $\mathcal{X}$, ou seja, $\bigcup_{m \in \mathbb{N}} K_m = \mathcal{X}$.

Apresentadas as notações, os resultados centrais desta etapa foram:

Teorema. *Seja $\mathcal{X}$ um espaço vetorial topológico σ -Peano. Então $CS_\infty(\mathbb{R}, \mathcal{X})$ é $(1, \mathfrak{c})$ -lineável em $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathcal{X})$.*

Teorema. *$CS_\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N)$ é $(1, \mathfrak{c})$ -espaçável em $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N)$.*

As ideias desta etapa fazem parte do *preprint*:

- *N. G. Albuquerque and D. Tomaz, A new approach on the lineability of the set of Peano curves.*

Parte II: Abordagem multipolinomial de desigualdades clássicas

Recentemente, T. Velinga em [121] introduziu a noção de multipolinômios homogêneos, cujo principal propósito foi unificar as teorias outrora consolidadas de polinômios homogêneos e aplicações multilineares. É importante destacar também que o conceito de multipolinômios já havia sido apresentado anteriormente em uma outra linguagem por Chernega e Zadorodnyuk em [56]. Dados $E_1, \dots, E_m, F$ espaços de Banach sobre um corpo $\mathbb{K}$, que pode ser $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, temos:

Definição. [121, Definition 3.1] *Sejam $m \in \mathbb{N}$ e $(n_1, \dots, n_m) \in \mathbb{N}^m$. Uma aplicação $P : E_1 \times \dots \times E_m \longrightarrow F$ é um polinômio $(n_1, \dots, n_m)$ -homogêneo se, para cada $i = 1, \dots, m$, a aplicação*

$$P(x_1, \dots, x_{i-1}, \cdot, x_{i+1}, \dots, x_m) : E_i \longrightarrow F$$

é um polinômio n_i -homogêneo para todo $x_1 \in E_1, \dots, x_{i-1} \in E_{i-1}, x_{i+1} \in E_{i+1}, \dots, x_m \in E_m$ fixados.

Quando $m = 1$, temos o conceito de polinômio n_1 -homogêneo, e quando $n_1 = \dots = n_m = 1$, recuperamos a noção de aplicações m -lineares. Recordemos que uma aplicação $P : E \longrightarrow F$ é um polinômio m -homogêneo se existe um operador m -linear

$$T : E \times \dots \times E \longrightarrow F$$

tal que

$$P(x) := T(x, \dots, x)$$

para todo $x \in E$.

Motivados pela abordagem acima e os resultados de [121], o objetivo principal na segunda parte da tese foi tentar obter versões multipolinomiais das Desigualdades de Kahane–Salem–Zygmund e Hardy–Littlewood. Observe que essa etapa possui, de certa forma, um caráter independente dos demais capítulos, uma vez que os resultados anteriores giraram em torno dos temas *lineabilidade e espaçabilidade*. A Desigualdade de Kahane–Salem–Zygmund apareceu pela primeira vez provavelmente no trabalho [88]. Essencialmente, ela utiliza ferramentas probabilísticas para construir polinômios homogêneos e operadores multilineares que têm normas relativamente pequenas. Recordemos uma versão no contexto multilinear que aparece em [5, Lemma 6.1] e também em [6, Lemma 3.1]. Como usual, para $p \in [1, +\infty]$, denotaremos por ℓ_p^n o espaço n -dimensional $\mathbb{K}^n$ munido da norma $\|\cdot\|_p$. Além disso, para $q \geq 1$, definimos $\alpha(q) := \max\left\{\frac{1}{2} - \frac{1}{q}, 0\right\}$.

Teorema. (Desigualdade de Kahane–Salem–Zygmund). Sejam $m, n \geq 1, p \in [1, +\infty]$. Então existe uma aplicação m -linear $A : \ell_p^n \times \cdots \times \ell_p^n \rightarrow \mathbb{K}$ da forma

$$A\left(x^{(1)}, \dots, x^{(m)}\right) = \sum_{i_1, \dots, i_m=1}^n \delta_{i_1, \dots, i_m} x_{i_1}^{(1)} \cdots x_{i_m}^{(m)},$$

com $\delta_{i_1, \dots, i_m} \in \{-1, 1\}$, tal que

$$\|A\| \leq C_m \cdot n^{\frac{1}{2} + m\alpha(p)},$$

onde C_m é uma constante positiva que depende apenas de m .

Provaremos uma versão multipolinomial da desigualdade acima e a usaremos na obtenção da otimalidade dos expoentes da Desigualdade do tipo Hardy–Littlewood para multipolinômios. Historicamente, a Desigualdade de Hardy–Littlewood consiste numa generalização de outra desigualdade famosa, conhecida como Desigualdade de Bohnenblust–Hille, no contexto multilinear ou polinomial. No caso de multipolinômios homogêneos, a situação não é diferente.

Em 1931, [43, Theorem I], Bohnenblust e Hille provaram a famosa Desigualdade multilinear de Bohnenblust–Hille. Esta nos afirma que, para todo inteiro positivo $m \geq 1$, existe uma constante $C_{\mathbb{K}, m} \geq 1$ tal que, para toda forma m -linear $T : \ell_\infty^n \times \cdots \times \ell_\infty^n \rightarrow \mathbb{K}$ e todo inteiro positivo n ,

$$\left(\sum_{j_1, \dots, j_m=1}^n |T(e_{j_1}, \dots, e_{j_m})|^{\frac{2m}{m+1}} \right)^{\frac{m+1}{2m}} \leq C_{\mathbb{K}, m} \|T\|,$$

onde

$$\|T\| := \sup_{z^{(1)}, \dots, z^{(m)} \in B_{\ell_\infty^n}} \left| T \left(z^{(1)}, \dots, z^{(m)} \right) \right|.$$

Um detalhe relevante é que o expoente $\frac{2m}{m+1}$ é ótimo, isto é, a constante acima mencionada não depende do inteiro positivo n . Nos últimos anos, tem se intensificado a busca sobre o comportamento e as melhores constantes $C_{\mathbb{K},m}$ para a desigualdade. Além disso, esse resultado possui inúmeras aplicações em áreas como Análise Complexa e Harmônica, Teoria dos Números, Teoria da Informação Quântica e até mesmo Teoria dos Jogos. Veja, por exemplo, [9, 16, 104].

A Desigualdade de Hardy–Littlewood consiste numa generalização da Desigualdade de Bohnenblust–Hille para espaços ℓ_p . Em 1934, Hardy e Littlewood, em [81], apresentaram o caso bilinear e, em 1981, Praciano-Pereira [113] obteve uma versão no contexto multilinear:

Teorema (Hardy–Littlewood/Praciano-Pereira). *Sejam $m \geq 2$ um inteiro e*

$\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_m) \in [1, +\infty]^m$ tais que $\left| \frac{1}{\mathbf{p}} \right| = \frac{1}{p_1} + \dots + \frac{1}{p_m} \leq \frac{1}{2}$. Então existe uma constante $C_{m,\mathbf{p}}^{\mathbb{K}} \geq 1$ tal que, para toda forma m -linear contínua $T : \ell_{p_1} \times \dots \times \ell_{p_m} \rightarrow \mathbb{K}$

$$\left(\sum_{j_1, \dots, j_m=1}^{\infty} |T(e_{j_1}, \dots, e_{j_m})|^{\frac{2m}{m+1-2\left|\frac{1}{\mathbf{p}}\right|}} \right)^{\frac{m+1-2\left|\frac{1}{\mathbf{p}}\right|}{2m}} \leq C_{m,\mathbf{p}}^{\mathbb{K}} \|T\|.$$

Além disso, o expoente $\frac{2m}{m+1-2\left|\frac{1}{\mathbf{p}}\right|}$ é ótimo.

No contexto de polinômios homogêneos, a Desigualdade polinomial de Hardy–Littlewood [11] garante que, dados $m, n \geq 1$, se P é um polinômio m -homogêneo em ℓ_p^n , com $2m \leq p \leq \infty$ dado por $P(\mathbf{x}) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(P) \mathbf{x}^\alpha$, então existe uma constante $C_{\mathbb{K},m,p}^{pol} \geq 1$ tal que

$$\left(\sum_{|\alpha|=m} |a_\alpha(P)|^{\frac{2mp}{mp+p-2m}} \right)^{\frac{mp+p-2m}{2mp}} \leq C_{\mathbb{K},m,p}^{pol} \|P\|,$$

onde

$$\|P\| := \sup_{x \in B_{\ell_p^n}} |P(x)|.$$

Quando substituimos ℓ_p^n por ℓ_∞^n , obtemos a versão polinomial da Desigualdade de Bohnenblust–Hille [5, 43]. Mais precisamente, dados inteiros positivos $m \geq 2$ e $n \geq 1$, se P é um polinômio homogêneo de grau m em ℓ_∞^n dado por $P(\mathbf{x}) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(P) \mathbf{x}^\alpha$, então existe

uma constante $B_{\mathbb{K},m,p}^{pol} \geq 1$ tal que

$$\left(\sum_{|\alpha|=m} |a_\alpha(P)|^{\frac{2m}{m+1}} \right)^{\frac{m+1}{2m}} \leq B_{\mathbb{K},m,p}^{pol} \|P\|.$$

Uma informação interessante, é que em 2014, Bayart, Pellegrino e Seoane-Sepúlveda, em [35], obtiveram, até o momento, as melhores estimativas conhecidas para as constantes na Desigualdade polinomial de Bohnenblust–Hille. Em [121], Velanga, entre outros resultados, obteve uma Desigualdade do tipo Bohnenblust–Hille no contexto de multipolinômios homogêneos:

Teorema. [121, Theorem 6.3] *Sejam $m, n_1, \dots, n_m$ inteiros positivos fixados. As seguintes condições são equivalentes:*

(i) *Existe uma constante $C_{n_1, \dots, n_m} \geq 1$ tal que*

$$\left(\sum_{|\alpha^{(1)}|=n_1, \dots, |\alpha^{(m)}|=n_m} |c_{\alpha^{(1)} \dots \alpha^{(m)}}(P)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq C_{n_1, \dots, n_m} \|P\|$$

para todo polinômio $(n_1, \dots, n_m)$ -homogêneo $P : c_0 \times \dots \times c_0 \rightarrow \mathbb{K}$.

(ii)

$$p \geq \frac{2 \left(\sum_{j=1}^m n_j \right)}{\left(\sum_{j=1}^m n_j \right) + 1}.$$

Utilizando argumentos similares, obteremos uma versão da Desigualdade de Hardy–Littlewood no contexto acima. Mais precisamente em [119] provamos o seguinte teorema:

Teorema. (Desigualdade multipolinomial de Hardy–Littlewood) *Sejam $m, n_1, \dots, n_m$ inteiros positivos, $s \in (0, +\infty)$ e $p \geq 2M$, onde $M = \sum_{j=1}^m n_j$. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) *Existe uma constante $C_{n_1, \dots, n_m, s}^{\mathbb{K}} \geq 1$ tal que*

$$\left(\sum_{|\alpha^{(1)}|=n_1, \dots, |\alpha^{(m)}|=n_m} |c_{\alpha^{(1)} \dots \alpha^{(m)}}(P)|^s \right)^{\frac{1}{s}} \leq C_{n_1, \dots, n_m, s}^{\mathbb{K}} \|P\|$$

para todo polinômio $(n_1, \dots, n_m)$ -homogêneo $P : \ell_p \times \dots \times \ell_p \rightarrow \mathbb{K}$ da forma

$$P(x^{(1)}, \dots, x^{(m)}) = \sum_{|\alpha^{(1)}|=n_1, \dots, |\alpha^{(m)}|=n_m} c_{\alpha^{(1)} \dots \alpha^{(m)}}(P) \left(x^{(1)}\right)^{\alpha^{(1)}} \dots \left(x^{(m)}\right)^{\alpha^{(m)}};$$

(ii)

$$s \geq \frac{2 \left(\sum_{j=1}^m n_j \right) p}{\left(\sum_{j=1}^m n_j \right) p + p - 2 \left(\sum_{j=1}^m n_j \right)}.$$

Para obtenção dos resultados principais, como já foi destacado, obtivemos uma versão da Desigualdade de Kahane–Salem–Zygmund para multipolinômios homogêneos. Talvez isso tenha sido uma contribuição do trabalho, uma vez que, na abordagem feita por Velanga, foi usada a versão multilinear da Desigualdade de Kahane–Salem–Zygmund. Os resultados deste tópico estão presentes em:

- *D. Tomaz, Hardy–Littlewood inequalities for multipolynomials, Adv. Oper. Theory. 4 (2019), no.3, 688–697.*

Parte I

Resultados em lineabilidade e espaçabilidade

Capítulo

1

Lineabilidade em espaços quasi-Banach e operadores somantes

Sejam V um espaço vetorial, α um número cardinal e $A \subset V$ um subconjunto. Dizemos que A é α -*lineável* quando existe um espaço vetorial W com $\dim W = \alpha$ e $W \setminus \{0\} \subset A$. Se V for um espaço vetorial topológico, dizemos que A é α -*espaçável* quando existe um espaço vetorial fechado W com $\dim W = \alpha$ e $W \setminus \{0\} \subset A$. Dizemos simplesmente que A é *lineável* ou *espaçável* quando o respectivo espaço vetorial existente possui dimensão infinita, ou seja, se $\alpha \geq \aleph_0$. Além disso, dizemos que A é *lineável maximal* quando for $\dim(V)$ -lineável, ou seja, quando o resultado for o melhor possível em termos de dimensão. Como mencionamos na introdução, o conceito de lineabilidade tem sido explorado em muitos contextos diferentes, e tem uma literatura recente bastante rica e diversificada. Para mais detalhes, recomendamos o livro [\[21\]](#).

No presente capítulo, apresentamos um resultado de lineabilidade relacionado a operadores absolutamente somantes em espaços quasi-normados. Mais precisamente, mostraremos que existe um espaço vetorial de dimensão $\mathfrak{c}$ no conjunto

$$\left(\mathcal{L}(\ell_p; \ell_p) \setminus \bigcup_{1 \leq s \leq r < \infty} \prod_{r,s} (\ell_p; \ell_p) \right) \cup \{0\}$$

com $0 < p < 1$. Os resultados apresentados fazem parte do artigo:

- D. Tomaz, *Linear structure in certain subsets of quasi-Banach sequence spaces*, *Linear Multilinear Algebra*. **67** (2019), 1561–1566.

Nosso resultado se apoia fortemente no trabalho publicado por Maddox, em 1987 [102]. A partir de resultados de Macphail apresentados em [101], Maddox conseguiu provar que o operador identidade $i : \ell_p \longrightarrow \ell_p$ não é (r, s) -absolutamente somante, quaisquer que sejam $1 \leq s \leq r < \infty$ e $0 < p < 1$. O resultado de Maddox é interessante, pois evidencia uma clara ruptura de comportamentos entre os casos $p < 1$ e $p \geq 1$, visto que é bem conhecido que tal resultado é impossível para $p \geq 1$. A existência do operador identidade com as propriedades desejadas foi indispensável para aplicação da técnica conhecida como “vetor mãe” utilizada na demonstração de nosso resultado. As limitações da técnica do vetor mãe são, de certa forma, a motivação do Capítulo 2 de nosso trabalho, inspirando a introdução do conceito de (α, β) -lineabilidade.

1.1 Preliminares

A teoria de operadores absolutamente somantes possui um papel de destaque na Teoria dos Espaços de Banach. Em meados da década de 50, sob o pioneirismo do célebre matemático Grothendieck, testemunhou-se o nascimento da teoria de operadores absolutamente somantes com a publicação do artigo [78], conhecido como Résumé. Nesse artigo, Grothendieck mostra que todo operador linear contínuo de ℓ_1 em ℓ_2 é absolutamente somante, isto é, leva sequências fracamente somáveis de ℓ_1 em sequências absolutamente somáveis em ℓ_2 . Os resultados do Résumé de Grothendieck ficaram pouco explorados por algum tempo, provavelmente devido à dificuldade de compreensão dos argumentos envolvendo produtos tensoriais. Na década de 60, Mitiagin, Lindenstrauss, Pelczynski, Pietsch, dentre outros matemáticos da época, iniciaram uma releitura do Résumé, ajudando a apresentar à comunidade matemática, de forma mais ampla, os profundos resultados de Grothendieck. Um dos trabalhos mais famosos que foram iniciados com essa releitura do Résumé de Grothendieck foi o artigo [99], publicado em 1968, por Lindenstrauss e Pelczynski. Nesta seção, nos restringiremos apenas aos fatos que serão necessários para a demonstração do resultado principal; para detalhes sobre a teoria de operadores absolutamente somantes, recomendamos [61].

Sejam $1 \leq p < \infty$ e E um espaço de Banach. Dizemos que uma sequência $(x_n)_{n=1}^\infty$ em E é fortemente p -somável se $(\|x_n\|)_{n=1}^\infty \in \ell_p$. Como é usual na teoria de operadores, usaremos as definições

$$\ell_p(E) := \left\{ (x_n)_{n=1}^\infty \in E^\mathbb{N} : \|(x_n)_{n=1}^\infty\|_p := \left(\sum_{n=1}^\infty \|x_n\|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \right\},$$

e

$$\ell_p^w(E) := \left\{ (x_n)_{n=1}^\infty \in E^\mathbb{N} : \|(x_n)_{n=1}^\infty\|_{p,w} := \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{n=1}^\infty |\varphi(x_n)|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \right\}.$$

Os elementos de $\ell_p(E)$ e de $\ell_p^w(E)$ são chamados de sequências fortemente p -somáveis e fracamente p -somáveis, respectivamente.

Definição 1.1. Sejam $1 \leq q \leq p < \infty$ e $T : E \longrightarrow F$ um operador linear entre espaços de Banach. Dizemos que T é absolutamente (p, q) -somante (ou simplesmente (p, q) -somante) se $(T(x_i)_{i=1}^\infty) \in \ell_p(F)$ sempre que $(x_i)_{i=1}^\infty \in \ell_q^w(E)$.

Quando $p = q$, dizemos que o operador é absolutamente p -somante. Se $p = q = 1$, ele é dito simplesmente absolutamente somante. Denotamos por $\Pi_{p,q}(E, F)$ ($\Pi_p(E, F)$ se $p = q$) o espaço vetorial formado pelos operadores (p, q) -somantes de E em F .

1.2 Espaços quasi-normados: aspectos básicos

Como vimos anteriormente, a definição usual de operadores absolutamente somantes é considerada no contexto de espaços de Banach. No entanto, em 1987, Maddox considerou a mesma definição para espaços quasi-normados cujo dual topológico não é trivial, por exemplo, para ℓ_p com $0 < p < 1$. A estrutura dos espaços quasi-Banach, ou mais geralmente espaços vetoriais topológicos metrizáveis, é diferente da estrutura de espaços de Banach e a extensão de resultados de lineabilidade/espaçabilidade de um ambiente para outro não é imediata em geral. Em [103, p. 1], o autor comenta que definições e resultados clássicos da teoria de espaços de Banach podem ser trasladados de modo natural para o contexto de espaços quasi-Banach quando necessitamos apenas da completude do espaço como, por exemplo, o Teorema de Baire da Topologia e os Teoremas da Aplicação Aberta e do Gráfico Fechado (veja também [58], [64, Chapter II]). Como espaços quasi-normados não são necessariamente localmente convexos, resultados que dependem, por exemplo, do Teorema de Hahn-Banach nesse contexto são falsos em geral. Se considerarmos o espaço $L_p[0, 1]$ com $0 < p < 1$, em [59, Theorem 1] foi provado que o seu dual é $\{0\}$. Em relação aos espaços de sequências, para $0 < p < 1$, o dual do espaço $\ell_p(X)$ é isometricamente isomorfo ao $\ell_\infty(X)$ (veja [85, Example 6.10B] e [92, Theorem 2.3]). A ausência de uma das ferramentas mais importantes da Teoria dos Espaços de Banach (Teorema de Hahn-Banach) provavelmente explica a pouca literatura disponível para o estudo de espaços não-localmente convexos na Análise Funcional. Historicamente, os primeiros trabalhos nessa área apareceram por volta de 1940, com T. Aoki e M. Day em [10, 59], respectivamente, e, aparentemente, por muitos anos, as pesquisas nesse

ambiente ficaram esquecidas. Para mais detalhes sobre os espaços quasi-Banach, sugerimos as referências [91–93, 117].

Definição 1.2. Seja X um espaço vetorial. Uma aplicação

$$\|\cdot\| : X \longrightarrow [0, +\infty)$$

é uma quasi-norma em X se:

- (a) $\|x\| > 0$ para $x \neq 0$;
- (b) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ para $\lambda \in \mathbb{K}$ e $x \in X$;
- (c) $\|x + y\| \leq C (\|x\| + \|y\|)$ para todos $x, y \in X$ e $C \geq 1$ uma constante independente de x, y .

Observe que uma norma $\|\cdot\|$ em X é uma quasi-norma com constante $C = 1$. Se a quasi-norma $\|\cdot\|$ define em X uma topologia metrizável de modo que X seja completo, então X é dito um espaço quasi-Banach. Nesse contexto, dado $0 < p < 1$, uma p -norma em X é definida como uma quasi-norma que satisfaz a chamada p -desigualdade triangular, isto é,

$$\|x + y\|^p \leq \|x\|^p + \|y\|^p$$

para todos $x, y \in X$. Um resultado devido a Aoki e Rolewicz, em [127], estabelece uma equivalência bastante útil entre uma quasi-norma e uma p -norma:

Teorema 1.1. [127, Theorem 2.2] *Seja X um espaço quasi-Banach. Então existem $0 < p \leq 1$ e uma quasi-norma equivalente $\|\cdot\|$ em X que satisfazem*

$$\|x + y\|^p \leq \|x\|^p + \|y\|^p$$

para todos $x, y \in X$.

Se $0 < p < 1$, a função

$$\|x\|_p := \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

define uma p -norma em ℓ_p ([21, p. 123]). Como ℓ_p é completo com essa p -norma ([93, p. 1102]), dizemos que ℓ_p é um p -espaço de Banach. Analogamente, os espaços de funções $L_p[0, 1]$ com $0 < p < 1$ são espaços quasi-Banach com a quasi-norma (p -norma) dada por

$$\|f\|_p := \left(\int_0^1 |f(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Para mais detalhes, sugerimos [85, p. 50], [96, p. 174].

1.3 Resultados em lineabilidade relacionados a operadores absolutamente somantes

Em 2008, Puglisi e Seoane-Sepúlveda provaram, entre outros resultados, que dados E, F, G espaços de Banach de dimensão infinita, se E tem a propriedade de “duas séries” (veja [114, Definition 0.1]) e $G = F'$, então o conjunto

$$\mathcal{L}(E; G) \setminus \prod_1(E; G)$$

é lineável. Além disso, no mesmo trabalho, os autores propuseram o seguinte problema:

Problema 1.1. [114, Question 2.4] Se E é super-reflexivo e $p \geq 1$, é verdade que

$$\mathcal{L}(E; F) \setminus \prod_p(E; F)$$

é lineável para todo espaço de Banach F ?

Em 2009, Botelho, Diniz e Pellegrino, à exceção de casos muito excepcionais, responderam de forma positiva o problema anterior, em [44], e estenderam a ideia da prova para outras situações relacionadas. Denotando por $\mathcal{K}(E; F)$ o ideal dos operadores lineares compactos de E em F , temos:

Teorema 1.2. [44, Theorem 2.1] *Sejam $p \geq 1$ e E super-reflexivo. Se E contém um subespaço complementado de dimensão infinita com base incondicional ou F contém uma sequência básica incondicional infinita, então o conjunto $\mathcal{K}(E; F) \setminus \prod_p(E; F)$ e, consequentemente, $\mathcal{L}(E; F) \setminus \prod_p(E; F)$ é lineável.*

Nessa direção, Kitson e Timoney, em [94], além de outros resultados de alcance bastante geral, generalizaram o resultado acima, provando a espaçabilidade:

Teorema 1.3. [94, Theorem 4.1] *Sejam E um espaço de Banach super-reflexivo de dimensão infinita e F um espaço de Banach de dimensão infinita. Então*

$$S = \mathcal{K}(E; F) \setminus \bigcup_{1 \leq p < \infty} \prod_p(E; F)$$

é espaçável em $\mathcal{K}(E; F)$.

O leitor interessado em espaços super-reflexivos pode consultar [69, Chapter 9]. É interessante mencionar também que os resultados de Kitson e Timoney, em [94], são válidos apenas para espaços de Fréchet (espaços vetoriais topológicos completos metrizáveis e localmente convexos).

