

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação
Mestrado em Matemática

Sobre Variedades m -quase-Einstein: Rigidez e Fórmulas Estruturais

Johnatan da Silva Costa

JOÃO PESSOA – PB
FEVEREIRO DE 2020

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação
Mestrado em Matemática

Sobre Variedades m -quase-Einstein: Rigidez e Fórmulas Estruturais

por

Johnatan da Silva Costa

sob a orientação do

Prof. Dr. Márcio Silva Santos

João Pessoa – PB
Fevereiro de 2020

Catálogo na publicação
Universidade Federal da Paraíba
Biblioteca Central

C838s COSTA, Johnatan da Silva.

Sobre Variedades m-quase-Einstein: Rigidez e Fórmulas Estruturais / Johnatan da Silva Costa. – João Pessoa, 2020
99 f.

Orientação: Márcio Silva Santos.

Dissertação (Mestrado) – UFPB/CCEN.

1. Variedades quasi-Einstein. 2. Resultados de Rigidez. 3. Formas Espaciais. 4. Tensor de Weyl. 5. Produto Warped.

UFPB/BC

CDU: 514.774

Sobre Variedades m -quase-Einstein: Rigidez e Fórmulas Estruturais

por

Johnatan da Silva Costa 

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Paraíba como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Geometria

Aprovada em 19 de fevereiro de 2020.

Banca Examinadora:



Prof. Dr. Márcio Silva Santos – UFPB

(Orientador)



Prof. Dr. Rondinelle Marcolino Batista – UFPI

(Examinador Externo)



Prof. Dr. Allan George de Carvalho Freitas – UFPB

(Examinador Interno)

¹O autor foi bolsista da CAPES durante a elaboração desta dissertação.

A compreensão e a exploração científica não é apenas sobre a parte material do mundo. Minha missão é trazer para a ciência e para os interessados na ciência esse apego ao mistério. Fazer o público entender que a ciência é apenas mais uma maneira de entendermos quem somos. (Marcelo Gleiser)

Agradecimentos

Gostaria de agradecer primeiramente a Deus pela vida, sua beleza e por ter-nos dado a capacidade de decifrar a natureza e adentrarmos nos encantos que o imprevisível nos leva a ter conhecimento. Aos meus pais, Maria de Jesus e Josimar, e irmãs, Jéssica e Emylly, pelos ensinamentos valiosíssimos, o apoio, os sacrifícios e o esforço por sempre tentar criar em nós um senso de entendimento, respeito, compreensão, simplicidade e dedicação. Amo vocês, não poderia imaginar uma família melhor e a gratidão de uma vida ainda não seria o bastante para agradecê-los.

Penso que esta é a oportunidade ideal para prestar agradecimentos àqueles que desempenharam um papel fundamental pela minha entrada nos caminhos da Matemática. Professor Cláudio Dias, gostaria de poder dizer pessoalmente o tanto que me inspirou com seu exemplo e como foram valiosas as oportunidades de aprendizado com o senhor, espero que estas palavras possam alcançá-lo onde estiver, esteja em paz.

Aos professores do Departamento de Matemática da UFRN: Viviane Simioli, David Villanueva, Giselle Costa, Liliane Gutierre e Ronaldo Freire, muito obrigado por tudo. Vocês são grandes mestres e exemplos de profissionais. Também a Márcia Guedes e Zé Maria por me fazerem enxergar a Matemática além da escola.

Agradeço aos meus tios, tias, primos e primas por serem sempre presente nos bons e maus dias da vida. Minhas avós Hilda e Francisca, e meu avó Agostinho, vocês me deram lições inesquecíveis.

Minha Karine Maria, muito obrigado por todos os dias estar presente mesmo que pudessem haver quilômetros entre nós. Você é maravilhosa e sou muito feliz e grato pela vida ter me presenteado com seu amor e por poder te amar.

Aos meus amigos de graduação e de vida, em especial Cleitella, Ari, Ivan, Alê, Gabi, Bruno, Gabriel, William e Elton, vocês são presentes que a vida me deu. Aos meus amigos e companheiros de mestrado, dos quais gostaria de citar Pedro, Angélica, Raoni, Railane, Lenin, Geovane, Renato Burity, Douglas e José Pereira, não só os agradeço por todos os ensinamentos, os momentos de descontração e o sentimento de pertencimento que vocês juntos criaram, como também os desejo força e coragem para enfrentar as lutas que a vida e a pesquisa no Brasil apresentam. Renato Bezerra Silvestre, obrigado por mostrar o caminho e contribuir, com sua amizade e conselho.

Não poderia de forma alguma deixar de agradecer aos professores Márcio Santos, Allan George, Ricardo Burity e Elisandra, da pós-Graduação da UFPB, por transmi-

tirem ânimo em ensinar e aprender Matemática. Todos vocês são fonte de inspiração. Em especial, agradeço ao meu orientador, professor Márcio Santos, pela paciência, companheirismo e dedicação, o senhor é um grande profissional.

Sou grato à CAPES pelo tão necessário suporte financeiro e por apoiar a pesquisa neste país, por mais difíceis que ainda sejam as condições para sua realização. Muito obrigado. Aproveito este parágrafo para agradecer ao ex-diretor do Inpe, Ricardo Galvão, pelo empenho, profissionalismo e preocupação com a pesquisa e os pesquisadores brasileiros.

Enfim, são muitos aqueles a quem devo gratidão, pois penso que sou quem sou porque todos eles são quem são e por isso sou grato. Finalizo agradecendo ao professor Rondinelle pela disponibilidade e dedicação à pesquisa.

Resumo

Nesta dissertação, tratamos acerca de variedades m -quase-Einstein e uma de suas generalizações. Apresentamos demonstrações de resultados de rigidez e fórmulas estruturais obtidos por diversos autores em publicações distintas, se destacando a caracterização de variedades Riemannianas completas m -quase-Einstein generalizadas como formas espaciais, dada por Barros e Ribeiro em um trabalho publicado em 2014, cuja mesma tese fora obtida a partir de outra hipótese fornecida por Barros e Gomes em uma publicação de 2013. Mostramos também resultados topológicos sobre crescimento volumétrico de bolas geodésicas em variedades quase-Einstein que são também Einstein, exibidos por Barros, Ribeiro e Batista em 2014. Destacamos ainda a abordagem do trabalho devido a Catino no artigo *Generalized quasi-Einstein manifolds with harmonic Weyl tensor*, publicado em 2012 no *Mathematische Zeitschrift*, onde mostra-se que uma variedade Einstein completa com estrutura quase-Einstein, tensor de Weyl harmônico e curvatura radial de Weyl nula é localmente um produto warped com fibra $(n - 1)$ -dimensional Einstein.

Palavras-chave: Variedade quase-Einstein. Resultados de Rigidez. Formas espaciais. Tensor de Weyl. Produto warped.

Abstract

In this dissertation, we treat about m -quasi-Einstein manifolds and one of its generalizations. We present demonstrations of rigidity results and structural formulas obtained by several authors in distinct publications, standing out the characterization of complete m -quasi-Einstein Riemannian manifolds as space forms, given by Barros and Ribeiro at a work published in 2014, whose same thesis was obtained from other hypothesis provided by Barros and Gomes at a 2013 publication. We also show topological results about volume growth of geodesic balls on quasi-Einstein manifolds that are also Einstein, presented by Barros, Ribeiro and Batista in 2014. Also noteworthy the approach of the work due to Catino at the paper *Generalized quasi-Einstein manifolds with harmonic Weyl tensor*, published in 2012 on the *Mathematische Zeitschrift*, where show up that a complete Einstein manifold with quasi-Einstein structure, harmonic Weyl tensor and zero radial Weyl curvature is locally a warped product with $(n - 1)$ -dimensional Einstein fiber.

Keywords: quasi-Einstein manifolds. Rigidity results. Space forms. Weyl tensor. Warped product.

Sumário

Introdução	2
1 Preliminares	6
1.1 Métricas Riemannianas	6
1.2 Conexões Riemannianas e Referencial Geodésico	9
1.3 Imersões e a Segunda Forma Fundamental	17
1.4 Tensores e Curvatura de Ricci	21
2 Variedades m-quase-Einstein e Produto Warped Einstein	33
2.1 Produtos Warped Einstein Compactos com Curvatura Escalar Não-Positiva	33
2.2 Rigidez de Métricas m -quase-Einstein	37
2.3 Limites no Crescimento Volumétrico de Bolas Geodésicas	52
3 Variedades m-quase-Einstein Generalizadas	60
3.1 Caracterizações e Fórmulas Integrais para Métricas m -quase-Einstein	
Generalizadas	60
3.2 Uma Métrica quase-Einstein Generalizada Compacta com Curvatura Es-	
calar Constante	78
4 Variedades quase-Einstein Generalizadas com Tensor de Weyl Harmô-	
nico	82
Referências Bibliográficas	96

Introdução

Uma variedade é dita Einstein quando a sua curvatura de Ricci pode ser escrita como um múltiplo de sua métrica. Este conceito surgiu a partir de trabalhos de Albert Einstein publicados primeiramente em 1915 – vide [44], originalmente utilizado no caso Lorentziano, como soluções de equações de campo de Einstein no vácuo com constante cosmológica, a saber,

$$\text{Ric} - \frac{1}{2}Rg + \Lambda g = \kappa T,$$

em que Λ é a constante cosmológica, κ é a constante de gravitação universal e T é o tensor de energia-estresse. Este é um tema bastante rico com ramificações para outras áreas do conhecimento científico que suscitou a investigação de *variedades tipo-Einstein*, cuja estrutura básica de certa forma estende as Einstein, e que vem sendo extensamente explorado, tendo inspirado o surgimento dos conceitos básicos e de muitas noções fundamentais do que estudamos nesta dissertação. O livro *Einstein Manifolds*, da autoria do grupo francês intitulado Arthur L. Besse, aprofunda esta temática e será recorrentemente citado aqui.

Os estudos de variedades com estrutura quase-Einstein, foco desta dissertação, tiveram início a partir das análises fundamentais realizadas por Dong-Soo Kim e Young Hoo Kim no artigo [30], publicado em 2003, em que os autores buscavam responder ao seguinte questionamento presente em [8]:

"Existe um produto warped Einstein compacto com função warping não constante?"

Os autores anteriores obtiveram uma solução parcial a esta questão, como veremos no Capítulo 2. Veremos também que este questionamento se manteve presente em diversos outros trabalhos posteriores a [30], sendo uma questão central à teoria.

Posteriormente, Chenxu He, Peter Petersen e William Wylie estenderam esse resultado considerando o caso em que a base é compacta e com bordo, em [27]. Estes últimos autores lidaram, em outros trabalhos, com esse questionamento nos casos em que a compacidade é desconsiderada. Jeffrey Case, Yu-Jen Shu e Guofang Wei provaram que métricas quase-Einstein shrinking são triviais em [17], sendo responsáveis pela formalização do conceito de variedades quase-Einstein e também estudamos este

artigo no Capítulo 2.

Um conceito recorrente nesta dissertação é o de resultados de rigidez que, em geral, são aqueles em que, supondo-se que um determinado objeto tenha certas características, essas o obrigam a ser de um determinado tipo. Por exemplo, como consequência do Teorema Egregium de Gauss, toda superfície do $\mathbb{R}^3$ que é isométrica a uma esfera é uma esfera. Também, pelo Teorema de Gauss-Bonnet, uma superfície compacta com curvatura gaussiana positiva é homeomorfa à esfera, isto é, é topologicamente uma esfera. Estes são resultados de rigidez, ou seja, a propriedade de ser isométrica, respectivamente compacta com curvatura de Gauss positiva, à esfera obriga a superfície a ser uma esfera, respectivamente uma esfera topológica. Diversos dos resultados estudados e apresentados nesta dissertação são classificados desta forma.

Sendo subdividido em 4 capítulos, neste trabalho, com base nos artigos [30, 17, 3, 5, 18], estudamos questões relativas a variedades quase-Einstein e uma de suas generalizações, interrelacionando entes algébricos, analíticos e topológicos. Em certos momentos, estabelecemos relação com outras áreas da Geometria, como é o caso dos solitons e variedades estáticas, apresentando interfaces no estudo das variedades tipo-Einstein tratadas com outros objetos geométricos e ramos.

O primeiro capítulo se presta a apresentar os conceitos básicos à compreensão da teoria e dos capítulos seguintes, apresentando noções, definições e resultados que são importantes ao desenvolvimento da dissertação. Subdividimos em 4 seções, cuja primeira trata de métricas Riemannianas, a segunda trata de conexões Riemannianas e referencial geodésico – este último se configura em uma ferremanta de grande valia no que tange ao cálculo em variedades –, e a terceira aborda imersões e segunda forma fundamental.

Na última seção do *Capítulo 1*, apresentamos definições e propriedades de tensores covariantes, divergência de tensores e curvaturas, passando pelo tensor curvatura algébrica. Além de apresentarmos resultados importantes à dissertação e que serão recorrentes, sobretudo nos dois capítulos seguintes, cujas demonstrações, quando não fornecidas, são referenciadas.

Dividimos o *Capítulo 2* em três seções. A seção de abertura aborda o artigo [30], apresentando uma proposição fundamental derivada de [36] e demonstrando uma obstrução à existência de variedades quase-Einstein compactas não-triviais, resultado principal do artigo estudado nesta seção. Já a segunda seção tem por objetivo tratar dos resultados presentes em [17], excluindo-se os relativos a variedades Kähler. Essa primeira parte aborda resultados de rigidez e algumas fórmulas fundamentais ao estudo de variedades quase-Einstein – falaremos mais sobre rigidez adiante.

Ainda sobre o segundo capítulo, a *Seção 3* abarca o artigo [3], seguindo traba-

lhos clássicos devidos a Yau [53] e Calabi [10] com o intuito de analisar limites de crescimento de bolas geodésicas em produtos warped que são também Einstein. É interessante observar que estes dois pesquisadores concluíram o resultado que inspirou Barros, Batista e Ribeiro, autores do artigo estudado na seção aqui comentada, independentemente entre 1974 e 1975.

O *Capítulo 3*, bem como o seguinte, trata de variedades quase-Einstein generalizadas e é dedicado, em sua primeira seção, aos resultados de [5], que nos fornece também resultados de rigidez, estendendo fórmulas de [17] a este novo caso e obtendo fórmulas integrais. A última seção aborda [4] que estende alguns resultados de Barros e Ribeiro em [5], porém se concentra na rigidez como objetivo central e fornece novas observações à teoria.

No *Capítulo 4*, estudamos unicamente o artigo [18], da autoria de Giovani Catino. Embora ele tenha sido o primeiro a tratar de variedades quase-Einstein generalizadas e este assunto ter sido tratado no capítulo anterior, optamos por abordá-lo a parte, pois Catino estudou o tensor de Weyl e suas implicações a respeito do tipo de variedade por ele desenvolvido e isto se destaca particularmente na abordagem desta dissertação. Neste capítulo, alguns de seus conceitos centrais são abordados nele mesmo, outros na *Seção 3* do *Capítulo 1*, devido às suas particularidades.

He, Petersen e Wylie, em [27], entre várias de suas conclusões e seus estudos a respeito de variedades quase-Einstein compactas com bordo, às quais denominam $(\lambda, n + m)$ -Einstein, obtiveram uma versão menos geral da conclusão principal de Catino. Porém, salientamos que esse artigo é de grande relevância e merece destaque por seus próprios méritos.

É importante destacar que este conteúdo permanece atual e é estudado sob diferentes óticas. Destacamos o artigo [26], da autoria de Nazareno e publicado 2019, que trata de uma generalização denominada *Einstein-type*, que abarca todos os casos estudados nesta dissertação. A título de curiosidade, uma variedade (M^n, g) possui estrutura Einstein-type se existe uma função $\lambda \in C^\infty(M)$ e um campo de vetores suave $X \in \mathfrak{X}(M)$ tais que

$$\alpha \text{Ric} + \frac{\beta}{2} \mathcal{L}_X g + \mu X^\flat \otimes X^\flat = (\rho R + \lambda)g,$$

para constantes $\alpha, \beta, \mu, \rho \in \mathbb{R}$ e $(\alpha, \beta, \mu) \neq (0, 0, 0)$.

Por fim, utilizaremos certas expressões em inglês devido ao seu uso corrente, a saber, *solitons*, *almost*, *warped*, *flat*. Poderíamos traduzi-las, respectivamente, para "sólitons", "quase", "torcido" e "plano", porém perderiam certa força de expressão. Além disso, optamos também pelas nomenclaturas em inglês para a classificação de

variedades quase-Einstein, advindas dos Ricci solitons, em função do sinal de λ , a saber *shrinking*, *steady* e *expanding*, que ficará bem definida no *Capítulo 2*.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo apresentaremos os conceitos e resultados fundamentais ao estudo de variedades produto warped que são quase-Einstein, a saber: Métricas e Conexões Riemannianas, Imersões e a Segunda Forma Fundamental, Curvaturas e Tensores. Sempre que possível, apresentaremos exemplos e relações entre os conteúdos, que serão a fundação das investigações seguintes a respeito de variedades Riemannianas quasi-Einstein com produto warped e de suas propriedades.

1.1 Métricas Riemannianas

Nesta seção introduzimos o conceito de métricas Riemannianas, iniciando pela definição de variedades diferenciáveis. Sendo um desenvolvimento natural da Geometria Diferencial, a Geometria Riemanniana se concentra no estudo de entes geométricos que nada mais são que entes geométricos que localmente se comportam como abertos n -dimensionais. Contudo, esses objetos são estudados apenas intrinsecamente, isto é, independem do espaço em que estão inseridas.

Uma motivação determinante para este conhecimento se deu com Gauss em seu trabalho, publicado em 1827, *General Investigations of Curved Surfaces*, no qual é definida uma maneira de calcular o quanto uma superfície se afastava de seu plano tangente em um dado ponto. O que foi notado por Gauss, relacionando-se fortemente com resultados anteriores de Euler, era que tal curvatura dependia apenas da maneira de medir distâncias na superfície. Posteriormente, no trabalho *Sur les hypotheses qui servent de fondement à la géométrie* em 1854, Riemann deu um passo a mais e estendeu as ideias geométricas de Gauss para as variedades diferenciáveis.

Além de representar um avanço em geometria, como nas questões filosóficas e Matemáticas a respeito do 5º postulado de Euclides, a noção de medir distâncias em superfícies a partir de produtos internos, que nos dão ainda outras informações métri-

cas como medidas de curvas e ângulos, embora ainda dependentes da maneira de medir distâncias do espaço euclidiano, a possibilidade de, em cada ponto, fornecer uma métrica figura uma abstração crucial nesta nova área, no centro da teoria.

Mais especificamente, uma variedade diferenciável n -dimensional é um conjunto M e uma família de aplicações biunívocas $x_\alpha : U_\alpha \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$ de abertos U_α de $\mathbb{R}^n$ em M tais que

1. $\bigcup_{\alpha} x_\alpha(U_\alpha) = M$;
2. Para todo par α, β , com $x_\alpha(U_\alpha) \cap x_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$, os conjuntos $x_\alpha^{-1}(W)$ e $x_\beta^{-1}(W)$ são abertos em $\mathbb{R}^n$ e as aplicações $x_\beta^{-1} \circ x_\alpha$ são diferenciáveis;
3. A família $\{(U_\alpha, x_\alpha)\}$ é maximal com respeito às condições 1 e 2.

O par (U_α, x_α) , ou a aplicação x_α , é também chamado sistema de coordenadas locais, estrutura diferenciável, parametrização ou, simplesmente, de carta – é também comum denotar um sistema de coordenadas locais por $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$. Perceba que x_α é um homeomorfismo sobre sua imagem.

Por um abuso de notação, a menos de menção contrária, $x : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$ representará uma carta local e, dado $p \in M$ e $q = x^{-1}(p)$, os vetores $X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}(q) = dx(e_i)$, $i = \{1, \dots, n\}$, formarão uma base para o espaço tangente de M em p , $T_p M$.

Quando for indicada uma variedade por M^n , o sobreíndice indicará a dimensão de M .

Observação 1.1. *Uma estrutura diferenciável em M^n induz uma topologia nela de maneira natural. A saber, definindo que $U \subset M$ é um aberto de M se $x_\alpha^{-1}(U \cap x_\alpha(U_\alpha))$ é um aberto de $\mathbb{R}^n$ para todo α . Verifica-se, a partir desta definição, que as condições topológica para os abertos em questão são válidas. Note que a topologia é definida de modo a $x_\alpha(U_\alpha)$ ser aberto e x_α ser uma aplicação contínua, para cada α .*

O espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$ com parametrização dada pela aplicação identidade é um exemplo de variedade diferenciável, dito trivial. Um outro exemplo é a esfera unitária de $\mathbb{R}^{n+1}$, $\mathbb{S}^n$, com a estrutura diferenciável advinda da inversa da projeção estereográfica, isto é, $\{(\mathbb{R}^n, \phi_k^{-1})\}$, $k = \{1, 2\}$, em que $\phi_1^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{S}^n - \{N\}$ e $\phi_2^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{S}^n - \{-N\}$, como pode ser visto em [32]. O que segue é um caso intimamente envolvido no que será explorado mais adiante nesta dissertação.

Exemplo 1.1. *Sejam M e N duas variedades diferenciáveis com estruturas diferenciáveis $\{(U_\alpha, x_\alpha)\}$ e $\{(V_\beta, y_\beta)\}$, respectivamente. Então o produto cartesiano $M \times N$ é uma variedade diferenciável com a estrutura $\{(U_\alpha \times V_\beta, z_{\alpha\beta})\}$, onde $z_{\alpha\beta}(p, q) = (x_\alpha(p), y_\beta(q))$, $p \in U_\alpha$, $q \in V_\beta$, de modo que as projeções $\pi : M \times N \rightarrow M$ e*

$\sigma : M \times N \longrightarrow N$ são diferenciáveis. Com tal estrutura, $M \times N$ é chamada variedade produto de M por N .

Há uma sutil diferença na definição de variedades diferenciáveis com bordo em comparação com a anterior. De maneira sucinta, uma variedade diferenciável n -dimensional com bordo é uma variedade nas condições anteriormente apresentadas, mas cujas parametrizações são tomadas em abertos relativos do semiespaço superior de $\mathbb{R}^n$,

$$\mathbb{H}^n = \{x \in \mathbb{R}^n : x_n \leq 0\}.$$

Sabemos que o conjunto de pontos interiores de $\mathbb{H}^n$, $\text{Int}\mathbb{H}^n$, é formado pelos pontos de $\mathbb{R}^n$ tais que $x_n > 0$ e sua fronteira, denotada por $\partial\mathbb{H}^n$, é formada por aqueles tais que $x_n = 0$.

Um ponto $p \in M$ é dito *interior*, denota-se $p \in \text{Int}M$, se é imagem de algum ponto de $\text{Int}\mathbb{H}^n$ por alguma carta coordenada, e é chamado *ponto de fronteira*, isto é, $p \in \partial M$, se é imagem de pontos de $\partial\mathbb{H}^n$ via alguma carta. Exemplos básicos de variedades com bordo são o próprio semi-espço superior, a bola unitária fechada de $\mathbb{R}^n$ e o hemisfério superior da esfera unitária $(n-1)$ -dimensional, chamada $\mathbb{D}^{n-1}$. Para mais informações a esse respeito, consultar a referência [32].

Uma *variedade Riemanniana*, denotada como (M, g) , é uma variedade munida de uma métrica g , dita Riemanniana, nas condições da seguinte definição.

Definição 1.1. *Uma métrica Riemanniana (ou estrutura Riemanniana), em uma variedade diferenciável M , é uma correspondência que associa a cada ponto p de M um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$, isto é, uma forma bilinear, simétrica e positiva definida, em T_pM , que varia diferenciavelmente no seguinte sentido: se x é um sistema de coordenadas locais em torno de p , com $x(x_1, \dots, x_n) \in x(U)$, então $\left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle_p = g_{ij}(x_1, \dots, x_n)$ é uma função diferenciável em U .*

Deixaremos de indicar o índice p em $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ sempre que não houver possibilidade de confusão. As funções $g_{ij} = g_{ji}$ são chamadas *expressões da métrica Riemanniana* no sistema de coordenadas $x : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow M$.

Dada g uma métrica Riemanniana em uma variedade M , $\tilde{g}$ é dita conforme a g quando existe uma função suave ψ em M tal que $\tilde{g} = e^{2\psi}g$. Se ψ é constante, a métrica não altera a "forma" da variedade, que se mantém a mesma a menos de contração ou distensão global. Mais adiante, trataremos melhor deste tipo de métrica e das alterações por ela causadas nas ferramentas de análise da variedade.

Diz-se que M é uma *variedade compacta com bordo* se M é uma variedade com bordo e um espaço topológico compacto.

Nos é importante o estabelecimento da seguinte noção de equivalência para a métrica e, em seguida, alguns exemplos fundamentais.

Definição 1.2. *Sejam M e N variedades Riemannianas. Um difeomorfismo $f : M \rightarrow N$, ou seja, uma função diferenciável bijetiva e com inversa diferenciável, é chamada uma isometria se*

$$\langle u, v \rangle_p = \langle df_p(u), df_p(v) \rangle_{f(p)},$$

$\forall p \in M, u, v \in T_p M$. A métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle_p = \langle df_p(\cdot), df_p(\cdot) \rangle_{f(p)}$ é dita a métrica induzida por f em M , também chamada métrica do pullback.

Exemplo 1.2. $M = \mathbb{R}^n$ com X_i identificado com $e_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)$, isto é, apenas a i -ésima coordenada é não nula e igual a 1. A métrica dada por $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$. A geometria métrica do espaço euclidiano n -dimensional $\mathbb{R}^n$ é chamada geometria métrica euclidiana.

Exemplo 1.3. Considerando mais uma vez a projeção estereográfica $\phi_1 : \mathbb{S}^n - \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^n$, a métrica do pullback em $\mathbb{S}^n - \{N\}$ é dada em coordenadas por

$$g_{ij} = \left(\frac{2}{1 + |y|^2} \right)^2 \delta_{ij}, \quad (1.1)$$

em que $y \in \mathbb{R}^n$. Esta é a métrica canônica da esfera¹.

1.2 Conexões Riemannianas e Referencial Geodésico

Como introduzimos na seção anterior, a Geometria Riemanniana tem por escopo o estudo de entes intrínsecos às variedades diferenciáveis e as relações entre eles. Uma importante noção, neste sentido, é a de derivada covariante, isto é, derivar sobre o ponto de vista da variedade, sendo uma generalização das derivadas direcionais. Em Geometria Diferencial de superfícies, dizemos que a derivada covariante de um campo de vetores $\omega : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ tangentes a uma superfície S ao longo de uma curva $\alpha : I \rightarrow S$ é a projeção ortogonal de $\frac{d\omega}{dt}$ sobre $T_{\alpha(t)}S$, denotada por $\frac{D\omega}{dt}$, conceito dependente apenas da primeira forma fundamental. No caso da geometria de objetos estudados independentemente do espaço em que estão inseridos, desenvolveu-se uma outra maneira de definir esta derivação, uma vez que não faria sentido projetar vetores externos aos espaços tangentes ortogonalmente nestes espaços. Surge aí a noção de conexão.

¹ Com efeito, como a esfera é uma subvariedade mergulhada de $\mathbb{R}^{n+1}$, a aplicação inclusão, dada em coordenadas pela projeção estereográfica, induz a métrica g_{ij} como no exemplo. Para mais informações, ver [32].

Neste contexto, faz sentido questionar, do ponto de vista de sistemas de coordenadas, se há algum que seja melhor calculisticamente em geral. Relacionando-se intimamente com o conteúdo de conexões e derivadas covariantes, tem-se as coordenadas normais, ou geodésicas, como exemplar de uma estrutura computacionalmente ideal para nosso propósito. Para chegarmos ao seu conceito, que convergirá na noção de referencial geodésico, passaremos brevemente pelo estudo de geodésicas com o intuito de melhor contextualizá-lo. Omitiremos a demonstração de diversos resultados que, a menos de menção contrária, estão disponíveis em [15].

O ente geométrico que definiremos a seguir tem importância central na teoria, entre outras coisas, pela sua função como derivada covariante, bem como para o cálculo da divergência de campos e tensores. Procederemos com a definição de conexão Riemanniana, derivação covariante de campos de vetores tangentes, algumas de suas relações e aspectos fundamentais e, finalmente, geodésicas, coordenadas normais, referencial geodésico e propriedades. Nas seções subsequentes, recorreremos ao que aqui foi apresentado com o intuito de definir derivação covariante de tensores, tensor curvatura, a curvatura de Ricci e a hessiana de aplicações que assumem valores reais definidas em variedades.

Definição 1.3. *Um campo vetorial X é uma aplicação contínua que associa, a cada ponto $p \in M$, um vetor tangente $X(p) = X_p \in T_p M$.*

A derivada de uma função $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ na direção de um campo Y é dada por

$$\nabla_Y f = Y(f) = \langle \nabla f, Y \rangle,$$

em que $\text{grad}(f) = \nabla f$ é dado em coordenadas locais, ou seja, $\nabla f = \frac{df}{dx^i} X_i$.

Indicaremos por $\mathfrak{X}(M)$ o conjunto dos campos de vetores C^∞ em M e por $C^\infty(M)$ o espaço das funções reais de classe C^∞ definidas em M .

Definição 1.4. *Uma conexão Riemanniana em uma variedade Riemanniana (M, g) é uma aplicação*

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$$

que se indica por $(X, Y) \xrightarrow{\nabla} \nabla_X Y$ e que cumpre:

$$i) \nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z,$$

$$ii) \nabla_X (Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z,$$

$$iii) \nabla_X (fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y,$$

$$iv) Xg(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z), \text{ (Compatibilidade com a métrica)}$$

v) $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$, (*Simetria*)

em que $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ e $f, g \in C^\infty(M)$.

Chamamos a propriedade (i) de linearidade da conexão no índice – linear relativamente a $C^\infty(M)$. Uma conexão satisfazendo as propriedades (i) a (iii) é dita uma *conexão afim*. Assim, uma conexão Riemanniana é uma conexão afim que é compatível com a métrica Riemanniana g de M e que é simétrica.

Dada uma parametrização (x, U) de M^n , dizemos que

$$\nabla_{X_i} X_j = \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k X_k, \quad (1.2)$$

em que os coeficientes Γ_{ij}^k da conexão ∇ em U são funções diferenciáveis denominadas *símbolos de Christoffel*.

A propriedade de simetria, (v), para a conexão Riemanniana nos dá que

$$\nabla_{X_i} X_j - \nabla_{X_j} X_i = [X_i, X_j] = 0. \quad (1.3)$$

De fato, o colchete de X_i e X_j é dado por $[X_i, X_j] = X_i X_j - X_j X_i$ o que, por sua vez, dada $f \in C^\infty(M)$,

$$[X_i, X_j](f) = \frac{\partial f}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial f}{\partial x_j \partial x_i} = 0.$$

Isso nos dá, ainda, que $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$, donde a justificativa para a nomenclatura da propriedade.

Dados $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ tais que

$$X = \sum_i x_i X_i \text{ e } Y = \sum_j y_j X_j,$$

teremos

$$\begin{aligned} \nabla_X Y &= \sum_i x_i \nabla_{X_i} \left(\sum_j y_j X_j \right) \\ &= \sum_{ij} x_i y_j \nabla_{X_i} X_j + \sum_{ij} x_i X_i (y_j) X_j. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\nabla_X Y = \sum_k \left(\sum_{ij} x_i y_j \Gamma_{ij}^k + X(y_k) \right) X_k. \quad (1.4)$$

Podemos obter um exemplo elementar no trato de conexões, o de conexões em um espaço euclídeo. Este exemplo é particularmente interessante, pois está atrelado ao desenvolvimento de *referenciais geodésicos*, que veremos mais adiante nesta seção, vide

[9].

Através da identificação do espaço tangente de $\mathbb{R}^n$ com o próprio $\mathbb{R}^n$ e, consequentemente, enxergando os vetores tangentes como vetores neste espaço, podemos considerar campos vetoriais em $\mathbb{R}^n$ como aplicações suaves do espaço nele mesmo, donde temos que a *conexão euclideana* é a aplicação $\nabla : \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n) \times \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ é dada por

$$(\nabla_X Y)_p = dY_p(X_p),$$

isto é, como a derivada direcional do campo Y em p na direção de X_p , e $dY_p(X_p)$ é uma diferencial.

Exemplo 1.4. *Tomando as coordenadas canônicas do espaço euclidiano, temos que*

$$\begin{aligned} \nabla_X Y &= \sum_{i,k=1}^n x_i \frac{\partial y_k}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_k} \\ &= \sum_{k=1}^n X(y_k) \frac{\partial}{\partial x_k}. \end{aligned}$$

Comparando a última igualdade a (1.4), concluímos que $\Gamma_{ij}^k \equiv 0, \forall i, j, k \in \{1, \dots, n\}$.

Dos cálculos antepostos, segue que, dados $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$, obtemos uma "regra do produto", que segue uma estrutura semelhante a de derivada direcional válida no espaço euclidiano, para conexões compatíveis com a métrica² dada por

$$Z \langle X, Y \rangle = \langle \nabla_Z X, Y \rangle + \langle X, \nabla_Z Y \rangle.$$

O Teorema a seguir estabelece que é possível obter, univocamente, conexões Riemannianas a partir de métricas Riemannianas dadas.

Teorema 1.1. *(Levi-Civita). Dada uma variedade Riemanniana M , existe uma única conexão Riemanniana em M .*

A conexão Riemanniana univocamente relacionada com (M, g) é determinada pela fórmula de Koszul a seguir

$$\begin{aligned} \langle Z, \nabla_Y X \rangle &= \frac{1}{2} \{ X \langle Y, Z \rangle + Y \langle Z, X \rangle - Z \langle X, Y \rangle \\ &\quad - \langle [X, Z], Y \rangle - \langle [Y, Z], X \rangle - \langle [X, Y], Z \rangle \} \end{aligned} \quad (1.5)$$

²De fato, uma conexão em uma variedade Riemanniana é compatível com a métrica se, e só se, essa regra tipo produto é válida. Este fato é mais claramente verificado em relação à correspondência entre campos e suas derivadas covariantes ao longo de curvas, mas nosso propósito é apenas apresentar estes itens. Consulte a referência [15] para mais informações.

Note que essa conexão depende da métrica. Em virtude do Teorema anterior, a conexão acima determinada por (1.5) é também chamada de *conexão de Levi-Civita*. Ainda a partir da fórmula anterior, obtemos

$$\sum_k \Gamma_{ij}^l g_{lk} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} g_{jk} + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{ki} - \frac{\partial}{\partial x_k} g_{ij} \right\},$$

em que $g_{ij} = \langle X_i, X_j \rangle$.

Considerando a matriz (g^{km}) como sendo a inversa da matriz (g_{km}) , teremos ainda que

$$\Gamma_{ij}^m = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} g_{jk} + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{ki} - \frac{\partial}{\partial x_k} g_{ij} \right\} g^{km}.$$

A última equação é a expressão dos símbolos de Christoffel da conexão Riemanniana em termos dos g_{ij} dados pela métrica.

A proposição a seguir estabelece que a noção de conexões nos confere uma forma de derivar campos de vetores ao longo de curvas, *derivada covariante*, o que também nos permite discorrer a respeito de aceleração de curvas como veremos posteriormente para geodésicas.

