Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Simetria de extremais para desigualdades de Trudinger-Moser com peso do tipo Hénon

Ranieri de França Freire

João Pessoa – PB
Agosto de 2020

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Simetria de extremais para desigualdades de Trudinger-Moser com peso do tipo Hénon

por

Ranieri de França Freire

sob a orientação do

Prof. Dr. Everaldo Souto de Medeiros

João Pessoa – PB
Agosto de 2020

Catalogação na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

F866s Freire, Ranieri de França.
Simetria de extremais para desigualdades de Trudinger-Moser com peso do tipo Hénon / Ranieri de França Freire. - João Pessoa, 2020.
100 f. : il.

Orientação: Everaldo Souto de Medeiros Medeiros.
Dissertação (Mestrado) - UFPB/CCEN.

1. Matemática. 2. Funções extremais. 3. Desigualdade de Trudinger-Moser. 4. Problema de Hénon. I. Medeiros, Everaldo Souto de Medeiros. II. Título.

UFPB/BC CDU 51(043)

Elaborado por MARILIA RIANNY PEREIRA COSMOS - CRB-0862

Simetria de extremais para desigualdades de Trudinger-Moser com peso do tipo Hénon

por

Ranieri de França Freire

Dissertação apresentada ao corpo docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Análise.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Everaldo Souto de Medeiros - UFPB - Orientador

Prof. Dr. João Marcos Bezerra do Ó - UFPB - Examinador interno

Manuela Caetano Martins de Rezende

Profa. Dr. Manuela Caetano Martins de Rezende - UnB - Examinador externo

Prof. Dr. Emerson Alves Mendonca de Abreu - UFMG - Examinador externo

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus. À minha família pelo apoio de sempre. À Angelina Julia por ter me apoiado o tempo todo diante das dificuldades. Aos meus companheiros de curso que compartilharam os desafios e me ajudaram muito a ser um estudante melhor. Ao professor e orientador Everaldo pelas importantes contribuições a este trabalho e por ter proporcionado uma excelente preparação para encarar os desafios deste trabalho. A todos os professores que contribuíram com meu desenvolvimento tanto na graduação quanto no mestrado. E a Capes pelo importante apoio financeiro.

Resumo

Neste trabalho, estudaremos existência, simetria e comportamento assintótico das funções extremais do problema

$$S(\alpha,\gamma)=\sup_{\substack{u\in H^1(\Omega)\\ \|u\|\leq 1}}\int_\Omega (e^{\alpha u^2}-1)|x|^\gamma dx, \tag{1}$$

onde Ω é a bola unitária de $\mathbb{R}^2$, $\gamma,\alpha>0$. Mostraremos propriedades de simetria das extremais quando $\gamma\to\infty$ e $\alpha\to 0$. Estudaremos também, pela sua influência no problema (1), a simetria e comportamento assintótico, quando $\alpha\to 0$, das funções extremais para a desigualdade de Trudinger-Moser no traço, isto é,

$$T(\alpha)=\sup_{\substack{u\in H^1(\Omega)\\ \|u\|\leq 1}}\int_{\partial\Omega} (e^{\alpha u^2}-1)d\sigma. \tag{2}$$

Palavras-chave: Funções extremais, desigualdade de Trudinger-Moser no traço, problema de Hénon.

Abstract

In this work, we will study the existence, symmetry and asymptotic behavior of the extremal functions of the problem

$$S(\alpha,\gamma)=\sup_{\substack{u\in H^1(\Omega)\\ \|u\|\leq 1}}\int_\Omega (e^{\alpha u^2}-1)|x|^\gamma dx, \tag{1}$$

where Ω is the unit ball of $\mathbb{R}^2$, $\gamma,\alpha>0$. We will show symmetry properties as $\gamma\to\infty$ and $\alpha\to 0$. We will also study, due to its influence on the problem (1), the symmetry and asymptotic behavior, as $\alpha\to 0$, of the extremal functions for the Trudinger-Moser trace inequality, that is,

$$T(\alpha)=\sup_{\substack{u\in H^1(\Omega)\\ \|u\|\leq 1}}\int_{\partial\Omega} (e^{\alpha u^2}-1)d\sigma. \tag{2}$$

Keywords: Extremal functions, Trudinger-Moser trace inequality, Hénon problem.

Sumário

Introdução

Considere Ω a bola unitária de $\mathbb{R}^2$, $\gamma, \alpha > 0$ e

$$S(\alpha,\gamma) := \sup_{\substack{u\in H^1(\Omega)\\ \|u\|\le 1}} \int_\Omega (e^{\alpha u^2}-1)|x|^\gamma dx. \tag{1}$$

O termo exponencial é o termo característico das desigualdades do tipo Trudinger-Moser, cujos primeiros estudos se devem principalmente a Yudovich [37], Pohozaev [26], Trudinger [32] e Moser [24], enquanto o peso $|x|^\gamma$ é característico dos problemas do tipo Hénon, que surgiu numa equação proposta por Hénon [15] como modelo para estudos no contexto da astrofísica. Baseado no artigo [3], o interesse deste trabalho consiste em estudar as propriedades simétricas das funções extremais de (1), isto é, funções que realizam o supremo em (1). Mais especificamente, queremos descrever, em termo dos parâmetros α e γ, quando ocorrerão fenômenos de quebra de simetria, isto é, quando as funções que atingem tal supremo não estão no espaço das funções radialmente simétricas de $H^1(\Omega)$, o qual denotamos por $H^1_{\mathrm{rad}}(\Omega)$. Vários outros estudos abordam a questão da simetria para funções extremais para funcionais com peso de Hénon como, por exemplo, [30], [29] e [13] que tratam do caso Sobolev, ou seja,

$$\sup \int_\Omega |u|^p|x|^\gamma dx$$

e [28] que igualmente a este trabalho aborda o caso Trudinger-Moser, porém com o supremo tomado em $H^1_0(\Omega)$.

A maneira mais natural de atacar o problema é considerar a restrição de (1) a $H^1_{\mathrm{rad}}(\Omega)$:

$$S_r(\alpha,\gamma) := \sup_{\substack{u\in H^1_{\mathrm{rad}}(\Omega)\\ \|u\|\le 1}} \int_\Omega (e^{\alpha u^2}-1)|x|^\gamma dx \tag{2}$$

e analisar, para valores grandes de γ, se $S(\alpha,\gamma) > S_r(\alpha,\gamma)$, o que nos daria a quebra de simetria, ou $S(\alpha,\gamma) = S_r(\alpha,\gamma)$, tendo então que $S(\alpha,\gamma)$ é atingido por uma função radial. Porém, tudo ainda depende da margem estabelecida para α. No Capítulo 1 o principal foco está na questão de existência de funções extremais para $S(\alpha,\gamma)$ e $S_r(\alpha,\gamma)$. Mostraremos que a margem para o parâmetro α em que se pode trabalhar nesse sentido com $S(\alpha,\gamma)$ é determinada pela desigualdade de Trudinger-Moser em $H^1(\Omega)$. Nesse caso, temos:

Teorema 0.1. *Para todo $\alpha > 0$ e $u \in H^1(\Omega)$ tem-se que $e^{\alpha u^2} \in L^1(\Omega)$. Além disso,*

$$\sup_{\substack{u \in H^1(\Omega) \\ \|u\| \leq 1}} \int_\Omega e^{\alpha u^2} dx < +\infty,$$

se, e somente se, $\alpha \leq 2\pi$. O supremo é atingindo sempre que é finito.

O Teorema 0.1 motiva o seguinte resultado.

Teorema 0.2. *Para todo $\alpha < 2\pi$ e $\gamma > 0$,*

$$S(\alpha, \gamma) = \sup_{\substack{u \in H^1(\Omega) \\ \|u\| \leq 1}} \int_\Omega (e^{\alpha u^2} - 1)|x|^\gamma dx$$

é atingido. Se u atinge $S(\alpha, \gamma)$, então $\|u\| = 1$.

Temos também a finitude de $S(\alpha, \gamma)$ para o caso $\alpha = 2\pi$ porém, nesse caso, não se tem a garantia de que o supremo seja realizado por alguma função $u \in H^1(\Omega)$. Com respeito a existência de extremais para $S_r(\alpha, \gamma)$ ocorre um fenômeno semelhante ao que ocorreu em outros estudos(Ni[25], Gazzini et al[13]) nessa direção de simetria para problema com peso de Hénon, que é o fato da ampliação da margem de existência para uma função extremal sobre $H^1_{\text{rad}}(\Omega)$ para além do limite habitual, o que ocorre devido à presença do peso $|x|^\gamma$. No nosso caso,

Teorema 0.3. *Para todo $\alpha < 2\pi(\gamma + 2)$, $\gamma > 0$,*

$$S_r(\alpha, \gamma) = \sup_{\substack{u \in H^1_{rad}(\Omega) \\ \|u\| \leq 1}} \int_\Omega (e^{\alpha u^2} - 1)|x|^\gamma dx$$

é finito e é atingido por uma função radial. Além disso, $\|u\| = 1$.

Com o objetivo de comparar $S_r(\alpha, \gamma)$ a $S(\alpha, \gamma)$ para valores grandes de γ, no Capítulo 2 estudaremos o comportamento assintótico destes dois termos. Um fato interessante que ocorre nessa análise é que o comportamento assintótico de $S_r(\alpha, \gamma)$ e das funções que o atingem podem ser descritos em termos do primeiro autovalor e da primeira autofunção do problema de Steklov, que é dado por

$$\begin{cases} -\Delta u + u = 0, & \text{em} \quad \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = \lambda u, & \text{sobre} \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

Este fato nos leva primeiramente a focar nas propriedades desse autovalor e dessa autofunção e posteriormente compreender a construção da sequência de autovalores do problema, que é feita ao analisar níveis críticos do funcional $u \longmapsto \int_{\partial\Omega} u^2 d\sigma$, definido em $H^1(\Omega)$. Unindo a análise assintótica de $S_r(\alpha, \gamma)$ com algumas estimativas temos, ainda neste capítulo, o primeiro resultado de quebra de simetria, a saber:

Teorema 0.4. *Suponha que $\alpha \in (\pi, 2\pi)$. Então, para γ suficientemente grande, toda extremal para $S(\alpha,\gamma)$ é não radial.*

O capítulo é finalizado expondo o comportamento assintótico de $S(\alpha,\gamma)$ para $\alpha \in (0,\pi)$ através do seguinte resultado:

Proposição 0.5. Suponha que $\alpha < \pi$. Então,

$$\lim_{\gamma\to\infty}(\gamma+2)S(\alpha,\gamma) = T(\alpha),$$

onde

$$T(\alpha) := \sup_{\substack{u\in H^1(\Omega)\\ \|u\|\leq 1}} \int_{\partial\Omega} (e^{\alpha u^2}-1)d\sigma.$$

No Capítulo 3, o nosso principal foco é o estudo das desigualdades de Trudinger-Moser no traço. Tal caminho é indicado ao unirmos as informações dadas pelo comportamento assintótico de $S(\alpha,\gamma)$ e $S_r(\alpha,\gamma)$ que indicam, para $\alpha \in (0,\pi)$, que quebras de simetria para $S(\alpha,\gamma)$ podem ser geradas por quebras de simetria em $T(\alpha)$. A análise assintótica, nesse caso, passa a ser feita para valores pequenos de α. A influência do problema de Steklov é ainda mais forte, a primeira autofunção é a única função que atinge $T(\alpha)$ em $H^1_{\text{rad}}(\Omega)$ e alguns dos principais resultados do capítulo são obtidos olhando para essa autofunção como um ponto crítico do funcional

$$Q^\alpha(u) := \int_{\partial\Omega} (e^{\alpha u^2}-1)d\sigma$$

sobre a esfera unitária de $H^1(\Omega)$. Os principais resultados do capítulo são resumidos em:

Teorema 0.6. *Sejam λ_1 e λ_2 os dois primeiros autovalores do problema de Steklov e φ_1 a primeira autofunção, positiva, radial e normalizada em $H^1(\Omega)$. Então,*

(1) para todo $\alpha \in (0, \pi(\lambda_2-\lambda_1))$, φ_1 é um máximo local não degenerado para Q^α na esfera unitária de $H^1(\Omega)$;

(2) para todo $\alpha \in (\pi(\lambda_2-\lambda_1), \pi]$, todos os maximizantes de Q^α na esfera unitária são não radiais;

(3) para todo α suficientemente pequeno, φ_1 é o único maximizante de Q^α na esfera unitária.

No Capítulo 4, finalizamos o trabalho voltando a questão da quebra de simetria para o problema com peso de Hénon. Os principais resultados desse capítulo são:

Teorema 0.7. *Sejam λ_1, λ_2 os dois primeiros autovalores do problema de Steklov. Então,*

(1) para todo $\alpha \in (\pi(\lambda_2-\lambda_1), 2\pi)$, todos os extremais de $S(\alpha,\gamma)$ são não radiais, para γ suficientemente grande;

(2) para todo α suficientemente pequeno e todo $\gamma > 0$, $S(\alpha, \gamma)$ possui uma única extremal, a qual é radial.

Esclarecendo os fatos que geram tais quebras de simetria. No item (1), há influência direta do Teorema 0.4 e do item (2) do Teorema 0.6. No item (2), a prova é feita por contradição, onde supomos a existência de sequências $\alpha_n \to 0$, $\gamma_n \to \infty$(ou $\gamma_n \to \gamma \geq 0$) e u_n, v_n extremos distintos para $S(\alpha_n, \gamma_n)$, sendo necessárias uma série de estimativas e análises de comportamento assintótico quando $n \to \infty$, que são expressos num conjunto de lemas e, ao obter a unicidade, concluímos que este único extremo deve ser radial.

Capítulo 1

Existência de Extremal

Neste capítulo trataremos a questão da existência de funções extremais radiais e não radiais para

$$S(\alpha,\gamma)=\sup_{\substack{u\in H^1(\Omega)\\ \|u\|\leq 1}}\int_\Omega (e^{\alpha u^2}-1)|x|^\gamma dx.$$

Como esperado, tal questão é diretamente influenciada pela existência de funções que atingem o supremo na desigualdade de Trudinger-Moser em $H^1(\Omega)$. No que segue, $\|\cdot\|$ sempre denotará a norma de $H^1(\Omega)$ onde Ω é bola unitária de $\mathbb{R}^2$.

1.1 Desigualdades de Trudinger-Moser

Nesta seção o nosso foco será estabelecer a desigualdade de Trudinger-Moser em $H^1(\Omega)$, dando atenção também para a desigualdade no traço. Tais resultados moldarão grande parte das restrições ao termo α ao longo de todo o trabalho.

Em $H_0^1(\Omega)$ a seguinte desigualdade de Trudinger-Moser é válida

Teorema 1.1. *Seja $\Omega\subset\mathbb{R}^2$ um aberto limitado. Para todo $\alpha>0$ e $u\in H_0^1(\Omega)$ tem-se que $e^{\alpha u^2}\in L^1(\Omega)$. Além disso,*

$$\sup_{\substack{u\in H_0^1(\Omega)\\ \|\nabla u\|_2\leq 1}}\int_\Omega e^{\alpha u^2}dx<\infty$$

se, e somente se, $\alpha\leq 4\pi$.

Demonstração. Veja Moser [24, Theorem 1].

□

Além do resultado acima, para provar a desigualdade de Trudinger-Moser em $H^1(\Omega)$ precisaremos do auxílio de alguns lemas.

Lema 1.2. Definamos
$$A_1 = \{\alpha : \sup_{\substack{u \in V_1 \\ \|\nabla u\|_2 \leq 1}} \int_\Omega e^{\alpha u^2} dx < \infty\},$$
onde
$$V_1 = \{u \in H^1(\Omega) : \int_\Omega u dx = 0\},$$
e
$$A_2 = \{\alpha : \sup_{\substack{u \in V_2 \\ \|\nabla u\|_2 \leq 1}} \int_{\partial\Omega} e^{\alpha u^2} d\sigma < \infty\},$$
onde
$$V_2 = \{u \in H^1(\Omega) : \int_{\partial\Omega} u d\sigma = 0\}.$$
Então $\sup A_1 = 2\pi$ e $\sup A_2 = \pi$.

Demonstração. Veja Adimurthi-Yadava [2, Lemma 3.1 and 3.2].

□

Para $L > 0$ e $l \in (0, L)$ considere a família de funções definida por:
$$m_l(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \begin{cases} \sqrt{\log(\frac{L}{l})}, & \text{se} \quad 0 \leq |x| \leq l, \\ \frac{\log(\frac{L}{|x|})}{\left(\log(\frac{L}{l})\right)^{1/2}}, & \text{se} \quad l \leq |x| \leq L, \\ 0, & \text{se} \quad |x| \geq L. \end{cases}$$
Uma família de funções nesta forma é conhecida como sequência de Moser.

Lema 1.3. Para todo $x_0 \in \partial\Omega$ existe $L > 0$ tal que para cada $l \in (0, L)$ existe $w_l \in H^1(\Omega)$ tal que

(1) $w_l \geq 0$, supp $w_l \subset B(x_0, L) \cap \overline{\Omega}$;

(2) $\|w_l\| = 1$;

(3) para todo $x \in B(x_0, l) \cap \overline{\Omega}$, w_l é constante e $w_l^2(x) = \frac{1}{\pi} \log \frac{L}{l} + O(1)$ quando $l \to 0$.

Demonstração. Veja Adimurthi-Yadava [2, Lemma 3.3].

□

Tal sequência se trata de $m_l(x - x_0)$ restrita a Ω e normalizada.

Em $H^1(\Omega)$ temos a seguinte desigualdade de Trudinger-Moser:

Teorema 1.4 (Trudinger-Moser)**.** *Para todo $\alpha > 0$ e $u \in H^1(\Omega)$ tem-se que $e^{\alpha u^2} \in L^1(\Omega)$. Além disso,*

$$\sup_{\substack{u \in H^1(\Omega) \\ \|u\| \leq 1}} \int_\Omega e^{\alpha u^2} dx < +\infty,$$

se, e somente se, $\alpha \leq 2\pi$. O supremo é atingindo sempre que é finito.

Demonstração. Vejamos primeiramente que $e^{\alpha u^2} \in L^1(\Omega)$ para todo $\alpha > 0$. Seja $r > 0$ tal que $\overline{\Omega} \subset B(0,r)$ e note que $H^1(\Omega) = H = \{u|_\Omega : u \in H_0^1(B(0,r))\}$. De fato, dada $u \in H^1(\Omega)$, pelo Teorema B.8, existe $v \in H^1(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$u = v \text{ q.t.p. em } \Omega, \quad \operatorname{supp} v \subset B(0,r) \quad \text{e} \quad \|v\|_{H^1(\mathbb{R}^n)} \leq C\|u\|.$$

Nesse caso temos $v \in H^1(\mathbb{R}^n) = H_0^1(\mathbb{R}^n)$. Como o suporte de v está em $B(0,r)$, temos $v \in H_0^1(B(0,r))$, logo $u \in H$. A inclusão contrária é óbvia. Segue do Teorema 1.1 que, sendo $u \in H_0^1(B(0,r))$, tem-se $e^{\alpha u^2} \in L^1(B(0,r))$ para todo $\alpha > 0$, consequentemente, $e^{\alpha u^2} \in L^1(\Omega)$ para todo $\alpha > 0$ e $u \in H^1(\Omega)$.