1.4 Resultado principal

Começamos separando $\mathbb{N}$ como uma união enumerável de subconjuntos infinitos $(\mathbb{N}_k)_{k=1}^{\infty}$ dois a dois disjuntos, isto é, $\mathbb{N}_k \cap \mathbb{N}_j = \emptyset$ para $k \neq j$. Para cada $k \in \mathbb{N}$, denotemos

$$\mathbb{N}_k := \left\{ n_1^{(k)} < n_2^{(k)} < \dots \right\}.$$

Por exemplo, uma decomposição comum aparece em [21, p. 127], considerando $\mathbb{N}_1$ o conjunto dos primos incluindo 1, $\mathbb{N}_2$ como o conjunto formado pelos elementos que são produtos de dois primos e assim por diante. Defina para cada $k \in \mathbb{N}$,

$$\ell_p^{(k)} := \{x \in \ell_p : x_j = 0 \text{ se } j \notin \mathbb{N}_k\}.$$

Além disso, a decomposição acima nos garante que $\mathbb{N} = \left\{ n_m^{(j)} : m, j \in \mathbb{N} \right\}$. Consideremos ainda a sequência de operadores lineares

$$i^{(k)} : \ell_p \longrightarrow \ell_p^{(k)}$$

definida por

$$\left(i^{(k)}(x) \right)_{n_m^{(j)}} := \begin{cases} x_m, & \text{se } j = k \\ 0, & \text{se } j \neq k \end{cases}.$$

De modo informal, os operadores $i^{(k)}$ são isometrias que estão transformando sequências $x = (x_m)_{m=1}^{\infty}$ de ℓ_p em novas sequências de ℓ_p , espalhando as coordenadas originais nas posições indexadas por elementos de $\mathbb{N}_k$. Assim, é fácil observar que para todo $k \in \mathbb{N}$, tem-se

$$\left\| i^{(k)}(x) \right\|_{\ell_p^{(k)}} = \|i(x)\|_{\ell_p}$$

para todo $x = (x_m)_{m=1}^{\infty}$ em ℓ_p , onde $i : \ell_p \longrightarrow \ell_p$ é o operador identidade. Por fim, conside-

remos a sequência de operadores $(u_k)_{k=1}^\infty$ em $\mathcal{L}(\ell_p; \ell_p)$ dada por

$$\begin{array}{ccc} \ell_p^{(k)} & \xrightarrow{j_k} & \ell_p \\ i^{(k)} \uparrow & \nearrow u_k & \\ \ell_p & & \end{array} \quad u_k := j_k \circ i^{(k)}$$

com $j_k : \ell_p^{(k)} \rightarrow \ell_p$ o operador inclusão. Note que, como os conjuntos $\mathbb{N}_k$ são dois a dois disjuntos, o conjunto $\{u_k : k \in \mathbb{N}\}$ é linearmente independente. O resultado abaixo é certamente conhecido, mas apresentamos uma demonstração, inspirada em [3, Lemma 3.9] e [67, p. 165], para deixar o texto mais autossuficiente.

Lema 1.4. Seja $p > 0$. Então $\dim \mathcal{L}(\ell_p; \ell_p) = \mathfrak{c}$.

Demonstração. Para $0 < p < 1$, é conhecido que $\mathcal{L}(\ell_p; \ell_p)$ é um espaço quasi-Banach (veja [89, p. 322]). Usando o Teorema da Categoria de Baire, não é difícil mostrar que todo espaço quasi-Banach de dimensão infinita tem dimensão maior ou igual a $\mathfrak{c}$ (veja [21, Proposition III.5]). Logo, $\dim \mathcal{L}(\ell_p; \ell_p) \geq \mathfrak{c}$ (veja também [100, Theorem I-1]). Por outro lado, seja γ uma base de Hamel arbitrária de $\mathcal{L}(\ell_p; \ell_p)$ e considere a aplicação

$$\Psi : \gamma \longrightarrow \ell_p^{c_{00}(\mathbb{Q})}$$

definida por

$$\Psi(T) := T|_{c_{00}(\mathbb{Q})},$$

onde $\ell_p^{c_{00}(\mathbb{Q})}$ denota o conjunto de todas as funções de $c_{00}(\mathbb{Q})$ em ℓ_p . Recordemos que $c_{00}(\mathbb{Q}) := \{(r_n)_{n=1}^\infty \in c_0 : \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } r_n = 0 \text{ para todo } n \geq n_0 \text{ e } r_n \in \mathbb{Q}\}$. A densidade de $c_{00}(\mathbb{Q})$ em ℓ_p garante que Ψ é injetiva. Logo,

$$\dim \mathcal{L}(\ell_p; \ell_p) = \text{card}(\gamma) \leq \text{card}\left(\ell_p^{c_{00}(\mathbb{Q})}\right) = \mathfrak{c}^{\aleph_0} = \mathfrak{c}.$$

Portanto, $\dim \mathcal{L}(\ell_p; \ell_p) = \mathfrak{c}$. O caso $p \geq 1$ é análogo (veja [15, p. 934]). □

O próximo resultado, devido a Maddox, em [102], tem um papel central na nossa demonstração:

Teorema 1.5. [102, Theorem 4]. *Sejam $0 < p < 1$ e $1 \leq s \leq r < \infty$. Então o operador identidade $i : \ell_p \rightarrow \ell_p$ não é (r, s) -absolutamente somante.*

Recordemos que o operador identidade, em qualquer espaço de Banach de dimensão infinita, falha em ser absolutamente r -somante para todo $0 < r < \infty$. O caso $1 \leq r < \infty$ é conhecido como Teorema de Dvoretzky-Rogers ([17, p. 2]). A versão fraca do teorema também garante o fato acima (cf. [61, Theorem 2.18]). O caso $0 < r < 1$ segue do fato que operadores r -somantes são s -somantes sempre que $r \leq s$ (veja [46, p. 1259]).

Nesse ponto, estamos prontos para enunciar e demonstrar o principal resultado do capítulo:

Teorema 1.6. *Sejam $0 < p < 1$ e $1 \leq s \leq r < \infty$. Então $\mathcal{L}(\ell_p; \ell_p) \setminus \bigcup_{1 \leq s \leq r < \infty} \prod_{r,s}(\ell_p; \ell_p)$ é $\mathfrak{c}$ -lineável. Além disso, o resultado é ótimo no sentido de que não é válido para $p \geq 1$.*

Demonstração. Sejam

$$\mathcal{D} := \bigcup_{1 \leq s \leq r < \infty} \prod_{r,s}(\ell_p; \ell_p)$$

e $i : \ell_p \rightarrow \ell_p$ o operador identidade, e considere ainda $\mathbb{N}_k$, $i^{(k)}$ e u_k como definidos anteriormente. Pelo Teorema 1.5, para cada r, s com $1 \leq s \leq r$, existe uma sequência $(x^{(j)})_{j=1}^\infty \in \ell_s^w(\ell_p)$ tal que $(x^{(j)})_{j=1}^\infty \notin \ell_r(\ell_p)$. Note que

$$\left\| i^{(k)}(x) \right\|_{\ell_p^{(k)}} = \|i(x)\|_{\ell_p}$$

para todo $x \in \ell_p$, e, portanto,

$$\sum_{j=1}^\infty \left\| i^{(k)}(x^{(j)}) \right\|_{\ell_p^{(k)}}^r = \sum_{j=1}^\infty \|i(x^{(j)})\|_{\ell_p}^r = \infty.$$

Como

$$\|u_k(x)\|_{\ell_p} = \left\| i^{(k)}(x) \right\|_{\ell_p^{(k)}} = \|i(x)\|_{\ell_p},$$

concluimos que $u_k \notin \mathcal{D}$. Por outro lado, como $\mathcal{L}(\ell_p; \ell_p)$ é um espaço quasi-Banach ([89, p. 322]), e todo espaço quasi-Banach é um espaço q -Banach para algum $q > 0$ (veja [90, p. 250], [95, p. 984] ou Teorema 1.1), concluimos que $\mathcal{L}(\ell_p; \ell_p)$ é um espaço q -Banach. Assim, se $(a_k)_{k=1}^\infty \in \ell_q$, temos

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^\infty \|a_k u_k\|_{\mathcal{L}(\ell_p; \ell_p)}^q &= \sum_{k=1}^\infty |a_k|^q \|u_k\|_{\mathcal{L}(\ell_p; \ell_p)}^q \\ &= \sum_{k=1}^\infty |a_k|^q \left\| i^{(k)} \right\|_{\mathcal{L}(\ell_p; \ell_p^{(k)})}^q \\ &= \sum_{k=1}^\infty |a_k|^q \|i\|_{\mathcal{L}(\ell_p; \ell_p)}^q \end{aligned}$$

$$= 1 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^q < \infty.$$

Consequentemente, usando [21, Lemma 3.2.5], a série $\sum_{k=1}^{\infty} a_k u_k$ converge em $\mathcal{L}(\ell_p; \ell_p)$. Portanto, a aplicação

$$T : \ell_q \longrightarrow \mathcal{L}(\ell_p; \ell_p), T((a_k)_{k=1}^{\infty}) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k u_k$$

está bem definida. A linearidade de T é imediata. Além disso, como os operadores u_k possuem suportes disjuntos, segue que T é injetora. Logo, $T(\ell_q)$ é um subespaço vetorial $\mathfrak{c}$ -dimensional de $\mathcal{L}(\ell_p; \ell_p)$. O lema anterior garante, portanto, que o conjunto $\mathcal{L}(\ell_p; \ell_p) \setminus \mathcal{D}$ é lineável maximal. Para finalizar a demonstração, resta-nos provar que $T((a_k)_{k=1}^{\infty}) \in \mathcal{L}(\ell_p; \ell_p) \setminus \mathcal{D}$, para $0 \neq (a_k)_{k=1}^{\infty}$ em ℓ_q . De fato, sem perda de generalidade, suponha que $a_1 \neq 0$. Recordando que os suportes dos operadores u_k são aos pares disjuntos, temos

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left\| T((a_k)_{k=1}^{\infty}) \left(z^{(j)} \right) \right\|_{\ell_p}^r \geq \sum_{j=1}^{\infty} \left\| a_1 u_1 \left(z^{(j)} \right) \right\|_{\ell_p}^r = \infty$$

para alguma $(z^{(j)})_{j=1}^{\infty} \in \ell_s^w(\ell_p)$ e, por conseguinte, $T((a_k)_{k=1}^{\infty}) \in \mathcal{L}(\ell_p; \ell_p) \setminus \mathcal{D}$, como desejávamos. $\square$

Para $p \geq 1$, o resultado de coincidência presente em [109, Theorem 1] (veja também [102, Theorem 1]) nos garante que

$$\prod_{\max\{p, 2\}, 1} (\ell_p, \ell_p) = \mathcal{L}(\ell_p; \ell_p)$$

e, portanto, o resultado não é válido para $p \geq 1$.

O resultado acima nos mostra que, no contexto de operadores absolutamente somantes, os resultados de lineabilidade podem ser diferentes quando mudamos o ambiente quasi-Banach para Banach. Entretanto, em outros contextos, podemos obter resultados similares para espaços quasi-Banach ou Banach, como ilustram os exemplos abaixo.

Exemplo 1.1. Para $p, q > 0$ o conjunto $\mathcal{NS} = \{T \in \mathcal{L}(\ell_p; \ell_q) : T \text{ é não sobrejetivo}\}$ é espaçável. De fato, para cada inteiro positivo k , considere a sequência de operadores $T_k : \ell_p \longrightarrow \ell_q$ em $\mathcal{L}(\ell_p; \ell_q)$ dada por

$$T_k(x) = (0, 0, \dots, x_k, 0, 0, \dots)$$

com x_k na posição $(k+1)$ e $x = (x_k)_{k=1}^{\infty}$ em ℓ_p . Obviamente T_k é não sobrejetivo para todo

$k \in \mathbb{N}$. Além disso, o operador $\Psi : \ell_1 \longrightarrow \mathcal{L}(\ell_p; \ell_q)$ dado por

$$\Psi((a_k)_{k=1}^\infty) = \sum_{k=1}^\infty a_k T_k$$

está bem definido pois, para $(a_k)_{k=1}^\infty \in \ell_1$, temos

$$\sum_{k=1}^\infty \|a_k T_k\|_{\mathcal{L}(\ell_p; \ell_q)} = \sum_{k=1}^\infty |a_k| \|T_k\|_{\mathcal{L}(\ell_p; \ell_q)} = \sum_{k=1}^\infty |a_k| < \infty.$$

É claro que Ψ é linear e injetivo. Por construção, $\Psi((a_k)_{k=1}^\infty)$ é não sobrejetivo e, além disso, $\overline{\Psi(\ell_1)} \subset \mathcal{NS}$. Portanto, concluímos que $\mathcal{NS}$ é espaçável.

Exemplo 1.2. Para $p, q > 0$ o conjunto $\mathcal{NI} = \{T \in \mathcal{L}(\ell_p; \ell_q) : T \text{ é não injetivo}\}$ é espaçável. De fato, a prova é análoga ao caso anterior. É suficiente considerarmos a sequência de operadores $R_k : \ell_p \longrightarrow \ell_q$ em $\mathcal{L}(\ell_p; \ell_q)$ dada por

$$R_1(x) = (x_2, 0, 0, \dots) \text{ e } R_k(x) = (0, 0, 0, \dots, x_{k+1}, 0, \dots) \text{ para } k > 1,$$

onde $x = (x_k)_{k=1}^\infty$ e x_{k+1} está na k -ésima posição. Podemos observar que R_k é não injetivo para todo $k \in \mathbb{N}$. O resultado segue, então, como no exemplo anterior.

(α, β) -Lineabilidade: uma noção mais restritiva de lineabilidade

Neste capítulo, apresentaremos uma noção mais restritiva de lineabilidade, cujas ideias estão motivadas pelo artigo [106]. Diversos trabalhos mostraram que, embora a lineabilidade em conjuntos exóticos parecesse surpreendente em um primeiro momento, os resultados positivos eram muito comuns, levando a um sentimento de que “tudo é lineável”. A nova abordagem que propomos neste capítulo exige propriedades geométricas mais robustas dos conjuntos investigados e, de certa forma, tenta exibir propriedades mais finas dos conjuntos em questão, como será detalhado adiante. O desenvolvimento deste capítulo está baseado no trabalho

- V. V. Fávaro, D. Pellegrino and D. Tomaz, *Lineability and spaceability: a new approach*, *Bull. Braz. Math. Soc. (N.S)* **51** (2020), 27–46.

Nessa nova abordagem de lineabilidade, investigaremos principalmente problemas envolvendo espaços de sequências e os espaços $L_p[0, 1]$. Alguns trabalhos motivaram a obtenção dos resultados como, por exemplo, [23, 46, 48].

2.1 Conceitos e exemplos básicos

Sejam E um espaço vetorial e α um número cardinal. Recordemos do capítulo anterior, que um subconjunto A de E é dito α -lineável se $A \cup \{0\}$ contém um subespaço vetorial de E de dimensão α . Além disso, se E for espaço vetorial topológico, dizemos que A é α -espaçável se $A \cup \{0\}$ contém um subespaço vetorial fechado de E de dimensão α . A motivação da nova abordagem introduzida no presente capítulo se baseia em ideias de [106]. No artigo em

2. (α, β) -Lineabilidade: uma noção mais restritiva de lineabilidade

questão, os autores atentam para o fato de que é possível estudar essas noções de lineabilidade em um sentido mais restritivo. Mais precisamente, eles introduziram a noção de um conjunto pontualmente λ -lineável, onde λ é um número cardinal. Dado um subconjunto A de um espaço vetorial W , dizemos que A é *pontualmente λ -lineável* se, para qualquer $x \in A$, existe um espaço vetorial $V \subset W$, com $\dim V = \lambda$ e tal que $x \in V \subset A \cup \{0\} \subset W$. A mesma noção é adaptada para espaçabilidade. Não é difícil observar que esse conceito é um pouco mais refinado que a noção usual. Basta considerar o exemplo abaixo. Nesse contexto de novas abordagens em lineabilidade, é importante também destacarmos a concepção de $[S]$ -lineabilidade que foi apresentada por Gurariy em 2004 e recentemente explorada em [42]. Recordemos que dado $p > 0$, consideremos o espaço de Banach ℓ_p (p -Banach se $p < 1$) das sequências $(x_j)_{j=1}^\infty$ tais que

$$\left\| (x_j)_{j=1}^\infty \right\|_p := \left(\sum_{j=1}^\infty |x_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Para cada $j \in \mathbb{N}$, denotamos por e_j os vetores canônicos $(0, \dots, 0, 1, 0, 0, \dots)$ com 1 na j -ésima posição.

Exemplo 2.1. [106, p. 183] Considere $V = \ell_2$ e o seguinte subconjunto:

$$A = (\text{span}\{e_1\}) \cup (\text{span}\{e_2, e_3\}) \cup (\text{span}\{e_4, e_5, e_6\}) \cup \dots$$

Note que A é n -lineável para todo inteiro positivo n . Entretanto, A não é pontualmente 2-lineável por exemplo, uma vez que não existe um subespaço de dimensão 2 em A contendo e_1 .

O exemplo acima, de certa forma, motiva a seguinte definição mais restrita do conceito de lineabilidade:

Definição 2.1. Sejam α, β, λ números cardinais e V um espaço vetorial, com $\dim V = \lambda$ e $\alpha < \beta \leq \lambda$. Um conjunto $A \subset V$ é dito:

(i) (α, β) -lineável se é α -lineável e para todo subespaço $W_\alpha \subset V$ com $W_\alpha \subset A \cup \{0\}$ e $\dim W_\alpha = \alpha$, existe um subespaço $W_\beta \subset V$ com $\dim W_\beta = \beta$ e $W_\alpha \subset W_\beta \subset A \cup \{0\}$.

(ii) (α, β) -espaçável se é α -lineável e para todo subespaço $W_\alpha \subset V$ com $W_\alpha \subset A \cup \{0\}$ e $\dim W_\alpha = \alpha$, existe um subespaço vetorial fechado $W_\beta \subset V$ com $\dim W_\beta = \beta$ e $W_\alpha \subset W_\beta \subset A \cup \{0\}$.

2. (α, β) -Lineabilidade: uma noção mais restritiva de lineabilidade

Note que a noção clássica de lineabilidade é exatamente o caso em que $\alpha = 0$, ou seja, o caso $(0, \beta)$ -lineável é precisamente o caso β -lineável. Assim como no exemplo anterior, é possível observar que β -lineabilidade em geral não implica (α, β) -lineabilidade. Essa nova abordagem já foi explorada recentemente nos artigos [65, 66, 71]. Em geral, se α_1, α_2 são números cardinais com $\alpha_1 < \alpha_2 \leq \beta$, existem conjuntos que são (α_2, β) -lineáveis, mas que não são (α_1, β) -lineáveis; também existem conjuntos que são (α_1, β) -lineáveis, mas que não são (α_2, β) -lineáveis para $\alpha_1 < \alpha_2 \leq \beta$ (ver Exemplo 2.2 e Exemplo 2.3).

É um fato conhecido que se A_0, A_1 são subconjuntos de um espaço vetorial V , com $A_0 \subset A_1$, e A_0 é α -lineável, então naturalmente A_1 é α -lineável. Em geral, essa situação não é válida nessa abordagem recente de lineabilidade, ou seja, se A_0 é (α, β) -lineável, não asseguramos que A_1 também é (α, β) -lineável. De fato, considere $V = \mathbb{R}^3$ e os seguintes subconjuntos $A_0 = \{(x, y, 0) : x, y \in \mathbb{R}\}$, $A_1 = A_0 \cup \{(0, 0, z) : z \in \mathbb{R}\}$. Note que $A_0 \subset A_1$ e A_0 é $(1, 2)$ -lineável. Entretanto, A_1 não é $(1, 2)$ -lineável.

Exemplo 2.2. Seja $n \in \mathbb{N}$ e considere o seguinte subconjunto de ℓ_p :

$$A = \text{span} \{e_1, e_2, \dots, e_n\} \cup \left\{ (x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_p : x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0 \right\}.$$

Então A é $(n+1, \mathfrak{c})$ -lineável, mas não é $(n, \mathfrak{c})$ -lineável.

Mais geralmente, seja $p \in [1, \infty)$ e Γ um conjunto abstrato não vazio. Denotamos por $\ell_p(\Gamma)$ o espaço vetorial de todas as funções $f: \Gamma \rightarrow \mathbb{K}$ tais que $\sum_{\gamma \in \Gamma} |f(\gamma)|^p < \infty$, onde o somatório é definido por

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} |f(\gamma)|^p := \sup \left\{ \sum_{\gamma \in F} |f(\gamma)|^p : F \text{ é um subconjunto finito de } \Gamma \right\}.$$

Além disso, $\ell_p(\Gamma)$ é um espaço de Banach munido da norma definida por

$$\|f\|_p := \left(\sum_{\gamma \in \Gamma} |f(\gamma)|^p \right)^{1/p}.$$

Denotamos também os elementos da base canônica generalizada de Schauder de $\ell_p(\Gamma)$ por e_i , $i \in \Gamma$. É claro que, quando $\Gamma = \mathbb{N}$, temos que $\ell_p(\mathbb{N}) = \ell_p$. Para detalhes sobre espaços $\ell_p(\Gamma)$, sugerimos [69]. Para o próximo exemplo, necessitaremos do seguinte fato de Teoria dos Conjuntos:

2. (α, β) -Lineabilidade: uma noção mais restritiva de lineabilidade

Lema 2.1. Sejam A um conjunto com cardinalidade infinita $\aleph_2$ e I um conjunto com cardinalidade infinita $\aleph_1$, com $\aleph_1 \leq \aleph_2$. Então existem subconjuntos aos pares disjuntos A_i de A , com $i \in I$, cada um deles com cardinalidade $\aleph_2$ e tal que

$$A = \bigcup_{i \in I} A_i.$$

Demonstração. De fato, como $\text{card}(A \times I) = \text{card}(A)$, existe uma bijeção $f : A \times I \rightarrow A$. Portanto, $f(A \times \{i\})$ é um subconjunto de A com cardinalidade $\aleph_2$. Além disso, $f(A \times \{i\}) \cap f(A \times \{j\}) = \emptyset$ para $i \neq j$. Tomando

$$A_i := f(A \times \{i\}).$$

obtemos o resultado. □

Exemplo 2.3. Seja $\mathcal{B} = \{e_i : i \in \Gamma\}$ a base canônica generalizada de Schauder em $\ell_p(\Gamma)$ com $\text{card}(\Gamma) = 2^{\aleph_1}$, sendo $\aleph_1$ cardinal infinito. Escolha $i_0, i_1 \in \Gamma$ com $i_0 \neq i_1$. Usando o Lema 2.1, note que podemos escrever

$$\mathcal{B} - \{e_{i_0}, e_{i_1}\} = \bigcup_{(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2} \mathcal{A}_{(\lambda, \mu)},$$

como união de conjuntos dois a dois disjuntos, com

$$\text{card}(\mathcal{A}_{(\lambda, \mu)}) = 2^{\aleph_1}$$

para todo $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Seja

$$A = \bigcup_{(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2} \text{span}(\{\lambda e_{i_0} + \mu e_{i_1}\} \cup \mathcal{A}_{(\lambda, \mu)}).$$

Observe que não existe espaço vetorial $W \subset \ell_p(\Gamma)$ com $\dim W = 2^{\aleph_1}$ e

$$\text{span}\{e_{i_0}, e_{i_1}\} \subset W \subset A.$$

De fato, se tal W existe, como

$$e_{i_0} \in W \subset A \cup \{0\},$$

2. (α, β) -Lineabilidade: uma noção mais restritiva de lineabilidade

pela definição de A concluiríamos que

$$W \subset \bigcup_{\substack{\lambda \in \mathbb{R} \\ \lambda \neq 0}} \text{span}(\{e_{i_0}\} \cup \mathcal{A}_{(\lambda,0)}) \bigcup \text{span}\{e_{i_0}, e_{i_1}\}. \quad (2.1)$$

De fato, se a inclusão anterior fosse falsa, existiria $w \in W$ com

$$w \notin \bigcup_{\substack{\lambda \in \mathbb{R} \\ \lambda \neq 0}} \text{span}(\{e_{i_0}\} \cup \mathcal{A}_{(\lambda,0)}) \bigcup \text{span}\{e_{i_0}, e_{i_1}\},$$

ou seja

$$w \in \bigcup_{\substack{(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \\ \mu \neq 0}} \text{span}(\{\lambda e_{i_0} + \mu e_{i_1}\} \cup \mathcal{A}_{(\lambda, \mu)}) \bigcup \text{span}(\mathcal{A}_{(0,0)}) \text{ e } w \notin \text{span}\{e_{i_0}, e_{i_1}\}.$$

Portanto,

$$w = r(\lambda e_{i_0} + \mu e_{i_1}) + v$$

com $v \in \text{span}(\mathcal{A}_{(\lambda, \mu)})$, $v \neq 0$, e $r \in \mathbb{R}$, onde $\mu \neq 0$ ou $(\lambda, \mu) = (0, 0)$. Primeiro suponha que $\mu \neq 0$. Como W é um espaço vetorial contendo e_{i_0} e e_{i_1} , temos

$$w + (-r\lambda + \lambda)e_{i_0} + (-r\mu + \mu + s)e_{i_1} \in W,$$

isto é,

$$\lambda e_{i_0} + (\mu + s)e_{i_1} + v \in W$$

para qualquer escolha de $s \in \mathbb{R}$. Consideremos $s \neq -\mu$ tal que

$$(\lambda, \mu) \text{ e } (\lambda, \mu + s) \text{ sejam linearmente independentes.}$$

Então,

$$\lambda e_{i_0} + (\mu + s)e_{i_1} \neq 0,$$

e como $v \in \text{span}(\mathcal{A}_{(\lambda, \mu)})$ segue que

$$v \notin \bigcup_{(\alpha, \beta) \neq (\lambda, \mu)} \text{span}(\mathcal{A}_{(\alpha, \beta)}).$$

2. (α, β) -Lineabilidade: uma noção mais restritiva de lineabilidade

Agora segue da definição de A que

$$\lambda e_{i_0} + (\mu + s) e_{i_1} + v \notin A,$$

o que é uma contradição. Agora consideremos o caso $(\lambda, \mu) = (0, 0)$. Neste caso,

$$w \in \text{span}(\mathcal{A}_{(0,0)}) \text{ e } w \notin \bigcup_{(\alpha, \beta) \neq (0,0)} \text{span}(\mathcal{A}_{(\alpha, \beta)}).$$

Como $e_{i_0}, e_{i_1} \in W$, para qualquer escolha de $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$, obtemos

$$\alpha e_{i_0} + \beta e_{i_1} + w \in W.$$

Pela definição de A segue que

$$\alpha e_{i_0} + \beta e_{i_1} + w \notin A,$$

caracterizando uma contradição. Analogamente, concluímos que

$$W \subset \bigcup_{\mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}} \text{span}(\{e_{i_1}\} \cup \mathcal{A}_{(0, \mu)}) \bigcup \text{span}\{e_{i_0}, e_{i_1}\}. \quad (2.2)$$

Portanto, de (2.1) e (2.2),

$$\begin{aligned} W &\subset \left(\bigcup_{\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}} \text{span}(\{e_{i_0}\} \cup \mathcal{A}_{(\lambda, 0)}) \right) \cap \left(\bigcup_{\mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}} \text{span}(\{e_{i_1}\} \cup \mathcal{A}_{(0, \mu)}) \right) \bigcup \text{span}\{e_{i_0}, e_{i_1}\} \\ &= \text{span}\{e_{i_0}, e_{i_1}\}, \end{aligned}$$

uma contradição. Logo, A não é $(2, 2^{\aleph_1})$ -lineável. No entanto, note que A é $(1, 2^{\aleph_1})$ -lineável, uma vez que $\text{span}\{e_{i_0}\} \subset W \subset A \cup \{0\}$ e $\text{span}\{e_{i_1}\} \subset W \subset A \cup \{0\}$. $\square$

A estrutura intrínseca dos espaços de seqüências nos fornece uma vantagem inicial ao investigarmos problemas de lineabilidade: a decomposição do conjunto dos naturais em subconjuntos dois a dois disjuntos, combinada com um vetor fixado no espaço original, comumente denominado de vetor mãe, é uma técnica conhecida e eficiente para a construção de vetores linearmente independentes.