Proposição 1.1. *Seja M uma variedade diferenciável com uma conexão Riemanniana ∇ . Então, existe uma única correspondência que associa a um campo V ao longo de uma curva $\alpha : I \rightarrow M$ um outro campo vetorial $\frac{DV}{dt}$ ao longo de α , denominado derivada covariante de V ao longo de α , tal que:*

- a) $\frac{D}{dt}(V + W) = \frac{DV}{dt} + \frac{DW}{dt}$.
- b) $\frac{D}{dt}(fV) = \frac{df}{dt}V + f\frac{DV}{dt}$, em que W é um campo de vetores ao longo de c e f é uma função diferenciável em I .
- c) Se V é induzido por um campo de vetores $Y \in \mathfrak{X}(M)$, isto é, $V(t) = Y(\alpha(t))$, $\frac{DV}{dt} = \nabla_{\frac{d\alpha}{dt}} Y$.

A demonstração deste fato pode ser encontrada em [15]. Ademais, a proposição anterior e a equação (1.4) nos permitem inferir que

$$\frac{DV}{dt} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{dv_k}{dt} X_k + \sum_{i,j=1}^n v_j \frac{dx_i}{dt} \Gamma_{ij}^k \right) X_k. \quad (1.6)$$

Definição 1.5. *Seja M uma variedade diferenciável com uma conexão afim ∇ . Um campo vetorial V ao longo de uma curva $\alpha : I \rightarrow M$ é chamado paralelo quando $\frac{DV}{dt} = 0, \forall t \in I$.*

Perceba que a compatibilidade de uma conexão e uma métrica Riemanniana, propriedade (iv) da Definição 1.4, nos permite deduzir que, dados dois campos paralelos P_0 e P_1 ao longo de uma curva α ,

$$\langle P_0, P_1 \rangle = \text{constante}. \quad (1.7)$$

De fato, pela propriedade supracitada e o item (c) da Proposição 1.1,

$$\begin{aligned} V \langle P_0, P_1 \rangle &= \left\langle \nabla_{\frac{d\alpha}{dt}} P_0, P_1 \right\rangle + \left\langle P_0, \nabla_{\frac{d\alpha}{dt}} P_1 \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{DP_0}{dt}, P_1 \right\rangle + \left\langle P_0, \frac{DP_1}{dt} \right\rangle \\ &= 0. \end{aligned}$$

Dizemos que uma curva $\gamma : I \rightarrow M$ é uma geodésica quando $\frac{D\gamma'(t)}{dt} = 0$. Segue da expressão (1.7) que o comprimento de uma geodésica é constante. Note que, pela equação (1.6) e pela Definição 1.5, para uma curva $\alpha : I \rightarrow M$ e $V = \alpha'$, expressando α localmente em uma parametrização x por $x^{-1} \circ \alpha(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$, temos que α é uma geodésica se, e somente se,

$$\frac{d^2 x_k}{dt^2} + \sum_{i,j=1}^n \frac{dx_i}{dt} \frac{dx_j}{dt} \Gamma_{ij}^k = 0, \quad k = 1, \dots, n.$$

Segue daí que geodésicas são soluções de uma equação diferencial linear de segunda ordem não-linear. Como consequência do teorema de existência e unicidade de soluções de equações diferenciais ordinárias, temos o resultado a seguir, vide [15].

Proposição 1.2. *Seja M uma variedade Riemanniana. Dado $p \in M$, existem $V \subset M$ uma vizinhança de p , $\delta > 0$ e $\epsilon > 0$, e uma aplicação C^∞ ,*

$$\gamma : (-\delta, \delta) \times \mathcal{U} \rightarrow M, \mathcal{U} = \{(q, v) : q \in V, v \in T_q M, |v| < \epsilon\},$$

tais que a curva $t \mapsto \gamma(t, q, v)$, $t \in (-\delta, \delta)$, é a única geodésica de M passando por q com velocidade v no instante $t = 0$, para cada $q \in V$ e cada $v \in T_q M$, com $|v| < \epsilon$.

Dado $p \in M$ e $v \in T_p M$, seja $\gamma : (-\delta, \delta) \rightarrow M$ a única geodésica tal que $\gamma(0) = p$ e $\gamma'(0) = v$, definimos γ nestas condições por $\gamma(t, p, v)$. Não é dispendioso verificar que, dado $a > 0$,

$$\gamma(t, p, v) = \gamma\left(\frac{t}{a}, p, av\right),$$

em que $\beta(t) = \gamma\left(\frac{t}{a}, p, v\right)$ está definida no intervalo $\left(\frac{-\delta}{a}, \frac{\delta}{a}\right)$. Esta propriedade é chamada de *homogeneidade*. Derivamos daqui e da Proposição anterior o que segue.

Proposição 1.3. *Dado $p \in M$, existem uma vizinhança $p \in V$ em M , $\epsilon > 0$ e uma aplicação C^∞ ,*

$$\gamma : (-2, 2) \times \mathcal{U} \longrightarrow M, \mathcal{U} = \{(q, v) : q \in V, v \in T_q M, |v| < \epsilon\},$$

tal que $t \mapsto \gamma(t, q, w)$, $t \in (-2, 2)$, é a única geodésica passando por q com velocidade w no instante $t = 0$, para cada $q \in V$ e cada $w \in T_q M$, com $|w| < \epsilon$

Embora a apresentação de geodésicas não fosse uma temática crucial nesta dissertação, sua contextualização é elementar para a definição de *coordenadas normais* e, por conseguinte, *referencial geodésico*, sendo este último crucial para os procedimentos que assumiremos nas seções e capítulos subsequentes. Antes de finalizarmos, com a definição desses pontos, comentaremos alguns outros pontos relativos ao estudo de geodésicas.

Definição 1.6. *Seja M uma variedade Riemanniana. Definimos a aplicação exponencial em $p \in M$ por*

$$\begin{aligned} \exp_p : \mathcal{U} \subset T_p M &\longrightarrow M, \\ v &\longmapsto \gamma(1, p, v) \end{aligned}$$

em que $\mathcal{U}$ é um aberto de $T_p M$ em torno da origem.

Observe que a existência do aberto $\mathcal{U}$ é justificada pela Proposição 1.3. Além disso, a propriedade de homogeneidade nos dá que

$$\gamma(1, q, w) = \gamma(|v|, q, \frac{v}{|v|}).$$

A aplicação exponencial é diferenciável, em virtude de γ ser suave. Definindo, ainda,

$$\exp_q : B_\epsilon(0) \subset T_q M \longrightarrow M$$

por $\exp_q(v) = \exp(q, v)$, em que $B_\epsilon(0)$ é a bola de raio $\epsilon > 0$ centrada na origem de $T_q M$, temos a proposição seguinte que nos será muito útil na construção do objetivo desta segunda metade da seção.

Proposição 1.4. *Dado $q \in M$, existe $\epsilon > 0$ tal que $\exp_q : B_\epsilon(0) \subset T_q M \rightarrow M$ é um difeomorfismo sobre sua imagem, que é um aberto de M .*

Demonstração. Procederemos com o cálculo de $d(\exp_q)_0$. Com efeito, calcular $d(\exp_q)_0$ é equivalente a computar $\frac{d}{dt}(\exp_q \circ \alpha(t))$, em que $\alpha(0) = 0$ e $\alpha'(0) = v$, é suficiente tomarmos $\alpha(t) = tv$, donde

$$\begin{aligned}
 d(\exp_q)_0(v) &= \frac{d}{dt}(\exp_q \circ \alpha(t)) \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}(\exp_q(tv)) \Big|_{t=0} \\
 &= \frac{d}{dt}(\gamma(1, q, tv)) \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}(\gamma(t, q, v)) \Big|_{t=0} \\
 &= v.
 \end{aligned}$$

Portanto, $d(\exp_q)_0$ é a identidade de T_qM , donde, pelo Teorema da Função Inversa, $\exp_q$ é um difeomorfismo local numa vizinhança de 0. $\square$

Suporemos, como na hipótese da proposição, que a vizinhança da origem de T_qM que torna $\exp_q$ um difeomorfismo, quando restrito a tal vizinhança, é uma bola $B_\epsilon(0)$. $\exp_q(B_\epsilon(0)) = \mathcal{V}$ é dita vizinhança normal de q – neste caso particular, dizemos que $\mathcal{V} = B_\epsilon(q) \subset M$ é uma *bola normal* (ou *geodésica*) de centro q e raio ϵ . Uma consequência direta disto é a existência de um sistema de coordenadas por meio da aplicação exponencial.

Definição 1.7. *Dada uma base ortonormal $\{b_i\}_{i=1}^n$ de T_qM , seja $E : \mathbb{R}^n \longrightarrow T_qM$ o isomorfismo natural³ entre esses espaços. A aplicação dada por*

$$\exp_q \circ E : E^{-1}(B_\epsilon(0)) \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow M$$

é denominada sistema de coordenadas normais ou geodésicas.

Tal sistema é ideal sob certo sentido prático e aproxima metricamente M^n do $\mathbb{R}^n$. Ademais, obtemos uma importante ferramenta no cálculo de conexões. Mais adiante, exibiremos algumas de suas propriedades. Antes, no entanto, definamos *referencial local*.

Definição 1.8. *Um conjunto $\{E_i\}_{i=1}^n$ é chamado um referencial local em torno de $p \in M$ se $(E_i(q))_{i=1}^n$ é uma base de T_qM , para cada $q \in U$ uma vizinhança de p em M . Um referencial é dito global quando é um referencial local em torno de qualquer ponto da variedade.*

Proposição 1.5. *Seja $\mathcal{V}$ uma vizinhança normal de q e $(x_1, \dots, x_n)$ um sistema de coordenadas geodésicas em q . Nestas coordenadas,*

$$i) \ g_{ij}(q) = \delta_{ij};$$

$$ii) \ \Gamma_{ij}^k(q) = 0;$$

$$iii) \ \frac{\partial}{\partial x_k} g_{ij} = 0.$$

³Esse isomorfismo é dado por $E(x_1, \dots, x_n) = x_1 b_1 + \dots + x_n b_n$.

Da proposição anterior, pode-se notar o porquê de esse sistema de coordenadas ser usual. Fora apresentado, na seção anterior, o conceito de referencial, porém existem classes especiais de referenciais, dentre os quais está o ente que justifica a abordagem de geodésicas e aplicação exponencial, que são úteis no cálculo em variedades.

Definição 1.9. *Um referencial é dito ortonormal quando $\{E_i(p)\}_{i=1}^n$ é uma base ortonormal de $T_p M$ para cada $p \in M$. Finalmente, dizemos que um referencial é geodésico em $p \in M$ se $\{E_i(p)\}_{i=1}^n$ é uma base ortonormal de $T_p M$ e $\nabla_{E_j} E_i = 0$, $\forall i, j = 1, \dots, n$.*

Dado um sistema de coordenadas locais (x^i) em uma variedade Riemanniana M^n , obtemos diretamente um referencial local dado por $(\frac{\partial}{\partial x^i})$, isto é, por um campo de vetores coordenados, submetido ao sistema de coordenadas dado. Assim sendo, temos que um referencial geodésico local é obtido como campo vetorial submetido a um sistema de coordenadas geodésicas.

Observe que, pela definição anterior, dado um referencial $\{E_i\}_{i=1}^n$, todo campo de vetores $X \in \mathfrak{X}(M)$, pode ser expresso como

$$X = \sum_{i=1}^n x_i E_i,$$

em que $x_i : M \rightarrow \mathbb{R}$ são funções diferenciáveis. Deste ponto em diante, todo referencial que tomarmos será geodésico a menos de menção contrária.

1.3 Imersões e a Segunda Forma Fundamental

Exploraremos nesta seção os pré-requisitos necessários à última seção do Capítulo 3. Iremos tratar do conceito de segunda forma fundamental, a partir de imersões. A abordagem aqui considerada tem por intuito estabelecer uma generalização do conceito de segunda forma fundamental em superfícies – veremos mais adiante uma redução à superfícies de um dos conceitos apresentados. A métrica induzida, que explanamos na primeira seção, confere às imersões a propriedade de serem também isometrias, o que nos fornece uma série de propriedades induzidas, mas que não iremos explorar a fundo. As referências principais desta seção são [15, 32].

Na Seção 1, conceituamos isometria como sendo um difeomorfismo $f : M \rightarrow N$ entre variedades Riemannianas tal que

$$\langle u, v \rangle_p = \langle df_p(u), df_p(v) \rangle, \forall p \in M, u, v \in T_p M.$$

Daremos agora o conceito de *imersão*.

Definição 1.10. Uma aplicação diferenciável $f : M \rightarrow N$ é dita uma imersão em $p \in M$ quando sua derivada neste ponto é injetiva, isto é, quando

$$df_p : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$$

é injetiva. Se f é uma imersão em todos os pontos de M , diremos somente que f é uma imersão.

Perceba que toda isometria é, de fato, uma imersão, posto que é um difeomorfismo. O resultado a seguir encontra-se em [32].

Proposição 1.6. Seja $f : M \rightarrow N$ uma imersão. Então $f(M)$ é uma subvariedade imersa de N .

Passaremos a tratar da *segunda forma fundamental*, um ente que possui forte relação com imersões.

Seja $f : M \rightarrow N$ uma imersão com $n > m, n = \dim(N)$ e $m = \dim(M)$. Pelo Teorema do Posto, existe uma vizinhança $U_p \subset M$ de cada $p \in M$ tal que $f|_{U_p} : U_p \rightarrow f(U_p)$ é uma imersão injetiva, logo $f(U_p) \subset N$ é uma subvariedade de N . Daí, existe uma vizinhança $V \subset N$ de $f(p)$ e um difeomorfismo⁴ $\varphi : V \rightarrow A \subset \mathbb{R}^n$ em um aberto A de $\mathbb{R}^n$ que aplica $f(U_p) \cap V$ difeomorficamente em aberto do subespaço $\mathbb{R}^m \subset \mathbb{R}^n$. Identificaremos U_p com $f(U_p)$ e $v \in T_q M, q \in U_p$, com $df_q(v) \in T_{f(q)} N$, por simplificação de notação.

Para cada $p \in M$, o produto interno em $T_{f(p)} N$ o decompõe na soma direta

$$T_{f(p)} N = T_p M \oplus (T_p M)^\perp, \quad (1.8)$$

com a identificação natural de $T_p M \subset T_{f(p)} N$ pela imersão, observando que $f(T_p M)$ é isomorfo a $T_p M$, e $(T_p M)^\perp$ é o complemento ortogonal de $T_p M$ em $T_{f(p)} N$. Assim, se $v \in T_{f(p)} N$, podemos escrever

$$w = w^T + w^\perp, w^T \in T_p M, w^\perp \in (T_p M)^\perp,$$

em que w^T e $w^\perp$ são, respectivamente, as componentes tangencial e normal do vetor w . Perceba que podemos obter uma base para o espaço tangente a N em $f(p)$ como a união de uma base de $T_p M$ e outra de $(T_p M)^\perp$, donde as aplicações

$$(p, w) \mapsto (p, w^T) \text{ e } (p, w) \mapsto (p, w^\perp)$$

são diferenciáveis enquanto aplicações do fibrado tangente TN em si mesmo. Deste modo, podemos calcular conexões nos espaços da soma direta (1.8).

⁴A existência deste difeomorfismo é garantida pela cartas locais de N .

Sejam X e Y campos vetoriais locais em M e $\overline{X}, \overline{Y}$ extensões locais⁵ a N . Denotando a conexão Riemanniana de N por $\overline{\nabla}$, definimos

$$\nabla_X Y = (\overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Y}).$$

Esta é a conexão Riemanniana relativa à métrica induzida de M – não é dispendioso verificar este fato, porém uma demonstração disto encontra-se em [36].

Definiremos a segunda forma fundamental da imersão $f : M \rightarrow N$. Mas, antes, definamos um outro ente. Dados X, Y campos locais em M ,

$$B(X, Y) = \overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Y}$$

é um campo local em N normal a M . Perceba que $B(X, Y)$ não depende das extensões $\overline{X}, \overline{Y}$. De fato, se $\overline{X}_0$ é uma outra extensão de $\overline{X}$, segue das propriedades de conexões que

$$(\overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Y} - \nabla_X Y) - (\overline{\nabla}_{\overline{X}_0} \overline{Y} - \nabla_X Y) = \overline{\nabla}_{\overline{X} - \overline{X}_0} Y$$

se anula em M já que $\overline{X} - \overline{X}_0$ se anula em M e, assim, $B(X, Y)$ não depende da extensão de X . De maneira análoga mostra-se que não há dependência de extensões de Y em mesmas trajetórias de X . Dessa maneira, $B(X, Y)$ está bem definida como aplicação, além de possuir as propriedades presentes na proposição a seguir. A demonstração das próximas proposições encontram-se em [15].

Proposição 1.7. *Se $X, Y \in \mathfrak{X}(U_p)$, a aplicação $B : \mathfrak{X}(U_p) \times \mathfrak{X}(U_p) \rightarrow (\mathfrak{X}(U_p))^\perp$ dada por*

$$B(X, Y) = \overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Y}$$

é bilinear e simétrica.

Dado $p \in M$ e $\eta \in (T_p M)^\perp$, a aplicação $H_\eta : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$H_\eta(x, y) = \langle B(x, y), \eta \rangle, x, y \in T_p M,$$

que é, pela Proposição 1.7, bilinear e simétrica. Finalmente, definamos a segunda forma fundamental.

Definição 1.11. *A forma quadrática II_η definida em $T_p M$ por*

$$II_\eta(x) = H_\eta(x, x)$$

é chamada de segunda forma fundamental de f em p segundo o vetor normal η .

⁵Esta extensão é decorre do *Lema de Extensão*. Não o enunciaremos aqui, mas indicamos ver [32].

Note que a aplicação bilinear H_η é associada a uma aplicação linear autoadjunta $S_\eta : T_p M \rightarrow T_p M$ por

$$\langle S_\eta(x), y \rangle = H_\eta(x, y) = \langle B(x, y), \eta \rangle. \quad (1.9)$$

Podemos estabelecer uma conexão entre este tema e o que será abordado na seção seguinte notando que H_η é um 2-tensor covariante e, por ser simétrico, admite uma representação que corresponde justamente a (1.9) – que veremos ser válido para todo 2-tensor covariante simétrico.

A proposição a seguir nos fornece uma expressão da aplicação S_η em termos da derivada covariante.

Proposição 1.8. *Seja $p \in M, x \in T_p M$ e $\eta \in (T_p M)^\perp$. Sendo N uma extensão local de η , temos*

$$S_\eta(x) = -(\bar{\nabla}_x N)^\top.$$

Neste caso, $H_\eta(x, y) = \langle \bar{\nabla}_x N, y \rangle$, já que y é um vetor tangente.

Dado $p \in M$ e $\eta \in (T_p M)^\perp, |\eta| = 1$, a simetria da aplicação $S_\eta : T_p M \rightarrow T_p M$ nos diz que existe uma base ortonormal de autovetores $\{e_i\}_{i=1}^m$ de $T_p M$ com autovalores $\{\lambda_i\}_{i=1}^m$ associados, isto é, $S_\eta(e_i) = \lambda_i e_i, 1 \leq i \leq m$. Se M^m e N^{m+1} estão munidas de uma orientação⁶, então o vetor η fica univocamente determinado se exigirmos que, sendo $\{e_i\}_{i=1}^m$ uma base na orientação de M , $\{e_i\}_{i=1}^m \cup \{\eta\}$ seja uma base na orientação de N . Neste caso, denomina-se e_i *direções principais* e λ_i *curvaturas principais* de f . Assim sendo, a aplicação *curvatura média* de f é definida por

$$H(p) = \frac{1}{m} \left(\sum_{i=1}^m \lambda_i \right). \quad (1.10)$$

Ainda em consideração à estrutura presente no parágrafo anterior, em virtude da Proposição 1.8 e sabendo-se que $g(e_i, \eta) = 0 \implies \langle \bar{\nabla}_{\partial_i} \eta, \partial_j \rangle = -\langle \eta, \bar{\nabla}_{\partial_i} \partial_j \rangle, 1 \leq i \leq m$, segue que

$$\lambda_i = \langle S_\eta(e_i), e_i \rangle = \left\langle \eta, \sum_{k=1}^{m+1} \bar{\Gamma}_{ii}^k e_k \right\rangle,$$

em que $\bar{\Gamma}_{ij}^k$ representa os símbolos de Christoffel em N e $e_{m+1} = \eta$. Assim, $\lambda_i = \bar{\Gamma}_{ii}^{m+1}$.

Os últimos dois entes que definiremos nesta seção serão: *imersão geodésica* e *imersão umbílica*. Vamos a eles.

⁶Não definiremos o conceito de orientação, mas indicamos consultar [32] para uma discussão mais aprofundada.

Definição 1.12. Dizemos que uma imersão $f : M^m \rightarrow N^{m+1}$ é geodésica em $p \in M$ quando, para todo $\eta \in (T_p M)^\perp$, a segunda forma fundamental II_η é identicamente nula em p . A imersão f será totalmente geodésica quando for geodésica para todo $p \in M$.

Definição 1.13. Uma imersão $f : M^m \rightarrow N^{m+1}$ é umbílica em $p \in M$ se a aplicação B de f em p satisfaz

$$\langle B(X, Y), \eta \rangle = \lambda(p) \langle X, Y \rangle, \lambda(p) \in \mathbb{R}, \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M), \forall \eta \in (T_p M)^\perp.$$

Se a imersão for umbílica para todo $p \in M$, dizemos que ela é totalmente umbílica.

Observação 1.2. O conceito de imersão umbílica aqui apresentado trata-se de uma generalização do conceito de umbilicidade em superfícies. De fato, por (1.9), a equação presente na Definição 1.13 equivale a dizer que as curvaturas principais de S_η em p são todas iguais a $\lambda(p)$ o que, no caso de superfícies, implica em p ser um ponto umbílico.

Segue das considerações anteriores que, em uma imersão umbílica em $p \in M$, $\lambda(p) = H(p)$.

1.4 Tensores e Curvatura de Ricci

O conceito de tensores, também chamados de covetores, está para o cálculo em variedades como um ente correlato aos estudos de campos vetoriais e funções em variedades, sendo, em linhas gerais, um funcional linear em um produto cartesiano de k cópias do espaço tangente a uma variedade suave – aqui trataremos do caso Riemanniano – M^n em um dado ponto p . Este ente é um elemento do espaço dual a $(T_p M)^k$, que se configura em um módulo sobre $C^\infty(M)$. Apresentaremos algumas das relações fundamentais envolvendo tensores que são basilares para o propósito deste trabalho. Sendo uma generalização de campos vetoriais, podemos também derivar tensores covariantemente, além de tomar sua divergência a partir de tal derivação.

Um k -tensor, ou k -tensor covariante, T é uma aplicação k -linear em $C^\infty(M)$ da forma

$$T : \underbrace{\mathfrak{X}(M) \times \cdots \times \mathfrak{X}(M)}_{k \text{ fatores}} \longrightarrow C^\infty(M).$$

Esta definição é geralmente utilizada para tensores mistos, isto é, que são também *contravariantes*. A denominação *covariante* é geralmente associada ao caso em que consideramos T como aplicação em $(T_p M)^k$, mas a utilizaremos como fora definida. É também comum a notação $(1, k)$ -tensor para definir $T(X_1, \dots, X_k)(p) \in \mathbb{R}$, isto é,

$$T : \underbrace{T_p M \times \cdots \times T_p M}_{k \text{ fatores}} \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Antes de definirmos a derivada covariante, é interessante destacar que se T é um $(1, 2)$ -tensor em uma variedade Riemanniana, então podemos associá-lo a um único $(1, 1)$ -tensor, que também denotaremos por T , da seguinte forma

$$T(X, Y) = g(T(X), Y). \quad (1.11)$$

Basta observar que, pela linearidade de tensores e sendo $X = \sum_{i=1}^n x_i E_i$ e $Y = \sum_{j=1}^n y_j E_j$, $T(X, Y) = \sum_{i,j=1}^n x_i y_j T(E_i, E_j)$. Assim, se definirmos

$$T(X) = \sum_{i,j=1}^n x_i T(E_i, E_j) E_j,$$

teremos

$$\begin{aligned} g(T(X), Y) &= \sum_{i,j,k=1}^n x_i y_k T(E_i, E_j) g(E_j, E_k) = \sum_{i,j=1}^n x_i y_j T(E_i, E_j) \\ &= T(X, Y). \end{aligned}$$

A unicidade segue.

Definiremos agora um ente chamado *produto tensorial* que nos será importante nos capítulos seguintes.

Definição 1.14. *Dados T um k -tensor e S um l -tensor covariantes em uma variedade Riemanniana M , o produto tensorial de T por S*

$$T \otimes S : \underbrace{\mathfrak{X}(M) \times \cdots \times \mathfrak{X}(M)}_{k+l \text{ fatores}} \longrightarrow C^\infty(M)$$

é dado por

$$T \otimes S(X_1, \dots, X_{k+l}) = T(X_1, \dots, X_k) S(X_{k+1}, \dots, X_{k+l}),$$

sendo assim um $(k+l)$ -tensor.

Um objeto geométrico de grande relevância nos estudos da classe de variedades abordada neste trabalho é a *hessiana* de uma função – sua importância ficará clara quando apresentarmos a definição de uma variedade m -quase-Einstein e faremos uso deste objeto ainda nesta seção.

Definição 1.15. *Seja $f \in C^\infty(M)$. A hessiana da função f , denotada por $\text{Hess}(f)$ ou $\nabla^2 f$, é o 2-tensor simétrico*

$$\nabla^2 f(X, Y) = \langle \nabla_X \nabla f, Y \rangle, X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

A regra do tipo produto presente na Seção 2 deste capítulo nos permite reescrever $\nabla^2 f$ como

$$\nabla^2 f(X, Y) = X(Y(f)) - Y(X(f)).$$

Definição 1.16. *Dado $X \in \mathfrak{X}(M)$, a derivada covariante do k -tensor T na direção do campo X é o $(k+1)$ -tensor definido como*

$$\nabla_X T(X_1, \dots, X_k) = X(T(X_1, \dots, X_k)) - T(\nabla_X X_1, \dots, X_k) - \dots - T(X_1, \dots, \nabla_X X_k).$$

A partir daí, definimos a divergência de um tensor.

Definição 1.17. *Seja $X = (X_1, \dots, X_{k-1}) \in \mathfrak{X}^{k-1}(M)$, a divergência de um k -tensor T é o $(k-1)$ -tensor*

$$(\text{div}(T))(X) = \sum_{i=1}^n \nabla_{E_i} T(X_1, \dots, X_{k-1}, E_i). \quad (1.12)$$

A partir de (1.11), para um $(1, 2)$ -tensor simétrico e $X \in T_p M$,

$$\begin{aligned} (\text{div}(T))(X) &= \sum_{i=1}^n [E_i(T(X, E_i)) - T(\nabla_{E_i} X, E_i)] \\ &= \sum_{i=1}^n [E_i g(T(X), E_i) - T(E_i, \nabla_{E_i} X)] \\ &= \text{div}(T(X)) - \sum_{i=1}^n T(E_i, \nabla_{E_i} X), \end{aligned} \quad (1.13)$$

em que $\text{div}(T(X))$ é a divergência do campo $T(X)$. Além do mais, a divergência de uma função f multiplicada por um tensor T é dada por

$$(\text{div}(fT))(X) = T(X, \nabla f) + f(\text{div}(T))(X). \quad (1.14)$$

Segue destas considerações que a divergência do produto tensorial $df \otimes df(X, Y) = \langle \nabla f, X \rangle \langle \nabla f, Y \rangle$ é dada por

$$\text{div}(df \otimes df)(X) = \Delta f \langle \nabla f, X \rangle + \nabla^2 f(\nabla f, X). \quad (1.15)$$

Definição 1.18. *O tensor curvatura algébrica R de uma variedade Riemanniana M associado a um par $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ é uma aplicação $R(X, Y) : \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$ é dada por*

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z, \quad Z \in \mathfrak{X}(M), \quad (1.16)$$

em que ∇ é a conexão Riemanniana de M .

A respeito deste ente central nos estudos de Geometria Riemanniana, temos duas propriedades básicas e muito úteis, como vemos na proposição adiante – suas demonstrações podem ser encontradas em [41].

Proposição 1.9. *Dados $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$, o tensor curvatura algébrica satisfaz as seguintes propriedades*

(a) *R satisfaz uma propriedade de permutação cíclica chamada primeira identidade de Bianchi:*

$$R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0.$$

(b) *∇R satisfaz uma propriedade de permutação cíclica chamada segunda identidade de Bianchi:*

$$(\nabla_Z R)(X, Y)W + (\nabla_X R)(Y, Z)W + (\nabla_Y R)(Z, X)W = 0.$$

Note que, formalmente, o tensor curvatura algébrica não é de fato um tensor, porém esta nomenclatura é corrente e será também assumida aqui. Um tensor, de fato, derivado da definição anterior é o *tensor curvatura de Riemann*, um 4-tensor dado por

$$Rm(X, Y, Z, W) = \langle R(X, Y)W, Z \rangle, \quad X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M). \quad (1.17)$$

Este tensor possui propriedades de simetria que nos serão úteis. Contudo, antes de apresentá-las, daremos a definição de curvatura seccional, ente importante no estudo da geometria e que utilizaremos mais adiante.

Definição 1.19. *Seja $p \in M$ e $\Pi_p \subset T_p M$ um subespaço bidimensional. A curvatura seccional $K(\Pi_p)$ é definida por*

$$K(\Pi_p) = \frac{Rm(E_i, E_j, E_i, E_j)}{|E_i \times E_j|^2},$$

em que $\{E_i, E_j\}$ é uma base do subespaço Π_p .

A definição anterior independe da escolha da base. Tanto a demonstração desse fato quanto a da proposição seguinte podem ser encontradas em [15].

Proposição 1.10. *Dados $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$, tem-se que*

$$(a) \operatorname{Rm}(X, Y, Z, W) + \operatorname{Rm}(Y, W, Z, X) + \operatorname{Rm}(W, X, Z, Y) = 0.$$

$$(b) \operatorname{Rm}(X, Y, Z, W) = -\operatorname{Rm}(Y, X, Z, W).$$

$$(c) \operatorname{Rm}(X, Y, Z, W) = -\operatorname{Rm}(X, Y, W, Z).$$

$$(d) \operatorname{Rm}(X, Y, Z, W) = \operatorname{Rm}(Z, W, X, Y).$$

Seguindo a definição preliminar, temos a definição – adotada nesta dissertação – para a curvatura de Ricci. A saber,

Definição 1.20. *O tensor curvatura de Ricci, ou apenas curvatura de Ricci, é o 2-tensor $\operatorname{Ric} : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow C^\infty(M)$ dado por*

$$\operatorname{Ric}(X, Y) = \sum_{i=1}^n \langle R(X, E_i)E_i, Y \rangle. \quad (1.18)$$

Em geral, denotaremos a curvatura de Ricci por $\operatorname{Ric}(X, Y)$, com $X, Y \in T_p M$, omitindo o ponto no qual ela é avaliada. Além disso, dada uma constante $\lambda \in \mathbb{R}$, dizemos que uma variedade é *Einstein* quando $\operatorname{Ric} = \lambda g$. Se $\lambda = 0$, $\operatorname{Ric} \equiv 0$ é dita *Ricci flat*. O traço do tensor de Ricci em um ponto $p \in M$ é chamado de *curvatura escalar* e será denotado por $R(p)$, isto é, $R(p) = \sum_{i=1}^n \operatorname{Ric}(E_i, E_i)$.

Provaremos uma série de lemas e exibiremos alguns resultados que são bastante utilizadas em estudos de métricas quase-Einstein e, logo, surgirão em diversos momentos dos próximos capítulos de maneira direta ou indireta. Como dito na seção anterior, reforçamos que todas as demonstrações que recorram a referenciais tratadas nestas dissertação serão efetuadas, salvo menção contrária, em referenciais geodésicos.

Lema 1.2. *Dada uma função $f \in C^\infty(M)$, vale a seguinte identidade*

$$\operatorname{div}(\nabla^2 f) = \operatorname{Ric}(\nabla f) + \nabla \Delta f. \quad (1.19)$$

Demonstração. Seja $X \in \mathfrak{X}(M)$, então, pela definição de divergência de tensores,

$$\begin{aligned} (\operatorname{div}(\nabla^2 f))(X) &= \sum_{i=1}^n [E_i \nabla^2 f(X, E_i) - \nabla^2 f(\nabla_{E_i} X, E_i)] \\ &= \sum_{i=1}^n \left[E_i \langle \nabla_X \nabla f, E_i \rangle - \langle \nabla_{\nabla_{E_i} X} \nabla f, E_i \rangle \right] \\ &= \sum_{i=1}^n \left[\langle \nabla_{E_i} \nabla_X \nabla f, E_i \rangle - \langle \nabla_{\nabla_{E_i} X} \nabla f, E_i \rangle \right]. \end{aligned} \quad (1.20)$$

Agora, uma vez que, por (1.16), $R(E_i, X)\nabla f = \nabla_{E_i}\nabla_X\nabla f - \nabla_X\nabla_{E_i}\nabla f - \nabla_{[E_i, X]}\nabla f$, inferimos

$$\langle \nabla_{E_i}\nabla_X\nabla f, E_i \rangle = \langle R(E_i, X)\nabla f + \nabla_X\nabla_{E_i}\nabla f + \nabla_{[E_i, X]}\nabla f, E_i \rangle,$$

e, por (1.18), $\text{Ric}(X, \nabla f) = \sum_{i=1}^n \langle R(E_i, X)\nabla f, E_i \rangle$, inferimos

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{E_i}\nabla_X\nabla f, E_i \rangle &= \text{Ric}(X, \nabla f) + \sum_{i=1}^n \langle \nabla_X\nabla_{E_i}\nabla f + \nabla_{[E_i, X]}\nabla f, E_i \rangle \\ &= \text{Ric}(X, \nabla f) + \sum_{i=1}^n X \langle \nabla_{E_i}\nabla f, E_i \rangle + \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{[E_i, X]}\nabla f, E_i \rangle \\ &= \text{Ric}(X, \nabla f) + X(\Delta f) + \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{[E_i, X]}\nabla f, E_i \rangle. \end{aligned} \quad (1.21)$$

Note que na última igualdade anterior surge $X(\Delta f) = X(\nabla^2 f(E_i, E_i))$ que por sua vez é igual a $\langle \nabla \Delta f, X \rangle$. Pela linearidade da conexão no índice, item (1) da Definição 1.4, e das propriedades de um referencial geodésico, temos $\nabla_X E_i = 0 \implies [E_i, X] = \nabla_{E_i} X$, pois $X = \sum_{i=1}^n x_i E_i$. Portanto, o somatório em (1.21) é reescrito como

$\sum_{i=1}^n \langle \nabla_{E_i} X \nabla f, E_i \rangle$. Finalmente, concluímos de (1.20) que

$$(\text{div}(\nabla^2 f))(X) = \text{Ric}(X, \nabla f) + \langle \nabla \Delta f, X \rangle.$$

□

Definição 1.21. *Dados dois n -tensores T e F , o produto interno de Hilbert-Schmidt entre eles é definido como*

$$\langle T, F \rangle = \text{tr}(T^* F) = \sum_{i=1}^n \langle T(E_i), F(E_i) \rangle, \quad (1.22)$$

em que T^* é o operador adjunto de T . Isto posto, se T é um tensor autoadjunto, então

$$|T|^2 = \sum_{i=1}^n \langle T(E_i), T(E_i) \rangle,$$

e define-se assim a norma de Hilbert-Schmidt, $|\cdot|$, para tensores covariantes.

