Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós–Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Sobre Tor-rigidez e profundidade de produtos tensoriais de módulos

Pedro Henrique dos Santos

João Pessoa - PB

Fevereiro de 2020.

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós–Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Sobre Tor-rigidez e profundidade de produtos tensoriais de módulos

por

Pedro Henrique dos Santos

sob a orientação do

Prof. Dr. Cleto Brasileiro Miranda Neto

João Pessoa – PB

Fevereiro de 2020

Catalogação na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

S237s Santos, Pedro Henrique dos.
Sobre Tor-rigidez e profundidade de produtos tensoriais de módulos / Pedro Henrique Dos Santos. - João Pessoa, 2020.
66 f.

Orientação: Cleto Brasileiro Miranda Neto.
Dissertação (Mestrado) - UFPB/CCEN.

1. Álgebra comutativa. 2. Produto tensorial. 3. Profundidade. 4. Rigidez do Tor. I. Miranda Neto, Cleto Brasileiro. II. Título.

UFPB/BC CDU 512.71(043)

Elaborado por Gracilene Barbosa Figueiredo - CRB-15/794

Sobre Tor-rigidez e profundidade de produtos tensoriais de módulos.

por

Pedro Henrique dos Santos [1]

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós–Graduação em Matemática da Universidade Federal da Paraíba como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Álgebra

Aprovada em 17 de fevereiro de 2020.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Cleto Brasileiro Miranda Neto – UFPB
(Orientador)

Prof. Dr. Aron Simis – UFPE
(Examinador Externo)

Prof. Thyago Santos de Souza – UFCG
(Examinador Externo)

[1] O autor foi bolsista do CNPq durante a elaboração desta dissertação.

A minha avó...

Agradecimentos

Ao término de uma etapa tão importante da minha formação, faz-se necessário agradecer aqueles que de alguma forma foram importantes durante esta difícil jornada.

Agradeço a Deus pelo dom da vida.

Agradeço à minha avó – a mulher da minha vida – pela paciência, pelo amor, e por tudo que fez e faz por mim.

Agradeço ao meu amigo John pelas inúmeras vezes em que me ajudou a passar por momentos difíceis em João Pessoa; pelos momentos que compartilhamos juntos, que quase sempre resultavam em nos perdermos ou passarmos vergonha; pelas conversas; pelos estudos em grupo, etc. Sou muito grato por ter um amigo como você.

Agradeço às professoras Elizabeth e Desterro por terem me proporcionado realizar o sonho de fazer um mestrado em Matemática; por todos os conselhos, ajudas, correções no GEAR e por serem essas pessoas incríveis. Obrigado por tudo. Vocês foram fundamentais para a realização desse sonho.

Agradeço ao meu amigo Robson (Robsi), meu fiel escudeiro desde o seu primeiro semestre do mestrado. Vivemos muitos momentos juntos em João Pessoa, principalmente de estudo e conversas. Um amigo incrível, embora só saiba me julgar.

Agradeço aos colegas do Departamento, por todos os momentos vividos dentro e fora do prédio da pós. Em particular, agradeço a Angélica, Raoni, Renato B., Douglas Q., Lorena e Jáfia. Não posso deixar de agradecer a alguns amigos que, mesmo distantes, se fizeram presentes da forma que puderam e me ajudaram a segurar a barra e aliviar a saudade. Foram eles: Dimas, Gabi, Duda, Wedja e Juliana.

Agradeço ao professor Cleto Brasileiro, meu orientador; por toda a confiança depositada, por me indicar um tema que gostei muito de estudar e por todo o conhecimento repassado.

Agradeço aos professores Thyago Souza e Aron Simis; por aceitarem participar da banca de defesa desse trabalho.

Agradeço aos professores com os quais tive aulas no mestrado: Elisandra, Evelina, Allan, Wállace e Ricardo Burity.

Agradeço ao CNPq pelo indispensável apoio financeiro.

De forma um pouco mais geral, agradeço a todos aqueles que de alguma forma me ajudaram a chegar até aqui.

Resumo

Nesta dissertação, após apresentarmos alguns resultados preliminares da álgebra comutativa, concentramo-nos no estudo do assim chamado *problema da rigidez do Tor*, assim como a fórmula da profundidade para o produto tensorial de módulos e alguns resultados sobre liberdade. Aplicando alguns dos fatos apresentados neste trabalho, obtemos, como um dos principais corolários, que para módulos M, N apropriados sobre um anel de hipersuperfície R satisfazendo a propriedade de que $M \otimes_R N$ é reflexivo, a seguinte fórmula (demonstrada originalmente por C. Huneke e R. Wiegand) é válida:

$$\operatorname{depth}(M \otimes_R N) = \operatorname{depth}(M) + \operatorname{depth}(N) - \dim(R).$$

Palavras-chave: Produto tensorial, profundidade, rigidez do Tor;

Abstract

In this dissertation, after presenting some preliminary results from commutative algebra, we concentrate ourselves in the study of the so-called *Tor rigidity problem*, as well as the depth formula for the tensor product of modules and some results about freeness. Applying some of the facts presented in this work, we obtain, as one of the main corollaries, that for appropriate modules M, N over a hypersurface ring R satisfying the property that $M \otimes_R N$ is reflexive, the following formula (proved originally by C. Huneke and R. Wiegand) is valid:

$$\operatorname{depth}(M \otimes_R N) = \operatorname{depth}(M) + \operatorname{depth}(N) - \dim(R).$$

Keywords: Tensor product, depth, Tor rigidity.

Sumário

Notações

No decorrer deste trabalho:

- R denota um anel comutativo com identidade;
- $\dim(R)$ denota a dimensão de Krull do anel R;
- $\dim_k(L)$ denota a dimensão do k-espaço vetorial L;
- $\operatorname{depth}(M)$ denota a profundidade de um R-módulo M;
- $\operatorname{dh}(M)$ denota a dimensão homológica de um R-módulo M;
- $\operatorname{Ass}_R(M)$ denota o conjunto dos ideais primos associados do R-módulo M.
- $\operatorname{Supp}(M)$ denota o suporte do R-módulo M;
- $t(M)$ denota o submódulo de torção do R-módulo M;
- $\operatorname{rank}(M)$ denota o posto do R-módulo M;
- $(0 : M)$ denota o anulador, em R, do R-módulo M;
- $\operatorname{Hom}_R(N, M)$ denota o conjunto das aplicações R-lineares de N em M, sendo estes últimos R-módulos;
- $\operatorname{syz}^i_R(M)$ denota o i-ésimo módulo de syzígias do R-módulo M.

Introdução

Ao estudarmos a homologia ou cohomologia de um dado complexo é comum nos depararmos com o problema da rigidez, que nada mais é do que a etapa a partir da qual os módulos de homologia ou cohomologia deste complexo passam a ser todos nulos. Por exemplo, se R é um anel e $a \in R$ é um não-divisor-de-zero, então temos que $\mathrm{Tor}_i^R\left(N, \dfrac{R}{(a)}\right)$ é rígido a partir de $i = 2$, qualquer que seja o R-módulo N, isto é,

$$\mathrm{Tor}_i^R\left(N, \frac{R}{(a)}\right) = 0, \quad \forall i \geq 2.$$

Dessa forma, com base em um artigo de Huneke e Wiegand, estudamos questões relacionadas à rigidez do Tor, à liberdade de módulos e uma fórmula para o cálculo da profundidade do produto tensorial de módulos. O trabalho está dividido em 3 capítulos.

No *Capítulo* 1 são apresentados alguns resultados da Álgebra Comutativa clássica que tratam sobre módulos finitamente gerados, profundidade, dimensão de anéis e módulos, o submódulo de torção, anéis e módulos graduados e multiplicidade.

No *Capítulo* 2 são apresentados os resultados sobre Tor-rigidez e entre estes está o principal teorema do artigo sobre este tópico que afirma que se $R = \dfrac{S}{(f)}$ é uma hipersuperfície e M e N são R-módulos e ao menos um tem posto constante, então se $M \otimes_R N$ é reflexivo, vale que $\mathrm{Tor}_i^R(M, N) = 0$ para todo $i \geq 1$. Além destes, também apresentamos alguns resultados sobre o submódulo de torção e a sua relação com a liberdade de módulos.

O *Capítulo* 3 é dedicado à demonstração da fórmula da profundidade do produto tensorial de módulos. Unindo esta fórmula com o teorema da rigidez provado no capítulo anterior, apresentamos como corolário que se $M \otimes_R N$ é reflexivo, então conseguimos calcular a profundidade de $M \otimes_R N$ pela fórmula

$$\operatorname{depth}(M \otimes_R N) = \operatorname{depth}(M) + \operatorname{depth}(N) - \dim(R).$$

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo apresentaremos alguns conceitos da álgebra comutativa que serão amplamente utilizados em todo o decorrer dessa dissertação. Convecionamos que todos os anéis são comutativos com unidade.

1.1 Módulos finitamente gerados e dimensão de Krull

Definição 1. *Dado um anel R, dizemos que um R-módulo M é* ***finitamente gerado*** *se existe um conjunto finito $L = \{m_1, \ldots, m_n\} \subset M$ tal que $M = \sum_{i=1}^{n} Rm_i$. Chamamos L de um conjunto de geradores para M. Se tivermos que para cada $\jmath \in \{1, \ldots, n\}$,*

$$m_j \notin \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} Rm_i,$$

dizemos que L é um conjunto ***minimal*** *de geradores para M.*

Em geral, não é verdade que se $\{m_1, \ldots, m_r\}$ e $\{n_1, \ldots, n_t\}$ são conjuntos minimais de geradores de um módulo M então devemos ter $r = t$. Por exemplo, se k é um corpo, então os conjuntos $\{1\}$ e $\{x, 1 - x\}$ são conjuntos minimais de geradores para $k[x]$, mas não têm a mesma cardinalidade. Isto ocorre porque $k[x]$ não é um anel local. No contexto local esta patologia não ocorre, como podemos ver na seguinte proposição:

Proposição 1. *Sejam $(R, \mathfrak{m}, k)$ um anel local e M um R-módulo finitamente gerado. Se $m_1, \ldots, m_r \in M$ são tais que $\{\overline{m_1}, \ldots, \overline{m_r}\}$ é um conjunto minimal de geradores para o k-módulo $\dfrac{M}{\mathfrak{m}M}$, então $\{m_1, \ldots, m_r\}$ é um conjunto minimal de geradores para*

M.

Demonstração. Ver [1], Proposição 2.8. □

Com este resultado, temos que no contexto local a noção de número mínimo de geradores está bem-definida.

Definição 2. *Sejam $(R, \mathfrak{m}, k)$ um anel local e M um R-módulo finitamente gerado. A cardinalidade de um conjunto minimal de geradores para M será chamada de número mínimo de geradores de M e será denotada por $\mu_R(M) := \dim_k \left(\dfrac{M}{\mathfrak{m}M}\right)$.*

Definição 3. *Considere P um ideal primo em um anel R. Definimos a altura de P por:*

$$\mathrm{ht}(P) := \sup\{t; \exists\ P_0 \subsetneq P_1 \subsetneq \ldots \subsetneq P_t = P, \textit{com } P_i \in \mathrm{Spec}(R) \textit{ para todo } i\}.$$

Se I é um ideal próprio de R, definimos a altura de I por:

$$\mathrm{ht}(I) = \inf\{\mathrm{ht}(P); P \in \mathrm{Spec}(R) \textit{ e } I \subset P.\}$$

Definição 4. *A dimensão de Krull de um anel R é o número*

$$\dim(R) := \sup\{\mathrm{ht}(P); P \in \mathrm{Spec}(R)\}.$$

Perceba que quando R é um anel Noetheriano, temos que o R-módulo $\mathfrak{m}$ é finitamente gerado. Além disso, $\mu_R(\mathfrak{m}) = \dim_k \left(\dfrac{\mathfrak{m}}{\mathfrak{m}^2}\right)$ e chamaremos esse número de *dimensão de imersão.*

Definição 5. *Se $(R, \mathfrak{m}, k)$ é um anel Noetheriano local e tivermos que*

$$\mu_R(\mathfrak{m}) = \dim(R),$$

dizemos que R é um anel local regular. Além disso, se R é apenas Noetheriano, dizemos que R é regular quando R_P é um anel local regular para todo $P \in \mathrm{Spec}(R)$.

Teorema 1. *Se R é um anel local regular, então R é um domínio de fatoração única.*

Demonstração. Ver [9], Teorema 20.3. □

Definição 6. *Definimos a dimensão de um R-módulo M como sendo a dimensão de Krull do anel* $\dfrac{R}{(0:M)}$.

Definição 7. *Dizemos que um R-módulo M é R-livre de posto finito, quando existe um inteiro s tal que* $M \simeq R^{(s)} = \bigoplus_{i=1}^{s} R$.

Definição 8. *Sejam R um anel e M um R-módulo finitamente gerado. Dizemos que M tem posto constante quando existe um número natural r tal que para cada $P \in \mathrm{Ass}(R)$, temos que $M_P \simeq R_P^{(r)}$. Tal número r é chamado de posto de M e denotado por $\mathrm{rank}(M)$. Uma condicão mais fraca é a de que para cada $P \in \mathrm{Ass}(R)$, temos que M_P é R_P-livre. Nesse caso, dizemos que M é genericamente livre.*

Proposição 2. *Sejam R um anel Noetheriano e M um R-módulo finitamente gerado. Se $M \neq 0$, então $\mathrm{Ass}_R(M) \subseteq \mathrm{Supp}(M)$.*

Demonstração. Ver [9], Teorema 6.5. □

Proposição 3. *Sejam R um anel local e M um R-módulo de posto constante r. Se para algum ideal primo P tivermos que M_P é R_P-livre e $\dfrac{M}{PM}$ é $\dfrac{R}{P}$-livre, então M é livre.*

Demonstração. Comece notando que existe $Q \in \mathrm{Ass}(R)$ tal que $Q \subset P$, pois $P \in \mathrm{Supp}(R)$. Daí, temos que $S = (R \setminus P) \subset (R \setminus Q) = T$ são conjuntos multiplicativos de R. Daí,

$$\begin{aligned}(M_P)_Q &\simeq M_Q \\ &\simeq (R_Q)^{(r)}\end{aligned}$$

Concluímos, com isso, que M_P tem posto r, tendo em vista que ele já é livre. Então,

$\dfrac{M_P}{PM_P}$ é um espaço vetorial de dimensão r sobre o corpo $\dfrac{R_P}{PR_P}$. Disso segue que

$$\begin{array}{rcl}
\left(\dfrac{M}{PM}\right)_Q & = & \left(\left(\dfrac{M}{PM}\right)_P\right)_Q \\
 & \simeq & \left(\dfrac{M_P}{PM_P}\right)_Q \\
 & \simeq & \left(\left(\dfrac{R_P}{PR_P}\right)^{(r)}\right)_Q \\
 & \simeq & \left(\left(\left(\dfrac{R}{P}\right)_P\right)_Q\right)^{(r)} \\
 & \simeq & \left(\left(\dfrac{R}{P}\right)_Q\right)^{(r)}.
\end{array}$$

Isto é, $\dfrac{M}{PM}$ também tem posto r. Além disso,

$$\begin{array}{rcl}
\mu_R\left(\dfrac{M}{PM}\right) & = & \dim_k\left(\dfrac{M}{PM}\otimes_R\dfrac{R}{\mathfrak{m}}\right) \\
 & = & \dim_k\left(M\otimes_R\left(\dfrac{R}{P}\otimes_R\dfrac{R}{\mathfrak{m}}\right)\right) \\
 & = & \dim_k\left(M\otimes_R\left(\dfrac{R}{P+\mathfrak{m}}\right)\right) \\
 & \overset{P\subseteq\mathfrak{m}}{=} & \dim_k\left(M\otimes_R\left(\dfrac{R}{\mathfrak{m}}\right)\right) \\
 & = & \mu_R(M).
\end{array}$$

Por outro lado, temos:

$$\begin{array}{rcl}
\mu_R\left(\dfrac{M}{PM}\right) & = & \dim_k\left(\left(\dfrac{R}{P}\right)^{(r)}\otimes_R\dfrac{R}{\mathfrak{m}}\right) \\
 & = & \dim_k\left(\left(\dfrac{R}{P}\otimes_R\dfrac{R}{\mathfrak{m}}\right)^{(r)}\right) \\
 & = & \dim_k\left(\left(\dfrac{R}{\mathfrak{m}}\right)^{(r)}\right) \\
 & = & r.
\end{array}$$

Como M_Q é R_Q-livre de posto r para todo $Q\in\mathrm{Ass}(R)$, temos que $0=(\mathrm{syz}^1_R(M))_Q$.