Nesse contexto, apresentaremos uma técnica para caracterizar a $(\alpha, \mathfrak{c})$ -espaçabilidade do conjunto $\ell_p \setminus \bigcup_{0 < q < p} \ell_q$ para $\alpha < \mathfrak{c}$, com $p > 0$, ilustrando aspectos técnicos da nova abordagem e que podem ser aplicados em diversos contextos. Só para destacar, em [46,

Corollary 1.6], os autores provaram que o conjunto $\ell_p \setminus \bigcup_{0 < q < p} \ell_q$ é $\mathfrak{c}$ -espaçável, usando uma propriedade relacionada a espaços de seqüências invariantes.

2.2 $(\alpha, \mathfrak{c})$ -espaçabilidade em espaços de seqüências

Inicialmente, apresentaremos um simples exemplo de um vetor em $\ell_p \setminus \bigcup_{0 < q < p} \ell_q$ com $p > 0$, que aparentemente não é comum na literatura. Outra abordagem usando o Teorema de Banach Steinhaus pode ser encontrada em [21, Proposition 3.2.4].

Considere $\lceil x \rceil$ o menor inteiro maior ou igual a x . Seja $\mathbb{N} = \bigcup_{j=1}^{\infty} \mathbb{N}_j$, com $\mathbb{N}_i \cap \mathbb{N}_j = \emptyset$ para $i \neq j$ e $\text{card}(\mathbb{N}_k) = \aleph_0$ para todo $k \in (\lceil 1/p \rceil, \infty)$. Denotemos

$$\mathbb{N}_k := \{k_1, k_2, \dots\}$$

com $k_r < k_s$ sempre que $r < s$ e definamos

$$x_j^{(k)} := \begin{cases} 0, & \text{se } j \notin \mathbb{N}_k \\ r^{\frac{-1}{(p-\frac{1}{k})}}, & \text{se } j = k_r \in \mathbb{N}_k \end{cases}.$$

Note que $(x_j^{(k)})_{j=1}^{\infty} \in \ell_p \setminus \ell_{p-\frac{1}{k}}$ para todo k . De fato, por um lado, como $\frac{p}{p-\frac{1}{k}} > 1$,

$$\sum_{j=1}^{\infty} |x_j^{(k)}|^p = \sum_{j=k_r \in \mathbb{N}_k} |x_j^{(k)}|^p = \sum_{j=k_r \in \mathbb{N}_k} \left| \frac{1}{r^{\frac{1}{(p-\frac{1}{k})}}} \right|^p = \sum_r \frac{1}{r^{\frac{p}{(p-\frac{1}{k})}}} < \infty.$$

Por outro lado,

$$\sum_{j=1}^{\infty} |x_j^{(k)}|^{p-\frac{1}{k}} = \sum_{j=k_r \in \mathbb{N}_k} \left| \frac{1}{r^{\frac{1}{(p-\frac{1}{k})}}} \right|^{p-\frac{1}{k}} = \sum_r \frac{1}{r^{\frac{p-\frac{1}{k}}{(p-\frac{1}{k})}}} = \sum_r \frac{1}{r} = \infty.$$

Para cada $j \in \mathbb{N}$, existe um k tal que $j \in \mathbb{N}_k$. Assim, a seqüência $(y_j)_{j \in \mathbb{N}}$ definida por

$$y_j := 2^{-k} x_j^{(k)} \left(\sum_{l=1}^{\infty} |x_l^{(k)}|^p \right)^{-1},$$

pertence a $\ell_p \setminus \bigcup_{0 < q < p} \ell_q$. De fato,

$$\sum_{j=1}^{\infty} |y_j|^p = \sum_{k=\lceil 1/p \rceil}^{\infty} \sum_{j \in \mathbb{N}_k} |y_j|^p$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{k=\lceil 1/p \rceil}^{\infty} \sum_{j \in \mathbb{N}_k} \left(\frac{|x_j^{(k)}|}{2^k \left\| (x_l^{(k)})_{l=1}^{\infty} \right\|_p} \right)^p \\
 &= \sum_{k=\lceil 1/p \rceil}^{\infty} \frac{1}{2^{kp} \left\| (x_l^{(k)})_{l=1}^{\infty} \right\|_p^p} \sum_{j \in \mathbb{N}_k} |x_j^{(k)}|^p \\
 &= \sum_{k=\lceil 1/p \rceil}^{\infty} \frac{1}{2^{kp}} < \infty.
 \end{aligned}$$

Além disso, para $0 < q = p - \frac{1}{k} < p$,

$$\begin{aligned}
 \sum_{j=1}^{\infty} |y_j|^q &= \sum_{k=\lceil 1/p \rceil}^{\infty} \sum_{j \in \mathbb{N}_k} |y_j|^q \\
 &= \sum_{k=\lceil 1/p \rceil}^{\infty} \sum_{j \in \mathbb{N}_k} \left(\frac{|x_j^{(k)}|}{2^k \left\| (x_l^{(k)})_{l=1}^{\infty} \right\|_p} \right)^q \\
 &= \sum_{k=\lceil 1/p \rceil}^{\infty} \frac{1}{2^{kq} \left\| (x_l^{(k)})_{l=1}^{\infty} \right\|_p^q} \sum_{j \in \mathbb{N}_k} |x_j^{(k)}|^q \\
 &= \sum_{k=\lceil 1/p \rceil}^{\infty} \frac{1}{2^{kq} \left\| (x_l^{(k)})_{l=1}^{\infty} \right\|_p^q} \cdot \infty \\
 &= \infty.
 \end{aligned}$$

O Lema a seguir revelar-se-á fundamental na prova do Teorema 2.3. Sua eficácia reside no fato de provar a independência linear dos vetores no espaço e, dessa maneira, assegurar que o subespaço gerado por tais vetores seja o subespaço desejado para a obtenção do resultado de lineabilidade.

Lema 2.2. Seja $p > 0$ e $x_1, \dots, x_n$ vetores linearmente independentes de ℓ_p . Então existe um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que as primeiras n_0 coordenadas de $x_1, \dots, x_n$ formam um conjunto linearmente independente em $\mathbb{K}^{n_0}$.

Demonstração. Suponha que, para cada $j \in \mathbb{N}$, existem $a_{1j}, \dots, a_{nj} \in \mathbb{K}$, todos não iguais a zero, tais que

$$a_{1j}x_1 + \dots + a_{nj}x_n = (0, \dots, 0, \lambda_{j+1}, \lambda_{j+2}, \dots). \quad (2.3)$$

Podemos supor que $\|\alpha_j\|_1 = 1$, onde $\alpha_j = (a_{1j}, \dots, a_{nj}) \in \mathbb{K}^n$, para todo $j \in \mathbb{N}$. Como $(\alpha_j)_{j=1}^{\infty}$ é limitada, existe uma subsequência convergente $\alpha_{j_k} \rightarrow \alpha = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n$. Daí,

2. (α, β) -Lineabilidade: uma noção mais restritiva de lineabilidade

pela continuidade da norma,

$$\|\alpha\|_1 = \left\| \lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_{j_k} \right\|_1 = \lim_{k \rightarrow \infty} \|\alpha_{j_k}\|_1 = 1,$$

ou seja, $\alpha \neq 0$. Então

$$a_{1j_k}x_1 + \cdots + a_{nj_k}x_n \rightarrow a_1x_1 + \cdots + a_nx_n, \quad k \rightarrow \infty. \quad (2.4)$$

Por outro lado, seja $\pi_m : \ell_p \rightarrow \mathbb{K}$ a m -ésima projeção canônica. Então de (2.3) segue que

$$\pi_m(a_{1j_k}x_1 + \cdots + a_{nj_k}x_n) \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty, \text{ para todo } m \in \mathbb{N}.$$

Como convergência em (2.4) implica convergência coordenada a coordenada, segue que

$$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0.$$

Como $\{x_1, \dots, x_n\}$ é linearmente independente, concluímos que $a_1 = \cdots = a_n = 0$. Uma contradição, pois $\alpha \neq 0$. Portanto, deve existir $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\left\{ \left(x_j^{(1)} \right)_{j=1}^{n_0}, \dots, \left(x_j^{(n)} \right)_{j=1}^{n_0} \right\}$ é linearmente independente em $\mathbb{K}^{n_0}$. $\square$

Com o auxílio do Lema anterior e considerando a Hipótese do Continuum, caracterizaremos a $(\alpha, \mathfrak{c})$ -espaçabilidade do conjunto $\ell_p \setminus \bigcup_{0 < q < p} \ell_q$ para $\alpha < \mathfrak{c}$.

Teorema 2.3. *Para todo $p > 0$ o conjunto $\ell_p \setminus \bigcup_{0 < q < p} \ell_q$ é $(\alpha, \mathfrak{c})$ -espaçável em ℓ_p se, e somente se, $\alpha < \aleph_0$.*

Demonstração. O caso $\alpha = \aleph_0$ é consequência do seguinte exemplo: escrevamos $\mathbb{N} = \bigcup_{j=1}^{\infty} \mathbb{N}_j$. Seja

$$W := \text{span} \left\{ x^{(j)} : j \in \mathbb{N} \right\}$$

com

$$\bullet x^{(1)} = \left(1, \left(x_j^{(1)} \right)_{j>1} \right) \text{ e}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_j^{(1)} = 0, \text{ se } j \notin \mathbb{N}_1 \\ \left(x_j^{(1)} \right)_{j \in \mathbb{N}_1(j>1)} \in \ell_p \setminus \bigcup_{0 < q < p} \ell_q \end{array} \right.$$

com

$$\left\| \left(x_j^{(1)} \right)_{j \in \mathbb{N}_1(j>1)} \right\|_p = 2^{-1}.$$

$$\bullet x^{(2)} = \left(1, \left(x_j^{(2)} \right)_{j>1} \right) \text{ e}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_j^{(2)} = 0, \text{ se } j \notin \mathbb{N}_2 \\ \left(x_j^{(2)} \right)_{j \in \mathbb{N}_2(j>1)} \in \ell_p \setminus \bigcup_{0<q<p} \ell_q \end{array} \right.$$

satisfazendo

$$\left\| \left(x_j^{(2)} \right)_{j \in \mathbb{N}_2(j>1)} \right\|_p = 2^{-2}$$

e assim indutivamente. Note que $(W \setminus \{0\}) \subset \ell_p \setminus \bigcup_{0<q<p} \ell_q$ e $\dim W = \aleph_0$. Além disso, não existe subespaço fechado W_1 de ℓ_p tal que $W \subset W_1$ e $(W_1 \setminus \{0\}) \subset \ell_p \setminus \bigcup_{0<q<p} \ell_q$. De fato, observe que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left\| \left(x_j^{(k)} \right)_{j \in \mathbb{N}} - e_1 \right\|_p = \lim_{k \rightarrow \infty} \left\| \left(0, x_j^{(k)} \right)_{j \in \mathbb{N}_k(j>1)} \right\|_p = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2^k} = 0,$$

ou seja, $e_1 \in \overline{W}$. Mas, $e_1 \in \ell_q$ para todo $q > 0$. Logo, $e_1 \notin \ell_p \setminus \bigcup_{0<q<p} \ell_q$. Daí,

$$W \subset \overline{W} \subset W_1 \not\subset \ell_p \setminus \bigcup_{0<q<p} \ell_q.$$

Portanto, não temos o caso $(\aleph_0, \mathfrak{c})$ -espaçável. Por simplicidade, provaremos o caso $\alpha = 3$. O caso geral segue similarmente. Considere $x = (x_j)_{j=1}^\infty$, $y = (y_j)_{j=1}^\infty$ e $z = (z_j)_{j=1}^\infty$ sequências linearmente independentes e

$$W := \text{span} \{x, y, z\} \subset \left(\ell_p \setminus \bigcup_{0<q<p} \ell_q \right) \cup \{0\}$$

um subespaço vetorial de ℓ_p com dimensão 3. Como $(x_j)_{j=1}^\infty$, $(y_j)_{j=1}^\infty$ e $(z_j)_{j=1}^\infty$ são linearmente independentes, o Lema 2.2 garante a existência de um número natural n_0 , tal que as primeiras n_0 coordenadas de $(x_j)_{j=1}^\infty$, $(y_j)_{j=1}^\infty$ e $(z_j)_{j=1}^\infty$ formam um conjunto linearmente independente em $\mathbb{K}^{n_0}$. Usando que, em uma série convergente o limite da sequência correspondente das parcelas é zero, é fácil obter um conjunto infinito $\mathbb{N}_1 := \{\alpha_1 < \alpha_2 < \dots\}$ de inteiros positivos, tal que

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j \notin \mathbb{N}_1} x_j e_j \in \ell_p \setminus \bigcup_{0<q<p} \ell_q \\ \sum_{j \notin \mathbb{N}_1} y_j e_j \in \ell_p \setminus \bigcup_{0<q<p} \ell_q \\ \sum_{j \notin \mathbb{N}_1} z_j e_j \in \ell_p \setminus \bigcup_{0<q<p} \ell_q \end{array} \right.$$

e

$$\max\{|x_{\alpha_l}|, |y_{\alpha_l}|, |z_{\alpha_l}|\} < \frac{1}{2^l}, \quad (2.5)$$

para todo $l \in \mathbb{N}$. Note que $\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}_1$ também é infinito. Assim, considere o conjunto

$$\mathbb{O} := \mathbb{N}_1 \setminus \{1, \dots, n_0\}. \quad (2.6)$$

Note que

$$\begin{cases} \sum_{j \notin \mathbb{O}} x_j e_j \in \ell_p \setminus \bigcup_{0 < q < p} \ell_q \\ \sum_{j \notin \mathbb{O}} y_j e_j \in \ell_p \setminus \bigcup_{0 < q < p} \ell_q \\ \sum_{j \notin \mathbb{O}} z_j e_j \in \ell_p \setminus \bigcup_{0 < q < p} \ell_q \end{cases} . \quad (2.7)$$

Escreva

$$\mathbb{O} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathbb{O}_i$$

com $\mathbb{O}_i := \{i_1 < i_2 < \dots\}$ e $\mathbb{O}_i \cap \mathbb{O}_j = \emptyset$ para todo $i \neq j$. Note que $\mathbb{N} \setminus \mathbb{O}$ é infinito e considere $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ injetiva, tal que

$$\mathbb{N} \setminus \mathbb{O} := \{f(1), f(2), \dots\}$$

e defina para todo i , o vetor

$$\varepsilon_i := \sum_{j=1}^{\infty} x_{f(j)} e_{i_j} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}.$$

Note que $\varepsilon_i \in \ell_p$ para todo i . Agora, defina $\tilde{p} = 1$ se $p \geq 1$ e $\tilde{p} = p$ se $0 < p < 1$. Para $(a_i)_{i=1}^{\infty} \in \ell_{\tilde{p}}$, temos

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|a_i \varepsilon_i\|_p^{\tilde{p}} = \sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^{\tilde{p}} \|\varepsilon_i\|_p^{\tilde{p}} \leq \|x\|_p^{\tilde{p}} \sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^{\tilde{p}} = \|x\|_p^{\tilde{p}} \|(a_i)_{i=1}^{\infty}\|_{\tilde{p}}^{\tilde{p}} < \infty.$$

Portanto, a série $\sum_{i=1}^{\infty} \|a_i \varepsilon_i\|_p^{\tilde{p}}$ é convergente. Como $\ell_{\tilde{p}}$ é completo, independente da escolha de p , isto é, Banach, se $p \geq 1$ ou p -Banach, se $0 < p < 1$, segue que a série $\sum_{i=1}^{\infty} a_i \varepsilon_i$ converge em ℓ_p (veja [21, Lemma 3.2.5]). Consequentemente, o operador

$$\begin{cases} T : \ell_{\tilde{p}} \longrightarrow \ell_p, \\ T((a_i)_{i=0}^{\infty}) = a_0 x + a_1 y + a_2 z + \sum_{i=3}^{\infty} a_i \varepsilon_i \end{cases}$$

2. (α, β) -Lineabilidade: uma noção mais restritiva de lineabilidade

está bem definido. É fácil observar que T é linear e injetivo. De fato, se

$$T((a_i)_{i=0}^\infty) = 0,$$

então

$$a_0x + a_1y + a_2z + \sum_{i=3}^{\infty} a_i \varepsilon_i = 0.$$

Em particular, como $\{1, \dots, n_0\} \in \mathbb{N} \setminus \mathbb{O}$, as n_0 primeiras coordenadas de ε_i são zero. Assim

$$a_0(x_j)_{j=1}^{n_0} + a_1(y_j)_{j=1}^{n_0} + a_2(z_j)_{j=1}^{n_0} = 0.$$

Como $\{(x_j)_{j=1}^{n_0}, (y_j)_{j=1}^{n_0}, (z_j)_{j=1}^{n_0}\}$ é linearmente independente em $\mathbb{K}^{n_0}$, segue que

$$a_0 = a_1 = a_2 = 0. \quad (2.8)$$

Daí

$$\sum_{i=3}^{\infty} a_i \varepsilon_i = 0.$$

Usando (2.8) e o fato de que os suportes dos vetores ε_i são disjuntos, concluímos que $a_i = 0$ para todo i . Note que $T((a_i)_{i=0}^\infty) \notin \ell_q$ para todo $0 < q < p$ e $(a_i)_{i=0}^\infty \neq 0$. De fato, seja i_0 tal que $a_{i_0} \neq 0$. Se $a_0 = a_1 = a_2 = 0$, temos

$$\|T((a_i)_{i=0}^\infty)\|_q = \left\| \sum_{i=3}^{\infty} a_i \varepsilon_i \right\|_q \geq |a_{i_0}| \|\varepsilon_{i_0}\|_q = \infty.$$

Se $a_i \neq 0$ para algum $i = 0, 1, 2$, como as coordenadas de ε_i pertencentes a $\mathbb{N} \setminus \mathbb{O}$ são zero, temos

$$\|T((a_i)_{i=0}^\infty)\|_q = \left\| a_0x + a_1y + a_2z + \sum_{i=3}^{\infty} a_i \varepsilon_i \right\|_q \geq \left\| (a_0x_j + a_1y_j + a_2z_j)_{j \in \mathbb{N} \setminus \mathbb{O}} \right\|_q.$$

Como $W := \text{span}\{x, y, z\} \subset (\ell_p \setminus \bigcup_{0 < q < p} \ell_q) \cup \{0\}$ segue que

$$\infty = \left\| (a_0x_j + a_1y_j + a_2z_j)_{j \in \mathbb{N}} \right\|_q^q = \left\| (a_0x_j + a_1y_j + a_2z_j)_{j \in \mathbb{O}} \right\|_q^q + \left\| (a_0x_j + a_1y_j + a_2z_j)_{j \in \mathbb{N} \setminus \mathbb{O}} \right\|_q^q$$

por (2.5) e (2.6) temos

$$\left\| (a_0x_j + a_1y_j + a_2z_j)_{j \in \mathbb{O}} \right\|_q^q < \infty.$$

Portanto

$$\left\| (a_0 x_j + a_1 y_j + a_2 z_j)_{j \in \mathbb{N} \setminus \mathbb{O}} \right\|_q^q = \infty. \quad (2.9)$$

Logo, $T((a_i)_{i=0}^\infty) \notin \ell_q$ para todo $0 < q < p$, ou seja

$$W \subset T(\ell_{\tilde{p}}) \setminus \{0\} \subset \left(\ell_p \setminus \bigcup_{0 < q < p} \ell_q \right) \cup \{0\}.$$

Consequentemente $\ell_p \setminus \bigcup_{0 < q < p} \ell_q$ é $(3, \mathfrak{c})$ -lineável. A $(\alpha, \mathfrak{c})$ -lineabilidade é análoga para todo $\alpha \in \mathbb{N}$. Resta-nos, portanto, provar a espaçabilidade. Note que $\overline{T(\ell_{\tilde{p}})}$ é um subespaço vetorial fechado $\mathfrak{c}$ -dimensional de ℓ_p . Provaremos que

$$\overline{T(\ell_{\tilde{p}})} \setminus \{0\} \subset \ell_p \setminus \bigcup_{0 < q < p} \ell_q.$$

Seja $w = (w_n)_{n=1}^\infty \in \overline{T(\ell_{\tilde{p}})}$, $w \neq 0$. Então existem seqüências $(a_i^{(k)})_{i=0}^\infty \in \ell_{\tilde{p}}$ ($k \in \mathbb{N}$) tais que $w = \lim_{k \rightarrow \infty} T\left(\left(a_i^{(k)}\right)_{i=0}^\infty\right)$ em ℓ_p . Note que, para cada $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} T\left(\left(a_i^{(k)}\right)_{i=0}^\infty\right) &= a_0^{(k)}x + a_1^{(k)}y + a_2^{(k)}z + \sum_{i=3}^\infty a_i^{(k)}\varepsilon_i \\ &= a_0^{(k)}x + a_1^{(k)}y + a_2^{(k)}z + \sum_{i=3}^\infty a_i^{(k)} \sum_{j=1}^\infty x_{f(j)}e_{i_j} \\ &= a_0^{(k)}x + a_1^{(k)}y + a_2^{(k)}z + \sum_{i=3}^\infty \sum_{j=1}^\infty a_i^{(k)} x_{f(j)}e_{i_j}. \end{aligned}$$

Como as coordenadas de ε_i pertencentes a $\mathbb{N} \setminus \mathbb{O}$ são zero, então as coordenadas de $\sum_{i=3}^\infty a_i^{(k)}\varepsilon_i$ pertencentes a $\mathbb{N} \setminus \mathbb{O}$ também são zero. Portanto, as coordenadas de $T\left(\left(a_i^{(k)}\right)_{i=0}^\infty\right)$ pertencentes a $\mathbb{N} \setminus \mathbb{O}$ são exatamente as coordenadas de $a_0^{(k)}x + a_1^{(k)}y + a_2^{(k)}z$ para todo k . Consequentemente o limite