Uma outra forma de definir o produto interno de Hilbert-Schmidt é

$$\langle T, F \rangle = \sum_{i,j=1}^n \langle T(E_i), E_j \rangle \langle F(E_i), E_j \rangle, \forall T, F \in L(\mathfrak{X}(M), \mathfrak{X}(M)).$$

Porém, sabe-se que $\sum_{j=1}^n \langle F(E_i), E_j \rangle E_j = F(E_i)$ e, deste modo, as duas definições equivalem.

Este produto interno de tensores relaciona-se com a divergência da Hessiana de $f \in C^\infty(M)$ pela fórmula (2.17) que veremos no capítulo seguinte. Na demonstração a seguir, utilizaremos o fato de $\nabla^2 f$ ser autoadjunta, o que de fato ocorre já que a matriz Hessiana é simétrica, e a norma de Hilbert-Schmidt.

Lema 1.3 (Fórmula de Bochner). *Para uma função $f \in C^\infty(M)$, temos que*

$$\frac{1}{2} \Delta |\nabla f|^2 = \langle \nabla \Delta f, \nabla f \rangle + |\nabla^2 f|^2 + \text{Ric}(\nabla f, \nabla f). \quad (1.23)$$

Demonstração. Dado um referencial geodésico (E_i) em um ponto $p \in M$, é sabido que, por definição, $\Delta |\nabla f|^2 = \sum_{i=1}^n E_i(E_i \langle \nabla f, \nabla f \rangle)$. Logo,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \Delta |\nabla f|^2 &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} E_i(E_i \langle \nabla f, \nabla f \rangle) \\ &= \sum_{i=1}^n E_i \langle \nabla_{E_i} \nabla f, \nabla f \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n E_i \nabla^2 f(E_i, \nabla f). \end{aligned}$$

Agora, $\nabla^2 f(E_i, \nabla f) = \nabla^2(\nabla f, E_i)$, pois a Hessiana de f é simétrica. Assim, como $\nabla_{E_i} E_j(p) = 0, \forall i, j = 1, \dots, n$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \Delta |\nabla f|^2 &= \sum_{i=1}^n E_i \nabla^2 f(E_i, \nabla f) \\ &= \sum_{i=1}^n E_i \langle \nabla_{\nabla f} \nabla f, E_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{E_i} \nabla_{\nabla f} \nabla f, E_i \rangle. \end{aligned}$$

Uma vez a última igualdade pode ser expressa em termos da curvatura algébrica, temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\Delta|\nabla f|^2 &= \sum_{i=1}^n \langle R(E_i, \nabla f) \nabla f, E_i \rangle + \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{\nabla f} \nabla_{E_i} \nabla f, E_i \rangle + \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{[E_i, \nabla f]} \nabla f, E_i \rangle. \end{aligned} \quad (1.24)$$

O primeiro termo de (1.24) é precisamente $\text{Ric}(\nabla f, \nabla f)$. Já o segundo corresponde a $\langle \nabla f, \nabla \Delta f \rangle$ como pode ser visto a seguir

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{\nabla f} \nabla_{E_i} \nabla f, E_i \rangle &= \sum_{i=1}^n [\nabla f \langle \nabla_{E_i} \nabla f, E_i \rangle - \langle \nabla_{E_i} \nabla f, \nabla_{\nabla f} E_i \rangle] \\ &= \nabla f(\text{tr}(\nabla^2 f)) \\ &= \nabla f(\Delta f) \\ &= \langle \nabla f, \nabla \Delta f \rangle. \end{aligned}$$

Observe que a segunda parcela do membro direito da primeira igualdade acima se anula, uma vez que $\nabla_{\nabla f} E_i = 0$ pela linearidade da conexão no índice. Finalmente, o último termo de (1.24) nos permite concluir que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{[E_i, \nabla f]} \nabla f, E_i \rangle &= \sum_{i=1}^n \nabla^2 f([E_i, \nabla f], E_i) \\ &= \sum_{i=1}^n \nabla^2 f(\nabla_{E_i} \nabla f, E_i) - \sum_{i=1}^n \nabla^2 f(\nabla_{\nabla f} E_i, E_i) \xrightarrow{0} \\ &= \sum_{i=1}^n \nabla^2 f(E_i, \nabla_{E_i} \nabla f) \\ &= \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{E_i} \nabla f, \nabla_{E_i} \nabla f \rangle \\ &= |\nabla^2 f|^2. \end{aligned}$$

Perceba que, no cálculo antecedente, recorremos à Definição 1.21.

Portanto, de (1.24) e das conclusões anteriores, obtemos

$$\Delta|\nabla f|^2 = \langle \nabla f, \nabla \Delta f \rangle + |\nabla^2 f|^2 + \text{Ric}(\nabla f, \nabla f),$$

como queríamos demonstrar. □

O resultado que provaremos em seguida é uma aplicação da 2ª identidade de Bianchi, que é também conhecido como a 2ª identidade de Bianchi contraída.

Proposição 1.11 (2ª Identidade de Bianchi Contraída). *Em uma variedade Riemanniana (M^n, g) , vale a identidade*

$$\nabla R = 2\text{div}(\text{Ric}). \quad (1.25)$$

Demonstração. Procedendo como anteriormente, tomemos um referencial geodésico $\{E_i\}_{i=1}^n$, em $p \in M$, e $X \in T_p M$. Usando as simetrias do tensor curvatura e a segunda identidade de Bianchi – atente ao fato já utilizado nos lemas antecedentes que $\nabla_X E_i = 0, \forall i$ pela linearidade da conexão no índice e por estar tratando de um referencial geodésico –, se deduz

$$\begin{aligned} \langle \nabla R, X \rangle(p) &= X(R)(p) \\ &= X \left(\sum_{i=1}^n \text{Ric}(E_i, E_i) \right) \\ &= X \left(\sum_{i,j=1}^n g(R(E_i, E_j)E_j, E_i) \right) \\ &= \sum_{i,j=1}^n g(\nabla_X (R(E_i, E_j)E_j), E_i), \end{aligned}$$

donde

$$\langle \nabla R, X \rangle(p) = \sum_{i,j=1}^n g((\nabla_X R)(E_i, E_j)E_j, E_i).$$

Usando a segunda identidade de Bianchi, item (b) da Proposição [1.9](#), obtemos

$$\begin{aligned} \langle \nabla R, X \rangle(p) &= - \sum_{i,j=1}^n g((\nabla_{E_j} R)(X, E_i)E_j, E_i) - \sum_{i,j=1}^n g((\nabla_{E_i} R)(E_j, X)E_j, E_i) \\ &= - \sum_{i,j=1}^n (\nabla_{E_j} \text{Rm})(X, E_i, E_j, E_i) - \sum_{i,j=1}^n (\nabla_{E_i} \text{Rm})(E_j, X, E_j, E_i). \end{aligned}$$

Substituindo i por j na segunda parcela da última igualdade, obtemos

$$\begin{aligned} \langle \nabla R, X \rangle(p) &= \sum_{i,j=1}^n (\nabla_{E_j} \text{Rm})(E_i, E_j, E_j, X) + \sum_{i,j=1}^n (\nabla_{E_j} \text{Rm})(E_i, E_j, E_j, X) \\ &= 2 \sum_{i,j=1}^n (\nabla_{E_j} \text{Rm})(E_j, E_i, E_i, X) \\ &= 2 \sum_{i,j=1}^n \nabla_{E_j} (\text{Rm}(E_j, E_i, E_i, X)). \end{aligned}$$

Como $\text{Ric}(X, Y) = \text{tr}(\text{Rm}(X, E_i, E_i, Y)), \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, segue que

$$\begin{aligned}
\langle \nabla R, X \rangle(p) &= 2 \sum_{j=1}^n \nabla_{E_j} \text{Ric}(E_j, X) \\
&= 2 \sum_{j=1}^n \nabla_{E_j} \text{Ric}(X, E_j) \\
&= 2(\text{div}(\text{Ric}))(X).
\end{aligned}$$

Logo, $\langle \nabla R, X \rangle(p) = 2(\text{div}(\text{Ric}))(X)$. $\square$

Finalizamos este capítulo enunciando alguns resultados clássicos relativos a variedades compactas, que desempenham um papel de destaque nesta dissertação. Ao longo do texto, estas considerações serão retomadas.

Teorema 1.4. (*Teorema da Divergência*) *Seja X um campo vetorial em (M, g) de suporte compacto, então*

$$\int_M \text{div}(X) d\text{vol} = \int_{\partial M} \langle X, n \rangle ds,$$

em que n é um vetor normal com orientação externa em ∂M .

Em particular, se M é compacta com $\partial M = \emptyset$, então $\int_M \text{div}(X) d\text{vol} = 0$. Há também uma versão do teorema anterior para tensores covariantes.

Teorema 1.5. (*Identidade de Pohozaev-Schoen*) *Se X é um campo vetorial na variedade compacta (M^n, g) e T é um 2-tensor covariante, então*

$$\int_M (\text{div}(T))(X) d\text{vol} = -\frac{1}{2} \int_M \langle T, \mathcal{L}_X g \rangle d\text{vol} + \int_{\partial M} T(X, n) ds,$$

em que n é um vetor normal com orientação externa em ∂M .

Demonstração. Uma vez que $\mathcal{L}_X(E_i, E_j) = \langle \nabla_{E_i} X, E_j \rangle + \langle \nabla_{E_j} X, E_i \rangle$, então

$$\begin{aligned}
\langle T, \mathcal{L}_X g \rangle &= \sum_{i,j=1}^n T(E_i, E_j) \cdot \mathcal{L}_X(E_i, E_j) \\
&= \sum_{i,j=1}^n [\langle \nabla_{E_i} X, T(E_i) \rangle + \langle \nabla_{E_j} X, T(E_j) \rangle] \\
&= 2 \sum_{i,j=1}^n \langle \nabla_{E_i} X, T(E_i) \rangle.
\end{aligned}$$

Daí, pelo Teorema da Divergência,

$$\int_M \text{div}(T(X)) d\text{vol} = \int_{\partial M} \langle T(X), n \rangle ds.$$

De (1.13) e das considerações anteriores, segue que

$$\int_M \operatorname{div}(T(X)) \, d\operatorname{vol} = \int_M (\operatorname{div}(T))(X) \, d\operatorname{vol} + \frac{1}{2} \int_M \langle T, \mathcal{L}_X g \rangle \, d\operatorname{vol}.$$

Concluimos, então, que

$$\int_M (\operatorname{div}(T))(X) \, d\operatorname{vol} = -\frac{1}{2} \int_M \langle T, \mathcal{L}_X g \rangle \, d\operatorname{vol} + \int_{\partial M} T(X, n) \, ds.$$

□

Em particular, quando $T = \overset{\circ}{\operatorname{Ric}} = \operatorname{Ric} - \frac{1}{n} Rg$, teremos

$$\int_M \langle X, \nabla R \rangle \, d\operatorname{vol} = -\frac{n}{n-2} \int_M \left\langle \overset{\circ}{\operatorname{Ric}}, \mathcal{L}_X g \right\rangle \, d\operatorname{vol} + \frac{2n}{n-2} \int_{\partial M} \overset{\circ}{\operatorname{Ric}}(X, \nabla R) \, ds, \quad (1.26)$$

já que $(\operatorname{div}(\overset{\circ}{\operatorname{Ric}}))(X) = \frac{n-2}{2n} \langle \nabla R, X \rangle$. É usual também chamar (1.26) de Identidade Integral de Pohozaev-Schoen. É interessante pontuar que esta fórmula é derivada de uma outra da Análise demonstrada originalmente por Schoen, vide [47].

Como consequência direta de (1.26), temos o Teorema de Kazdan-Warner, enunciado a seguir.

Corolário 1.6. *(Teorema de Kazdan-Warner) Para qualquer campo de vetores conformes X numa variedade Riemanniana compacta sem bordo (M, g) , vale a seguinte identidade*

$$\int_M \langle X, \nabla R \rangle \, d\operatorname{vol} = 0.$$

Teorema 1.7. *(Teorema de Hopf) Seja (M, g) orientável, compacta e conexa. Seja f uma função diferenciável em M com $\Delta f \geq 0$. Então, f é constante. Em particular, funções harmônicas em M são constantes.*

Espaços de curvatura seccional constante, também chamados *formas espaciais*, desempenham um papel de destaque em Geometria. Os resultados a seguir se tratam de caracterizações e envolvem as formas espaciais, o primeiro deles pode ser encontrado em [15].

Lema 1.8. *(Schur) Suponha (M^n, g) uma variedade Riemanniana com $n \geq 3$. Então,*

- (1) *A curvatura seccional é pontualmente constante, isto é, se existe alguma função suave $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $K(II_p) = f(p)$ para todo subespaço bidimensional $II_p \subset T_p M$ e todo $p \in M$, então f é constante e a variedade é uma forma espacial.*

- (2) O endomorfismo curvatura de Ricci é pontualmente um múltiplo da identidade, isto é, existe alguma função suave $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\text{Ric}(X) = f(p)X$, para $X \in T_p M$, $\forall p \in M$, então f é constante e, em particular, R é constante.

A hipótese de ser $n \geq 3$ não pode ser omitida. Como veremos mais adiante, toda superfície satisfaz a curvatura de Ricci como um múltiplo da métrica por uma função suave, mas nem toda superfície é Einstein ou possui curvatura seccional globalmente constante.

Teorema 1.9. (Tashiro) *Seja M uma variedade Riemanniana completa de dimensão $n \geq 2$ e suponha que exista uma função $\rho \in C^\infty(M)$ que satisfaça a equação*

$$\nabla^2 \rho = (-k\rho + b)g.$$

Então, M é uma das seguintes variedades:

- (1) *Se $k = b = 0$, o produto cartesiano $I \times M$, para M uma variedade Riemanniana completa $(n - 1)$ -dimensional e I um intervalo em $\mathbb{R}$.*
- (2) *Se $k = 0$, mas $b \neq 0$, um espaço euclidiano.*
- (3) *Se $k = -c^2 < 0$ e o número de pontos críticos isolados é zero, um pseudo-espaço hiperbólico do tipo zero ou negativo.*
- (4) *Se $k = -c^2 < 0$ e há apenas um ponto crítico isolado, um espaço hiperbólico com curvatura $-c^2$.*
- (5) *Se $k = c^2 > 0$, um espaço esférico de curvatura c^2 , com c uma constante positiva.*

Observação 1.3. *Um pseudo-espaço hiperbólico do tipo zero ou negativo é uma variedade, respectivamente, dada por $I \times_{\text{act}} N$ ou $I \times_{\text{asinh}(ct)} \mathbb{S}^n$, a, c constantes e N uma variedade completa. Verificaremos mais adiante que, neste caso, N é Ricci flat.*

A demonstração deste último teorema está presente em [48] e em [33]. A proposição subsequente é devida a Camargo, Caminha e Souza, e está presente no artigo [11], sendo uma generalização de um resultado devido a Yau em [53] para funções subharmônicas.

Proposição 1.12. *Seja X um campo vetorial suave em uma variedade Riemanniana M^n orientada, não-compacta e completa tal que $\text{div}(X)$ não muda de sinal em M . Se $|X| \in L^1(M)$, então $\text{div}(X) \equiv 0$.*

Capítulo 2

Variedades m -quase-Einstein e Produto Warped Einstein

Como já fora mencionado na introdução, a formalização do conceito de variedades m -quase-Einstein fora constituída a partir do trabalho [30], em que alguns resultados basilares foram estabelecidos e deu-se a motivação para estudos posteriores em uma nova direção das variedades tipo-Einstein. Tal formalização só fora concluída no trabalho [17], em que são apresentadas algumas propriedades da classe de variedades quase-Einstein e provados resultados de rigidez elementares à teoria. Além disso, os autores deste último artigo abordam métricas Kähler quase-Einstein que, de maneira resumida, são entes com estruturas complexas – não iremos, no entanto, tratar deste caso nesta dissertação.

Neste capítulo, iremos abordar 3 artigos cujas análises serão aqui apresentadas em três seções. A primeira seção conta com os resultados do artigo [30], com suas contribuições seminais. A segunda diz respeito ao artigo [17], fornecendo fórmulas e resultados de rigidez em variedades m -quase-Einstein. Já a última seção contará com o artigo [3], que segue trabalhos clássicos similares aos autores Calabi [10] e Yau [53] para estimar limites para o crescimento de bolas geodésicas em produtos warped Einstein, gerando interessantes observações na área.

2.1 Produtos Warped Einstein Compactos com Curvatura Escalar Não-Positiva

Dadas duas variedades Riemannianas (B, g_B) e (F, g_F) e uma função positiva $u \in C^\infty(B)$ uma métrica produto warped em $B \times F$ é definida por

$$g = g_B + u^2 g_F.$$

A variedade produto com uma tal métrica será denotada por $B \times_u F$ e a função u é denominada *função warping*.

No contexto das formas, produtos warped são bastante utilizados para se obter diversas métricas, uma vez que há a possibilidade de se obter isometrias entre espaços conhecidos e produtos warped aparentemente abstratos. Um exemplo disto é que o espaço hiperbólico $\mathbb{H}^{n+1}$ é isométrico^[1] à variedade $\mathbb{R} \times_{e^t} \mathbb{R}^n, n \geq 1$.

Ainda, é interessante observar que a forma das variedades depende de suas métricas e há áreas inteiras da Geometria desenvolvidas acerca de problemas de grande relevância no estudo de variedades e relações com diferentes métricas, como os de fluxos de Ricci^[2], teoria desenvolvida com a intenção de solucionar a célebre Conjectura de Poincaré, cuja validade fora justificada pelos artigos da autoria de Grigori Perelman entre 2002 e 2003, vide [37, 38, 39].

O resultado seguinte e seu corolário fornecem as expressões da curvatura de Ricci em produtos warped e uma relação fundamental sobre esse tipo de variedades, cujas demonstrações podem ser encontradas em [36] e voltaremos a eles em diversos momentos desta dissertação. Antes de apresentá-los, observemos que, em um produto warped $M = B^n \times_u F^m$, a noção de vetores verticais e horizontais diz respeito a vetores tangentes ao produto com respeito à fibra e à base, respectivamente, isto é, dados X e V vetores horizontal e vertical, nessa ordem, tangentes a M em (p, q) , existem vetores $\tilde{X} \in T_p B$ e $\tilde{V} \in T_q F$ tais que podemos enxergar $X = (\tilde{X}, 0_m)$ e $V = (0_n, \tilde{V})$. No caso geral, $d\pi_1(X) = \tilde{X}$ e $d\pi_2(V) = \tilde{V}$ e X, V são ditos levantamentos de $\tilde{X}, \tilde{V}$ a M .

Proposição 2.1 ([30]). *A curvatura de Ricci de uma variedade produto warped $M = B \times_u F$ com $m = \dim(F)$, X, Y e V, W quaisquer vetores verticais e horizontais, respectivamente, satisfaz:*

- i. $\text{Ric}(X, Y) = \text{Ric}_B(X, Y) - \frac{m}{u} \nabla^2 u(X, Y),$
- ii. $\text{Ric}(X, V) = 0,$
- iii. $\text{Ric}(V, W) = \text{Ric}_F(V, W) - (u\Delta u + (m-1)|\nabla u|^2)g_F(V, W).$

Donde segue imediatamente o corolário a seguir.

Corolário 2.1 ([30]). *O produto warped $M = B \times_u F$ é λ -Einstein se, e somente se,*

a) $\text{Ric}_B = \lambda g_B + \frac{m}{u} \nabla^2 u,$

¹O modelo de $\mathbb{H}^{n+1}$ aqui considerado é o semi-espaço, isto é, o $\mathbb{R}^{n+1}$ com primeira entrada positiva e com a métrica de Lobatchevski. Tal isometria é dada pela aplicação $(t, p) \mapsto (e^{-t}, p)$.

²Ricci solitons, mais particularmente ainda os gradientes, geram soluções particulares de fluxos de Ricci. Para mais informações a respeito desta interessante área, ver o livro *Ricci Flow and the Sphere Theorem* da autoria de Simon Brendle.

b) (F, g_F) é μ -Einstein,

c) $u\Delta u + (m-1)|\nabla u|^2 + \lambda u^2 = \mu$.

Uma vez que o trabalho base desta seção está na fundação dos estudos de variedades quase-Einstein, diversas de suas conclusões são recorrentes no estudo desse tipo de variedades. Mesmo que ainda não tenhamos apresentado a definição de variedades quase-Einstein, que será dada formalmente na seção posterior, é importante destacar que a próxima proposição estabelece a relação direta entre variedades quase-Einstein e produtos warped.

Proposição 2.2 ([30]). *Uma variedade Riemanniana (M, g) satisfaz o item (a) do Corolário 2.1 se, e somente se, a métrica produto warped $M \times_u F^m$ é Einstein, em que F^m é uma variedade Einstein m -dimensional com constante de Einstein μ satisfazendo*

$$\mu = u\Delta u + (m-1)|\nabla u|^2 + \lambda u^2. \quad (2.1)$$

Demonstração. Supondo inicialmente que (M^n, g) satisfaz o item (a) do Corolário 2.1, seu traço nos dá que

$$\nabla R = \frac{m}{u^2}(u\nabla\Delta u - \Delta u\nabla u).$$

Assim, da igualdade anterior e da segunda identidade de Bianchi, obtemos

$$\operatorname{div}(\operatorname{Ric}) = \frac{m}{2u^2}(u\nabla\Delta u - \Delta u\nabla u). \quad (2.2)$$

Por outro lado, pelas propriedades de divergência que mostramos no Capítulo 1, considerando um referencial geodésico $\{E_i\}_{i=1}^n$ em $p \in M$, segue que

$$\operatorname{div}\left(\frac{1}{u}\nabla^2 u\right)(X) = -\frac{1}{u^2}\nabla^2 u(\nabla u, X) + \frac{1}{u}\operatorname{div}(\nabla^2 u)(X),$$

para qualquer campo X de $T_p M$. Além disso, temos que $\nabla_{\nabla u} \nabla u = \frac{1}{2}\nabla|\nabla u|^2$. De fato, dado $X \in T_p M$,

$$\langle \nabla|\nabla u|^2, X \rangle = X \langle \nabla u, \nabla u \rangle = 2 \langle \nabla_X \nabla u, \nabla u \rangle = 2 \langle \nabla_{\nabla u} \nabla u, X \rangle.$$

Por conseguinte, $\nabla^2 u(\nabla u, X) = \frac{1}{2}(\nabla|\nabla u|^2)(X)$. Assim, a última equação se torna

$$\operatorname{div}\left(\frac{1}{u}\nabla^2 u\right)(X) = -\frac{1}{2u^2}(\nabla|\nabla u|^2)(X) + \frac{1}{u}\operatorname{div}(\nabla^2 u)(X). \quad (2.3)$$

Portanto, do Corolário 2.1 item (a), (2.3) e sabendo-se que $\operatorname{div}(\nabla^2 u) = \operatorname{Ric}(\nabla u) + \nabla\Delta u$, segue que

$$\begin{aligned}
 \operatorname{div}\left(\frac{1}{u}\nabla^2 u\right) &= -\frac{1}{2u^2}(\nabla|\nabla u|^2) + \frac{1}{u}(\operatorname{Ric}(\nabla u) + \nabla\Delta u) \\
 &= -\frac{1}{2u^2}(\nabla|\nabla u|^2) + \frac{1}{u}(\lambda\nabla u + \nabla\Delta u) + \frac{m}{u^2}\nabla^2 u(\nabla u) \\
 &= \frac{1}{2u^2}((m-1)\nabla|\nabla u|^2 + 2u\nabla\Delta u + 2\lambda u\nabla u). \tag{2.4}
 \end{aligned}$$

Contudo, o Corolário 2.1 item (a) novamente nos permite inferir que $\operatorname{div}(\operatorname{Ric}) = \operatorname{div}(\frac{m}{u}\nabla^2 u)$, donde (2.2) e (2.4) implicam que

$$\begin{aligned}
 0 &= \operatorname{div}\left(\frac{m}{u}\nabla^2 u - \operatorname{Ric}\right) \\
 &= \frac{m}{2u^2}((m-1)\nabla|\nabla u|^2 + u\nabla\Delta u + \Delta u\nabla u + 2\lambda u\nabla u) \\
 &= \frac{m}{2u^2}\nabla((m-1)|\nabla u|^2 + u\Delta u + \lambda u^2),
 \end{aligned}$$

isto é, $\nabla((m-1)|\nabla u|^2 + u\Delta u + \lambda u^2) = 0$. Existe, deste modo, uma constante $\mu \in \mathbb{R}$ tal que $u\Delta u + (m-1)|\nabla u|^2 + \lambda u^2 = \mu$. Consequentemente, se (F^m, g_F) é μ -Einstein, então $M \times_u F$ é λ -Einstein pelo Corolário 2.1.

Reciprocamente, pelo mesmo corolário supracitado, se M satisfaz (2.1) e existe uma variedade Riemanniana F^m μ -Einstein, o produto warped das duas variedades será λ -Einstein tendo u como função warping. $\square$

Este fato é correspondente à Proposição 5 do artigo [30], no entanto a hipótese de compacidade lá assumida é desnecessária. Em outras palavras, o que provamos nos informa que quando m é um inteiro positivo, M^n corresponde à base de um produto warped Einstein $(n+m)$ -dimensional.

O teorema a seguir corresponde ao resultado principal do artigo aqui estudado e se configura em uma resposta parcial ao questionamento presente no livro [8] apresentado na Introdução.

Teorema 2.2 ([30]). *Seja $u = e^{-\frac{f}{m}}$, $M = B \times_u S$ uma variedade produto warped Einstein cuja base B é compacta. Se M tem curvatura escalar não positiva, então o produto warped é simplesmente um produto Riemanniano.*

Demonstração. Uma vez que $\operatorname{div}(u\nabla u) = |\nabla u|^2 + u\Delta u$, temos que a equação (c) do Corolário 2.1 pode ser reescrita como

$$\operatorname{div}(u\nabla u) + (m-2)|\nabla u|^2 + \lambda u^2 = \mu. \tag{2.5}$$

Integrando (2.5) e aplicando o Teorema da Divergência, obtemos

$$\mu = \frac{m-2}{\operatorname{vol}(M)} \int_M |\nabla u|^2 d\operatorname{vol} + \frac{\lambda}{\operatorname{vol}(M)} \int_M u^2 d\operatorname{vol}. \tag{2.6}$$

Daqui em diante, dividiremos a demonstração em duas partes, supondo inicialmente que $m \geq 3$. Como M é uma variedade compacta, tomemos $p \in M$ um ponto de máximo de u . Assim, $u(p) > 0$, $\nabla u(p) = 0$ e $\Delta u(p) \leq 0$. Portanto, de (2.6) e usando o item (c) do Corolário 2.1, teremos que

$$\begin{aligned} 0 &\geq u(p)\Delta u(p) \\ &= \mu - \lambda u^2(p) \\ &= \frac{m-2}{\text{vol}(M)} \int_M |\nabla u|^2 d\text{vol} + \frac{\lambda}{\text{vol}(M)} \int_M (u^2 - u^2(p)) d\text{vol} \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

A última igualdade segue do fato que tanto λ quanto $u - u(p)$ são menores ou iguais a zero. Conclui-se que, neste caso, u é uma constante.

Agora, se $m < 3$, seja $q \in M$ um ponto de mínimo da função, isto é, $u(q) > 0$, $\nabla u(q) = 0$ e $\Delta u(q) \geq 0$. De ser $u^2 - u^2(q) \geq 0$ e das considerações anteriores, teremos que u é também constante. Logo, a variedade M é um produto Riemanniano. $\square$

A conclusão recém obtida se caracteriza como resultado de rigidez, no entanto suas extensões mais profundas serão colocadas mais adiante.

2.2 Rigidez de Métricas m -quase-Einstein

Variedades Einstein e suas generalizações são objetos bastante explorados em Geometria por suas relações com diversos outros estudos como os de Ricci solitons, variedades estáticas, representações de variedades como produtos warped – o que pode dinamizar as análises de tais variedades – e, por meio de esquações estruturais, algebrizar conceitos geométricos e analíticos.

A definição de métricas m -quase-Einstein passa pela apresentação do tensor de Ricci m -Bakry-Emery, também chamado tensor m -Bakry-Emery, que é uma modificação do tensor de Bakry-Emery – por sua vez, uma extensão do tensor de Ricci – que surgiu previamente nos artigos [1, 2, 45]. Explicitamente, o tensor m -Bakry-Emery é definido como

$$\text{Ric}_f^m = \text{Ric} + \nabla^2 f - \frac{1}{m} df \otimes df,$$

em que $f \in C^\infty(M)$, $\nabla^2 f$ representa a hessiana de f e $m \in \mathbb{Z}_+$. O tensor Ric_f^m corresponde ao tensor de Ricci em uma variedade Einstein, como veremos mais adiante observando a Proposição 2.1 e pela seguinte definição.

Definição 2.1. *Uma variedade Riemanniana (M^n, g) é dita uma variedade m -quase-*

Einstein, ou simplesmente variedade quase-Einstein, se existirem uma função suave f em M e uma constante λ tal que

$$\text{Ric}_f^m = \text{Ric} + \nabla^2 f - \frac{1}{m} df \otimes df = \lambda g. \quad (2.7)$$

A notação utilizada para expressar isto é (M, g, f) .

É também usual denotar a métrica g de uma variedade que satisfaz as condições da definição anterior como uma métrica m -quase-Einstein. Ao tomar o traço do tensor anterior, obtemos

$$R + \Delta f - \frac{1}{m} |\nabla f|^2 = \lambda n. \quad (2.8)$$

Quando consideramos m tendendo ao infinito, a expressão resultante é justamente a associada a Ricci solitons; se f é constante, Ric_f^m se reduz ao tensor de Ricci e, logo, a variedade é Einstein. Diremos que uma métrica quase-Einstein é trivial quando f for constante.

Seguindo a terminologia³ de Ricci solitons, uma variedade (M, g, f) será dita *expanding*, *steady* ou *shrinking*, respectivamente, se $\lambda < 0$, $\lambda = 0$ ou $\lambda > 0$.

Muitas propriedades geométricas e topológicas de variedades com curvatura de Ricci limitada inferiormente podem ser estendidas a variedades com tensor Ric_f^m limitado inferiormente com m finito – ou no infinito – e f limitada. Para mais informações, ver [51].

Necessitamos apresentar uma forma equivalente à equação m -quase-Einstein, mais usual principalmente pela versatilidade promovida ao lidar com os processos calculísticos, que nos permite relacionar completamente o tipo de variedade que aqui tratamos com produtos warped, cuja forma depende da função f e dos espaços que compõem o produto. Passemos a apresentar esta nova e muito útil configuração.

Quando m é um inteiro positivo, considerando $u = e^{-\frac{f}{m}}$, teremos que

$$\begin{aligned} \nabla u &= -\frac{1}{m} e^{-\frac{f}{m}} \nabla f, \\ \frac{m}{u} \nabla^2 u &= -\nabla^2 f + \frac{1}{m} df \otimes df. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Portanto, (2.7) pode ser reescrita como

$$\text{Ric} - \frac{m}{u} \nabla^2 u = \lambda g. \quad (2.10)$$

Pela equivalência de ambas as equações, ora utilizaremos (2.10) como referencial da

³Poderíamos utilizar a nomenclatura contrátil ($\lambda > 0$), estacionário ($\lambda = 0$) e expansivo ($\lambda < 0$).

equação de métricas quase-Einstein, ora recorreremos a (2.7). Tomando o traço de (2.10), chega-se a

$$\Delta u = \frac{u}{m}(\mathbf{R} - \lambda n). \quad (2.11)$$

Lembre-se que um campo $X \in \mathfrak{X}(M)$ é chamado *conforme* quando a derivada de Lie na direção de X é um múltiplo da métrica g , isto é, existe $\rho \in C^\infty(M)$ tal que $\mathcal{L}_X g = \rho g$, daí $X = \nabla u \implies \mathcal{L}_{\nabla u} g = 2\nabla^2 u$. Neste caso, ∇u é conforme se, e somente se, M^n é Einstein.

O equivalente da equação (2.1) para a função potencial f é

$$\mu e^{\frac{2}{m}f} = \lambda - \frac{1}{m}(\Delta f - |\nabla f|^2). \quad (2.12)$$

Uma vez que $u > 0$, obtemos imediatamente o seguinte resultado, que é similar ao caso de Ricci solitons.

Proposição 2.3 ([17]). *Uma métrica m -quase-Einstein em uma variedade compacta com curvatura escalar constante é trivial.*

Demonstração. De fato, como $\Delta u = \operatorname{div} \nabla u$, pelo Teorema da Divergência, integrando ambos os membros de (2.11), concluímos que ou $u \equiv 0$ ou $\mathbf{R} = \lambda n$. Se o primeiro caso ocorre, o resultado segue. Supondo, então, que $\mathbf{R} = \lambda n$, então (2.11) $\implies \Delta u \equiv 0$ o que, pela compacidade da variedade e o Teorema de Hopf [1.7], implica que u é constante. $\square$

A proposição seguinte corresponde a uma observação a respeito da existência de métricas 1-quase-Einstein. Vale salientar que, quando $m = 1$, a equação quase-Einstein nos diz que F terá constante de Einstein $\mu = 0$, pois variedades 1-dimensionais são Ricci flat. Porém, pode-se construir uma família de exemplos de variedades 1-quase-Einstein a partir de outras m -quase-Einstein, $m > 1$. Antes, apresentemos um corolário, cuja demonstração se encontra presente em [36].

Corolário 2.3 ([36]). *Sejam $M = B \times_u F$, X, Y vetores horizontais e V, W verticais, então*

a) $\nabla_X Y$ é um vetor horizontal correspondente ao levantamento de $\nabla_X^B Y$ em B .

b) $\nabla_X V = \nabla_V X = \frac{X(f)}{f} V$.