Daí, $\mathrm{Ass}_R(\mathrm{Hom}_R(\mathrm{syz}^1_R(M), R)) = \mathrm{Supp}(\mathrm{syz}^1_R(M)) \cap \mathrm{Ass}(R) = \emptyset$. Portanto,

$$\mathrm{Hom}_R(\mathrm{syz}^1_R(M), R) = 0.$$

Como $\mathrm{syz}^1_R(M)$ é livre de torção, segue do Lema 4 que $\mathrm{syz}^1_R(M) = 0$. Com isso, M é livre e tem posto r. □

1.2 Sequências exatas e redução de ideais

Definição 9. *Sejam R um anel e $0 \to N \overset{\varphi}{\to} M \overset{\psi}{\to} T \to 0$ uma sequência exata de R-módulos. Dizemos que tal sequência cinde quando existe uma aplicação R-linear $\phi : T \to M$ tal que $\psi \circ \phi = \mathrm{Id}_T$. A aplicação ϕ é chamada de cisão.*

Observação 1. *Na definição anterior, se o R-módulo T é livre, então a sequência exata cinde quaisquer que sejam os módulos M e N. Com efeito, basta definirmos a aplicação ϕ como sendo a aplicação que leva cada elemento da base de T na sua imagem inversa. Note também que se a sequência exata cinde, então $M \simeq N \oplus T$.*

Definição 10. *Sejam R um anel e $J \subset I \subset R$ ideais. Dizemos que J é uma redução de I se $JI^{n-1} = I^n$ para algum $n \in \mathbb{N}$.*

Lema 1. *Se $(R, \mathfrak{m}, k)$ é um anel local de dimensão 1 e k é infinito, então existe $x \in \mathfrak{m}$ tal que (x) é uma redução de $\mathfrak{m}$.*

Demonstração. Ver [3], Exercício 4.6.15. □

Definição 11. *Dizemos que um ideal $J \subset R$ é primário quando o conjunto $\mathrm{Ass}_R\left(\dfrac{R}{J}\right)$ é unitário. Se especificarmos o elemento $P \in \mathrm{Ass}_R\left(\dfrac{R}{J}\right)$, dizemos que J é P-primário.*

Observação 2. *Note que se $\sqrt{J} = P$ e P é maximal, então J é P-primário.*

1.3 Sequências regulares e profundidade

Definição 12. *Seja M um R-módulo. Um elemento $x \in R$ é chamado de elemento M-regular, quando x é um não-divisor-de-zero de M, isto é, se $m \in M$ e $xm = 0$, então $m = 0$.*

Definição 13. *Dizemos que uma sequência* $\boldsymbol{x} = x_1, x_2, \ldots, x_n$ *de elementos de* R *é uma sequência* M*-regular, ou uma* M*-sequência, quando*

1. $\dfrac{M}{(\boldsymbol{x})M} \neq 0$;

2. x_1 *é* M*-regular e* x_i *é um elemento* $\dfrac{M}{(x_1, \ldots, x_{i-1})M}$*-regular, para* $i = 2, \ldots, n$.

Definição 14. *Dados um ideal* I *em um anel* R *e um* R*-módulo* M *finitamente gerado satisfazendo* $IM \neq M$. *Dizemos que uma sequência* M*-regular* $\boldsymbol{x} = x_1, \ldots, x_n$ *de elementos de* I *é uma* M*-sequência maximal em* I *quando a sequência* $\boldsymbol{x}$*'* $= x_1, \ldots, x_n, y$ *não é uma sequência* M*-regular, qualquer que seja o elemento* $y \in I$.

Observação 3. *Se* R *é um anel Noetheriano, então toda sequência* M*-regular pode ser completada para que se torne maximal.*

Lema 2. *Sejam* R *um anel,* M *e* N R*-módulos finitamente gerados e* $I = (0 : N) \subset R$. *Então são válidas as seguintes afirmações:*

1. *Se existe* x *elemento* M*-regular tal que* $x \in I$, *então* $\mathrm{Hom}_R(N, M) = 0$.

2. *Reciprocamente, se* R *é Noetheriano e* $\mathrm{Hom}_R(N, M) = 0$, *então existe* x *elemento* M*-regular tal que* $x \in I$.

Demonstração. Ver [3], Proposição 1.2.3. □

Teorema 2 (Rees)**.** *Sejam* R *um anel Noetheriano,* M *um* R*-módulo finitamente gerado e* I *um ideal de* R *tal que* $IM \neq M$. *Então todas as sequências* M*-regulares maximais em* I *têm o mesmo comprimento, que é dado por:*

$$n = \min \left\{ i; \mathrm{Ext}_R^i \left(\frac{R}{I}, M \right) \neq 0 \right\}.$$

Demonstração. Ver [3], Teorema 1.2.5. □

Definição 15. *Sejam* $(R, \mathfrak{m}, k)$ *um Noetheriano local e* M *um* R*-módulo não-nulo finitamente gerado. Definimos a profundidade de* M *como sendo o comprimento das sequências* M*-regulares maximais em* $\mathfrak{m}$. *Tal número será denotado por* $\mathrm{depth}(M)$ *e, com base no teorema anterior, é dado por:*

$$\mathrm{depth}(M) = \min \left\{ i; \mathrm{Ext}_R^i (k, M) \neq 0 \right\}.$$

Se $M = 0$*, convencionamos que* $\operatorname{depth}(M) = +\infty$.

Observação 4. *Se* R *é um anel Noetheriano local e* M *é um* R*-módulo não-nulo e finitamente gerado, então pode-se provar que* $\operatorname{depth}(M) \leq \dim(M)$.

Definição 16. *Seja* R *um anel Noetheriano local. Dizemos que um* R*-módulo finitamente gerado* $M \neq 0$ *é um* R*-módulo de Cohen-Macaulay quando tivermos a igualdade* $\operatorname{depth}(M) = \dim(M)$*. Se o anel* R *é um* R*-módulo Cohen-Macaulay, então dizemos que* R *é um anel de Cohen-Macaulay. Quando* M *é um módulo de Cohen-Macaulay e vale que* $\dim(M) = \dim(R)$*, dizemos que* M *é um módulo Cohen-Macaulay maximal.*

O resultado a seguir mostra o comportamento da profundidade em sequências exatas curtas.

Lema 3 (Lema da profundidade)**.** *Sejam* R *um anel Noetheriano local e*

$$0 \to M_1 \to M_2 \to M_3 \to 0$$

uma sequência exata curta de R*-módulos não-nulos finitamente gerados. Então:*

1. $\operatorname{depth}(M_2) > \operatorname{depth}(M_3) \ \Rightarrow \operatorname{depth}(M_1) = \operatorname{depth}(M_3) + 1$.

2. $\operatorname{depth}(M_2) < \operatorname{depth}(M_3) \ \Rightarrow \operatorname{depth}(M_1) = \operatorname{depth}(M_2)$.

3. $\operatorname{depth}(M_2) = \operatorname{depth}(M_3) \ \Rightarrow \operatorname{depth}(M_1) \geq \operatorname{depth}(M_2)$.

Demonstração. Ver [[3], Proposição 1.2.9] □

Corolário 1. *Sejam* R *um anel Noetheriano local e* $M_1, M_2, \ldots, M_r$ R*-módulos não-nulos finitamente gerados. Então:*

$$\operatorname{depth}\left(\bigoplus_{i=1}^{r} M_i\right) = \min\{\operatorname{depth}(M_1),\ \ldots, \operatorname{depth}(M_r)\}$$

Demonstração. Por indução, podemos supor $r = 2$. Então sejam M e N R-módulos não nulos e finitamente gerados. Suponha, sem perda de generalidade, que

$$\operatorname{depth}(M) \leq \operatorname{depth}(N).$$

Queremos provar que $\operatorname{depth}(M \oplus N) = \operatorname{depth}(M)$. Perceba que

$$0 \to M \xrightarrow{\alpha} M \oplus N \xrightarrow{\beta} N \to 0$$

é uma sequência exata curta, sendo $\alpha(m) = (m, 0)$ e $\beta(m, n) = n$. Afirmamos que $\operatorname{depth}(M \oplus N) \leq \operatorname{depth}(N)$. De fato, se $\operatorname{depth}(M \oplus N) > \operatorname{depth}(N)$, o lema anterior nos fornece que $\operatorname{depth}(M) = \operatorname{depth}(N) + 1 > \operatorname{depth}(N)$, o que é um absurdo porque $\operatorname{depth}(M) \leq \operatorname{depth}(N)$. Daí, se $\operatorname{depth}(M \oplus N) < \operatorname{depth}(N)$, aplicamos mais uma vez o lema e segue que $\operatorname{depth}(M) = \operatorname{depth}(M \oplus N)$, como queríamos. Por outro lado, se $\operatorname{depth}(M \oplus N) = \operatorname{depth}(N)$, temos que $\operatorname{depth}(M) \geq \operatorname{depth}(M \oplus N) = \operatorname{depth}(N)$. Como já tínhamos que $\operatorname{depth}(M) \leq \operatorname{depth}(N)$, segue que $\operatorname{depth}(M) = \operatorname{depth}(N) = \operatorname{depth}(M \oplus N)$. □

Corolário 2. *Se R é um anel Noetheriano e F é um R-módulo livre de posto finito, então*

$$\operatorname{depth}(F) = \operatorname{depth}(R).$$

Em particular, se R é um anel de Cohen-Macaulay, então F é um R-módulo Cohen-Macaulay maximal.

Demonstração. Consequência imediata do Corolário 1. □

Definição 17. *Dizemos que um anel Noetheriano R é uma hipersuperfície quando $R = \dfrac{S}{(f)}$, onde S é um anel noetheriano local regular e f é um elemento não-nulo no ideal maximal de S. Mais geralmente, dizemos que R é uma interseção completa quando $R = \dfrac{S}{(f_1, \ldots, f_r)}$, sendo S um anel Noetheriano local regular e $f_1, \ldots, f_r$ uma sequência R-regular no ideal maximal de S.*

1.4 Torção

Definição 18. *Se R é um anel Noetheriano e M é um R-módulo, definimos o submódulo de torção de M como sendo o núcleo da aplicação natural $M \to K \otimes_R M$, onde $K = S^{-1}R$ e $S = \{$não-divisores-de-zero de $R\}$. Isto é,*

$$t(M) = \operatorname{Ker}(M \xrightarrow{\alpha} K \otimes_R M).$$

Definição 19. *Sob as hipóteses da definição anterior, dizemos que M é um R-módulo de torção quando $t(M) = M$ e dizemos que M é livre de torção quando $t(M) = 0$*

Observação 5. *Qualquer que seja o R-módulo M, temos que o módulo $M' := \dfrac{M}{t(M)}$ é livre de torção.*

Lema 4. *Sejam R um anel Noetheriano e M um R-módulo finitamente gerado. Se M é livre de torção e $\mathrm{Hom}_R(M, R) = 0$, então $M = 0$.*

Demonstração. Pelo item (2) do Lema 2, temos que existe $f \in (0 : M)$ elemento R-regular. Daí, f é um não-divisor-de-zero de R. Portando, é invertível em K. Se $M \neq 0$, temos que existe $0 \neq m \in M$. Afirmamos que $m \in t(M)$. De fato, $\alpha(m) = 1 \otimes m = (f * f^{-1}) \otimes m = f^{-1} \otimes (fm) = f^{-1} \otimes 0 = 0$. Absurdo, tendo em vista que M é livre de torção. Logo, $M = 0$. □

Observação 6. *Note que no lema anterior, se $M \neq 0$, provamos que $M \subset t(M)$. Como $t(M)$ é sempre submódulo de M, temos que $t(M) = M$, ou seja, M é de torção. Em outras palavras, se $M \neq 0$ e $\mathrm{Hom}_R(M, R) = 0$, então M é de torção.*

Lema 5. *Se R é um anel Noetheriano e M, N são R-módulos finitamente gerados. Então,*

$$\mathrm{Ass}_R(\mathrm{Hom}_R(M, N)) = \mathrm{Supp}(M) \cap \mathrm{Ass}_R(N).$$

Demonstração. Ver [4], Exercício 3.3, p. 109. □

Sabemos que se M é um R-módulo, então existe uma aplicação R-linear natural

$$\omega_M : M \to M^{**},$$

onde M^{**} é o bidual do módulo M, explicitamente: $M^{**} = \mathrm{Hom}_R(\mathrm{Hom}_R(M, R), R)$.

Definição 20. *Dizemos que um R-módulo M é reflexivo quando a aplicação natural ω_M é um isomorfismo. Ou seja, $M \overset{\omega_M}{\simeq} M^{**}$.*

Definição 21. *Dizemos que um R-módulo M satistaz a n-ésima condição de Serre (S_n) quando para todo $P \in \mathrm{Spec}(R)$,*

$$\mathrm{depth}(M_P) \geq \min\{n, \dim(R_P)\}.$$

Observação 7. *Quando R é um anel de Cohen-Macaulay, temos que M satisfaz S_1 se, e somente se, M é livre torção. Quando R é uma interseção completa, M satisfaz S_2 se, e somente se, M é reflexivo.*

1.5 Filtrações, Anéis graduados e multiplicidade

Sejam R um anel e M um R-módulo. Uma filtração para M é uma família infinita $(M_n)_{n=0}^{\infty}$ de submódulos de M tais que

$$M = M_0 \supseteq M_1 \supseteq M_2 \supseteq \ldots \supseteq M_n \supseteq \ldots.$$

Definição 22. *Sejam $I \subset R$ um ideal e M um R-módulo. Considere*

$$M = M_0 \supseteq M_1 \supseteq M_2 \supseteq \ldots \supseteq M_n \supseteq \ldots$$

uma filtração para M. Dizemos que tal filtração é uma I-filtração se $IM_n \subseteq M_{n+1}$ para todo n. Além disso, dizemos que uma I-filtração é estável se existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $IM_n = M_{n+1}$ para todo $n \geq n_0$.

Exemplo 1. *Se M é um R-módulo e I é um ideal de R então $M_n = I^n M$ é uma I-filtração estável para M.*

Observação 8. *No caso em que $(R, \mathfrak{m})$ é um anel noetheriano local, a filtração de R dada por $M_n = \mathfrak{m}^n$ é chamada filtração $\mathfrak{m}$-ádica.*

Definição 23. *Um anel graduado (a rigor, $\mathbb{N}$-graduado) é um anel R e uma família $(R_n)_{n=0}^{\infty}$ de subgrupos de R satisfazendo:*

1. $R = \displaystyle\bigoplus_{n=0}^{\infty} R_n$
2. $R_n R_m \subset R_{n+m}$, *para todos $m, n \in \mathbb{N}$.*

Observação 9. *Na definição anterior, o item (2) implica que R_0 é subanel de R e R_n é um R_0-módulo para todo n.*

Definição 24. *Se R é um anel graduado, então o conjunto $R_+ = \displaystyle\bigoplus_{n=1}^{\infty} R_n$ é um ideal de R, chamado ideal irrelevante.*

Definição 25. *Seja R um anel graduado. Um R-módulo graduado é um R-módulo M juntamente com uma família $(M_n)_{n\geq 0}$ de subgrupos aditivos satisfazendo:*

1. $M = \bigoplus_{n=0}^{\infty} M_n$

2. $R_n M_m \subset M_{n+m}$, *para todos* $m, n \in \mathbb{N}$.

Definição 26. *Sejam R um anel e $I \subset R$ um ideal. Definimos o anel graduado associado de R com relação a I como sendo*

$$G_I(R) := \bigoplus_{n\geq 0} \frac{I^n}{I^{n+1}},$$

sendo $I^0 = R$. Note que, de fato, $G_I(R)$ é um anel graduado se definirmos a multiplicação da seguinte maneira: dado $x_n \in I^n$, seja $\overline{x_n}$ a imagem de x_n em $\frac{I^n}{I^{n+1}}$. Defina $\overline{x_n} \cdot \overline{x_m}$ como sendo a imagem de $x_n x_m$ em $\frac{I^{n+m}}{I^{n+m+1}}$.

De maneira completamente análoga, podemos definir o módulo graduado associado a I:

Definição 27. *Sejam R um anel, M um R-módulo e $(M_n)_{n\geq 0}$ uma I-filtração. Definimos o módulo graduado associado a I por:*

$$G_I(M) := \bigoplus_{n\geq 0} \frac{M_n}{M_{n+1}}.$$

Observação 10. *Perceba que $G_I(M)$ é um $G_I(R)$-módulo, tendo em vista que $I^m M_n \subset M_{m+n}$ para todos m, n.*

Teorema 3. *Seja R um anel graduado. São equivalentes:*

1. *R é Noetheriano*

2. *R_0 é Noetheriano e R é uma R_0-álgebra finitamente gerada.*

Demonstração. Ver [9], Teorema 13.1. □

Definição 28. *Sejam R um anel e M um R-módulo. Dizemos que M é simples se M não admite submódulos não triviais.*

Definição 29. *Sejam R um anel e M um R-módulo. Uma cadeia de submódulos*

$$0 = M_r \subset M_{r-1} \subset \ldots \subset M_1 \subset M_0 = M$$

é chamada de série de composição para M se os quocientes $\dfrac{M_n}{M_{n+1}}$ são R-módulos simples.