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(a_0^{(k)}x_j + a_1^{(k)}y_j + a_2^{(k)}z_j \right)_{j \in \mathbb{N} \setminus \mathbb{O}}$$

existe em ℓ_p . Como $\{1, \dots, n_0\} \subset \mathbb{N} \setminus \mathbb{O}$, segue que $\left\{ (x_j)_{j \in \mathbb{N} \setminus \mathbb{O}}, (y_j)_{j \in \mathbb{N} \setminus \mathbb{O}}, (z_j)_{j \in \mathbb{N} \setminus \mathbb{O}} \right\}$ é linearmente independente. Logo, podemos reescrever o limite de forma única como

$$(ax_j + by_j + cz_j)_{j \in \mathbb{N} \setminus \mathbb{O}}.$$

2. (α, β) -Lineabilidade: uma noção mais restritiva de lineabilidade

Agora, considere um funcional linear em ℓ_p que aplica x_j em 1 e y_j e z_j em 0. Daí, claramente

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(a_0^{(k)} \right) = a.$$

De maneira análoga, obtemos

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(a_1^{(k)} \right) = b \quad \text{e} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \left(a_2^{(k)} \right) = c.$$

Assim,

$$w_j = \left(\lim_{k \rightarrow \infty} a_0^{(k)} \right) x_j + \left(\lim_{k \rightarrow \infty} a_1^{(k)} \right) y_j + \left(\lim_{k \rightarrow \infty} a_2^{(k)} \right) z_j$$

para todo inteiro positivo $j \in \mathbb{N} \setminus \mathbb{O}$. Primeiramente, suponha que $\lim_{k \rightarrow \infty} a_i^{(k)} = a_i \neq 0$, para algum $i = 0, 1, 2$. Nesse caso, por (2.9)

$$\|w\|_q^q \geq \sum_{j \in \mathbb{N} \setminus \mathbb{O}} |a_0 x_j + a_1 y_j + a_2 z_j|^q = \infty$$

e disso segue o resultado. Agora, suponha que $\lim_{k \rightarrow \infty} a_i^{(k)} = 0$ para todo $i = 0, 1, 2$. Nesse caso, $w_j = 0$ para todo $j \in \mathbb{N} \setminus \mathbb{O}$. Como $w \neq 0$, existe um $r \in \mathbb{O}$ tal que $w_r \neq 0$. Como $\mathbb{O} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathbb{O}_i$, existem únicos $m, t \in \mathbb{N}$ tais que $e_{mt} = e_r$. Daí, para cada $k \in \mathbb{N}$, a r -ésima coordenada de $T \left(\left(a_i^{(k)} \right)_{i=0}^{\infty} \right)$ é $a_0^{(k)} x_r + a_1^{(k)} y_r + a_2^{(k)} z_r + a_m^{(k)} x_{f(t)}$. Logo,

$$0 \neq w_r = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(a_0^{(k)} x_r + a_1^{(k)} y_r + a_2^{(k)} z_r + a_m^{(k)} x_{f(t)} \right) = \lim_{k \rightarrow \infty} a_m^{(k)} x_{f(t)} = x_{f(t)} \lim_{k \rightarrow \infty} a_m^{(k)}.$$

Segue, então, que $x_{f(t)} \neq 0$. Consequentemente, $\lim_{k \rightarrow \infty} \left| a_m^{(k)} \right| = \frac{|w_r|}{|x_{f(t)}|} \neq 0$. Para $j, k \in \mathbb{N}$, a m_j -ésima coordenada de $T \left(\left(a_i^{(k)} \right)_{i=0}^{\infty} \right)$ é

$$a_0^{(k)} x_{m_j} + a_1^{(k)} y_{m_j} + a_2^{(k)} z_{m_j} + a_m^{(k)} x_{f(j)}.$$

Definindo $\alpha_m = \frac{|w_r|}{|x_{f(t)}|}$,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| a_0^{(k)} x_{m_j} + a_1^{(k)} y_{m_j} + a_2^{(k)} z_{m_j} + a_m^{(k)} x_{f(j)} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| a_m^{(k)} x_{f(j)} \right| = |x_{f(j)}| \cdot \lim_{k \rightarrow \infty} \left| a_m^{(k)} \right| = \alpha_m |x_{f(j)}|$$

para $j \in \mathbb{N}$. Por outro lado, convergência coordenada a coordenada nos garante que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| a_0^{(k)} x_{m_j} + a_1^{(k)} y_{m_j} + a_2^{(k)} z_{m_j} + a_m^{(k)} x_{f(j)} \right| = |w_{m_j}|.$$

2. (α, β) -Lineabilidade: uma noção mais restritiva de lineabilidade

Logo, pela unicidade do limite, temos

$$|w_{m_j}| = \alpha_m |x_{f(j)}| \text{ para cada } j \in \mathbb{N}.$$

Usando (2.7) obtemos

$$\|w\|_q^q = \sum_{n=1}^{\infty} |w_n|^q \geq \sum_{j=1}^{\infty} |w_{m_j}|^q = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_m^q \cdot |x_{f(j)}|^q = \alpha_m^q \left\| (x_{f(j)})_{j=1}^{\infty} \right\|_q^q = \alpha_m^q \left\| (x_j)_{j \in \mathbb{N} \setminus \mathbb{O}} \right\|_q^q = \infty.$$

Portanto, $w \notin \bigcup_{0 < q < p} \ell_q$. Logo,

$$\overline{T(\ell_{\bar{p}})} \setminus \{0\} \subset \ell_p \setminus \bigcup_{0 < q < p} \ell_q$$

como desejávamos. Concluimos, assim, a $(3, \mathfrak{c})$ -espaçabilidade de $\ell_p \setminus \bigcup_{0 < q < p} \ell_q$. A $(\alpha, \mathfrak{c})$ -espaçabilidade é análoga para todo $\alpha < \aleph_0$.

□

Observação 2.1. Observe que, como a dimensão algébrica do ℓ_p é $\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}$ e considerando a Hipótese do Continuum, asseguramos que não existe um cardinal entre $\aleph_0$ e $2^{\aleph_0}$. Com isso, nesse cenário, todas as possibilidades são contempladas.

2.3 $(1, \mathfrak{c})$ -lineabilidade dos operadores lineares não injetivos

Lineabilidade e espaçabilidade têm sido investigadas em vários trabalhos relacionados à injetividade e sobrejetividade de operadores lineares como, por exemplo, [2, 23, 41, 75, 86]. Em [23, Corollary 3.4] e [23, Theorem 4.1] foram provados, respectivamente, a $\mathfrak{c}$ -espaçabilidade dos seguintes conjuntos:

Teorema 2.4. [23, Corollary 3.4] $I := \{T \in \mathcal{L}(c_0; c_0) : T \text{ é injetivo}\}.$

Teorema 2.5. [23, Corollary 3.4] $S := \{T \in \mathcal{L}(\ell_p; \ell_p) : T \text{ é sobrejetivo}\}, \text{ para } 1 \leq p \leq \infty.$

Nesta seção, provaremos um resultado nesse contexto. Mais precisamente, mostraremos a $(1, \mathfrak{c})$ -lineabilidade do conjunto dos operadores lineares limitados e não injetivos em espaços ℓ_p . É interessante mencionar que não conseguimos uma técnica para provar a $(1, \mathfrak{c})$ -lineabilidade do conjunto dos operadores lineares limitados e não sobrejetores em espaços ℓ_p .

Teorema 2.6. *Sejam $p, q \geq 1$ e $A := \{T \in \mathcal{L}(\ell_p; \ell_q) : T \text{ é não injetivo}\}$. Então, A é $(1, \mathfrak{c})$ -lineável.*

Demonstração. De fato, seja $T \in A \setminus \{0\}$ e considere W o subespaço gerado por T . Note que $\dim W = 1$ e $W \subset A \cup \{0\}$. Por hipótese, existem x, y em ℓ_p com $x \neq y$ tal que

$$T(x) = T(y). \quad (2.10)$$

Além disso, como $T \neq 0$, existe um $z \in \ell_p$ tal que $T(z) \neq 0$. Seja j_0 tal que $(Tz)_{j_0} \neq 0$. Consideremos uma sequência $(\mathbb{N}_k)_{k=1}^\infty$ de subconjuntos de $\mathbb{N}$ que são aos pares disjuntos com

$$\text{card}(\mathbb{N}_k) = \text{card}(\mathbb{N})$$

para todo k , e tal que $j_0 \notin \bigcup_{k=1}^\infty \mathbb{N}_k$. Denote para cada $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{N}_k := \{k_1 < k_2 < \dots\}.$$

Para cada $k \in \mathbb{N}$, defina a sequência de operadores lineares $T_k : \ell_p \longrightarrow \ell_q$ da forma

$$\begin{cases} (T_k(x))_j = 0, & \text{se } j \notin \mathbb{N}_k \\ (T_k(x))_j = (T(x))_{k_i} & \text{se } j = k_i \in \mathbb{N}_k. \end{cases}$$

Note que, como $T(x) = T(y) \Rightarrow T_k(x) = T_k(y)$. Concluimos, então, que $T_k \in A$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Além disso, o conjunto $\{T, T_k : k \in \mathbb{N}\}$ é linearmente independente. De fato, sejam $a, a_1, \dots, a_k$ escalares e suponha que

$$aT + a_1T_1 + \dots + a_kT_k = 0.$$

Daí

$$aT(z) + a_1T_1(z) + \dots + a_kT_k(z) = 0.$$

Em particular

$$a(Tz)_{j_0} + a_1(T_1z)_{j_0} + \dots + a_k(T_kz)_{j_0} = 0.$$

Como $j_0 \notin \bigcup_{k=1}^\infty \mathbb{N}_k$, segue que $(T_1z)_{j_0} = \dots = (T_kz)_{j_0} = 0$. Logo, $a(Tz)_{j_0} = 0$ e portanto $a = 0$. Consequentemente

$$a_1T_1 + \dots + a_kT_k = 0.$$

2. (α, β) -Lineabilidade: uma noção mais restritiva de lineabilidade

Como os operadores T_k possuem suportes disjuntos, o conjunto $\{T_1, \dots, T_k\}$ é linearmente independente. Logo,

$$a_1 = \dots = a_k = 0.$$

Agora considere o operador linear

$$\Psi : \ell_1 \longrightarrow \mathcal{L}(\ell_p; \ell_q)$$

dado por

$$\Psi((a_k)_{k=1}^\infty) = a_1 T + \sum_{j=2}^\infty a_j T_{j-1}.$$

Note que Ψ está bem definido, pois

$$\begin{aligned} \|\Psi((a_k)_{k=1}^\infty)\|_{\mathcal{L}(\ell_p; \ell_q)} &= \left\| a_1 T + \sum_{j=2}^\infty a_j T_{j-1} \right\|_{\mathcal{L}(\ell_p; \ell_q)} \\ &\leq \|a_1 T\|_{\mathcal{L}(\ell_p; \ell_q)} + \left\| \sum_{j=2}^\infty a_j T_{j-1} \right\|_{\mathcal{L}(\ell_p; \ell_q)} \\ &\leq |a_1| \|T\|_{\mathcal{L}(\ell_p; \ell_q)} + \sum_{j=2}^\infty |a_j| \|T_{j-1}\|_{\mathcal{L}(\ell_p; \ell_q)} \\ &\leq \sum_{j=1}^\infty |a_j| \cdot \|T\|_{\mathcal{L}(\ell_p; \ell_q)} \\ &< \infty. \end{aligned}$$

Além disso, observe que Ψ é injetivo. De fato, se

$$\Psi((a_k)_{k=1}^\infty) = 0,$$

então

$$a_1 T + \sum_{j=2}^\infty a_j T_{j-1} = 0.$$

Em particular, para $j_0 \notin \bigcup_{k=1}^\infty \mathbb{N}_k$ tal que $(Tz)_{j_0} \neq 0$, temos

$$\sum_{j=2}^\infty a_j (T_{j-1}(z))_{j_0} = 0.$$

2. (α, β) -Lineabilidade: uma noção mais restritiva de lineabilidade

Logo $a_1 (Tz)_{j_0} = 0$, donde segue que $a_1 = 0$. Daí

$$\sum_{j=2}^{\infty} a_j T_{j-1} = 0.$$

Recordando que os suportes dos operadores T_j são disjuntos, segue que $a_j = 0$ para todo j . Portanto, Ψ é injetivo e, nesse caso, $\Psi(\ell_1)$ é subespaço $\mathfrak{c}$ -dimensional de $\mathcal{L}(\ell_p; \ell_q)$. Assim, considere $(a_k)_{k=1}^{\infty} \in \ell_1$ com $a_k \neq 0$ para algum $k \in \mathbb{N}$. De (2.10), temos

$$\begin{aligned} \Psi((a_k)_{k=1}^{\infty})(x) &= a_1 T(x) + a_2 T_1(x) + a_3 T_2(x) + \cdots \\ &= a_1 T(y) + a_2 T_1(y) + a_3 T_2(y) + \cdots \\ &= \Psi((a_k)_{k=1}^{\infty})(y), \end{aligned}$$

e $\Psi((a_k)_{k=1}^{\infty})$ é não injetivo. Logo, $\Psi(\ell_1) \setminus \{0\} \subset A$. Além disso,

$$W \subset \Psi(\ell_1) \setminus \{0\} \subset A.$$

Portanto, A é $(1, \mathfrak{c})$ -lineável. □

Recentemente, em [65], os autores obtiveram generalizações dos resultados acima considerando uma classe mais geral de espaços de seqüências.

2.4 $(1, \mathfrak{c})$ -espaçabilidade em espaços L_p .

Recordemos que para $p > 0$, $L_p[0, 1]$ denota o espaço das classes de equivalência das funções mensuráveis $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{K}$ equipado com a norma (p -norma se $0 < p < 1$) definida por

$$\|f\|_p := \left(\int_0^1 |f(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}.$$

O próximo resultado fornece uma caracterização da $(1, \mathfrak{c})$ -espaçabilidade do conjunto $L_p[0, 1] \setminus \bigcup_{q > p} L_q[0, 1]$ em $L_p[0, 1]$. Como relatado anteriormente, investigar essa noção mais refinada de lineabilidade em espaços de seqüências é um procedimento com mais técnicas consagradas. Quando mudamos de ambiente, os argumentos tornam-se mais apurados e dificuldades surgem. Em [48], os autores provaram que o conjunto $L_p[0, 1] \setminus \bigcup_{q > p} L_q[0, 1]$ é $\mathfrak{c}$ -espaçável em $L_p[0, 1]$. Entretanto, a abordagem utilizada não é suficiente para garantir que $L_p[0, 1] \setminus \bigcup_{q > p} L_q[0, 1]$ é $(\alpha, \mathfrak{c})$ -espaçável para algum cardinal $\alpha > 0$. Provaremos que o resultado é verdadeiro para $\alpha = 1$. O caso $1 < \alpha < \mathfrak{c}$, até nosso conhecimento atual,

2. (α, β) -Lineabilidade: uma noção mais restritiva de lineabilidade

está sem resposta. Em termos de notação, para qualquer $X \subset [0, 1]$, denotamos a função característica de X em $[0, 1]$ por χ_X . Uma observação pertinente é que, adaptando as ideias da seção anterior, é possível construir uma função $f \in L_p[0, 1] \setminus \bigcup_{q>p} L_q[0, 1]$. Para tornar o texto mais autossuficiente, recordaremos alguns fatos de Medida e Integração que serão fundamentais para a prova do resultado.

Teorema 2.7. *Seja $(X, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida e $\{f_i\}$ e f funções mensuráveis tais que $f_i \rightarrow f$ em medida. Então existe uma subsequência $\{f_{i_j}\}$ tal que*

$$f_{i_j}(x) \xrightarrow{j \rightarrow \infty} f(x) \quad \mu \text{ a.e.},$$

com $x \in X$.

Para detalhes da prova, veja [125, Theorem 146.2].

Observação 2.2. Se uma sequência $(f_n)_{n=1}^\infty$ converge em L_p para uma função f , e uma subsequência de $(f_n)_{n=1}^\infty$ converge em L_p para uma função g , então $f = g$ a.e., (veja [26, p. 89]).

Corolário 2.8. [72, Corollary 2.32] Se $f_n \rightarrow f$ em L_1 , então existe uma subsequência $(f_{n_j})_{j=1}^\infty$ tal que $f_{n_j} \rightarrow f$ a.e.

Teorema 2.9. $L_p[0, 1] \setminus \bigcup_{q>p} L_q[0, 1]$ é $(1, \mathfrak{c})$ -espaçável em $L_p[0, 1]$ para todo $p > 0$.

Demonstração. Seja $f \in L_p[0, 1] \setminus \bigcup_{q>p} L_q[0, 1]$. Defina

$$\tilde{f} := f\chi_{[0, 1/2]} \text{ e } \tilde{\tilde{f}} := f\chi_{[1/2, 1]}.$$

Note que $\tilde{f}$ ou $\tilde{\tilde{f}} \in L_p[0, 1] \setminus \bigcup_{q>p} L_q[0, 1]$.

Sem perda de generalidade, assumiremos que $\tilde{f} \in L_p[0, 1] \setminus \bigcup_{q>p} L_q[0, 1]$. Escreva $[1/2, 1]$ como uma união de intervalos disjuntos $I_n = [a_n, b_n)$. Note que, para todo $n \in \mathbb{N}$ e $x \in I_n$, existe um único $t_{x,n} \in [0, 1)$ tal que

$$x = (1 - t_{x,n})a_n + t_{x,n}b_n.$$

2. (α, β) -Lineabilidade: uma noção mais restritiva de lineabilidade

Agora considere uma sequência de funções $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f_n(x) := \begin{cases} \tilde{f}(t_{x,n}), & \text{se } x \in I_n \\ 0, & \text{se } x \notin I_n \end{cases}.$$

Note que $f_n \in L_p$ pois, para todo $n \in \mathbb{N}$

$$\|f_n\|_{L_p} \leq \|\tilde{f}\|_{L_p}.$$

Defina $\tilde{p} = 1$ se $p \geq 1$ e $\tilde{p} = p$ se $0 < p < 1$. Para $(a_i)_{i=1}^\infty \in \ell_{\tilde{p}}$,

$$\sum_{i=1}^\infty \|a_i f_i\|_p^{\tilde{p}} = \sum_{i=1}^\infty |a_i|^{\tilde{p}} \|f_i\|_p^{\tilde{p}} \leq \|\tilde{f}\|_p^{\tilde{p}} \sum_{i=1}^\infty |a_i|^{\tilde{p}} = \|\tilde{f}\|_p^{\tilde{p}} \|(a_i)_{i=1}^\infty\|_{\tilde{p}}^{\tilde{p}} < \infty.$$

Portanto, a série $\sum_{i=1}^\infty \|a_i f_i\|_p^{\tilde{p}} < \infty$ e como $L_p[0, 1]$ é Banach (p -Banach se $0 < p < 1$), concluímos que a série $\sum_{i=1}^\infty a_i f_i$ converge em $L_p[0, 1]$. Assim, o operador

$$T : \ell_{\tilde{p}} \rightarrow L_p[0, 1], \quad T((a_i)_{i=0}^\infty) = a_0 f + \sum_{i=1}^\infty a_i f_i$$

está bem definido. Além disso, note que T é linear e injetivo. De fato, se

$$T((a_i)_{i=0}^\infty) = 0,$$

então

$$a_0 f + \sum_{i=1}^\infty a_i f_i = 0.$$

Em particular, escolhendo $x \in [0, 1/2]$, segue que

$$a_0 f(x) = 0 \text{ a.e.}$$

Sendo f não nula em $[0, 1/2]$, podemos escolher x de modo que $f(x) \neq 0$. Assim, $a_0 = 0$.

Logo

$$\sum_{i=1}^\infty a_i f_i = 0.$$

Como as funções f_i possuem suportes disjuntos para todo i , segue que $a_i = 0$ para todo i .

Observe que $T((a_i)_{i=0}^\infty) \notin L_q[0, 1]$ para todo $q > p > 0$ e $(a_i)_{i=0}^\infty \neq 0$. De fato, seja i_0 tal que

2. (α, β) -Lineabilidade: uma noção mais restritiva de lineabilidade

$a_{i_0} \neq 0$. Se $a_0 = 0$, temos

$$\|T((a_i)_{i=0}^\infty)\|_q = \left\| \sum_{i=1}^\infty a_i f_i \right\|_q \geq |a_{i_0}| \|f_{i_0}\|_q = \infty.$$

Se $a_0 \neq 0$, temos

$$\|T((a_i)_{i=0}^\infty)\|_q = \left\| a_0 f + \sum_{i=1}^\infty a_i f_i \right\|_q \geq |a_0| \|f\chi_{[0,1/2]}\|_q = \infty.$$

Assim, $T(\ell_{\widehat{p}}) \setminus \{0\} \subset L_p[0,1] \setminus \bigcup_{q>p} L_q[0,1]$. Consequentemente, $\overline{T(\ell_{\widehat{p}})}$ é um subespaço fechado $\mathfrak{c}$ -dimensional de $L_p[0,1]$. Para finalizarmos a prova, resta-nos atestar que

$$\overline{T(\ell_{\widehat{p}})} \setminus \{0\} \subset L_p[0,1] \setminus \bigcup_{q>p} L_q[0,1].$$

De fato, seja $g \in \overline{T(\ell_{\widehat{p}})} \setminus \{0\}$. Logo, $g \neq 0$ a.e., ou seja, o conjunto $A = \{x \in [0,1] : g(x) \neq 0\}$ tem medida positiva. Considere $(a_i^{(k)})_{i=0}^\infty \in \ell_{\widehat{p}}$, $k \in \mathbb{N}$ tal que $g = \lim_{k \rightarrow \infty} T((a_i^{(k)})_{i=0}^\infty)$ em $L_p[0,1]$. Pela definição do operador T , temos

$$T((a_i^{(k)})_{i=0}^\infty) = a_0^{(k)} f + \sum_{i=1}^\infty a_i^{(k)} f_i \xrightarrow{k \rightarrow \infty} g \text{ em } L_p[0,1].$$

Em particular,

$$T((a_i^{(k)})_{i=0}^\infty) \chi_{[0,1/2]} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} g \chi_{[0,1/2]} \text{ em } L_p[0,1].$$

Como f_i é nula em $[0,1/2]$ para todo i , temos

$$a_0^{(k)} \widetilde{f} = T((a_i^{(k)})_{i=0}^\infty) \chi_{[0,1/2]} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} g \chi_{[0,1/2]} \text{ em } L_p[0,1]. \quad (2.11)$$

Por outro lado, a convergência em $L_p[0,1]$ dada em (2.11) nos garante que existe uma subsequência $(a_0^{(k_j)} \widetilde{f})_{j=1}^\infty$ tal que

$$a_0^{(k_j)} \widetilde{f}(x) \longrightarrow g \chi_{[0,1/2]}(x) \text{ a.e., quando } j \rightarrow \infty.$$

De fato, basta usar o fato de que convergência em L_p implica convergência em medida e usar o Teorema 2.7.