Proposição 2.4 ([17]). *Dada uma métrica m -quase-Einstein (M^n, g_M, u) , se (F^k, g_F) é uma variedade Einstein satisfazendo $\operatorname{Ric}_{g_F} = \mu g_F$, para $m > k \in \mathbb{N}$, então $(M \times F^k, g_M + u^2 g_F, u)$ é uma variedade $(m - k)$ -quase-Einstein com mesmas constantes λ e μ .*

Demonstração. Obteremos as expressões de Ric_g , ∇^2 e Δu com respeito à métrica $g = g_M + u^2 g_F$ e dados X e U levantamentos de M e F a $M \times F$, respectivamente. Ademais, quando esses entes forem computados com relação às métricas g_M e g_F utilizaremos os respectivos índices M e F . Então, pela item (i) da Proposição 2.1,

$$\text{Ric}_g(X, X) = \text{Ric}_M(X, X) - \frac{k}{u} \nabla_M^2 u(X, X).$$

Pelos itens (ii) e (iii) da mesma proposição supracitada e por ser $\text{Ric}_F = \mu g_F$, temos

$$\begin{aligned} \text{Ric}_g(U, U) &= (\mu - (u \Delta_M u + (k-1)|\nabla u|^2)) g_F(U, U) \\ \text{Ric}_g(X, U) &= 0. \end{aligned}$$

Agora, note que $\nabla^2 u(Z, W) = g(\nabla_Z \nabla u, W)$, $\forall Z, W \in T_p(M \times_u F)$, donde

$$\nabla^2 u(X, X) = \nabla_M^2 u(X, X),$$

já que ∇u é o levantamento horizontal de $\nabla_M u$ e, portanto, $\nabla_X \nabla u$ é horizontal. Por outro lado, pelo item (b) do Corolário 2.3, segue que

$$\begin{aligned} \nabla_g^2 u(U, U) &= g_M(\nabla_U \nabla u, U) + u^2 g_F(\nabla_U \nabla u, U) \\ &= u |\nabla u|^2 g_F(U, U). \end{aligned} \tag{2.13}$$

No entanto, note que $\text{tr}(g) = n + k$, em que $n = \dim(M)$. Daí, o levantamento de uma base de $T_q F$ que satisfaz essas condições é $B_F = \{\frac{W_1}{u}, \dots, \frac{W_k}{u}\}$, em que o conjunto dos W_i formam uma base de F ortonormal. Assim sendo, uma base ortonormal de $T_{(p,q)}(M \times_u F)$ pela métrica g é dada por $B_{(p,q)} = \{Y_1, \dots, Y_n, \frac{W_1}{u(p)}, \dots, \frac{W_k}{u(p)}\}$, com Y_j constituindo uma base ortonormal de $T_p M$ – a notação dos vetores de $B_{(p,q)}$ é a mesma dos fatores do produto warped por um abuso de notação. Então, tomando os elementos da base $B_{(p,q)}$ como Z_l , $l \in \{1, \dots, n+k\}$,

$$\begin{aligned} \Delta_g u &= \text{tr}(\nabla^2 u) \\ &= \sum_{l=1}^{n+k} \nabla^2 u(Z_l, Z_l) \\ &= \sum_{j=1}^n \nabla^2 u(Y_j, Y_j) + \sum_{i=1}^k \nabla^2 u(W_i, W_i) \\ &= \Delta_M u + \frac{k}{u} |\nabla u|^2. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Portanto, utilizando (2.13) e (2.14), obtemos

$$\begin{aligned}
 \text{Ric}_g(X, X) - \frac{m-k}{u} \nabla^2 u(X, X) &= \text{Ric}_M(X, X) - \frac{k}{u} \nabla^2 u(X, X) - \frac{m-k}{u} \nabla^2 u(X, X) \\
 &= \text{Ric}_M - \frac{m}{u} \nabla_M^2 u(X, X) \\
 &= \lambda g_M(X, X) \\
 &= \lambda g(X, X),
 \end{aligned}$$

a penúltima igualdade segue do fato de M ser m -quase-Einstein. Além disso,

$$\begin{aligned}
 \text{Ric}_g(X, U) - \frac{m-k}{u} \nabla^2 u(X, U) &= \lambda g(X, U) \rightarrow 0 \\
 \text{Ric}_g(U, U) - \frac{m-k}{u} \nabla^2 u(U, U) &= (\mu - (u\Delta_M u + (k-1)|\nabla u|^2))g_F(U, U) - \\
 &\quad - \frac{m-k}{u} u|\nabla u|^2 g_F(U, U). \tag{2.15}
 \end{aligned}$$

Contudo,

$$\begin{aligned}
 u\Delta u + (m-k-1)|\nabla u|^2 + \lambda u^2 &= u\Delta_M u + k|\nabla u|^2 + (m-k-1)|\nabla u|^2 + \lambda u^2 \\
 &= u\Delta_M u + (m-1)|\nabla u|^2 + \lambda u^2 \\
 &= \mu,
 \end{aligned}$$

donde a expressão (2.15) se torna

$$\begin{aligned}
 \text{Ric}_g(U, U) - \frac{m-k}{u} \nabla^2 u(U, U) &= (u\Delta_M u + k|\nabla u|^2 + (m-k-1)|\nabla u|^2 - u\Delta_M u + \\
 &\quad + \lambda u^2 - (k-1)|\nabla u|^2 - m|\nabla u|^2 + k|\nabla u|^2)g_F(U, U) \\
 &= \lambda u^2 g_F(U, U) \\
 &= \lambda g(U, U),
 \end{aligned}$$

isto é,

$$\text{Ric}_g - \frac{m-k}{u} \nabla^2 u = \lambda g.$$

Conclui-se que $M^n \times_u F^k$ é $(m-k)$ -quase-Einstein para as mesmas constantes λ e μ de M m -quase-Einstein. $\square$

A definição seguinte trata de um ente geométrico que se relaciona com as variedades 1-quase-Einstein e de bastante destaque por suas diversas aplicações e extensões a outras áreas do conhecimento.

Definição 2.2. Dizemos que uma variedade Riemanniana (M^n, g) é estática quando

cumpra a relação

$$-\Delta u g + \nabla^2 u - u \text{Ric} = 0, \quad (2.16)$$

chamada equação das variedades estáticas.

Vale pontuar que algumas das extensões abarcadas por esta teoria atingem a Matemática e a Física, como por exemplo em estudos de cosmologia e em aplicações do Teorema da Massa Positiva, vide [50].

Exemplo 2.1. *Seja (M^n, g) uma variedade 1-quase-Einstein tal que o Laplaciano da função u cumpra a relação*

$$\Delta u = -\lambda u.$$

Então, a equação (2.16) nos dá que M é uma variedade estática. Em particular, a expressão (2.1) implica que $\mu = \lambda u^2 + u \Delta u = 0$. Neste caso, a equação (2.11) nos dá que R é constante e igual a $(n-1)\lambda$.

Apresentamos a seguir alguns exemplos de variedades 1-quase-Einstein, o primeiro trata do caso em que $\mu = 0$ e o segundo, quando esta constante é não-nula.

Exemplo 2.2. *Considerando $\lambda < 0$, $M = \mathbb{R}$ e $u(t) = e^{\sqrt{-k}t}$, em que $k = \frac{\lambda}{m}$ e $m \geq 1$, teremos $u'(t) = \sqrt{-k}e^{\sqrt{-k}t}$ e $u''(t) = -ke^{\sqrt{-k}t}$, donde M satisfaz (2.10) e a expressão (2.7) nos dá $\mu = 0$, ou seja, M é a base de um produto warped Einstein que terá como fibra uma variedade Ricci flat. Em particular, $\mathbb{R} \times_u \mathbb{R}^m$ é um produto warped resultante e isto o torna, com a métrica $g = dt^2 + u^2 g_{\mathbb{R}^m}$, uma variedade Einstein com constante $\lambda < 0$.*

Exemplo 2.3. *Também considerando $M = \mathbb{R}$ e k como anteriormente, porém tomando $\lambda = \frac{-1}{1 - \frac{1}{m}}$ e $u(t) = \cosh(\sqrt{-k}t)$, $\nabla^2 u = -ku$ e a equação (2.10) implicam que M será uma variedade m -quase-Einstein com fibra F satisfazendo $\text{Ric}_F = -g_F$. De fato, analisando a equação (2.1), temos*

$$u \Delta u + (m-1)|\nabla u|^2 + \lambda u^2 = -k \cosh^2(\sqrt{-k}t) - (m-1)k \sinh^2(\sqrt{-k}t) + \lambda \cosh^2(\sqrt{-k}t).$$

Assim, como $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$ e $mk = \lambda$, o membro direito da igualdade anterior se torna

$$-k \cosh^2(\sqrt{-k}t) - (m-1)k \sinh^2(\sqrt{-k}t) + \lambda \cosh^2(\sqrt{-k}t) = -k + \lambda = -1,$$

isto é, $\mu = -1$. Consequentemente, $\mathbb{R} \times_u \mathbb{H}^m$ é uma variedade warped Einstein gerada pelas condições sobre $\mathbb{R}$ e $u(t)$.

Antes de apresentarmos e demonstrarmos os resultados conclusivos do artigo [17], exibiremos mais alguns resultados de caracterização de métricas m -quase-Einstein que são também Einstein.

Um caminho natural tomado em estudos envolvendo o tensor Ric_f^m é a generalidade de resultados geométricos e topológicos válidos em Ricci solitons para variedades m -quase-Einstein. Neste sentido, apresentaremos aqui generalizações de cálculos presentes em [42] para métricas que satisfazem a equação m -quase-Einstein.

Pelas fórmulas (1.19) e (1.23), segue diretamente que

$$2(\text{div}(\nabla^2 f))(\nabla f) = \frac{1}{2}\Delta|\nabla f|^2 - |\nabla^2 f|^2 + \text{Ric}(\nabla f, \nabla f) + \langle \nabla f, \nabla \Delta f \rangle. \quad (2.17)$$

Utilizaremos (2.17) na demonstração dos fatos seguintes e recorreremos a muitas das considerações estabelecidas no Capítulo 1.

Lema 2.4 ([17]). *Se o tensor m -Bakry-Emery for um múltiplo da métrica, isto é, se tivermos uma variedade com estrutura m -quase-Einstein, então*

1. $\frac{1}{2}\Delta|\nabla f|^2 = |\nabla^2 f|^2 - \text{Ric}(\nabla f, \nabla f) + \frac{2}{m}|\nabla f|^2\Delta f.$
2. $\frac{1}{2}\nabla R = \frac{m-1}{m}\text{Ric}(\nabla f) + \frac{1}{m}(R - (n-1)\lambda)\nabla f.$
3. $\frac{1}{2}\Delta R - \frac{m+2}{2m}\langle \nabla R, \nabla f \rangle = \frac{m-1}{m}\text{tr}(\text{Ric} \circ (\lambda g - \text{Ric})) - \frac{1}{m}(R - n\lambda)(R - (n-1)\lambda)$
 $= -\frac{m-1}{m}|\text{Ric} - \frac{1}{n}Rg|^2 - \frac{m+n-1}{mn}(R - n\lambda)\left(R - \frac{n(n-1)}{m+n-1}\lambda\right).$

Demonstração. Tomando o divergente da equação m -quase-Einstein, podemos obter

$$\text{div}(\text{Ric}) + \text{div}(\nabla^2 f) - \frac{1}{m}\text{div}(df \otimes df) = 0,$$

pois $\text{div}(g) = 0$. Lembrando que, por (1.15), $\text{div}(df \otimes df) = \nabla^2 f(\nabla f) + \Delta f \nabla f$, donde a igualdade anterior se torna

$$\text{div}(\text{Ric}) + \text{div}(\nabla^2 f) - \frac{1}{m}\nabla_{\nabla f}\nabla f - \frac{1}{m}\Delta f \nabla f = 0, \quad (2.18)$$

em que $\nabla_{\nabla f}\nabla f$ é equivalente a $\nabla^2 f(\nabla f)$. A partir daí e usando (1.25), conseguimos deduzir

$$2(\text{div}(\nabla^2 f))(\nabla f) = -\langle \nabla R, \nabla f \rangle + \frac{2}{m}\Delta f|\nabla f|^2 + \frac{2}{m}\nabla^2 f(\nabla f, \nabla f). \quad (2.19)$$

Agora, tomando o gradiente do traço de (2.7), deduz-se

$$\begin{aligned}\nabla R + \nabla \Delta f - \frac{1}{m} \nabla |\nabla f|^2 &= 0 \\ \nabla R + \nabla \Delta f - \frac{2}{m} \nabla_{\nabla f} \nabla f &= 0.\end{aligned}\tag{2.20}$$

Finalmente, aplicando esta última igualdade em (2.19),

$$\begin{aligned}2(\operatorname{div}(\nabla^2 f))(\nabla f) &= \langle \nabla \Delta f, \nabla f \rangle - \frac{1}{m} \langle \nabla |\nabla f|^2, \nabla f \rangle + \frac{2}{m} \Delta f |\nabla f|^2 + \frac{2}{m} \nabla^2 f(\nabla f, \nabla f) \\ &= \langle \nabla \Delta f, \nabla f \rangle - \frac{2}{m} \langle \nabla_{\nabla f} \nabla f, \nabla f \rangle + \frac{2}{m} \Delta f |\nabla f|^2 + \frac{2}{m} \nabla^2 f(\nabla f, \nabla f) \\ &= \langle \nabla \Delta f, \nabla f \rangle + \frac{2}{m} \Delta f |\nabla f|^2,\end{aligned}$$

donde (2.17) nos dá

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \Delta |\nabla f|^2 &= \langle \nabla \Delta f, \nabla f \rangle + \frac{2}{m} \Delta f |\nabla f|^2 + |\nabla^2 f|^2 - \operatorname{Ric}(\nabla f, \nabla f) - \langle \nabla f, \nabla \Delta f \rangle \\ &= |\nabla^2 f|^2 - \operatorname{Ric}(\nabla f, \nabla f) + \frac{2}{m} |\nabla f|^2 \Delta f,\end{aligned}$$

que é justamente o item (1).

Para o segundo item deste lema, usando a segunda identidade de Bianchi contraída, a fórmula para o divergente da Hessiana e as equações (2.18), (2.20), chegamos a

$$\begin{aligned}\nabla R &= 2\operatorname{div}(\operatorname{Ric}) \\ &= -2\operatorname{div}(\nabla^2 f) + \frac{2}{m} \nabla_{\nabla f} \nabla f + \frac{2}{m} \Delta f \nabla f \\ &= -2\operatorname{Ric}(\nabla f) - 2\nabla \Delta f + \frac{2}{m} \nabla_{\nabla f} \nabla f + \frac{2}{m} \Delta f \nabla f \\ &= -2\operatorname{Ric}(\nabla f) + 2\nabla R - \frac{2}{m} \nabla_{\nabla f} \nabla f + \frac{2}{m} \Delta f \nabla f.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\nabla R = 2\operatorname{Ric}(\nabla f) + \frac{2}{m} \nabla_{\nabla f} \nabla f - \frac{2}{m} \Delta f \nabla f.$$

Porém, avaliando (2.7) em ∇f , infere-se

$$\nabla_{\nabla f} \nabla f = \left(\lambda + \frac{1}{m} |\nabla f|^2 \right) \nabla f - \operatorname{Ric}(\nabla f).$$

Substituindo isto e para Δf a partir do traço de (2.7), chegamos justamente ao item (2),

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\nabla R &= \text{Ric}(\nabla f) + \frac{1}{m} \left(\lambda + \frac{1}{m} |\nabla f|^2 \right) \nabla f - \frac{\text{Ric}(\nabla f)}{m} - \frac{1}{m} \left(-R + \frac{1}{m} |\nabla f|^2 + \lambda n \right) \nabla f \\ &= \frac{m-1}{m} \text{Ric} \nabla f + \frac{1}{m} (R - (n-1)\lambda) \nabla f. \end{aligned}$$

Por fim, mostremos a validade do item (3) deste Lema. Tomando a divergência de ambos os membros da última equação, tem-se

$$\frac{1}{2}\Delta R = \frac{m-1}{m} \text{div}(\text{Ric}(\nabla f)) + \frac{1}{m} \text{div}((R - (n-1)\lambda) \nabla f). \quad (2.21)$$

É importante destacar que a divergência da equação antecedente é divergência de campos e não de tensores. Por (1.13), temos uma fórmula para a divergência do tensor $\text{Ric}(\nabla f)$ e, pela segundo item deste lema, podemos fazer $\frac{m-1}{m} \text{Ric}(\nabla f, \nabla f) = -\frac{1}{m} (R - (n-1)\lambda) \langle \nabla f, \nabla f \rangle + \frac{1}{2} \langle \nabla R, \nabla f \rangle$, donde deduz-se

$$\begin{aligned} \text{div}(\text{Ric}(\nabla f)) &= \langle \text{div}(\text{Ric}), \nabla f \rangle + \sum_{i=1}^n g(\text{Ric}(E_i), \nabla_{E_i} \nabla f) \\ &= \frac{1}{2} \langle \nabla R, \nabla f \rangle + \langle \text{Ric}, \nabla^2 f \rangle \\ &= \frac{1}{2} \langle \nabla R, \nabla f \rangle + \left\langle \text{Ric}, \lambda g - \text{Ric} + \frac{1}{m} (df \otimes df) \right\rangle \\ &= \frac{1}{2} \langle \nabla R, \nabla f \rangle + \frac{1}{m} \langle \text{Ric}, (df \otimes df) \rangle - \langle \text{Ric}, \text{Ric} - \lambda g \rangle. \end{aligned}$$

Assim, pela definição do produto de Hilbert-Schmidt, temos

$$\begin{aligned} \text{div}(\text{Ric}(\nabla f)) &= \frac{1}{2} \langle \nabla R, \nabla f \rangle + \frac{1}{m} \text{Ric}(\nabla f, \nabla f) - \langle \text{Ric}, \text{Ric} - \lambda g \rangle \\ &= \frac{1}{2} \langle \nabla R, \nabla f \rangle - \langle \text{Ric}, \text{Ric} - \lambda g \rangle + \\ &\quad + \frac{1}{m-1} \left(\frac{1}{2} \langle \nabla R, \nabla f \rangle - \frac{1}{m} (R - (n-1)\lambda) |\nabla f|^2 \right). \end{aligned} \quad (2.22)$$

Ademais, por (1.14),

$$\text{div}((R - (n-1)\lambda) \nabla f) = (R - (n-1)\lambda) \Delta f + \langle \nabla R, \nabla f \rangle. \quad (2.23)$$

Pondo (2.23) e (2.22) em (2.21), teremos

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2}\Delta R &= \frac{m-1}{2m} \langle \nabla R, \nabla f \rangle - \frac{m-1}{m} \langle \text{Ric}, \text{Ric} - \lambda g \rangle + \\
 &\quad + \frac{1}{m} \left(\frac{1}{2} \langle \nabla R, \nabla f \rangle - \frac{1}{m} (R - (n-1)\lambda) |\nabla f|^2 \right) + \\
 &\quad + \frac{1}{m} (R - (n-1)\lambda) \Delta f + \frac{1}{m} \langle \nabla R, \nabla f \rangle \\
 &= \frac{m+2}{2m} \langle \nabla R, \nabla f \rangle - \frac{m-1}{m} \langle \text{Ric}, \text{Ric} - \lambda g \rangle + \\
 &\quad + \frac{1}{m} (R - (n-1)\lambda) \left(\Delta f - \frac{1}{m} |\nabla f|^2 \right).
 \end{aligned}$$

Como $\Delta f - \frac{1}{m} |\nabla f|^2 = \lambda n - R$, a igualdade anterior passa a ser

$$\frac{1}{2}\Delta R = \frac{m+2}{2m} \langle \nabla R, \nabla f \rangle - \frac{m-1}{m} \langle \text{Ric}, \text{Ric} - \lambda g \rangle + \frac{1}{m} (\lambda n - R)(R - (n-1)\lambda).$$

No entanto, pela definição do produto interno de Hilbert-Schmidt,

$$\begin{aligned}
 \langle \text{Ric}, \text{Ric} - \lambda g \rangle &= |\text{Ric}|^2 - \lambda R \\
 &= \left| \text{Ric} - \frac{1}{n} R g \right|^2 - R \left(\lambda - \frac{1}{n} R \right).
 \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2}\Delta R - \frac{m+2}{2m} \langle \nabla R, \nabla f \rangle &= - \frac{m-1}{m} \left| \text{Ric} - \frac{1}{n} R g \right|^2 - \\
 &\quad - \frac{m+n-1}{mn} (R - n\lambda) \left(R - \frac{n(n-1)}{m+n-1} \lambda \right).
 \end{aligned}$$

□

Como em [42], cada uma das equações deste lema nos fornecem importantes informações sobre métricas m -quase-Einstein. Inicialmente, combinando a primeira equação do Lema 2.4 com o Teorema da Divergência, temos a proposição a seguir.

Proposição 2.5 ([17]). *Se uma variedade Riemanniana compacta (M, g) possui estrutura m -quase-Einstein e*

$$\text{Ric}(\nabla f, \nabla f) \leq \frac{2}{m} |\nabla f|^2 \Delta f,$$

então f é constante e, logo, a variedade é Einstein.

Demonstração. De fato, basta notar que, por hipótese, o item (1) do Lema 2.4 nos dá $\frac{1}{2}\Delta |\nabla f|^2 \geq |\nabla^2 f|^2$. Então, pelo Teorema da Divergência,

$$0 \geq \int_M |\nabla^2 f|^2 d\text{vol} \geq 0,$$

ou seja, $\nabla^2 f \equiv 0 \implies \nabla f$ é constante. Porém, pela compacidade, existe um ponto $p \in M$ no qual $\nabla f(p) = 0$, isto é, $\nabla f \equiv 0$ e, portanto, f é constante. $\square$

Por sua vez, o próximo resultado é consequência direta da equação do item (2) do Lema 2.4.

Proposição 2.6 ([17]). *Quando $m \neq 1$, uma métrica m -quase-Einstein possui curvatura escalar constante se, e somente se,*

$$\text{Ric}(\nabla f) = -\frac{1}{m-1}(\text{R} - (n-1)\lambda)\nabla f.$$

Por fim, a última equação do lema nos induz as seguintes conclusões.

Proposição 2.7 ([17]). *Se uma variedade (M, g) satisfaz (2.7) para $m \geq 1$ e*

(a) $\lambda > 0$ e M é compacta, então a curvatura escalar é limitada inferiormente por

$$\text{R} \geq \frac{n(n-1)}{m+n-1}\lambda. \quad (2.24)$$

(b) $\lambda = 0$, a curvatura escalar é constante e $m > 1$, então M é Ricci flat.

(c) $\lambda < 0$ e a curvatura escalar é constante, então

$$n\lambda \leq \text{R} \leq \frac{n(n-1)}{m+n-1}\lambda$$

e quando $m > 1$, R é igual a um dos extremos se, e somente se, M é Einstein.

Demonstração. Provemos o item (a). Desde que M é compacta, R possui um ponto de mínimo, digamos $q \in M$. Assim, como $\nabla \text{R}(q) = 0$ e $\Delta \text{R}(q) \geq 0$, a expressão no item (3) do Lema 2.4 é não-negativa, donde

$$-\frac{m+n-1}{mn}(\text{R}(q) - n\lambda) \left(\text{R}(q) - \frac{n(n-1)}{m+n-1}\lambda \right) \geq \frac{m-1}{m} \left| \text{Ric} - \frac{1}{n}\text{R}(q)g \right|^2 \geq 0.$$

Por conseguinte,

$$\frac{n(n-1)}{m+n-1}\lambda \leq \text{R}(q) \leq n\lambda.$$

Como q é ponto de mínimo, obtemos (2.24).

Para demonstrar (b) e (c), observe que sendo R constante, a equação (3) do Lema 2.4 é nula e, desta forma,

$$-\frac{m+n-1}{mn}(\text{R}(q) - n\lambda) \left(\text{R}(q) - \frac{n(n-1)}{m+n-1}\lambda \right) = \frac{m-1}{m} \left| \text{Ric} - \frac{1}{n}\text{R}(q)g \right|^2 \geq 0.$$

Logo, se $\lambda = 0$, $m > 1$, então $\text{Ric} = \frac{1}{n}Rg$ e $R = 0$, o que nos dá M Ricci flat. Por outro lado, se $\lambda < 0$, $R \in \left[n\lambda, \frac{n(n-1)}{m+n-1}\lambda\right]$. $\square$

Observação 2.1. *O item (a) da proposição anterior equivale a dizer que uma métrica m -quase-Einstein compacta com m finito e $\lambda > 0$ tem curvatura positiva, sendo correspondente à Proposição 1.1 de [17]. É interessante destacar que existe um resultado análogo para shrinking Ricci solitons e compacidade, como pode ser visto em [23, 29].*

Observação 2.2. *O Teorema 2.2 nos diz que variedades compactas com estrutura m -quase-Einstein não-triviais são tais que $\lambda > 0$. Temos também a validade da recíproca, de fato uma variedade completa (M, g) m -quase-Einstein não trivial é compacta se, e somente se, $\lambda > 0$.*

Com efeito, quando $m \in \mathbb{Z}$, o resultado segue do Teorema de Myers sobre a variedade produto warped $E = M \times_u F$, já que $\text{Ric}_E = \text{Ric}_f^m$, desde que E seja uma variedade completa. Há ainda uma argumentação adicional, mais geral, para este fato. Quando m não é inteiro, a demonstração disto segue argumentos devidos a Qian em [45]. Sabemos que geodésicas minimizantes ligando quaisquer dois pontos de M estão inteiramente contidas na variedade. Ademais, por hipótese,

$$\text{Ric}_f^m = \lambda g > 0.$$

A desigualdade anterior é devida ao sinal de λ . Assim, pelo desenvolvido para a demonstração do Teorema 5 em [45], o comprimento de qualquer geodésica é limitado superiormente uniformemente, e então a variedade é compacta, já que toda variedade completa e limitada é compacta.

A observação anterior estende conclusões clássicas da relação entre o tensor de Ricci e a topologia das variedades. É interessante pontuar que este resultado é também válido em variedades compactas com bordo com a estrutura tipo-Einstein abordada em [27], além de que a consideração de m como um real positivo fornece uma outra generalização das métricas m -quase-Einstein. No capítulo seguinte, iremos nos aprofundar um pouco mais nestas questões. A esta altura, é válido enunciar o teorema devido a Qian que nos permitiu tais conclusões em situações mais gerais.

Teorema 2.5. *Seja (M, g) uma variedade n -dimensional completa e conexa. Suponhamos $f \in C^2(M)$, $\alpha > 0$ um real e $A > 0$ constante tais que $\text{Ric}_f^\alpha \geq A^2$. Então, M é compacta e seu diâmetro satisfaz $d(M) \leq \sqrt{n + \alpha - 1}\pi A^{-1}$.*

O teorema anterior se trata de uma extensão do Teorema de Myers.

Observação 2.3. *Considerando $m = \infty$, as conclusões anteriores possuem análogos para o caso Ricci soliton, como o bem conhecido resultado em [29] que diz que shrinking*

Ricci soliton compactos têm curvatura escalar positiva – diretamente conectado ao item (a) anterior. Também, em [42], há alguns resultados para curvatura escalar constante.

Prosseguiremos estabelecendo considerações acerca de variedades m -quase-Einstein 2-dimensionais. Contudo, primeiramente relembremos uma caracterização de métricas produto warped, apresentada em [8], [40] e cuja demonstração em [21] se encontra bastante elucidada.

Teorema 2.6. *Uma variedade Riemanniana (M^n, g) é um produto warped $(a, b) \times_u N^{n-1}$ se, e somente se, existe uma função não trivial h tal que $\nabla^2 h = kg$, para alguma função $k : M \rightarrow \mathbb{R}$. ($u = h'$ a menos de uma constante multiplicativa)*

No Teorema anterior, (a, b) pode ser toda a reta real. Em [8], especificamente no Teorema 9.119, pela correspondência com produtos warped, há classificações das métricas m -quase-Einstein 2-dimensionais.

O resultado a seguir é um resultado de rigidez que nos dá uma caracterização de métricas m -quase-Einstein que são também Einstein.

Proposição 2.8 ([17]). *Uma variedade (M^n, g, u) m -quase-Einstein é Einstein se, e somente se, $u = -\frac{f}{m}$ é constante ou a variedade completa é difeomorfa ao $\mathbb{R}^n$ com estrutura produto warped $(\mathbb{R} \times_{a^{-1}e^{ar}} N^{n-1}, a^{-1}e^{ar})$, em que N^{n-1} é Ricci flat, $a \in \mathbb{R}$ constante, ou o espaço será $(\mathbb{H}^n, dr^2 + \sinh^2(ar)g_{\mathbb{S}^{n-1}}, a^{-1}\cosh(ar))$.*

Demonstração. Se g é κ -Einstein, ou seja, $\text{Ric}_M = \kappa g$, então, pela equação (2.10),

$$\nabla^2 u = \frac{\kappa - \lambda}{m} u g, \quad (2.25)$$

para alguma função $u > 0$. Se M é compacta, $\Delta u = \frac{\kappa - \lambda}{m} n u$ e o Teorema da Divergência implica que $\lambda = \kappa$, então u ($\log f = -\frac{1}{m} \ln(u)$) é constante. Todavia, se u é não-constante, então M é não compacto pelo Teorema 2.2 e, logo, $\kappa, \lambda \leq 0$ ⁴. De modo a encontrar soluções positivas para a EDO linear de segunda ordem (2.25), temos os seguintes casos, para $c = \frac{\kappa - \lambda}{m}$:

- i. Se $\lambda = 0$ e $\kappa \leq 0$, então a equação diferencial não possui solução positiva, já que a solução completa é $u(t) = a \sin(\sqrt{-\frac{\kappa}{m}}t) + b \cos(\sqrt{-\frac{\kappa}{m}}t)$, $a, b \in \mathbb{R}$ constantes, e muda de sinal.

Quando $\lambda < 0$, pela Proposição 2.7 item (c), $\kappa \geq \lambda$. Assim, se

- ii. $\kappa = \lambda$, então $\nabla^2 u = 0 \implies \nabla u = \text{cte}$, ou seja, $u(t) = at$, que também não é uma solução positiva da EDO.

⁴Observe que o Teorema 2.6 nos dá que M é também um produto warped não-trivial cuja base é um intervalo aberto. Aliando isto à Observação 2.2, teremos $\kappa \leq 0$.

- iii. Resta-nos uma última possibilidade. Se $\lambda < \kappa \leq 0$, obtemos a solução geral $u(t) = ae^{\sqrt{c}t} + be^{-\sqrt{c}t}$, que é positiva quando consideramos constantes $a, b \geq 0$, mas não iguais a zero simultaneamente.

Este último caso nos dá $\nabla^2 u > 0$ e, então, a função u é estritamente convexa, donde M é difeomorfa ao $\mathbb{R}^n$. Assim, estamos em condições de aplicar o Teorema 1.9, especificamente os casos correspondentes aos itens (3) e (4).

Tomando inicialmente uma solução particular $u(t) = \frac{1}{\alpha}e^{\alpha t}$, com $\alpha = \sqrt{\frac{\kappa - \lambda}{m}}$, como u não possui pontos críticos, o item (3) do Teorema 1.9 e o Teorema 2.6 nos permitem inferir que M é o espaço $\mathbb{R} \times_{u'} N^{n-1}$ com a métrica produto warped

$$g = dt^2 + e^{2\alpha t} g_0.$$

Note que a métrica g_0 é Ricci flat. Com efeito, considerando $h = u'(t)$, o Corolário 2.1 juntamente com (2.25) nos dão, de ser $\text{Ric}_{\mathbb{R}} = 0$,

$$\text{Ric}_{\mathbb{R}} = \kappa g_{\mathbb{R}} + \frac{n-1}{h} \nabla^2 h \implies \kappa = (n-1) \frac{\lambda - \kappa}{m}. \quad (2.26)$$

Ademais, o mesmo corolário supracitado nos diz que N é σ -Einstein, donde a expressão (2.1) nos garante

$$\begin{aligned} \sigma &= h\Delta h + (n-1-1)|\nabla h|^2 + \kappa h^2 \\ &= h\alpha^2 h + (n-1)\alpha^2 h^2 - \alpha^2 h^2 + \kappa h^2 \\ &= \alpha^2 h^2 + (n-1)\frac{\kappa - \lambda}{m} h^2 - \alpha^2 h^2 + \kappa h^2 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Portanto, $\sigma = 0$ e N é Ricci flat. Todavia, para as soluções do tipo $u(t) = (ae^{\alpha t} + be^{-\alpha t})/\alpha$, $a, b > 0$, como u terá ponto crítico em $\frac{\ln(\frac{b}{a})}{2\alpha}$ e, pelo item (4) do Teorema 1.9, M é isométrica ao espaço hiperbólico $\mathbb{H}^n$ com a métrica $dt^2 + \sinh^2(\alpha t)g_{\mathbb{S}^{n-1}}$. $\square$

Como consequência das simetrias do tensor curvatura algébrico, toda variedade Riemanniana 2-dimensional é tal que $\text{Ric} = \frac{R}{2}g$. De fato, é suficiente notar que

$$\begin{aligned} R_{E_i, E_j} &= \sum_{k=1}^e g(R(E_i, E_k)E_k, E_j) \\ &= \text{Rm}_{i11j} + \text{Rm}_{i22j}. \end{aligned}$$

Contudo, $i = j \implies \text{Ric}(E_i, E_j) = \text{Rm}_{1221}$ e $i = 1, j = 2 \implies \text{Ric}(E_i, E_j) = 0$. Assim, $\text{Ric} = \text{Rm}_{1221}g$ e $R = 2\text{Rm}_{1221}$. Conclui-se que $\text{Ric} = \frac{R}{2}g$ e, logo, em qualquer

superfície, ∇u é um campo vetorial conforme. O próximo corolário surge como um resultado imediato disto e da última demonstração.

Corolário 2.7 ([17]). *Uma métrica m -quase-Einstein 2-dimensional é um produto warped.*

De posse disto, podemos demonstrar o resultado final desta seção, válido em dimensão 2 e que também fora inspirado pelo caso dos Ricci solitons, a saber: em dimensão 2 e 3, Ricci solitons compactos são triviais.

Teorema 2.8 ([17]). *Toda métrica m -quase-Einstein 2-dimensional compacta é um produto warped Einstein trivial.*

Demonstração. Já que M é compacta e é a base de um produto warped Einstein, o Teorema 2.2 nos permite demonstrar apenas o caso em que $\lambda > 0$. De (2.24), sabemos que

$$R \geq \frac{2}{m+1} \lambda. \quad (2.27)$$

Como M é 2-dimensional, $\text{Ric} = \frac{R}{2}g$, donde o item (2) do Lema 2.4 se torna

$$\nabla R = \frac{m+1}{m} \left(R - \frac{2}{m+1} \lambda \right) \nabla f. \quad (2.28)$$

Agora, tomando a função $u = e^{-\frac{f}{m}}$, a igualdade (2.10) nos diz que $\nabla^2 u = \frac{u}{m} (R - \lambda)g$. Em particular ∇u é conforme. Então, pelo Corolário 1.6, temos

$$\int_M \langle \nabla R, \nabla u \rangle d\text{vol} = 0,$$

que pode ser reescrita como

$$-\frac{1}{m} \int_M e^{-\frac{f}{m}} \langle \nabla R, \nabla f \rangle d\text{vol} = 0.$$

Usando (2.27), temos que $(R - \frac{2}{m+1} \lambda) |\nabla f|^2 = 0$. Deste modo, temos duas opções:

- (1) Se $\nabla f = 0$, o resultado segue.
- (2) Por outro lado, se $R = \frac{2}{m+1} \lambda$, então R é constante.

Deste último caso, a demonstração da Proposição 2.7 nos permite inferir que

$$\frac{2}{m+1} \lambda = R = R_{\min} \leq \lambda n.$$

Assim, $\Delta u \leq 0$. Pelo Teorema 1.7, Teorema de Hopf, u é constante e, portanto, f também o é. □

2.3 Limites no Crescimento Volumétrico de Bolas Geodésicas

O foco desta seção é apresentar as conclusões estabelecidas em [3] a respeito de estimativas de volume para produtos warped Einstein, similar a resultados obtidos por Calabi [10] e Yau [53] para variedades Riemannianas completas com curvatura de Ricci não-negativa. Mais precisamente, trataremos de limites para o crescimento volumétrico de bolas geodésicas em variedades satisfazendo a equação m -quase-Einstein (2.7) para $\lambda \leq 0$, já que a Proposição 2.2 nos garante que produtos warped Einstein determinam uma variedade m -quase-Einstein. Não obstante, será apresentada uma obstrução à existência de uma tal classe de variedades não triviais.