Definição 30. *Seja R um anel. Se um R-módulo M admite uma série de composição, então o comprimento dessa série é um invariante numérico de M, isto é, não depende da escolha da série de composição e é chamado de comprimento de M. Notação: $\ell_R(M)$.*

Definição 31. *Dizemos que um R-módulo M tem comprimento finito se M admite uma série de composição.*

Proposição 4. *Sejam R um anel Noetheriano e M um R-módulo não-nulo finitamente gerado. Então M tem comprimento finito se, e somente se,* $\operatorname{Supp}(M)$ *consiste apenas de ideais maximais.*

Demonstração. Ver [4], Corolário 2.17. $\square$

Definição 32. *Sejam $R = \bigoplus_{n\geq 0} R_n$ um anel graduado Noetheriano, com R_0 Artiniano, e $M = \bigoplus_{n\geq 0} M_n$ um R-módulo graduado finitamente gerado. Definimos a série de Poincaré de M por:*

$$P(M,t) := \sum_{n=0}^{\infty} \ell_R(M_n)t^n \in \mathbb{Z}[[t]],$$

onde $\mathbb{Z}[[t]]$ é o anel das séries formais com coeficientes inteiros.

Como R é anel graduado e Noetheriano, segue do Teorema 3 que R é finitamente gerado como R_0-álgebra. Suponha que R seja gerado por $\{r_1, \ldots, r_n\}$, onde r_i tem grau k_i. Temos o seguinte resultado, devido a Hilbert e Serre:

Teorema 4. *$P(M,t)$ é uma função racional. Explicitamente, podemos escrever:*

$$P(M,t) = \frac{f(t)}{\prod_{i=1}^{n}(1-t^{k_i})},$$

sendo f um polinômio com coeficientes inteiros.

Observação 11. *Dizemos que uma função racional* H *tem um pólo de ordem* n *em* $t = a$ *se* $H(t) = \dfrac{1}{(t-a)^n} \cdot \dfrac{f(t)}{g(t)}$ *com* $f(a) \neq 0$ *e* $g(a) \neq 0$.

Definição 33. *A ordem do pólo da função* $P(M,t)$ *em* $t = 1$ *será denotado por* $d = d(M)$.

Em particular, se R é gerado por elementos de grau 1, temos o seguinte corolário:

Corolário 3. *Se* $k_i = 1$ *para todo* $i \in \{1, \ldots, n\}$, *então para* n *suficientemente grande* $\ell_R(M_n)$ *é um polinômio de coeficientes racionais em* n *e tem grau* $d - 1$.

Definição 34. *O polinômio* $P(x) = P_M(x) \in \mathbb{Q}[x]$ *tal que, para* n *suficientemente grande,* $\ell_R(M_n) = P(n)$ *é chamado de Polinômio de Hilbert de* M. *Explicitamente:*

$$P_M(x) = \sum_{i=0}^{d-1} (-1)^{d-1-i} e_{d-1-i} \binom{x+i}{i}.$$

Definição 35. *Se* M *é um* R*-módulo graduado finitamente gerado. A multiplicidade de* M *será definida por:*

$$e(M) = \begin{cases} e_0, & se\ \dim(M) > 0 \\ \ell_R(M), & se\ \dim(M) = 0 \end{cases}$$

Definimos, portanto, multiplicidade para o caso graduado. Para o caso não graduado, focamos no contexto Noetheriano local e temos:

Definição 36. *Se* $(R, \mathfrak{m})$ *é um anel Noetheriano local e* M *é um* R*-módulo finitamente gerado, definimos a multiplicidade de* M *com relação a um ideal* $I \subset R$ *recorrendo à definição anterior por:*

$$e(I, M) = e(G_I(M)).$$

Em particular, a multiplicidade de M *com relação a* $\mathfrak{m}$ *será chamada de multiplicidade de* M *e temos:*

$$e(M) := e(\mathfrak{m}, M) = e(G_{\mathfrak{m}}(M)).$$

Lema 6. *Seja* $(R, \mathfrak{m})$ *um anel Noetheriano local,* Q *é um ideal* $\mathfrak{m}$*-primário e* J *é uma redução de* Q. *Então* J *também é* $\mathfrak{m}$*-primário e para todo* R*-módulo* M *finitamente gerado tem-se que*

$$e(J, M) = e(Q, M).$$

Demonstração. Ver [9], Teorema 14.13. □

Definição 37. *Seja $(R, \mathfrak{m})$ um anel local d-dimensional. Um conjunto $\{x_1, \ldots, x_d\}$ é dito um sistema de parâmetros de R se o ideal $(x_1, \ldots, x_d)$ é $\mathfrak{m}$-primário.*

Teorema 5. *Sejam $(R, \mathfrak{m})$ um anel Noetheriano local d-dimensional, $x_1, \ldots, x_d$ um sistema de parâmetros de R e $Q = (x_1, \ldots, x_d)$. Então,*

$$e(Q, R) \leq \ell\left(\frac{R}{Q}\right).$$

Demonstração. Ver [9], Teorema 14.10. □

Capítulo 2

Sobre Tor-rigidez

O clássico teorema sobre a rigidez do Tor, devido a Lichtenbaum [[8], Corolário 1.], diz que se R é um anel regular local e M e N são R-módulos finitamente gerados, e se $\mathrm{Tor}_j^R(M,N) = 0$ para algum $j \geq 0$, então $\mathrm{Tor}_i^R(M,N) = 0$ para todo $i \geq j$. Apresentaremos agora alguns resultados que culminarão numa generalização deste teorema, provado por Huneke e Wiegand e batizado como *Segundo teorema da rigidez.*

2.1 O Lema dos Tor's e alguns resultados sobre torção e rigidez

Lema 7 (Lema dos Tor's)**.** *Seja $(S, \mathfrak{m}_S)$ um anel local e seja f um não-divisor de zero em $\mathfrak{m}_S$. Sejam M e N módulos sobre o anel $R := \dfrac{S}{(f)}$. Temos a seguinte sequência exata:*

$$
\begin{array}{ccccccc}
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \\
\mathrm{Tor}_j^R(M,N) & \longrightarrow & \mathrm{Tor}_{j+1}^S(M,N) & \longrightarrow & \mathrm{Tor}_{j+1}^R(M,N) & \longrightarrow & \\
\mathrm{Tor}_{j-1}^R(M,N) & \longrightarrow & \mathrm{Tor}_j^S(M,N) & \longrightarrow & \mathrm{Tor}_j^R(M,N) & \longrightarrow & \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \\
\mathrm{Tor}_1^R(M,N) & \longrightarrow & \mathrm{Tor}_2^S(M,N) & \longrightarrow & \mathrm{Tor}_2^R(M,N) & \longrightarrow & \\
\mathrm{Tor}_0^S(M,N) & \longrightarrow & \mathrm{Tor}_1^S(M,N) & \longrightarrow & \mathrm{Tor}_1^R(M,N) & \longrightarrow & 0.
\end{array}
$$

(O módulo inferior esquerdo ficaria melhor se fosse escrito como $\mathrm{Tor}_0^R(M,N)$, mas nas aplicações, ele funciona melhor da forma como está escrito.)

Demonstração. Ver [6], Lema 2.1. □

Proposição 5. *Sejam M e N módulos sobre um anel local R. Assuma que $M \otimes_R N$ é livre de torção. Sejam $\overline{M} = \dfrac{M}{t(M)}$ e $\overline{N} = \dfrac{N}{t(N)}$. Então $\overline{M} \otimes_R \overline{N}$ é livre de torção. Se $\overline{M}$ é livre e $N \neq 0$, então M é livre.*

Demonstração. Considere a sequência exata estrutural:

$$0 \to t(M) \xrightarrow{i} M \longrightarrow \overline{M} \longrightarrow 0. \tag{2.1}$$

Tensorizando-a com o N, obtemos a seguinte sequência exata:

$$t(M) \otimes_R N \xrightarrow{i\otimes \mathrm{Id}} M \otimes_R N \xrightarrow{\beta} \overline{M} \otimes_R N \longrightarrow 0. \tag{2.2}$$

Note que a imagem de $i \otimes \mathrm{Id}$ é de torção. Como $M \otimes_R N$ é livre de torção, temos que $i \otimes \mathrm{Id} \equiv 0$. Segue que β é um isomorfismo, ou seja,

$$M \otimes_R N \simeq \overline{M} \otimes_R N. \tag{2.3}$$

Por outro lado, podemos tensorizar a sequência exata

$$0 \to t(N) \to N \to \overline{N} \to 0 \tag{2.4}$$

com $\overline{M}$ e, com isso, obtemos que $N \otimes_R \overline{M} \simeq \overline{N} \otimes_R \overline{M}$. Daí,

$$\overline{N} \otimes_R \overline{M} \simeq \overline{M} \otimes_R \overline{N} \simeq M \otimes_R N,$$

portanto $\overline{M} \otimes_R \overline{N}$ é livre de torção. Se $\overline{M}$ é livre, então a sequência exata de (2.1) cinde, logo $M \simeq t(M) \oplus \overline{M}$.

Utilizando as propriedades do produto tensorial, temos:

$$\begin{aligned} M \otimes_R N &\simeq (t(M) \oplus \overline{M}) \otimes_R N \\ &\simeq (t(M) \otimes_R N) \oplus (\overline{M} \otimes_R N) \\ &\simeq (t(M) \otimes_R N) \oplus (M \otimes_R N). \end{aligned}$$

Logo, $t(M) \otimes_R N = 0$. Como R é local e $N \neq 0$, obtemos $t(M) = 0$, ou seja, $M = \overline{M}$. Portanto, M é livre. □

Proposição 6. *Seja R um anel Noetheriano e sejam $M \subseteq F$ e $N \subseteq G$, onde F e G são livres. Suponha que M ou N é genericamente livre. Então*

$$t(M \otimes_R N) \simeq \operatorname{Tor}_2^R \left(\frac{F}{M}, \frac{G}{N} \right).$$

Demonstração. Sem perda de generalidade, podemos assumir que M é genericamente livre. A sequência exata

$$0 \to N \to G \to \frac{G}{N} \to 0$$

e o R-módulo M induzem, via sequência exata longa do Tor, a seguinte sequência exata:

$$0 \to \operatorname{Tor}_1^R \left(M, \frac{G}{N} \right) \to M \otimes_R N \to M \otimes_R G. \tag{2.5}$$

Perceba que $M \otimes_R G$ é livre de torção, pois

$$M \otimes_R G \simeq M \otimes_R R^{(g)} \simeq (M \otimes_R R)^{(g)} \simeq M^{(g)}$$

e M é livre de torção. Como M é genericamente livre, temos que M_P é R_P-livre para todo $P \in \operatorname{Ass}(R)$. Daí, para todo $P \in \operatorname{Ass}(R)$, temos que

$$\left(\operatorname{Tor}_1^R\left(M, \frac{G}{N}\right)\right)_P = \operatorname{Tor}_1^{R_P}\left(M_P, \left(\frac{G}{N}\right)_P\right) = 0.$$

Portanto, $\operatorname{Supp}\left(\operatorname{Tor}_1^R\left(M, \frac{G}{N}\right)\right) \cap \operatorname{Ass}(R) = \emptyset$. Pelo Lema 5, temos que

$$\operatorname{Hom}_R\left(\operatorname{Tor}_1^R\left(M, \frac{G}{N}\right), R\right) = 0.$$

Segue da Observação 6 que $\operatorname{Tor}_1^R\left(M, \frac{G}{N}\right)$ é de torção. Daí,

$$t\left(\operatorname{Tor}_1^R\left(M, \frac{G}{N}\right)\right) = \operatorname{Tor}_1^R\left(M, \frac{G}{N}\right).$$

A sequência exata (2.5) induz a sequência exata:

$$0 \to t\left(\operatorname{Tor}_1^R\left(M, \frac{G}{N}\right)\right) \to t(M \otimes_R N) \to t(M \otimes_R G).$$

Como $t(M \otimes_R G) = 0$, temos que $\operatorname{Tor}_1^R\left(M, \frac{G}{N}\right) = t\left(\operatorname{Tor}_1^R\left(M, \frac{G}{N}\right)\right) \simeq t(M \otimes_R N)$. Por fim, a sequência exata

$$0 \to M \to F \to \frac{F}{M} \to 0$$

e o R-módulo $\frac{G}{N}$ induzem uma sequência exata

$$\ldots \to 0 \to \operatorname{Tor}_2^R\left(\frac{F}{M}, \frac{G}{N}\right) \to \operatorname{Tor}_1^R\left(M, \frac{G}{N}\right) \to 0 \to \ldots$$

E isto, por sua vez, mostra que

$$\begin{aligned} \operatorname{Tor}_2^R\left(\frac{F}{M}, \frac{G}{N}\right) &\simeq \operatorname{Tor}_1^R\left(M, \frac{G}{N}\right) \\ &\simeq t(M \otimes_R N). \end{aligned}$$

$\square$

Seja $(S, \mathfrak{m}_S)$ um anel regular local e seja $R = \dfrac{S}{(f)}$, onde $f \in \mathfrak{m}_S$ é um não-divisor-de-zero. Fixados M e N R-módulos. Como M e N têm estrutura natural de S-módulos, os comprimentos de $\operatorname{Tor}_i^R(M,N)$ e $\operatorname{Tor}_i^S(M,N)$ são os mesmos, porque os R-submódulos de M e N estão em bijeção com os S-submódulos de M e N. Além disso, $\operatorname{Tor}_0^R(M,N) \simeq \operatorname{Tor}_0^S(M,N)$. Se $\ell_S(\operatorname{Tor}_0^S(M,N)) < +\infty$, então

$$\operatorname{Supp}(M) \cap \operatorname{Supp}(N) = \{\mathfrak{m}_S\}.$$

Segue, portanto, que todos os comprimentos $\ell_S(\operatorname{Tor}_i^S(M,N))$ e $\ell_R(\operatorname{Tor}_i^R(M,N))$ são finitos. Na verdade, como S é um anel local regular, então todo S-módulo tem dimensão homológica finita. Em particular, temos que para i suficientemente grande

$$\operatorname{Tor}_i^S(M,N) = 0.$$

Com isso, faz sentido definirmos a característica de Euler de um par de módulos M e N:

$$\chi^S = \chi^S(M,N) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \ell_S(\operatorname{Tor}_i^S(M,N)).$$

Proposição 7. *Seja $R = \dfrac{S}{(f)}$ uma hipersuperfície de dimensão d, onde $(S, \mathfrak{m}_S, k)$ é um anel local regular $(d+1)$-dimensional. Sejam M e N R-módulos. Assuma que N tem comprimento finito. Sejam $i \geq j \geq d+1$. Então $\operatorname{Tor}_j^R(M,N)$ e $\operatorname{Tor}_i^R(M,N)$ têm o mesmo comprimento.*

Demonstração. Seja $\beta_i = \mu_S(\operatorname{syz}_S^i(M))$ o i-ésimo número de Betti de M. Considere

$$\mathbb{F} : 0 \to F_d \xrightarrow{\alpha_d} F_{d-1} \xrightarrow{\alpha_{d-1}} \ldots \xrightarrow{\alpha_2} F_1 \xrightarrow{\alpha_1} F_0 \xrightarrow{\alpha_0} M \to 0 \tag{2.6}$$

uma resolução livre minimal de M, ou seja, cada F_i é S-livre para $0 \leq i \leq d$, $\operatorname{rank}(F_i) = \beta_i$ e $\alpha_i(F_i) \subset \mathfrak{m}_S F_{i-1}$, para $1 \leq i \leq d$. Isto é equivalente às aplicações

$$\overline{\alpha_i} = \alpha_i \otimes \operatorname{Id}_k : F_i \otimes_S k \to F_{i-1} \otimes_S k$$

serem identicamente nulas. Como S é um anel regular, temos que S é um domínio de integridade. Dessa forma, $\operatorname{Ass}(R) = \{(0)\}$. Como $fM = 0$, temos que $(0 : M) \cap (R \setminus \{0\}) \neq \emptyset$. E isso, por sua vez, implica que $M_{(0)} = 0$. Portanto, M tem posto nulo quando visto como S-módulo. Portanto, segue de [[3], Corolário 1.4.6] que

$$\sum_{i=0}^{d}(-1)^i\beta_i = 0.$$

Ao tensorizarmos (2.6) com o corpo quociente de S, obtemos o complexo

$$\mathbb{F}\otimes k : F_d \otimes_S k \xrightarrow{\overline{\alpha_d}} F_{d-1} \otimes_S k \xrightarrow{\overline{\alpha_{d-1}}} \ldots \xrightarrow{\overline{\alpha_2}} F_1 \otimes_S k \xrightarrow{\overline{\alpha_1}} F_0 \otimes_S k \xrightarrow{\overline{\alpha_0}} M \otimes_S k \to 0. \quad (2.7)$$

Note que

$$\begin{aligned} \mathrm{Tor}_i^S(M,k) &= \frac{\mathrm{Ker}(\overline{\alpha_i})}{\mathrm{Im}(\overline{\alpha_{i+1}})} \\ &= \frac{F_i \otimes_S k}{0} \\ &\simeq k^{\mathrm{rank}(F_i)}. \end{aligned}$$

Portanto, $\beta_i = \dim_k(\mathrm{Tor}_i^S(M,k))$. E isso mostra que $\chi^S(M,k) = 0$.