2. (α, β) -Lineabilidade: uma noção mais restritiva de lineabilidade

Como $\tilde{f}$ é não-nula a.e., existe $x_0 \in [0, 1/2]$ tal que $\tilde{f}(x_0) \neq 0$ e

$$a_0^{(k_j)} \tilde{f}(x_0) \longrightarrow g\chi_{[0,1/2]}(x_0) \text{ quando } j \rightarrow \infty.$$

Daí, $\lim_{j \rightarrow \infty} a_0^{(k_j)}$ existe uma vez que

$$a_0^{(k_j)} \longrightarrow \frac{g\chi_{[0,1/2]}(x_0)}{\tilde{f}(x_0)} \text{ quando } j \rightarrow \infty.$$

Pelas propriedades de limite, asseguramos que

$$a_0^{(k_j)} \tilde{f} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \alpha \tilde{f} \text{ em } L_p[0, 1], \quad (2.12)$$

onde $\alpha = \lim_{j \rightarrow \infty} a_0^{(k_j)}$. De (2.11) e (2.12), usando a Observação 2.2 temos

$$g\chi_{[0,1/2]} = \alpha \tilde{f} \text{ a.e.}$$

Se $\alpha \neq 0$, então

$$\|g\|_q^q = \int_0^1 |g(t)|^q dt \geq \int_0^{\frac{1}{2}} |g(t)|^q dt = \alpha^q \|f\chi_{[0,1/2]}\|_q^q = \infty,$$

provando que $g \notin L_q[0, 1]$. Se $\alpha = 0$, então $g\chi_{[0,1/2]} = 0$ quase-sempre. Assim defina

$$\tilde{A} := \{x \in [1/2, 1] : g(x) \neq 0\}.$$

Como A tem medida positiva e $g\chi_{[0,1/2]} = 0$, então $\tilde{A}$ tem medida positiva. Como $g = \lim_{k \rightarrow \infty} T\left(\left(a_i^{(k)}\right)_{i=0}^\infty\right)$ em L_p , então

$$\left\| \left(a_0^{(k)} f + \sum_{n=1}^\infty a_n^{(k)} f_n - g \right) \chi_{[1/2,1]} \right\|_p \longrightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty.$$

Em particular, usando o Corolário 2.8 (também vale para L_p), existe uma subsequência

$$\left(\left(a_0^{(k_j)} f + \sum_{n=1}^\infty a_n^{(k_j)} f_n \right) \chi_{[1/2,1]} \right)_{j=1}^\infty$$

tal que

$$\left(a_0^{(k_j)} f(x) + \sum_{n=1}^\infty a_n^{(k_j)} f_n(x) \right) \chi_{[1/2,1]}(x) \longrightarrow g(x) \chi_{[1/2,1]}(x) \text{ a.e., } j \rightarrow \infty.$$

2. (α, β) -Lineabilidade: uma noção mais restritiva de lineabilidade

Consequentemente, o conjunto $B^c := [1/2, 1] \setminus B$, onde $B = \{x \in [1/2, 1] : \text{o limite acima existe}\}$, tem medida zero. Note que

$$\tilde{A} = (B \cap \tilde{A}) \cup (B^c \cap \tilde{A}).$$

Como $B^c \cap \tilde{A}$ tem medida nula e $\tilde{A}$ possui medida positiva, garantimos que $B \cap \tilde{A}$ tem medida positiva. Seja

$$C = \{x \in [0, 1/2] : f(x) = 0\}.$$

Daí, como $\tilde{f} := f\chi_{[0, 1/2]} \in L_p[0, 1] \setminus \bigcup_{q>p} L_q[0, 1]$ segue que C tem medida nula. Sendo cada f_n uma reprodução da f no intervalo I_n , segue que $C_n = \{x \in I_n : f_n(x) = 0\}$ tem medida nula para todo $n \in \mathbb{N}$. Além disso,

$$B \cap \tilde{A} = (B \cap \tilde{A} \cap C_n) \cup (B \cap \tilde{A} \cap (I_n \setminus C_n)).$$

Como $B \cap \tilde{A} \cap C_n$ tem medida nula, então $B \cap \tilde{A} \cap (I_n \setminus C_n)$ possui medida positiva para cada $n \in \mathbb{N}$. Portanto, fixado $r \in \mathbb{N}$, podemos escolher $x_0 \in B \cap \tilde{A} \cap (I_r \setminus C_r)$ tal que $g(x_0) \neq 0$, $f_r(x_0) \neq 0$ e

$$a_0^{(k_j)} f(x_0) + a_r^{(k_j)} f_r(x_0) = a_0^{(k_j)} f(x_0) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(k_j)} f_n(x_0) \longrightarrow g(x_0) \text{ quando } j \rightarrow \infty.$$

Como $\lim_{j \rightarrow \infty} a_0^{(k_j)} = \alpha = 0$, obtemos

$$\lim_{j \rightarrow \infty} a_r^{(k_j)} = \frac{g(x_0)}{f_r(x_0)} = \eta \neq 0.$$

Além disso, como

$$f_r \chi_{I_r}(x) a_r^{(k_j)} \longrightarrow g \chi_{I_r}(x) \text{ a.e., } j \rightarrow \infty,$$

pela unicidade do limite garantimos que

$$g \chi_{I_r} = \eta f_r \chi_{I_r} \text{ a.e.,}$$

e isso garante que $g \chi_{I_r} \notin L_q[0, 1]$ e consequentemente $g \notin L_q[0, 1]$ para todo $q > p$, pois

$$\begin{aligned} \|g\|_q^q &= \int_0^1 |g(t)|^q dt \geq \int_{I_r} |g(t)|^q dt \\ &= \int_{I_r} |\eta f_r(t)|^q dt \end{aligned}$$

2. (α, β) -Lineabilidade: uma noção mais restritiva de lineabilidade

$$\begin{aligned} &= |\eta|^q \int_{I_r} |f_r(t)|^q dt \\ &= |\eta|^q \|f_r \chi_{I_r}\|_q^q = \infty. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\overline{T(\ell_{\tilde{p}})} \setminus \{0\} \subset L_p[0, 1] \setminus \bigcup_{q > p} L_q[0, 1]$$

donde segue o resultado. □

Lineabilidade e Curvas de Peano

Motivados por resultados obtidos por Albuquerque et al., em [4], no presente capítulo, aplicamos a técnica de lineabilidade apresentada anteriormente e investigamos a presença de estruturas lineares no âmbito de aplicações contínuas e sobrejetivas, em espaços euclidianos e numa classe particular de espaços topológicos, os espaços σ -Peano. As ideias desta etapa fazem parte do *preprint*:

- *N. G. Albuquerque and D. Tomaz, A new approach on the lineability of the set of Peano curves.*

3.1 Noções básicas

Fixemos algumas notações que serão usadas neste capítulo. Dados $M, N \in \mathbb{N}$, denotamos por $\mathcal{C}(\mathbb{R}^M, \mathbb{R}^N)$ o espaço das funções contínuas de $\mathbb{R}^M$ em $\mathbb{R}^N$ e por $\mathcal{CS}(\mathbb{R}^M, \mathbb{R}^N)$ o conjunto de todas as funções *contínuas e sobrejetivas* de $\mathbb{R}^M$ em $\mathbb{R}^N$. Para nossa abordagem em lineabilidade, consideraremos o seguinte subconjunto:

$$\mathcal{CS}_\infty(\mathbb{R}^M, \mathbb{R}^N) := \{f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^M, \mathbb{R}^N) : f^{-1}(a) \text{ é ilimitada para todo } a \in \mathbb{R}^N\}.$$

Em 1890, o matemático italiano Giuseppe Peano [110] surpreendeu a comunidade matemática apresentando de maneira não intuitiva a existência de uma aplicação contínua e sobrejetiva (*curva de Peano*) do intervalo unitário $I = [0, 1]$ no quadrado $I^2 = [0, 1] \times [0, 1]$. Posteriormente, o Teorema de Hahn-Mazurkiewicz (veja [84] ou [126, Theorem 31.5]) tornou-se uma ferramenta fundamental na caracterização dos espaços que são imagem contínua do intervalo unitário $I = [0, 1]$.

Teorema 3.1 (Hahn-Mazurkiewicz). *Um espaço topológico de Hausdorff não-vazio é a imagem contínua do intervalo unitário se, e somente se, é compacto, conexo, localmente conexo e metrizável.*

Espaços de Hausdorff que são a imagem contínua do intervalo unitário, são chamados de espaços de Peano, ou seja, um espaço de *Peano* é um espaço topológico de Hausdorff compacto, conexo, localmente conexo e metrizável. Extensões do conceito de curvas de Peano em $\mathbb{R}^N$ podem ser encontradas em [40, 115]. Nos resultados de lineabilidade, utilizaremos também uma noção mais geral de espaços de Peano, conhecidos como espaços σ -Peano.

Definição 3.1. [4, Definition 3.1] Um espaço topológico $\mathcal{X}$ é um espaço σ -Peano se existe uma sequência crescente de subconjuntos

$$K_1 \subset K_2 \subset \cdots \subset K_m \subset \cdots \subset \mathcal{X},$$

tais que cada um deles é um espaço de Peano munido com a topologia herdada de $\mathcal{X}$ e cuja união é o espaço $\mathcal{X}$, ou seja, $\bigcup_{m \in \mathbb{N}} K_m = \mathcal{X}$.

Resultados em lineabilidade relacionados a sobrejetividade foram investigados em alguns trabalhos. Em se tratando de funções sobrejetivas em $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, tais como funções sobrejetivas em toda parte, funções perfeitamente sobrejetivas, funções do tipo Jones destacamos [18, 19, 30, 39, 57, 73–76, 87]. Lebesgue, em [97], provavelmente foi o primeiro a exibir o exemplo de uma função *sobrejetiva* de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ com propriedades fortes. Entretanto, todas essas funções mencionadas são descontínuas em qualquer ponto. Motivados por esse fato, diversos pesquisadores investigaram propriedades no âmbito da *linearização* (lineabilidade, espaçabilidade, algebrabilidade) de funções que são *contínuas* e sobrejetivas (ver [2–4, 38, 40]). Em [2], Albuquerque obteve o seguinte:

Teorema 3.2. [2, Theorem 2.5] *Para todo par $M, N \in \mathbb{N}$, o conjunto $CS(\mathbb{R}^M, \mathbb{R}^N)$ é lineável maximal no espaço $\mathcal{C}(\mathbb{R}^M, \mathbb{R}^N)$.*

Em 2014, Bernal e Cabrera, em [38], obtiveram uma generalização desse resultado no âmbito de lineabilidade e espaçabilidade.

Teorema 3.3. [38, Theorem 4.19] *Para cada par $M, N \in \mathbb{N}$, o conjunto $CS_{\infty}(\mathbb{R}^M, \mathbb{R}^N)$ é denso-lineável maximal e espaçável em $\mathcal{C}(\mathbb{R}^M, \mathbb{R}^N)$. Em particular, $CS_{\infty}(\mathbb{R}^M, \mathbb{R}^N)$ é lineável maximal em $\mathcal{C}(\mathbb{R}^M, \mathbb{R}^N)$.*

Em seguida, em [4], estes foram generalizados para o cenário de espaços σ -Peano:

Teorema 3.4. [4, Theorem 3.6] *Seja $\mathcal{X}$ um espaço vetorial topológico σ -Peano. Então $\mathcal{CS}_\infty(\mathbb{R}^M, \mathcal{X})$ é lineável maximal em $\mathcal{C}(\mathbb{R}^M, \mathcal{X})$.*

Observe que os resultados acima são ótimos no sentido de que o espaço vetorial obtido possui dimensão máxima $\mathfrak{c}$: recordemos que $\dim \mathcal{C}(\mathbb{R}^M, \mathbb{R}^N) = \mathfrak{c}$; mais geralmente, dado um espaço σ -Peano $\mathcal{X}$, tem-se $\text{card } \mathcal{C}(\mathbb{R}^M, \mathcal{X}) = \mathfrak{c}$ (veja [21, Theorem 1.8.6]).

3.2 Construindo Curvas de Peano

Na obtenção de resultados em lineabilidade e espaçabilidade, uma técnica *primária* na construção dos espaços vetoriais, é produzirmos vetores que cumpram os seguintes objetivos: independência linear; possuam características do ambiente (espaço); tais características sejam estáveis por combinações lineares. Desta forma, produziremos uma família apropriada de funções em $\mathcal{CS}_\infty(\mathbb{R}^M, \mathcal{X})$ que nos possibilite a obtenção de espaços neste novo âmbito de lineabilidade. Para tanto, o lema a seguir revelar-se-á fundamental. Como usual, o suporte de uma função $f : \mathbb{R}^M \rightarrow \mathcal{X}$ será denotado por

$$\text{supp } f := \{x \in \mathbb{R}^M : f(x) \neq 0\}.$$

Lema 3.5. Sejam $\mathcal{X}$ um espaço σ -Peano e $f \in \mathcal{CS}_\infty(\mathbb{R}, \mathcal{X})$. Então existe uma família $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{CS}_\infty(\mathbb{R}, \mathcal{X})$ que cumpre

- (i) $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ possui suportes mutuamente disjuntos, i.e., $\text{supp } f_n \cap \text{supp } f_m = \emptyset$, se $m \neq n$;
- (ii) Apenas uma das situações a seguir ocorre

$$\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \text{supp } f_n \right) \cap [0, \infty) = \emptyset \quad \text{ou} \quad \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \text{supp } f_n \right) \cap (-\infty, 0] = \emptyset;$$

- (iii) $\{f\} \cup \{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é linearmente independente.

Demonstração. Iniciamos com um fato de simples constatação: para qualquer $\alpha \in \mathbb{R}$, ocorre que $f([\alpha, \infty)) = \mathcal{X}$ ou $f((-\infty, \alpha]) = \mathcal{X}$. Com isto, podemos supor que $f([0, \infty)) = \mathcal{X}$. Obteremos uma partição $\{I_{mn}\}_{m,n \in \mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}$, i.e., $\mathbb{R} = \bigcup_{m,n \in \mathbb{N}} I_{mn}$, por intervalos compactos $I_{mn} \subset \mathbb{R}$ com interiores mutuamente disjuntos que satisfaz a seguinte propriedade:

$$\text{Para todo } n \in \mathbb{N}, \bigcup_{m \in \mathbb{N}} I_{mn} \subset \mathbb{R} \text{ é ilimitado.} \quad (3.1)$$

3. Lineabilidade e Curvas de Peano

Note que podemos escrever o intervalo unitário fechado $[0, 1]$ como uma união de intervalos compactos $\{I_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ com interiores aos pares disjuntos. De fato, defina $I_0 = \{0\}$ e para cada $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$. Note que $[0, 1] = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n$. Mais geralmente, isto pode ser efetuado para qualquer intervalo compacto de $\mathbb{R}$. Consideremos a seguinte família $\{I_{mn}\}$: para cada inteiro positivo $m \geq 1$ defina $I_{m0} := [m-1, m]$. Por conseguinte, para cada $k \geq 1$,

$$[-k, -k+1] = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} J_{mk},$$

onde J_{mk} são intervalos compactos com interiores dois a dois disjuntos. Definindo $I_{mn} := J_{nm}$, para $m, n \geq 1$, obtemos uma partição $\{I_{mn}\}_{m,n \in \mathbb{N}}$ que satisfaz (3.1). Essencialmente, estamos particionando $\mathbb{R}$ em subconjuntos $\{\mathcal{I}_n\}_{n \geq 0}$, onde $\mathcal{I}_0 = [0, \infty)$ e para cada $n \geq 1$, $\mathcal{I}_n = [-n, -n+1]$, de modo que

$$\mathcal{I}_1 = [-1, 0] = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} J_{m1}, \quad \mathcal{I}_2 = [-2, -1] = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} J_{m2}$$

e assim por diante. Os intervalos J_{mn} são colecionados em ordem exaustivamente crescente de decomposição dos intervalos compactos $\mathcal{I}_n = [-n, -n+1]$.

De posse da partição $\{I_{mn}\}_{m,n \in \mathbb{N}}$, obteremos uma família de mapas contínuos $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{CS}_\infty(\mathbb{R}, \mathcal{X})$, que cumpre

$$\text{Para todo } n \in \mathbb{N}, f_n \left(\bigcup_{m \in \mathbb{N}} I_{mn} \right) = \mathcal{X} \text{ e } f_n \equiv 0 \text{ em } \mathbb{R} \setminus \bigcup_{m \in \mathbb{N}} I_{mn}. \quad (3.2)$$

Usando o Teorema de Hahn-Mazurkiewicz (Teorema 3.1), e o fato de que espaços de Peano são conexos por arcos [126, Theorem 31.2], podemos considerar uma curva de Peano $f_{mn} : I_{mn} \rightarrow B_{\mathcal{X}}[0, m]$ que começa e termina na origem $0 \in \mathcal{X}$. Então, defina $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{X}$ tal que $f_n \equiv f_{mn}$ em I_{mn} ; e $f_n \equiv 0$ em $\mathbb{R} \setminus \bigcup_{m \in \mathbb{N}} I_{mn}$. Logo, cada f_n é um mapa em $\mathcal{CS}_\infty(\mathbb{R}, \mathcal{X})$, a família $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ cumpre (3.2) e, consequentemente, possui as propriedades dos itens (i) e (ii). Por fim, resta verificarmos o item (iii). Note que, para qualquer combinação linear

$$\alpha f + \alpha_1 f_{n_1} + \cdots + \alpha_k f_{n_k} = 0,$$

por (ii) e pela forma como os mapas f_n foram construídos, obteríamos $\alpha f = 0$ em $[0, \infty)$ e, por conseguinte, $\alpha = 0$, uma vez que $f([0, \infty)) = \mathcal{X}$. Usando (i), concluímos que $\alpha_1 = \cdots = \alpha_k = 0$. $\square$

3.3 $(1, \mathfrak{c})$ -lineabilidade de $\mathcal{CS}_\infty(\mathbb{R}, \mathcal{X})$

Nesta seção, fixados um espaço vetorial topológico σ -Peano $\mathcal{X}$, provaremos que o conjunto $\mathcal{CS}_\infty(\mathbb{R}, \mathcal{X})$ é $(1, \mathfrak{c})$ -lineável em $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathcal{X})$. Usaremos resultados apresentados nas seções anteriores e a técnica inspirada em [4, 70].

Teorema 3.6. *Seja $\mathcal{X}$ um espaço vetorial topológico σ -Peano. Então $\mathcal{CS}_\infty(\mathbb{R}, \mathcal{X})$ é $(1, \mathfrak{c})$ -lineável em $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathcal{X})$.*

Demonstração. Sejam $f \in \mathcal{CS}_\infty(\mathbb{R}, \mathcal{X})$ não-nula e $W := \langle f \rangle \subset \mathcal{CS}_\infty(\mathbb{R}, \mathcal{X}) \cup \{0\}$ o subespaço vetorial unidimensional gerado por f . Sem perda de generalidade, suponhamos que $f([0, \infty)) = \mathcal{X}$. Procedendo como no Lema 3.5, obtemos uma família $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{CS}_\infty(\mathbb{R}, \mathcal{X})$ que satisfaz os itens (i)-(iii) e uma partição $\{I_{mn}\}_{m, n \in \mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}$ em que $\text{supp } f_n \subset \cup_m I_{mn}$ para cada n , como apresentado na prova do Lema.

Por outro lado, consideremos uma coleção $\{J_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$, com $\text{card } \Lambda = \mathfrak{c}$, formada por subconjuntos infinitos de $\mathbb{N}$ que é *quase disjunta*, i.e, $J_\lambda \cap J_{\lambda'}$ é finita sempre que $\lambda \neq \lambda'$ (veja [1]). Defina, para cada $\lambda \in \Lambda$,

$$F_\lambda := \sum_{n \in J_\lambda} f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{X}.$$

Como os suportes de $\{f_n\}$ são mutuamente disjuntos, cada F_λ está bem definida e pertence a $\mathcal{CS}_\infty(\mathbb{R}, \mathcal{X})$. Basta observar que $F_\lambda \equiv f_n$ em I_{mn} , com $n \in J_\lambda$. Um fato fundamental é que $\{F_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ é linearmente independente. De fato, por simplicidade considere α_0, α_1 escalares tais que

$$\alpha_0 F_{\lambda_1} + \alpha_1 F_{\lambda_2} = 0.$$

Como J_{λ_1} e J_{λ_2} são quase disjuntos (isso significa que a interseção entre eles é no máximo finita), considere $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$ tais que

$$J_{\lambda_1} \cap J_{\lambda_2} := \{n_1, \dots, n_k\}.$$

Como $\text{card } J_{\lambda_1} = \aleph_0$, é possível escolher $n_j \in J_{\lambda_1}$ tal que $n_j \notin J_{\lambda_2}$. Consequentemente, $\alpha_0 F_{\lambda_1} = \alpha_0 f_{n_j} = 0$ em $\text{supp } f_{n_j}$ e, portanto, $\alpha_0 = 0$. Analogamente, obtém-se que $\alpha_1 = 0$ donde segue a afirmação. Além disso, $\{f, F_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ é linearmente independente. Para tanto, consideremos $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_k$ ($k \in \mathbb{N}$) escalares tais que

$$F = \alpha_0 f + \alpha_1 F_{\lambda_1} + \dots + \alpha_k F_{\lambda_k} = 0.$$

3. Lineabilidade e Curvas de Peano

Usando que $f([0, \infty)) = \mathcal{X}$ e $(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \text{supp } f_n) \cap [0, \infty) = \emptyset$, asseguramos que $F_\lambda = 0$ em $[0, \infty)$ para qualquer λ e, com isso, $\alpha_0 = 0$. Agora usando que $\{F_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ são linearmente independentes, concluímos que $\alpha_k = 0$ para todo $k \geq 1$. Portanto,

$$\text{span}\{f, F_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$$

é um subespaço vetorial com $\dim = \mathfrak{c}$ de $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathcal{X})$. Para finalizar a prova, resta-nos, portanto, mostrar que

$$\text{span}\{f, F_\lambda : \lambda \in \Lambda\} \subset \mathcal{CS}_\infty(\mathbb{R}, \mathcal{X}) \cup \{0\}.$$

Assim, consideremos um elemento não-nulo $F \in \text{span}\{f, F_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$. Então

$$F = \alpha_0 f + \sum_{i=1}^k \alpha_i F_{\lambda_i}.$$

Se $\alpha_0 \neq 0$, tomando $h := \alpha_0 f \in \mathcal{CS}_\infty(\mathbb{R}, \mathcal{X}) \setminus \{0\}$, note que $F^{-1}(y) \supset h^{-1}(y) \cap [0, \infty)$, para todo $y \in \mathcal{X}$. Então $F \in \mathcal{CS}_\infty(\mathbb{R}, \mathcal{X})$. Se $\alpha_0 = 0$, segue que

$$F = \sum_{i=1}^k \alpha_i F_{\lambda_i}.$$

Logo, $\alpha_i \neq 0$ para algum $i \in \{1, \dots, k\}$. Sem perda de generalidade, suponha que $\alpha_1 \neq 0$. Note que podemos fixar $k_0 \in J_{\lambda_1} \setminus \left(\bigcup_{i=2, \dots, k} J_{\lambda_i}\right)$, pois $J_{\lambda_1} \setminus \left(\bigcup_{i=2, \dots, k} J_{\lambda_i}\right)$ é um conjunto infinito. Consequentemente,

$$F = \alpha_1 F_{\lambda_1} = \alpha_1 f_{k_0} \quad \text{em } \text{supp } f_{k_0}$$

e $F^{-1}(y) \supset f_{k_0}^{-1}(y/\alpha_1)$, para todo $y \in \mathcal{X}$. Portanto, $F \in \mathcal{CS}_\infty(\mathbb{R}, \mathcal{X})$, e isto conclui a prova. $\square$

Observação: Note que (α, β) -lineabilidade de $\mathcal{CS}_\infty(\mathbb{R}, \mathcal{X})$ não implica, de modo imediato, (α, β) -lineabilidade de $\mathcal{CS}_\infty(\mathbb{R}^M, \mathcal{X})$. Dada $F \in \mathcal{CS}_\infty(\mathbb{R}^M, \mathcal{X})$, para quaisquer $K \in \mathbb{N}$ e $f \in \mathcal{CS}_\infty(\mathbb{R}^K, \mathbb{R}^M)$, $F \circ f \in \mathcal{CS}_\infty(\mathbb{R}^K, \mathcal{X})$. Tais “*translações por vetor mãe*” são úteis para obter resultados na noção clássica de lineabilidade em $\mathcal{CS}_\infty(\mathbb{R}^M, \mathcal{X})$: basta efetuar tais translações de modo a levar estruturas lineares obtidas no caso $M = 1$ ($\mathcal{CS}_\infty(\mathbb{R}, \mathcal{X})$) para o caso geral ($\mathcal{CS}_\infty(\mathbb{R}^M, \mathcal{X})$). Nesta noção mais restritiva de (α, β) -lineabilidade, esta técnica não é útil. De fato, consideremos $W_\alpha \subset \mathcal{CS}_\infty(\mathbb{R}^M, \mathcal{X}) \cup \{0\}$, com $\dim W_\alpha = \alpha$ e $F \in W_\alpha$. Fixada arbitrariamente $f_0 \in \mathcal{CS}_\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^M)$, observe que $U_\alpha := \{F \circ f_0 :$

$F \in W_\alpha\} \subset \mathcal{CS}_\infty(\mathbb{R}, \mathcal{X}) \cup \{0\}$ possui dimensão α . Logo, existe um subespaço U_β , com $\dim U_\beta = \beta$ tal que $U_\beta \subset \mathcal{CS}_\infty(\mathbb{R}, \mathcal{X}) \cup \{0\}$. Daí, dada g_0 em $\mathcal{CS}_\infty(\mathbb{R}^M, \mathbb{R})$, definindo $W_\beta := \{G \circ g_0 : G \in U_\beta\}$, note que $\dim W_\beta = \beta$ e $W_\beta \subset \mathcal{CS}_\infty(\mathbb{R}^M, \mathcal{X}) \cup \{0\}$. Entretanto, não asseguramos necessariamente que $W_\alpha \subset W_\beta$.

Conjectura 3.1. Dado um espaço vetorial topológico σ -Peano $\mathcal{X}$, $\mathcal{CS}_\infty(\mathbb{R}^M, \mathcal{X})$ é $(\alpha, \mathfrak{c})$ -lineável em $\mathcal{C}(\mathbb{R}^M, \mathcal{X})$, para algum inteiro positivo $M > 1$ ou algum cardinal $\alpha > 1$?

3.4 $(1, \mathfrak{c})$ -espaçabilidade de $\mathcal{CS}_\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N)$

Apresentaremos agora um resultado que fornece a espaçabilidade do conjunto das curvas de Peano em $\mathcal{X} = \mathbb{R}^N$. É importante recordar a métrica que descreve a topologia da convergência uniforme (ou topologia “compacto-aberta”) em $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N)$:

$$\rho(f, g) := \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \frac{\max_{[-n, n]} |f - g|}{1 + \max_{[-n, n]} |f - g|}. \quad (3.3)$$

Munido desta topologia, $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N)$ é um F -espaço (cf. [21, p. 68] ou [54, p. 5]), *i.e.*, um espaço vetorial topológico metrizável completo cuja métrica é invariante por translação. Por conseguinte, $\mathcal{CS}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N)$ e $\mathcal{CS}_\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N)$ herdam tal topologia. A seguir apresentamos o resultado de espaçabilidade na nova noção.

Teorema 3.7. $\mathcal{CS}_\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N)$ é $(1, \mathfrak{c})$ -espaçável em $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N)$.