O que os autores Calabi e Yau mostraram é que variedades Riemannianas não-compactas com tensor de Ricci não-negativo satisfazem

$$\text{vol}(B_p(r)) \geq cr, \quad (2.29)$$

para qualquer $r > r_0$, em que r_0 é uma constante positiva, $B_p(r)$ é a bola geodésica de raio r centrada em $p \in M^n$ e c é uma constante que não depende de r . Em outras palavras, uma variedade em tais condições possui volume infinito.

Perceba, ainda, que as equações (2.11) e (2.1) nos permitem concluir que

$$\frac{u^2}{m}(R - \lambda n) + (n - 1)|\nabla u|^2 = -\lambda u^2 + \mu. \quad (2.30)$$

Além disso, Wang provou em [49] que se $\lambda \leq 0$, então $R \geq \lambda n$, como visto no caso em que a curvatura escalar é constante pelo item (c) Proposição 2.7. Daí, segue que

$$(n - 1)|\nabla u|^2 \leq -\lambda u^2 + \mu. \quad (2.31)$$

Ainda, como $\nabla u = -\frac{1}{m}u\nabla f$, a equação (2.31) nos dá

$$|\nabla f|^2 \leq -\frac{\lambda m^2}{n - 1} + \frac{u^{-2}\mu}{n - 1}, \quad (2.32)$$

donde $n > m \implies |\nabla f|^2 \leq -\lambda m + \frac{u^{-2}\mu}{n-1}$.

Deste modo, podemos demonstrar o seguinte resultado.

Teorema 2.9 ([3]). *Seja (M^n, g, f) uma variedade m -quase-Einstein steady não-compacta com $1 < m \leq \infty$. Então, existem constantes positivas c, r_0 tais que, para todo $r > r_0$,*

$$\text{vol}(B_p(r)) \geq cr. \quad (2.33)$$

Demonstração. Quando $m = \infty$, temos um gradiente steady Ricci soliton e a demonstração deste caso pode ser encontrada em [35]. Assim, podemos assumir que $m \in (1, \infty)$. Daí, sendo $\lambda = 0$, a equação (2.31) nos fornece a desigualdade

$$|\nabla u|^2 \leq \frac{\mu}{n-1}. \quad (2.34)$$

Como $R \geq 0$ e $u > 0$, deduzimos

$$\int_{B_p(r)} u R d\text{vol} \geq 0,$$

para cada $r > 0$. Consequentemente, se para todo $r > 0$ temos

$$\int_{B_p(r)} u R d\text{vol} = 0,$$

então $R = 0$ em M .

Por outro lado, o item 3 do Lema 2.4 implica que, neste caso, devemos ter $\text{Ric} \equiv 0$. Portanto, o caso em questão se enquadra nas hipóteses de Calabi-Yau e a equação (2.29) é satisfeita.

Agora, como sabe-se que uma métrica m -quase-Einstein é analítica pela Proposição 2.8 de [27], Proposição 2.8, tem-se que os zeros da curvatura escalar são isolados. Assim, se $R \geq 0$, mas não identicamente nula, escolhemos $p \in M$ tal que $R(p) > 0$ e uma bola $B_p(r_0)$ de raio $r_0 > 0$ tal que

$$\int_{B_p(r_0)} u R d\text{vol} = m C_0$$

e C_0 é uma constante positiva. Então, por (2.1) e para qualquer $r \geq r_0$, chegamos a

$$m C_0 = \int_{B_p(r_0)} u R d\text{vol} \leq \int_{B_p(r)} u R d\text{vol} = m \int_{B_p(r)} \Delta u d\text{vol}.$$

Usando o Teorema da Divergência, a desigualdade de Cauchy-Schwarz e (2.34), concluímos que

$$\begin{aligned} m C_0 &\leq m \int_{B_p(r)} \Delta u d\text{vol} = m \int_{B_p(r)} \langle \nabla u, \eta \rangle d\text{vol} \leq m \int_{\partial B_p(r)} |\nabla u| ds \\ &\leq m \sqrt{\frac{\mu}{n-1}} A(\partial B_p(r)). \end{aligned}$$

Isto implica que, para $r \geq r_0$,

$$A(\partial B_p(r)) \geq c_0 = \frac{C_0}{\sqrt{\frac{\mu}{n-1}}}, \quad (2.35)$$

em que $c_0 > 0$ é uma constante uniforme.

Finalmente, integrando (2.35) de r_0 a r , temos

$$\text{vol}(B_p(r)) \geq c_0(r - r_0) \geq c \cdot r,$$

para um $c = \frac{c_0}{2}$, por exemplo, e para todo $r \geq 2r_0$, como queríamos demonstrar. $\square$

Observação 2.4. *Munteanu e Sesum, em [35], provam a desigualdade anterior para Ricci solitons, porém apresentam ainda uma outra desigualdade, no sentido de uma limitação superior para o crescimento volumétrico das bolas geodésicas no caso steady, a saber,*

$$ce^{a\sqrt{r}} \geq \text{vol}B_p(r)$$

para constantes uniformes a e c , e uma outra constante r_0 de modo que a expressão anterior é válida para todo $r > r_0$. Mostra-se que é válida para $r_0 = 1$.

O corolário a seguir é uma conclusão direta do Teorema 2.9.

Corolário 2.10 ([3]). *Seja $N = M^n \times_u F^m$ um produto warped Ricci flat. Então, existem constantes positivas c e r_0 tais que, $r > r_0$,*

$$\text{vol}(B_p(r)) \geq cr,$$

para bolas geodésicas da base.

Enunciaremos um resultado, e um de seus corolários, provado por Jeffrey Case em [16] que trata de uma obstrução à existência de variedades com estrutura m -quase-Einstein não-trivial e que será mencionado adiante.

Teorema 2.11. *Seja (M, g) uma variedade Riemanniana completa tal que $\text{Ric}_f^m \geq 0$ para alguma função suave f e $0 \leq m \leq \infty$ e supondo que*

$$\Delta_f f = c_1 e^{c_2 f},$$

para constantes $c_1, c_2 > 0$. Então, f é constante.

Corolário 2.12. *Seja $M \times_u N$ um produto warped Einstein com curvatura escalar não-negativa. Então, ao menos um dos fatores deste produto é Einstein com curvatura escalar positiva.*

Em outras palavras, isto nos diz que toda variedade $V = M^n \times_{e^{-\frac{f}{m}}} F^m$ steady ou shrinking com fibra μ -Einstein, $\mu \leq 0$, é trivial ao passo que não existe variedade com estrutura m -quase-Einstein expanding não-trivial.

Uma indagação que naturalmente surge dos resultados anteriores é saber o que ocorre com o crescimento volumétricos de bolas geodésicas em uma variedade m -quase-Einstein expanding. Neste caso, temos o seguinte crescimento volumétrico de bolas geodésicas.

Teorema 2.13 ([3]). *Seja (M^n, g, f) uma variedade m -quase-Einstein expanding não-compacta com $m \in [1, \infty)$ e $\mu \leq 0$. Suponhamos que $f \geq -k$, para alguma constante positiva k , então existem constantes $c, r_0 > 0$ para as quais, $\forall r > r_0$,*

$$\text{vol}(B_p(r)) \geq cr. \quad (2.36)$$

Demonstração. Primeiramente, usando as hipóteses sobre f e μ em (2.31), deduzimos

$$|\nabla u|^2 \leq \frac{-\lambda e^{\frac{2k}{m}}}{n-1}. \quad (2.37)$$

Levando em conta que M é expanding, isto é, $\lambda < 0$, as considerações do início desta seção nos dão que $R \geq \lambda n$ e $u > 0$, inferimos

$$\int_{B_p(r)} u(R - \lambda n) d\text{vol} \geq 0,$$

para cada $r > 0$. Ainda, se temos, $\forall r > 0$,

$$\int_{B_p(r)} u(R - \lambda n) d\text{vol} = 0,$$

então $R = \lambda n$ em M . Assim, do item 3 do Lema 2.4, temos que M é Einstein, mas isso é uma contradição, pois as contrapositivas do Teorema 2.11 e do Corolário 2.12 nos garantem que não existe variedade Einstein não-trivial expanding com estrutura m -quase-Einstein.

As demais discussões desta prova se assemelham às da demonstração do teorema anterior. Em particular, $\exists p \in M : R(p) > \lambda n$. Como u é positiva, $\exists r_0 > 0$ tal que

$$\int_{B_p(r_0)} u(R - \lambda n) d\text{vol} = mC_0$$

é uma constante positiva. Além disso, pela analiticidade de R , segue da equação (2.11), $\forall r \geq r_0$,

$$\begin{aligned}
 mC_0 &\leq \int_{B_p(r)} u(R - \lambda n) d\text{vol} = m \int_{B_p(r)} \Delta u d\text{vol} \\
 &= m \int_{\partial B_p(r)} \langle \nabla u, \eta \rangle ds \leq m \int_{\partial B_p(r)} |\nabla u| ds \\
 &\leq m \sqrt{\frac{-\lambda e^{2k/m}}{n-1}} \cdot A(\partial B_p(r)), \tag{2.38}
 \end{aligned}$$

em que utilizamos o Teorema da Divergência, a desigualdade de Cauchy-Schwarz e (2.37). Portanto, (2.38) nos permite deduzir que, $\forall r \geq r_0$,

$$A(\partial B_p(r)) \geq c_0 = \frac{C_0}{\sqrt{\frac{-\lambda e^{2k/m}}{n-1}}},$$

donde $c_0 > 0$ é uma constante uniforme. Integrando a desigualdade anterior em $[r_0, r]$, chega-se a

$$\text{vol}(B_p(r)) \geq c_0(r - r_0) \geq cr,$$

da mesma maneira que na demonstração do Teorema 2.9, para $r \geq 2r_0$ e, portanto, temos o resultado requerido. $\square$

Antes de enunciarmos e demonstrarmos os dois últimos resultados deste capítulo, necessitamos definir o f -Laplaciano de uma função $u \in C^\infty(M)$.

Definição 2.3. *Consideremos a medida f -volumétrica $e^{-f}d\text{vol}$ em M . Dizemos que o Laplaciano associado à tal medida é o operador Δ_f dado por*

$$\Delta_f u = \Delta u - \langle \nabla u, \nabla f \rangle,$$

com $u \in C^\infty(M)$. Denota-se também por f -Laplaciano de u .

Note que $\Delta_f u = e^f \text{div}(e^{-f} \nabla u)$, então, em uma variedade compacta e com respeito à medida f -volumétrica, o Teorema da Divergência é válido para Δ_f .

Inspirado pelas ideias desenvolvidas em [13, 31, 34], prova-se uma estimativa f -volumétrica de bolas geodésicas em variedades m -quase-Einstein expanding. Mais precisamente, tem-se o seguinte resultado.

Teorema 2.14 ([3]). *Seja (M^n, g, f) uma variedade m -quase-Einstein não-compacta expanding com $m \in [1, \infty)$ e $\mu = 0$. Então, $\exists c : \forall r > 1$*

$$\text{vol}_f(B_p(r)) \geq ce^{r\sqrt{-\lambda m}}. \tag{2.39}$$

Demonstração. Primeiramente, como $\mu = 0$, concluímos

$$\begin{aligned}\Delta e^{-f} &= -\operatorname{div}(e^{-f} \nabla f) \\ &= (-\Delta f + |\nabla f|^2) e^{-f} \\ &= -\lambda m e^{-f}.\end{aligned}\tag{2.40}$$

Repare que utilizamos (2.12) na última igualdade. Assim, a integral de (2.40) sobre $B_p(r)$ reduz-se a

$$\begin{aligned}-\lambda m \int_{B_p(r)} e^{-f} d\operatorname{vol} &= \int_{B_p(r)} \Delta e^{-f} d\operatorname{vol} \\ &= \int_{\partial B_p(r)} \langle \nabla e^{-f}, \eta \rangle ds.\end{aligned}\tag{2.41}$$

Em contrapartida, (2.32) nos garante que, se $\mu \leq 0$, $\langle \nabla f, \eta \rangle \leq |\nabla f| \leq \sqrt{-\lambda m}$. Isto nos permite usar (2.41) para chegarmos a

$$-\lambda m \int_{B_p(r)} e^{-f} d\operatorname{vol} \leq \sqrt{-\lambda m} \int_{\partial B_p(r)} e^{-f} ds.\tag{2.42}$$

Daí, denotando

$$\xi(r) = \operatorname{vol}_f(B_p(r)) = \int_{B_p(r)} e^{-f} d\operatorname{vol},$$

podemos usar (2.42) de modo que

$$\begin{aligned}\xi'(r) &\geq \sqrt{-\lambda m} \xi(r) \\ \frac{\xi'(r)}{\xi(r)} &\geq \sqrt{-\lambda m}.\end{aligned}$$

Portanto, integrando a última inequação anterior em $[1, r]$, concluímos que

$$\begin{aligned}\ln(\xi(r)) - \ln(\xi(1)) &\geq \sqrt{-\lambda m} r - \sqrt{-\lambda m} \\ \xi(r) &\geq \frac{\xi(1)}{e^{\sqrt{-\lambda m}}} e^{\sqrt{-\lambda m} r}.\end{aligned}$$

Assim, como $\xi(r) = \operatorname{vol}_f(B_p(r))$ e para $c = \frac{\xi(1)}{e^{\sqrt{-\lambda m}}}$, obtemos (2.39) como queríamos demonstrar. $\square$

Finalizaremos esta seção com um resultado de obstrução à existência de métricas Einstein. Sabemos que, em 2003, Dong-Soo Kim e Young Hoo Kim deram uma resposta parcial ao questionamento em [8] sobre existência de produtos warped Einstein

compactos não triviais⁵. Os resultados de Case já mencionados também figuram uma solução parcial àquele questionamento.

Aqui, será utilizado o *Princípio do Máximo fraco no infinito* para o f -Laplaciano em vista de obter um resultado de trivialidade para produtos warped Einstein com curvatura escalar negativa. Todavia, a motivação para este princípio é advinda de estudos em variedades não-compactas. Explicitamente, temos que, para cada $u \in C^\infty(M)$ com $u^* = \sup_M u < \infty$, $\exists (x_k)_k$ em M com as seguintes propriedades. Para cada $n \in \mathbb{N}$,

- (i) $u(x_k) \xrightarrow{k} u^*$,
- (ii) $\Delta u(x_k) < \frac{1}{k}$,
- (iii) $|\nabla u|(x_k) < \frac{1}{k}$.

Este princípio é conhecido como Princípio do Máximo de Omori-Yau no infinito. A restrição aos dois primeiros itens se configura no Princípio do Máximo fraco no infinito.

Em alguns casos é conveniente tomar $(x_k)_k$ tal que primeiro item possa ser reescrito como $u(x_k) \geq (\sup_M u) - \frac{1}{k}$. Utilizaremos ainda o seguinte resultado presente na tese [46], da autoria de Michele Rimoldi.

Proposição 2.9. *O Princípio do Máximo fraco no infinito é válido para o f -Laplaciano Δ_f em uma variedade ponderada $(M, g, e^{-f} d\text{vol})$ cuja curvatura de Ricci satisfaça ao menos um dos seguintes itens, para algum $\lambda \in \mathbb{R}$:*

- (i) $\text{Ric}_f^k \geq \lambda$, $k < \infty$.
- (ii) $\text{Ric}_f \geq \lambda$.

Enunciemos então o resultado final.

Teorema 2.15 ([3]). *Seja $N = M^n \times_u F^m$ um produto warped Einstein completo com constante de Einstein $\lambda < 0$ e fibra μ -Einstein, $\mu < 0$. Se a função warping satisfaz*

$$u \leq \sqrt{\frac{2\mu}{\lambda}},$$

então u é uma função constante e N é um produto Riemanniano.

Demonstração. Sabemos, por hipótese e pela Proposição 2.2, que M^n é uma variedade m -quase-Einstein expanding com função potencial $f = -m \ln(u)$ e $\mu \leq 0$. Como $\text{Ric}_f^m \geq \lambda$, da proposição anterior, temos que o Princípio do Máximo fraco no infinito é válido para o f -Laplaciano em M . Sabemos também que $|\nabla f|^2 \leq -\lambda m$, pela equação (2.32). A partir disto, aplicamos o Princípio do Máximo fraco no infinito para $|\nabla f|^2$ para concluir que existe uma sequência $(p_k)_k$ em M tal que

⁵A conclusão obtida corresponde ao Teorema 2.2

$$|\nabla f|^2(p_k) \geq \overline{|\nabla f|^2} - \frac{1}{k} \text{ e } \Delta_f |\nabla f|^2(p_k) \leq \frac{1}{k},$$

em que $\overline{|\nabla f|^2} = \sup_M |\nabla f|^2$.

Agora, observando que

$$\begin{aligned} \Delta_f |\nabla f|^2 &= \Delta |\nabla f|^2 - \langle \nabla |\nabla f|^2, \nabla f \rangle \\ &= \Delta |\nabla f|^2 - 2\nabla^2 f(\nabla f, \nabla f), \end{aligned}$$

a fórmula de Bochner com Δ_f se torna

$$\frac{1}{2} \Delta_f |\nabla f|^2 = |\nabla^2 f|^2 + \text{Ric}(\nabla f, \nabla f) + \nabla^2 f(\nabla f, \nabla f) + \langle \nabla f, \nabla \Delta_f f \rangle. \quad (2.43)$$

Portanto, substituindo as expressões (2.7) e (2.12) em (2.43), temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \Delta_f |\nabla f|^2 &\geq \lambda |\nabla f|^2 + \frac{1}{m} |\nabla f|^4 + \langle \nabla f, \nabla (\Delta f - |\nabla f|^2) \rangle \\ &= \lambda |\nabla f|^2 + \frac{1}{m} |\nabla f|^4 - 2\mu e^{\frac{2f}{m}} |\nabla f|^2 \\ &= \left(\lambda - 2\mu u^{-2} + \frac{1}{m} |\nabla f|^2 \right) |\nabla f|^2. \end{aligned} \quad (2.44)$$

Assim, desde que $u \leq \sqrt{\frac{2\mu}{\lambda}}$, deduzimos imediatamente que

$$\frac{1}{2} \Delta_f |\nabla f|^2 \geq \frac{1}{m} |\nabla f|^4. \quad (2.45)$$

Daí, sobre $(p_k)_k$, temos do Princípio do Máximo fraco no infinito,

$$\frac{1}{2k} \geq \frac{1}{2} \Delta_f |\nabla f|^2(p_k) \geq \frac{1}{m} |\nabla f|^4(p_k) \geq \frac{1}{m} \left(\overline{|\nabla f|^2} - \frac{1}{k} \right)^2.$$

Então, $k \rightarrow +\infty \implies \overline{|\nabla f|^2} = 0 \implies f$ é constante e isto conclui o teorema. $\square$

Capítulo 3

Variedades m -quase-Einstein Generalizadas

Neste capítulo, abordaremos uma das generalizações de métricas m -quase-Einstein. Subdividido em 2 seções, trataremos inicialmente do artigo [5], que apresenta fórmulas semelhantes às do artigo [17], presentes na primeira seção do Capítulo 2, para a variedade tipo-Einstein aqui abordada, além de fornecer resultados de rigidez envolvendo formas espaciais e fórmulas integrais, dando continuidade aos estudos iniciados em Ricci solitons em [7], dos mesmos autores. A seção seguinte, correspondente ao artigo [4], tratando-se de uma extensão natural do trabalho de Barros e Ribeiro em [5], tendo em seu centro um resultado de rigidez semelhante ao abordado na primeira seção e apresentando novas observações na teoria.

3.1 Caracterizações e Fórmulas Integrais para Métricas m -quase-Einstein Generalizadas

Esta seção é dedicada a apresentar algumas fórmulas estruturais para a nova classe de métricas tipo-Einstein, surgida em [18], que definiremos adiante e, além disso, dar caracterizações de variedades, sob certas condições, como formas espaciais, fornecendo inclusive sua função potencial f . Ao final, daremos resultados de rigidez em casos compactos sobre o laplaciano da curvatura escalar.

Definição 3.1. *Diremos que uma variedade Riemanniana (M^n, g) , $n \geq 2$, é uma métrica quase-Einstein generalizada se existirem funções suaves f , λ e μ em M tais que*

$$\text{Ric} + \nabla^2 f - \mu df \otimes df = \lambda g. \quad (3.1)$$

Uma tal variedade será denotada por $(M^n, g, \nabla f, \lambda)$.

Repare que uma variedade quase-Einstein generalizada será m -quase-Einstein quando $\mu = \frac{1}{m}$, $m \in \mathbb{Z}_+$ e $\lambda = \text{cte}$. Neste contexto, uma métrica será dita m -quase-Einstein generalizada quando $\mu = \frac{1}{m}$. O caso em que $m = \infty$, mas λ permanece sendo uma função não-constante será denominado *almost Ricci soliton*. Assim como em (2.8), temos que o traço de (3.1) é dado por

$$R + \Delta f - \frac{1}{m} |\nabla f|^2 = \lambda n. \quad (3.2)$$

Segue diretamente das equações anteriores que

$$\nabla^2 f - \frac{\Delta f}{n} g = \frac{1}{m} \left(df \otimes df - \frac{1}{n} |\nabla f|^2 g \right) - \left(\text{Ric} - \frac{R}{n} g \right). \quad (3.3)$$

As definições de trivialidade de variedades quase-Einstein nos dois casos vistos até aqui são coincidentes, vide Capítulo 2. Quando $(M^n, g, \nabla f, \lambda)$ for trivial, é imediato que também será Einstein. As considerações para a função $u = e^{-\frac{f}{m}}$ são análogas.

Esta generalização aqui abordada tem uma motivação, para além de sua naturalidade, no fato de que nem toda variedade Einstein pode ser vista como uma variedade quase-Einstein não trivial. Um exemplo disto é que a esfera com a métrica canônica é Einstein, porém só admite estrutura quase-Einstein trivial (não-generalizada).

Suponhamos, por absurdo, que $\mathbb{S}^n$ admita uma estrutura m -quase-Einstein não trivial. Então, $\mathbb{S}^n$ deve satisfazer (2.10) para u não-constante. Sabendo que R é constante – em particular igual a $n(n-1)$ –, tem-se da equação (2.11) que

$$\Delta u = \frac{u}{m} (R - \lambda n),$$

donde segue do Teorema da Divergência que $u = 0$ ou $R = \lambda n$. Se o segundo caso ocorrer, então a equação (2.10) nos dá $\nabla^2 u = 0$ e, da compacidade da esfera, u será constante, o que é um absurdo.

No entanto, a esfera, bem como as demais formas espaciais, admitem estrutura quase-Einstein generalizada, como vemos nos exemplos seguintes.

Exemplo 3.1. Tomando a esfera unitária $(\mathbb{S}^n, g_0)$, $n \geq 2$, e considerando a função

$$f = -m \ln \left(\tau - \frac{h_v}{n} \right), \quad (3.4)$$

em que τ é um parâmetro real no intervalo $(\frac{1}{n}, +\infty)$ e h_v é uma função distância com sinal com respeito ao vetor unitário fixado $v \in \mathbb{S}^n$. Aqui, $h_v : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é dada por $h_v(p) = \langle v, p \rangle$. Assim, observando que estamos em uma variedade, ainda que consideremos $\mathbb{S}^n$ como uma hipersuperfície do $\mathbb{R}^n$, a derivação é feita covariantemente,

então

$$\nabla h_v(p) = v - \langle v, p \rangle p,$$

já que p é um vetor normal a $T_p \mathbb{S}^n$. Consequentemente,

$$\nabla^2 h_v(p) = -\langle v, \cdot \rangle p - \langle v, p \rangle g_0,$$

e conclui-se que $\nabla^2 h_v(p) = -h_v g_0$. Portanto, $u = e^{-\frac{f}{m}} = \tau - \frac{h_v}{n}$ e deduzimos, por (2.9),

$$\nabla^2 f - \frac{1}{m} df \otimes df = -m \frac{\tau - u}{u} g_0.$$

Uma vez que o tensor de Ricci da esfera com a métrica canônica é dado por $\text{Ric} = (n-1)g_0$, podemos assumir $\lambda = (n-1) - m \frac{\tau - u}{u}$ de modo a obter uma tal estrutura não trivial em $(\mathbb{S}^n, g_0)$.

O exemplo subsequente diz respeito ao espaço euclidiano e é interessante destacar que este espaço é Einstein admitindo a estrutura aqui abordada e também a versão não-generalizada, cuja curvatura é constante e nula.

Exemplo 3.2. No espaço euclidiano $(\mathbb{R}^n, g_0)$, $n \geq 2$, consideremos a função

$$f(x) = -m \ln(\tau + |x|^2), \quad (3.5)$$

onde τ é um parâmetro real positivo e $|x|$ é a norma euclidiana de $x \in \mathbb{R}^n$. Como estamos no espaço euclidiano, a derivação é a canônica, logo $\nabla^2 |x|^2 = 2g_0$ e $u = \tau + |x|^2$, deduzimos que

$$\nabla^2 f - \frac{1}{m} df \otimes df = -2 \frac{m}{u} g_0.$$

Como $(\mathbb{R}^n, g_0)$ é Ricci flat, podemos tomar $\lambda = -2 \frac{m}{u}$ de modo a termos uma estrutura não trivial neste espaço.

Por outro lado, com respeito ao espaço hiperbólico, que também é Einstein com estrutura m -quase-Einstein, vide Proposição 2.8, temos

Exemplo 3.3. Seja $\mathbb{H}^n(-1) \subset \mathbb{R}^{n,1} : \langle x, x \rangle_0 = -1$, $x_1 > 0$, onde $\mathbb{R}^{n,1}$ é o espaço euclidiano $\mathbb{R}^{n+1}$ munido do pseudo-produto interno $\langle x, x \rangle_0 = -x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$. Seguindo argumentos similares aos do primeiro exemplo anterior e observamos que $x \in \mathbb{H}^n(-1)$ é um vetor normal a $T_x(\mathbb{H}^n(-1))$. Primeiramente, fixando um vetor $v \in \mathbb{H}^n(-1)$, consideremos a função altura $h_v : \mathbb{H}^n(-1) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $h_v(x) = \langle x, v \rangle_0$. Neste caso,

$$\nabla h_v(x) = v + \langle x, v \rangle_0 x,$$

e assim

$$\nabla^2 h_v(x) = h_v g_0.$$

Então, temos

$$u = \tau - h_v, \tau > -1.$$

Note que a métrica aqui tratada confere ao espaço hiperbólico uma estrutura Lorentziana e, além disso, $h_v(x) < 0$, posto que $x_1^2 = 1 + \sum_{i=2}^n x_i^2$, isto é, $x_1 > |x_i|$, $i = 2, \dots, n$, $\forall x \in \mathbb{H}^n(-1)$.

Na geometria supracitada, é válida a Desigualdade de Cauchy-Schwarz inversa para vetores tipo-tempo, a saber,

$$|\langle v, w \rangle_0| \geq |v| \cdot |w|.$$

Portanto, $|\langle v, w \rangle_0| \geq 1 \implies \langle v, w \rangle_0 \in (-\infty, -1]$ e, por conseguinte, $\tau > -1 \implies u > 0$. Daí,

$$\nabla^2 f - \frac{1}{m} df \otimes df = -m \frac{u - \tau}{u} g_0$$

e, como $\text{Ric} = -(n-1)g_0$, uma escolha para λ que torna $\mathbb{H}^n(-1)$ m -quase-Einstein generalizada não-trivial é $\lambda = -(n-1) + m \frac{\tau - u}{u}$.

Observação 3.1. Dado x um elemento qualquer de um espaço de Lorentz, $|\cdot|$ representa a pseudo-norma definida por $|x| = \sqrt{|\langle x, x \rangle_0|}$.

Os exemplos anteriores desempenham um papel fundamental neste seção, como veremos mais adiante. Daremos, ainda, mais dois exemplos, sendo o primeiro com a intenção de conectar o estudo de variedades 1-quase-Einstein generalizadas com o de variedades estáticas, assim como fizemos no Capítulo 2. O exemplo seguinte é inspirado pelo artigo [22] e faz parte de uma teoria ligada à Física Moderna, especialmente na Cosmologia.

Exemplo 3.4. (M^n, g) é uma variedade Riemanniana dita fator espacial de um fluxo tempo-espaço perfeito estático¹ se satisfaz

$$\begin{cases} u \overset{\circ}{\text{Ric}} = \overset{\circ}{\nabla}^2 u \\ \Delta u = \left(\frac{n-2}{2(n-1)} R + \frac{n}{n-1} \rho \right) u, \end{cases}$$

para $u, \rho \in C^\infty(M)$, $u > 0$ em M .

Pela definição dos tensores sem traço e a expressão para Δu dada,

$$\nabla^2 u = u \left(\text{Ric} - \frac{R}{n} \right) + \frac{\Delta u}{n},$$

¹Em tradução livre. Originalmente a expressão é *spatial factor of the static perfect fluid space-time*.

o que é equivalente a

$$\nabla^2 u = u \left(\text{Ric} - \left(\frac{R}{2(n-1)} - \frac{\rho}{n-1} \right) g \right).$$

Ou seja, pela equação (2.10), que é análoga para o caso generalizado, toda variedade M nas condições dadas é uma métrica 1-quase-Einstein generalizada para $\lambda = \frac{R}{2(n-1)} - \frac{\rho}{n-1}$ uma aplicação.

O último exemplo que daremos neste momento introdutório está presente em [28] e trata-se de um caso de variedade quase-Einstein generalizada peculiar em que o seu tensor de Ricci, assim como no caso do fator espacial de um fluxo tempo-espaco perfeito estático, não é múltiplo da métrica por uma constante, isto é, a variedade não é Einstein, o que se difere dos três primeiros exemplos em que considerávamos formas espaciais. Porém, esta variedade tem curvatura escalar nula e admite estruturas almost soliton e quase-Einstein generalizada distintas.

Exemplo 3.5. Consideremos a variedade Riemanniana $(\mathbb{R}_+^n, g_0)$, $n \leq 3$, em que

$$\mathbb{R}_+^n = \{x \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\} \text{ e } g_0 = x_n^{\frac{4}{n-2}}(dx_1^2 + \cdots + dx_n^2).$$

Se tomarmos o referencial ortogonal $\{E_i = x_n^{-\frac{2}{n-2}} \frac{\partial}{\partial x_i} : 1 \leq i \leq n\}$, que é um múltiplo do referencial canônico do $\mathbb{R}^n$, então a conexão em espaços euclidianos e a definição do tensor de Ricci, denotando $R_{ij} = \text{Ric}(E_i, E_j)$, nos dá

$$\begin{cases} R_{ii} = -\frac{2}{n-2} x_n^{-\frac{2n}{n-2}}, \text{ para } 1 \leq i \leq n-1; \\ R_{nn} = -\frac{2(n-1)}{n-2} x_n^{-\frac{2n}{n-2}}; \\ R_{ij} = 0, \text{ para } i \neq j. \end{cases} \quad (3.6)$$

Além disso, temos que $(\mathbb{R}_+^n, g_0)$ é conformemente flat, pois g_0 é múltiplo da métrica euclidiana padrão, com curvatura escalar nula, por (3.6). Vejamos que esta variedade tem as seguintes propriedades:

i. $(\mathbb{R}_+^n, g_0)$ tem estrutura de Ricci almost soliton.

De fato, definindo duas funções f e λ em $(\mathbb{R}_+^n, g_0)$ por

$$\tilde{f} = \frac{n-2}{n+2} x_n^{\frac{n+2}{n-2}} + \frac{2n}{n+2} \ln(x_n) \text{ e } \tilde{\lambda} = \frac{2}{n-2} x_n^{-1} + \frac{2}{n+2} x_n^{-\frac{2n}{n-2}},$$

verifica-se que o tensor de Ricci satisfaz a relação

$$\text{Ric} + \nabla^2 \tilde{f} = \tilde{\lambda} g_0.$$

Portanto, $(\mathbb{R}_+^n, g_0)$ é um Ricci almost soliton.

ii. $(\mathbb{R}_+^n, g_0)$ também possui estrutura m -quase-Einstein generalizada.

Para qualquer inteiro positivo m , temos um número real positivo t que é solução da equação a seguir

$$m(n-2)t^2 - m(n+2)t - 2n = 0, \quad (3.7)$$

ou seja, $t = \frac{n+2}{2(n-2)} + \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{n+2}{n-2}\right)^2 + \frac{8n}{m(n-2)}}$. Agora, tomemos as funções f e u dadas por $u = e^{-\frac{f}{m}} = x_n^t$. Com respeito ao referencial ortonormal $\{E_i\}_{i=1}^n$, podemos computar $u_{ij} = \nabla^2 u(E_i, E_j)$ da seguinte forma

$$\begin{cases} u_{ii} = \frac{2t}{n-2}x_n^{t-\frac{2n}{n-2}}, \text{ para } 1 \leq i \leq n-1; \\ u_{nn} = \left(t^2 - \frac{nt}{n-2}\right)x_n^{t-\frac{2n}{n-2}}; \\ u_{ij} = 0, \text{ para } i \neq j. \end{cases} \quad (3.8)$$

Por (3.6), (3.7) e (3.8), temos

$$R_{ij} - \frac{m}{u}u_{ij} = -\frac{2(1+mt)}{n-2}x_n^{-\frac{2n}{n-2}}\delta_{ij}, 1 \leq i, j \leq n.$$

Então, fazendo $\lambda = -\frac{2(1+mt)}{n-2}x_n^{-\frac{2n}{n-2}}$, que é uma função não-constante, concluímos que $(\mathbb{R}_+^n, g_0, u, \lambda)$ é uma variedade m -quase-Einstein generalizada.

Enunciaremos e demonstraremos agora alguns resultados que nos são convenientes aos resultados principais desta seção.

Lema 3.1 ([5]). *Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana e $X \in \mathfrak{X}(M)$ um campo vetorial. Então, são válidas as seguintes afirmações:*

(1) *Se $(X^\flat \otimes X^\flat) = \rho g$ para alguma função suave $\rho : M \rightarrow \mathbb{R}$, então $\rho = 0 = |X|^2$.*

Em particular, a única solução da equação $df \otimes df = \rho g$ é f constante.

(2) *Se M^n é compacta e X é um campo vetorial conforme, então*

$$\int_M |X|^2 \operatorname{div}(X) \, d\operatorname{vol} = 0.$$

Em particular, se $X = \nabla f$ é um campo vetorial gradiente conforme, então

$$\int_M |\nabla f|^2 \Delta f \, d\operatorname{vol} = 0.$$

Demonstração. Para a primeira afirmação, temos que o traço da igualdade $\rho g = (X^\flat \otimes X^\flat)$ corresponde a $\rho n = |X|^2$, o que por sua vez nos dá que $|X|^4 = n|X|^4$ e, então,

$\rho = 0 = |X|^2$. Particularmente, se $X = \nabla f$, então devemos ter $\nabla f \equiv 0 \implies f$ é constante.