Como N tem comprimento finito e $\chi^S(M,-)$ é aditiva ao longo de sequências exatas curtas, segue que $\chi^S(M,N) = 0$. De fato, considere

$$0 = N_r \subset N_{r-1} \subset \ldots \subset N_1 \subset N_0 = N$$

série de composição de N. Daí, $\dfrac{N_{i-1}}{N_i}$ é simples e, portanto, $\dfrac{N_{i-1}}{N_i} \simeq k$. Considere a sequência exata curta

$$0 \to N_1 \to N_0 = N \to \frac{N_0}{N_1} \simeq k \to 0.$$

Daí, $\chi^S(M,N) = \chi^S(M,k) + \chi^S(M,N_1)$. Considerando, agora, a sequência exata

$$0 \to N_2 \to N_1 \to \frac{N_1}{N_2} \simeq k \to 0.$$

Temos que $\chi^S(M,N_1) = \chi^S(M,k) + \chi^S(M,N_2)$. Procedendo de maneira análoga, veremos que

$$\chi^S(M,N) = r \cdot \chi^S(M,k) = 0.$$

Se observarmos a sequência exata dada no Lema 7, os fatos de que $j+1 > \dim(S)$

e S ser regular implicam que $\operatorname{Tor}_j^R(M,N) \simeq \operatorname{Tor}_{j+2}^R(M,N)$, e portanto têm o mesmo comprimento. Se provarmos que $\operatorname{Tor}_j^R(M,N)$ e $\operatorname{Tor}_{j+1}^R(M,N)$ têm o mesmo comprimento, então concluiremos a demonstração. Perceba que $\operatorname{Tor}_{j+1}^S(M,N) = 0$. Daí, obtemos a seguinte sequência exata

$$0 \to \operatorname{Tor}_{j+1}^R \to \operatorname{Tor}_{j-1}^R(M,N) \to \operatorname{Tor}_j^S(M,N) \to \operatorname{Tor}_j^R(M,N) \to \ldots \to$$

$$\to \operatorname{Tor}_0^S(M,N) \to \operatorname{Tor}_1^S(M,N) \to \operatorname{Tor}_1^R(M,N) \to 0.$$

Denote $t_i^R := \ell(\operatorname{Tor}_i^R(M,N))$ e $t_i^S := \ell(\operatorname{Tor}_i^S(M,N))$. Como a função comprimento é aditiva ao longo de sequências exatas curtas, obtemos que

$$t_1^R - t_1^S + t_0^S - t_2^R + t_2^S - t_1^R + \ldots + t_{j-1}^R - t_{j-1}^S + t_{j-2}^R - t_j^R + t_j^S - t_{j-1}^R + t_{j+1}^R = 0.$$

Tal soma pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{j-1}(t_i^R - t_i^R)}_{=0} + \underbrace{\chi^S(M,N)}_{=0} + t_{j+1}^R - t_j^R = 0.$$

Portanto, $t_{j+1}^R - t_j^R = 0$, isto é, $t_{j+1}^R = t_j^R$. □

Corolário 4. *Sejam $R = \dfrac{S}{(f)}$ uma hipersuperfície de dimensão d, onde $(S, \mathfrak{m}_S, k)$ é um anel local regular $(d+1)$-dimensional e M e N R-módulos. Assuma que N tem comprimento finito. Se $\operatorname{Tor}_j^R(M,N) = 0$ para algum $j \geq d+1$, então $\operatorname{Tor}_i^R(M,N) = 0$ para todo $i \geq j$.*

Demonstração. Pela proposição anterior, se $i \geq j$, então $\operatorname{Tor}_j^R(M,N)$ e $\operatorname{Tor}_i^R(M,N)$ têm o mesmo comprimento. Como $\operatorname{Tor}_j^R(M,N) = 0$, temos que $\operatorname{Tor}_i^R(M,N) = 0$. □

Suponha que R é uma hipersuperfície de dimensão d, ou seja, $R = \dfrac{S}{(f)}$, onde S é um anel local regular de dimensão $d+1$. Seja Z uma indeterminada e defina:

$$R^{\#} := \frac{S[[Z]]}{(f + Z^2)}$$

Perceba que podemos sobrejetar $R^{\#}$ em R matando $\overline{Z}$ (imagem de Z em $R^{\#}$). Dessa forma, se M é um R-módulo, então M também tem estrutura de $R^{\#}$-módulo e definimos

$$M^{\#} := \operatorname{syz}^1_{R^{\#}}(M).$$

Proposição 8. *Seja R uma hypersuperfície d-dimensional e seja M um R-módulo Cohen-Macaulay maximal sem somando livre. Então,*

1. $\dfrac{M^{\#}}{\overline{Z}M^{\#}} \simeq M \oplus \operatorname{syz}^1_R(M)$
2. *$M^{\#}$ é um $R^{\#}$-módulo Cohen-Macaulay maximal sem somando livre.*
3. *$M^{\#}$ tem posto constante.*

Demonstração. Ver [6], Proposição 3.5. □

Proposição 9. *Seja $(R, \mathfrak{m}, k)$ uma hipersuperfície d-dimensional e sejam M e N R-módulos não-nulos. Assuma que*

1. *Nem M nem N tem um somando livre,*
2. *$M \otimes_R N$ é um R-módulo Cohen-Macaulay maximal,*
3. *M tem posto constante, e*
4. $\operatorname{Tor}^R_j(M, N) = 0$*, para todo $j \geq 1$.*

Então M e N são R-módulos Cohen-Macaulay maximais e $M^{\#} \otimes_{R^{\#}} N^{\#}$ é um $R^{\#}$-módulo Cohen-Macaulay maximal.

Demonstração. Para provarmos que $M^{\#} \otimes_{R^{\#}} N^{\#}$ é Cohen-Macaulay maximal, usaremos a sequência exata longa dos Tor's descrita no Lema 7, com $S = R^{\#}$ e $f = \overline{Z}$. O final da sequência é dado por

$$\ldots \to \operatorname{Tor}^R_1(M, N) \to \operatorname{Tor}^{R^{\#}}_2(M, N) \to \operatorname{Tor}^R_2(M, N) \to$$

$$\to \operatorname{Tor}^R_0(M, N) \to \operatorname{Tor}^{R^{\#}}_1(M, N) \to \operatorname{Tor}^R_1(M, N) \to 0.$$

Usando a hipótese (4), temos que $\operatorname{Tor}^{R^{\#}}_1(M, N) \simeq M \otimes_R N$ e $\operatorname{Tor}^{R^{\#}}_2(M, N) = 0$. Existe uma sequência exata

$$0 \to M^{\#} \to R^{\#^{(m)}} \to M \to 0. \tag{2.8}$$

Tal sequência induz uma sequência exata de Tor's e, usando que $\mathrm{Tor}_1^{R^\#}(R^{\#(m)}, N) = 0$, obtemos a partir desta última a sequência exata abaixo:

$$0 \to M \otimes_R N \to M^\# \otimes_{R^\#} N \to N^{(m)} \to M \otimes_R N \to 0. \tag{2.9}$$

Sabemos que, para R-módulos, tensorizar sobre $R^\#$ é o mesmo que tensorizar sobre R. Para calcularmos a profundidade de $M^\# \otimes_{R^\#} N^\#$, quebraremos a sequência exata (2.9) em duas sequências exatas curtas:

$$0 \to M \otimes_R N \to M^\# \otimes_{R^\#} N \to C \to 0 \tag{2.10}$$

$$0 \to C \to N^{(m)} \to M \otimes_R N \to 0. \tag{2.11}$$

Note que $N^{(m)}$ e $M \otimes_R N$ têm profundidade d. Daí, aplicando o Lema da profundidade à sequência exata (2.11), temos que

$$\mathrm{depth}(C) \geq \mathrm{depth}(N^{(m)}) = d.$$

Usando a sequência exata induzida pelo Ext a partir da sequência exata (2.10):

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & \mathrm{Hom}_R(k, M \otimes_R N) & \to & \mathrm{Hom}_R(k, M^\# \otimes_{R^\#} N) & \to & \mathrm{Hom}_R(k, C) & \to \\ & \cdots & & & & & & \\ & \to & \mathrm{Ext}_R^{d-1}(k, M \otimes_R N) & \to & \mathrm{Ext}_R^{d-1}(k, M^\# \otimes_{R^\#} N,) & \to & \mathrm{Ext}_R^{d-1}(k, C) & \to \\ & \to & \mathrm{Ext}_R^{d}(k, M \otimes_R N) & \to & \mathrm{Ext}_R^{d}(k, M^\# \otimes_{R^\#} N) & \to & \mathrm{Ext}_R^{d}(k, C) & \to \\ & \cdots & & & & & & \end{array}$$

obtemos que

$$\mathrm{Ext}_R^j(k, M^\# \otimes_{R^\#} N) = 0,\ \forall j < d \Leftrightarrow \mathrm{depth}(M^\# \otimes_{R^\#} N) \geq d.$$

Como $M^\# \otimes_{R^\#} N$ é um R-módulo, temos que $\mathrm{depth}(M^\# \otimes_{R^\#} N) \leq d$. Utilizando a sequência exata induzida pelo Tor via (2.8), obtemos que

$$\mathrm{Tor}_1^{R^\#}(N, M^\#) \simeq \mathrm{Tor}_2^{R^\#}(M, N) = 0. \tag{2.12}$$

Agora, escolhemos uma sequência exata

$$0 \to N^{\#} \to R^{\#^{(n)}} \to N \to 0.$$

Daí, utilizando (2.12), e a sequência exata induzida por ela via Tor, obtemos a seguinte sequência exata curta:

$$0 \to M^{\#} \otimes_{R^{\#}} N^{\#} \to M^{\#^{(n)}} \to M^{\#} \otimes_{R^{\#}} N \to 0 \tag{2.13}$$

Pelo item 4 da proposição anterior, temos que $\operatorname{depth}(M^{\#}) = d+1$. Daí, utilizando o Lema da profundidade em (2.13), obtemos que

$$\operatorname{depth}(M^{\#} \otimes_{R^{\#}} N^{\#}) = \operatorname{depth}(M^{\#} \otimes_{R^{\#}} N) + 1 = d + 1.$$

□

2.2 Alguns resultados envolvendo multiplicidade, liberdade e módulos Cohen-Macaulay.

Lema 8. *Seja $(R, \mathfrak{m}, k)$ um anel local 1-dimensional com multiplicidade e, e assuma que k é infinito. Seja M um R-módulo Cohen-Macaulay maximal de posto constante r. Então, $\mu_R(M) \leq re$.*

Demonstração. Consideremos a multiplicidade $e(\mathfrak{m}, M)$ do módulo M. Como M tem posto constante, $M_P \simeq {R_P}^{(r)}$ para todo $P \in \operatorname{Ass}(R)$. Pela fórmula presente em [[9], 14.7], temos que se $\mathcal{X} = \{P_1, \ldots, P_t\}$ é o conjunto de todos os primos minimais de R tais que, para todo i, $\dim\left(\dfrac{R}{P_i}\right) = d$, então

$$e(\mathfrak{m}, M) = \sum_{i=1}^{t} l(M_{P_i}) e\left(\mathfrak{m}, \frac{R}{P_i}\right). \tag{2.14}$$

Segue que

$$\begin{aligned} e(\mathfrak{m}, M) &= \sum_{i=1}^{t} \ell(M_{P_i}) e\left(\mathfrak{m}, \frac{R}{P_i}\right) \\ &= \sum_{i=1}^{t} \ell({R_{P_i}}^{(r)}) e\left(\mathfrak{m}, \frac{R}{P_i}\right) \\ &= \sum_{i=1}^{t} r \cdot \ell(R_{P_i}) e\left(\mathfrak{m}, \frac{R}{P_i}\right) \\ &= r \cdot \sum_{i=1}^{t} \ell(R_{P_i}) e\left(\mathfrak{m}, \frac{R}{P_i}\right) \\ &= r \cdot e(\mathfrak{m}, R) \\ &= re \end{aligned}$$

Como k é infinito, existe um elemento $x \in \mathfrak{m}$, que é uma redução de $\mathfrak{m}$, isto é, $x\mathfrak{m}^{n-1} = \mathfrak{m}^n$, para algum $n \geq 1$. Por [[9], 14.13], temos que $e((x), M) = e(\mathfrak{m}, M)$. Perceba que x é um não-divisor de zero de M, daí [[9], 14.10] implica que $e((x), M)$ é igual à multiplicidade de $\frac{M}{xM}$, que é justamente o comprimento $\ell\left(\frac{M}{xM}\right)$. Por fim, temos que

$$\begin{aligned} \mu_R(M) &= \ell\left(\frac{M}{\mathfrak{m}M}\right) \\ &\leq \ell\left(\frac{M}{xM}\right) \\ &= re. \end{aligned}$$

□

Proposição 10. *Sejam R uma hipersuperfície e M um R-módulo Cohen-Macaulay maximal sem somando livres não-nulos. Então M tem uma resolução livre minimal períodica cujo período é no máximo 2:*

$$\ldots \longrightarrow R^{(m)} \xrightarrow{\alpha} R^{(m)} \xrightarrow{\beta} R^{(m)} \xrightarrow{\alpha} R^{(m)} \xrightarrow{\beta} R^{(m)} \longrightarrow M \longrightarrow 0.$$

Em particular, temos que $\mathrm{syz}_R^2(M) \simeq M$ e $\mu_R(\mathrm{syz}_R^1(M)) = \mu_R(M)$. Além disso, $\mathrm{syz}_R^1(M)$ é também um R-módulo Cohen-Macaulay maximal sem somandos livres não-nulos.

Demonstração. Ver [6], Proposição 1.7. □

Observação 12. *Se R é uma hipersuperfície, então R_P é zero-dimensional e Gorenstein para todo $P \in \operatorname{Ass}(R)$. Segue de [[10], (A.1); [5], Teorema 10] que todo R-módulo livre de torção pode ser imerso num R-módulo livre.*

Corolário 5. *Sejam R uma hipersuperfície e M e N R-módulos Cohen-Macaulay maximais nenhum dos quais tem um somando livre não-nulo. Assuma que M é genericamente livre. Então $\operatorname{Tor}_2^R(M,N) \simeq \operatorname{Tor}_2^R(\operatorname{syz}_R^1(M), \operatorname{syz}_R^1(N)) \simeq t(M \otimes_R N)$. Em particular, se $M \otimes_R N$ é livre de torção, então $\operatorname{syz}_R^1(M) \otimes_R \operatorname{syz}_R^1(N)$ também o é.*

Demonstração. Como M e N são Cohen-Macaulay maximais e R é um hipersuperfície, temos que M e N são livres de torção. Assim, pela Observação 12, existem R-módulos livres F e G, tais que $M \subset F$ e $N \subset G$. Pela Proposição 6, temos que

$$t(M \otimes_R N) \simeq \operatorname{Tor}_2^R\left(\frac{F}{M}, \frac{G}{N}\right).$$

A sequência exata induzida pelo Tor via a sequência exata

$$0 \to M \to F \to \frac{F}{M} \to 0$$

e o R-módulo $\dfrac{G}{N}$ nos fornecem que

$$\operatorname{Tor}_2^R\left(\frac{F}{M}, \frac{G}{N}\right) \simeq \operatorname{Tor}_1^R\left(M, \frac{G}{N}\right).$$

Perceba que $M \simeq \operatorname{syz}_R^2(M)$, pela Proposição 10. Daí,

$$0 \to \operatorname{syz}_R^1(M) \to R^{(m)} \to M \to 0$$

e

$$0 \to M \to R^{(n)} \to \operatorname{syz}_R^1(M) \to 0$$

são sequências exatas que, via a sequência exata longa do Tor e o R-módulo $\dfrac{G}{N}$ nos fornecem que

$$\operatorname{Tor}_1^R\left(M, \frac{G}{N}\right) \simeq \operatorname{Tor}_3^R\left(M, \frac{G}{N}\right).$$

Por outro lado, a sequência exata

$$0 \to N \to G \to \frac{G}{N} \to 0$$

e o R-módulo M induzem uma sequência exata longa de Tor's e esta, por sua vez, implica que

$$\mathrm{Tor}_3^R\left(M, \frac{G}{N}\right) \simeq \mathrm{Tor}_2^R(M, N).$$

Combinando esses isomorfismos, obtemos que $\mathrm{Tor}_2^R(M, N) \simeq t(M \otimes_R N)$. Pela Proposição 10, a sequência

$$0 \to N \to R^{(p)} \to \mathrm{syz}_R^1(N) \to 0$$

é exata. Daí, $\mathrm{Tor}_2^R(M, N) \simeq \mathrm{Tor}_3^R(\mathrm{syz}_R^1(N), M)$. Além disso, a sequência

$$0 \to \mathrm{syz}_R^1(M) \to R^{(m)} \to M \to 0$$

também é exata e, por fim, obtemos que

$$\mathrm{Tor}_2^R(\mathrm{syz}_R^1(M), \mathrm{syz}_R^1(N)) \simeq \mathrm{Tor}_3^R(M, \mathrm{syz}_R^1(N)).$$

Isso implica que

$$\mathrm{Tor}_2^R(\mathrm{syz}_R^1(M), \mathrm{syz}_R^1(N)) \simeq \mathrm{Tor}_2^R(M, N) \simeq t(M \otimes_R N).$$

Em particular, $\mathrm{syz}_R^1(M) \subset R^{(m)}$ e $\mathrm{syz}_R^1(N) \subset R^{(p)}$ e $R^{(m)}$ e $R^{(p)}$ são livres. Daí, pela Proposição 6, obtemos que

$$\begin{aligned} t(\mathrm{syz}_R^1(M) \otimes_R \mathrm{syz}_R^1(N)) &\simeq \mathrm{Tor}_2^R\left(\frac{R^{(m)}}{\mathrm{syz}_R^1(M)}, \frac{R^{(p)}}{\mathrm{syz}_R^1(N)}\right) \\ &= \mathrm{Tor}_2^R(M, N) \\ &\simeq t(M \otimes_R N). \end{aligned}$$

□

Proposição 11. *Seja R uma hipersuperfície 1-dimensional com multiplicidade no* *máximo 3. Sejam M e N R-módulos de posto constante. Se $M \otimes_R N$ é livre de torção, então M ou N é livre.*

Demonstração. Usando o que foi provado na Proposição 5, podemos assumir que M e N são livres de torção. Sejam $r = \operatorname{rank}(M)$ e $s = \operatorname{rank}(N)$. Assumiremos, por contradição, que nem M nem N é livre e que entre todos os contra-exemplos, $r + s$ é minimal. Portanto, nem M nem N tem um somando livre não-nulo.