Demonstração. Sejam $f \in \mathcal{CS}_\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N) \setminus \{0\}$ e $W := \langle f \rangle \subset \mathcal{CS}_\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N) \cup \{0\}$. Procedendo como no teorema anterior, suponhamos que $f([0, \infty)) = \mathbb{R}^N$ e consideremos $\{I_{mn}\}_{m, n \in \mathbb{N}}$ a partição de $\mathbb{R}$ e a família $\{f_n\} \subset \mathcal{CS}_\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N)$ como no Lema 3.5 ($\mathbb{R}^N$ é um espaço σ -Peano).

Como no Teorema 3.6, considere $\{J_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ e $\{F_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ satisfazendo as mesmas propriedades. Não é difícil provar que o conjunto $\{f, F_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ é linearmente independente. Assim, definamos

$$S := \left\{ \alpha_0 f + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n F_{\lambda_n} : \alpha_n \in \mathbb{K} \text{ para todo } n \geq 0 \right\},$$

que é um subespaço vetorial $\mathfrak{c}$ -dimensional de $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N)$. Provaremos que S é fechado em $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N)$. Assim, considere uma sequência $\{\phi_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ em S e $h \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N)$ tais que

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \phi_j = h \quad \text{em} \quad \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N).$$

3. Lineabilidade e Curvas de Peano

Para cada $j \in \mathbb{N}$, temos

$$\phi_j = \alpha_0^{(j)} f + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^{(j)} F_{\lambda_n}.$$

Como $f([0, \infty)) = \mathbb{R}^N$, tomemos $x_0 \in [0, \infty)$ tal que $f(x_0) \neq 0$. Como convergência em $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N)$ implica convergência pontual e $F_{\lambda_n} = 0$ em $[0, \infty)$ para todo $n \geq 1$, segue que

$$\lim_j \phi_j(x_0) = \lim_j \alpha_0^{(j)} f(x_0) = h(x_0).$$

Portanto, existe $\lim_j \alpha_0^{(j)} = \alpha_0 \in \mathbb{K}$. Agora fixemos $k \in \mathbb{N}$. Usando que $\{f_n\}_n$ têm suportes disjuntos, para $n_k \in J_{\lambda_k}$ temos

$$F_{\lambda_k} \equiv f_{n_k} \text{ em } \bigcup_m I_{mn_k}.$$

Logo, como $\lim_j \alpha_0^{(j)} = \alpha_0$, para cada $m \in \mathbb{N}$ e $y \in I_{mn_k}$,

$$\begin{aligned} h(y) &= \lim_j \phi_j(y) \\ &= \lim_j \left[\alpha_0^{(j)} f(y) + \alpha_k^{(j)} F_{\lambda_k}(y) \right] \\ &= \alpha_0 f(y) + \lim_j \alpha_k^{(j)} f_k(y). \end{aligned}$$

Isso garante que existe $\lim_j \alpha_k^{(j)} = \alpha_k \in \mathbb{K}$. Isto prova que

$$h = \alpha_0 f + \alpha_k F_{\lambda_k} \text{ em } I_{mn_k}.$$

Como a situação ocorre para $k \in \mathbb{N}$ arbitrário, concluímos que $h = \alpha_0 f + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n F_{\lambda_n} \in S$.

Para finalizar a prova, resta-nos mostrar que

$$S \subset \mathcal{CS}_{\infty}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N) \cup \{0\}.$$

O procedimento da prova do Teorema 3.6 nos leva a essa conclusão. De fato, considere um elemento não nulo $F = \alpha_0 f + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n F_{\lambda_n} \in S$. Se $\alpha_0 \neq 0$, tomando $h := \alpha_0 f \in \mathcal{CS}_{\infty}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N)$, note que $F^{-1}(y) \supset h^{-1}(y) \cap [0, \infty)$, para todo $y \in \mathbb{R}^N$. Logo $F \in \mathcal{CS}_{\infty}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N)$. Agora suponha que $\alpha_0 = 0$. Então $\alpha_j \neq 0$ para algum $j \geq 1$. Sem perda de generalidade, suponha que $\alpha_1 \neq 0$. Observe que podemos fixar $k_0 \in J_{\lambda_1} \setminus (\bigcup_{i=2}^{\infty} J_{\lambda_i})$, pois $J_{\lambda_1} \setminus (\bigcup_{i=2}^{\infty} J_{\lambda_i})$

3. Lineabilidade e Curvas de Peano

é infinito. Logo

$$F = \alpha_1 F_{\lambda_1} = \alpha_1 f_{k_0} \quad \text{em} \quad \bigcup_{m \in \mathbb{N}} I_{mk_0}$$

e, conseqüentemente, $F^{-1}(y) \supset f_{k_0}^{-1}(y/\alpha_1)$, para todo $y \in \mathbb{R}^N$. Portanto, $F \in \mathcal{CS}_\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N)$ finalizando a prova. $\square$

Parte II

Abordagem multipolinomial de desigualdades clássicas

Multipolinômios homogêneos entre espaços de Banach

A teoria de operadores multilineares e polinômios homogêneos entre espaços de Banach é investigada de forma exaustiva pela comunidade matemática há muitas décadas. Em especial, os polinômios homogêneos são peças fundamentais na compreensão de aplicações holomorfas entre os espaços de Banach. Neste capítulo, apresentaremos a noção de multipolinômios homogêneos que foi introduzida recentemente por Velanga, em [121], tendo como objetivo principal a obtenção de versões multipolinomiais das clássicas Desigualdades de Hardy–Littlewood e Kahane–Salem–Zygmund. Essencialmente, multipolinômios são generalizações naturais do conceito de polinômios homogêneos, com o propósito de unificar a teoria de polinômios homogêneos com aplicações multilineares. Os resultados desta etapa estão presentes em

- D. Tomaz, *Hardy–Littlewood inequalities for multipolynomials*, *Adv. Oper. Theory.* **4** (2019), no.3, 688–697.

Consideremos $E_1, \dots, E_m, F$ espaços de Banach sobre um corpo $\mathbb{K}$, que pode ser $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Recordemos que uma aplicação $P : E \longrightarrow F$ é um polinômio m -homogêneo se existe um operador m -linear

$$T : E \times \cdots \times E \longrightarrow F$$

tal que

$$P(x) := T(x, \dots, x),$$

4. Multipolinômios homogêneos entre espaços de Banach

para todo $x \in E$. Denotamos a norma de P por

$$\|P\| := \sup_{\substack{x \in E \\ \|x\|=1}} \|P(x)\|.$$

Dado $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$, $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$, denotamos por $|\alpha| := \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ e por $\mathbf{x}^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$ o produto de monômios para $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$. Além do mais, um polinômio m -homogêneo em $\mathbb{K}^n$ pode ser escrito da forma

$$P(\mathbf{x}) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(P) \mathbf{x}^\alpha,$$

com $a_\alpha(P) \in \mathbb{K}$. Para mais detalhes sobre teoria de polinômios e aplicações multilineares, sugerimos as clássicas referências [63, 105]. Recentemente, Velanga, em [121], introduziu a noção de multipolinômios homogêneos entre espaços de Banach. É importante destacar também que o conceito de multipolinômios já foi apresentado em uma outra abordagem por Chernega e Zagorodnyuk em [56]. A recente tese de doutorado [124], apresenta um panorama completo sobre a teoria de multipolinômios homogêneos. Outros resultados envolvendo multipolinômios podem ser encontrados também no recente trabalho [50].

Definição 4.1. [121, Definition 3.1] Uma aplicação $P : E_1 \times \dots \times E_m \longrightarrow F$ é um polinômio $(n_1, \dots, n_m)$ -homogêneo se, para cada $i = 1, \dots, m$, a aplicação

$$P(x_1, \dots, x_{i-1}, \cdot, x_{i+1}, \dots, x_m) : E_i \longrightarrow F$$

é um polinômio n_i -homogêneo para todo $x_1 \in E_1, \dots, x_{i-1} \in E_{i-1}, x_{i+1} \in E_{i+1}, \dots, x_m \in E_m$ fixados.

Recordando a notação anterior, mais geralmente, dada uma sequência $\alpha = (\alpha_j)_{j=1}^\infty$ em $\mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que $\text{card}\{j : \alpha_j \neq 0\} < \infty$, definimos

$$|\alpha| := \sum_{j=1}^\infty \alpha_j$$

e, para $\mathbf{x} = (x_j)_{j=1}^\infty \in \mathbb{K}^\mathbb{N}$ e $\alpha \neq 0$, representamos

$$\mathbf{x}^\alpha = \prod_{j=1}^\infty x_j^{\alpha_j},$$

com a convenção $x_j^0 = 1$.

Além disso, denotamos a norma de um polinômio $(n_1, \dots, n_m)$ -homogêneo P por

$$\|P\| := \sup \left\{ \|P(x_1, \dots, x_m)\|; x_m \in E_m \text{ e } \|x_m\|_{E_m} \leq 1 \right\}.$$

Como mencionado, o objetivo de estudar multipolinômios homogêneos é tentar estabelecer uma unificação entre polinômios e aplicações multilineares. Por exemplo, na Definição 4.1, quando $m = 1$ e $n_1 = 1$, temos o conceito de operadores lineares. Quando $m = 1$ e $n_1 > 1$, recuperamos a noção de polinômios homogêneos. Por fim, quando $m = 1$ e $n_1 = \dots = n_m = 1$, revisitamos o conceito de aplicações multilineares. Tais casos são geralmente conhecidos como “casos extremos”. Essencialmente, um multipolinômio P é um polinômio n_k -homogêneo em cada variável.

4.1 Desigualdade multipolinomial de Kahane–Salem–Zygmund

A Desigualdade de Kahane–Salem–Zygmund apareceu pela primeira vez provavelmente no trabalho [88]. Essencialmente, ela utiliza ferramentas probabilísticas para construir polinômios homogêneos e operadores multilineares que têm normas relativamente pequenas. Para um estudo detalhado da referida desigualdade, sugerimos [3, Appendix B]. Recentemente, uma extensão da desigualdade foi obtida em [8, Theorem 2.5]. O nosso propósito é obter uma versão da Kahane–Salem–Zygmund para multipolinômios.

Recordemos, inicialmente, uma versão no contexto multilinear que aparece em [5, Lemma 6.1] e também em [6, Lemma 3.1]. Como usual, para $p \in [1, +\infty]$, denotaremos por ℓ_p^n o espaço n -dimensional $\mathbb{K}^n$ munido da norma $\|\cdot\|_p$. Além disso, para $q \geq 1$, definimos $\alpha(q) := \max \left\{ \frac{1}{2} - \frac{1}{q}, 0 \right\}$.

Teorema 4.1. (*Desigualdade de Kahane–Salem–Zygmund*). *Sejam $m, n \geq 1$, $p \in [1, +\infty]$. Então existe uma aplicação m -linear $A : \ell_p^n \times \dots \times \ell_p^n \longrightarrow \mathbb{K}$ da forma*

$$A(x^{(1)}, \dots, x^{(m)}) = \sum_{i_1, \dots, i_m=1}^n \delta_{i_1, \dots, i_m} x_{i_1}^{(1)} \dots x_{i_m}^{(m)},$$

com $\delta_{i_1, \dots, i_m} \in \{-1, 1\}$, tal que

$$\|A\| \leq C_m \cdot n^{\frac{1}{2} + m\alpha(p)},$$

onde C_m é uma constante positiva que depende apenas de m .

A partir de resultados encontrados em [34], podemos observar que, quando $1 \leq q \leq 2$, o expoente da desigualdade anterior pode ser melhorado.

4. Multipolinômios homogêneos entre espaços de Banach

De fato, considere $A : \ell_2^n \times \cdots \times \ell_2^n \longrightarrow \mathbb{K}$ o operador dado pelo Teorema 4.1, isto é, $\|A\| \leq n^{\frac{1}{2}}$. Note que quando consideramos a mesma forma multilinear em ℓ_1 , ou seja, $A : \ell_1^n \times \cdots \times \ell_1^n \longrightarrow \mathbb{K}$, então $\|A\| = 1$. Daí, para espaços ℓ_q intermediários, usando o Teorema de interpolação de Riesz-Thorin ([36, Theorem 1.1.1] ou [72, Theorem 6.27]), obtemos $A : \ell_q^n \times \cdots \times \ell_q^n \longrightarrow \mathbb{K}$ com

$$\|A\| \leq \|A\|^\theta \cdot \|A\|^{1-\theta}$$

para $0 \leq \theta \leq 1$. Assim,

$$\theta = \frac{2q-2}{q}.$$

Consequentemente, $\|A\| \leq n^{1-\frac{1}{q}}$. Dessa forma, podemos enunciar a Desigualdade de Kahane–Salem–Zygmund de uma forma mais precisa, como segue (veja [16, Theorem 2.2]):

Teorema 4.2. *Sejam m, n inteiros positivos e $p \geq 1$. Então existe uma forma m -linear $A : \ell_p^n \times \cdots \times \ell_p^n \longrightarrow \mathbb{K}$ da forma*

$$A(x^{(1)}, \dots, x^{(m)}) = \sum_{i_1, \dots, i_m=1}^n \delta_{i_1, \dots, i_m} x_{i_1}^{(1)} \cdots x_{i_m}^{(m)},$$

com $\delta_{i_1, \dots, i_m} \in \{-1, 1\}$, tal que

$$\|A\| \leq C_m \cdot n^{m \max\left\{m\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)+\frac{1}{2}, 1-\frac{1}{p}\right\}},$$

onde C_m é uma constante positiva que depende apenas de m .

Com o auxílio do teorema anterior, obteremos uma versão da desigualdade acima no contexto de polinômios homogêneos, que em certo sentido não é tão comum na literatura.

Teorema 4.3. *Sejam m, n inteiros positivos e $p \geq 1$. Então existe um polinômio m -homogêneo $P : \ell_p \longrightarrow \mathbb{K}$ da forma*

$$P(x) = \sum_{i_1, \dots, i_m=1}^{\infty} \delta_{i_1, \dots, i_m} x_{i_1} \cdots x_{i_m} \tag{4.1}$$

com $\delta_{i_1, \dots, i_m} \in \{0, -1, 1\}$ tal que

$$\|P\| \leq C_m \cdot n^{m \max\left\{m\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)+\frac{1}{2}, 1-\frac{1}{p}\right\}}$$

4. Multipolinômios homogêneos entre espaços de Banach

e

$$\text{card} \{ \delta_{i_1, \dots, i_m} \neq 0 \} = n^m,$$

onde C_m é uma constante positiva que depende apenas de m .

Demonstração. De fato, usando o Teorema 4.2, considere a forma m -linear

$$T_n : \ell_p^n \times \dots \times \ell_p^n \longrightarrow \mathbb{K}$$

definida por

$$T_n \left(x^{(1)}, \dots, x^{(m)} \right) = \sum_{i_1, \dots, i_m=1}^n \delta_{i_1, \dots, i_m} x_{i_1}^{(1)} \dots x_{i_m}^{(m)},$$

com $\delta_{i_1, \dots, i_m} \in \{-1, 1\}$ satisfazendo

$$\|T_n\| \leq C_m \cdot n^{\max\left\{m\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)+\frac{1}{2}, 1-\frac{1}{p}\right\}}. \quad (4.2)$$

Por outro lado, escreva $\mathbb{N}$ como uma união de subconjuntos aos pares disjuntos $(\mathbb{N}_k)_{k=1}^m$ com

$$\text{card}(\mathbb{N}_k) = \text{card}(\mathbb{N})$$

para todo $k = 1, \dots, m$. Denotando cada $\mathbb{N}_k := \{j_1, j_2, j_3, \dots\}$, defina

$$(x_j)_{j \in \mathbb{N}_k} := (x_{j_1}, x_{j_2}, x_{j_3}, \dots) \in \ell_p. \quad (4.3)$$

Observe que

$$\left\| (x_j)_{j \in \mathbb{N}_k} \right\|_{\ell_p} \leq \left\| (x_j)_{j \in \mathbb{N}} \right\|_{\ell_p} \text{ para todo } k = 1, \dots, m.$$

Assim, considere a aplicação $P : \ell_p \longrightarrow \mathbb{K}$ definida por

$$P(x) := T_n \left((x_j)_{j \in \mathbb{N}_1}, \dots, (x_j)_{j \in \mathbb{N}_m} \right). \quad (4.4)$$

Note que P é um polinômio m -homogêneo como definido em (4.1). De fato, para cada $k = 1, \dots, m$, seja

$$\varphi_k : \ell_p \longrightarrow \ell_p$$

definida por

$$\varphi_k(x) := (x_j)_{j \in \mathbb{N}_k} = (x_{j_1}, x_{j_2}, x_{j_3}, \dots).$$

4. Multipolinômios homogêneos entre espaços de Banach

Note que φ_k é linear para todo k . Daí, considere a aplicação

$$\Psi : \ell_p \times \cdots \times \ell_p \longrightarrow \mathbb{K}$$

dada por

$$\Psi \left(x^{(1)}, \dots, x^{(m)} \right) := T_n \left(\varphi_1 \left(x^{(1)} \right), \dots, \varphi_m \left(x^{(m)} \right) \right).$$

É fácil observar que Ψ é m -linear. De fato, dado $\lambda \in \mathbb{K}$ e $i \in \mathbb{N}$, observe que

$$\Psi \left(x^{(1)}, \dots, x^{(i)} + \lambda y^{(i)}, \dots, x^{(m)} \right) = T_n \left(\varphi_1 \left(x^{(1)} \right), \dots, \varphi_i \left(x^{(i)} + \lambda y^{(i)} \right), \dots, \varphi_m \left(x^{(m)} \right) \right).$$

Assim, usando a linearidade de cada φ_i e a m -linearidade de T_n , temos

$$\begin{aligned} \Psi \left(x^{(1)}, \dots, x^{(i)} + \lambda y^{(i)}, \dots, x^{(m)} \right) &= T_n \left(\varphi_1 \left(x^{(1)} \right), \dots, \varphi_i \left(x^{(i)} + \lambda y^{(i)} \right), \dots, \varphi_m \left(x^{(m)} \right) \right) \\ &= T_n \left(\varphi_1 \left(x^{(1)} \right), \dots, \varphi_i(x^{(i)}) + \lambda \varphi_i(y^{(i)}), \dots, \varphi_m \left(x^{(m)} \right) \right) \\ &= T_n \left(\varphi_1 \left(x^{(1)} \right), \dots, \varphi_i(x^{(i)}), \dots, \varphi_m \left(x^{(m)} \right) \right) \\ &\quad + \lambda T_n \left(\varphi_1 \left(x^{(1)} \right), \dots, \varphi_i(y^{(i)}), \dots, \varphi_m \left(x^{(m)} \right) \right) \\ &:= \Psi \left(x^{(1)}, \dots, x^{(i)}, \dots, x^{(m)} \right) + \lambda \Psi \left(x^{(1)}, \dots, y^{(i)}, \dots, x^{(m)} \right). \end{aligned}$$

Portanto, concluímos que Ψ é m -linear. Além disso,

$$\begin{aligned} \Psi(x, \dots, x) &:= T_n(\varphi_1(x), \dots, \varphi_m(x)) \\ &= T_n\left((x_j)_{j \in \mathbb{N}_1}, \dots, (x_j)_{j \in \mathbb{N}_m}\right) \\ &= P(x), \end{aligned}$$

para todo $x \in \ell_p$. Por definição, segue que P dado em (4.4) é um polinômio m -homogêneo.

Outrossim,

$$\begin{aligned} |P(x)| &= \left| T_n \left((x_j)_{j \in \mathbb{N}_1}, \dots, (x_j)_{j \in \mathbb{N}_m} \right) \right| \\ &\leq \|T_n\| \left\| (x_j)_{j \in \mathbb{N}_1} \right\|_p \cdots \left\| (x_j)_{j \in \mathbb{N}_m} \right\|_p \\ &\leq \|T_n\| \left\| (x_j)_{j=1}^\infty \right\|_p \cdots \left\| (x_j)_{j=1}^\infty \right\|_p. \end{aligned}$$

4. Multipolinômios homogêneos entre espaços de Banach

Tomando o supremo com $\left\| (x_j)_{j=1}^{\infty} \right\|_p = 1$

$$\|P\| \leq \|T_n\|.$$

Pela estimativa (4.2), concluímos que

$$\|P\| \leq C_m \cdot n^{\max\left\{m\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)+\frac{1}{2}, 1-\frac{1}{p}\right\}}.$$

□

Procedendo como no resultado anterior, nosso objetivo é obter uma versão multipolinomial da Desigualdade de Kahane–Salem–Zygmund, que será fundamental na demonstração da Desigualdade multipolinomial de Hardy–Littlewood.

Teorema 4.4. *Sejam $m, n, n_1, \dots, n_m$ inteiros positivos e $p \geq 1$. Então existe um polinômio $(n_1, \dots, n_m)$ -homogêneo $Q : \ell_p \times \dots \times \ell_p \rightarrow \mathbb{K}$ da forma*

$$Q\left(x^{(1)}, \dots, x^{(m)}\right) = \sum_{i_1, \dots, i_m=1}^{\infty} \delta_{i_1, \dots, i_m} x_{i_1}^{(1)} \dots x_{i_m}^{(m)},$$

com $\delta_{i_1, \dots, i_m} \in \{0, -1, 1\}$ e $\text{card} \{(i_1, \dots, i_m) : \delta_{i_1, \dots, i_m} \neq 0\} = n^M$ tal que

$$\|Q\| \leq C_M \cdot n^{\max\left\{M\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)+\frac{1}{2}, 1-\frac{1}{p}\right\}},$$

onde $M = \sum_{j=1}^m n_j$.

Demonstração. Para cada $n_i \geq 1, i = 1, \dots, m$, usando a versão multilinear da Desigualdade de Kahane–Salem–Zygmund, existe um operador M -linear

$$A : \overbrace{\ell_p \times \dots \times \ell_p}^{n_1} \times \dots \times \overbrace{\ell_p \times \dots \times \ell_p}^{n_m} \rightarrow \mathbb{K}$$

da forma

$$A\left(x^{(1)}, \dots, x^{(m)}\right) = \sum_{i_1, \dots, i_m=1}^n \pm x_{i_1}^{(1)} \dots x_{i_m}^{(m)}$$

tal que

$$\|A\| \leq C_M \cdot n^{\max\left\{M\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)+\frac{1}{2}, 1-\frac{1}{p}\right\}}. \quad (4.5)$$

4. Multipolinômios homogêneos entre espaços de Banach

Além disso, procedendo como no Teorema 4.3, considere

$$\begin{aligned}\mathbb{N} &= \mathbb{N}_1^{(1)} \cup \dots \cup \mathbb{N}_{n_1}^{(1)} \\ &\vdots \\ \mathbb{N} &= \mathbb{N}_1^{(m)} \cup \dots \cup \mathbb{N}_{n_m}^{(m)}\end{aligned}$$

uniões disjuntas com $\text{card}(\mathbb{N}_k^{(i)}) = \text{card}(\mathbb{N})$, para todo $i = 1, \dots, m$, $k = 1, \dots, n_i$ e $(x_j^{(i)})_{j \in \mathbb{N}_k^{(i)}}$ uma sequência em ℓ_p definida analogamente como em (4.3).

Assim, considere a aplicação m -linear $Q : \overbrace{\ell_p \times \dots \times \ell_p}^m \rightarrow \mathbb{K}$ dada por

$$\begin{aligned}Q(x^{(1)}, \dots, x^{(m)}) \\ := A \left(\underbrace{(x_j^{(1)})_{j \in \mathbb{N}_1^{(1)}}, \dots, (x_j^{(1)})_{j \in \mathbb{N}_{n_1}^{(1)}}}_{n_1}, \dots, \underbrace{(x_j^{(m)})_{j \in \mathbb{N}_1^{(m)}}, \dots, (x_j^{(m)})_{j \in \mathbb{N}_{n_m}^{(m)}}}_{n_m} \right).\end{aligned}$$

Note que Q é um polinômio $(n_1, \dots, n_m)$ -homogêneo. De fato, considere

$$E_1 = \overbrace{\ell_p \times \dots \times \ell_p}^{n_1}, \dots, E_m = \overbrace{\ell_p \times \dots \times \ell_p}^{n_m}$$

e

$$A : \overbrace{\ell_p \times \dots \times \ell_p}^{n_1} \times \dots \times \overbrace{\ell_p \times \dots \times \ell_p}^{n_m} \rightarrow \mathbb{K}$$

a forma M -linear dada por

$$A(x^{(1)}, \dots, x^{(M)}) = \sum_{i_1, \dots, i_M=1}^n \pm x_{i_1}^{(1)} \dots x_{i_M}^{(M)},$$

com $M = \sum_{j=1}^m n_j$.

Por outro lado, para todos inteiros positivos i, r , considere

$$\varphi_r^{(i)} : \ell_p \rightarrow \ell_p$$

aplicações definidas da forma

$$\varphi_r^{(i)}(x) := (x_j)_{j \in \mathbb{N}_r^{(i)}}.$$

Por exemplo,

$$\varphi_1^{(1)}(x^{(1)}) = \left(x_j^{(1)}\right)_{j \in \mathbb{N}_1^{(1)}}, \dots, \varphi_{n_1}^{(1)}(x^{(1)}) = \left(x_j^{(1)}\right)_{j \in \mathbb{N}_{n_1}^{(1)}}$$

e assim sucessivamente. Note que $\varphi_r^{(i)}$ é linear para todos i, r .