Considere

$$S_\alpha = \sup_{\substack{u \in H^1(\Omega) \\ \|u\| \leq 1}} \int_\Omega e^{\alpha u^2} dx$$

e o conjunto $A_1' = \{\alpha : S_\alpha < \infty\}$ e vejamos que $\sup A_1' = 2\pi$. Sejam $\alpha < 2\pi$, $\varepsilon > 0$ tais que $\alpha(1+\varepsilon)^2 < 2\pi$,

$$C_1 = \sup_{\substack{u \in H^1(\Omega) \\ \|u\| \leq 1}} |m(u)| \quad \text{e} \quad C_2 = \sup_{\substack{\varphi \in H^1(\Omega),\ \|\nabla\varphi\|_2 \leq 1 \\ m(\varphi) = 0}} \int_\Omega e^{\alpha(1+\varepsilon)^2 \varphi^2} dx,$$

onde $m(u) = \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega u dx$. Pelo Lema 1.2 temos que $C_2 < \infty$ e a finitude de C_1 segue da imersão de $H^1(\Omega)$ em $L^1(\Omega)$. Seja $u \in H^1(\Omega)$ tal que $\|u\| \leq 1$ e $\varphi = u - m(u)$, note então que $\varphi \in V_1$ pois

$$\int_\Omega \varphi dx = \int_\Omega \left(u - \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega u dx \right) dx = \int_\Omega u dx - \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega u dx \int_\Omega dx = 0,$$

além disso, temos $\nabla\varphi = \nabla u$, logo $\|\nabla\varphi\|_2 \leq 1$. Portanto teremos

$$\begin{aligned} \int_\Omega e^{\alpha u^2} dx &= \int_\Omega e^{\alpha(\varphi + m(u))^2} dx \\ &\leq \int_\Omega e^{\alpha(\varphi^2 + 2\varphi C_1 + C_1^2)} dx. \end{aligned}$$

Notemos então que

$$2\varphi C_1 = 2\varphi C_1 \frac{\varepsilon^{1/2}}{\varepsilon^{1/2}} \leq \varphi^2 \varepsilon + \frac{C_1^2}{\varepsilon},$$

daí,

$$\varphi^2 + 2\varphi C_1 + C_1^2 \leq \varphi^2(1+\varepsilon)^2 + C_1^2\left(1+\frac{1}{\varepsilon}\right)^2,$$

o que nos dá

$$\int_\Omega e^{\alpha u^2}dx \leq \int_\Omega e^{\alpha\varphi^2(1+\varepsilon)^2}e^{\alpha C_1^2(1+\frac{1}{\varepsilon})^2}dx \leq C_2 e^{\alpha C_1^2(1+\frac{1}{\varepsilon})^2},$$

logo $\alpha \in A_1'$ sempre que $\alpha < 2\pi$ e assim $\sup A_1' \geq 2\pi$. Suponha então que $\sup A_1' > 2\pi$ e seja $\varepsilon > 0$ tal que $\alpha = (1+\varepsilon)2\pi < \sup A_1'$. Temos então nesse caso $S_\alpha < \infty$. Sejam $x_0 \in \partial\Omega$ e w_l como no Lema 1.3, daí

$$\begin{aligned}
S_\alpha &\geq \int_\Omega e^{\alpha w_l^2}dx \\
&\geq e^{\alpha w_l^2(x_o)}\int_{B(x_0,l)\cap\Omega}dx \\
&= |B(x_0,l)\cap\Omega| e^{(1+\varepsilon)2\pi(\frac{1}{\pi}\log(\frac{L}{l})+O(1))} \\
&\sim M\left(\frac{\pi l^2}{2}\right)\left(\frac{L}{l}\right)^{2(1+\varepsilon)} \to \infty
\end{aligned}$$

quando $l \to 0$, o que é uma contradição, portanto $\sup A_1' = 2\pi$, o que prova que $S_\alpha < \infty$ se $\alpha < 2\pi$ e que $S_\alpha = \infty$ se $\alpha > 2\pi$. A prova da finitude e atingibilidade para o caso $\alpha = 2\pi$ é delicada e uma prova pode ser vista em Yang [36, Corollary 1.3]. Verifiquemos então a atingibilidade do caso $\alpha < 2\pi$. Sejam $u_n, u \in H^1(\Omega)$ com $\|u_n\|, \|u\| \leq 1$ e $u_n \rightharpoonup u$. Note que pelo Teorema do valor médio, para todo $x, y \in \mathbb{R}$ com $x < y$ existe $t \in (x,y)$ tal que

$$|e^y - e^x| \leq e^t|y-x|,$$

logo

$$|e^y - e^x| \leq e^y|y-x| \leq (e^y + e^x)|y-x|. \tag{1.1}$$

Daí,

$$\left|\int_\Omega e^{\alpha u_n^2}dx - \int_\Omega e^{\alpha u^2}dx\right| \leq \alpha\int_\Omega (e^{\alpha u_n^2} + e^{\alpha u^2})|u_n^2 - u^2|dx.$$

Seja $p > 1$ tal que $p\alpha < 2\pi$, pela desigualdade de Hölder teremos

$$\int_\Omega e^{\alpha u_n^2}|u_n^2 - u^2|dx \leq \left(\int_\Omega e^{p\alpha u_n^2}dx\right)^{1/p}\left(\int_\Omega |u_n^2 - u^2|^{p'}dx\right)^{1/p'}.$$

Como $\sup A_1' = 2\pi$, podemos dizer que existe C tal que

$$\left(\int_\Omega e^{p\alpha u_n^2}dx\right)^{1/p} \leq C.$$

Como a imersão $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ é compacta para todo $p \in [1, \infty)$ pelo Teorema B.9, temos pela Proposição A.6 que $u_n \to u$ em qualquer $L^p(\Omega)$ e, dessa forma,

$$\left(\int_\Omega |u_n^2 - u^2|^{p'} dx\right)^{1/p'} = o(1).$$

Logo

$$\int_\Omega e^{\alpha u_n^2} |u_n^2 - u^2| dx = o(1)$$

e, analogamente,

$$\int_\Omega e^{\alpha u^2} |u_n^2 - u^2| dx = o(1).$$

Temos então que o funcional $u \longmapsto \int_\Omega e^{\alpha u^2} dx$ é fracamente contínuo sobre a bola unitária de $H^1(\Omega)$ e, como a bola é compacta na topologia fraca pelo Teorema A.3, o funcional assume um máximo, o conclui atingibilidade para o caso $\alpha < 2\pi$. $\square$

No traço, temos o seguinte resultado:

Teorema 1.5 (Trudinger-Moser- traço)**.** *Para todo $\alpha > 0$ e $u \in H^1(\Omega)$ tem-se que $e^{\alpha u^2} \in L^1(\partial\Omega)$. Além disso,*

$$\sup_{\substack{u \in H^1(\Omega) \\ \|u\| \leq 1}} \int_{\partial\Omega} e^{\alpha u^2} d\sigma < +\infty,$$

se, e somente se, $\alpha \leq \pi$. O supremo é atingindo sempre que é finito.

Demonstração. Considere o conjunto $A_2' = \{\alpha : \sup_{\substack{u \in H^1(\Omega) \\ \|u\| \leq 1}} \int_{\partial\Omega} e^{\alpha u^2} d\sigma < \infty\}$. Seja $\alpha < \pi$, $\varepsilon > 0$ tal que $\alpha(1+\varepsilon)^2 < \pi$

$$C_1 = \sup_{\substack{u \in H^1(\Omega) \\ \|u\| \leq 1}} |\mu(u)| \quad \text{e} \quad C_2 = \sup_{\substack{\|\nabla\varphi\|_2 \leq 1 \\ \mu(\varphi) = 0}} \int_{\partial\Omega} e^{\alpha(1+\varepsilon)^2 \varphi^2} dx,$$

onde $\mu(u) = \frac{1}{|\partial\Omega|} \int_{\partial\Omega} u dx$. Pelo Lema 1.2 temos que $C_2 < \infty$. Seja $u \in H^1(\Omega)$ tal que $\|u\| \leq 1$ e $\varphi = u - \mu(u)$, note então que $\varphi \in V_2$ pois

$$\int_{\partial\Omega} \varphi dx = \int_{\partial\Omega} \left(u - \frac{1}{|\partial\Omega|} \int_{\partial\Omega} u dx\right) dx = \int_{\partial\Omega} u dx - \frac{1}{|\partial\Omega|} \int_{\partial\Omega} u dx \int_{\partial\Omega} dx = 0,$$

além disso, temos $\nabla\varphi = \nabla u$, logo $\|\nabla\varphi\|_2 \leq 1$. Portanto teremos

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} e^{\alpha u^2} d\sigma &= \int_{\partial\Omega} e^{\alpha(\varphi + \mu(u))^2} d\sigma \\ &\leq \int_{\partial\Omega} e^{\alpha(\varphi^2 + 2\varphi C_1 + C_1^2)} d\sigma. \end{aligned}$$

Notemos então que

$$2\varphi C_1 = 2\varphi C_1 \frac{\varepsilon^{1/2}}{\varepsilon^{1/2}} \leq \varphi^2\varepsilon + \frac{C_1^2}{\varepsilon},$$

daí,

$$\varphi^2 + 2\varphi C_1 + C_1^2 \leq \varphi^2(1+\varepsilon)^2 + C_1^2\left(1+\frac{1}{\varepsilon}\right)^2,$$

o que nos dá

$$\int_{\partial\Omega} e^{\alpha u^2} d\sigma \leq \int_{\partial\Omega} e^{\alpha\varphi^2(1+\varepsilon)^2} e^{\alpha C_1^2(1+\frac{1}{\varepsilon})^2} dx \leq C_2 e^{\alpha} C_1^2\left(1+\frac{1}{\varepsilon}\right)^2,$$

logo $\alpha \in A_2'$ e assim $\sup A_2' \geq \pi$. Suponha agora então que $\sup A_2' > \pi$ e sejam $\varepsilon > 0$ tal que $\alpha = (1+\varepsilon)\pi < \sup A_2'$ e

$$C_3 = \sup_{\substack{u\in H^1(\Omega)\\ \|u\|\leq 1}} \int_{\partial\Omega} e^{\alpha u^2} d\sigma < \infty.$$

Sejam $x_0 \in \partial\Omega$ e w_l como no Lema 1.3, daí

$$\begin{aligned}
C_3 &\geq \int_{\partial\Omega} e^{\alpha w_l^2} d\sigma \\
&\geq e^{\alpha w_l^2(x_o)} \int_{B(x_0,l)\cap\partial\Omega} d\sigma \\
&\geq |B(x_0,l)\cap\partial\Omega| e^{(1+\varepsilon)\pi w_l^2(x_0)} \\
&= |B(x_0,l)\cap\partial\Omega| e^{(1+\varepsilon)\pi(\frac{1}{\pi}\log(\frac{L}{l})+O(1))} \\
&\sim M(2l)\left(\frac{L}{l}\right)^{(1+\varepsilon)} \to \infty
\end{aligned}$$

quando $l \to 0$, o que é uma contradição, portanto $\sup A_2' = \pi$. A finitude e atingibilidade para o caso $\alpha = \pi$ pode ser encontrada em Li et al [21] (veja também [35]). A atingibilidade para o caso $\alpha < \pi$ é análoga ao caso do Teorema 1.4. Vejamos agora que para todo α e $u \in H^1(\Omega)$ temos $e^{\alpha u^2} \in L^1(\partial\Omega)$. Seja $\varepsilon > 0$ tal que $\frac{\pi}{2\varepsilon} > \alpha$. Para cada $x_0 \in \partial\Omega$ seja V_{x_0} um aberto em Ω tal que

(i) ∂V_{x_0} é suave;

(ii) $x_0 \in \mathrm{int}(\partial V_{x_0} \cap \partial\Omega)$;

(iii) $\|u\|^2_{H^1(V_{x_0})} \leq \varepsilon^2$.

O item (iii) é justificado pelo Teorema B.1. Pela compacidade de $\partial\Omega$ podemos tomar uma subcobertura $V_1, \ldots, V_k$ obedecendo aos 3 itens acima. Dessa forma, graças ao item (iii), temos

$$\left\|\frac{u}{\varepsilon}\right\|^2_{H^1(V_i)} = \frac{1}{\varepsilon^2}\|u\|^2_{H^1(V_i)} \leq 1.$$

Note que pelo que provamos anteriormente temos

$$\int_{\partial V_i} e^{\frac{\pi}{2}\left(\frac{u}{\varepsilon}\right)^2} d\sigma < \infty.$$

Como $\frac{\pi}{2\varepsilon} > \alpha$, teremos

$$\int_{\partial\Omega} e^{\alpha u^2} d\sigma \leq \sum_{i=1}^{k} \int_{\partial V_i} e^{\alpha u^2} d\sigma < \infty.$$

□

1.2 Desigualdade de Trudinger-Moser com peso

Nesta seção, vamos considerar desigualdades de Trudinger-Moser envolvendo peso do tipo $|x|^\gamma$ com $\gamma > 0$, conhecido na literatura como peso do tipo Hénon. Precisamente, considere

$$S(\alpha, \gamma) := \sup_{\substack{u \in H^1(\Omega) \\ \|u\| \leq 1}} \int_\Omega (e^{\alpha u^2} - 1)|x|^\gamma dx.$$

Se $\alpha < 2\pi$ e $\gamma > 0$, pelo Teorema 1.4 temos que $S(\alpha, \gamma) < \infty$.

Definamos também

$$S_r(\alpha, \gamma) := \sup_{\substack{u \in H^1_{rad}(\Omega) \\ \|u\| \leq 1}} \int_\Omega (e^{\alpha u^2} - 1)|x|^\gamma dx,$$

temos claramente que $S_r(\alpha, \gamma) \leq S(\alpha, \gamma)$. Uma questão natural é analisar quando teremos $S_r(\alpha, \gamma) = S(\alpha, \gamma)$ ou $S_r(\alpha, \gamma) < S(\alpha, \gamma)$. Este será o nosso objetivo principal neste trabalho.

1.2.1 Existência de extremal em $H^1(\Omega)$

Teorema 1.6. *$S(\alpha, \gamma)$ é atingido para todo $\alpha < 2\pi$ e $\gamma > 0$. Além disso, se u atinge $S(\alpha, \gamma)$, então $\|u\| = 1$.*

Demonstração. Pela definição de $S(\alpha, \gamma)$ existe uma sequência $(u_n) \subset H^1(\Omega)$ tal que $\|u_n\| \leq 1$ e

$$S(\alpha, \gamma) - \frac{1}{n} < \int_\Omega (e^{\alpha u_n^2} - 1)|x|^\gamma dx \leq S(\alpha, \gamma). \tag{1.2}$$

A menos de subsequência, podemos supor que $u_n \rightharpoonup u$. Afirmamos que

$$S(\alpha, \gamma) = \int_\Omega (e^{\alpha u^2} - 1)|x|^\gamma dx. \tag{1.3}$$

Usando a desigualdade (1.1), teremos

$$\begin{aligned}\left|\int_\Omega (e^{\alpha u_n^2}-1)|x|^\gamma dx - \int_\Omega (e^{\alpha u^2}-1)|x|^\gamma dx\right| &\leq \int_\Omega |e^{\alpha u_n^2}-e^{\alpha u^2}||x|^\gamma dx\\ &\leq \int_\Omega |e^{\alpha u_n^2}-e^{\alpha u^2}|dx\\ &\leq \alpha\int_\Omega (e^{\alpha u_n^2}+e^{\alpha u^2})|u_n^2-u^2|dx.\end{aligned}$$

Desde que $\alpha < 2\pi$, podemos tomar $p > 1$ tal que $p\alpha \leq 2\pi$. Logo, pela desigualdade de Hölder temos

$$\int_\Omega e^{\alpha u_n^2}|u_n^2-u^2|dx \leq \left(\int_\Omega e^{p\alpha u_n^2}dx\right)^{1/p}\left(\int_\Omega |u_n^2-u^2|^{p'}dx\right)^{1/p'}.$$

Pelo Teorema 1.4, existe $C > 0$ independente de n tal que

$$\left(\int_\Omega e^{p\alpha u_n^2}dx\right)^{1/p} \leq C, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Por outro lado, usando que a imersão $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ é compacta para todo $p \in [1,\infty)$ temos que $u_n \to u$ em $L^p(\Omega)$ para todo $p \in [1,\infty)$. Consequentemente, temos que

$$\left(\int_\Omega |u_n^2-u^2|^{p'}dx\right)^{1/p'} = o(1).$$

Assim, obtemos

$$\int_\Omega e^{\alpha u_n^2}|u_n^2-u^2|dx = o(1).$$

De forma inteiramente análoga temos

$$\int_\Omega e^{\alpha u^2}|u_n^2-u^2|dx \leq \left(\int_\Omega e^{p\alpha u^2}dx\right)^{1/p}\left(\int_\Omega |u_n^2-u^2|^{p'}dx\right)^{1/p'} = o(1).$$

Portanto

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega (e^{\alpha u_n^2}-1)|x|^\gamma dx = \int_\Omega (e^{\alpha u^2}-1)|x|^\gamma dx.$$

Tomando o limite em (1.2) tem-se que (1.3) é válido. Ademais, pela semicontinuidade da norma e o fato de que $S(\alpha,\gamma) > 0$ obtemos que $0 < \|u\| \leq 1$. Suponha por contradição que $\|u\| < 1$ e tome $v = u/\|u\|$. Assim teremos

$$\int_\Omega (e^{\alpha v^2}-1)|x|^\gamma dx - \int_\Omega (e^{\alpha u^2}-1)|x|^\gamma dx = \int_\Omega (e^{\alpha v^2}-e^{\alpha v^2\|u\|^2})|x|^\gamma dx > 0$$

já que $\|u\| < 1$. Logo,

$$\int_\Omega (e^{\alpha v^2}-1)|x|^\gamma dx > S(\alpha,\gamma),$$

que contradiz a definição de $S(\alpha,\gamma)$ e portanto $\|u\| = 1$. $\square$

1.2.2 Existência de extremal em $H^1_{rad}(\Omega)$

Nesta seção, pretendemos analisar a atingibilidade de

$$S_r(\alpha,\gamma) = \sup_{\substack{u\in H^1_{\mathrm{rad}}(\Omega)\\ \|u\|\leq 1}} \int_\Omega (e^{\alpha u^2}-1)|x|^\gamma dx,$$

com $\alpha < 2\pi(\gamma+2)$ e $\gamma > 0$.

Note que podemos ter $\alpha > 2\pi$ e assim não podemos usar Teorema 1.4 para garantir que $S_r(\alpha,\gamma) < \infty$. Para isto, vamos precisar da seguinte versão Lema de Strauss:

Lema 1.7. Para toda $u \in H^1_{\mathrm{rad}}(\Omega)$, existe $C > 0$ tal que

$$|u(x)| \leq \left(C + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(-\log|x|)^{1/2}\right)\|u\|,$$

para todo $x \in \Omega\backslash\{0\}$.

Demonstração. Seja $x \in \Omega\backslash\{0\}$ e note que

$$|u(x)| - |u(1)| \leq |u(x)-u(1)| \leq \int_{|x|}^1 |u'(r)|dr.$$

Usando a desigualdade de Hölder,

$$\begin{aligned}|u(x)| &\leq |u(1)| + \int_{|x|}^1 |u'(r)|\frac{r^{1/2}}{r^{1/2}}dr \\ &\leq |u(1)| + \left(\int_{|x|}^1 |u'(r)|^2 r\right)^{1/2}\left(\int_{|x|}^1 \frac{1}{r}dr\right)^{1/2}.\end{aligned}$$

Note então que, por (B.2),

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1 |u'(r)|^2 rdrd\theta = 2\pi\int_0^1 |u'(r)|^2 rdr = \|\nabla u\|_2^2,$$

logo,

$$\begin{aligned}|u(x)| &\leq |u(1)| + \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^1 |u'(r)|^2 rdrd\theta\right)^{1/2}(-\log|x|)^{1/2} \\ &= |u(1)| + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(-\log|x|)^{1/2}\|\nabla u\|_2.\end{aligned}$$

Pelo Teorema B.10 existe $C_1 > 0$ tal que

$$\begin{aligned}\|u\|_{L^2(\partial\Omega)} &\leq C_1\|u\|\\ \sqrt{2\pi}|u(1)| &\leq C_1\|u\|\\ |u(1)| &\leq C\|u\|.\end{aligned}$$

Daí, podemos dizer que

$$|u(x)| \leq \left(C + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(-\log|x|)^{1/2}\right)\|u\|.$$

□

Teorema 1.8. *Para todo $\alpha < 2\pi(\gamma+2)$ e $\gamma > 0$ tem-se que $S_r(\alpha,\gamma) < \infty$ e é atingido por uma função radial. Se u é tal função, então u então $\|u\| = 1$.*

Demonstração. Vejamos que $S_r(\alpha,\gamma) < \infty$. Sejam $u \in H^1_{\text{rad}}(\Omega)$ com $\|u\| \leq 1$ e $\varepsilon > 0$ tal que $\alpha(1+\varepsilon) < 2\pi(\gamma+2)$. Pelo Lema 1.7 temos

$$\begin{aligned}u^2(x) &\leq \left(C + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(-\log|x|)^{1/2}\right)^2\|u\|^2\\ &\leq C^2 + \frac{\varepsilon^{1/2}}{\varepsilon^{1/2}}\frac{2C}{\sqrt{2\pi}}(-\log|x|)^{1/2} + \frac{1}{2\pi}(-\log|x|).\end{aligned}$$

Usando a desigualdade $a^2 + b^2 \geq 2ab \ \ \forall a, b > 0$, teremos

$$u(x)^2 \leq \left(C^2 + \frac{C^2}{\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{2\pi}(-\log|x|) + \frac{1}{2\pi}(-\log|x|)\right) = \left(1+\frac{1}{\varepsilon}\right)C^2 + \frac{1+\varepsilon}{2\pi}(-\log|x|). \tag{1.4}$$

Considere $K_\varepsilon = \left(1+\frac{1}{\varepsilon}\right)C^2$, então

$$\begin{aligned}\int_\Omega e^{\alpha u^2}|x|^\gamma dx &\leq \int_\Omega e^{\alpha K_\varepsilon + \alpha\frac{1+\varepsilon}{2\pi}(-\log|x|)}|x|^\gamma dx\\ &= e^{\alpha K_\varepsilon}\int_\Omega e^{\alpha\frac{1+\varepsilon}{2\pi}(-\log|x|)}|x|^\gamma dx\\ &= e^{\alpha K_\varepsilon}\int_\Omega \left(e^{\log|x|}\right)^{-\alpha\frac{1+\varepsilon}{2\pi}}|x|^\gamma dx\\ &= e^{\alpha K_\varepsilon}\int_\Omega |x|^{\gamma-\alpha\frac{1+\varepsilon}{2\pi}}dx < \infty,\end{aligned} \tag{1.5}$$

desde que $\alpha\frac{1+\varepsilon}{2\pi} - \gamma < 2$. Segue que $S_r(\alpha,\gamma) < \infty$ sempre que $\alpha < 2\pi(\gamma+2)$.