Sejam $m := \mu_R(M)$ e $n := \mu_R(N)$. Note que $\operatorname{syz}^1_R(M)$ e $\operatorname{syz}^1_R(N)$ são módulos livres de torção de postos constantes e iguais a $m-r$ e $n-s$, respectivamente. Com efeito, são livres de torção, pois são submódulos de um módulo livre, e para todo $P \in \operatorname{Ass}(R)$ vale que a sequência exata $0 \to \operatorname{syz}^1_R(M) \to R^{(m)} \to M \to 0$ localizada em P permanece exata, ou seja, a sequência

$$0 \to (\operatorname{syz}^1_R(M))_P \to (R_P)^{(m)} \to M_P \to 0 \tag{2.15}$$

é exata e como M_P é R_P-livre, a sequência (2.15) cinde e temos que

$$\begin{aligned} (R_P)^{(m)} &\simeq (\operatorname{syz}^1_R(M))_P \oplus M_P \\ &\simeq (\operatorname{syz}^1_R(M))_P \oplus (R_P)^{(r)} \end{aligned}$$

Daí, $(\operatorname{syz}^1_R(M))_P$ é um R_P-módulo projetivo e portanto, como R_P é local, é R_P-livre e tem posto $m-r$. Para $\operatorname{syz}^1_R(N)$ é análogo. Notemos que a Proposição 10 garante que nenhum módulo de sizígia é livre e que o Corolário 5 garante que $\operatorname{syz}^1_R(M) \otimes_R \operatorname{syz}^1_R(N)$ é livre de torção. Pela minimalidade de $r + s$, tem-se que $m - r \geq r$ ou $n - s \geq s$. Suponha que $m - r \geq r$, ou seja, $m - 2r \geq 0$. Novamente pela Proposição 10, temos que $m = \mu_R(\operatorname{syz}^1_R(M))$ e $n = \mu_R(\operatorname{syz}^1_R(N))$. Por fim, aplicamos o Lema 8 a $M \otimes_R N$ e a $\operatorname{syz}^1_R(M) \otimes_R \operatorname{syz}^1_R(N)$ e temos que $mn \leq 3rs$ e $mn \leq 3(m-r)(n-s)$. Somando essas equações e rearranjando seus termos, vemos que

$$rn \leq (m - 2r)(n - 3s).$$

Por outro lado, aplicando o Lema 8 a N, temos que $n-3s \leq 0$ e supomos que $m-2r \geq 0$. Daí, $rn \leq 0$, o que é um absurdo. $\square$

Lema 9. *Seja $(R, \mathfrak{m}, k)$ uma hipersuperfície com dimensão $d \geq 2$ e com k infinito.*

Seja $\mathcal{F}$ um conjunto finito de R-módulos Cohen-Macaulay maximais, cada um deles com posto constante. Então existe um não-divisor-de-zero $g \in \mathfrak{m} - \mathfrak{m}^2$ tal que $\frac{R}{(g)}$ é uma hipersuperfície de dimensão $d-1$ com multiplicidade $e\left(\frac{R}{(g)}\right) = e(R)$ e para todo $M \in \mathcal{F}$ são válidas:

1. *M_P é R_P-livre para todo primo minimal sobre (g).*
2. *$\frac{M}{gM}$ é um $\frac{R}{(g)}$-módulo de posto constante.*
3. *Se $\frac{M}{gM}$ é $\frac{R}{(g)}$-livre, então M é livre.*

Demonstração. Fixe $M \in \mathcal{F}$ e escolha uma sequência exata

$$0 \to M \to F \to \frac{F}{M} \to 0, \tag{2.16}$$

sendo F livre e $\frac{F}{M}$ de torção. Como F é livre, $F \simeq R^{(s)}$. Daí,

$$\operatorname{depth}(F) = \operatorname{depth}(R) = \operatorname{depth}(M) = \dim(R) \geq 2.$$

Segue, portanto, que $\frac{F}{M}$ tem profundidade positiva. De fato, se $\operatorname{depth}\left(\frac{F}{M}\right) = 0 < \operatorname{depth}(F)$ o lema da profundidade fornece

$$\operatorname{depth}(M) = 1 + \operatorname{depth}\left(\frac{F}{M}\right) = 1 < \operatorname{depth}(F).$$

Como

$$\operatorname{depth}\left(\frac{F}{M}\right) \leq \dim\left(\frac{R}{P}\right), \forall P \in \operatorname{Ass}_R\left(\frac{F}{M}\right), \tag{2.17}$$

temos que $\mathfrak{m} \notin \operatorname{Ass}_R\left(\frac{F}{M}\right)$, pois se pertencesse, teríamos que

$$\operatorname{depth}\left(\frac{F}{M}\right) \leq \dim\left(\frac{R}{\mathfrak{m}}\right) = \dim(k) = 0. \tag{2.18}$$

Escolha um elemento não-divisor-de-zero $c \in \mathfrak{m}$ tal que $cF \subset M$. Note que $\frac{R}{(c)}$ é de Cohen-Macaulay e tem dimensão positiva. De fato, $\dim\left(\frac{R}{(c)}\right) = \dim(R) - 1 \geq 2 - 1 = 1$ e $\operatorname{depth}\left(\frac{R}{(c)}\right) = \operatorname{depth}(R) - 1 = \dim(R) - 1 = \dim\left(\frac{R}{(c)}\right)$. Daí, $\mathfrak{m} \notin \operatorname{Ass}\left(\frac{R}{(c)}\right)$.

Considere o seguinte conjunto de ideais:

$$\Gamma(M) := \mathrm{Ass}(R) \cup \mathrm{Ass}\left(\frac{F}{M}\right) \cup \mathrm{Ass}\left(\frac{R}{(c)}\right) \cup \{\mathfrak{m}^2\}.$$

Agora, repita o processo para cada módulo $M \in \mathcal{F}$ e seja

$$\Gamma := \bigcup_{M \in \mathcal{F}} \Gamma(M).$$

Assim, temos que Γ é uma coleção finita de ideais com a propriedade de estarem contidos propriamente em $\mathfrak{m}$.

Escreva $R = \dfrac{S}{(f)}$, onde $(S, \mathfrak{n}, k)$ é um anel local regular de dimensão $d+1$. Seja $\mathfrak{n} = (x_1, \ldots, x_{d+1})$. Denote por G o anel graduado associado de S, ou seja,

$$G = \bigoplus_{n=0}^{+\infty} \frac{\mathfrak{n}^n}{\mathfrak{n}^{n+1}}.$$

Denote y^* para a imagem de um elemento $y \in S - \{0\}$ em G, isto é, $y^* \in \dfrac{\mathfrak{n}^i}{\mathfrak{n}^{i+1}}$ se $y \in \mathfrak{n}^i - \mathfrak{n}^{i+1}$. Note que $G \simeq k[x_1^*, \ldots, x_{d+1}^*]$ é um anel de polinômios de dimensão $d+1$, por [[9], Teorema 14.4]. Como o anel graduado associado de R é isomorfo a $\dfrac{G}{(f^*)}$, segue que $e(R) = \deg(f^*)$, por [[9], Exercício 14.5]. Escreva $\Gamma = \{I_1, \ldots, I_s\}$ e seja $J_i = \pi^{-1}(I_i)$, onde $\pi : S \to R$ é a projeção natural. Perceba que cada J_i está contido propriamente em $\mathfrak{n}$ e, pelo Lema de Nakayama, temos que

$$J_i + \mathfrak{n}^2 \neq \mathfrak{n}, \qquad i = 1, \ldots, s. \tag{2.19}$$

Dado um elemento $h \in \mathfrak{n}$, escreva $h + \mathfrak{n}^2 = \alpha_1 x_1^* + \ldots + \alpha_{d+1} x_{d+1}^*$, com $\alpha_j \in k$ para todo j e defina $\xi(h) := (\alpha_1, \ldots, \alpha_{d+1})$. Daí, a aplicação

$$\begin{array}{rccl} \xi : & \mathfrak{n} & \to & V := k^{d+1} \\ & h & \mapsto & \xi(h) \end{array}$$

é um homomorfismo sobrejetor e tem-se que $\ker(\xi) = \mathfrak{n}^2$.

Como ξ é um homomorfismo sobrejetor, temos que ξ preserva ideais, ou seja, se $J \subset \mathfrak{n}$ é um ideal, então $\xi(J)$ é um ideal de V. Portanto, considere $W_i = \xi(J_i)$, para

$i \in \{1, \ldots, s\}$. Temos, então, que cada W_i é subespaço próprio de V. Sejam $\ell_1, \ldots, \ell_t$ formas lineares distintas dividindo f^* em G e seja U_i o subespaço 1-dimensional de V gerado pelos coeficientes de ℓ_i. Como k é infinito, existe $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{d+1}) \in V - (W_1 \cup \ldots \cup W_s \cup U_1 \cup \ldots \cup U_t)$. Escolha qualquer $h \in \mathfrak{n}$ tal que $\xi(h) = \alpha$ e defina $g = \pi(h)$. Perceba que como $\alpha \neq 0$, $h \notin \mathfrak{n}^2$. Então, temos que $h^*|f^*$ e $g \notin \bigcup_{j=1}^{s} I_j$. O fato de $g \in \mathfrak{m} - \bigcup \operatorname{Ass}(R)$ mostra que $\dfrac{R}{(g)}$ tem dimensão $d-1$. Além disso, $h \in \mathfrak{n} - \mathfrak{n}^2$, daí, tem-se que $\dfrac{S}{(h)}$ é um anel regular e

$$\frac{R}{(g)} \simeq \frac{S}{(h, f)}.$$

Para provarmos que $\dfrac{R}{(g)}$ tem multiplicidade igual a de $e = e(R)$, temos que mostrar que $f \notin \mathfrak{n}^{e+1} + Sh$. Assumindo o contrário, escreva $f = q + ch$, com $q \in \mathfrak{n}^{e+1}$ e $c \in S$. Daí, $c \neq 0$, pois se $c = 0 \implies f \in \mathfrak{n}^{e+1}$ e, portanto, $f^* = (ch)^* = c^* h^*$, que é uma contradição. Agora, considere M um módulo qualquer em $\mathcal{F}$. Como $g \notin \bigcup \operatorname{Ass}\left(\dfrac{R}{(c)}\right)$, nenhum primo minimal sobre (g) pode conter c.

Com isso, $c \in (M : F)$ e $c \notin P$, logo $(M : F) \nsubseteq P$, portanto, $M_P = F_P$ para todo primo minimal sobre (g) e provamos (1). Perceba que g é um não divisor de zero de M, portanto,

$$\begin{aligned} \operatorname{depth}\left(\frac{M}{gM}\right) &= \operatorname{depth}(M) - 1 \\ &= \dim(R) - 1 \\ &= \dim\left(\frac{R}{(g)}\right). \end{aligned}$$

Mas isso significa que $\dfrac{M}{gM}$ é um $\dfrac{R}{(g)}$-módulo Cohen-Macaulay maximal. O fato de que $\operatorname{Tor}_1^R\left(\dfrac{F}{M}, \dfrac{R}{(g)}\right) = (0 :_{F/N} g)$, e g ser um não-divisor-de-zero de $\dfrac{F}{N}$ mostram que $\operatorname{Tor}_1^R\left(\dfrac{F}{M}, \dfrac{R}{(g)}\right) = 0$. Portanto, (2.16) induz uma sequência exata dada por:

$$0 \to \frac{M}{gM} \to \frac{F}{gF} \to \frac{F}{M + gF} \to 0.$$

Para provarmos que $\dfrac{M}{gM}$ tem posto constante, é suficiente provarmos que $\dfrac{F}{M + gF}$

é de torção como $\dfrac{R}{(g)}$-módulo. Perceba que (g, c) é uma sequência regular em R, dái a classe de $c + (g)$ é um não-divisor-de-zero do anulador de $\dfrac{F}{M + gF}$. Para provar (3), escolha qualquer primo P minimal sobre (g). Se $\dfrac{M}{gM}$ é livre sobre $\dfrac{R}{(g)}$, então

$$\begin{aligned}
\frac{M}{PM} &\simeq M \otimes_R \frac{R}{P} \\
&\simeq \left(M \otimes_R \frac{R}{(g)}\right) \otimes_{R/(g)} \frac{R}{P} \\
&\simeq \frac{M}{gM} \otimes_{R/(g)} \frac{R}{P} \\
&\simeq \left(\bigoplus_{n=1}^{r} \frac{R}{(g)}\right) \otimes_{R/(g)} \frac{R}{P} \\
&\simeq \bigoplus_{n=1}^{r} \left(\frac{R}{(g)} \otimes_{R/(g)} \frac{R}{P}\right) \\
&\simeq \bigoplus_{n=1}^{r} \frac{R}{P}.
\end{aligned}$$

Isso mostra que $\dfrac{M}{PM}$ é $\dfrac{R}{P}$-livre. Por (1), temos que M_P é R_P-livre. Daí, pela Proposição 3, temos que M é livre. $\square$

Corolário 6. *Seja R uma hipersuperfície com multiplicidade no máximo 3 e corpo residual infinito. Sejam M e N R-módulos Cohen-Macaulay maximais de posto constante. Se $M \otimes_R N$ é Cohen-Macaulay maximal, então M ou N é livre.*

Demonstração. A demonstração será por indução sobre $d := \dim(R)$. Suponha que $d = 0$. Como R é um anel de Cohen-Macaulay, pois é uma hipersuperfície, temos que $\operatorname{depth}(R) = \dim(R) = 0$. Afirmamos que $\operatorname{dh}(M) = 0$ e, portanto, M é livre. Suponha, inicialmente, que $\operatorname{dh}(M) = 1$. Considere, então,

$$0 \to F_1 \xrightarrow{\alpha} F_0 \to M \to 0$$

uma resolução livre minimal de M, ou seja, $\alpha(F_1) \subset \mathfrak{m}F_0$, sendo $\mathfrak{m}$ o ideal maximal de R. Como $\operatorname{depth}(R) = 0$, temos que $\mathfrak{m} \in \operatorname{Ass}(R)$. Portanto, existe $r \in R - \{0\}$ tal que $\mathfrak{m} = (0 : r)$. Com isso, temos que

$$\alpha(rF_1) = r\alpha(F_1) \subset r\mathfrak{m}F_0 = (0).$$

Como F_1 é livre, obtemos que $r = 0$, o que contradiz a hipótese de que $r \in R - \{0\}$. Para o caso geral, isto é, $\mathrm{dh}(M) = n > 0$, temos que $\mathrm{syz}_R^{n-1}(M)$ tem dimensão homológica igual a 1 e escolhendo uma resolução livre

$$0 \to F \to G \to \mathrm{syz}_R^{n-1}(M) \to 0$$

de $\mathrm{syz}_R^{n-1}(M)$ com as mesmas características da anterior, obtemos a mesma contradição, pois F é livre. Portanto, $\mathrm{dh}(M) = 0$. Se $d = 1$, usamos o que foi provado na Proposição 11, pois $M \otimes_R N$ é livre de torção tendo em vista que R tem dimensão 1 e $M \otimes_R N$ é Cohen-Macaulay maximal. Se $d \geq 2$, escolhemos um elemento g como no Lema 9, referente à coleção $\mathcal{F} = \{M, N, M \otimes_R N\}$. Daí,

$$\begin{aligned}
\frac{M}{gM} \otimes_{R/(g)} \frac{N}{gN} &\simeq \left(M \otimes_R \frac{R}{(g)}\right) \otimes_{R/(g)} \left(N \otimes_R \frac{R}{(g)}\right) \\
&\simeq \left(M \otimes_R \left(\frac{R}{(g)} \otimes_{R/(g)} N\right)\right) \otimes_R \frac{R}{(g)} \\
&\simeq (M \otimes_R N) \otimes_R \frac{R}{(g)} \\
&\simeq \frac{M \otimes_R N}{g(M \otimes_R N)}
\end{aligned}$$