Agora, levando em conta que X é um campo vetorial conforme, temos $\frac{1}{2}\mathcal{L}_X g = \rho g$, para alguma $\rho \in C^\infty(M)$, donde $\text{tr}(\frac{1}{2}\mathcal{L}_X g) = \text{tr}(\rho g) \implies \text{div}(X) = \rho n$, ou seja, $\rho = \frac{1}{n}\text{div}(X)$. Daí, obtemos

$$|X|^2 \text{div}(X) = n \langle \nabla_X X, X \rangle, \quad (3.9)$$

pois $\langle \nabla_X X, X \rangle = \frac{1}{2}\mathcal{L}_X(X, X) = \rho|X|^2 = \frac{|X|^2}{n}\text{div}(X)$. Por outro lado, tendo em vista que $\text{div}(X|X|^2) = |X|^2 \text{div}(X) + 2 \langle \nabla_X X, X \rangle$, se infere

$$\text{div}(X|X|^2) = \frac{n+2}{n}|X|^2 \text{div}(X). \quad (3.10)$$

Segue do Teorema da Divergência que $\int_M |X|^2 \text{div}(X) d\text{vol} = 0$. Em particular, $X = \nabla f \implies \int_M |\nabla f|^2 \Delta f d\text{vol} = 0$. $\square$

O Lema seguinte fornece ferramentas de grande destaque no estudo de variedades $(M^n, g, \nabla f, \lambda)$, sendo correspondente ao Lema 2.4 do capítulo anterior quando consideramos λ como uma função. Assim sendo, alguns passos serão assumidos por analogia à sua equivalência.

Lema 3.2 ([5]). *Seja $(M^n, g, \nabla f, \lambda)$ uma métrica m -quase-Einstein generalizada. Então, temos*

$$(1) \quad \frac{1}{2}\Delta|\nabla f|^2 = |\nabla^2 f|^2 - \text{Ric}(\nabla f, \nabla f) + \frac{2}{m}|\nabla f|^2 \Delta f + (n-2) \langle \nabla \lambda, \nabla f \rangle.$$

$$(2) \quad \frac{1}{2}\nabla R = \frac{m-1}{m}\text{Ric}(\nabla f) + \frac{1}{m}(R - (n-1)\lambda)\nabla f + (n-1)\nabla \lambda.$$

$$(3) \quad \nabla(R + |\nabla f|^2 - 2(n-1)\lambda) = 2\lambda\nabla f + \frac{2}{m}[\nabla_{\nabla f} \nabla f + (|\nabla f|^2 - \Delta f)\nabla f].$$

Demonstração. Tomando a divergência da equação (3.1), deduzimos que

$$\nabla R + 2\text{Ric}(\nabla f) + 2\nabla \Delta f - \frac{2}{m}\Delta f \nabla f - \frac{2}{m}\nabla_{\nabla f} \nabla f = 2\nabla \lambda. \quad (3.11)$$

Procedendo analogamente ao item 1 do Lema 2.4, mas atentando ao fato de que λ permanece na equação, e através da fórmula de Bochner, obtemos

$$\frac{1}{2}\Delta|\nabla f|^2 = |\nabla^2 f|^2 - \text{Ric}(\nabla f, \nabla f) + \frac{2}{m}|\nabla f|^2 \Delta f + (n-2) \langle \nabla \lambda, \nabla f \rangle,$$

provando assim o primeiro item.

Por outro lado, substituindo $\Delta f = -R + \lambda n + \frac{1}{m}|\nabla f|^2$ em (3.11), e lembrando novamente que $\nabla|\nabla f|^2 = 2\nabla_{\nabla f} \nabla f$, tem-se

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2}\nabla R &= -\text{Ric}(\nabla f) - \nabla \left(-R + \lambda n + \frac{1}{m}|\nabla f|^2 \right) + \frac{1}{m} \left(-R + \lambda n + \frac{1}{m}|\nabla f|^2 \right) \nabla f + \\
 &\quad + \frac{1}{m} \nabla_{\nabla f} \nabla f + \nabla \lambda \\
 &= -\text{Ric}(\nabla f) + \nabla R - \frac{1}{m} \nabla_{\nabla f} \nabla f + \frac{1}{m} \left(-R + \lambda n + \frac{1}{m}|\nabla f|^2 \right) \nabla f - (n-1)\nabla \lambda
 \end{aligned}$$

Assim, obtemos

$$\frac{1}{2}\nabla R = \text{Ric}(\nabla f) + \frac{1}{m} \nabla_{\nabla f} \nabla f - \frac{1}{m}(-R + \lambda n + \frac{1}{m}|\nabla f|^2)\nabla f + (n-1)\nabla \lambda,$$

donde

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2}\nabla R &= \text{Ric}(\nabla f) + \frac{1}{m} \left(-\text{Ric}(\nabla f) + \frac{1}{m}|\nabla f|^2 \nabla f + \lambda \nabla f \right) + (n-1)\nabla \lambda - \\
 &\quad - \frac{1}{m}(-R + \lambda n + \frac{1}{m}|\nabla f|^2)\nabla f \\
 &= \frac{m-1}{m} \text{Ric}(\nabla f) + \frac{1}{m}(R - (n-1)\lambda)\nabla f + (n-1)\nabla \lambda. \tag{3.12}
 \end{aligned}$$

A expressão (3.12) nos fornece precisamente o item (2) do lema antecedente, provando então este ponto.

Finalmente, notando que $\frac{1}{2}(\nabla R + \nabla|\nabla f|^2) = \frac{1}{2}\nabla R + \nabla_{\nabla f} \nabla f$ e utilizando (3.12), escrevamos

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2}(\nabla R + \nabla|\nabla f|^2) &= \frac{m-1}{m} \text{Ric}(\nabla f) + \frac{1}{m}(R - (n-1)\lambda)\nabla f + (n-1)\nabla \lambda + \lambda \nabla f \\
 &\quad + \frac{1}{m}|\nabla f|^2 \nabla f - \text{Ric}(\nabla f).
 \end{aligned}$$

Então, utilizando (3.2), chegamos a

$$\begin{aligned}
 \nabla(R + |\nabla f|^2 - 2(n-1)\lambda) - 2\lambda \nabla f &= \frac{2}{m}[(|\nabla f|^2 + R - (n-1)\lambda)\nabla f - \text{Ric}(\nabla f)] \\
 &= \frac{2}{m}[(|\nabla f|^2 + R - n\lambda + \lambda)\nabla f - \text{Ric}(\nabla f)] \\
 &= \frac{2}{m}[(|\nabla f|^2 + \frac{1}{m}|\nabla f|^2 - \Delta f + \lambda)\nabla f - \text{Ric}(\nabla f)] \\
 &= \frac{2}{m}[\nabla_{\nabla f} \nabla f + (|\nabla f|^2 - \Delta f)\nabla f],
 \end{aligned}$$

donde, rearranjando os termos, obtemos

$$\nabla(R + |\nabla f|^2 - 2(n-1)\lambda) = 2\lambda \nabla f + \frac{2}{m}[\nabla_{\nabla f} \nabla f + (|\nabla f|^2 - \Delta f)\nabla f].$$

Isto conclui a demonstração. □

É interessante pontuar que o item (3) do lema sobrescrito é uma generalização da equação clássica de Hamilton para gradiente Ricci soliton, a saber, $R + |\nabla f|^2 - 2\lambda f = C$, em que C é uma constante, coincidindo quando $m = \infty$ e λ é constante; assim como também é uma generalização da relação $\nabla(R + |\nabla f|^2 - 2(n-1)\lambda) = 2\lambda\nabla f$, que foi provada em [7] para almost-Ricci solitons. Tomando $Z \in \mathfrak{X}(M)$, a identidade a seguir deduz-se do Lema 3.2 item (2)

$$\frac{1}{2} \langle \nabla R, Z \rangle = \frac{m-1}{m} \text{Ric}(\nabla f, Z) + \frac{1}{m} (R - (n-1)\lambda) \langle \nabla f, Z \rangle + (n-1) \langle \nabla \lambda, Z \rangle. \quad (3.13)$$

Em ordem a apresentar um dos resultados principais do artigo [5], enunciemos um último lema.

Lema 3.3 ([5]). *Seja $(M^n, g, \nabla f, \lambda)$, $n \geq 3$, uma métrica m -quase-Einstein generalizada. Se, adicionalmente, M^n é Einstein então temos*

$$\nabla^2 u = \left(-\frac{R}{n(n-1)} u + \frac{c}{m} \right) g, \quad (3.14)$$

com c constante.

Demonstração. Se M^n é Einstein e $m \geq 3$, temos $\text{Ric} = \frac{R}{n}g$ com R constante. Em particular, segue de (2.9) que

$$\begin{aligned} \nabla^2 u &= -\frac{u}{m} \left(\nabla^2 f - \frac{1}{m} df \otimes df \right) \\ &= -\frac{u}{m} (\lambda g - \text{Ric}) \\ &= \frac{1}{m} \left(\frac{R}{n} u - \lambda u \right) g. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Daí, usando (1.19), deduzimos que

$$\text{Ric}(\nabla u) + \nabla \Delta u = \frac{1}{m} \nabla \left(\frac{R}{n} u - \lambda u \right). \quad (3.16)$$

Todavia, tomando o traço de (3.15), temos

$$\Delta u = \frac{R}{m} u - \frac{n}{m} \lambda u. \quad (3.17)$$

Comparando agora (3.16) e (3.17), obtemos

$$\begin{aligned} \nabla(\lambda u) &= \frac{R}{n} \nabla u - m \nabla \Delta u - m \text{Ric}(\nabla u) \\ &= \frac{R}{n} \nabla u - R \nabla u + n \nabla(\lambda u) - m \frac{R}{n} \nabla u, \end{aligned}$$

donde segue que

$$\nabla(\lambda u) = R \frac{m+n-1}{n(n-1)} \nabla u. \quad (3.18)$$

Portanto, concluímos que $\lambda u = R \frac{m+n-1}{n(n-1)} u - c$, em que c é uma constante. Em seguida, substituindo a correspondência para λu na expressão (3.15),

$$\begin{aligned} \nabla^2 u &= \frac{1}{m} \left(\frac{R}{n} u - \lambda u \right) g \\ &= \frac{1}{m} \left[\frac{R}{n} u - \left(R \frac{m+n-1}{n(n-1)} u - c \right) \right] \\ &= \left(-\frac{R}{n(n-1)} u + \frac{c}{m} \right) g, \end{aligned}$$

como queríamos demonstrar. $\square$

Observação 3.2. A equação (3.14) nos permite inferir que $\Delta u = -\frac{R}{n-1} u + \frac{c}{m} n$ e $\Delta(\Delta u) = -\frac{R}{n-1} \Delta u$, donde Δu é um autovetor do operador Δ .

Os próximos teoremas são, em suma, resultados de rigidez e caracterização para métricas m -quase-Einstein generalizadas, constituindo a primeira parte da abordagem dos autores em [5].

Teorema 3.4 ([5]). *Seja $(M^n, g, \nabla f, \lambda)$ uma métrica m -quase-Einstein generalizada não-trivial com $n \geq 3$. Suponha que (M^n, g) seja Einstein, o que é equivalente a supor que ∇u é um campo vetorial conforme. Então, uma das seguintes afirmações é verdadeira:*

- (1) M^n é isométrica à esfera canônica $\mathbb{S}^n$. Além disso, a menos de constante, sua função potencial é dada por (3.4).
- (2) M^n é isométrica ao espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$. Além do mais, a menos de mudança de coordenadas, f é dada por (3.5).
- (3) M^n é isométrica ao espaço hiperbólico $\mathbb{H}^n$, munido u de um único ponto crítico. Ademais, a menos de constante, f é dada por $-m \ln(\tau - h_v)$, $\tau > -1$.

Demonstração. Como f é não-constante e estamos supondo que ∇u é um campo vetorial conforme não-trivial, que nos permite escrever $\frac{1}{2} \mathcal{L}_{\nabla u} g = \nabla^2 u = \frac{\Delta u}{n} g$, deduzimos que M^n é Einstein. Além disso, por (3.2) e (2.9), temos

$$\text{Ric} = \left(\lambda + \frac{\Delta u}{nu} m \right) g.$$

Assim, se $n \geq 3$, segue do Lema de Schur (Lema 1.8) que $R = n\lambda + \frac{\Delta u}{u}m$ é constante.

Por outro lado, do Lema 3.3, temos

$$\nabla^2 u = \left(-\frac{R}{n(n-1)}u + \frac{c}{m} \right) g,$$

em que c é uma constante. Além disso, estamos em posição de aplicar o Teorema 1.9, devido a Tashiro em [48], para deduzir que M^n é uma forma espacial.

Se R é positivo, podemos assumir que M^n é isométrica a uma esfera canônica $\mathbb{S}^n$. Desde que $R = n(n-1)$, segue do Lema 3.3 que $\Delta u = -un + \frac{c}{m}n \implies \Delta u = -n(u - k)$, em que $k = \frac{c}{m}$ é uma constante. Então, a menos de constante, u é a primeira autofunção do operador Laplaciano de $\mathbb{S}^n$. De fato, considerando $f = u - k$, temos $\Delta f = \Delta u = -n(u - k) = -nf$. Consequentemente, devemos ter $u = ah_v + \tau$, com v sendo um vetor unitário de $\mathbb{R}^{n+1}$ e a, τ constantes tais que $\tau > |a|$. Portanto, f é, a menos de constante, dada por (3.4).

Em seguida, se $R = 0$, tem-se, de (3.18), que $c \neq 0$, já que $(M^n, g, \nabla f, \lambda)$ é não-trivial. Neste caso, M^n é isométrica ao espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$. Usando mais uma vez o Lema 3.3, obtemos $\Delta u = k$, em que k é uma constante não-nula. Uma vez que u deve ser positiva, a menos de mudança de coordenadas, deduzimos que

$$u(x) = a|x|^2 + \tau, \quad a, \tau > 0.$$

Deste modo, f é dada, tomando os devidos ajustes, pela expressão (3.5), isto é,

$$f = -m \ln(a|x|^2 + \tau).$$

Finalmente, se $R < 0$, segue novamente do Teorema 1.9 que M^n é isométrica ao espaço hiperbólico, desde que u tenha um único ponto crítico. Agora, suponhamos que M^n seja isométrica a $\mathbb{H}^n(-1)$. Usando argumentos análogos ao caso $R > 0$, considerando $R = -n(n-1)$, obtemos $u = -ah_v + \tau$, para a função altura com respeito à pseudo-métrica presente no Exemplo 3.3, $v \in \mathbb{H}^n(-1)$, $\tau > -a$, $a > 0$. Assim como nos parágrafos anteriores, isto nos dá que f será, a menos de constante, dada por $-m \ln(\tau - h_v)$. Isto conclui a demonstração do teorema. $\square$

Observe que o Teorema 3.4 nos fornece uma caracterização completa de métricas m -quase-Einstein generalizadas que são também Einstein. Como consequência deste teorema, temos o seguinte corolário.

Corolário 3.5 ([5]). *Seja $(M^n, g, \nabla f, \lambda)$, $n \geq 3$, uma métrica m -quase-Einstein generalizada compacta não-trivial tal que $\int_M \text{Ric}(\nabla u, \nabla u) d\text{vol} \geq \frac{n-1}{n} \int_M (\Delta u)^2 d\text{vol}$. Então,*

M^n é isométrica à esfera canônica $\mathbb{S}^n(r)$. Além disso, a função potencial é a mesma de (3.4).

Demonstração. Consideremos a hessiana de u sem traço, isto é, $\overset{\circ}{\nabla}^2 u = \nabla^2 u - \frac{\Delta u}{n}g$. Daí, por meio do produto interno de Hilbert-Schmidt, obtemos

$$\begin{aligned} \left| \nabla^2 u - \frac{\Delta u}{n}g \right|^2 &= \left\langle \nabla^2 u - \frac{\Delta u}{n}g, \nabla^2 u - \frac{\Delta u}{n}g \right\rangle \\ &= |\nabla^2 u|^2 - 2\frac{\Delta u}{n} \langle g, \nabla^2 u \rangle + \frac{(\Delta u)^2}{n} \\ &= |\nabla^2 u|^2 - 2\frac{(\Delta u)^2}{n} + \frac{(\Delta u)^2}{n} \\ &= |\nabla^2 u|^2 - \frac{(\Delta u)^2}{n} \end{aligned}$$

$\implies |\nabla^2 u|^2 = |\overset{\circ}{\nabla}^2 u|^2 + \frac{(\Delta u)^2}{n}$. Pelo Teorema da Divergência, integrando a Fórmula de Bochner, chegamos a

$$0 = \int_M \langle \nabla \Delta u, \nabla u \rangle d\text{vol} + \int_M |\overset{\circ}{\nabla}^2 u|^2 d\text{vol} + \int_M \frac{(\Delta u)^2}{n} d\text{vol} + \int_M \text{Ric}(\nabla u, \nabla u) d\text{vol},$$

donde

$$\int_M |\overset{\circ}{\nabla}^2 u|^2 d\text{vol} = - \int_M \langle \nabla \Delta u, \nabla u \rangle d\text{vol} - \int_M \frac{(\Delta u)^2}{n} d\text{vol} - \int_M \text{Ric}(\nabla u, \nabla u) d\text{vol}.$$

Porém, do Teorema 1.5, temos que

$$\int_M \langle T, \nabla^2 u \rangle d\text{vol} + \int_M \langle \text{div}(T), \nabla u \rangle d\text{vol} = 0.$$

Então, tomando $T = (\Delta u)g$, conclui-se

$$\begin{aligned} \int_M \langle \nabla \Delta u, \nabla u \rangle d\text{vol} &= - \int_M \langle (\Delta u)g, \nabla^2 u \rangle d\text{vol} \\ &= - \int_M (\Delta u)^2 d\text{vol}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \int_M |\overset{\circ}{\nabla}^2 u|^2 d\text{vol} &= \int_M (\Delta u)^2 d\text{vol} - \int_M \frac{(\Delta u)^2}{n} d\text{vol} - \int_M \text{Ric}(\nabla u, \nabla u) d\text{vol} \\ &= \frac{n-1}{n} \int_M (\Delta u)^2 d\text{vol} - \int_M \text{Ric}(\nabla u, \nabla u) d\text{vol}. \end{aligned}$$

Como, por hipótese, $\int_M \text{Ric}(\nabla u, \nabla u) d\text{vol} \geq \frac{n-1}{n} \int_M (\Delta u)^2 d\text{vol}$, então

$$\int_M |\overset{\circ}{\nabla}^2 u| d\text{vol} = 0,$$

o que nos habilita a inferir que $\nabla^2 u = \frac{\Delta u}{n} g$, logo, ∇u é um campo vetorial conforme não-trivial. Sendo $n \geq 3$, aplicando o Teorema 3.4 e atentando ao fato de M^n ser compacta, obtemos o resultado requerido. $\square$

Os dois próximos resultados são caracterizações de variedades tipo-Einstein e generalizações de conclusões válidas para Ricci solitons, almost Ricci soliton e métricas quase-Einstein, cujas inspirações podem ser vistas em [7, 17, 42], assim como naquilo que fora abordado no capítulo precedente.

Teorema 3.6 ([5]). *Seja $(M^n, g, \nabla f, \lambda)$ uma métrica m -quase-Einstein generalizada compacta. Então M^n será trivial quando um dos seguintes casos ocorrerem:*

- (1) $\int_M \text{Ric}(\nabla f, \nabla f) d\text{vol} \leq \frac{2}{m} \int_M |\nabla f|^2 \Delta f d\text{vol} - (n-2) \int_M \langle \nabla \lambda, \nabla f \rangle d\text{vol}.$
- (2) (M^n, g) é Einstein e ∇f é um campo vetorial conforme.

Demonstração. Integrando a expressão correspondente ao item (1) do Lema 3.2 e utilizando o Teorema da Divergência, obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= \int_M |\nabla^2 f|^2 d\text{vol} - \int_M \text{Ric}(\nabla f, \nabla f) d\text{vol} + \\ &\quad + \frac{2}{m} \int_M |\nabla f|^2 \Delta f d\text{vol} - (n-2) \int_M \langle \nabla \lambda, \nabla f \rangle d\text{vol}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\int_M |\nabla^2 f|^2 d\text{vol} = \int_M \text{Ric}(\nabla f, \nabla f) d\text{vol} - \frac{2}{m} \int_M |\nabla f|^2 \Delta f d\text{vol} + (n-2) \int_M \langle \nabla \lambda, \nabla f \rangle d\text{vol}.$$

Uma vez que, por hipótese, o membro direito da identidade anterior é não-positivo, segue que $\nabla^2 f \equiv 0$. Além disso, $\Delta f \equiv 0$ implica, pelo Teorema de Hopf (Teorema 1.7), que f é constante, isto demonstra o primeiro item.

No segundo caso, para $m = \infty$, consideremos a equação (3.2), da qual teremos

$$\int_M (R - \lambda n) d\text{vol} = 0$$

$\implies R = \lambda n \implies \Delta f \equiv 0$. Novamente pelo Teorema de Hopf, f será constante. Agora, se m é finito, consideremos a função auxiliar $u = e^{-\frac{f}{m}}$, donde $\Delta u = \frac{u}{m}(R - \lambda n) \implies \Delta u \geq 0$ ou ≤ 0 , já que $u > 0$ e $R \leq \lambda n$ ou $R \geq \lambda n$. Recorrendo mais uma vez ao Teorema 1.7, teremos $u = \text{cte}$ e, logo, f é constante. Fica assim demonstrado este teorema. $\square$

Teorema 3.7 ([5]). *Seja $(M^n, g, \nabla f, \lambda)$ uma variedade m -quase-Einstein generalizada completa com m finito. Então, $\nabla f \equiv 0$ se, e somente se, uma das seguintes condições é válida:*

- (1) M^n é não-compacta, $n\lambda \geq R$ e $|\nabla f| \in L^1(M)$. Em particular, M é uma variedade Einstein.
- (2) (M^n, g) é Einstein e ∇f é um campo vetorial conforme.

Demonstração. Levando em conta a identidade (3.2), temos

$$m \operatorname{div}(\nabla f) = |\nabla f|^2 + m(n\lambda - R). \quad (3.19)$$

Entretanto, $m \operatorname{div}(\nabla f) \geq 0$, desde que $n\lambda - R \geq 0$. Ainda, se $|\nabla f| \in L^1(M)$, podemos usar a Proposição 1.12 para concluir que $\operatorname{div}(\nabla f) \equiv 0$. Usando a equação (3.19), notamos que $\nabla f \equiv 0$, assim como $n\lambda = R$. Assim sendo, f é constante e M é uma variedade Einstein, concluindo o primeiro item.

Agora, suponhamos que (M^n, g) é uma variedade Einstein. Se ∇f é um campo vetorial conforme com fator conforme ρ , então $\nabla^2 f = \rho g$, para $\rho = \frac{1}{n} \operatorname{div} \nabla f$. Sendo M Einstein, $\operatorname{Ric} = \frac{R}{n} g$ e, pela equação (3.3),

$$\nabla^2 f - \frac{\Delta f}{n} g = \frac{1}{m} \left(df \otimes df - \frac{1}{m} |\nabla f|^2 g \right) - \left(\operatorname{Ric} - \frac{R}{n} g \right),$$

do qual segue

$$df \otimes df = \frac{|\nabla f|^2}{n} g. \quad (3.20)$$

Pelo Lema 3.1, $\nabla f \equiv 0$ e isto completa a demonstração do teorema. $\square$

Daqui em diante, esta seção será dedicada a apresentação de fórmulas integrais para variedades m -quase-Einstein generalizadas. Como viemos mencionando desde o capítulo anterior, muitos dos resultados válidos em variedades tipo-Einstein têm inspiração em Ricci solitons. O resultado a seguir é uma extensão natural deste tipo, cujas bases podem ser encontradas em [7, 43].

Lema 3.8 ([5]). *Seja $(M^n, g, \nabla f, \lambda)$ uma métrica m -quase-Einstein generalizada. Então, temos*

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \Delta R = & \left| \nabla^2 f - \frac{\Delta f}{n} g \right|^2 - \frac{m+n}{mn} (\Delta f)^2 - \frac{n}{2} \langle \nabla f, \nabla \lambda \rangle + \langle \nabla f, \nabla R \rangle + \\ & + \frac{m-2}{2m} \langle \nabla f, \nabla \Delta f \rangle + \frac{1}{m} \operatorname{div}(\nabla_{\nabla f} \nabla f) + (n+1) \Delta \lambda + \lambda \Delta f. \end{aligned}$$

Demonstração. Inicialmente, usando a afirmação (3) do Lema 3.2 e tomando sua divergência, obtem-se

$$\begin{aligned} \Delta R + \Delta |\nabla f|^2 - 2(n-1)\Delta\lambda &= 2\operatorname{div}(\lambda\nabla f) + \frac{2}{m}[\langle \nabla(|\nabla f|^2 - \Delta f), \nabla f \rangle + \\ &\quad + (\nabla f|^2 - \Delta f)\Delta f + \operatorname{div}(\nabla_{\nabla f}\nabla f)]. \end{aligned}$$

Agora, usando que $|\nabla^2 f - \frac{\Delta f}{n}g| = |\nabla^2 f|^2 - \frac{1}{n}(\Delta f)^2$ juntamente com a fórmula de Bochner, podemos escrever

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\Delta R &= -\frac{1}{2}\Delta |\nabla f|^2 + (n-1)\Delta\lambda + \operatorname{div}(\lambda\nabla f) + \frac{1}{m}\langle \nabla |\nabla f|^2, \nabla f \rangle + \\ &\quad + \frac{1}{m}[(|\nabla f|^2 - \Delta f)\Delta f - \langle \nabla \Delta f, \nabla f \rangle + \operatorname{div}(\nabla_{\nabla f}\nabla f)] \\ &= -\operatorname{Ric}(\nabla f, \nabla f) - \left| \nabla^2 f - \frac{\Delta f}{n}g \right|^2 - \frac{1}{n}(\Delta f)^2 - \langle \nabla \Delta f, \nabla f \rangle + (n-1)\Delta\lambda + \\ &\quad + \operatorname{div}(\lambda\nabla f) + \frac{2}{m}\langle \nabla_{\nabla f}\nabla f, \nabla f \rangle + \frac{1}{m}[(|\nabla f|^2 - \Delta f)\Delta f - \langle \nabla f, \nabla f \rangle + \\ &\quad + \operatorname{div}(\nabla_{\nabla f}\nabla f)]. \end{aligned}$$

Em seguida, invocando a equação (3.2), fazemos

$$\langle \nabla \Delta f, \nabla f \rangle = \left\langle \nabla(n\lambda + \frac{1}{m}|\nabla f|^2 + R), \nabla f \right\rangle.$$

Então, a última relação nos dá

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\Delta R &= -\operatorname{Ric}(\nabla f, \nabla f) - \left| \nabla^2 f - \frac{\Delta f}{n}g \right|^2 - \frac{m+n}{mn}(\Delta f)^2 + (n-1)\Delta\lambda - \\ &\quad - \left\langle \nabla\left(\frac{1}{m}|\nabla f|^2 - R + \lambda n\right), \nabla f \right\rangle + \frac{2}{m}\langle \nabla_{\nabla f}\nabla f, \nabla f \rangle + \\ &\quad + \operatorname{div}(\lambda\nabla f) + \frac{1}{m}[|\nabla f|^2\Delta f - \langle \lambda \Delta f, \lambda f \rangle + \operatorname{div}(\nabla_{\nabla f}\nabla f)] \\ &= -(\operatorname{Ric}(\nabla f, \nabla f) + (n-1)\langle \nabla \lambda, \nabla f \rangle - \left| \nabla^2 f - \frac{\Delta f}{n}g \right|^2 - \\ &\quad - \frac{m+n}{mn}(\Delta f)^2 + (n-1)\Delta\lambda + \lambda\Delta f + \langle \nabla R, \nabla f \rangle + \\ &\quad + \frac{1}{m}[|\nabla f|^2\Delta f - \langle \nabla \Delta f, \nabla f \rangle + \operatorname{div}(\nabla_{\nabla f}\nabla f)]. \end{aligned}$$

Por outro lado, fazendo $Z = \nabla f$, reescrevemos (3.13) como

$$\begin{aligned} \operatorname{Ric}(\nabla f, \nabla f) + (n-1)\langle \nabla \lambda, \nabla f \rangle &= \frac{1}{2}\langle \nabla R, \nabla f \rangle + \frac{1}{m}\operatorname{Ric}(\nabla f, \nabla f) - \\ &\quad - \frac{1}{m}(R - (n-1)\lambda)|\nabla f|^2. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Além disso, comparando as duas últimas equações, inferimos

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2}\Delta R &= -\frac{1}{2}\langle \nabla R, \nabla f \rangle - \frac{1}{m}\text{Ric}(\nabla f, \nabla f) + \frac{1}{m}(R - (n-1)\lambda)|\nabla f|^2 - \\
 &\quad - \left| \nabla^2 f - \frac{\Delta f}{n}g \right|^2 - \frac{m+n}{mn}(\Delta f)^2 + (n-1)\Delta\lambda + \lambda\Delta f + \langle \nabla R, \nabla f \rangle + \\
 &\quad + \frac{1}{m}[|\nabla f|^2\Delta f - \langle \nabla\Delta f, \nabla f \rangle + \text{div}(\nabla_{\nabla f}\nabla f)] \\
 &= \frac{1}{2}\langle \nabla R, \nabla f \rangle - \left| \nabla^2 f - \frac{\Delta f}{n}g \right|^2 - \frac{m+n}{mn}(\Delta f)^2 + (n-1)\Delta\lambda + \lambda\Delta f + \\
 &\quad + \frac{1}{m}[-\text{Ric}(\nabla f, \nabla f) + (\Delta f + R - n\lambda)|\nabla f|^2 + \lambda|\nabla f|^2] + \\
 &\quad + \frac{1}{m}[-\langle \nabla\Delta f, \nabla f \rangle + \text{div}(\nabla_{\nabla f}\nabla f)].
 \end{aligned}$$

Notando que a segunda parcela da penúltima linha corresponde a $\frac{1}{m}|\nabla f|^4$ e usando a equação (3.1) com $\mu = \frac{1}{m}$, deduzimos

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2}\Delta R &= \frac{1}{2}\langle \nabla R, \nabla f \rangle - \left| \nabla^2 f - \frac{\Delta f}{n}g \right|^2 - \frac{m+n}{mn}(\Delta f)^2 + (n-1)\Delta\lambda + \lambda\Delta f + \\
 &\quad + \frac{1}{m}[\langle \nabla_{\nabla f}\nabla f, \nabla f \rangle - \langle \nabla\Delta f, \nabla f \rangle + \text{div}(\nabla_{\nabla f}\nabla f)]
 \end{aligned}$$

Recorrendo ao gradiente do traço da equação m -quase-Einstein generalizada, obtemos $\frac{1}{m}\nabla_{\nabla f}\nabla f = \frac{1}{2}(\text{Ric}(\nabla f) + \nabla\Delta f - n\nabla\lambda)$, donde

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2}\Delta R &= \frac{1}{2}\langle \nabla R, \nabla f \rangle - \left| \nabla^2 f - \frac{\Delta f}{n}g \right|^2 - \frac{m+n}{mn}(\Delta f)^2 + (n-1)\Delta\lambda + \lambda\Delta f + \\
 &\quad + \frac{1}{2}\langle \nabla R, \nabla f \rangle + \frac{1}{2}\langle \nabla\Delta f, \nabla f \rangle - \frac{n}{2}\langle \nabla\lambda, \nabla f \rangle - \frac{1}{m}\langle \nabla\Delta f, \nabla f \rangle + \\
 &\quad + \frac{1}{m}\text{div}(\nabla_{\nabla f}\nabla f) \\
 &= -\left| \nabla^2 f - \frac{\Delta f}{n}g \right|^2 - \frac{m+n}{mn}(\Delta f)^2 - \frac{n}{2}\langle \nabla\lambda, \nabla f \rangle + \langle \nabla R, \nabla f \rangle + \\
 &\quad + \frac{m-2}{2m}\langle \nabla\Delta f, \nabla f \rangle + \frac{1}{m}\text{div}(\nabla_{\nabla f}\nabla f) + (n-1)\Delta\lambda + \lambda\Delta f.
 \end{aligned}$$

Isto completa a argumentação. □

Como consequência deste lema, obtemos a seguinte fórmula integral.

Teorema 3.9 ([5]). *Seja $(M^n, g, \nabla f, \lambda)$ uma variedade m -quase-Einstein generalizada compacta e orientável. Então,*

$$\begin{aligned}
 (1) \quad &\int_M |\nabla^2 f - \frac{\Delta f}{n}g|^2 d\text{vol} + \frac{n+2}{2n} \int_M (\Delta f)^2 d\text{vol} \\
 &= \int_M \langle \nabla f, \nabla R \rangle d\text{vol} - \frac{n+2}{2} \int_M \langle \nabla f, \nabla \lambda \rangle d\text{vol}.
 \end{aligned}$$

$$(2) \int_M (\text{Ric}(\nabla f, \nabla f) + \langle \nabla f, \nabla R \rangle) d\text{vol} = \frac{3}{2} \int_M (\Delta f)^2 d\text{vol} + \frac{n+2}{n} \int_M \langle \nabla f, \nabla \lambda \rangle d\text{vol}.$$

$$(3) M^n \text{ é trivial, provida de } \int_M \langle \nabla R, \nabla f \rangle d\text{vol} \leq \frac{n+2}{2} \int_M \langle \nabla f, \nabla \lambda \rangle d\text{vol}.$$

$$(4) \int_M |\nabla^2 f - \frac{\Delta f}{n} g|^2 d\text{vol} = \frac{n-2}{2n} \int_M \langle \nabla f, \nabla R \rangle d\text{vol} - \frac{n+2}{2nm} \int_M |\nabla f|^2 \Delta f d\text{vol}.$$

Demonstração. Observe, antes de qualquer coisa, que pelo que fora feito na demonstração do Corolário 3.5,

$$\int_M \langle \nabla \Delta f, \nabla f \rangle d\text{vol} = - \int_M (\Delta f)^2 d\text{vol}. \quad (3.22)$$

Além disso, $\text{div}(\lambda \nabla f) = \langle \nabla f, \nabla \lambda \rangle + \lambda \Delta f$, donde, pelo Teorema da Divergência, $0 = \int_M \langle \nabla f, \nabla \lambda \rangle d\text{vol} + \int_M \lambda \Delta f d\text{vol} \implies \int_M \lambda \Delta f d\text{vol} = - \int_M \langle \nabla f, \nabla \lambda \rangle d\text{vol}$. Portanto, usando o Lema 3.8 e integrando-o, chegamos a

$$\begin{aligned} \int_M \left| \nabla^2 f - \frac{\Delta f}{n} g \right|^2 d\text{vol} &= - \frac{m+n}{mn} \int_M (\Delta f)^2 d\text{vol} - \frac{n}{2} \int_M \langle \nabla \lambda, \nabla f \rangle d\text{vol} + \\ &+ \int_M \langle \nabla f, \nabla R \rangle d\text{vol} - \frac{m-2}{2m} \int_M (\Delta f)^2 d\text{vol} - \\ &- \int_M \langle \nabla \lambda, \nabla f \rangle d\text{vol}. \end{aligned}$$

Assim, obtemos

$$\begin{aligned} \int_M \left(\left| \nabla^2 f - \frac{\Delta f}{n} g \right|^2 + \frac{n+2}{2n} (\Delta f)^2 \right) d\text{vol} &= \int_M \langle \nabla f, \nabla R \rangle d\text{vol} - \\ &- \frac{n+2}{2} \int_M \langle \nabla f, \nabla \lambda \rangle d\text{vol}, \end{aligned} \quad (3.23)$$

que é a afirmação em (1).