Vejamos agora que $S_r(\alpha,\gamma)$ é atingido. Provaremos que o funcional $u \longmapsto \int_\Omega(e^{\alpha u^2}-1)|x|^\gamma$ é fracamente contínuo sobre a bola unitária de $H^1_{\text{rad}}(\Omega)$. Considere então $(u_n) \subset H^1_{\text{rad}}(\Omega)$ tal que

$\|u_n\| \leq 1$ e $u_n \rightharpoonup u$, daí usando mais uma vez a desigualdade (1.1), teremos

$$\begin{aligned}\left|\int_\Omega (e^{\alpha u_n^2}-1)|x|^\gamma dx - \int_\Omega (e^{\alpha u^2}-1)|x|^\gamma dx\right| &= \left|\int_\Omega (e^{\alpha u_n^2}-e^{\alpha u^2})|x|^\gamma dx\right| \\ &\leq \alpha \int_\Omega |u_n^2-u^2|(e^{\alpha u_n^2}+e^{\alpha u})|x|^\gamma dx \\ &= \alpha \int_\Omega |u_n^2-u^2|e^{\alpha u_n^2}|x|^\gamma dx + \alpha \int_\Omega |u_n^2-u^2|e^{\alpha u^2}|x|^\gamma dx.\end{aligned}$$

Olhando para a primeira integral acima e usando mais uma vez (1.4) teremos

$$\int_\Omega |u_n^2-u^2|e^{\alpha u_n^2}|x|^\gamma dx \leq e^{\alpha K_\varepsilon}\int_\Omega |u_n^2-u^2||x|^{\gamma-\alpha\frac{1+\varepsilon}{2\pi}}dx,$$

onde escolhemos ε tal que $\alpha\frac{1+\varepsilon}{2\pi}-\gamma<2$. Tome $p>1$ tal que $p(\alpha\frac{1+\varepsilon}{2\pi}-\gamma)<2$, usando a desigualdade de Hölder teremos

$$\int_\Omega |u_n^2-u^2|e^{\alpha u_n^2}|x|^\gamma dx \leq e^{\alpha K_\varepsilon}\left(\int_\Omega |x|^{p(\gamma-\alpha\frac{1+\varepsilon}{2\pi})}dx\right)^{1/p}\left(\int_\Omega |u_n^2-u^2|^{p'}dx\right)^{1/p'}.$$

Como $\Omega\subset\mathbb{R}^2$, pelo Teorema B.9, a imersão $H^1(\Omega)\hookrightarrow L^p(\Omega)$ é compacta para todo $p\in[1,\infty)$, $u_n\rightharpoonup u$ implica em $u_n\to u$ em $L^p(\Omega)$ para todo $p\in[1,\infty)$. Logo

$$\int_\Omega |u_n^2-u^2|e^{\alpha u_n^2}|x|^\gamma dx = o(1)$$

e, analogamente,

$$\int_\Omega |u_n^2-u^2|e^{\alpha u^2}|x|^\gamma dx = o(1).$$

Portanto,

$$\left|\int_\Omega (e^{\alpha u_n^2}-1)|x|^\gamma dx - \int_\Omega (e^{\alpha u^2}-1)|x|^\gamma dx\right| = o(1),$$

logo o funcional $u\longmapsto \int_\Omega (e^{\alpha u^2}-1)|x|^\gamma dx$ é fracamente contínuo para todo $\alpha<2\pi(\gamma+2)$, o que conclui a prova. De forma análoga ao Teorema 1.6, concluímos que o extremo pode ser tomado com norma igual a 1. □

Observação 1.1. Para todo $\alpha<2\pi$ tem-se

$$\lim_{\gamma\to+\infty} S(\alpha,\gamma)=0 \tag{1.6}$$

e para todo $\alpha<2\pi(\gamma+2)$ tem-se

$$\lim_{\gamma\to+\infty} S_r(\alpha,\gamma)=0. \tag{1.7}$$

De fato, seja $p>1$ tal que $p\alpha\leq 2\pi$ e $u\in H^1(\Omega)$ tal que $S(\alpha,\gamma)$ é atingido. Usando a desigualdade de Hölder, temos

$$S(\alpha,\gamma) \leq \int_\Omega e^{\alpha u^2}|x|^\gamma dx \leq \left(\int_\Omega e^{p\alpha u^2}dx\right)^{1/p}\left(\int_\Omega |x|^{\gamma p'}\right)^{1/p'},$$

com $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$. Pelo Teorema 1.4 temos que a primeira integral do lado direito é limitada. Por outro lado, usando o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue temos que

$$\int_\Omega |x|^{\gamma p'}dx \to 0 \ \text{ quando } \ \gamma\to\infty,$$

já que $|x|^{\gamma p'} \to 0$ quando $\gamma \to \infty$ para todo $x \in \Omega$ e $|x|^{\gamma p'} \leq 1$ em Ω. Portanto, (1.6) é satisfeito.

Para provar (1.7), é suficiente usar a desigualdade obtida em (1.5) para obter

$$S_r(\alpha,\gamma) \leq \int_\Omega e^{\alpha u^2}|x|^\gamma dx \leq e^{\alpha K_\varepsilon}\int_\Omega |x|^{\gamma-\alpha\frac{1+\varepsilon}{2\pi}}dx \to 0 \ \text{ quando } \ \gamma\to\infty.$$

1.3 Extremal versus solução

Nesta seção mostraremos que as funções que realizam $S(\alpha,\gamma)$ e $S_r(\alpha,\gamma)$ são soluções de um problema elíptico. Para isto vamos precisar de alguns resultados de convergência e de diferenciabilidade.

Lema 1.9. Seja $(u_n) \subset H^1(\Omega)$ tal que $u_n \to u \in H^1(\Omega)$. Então existe uma subsequência (u_{n_k}) e $g \in H^1(\Omega)$ tal que $|u_{n_k}| \leq g$ q.t.p. em Ω.

Demonstração. Como $H^1(\Omega)$ está imerso continuamente em $L^2(\Omega)$ temos que $u_n \to u$ em $L^2(\Omega)$. Pela recíproca do Teorema da convergência dominada para uma subsequência temos $u_{n_k} \to u$ q.t.p. em Ω. Na verdade, temos que $u_n \to u$ q.t.p. em Ω pois se existissem $\varepsilon > 0$, $\omega \subset \Omega$ com $|\omega| > 0$ e uma subsequência (u_{n_l}) tais que

$$|u_{n_l}(x) - u(x)| \geq \varepsilon, \tag{1.8}$$

para todo $x \in \omega$, como $u_{n_l} \to u$ em $H^1(\Omega)$ podemos repetir os argumentos acima para obter uma subsequência de (u_{n_l}) convergindo para u q.t.p. em Ω contradizendo (1.8), portanto $u_n \to u$ q.t.p. em Ω. Note também que podemos extrair uma subsequência (u_{n_k}), que denotaremos por (u_k), tal que para todo $k \geq 1$

$$\|u_{k+1} - u_k\| \leq \frac{1}{2^k}.$$

Tome

$$w_n = \sum_{k=1}^{n} |u_{k+1} - u_k|.$$

Temos então

$$\|w_n\| \leq \sum_{k=1}^{n} \|u_{k+1} - u_k\| \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} \leq 1,$$

logo $\|w_n\|_2, \|\nabla w_n\|_2 \leq 1$. Daí, note que $w_1 \leq \ldots \leq w_n \leq \ldots$ e, pela desigualdade de Hölder

$$\int_\Omega w_n dx \leq \|w_n\|_2 |\Omega|^{\frac{1}{2}} \leq |\Omega|^{\frac{1}{2}}.$$

Usando então o Teorema da convergência monótona $w_n \to w$ q.t.p. em Ω com $w \in L^2(\Omega)$. Além disso, pelo Teorema da convergência dominada $w_n \to w$ em $L^2(\Omega)$ e como $\|\nabla w_n\|_2 \leq 1$, pela Observação B.1 $w \in H^1(\Omega)$. Agora, para $l > k \geq 2$, temos

$$|u_l(x) - u_k(x)| \leq |u_l(x) - u_{l+1}(x)| + \ldots + |u_{k+1}(x) - u_k(x)| \leq w_{l-1}(x) - w_{k-1}(x),$$

fazendo $l \to \infty$ teremos para cada $k \geq 2$ que

$$|u(x) - u_k(x)| \leq w(x) - w_{k-1}(x) \leq w(x) \quad \text{q.t.p. em} \quad \Omega.$$

Tome $g = |u| + w \in H^1(\Omega)$, temos então

$$|u_k| \leq g \quad \text{q.t.p. em} \quad \Omega.$$

□

Lema 1.10. Se $u_n \to u$ em $H^1(\Omega)$, então $e^{\alpha u_n^2} \to e^{\alpha u^2}$ em $L^p(\Omega)$ para todo $p \in [1, \infty)$.

Demonstração. Argumentando como no Lema 1.9 $u_n \to u$ q.t.p. em Ω, além disso, pelo mesmo Lema existe uma subsequência (u_{n_k}), que denotaremos por (u_k) e $g \in H^1(\Omega)$ tal que

$$|u_k| \leq g \quad \text{q.t.p. em} \quad \Omega.$$

Logo $e^{\alpha u_k^2} \to e^{\alpha u^2}$ q.t.p. em Ω. Usando Teorema 1.4 podemos dizer $e^{\alpha u_k^2} \leq e^{\alpha g^2} \in L^p(\Omega)$ para todo $p \in [1, \infty)$. Daí, pelo Teorema da convergência dominada $e^{\alpha u_k^2} \to e^{\alpha u^2}$ em $L^p(\Omega)$. Mais do que isso a convergência vale para toda a sequência pois se para alguma subsequência tivéssemos

$$\|e^{\alpha u_l^2} - e^{\alpha u^2}\|_p \geq \varepsilon, \tag{1.9}$$

para algum $\varepsilon > 0$, como $u_l \to u$ em $H^1(\Omega)$, poderíamos repetir os argumentos acima para obter uma subsequência de u_{l_m} tal que $e^{\alpha u_{l_m}^2} \to e^{\alpha u^2}$ em $L^p(\Omega)$, contradizendo (1.9). Portanto

$$e^{\alpha u_n^2} \to e^{\alpha u^2}$$

em $L^p(\Omega)$ para todo $p \in [1, \infty)$. $\square$

Observação 1.2. Extendendo os argumentos do Lema 1.9 para o traço e, para uma sequência $u_n \to u$ em $H^1(\Omega)$ também se obtém uma função $g \in H^1(\Omega)$ e uma subsequência tal que $|u_{n_k}| \leq g$ q.t.p. em $\partial\Omega$. Dessa forma, com argumentos análogos ao Lema 1.10 também se obtém $e^{\alpha u_n^2} \to e^{\alpha u^2}$ em todo $L^p(\partial\Omega)$ com $p \in [1, \infty)$.

Lema 1.11. Considere o funcional $\varphi : H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ dado por

$$\varphi(u) = \int_\Omega (e^{\alpha u^2} - 1)|x|^\alpha dx.$$

Temos que $\varphi \in C^1(H^1(\Omega), \mathbb{R})$.

Demonstração. Calculemos primeiro a derivada de Gateaux de φ. Primeiro note que

$$\frac{\varphi(u + th) - \varphi(u)}{t} = \int_\Omega \frac{(e^{\alpha(u+th)^2} - e^{\alpha u^2})}{t}|x|^\gamma dx$$

com $t \in \mathbb{R}$ e $h \in H^1(\Omega)$. Para $u, h \in H^1(\Omega)$ e $t \in (0, 1)$ fixados, defina $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ como $g(s) = e^{\alpha(u+sth)^2}$. Usando o Teorema do valor médio em $[0, 1]$ existe $\theta \in (0, 1)$ tal que

$$g(1) - g(0) = g'(\theta),$$

o que nos dá

$$(e^{\alpha(u+th)^2} - e^{\alpha u^2})|x|^\gamma = 2\alpha(u + \theta th)e^{\alpha(u+\theta th)^2} th|x|^\gamma,$$

Note que

$$\frac{(e^{\alpha(u+th)^2} - e^{\alpha u^2})}{t}|x|^\gamma = 2\alpha(u + \theta th)e^{\alpha(u+\theta th)^2} h|x|^\gamma \to 2\alpha u e^{\alpha u^2} h|x|^\gamma$$

quando $t \to 0$ e que

$$2\alpha(u + \theta th)e^{\alpha(u+\theta th)^2} h|x|^\gamma \leq 2\alpha(|u| + |h|)e^{\alpha(|u|+|h|)^2},$$

onde o termo a direita está em qualquer $L^p(\Omega)$ pelas imersões de $H^1(\Omega)$ e pelo Teorema 1.4, logo, pelo Teorema B.5 têm-se

$$\frac{\varphi(u + th) - \varphi(u)}{t} = 2\alpha \int_\Omega (u + \theta th)e^{\alpha(u+\theta th)^2} h|x|^\gamma dx \to 2\alpha \int_\Omega u e^{\alpha u^2} h|x|^\gamma dx$$

quando $t \to 0$. Portanto, a derivada de Gateaux de φ em u numa direção h é

$$\varphi'(u)(h) = 2\alpha \int_\Omega u e^{\alpha u^2} h|x|^\gamma dx.$$

Vejamos que a aplicação $\varphi' : H^1(\Omega) \to H^1(\Omega)^*$ é contínua. Seja $u_n \to u$ em $H^1(\Omega)$ e $\|h\| \leq 1$, temos então

$$|\varphi'(u_n)(h) - \varphi'(u)(h)| \leq 2\alpha \int_\Omega |u_n e^{\alpha u_n^2} - u e^{\alpha u^2}||h|dx.$$

Como $u_n \to u$ em $H^1(\Omega)$, pela imersão de $H^1(\Omega)$ em $L^2(\Omega)$ temos que $u_n \to u$ em $L^2(\Omega)$ e, pelo Lema 1.10, temos $u_n e^{\alpha u_n^2} \to u e^{\alpha u^2}$ em $L^2(\Omega)$. Daí, como $\|h\|_2 \leq \|h\| \leq 1$, pela desigualdade de Hölder temos

$$|\varphi'(u_n)(h) - \varphi'(u)(h)| \leq 2\alpha \left(\int_\Omega |u_n e^{\alpha u_n^2} - u e^{\alpha u^2}|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \to 0.$$

Logo $\varphi'(u_n) \to \varphi'(u)$ em $H^1(\Omega)^*$, sendo então φ' contínua e, pela Proposição C.1, $\varphi \in C^1(H^1(\Omega), \mathbb{R})$. □

Proposição 1.12. Suponha que $\alpha < 2\pi$ e $u_0 \in H^1(\Omega)$ é um extremal de $S(\alpha, \gamma)$. Então existe $\lambda > 0$ tal que u_0 é solução fraca do problema

$$\begin{cases} -\Delta u + u = \lambda |x|^\gamma u e^{\alpha u^2}, & \text{em} \quad \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0, & \text{sobre} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.10}$$

Demonstração. Suponha que $\alpha < 2\pi$ e seja $u_0 \in H^1(\Omega)$ uma extremal de $S(\alpha, \gamma)$, ou seja, $\|u_0\| = 1$ e

$$S(\alpha, \gamma) = \int_\Omega (e^{\alpha u_0^2} - 1)|x|^\gamma dx.$$

Além disso, podemos considerar $u_0 \geq 0$ já que se uma função atinge $S(\alpha, \gamma)$ então seu módulo também atinge.