é um $\dfrac{R}{(g)}$-módulo Cohen-Macaulay maximal e $\dim\left(\dfrac{R}{(g)}\right) = d - 1$. Daí, por indução, $\dfrac{M}{gM}$ ou $\dfrac{N}{gN}$ é $\dfrac{R}{(g)}$-livre. Com isso, segue do item 3 do Lema 9 que M é livre ou N é livre. □

Teorema 6. *Seja R uma hipersuperfície de dimensão 1 e corpo residual infinito e sejam M e N R-módulos dos quais pelo menos um tem posto constante. Se $M \otimes_R N$ é livre de torção, então M ou N é livre.*

Demonstração. Pelo Lema 5, podemos supor que M e N são não-nulos, livres de torção e que nenhum deles tem um somando livre não nulo. A demonstração será feita por contradição. Escreva $R = \dfrac{S}{(f)}$, onde S é um anel regular de dimensão 2. Escolhemos imersões $M \subset F$ e $N \subset G$, onde F e G são livres e $\dfrac{F}{M}$ é de torção e, portanto, tem comprimento finito, desde que $\dim(R) = 1$. Pelo Lema 6, temos que

$$\mathrm{Tor}_2^R\left(\frac{F}{M}, \frac{G}{N}\right) \simeq t(M \otimes_R N) = 0.$$

Daí, pelo Corolário 4, temos que $\operatorname{Tor}_j^R\left(\frac{F}{M}, \frac{G}{N}\right) = 0$, para todo $j \geq 2$. Com isso, a sequência exata

$$0 \to M \to F \to \frac{F}{M} \to 0$$

induz a sequência exata

$$\begin{array}{ccccccccc}
\to & \operatorname{Tor}_j^R\left(M, \frac{G}{N}\right) & \to & \operatorname{Tor}_j^R\left(F, \frac{G}{N}\right) & \to & \operatorname{Tor}_j^R\left(\frac{F}{M}, \frac{G}{N}\right) & \to & \\
\dots & & & & & & & \\
\to & \operatorname{Tor}_2^R\left(M, \frac{G}{N}\right) & \to & \operatorname{Tor}_2^R\left(F, \frac{G}{N}\right) & \to & \operatorname{Tor}_2^R\left(\frac{F}{M}, \frac{G}{N}\right) & \to & \\
\to & \operatorname{Tor}_1^R\left(M, \frac{G}{N}\right) & \to & \operatorname{Tor}_1^R\left(F, \frac{G}{N}\right) & \to & \operatorname{Tor}_1^R\left(\frac{F}{M}, \frac{G}{N}\right) & \to & \\
\to & M \otimes_R \frac{G}{N} & \to & F \otimes_R \frac{G}{N} & \to & \frac{F}{M} \otimes_R \frac{G}{N} & \to & 0
\end{array}$$

e, portanto, $\operatorname{Tor}_i^R\left(M, \frac{G}{N}\right) = 0$, para todo $i \geq 1$. Note que a sequência exata

$$0 \to N \to G \to \frac{G}{N} \to 0$$

induz uma sequência exata dada por:

$$\begin{array}{ccccccccc}
\to & \operatorname{Tor}_j^R(N, M) & \to & \operatorname{Tor}_j^R(G, M) & \to & \operatorname{Tor}_j^R\left(\frac{G}{N}, M\right) & \to & \\
\dots & & & & & & & \\
\to & \operatorname{Tor}_2^R(M, M) & \to & \operatorname{Tor}_2^R(G, M) & \to & \operatorname{Tor}_2^R\left(\frac{G}{N}, M\right) & \to & \\
\to & \operatorname{Tor}_1^R(N, M) & \to & \operatorname{Tor}_1^R(G, M) & \to & \operatorname{Tor}_1^R\left(\frac{G}{N}, M\right) & \to & \\
\to & M \otimes_R N & \to & G \otimes_R M & \to & \frac{G}{N} \otimes_R M & \to & 0
\end{array}$$

A partir dela, concluímos que $\operatorname{Tor}_j^R(M, N) = 0$, para todo $j \geq 1$. Daí, pela Proposição 9, $M^\# \otimes_{R^\#} N^\#$ é um $R^\#$-módulo reflexivo. Além disso, $M^\#$ e $N^\#$ têm posto constante, pelo item 3 da Proposição 8. Como $R^\#$ tem multiplicidade 2, segue do Corolário 6 que ou $M^\#$ é livre ou $N^\#$ é livre. Se, por acaso, $M^\#$ é livre, então

$$\frac{M^\#}{\overline{Z} M^\#} \simeq \frac{(R^\#)^n}{\overline{Z}(R^\#)^n} \simeq \left(\frac{R^\#}{(\overline{Z})}\right)^n \simeq R^{(n)}$$

é livre como R-módulo. Mas isso implica, pelo item 1 da Proposição 8, que M é projetivo. Como R é local, temos M livre, o que é uma contradição. $\square$

2.3 Segundo teorema da rigidez

Teorema 7 (Segundo teorema da rigidez). *Seja* $R = \dfrac{S}{(f)}$ *uma hipersuperfície com corpo residual infinito e sejam* M *e* N R*-módulos não nulos dos quais ao menos um tem posto constante. Se* $M \otimes_R N$ *é reflexivo, então* $\operatorname{Tor}_i^R(M,N) = 0$ *para todo* $i \geq 1$.

Demonstração. Suponha, inicialmente, que o teorema foi provado sob a hipótese adicional de que M é livre de torção. Para o caso geral, a sequência exata

$$0 \to t(M) \to M \to \overline{M} \to 0$$

e o R-módulo N induzem a sequência exata

$$\operatorname{Tor}_1^R(\overline{M}, N) \to t(M) \otimes_R N \xrightarrow{\alpha} M \otimes_R N \xrightarrow{\beta} \overline{M} \otimes_R N \to 0.$$

Desde que $\operatorname{Im}(\alpha)$ é um módulo de torção e $M \otimes_R N$ é livre de torção, temos que β é um isomorfismo. Portanto, $\overline{M} \otimes_R N$ é reflexivo. Como $\overline{M}$ é livre de torção, o teorema garante que $\operatorname{Tor}_i^R(\overline{M}, N) = 0$, para todo $i \geq 1$. Com isso, tem-se que $t(M) \otimes_R N = 0$ e como R é local e $N \neq 0$, $t(M) = 0$.

Por simetria, podemos assumir que M e N são livres de torção. A demonstração será feita por indução sobre a dimensão de R. Se $\dim(R) = 0$, então não há nada a provar. De fato, todo ideal primo de R é maximal. Logo o ideal maximal, P, de R é um primo associado de R. Daí, para todo $i \geq 1$, o fato de M ter posto constante assegura que:

$$\begin{aligned}
(\operatorname{Tor}_i^R(M,N))_P &\simeq \operatorname{Tor}_i^{R_P}(M_P, N_P) \\
&= \operatorname{Tor}_i^{R_P}((R_P)^{(r)}, N_P) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Pelo princípio local-global, $\operatorname{Tor}_i^R(M,N) = 0$. Se $\dim(R) = 1$, o Teorema 6 garante o resultado, tendo em vista que, sob essas hipóteses, M ou N é livre. Portanto, podemos supor que $\dim(R) > 1$.

Escolhemos uma sequência exata curta

$$0 \to W \to F^* \xrightarrow{\gamma} M^* \to 0, \tag{2.20}$$

na qual F é um R-módulo livre. Como M é livre de torção, a aplicação natural $\omega_M : M \to M^{**}$ é injetiva. Defina M_1 como sendo o co-núcleo da aplicação δ definida pela composição

$$M \xrightarrow{\omega_M} M^{**} \xrightarrow{\gamma^*} F^{**} \to F,$$

sendo a última aplicação a identificação natural, tendo em vista que F é reflexivo, pois é livre. Temos, portanto, o seguinte diagrama exato e comutativo:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\omega_M"] & F \arrow[r] \arrow[d, "="] & M_1 \arrow[rr] \arrow[d] & & 0 \\
0 \arrow[r] & M^{**} \arrow[r] & F \arrow[r] & W^* \arrow[r] & \operatorname{Ext}^1_R(M^*, R) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd} \tag{2.21}$$

De fato, as linhas são exatas porque δ é injetiva, $M_1 = \operatorname{coker}(\delta)$ e a sequência (2.20) induz, via R e o Ext, a sequência exata da linha de baixo.

Seja $\mathbb{X}^1 = \{P \in \operatorname{Spec}(R); \operatorname{ht}(P) \leq 1\}$. Se $P \in \mathbb{X}^1$, então M_P e M_P^* são R_P-módulos Cohen-Macaulay maximais. De fato, como M é livre torção, M satisfaz S_1. Portanto,

$$\operatorname{depth}(M_P) \geq \min\{1, \dim(R_P)\} = \dim(R_P).$$

Além disso, [[3], Exercício 1.4.19] nos fornece que

$$\operatorname{depth}(M_P^*) \geq \min\{2, \operatorname{depth}(R_P)\} = \operatorname{depth}(R_P) = \dim(R_P).$$

Como R_P é Gorenstein, M_P^* é reflexivo, tendo em vista que é Cohen-Macaulay maximal e $\operatorname{Ext}^1_{R_P}(M_P^*, R_P) = 0$. Daí, localizando (2.21) em P, temos:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M_P \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"] & F_P \arrow[r] \arrow[d, "="] & (M_1)_P \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"] & 0 \\
0 \arrow[r] & M_P^{**} \arrow[r] & F_P \arrow[r] & W_P^* \arrow[r] & 0
\end{tikzcd} \tag{2.22}$$

Dessa forma, se M_P é livre, então M_P^* é livre, e isso mostra que a sequência (2.20) localizada em P cinde e, portanto, W_P é livre o que implica que W_P^* é livre. Como $(M_1)_P \simeq W_P^*$, temos que $(M_1)_P$ é livre. Por outro lado, se $(M_1)_P$ é livre, temos que a primeira linha de (2.22) cinde, o que implica que M_P é projetivo, mas como R_P é local, M_P é livre. Note que as mesmas coisas que fizemos para M podem ser feitas para N e, em suma, obtemos sequências exatas

$$0 \to M \to F \to M_1 \to 0, \tag{2.23}$$

$$0 \to N \to G \to N_1 \to 0, \tag{2.24}$$

nas quais F e G são livres e além disso, para cada $P \in \mathbb{X}^1$, temos:

M_P é livre se, e somente se, $(M_1)_P$ é livre, e

N_P é livre se, e somente se, $(N_1)_P$ é livre.

Como $M \otimes_R N$ é livre de torção, temos que $\operatorname{Tor}_2^R(M_1, N_1) = 0$, pela Proposição 6. Portanto, a sequência exata longa do Tor nos fornece que

$$\operatorname{Tor}_1^R(M_1, N) \simeq \operatorname{Tor}_2^R(M_1, N_1) = 0.$$

Escrevendo $F = R^{(n)}$, a mesma sequência exata induzida por (2.23) nos fornece a sequência exata

$$0 \to M \otimes_R N \to N^{(n)} \to M_1 \otimes_R N \to 0.$$

Localizando esta sequência em qualquer $P \in \operatorname{Ass}(M_1 \otimes_R N)$ e supondo que $P \in \operatorname{Supp}(M \otimes_R N)$ vemos que $\operatorname{ht}(P) \leq 1$. Se isso não fosse verdade, deveríamos ter $\operatorname{ht}(P) \geq 2$. Como $M \otimes_R N$ é reflexivo e R é uma interseção completa, teríamos que $M \otimes_R N$ satisfaz S_2, ou seja,

$$\operatorname{depth}((M \otimes_R N)_P) \geq \min\{2, \dim(R_P)\} = \min\{2, \operatorname{ht}(P)\} = 2.$$

O fato de que R é Cohen-Macaulay e N é livre de torção, implica que N satisfaz S_1, isto é,

$$\operatorname{depth}(N_P) \geq \min\{1, \dim(R_P)\} = \min\{1, \operatorname{ht}(P)\} = 1.$$

Além disso, sabemos que $P \in \operatorname{Ass}_R(M)$ se, e somente se,$P_P \in \operatorname{Ass}_{R_P}(M_P)$. Dessa forma, temos que $P_P \in \mathrm{Ass}_{R_P}((M_1 \otimes_R N)_P)$. Portanto,

$$\mathrm{depth}((M_1 \otimes_R N)_P) \leq \dim \left(\frac{R_P}{P_P}\right) = 0 \implies \mathrm{depth}((M_1 \otimes_R N)_P) = 0,$$

o que contradiz o lema da profundidade.

Suponha, agora, que $P \notin \mathrm{Supp}(M \otimes_R N)$. Nesse caso, temos que

$$N_P^{(n)} \simeq (M_1 \otimes_R N)_P.$$

Assim, $\mathrm{Ass}_{R_P}(N_P) = \mathrm{Ass}_{R_P}(N_P^{(n)}) = \mathrm{Ass}_{R_P}((M_1 \otimes_R N)_P)$. Como $P_P \in \mathrm{Ass}_{R_P}((M_1 \otimes_R N)_P)$, tem-se que $P_P \in \mathrm{Ass}_{R_P}(N_P)$. Ou seja, $P \in \mathrm{Ass}_R(N)$. Consequentemente, $\mathrm{depth}(N_P) = 0$ e como é livre torção, N satisfaz S_1, ou seja,

$$0 = \mathrm{depth}(N_P) \geq \min\{1, \dim(R_P)\} \implies \mathrm{ht}(P) = \dim(R_P) = 0.$$

Provamos, então, que

$$\mathrm{Ass}(M_1 \otimes_R N) \subseteq \mathbb{X}^1. \tag{2.25}$$

Se compusermos a aplicação natural $S^{(n)} \to R^{(n)}$, que é claramente sobrejetora, com a aplicação sobrejetora $R^{(n)} \to M_1$, de (2.21), obtemos uma sequência exata curta de S-módulos

$$0 \to E \to S^{(n)} \to M_1 \to 0.$$

Usando a sequência exata induzida pelo Tor e percebendo que o Lema 7 implica que

$$\mathrm{Tor}_1^S(M_1, R) \simeq M_1,$$

temos a seguinte sequência exata de R-módulos:

$$0 \to M_1 \to \frac{E}{fE} \to R^{(n)} \to M_1 \to 0.$$

Combinando esta sequência exata com a sequência exata de (2.23), temos a seguinte sequência exata:

$$0 \to M_1 \to \frac{E}{fE} \to M \to 0. \tag{2.26}$$

Tal sequência induz a sequência exata:

$$\mathrm{Tor}_1^R(M,N) \xrightarrow{\varphi} M_1 \otimes_R N \to \left(\frac{E}{fE}\right) \otimes_R N \to M \otimes_R N \to 0.$$

Por indução sobre a dimensão, $\mathrm{Tor}_1^R(M,N)$ tem comprimento finito. Daí, como R é local, a Proposição 4 nos diz que $\mathrm{Supp}(\mathrm{Tor}_1^R(M,N)) \subseteq \{\mathfrak{m}\}$. Como $\mathrm{ht}(\mathfrak{m}) = \dim(R) > 1$ e $\mathrm{Ass}(M_1 \otimes_R N) \subseteq \mathbb{X}^1$, segue que

$$\mathrm{Ass}_R\left(\mathrm{Hom}_R(\mathrm{Tor}_1^R(M,N), M_1 \otimes_R N)\right) = \mathrm{Supp}(\mathrm{Tor}_1^R(M,N)) \cap \mathrm{Ass}(M_1 \otimes_R N) = \emptyset.$$

Isto é, $\varphi \equiv 0$. Mas isso implica que a sequência

$$0 \to M_1 \otimes_R N \to \left(\frac{E}{fE}\right) \otimes_R N \to M \otimes_R N \to 0 \tag{2.27}$$

é exata. Afirmamos que $\mathrm{Ass}\left(\frac{E}{fE} \otimes_R N\right) \subset \mathbb{X}^1$. Com efeito, (2.27) nos fornece que

$$\begin{aligned} \mathrm{Ass}\left(\frac{E}{fE} \otimes_R N\right) &\subset \mathrm{Ass}(M_1 \otimes_R N) \cup \mathrm{Ass}(M \otimes_R N) \\ &\subset \mathbb{X}^1 \cup \mathrm{Ass}(M \otimes_R N). \end{aligned}$$

Note que se $P \in \mathrm{Ass}(M \otimes_R N)$, então $\mathrm{ht}(P) = 0$, tendo em vista que $M \otimes_R N$ é livre de torção. Logo, $\mathrm{Ass}(M \otimes_R N) \subset \mathbb{X}^1$. Logo,

$$\mathrm{Ass}\left(\frac{E}{fE} \otimes_R N\right) \subset \mathbb{X}^1. \tag{2.28}$$

Agora, a sequência exata (2.24) e o R-módulo $\frac{E}{fE}$ nos fornecem, via Tor, a sequência exata

$$0 \to \mathrm{Tor}_1^R\left(\frac{E}{fE}, N_1\right) \to \frac{E}{fE} \otimes_R N \to \frac{E}{fE} \otimes_R G \to \frac{E}{fE} \otimes_R N_1 \to 0 \tag{2.29}$$

Afirmamos que $\operatorname{Tor}_1^R\left(\dfrac{E}{fE}, N_1\right) = 0$. De fato, (2.28) e (2.29) implicam que

$$\operatorname{Ass}\left(\operatorname{Tor}_1^R\left(\frac{E}{fE}, N_1\right)\right) \subset \mathbb{X}^1.$$

Daí, pela Proposição 2, é suficiente provarmos que

$$\left(\operatorname{Tor}_1^R\left(\frac{E}{fE}, N_1\right)\right)_P = \operatorname{Tor}_1^{R_P}\left(\left(\frac{E}{fE}\right)_P, (N_1)_P\right) = 0, \quad \forall P \in \mathbb{X}^1.$$

Com efeito, M_P ou N_P é livre, pelo Teorema 6. Se M_P é livre, $(M_1)_P$ é livre. Com isso, a sequência exata (2.26) cinde. Daí, $\left(\dfrac{E}{fE}\right)_P$ é livre. Por outro lado, se N_P é livre, então $(N_1)_P$ é livre. Logo, $\operatorname{Tor}_1^{R_P}\left(\left(\dfrac{E}{fE}\right)_P, (N_1)_P\right) = 0$, $\forall P \in \mathbb{X}^1$, como afirmamos.