Em seguida, integrando a fórmula de Bochner, temos

$$\int_M \text{Ric}(\nabla f, \nabla f) d\text{vol} + \int_M |\nabla^2 f|^2 d\text{vol} + \int_M \langle \nabla f, \nabla \Delta f \rangle d\text{vol} = 0. \quad (3.24)$$

Como

$$\int_M \left| \nabla^2 f - \frac{\Delta f}{n} g \right|^2 d\text{vol} = \int_M |\nabla^2 f|^2 d\text{vol} - \frac{1}{n} \int_M (\Delta f)^2 d\text{vol},$$

segue de (3.22) que podemos reescrever (3.23) na forma

$$\int_M \text{Ric}(\nabla f, \nabla f) d\text{vol} + \int_M \left| \nabla^2 f - \frac{\Delta f}{n} g \right|^2 d\text{vol} = \frac{n-1}{n} \int_M (\Delta f)^2 d\text{vol}. \quad (3.25)$$

Agora, comparando (3.23) e (3.25), obtemos

$$\begin{aligned}
 \frac{n-1}{n} \int_M (\Delta f)^2 d\text{vol} &= \int_M \text{Ric}(\nabla f, \nabla f) d\text{vol} + \int_M \left| \nabla^2 f - \frac{\Delta f}{n} g \right|^2 d\text{vol} \\
 &= \int_M \text{Ric}(\nabla f, \nabla f) d\text{vol} - \frac{n+2}{n} \int_M (\Delta f)^2 d\text{vol} + \int_M \langle \nabla f, \nabla R \rangle d\text{vol} - \\
 &\quad - \frac{n+2}{2} \int_M \langle \nabla f, \nabla \lambda \rangle d\text{vol}
 \end{aligned}$$

$\Rightarrow \int_M (\text{Ric}(\nabla f, \nabla f) + \langle \nabla f, \nabla R \rangle) d\text{vol} + \frac{3}{2} \int_M (\Delta f)^2 d\text{vol} + \frac{n+2}{2} \int_M \langle \nabla f, \nabla \lambda \rangle d\text{vol}$, como queríamos demonstrar para o segundo item.

Por sua vez, se $\int_M \langle \nabla R, \nabla f \rangle d\text{vol} \leq \frac{n+2}{2} \int_M \langle \nabla f, \nabla \lambda \rangle d\text{vol}$ – em particular, isto ocorre quando R e λ são constantes –, deduzimos da afirmação (1) que

$$\int_M \left| \nabla^2 f - \frac{\Delta f}{n} g \right|^2 d\text{vol} + \frac{n+2}{2n} \int_M (\Delta f)^2 d\text{vol} = 0, \quad (3.26)$$

o que implica que f é constante e, desta forma, M^n é trivial.

Finalmente, de (3.2), podemos escrever

$$\int_M \langle \nabla f, \nabla \lambda \rangle d\text{vol} = \frac{1}{n} \int_M \left\langle \nabla f, \nabla \left(R + \Delta f - \frac{1}{m} |\nabla f|^2 \right) \right\rangle d\text{vol}.$$

Então, usando (3.23), inferimos

$$\begin{aligned}
 \int_M \left(\left| \nabla^2 f - \frac{\Delta f}{n} g \right|^2 + \frac{n+2}{2n} (\Delta f)^2 \right) d\text{vol} &= \frac{n-2}{2n} \int_M \langle \nabla f, \nabla R \rangle d\text{vol} + \\
 &\quad + \frac{n+2}{2n} \int_M (\Delta f)^2 d\text{vol} + \\
 &\quad + \frac{n+2}{2mn} \int_M \langle \nabla f, \nabla |\nabla f|^2 \rangle d\text{vol}.
 \end{aligned}$$

Antes de prosseguir, note que pelo Teorema 1.5

$$\int_M (\text{div}(T))(\nabla f) d\text{vol} + \int_M \langle T, \nabla^2 f \rangle d\text{vol} = 0,$$

tomando $T = |\nabla f|^2 g$, teremos $\text{div}(T) = \nabla |\nabla f|^2$ e $\langle T, \nabla^2 f \rangle = \langle |\nabla f|^2 g, \nabla^2 f \rangle = |\nabla f|^2 \Delta f$. Logo,

$$\int_M \langle \nabla f, \nabla |\nabla f|^2 \rangle d\text{vol} = \int_M |\nabla f|^2 \Delta f d\text{vol}.$$

Portanto,

$$\int_M \left| \nabla^2 f - \frac{\Delta f}{n} g \right|^2 d\text{vol} = \frac{n-1}{2n} \int_M \langle \nabla f, \nabla R \rangle d\text{vol} - \frac{n+2}{2mn} \int_M |\nabla f|^2 \Delta f d\text{vol}.$$

Concluimos assim esta demonstração. $\square$

Dado um campo conforme em uma variedade Riemanniana compacta M , sabemos que, pelo Corolário 1.6 e o Lema 3.1, $\int_M \langle X, \nabla R \rangle d\text{vol} = 0$ e $\int_M |X|^2 \text{div}(X) d\text{vol} = 0$, respectivamente. Utilizando o último item do teorema anterior, garantimos que a recíproca destes dois resultados é verdadeira para um campo vetorial gradiente. Mais precisamente, temos o corolário subsequente.

Corolário 3.10 ([5]). *Seja $(M^n, g, \nabla f, \lambda)$ uma métrica m -quase-Einstein generalizada compacta e orientável com m finito. Então, temos:*

(1) *Se $n \geq 3$, $\int_M \langle \nabla f, \nabla R \rangle d\text{vol} = 0$ e $\int_M |\nabla f|^2 \Delta f d\text{vol} = 0$, então ∇f é um campo vetorial conforme.*

(2) *Se $n = 2$ e $\int_M |\nabla f|^2 \Delta f d\text{vol} = 0$, então f é constante.*

Demonstração. Para a primeira afirmação, considere o item (4) do último teorema para deduzir que $\nabla^2 f = \frac{\Delta f}{n} g$, que nos dá que ∇f é conforme. Em seguida, para $n = 2$, suponha que $\int_M |\nabla f|^2 \Delta f d\text{vol} = 0$, então, também pelo item (4), f é constante, o que completa a prova do corolário. $\square$

3.2 Uma Métrica quase-Einstein Generalizada Compacta com Curvatura Escalar Constante

Nesta seção, iremos mostrar que uma métrica m -quase-Einstein generalizada compacta $(M^n, g, \nabla f, \lambda)$ com curvatura escalar constante é isométrica à esfera euclidiana canônica com função potencial f dada pela expressão (3.3), a menos de constante. De fato, os resultados presentes nesta seção são extensões naturais dos presentes na seção precedente.

Inicialmente, observe que a seguinte identidade é sempre válida em variedades tipo-Einstein como as que foram vistas nesta dissertação

$$\overset{\circ}{\text{Ric}} = \frac{m}{u} \overset{\circ}{\nabla}^2 u. \quad (3.27)$$

De fato, da equação m -quase-Einstein generalizada e seu traço, $\overset{\circ}{\text{Ric}} = \text{Ric} - \frac{R}{n} g = \lambda g - \nabla^2 f + \frac{1}{m} df \otimes df - \lambda g + \frac{\Delta f}{n} g - \frac{|\nabla f|^2}{mn} g$. Usando (2.9), a igualdade anterior se torna $\frac{m}{u} \overset{\circ}{\nabla}^2 u - \frac{m}{n} \frac{\Delta u}{u} g = \frac{m}{u} \overset{\circ}{\nabla}^2 u$, donde $\text{Ric} = \frac{m}{u} \overset{\circ}{\nabla}^2 u$, sendo esta uma outra forma de exibir a equivalência entre a variedade ser Einstein e o campo vetorial ∇u ser conforme.

O lema seguinte é derivado diretamente das considerações preliminares sobre divergência de tensores e da equação (1.13).

Lema 3.11. *Seja T um $(0, 2)$ -tensor simétrico em uma variedade Riemanniana (M^n, g) e φ uma função suave em M . Então, tem-se*

$$\operatorname{div}(T(\varphi X)) = \varphi(\operatorname{div}(T))(X) + T(\nabla\varphi, X) + \varphi \langle \nabla X, T \rangle, \quad (3.28)$$

$\forall X \in \mathfrak{X}(M)$.

Demonstração. Segue de (1.14) que $(\operatorname{div}(\varphi T))(X) = \varphi(\operatorname{div}(T))(X) + T(\nabla\varphi, X)$ e, por (1.13), $(\operatorname{div}(\varphi T))(X) = \operatorname{div}(\varphi T(X)) - \varphi \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{E_i} X, T(E_i) \rangle$. Então,

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(T(\varphi X)) &= \operatorname{div}(\varphi T(X)) \\ &= \varphi(\operatorname{div}(T))(X) + T(\nabla\varphi, X) + \varphi \langle \nabla X, T \rangle, \end{aligned}$$

para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $\varphi \in C^\infty(M)$. □

Este lema nos permite obter ainda outro, como segue.

Lema 3.12 ([4]). *Seja $(M^n, g, \nabla f, \lambda)$ uma métrica m -quase-Einstein generalizada. Então, temos:*

$$(1) \operatorname{div}(\overset{\circ}{\operatorname{Ric}}(\nabla u)) = \frac{n-2}{2n} \mathcal{L}_{\nabla u} \overset{\circ}{\operatorname{R}} + \frac{u}{m} |\overset{\circ}{\operatorname{Ric}}|^2.$$

$$(2) \operatorname{div}(\overset{\circ}{\operatorname{Ric}}(\nabla u)) = \frac{n-2}{2n} \mathcal{L}_{\nabla u} \overset{\circ}{\operatorname{R}} + \frac{m}{u} |\overset{\circ}{\nabla^2} u|^2$$

Demonstração. Tomando $T = \overset{\circ}{\operatorname{Ric}}$ e $X = \nabla u$ no lema anterior, temos

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\overset{\circ}{\operatorname{Ric}}(\nabla u)) &= (\operatorname{div}(\operatorname{Ric} - \frac{\overset{\circ}{\operatorname{R}}}{n}g))(\nabla u) + \left\langle \nabla^2 u, \overset{\circ}{\operatorname{Ric}} \right\rangle \\ &= \frac{1}{2} \langle \nabla \operatorname{R}, \nabla u \rangle - \frac{1}{n} \langle \nabla \operatorname{R}, \nabla u \rangle + \left\langle \nabla^2 u, \overset{\circ}{\operatorname{Ric}} \right\rangle \\ &= \frac{n-2}{2n} \langle \nabla \operatorname{R}, \nabla u \rangle + \left\langle \nabla^2 u, \overset{\circ}{\operatorname{Ric}} \right\rangle. \end{aligned}$$

Observando que a equação (3.27) nos dá $\nabla^2 u = \frac{u}{m} \overset{\circ}{\operatorname{Ric}} + \frac{\Delta u}{n} g$ e que $\langle g, \overset{\circ}{\operatorname{Ric}} \rangle = 0$, podemos reescrever o produto interno

$$\left\langle \nabla^2 u, \overset{\circ}{\operatorname{Ric}} \right\rangle = \frac{u}{m} |\overset{\circ}{\operatorname{Ric}}|^2,$$

donde obtemos $\operatorname{div}(\overset{\circ}{\operatorname{Ric}}(\nabla u)) = \frac{n-2}{2n} \langle \nabla \operatorname{R}, \nabla u \rangle + \frac{u}{m} |\overset{\circ}{\operatorname{Ric}}|^2$. Para o item (2), basta usarmos novamente (3.27). □

Deste lema, deduz-se a proposição em sequência.

Proposição 3.1 ([4]). *Seja $(M^n, g, \nabla f, \lambda)$ uma métrica m -quase-Einstein generalizada com $n \geq 3$. Então,*

- (1) *Se $\mathcal{L}_{\nabla u} R \geq 0$ e $\mathring{\text{Ric}}(\nabla u) \in L^1(M)$, então ∇u é um campo vetorial conforme. Em particular, (M^n, g) é Einstein.*
- (2) *Se M é compacta, então $\int_M \frac{u}{m} |\mathring{\text{Ric}}|^2 d\text{vol} = -\frac{n-2}{2n} \int_M \mathcal{L}_{\nabla u} R d\text{vol}$.*

Demonstração. Se $\mathring{\text{Ric}}(\nabla u) \in L^1(M)$, pela Proposição 1.12, $\text{div}(\mathring{\text{Ric}}(\nabla u)) = 0$. Porém, pelo Lema 3.12, $\mathcal{L}_{\nabla u} R \geq 0 \implies \text{div}(\mathring{\text{Ric}}(\nabla u)) \geq 0$, donde concluímos que $|\mathring{\nabla}^2 u| = 0$ e, deste modo, ∇u é um campo vetorial conforme. Isto conclui o item (1).

Agora, se M é compacta, pelo Teorema da Divergência e pelo item (1) do Lema 3.12, temos que $\int_M \frac{u}{m} |\mathring{\text{Ric}}|^2 d\text{vol} = -\frac{n-2}{2n} \int_M \mathcal{L}_{\nabla u} R d\text{vol}$, o que conclui a proposição. $\square$

Estamos aptos a apresentar o primeiro teorema.

Teorema 3.13 ([4]). *Seja $(M^n, g, \nabla f, \lambda)$ uma métrica m -quase-Einstein generalizada compacta não-trivial com $n \geq 3$. Suponhamos adicionalmente que $\mathcal{L}_{\nabla u} R \geq 0$. Então, R é constante e M é isométrica a uma esfera canônica $\mathbb{S}^n(r)$. Ademais, a menos de redimensionamento, $f = -m \ln(\tau - \frac{h_v}{n})$, em que τ é um parâmetro real residente em $(\frac{r}{n}, \infty)$ e h_v é uma função altura em $\mathbb{S}^n(r)$ com respeito ao vetor $v \in \mathbb{S}^n(r)$.*

Demonstração. Se $\mathcal{L}_{\nabla u} R \geq 0$ e M é compacta, pela Proposição 3.1, ∇u é um campo conforme não-trivial e, deste modo, (M^n, g) é Einstein. Além disto, como $\mathring{\text{Ric}} = 0$, $\text{div}(\mathring{\text{Ric}}) = 0 \implies \nabla R = 0$, pois $\text{div}(\mathring{\text{Ric}}) = \frac{n-2}{2n} \nabla R$. De posse disto, pelo Teorema 3.4, (M^n, g) é isométrica à esfera canônica $\mathbb{S}^n(r)$. Ademais, a função potencial f é obtida a partir do Lema 3.3 de acordo com a demonstração do mesmo teorema supracitado, coincidindo com (3.4) a menos de redimensionamento. $\square$

Podemos também obter um resultado com respeito ao espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$ e o espaço hiperbólico $\mathbb{H}^n(-1)$ seguindo a técnica apresentada na seção anterior.

Teorema 3.14 ([4]). *Seja $(M^n, g, \nabla f, \lambda)$ uma métrica m -quase-Einstein generalizada não-compacta e não-trivial com $n \geq 3$. Adicionalmente, suponhamos que $\mathcal{L}_{\nabla u} R \geq 0$ e $\mathring{\text{Ric}}(\nabla u) \in L^1(M)$. Então, temos R constante. Além disso:*

- (1) *Se $R = 0$, então M é isométrica ao espaço euclidiano $(\mathbb{R}^n, g_0)$ e $f = -m \ln(\tau + |x|^2)$, a menos de redimensionamento, em que τ é um parâmetro real positivo e $|x|$ é a norma euclidiana.*
- (2) *Se $R < 0$, então M é isométrica ao espaço hiperbólico $\mathbb{H}^n(-1)$, com u tendo um único ponto crítico. Ademais, f é, a menos de constante, dada por $f = -m \ln(\tau - h_v)$, $\tau > -1$.*

Demonstração. Com efeito, basta notar que o item (1) da Proposição 3.1 nos diz que M é Einstein e, assim, podemos aplicar o Teorema 3.4 para concluir o argumento. $\square$

Observação 3.3. *No caso compacto, a caracterização com $\mathcal{L}_{\nabla u} R \geq 0$ se verifica a partir da identidade de Pohozaev Schoen e do item (1) da Proposição 3.12. De fato,*

$$\int_M \frac{u}{m} |\overset{\circ}{\text{Ric}}|^2 d\text{vol} = -\frac{n-2}{2n} \int_M \mathcal{L}_{\nabla u} R d\text{vol} \leq 0.$$

Daí, $u > 0 \implies \overset{\circ}{\text{Ric}} = 0$ e a variedade é Einstein. O resultado segue do item (1) do Teorema 3.4.

Capítulo 4

Variedades quase-Einstein Generalizadas com Tensor de Weyl Harmônico

Iremos aqui abordar o artigo [18], provando que uma variedade quase-Einstein completa generalizada que também é Einstein com tensor de Weyl harmônico e curvatura radial de Weyl nula é localmente um produto warped com fibras $(n - 1)$ -dimensionais. Vale destacar que o primeiro pesquisador a apresentar o conceito de métricas quase-Einstein generalizadas foi justamente Giovani Catino, autor do artigo sobre o qual dissertaremos neste capítulo.

Necessitamos apresentar algumas novas noções e definições para podermos apresentar de maneira coerente os resultados. Iniciemos pela definição do produto tensorial de Kulkarni-Nomizu.

Definição 4.1. *Consideremos dois tensores 2-tensores simétricos, s e r . Definiremos o produto de Kulkarni-Nomizu $s \odot r$ como o 4-tensor*

$$(s \odot r)(X, Y, Z, W) = \frac{1}{2}(s(X, W)r(Y, Z) + s(Y, Z)r(X, W) - s(X, Z)r(Y, W) - s(Y, W)r(X, Z)).$$

Considerando o tensor curvatura algébrico como em (1.16), (1.17) e o produto definido anteriormente, daremos a definição do tensor de Weyl como segue.

Definição 4.2. *Chamamos tensor de Weyl ao 4-tensor W definido por*

$$W = -Rm + \frac{R}{(n-1)(n-2)}(g \odot g) - \frac{2}{n-2}(\text{Ric} \odot g). \quad (4.1)$$

Nos será bastante útil escrever a expressão anterior em coordenadas utilizando o

produto de Kulkarni-Nomizu,

$$\begin{aligned} W_{ijkl} = & -Rm_{ijkl} + \frac{R}{(n-1)(n-2)}(g_{il}g_{jk} - g_{ik}g_{jl}) - \\ & - \frac{1}{n-2}(\text{Ric}_{il}g_{jk} + \text{Ric}_{jk}g_{il} - \text{Ric}_{ik}g_{jl} - \text{Ric}_{jl}g_{ik}). \end{aligned} \quad (4.2)$$

O tensor de Weyl em dimensão 3 se relaciona com o conceito de *localmente conformemente flat*, que veremos adiante.

Definição 4.3. *Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana. Diz-se que M é localmente conformemente flat se, para cada $p \in M$, existe uma vizinhança $p \in V$ e uma função suave ψ definida em V tal que $(V, e^{2\psi}g)$ tem curvatura seccional nula, em particular é Ricci flat.*

Proposição 4.1. *Em dimensão 3, $W = 0$.*

Demonstração. Uma vez que W é um tensor de curvatura algébrico, isto é, são válidas as propriedades presentes na Proposição 1.10, temos

$$\begin{aligned} g^{jl}W_{ijkl} = & -\text{Ric}_{ik} + \frac{R}{2}(g^{jl}g_{il}g_{jk} - g_{ik}g^{jl}g_{jl}) - \\ & - (\text{Ric}_{il}g^{jl}g_{jk} + \text{Ric}_{jk}g^{jl}g_{il} - \text{Ric}_{ik}g^{jl}g_{jl} - g^{jl}\text{Ric}_{jl}g_{ik}) \\ = & -\text{Ric}_{ik} - \frac{R}{2}(3g_{ik} - \delta_j^i g_{jk}) - (\text{Ric}_{il}\delta_l^k + \text{Ric}_{jk}\delta_i^j - 3\text{Ric}_{ik} - Rg_{ik}) \\ = & -\text{Ric}_{ik} - \frac{R}{2}(3g_{ik} - g_{ik}) + (3\text{Ric}_{ik} + Rg_{ik} - \text{Ric}_{ik} - \text{Ric}_{ik}) \\ = & 0. \end{aligned}$$

Seja $\{E_1, E_2, E_3\}$ uma base ortonormal de $T_p M$. Consideremos os espaços bidimensionais gerados por esta base, a saber $\sigma_1 = [E_1, E_2]$, $\sigma_2 = [E_1, E_3]$ e $\sigma_3 = [E_2, E_3]$. Então,

- $0 = g^{jl}W_{1j1l} = K_W(\sigma_1) + K_W(\sigma_2),$
- $0 = g^{jl}W_{2j2l} = K_W(\sigma_1) + K_W(\sigma_3),$
- $0 = g^{jl}W_{3j3l} = K_W(\sigma_2) + K_W(\sigma_3)$

$\implies K_W(\sigma_1) = K_W(\sigma_2) = K_W(\sigma_3) = 0$. Assim, como a curvatura escalar K_W com respeito ao tensor curvatura algébrico W é constante e nula, temos que $W = 0$. $\square$

Observação 4.1. *A conclusão da Proposição 4.1 recorre a argumentos análogos aos do Lema 3.4 do Capítulo IV de [15], os argumentos lá utilizados são válidos para todo 4-tensor que satisfaça a Proposição 1.10.*

Essas considerações juntamente com a expressão (4.1) nos fornecem o seguinte resultado.

Corolário 4.1. *Em dimensão 3, $\text{Ric} = 0 \implies \text{Rm} = 0$.*

Podemos inferir, ainda, que uma variedade com curvatura constante tem tensor de Weyl nulo. Com efeito, se a curvatura seccional de uma variedade (M^n, g) é constante e igual a K_0 , então $\text{Rm}_{ijkl} = -K_0(g \odot g)$, pelo Corolário 3.5 de [15], donde $i \neq j \implies \text{Rm}_{ijij} = K_0$, e, logo, $R = n(n-1)K_0$ e $\text{Ric} = (n-1)K_0g$. Assim, a expressão (4.1) nos dá $W = 0$.

Além disso, em uma variedade localmente conformemente flat, o tensor de Weyl é nulo. De fato, pelo Teorema 1.159 de [8], o tensor de Weyl é invariante por transformações conformes. Logo, existe uma função ψ tal que a curvatura seccional com respeito à métrica $e^{2\psi}g$ é zero em um aberto da variedade. Portanto, o argumento do parágrafo anterior nos confere $W = 0$. A recíproca desta afirmação é também verdadeira, porém não a demonstraremos aqui.

Diremos que o tensor de Weyl é harmônico quando sua divergência é identicamente nula. Considerando o tensor de Schouten $S = \frac{1}{n-2} \left(\text{Ric} - \frac{1}{2(n-1)}Rg \right)$, dizer que W é harmônico é equivalente a dizer que S é um tensor de Codazzi¹, ou seja,

$$(\nabla_X S)(Y, Z) = (\nabla_Y S)(X, Z), \quad \forall X, Y, Z \in T_p M.$$

Com efeito,

$$\begin{aligned} (\text{div}(W))(X, Y, Z) &= (\text{div}(-\text{Rm} - 2(S \odot g)))(X, Y, Z) \\ &= (\nabla_X \text{Ric})(Y, Z) - (\nabla_Y \text{Ric})(X, Z) - (\text{div}(S))(X)g(Y, Z) + \\ &\quad + (\text{div}(S))(Y)g(X, Z) - (\nabla_X S)(Y, Z) + (\nabla_Y S)(X, Z). \end{aligned}$$

Porém, da segunda identidade de Bianchi contraída, (1.25), segue que

$$\begin{aligned} (\text{div}(S))(X) &= \frac{1}{n-2} \left((\text{div}(\text{Ric}))(X) - \frac{1}{2(n-1)}(\text{div}(Rg))(X) \right) \\ &= \frac{1}{n-2} \left(\frac{1}{2}g(\nabla R, X) - \frac{1}{2(n-1)}g(\nabla R, X) \right) \\ &= \frac{1}{2(n-1)}g(\nabla R, X). \end{aligned}$$

Além disso, $(\nabla_X \text{Ric})(Y, Z) = (n-2)(\nabla_X S)(Y, Z) + \frac{1}{2(n-1)}g(\nabla R, X)g(Y, Z)$. Desta feita, inferimos que

¹Tensores de Codazzi são aqueles que cumprem a igualdade na derivação covariante com os índices trocados, que é satisfeita para o tensor de Schouten.

$$(\operatorname{div}(W))(X, Y, Z) = (n - 3)((\nabla_X S)(Y, Z) - (\nabla_Y S)(X, Z)). \quad (4.3)$$

Portanto, $\operatorname{div}(W) \equiv 0 \iff S$ é um tensor de Codazzi.

Apresentaremos agora um outro tensor fortemente relacionado com a divergência do tensor de Weyl e que desempenhará um papel de destaque nesta seção.

Definição 4.4. Chamamos de tensor de Cotton ao 3-tensor C definido por

$$C = -\frac{n-2}{n-3} \operatorname{div}(W).$$

Equivalentemente, $C(X, Y, Z) = -(n-2)((\nabla_X S)(Y, Z) - (\nabla_Y S)(X, Z))$.

Segue diretamente de (4.3) que podemos escrever o tensor de Cotton em coordenadas como segue

$$C_{ijk} = (\nabla_j \operatorname{Ric})_{ik} - (\nabla_i \operatorname{Ric})_{jk} - \frac{1}{2(n-1)} (R_j g_{ik} - R_i g_{jk}), \quad (4.4)$$

já que $(\nabla_X S)(Y, Z) = \frac{1}{n-2} (\nabla_X \operatorname{Ric} - \frac{1}{2(n-1)} g(\nabla R, X)g)(Y, Z)$.

Note que $C = 0 \implies \operatorname{div}(W) = 0$, donde também podemos expressar harmonicidade do tensor de Weyl desde que o tensor de Cotton seja nulo. Além disto, toda variedade Einstein possui tensor de Weyl harmônico, basta notar que $(\nabla_i \operatorname{Ric})_{jk}$ e R_i se anularão e então, pela equação (4.4), $C_{ijk} = 0$.

Apresentaremos um lema para que possamos demonstrar o resultado principal desta seção.

Lema 4.2. O tensor de Cotton C_{ijk} é conformemente invariante pontualmente em dimensão 3, enquanto que se $n \geq 4$, para $\tilde{g} = e^{-2u}g$, temos

$$\tilde{C}_{ijk} = C_{ijk} + (n-2)W_{ikd}\nabla^d u.$$

Demonstração. Dado um referencial geodésico na métrica g e a métrica conforme $\tilde{g} = e^{-2u}g$, o Teorema 1.159 em [8] nos fornece as seguintes regras de transformação conforme

$$\tilde{\operatorname{Ric}} = \operatorname{Ric} - (n-2)(-\nabla^2 u - du \otimes du) + (-\Delta u - (n-2)|\nabla u|^2)g \quad (4.5)$$

$$\tilde{R} = e^{2u}(R - 2(n-1)\Delta u - (n-2)(n-1)|\nabla u|^2).$$

Deduzimos então uma regra para o tensor de Schouten conforme $\tilde{S}$ dada por

$$\begin{aligned}
 \tilde{S} &= \frac{1}{n-2} \left(\widetilde{\text{Ric}} - \frac{1}{2(n-1)} \widetilde{R} \tilde{g} \right) \\
 &= \frac{1}{n-2} (\text{Ric} - (n-2)(-\nabla^2 u - du \otimes du) + (-\Delta u - (n-2)|\nabla u|^2)g) - \\
 &\quad - \frac{1}{n-2} \left(\frac{1}{2(n-1)} (R - 2(n-1)\Delta u - (n-2)(n-1)|\nabla u|^2)g \right) \\
 &= \frac{1}{n-2} \left(\text{Ric} - \frac{1}{2(n-1)} Rg \right) + \nabla^2 u + du \otimes du - \frac{\Delta u}{n-2}g - |\nabla u|^2 g + \\
 &\quad + \frac{\Delta u}{n-2}g + \frac{|\nabla u|^2}{2}g \\
 &= S + \nabla^2 u + du \otimes du - \frac{1}{2}|\nabla u|^2 g.
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

Portanto, o tensor de Cotton na métrica $\tilde{g}$ é definido por

$$\tilde{C}_{ijk} = -(n-2)(\tilde{\nabla}_i \tilde{S}_{jk} - \tilde{\nabla}_j \tilde{S}_{ik}).$$

O teorema em [8], supracitado, nos diz ainda que

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y - \nabla_X u Y - \nabla_Y u X + g_{XY} \nabla u,$$

donde a definição de derivação covariante de tensores nos permite inferir, recorrendo a um certo abuso de notação quanto aos índices,

$$\begin{aligned}
 \tilde{\nabla}_i \tilde{S}_{jk} &= \partial_i \tilde{S}_{jk} - \tilde{S}_{(\tilde{\nabla}_i \partial_j)k} - \tilde{S}_{j(\tilde{\nabla}_i \partial_k)} \\
 &= \partial_i S_{jk} + \partial_i \nabla_{jk}^2 u + \partial_i (du \otimes du)_{jk} - \frac{1}{2} \partial_i (|\nabla u|^2 g)_{jk} - \\
 &\quad - \tilde{S}_{(\nabla_i \partial_j - (\nabla_i u)j - (\nabla_j u)i + g_{ij} \nabla u)k} - \tilde{S}_{j(\nabla_i \partial_k - (\nabla_i u)k - (\nabla_k u)i + g_{ik} \nabla u)}.
 \end{aligned}$$

Prosseguindo operando com a simplificação da expressão anterior e as derivações covariantes, obtemos

$$\begin{aligned}
 \tilde{\nabla}_i \tilde{S}_{jk} &= \nabla_i S_{jk} + \nabla_i \nabla_j \nabla_k u + \nabla_i \nabla_j u \nabla_k u + \nabla_i \nabla_k u \nabla_j u - \nabla_i \nabla^d u \nabla^d u g_{jk} + \\
 &\quad + \nabla_i u \tilde{S}_{jk} + \nabla_j u \tilde{S}_{ik} - \tilde{S}_{(\nabla u)k} g_{ij} + \nabla_i u \tilde{S}_{jk} + \nabla_k u \tilde{S}_{ij} - \tilde{S}_{(\nabla u)j} g_{ik} \\
 &= \nabla_i S_{jk} + \nabla_i \nabla_j \nabla_k u + \nabla_i \nabla_j u \nabla_k u + \nabla_i \nabla_k u \nabla_j u - \nabla_i \nabla^d u \nabla^d u g_{jk} + \\
 &\quad + \tilde{S}_{ik} \nabla_j u + \tilde{S}_{ij} \nabla_k u + 2\tilde{S}_{jk} \nabla_i u - \tilde{S}_{kd} \nabla^d u g_{ij} - \tilde{S}_{jd} \nabla^d u g_{ik}.
 \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned}\tilde{\nabla}_j \tilde{S}_{ik} - \tilde{\nabla}_i \tilde{S}_{jk} &= (\nabla_j S_{ik} - \nabla_i S_{jk}) + (\nabla_j \nabla_i \nabla_k u - \nabla_i \nabla_j \nabla_k u) + \\ &\quad + \nabla_j \nabla_k u \nabla_i u - \nabla_i \nabla_k u \nabla_j u - \nabla_j \nabla^d u \nabla^d u g_{ik} + \nabla_i \nabla^d u \nabla^d u g_{jk} - \\ &\quad - \tilde{S}_{jk} \nabla_i u + \tilde{S}_{ik} \nabla_j u - \tilde{S}_{id} \nabla^d u g_{jk} + \tilde{S}_{jd} \nabla^d u g_{ik}.\end{aligned}\quad (4.7)$$

Note que $\nabla_i \nabla_j u \nabla_k u - \nabla_j \nabla_i u \nabla_k u = 0$ porque $\nabla_i \nabla_j u = \nabla^2 u(\partial_i, \partial_j) + \nabla_{\nabla_i \partial_j} u$, $\nabla^2 u$ é simétrico e a conexão é compatível com a métrica. Contudo, levando-se em conta que $\nabla_t \partial_s = 0$

$$\begin{aligned}\nabla_j \nabla_i \nabla_k u - \nabla_i \nabla_j \nabla_k u &= g(\nabla_j \nabla_i \nabla u, \partial_k) - g(\nabla_i \nabla_j \nabla u, \partial_k) \\ &= g(\nabla_j \nabla_i \nabla u - \nabla_i \nabla_j \nabla u, \partial_k) \\ &= \text{Rm}_{jikd} \nabla^d u \\ &= -W_{jikd} \nabla^d u - 2(S \odot g)_{jikd} \nabla^d u \\ &= W_{ijkd} \nabla^d u - S_{jd} \nabla^d u g_{ik} - S_{ik} \nabla_j u + S_{jk} \nabla_i u + S_{id} \nabla^d u g_{jk}.\end{aligned}$$

Assim, retornando a (4.7) e utilizando a última equação anterior, deduzimos

$$\begin{aligned}\tilde{\nabla}_j \tilde{S}_{ik} - \tilde{\nabla}_i \tilde{S}_{jk} &= \frac{C_{ijk}}{n-2} + W_{ijkd} \nabla^d u - S_{jd} \nabla^d u g_{ik} - S_{ik} \nabla_j u + S_{jk} \nabla_i u + S_{id} \nabla^d u g_{jk} + \\ &\quad + \nabla_j \nabla_k u \nabla_i u - \nabla_i \nabla_k u \nabla_j u - \nabla_j \nabla^d u \nabla^d u g_{ik} + \nabla_i \nabla^d u \nabla^d u g_{jk} - \\ &\quad - \tilde{S}_{jk} \nabla_i u + \tilde{S}_{ik} \nabla_j u - \tilde{S}_{id} \nabla^d u g_{jk} + \tilde{S}_{jd} \nabla^d u g_{ik}.\end{aligned}\quad (4.8)$$

Agora, por (4.6), temos

$$\begin{aligned}\tilde{\nabla}_j \tilde{S}_{ik} - \tilde{\nabla}_i \tilde{S}_{jk} &= \frac{C_{ijk}}{n-2} + W_{ijkd} \nabla^d u - S_{jd} \nabla^d u g_{ik} - S_{ik} \nabla_j u + S_{jk} \nabla_i u + S_{id} \nabla^d u g_{jk} + \\ &\quad + \nabla_j \nabla_k u \nabla_i u - \nabla_i \nabla_k u \nabla_j u - \nabla_j \nabla^d u \nabla^d u g_{ik} + \nabla_i \nabla^d u \nabla^d u g_{jk} - \\ &\quad - S_{jk} \nabla_i u - \nabla_j \nabla_k u \nabla_i u - \nabla_j u \nabla_k u \nabla_i u + \frac{1}{2} \nabla^d u \nabla^d u g_{jk} \nabla_i u + \\ &\quad + S_{ik} \nabla_j u + \nabla_i \nabla_k u \nabla_j u + \nabla_i u \nabla_k u \nabla_j u - \frac{1}{2} \nabla^d u \nabla^d u g_{ik} \nabla_j u - \\ &\quad - S_{id} \nabla^d u g_{jk} - \nabla_i \nabla^d u \nabla^d u g_{jk} - \nabla_i u \nabla^d u \nabla^d u g_{jk} + \\ &\quad + \frac{1}{2} \nabla^d u \nabla^d u g_{id} \nabla^d u g_{jk} + S_{jd} \nabla^d u g_{ik} + \nabla_j \nabla^d u \nabla^d u g_{ik} + \\ &\quad + \nabla_j u \nabla^d u \nabla^d u g_{ik} - \frac{1}{2} \nabla^d u \nabla^d u g_{jd} \nabla^d u g_{ik}.\end{aligned}$$

Observe que diversos termos da equação anteposta se cancelam, restando apenas os seguintes

$$\begin{aligned}
 \tilde{\nabla}_j \tilde{S}_{ik} - \tilde{\nabla}_i \tilde{S}_{jk} &= \frac{C_{ijk}}{n-2} + W_{ijkd} \nabla^d u + \frac{1}{2} \nabla^d u \nabla^d u g_{jk} \nabla_i u - \frac{1}{2} \nabla^d u \nabla^d u g_{ik} \nabla_j u + \\
 &\quad + \frac{1}{2} \nabla^d u \nabla^d u g_{id} \nabla^d u g_{jk} - \frac{1}{2} \nabla^d u \nabla^d u g_{jd} \nabla^d u g_{ik} \\
 &= \frac{C_{ijk}}{n-2} + W_{ijkd} \nabla^d u - \frac{1}{2} \nabla^d u \nabla^d u g_{jk} \nabla_i u + \frac{1}{2} \nabla^d u \nabla^d u g_{ik} \nabla_j u + \\
 &\quad + \frac{1}{2} \nabla^d u \nabla^d u \nabla_i u g_{jk} - \frac{1}{2} \nabla^d u \nabla^d u \nabla_j u g_{ik} \\
 &= \frac{C_{ijk}}{n-2} + W_{ijkd} \nabla^d u.
 \end{aligned}$$

Finalmente, concluímos que $\tilde{C}_{ijk} = C_{ijk} + (n-2)W_{ijk} \nabla^d u$. $\square$

Antes de irmos ao resultado principal, faremos algumas considerações referentes a uma proposição presente em [8] e que nos será útil na demonstração.