Considerando o funcional $\varphi : H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ definido por

$$\varphi(u) = \int_\Omega (e^{\alpha u^2} - 1)|x|^\gamma dx,$$

temos que $\varphi(u_0) = S(\alpha, \gamma)$ e dessa forma u_0 é maximizante de φ sobre o conjunto de vínculo

$$S = \{u \in H^1(\Omega) : J(u) = 1\},$$

onde $J(u) = \|u\|^2$. Note que $J'(u)(\phi) = 2\langle u, \phi \rangle$ é uma aplicação não nula para toda $u \in S$ com $J \in C^\infty(H^1(\Omega), \mathbb{R})$. Pelo Lema 1.11, temos que $\varphi \in C^1(H^1(\Omega), \mathbb{R})$ com

$$\varphi'(u)(h) = 2\alpha \int_\Omega u e^{\alpha u^2} |x|^\gamma h dx, \quad \forall h \in H^1(\Omega).$$

Pelo Teorema dos Multiplicadores de Lagrange obtemos λ_0 tal que

$$J'(u_0) = \lambda_0 \varphi'(u_0),$$

isto é,

$$2\langle u_0, \phi\rangle = 2\lambda_0\alpha \int_\Omega u_0 e^{\alpha u_0^2}\phi|x|^\gamma dx, \quad \forall \phi \in H^1(\Omega).$$

Portanto,

$$\langle u_0, \phi\rangle = \lambda \int_\Omega u_0 e^{\alpha u_0^2}\phi|x|^\gamma dx, \quad \forall \phi \in H^1(\Omega), \tag{1.11}$$

ou seja, $u_0 \geq 0$ é uma solução fraca de (1.10) com $\lambda = \lambda_0\alpha$. Vejamos que $\lambda > 0$. Tomando $\phi = u_0$ em (1.11) teremos

$$\|u_0\|^2 = \lambda \int_\Omega u_0^2 e^{\alpha u_0^2}|x|^\gamma dx \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{\int_\Omega u_0^2 e^{\alpha u_0^2}|x|^\gamma dx} > 0.$$

□

Proposição 1.13. Suponha que $\alpha < 2\pi(\gamma+2)$ e $u_0 \in H^1_{rad}(\Omega)$ é uma extremal de $S_r(\alpha,\gamma)$. Então existe $\lambda > 0$ tal que u_0 é solução fraca do problema

$$\begin{cases} -\Delta u + u = \lambda|x|^\gamma u e^{\alpha u^2}, & \text{em} \quad \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0, & \text{sobre} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.12}$$

Demonstração. Considere o funcional definido em $H^1(\Omega)$

$$\varphi(u) = \int_\Omega (e^{\alpha u^2} - 1)|x|^\gamma dx.$$

Sendo u_0 extremal de $S_r(\alpha,\gamma)$, temos que u_0 é um maximizante de φ sobre o conjunto de vínculo

$$S_R = \{u \in H^1_{rad}(\Omega) : J(u) = 1\},$$

onde $J(u) = \|u\|^2$. Aplicando então o Teorema dos multiplicadores de Lagrange o resultado segue de forma análoga a Proposição 1.12. □

Proposição 1.14. Se $\gamma \geq 1$ os extremais de $S(\alpha,\gamma)$ e $S_r(\alpha,\gamma)$ são soluções clássicas de

$$\begin{cases} -\Delta u + u = \lambda|x|^\gamma u e^{\alpha u^2}, & \text{em} \quad \Omega, \\ u > 0, & \text{em} \quad \overline{\Omega}, \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0, & \text{sobre} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.13}$$

Demonstração. Pela Proposição 1.12 sabemos que se $u_0 \geq 0$ maximiza $S(\alpha,\gamma)$ ou $S_r(\alpha,\gamma)$ então u_0 é uma solução fraca de

$$\begin{cases} -\Delta u_0 + u_0 = \lambda|x|^\gamma u_0 e^{\alpha u_0^2}, & \text{em} \quad \Omega, \\ \frac{\partial u_0}{\partial \eta} = 0, & \text{sobre} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.14}$$

Como $\lambda|x|^\gamma u_0 e^{\alpha u_0^2}$ está em qualquer $L^p(\Omega)$ com $p > 1$ e finito, pelo Lema D.2 $u_0 \in C^{1,\beta}(\bar{\Omega})$. Note que u_0^2 também pertence $C^{1,\beta}(\bar{\Omega})$, daí, usando a desigualdade em (1.1) e a limitação de u_0 em $\bar{\Omega}$, temos para todos $x, y \in \bar{\Omega}$

$$|e^{\alpha u_0^2(x)} - e^{\alpha u_0^2(y)}| \leq \alpha |u_0^2(x) - u_0^2(y)| (e^{\alpha u_0^2(x)} + e^{\alpha u_0^2(y)}) \leq K_1 |u_0^2(x) - u_0^2(y)| \leq K|x-y|^\beta.$$

Logo $e^{\alpha u_0^2} \in C^\beta(\bar{\Omega})$. Como produto de funções em $C^\beta(\bar{\Omega})$ pertence a $C^\beta(\bar{\Omega})$, $u_0 e^{\alpha u_0^2} \in C^\beta(\bar{\Omega})$ e, pelo Lema D.5, temos que $u_0 \in C^{2,\beta}(\Omega)$. Vejamos que u_0 satisfaz pontualmente a equação (1.14). De fato, considere $f = \lambda|x|^\gamma u_0 e^{\alpha u_0^2}$, daí, dada $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$, como u_0 é solução fraca de (1.14), usando a Identidade de Green teremos

$$\int_\Omega (-\Delta u_0 + u_0 - f)\phi dx = \int_\Omega \nabla u_0 \nabla \phi dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u_0}{\partial \eta} \phi d\sigma + \int_\Omega u_0 \phi dx - \int_\Omega f \phi dx = 0.$$

Logo, pelo Lema de Du Bois Reymond $-\Delta u_0 + u_0 = f$ q.t.p. em Ω e, como $u_0 \in C^2$, temos esta igualdade satisfeita em todo Ω. Vejamos agora que $\frac{\partial u_0}{\partial \eta} = 0$ sobre $\partial\Omega$. Note que pela Identidade de Green, para toda $v \in H^1(\Omega)$, temos

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u_0}{\partial \eta} v d\sigma = \int_\Omega (\Delta u_0 - u_0 + f) v dx = 0.$$

Tomando $v = \frac{\partial u_0}{\partial \eta}$, concluímos que $\frac{\partial u_0}{\partial \eta} = 0$ q.t.p. em $\partial\Omega$, como $u_0 \in C^1$, temos a igualdade sobre $\partial\Omega$. Finalmente, vejamos que $u_0 > 0$ em $\bar{\Omega}$. Afirmamos primeiro que $u_0 > 0$ em Ω. Caso contrário, existiria $x_0 \in \Omega$ tal que $u_0(x_0) = 0$, ou seja, x_0 é um mínimo em Ω e, pelo Princípio do Máximo, deveríamos ter $u_0 \equiv 0$ em Ω, o que não ocorre pois $u_0 \neq 0$, já que $\|u_0\| = 1$. Suponha agora que exista $x_1 \in \partial\Omega$ tal que $u_0(x_1) = 0$, logo $u_0(x_1) < u_0(x)$ para todo $x \in \Omega$. Daí, pelo Lema de Hopf deveríamos ter que $\frac{\partial u_0}{\partial \eta}(x_1) < 0$, o que contradiz o fato de $\frac{\partial u_0}{\partial \eta} = 0$ em $\partial\Omega$. Portanto, $u_0 > 0$ em $\overline{\Omega}$.

$\square$

Capítulo 2

Análise assintótica dos valores extremais

Neste capítulo estudaremos o comportamento assintótico de $S(\alpha,\gamma)$ e $S_r(\alpha,\gamma)$ quando $\gamma \to \infty$. A descrição do comportamento de $S_r(\alpha,\gamma)$ é influnciada pelo primeiro autovalor e pelas propriedades da primeira autofunção do problema de Steklov. Por isso, focaremos primeiramente em tais propriedades e na construção dos autovalores do problema cuja compreensão será útil posteriormente. A compreensão do comportamento de $S_r(\alpha,\gamma)$ nos levará à primeira quebra de simetria para $\alpha \in (\pi, 2\pi)$. Lembremos que Ω denota a bola unitária de $\mathbb{R}^2$, $\langle .,. \rangle$ denota o produto interno de $H^1(\Omega)$ e $\|.\|$ sua norma induzida.

2.1 Autovalores do problema de Steklov

Considere o problema de Steklov

$$\begin{cases} -\Delta u + u = 0, & \text{em} \quad \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = \lambda u, & \text{sobre} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.1}$$

Dizemos que $\lambda \in \mathbb{R}$ é um autovalor do problema de Steklov e $u \in H^1(\Omega)\backslash\{0\}$ é uma autofunção se,

$$\langle u, \varphi \rangle = \int_\Omega \nabla u \nabla \varphi dx + \int_\Omega u\varphi dx = \lambda \int_{\partial\Omega} u\varphi d\sigma, \quad \forall \varphi \in H^1(\Omega).$$

Tomando $\varphi = u$, teremos

$$\lambda = \frac{\|u\|^2}{\int_{\partial\Omega} u^2 d\sigma}$$

e, portanto, $\lambda > 0$.

Observação 2.1. Uma autofunção $u \in H^1(\Omega)\backslash\{0\}$ na verdade satisfaz pontualmente (2.1). De fato, pelas imersões de $H^1(\Omega)$, temos que $u \in L^p(\Omega)$, para todo $p \in [1, \infty)$. Com isso, os lemas do Apêndice D garantem que $u \in C^{2,\beta}(\Omega) \cap C^{1,\beta}(\bar{\Omega})$. Analogamente à Proposição 1.14, teremos que

u é uma solução de (2.1).

2.1.1 Propriedades do primeiro autovalor do problema de Steklov

As principais propriedades do primeiro autovalor e da primeira autofunção a serem exibidas são a simplicidade do autovalor, a invariância do sinal e a simetria da primeira autofunção, onde seguimos o artigo [22]. Tais propriedades serão úteis não apenas neste capítulo, mas em todo o trabalho adiante.

O primeiro autovalor λ_1 do problema de Steklov (2.1) é caracterizado por

$$\lambda_1 = \inf_{u \in H^1(\Omega) \setminus H_0^1(\Omega)} \frac{\|u\|^2}{\int_{\partial\Omega} u^2 d\sigma}, \tag{2.2}$$

ou

$$\frac{1}{\lambda_1} = \sup_{\substack{u \in H^1(\Omega) \\ \|u\| \leq 1}} \int_{\partial\Omega} u^2 d\sigma. \tag{2.3}$$

Lema 2.1. O supremo em (2.3) é atingido.

Demonstração. Considere $\varphi : H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ definida por

$$\varphi(u) = \int_{\partial\Omega} u^2 d\sigma.$$

Afirmamos que φ é fracamente contínuo. De fato, considere $(u_n) \subset H^1(\Omega)$ tal que $u_n \rightharpoonup u \in H^1(\Omega)$. Desde que a imersão $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\partial\Omega)$ é compacta pelo Teorema B.10, temos que $u_n \to u$ em $L^2(\partial\Omega)$. Portanto,

$$\varphi(u_n) = \int_{\partial\Omega} u_n^2 d\sigma \to \int_{\partial\Omega} u^2 d\sigma = \varphi(u).$$

Uma vez que $B = \{u \in H^1(\Omega) : \|u\| \leq 1\}$ é compacto na topologia fraca pelo Teorema A.3, φ assume máximo em B. Consequentemente, o supremo em (2.3) é atingido. $\square$

Lema 2.2. Uma função $u_1 \in H^1(\Omega)$ é uma autofunção do problema de Steklov associada ao autovalor λ_1 se, e somente se, u_1 realiza (2.2).

Demonstração. De fato, suponha primeiro que

$$\lambda_1 = \frac{\|u_1\|^2}{\int_{\partial\Omega} u_1^2 d\sigma}.$$

$$\lambda_1 \int_{\partial\Omega} (u_1 + vt)^2 d\sigma \leq \int_{\Omega} |\nabla(u_1 + vt)|^2 dx + \int_{\Omega} (u_1 + vt)^2 dx$$

Dessa forma, dada $v \in H^1(\Omega)$ e $t \in \mathbb{R}$, temos que

$$\lambda_1 \int_{\partial\Omega} u_1^2 d\sigma + 2\lambda_1 t \int_{\partial\Omega} u_1 v d\sigma + \lambda_1 t^2 \int_{\partial\Omega} v^2 d\sigma \leq \int_\Omega \nabla(u_1 + vt).\nabla(u_1 + vt)dx + \int_\Omega (u_1 + vt)^2 dx$$
$$\|u_1\|^2 + 2\lambda_1 t \int_{\partial\Omega} u_1 v d\sigma + \lambda_1 t^2 \int_{\partial\Omega} v^2 d\sigma \leq \|u_1\|^2 + 2t\langle u_1, v\rangle + t^2\|v\|^2$$
$$2\lambda_1 t \int_{\partial\Omega} u_1 v d\sigma + \lambda_1 t^2 \int_{\partial\Omega} v^2 d\sigma \leq 2t\langle u_1, v\rangle + t^2\|v\|^2.$$

Se $t > 0$, dividindo a desigualdade acima por $2t > 0$ e fazendo $t \to 0^+$, teremos

$$\lambda_1 \int_{\partial\Omega} u_1 v d\sigma \leq \langle u_1, v\rangle.$$

Se $t < 0$, um raciocínio análogo conclui a desigualdade contrária. Portanto,

$$\lambda_1 \int_{\partial\Omega} u_1 v d\sigma = \langle u_1, v\rangle, \quad \forall v \in H^1(\Omega),$$

isto é, u_1 é uma autofunção associada ao autovalor λ_1. A recíproca é concluída tomando $v = u_1$ na igualdade acima. □

Proposição 2.3. Se u_1 é uma autofunção associada ao primeiro autovalor λ_1 do problema de Steklov (2.1), então $u_1 > 0$ ou $u_1 < 0$ em $\bar{\Omega}$.

Demonstração. Se u_1 é uma autofunção associada ao autovalor λ_1, $|u_1|$ é também autofunção, pois também atinge (2.2). Dessa forma, pela Observação 2.1 $|u_1|$ é solução de (2.1). Vejamos que $|u_1| > 0$. Suponha que exista $x_0 \in \Omega$ tal que $u_1(x_0) = 0$. Isto nos diz que x_0 é um mínimo de $|u_1|$. Pelo Princípio do máximo forte, $|u_1| \equiv 0$, o que é uma contradição pois u_1 é não nula. Portanto $|u_1| > 0$, o que nos diz que u_1 não muda de sinal em Ω e $u_1 < 0$ ou $u_1 > 0$ em Ω. Suponha agora, sem perda de generalidade, que $u_1 > 0$ em Ω e suponha, por contradição, que exista $x_0 \in \partial\Omega$ tal que $u_1(x_0) = 0$. Pelo Lema de Hopf deveríamos ter $\frac{\partial u_1}{\partial \eta}(x_0) < 0$, o que é uma contradição ao fato que $\frac{\partial u_1}{\partial \eta}(x_0) = \lambda_1 u(x_0) = 0$. Portanto, u_1 não se anula na fronteira, o que conclui a prova.

□

Proposição 2.4. λ_1 é simples, isto é, se u e v são autofunções associadas ao autovalor λ_1, então existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $u = kv$.

Demonstração. Pela Proposição 2.3, podemos assumir que u e v são positivas em $\bar{\Omega}$. Sejam

$$\eta_1 = \frac{u^2 - v^2}{u} \quad \text{e} \quad \eta_2 = \frac{v^2 - u^2}{v}.$$

Usando η_1 e η_2 como funções testes teremos, com $i = 1, 2$,

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla \eta_i dx + \int_{\Omega} \eta_i u dx = \lambda_1 \int_{\partial\Omega} \eta_i u d\sigma,$$

o que nos dá

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \nabla u \nabla \left(\frac{u^2 - v^2}{u}\right) dx &= \lambda_1 \int_{\partial\Omega} u \left(\frac{u^2 - v^2}{u}\right) d\sigma - \int_{\Omega} u \left(\frac{u^2 - v^2}{u}\right) dx \\
&= \lambda_1 \int_{\partial\Omega} (u^2 - v^2) d\sigma - \int_{\Omega} (u^2 - v^2) dx
\end{aligned}$$

e, analogamente,

$$\int_{\Omega} \nabla v \nabla \left(\frac{v^2 - u^2}{v}\right) dx = \lambda_1 \int_{\partial\Omega} (v^2 - u^2) d\sigma - \int_{\Omega} (v^2 - u^2) dx.$$

Somando as duas equações acima, teremos

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla \left(\frac{u^2 - v^2}{u}\right) dx + \int_{\Omega} \nabla v \nabla \left(\frac{v^2 - u^2}{v}\right) dx = 0$$

$$\Leftrightarrow \int_{\Omega} \left(|\nabla u|^2 - \frac{2v}{u} \nabla u \nabla v + \frac{v^2}{u^2} |\nabla u|^2 dx \right) + \int_{\Omega} \left(|\nabla v|^2 - \frac{2u}{v} \nabla u \nabla v + \frac{u^2}{v^2} |\nabla v|^2 dx \right) = 0.$$

Note que, sendo $(\ln u)_{x_j} = \dfrac{u_{x_j}}{u}$, temos que $u \nabla \ln u = \nabla u$ e, usando o mesmo raciocínio para v, teremos

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{\Omega} \left(u^2 |\nabla \ln u|^2 - 2v^2 \nabla \ln u \nabla \ln v + |\nabla \ln u|^2 v^2 + v^2 |\nabla \ln v|^2 - 2u^2 \nabla \ln v \nabla \ln u + |\nabla \ln v|^2 u^2 \right) dx \\
&= \int_{\Omega} u^2 (|\nabla \ln u|^2 + |\nabla \ln v|^2) - 2 \nabla \ln u \nabla \ln v (v^2 + u^2) + v^2 (|\nabla \ln v|^2 + |\nabla \ln u|^2) dx \\
&= \int_{\Omega} (u^2 + v^2)(|\nabla \ln u|^2 + |\nabla \ln v|^2 - 2 \nabla \ln u \nabla \ln v) dx \\
&= \int_{\Omega} (u^2 + v^2) |\nabla \ln u - \nabla \ln v|^2 dx,
\end{aligned}$$

o que nos dá $\nabla \ln u = \nabla \ln v$ em Ω. Logo teremos

$$\int (\ln u)_{x_1} dx_1 = \int (\ln v)_{x_1} dx_1 \Rightarrow \ln u - \ln v = g(x_2).$$

Procedendo da mesma forma, só que com respeito a x_2, teremos $\ln u - \ln v = f(x_1)$. Nos resta dizer então que $\ln u - \ln v = c$, para alguma constante $c \in \mathbb{R}$. Portanto,

$$\ln u - \ln v = c \Rightarrow \ln \left(\frac{u}{v}\right) = c \Rightarrow \frac{u}{v} = e^c \Rightarrow u = kv.$$

□

Teorema 2.5. *Se $u_1 \in H^1(\Omega)$ é uma autofunção associada ao primeiro autovalor λ_1 do problema* (2.1), *então u_1 é radial.*

Demonstração. Para provarmos que u_1 é radial, basta provarmos que, para todo rotação $R : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ teremos $u_1(x) = u_1(R(x))$, para todo $x \in \Omega$. Se u_1 é uma autofunção associada a λ_1 então, por (2.2),

$$\lambda_1 = \frac{\|u_1\|^2}{\int_{\partial\Omega} u_1^2 d\sigma}.$$

Desde que a recíproca também é válida, $u_1 \circ R$ também é uma autofunção associada ao autovalor λ_1. De fato, lembrando que rotações são transformações lineares ortogonais, o que nos dá $\det R' = \det R = 1$ e que $R(\Omega) = \Omega$, usando o Teorema da mudança de variáveis, teremos

$$\int_\Omega |\nabla(u_1 \circ R)|^2 dx = \int_\Omega |\nabla(u_1 \circ R)|^2 \det R' dx = \int_{R(\Omega)} |\nabla u_1|^2 dx = \int_\Omega |\nabla u_1|^2 dx.$$

Analogamente,

$$\int_\Omega (u_1 \circ R)^2 dx = \int_\Omega u_1^2 dx \quad \text{e} \quad \int_{\partial\Omega} (u_1 \circ R)^2 dx = \int_{\partial\Omega} u_1^2 dx,$$

o que nos garante que $u_1 \circ R$ é uma autofunção associada a λ_1. Pela Proposição 2.4, existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $ku_1 = u_1 \circ R$. Dessa forma, note que

$$u_1(\Omega) = (u_1 \circ R)(\Omega) = ku_1(\Omega) \Rightarrow k = 1.$$

Assim $u_1(x) = (u_1 \circ R)(x)$, para todo $x \in \Omega$. Portanto, u_1 é radial. □

2.1.2 A sequência de autovalores do problema de Steklov

Faremos agora a construção dos outros autovalores do problema de Steklov seguindo a construção da dissertação [10].