Daí, seja $\Psi : \overbrace{\ell_p \times \dots \times \ell_p}^{n_1} \times \dots \times \overbrace{\ell_p \times \dots \times \ell_p}^{n_m} \longrightarrow \mathbb{K}$ dada por

$$\begin{aligned} \Psi(x^{(1)}, \dots, x^{(M)}) \\ := A\left(\varphi_1^{(1)}(x^{(1)}), \dots, \varphi_{n_M}^{(M)}(x^{(M)})\right). \end{aligned}$$

Usando a linearidade de cada $\varphi_r^{(i)}$ e a M -linearidade de A , concluímos que Ψ é M -linear. Em particular, fixadas $x^{(2)}, \dots, x^{(m)}$ em ℓ_p , segue que

$$\begin{aligned} \Psi(x^{(1)}, \dots, x^{(1)}) &= A_{|E_1} \left(\varphi_1^{(1)}(x^{(1)}), \dots, \varphi_{n_1}^{(1)}(x^{(1)}) \right) \\ &= A_{|E_1} \left(\left(x_j^{(1)}\right)_{j \in \mathbb{N}_1^{(1)}}, \dots, \left(x_j^{(1)}\right)_{j \in \mathbb{N}_{n_1}^{(1)}} \right) \\ &= Q(x^{(1)}) : \ell_p \longrightarrow \mathbb{K} \end{aligned}$$

para todo $x^{(1)} \in \ell_p$. Note que $Q|_{\ell_p}$ é um polinômio n_1 -homogêneo. Analogamente,

$$\begin{aligned} \Psi(x^{(m)}, \dots, x^{(m)}) &= A_{|E_m} \left(\varphi_1^{(m)}(x^{(m)}), \dots, \varphi_{n_m}^{(m)}(x^{(m)}) \right) \\ &= A_{|E_m} \left(\left(x_j^{(m)}\right)_{j \in \mathbb{N}_1^{(m)}}, \dots, \left(x_j^{(m)}\right)_{j \in \mathbb{N}_{n_m}^{(m)}} \right) \\ &= Q(x^{(m)}) : \ell_p \longrightarrow \mathbb{K} \end{aligned}$$

é um polinômio n_m -homogêneo. Portanto, concluímos que Q é um polinômio $(n_1, \dots, n_m)$ -homogêneo. Além disso, usando a norma do supremo e a estimativa (4.5), obtemos

$$\|Q\| \leq \|A\| \leq C_M \cdot n^{\max\left\{M\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)+\frac{1}{2}, 1-\frac{1}{p}\right\}}.$$

□

4.2 Desigualdade multipolinomial de Hardy–Littlewood

Em 1931, no artigo [43, Theorem I], Bohnenblust e Hille apresentaram a famosa Desigualdade multilinear de Bohnenblust–Hille. Esta nos afirma que, para todo inteiro positivo $m \geq 1$, existe uma constante $C_{\mathbb{K},m} \geq 1$ tal que, para toda forma m -linear

4. Multipolinômios homogêneos entre espaços de Banach

$T : \ell_\infty^n \times \cdots \times \ell_\infty^n \longrightarrow \mathbb{K}$ e todo inteiro positivo n ,

$$\left(\sum_{j_1, \dots, j_m=1}^n |T(e_{j_1}, \dots, e_{j_m})|^{\frac{2m}{m+1}} \right)^{\frac{m+1}{2m}} \leq C_{\mathbb{K},m} \|T\|,$$

onde

$$\|T\| := \sup_{z^{(1)}, \dots, z^{(m)} \in B_{\ell_\infty^n}} \left| T(z^{(1)}, \dots, z^{(m)}) \right|.$$

Nos últimos anos, ocorreu uma intensa busca sobre o comportamento e as melhores constantes $C_{\mathbb{K},m}$ para a desigualdade. Além disso, esse resultado possui inúmeras aplicações em áreas como Análise Complexa e Harmônica, Teoria dos Números, Teoria da Informação Quântica e até mesmo Teoria dos Jogos. Veja, por exemplo, [9, 16, 104]. No contexto de polinômios homogêneos, a Desigualdade polinomial de Bohnenblust–Hille [5, 43] afirma que, dados inteiros positivos $m \geq 2$ e $n \geq 1$, se P é um polinômio homogêneo de grau m em ℓ_∞^n dado por $P(\mathbf{x}) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(P) \mathbf{x}^\alpha$, então existe uma constante $B_{\mathbb{K},m,p}^{pol} \geq 1$ tal que

$$\left(\sum_{|\alpha|=m} |a_\alpha(P)|^{\frac{2m}{m+1}} \right)^{\frac{m+1}{2m}} \leq B_{\mathbb{K},m,p}^{pol} \|P\|. \quad (4.6)$$

Recentemente, alguns trabalhos na literatura estão relacionados com a busca de melhores estimativas sobre o crescimento das constantes $B_{\mathbb{K},m,p}^{pol}$, como, por exemplo, [35, 51, 60, 108]. A Desigualdade de Hardy–Littlewood consiste numa generalização da Desigualdade de Bohnenblust–Hille para espaços ℓ_p . Em 1934, Hardy e Littlewood, em [81], apresentaram o caso bilinear e, em 1981, Praciano-Pereira [113] obteve uma versão no contexto multilinear:

Teorema 4.5 (Hardy–Littlewood/Praciano-Pereira). Sejam $m \geq 2$ um inteiro e

$\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_m) \in [1, +\infty]^m$ tais que $\left| \frac{1}{\mathbf{p}} \right| = \frac{1}{p_1} + \cdots + \frac{1}{p_m} \leq \frac{1}{2}$. Então existe uma constante $C_{m,\mathbf{p}}^{\mathbb{K}} \geq 1$ tal que, para toda forma m -linear contínua $T : \ell_{p_1} \times \cdots \times \ell_{p_m} \longrightarrow \mathbb{K}$

$$\left(\sum_{j_1, \dots, j_m=1}^{\infty} |T(e_{j_1}, \dots, e_{j_m})|^{\frac{2m}{m+1-2\left|\frac{1}{\mathbf{p}}\right|}} \right)^{\frac{m+1-2\left|\frac{1}{\mathbf{p}}\right|}{2m}} \leq C_{m,\mathbf{p}}^{\mathbb{K}} \|T\|.$$

Além disso, o expoente $\frac{2m}{m+1-2\left|\frac{1}{\mathbf{p}}\right|}$ é ótimo.

Dado um inteiro positivo $m \geq 1$, a Desigualdade multilinear de Hardy–Littlewood para $2m \leq p \leq \infty$ [5, 81] afirma que existe uma constante $C_{\mathbb{K},m,p}^{mult} \geq 1$ tal que, para toda forma m -linear $T : \ell_p^n \times \cdots \times \ell_p^n \longrightarrow \mathbb{K}$ e todo inteiro positivo n ,

$$\left(\sum_{j_1, \dots, j_m=1}^n |T(e_{j_1}, \dots, e_{j_m})|^{\frac{2mp}{mp+p-2m}} \right)^{\frac{mp+p-2m}{2mp}} \leq C_{\mathbb{K}, m, p}^{mult} \|T\|,$$

onde

$$\|T\| := \sup_{z^{(1)}, \dots, z^{(m)} \in B_{\ell_p^n}^n} \left| T(z^{(1)}, \dots, z^{(m)}) \right|.$$

Além disso, os expoentes $\frac{2mp}{mp+p-2m}$ são ótimos. Quando $p = \infty$, obtemos a clássica Desigualdade de Bohnenblust–Hille (veja [43]). A versão polinomial da Desigualdade de Hardy–Littlewood [11] afirma que, dados $m, n \geq 1$, se P é um polinômio m -homogêneo em ℓ_p^n , com $2m \leq p \leq \infty$ dado por $P(\mathbf{x}) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(P) \mathbf{x}^\alpha$, então existe uma constante $C_{\mathbb{K}, m, p}^{pol} \geq 1$ tal que

$$\left(\sum_{|\alpha|=m} |a_\alpha(P)|^{\frac{2mp}{mp+p-2m}} \right)^{\frac{mp+p-2m}{2mp}} \leq C_{\mathbb{K}, m, p}^{pol} \|P\|. \quad (4.7)$$

Outra versão mais delicada da Desigualdade de Hardy–Littlewood ocorre quando $m < p \leq 2m$ [7, 62]. Mais precisamente, esta garante que existe uma constante $C_{\mathbb{K}, m, p}^{mult} \geq 1$ tal que para toda forma m -linear

$$T : \ell_p^n \times \dots \times \ell_p^n \longrightarrow \mathbb{K}$$

e todo inteiro positivo n , temos

$$\left(\sum_{j_1, \dots, j_m=1}^n |T(e_{j_1}, \dots, e_{j_m})|^{\frac{p}{p-m}} \right)^{\frac{p-m}{p}} \leq C_{\mathbb{K}, m, p}^{mult} \|T\|. \quad (4.8)$$

Como na versão clássica, podemos obter uma versão polinomial desta desigualdade, isto é, dados inteiros positivos $m \geq 2$ e $m < p \leq 2m$, existe uma constante $C_{\mathbb{K}, m, p}^{pol} \geq 1$ tal que

$$\left(\sum_{|\alpha|=m} |a_\alpha(P)|^{\frac{p}{p-m}} \right)^{\frac{p-m}{p}} \leq C_{\mathbb{K}, m, p}^{pol} \|P\|, \quad (4.9)$$

para todo polinômio m -homogêneo $P : \ell_p \longrightarrow \mathbb{K}$. Além disso, todos os expoentes envolvidos são ótimos. Em [55], os autores explicam a diferença entre os expoentes ótimos $\frac{2mp}{mp+p-2m}$ e $\frac{p}{p-m}$. Para recentes trabalhos nessa área sugerimos [12, 107, 112].

Observação 4.1. Vale salientar que todas as desigualdades anteriores são válidas quando substituimos ℓ_p^n por ℓ_p , para n arbitrário. Outro detalhe importante é que as constantes apresentadas nas desigualdades acima não dependem de n , especialmente quando consideramos os

4. Multipolinômios homogêneos entre espaços de Banach

espaços ℓ_p^n , uma vez que os expoentes envolvidos são ótimos. Em [22], por exemplo, extensões da Desigualdade de Hardy–Littlewood para formas m -lineares em espaços ℓ_p e resultados de otimalidade são apresentados.

Em [43], aparecem as seguintes versões da Desigualdade de Bohnenblust–Hille:

Teorema 4.6. (*Desigualdade polinomial de Bohnenblust–Hille*): *Seja m um inteiro positivo fixado. As seguintes condições são equivalentes:*

(i) *Existe uma constante $C_{\mathbb{K},m} \geq 1$ tal que*

$$\left(\sum_{|\alpha|=m} |c_\alpha(P)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq C_{\mathbb{K},m} \|P\|$$

para todo polinômio m -homogêneo $P : c_0 \rightarrow \mathbb{K}$;

(ii)

$$p \geq \frac{2m}{m+1}$$

Teorema 4.7. (*Desigualdade multilinear de Bohnenblust–Hille*): *Seja m um inteiro positivo fixado. As seguintes condições são equivalentes:*

(i) *Existe uma constante $C_{\mathbb{K},m} \geq 1$ tal que*

$$\left(\sum_{i_1, \dots, i_m=1}^{\infty} |T(e_{i_1}, \dots, e_{i_m})|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq C_{\mathbb{K},m} \|T\|$$

para toda forma m -linear $T : c_0 \times \dots \times c_0 \rightarrow \mathbb{K}$;

(ii)

$$p \geq \frac{2m}{m+1}.$$

Utilizando as versões anteriores, Velanga, em [121], (veja também [120]), provou a seguinte versão no contexto de multipolinômios:

Teorema 4.8. (*Desigualdade multipolinomial de Bohnenblust–Hille*): *Sejam $m, n_1, \dots, n_m$ inteiros positivos fixados. As seguintes condições são equivalentes:*

(i) *Existe uma constante $C_{n_1, \dots, n_m} \geq 1$ tal que*

$$\left(\sum_{|\alpha^{(1)}|=n_1, \dots, |\alpha^{(m)}|=n_m} |c_{\alpha^{(1)} \dots \alpha^{(m)}}(P)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq C_{n_1, \dots, n_m} \|P\|$$

para todo polinômio $(n_1, \dots, n_m)$ -homogêneo $P : c_0 \times \dots \times c_0 \rightarrow \mathbb{K}$.

(ii)

$$p \geq \frac{2 \left(\sum_{j=1}^m n_j \right)}{\left(\sum_{j=1}^m n_j \right) + 1}.$$

Os Teoremas 4.6 e 4.7 são casos particulares do Teorema 4.8. Basta considerar, respectivamente, $m = 1$ e $n_1 = \dots = n_m = 1$.

4.2.1 Caso $p \geq 2M$

Nesta seção, inspirados nas ideias de [121], obteremos uma versão da Desigualdade de Hardy–Littlewood no contexto de multipolinômios homogêneos.

Teorema 4.9. (*Desigualdade multipolinomial de Hardy–Littlewood*) *Sejam $m, n_1, \dots, n_m$ inteiros positivos, $s \in (0, +\infty)$ e $p \geq 2M$, onde $M = \sum_{j=1}^m n_j$. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) *Existe uma constante $C_{n_1, \dots, n_m, s}^{\mathbb{K}} \geq 1$ tal que*

$$\left(\sum_{|\alpha^{(1)}|=n_1, \dots, |\alpha^{(m)}|=n_m} |c_{\alpha^{(1)} \dots \alpha^{(m)}}(P)|^s \right)^{\frac{1}{s}} \leq C_{n_1, \dots, n_m, s}^{\mathbb{K}} \|P\|$$

para todo polinômio $(n_1, \dots, n_m)$ -homogêneo $P : \ell_p \times \dots \times \ell_p \longrightarrow \mathbb{K}$ da forma

$$P(x^{(1)}, \dots, x^{(m)}) = \sum_{|\alpha^{(1)}|=n_1, \dots, |\alpha^{(m)}|=n_m} c_{\alpha^{(1)} \dots \alpha^{(m)}}(P) (x^{(1)})^{\alpha^{(1)}} \dots (x^{(m)})^{\alpha^{(m)}}; \quad (4.10)$$

(ii)

$$s \geq \frac{2 \left(\sum_{j=1}^m n_j \right) p}{\left(\sum_{j=1}^m n_j \right) p + p - 2 \left(\sum_{j=1}^m n_j \right)}.$$

Demonstração. (ii) $\Rightarrow$ (i): É suficiente provarmos a afirmação para

$$s_0 = \frac{2 \left(\sum_{j=1}^m n_j \right) p}{\left(\sum_{j=1}^m n_j \right) p + p - 2 \left(\sum_{j=1}^m n_j \right)}.$$

De fato, inicialmente seja $\mathbb{N} = \mathbb{N}_1 \cup \dots \cup \mathbb{N}_m$ uma união disjunta com $\text{card}(\mathbb{N}_k) = \text{card}(\mathbb{N})$, para todo $k = 1, \dots, m$, e considere $(z_j)_{j \in \mathbb{N}_k}$ uma sequência em ℓ_p definida como em (4.3). Assim, dado um polinômio $(n_1, \dots, n_m)$ -homogêneo

$$P : \ell_p \times \dots \times \ell_p \longrightarrow \mathbb{K}$$

4. Multipolinômios homogêneos entre espaços de Banach

como em (4.10), defina o polinômio $M := (n_1 + \dots + n_m)$ -homogêneo $Q : \ell_p \longrightarrow \mathbb{K}$ da forma

$$Q(z) := P\left((z_j)_{j \in \mathbb{N}_1}, \dots, (z_j)_{j \in \mathbb{N}_m}\right).$$

Note que

$$\begin{aligned} |Q(z)| &= \left| P\left((z_j)_{j \in \mathbb{N}_1}, \dots, (z_j)_{j \in \mathbb{N}_m}\right) \right| \\ &\leq \|P\| \left\| (z_j)_{j \in \mathbb{N}_1} \right\|_p \cdots \left\| (z_j)_{j \in \mathbb{N}_m} \right\|_p \\ &\leq \|P\| \left\| (z_j)_{j=1}^\infty \right\|_p \cdots \left\| (z_j)_{j=1}^\infty \right\|_p. \end{aligned}$$

Tomando o supremo com $\left\| (z_j)_{j=1}^\infty \right\|_p = 1$, segue que $\|Q\| \leq \|P\|$. Além disso,

$$\sum_{|\beta|=n_1+\dots+n_m} |c_\beta(Q)|^s = \sum_{|\alpha^{(1)}|=n_1, \dots, |\alpha^{(m)}|=n_m} |c_{\alpha^{(1)} \dots \alpha^{(m)}}(P)|^s,$$

para todo $s > 0$ (veja também [122, Corollary 2.2] e [123, Lemma 2.1]). Daí, pela Desigualdade polinomial de Hardy–Littlewood em (4.7), existe uma constante $C_{\mathbb{K}, n_1+\dots+n_m, s_0}^{pol} \geq 1$ tal que

$$\begin{aligned} \left(\sum_{|\alpha^{(1)}|=n_1, \dots, |\alpha^{(m)}|=n_m} |c_{\alpha^{(1)} \dots \alpha^{(m)}}(P)|^{s_0} \right)^{\frac{1}{s_0}} &= \left(\sum_{|\beta|=n_1+\dots+n_m} |c_\beta(Q)|^{s_0} \right)^{\frac{1}{s_0}} \\ &\leq C_{\mathbb{K}, n_1+\dots+n_m, s_0}^{pol} \|Q\| \\ &\leq C_{\mathbb{K}, n_1+\dots+n_m, s_0}^{pol} \|P\|, \end{aligned}$$

donde segue o resultado.

(i) $\Rightarrow$ (ii) Para provarmos a otimalidade do expoente, consideremos o polinômio $(n_1, \dots, n_m)$ -homogêneo $Q : \ell_p \times \dots \times \ell_p \longrightarrow \mathbb{K}$ dado pelo Teorema 4.4

$$Q\left(x^{(1)}, \dots, x^{(m)}\right) = \sum_{i_1, \dots, i_m=1}^{\infty} \delta_{i_1, \dots, i_m} x_{i_1}^{(1)} \cdots x_{i_m}^{(m)}$$

tal que

$$\|Q\| \leq C_M \cdot n^{\max\left\{M\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)+\frac{1}{2}, 1-\frac{1}{p}\right\}}.$$

Assim suponha que o resultado seja válido para algum expoente $s > 0$. Então, usando a hipótese (i) para esse multipolinômio Q , temos

$$(n^M)^{\frac{1}{s}} \leq C_M \cdot n^{\frac{1}{2}+M\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)}.$$

Como n é arbitrário, fazendo $n \rightarrow \infty$, concluímos que

$$\frac{M}{s} \leq \frac{Mp + p - 2M}{2p}$$

e, portanto, $s \geq \frac{2Mp}{Mp+p-2M}$. □

É importante mencionar que a busca por estimativas de normas envolvendo polinômios ou multipolinômios homogêneos é um procedimento bastante clássico. Veja, por exemplo, [82].

4.2.2 Caso $M < p \leq 2M$

Usando argumentos similares da seção anterior, o propósito desta seção é apresentar uma nova versão da Desigualdade de Hardy–Littlewood quando $M < p \leq 2M$, ou seja, vamos estender (4.9) para multipolinômios.

Teorema 4.10. *Sejam $m, n_1, \dots, n_m$ inteiros positivos, $s \in (0, +\infty)$ e $M = \sum_{j=1}^m n_j$. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) *Existe uma constante $C_{n_1, \dots, n_m, s}^{\mathbb{K}} \geq 1$ tal que*

$$\left(\sum_{|\alpha^{(1)}|=n_1, \dots, |\alpha^{(m)}|=n_m} |c_{\alpha^{(1)} \dots \alpha^{(m)}}(P)|^s \right)^{\frac{1}{s}} \leq C_{n_1, \dots, n_m, s}^{\mathbb{K}} \|P\|$$

para todo polinômio $(n_1, \dots, n_m)$ -homogêneo $P : \ell_p \times \dots \times \ell_p \rightarrow \mathbb{K}$ dado por

$$P(x^{(1)}, \dots, x^{(m)}) = \sum_{|\alpha^{(1)}|=n_1, \dots, |\alpha^{(m)}|=n_m} c_{\alpha^{(1)} \dots \alpha^{(m)}}(P) (x^{(1)})^{\alpha^{(1)}} \dots (x^{(m)})^{\alpha^{(m)}}; \quad (4.11)$$

(ii)

$$s \geq \frac{p}{p - M}.$$

Demonstração. (ii) $\Rightarrow$ (i) Provaremos a afirmação para

$$s_0 = \frac{p}{p - M}.$$

De fato, novamente considere $\mathbb{N} = \mathbb{N}_1 \cup \dots \cup \mathbb{N}_m$ uma união disjunta com $\text{card}(\mathbb{N}_k) =$

4. Multipolinômios homogêneos entre espaços de Banach

$\text{card}(\mathbb{N})$, para todo $k = 1, \dots, m$, e seja $(z_j)_{j \in \mathbb{N}_k}$ uma sequência em ℓ_p definida analogamente como em (4.3). Usando argumentos anteriores, dado um polinômio $(n_1, \dots, n_m)$ -homogêneo $P : \ell_p \times \dots \times \ell_p \rightarrow \mathbb{K}$ como em (4.11), defina o polinômio $M := (n_1 + \dots + n_m)$ -homogêneo $Q : \ell_p \rightarrow \mathbb{K}$ por

$$Q(z) := P\left((z_j)_{j \in \mathbb{N}_1}, \dots, (z_j)_{j \in \mathbb{N}_m}\right).$$

Usando a norma do supremo segue que $\|Q\| \leq \|P\|$. Além disso,

$$\sum_{|\beta|=n_1+\dots+n_m} |c_\beta(Q)|^s = \sum_{|\alpha^{(1)}|=n_1, \dots, |\alpha^{(m)}|=n_m} |c_{\alpha^{(1)} \dots \alpha^{(m)}}(P)|^s,$$

para todo $s > 0$. Daí, pela Desigualdade polinomial de Hardy–Littlewood para $m < p \leq 2m$, (4.9), (note que $m \leq M$), existe uma constante $C_{\mathbb{K}, n_1, \dots, n_m, s_0}^{pol} \geq 1$ tal que

$$\begin{aligned} \left(\sum_{|\alpha^{(1)}|=n_1, \dots, |\alpha^{(m)}|=n_m} |c_{\alpha^{(1)} \dots \alpha^{(m)}}(P)|^{s_0} \right)^{\frac{1}{s_0}} &= \left(\sum_{|\beta|=n_1+\dots+n_m} |c_\beta(Q)|^{s_0} \right)^{\frac{1}{s_0}} \\ &\leq C_{\mathbb{K}, n_1+\dots+n_m, s_0}^{pol} \|Q\| \\ &\leq C_{\mathbb{K}, n_1+\dots+n_m, s_0}^{pol} \|P\|, \end{aligned}$$

provando (i).