Seja T um $(1, 2)$ -tensor simétrico em uma variedade (M, g) . Dado $p \in M$ e um autovalor λ associado a um $X \in T_p M$, denotamos por $V_\lambda(x) \subset T_p M$ o autoespaço correspondente. Em qualquer componente conexa do subconjunto aberto e denso $M_T \subset M$, composto pelos pontos de M tais que o número de M nos quais o número de autovalores distintos de T é localmente constante, os autovalores de T formam funções autovaloradas suaves mutuamente distintas e, para cada tal função $\lambda(p)$, a aplicação $p \mapsto V_{\lambda(p)}(p)$ define uma autodistribuição suave de T . Se λ e μ são tais funções autovaloradas, então, para quaisquer campos X, Y, Z com $X_p \in V_{\lambda(p)}(p)$, $Y_p \in V_{\mu(p)}(p)$, as considerações iniciais da Seção 2 do Capítulo 1 a definição de derivada covariante de tensores nos dizem que

$$\begin{aligned}
 \nabla_Z T(X, Y) &= Z(T(X, Y)) - T(\nabla_Z X, Y) - T(X, \nabla_Z Y) \\
 &= Z \langle T(X), Y \rangle - \langle \nabla_Z X, T(Y) \rangle - \langle T(X), \nabla_Z Y \rangle \\
 &= Z \langle \lambda X, Y \rangle - \mu \langle \nabla_Z X, Y \rangle - \lambda \langle X, \nabla_Z Y \rangle \\
 &= \langle X, Y \rangle Z(\lambda) + (\lambda - \mu) \langle \nabla_Z X, Y \rangle.
 \end{aligned} \tag{4.9}$$

Antes de enunciarmos o resultado de [8], precisamos definir *distribuição integrável*. Observe que $D \subset TM$ é dita uma *distribuição* quando $D_p \subset T_p M$ é um subespaço vetorial do espaço tangente a M em p e será dita *suave* quando D forma um subfibrado² de TM .

Definição 4.5. Dizemos que uma distribuição $D \subset TM$ é dita *involutiva* quando, dados $X, Y \in D$, $[X_p, Y_p] \in D_p$. Uma subvariedade imersa $N \subset M$ é dita *variedade integral* de D se $T_p N = D_p, \forall p \in N$. Uma distribuição integrável, ou integral, é aquela tal que cada ponto de M está contido em uma variedade integral de D .

²Recomendamos ver [32]

Um resultado central no estudo de variedades integrais é o chamado Teorema de Frobenius, cuja demonstração encontra-se em [32].

Teorema 4.3 (Teorema de Frobenius). *Toda distribuição involutiva é completamente integrável.*

Com efeito, ser *completamente integrável* é mais forte que ser apenas integrável – de fato, o primeiro implica o segundo. No entanto, não é nosso objetivo explorar tal conceito.

Demonstraremos o teorema a seguir por questão de elucidar sua aplicação no resultado principal deste capítulo.

Proposição 4.2. *Dado um tensor de Codazzi T em uma variedade (M, g) e uma função autovalorada λ de T , definida em uma componente de M_T , temos*

- a) *A autodistribuição V_λ é integrável.*
- b) *Cada variedade integral N_λ de V_λ é umbílica em (M, g) . Mais precisamente, para quaisquer funções autovaloradas $\mu \neq \lambda$ e quaisquer campos X, Z de V_λ e Y de V_μ , a segunda forma fundamental com respeito a $\eta = Y$ é dada por*

$$H_Y(X, Z) = -\langle \nabla_Z X, Y \rangle = (\mu - \lambda)^{-1} \langle X, Z \rangle Y(\lambda).$$

- c) *Se $\dim(V_\lambda) > 1$, então λ é constante ao longo de V_λ .*

Demonstração. Tomando μ, X, Y e Z como no item (b), temos que, por construção, $\langle X, Y \rangle = \langle Z, Y \rangle = 0$, donde a equação (4.9) nos dá que

$$(\lambda - \mu) \langle [Z, X], Y \rangle = (\nabla_Z T)(X, Y) - (\nabla_X T)(Z, Y)$$

e

$$(\lambda - \mu) \langle \nabla_Z X, Y \rangle - \langle X, Z \rangle Y(\lambda) = (\nabla_Z T)(X, Y) - (\nabla_Y T)(X, Z).$$

Porém, como T é um tensor de Codazzi, isto é, $(\nabla_Z T)(X, Y) = (\nabla_X T)(Z, Y)$, valendo o mesmo quando trocamos X por Y no membro direito da última igualdade, segue que $\langle [Z, X], Y \rangle = 0$ para todo Y em V_μ , o que nos diz que, pela arbitrariedade de $\mu \neq \lambda$ e o fato de as funções autovaloradas definidas em componentes conexas de M_T serem mutuamente distintas, $[Z, X]$ é um campo de V_λ e V_λ é integrável – consequência do Teorema de Frobenius –, isto prova o item (a). O item (b) segue também das discussões anteriores, da definição de segunda forma fundamental e da Proposição 1.8, já que

$$(\lambda - \mu) \langle \nabla_Z X, Y \rangle = \langle X, Z \rangle Y(\lambda) \implies \langle \nabla_Z X, Y \rangle = (\lambda - \mu)^{-1} \langle X, Z \rangle Y(\lambda)$$

e $H_Y(X, Z) = -\langle \nabla_Z Y, X \rangle = \langle Y, \nabla_Z X \rangle$, já que $g(X, Y) = 0$. Logo, temos a validade de (b).

Agora, se $\dim(V_\lambda) > 1$ e X é um campo em V_λ , podemos obter, localmente, um campo Y de V_λ não-nulo e ortogonal a X . Aplicando novamente (4.9) com $\lambda = \mu$, obtemos $|Y|^2 X(\lambda) = (\nabla_X T)(Y, Y) = (\nabla_Y T)(X, Y) = 0 \implies Y(\lambda) = 0$, donde λ é constante em V_λ em vizinhanças de cada ponto de M_T , o que nos dá que λ é constante em V_λ e isto conclui a demonstração. $\square$

Uma aplicação deste resultado, que é fortemente relacionada ao resultado a seguir, é uma classificação local dos tensores de Codazzi que possuem exatamente dois autovalores distintos λ, μ , com $\dim(V_\lambda) \leq \dim(V_\mu)$. Iremos observar alguns aspectos pontuais desta aplicação, que encontra-se aprofundada em [8]. Como consequência do item (b), a curvatura média de N_λ é dada por

$$H = \frac{1}{\mu - \lambda} Y(\lambda). \quad (4.10)$$

Todavia, se $\dim(V_\lambda) = 1$, as *curvas integrais* de V_λ serão uma geodésica – devido à dimensão de N_λ ser um. Esta propriedade é nomeada como *distribuição geodésica linear*. Dado um campo vetorial suave $X \in \mathfrak{X}(M)$, uma dada curva $\gamma : I \rightarrow M$ é dita *curva integral de X* quando $\gamma'(t) = X_{\gamma(t)}$. Assim, sendo N_λ 1-dimensional, o item (c) nos diz que μ é constante ao longo de V_μ . Além disso, trata-se do sentido geodésico introduzido na Seção 3 do Capítulo 1, pois λ ser constante em V_λ implica que a segunda forma fundamental de N_λ é identicamente nula.

No caso especial em que ∇f é um campo em V_λ , nas condições do parágrafo anterior, então a segunda forma fundamental será do tipo

$$H_{\frac{\nabla f}{|\nabla f|}}(X, Z) = -\left\langle \nabla_X \frac{\nabla f}{|\nabla f|}, Z \right\rangle = -\frac{1}{|\nabla f|} \langle \nabla_X \nabla f, Z \rangle = -\frac{1}{|\nabla f|} \nabla^2 f(X, Z).$$

E a umbilicidade implicará que $\nabla^2 f$ será um múltiplo da métrica. Sempre que $N^{n-1} \subset M^n$ for uma variedade imersa em M , como imagem inversa de uma valor regular $a \in \mathbb{R}$ por uma aplicação suave $f \in C^\infty(M)$, teremos $\nabla f(p) \perp T_p N, \forall p \in N$. Por fim, é intuitivo supor que TM seja decomposto na soma direta $TM = V_\lambda \oplus V_\mu$, assim como vimos na penúltima seção do Capítulo 1.

Vamos, enfim, ao resultado principal deste capítulo e, em seguida, a seus corolários.

Teorema 4.4 ([18]). *Seja (M^n, g) , $n \geq 3$, uma variedade quase-Einstein generalizada com tensor de Weyl harmônico e $W(\nabla f, \cdot, \cdot, \cdot) = 0$. Então, em torno de qualquer ponto regular de f , a variedade M é localmente um produto warped com fibra Einstein $(n-1)$ -dimensional.*

Demonstração. Seja (M^n, g) , $n \geq 3$, uma variedade quase-Einstein generalizada com tensor de Weyl harmônico. Se $n = 3$, como vimos anteriormente, temos que g é localmente conformemente flat ($W = 0$ é equivalente a ser localmente conformemente flat), enquanto que se $n \geq 4$, devemos ter $C_{ijk} = 0$, posto que isto é equivalente à harmonicidade em todo caso.

Agora, a harmonicidade de W juntamente com a condição $W(\nabla f, \cdot, \cdot, \cdot) = 0$ implica que a métrica conforme

$$\tilde{g} = e^{-\frac{2}{n-2}f} g$$

tem tensor de Weyl harmônico. Com efeito, pelo Lema 4.2,

$$\tilde{C}_{ijk} = C_{ijk} + W_{ijkd} \nabla^d f = 0,$$

em que usamos a notação de Einstein para somatórios e ∇^d representa a divergência com respeito à entrada d , para tensores ou campos. Assim, $\tilde{S}$ também será de Codazzi.

Além disso, pela equação (4.5) e a equação (3.1), a expressão do tensor de Ricci da métrica conforme $\tilde{g}$ é

$$\begin{aligned} \widetilde{\text{Ric}} &= \text{Ric} + \nabla^2 f + \frac{1}{n-2} df \otimes df + \frac{1}{n-2} (\Delta f - |\nabla f|^2) g \\ &= \left(\mu + \frac{1}{n-2} \right) df \otimes df + \frac{1}{n-2} (\Delta f - |\nabla f|^2 + (n-2)\lambda) e^{\frac{2}{n-2}f} \tilde{g}. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Note ainda que, em todo ponto regular p de f , o tensor de Ricci de $\tilde{g}$ possui um autovalor ou no máximo dois autovalores distintos η_1 e η_2 com multiplicidade 1 e $n-1$, respectivamente. Em ambos os casos, ∇f é um autovetor do tensor de Ricci de $\tilde{g}$, e é aquele cujo autovalor tem multiplicidade 1.

Com efeito, dados vetores $X, Y \perp \nabla f$ e pela equação (4.11),

$$\widetilde{\text{Ric}}(X, Y) = \frac{1}{n-2} (\Delta f - |\nabla f|^2 + (n-2)\lambda) e^{\frac{2}{n-2}f} \tilde{g}(X, Y),$$

então X e Y são autovetores de $\widetilde{\text{Ric}}$ para o mesmo autovalor, cuja multiplicidade é, de fato, $n-1$. Por outro lado,

$$\widetilde{\text{Ric}}(\nabla f) = \left(\mu + \frac{1}{n-2} \right) |\nabla f|^2 g(\nabla f) + \frac{1}{n-2} (\Delta f - |\nabla f|^2 + (n-2)\lambda) e^{\frac{2}{n-2}f} \tilde{g}(\nabla f),$$

isto é,

$$\widetilde{\text{Ric}}(\nabla f) = \left(\left(\mu + \frac{1}{n-2} \right) |\nabla f|^2 + \frac{1}{n-2} (\Delta f - |\nabla f|^2 + (n-2)\lambda) \right) e^{\frac{2}{n-2}f} \tilde{g}(\nabla f).$$

Para todo ponto em

$$\Omega = \{p \in M : p \text{ é um ponto regular e } \eta_1(p) \neq \eta_2(p)\},$$

o tensor de Schouten na métrica conforme também terá no máximo dois autovalores distintos σ_1 de multiplicidade 1 e σ_2 de multiplicidade $n - 1$, com os mesmos autoespaços de η_1 e η_2 , respectivamente. Observe, ainda, que Ω é um aberto de M , pois as funções η_i são contínuas e, logo, existe uma vizinhança $U \subset M$ de $p \in \Omega$ tal que $\eta_2(q) \neq \eta_1(q), \forall q \in U$.

Pela Proposição 4.2 e as considerações seguintes a ela, sabemos que o fibrado tangente de uma vizinhança de p se decompõe como a soma ortogonal direta de duas autodistribuições integráveis, um campo linear V_{σ_1} e uma distribuição V_{σ_2} , de codimensão 1, com folhas³ totalmente umbílicas, no sentido que a segunda forma fundamental $\tilde{H}_1$ de cada folha é proporcional à métrica $\tilde{g}$.

Por um abuso de notação, diremos que $\tilde{g}$ é métrica induzida nas folhas de V_{σ_2} e trabalharemos com $\langle, \rangle$. Denotaremos por $\tilde{\nabla}$ a conexão Levi-Civita da métrica $\tilde{g}$ em M e $\tilde{\nabla}^{\sigma_2}$ a conexão induzida por $\tilde{g}$ nas folhas de V_{σ_2} . Em um sistema de cartas locais adequado, $x^1, \dots, x^n$ com $\partial x^1 \in V_{\sigma_1}$ e $\partial x^i \in V_{\sigma_2}$, em que $2 \leq i, j \leq n$, temos $\tilde{g}_{1i} = \tilde{g}_{ij} = 0$, sempre que $i \neq j$, e $\tilde{g}_{ii} = 1$. Como V_{σ_2} é totalmente umbílica e para $2 \leq j \leq n$, tem-se

$$\tilde{H}_{1(ij)} = \langle \tilde{\nabla}_{\partial_i}^{\sigma_2} \partial_j, \partial_1 \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k \partial_k, \partial_1 \right\rangle = \tilde{\Gamma}_{ij}^1 \tilde{g}_{11} = \tilde{H} \tilde{g}_{ij}, \quad (4.12)$$

pois $\tilde{g}(\partial_1, \partial_j) = 0 \implies \langle \tilde{\nabla}_{\partial_i}^{\sigma_2} \partial_1, \partial_j \rangle = -\langle \partial_1, \tilde{\nabla}_{\partial_i}^{\sigma_2} \partial_j \rangle$, em que $\tilde{H}$ é a função curvatura média para N_{σ_2} . A expressão $\tilde{H} \tilde{g}_{ij}$ surge devido à definição (1.10) e à definição de umbilicidade. Recorrendo à equação de Codazzi-Mainardi, isto é,

$$\langle (\tilde{\nabla}_{\partial_i}^{\sigma_2} \tilde{H}_1)(\partial_j, \partial_k) - (\tilde{\nabla}_{\partial_j}^{\sigma_2} \tilde{H}_1)(\partial_i, \partial_k), \partial_1 \rangle = -\langle \widetilde{\text{Rm}}(\partial_i, \partial_j) \partial_k, \partial_1 \rangle \quad (4.13)$$

e tomando seu traço no índice $i \neq 1$ para $k = i$, e usando a propriedade de umbilicidade (4.12), chegamos a

$$\begin{aligned} (\tilde{\nabla}_{\partial_i}^{\sigma_2} \tilde{H}_1)(\partial_j, \partial_i) - (\tilde{\nabla}_{\partial_j}^{\sigma_2} \tilde{H}_1)(\partial_i, \partial_i) &= \partial_j \tilde{H} - (n-1) \partial_j \tilde{H} \\ &= (2-n) \partial_j \tilde{H}. \end{aligned}$$

Note que $(\tilde{\nabla}_{\partial_i}^{\sigma_2} \tilde{H}_1)(\partial_j, \partial_i) = (\tilde{\nabla}_{\partial_i}^{\sigma_2} (\tilde{H} \tilde{g}))(\partial_j, \partial_i) = (\partial_i \tilde{H}) \tilde{g}_{ji} + \tilde{H} (\tilde{\nabla}_{\partial_i}^{\sigma_2} \tilde{g})(\partial_j, \partial_i)$ e esta última parcela é nula. Usando a equação (4.13) e as considerações a respeito dos

³Folhas correspondem, neste caso, aos autoespaços $V_{\sigma_2(q)}(q), q \in U$.

autovetores e autovalores de $\widetilde{\text{Ric}}$, obtemos

$$(2 - n)\partial_j \widetilde{H} = -\widetilde{\text{Ric}}(\partial_j, \partial_1) = 0,$$

o que implica que a curvatura média $\widetilde{H}$ é constante em cada folha de V_{σ_2} . Agora, do item (b) da Proposição 4.2 e a equação (4.10), temos

$$\widetilde{H} = \frac{1}{\sigma_1 - \sigma_2} \partial_1 \sigma_2.$$

O fato de $\widetilde{H}$ ser constante nas folhas de V_{σ_2} , além de σ_2 também sê-lo pelo item (c) da Proposição 4.2, implica que $\partial_j \sigma_1 = 0$, basta apenas derivar a expressão anterior na direção de x^j . Isto é equivalente a dizer que V_{σ_1} possui uma distribuição geodésica linear, donde será $\partial_j g_{11} = 0$, pois $\partial_1 = \frac{\nabla f}{|\nabla f|}$ e, então, a nulidade da derivada covariante de g_{11} na direção ∂_j segue da discussão presente no momento anterior ao enunciado deste teorema. Agora, devido a $\widetilde{\nabla}_{\partial_k}^{\sigma_2} \partial_l = \widetilde{\nabla}_{\partial_l}^{\sigma_2} \partial_k$, vide (1.3), a equação (4.12) resulta em

$$\partial_1 \widetilde{g}_{ij} = -2\widetilde{\Gamma}_{ij}^1 = -2\widetilde{g}_{11}^{-1} \widetilde{H} \widetilde{g}_{ij}, \quad (4.14)$$

pois $\langle \widetilde{\nabla}_{\partial_1}^{\sigma_2} \partial_i, \partial_j \rangle = \langle \widetilde{\nabla}_{\partial_i}^{\sigma_2} \partial_1, \partial_j \rangle = -\langle \partial_1, \widetilde{\nabla}_{\partial_i}^{\sigma_2} \partial_j \rangle$. Uma vez que $\widetilde{H}$ e g_{11} são constantes ao longo de V_{σ_2} , (4.14) nos fornece

$$\partial_1 \widetilde{g}_{ij}(x^1, \dots, x^n) = \varphi(x^1) \widetilde{g}_{ij}(x^1, \dots, x^n)$$

para uma função φ dependente apenas da variável x^1 . Escolhendo uma função $\psi = \psi(x^1)$ tal que $\frac{d\psi}{dx^1} = \varphi$, temos que $\partial_1(e^{-\psi} \widetilde{g}_{ij}) = 0$, donde

$$\widetilde{g}_{ij}(x^1, \dots, x^n) = e^{\psi(x^1)} G_{ij}(x^2, \dots, x^n),$$

para alguma G_{ij} . Isto implica que a variedade $(M^n, \widetilde{g})$, localmente em torno de qualquer ponto regular de f , possui uma representação como produto warped com fibra $(n-1)$ -dimensional. Pela estrutura da deformação conforme, esta conclusão é válida para a variedade Riemanniana original (M^n, g) . Agora, o fato de g ter tensor de Weyl harmônico implica que a fibra $(n-1)$ -dimensional é Einstein, vide Lema 4 em [25]⁴. Isto conclui a prova. $\square$

Observação 4.2. Novamente pelo Teorema 1.159 de [8], $\widetilde{W} = W$, logo $\text{div}(\widetilde{W}) = \text{div}(W)$. Então, W harmônico implica em $\widetilde{W}$ harmônico.

Observação 4.3. A hipótese $W(\nabla f, \cdot, \cdot, \cdot) = 0$ não pode ser removida. De fato, se

⁴É interessante também notar a Observação 1 de [25].

considerarmos o sóliton gradiente shrinking com $\lambda = n - 1$ no produto Riemanniano $M = \mathbb{R}^k \times \mathbb{S}^{n-k}$, para $n \geq 4$ e $k \geq 2$, com métrica $g = g_{\mathbb{R}^k} + g_{\mathbb{S}^{n-k}}$ e função potencial

$$f(x) = \frac{n-1}{2}g(x, x), \quad x \in \mathbb{R}^k.$$

Por ser um produto Riemanniano de variedades Einstein, M possui tensor de Weyl harmônico e $W(\nabla f, \cdot, \cdot, \cdot) \neq 0$. Note que, pelo item (4) da Proposição 4.2⁵ do Capítulo 7 de [36] e tomando uma base ortonormal $\{E_1, \dots, E_k, E_{k+1}, \dots, E_n\}$ de M com E_i e E_j , $1 \leq i \leq k$ e $k+1 \leq j \leq n$, correspondendo respectivamente a levantamentos de elementos de uma base ortonormal de $\mathbb{R}^k$ e $\mathbb{S}^{n-k}$, temos

$$W(\nabla f, E_j, E_j, E_i) = \left(\frac{R_{\mathbb{S}^{n-k}}}{(n-1)(n-2)} - \frac{1}{n-2} \text{Ric}_{\mathbb{S}^{n-k}}(E_j, E_j) \right) g(\nabla f, E_i) \neq 0,$$

uma vez que $\text{Ric}_M = \text{Ric}_{\mathbb{R}^k} + \text{Ric}_{\mathbb{S}^{n-k}} = \text{Ric}_{\mathbb{S}^{n-k}}$.

Assim, W é harmônico, a curvatura radial de Weyl é não-nula e M não é um produto warped.

Como mencionado no Capítulo 2, pelas simetrias do tensor curvatura algébrico, variedades 1-dimensionais são flat. O lema a seguir nos auxiliará na argumentação dos corolários do teorema anterior.

Lema 4.5. *A variedade produto warped $((a, b) \times_u N, dt^2 + u^2 g_N)$ é localmente conformemente flat se, e somente se, N tem curvatura seccional constante.*

Demonstração. Podemos reescrever a métrica como $g = \frac{1}{u^2}(u^2 dt^2 + g_N) = \frac{1}{u^2} \tilde{g}$, donde g é localmente conformemente flat se, e somente se, $\tilde{g}$ também for. Ademais, a métrica $\tilde{g}$ nada mais é que a métrica do produto Riemanniano entre as variedades $((a, b), u^{-2} dt^2)$ e (N, g_N) . Como $\tilde{W} = W = 0$, então g_F torna $W_F = 0$, pois $\text{Rm}_{\tilde{g}} = \cancel{\text{Rm}_{u^{-2} dt^2}} + \text{Rm}_{g_F}$. Assim, pelo Teorema 4 de [52], N tem curvatura constante. A recíproca já fora demonstrada neste capítulo. $\square$

Como um corolário imediato, temos que uma variedade quase-Einstein generalizada localmente conformemente flat, posto que isto é equivalente a $W = 0$, é localmente um produto warped com fibras $(n-1)$ -dimensionais. Em particular, pelo Lema 4.5, segue diretamente a seguinte caracterização local para Ricci almost solitons localmente conformemente flat, que foram introduzidas em [43], similar a uma para Ricci solitons presente em [12, 19].

⁵As considerações para produtos warped lá estabelecidas são também válidas para produtos Riemannianos desde que tomemos f como uma constante.

Corolário 4.6 ([18]). *Seja (M^n, g) , $n \geq 3$, um gradiente Ricci almost soliton localmente conformemente flat. Então, em torno de qualquer ponto regular de f , a variedade é localmente um produto warped cuja fibra $(n-1)$ -dimensional tem curvatura seccional constante.*

Se $n = 4$, uma vez que variedades Einstein 3-dimensionais têm curvatura seccional constante, o Lema 4.5 nos permite concluir o que segue.

Corolário 4.7 ([18]). *Seja (M^4, g) uma variedade quase-Einstein 4-dimensional com tensor de Weyl harmônico e $W(\nabla f, \cdot, \cdot, \cdot) = 0$. Então, em torno de um ponto regular de f , a variedade é localmente um produto warped com fibra 3-dimensional com curvatura constante. Em particular, se o produto é não-trivial, então (M^4, g) é localmente conformemente flat.*

Há ainda um último corolário do Teorema 4.4 que segue diretamente do anterior e de uma classificação de gradiente Ricci solitons steady correspondente ao Teorema 1.2 em [12].

Corolário 4.8 ([18]). *Seja (M^4, g) uma variedade quase-Einstein 4-dimensional com tensor de Weyl harmônico e $W(\nabla f, \cdot, \cdot, \cdot) = 0$. Então, a variedade é Ricci flat ou isométrica ao soliton de Bryant.*

Observação 4.4. *O soliton de Bryant, devido a Robert Bryant, se trata de um soliton gradiente steady não-compacto n -dimensional, $n \geq 3$, que é rotacionalmente simétrico e possui curvatura seccional positiva.*

Referências Bibliográficas

- [1] BAKRY, D.; EMERY, M. *Diffusions Hypercontractives*. Séminaire de probabilités XIX, 1983/84, Lecture Notes in Math. 1123, Springer, Berlin, p. 177–206, 1985.
- [2] BAKRY, D.; LEDOUX, M. *Sobolev inequalities and Myers diameter theorem for an abstract Markov generator*. Duke Math. J. 85, p. 253–270, 1996.
- [3] BARROS, A.; BATISTA, R.; RIBEIRO JR, E. *Bounds on volume growth of geodesic balls for einstein warped products*. Proc. American Mathematical Society 143, p. 4415–4422, 2015.
- [4] BARROS, A.; GOMES, J. N. *A compact gradient generalized quasi-Einstein metric with constant scalar curvature*. J. Math. Anal. Appl. 401, p. 702–705, 2013.
- [5] BARROS, A.; RIBEIRO JR, E. *Characterizations and integral formulae for generalized m -quasi-Einstein metrics*. Bull. Braz. Math. Soc., New Series 45(2), p. 325–341, 2014.
- [6] BARROS, A.; RIBEIRO JR, E. *Integral formulae on quasi-Einstein manifolds and applications*. Glasgow Math. J. 54, p. 213–223, 2012.
- [7] BARROS, A.; RIBEIRO JR, E. *Some characterizations for compact almost Ricci solitons*. Proc. Amer. Math. Soc., 140, p. 1033–1040, 2012.
- [8] BESSE, A. L. *Einstein Manifolds*. Springer-Verlag, 1987.
- [9] BIEZUNER, R. J. *Geometria Riemanniana – Notas de Aula*. Notas de aula do curso Geometria Riemanniana do Programa de Pós-Graduação em Matemática, 2017.
- [10] CALABI, E. *On manifolds with non-negative Ricci curvature II*. Notices Amer. Math. Soc., 22 A205, 1975.
- [11] CAMARGO, F.; CAMINHA, A.; SOUZA, P. *Complete foliations of space forms by hypersurfaces*. Bull. Braz. Math. Soc., 41, p. 339–353, 2010.

- [12] CAO, H.-D.; CHEN, Q. *On locally conformally flat gradient steady Ricci solitons*. Trans. Amer. Math. Soc., 2009.
- [13] CAO, H. -D.; ZHOU, D. *On complete gradient shrinking Ricci solitons*. J. Diff. Geom. 85, p. 175–186, 2010.
- [14] DO CARMO, M. *Geometria Diferencial das Curvas e Superfícies*. 2^a ed. Rio de Janeiro: Textos Universitários, SBM, 2005.
- [15] DO CARMO, M. *Geometria Riemanniana*. 4^a ed. Rio de Janeiro: Projeto Euclides, IMPA, 2008.
- [16] CASE, J. *On the nonexistence of quasi-Einstein metrics*. Pacific J. Math. 248, p. 227–284, 2010.
- [17] CASE, J.; SHU, Y. -S.; WEI, G. *Rigidity of quasi-Einstein metrics*. Differ. Geom. Appl. 29, p. 93–100, 2011.
- [18] CATINO, G. *Generalized quasi-Einstein manifolds with harmonic weyl tensor*. Math. Z. 271, p. 751–756, 2012.
- [19] CATINO, G.; MANTEGAZZA, C. *Evolution of the Weyl tensor under the Ricci flow*. Ann. Inst. Fourier, 2009.
- [20] CATINO, G.; MANTEGAZZA, C.; MAZZIERI, L.; RIMOLDI, M. *Locally conformally flat quasi-Einstein manifolds*. J. Reine Ang. Math., 2011.
- [21] CHEEGER, J.; COLDING, T. *Lower bounds on Ricci curvature and the almost rigidity of warped products*. Ann. of Math. (2) 144 (1), p. 189–237, 1996.
- [22] COUTINHO, F.; DIÓGENES, R.; LEANDRO, B.; RIBEIRO JR, E. *Static perfect fluid space-time on compact manifolds*. Classical and Quantum Gravity 37 015003, 2020.
- [23] EMINENTI, M.; NAVE, G.; MANTEGAZZA, C. *Ricci solitons – the equation point of view*. Manuscripta Math. 127 (3), p. 345–367, 2008.
- [24] EVANS, L. C. *Partial Defferential Equations*. Nova York: Amer. Math. Soc., 1997.
- [25] GEBAROWSKI, A. *Doubly warped products with harmonic Weyl conformal curvature tensor*. Colloq. Math. 67, p. 73–89, 1994.
- [26] GOMES, J. N. V. *A Note on Gradient Einstein-Type Manifolds*. Differential Geom. Appl. 66, p. 13–22, 2019.

- [27] HE, C.; PETERSEN, P.; WYLIE, W. *On the classification of warped product Einstein metrics*. Comm. Anal. Geom. 20, p. 271–311, 2012.
- [28] HU, Z.; LI, D.; ZHAI, S. *On generalized m -quasi-Einstein manifolds with constant Ricci curvatures*. J. Math. Anal. Appl. 466, p. 843–851, 2017.
- [29] IVEY, T. *Ricci solitons on compact three-manifolds*. Differential Geom. Appl. 3, p. 301–307, 1993.
- [30] KIM, D. -S.; KIM, Y. H. *Compact Einstein warped product spaces with nonpositive scalar curvature*. Proc. Amer. Math. Soc. 131, p. 2573–2576, 2003.
- [31] LI, X. -D. *Liouville theorems for symmetric diffusion operators on complete Riemannian manifolds*. J. Math. Pures Appl. 84, p. 1295–361, 2005.
- [32] LEE, J. M. *Introduction to Smooth Manifolds*. 1^a ed. Nova York: Graduate Texts in Mathematics, Springer, 2003.
- [33] MASAHIKO, K. *On a differential equation characterizing a Riemannian structure of a manifold*. Tokyo J. Math. 6 (1), p. 143–151, 1983.
- [34] MORGAN, F. *Manifolds with density*. Notices of the Amer. Math. Soc., 52, p. 853–858, 2005.
- [35] MUNTEANU, O.; SESUM, N.. *On gradient Ricci solitons*. Journal of Geometric Analysis. 23, p. 539–561, 2013.
- [36] O’NEILL, B. *Semi-Riemannian Geometry with applications to Relativity*. Academic Press, Nova York, 1983.
- [37] PETERSEN, G. *The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications*. arXiv: math.DG/0211159v1, 11 Nov 2002.
- [38] PETERSEN, G. *Ricci flow with surgery on three-manifolds*. arXiv: math.DG/0303109, 10 Mar 2003.
- [39] PETERSEN, G. *Finite extinction time for the solutions to the Ricci flow on certain threemanifolds*. arXiv: math.DG/0307245, 17 Jul 2003.
- [40] PETERSEN, P.; WYLIE, W. *On the classification of gradient Ricci solitons*. arXiv:0712.1298v2 [math.DG], 2010.
- [41] PETERSEN, P. *Riemannian Geometry*. 2^a ed. Nova York: Graduate Texts in Mathematics, Springer, 2006.

- [42] PETERSEN, P.; WYLIE, W. *Rigidity of gradient Ricci solitons*. Pacific J. Math. 241 (2), p. 329–345, 2009.
- [43] PIGOLA, S.; RIGOLI, M.; RIMOLDI, M.; SETTI, A. *Ricci Almost Solitons*. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (5) Vol. X, p. 757–799, 2011.
- [44] PRINCETON UNIVERSITY PRESS. *The Collected Papers of Albert Einstein*. Disponível em: <<https://einsteinpapers.press.princeton.edu/>>. Acesso em 30 de novembro de 2020.
- [45] QIAN, Z. *Estimates for weighted volumes and applications*. Quart. J. Math. Oxford Ser. (2) 48, p. 235–242, 1997.
- [46] RIMOLDI, M. *Rigidity results for Lichnerowicz Bakry-Emery Ricci tensors*. Tese (Doutorado em Matemática) – Università degli Studi di Milano. Milão, p. 23, 2010/2011.
- [47] SCHOEN, R. *The existence of weak solutions with prescribed singular behavior for a conformally invariant scalar equations*. Comm. Pure Appl. Math. 41, p. 317–392, 1988.
- [48] TASHIRO, Y. *Complete Riemannian manifolds and some vector fields*. Trans. Amer. Math. Soc., 117, p. 251–275, 1965.
- [49] WANG, L. *On noncompact quasi-Einstein metrics*. Pacific J. Math. 254, p. 449–464, 2012.
- [50] WANG, Q. *Conformal positive mass theorems for asymptotically flat manifolds with inner boundary*. Differential Geom. Appl. 33, p. 105–116, 2014.
- [51] WEI, G.; WYLIE, W. *Comparison geometry for the smooth metric measure spaces*. Proceedings of the 4th International Congress of Chinese Mathematicians, vol. II, Hangzhou, China, p. 191–202, 2007.
- [52] YAU, S. T. *Remarks on Conformal Transformations*. J. Diff. Geom. 8, p. 369–381, 1973.
- [53] YAU, S. -T. *Some Function-Theoretic Properties of Complete Riemannian Manifolds and their Applications to Geometry*. Indiana Univ. Math. J. 25, p. 659–670, 1976.