Teorema 2.6. *Existe uma sequência de pares $(u_J, \lambda_J) \in H^1(\Omega)\backslash\{0\} \times \mathbb{R}$ que solucionam* (2.1). *Além disso, se B é a bola unitária fechada de $H^1(\Omega)$ e*

$$B_0 = B \quad e \quad B_J = \{u \in B : \int_{\partial\Omega} uu_j d\sigma = 0,\ 1 \leq j \leq J\},$$

então

$$\beta_J = \sup_{u \in B_{J-1}} \int_{\partial\Omega} u^2 d\sigma = \int_{\partial\Omega} u_J^2 d\sigma > 0 \quad e \quad \lambda_J = \beta_J^{-1}.$$

Demonstração. Faremos a prova por indução. No início do capítulo, já provamos o caso $J = 1$. Suponha que o resultado seja válido para J e provemos para $J + 1$. Note que B_J é convexo, pois, dadas $u, v \in B_J$ temos, para $1 \leq j \leq J$,

$$\int_{\partial\Omega} ((1-t)u + vt)u_j d\sigma = (1-t)\int_{\partial\Omega} uu_j d\sigma + t\int_{\partial\Omega} vu_j d\sigma = 0.$$

Dessa forma, pela Proposição A.2, B_J é fechado na topologia fraca. Desde que $B_J \subset B$ é compacto, cada B_J é compacto na topologia fraca e, como provado no início da capítulo, o funcional $u \longmapsto \int_{\partial\Omega} u^2 d\sigma$ é fracamente contínuo, logo atingirá máximo em B_J. Portanto, existe $u_{J+1} \in B_J$ tal que $\beta_{J+1} = \int_{\partial\Omega} u_{J+1}^2 d\sigma$. Temos que $\|u_{J+1}\| = 1$ pois, se fosse menor que 1, teríamos

$$\int_{\partial\Omega} r^2 u_{J+1}^2 d\sigma = r^2 \int_{\partial\Omega} u_{J+1}^2 d\sigma > \int_{\partial\Omega} u_{J+1}^2 d\sigma,$$

com $r = \frac{1+\|u_{J+1}\|}{2\|u_{J+1}\|} > 1$ e $ru_{J+1} \in B_J$, o que é uma contradição à maximalidade de u_{J+1}. Defina $\lambda_{J+1} = \beta_{J+1}^{-1}$. Afirmamos que (u_{J+1}, λ_{J+1}) é solução fraca para (2.1). De fato, considere os seguintes funcionais:

$$J(u) = \|u\|^2, \quad B(u) = \int_{\partial\Omega} u^2 d\sigma \quad \text{e} \quad f_k(u) = \int_{\partial\Omega} u_k u d\sigma \ \text{ com } \ 1 \leq k \leq J.$$

Observe que $J, B, f_k \in C^1(H^1(\Omega), \mathbb{R})$ e

$$J'(u)(v) = 2\langle u, v\rangle, \quad B'(u)(v) = 2\int_{\partial\Omega} uv d\sigma \ \text{ e } \ f_k'(u)(v) = \int_{\Omega} vu_k d\sigma.$$

Podemos olhar para u_{J+1} como sendo um extremo de B restrito ao conjunto

$$J^{-1}(J(u_{J+1})) \cap \left[\bigcap_{k=1}^{J} f_k^{-1}(f_k(u_{J+1}))\right].$$

Pelo Teorema C.6, um dos fatos abaixo deve ocorrer:

(1) $\det A(v_1, \ldots, v_{J+1}) = 0$, para todos $v_1, \ldots, v_{J+1} \in H^1(\Omega)$, onde

$$A(v_1, \ldots, v_{J+1}) = \begin{bmatrix} J'(u_{J+1})(v_1) & J'(u_{J+1})(v_2) & \cdots & J'(u_{J+1})(v_{J+1}) \\ f_1'(u_{J+1})(v_1) & f_1'(u_{J+1})(v_2) & \cdots & f_1'(u_{J+1})(v_{J+1}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_J'(u_{J+1})(v_1) & f_J'(u_{J+1})(v_2) & \cdots & f_J'(u_{J+1})(v_{J+1}) \end{bmatrix},$$

ou

(2) existem $\mu, \mu_k \in \mathbb{R}, k = 1, \ldots, J$, tais que

$$B'(u_{J+1})(v) = \mu J'(u_{J+1})(v) + \sum_{k=1}^{J} \mu_k f_k'(u_{J+1})(v),$$

para toda $v \in H^1(\Omega)$. Vejamos que (2) ocorre. Pela hipótese de indução, para todo $k \in \{1, \ldots, J\}$ teremos

$$J'(u_{J+1})(u_k) = 2\langle u_{J+1}, u_k\rangle = 2\lambda_k \int_{\partial\Omega} u_{J+1}u_k d\sigma = 0 \quad \text{e} \quad f_k'(u_{J+1})(u_k) = \int_{\partial\Omega} u_k^2 d\sigma = \beta_k\langle u_k, u_k\rangle = \beta_k.$$

Além disso,

$$J'(u_{J+1})(u_{J+1}) = 2\langle u_{J+1}, u_{J+1}\rangle = 2$$

e como $u_{J+1} \in B_J$ temos

$$f_k'(u_{J+1})(u_{J+1}) = \int_{\partial\Omega} u_{J+1}u_k d\sigma = 0.$$

Com isso $\det A(u_{J+1}, u_1, \ldots, u_J) = 2\beta_1 \ldots \beta_J > 0$. Portanto, (2) deve ocorrer. Mostremos que $\mu_s = 0$, para todo $s \in \{1, \ldots, J\}$. Considere $v = u_s$. Por (2), temos que

$$\begin{aligned}
B'(u_{J+1})(u_s) &= \mu J'(u_{J+1})(u_s) + \sum_{k=1}^{J} \mu_k f_k'(u_{J+1})(u_s) \\
2\int_{\partial\Omega} u_{J+1}u_s d\sigma &= 2\mu\langle u_{J+1}, u_s\rangle + \sum_{k=1}^{J} \mu_k \int_{\partial\Omega} u_s u_k d\sigma \\
0 &= 2\mu\lambda_s \int_{\partial\Omega} u_{J+1}u_s d\sigma + \mu_s \int_{\partial\Omega} u_s^2 d\sigma \\
0 &= \mu_s\beta_s.
\end{aligned}$$

Logo, como $\beta_s > 0, \mu_s = 0$ para todo $s \in \{1, \ldots J\}$, assim, tomando $v = u_{J+1}$, novamente por (2) teremos que

$$\begin{aligned}
B'(u_{J+1})(u_{J+1}) &= \mu J'(u_{J+1})(u_{J+1}) \\
\int_{\partial\Omega} u_{J+1}^2 d\sigma &= \mu\langle u_{J+1}, u_{J+1}\rangle \\
\beta_{J+1} &= \mu.
\end{aligned}$$

Dessa forma, para todo $v \in H^1(\Omega)$, teremos $B'(u_{J+1})(v) = \beta_{J+1}J'(u_{J+1})(v)$, ou seja,

$$\begin{aligned}
\int_{\partial\Omega} u_{J+1}v d\sigma &= \beta_{J+1}\langle u_{J+1}, v\rangle \\
\lambda_{J+1}\int_{\partial\Omega} u_{J+1}v d\sigma &= \langle u_{J+1}, v\rangle, \quad \forall v \in H^1(\Omega),
\end{aligned}$$

o que prova a afirmação.

$\square$

2.2 Comportamento assintótico dos valores extremais

Uma das formas de atacar o problema de simetria para extremais de $S(\alpha,\gamma)$ é compará-lo com $S_r(\alpha,\gamma)$ para valores grandes de γ. Pela Observação 1.1, sabemos que $S(\alpha,\gamma)$ e $S_r(\alpha,\gamma)$ tendem a 0 quando $\gamma \to \infty$. Vamos agora apresentar uma descrição mais precisa do comportamento de tais valores quando $\gamma \to \infty$.

Denotaremos, a partir de agora, por φ_1 a primeira autofunção do problema de Steklov (2.1) associada ao primeiro autovalor λ_1, a qual pode ser assumida normalizada, radial e positiva. Temos uma importante relação entre φ_1 e λ_1 a ser usada posteriormente, a saber

$$\frac{1}{\lambda_1} = \sup_{\substack{u\in H^1(\Omega)\\ \|u\|\le 1}} \int_{\partial\Omega} u^2 d\sigma = \int_{\partial\Omega} \varphi_1^2 d\sigma = 2\pi\varphi_1^2(1) \Leftrightarrow \varphi_1^2(1) = \frac{1}{2\pi\lambda_1}. \tag{2.4}$$

Note que usamos o fato de que, sendo φ_1 radial, em $\partial\Omega$, que é o círculo unitário, φ_1 é constante e igual a $\varphi_1(1)$.

Agora vamos estabelecer uma identidade que será usada ao longo do trabalho.

Lema 2.7. Suponha que $u \in H^1(\Omega)$. Então a seguinte identidade é válida:

$$\int_\Omega (e^{\alpha u^2}-1)(\gamma+2)|x|^\gamma dx = \int_{\partial\Omega}(e^{\alpha u^2}-1)d\sigma - \int_\Omega \nabla(e^{\alpha u^2}-1)\cdot x|x|^\gamma dx. \tag{2.5}$$

Demonstração. Considere a aplicação $F(x) = |x|^\gamma x = (|x|^\gamma x_1, |x|^\gamma x_2)$ e note que

$$\frac{\partial(|x|^\gamma x_i)}{\partial x_i} = \frac{\gamma|x|^{\gamma-1}}{|x|}x_i^2 + |x|^\gamma = \gamma|x|^{\gamma-2}x_i^2 + |x|^\gamma,$$

logo

$$\operatorname{div}(|x|^\gamma x) = \gamma|x|^{\gamma-2}(x_1^2+x_2^2) + 2|x|^\gamma = (\gamma+2)|x|^\gamma.$$

Considere então $f = e^{\alpha u^2}-1$. Sendo $\operatorname{div}(fF) = f\operatorname{div}(F) + \nabla f.F$, integrando e aplicando o Teorema da divergência teremos

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \operatorname{div}(fF)dx &= \int_\Omega f\operatorname{div}(F)dx + \int_\Omega \nabla f.F dx\\
\int_{\partial\Omega}(fF).\eta d\sigma &= \int_\Omega f\operatorname{div}(F)dx + \int_\Omega \nabla f.F dx\\
\int_{\partial\Omega}(e^{\alpha u^2}-1)|x|^\gamma x.\eta d\sigma &= \int_\Omega (e^{\alpha u^2}-1)(\gamma+2)|x|^\gamma dx + \int_\Omega \nabla(e^{\alpha u^2}-1).x|x|^\gamma dx,
\end{aligned}$$

onde η denota o vetor normal exterior unitário em cada ponto de $\partial\Omega$. Note que, sendo $\partial\Omega$ o círculo unitário, o vetor normal exterior unitário em cada ponto de $\partial\Omega$ é o próprio ponto. Portanto, (2.5) é válida. $\square$

Proposição 2.8. Seja $\alpha > 0$ e u_γ uma extremal para $S_r(\alpha, \gamma)$ sobre $H^1_{rad}(\Omega)$. Então, quando $\gamma \to \infty$,

$$(\gamma + 2)S_r(\alpha, \gamma) \to 2\pi(e^{\frac{\alpha}{2\pi\lambda_1}} - 1)$$

e

$$u_\gamma \to \varphi_1 \quad \text{em} \quad H^1(\Omega).$$

Demonstração. Seja $u \in H^1(\Omega)$ com $\|u\| \leq 1$. Usando a equação (2.5) e a desigualdade de Cauchy-Schwarz, teremos então

$$\begin{aligned}
\left| \int_\Omega (e^{\alpha u^2} - 1)(\gamma + 2)|x|^\gamma dx - \int_{\partial\Omega} (e^{\alpha u^2} - 1) d\sigma \right| &\leq \int_\Omega |\nabla(e^{\alpha u^2} - 1).x|x|^\gamma| dx \\
&\leq \int_\Omega |\nabla(e^{\alpha u^2} - 1)||x|^\gamma dx \\
&= 2\alpha \int_\Omega |u e^{\alpha u^2} \nabla u||x|^\gamma dx.
\end{aligned}$$

Pela desigualdade de Hölder generalizada, teremos

$$\left| \int_\Omega (e^{\alpha u^2} - 1)(\gamma + 2)|x|^\gamma dx - \int_{\partial\Omega} (e^{\alpha u^2} - 1) d\sigma \right| \leq 2\alpha \|\nabla u\|_2 \|u\|_4 \left(\int_\Omega e^{4\alpha u^2} |x|^\gamma dx \right)^{1/4}.$$

Como $\|u\| \leq 1$ e $H^1(\Omega)$ está imerso em $L^4(\Omega)$, teremos

$$\left| \int_\Omega (e^{\alpha u^2} - 1)(\gamma + 2)|x|^\gamma dx - \int_{\partial\Omega} (e^{\alpha u^2} - 1) d\sigma \right| \leq C_1 \left(\int_\Omega e^{4\alpha u^2} |x|^\gamma dx \right)^{1/4}.$$

Se u é radial, tomando $\varepsilon = 1$ na desigualdade em (1.4), para todo $x \in \Omega \backslash \{0\}$, teremos

$$|u(x)|^2 \leq 2C^2 + \frac{1}{\pi}(-\log|x|).$$

Portanto, usando o Teorema B.5 teremos

$$\begin{aligned}
\int_\Omega e^{4\alpha u^2} |x|^\gamma dx &\leq e^{8\alpha C^2} \int_\Omega e^{\frac{4\alpha}{\pi}(-\log|x|)} |x|^\gamma dx \\
&\leq e^{8\alpha C^2} \int_\Omega (e^{\log|x|})^{\frac{-4\alpha}{\pi}} |x|^\gamma dx \\
&= e^{8\alpha C^2} \int_\Omega |x|^{\gamma - \frac{4\alpha}{\pi}} dx \to 0
\end{aligned}$$

quando $\gamma \to \infty$. Logo

$$\int_\Omega (e^{\alpha u^2} - 1)(\gamma + 2)|x|^\gamma dx = \int_{\partial\Omega} (e^{\alpha u^2} - 1) d\sigma + o(1) \tag{2.6}$$

para toda $u \in H^1_{rad}(\Omega)$ com $\|u\| \leq 1$. Note que, sendo u radial, teremos

$$\frac{\alpha}{2\pi}\int_{\partial\Omega} u^2 d\sigma = \alpha u^2(1),$$

daí, tomando o supremo em (2.6), teremos

$$\begin{aligned}
(\gamma+2)S_r(\alpha,\gamma) &= \sup_{\substack{u\in H^1_{rad}(\Omega)\\ \|u\|\leq 1}} \int_{\partial\Omega} (e^{\frac{\alpha}{2\pi}\int_{\partial\Omega} u^2 d\sigma} - 1)d\sigma + o(1)\\
&= \sup_{\substack{u\in H^1_{rad}(\Omega)\\ \|u\|\leq 1}} 2\pi(e^{\frac{\alpha}{2\pi}\int_{\partial\Omega} u^2 d\sigma} - 1) + o(1)\\
&= 2\pi(e^{\frac{\alpha}{2\pi\lambda_1}} - 1) + o(1),
\end{aligned}$$

quando $\gamma \to \infty$, onde usamos (2.3).

Vejamos agora que $u_\gamma \to \varphi_1$ em $H^1(\Omega)$. Note que, sendo $\|u_\gamma\| = 1$ e $H^1(\Omega)$ reflexivo, pelo Teorema A.4 para uma subsequência teremos $u_\gamma \rightharpoonup u$ em $H^1(\Omega)$ com $u \in H^1_{\text{rad}}(\Omega)$ e $\|u\| \leq 1$. Pelo Teorema B.10, $H^1(\Omega)$ está imerso compactamente em $L^p(\partial\Omega)$, para todo $p \in [1,\infty)$. Portanto,

$$\int_{\partial\Omega} u_\gamma d\sigma \to \int_{\partial\Omega} u d\sigma \Rightarrow 2\pi u_\gamma(1) \to 2\pi u(1) \Rightarrow u_\gamma(1) \to u(1).$$

Por (2.6), teremos

$$(\gamma+2)S_r(\alpha,\gamma) + o(1) = \int_\Omega (e^{\alpha u_\gamma^2} - 1)(\gamma+2)|x|^\gamma dx + o(1) = \int_{\partial\Omega}(e^{\alpha u_\gamma^2} - 1)d\sigma.$$

Logo

$$2\pi(e^{\frac{\alpha}{2\pi\lambda_1}} - 1) + o(1) = \int_{\partial\Omega}(e^{\alpha u_\gamma^2} - 1)d\sigma = 2\pi(e^{\alpha u_\gamma^2(1)} - 1) = 2\pi(e^{\alpha u^2(1)} - 1) + o(1).$$

Portanto, concluímos que

$$\begin{aligned}
2\pi(e^{\frac{\alpha}{2\pi\lambda_1}} - 1) + o(1) &= 2\pi(e^{\alpha u^2(1)} - 1)\\
&\leq 2\pi(e^{\alpha\frac{u^2(1)}{\|u\|^2}} - 1)\\
&\leq \sup_{\substack{v\in H^1_{rad}(\Omega)\\ \|v\|\leq 1}} \int_{\partial\Omega}(e^{\alpha v^2} - 1)d\sigma\\
&= 2\pi(e^{\frac{\alpha}{2\pi\lambda_1}} - 1),
\end{aligned}$$

o que nos dá

$$2\pi(e^{\alpha u^2(1)} - 1) = 2\pi(e^{\alpha\frac{u^2(1)}{\|u\|^2}} - 1) \Rightarrow \|u\| = 1.$$

daí, usando (2.4), temos que

$$2\pi(e^{\frac{\alpha}{2\pi\lambda_1}}-1)+o(1)=2\pi(e^{\alpha\varphi_1^2(1)}-1)+o(1)=2\pi(e^{\alpha u^2(1)}-1)\leq 2\pi(e^{\alpha\frac{u^2(1)}{\|u\|^2}}-1)\leq 2\pi(e^{\alpha\varphi_1^2(1)}-1),$$

o que nos dá

$$2\pi(e^{\alpha\varphi_1^2(1)}-1)=2\pi(e^{\alpha u^2(1)}-1)\Rightarrow \varphi_1(1)=u(1)\Rightarrow \frac{1}{\lambda_1}=\int_{\partial\Omega}\varphi_1^2 d\sigma=\int_{\partial\Omega}u^2 d\sigma,$$

ou seja, u é uma autofunção de (2.1) associada ao autovalor λ_1, logo pela Proposição 2.4, existe $k\in\mathbb{R}$ tal que $\varphi_1=ku$, porém k deve ser 1 pois $\varphi_1(1)=u(1)$. Note então que $\|u_\gamma\|=1=\|\varphi_1\|$, com isso, a Proposição A.5 garante que $u_\gamma\to\varphi_1$ em $H^1(\Omega)$. Vejamos que a sequência inteira converge para φ_1. Suponha por contradição que existe $\varepsilon>0$ e uma subsequência u_{γ_k} tal que

$$\|u_{\gamma_k}-\varphi_1\|\geq\varepsilon,\quad \forall k\in\mathbb{N}.$$

Porém, usando os mesmos argumentos usados durante a demonstração, u_{γ_k} teria uma subsequência que converge para φ_1, o que nos dá uma contradição.

□

Voltemos a atenção agora para o caso não radial. Vamos assumir que $\alpha\in(\pi,2\pi)$. Neste caso, pelo Teorema 1.5, sabemos que, para todo $M>0$, existe $v\in H^1(\Omega)$, com $\|v\|\leq 1$, tal que

$$\int_{\partial\Omega}(e^{\alpha v^2}-1)d\sigma\geq M.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}(\gamma+2)S(\alpha,\gamma)&=\sup_{\substack{u\in H^1(\Omega)\\ \|u\|\leq 1}}\int_\Omega(e^{\alpha u^2}-1)(\gamma+2)|x|^\gamma dx\\ &\geq\int_\Omega(e^{\alpha v^2}-1)(\gamma+2)|x|^\gamma dx.\end{aligned}$$

Logo, pelo Lema 2.7 teremos

$$\begin{aligned}(\gamma+2)S(\alpha,\gamma)&\geq\int_{\partial\Omega}(e^{\alpha v^2}-1)d\sigma-\int_\Omega\nabla(e^{\alpha v^2}-1).x|x|^\gamma dx\\ &\geq M-2\alpha\int_\Omega ve^{\alpha v^2}\nabla v.x|x|^\gamma dx\\ &\geq M+o(1)\end{aligned}$$

quando $\gamma\to\infty$, já que v é fixada. A desigualdade acima será suficiente para percebermos que $S_r(\alpha,\gamma)$ tende a 0 mais rápido que $S(\alpha,\gamma)$ quando $\gamma\to\infty$ e $\alpha\in(\pi,2\pi)$, nos dando o primeiro resultado de quebra de simetria.

Teorema 2.9. *Para todo $\alpha \in (\pi, 2\pi)$ nenhuma função extremal para $S(\alpha,\gamma)$ é radial se γ é suficientemente grande.*

Demonstração. Tome $M > 2\pi(e^{\frac{\alpha}{2\pi\lambda_1}} - 1)$. Pela desigualdade obtida acima e a Proposição 2.8, quando $\gamma \to \infty$ temos que

$$(\gamma+2)S(\alpha,\gamma) \geq M + o(1) > 2\pi(e^{\frac{\alpha}{2\pi\lambda_1}} - 1) + o(1) = (\gamma+2)S_r(\alpha,\gamma) + o(1),$$

o que nos diz que $S(\alpha,\gamma) > S_r(\alpha,\gamma)$ se γ é suficientemente grande. Portanto $S(\alpha,\gamma)$ é atingido por um elemento de $H^1(\Omega) \backslash H^1_{rad}(\Omega)$.

$\square$

Para todo $\alpha \in (0,\pi]$ considere $Q^\alpha(u) = \int_{\partial\Omega}(e^{\alpha u^2} - 1)d\sigma$ e

$$T(\alpha) := \sup_{\substack{u\in H^1(\Omega)\\ \|u\|\leq 1}} Q^\alpha(u). \tag{2.7}$$

Sabemos, pelo Teorema 1.5, que o número $T(\alpha)$ é atingido para todo $\alpha \leq \pi$. Também utilizaremos o supremo de Q^α com respeito às funções $u \in H^1_{rad}(\Omega)$ com $\|u\| \leq 1$, isto é,

$$T_r(\alpha) := \sup_{\substack{u\in H^1_{\text{rad}}(\Omega)\\ \|u\|\leq 1}} Q^\alpha(u). \tag{2.8}$$

Buscaremos agora provar, para $S(\alpha,\gamma)$, um resultado semelhante ao da Proposição 2.8 com $\alpha < \pi$. Para isso, vamos primeiramente estabelecer dois resultados auxiliares.