Como f é um não-divisor-de-zero de E e $fN_1 = 0$, temos que [[9]; Seção 18, Lema 2.] implica que

$$\operatorname{Tor}_j^S(E, N_1) \simeq \operatorname{Tor}_j^R\left(\frac{E}{fE}, N_1\right).$$

Então, pelo Corolário 1 do Teorema da rigidez de Lichtenbaum, [8], temos que

$$\operatorname{Tor}_j^S(E, N_1) = 0, \text{ para todo } j \geq 1.$$

Pelo isomorfismo anterior, temos que para todo $j \geq 1$

$$\operatorname{Tor}_j^R\left(\frac{E}{fE}, N_1\right) = 0. \tag{2.30}$$

Daí, concluímos de (2.24) que $\operatorname{Tor}_j^R\left(\dfrac{E}{fE}, N\right) = 0$ para todo $j \geq 1$.

Perceba que por (2.26) e (2.27) existe uma sobrejeção $\operatorname{Tor}_1^R\left(\dfrac{E}{fE}, N\right) \xrightarrow{\beta} \operatorname{Tor}_1^R(M, N)$, pois $\operatorname{Ker}(\delta) = \operatorname{Im}(\beta)$. Entretanto, $\operatorname{Tor}_1^R\left(\dfrac{E}{fE}, N\right) \simeq \operatorname{Tor}_2^R\left(\dfrac{E}{fE}, N_1\right) = 0$. Assim, $\operatorname{Tor}_1^R(M, N) = 0$. Agora, a sequência exata induzida por (2.26) e o R-módulo N fornecem que $\operatorname{Tor}_2^R(M, N) \simeq \operatorname{Tor}_1^R(M_1, N)$. Como a localização em cada primo associado minimal (na verdade, em cada primo de $\mathbb{X}^1$) de M_1 ou de N é livre, $\operatorname{Tor}_1^R(M_1, N)$ é um módulo de torção. Por outro lado, temos que $\operatorname{Tor}_1^R(M_1, N)$ está imerso em $M \otimes_R N$, que é livre de torção. Concluímos, portanto, que $\operatorname{Tor}_2^R(M, N) = 0$.

Se $j \geq 3$, segue de (2.26), (2.30) e (2.23) que

$$\operatorname{Tor}_j^R(M,N) \simeq \operatorname{Tor}_{j-1}^R(M_1,N) \simeq \operatorname{Tor}_{j-2}^R(M,N).$$

Como $\operatorname{Tor}_1^R(M,N) = \operatorname{Tor}_2^R(M,N) = 0$, temos que

$$\operatorname{Tor}_j^R(M,N) = 0, \ \forall j \geq 1.$$

□

Capítulo 3

Fórmula da profundidade de produtos tensoriais

Em 1961, Auslander provou o seguinte teorema em [2]:

Teorema 8. *Sejam M e N módulos sobre um anel local R com* $\mathrm{dh}(M) = s < \infty$ *e seja q o maior inteiro tal que* $\mathrm{Tor}_q^R(M,N) \neq 0$. *Se* $\mathrm{depth}(\mathrm{Tor}_q^R(M,N)) \leq 1$ *ou se* $q = 0$, *então tem-se que*

$$\mathrm{depth}(N) = \mathrm{depth}(\mathrm{Tor}_q^R(M,N)) + \mathrm{dh}(M) - q.$$

Um ano depois, Auslander e Buchsbaum provaram o seguinte teorema, conhecido com a Igualdade de Auslander-Buchsbaum.

Teorema 9. *Se R é um anel local e M é um R-módulo finitamente gerado. Se* $\mathrm{dh}(M) < \infty$, *então:*

$$\mathrm{depth}(R) = \mathrm{dh}(M) + \mathrm{depth}(M).$$

Demonstração. Ver [3], Teorema 1.3.3. □

Como uma generalização do Teorema 8, apresentamos o seguinte resultado provado por Huneke e Wiegand, em [6].

Proposição 12. *Seja R uma interseção completa. Sejam M e N R-módulos não-nulos finitamente gerados tais que* $\mathrm{Tor}_i^R(M,N) = 0$ *para todo* $i \geq 1$. *Então,*

$$\mathrm{depth}(M) + \mathrm{depth}(N) = \mathrm{dim}(R) + \mathrm{depth}(M \otimes_R N).$$

Demonstração. Como R é uma interseção completa, escrevemos $R = \dfrac{\Lambda}{(f_1, \ldots, f_r)}$, onde Λ é um anel local regular e $(f_1, \ldots, f_r)$ é uma sequência regular em Λ. Provaremos a proposição por indução sobre r, começando no caso $r = 0$, isto é, $R = \Lambda$. O Teorema 8 nos fornece que

$$\operatorname{depth}(N) = \operatorname{depth}(\operatorname{Tor}_0^R(M, N)) + \operatorname{dh}(M).$$

Pelo Teorema 9, temos que

$$\operatorname{dh}(M) + \operatorname{depth}(M) = \operatorname{depth}(R).$$

Sabemos que o fato de R ser interseção completa implica que R é Cohen-Macaulay, ou seja, $\operatorname{depth}(R) = \dim(R)$. Portanto,

$$\operatorname{depth}(M) + \operatorname{depth}(N) = \dim(R) + \operatorname{depth}(M \otimes_R N).$$

Agora, escreva $S = \dfrac{\Lambda}{(f_1, \ldots, f_{r-1})}$ e $R = \dfrac{S}{(f)}$, onde $f = f_r$. Assumimos indutivamente que a proposição é válida para S-módulos.

Usando o Lema 7 temos que

$$\operatorname{Tor}_1^S(M, N) \simeq M \otimes_R N \quad \text{e} \quad \operatorname{Tor}_j^S(M, N) = 0 \text{ para } j \geq 2. \tag{3.1}$$

Como M é finitamente gerado, podemos considerar uma sequência exata

$$0 \to E \to S^{(m)} \to M \to 0. \tag{3.2}$$

Temos que $fM = 0$, daí, $\operatorname{depth}(M) < \dim(S) = \operatorname{depth}(S^{(m)})$. Daí, pelo Lema da profundidade,

$$\operatorname{depth}(E) = \operatorname{depth}(M) + 1.$$

Note que a sequência exata (3.2) induz uma sequência exata de Tor's e, por (3.1), obtemos que $\operatorname{Tor}_j^S(E, N) = 0$ para todo $j \geq 1$. Pela hipótese de indução temos que

$$\operatorname{depth}(E) + \operatorname{depth}(N) = \dim(S) + \operatorname{depth}(E \otimes_S N). \tag{3.3}$$

Equivalentemente,

$$\operatorname{depth}(M) + \operatorname{depth}(N) = \dim(R) + \operatorname{depth}(E \otimes_S N). \tag{3.4}$$

Resta provarmos que

$$\operatorname{depth}(M \otimes_S N) = \operatorname{depth}(E \otimes_S N). \tag{3.5}$$

A sequência exata (3.2) induz, via Tor, a sequência exata

$$0 \to \operatorname{Tor}_1^S(M, N) \to E \otimes_S N \to N^{(m)} \to M \otimes_S N \to 0. \tag{3.6}$$

Usando (3.1), podemos quebrar (3.6) em duas sequências exatas curtas:

$$0 \to M \otimes_S N \to E \otimes_S N \to W \to 0, \tag{3.7}$$

$$0 \to W \to N^{(m)} \to M \otimes_S N \to 0 \tag{3.8}$$

Suponha que $\operatorname{depth}(M \otimes_S N) < \operatorname{depth}(E \otimes_S N)$. Notemos que $\operatorname{depth}(E \otimes_S N) > \operatorname{depth}(W)$. Com efeito, se $\operatorname{depth}(E \otimes_S N) \leq \operatorname{depth}(W)$ temos, pelo Lema da profundidade, que $\operatorname{depth}(M \otimes_S N) \geq \operatorname{depth}(E \otimes_S N)$, o que contradiz nossa hipótese inicial. Aplicando o Lema da Profundidade a (3.7), obtemos que

$$\operatorname{depth}(M \otimes_S N) = 1 + \operatorname{depth}(W).$$

Afirmamos que $\operatorname{depth}(N) \leq \operatorname{depth}(M \otimes_S N) - 1$. De fato, se $\operatorname{depth}(N) = \operatorname{depth}(M \otimes_S N)$, aplicamos o Lema da profundidade a (3.8) e obtemos que $\operatorname{depth}(W) \geq \operatorname{depth}(N) = \operatorname{depth}(M \otimes_S N)$, o que é uma contradição. Por outro lado, se $\operatorname{depth}(N) > \operatorname{depth}(M \otimes_S N)$ o Lema da profundidade nos fornece que $\operatorname{depth}(W) = 1 + \operatorname{depth}(M \otimes_S N)$, que também é um absurdo. Daí,

$$\operatorname{depth}(N) \leq \operatorname{depth}(M \otimes_S N) - 1 < \operatorname{depth}(E \otimes_S N) - 1.$$

Ou seja,

$$\operatorname{depth}(E \otimes_S N) - \operatorname{depth}(N) > 1.$$

Por outro lado, segue de (3.3) que

$$\operatorname{depth}(E) - \dim(S) = \operatorname{depth}(E \otimes_S N) - \operatorname{depth}(N) > 1.$$

Com isso, $\operatorname{depth}(E) > \dim(S)$, que é obviamente falso.

Portanto, $\operatorname{depth}(E \otimes_S N) \leq \operatorname{depth}(M \otimes_S N)$. Suponha que

$$\operatorname{depth}(E \otimes_S N) < \operatorname{depth}(M \otimes_S N).$$

Note que se M é Cohen-Macaulay maximal, ou seja, $\operatorname{depth}(M) = \dim(R)$, a equação (3.4) nos fornece $\operatorname{depth}(N) = \operatorname{depth}(E \otimes_S N)$. Dái, aplicando o Lema da profundidade em (3.8), temos $\operatorname{depth}(W) = \operatorname{depth}(N)$. Portanto, $\operatorname{depth}(M \otimes_S N) \geq \operatorname{depth}(E \otimes_S N)$, e isso contradiz nossa hipótese.

Se M não é Cohen-Macaulay maximal, a aplicação do Lema da profundidade em (3.7) nos fornece que $\operatorname{depth}(W) = \operatorname{depth}(E \otimes_S N)$. De fato, se $\operatorname{depth}(W) < \operatorname{depth}(E \otimes_S N)$, temos que $\operatorname{depth}(M \otimes_S N) = \operatorname{depth}(W) + 1 \leq \operatorname{depth}(E \otimes_S N)$, contradizendo nossa hipótese. Por outro lado, se $\operatorname{depth}(W) > \operatorname{depth}(E \otimes_S N)$ temos que

$$\operatorname{depth}(M \otimes_S N) = \operatorname{depth}(E \otimes_S N),$$

que também é uma contradição. Perceba que

$$\operatorname{depth}(N) = \operatorname{depth}(W)(= \operatorname{depth}(E \otimes_S N)).$$

De fato, se $\operatorname{depth}(W) \neq \operatorname{depth}(N)$, então o lema da profundidade fornece que

$$\operatorname{depth}(M \otimes_S N) \leq \operatorname{depth}(N).$$

Caso $\operatorname{depth}(M \otimes_S N) < \operatorname{depth}(N)$, temos que

$$\operatorname{depth}(W) = 1 + \operatorname{depth}(M \otimes_S N) > \operatorname{depth}(E \otimes_S N),$$

que é um absurdo. Se isso não ocorre, então $\operatorname{depth}(M \otimes_S N) = \operatorname{depth}(N)$ e nesse caso, temos que $\operatorname{depth}(W) \geq \operatorname{depth}(N) = \operatorname{depth}(M \otimes_S N) > \operatorname{depth}(E \otimes_S N)$, porém isso também não é válido. Portanto, segue de (3.4) que $\operatorname{depth}(M) = \dim(R)$, entretanto isso contradiz o fato de que M não é Cohen-Macaulay maximal.

Finalmente, obtemos que $\operatorname{depth}(E \otimes_S N) = \operatorname{depth}(M \otimes_S N)$. Como

$$M \otimes_S N \simeq M \otimes_R N,$$

temos que (3.4) pode ser reescrita como queríamos, isto é:

$$\operatorname{depth}(M) + \operatorname{depth}(N) = \dim(R) + \operatorname{depth}(M \otimes_R N).$$

□

Corolário 7. *Sejam R uma interseção completa e M e N R-módulos tais que*

$$\operatorname{Tor}_i^R(M, N) = 0 \quad \textit{para todo } i \geq 1.$$

Se $M \otimes_R N$ é Cohen-Macaulay maximal então M e N são Cohen-Macaulay maximais.

Demonstração. Suponha, por absurdo, que M não é Cohen-Macaulay maximal, isto é, $\operatorname{depth}(M) < \dim(R)$. Note que $M \otimes_R N$ ser Cohen-Macaulay maximal implica que (3) pode ser escrita como:

$$\operatorname{depth}(M) + \operatorname{depth}(N) = 2\dim(R).$$

Daí, teríamos que $\operatorname{depth}(N) > \dim(R)$, o que é um absurdo. O mesmo raciocínio é válido para N. Portanto, temos que M e N são Cohen-Macaulay maximais. □

Corolário 8. *Sejam $R = \dfrac{S}{(f)}$ uma hipersuperfície, M e N R-módulos não-nulos dos quais ao menos um tem posto constante. Se $M \otimes_R N$ é reflexivo, então*

$$\operatorname{depth}(M) + \operatorname{depth}(N) = \dim(R) + \operatorname{depth}(M \otimes_R N).$$

Demonstração. Como $M \otimes_R N$ é reflexivo, segue do Teorema 7 que

$$\operatorname{Tor}_i^R(M, N) = 0, \quad \text{para todo } i \geq 1.$$

Como R é uma hipersuperfície, R é uma interseção completa. Portanto, segue da

Proposição 12 que

$$\operatorname{depth}(M) + \operatorname{depth}(N) = \dim(R) + \operatorname{depth}(M \otimes_R N).$$

$\square$

Exemplo 2. *Sejam R uma interseção completa d-dimensional, $I \subseteq R$ um ideal tal que $\frac{R}{I}$ seja Cohen-Macaulay e $x \in R$ um não-divisor-de-zero de R e de $\frac{R}{I}$. Defina $M := \frac{R}{I}$ e $N = \frac{R}{(x)}$. Note que $\operatorname{Tor}_1^R\left(\frac{R}{I}, \frac{R}{(x)}\right) = \frac{(x) \cap I}{(x)I} = 0$. Além disso, a sequência exata*

$$0 \to R \xrightarrow{\cdot x} R \to \frac{R}{(x)} \to 0$$

é uma resolução livre de N. Tensorizando-a com M e calculando os módulos de homologia, temos que

$$\operatorname{Tor}_i^R(M, N) = 0, \ \forall i \geq 2.$$

Portanto, M e N estão nas hipóteses da Proposição 12. Sabemos que

$$M \otimes_R N = \frac{R}{I} \otimes_R \frac{R}{(x)} \simeq \frac{R}{(x) + I}.$$

Como x é $\frac{R}{I}$-regular e $\frac{R}{I}$ é Cohen-Macaulay, temos que

$$\operatorname{depth}(M \otimes_R N) = \operatorname{depth}\left(\frac{R}{(x) + I}\right) = \dim\left(\frac{R}{I}\right) - 1.$$

Daí,

$$\operatorname{depth}(M \otimes_R N) + \dim(R) = \dim\left(\frac{R}{I}\right) - 1 + d$$

e

$$\operatorname{depth}(M) + \operatorname{depth}(N) = \dim\left(\frac{R}{I}\right) + \dim\left(\frac{R}{(x)}\right) = \dim\left(\frac{R}{I}\right) + d - 1.$$

Com isso, temos que vale a fórmula da proposição.