(i) $\Rightarrow$ (ii) Agora suponha que existe $s > 0$ tal que para todo polinômio $(n_1, \dots, n_m)$ -homogêneo $P : \ell_p \times \dots \times \ell_p \rightarrow \mathbb{K}$ temos

$$\left(\sum_{|\alpha^{(1)}|=n_1, \dots, |\alpha^{(m)}|=n_m} |c_{\alpha^{(1)} \dots \alpha^{(m)}}(P)|^s \right)^{\frac{1}{s}} \leq C \|P\|.$$

Dado um inteiro positivo n , defina o operador M -linear $T_n : \ell_p \times \dots \times \ell_p \rightarrow \mathbb{K}$ da forma

$$T_n(x^{(1)}, \dots, x^{(M)}) := \sum_{i=1}^n x_i^{(1)} \dots x_i^{(M)}$$

com $M = \sum_{j=1}^m n_j$. Considerando $\mathbb{N}_k^{(i)}$ e $(x_j^{(i)})_{j \in \mathbb{N}_k^{(i)}}$ como no Teorema 4.4, para todo $i =$

4. Multipolinômios homogêneos entre espaços de Banach

$1, \dots, m$ e $k = 1, \dots, n_i$, defina $P_n : \overbrace{\ell_p \times \dots \times \ell_p}^m \longrightarrow \mathbb{K}$ por

$$P_n \left(x^{(1)}, \dots, x^{(m)} \right) \\ := T_n \left(\underbrace{\left(x_j^{(1)} \right)_{j \in \mathbb{N}_1^{(1)}}, \dots, \left(x_j^{(1)} \right)_{j \in \mathbb{N}_{n_1}^{(1)}}}_{n_1}, \dots, \underbrace{\left(x_j^{(m)} \right)_{j \in \mathbb{N}_1^{(m)}}, \dots, \left(x_j^{(m)} \right)_{j \in \mathbb{N}_{n_m}^{(m)}}}_{n_m} \right).$$

Empregando argumentos presentes no Teorema 4.4, concluímos que P_n é um polinômio $(n_1, \dots, n_m)$ -homogêneo e novamente pela norma do supremo

$$\|P_n\| \leq \|T_n\|.$$

Além disso, usando a Desigualdade de Hölder, é fácil observar que $\|T_n\| \leq n^{\frac{p-M}{p}}$. De fato,

$$\begin{aligned} \left| T_n \left(x^{(1)}, \dots, x^{(M)} \right) \right| &= \left| \sum_{i=1}^n x_i^{(1)} \dots x_i^{(M)} \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^n \left| x_i^{(1)} \dots x_i^{(M)} \right| \cdot 1 \\ &\leq \left(\sum_{i=1}^n \left| x_i^{(1)} \dots x_i^{(M)} \right|^{\frac{p}{M}} \right)^{\frac{M}{p}} \cdot \left(\sum_{i=1}^n 1^{\frac{p}{p-M}} \right)^{\frac{p-M}{p}} \\ &\leq \left[\left(\|x^{(1)}\|_p \dots \|x^{(M)}\|_p \right)^{\frac{p}{M}} \right]^{\frac{M}{p}} \cdot n^{\frac{p-M}{p}}. \end{aligned}$$

Como

$$\|T_n\| := \sup_{x^{(1)}, \dots, x^{(M)} \in B_{\ell_p}} \left| T_n \left(x^{(1)}, \dots, x^{(M)} \right) \right|$$

segue que $\|T_n\| \leq n^{\frac{p-M}{p}}$. Pela hipótese

$$n^{\frac{1}{s}} \leq C \|P_n\| \leq C \|T_n\| \leq C n^{\frac{p-M}{p}}.$$

Sendo n arbitrário, fazendo $n \rightarrow \infty$, concluímos que

$$\frac{1}{s} \leq \frac{p-M}{p}$$

e, portanto, $s \geq \frac{p}{p-M}$, o que finaliza a prova. $\square$

Referências Bibliográficas

- [1] A. Aizpuru, C. Pérez-Eslava and J. B. Seoane-Sepúlveda, *Linear structure of sets of divergent sequences and series*, Linear Algebra Appl. **418** (2006), 595–598.
- [2] N. Albuquerque, *Maximal lineability of the set of continuous surjections*, Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin. **21** (2014), 83–87.
- [3] N. Albuquerque, *Hardy–Littlewood/Bohnenblust–Hille multilinear inequalities and Peano curves on topological vector spaces*, PhD Thesis, UFPB/UFCG, 2014.
- [4] N. Albuquerque, L. Bernal-González, D. Pellegrino and J. B. Seoane-Sepúlveda, *Peano curves on topological vector spaces*, Linear Algebra Appl. **460** (2014), 81–96.
- [5] N. Albuquerque, F. Bayart, D. Pellegrino and J. B. Seoane-Sepúlveda, *Sharp generalizations of the multilinear Bohnenblust–Hille inequality*, J. Funct. Anal. **266** (2014), 3726–3740.
- [6] N. Albuquerque, F. Bayart, D. Pellegrino and J. B. Seoane-Sepúlveda, *Optimal Hardy–Littlewood type inequalities for polynomials and multilinear operators*, Israel J. Math. **211** (2016), 197–220.
- [7] N. Albuquerque, G. Araújo, D. Pellegrino and P. Rueda, *A note on multiple summing operators and applications*, Linear Multilinear Algebra. **67** (2019), 660–671.
- [8] N. Albuquerque and L. Rezende, *Asymptotic Estimates for Unimodular Multilinear Forms with Small Norms on Sequence Spaces*, Bull. Braz. Math. Soc, New Series, (2019), (online).
- [9] N. Alon and J. Spencer, *The Probabilistic Method*. Wiley-Interscience Series in Discrete Mathematics and Optimization. Wiley, New York (1992).
- [10] T. Aoki, *Locally bounded linear topological spaces*, Proc. Imp. Acad. Tokyo **18** (1942), 588–594.
- [11] G. Araújo, P. Jiménez-Rodríguez, G. A. Muñoz-Fernández, D. Núñez-Alarcón, D. Pellegrino, J. B. Seoane-Sepúlveda and D. M. Serrano-Rodríguez, *On the polynomial Hardy–Littlewood inequality*, Arch. Math. (Basel) **104** (2015), 259–270.
- [12] G. Araújo and D. Pellegrino, *Optimal Hardy–Littlewood type inequalities for m -linear forms on ℓ_p spaces with $1 \leq p \leq m$* , Arch. Math. (Basel) **105** (2015), 285–295.
- [13] G. Araújo, *Some classical inequalities, summability of multilinear operators and strange functions*, PhD Thesis, UFPB/UFCG, 2016.
- [14] G. Araújo, L. Bernal-González, G. A. Muñoz-Fernández, J. A. Prado-Bassas and J. B. Seoane-Sepúlveda, *Lineability in sequence and function spaces*, Studia Math. **237** (2017), 119–136.

- [15] G. Araújo and D. Pellegrino, *Optimal estimates for summing multilinear operators*, Linear Multilinear Algebra. **65** (2017), 930–942.
- [16] G. Araújo and D. Pellegrino, *A Gale–Berlekamp permutation-switching problem in higher dimensions*, European J. Combin. **77** (2019), 17–30.
- [17] G. Araújo and J. Santos, *On the Maurey–Pisier and Dvoretzky–Rogers Theorems*, Bull. Braz. Math. Soc. (N.S) **51** (2020), 1–9.
- [18] R. M. Aron, V. I. Gurariy and J. B. Seoane-Sepúlveda, *Lineability and spaceability of sets of functions on $\mathbb{R}$* , Proc. Amer. Math. Soc. **133** (2005), 795–803.
- [19] R. M. Aron and J. B. Seoane-Sepúlveda, *Algebrability of the set of everywhere surjective functions on $\mathbb{C}$* , Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin. **14** (2007), 25–31.
- [20] R. M. Aron, F. J. García-Pacheco, D. Pérez-García and J. B. Seoane-Sepúlveda, *On dense-lineability of sets of functions on $\mathbb{R}$* , Topology. **48** (2009), 149–156.
- [21] R. M. Aron, L. Bernal-González, D. Pellegrino and J. B. Seoane-Sepúlveda, *Lineability: The Search for Linearity in Mathematics*. Monographs and Research Notes in Mathematics. CRC Press, Boca Raton (2016).
- [22] R. M. Aron, D. Núñez-Alarcón, D. Pellegrino and D. M. Serrano-Rodríguez, *Optimal exponents for Hardy–Littlewood inequalities for m -linear operators*, Linear Algebra Appl. **531** (2017), 399–422.
- [23] R. M. Aron, L. Bernal-González, P. Jiménez-Rodríguez, G. A. Muñoz-Fernández and J. B. Seoane-Sepúlveda, *On the size of special families of linear operators*, Linear Algebra Appl. **544** (2018), 186–205.
- [24] P. Bandyopadhyay and G. Godefroy, *Linear structures in the set of norm-attaining functionals on a Banach space*, J. Convex Anal. **13** (2006), 489–497.
- [25] C. S. Barroso, G. Botelho, V. V. Fávaro and D. Pellegrino, *Lineability and spaceability for the weak form of Peano’s theorem and vector-valued sequence spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **141** (2013), 1913–1923.
- [26] R. G. Bartle, *The elements of integration and Lebesgue measure*. Wiley-Interscience, Hoboken (1995).
- [27] A. Bartoszewicz and S. Glab, *Strong algebrability of sets of sequences of functions*, Proc. Amer. Math. Soc. **141** (2013), 827–835.
- [28] A. Bartoszewicz, S. Glab, D. Pellegrino and J. B. Seoane-Sepúlveda, *Algebrability, non-linear properties, and special functions*, Proc. Amer. Math. Soc. **141** (2013), 3391–3402.
- [29] A. Bartoszewicz, M. Bienias, M. Filipczak and S. Glab, *Strong $\mathfrak{c}$ -algebrability of strong Sierpiński–Zygmund, smooth nowhere analytic and other sets of functions*, J. Math. Anal. App. **412** (2014), no.2, 620–630.
- [30] A. Bartoszewicz, M. Bienias, S. Glab and T. Natkaniec, *Algebraic structures in the set of surjective functions*, J. Math. Anal. App. **441** (2016), no.2, 574–585.
- [31] F. Bastin, J.A. Conejero, C. Esser and J. B. Seoane-Sepúlveda, *Algebrability and nowhere Gevrey differentiability*, Israel J. Math. **205** (2015), 127–143.
- [32] F. Bayart, *Linearity of sets of strange functions*, Michigan Math. J. **53** (2005), 291–303.
- [33] F. Bayart, *Topological and algebraic genericity of divergence and universality*, Studia Math. **167** (2005), 161–181.

- [34] F. Bayart, *Maximum modulus of random polynomials*, Q. J. Math. **63** (2012), 21–39.
- [35] F. Bayart, D. Pellegrino and J. B. Seoane-Sepúlveda, *The Bohr radius of the n -dimensional polydisk is equivalent to $\sqrt{(\log n)/n}$* , Adv. Math. **264** (2014), 726–746.
- [36] J. Bergh and J. Löfström, *Interpolation spaces*. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, vol. 223, Springer-Verlag, Berlin-New York (1976).
- [37] L. Bernal-González, *Algebraic genericity of strict-order integrability*, Studia Math. **199** (2010), 279–293.
- [38] L. Bernal-González and M. O. Cabrera, *Lineability criteria, with applications*, J. Funct. Anal. **266** (2014), 3997–4025.
- [39] L. Bernal-González, D. Pellegrino and J. B. Seoane-Sepúlveda, *Linear subsets of non-linear sets in topological vector spaces*, Bull. Amer. Math. Soc. **51** (2014), 71–130.
- [40] L. Bernal-González, M. C. Calderón-Moreno and J. A. Prado-Bassas, *The set of space-filling curves: topological and algebraic structure*, Linear Algebra Appl. **467** (2015), 57–74.
- [41] L. Bernal-González, *The algebraic size of the family of injective operators*, Open Math. **15** (2017), 13–20.
- [42] L. Bernal-González, J. A. Conejero, M. Murillo-Arcilla and J. B. Seoane-Sepúlveda, *$[S]$ -linear and convex structures in function families*, Linear Algebra Appl. **579** (2019), 463–483.
- [43] H. F. Bohnenblust and E. Hille, *On the absolute convergence of Dirichlet series*, Ann. of Math. **32** (1931), 600–622.
- [44] G. Botelho, D. Diniz and D. Pellegrino, *Lineability of the set of bounded linear non-absolutely summing operators*, J. Math. Anal. App. **357** (2009), 171–175.
- [45] G. Botelho, M. Matos and D. Pellegrino, *Lineability of the summing set of homogeneous polynomials*, Linear Multilinear Algebra. **58** (2010), 61–74.
- [46] G. Botelho, D. Diniz, V.V. Fávaro and D. Pellegrino, *Spaceability in Banach and quasi-Banach sequence spaces*, Linear Algebra. App. **434** (2011), 1255–1260.
- [47] G. Botelho, D. Cariello, V.V. Fávaro and D. Pellegrino, *Maximal spaceability in sequence spaces*, Linear Algebra. App. **437** (2012), 2978–2985.
- [48] G. Botelho, V.V. Fávaro, D. Pellegrino and J. B. Seoane-Sepúlveda, *$L_p[0, 1] \setminus \bigcup_{q>p} L_q[0, 1]$ is spaceable for every $p > 0$* , Linear Algebra. App. **436** (2012), 2963–2965.
- [49] G. Botelho and V.V. Fávaro, *Constructing Banach spaces of vector-valued sequences with special properties*, Michigan Math. J. **64** (2015), 539–554.
- [50] G. Botelho, E. Torres and T. Velanga, *Linearization of multipolynomials and applications*, Arch. Math. (Basel) **110** (2018), 605–615.
- [51] J. R. Campos, P. Jiménez-Rodríguez, G. A. Muñoz-Fernández, D. Pellegrino and J. B. Seoane-Sepúlveda, *On the real polynomial Bohnenblust–Hille inequality*, Linear Algebra Appl. **465** (2015), 391–400.
- [52] D. Cariello and J. B. Seoane-Sepúlveda, *Basic sequences and spaceability in ℓ_p spaces*, J. Funct. Anal. **266** (2014), 3797–3814.
- [53] D. Cariello, V.V. Fávaro and J. B. Seoane-Sepúlveda, *Self-similar functions, fractals and algebraic genericity*, Proc. Amer. Math. Soc. **145** (2017), 4151–4159.

- [54] N. L. Carothers, *A short Course on Banach Space Theory*. In: London Math Soc Student Texts, vol. 64. Cambridge University Press, Cambridge (2005).
- [55] W. Cavalcante and D. Núñez-Alarcón, *Remarks on an inequality of Hardy and Littlewood*, Quaest. Math. **39** (2016), 1101–1113.
- [56] I. Chernega and A. Zagorodnyuk, *Generalization of the polarization formula for nonhomogeneous polynomials and analytic mappings on Banach spaces*, Topology. **48** (2009), no. 2-4, 197–202.
- [57] K.C. Ciesielski, J. L. Gámez-Merino, L. Mazza and J. B. Seoane-Sepúlveda, *Cardinal coefficients related to surjectivity, Darboux, and Sierpiński-Zygmund maps*, Proc. Amer. Math. Soc. **145** (2017), 1041–1052.
- [58] K. Conrad, *L^p -spaces for $0 < p < 1$* , preprint.
- [59] M. M. Day, *The spaces L^p with $0 < p < 1$* , Bull. Amer. Math. Soc. **46** (1940), 816–823.
- [60] A. Defant, L. Frerick, J. Ortega-Cerdà, M. Ounaïes and K. Seip, *The Bohnenblust–Hille inequality for homogeneous polynomials is hypercontractive*, Ann. of Math. (2) **174** (2011), 485–497.
- [61] J. Diestel, H. Jarchow and A. Tonge, *Absolutely summing operators*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 43, Cambridge University Press, Cambridge (1995).
- [62] V. Dimant and P. Sevilla-Peris, *Summation of coefficients of polynomials on ℓ_p spaces*, Publ. Mat. **60** (2016), 289–310.
- [63] S. Dineen, *Complex analysis on infinite dimensional spaces*. Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag London, Ltd., London (1999).
- [64] N. Dunford and J. T. Schwartz, *Linear Operators*. Pure and Applied Mathematics, vol. 7, Interscience Publishers, Inc., New York (1958).
- [65] D. Diniz, V.V. Fávaro, D. Pellegrino and A. Raposo JR, *Spaceability of the sets of surjective and injective operators between sequence spaces*, Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fís. Nat. Ser. A Mat. RACSAM **114** (2020), no. 4, 194.
- [66] D. Diniz and A. Raposo JR, *A note on the geometry of certain classes of linear operators*, arXiv: 2009.02407v1 [math.FA].
- [67] H. B. Enderton, *Elements of set theory*. Academic Press, New York-London (1977).
- [68] P. Enflo, V. Gurariy and J. B. Seoane-Sepúlveda, *Some results and open questions on spaceability in function spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **366** (2014), no.2, 611–625.
- [69] M. Fabian, P. Habala, P. Hájek, V. Montesinos and V. Zizler, *Banach Space Theory: The Basis for Linear and Nonlinear Analysis*. CMS Books in Mathematics/Ouvrages de Mathématiques de la SMC, Springer, New York (2011).
- [70] V.V. Fávaro, D. Pellegrino and D. Tomaz, *Lineability and spaceability: a new approach*, Bull. Braz. Math. Soc. (N.S) **51** (2020), 27–46.
- [71] V.V. Fávaro, D. Pellegrino and P. Rueda, *On the size of the set of unbounded multilinear operators between Banach spaces*, Linear Algebra Appl. **606** (2020), 144–158.
- [72] G. B. Folland, *Real analysis, modern techniques and their applications*. A Wiley-Interscience Publication. Inc., New York (1999).

- [73] J. L. Gámez-Merino, G. Muñoz-Fernández and J. B. Seoane-Sepúlveda, *Lineability and additivity in $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$* , J. Math. Anal. App. **369** (2010), 265–272.
- [74] J. L. Gámez-Merino, G. Muñoz-Fernández, V. M. Sánchez and J. B. Seoane-Sepúlveda, *Sierpiński-Zygmund functions and other problems on lineability*, Proc. Amer. Math. Soc. **138** (2010), 3863–3876.
- [75] J. L. Gámez-Merino, *Large algebraic structures inside the set of surjective functions*, Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin. **18** (2011), 297–300.
- [76] F. J. García-Pacheco, F. Rambla-Barreno and J. B. Seoane-Sepúlveda, *Q -linear functions, functions with dense graph, and everywhere surjectivity*, Math. Scand. **102** (2008), 156–160.
- [77] F. J. García-Pacheco and D. Puglisi, *A short note on the lineability of norm-attaining functionals in subspaces of ℓ_{∞}* , Arch. Math. (Basel) **105** (2015), 461–465.
- [78] A. Grothendieck, *Résumé de la théorie métrique des produits tensoriels topologiques*, Bol. Soc. Mat. São Paulo. **8** (1956), 1–79.
- [79] V. I. Gurariy, *Subspaces and bases in spaces of continuous functions*, Dokl. Akad. Nauk SSSR. **167** (1966), 971–973.
- [80] V. I. Gurariy and L. Quarta, *On lineability of sets of continuous functions*, J. Math. Anal. Appl. **294** (2004), 62–72.
- [81] G. Hardy and J. E. Littlewood, *Bilinear forms bounded in space $[p, q]$* , Quart. J. Math. **5** (1934), 241–254.
- [82] L. A. Harris, *Bounds on the derivatives of holomorphic functions of vectors*. Analyse fonctionnelle et applications (Comptes Rendus Colloq. Analyse, Inst. Mat., Univ. Federal Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 1972), pp. 145–163.
- [83] F. L. Hernández, C. Ruiz and V. M. Sánchez, *Spaceability and operator ideals*, J. Math. Anal. Appl. **431** (2015), 1035–1044.
- [84] J. G. Hocking and G. S. Young, *Topology*. Second edition. Dover Publications, Inc., New York (1988).
- [85] H. Jarchow, *Locally Convex Spaces*. Math Leitfäden. Teubner, Stuttgart (1981).
- [86] P. Jiménez-Rodríguez, P. S. Maghsoudi, G. Muñoz-Fernández and J. B. Seoane-Sepúlveda, *Injective mappings in $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ and lineability*, Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin. **23** (2016), 609–623.
- [87] F. B. Jones, *Connected and disconnected plane sets and the functional equation $f(x) + f(y) = f(x + y)$* , Bull. Amer. Math. Soc. **48** (1942), 115–120.
- [88] J. P. Kahane, *Some random series of functions*. Cambridge Studies in Adv. Math., 5, Cambridge University Press, Cambridge (1985).
- [89] N. J. Kalton, *Linear operators on L^p for $0 < p < 1$* , Trans. Amer. Math. Soc. **259** (1980), 319–355.
- [90] N. J. Kalton, *Convexity, type and the three space problem*, Studia Math. **69** (1981), 247–287.
- [91] N. J. Kalton, *Locally Complemented Subspaces and $\mathcal{L}_p$ -Spaces for $0 < p < 1$* , Math. Nachr. **115** (1984), 71–97.
- [92] N. J. Kalton, N. T. Peck and J. W. Roberts, *An F -space Sampler*. London Math. Soc. Lecture Note Ser., vol. 89. Cambridge University Press, Cambridge (1985).
- [93] N. J. Kalton, *quasi-Banach spaces*. Handbook of the geometry of Banach spaces, Vol. 2, 1099–1130, North-Holland, Amsterdam (2003).

- [94] D. Kitson and R. M. Timoney, *Operator ranges and spaceability*, J. Math. Anal. Appl. **378** (2011), 680–686.
- [95] P. Kolwicz, *Kadec–Klee properties of some quasi-Banach function spaces*, Positivity. **22** (2018), 983–1013.
- [96] G. Köthe, *Topological Vector Spaces I*. Springer-Verlag New York Inc., New York (1969).
- [97] H. Lebesgue, *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives*, Gauthier-Willars, 1904 (in French).
- [98] B. Levine and D. Milman, *On linear sets in space C consisting of functions of bounded variation*, Commun. Inst. Sci. Math. Méc. Univ. Kharkoff [Zapiski Inst. Mat. Mech.] (4) **16** (1940), 102–105 (in Russian).
- [99] J. Lindenstrauss and A. Pelczynski, *Absolutely summing operators in $\mathcal{L}_p$ -spaces and their applications*, Studia. Math. **29** (1968), 275–326.
- [100] G. W. Mackey, *On infinite dimensional linear spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **57** (1945), 155–207.
- [101] M. S. Macphail, *Absolute and unconditional convergence*, Bull. Amer. Math. Soc. **53** (1947), 121–123.
- [102] I. J. Maddox, *A non-absolutely summing operators*, J. Austral. Math. Soc. (Series A) **43** (1987), 70–73.
- [103] L. Maligranda, *Type, cotype and convexity properties of Quasi-Banach spaces*, Proceedings of the International Symposium on Banach and Function Spaces, Kitakyushu, Japan, October 2-4, 2003, pp. 83–120.
- [104] A. Montanaro, *Some applications of hypercontractive inequalities in quantum information theory*, J. Math. Phys. **53** (2012), no. 12, 122206, 15 pp.
- [105] J. Mujica, *Complex analysis in Banach spaces*. Dover Publications, Mineola (2010).
- [106] T. Nogueira and D. Pellegrino, *On the size of certain subsets of invariant Banach sequence spaces*, Linear Algebra. Appl. **487** (2015), 172–183.
- [107] A. Nunes, *A note on the Hardy–Littlewood inequalities for multilinear forms*, Math. Inequal. Appl. **21** (2018), 569–574.
- [108] D. Núñez-Alarcón, *A note on the polynomial Bohnenblust–Hille inequality*, J. Math. Anal. Appl. **407** (2013), 179–181.
- [109] W. Orlicz, *Über unbedingte Konvergenz in Funktionenräumen, II*, Studia Math. **4** (1933), 41–47 (German).
- [110] G. Peano, *Sur une courbe, qui remplit toute une aire plane*, Math. Ann. **36** (1890), 157–160 (French).
- [111] D. Pellegrino and E. Teixeira, *Norm optimization problem for linear operators in classical Banach spaces*, Bull. Braz. Math. Soc. **40** (2009), 417–431.
- [112] D. Pellegrino, J. Santos, D. M. Serrano-Rodríguez and E. Teixeira, *A regularity principle in sequence spaces and applications*, Bull. Sci. Math. **141** (2017), 802–837.
- [113] T. Praciano-Pereira, *On bounded multilinear forms on a class of ℓ_p spaces*, J. Math. Anal. Appl. **81** (1981), 561–568.
- [114] D. Puglisi and J. B. Seoane-Sepúlveda, *Bounded linear non-absolutely summing operators*, J. Math. Anal. App. **338** (2008), 292–298.
- [115] H. Sagan, *Space-Filling Curves*. Springer-Verlag, New York (1994).

- [116] J. B. Seoane-Sepúlveda, *Chaos and lineability of pathological phenomena in analysis*, ProQuest LLC, Ann Arbor, MI, 2006. PhD Thesis, Kent State University.
- [117] W. J. Stiles, *On Properties of Subspaces of ℓ_p , $0 < p < 1$* , Trans. Amer. Math. Soc. **149** (1970), 405–415.
- [118] D. Tomaz, *Linear structure in certain subsets of quasi-Banach sequence spaces*, Linear Multilinear Algebra. **67** (2019), 1561–1566.
- [119] D. Tomaz, *Hardy–Littlewood inequalities for multipolynomials*, Adv. Oper. Theory. **4** (2019), no.3, 688–697.
- [120] T. Velanga, *Lower bounds for the constants in the real multipolynomial Bohnenblust–Hille inequality*, Rend. Circ. Mat. Palermo, II. Ser (2020).
- [121] T. Velanga, *Ideals of polynomials between Banach spaces revisited*, Linear Multilinear Algebra. **66** (2018), 2328–2348.
- [122] T. Velanga, *Multilinear mappings versus homogeneous polynomials and a multipolynomial polarization formula*, Linear Multilinear Algebra. (online) 2019.
- [123] T. Velanga, *Absolutely summing multipolynomials*, Results Math. **74** (2019), 1–17.
- [124] T. Velanga, *Multipolynomials between Banach spaces: designs of a theory*, PhD Thesis, UNICAMP, 2019.
- [125] W. P. Ziemer, *Modern real analysis*. Graduate Texts in Mathematics. With contributions by Monica Torres, vol. 278, 2nd edn, p. 9. Springer, Cham (2017).
- [126] S. Willard, *General Topology*. Dover Publication, Inc., Mineola, New York (2004).
- [127] C. Wu, Y. Li, *On the triangle inequality in Quasi Banach Spaces*, J. Inequal. Pure. Appl. Math. **9** (2008), pp.4.