Lema 2.10. Sejam $a, b \geq 1$ e $\alpha < \pi$. Então, existem $p > 1$ e uma constante $C > 0$ tais que

$$\|\nabla(|u|^a|v|^b e^{\alpha w^2})\|_p \leq C,$$

para todos $u, v, w \in H^1(\Omega)$, com $\|u\|, \|v\|, \|w\| \leq 1$.

Demonstração. Note que

$$(|u|^a)_{x_i} = a|u|^{a-2}uu_{x_i}, \quad (|v|^b)_{x_i} = b|v|^{b-2}vv_{x_i}$$

e

$$(e^{\alpha w^2})_{x_i} = 2\alpha e^{\alpha w^2} ww_{x_i}.$$

Assim,

$$(|u|^a|v|^b e^{\alpha w^2})_{x_i} = (|u|^a)_{x_i}|v|^b e^{\alpha w^2} + |u|^a(|v|^b)_{x_i}e^{\alpha w^2} + |u|^a|v|^b((e^{\alpha w^2})_{x_i})$$

e portanto,

$$\nabla(|u|^a|v|^b e^{\alpha w^2}) = a|u|^{a-2}u||v|^b e^{\alpha w^2}\nabla u + b|u|^a|v|^{b-2}ve^{\alpha w^2}\nabla v + 2|u|^a|v|^b e^{\alpha w^2} w\nabla w.$$

Consequentemente,

$$|\nabla(|u|^a|v|^b e^{\alpha w^2})| \leq a|u|^{a-1}|v|^b e^{\alpha w^2}|\nabla u| + b|u|^a|v|^{b-1}e^{\alpha w^2}|\nabla v| + 2|u|^a|v|^b e^{\alpha w^2}|w||\nabla w|,$$

ou seja,

$$|\nabla(|u|^a|v|^b e^{\alpha w^2})| \leq C\left(|u|^{a-1}|v|^b e^{\alpha w^2}|\nabla u| + |u|^a|v|^{b-1}e^{\alpha w^2}|\nabla v| + |u|^a|v|^b e^{\alpha w^2}|w||\nabla w|\right).$$

Usando a desigualdade elementar $(x+y+z)^p \leq C_p(x^p+y^p+z^p)$ obtemos

$$|\nabla(|u|^a|v|^b e^{\alpha w^2})|^p \leq C_p\left(|u|^{p(a-1)}|v|^{bp}e^{p\alpha w^2}|\nabla u|^p + |u|^{ap}|v|^{p(b-1)}e^{p\alpha w^2}|\nabla v|^p + |u|^{ap}|v|^{pb}e^{p\alpha w^2}|w||\nabla w|^p\right).$$

Trataremos apenas do primeiro termo no lado direito acima, os outros dois termos seguem de forma análoga. Seja $\alpha < \pi$ e fixe $p = 1+\varepsilon$ com $\varepsilon > 0$ a ser determinado posteriormente. Aplicando a desigualdade de Hölder com os expoentes $4/\varepsilon, 4/\varepsilon, 2/(1-2\varepsilon)$ e $2/(1+\varepsilon)$ obtemos

$$\begin{aligned}\int_\Omega |u|^{(1+\varepsilon)(a-1)}|v|^{(1+\varepsilon)b}e^{(1+\varepsilon)\alpha w^2}|\nabla u|^{(1+\varepsilon)}dx \leq &\left(\int_\Omega |u|^{\frac{4}{\varepsilon}(1+\varepsilon)(a-1)}\right)^{\frac{\varepsilon}{4}}\left(\int_\Omega |v|^{\frac{4}{\varepsilon}(1+\varepsilon)b}dx\right)^{\frac{\varepsilon}{4}}\\ &\left(\int_\Omega e^{\frac{2+2\varepsilon}{1-2\varepsilon}\alpha w^2}dx\right)^{\frac{1-2\varepsilon}{2}}\left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\right)^{\frac{1+\varepsilon}{2}}.\end{aligned}$$

Tome $\varepsilon > 0$ tal que $\frac{2+2\varepsilon}{1-2\varepsilon}\alpha \leq 2\pi$. Dessa forma, o terceiro termo é limitado pelo Teorema 1.4. Os outros termos são limitados, pois $\|u\|, \|v\| \leq 1$ e $H^1(\Omega)$ está imerso em $L^q(\Omega)$, para todo $q \in [1,\infty)$. □

Lema 2.11. Sejam $a, b \geq 1$. Então,

$$\int_\Omega \nabla(|u|^a|v|^b e^{\alpha w^2}).x|x|^\gamma dx = o(1)$$

quando $\gamma \to \infty$, para todas u, v, w na bola unitária de $H^1(\Omega)$ e $\alpha \in [0,\pi)$.

Demonstração. Pelo Lema 2.10, podemos tomar $p > 1$ tal que $\|\nabla(|u|^a|v|^b e^{\alpha w^2})\|_p \leq C$, para algum $C > 0$. Note que

$$\left|\int_\Omega \nabla(|u|^a|v|^b e^{\alpha w^2}).x|x|^\gamma dx\right| \leq \int_\Omega |\nabla(|u|^a|v|^b e^{\alpha w^2})||x|^{\gamma+1}dx.$$

Usando a desigualdade de Hölder teremos

$$\left|\int_{\Omega} \nabla(|u|^a|v|^b e^{\alpha w^2}).x|x|^\gamma dx\right| \leq \|\nabla(|u|^a|v|^b e^{\alpha w^2})\|_p \||x|^{\gamma+1}\|_{p'} \leq Co(1),$$

quando $\gamma \to \infty$. □

Proposição 2.12. Suponha que $\alpha < \pi$. Então,

$$\lim_{\gamma\to\infty} (\gamma+2)S(\alpha,\gamma) = T(\alpha).$$

Demonstração. Usando o Lema 2.7 e o Lema 2.11 teremos

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} (e^{\alpha u^2}-1)(\gamma+2)|x|^\gamma dx &= \int_{\partial\Omega} (e^{\alpha u^2}-1)d\sigma - \int_{\Omega} \nabla(e^{\alpha u^2}-1).x|x|^\gamma dx \\ &= Q^\alpha(u) + o(1),\end{aligned}$$

uniformemente para $u \in H^1(\Omega)$, com $\|u\| \leq 1$, quando $\gamma \to \infty$. Tomando o supremo, teremos então

$$(\gamma+2)S(\alpha,\gamma) \to T(\alpha).$$

□

Observação 2.2. Tomando o supremo na equação (2.6) e considerando o resultado da Proposição 2.12, para $\alpha < \pi$ temos que

$$\lim_{\gamma\to\infty} (\gamma+2)S(\alpha,\gamma) = \sup_{\substack{u\in H^1(\Omega)\\ \|u\|\leq 1}} \int_{\partial\Omega} (e^{\alpha u^2}-1)d\sigma = T(\alpha).$$

e

$$\lim_{\gamma\to\infty} (\gamma+2)S_r(\alpha,\gamma) = \sup_{\substack{u\in H^1_{rad}(\Omega)\\ \|u\|\leq 1}} \int_{\partial\Omega} (e^{\alpha u^2}-1)d\sigma = T_r(\alpha).$$

Portanto, isto indica que a quebra de simetria $S(\alpha,\gamma) > S_r(\alpha,\gamma)$, para γ suficientemente grande, ocorrerá se tivermos a quebra de simetria $T(\alpha) > T_r(\alpha)$ no caso em que $\alpha < \pi$. Este fato nos leva ao estudo das extremais da desigualdade de Trudinger-Moser no traço, o que será o objetivo do próximo capítulo.

Capítulo 3

Extremais para desigualdades de Trudinger-Moser no traço

No final do capítulo anterior vimos que, para $\alpha < \pi$, quebras de simetria em extremais de

$$S(\alpha, \gamma) = \sup_{\substack{u \in H^1(\Omega) \\ \|u\| \leq 1}} \int_\Omega (e^{\alpha u^2} - 1)|x|^\gamma dx$$

podem ser geradas se tivermos quebras de simetria em

$$T(\alpha) = \sup_{\substack{u \in H^1(\Omega) \\ \|u\| \leq 1}} \int_{\partial\Omega} (e^{\alpha u^2} - 1) d\sigma.$$

Por isso, dedicamos esse capítulo principalmente ao estudo da simetria das funções que realizam o supremo da desigualdade de Trudinger-Moser no traço. A unicidade com respeito a funções que realizam $T(\alpha)$ é um fator decisivo na questão da simetria para valores pequenos de α. O problema de Steklov apresentado no capítulo anterior tem uma influência ainda mais direta nesse caso. Por fim, analisaremos os extremos para a desigualdade de Trudinger-Moser com a integral definida em todo Ω. Lembremos que φ_1 denota a primeira autofunção radial, positiva e normalizada em $H^1(\Omega)$ do problema de Steklov, λ_1 e λ_2 os dois primeiros autovalores do mesmo problema, $\langle .,. \rangle$ o produto interno de $H^1(\Omega)$ com $\|.\|$ sua norma induzida e Ω a bola unitária de $\mathbb{R}^2$.

3.1 Quebra de simetria para a desigualdade de Trudinger-Moser no traço

No que segue, estudaremos as extremais de

$$T(\alpha) = \sup_{\substack{u \in H^1(\Omega) \\ \|u\| \leq 1}} \int_{\partial\Omega} (e^{\alpha u^2} - 1) d\sigma,$$

e consideraremos, também, sua parte radial

$$T_r(\alpha) = \sup_{\substack{u \in H^1_{rad}(\Omega) \\ \|u\| \leq 1}} \int_{\partial\Omega} (e^{\alpha u^2} - 1) d\sigma,$$

visando saber quando é que tem-se $T(\alpha) > T_r(\alpha)$ ou $T(\alpha) = T_r(\alpha)$.

Lema 3.1. A primeira autofunção do problem de Steklov (2.1) é a única extremal de $T_r(\alpha)$.

Demonstração. Desde que funções $u \in H^1_{rad}(\Omega)$ são constantes em $\partial\Omega$, temos que

$$\int_{\partial\Omega} e^{\alpha u^2} d\sigma = e^{\alpha u^2(1)} \int_{\partial\Omega} d\sigma = 2\pi e^{\frac{\alpha}{2\pi} \int_{\partial\Omega} u^2 d\sigma}.$$

Usando que o primeiro autovalor do problema de Steklov, λ_1, satisfaz

$$\frac{1}{\lambda_1} = \sup_{\substack{u \in H^1(\Omega) \\ \|u\| \leq 1}} \int_{\partial\Omega} u^2 d\sigma,$$

teremos

$$T_r(\alpha) = \sup_{\substack{u \in H^1_{rad}(\Omega) \\ \|u\| \leq 1}} \int_{\partial\Omega} (e^{\alpha u^2} - 1) d\sigma = 2\pi(e^{\frac{\alpha}{2\pi\lambda_1}} - 1) = \int_{\partial\Omega} (e^{\alpha\varphi_1^2} - 1) d\sigma,$$

e portanto φ_1 é uma extremal para $T_r(\alpha)$. Afirmamos que φ_1 é a única extremal de $T_r(\alpha)$. De fato, suponha que exista uma outra extremal $v \in H^1_{rad}(\Omega)$ que realiza $T_r(\alpha)$. Desde que v e φ_1 são constantes em $\partial\Omega$ teremos

$$\int_{\partial\Omega} (e^{\alpha\varphi_1^2} - 1) d\sigma = \int_{\partial\Omega} (e^{\alpha v^2} - 1) d\sigma \Rightarrow \varphi_1 = v \ \text{ em } \ \partial\Omega,$$

logo

$$\sup_{\substack{u \in H^1(\Omega) \\ \|u\| \leq 1}} \int_{\partial\Omega} u^2 d\sigma = \int_{\partial\Omega} \varphi_1^2 d\sigma = \int_{\partial\Omega} v^2 d\sigma,$$

ou seja, v seria autofunção do problema de Steklov associada ao autovalor λ_1 e, pela Proposição 2.4, v seria proporcional a φ_1 em Ω, mas, pela igualdade na fronteira, temos que $v = \varphi_1$.

□

Através desse resultado vemos que a questão da simetria das extremais de $T(\alpha)$ se torna uma questão de saber se φ_1 atinge $T(\alpha)$ ou não. Nosso objetivo então, nesse momento, é investigar a natureza de φ_1, que é radial, vista como ponto crítico de

$$Q^\alpha(u) = \int_{\partial\Omega} (e^{\alpha u^2} - 1) d\sigma$$

sobre a esfera unitária de $H^1(\Omega)$.

Proposição 3.2. $Q^\alpha \in C^2(H^1(\Omega), \mathbb{R})$, para todo $\alpha > 0$.

Demonstração. Note que a derivada de Gateaux de Q^α para toda $u \in H^1(\Omega)$ é

$$(Q^\alpha)'(u)(v) = 2\alpha \int_{\partial\Omega} u e^{\alpha u^2} v d\sigma$$

e que a segunda derivada de Gateaux de Q^α é dada por

$$(Q^\alpha)''(u)(v, w) = 2\alpha \int_{\partial\Omega} e^{\alpha u^2} vw d\sigma + 4\alpha^2 \int_{\partial\Omega} u^2 e^{\alpha u^2} vw d\sigma.$$

Vejamos que $(Q^\alpha)'' : H^1(\Omega) \to \mathcal{L}_2(H^1(\Omega), \mathbb{R})$ é contínua. Seja $u_n \to u$ em $H^1(\Omega)$ e $v, w \in H^1(\Omega)$ com $\|v\|, \|w\| \leq 1$. Pelas imersões de $H^1(\Omega)$ em $L^p(\partial\Omega)$, para todo $p \in [1, \infty)$, teremos $u_n \to u$ em $L^2(\partial\Omega)$ e

$$\begin{aligned} |(Q^\alpha)''(u_n)(v,w) - (Q^\alpha)''(u)(v,w)| &= \left| 2\alpha \int_{\partial\Omega} (e^{\alpha u_n^2} - e^{\alpha u^2}) vw d\sigma + 4\alpha^2 \int_{\partial\Omega} (u_n^2 e^{\alpha u_n^2} - u^2 e^{\alpha u^2}) vw d\sigma \right| \\ &\leq 2\alpha \|e^{\alpha u_n^2} - e^{\alpha u^2}\|_2 \|v\|_4 \|w\|_4 + 4\alpha^2 \|u_n^2 e^{\alpha u_n^2} - u^2 e^{\alpha u^2}\|_2 \|v\|_4 \|w\|_4 \\ &\leq C_2 \|e^{\alpha u_n^2} - e^{\alpha u^2}\|_2 \|v\| \|w\| + C_3 \|u_n^2 e^{\alpha u_n^2} - u^2 e^{\alpha u^2}\|_2 \|v\| \|w\|. \end{aligned}$$

Pela Observação 1.2, $e^{\alpha u_n^2} \to e^{\alpha u^2}$ em $L^2(\partial\Omega)$, com isso teremos

$$\sup_{\|v\|, \|w\| \leq 1} |(Q^\alpha)''(u_n)(v,w) - (Q^\alpha)''(u)(v,w)| \to 0,$$

quando $n \to \infty$. Logo $(Q^\alpha)''$ é contínua e, pela Proposição C.2, teremos que $Q^\alpha \in C^2(H^1(\Omega), \mathbb{R})$. □

Note que sendo φ_1 um maximizante de Q^α sobre $S_r = \{u \in H^1_{\text{rad}}(\Omega) : J(u) = \|u\|^2 = 1\}$, pelo Teorema dos multiplicadores de Lagrange, temos $(Q^\alpha)'(\varphi_1) = \lambda J'(\varphi_1)$ para algum λ, logo φ_1 é ponto crítico de Q^α sobre a esfera unitária de $H^1(\Omega)$. Faremos agora o principal resultado da seção e através dele teremos uma resposta acerca da simetria das funções que realizam $T(\alpha)$ com α em uma certa parte do intervalo $(0, \pi]$.

Observação 3.1. Pela construção dos autovalores feita no Teorema 2.6 nota-se claramente que $\lambda_1 \leq \lambda_2$. Mas além disso, existe uma vizinhança de λ_1 tal que λ_1 é um autovalor isolado, como assegurado em Martinez et al[22, Lemma 2.6] e o fato de que $\lambda_2 - \lambda_1 < 1$ é assegurado em Bonheure et al [3, Remark 4.2].

Teorema 3.3. *Sejam λ_1 e λ_2 os dois primeiros autovalores do problema de Steklov. Defina $\alpha^* = \pi(\lambda_2 - \lambda_1)$, então*

(1) *se $\alpha < \alpha^*$, φ_1 é um máximo local não-degenerado de Q^α na esfera unitária de $H^1(\Omega)$;*

(2) *se* $\alpha = \alpha^*$, φ_1 *é ponto crítico degenerado de* Q^α *na esfera unitária de* $H^1(\Omega)$*;*

(3) *se* $\alpha^* < \alpha \leq \pi$, φ_1 *não é máximo local de* Q^α *na esfera unitária de* $H^1(\Omega)$*.*

Demonstração. Defina $J : H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$, $N : H^1(\Omega)\backslash\{0\} \to H^1(\Omega)\backslash\{0\}$ e $F : H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ como

$$J(u) = \|u\|^2, \quad N(u) = \frac{u^2}{\|u\|^2} \quad \text{e} \quad F(u) = \int_{\partial\Omega} (e^{\alpha N(u)} - 1) d\sigma.$$

Note que $F \in C^2(H^1(\Omega), \mathbb{R})$ pois $F = Q^\alpha \circ N_1$, onde $N_1(u) = u/\|u\|$ que é C^∞ com $u \neq 0$ e, pela Proposição 3.2, $Q^\alpha \in C^2(H^1(\Omega), \mathbb{R})$. Observe também que o problema de maximizar Q^α na esfera de $H^1(\Omega)$ se transforma no problema de maximização

$$\sup_{u \in H^1(\Omega)\backslash\{0\}} F(u).$$

Para concluir o resultado, analisaremos o sinal de $F''(\varphi_1)$. Para isto, calculemos as segundas derivadas das funções acima definidas. Teremos então

$$J'(u)(v) = 2\langle u, v\rangle \quad \text{e} \quad J''(u)(v, w) = 2\langle w, v\rangle,$$

e nesse caso, $J''(u)(v, v) = 2J(v)$, para toda $v \in H^1(\Omega)$. Com respeito a N, teremos

$$N'(u)(v) = \frac{2J(u)uv - J'(u)(v)u^2}{J(u)^2} = \frac{2uv}{J(u)} - \frac{J'(u)(v)u^2}{J(u)^2}$$

e

$$\begin{aligned}
N''(u)(v, w) &= \frac{2vwJ(u) - 2uvJ'(u)(w)u^2}{J(u)^2} - \frac{(J'(u)(v)u^2)'(w)J(u)^2 - 2J(u)J'(u)(w)J'(u)(v)u^2}{J(u)^4} \\
&= \frac{2vwJ(u) - 2uvJ'(u)(w)u^2}{J(u)^2} - \frac{(J''(u)(v, w)u^2 + 2uwJ'(u)(v))J(u)^2}{J(u)^4} \\
&+ \frac{2J(u)J'(u)(w)J'(u)(v)u^2}{J(u)^4}.
\end{aligned}$$

Assim, teremos

$$\begin{aligned}
N''(u)(v, v) &= \frac{2v^2J(u) - 2uvJ'(u)(v) - 2J(v)u^2 - 2uvJ'(u)(v)}{J(u)^2} + \frac{2[J'(u)(v)]^2u^2}{J(u)^3} \\
&= \frac{2J(u)v^2 - 2J(v)u^2}{J(u)^2} + \frac{-2uvJ'(u)(v) - 2uvJ'(u)(v)}{J(u)^2} + \frac{2[J'(u)(v)]^2u^2}{J(u)^3} \\
&= A + B + C.
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow B+C = \frac{-4uvJ'(u)(v)}{J(u)^2} + \frac{2[J'(u)(v)]^2u^2}{J(u)^3} = \frac{2J'(u)(v)}{J(u)}\left[\frac{-2uv}{J(u)} + \frac{J'(u)(v)u^2}{J(u)^2}\right] = \frac{-2J'(u)(v)}{J(u)}N'(u)(v).$$

$$\Rightarrow N''(u)(v,v) = \frac{2J(u)v^2 - 2J(v)u^2}{J(u)^2} - \frac{2J'(u)(v)}{J(u)}N'(u)(v).$$