Apêndice A

Os módulos Tor e Ext

A.1 Resoluções livres

Sejam R um anel e M um R-módulo finitamente gerado. Sabe-se que M é isomorfo a um quociente de um R-módulo livre de posto finito F_0. Seja $Z_1 \subset F_0$ um R-submódulo tal que $M \simeq \dfrac{F_0}{Z_1}$. Em outras palavras, se consideramos $\{m_1, \ldots, m_n\} \subset M$ conjunto de geradores e $\{e_1, \ldots, e_n\} \subset F_0$ os vetores da base canônica, então a sequência

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & Z_1 & \xrightarrow{i} & F_0 & \xrightarrow{\pi_0} & M & \to & 0 \\ & & & & e_i & \longmapsto & m_i & & \end{array}$$

é exata. Analogamente, Z_1 é finitamente gerado e portanto é isomorfo a um quociente de um R módulo livre de posto finito F_1. Seja $Z_2 \subset F_1$ um R-submódulo tal que $Z_1 \simeq \dfrac{F_1}{Z_2}$. Temos a sequência exata

$$0 \to Z_2 \xrightarrow{i} F_1 \xrightarrow{\pi_1} Z_1 \to 0.$$

Observe que

$$\begin{tikzcd}
& & F_1 \arrow[rr, "\varphi_1 = i\circ\pi_1"] \arrow[dr, "\pi_1"'] & & F_0 \arrow[r, "\pi_0"] & M \arrow[r] & 0 \\
& Z_2 \arrow[ur, "i_2"] & & Z_1 \arrow[ur, "i_1"'] \arrow[dr] & & & \\
0 \arrow[ur] & & 0 \arrow[ur] & & 0 & &
\end{tikzcd}$$

satisfaz que

$$\mathrm{Im}(\varphi_1) = (i \circ \pi_1)(F_1) = i(Z_1) = \ker(\pi_0).$$

E

$$\begin{aligned}
\ker(\varphi_1) &= \{x \in F_1 | \varphi_1(x) = 0\} \\
&= \{x \in F_1 | (i \circ \pi_1)(x) = 0\} \\
&= \{x \in F_1 | \pi_1(x) = 0\} \\
&= \ker(\pi_1) = Z_2 = i(Z_2).
\end{aligned}$$

Logo, a sequência

$$0 \to Z_2 \xrightarrow{i_2} F_1 \xrightarrow{\varphi_1} F_0 \xrightarrow{\pi_0} M \to 0$$

é exata. Procedendo dessa maneira, obtemos uma sequência exata

$$\cdots \to F_i \xrightarrow{\varphi_i} F_{i-1} \xrightarrow{\varphi_{i-1}} \cdots \to F_1 \xrightarrow{\varphi_1} F_0 \xrightarrow{\pi_0} M \to 0,$$

onde os $F_i's$ são R-módulos livres de posto finito. Tal sequência exata é chamada de *resolução livre de M*. Cada R-módulo $Z_i \subset F_{i-1}$ é chamado de *i-ésimo módulo de sízígias* de M. Costuma-se dizer que Z_1 é o módulo de sizígias ou de relações de M.

Exemplo 3. *Sejam k um corpo, $R = k[x, y]$ e $M = (x^2, xy) \subset R$.*

Considere a sequência exata

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & Z_1 & \xrightarrow{i} & R^2 & \longrightarrow & M & \to & 0, \\
 & & & & (f, g) & \longmapsto & fx^2 + gxy & &
\end{array}$$

onde Z_1 é o primeiro módulo de sizígias de M. Daí,

$$\begin{aligned}
(p, q) \in Z_1 &\iff px^2 + qxy = 0 \\
&\iff px^2 = -qxy \\
&\iff px = -qy. \quad (\star)
\end{aligned}$$

Logo, $px \in (y)$. Como (y) é ideal primo e $x \notin (y)$, temos que $p \in (y)$. Consequentemente, existe $\tilde{p} \in R$ tal que $p = \tilde{p}y$.. Por $(\star)$, temos que que $-qy = y\tilde{p}x \implies q = -\tilde{p}x$.

Segue que

$$(p, q) = (y\tilde{p}, -x\tilde{p}) = \tilde{p}(y, -x).$$

Daí, $Z_1 = R(y, -x)$. Matricialmente,

$$R \xrightarrow{\varphi_1 = \binom{y}{-x}} R^2 \longrightarrow M \longrightarrow 0\ .$$

Note que φ_1 é injetor. De fato, se $h \in \ker(\varphi_1)$, então

$$\begin{aligned} \varphi_1(h) = (0,0) \quad &\Longleftrightarrow \quad (yh, -xh) = (0,0) \\ &\Longleftrightarrow \quad h = 0. \end{aligned}$$

Portanto, obtemos uma resolução livre finita para M e ela é dada por:

$$0 \to R \xrightarrow{\varphi_1} R^2 \to M \to 0.$$

Observação 13. *Prova-se que se R é um anel local regular, então qualquuer R-módulo finitamente gerado possui resolução livre finita. Isto é, alguma das aplicações φ_i é injetora, ou equivalentemente, $Z_{i+1} = 0$ e $Z_i = F_i$. Porém, em anéis mais gerais, pode-se ter módulos com resolução livre infinita e até mesmo periódica.*

A.2 Sobre o módulo Tor

Sejam R um anel e M um R-módulo finitamente gerado. Considere

$$\mathbb{F} : \cdots \to F_i \xrightarrow{\varphi_i} F_{i-1} \xrightarrow{\varphi_{i-1}} \cdots \to F_1 \xrightarrow{\varphi_1} F_0 \xrightarrow{\pi_0} M \to 0,$$

uma resolução livre de M como R-módulo. Dado um R-módulo finitamente gerado N, podemos considerar o complexo $\mathbb{F} \otimes_R N$, induzido ao tensorizarmos $\mathbb{F}$ com N:

$$\cdots \to F_i \otimes_R N \xrightarrow{\varphi_i \otimes \mathrm{Id}_N} F_{i-1} \otimes_R N \to \cdots \to F_1 \otimes_R N \xrightarrow{\varphi_1 \otimes \mathrm{Id}_N} F_0 \otimes_R N \xrightarrow{\pi_0 \otimes \mathrm{Id}} M \otimes_R N \to 0,$$

Definição 38. *Para cada $i \geq 0$, o i-ésimo* Tor *do par M e N é o R-módulo*

$$\mathrm{Tor}_i^R(M, N) := \mathbb{H}_i(\mathbb{F} \otimes_R N),$$

onde $\mathbb{H}_i(\mathbb{F} \otimes_R N)$ *denota o i-ésimo módulo de homologia do complexo* $\mathbb{F} \otimes_R N$. *Explicitamente:*

$$\mathrm{Tor}_i^R(M, N) = \frac{\ker(\varphi_i \otimes \mathrm{Id}_N)}{\mathrm{Im}(\varphi_{i+1} \otimes \mathrm{Id}_N)}.$$

Observação 14. *Mostra-se que essa definição não depende da resolução livre escolhida e que podemos calcular* $\mathrm{Tor}_i^R(M, N)$ *a partir de uma resolução livre de* N. *Além disso, é claro que* $\mathrm{Tor}_i^R(M, N) = 0$ *se, e somente se, o complexo* $\mathbb{F} \otimes_R N$ *for exato na i-ésima etapa.*

Proposição 13 (Propriedades do módulo Tor)**.** *Sejam* R *um anel e* M *e* N R*-módulos finitamente gerados.*

1. $\mathrm{Tor}_0^R(M, N) \simeq M \otimes_R N$
2. *Se* M *ou* N *é livre, então* $\mathrm{Tor}_j^R(M, N) = 0$ *para todo* $j \geq 1$.
3. $\mathrm{Tor}_n^R(M, N) \simeq \mathrm{Tor}_n^R(N, M)$, *para todo* $n \geq 0$.
4. *Se* $P \subset R$ *é um ideal primo, então* $(\mathrm{Tor}_n^R(M, N))_P \simeq \mathrm{Tor}_n^{R_P}(M_P, N_P)$.

Demonstração. Ver [[4], A3.10]. $\square$

Proposição 14 (Sequência exata longa induzida pelo Tor.)**.** *Sejam* R *um anel e*

$$0 \to M \to N \to Q \to 0$$

uma sequência exata curta de R*-módulos finitamente gerados. Então dado um* R*-módulo* P, *existe uma sequência exata longa induzida pelo* Tor *que é dada por:*

$$\begin{array}{lccccccc}
\to & \mathrm{Tor}_j^R(M,P) & \to & \mathrm{Tor}_j^R(N,P) & \to & \mathrm{Tor}_j^R(Q,P) & \to & \\
\cdots & & & & & & & \\
\to & \mathrm{Tor}_2^R(M,P) & \to & \mathrm{Tor}_2^R(N,P) & \to & \mathrm{Tor}_2^R(Q,P) & \to & \\
\to & \mathrm{Tor}_1^R(M,P) & \to & \mathrm{Tor}_1^R(N,P) & \to & \mathrm{Tor}_1^R(Q,P) & \to & \\
\to & Q \otimes_R P & \to & N \otimes_R P & \to & Q \otimes_R P & \to & 0
\end{array}$$

Demonstração. Ver [[4], Seção 6.2]. $\square$

Exemplo 4. *Sejam* R *um anel e* $I, J \subset R$ *ideais. Então,* $\mathrm{Tor}_1^R\left(\frac{R}{I}, \frac{R}{J}\right) = \frac{I \cap J}{IJ}$.

De fato, a sequência

$$0 \to I \xrightarrow{i} R \xrightarrow{\pi} \frac{R}{I} \to 0$$

é exata. Daí, usando a Proposição 14, temos que a seguinte sequência exata:

$$\begin{array}{ccccccccc}
\to & \operatorname{Tor}_j^R\left(I, \dfrac{R}{J}\right) & \to & \operatorname{Tor}_j^R\left(R, \dfrac{R}{J}\right) & \to & \operatorname{Tor}_j^R\left(\dfrac{R}{I}, \dfrac{R}{J}\right) & \to & \\
\cdots & & & & & & & \\
\to & \operatorname{Tor}_2^R\left(I, \dfrac{R}{J}\right) & \to & \operatorname{Tor}_2^R\left(R, \dfrac{R}{J}\right) & \to & \operatorname{Tor}_2^R\left(\dfrac{R}{I}, \dfrac{R}{J}\right) & \to & \\
\to & \operatorname{Tor}_1^R\left(I, \dfrac{R}{J}\right) & \to & \operatorname{Tor}_1^R\left(R, \dfrac{R}{J}\right) & \to & \operatorname{Tor}_1^R\left(\dfrac{R}{I}, \dfrac{R}{J}\right) & \to & \\
\to & I \otimes_R \dfrac{R}{J} & \to & R \otimes_R \dfrac{R}{J} & \to & \dfrac{R}{I} \otimes_R \dfrac{R}{J} & \to & 0
\end{array}$$

Como R é um R-módulo livre, temos que $\operatorname{Tor}_1^R\left(R, \dfrac{R}{J}\right) = 0$. Daí, temos a seguinte sequência exata:

$$0 \to \operatorname{Tor}_1^R\left(\frac{R}{I}, \frac{R}{J}\right) \xrightarrow{\varphi} \frac{I}{IJ} \xrightarrow{i} \frac{R}{J} \to \frac{R}{I} \otimes_R \frac{R}{J} \to 0.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\operatorname{Tor}_1^R\left(\frac{R}{I}, \frac{R}{J}\right) &\simeq \operatorname{Im}(\varphi) \\
&= \ker(i) \\
&= \left\{\overline{a} \in \frac{I}{IJ}; i(\overline{a}) = \overline{0} \text{ em } \frac{R}{J}\right\} \\
&= \left\{\overline{a} \in \frac{I}{IJ}; a \in J\right\} \\
&= \frac{I \cap J}{IJ}.
\end{aligned}$$

A.3 Sobre o módulo Ext

Sejam R um anel e M um R-módulo finitamente gerado. Mais uma vez, considere

$$\mathbb{F} : \cdots \to F_i \xrightarrow{\varphi_i} F_{i-1} \xrightarrow{\varphi_{i-1}} \cdots \to F_1 \xrightarrow{\varphi_1} F_0 \xrightarrow{\pi_0} M \to 0,$$

uma resolução livre de M. Dado um R-módulo finitamente gerado N, tal sequência exata induz o complexo (através da aplicação do funtor $\mathrm{Hom}_R(\_, N)$)):

$$\mathrm{Hom}_R(\mathbb{F}, N) : 0 \to \mathrm{Hom}_R(F_0, N) \xrightarrow{\psi^{(0)}} \mathrm{Hom}_R(F_1, N) \xrightarrow{\psi^{(1)}} \cdots \to \mathrm{Hom}_R(F_i, N) \xrightarrow{\psi^{(i)}} \cdots,$$

onde $\psi^{(i)} = \mathrm{Hom}_R(\varphi_{i+1}, N)$.

Definição 39. *O i-ésimo* Ext *do par de módulos M e N é o i-ésimo módulo de cohomologia do complexo* $\mathrm{Hom}_R(\mathbb{F}, N)$, *ou seja,*

$$\mathrm{Ext}^i_R(M, N) := \mathbb{H}^i(\mathrm{Hom}_R(\mathbb{F}, N)) = \frac{\ker(\psi^{(i)})}{\mathrm{Im}(\psi^{(i-1)})}.$$

Observação 15. *É possível provar que essa definição não depende da escolha da resolução livre de M e que* $\mathrm{Ext}^0_R(M, N) \simeq \mathrm{Hom}_R(M, N)$.

Proposição 15 (Propriedades do módulo Ext.)**.** *Seja R um anel.*

1. *Se F é um R-módulo livre, então* $\mathrm{Ext}^i_R(F, N) = 0$, *para todo* $i \geq 1$, *qualquer que seja o R-módulo N.*

2. *Uma sequência exata curta de R-módulos*

$$0 \to M \to N \to Q \to 0$$

e um R-módulo P induzem uma sequência exata longa:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \to & \mathrm{Hom}_R(P, M) & \to & \mathrm{Hom}_R(P, N) & \to & \mathrm{Hom}_R(P, Q) & \to \\ \to & \mathrm{Ext}^1_R(P, M) & \to & \mathrm{Ext}^1_R(P, N) & \to & \mathrm{Ext}^1_R(P, Q) & \to \\ \cdots & & & & & & \\ \to & \mathrm{Ext}^i_R(P, M) & \to & \mathrm{Ext}^i_R(P, N) & \to & \mathrm{Ext}^1_R(P, Q) & \to \cdots \end{array}$$

3. *Uma sequência exata curta de R-módulos*

$$0 \to M \to N \to Q \to 0$$

e um R-módulo P induzem uma sequência exata longa:

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 \to & \mathrm{Hom}_R\,(Q,P) & \to & \mathrm{Hom}_R\,(N,P) & \to & \mathrm{Hom}_R\,(M,P) & \to \\
\to & \mathrm{Ext}^1_R\,(Q,P) & \to & \mathrm{Ext}^1_R\,(N,P) & \to & \mathrm{Ext}^1_R\,(M,P) & \to \\
\cdots & & & & & & \\
\to & \mathrm{Ext}^i_R\,(Q,P) & \to & \mathrm{Ext}^i_R\,(N,P) & \to & \mathrm{Ext}^1_R\,(M,P) & \to & \cdots
\end{array}$$

4. *Se $P \subset R$ é um ideal primo, então $\left(\mathrm{Ext}^i_R\,(M,N)\right)_P \simeq \mathrm{Ext}^i_{R_P}\,(M_P,N_P)$ para todo $i \geq 0$.*

Demonstração. Ver [[4], A3.11]. □

Referências Bibliográficas

[1] Atiyah, M. F.; MacDonald, I. G. *Introduction to Commutative Algebra.* Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, (1969), 128 p.

[2] Auslander, M: *Modules over unramified regular local rings.* III. J. Math. **5**, 631-647 (1961);

[3] Bruns, W. Herzog, J. *Cohen-Macaulay rings.* Cambridge University Press, Cambridge, 1993.

[4] Eisenbud, D. *Commutative Algebra with a View Toward Algebraic Geometry.* Graduate Texts in Mathematics, vol. 150, Springer-Verlag, New York (1995), 787 p.

[5] Heitmann, R. Wiegand, R.: Direct sum of ideals. Linear Algebra Appl. 157, 21-36, (1991).

[6] Huneke, C and Wiegand, R., *Tensor products of modules and rigidity of Tor*, Math Ann. 299 (1994), 439-476;

[7] Huneke, C. and Wiegand, R. *Tensor products of modules, rigidity and local cohomology.* Mathematica Scandinavica, vol. 81, no. 2, 1997, pp. 161-183.

[8] Lichtenbaum, S. *On the vanishing of Tor in regular local rings."* Illinois Journal of Mathematics 10.2 (1966): 220-226.

[9] Matsumura, H. *Commutative Ring Theory.* Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Cambridge University Press, (1986), 320 p.

[10] Vasconcelos, W.: Reflexive modules over Gorenstein rings. Proc. Am. Math. Soc. 19, 1349-1355 (1968).