Finalmente, com respeito a F, teremos

$$F'(u)(v) = \alpha \int_{\partial\Omega} N'(u)(v)e^{\alpha N(u)}d\sigma$$

$$F''(u)(v,w) = \alpha \int_{\partial\Omega} N''(v,w)e^{\alpha N(u)}d\sigma + \alpha^2 \int_{\partial\Omega} N'(u)(v)N'(u)(w)e^{\alpha N(u)}d\sigma$$

$$\Rightarrow F''(u)(v,v) = \alpha \int_{\partial\Omega} N''(u)(v,v)e^{\alpha N(u)}d\sigma + \alpha^2 \int_{\partial\Omega} [N'(u)(v)]^2 e^{\alpha N(u)}d\sigma.$$

Note que sendo φ_1 ponto crítico de F,

$$F'(\varphi_1)(v) = \alpha \int_{\partial\Omega} N'(\varphi_1)(v)e^{\alpha N(\varphi_1)}d\sigma = 0, \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

Avaliaremos $F''(\varphi_1)$ no espaço tangente à esfera de $H^1(\Omega)$ no ponto φ_1, ou seja, vamos assumir que $\langle v, \varphi_1\rangle = 0$, logo $J'(\varphi_1)(v) = 0$. Dessa forma, teremos

$$\begin{aligned} F''(\varphi_1)(v,v) = \alpha &\int_{\partial\Omega} \left[\frac{2J(\varphi_1)v^2 - 2J(v)\varphi_1^2}{J(\varphi_1)} - \frac{2J'(\varphi_1)(v)}{J(\varphi_1)}N'(\varphi)(v)\right] e^{\alpha N(\varphi)}d\sigma \\ &+ \alpha^2 \int_{\partial\Omega} \left[\frac{2J(\varphi_1)\varphi_1 v - J'(\varphi_1)(v)\varphi_1^2}{J(\varphi_1)}\right]^2 e^{\alpha N(\varphi_1)}d\sigma. \end{aligned}$$

Como $J(\varphi_1) = 1$, $N(\varphi_1) = \varphi_1^2$ e $F'(\varphi_1)(v) = 0$, teremos

$$\begin{aligned} F''(\varphi_1)(v,v) &= \alpha \int_{\partial\Omega} (2v^2 - 2J(v)\varphi_1^2)e^{\alpha\varphi_1^2}d\sigma + 4\alpha^2 \int_{\partial\Omega} e^{\alpha\varphi_1^2}\varphi_1^2 v^2 d\sigma \\ &= 2\alpha e^{\alpha\varphi_1^2(1)} \int_{\partial\Omega} v^2 d\sigma - 2\alpha e^{\alpha\varphi_1^2(1)}\varphi_1^2(1)J(v)\int_{\partial\Omega} d\sigma + 4\alpha^2 e^{\alpha\varphi_1^2(1)}\varphi_1^2(1)\int_{\partial\Omega} v^2 d\sigma. \end{aligned}$$

Em (2.4) teremos $\varphi_1^2 = 1/2\pi\lambda_1$ e como $\int_{\partial\Omega} d\sigma = 2\pi$, teremos

$$\begin{aligned} F''(\varphi_1)(v,v) &= 2\alpha e^{\frac{\alpha}{2\pi\lambda_1}} \int_{\partial\Omega} v^2 d\sigma - \frac{2\alpha e^{\frac{\alpha}{2\pi\lambda_1}} J(v)}{\lambda_1} + \frac{2\alpha^2 e^{\frac{\alpha}{2\pi\lambda_1}}}{\pi\lambda_1}\int_{\partial\Omega} v^2 d\sigma \\ &= \frac{2\alpha}{\lambda_1}e^{\frac{\alpha}{2\pi\lambda_1}} \int_{\partial\Omega} v^2 d\sigma \left(\frac{\alpha}{\pi} + \lambda_1 - \frac{J(v)}{\int_{\partial\Omega} v^2 d\sigma}\right). \end{aligned}$$

Note então que, sendo v ortogonal a φ_1, que é uma autofunção do problema de Steklov associada ao autovalor λ_1, teremos então que

$$0 = \langle \varphi_1, v\rangle = \lambda_1 \int_{\partial\Omega} \varphi_1 v d\sigma \Rightarrow v \in H := \left\{u \in H^1(\Omega) : \int_{\partial\Omega} \varphi_1 u d\sigma = 0\right\}.$$

Pela caracterização dos autovalores do problema de Steklov feita no Teorema 2.6, teremos

$$\lambda_2 = \frac{1}{\sup_{u \in B_1} \int_{\partial\Omega} u^2 d\sigma} = \inf_{u \in H \setminus H_0^1(\Omega)} \frac{J(u)}{\int_{\partial\Omega} u^2 d\sigma} \leq \frac{J(v)}{\int_{\partial\Omega} v^2 d\sigma},$$

onde B_1 são as funções em H que estão na bola unitária. Dessa forma, se $\alpha < \alpha^* = \pi(\lambda_2 - \lambda_1)$, então

$$F''(\varphi_1)(v,v) \leq \frac{2\alpha}{\lambda_1} e^{\frac{\alpha}{2\pi\lambda_1}} \int_{\partial\Omega} v^2 d\sigma \left(\frac{\alpha}{\pi} + \lambda_1 - \lambda_2\right) = \frac{2\alpha}{\lambda_1} e^{\frac{\alpha}{2\pi\lambda_1}} \int_{\partial\Omega} v^2 d\sigma \left(\frac{\alpha - \pi(\lambda_2 - \lambda_1)}{\pi}\right) < 0.$$

Vejamos então que φ_1 é máximo local. Note que

$$\mu := \sup_{\substack{\|v\|=1 \\ \langle v, \varphi_1 \rangle = 0}} F''(\varphi_1)(v,v) = \frac{2\alpha}{\lambda_1 \lambda_2} e^{\frac{\alpha}{2\pi\lambda_1}} \left(\frac{\alpha}{\pi} + \lambda_1 - \lambda_2\right) < 0.$$

Pela Fórmula de Taylor, teremos

$$F(\varphi_1 + v) - F(\varphi_1) = F'(\varphi_1)(v) + \frac{1}{2} F''(\varphi_1)(v,v) + r(v)\|v\|^2,$$

onde $r(v) \to 0$, quando $\|v\| \to 0$. Logo,

$$\begin{aligned} F(\varphi_1 + v) - F(\varphi_1) &= \frac{1}{2} F''(\varphi_1)(v,v) + r(v)\|v\|^2 \\ &\leq \frac{\|v\|^2}{2} \left(F''(\varphi_1)\left(\frac{v}{\|v\|}, \frac{v}{\|v\|}\right) + r(v) \right) \\ &\leq \frac{\|v\|^2}{2} (\mu + r(v)). \end{aligned}$$

Como $r(v) \to 0$ quando $\|v\| \to 0$, podemos tomar $\delta > 0$ tal que, se $\|v\| < \delta$, então $|r(v)| < -\mu$. Dessa forma então

$$F(\varphi_1 + v) - F(\varphi_1) < 0$$

se $\langle v, \varphi_1 \rangle = 0$ e $\|v\| < \delta$, o que nos diz que φ_1 é máximo local. Considerando ainda $\alpha < \alpha^*$, supondo por contradição que φ_1 fosse um ponto crítico degenerado, existiria $u \in H^1(\Omega)$ tal que

$$Q'(u)(w) = 0, \quad \forall w \in H^1(\Omega),$$

onde $Q(v) = F''(\varphi_1)(v,v)$. Então

$$\begin{aligned} 0 &= Q'(u)(w) \\ &= \frac{4\alpha}{\lambda_1} e^{\frac{\alpha}{2\pi\lambda_1}} \left[\left(\frac{\alpha}{\pi} + \lambda_1\right) \int_{\partial\Omega} uw dx - \langle u, w \rangle \right]. \end{aligned}$$

Dividindo a igualdade por $\frac{4\alpha}{\lambda_1}e^{\frac{\alpha}{2\pi\lambda_1}}$ obteremos

$$\langle u, w\rangle = (\frac{\alpha}{\pi} + \lambda_1)\int_{\partial\Omega} uwd\sigma$$

para toda $w \in H^1(\Omega)$. Dessa forma u satisfaz fracamente

$$\begin{cases} -\Delta u + u = 0, & \text{em} \quad \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = \left(\frac{\alpha}{\pi} + \lambda_1\right) u, & \text{sobre} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.1}$$

Usando a definição de solução fraca para o problema acima com φ_1 como função teste teríamos u ortogonal a φ_1. Dessa forma, u não poderia satisfazer (3.1) se $\alpha < \pi(\lambda_2 - \lambda_1)$, pois teríamos

$$\lambda_1 < \frac{\alpha}{\pi} + \lambda_1 < \lambda_2,$$

o que nos dá uma contradição. Portanto, φ_1 é não degenerada se $\alpha < \alpha^*$, concluindo o item (1).

Se $\alpha = \alpha_*$, teremos $F''(\varphi_1)(v, v) \leq 0$ e, considerando φ_2 a segunda autofunção normalizada do problema de Steklov, teremos

$$F''(\varphi_1)(\varphi_2, \varphi_2) = \frac{2\alpha}{\lambda_1\lambda_2}e^{\frac{\alpha}{2\pi\lambda_1}}\left(\frac{\alpha}{\pi} + \lambda_1 - \lambda_2\right) = 0.$$

Além disso, $Q'(\varphi_2) \equiv 0$ se $\alpha = \alpha^*$, logo φ_1 é um ponto crítico degenerado, o que verifica o item (2).

Finalmente, se $\alpha > \alpha^*$, teremos então $F''(\varphi_1)(\varphi_2, \varphi_2) > 0$. Pelo Teorema C.4, φ_1 não pode ser máximo local, concluindo o item (3). □

Corolário 3.4. Para todo $\alpha \in (\pi(\lambda_2 - \lambda_1), \pi]$ temos $T(\alpha) > T_r(\alpha)$, ou seja, as funções que atingem $T(\alpha)$ são não radiais.

Demonstração. Pelo Lema 3.1 φ_1 é a única função a atingir $T_r(\alpha)$. Então, se $\alpha \in (\pi(\lambda_2 - \lambda_1), \pi]$, o Teorema 3.3 nos garante que φ_1 não é máximo local de Q^α. Consequentemente teremos $T(\alpha) > T_r(\alpha)$.

□

3.2 Unicidade de extremais no traço

Focaremos agora em mostrar que para α suficientemente pequeno há um único maximizante para Q^α e, como consequência desse fato, teremos $T(\alpha) = T_r(\alpha)$.

Proposição 3.5. Seja u_α maximizante de Q^α em $H^1(\Omega)$, isto é, $T(\alpha) = Q^\alpha(u_\alpha)$. Então, quando

$\alpha \to 0$,

$$\frac{1}{\alpha}T(\alpha) \to \frac{1}{\lambda_1}$$
$$u_\alpha \to \varphi_1 \quad \text{em} \quad H^1(\Omega).$$

Demonstração. Considere a desigualdade $e^x - 1 - x \leq \frac{1}{2}x^2e^x$, para todo $x \geq 0$. Teremos então

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{\alpha}\int_{\partial\Omega}(e^{\alpha u^2}-1)d\sigma - \int_{\partial\Omega}u^2 d\sigma\right| &= \left|\frac{1}{\alpha}\int_{\partial\Omega}(e^{\alpha u^2}-1-\alpha u^2)d\sigma\right| \\
&\leq \left|\frac{1}{\alpha}\int_{\partial\Omega}\frac{1}{2}\alpha^2u^4e^{\alpha u^2}d\sigma\right| \\
&= \frac{\alpha}{2}\int_{\partial\Omega}u^4e^{\alpha u^2}d\sigma,
\end{aligned}$$

uniformemente para $u \in H^1(\Omega)$ com $\|u\| \leq 1$. Seja $p > 1$ tal que $p\alpha < \pi$ e p' tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Pela desigualdade de Hölder, teremos

$$\left|\frac{1}{\alpha}\int_{\partial\Omega}(e^{\alpha u^2}-1)d\sigma - \int_{\partial\Omega}u^2d\sigma\right| \leq \frac{\alpha}{2}\left(\int_{\partial\Omega}e^{p\alpha u^2}d\sigma\right)^{1/p}\left(\int_{\partial\Omega}u^{4p'}d\sigma\right)^{1/p'} = O(\alpha)$$

pois, como $\|u\| \leq 1$ e, pelo Teorema B.9, $H^1(\Omega)$ está imerso em qualquer $L^q(\Omega)$, para $q \in [1,\infty)$, u é limitada em qualquer $L^q(\Omega)$ com $q \in [1,\infty)$. Além disso, pelo Teorema 1.5, a primeira integral do lado direito acima também é limitada uniformemente com respeito a $\|u\| \leq 1$. Então, tomando o supremo com respeito às funções $\|u\| \leq 1$ teremos

$$\frac{1}{\alpha}\int_{\partial\Omega}(e^{\alpha u^2}-1)d\sigma = \int_{\partial\Omega}u^2d\sigma + O(\alpha) \Rightarrow \frac{1}{\alpha}T(\alpha) = \frac{1}{\lambda_1} + O(\alpha),$$

o que conclui a primeira parte. Para provar que $u_\alpha \to \varphi_1$ em $H^1(\Omega)$, note que sendo $\|u_\alpha\| = 1$, pelo Teorema A.4, para alguma subsequência e alguma $u \in H^1(\Omega)$ teremos $u_\alpha \rightharpoonup u$. Pela primeira parte da demonstração,

$$\frac{1}{\lambda_1} + O(\alpha) = \frac{1}{\alpha}T(\alpha) = \frac{1}{\alpha}\int_{\partial\Omega}(e^{\alpha u_\alpha^2}-1)d\sigma = \int_{\partial\Omega}u_\alpha^2d\sigma + O(\alpha).$$

Pelo Teorema B.10, podemos dizer que $u_\alpha \to u$ em $L^2(\partial\Omega)$, ou seja,

$$\int_{\partial\Omega}u_\alpha^2d\sigma = \int_{\partial\Omega}u^2d\sigma + o(1)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\lambda_1} + O(\alpha) = \int_{\partial\Omega}u^2d\sigma + o(1) + O(\alpha) \Rightarrow \frac{1}{\lambda_1} = \int_{\partial\Omega}u^2d\sigma,$$

o que nos diz que u é uma autofunção do problema de Steklov associada ao autovalor λ_1 e, dessa forma, como já fizemos antes, u deve ser proporcional a φ_1 pela Proposição 2.4, sendo então radial. Logo,

$$\int_{\partial\Omega} \varphi_1^2 d\sigma = \frac{1}{\lambda_1} = \int_{\partial\Omega} u^2 d\sigma \Rightarrow \varphi_1(1) = u(1),$$

e portanto $u = \varphi_1$. Como $\|u_\alpha\| = 1 = \|\varphi_1\|$, segue pela Proposição A.5 que $u_\alpha \to \varphi_1$ em $H^1(\Omega)$. Vejamos que a sequência inteira converge para φ_1. De fato, suponha por contradição que existe $\varepsilon > 0$ e uma subsequência u_{α_k} tal que

$$\|u_{\alpha_k} - \varphi_1\| \geq \varepsilon, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Porém, com os mesmos argumentos usados durante a demonstração, u_{α_k} teria uma subsequência que convergiria para φ_1, o que nos fornece uma contradição.

□

Com o objetivo de demonstrar o resultado de unicidade para extremais de $T(\alpha)$ provemos um resultado de convergência.

Lema 3.6. Sejam $(u_n), (v_n) \subset H^1(\Omega)$ com $\|u_n\|, \|v_n\| \leq 1$. Assuma que $u_n \rightharpoonup u$ e $v_n \rightharpoonup v$ em $H^1(\Omega)$, então

(1) se $\alpha_n \to \alpha < 2\pi$, para todo $p \in [1, \infty)$ e $q \in [1, 2\pi/\alpha)$ temos

$$v_n^p e^{\alpha_n u_n^2} \to v^p e^{\alpha u^2} \quad \text{em} \quad L^q(\Omega),$$

(2) se $\alpha_n \to \alpha < \pi$, então para todo $p \in [1, \infty)$ e $q \in [1, \pi/\alpha)$ temos

$$v_n^p e^{\alpha_n u_n^2} \to v^p e^{\alpha u^2} \quad \text{em} \quad L^q(\partial\Omega).$$

Demonstração. Provaremos o item (1) e o item (2) segue de maneira análoga. Suponhamos então que $\alpha_n \to \alpha < 2\pi$ e $q\alpha_n < 2\pi$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Usando a desigualdade elementar

$$(x + y + z)^q \leq C(x^q + y^q + z^q) \tag{3.2}$$

obtemos

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |v_n^p e^{\alpha_n u_n^2} - v^p e^{\alpha u^2}|^q dx &= \int_\Omega |v_n^p e^{\alpha_n u_n^2} - v^p e^{\alpha_n u_n^2} + v^p e^{\alpha_n u_n^2} - v^p e^{\alpha_n u^2} + v^p e^{\alpha_n u^2} - v^p e^{\alpha u^2}|^q dx \\
&\leq C\Big(\int_\Omega |v_n^p e^{\alpha_n u_n^2} - v^p e^{\alpha_n u_n^2}|^q dx + \int_\Omega |v^p e^{\alpha_n u_n^2} - v^p e^{\alpha_n u^2}|^q dx \\
&+ \int_\Omega |v^p e^{\alpha_n u^2} - v^p e^{\alpha u^2}|^q dx\Big) \\
&= C(I_1 + I_2 + I_3).
\end{aligned}$$

Analisaremos separadamente cada integral. Seja $s > 1$ tal que $sq\alpha_n < 2\pi$, daí, pela desigualdade de Hölder teremos

$$I_1 = \int_\Omega |v_n^p - v^p|^q e^{q\alpha_n u_n^2} dx \leq \left(\int_\Omega e^{sq\alpha_n u_n^2} dx \right)^{1/s} \left(\int_\Omega |v_n^p - v^p|^{qs'} \right)^{1/s'} = o(1),$$

quando $n \to \infty$, pois, pelo Teorema 1.4 a primeira integral no lado direito é limitada uniformemente e, como $v_n \rightharpoonup v$ e $H^1(\Omega)$ está imerso compactamente em qualquer $L^r(\Omega)$ com $r \in [1, \infty)$, $v_n \to v$ em qualquer $L^r(\Omega)$ com $r \in [1, \infty)$.

Utilizando (1.1) teremos que

$$I_2 = \int_\Omega |v|^{pq} |e^{\alpha_n u_n^2} - e^{\alpha_n u^2}|^q dx \leq \int_\Omega |v|^{pq} |u_n^2 - u^2|^q (e^{\alpha_n u_n^2} + e^{\alpha_n u^2})^q dx.$$

Usando novamente a desigualdade em (3.2), teremos

$$I_2 \leq C\alpha_n \int_\Omega |v|^{pq} |u_n^2 - u^2|^q e^{q\alpha_n u_n^2} dx + C \int_\Omega |v|^{qp} |u_n^2 - u^2|^q e^{q\alpha_n u^2} dx.$$

Logo, usando os mesmos argumentos usados para I_1, I_2 tende a 0 quando $n \to \infty$.

Finalmente, observe que para todos $\gamma, \beta, \rho \in [0, \infty)$ temos

$$|e^{\gamma\rho} - e^{\beta\rho}| \leq \rho|\gamma - \beta|(e^{\gamma\rho} + e^{\beta\rho}) \leq 2\rho|\gamma - \beta| e^{\max(\gamma,\beta)\rho},$$

dessa forma teremos

$$I_3 = \int_\Omega |v^p e^{\alpha_n u^2} - v^p e^{\alpha u^2}|^q dx = \int_\Omega |v|^{pq} |e^{\alpha_n u^2} - e^{\alpha u^2}|^q dx \leq 2^q |\alpha_n - \alpha|^q \int_\Omega |v|^{pq} u^{2q} e^{q\max(\alpha_n,\alpha)u^2} dx.$$

Como $q\max(\alpha_n, \alpha) < 2\pi$, o Teorema 1.4 e a desigualdade Hölder nos garantem a limitação da última integral acima. Logo, como $\alpha_n \to \alpha$, I_3 tende a 0, o que conclui o primeiro item e, como dito anteriormente, o segundo item segue com um raciocínio análogo.

□

Observação 3.2. Seja u_α maximizante de $Q^\alpha(u) = \int_{\partial\Omega} (e^{\alpha u^2} - 1) d\sigma$ em $\{u \in H^1(\Omega) : \|u\| \leq 1\}$. Argumentando como no Teorema 1.6 temos que as funções maximizantes têm norma 1, o que nos permite dizer que u_α é máximo para Q^α sobre o vínculo

$$S = \{u \in H^1(\Omega) : J(u) = \|u\|^2 = 1\}.$$

Logo, pelo Teorema dos multiplicadores de Lagrange, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$J'(u_\alpha)(v) = \lambda (Q^\alpha)'(u_\alpha)(v), \quad \forall v \in H^1(\Omega),$$

$$\Rightarrow 2\langle u_\alpha, v\rangle = 2\lambda\alpha \int_{\partial\Omega} u_\alpha e^{\alpha u_\alpha^2} v d\sigma.$$

Podemos dizer então que existe $\mu \in \mathbb{R}$ tal que

$$\langle u_\alpha, v\rangle = \mu \int_{\partial\Omega} u_\alpha e^{\alpha u_\alpha^2} v d\sigma, \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

Portanto, cada maximizante u_α é uma solução fraca do problema

$$\begin{cases} -\Delta u + u = 0, & \text{em} \quad \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = \mu u e^{\alpha u^2}, & \text{sobre} \quad \partial\Omega \end{cases}$$

e

$$\mu = \mu(u_\alpha) = \frac{1}{\int_{\partial\Omega} u_\alpha^2 e^{\alpha u_\alpha^2} d\sigma}.$$

Como $u_\alpha \to \varphi_1$ em $H^1(\Omega)$ quando $\alpha \to 0 < \pi$, pelo Lema 3.6, $u_\alpha^2 e^{\alpha u_\alpha^2} \to \varphi_1^2 e^{0\varphi_1} = \varphi_1^2$ em $L^q(\partial\Omega)$, para todo $q \in [1, \infty)$. Com $q = 1$, teremos

$$\mu(u_\alpha) = \frac{1}{\int_{\partial\Omega} u_\alpha^2 e^{\alpha u_\alpha^2} d\sigma} \longrightarrow \frac{1}{\int_{\partial\Omega} \varphi_1^2 d\sigma} = \lambda_1, \tag{3.3}$$

quando $\alpha \to 0$.

Teorema 3.7. *Para todo α suficientemente pequeno, φ_1 é a única extremal para*

$$T(\alpha) = \sup_{\substack{u \in H^1(\Omega) \\ \|u\| \leq 1}} \int_{\partial\Omega} (e^{\alpha u^2} - 1) d\sigma, \tag{3.4}$$

a qual é radial e não degenerada.

Demonstração. Faremos a prova por contradição. Se a extremal para $T(\alpha)$ não é única, por menor que seja α, podemos supor que para alguma (sub)sequência $\alpha \to 0$ existem funções extremais $u_\alpha \neq v_\alpha$ para (3.4). Pela Observação 3.2, u_α e v_α satisfazem fracamente

$$\begin{cases} -\Delta u_\alpha + u_\alpha = 0, & \text{em} \quad \Omega, \\ \frac{\partial u_\alpha}{\partial \eta} = \mu(u_\alpha) u_\alpha e^{\alpha u_\alpha^2}, & \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases} \qquad \begin{cases} -\Delta v_\alpha + v_\alpha = 0, & \text{em} \quad \Omega, \\ \frac{\partial v_\alpha}{\partial \eta} = \mu(v_\alpha) v_\alpha e^{\alpha v_\alpha^2}, & \text{sobre} \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

Tomando $w_\alpha = u_\alpha - v_\alpha$ e, subtraindo as equações acima, teremos que w_α satisfaz fracamente

$$\begin{cases} -\Delta w_\alpha + w_\alpha = 0, \quad \text{em} \quad \Omega, \\ \frac{\partial w_\alpha}{\partial \eta} = \mu(u_\alpha) u_\alpha e^{\alpha u_\alpha^2} - \mu(v_\alpha) v_\alpha e^{\alpha v_\alpha^2}, \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

Estudaremos o comportamento assintótico da condição de fronteira. Lembremo-nos que, pela Proposição 3.5, $u_\alpha, v_\alpha \to \varphi_1$ e, por (3.3), $\mu(u_\alpha), \mu(v_\alpha) \to \lambda_1$, quando $\alpha \to 0$. Somando e subtraindo o termo $\mu(u_\alpha)v_\alpha e^{\alpha v_\alpha^2}$, obtemos

$$\mu(u_\alpha)u_\alpha e^{\alpha u_\alpha^2} - \mu(v_\alpha)v_\alpha e^{\alpha v_\alpha^2} = \mu(u_\alpha)(u_\alpha e^{\alpha u_\alpha^2} - v_\alpha e^{\alpha v_\alpha^2}) + (\mu(u_\alpha) - \mu(v_\alpha))v_\alpha e^{\alpha v_\alpha^2}. \tag{3.5}$$

Analisaremos separadamente os termos do lado direito. Primeiro defina, para $t \in [0,1]$,

$$w_{\alpha,t} = v_\alpha + t(u_\alpha - v_\alpha).$$

Dessa forma, teremos

$$u_\alpha e^{\alpha u_\alpha^2} - v_\alpha e^{\alpha v_\alpha^2} = \int_0^1 \frac{d}{dt}(w_{\alpha,t}e^{\alpha w_{\alpha,t}^2})dt = (u_\alpha - v_\alpha)\int_0^1 (1 + 2\alpha w_{\alpha,t}^2)e^{\alpha w_{\alpha,t}^2}dt.$$

Vejamos que quando $\alpha \to 0$

$$\int_0^1 (1 + 2\alpha w_{\alpha,t}^2)e^{\alpha w_{\alpha,t}^2}dt \to 1 \text{ em cada } L^p(\partial\Omega). \tag{3.6}$$

Note primeiro que $w_{\alpha,t} \to \varphi_1$ em $H^1(\Omega)$, uniformemente com respeito a $t \in [0,1]$. Aplicando o Lema 3.6 com $u_n = v_n = w_{\alpha,t}$, teremos $w_{\alpha,t}e^{\alpha w_{\alpha,t}^2} \to \varphi_1$, em cada $L^p(\partial\Omega)$, quando $\alpha \to 0$. Logo, pela recíproca do Teorema da convergência dominada, para alguma subsequência temos $w_{\alpha_k,t}e^{\alpha w_{\alpha_k,t}^2} \to \varphi_1$, q.t.p. em $\partial\Omega$. Contudo, a convergência q.t.p. vale para toda a sequência pois, se existisse $\varepsilon > 0$, um conjunto de medida positiva $\Gamma \subset \partial\Omega$ e uma subsequência tal que

$$|w_{\alpha_m,t}e^{\alpha_m w_{\alpha_m,t}^2} - \varphi_1| \geq \varepsilon \text{ em } \Gamma, \quad \forall m \in \mathbb{N},$$

usando novamente a recíproca do Teorema da convergência dominada, $w_{\alpha_m,t}e^{\alpha w_{\alpha_m,t}^2}$ possuiria uma subsequência que convergiria para φ_1, q.t.p. em $\partial\Omega$, o que contradiz a desigualdade acima. Considere então

$$f_\alpha(x) = \int_0^1 (1 + 2\alpha w_{\alpha,t})e^{\alpha w_{\alpha,t}^2}dt.$$

Note que, quando $\alpha \to 0$, $(1 + 2\alpha w_{\alpha,t})e^{\alpha w_{\alpha,t}^2} \to 1$, q.t.p. em $\partial\Omega$ e uniformemente em $t \in [0,1]$. Dessa forma, $f_\alpha \to 1$ q.t.p. em $\partial\Omega$ e, usando o Teorema da convergência dominada, concluímos (3.6). Podemos então escrever o primeiro termo do lado direito em (3.5) como

$$\mu(u_\alpha)(u_\alpha e^{\alpha u_\alpha^2} - v_\alpha e^{\alpha v_\alpha^2}) = (\lambda_1 + o(1))(1 + o(1))w_\alpha \text{ em } L^2(\partial\Omega). \tag{3.7}$$

Voltemos a atenção agora para o segundo termo em (3.5) e note que

$$\begin{aligned}\int_{\partial\Omega} v_\alpha e^{\alpha v_\alpha^2} d\sigma - \int_{\partial\Omega} u_\alpha e^{\alpha u_\alpha^2} d\sigma &= \int_{\partial\Omega} \left(\int_0^1 \frac{d}{dt}(w_{\alpha,t}^2 e^{\alpha w_{\alpha,t}^2}) dt \right) d\sigma \\ &= -2 \int_{\partial\Omega} \left(\int_0^1 w_{\alpha,t}(1 + \alpha w_{\alpha,t}^2) e^{\alpha w_{\alpha,t}^2} dt \right) (u_\alpha - v_\alpha) d\sigma.\end{aligned}$$

De forma análoga a (3.6), teremos

$$\int_0^1 w_{\alpha,t}(1 + \alpha w_{\alpha,t}^2) e^{\alpha w_{\alpha,t}^2} dt \to \varphi_1 \quad \text{em} \quad L^2(\partial\Omega).$$

Logo,

$$\int_{\partial\Omega} v_\alpha e^{\alpha v_\alpha^2} d\sigma - \int_{\partial\Omega} u_\alpha e^{\alpha u_\alpha^2} d\sigma = -2 \int_{\partial\Omega} (\varphi_1 + o(1))(u_\alpha - v_\alpha) d\sigma,$$

onde $o(1)$ é entendido no sentido da norma $L^2(\partial\Omega)$. Usando (3.3) e a desigualdade acima, segue que

$$\begin{aligned}\mu(u_\alpha) - \mu(v_\alpha) &= \frac{1}{\int_{\partial\Omega} u_\alpha^2 e^{\alpha u_\alpha^2} d\sigma} - \frac{1}{\int_{\partial\Omega} v_\alpha^2 e^{\alpha v_\alpha^2} d\sigma} \\ &= \frac{\int_{\partial\Omega} v_\alpha^2 e^{\alpha v_\alpha^2} d\sigma - \int_{\partial\Omega} u_\alpha^2 e^{\alpha u_\alpha^2} d\sigma}{\int_{\partial\Omega} v_\alpha^2 e^{\alpha v_\alpha^2} d\sigma \int_{\partial\Omega} u_\alpha^2 e^{\alpha u_\alpha^2} d\sigma} \\ &= -\frac{2\int_{\partial\Omega} (\varphi_1 + o(1))(u_\alpha - v_\alpha) d\sigma}{\frac{1}{\lambda_1^2} + o(1)} \\ &= -\frac{2\lambda_1^2 \int_{\partial\Omega} (\varphi_1 + o(1))(w_\alpha) d\sigma}{1 + o(1)} \\ &= -2\lambda_1^2 \int_{\partial\Omega} \frac{\varphi_1 + o(1)}{1 + o(1)} w_\alpha d\sigma \\ &= -2\lambda_1^2 \int_{\partial\Omega} (\varphi_1 + o(1)) w_\alpha d\sigma.\end{aligned}$$

Unindo a igualdade acima com (3.7) e com o fato de que, pelo Lema 3.6, $v_\alpha e^{\alpha v_\alpha^2} = \varphi_1 + o(1)$ em $L^2(\partial\Omega)$, teremos em (3.5) que

$$\mu(u_\alpha) u_\alpha e^{\alpha u_\alpha^2} - \mu(v_\alpha) v_\alpha e^{\alpha v_\alpha^2} = (\lambda_1 + o(1))(1 + o(1)) w_\alpha - 2\lambda_1^2 (\varphi_1 + o(1)) \int_{\partial\Omega} (\varphi_1 + o(1)) w_\alpha d\sigma.$$

Temos então que

$$\begin{cases} -\Delta w_\alpha + w_\alpha = 0, & \text{em} \;\; \Omega, \\ \frac{\partial w_\alpha}{\partial \eta} = (\lambda_1 + o(1))(1 + o(1)) w_\alpha - 2\lambda_1^2 (\varphi_1 + o(1)) \int_{\partial\Omega} (\varphi_1 + o(1)) w_\alpha d\sigma, & \text{sobre} \;\; \partial\Omega. \end{cases}$$

Consequentemente, para $\psi_\alpha = w_\alpha/\|w_\alpha\|$, teremos também

$$\begin{cases} -\Delta\psi_\alpha + \psi_\alpha = 0, \quad \text{em} \ \ \Omega, \\ \frac{\partial\psi_\alpha}{\partial\eta} = (\lambda_1 + o(1))(1+o(1))\psi_\alpha + 2\lambda_1^2(\varphi_1 + o(1))\int_{\partial\Omega}(\varphi_1 + o(1))\psi_\alpha d\sigma, \quad \text{sobre} \ \ \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.8}$$

Como $\|\psi_\alpha\| = 1$, o Teorema A.4 nos garante para alguma subsequência, teremos $\psi_\alpha \rightharpoonup \psi$ em $H^1(\Omega)$. Note que $\psi \neq 0$ pois, se $\psi_\alpha \rightharpoonup 0$, uma vez que o Teorema B.10 nos diz que $H^1(\Omega)$ está imerso compactamente em $L^2(\partial\Omega)$, teríamos que $\psi_\alpha \to 0$ em $L^2(\partial\Omega)$. Pela formulação fraca de (3.8), teríamos

$$\int_\Omega |\nabla\psi_\alpha|^2 dx + \int_\Omega \psi_\alpha^2 dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial\psi_\alpha}{\partial\eta}\psi_\alpha d\sigma,$$

o que nos levaria a

$$1 = \|\psi_\alpha\|^2 = (\lambda_1 + o(1))\int_{\partial\Omega}(1+o(1))\psi_\alpha^2 d\sigma + 2\lambda_1^2\left[\int_{\partial\Omega}(\varphi_1 + o(1))\psi_\alpha d\sigma\right]^2 = o(1),$$

um absurdo.

O que faremos agora é provar que o limite ψ é, ao mesmo tempo, autofunção do problema de Steklov (2.1) associada ao autovalor λ_1 e ortogonal a φ_1, o que nos dará uma contradição. Usando mais uma vez a formulação fraca, só que multiplicando (3.8) dessa vez por $\phi \in H^1(\Omega)$, teremos

$$\langle\psi_\alpha, \phi\rangle = (\lambda_1 + o(1))\int_{\partial\Omega}(1+o(1))\psi_\alpha\phi d\sigma - 2\lambda_1^2\int_{\partial\Omega}(\varphi_1 + o(1))\phi d\sigma\int_{\partial\Omega}(\varphi_1 + o(1))\psi_\alpha d\sigma.$$

Como $\psi_\alpha \rightharpoonup \psi$ em $H^1(\Omega)$ e $\psi_\alpha \to \psi$ em $L^2(\partial\Omega)$, fazendo $\alpha \to 0$ teremos

$$\langle\psi, \phi\rangle = \lambda_1\int_{\partial\Omega}\psi\phi d\sigma - 2\lambda_1^2\int_{\partial\Omega}\varphi_1\phi d\sigma\int_{\partial\Omega}\varphi_1\psi d\sigma. \tag{3.9}$$

Como $\|u_\alpha\|, \|v_\alpha\| = 1$, teremos

$$\langle\psi_\alpha, u_\alpha + v_\alpha\rangle = \left\langle \frac{u_\alpha - v_\alpha}{\|u_\alpha - v_\alpha\|}, u_\alpha + v_\alpha \right\rangle = \frac{\|u_\alpha\|^2 - \|v_\alpha\|^2}{\|u_\alpha - v_\alpha\|} = 0,$$

logo, fazendo $\alpha \to 0$ e usando a Observação A.2 teremos $2\langle\psi, \varphi_1\rangle = 0$. Como φ_1 é a primeira autofunção do problema de Steklov,

$$0 = \langle\psi, \varphi_1\rangle = \lambda_1\int_{\partial\Omega}\psi\varphi_1 d\sigma \Rightarrow \int_{\partial\Omega}\psi\varphi_1 d\sigma = 0.$$

Dessa forma, em (3.9) teremos

$$\langle \psi, \phi \rangle = \lambda_1 \int_{\partial\Omega} \psi \phi d\sigma, \ \forall \phi \in H^!(\Omega),$$

ou seja, ψ é uma autofunção do problema de Steklov associada ao autovalor λ_1. Pela Proposição 2.4, existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $\psi = k\varphi_1$ com $k \neq 0$, já que $\psi \neq 0$. Porém, como $\langle \psi, \varphi_1 \rangle = 0$, temos aí uma contradição. Portanto, temos uma única extremal para (3.4), para α suficientemente pequeno. Consequentemente, pela unicidade, deve ser radial e igual a φ_1 pelo Lema 3.1. O fato de ser não degenerada segue do Teorema 3.3. □

3.3 Extremais de $S(\alpha, \gamma)$ com $\gamma = 0$

Focaremos agora no seguinte problema: encontrar funções extremais para

$$S(\alpha, 0) := \sup_{\substack{u \in H^1(\Omega) \\ \|u\| \leq 1}} I^\alpha(u),$$

onde

$$I^\alpha(u) = \int_\Omega (e^{\alpha u^2} - 1) dx.$$

Note que a classe de diferenciabilidade do funcional I^α em $H^1(\Omega)$ é a mesma do funcional Q^α. A justificativa é análoga à demonstração da Proposição 3.2.

Observe que funções constantes são pontos críticos de I^α restrito à bola unitária de $H^1(\Omega)$. De fato, se u é constante com $\|u\| = 1$ existe $\beta \in \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{cases} -\Delta u + u = \beta u e^{\alpha u^2}, & \text{em} \quad \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0, & \text{sobre} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.10}$$

Dessa forma, sendo u também solução fraca, temos que

$$\langle u, v \rangle = \beta \int_\Omega u e^{\alpha u^2} v dx, \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

Note então que, sendo $J(u) = \|u\|^2$, a igualdade acima pode ser escrita como

$$\frac{J'(u)(v)}{2} = \frac{\beta}{2\alpha} (I^\alpha)'(u)(v), \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

Podemos dizer então que existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$J'(u) = \lambda (I^\alpha)'(u),$$

o que nos diz que u é ponto crítico de I^α sobre $S = \{u \in H^1(\Omega) : J(u) = \|u\|^2 = 1\}$. É claro que I^α restrito às funções constantes na bola unitária é maximizado por $\varphi = 1/\sqrt{\pi}$, pois assim como fizemos no Teorema 1.6, podemos concluir que I^α deve ser maximizado por uma função com norma 1, e φ e $-\varphi$ são as únicas funções constantes em $H^1(\Omega)$ com norma 1.

Observação 3.3. Considere o problema de autovalor

$$\begin{cases} -\Delta u = \mu u, & \text{em} \quad \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0, & \text{sobre} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.11}$$

Este problema possui um número infinito e enumerável de autovalores

$$0 = \mu_1 < \mu_2 \leq \ldots \leq \mu_m \leq \ldots$$

tais que $\mu_m \to \infty$. Além disso,

$$\mu_1 = \inf_{u \in H^1(\Omega)\setminus\{0\}} \frac{\|\nabla u\|_2^2}{\|u\|_2^2} = 0,$$

onde esse valor é atingido por funções constantes. Seja u_1 uma autofunção associada ao autovalor μ_1, o segundo autovalor de (3.11) é caracterizado por

$$\mu_2 = \inf_{u \imath H\setminus\{0\}} \frac{\|\nabla u\|_2^2}{\|u\|_2^2}, \tag{3.12}$$

onde $H = \{u \in H^1(\Omega) : \int_\Omega u_1 u dx = 0\}$. Esse autovalor nos ajudará a deduzir a natureza das funções constantes como pontos críticos de I^α. Para detalhes mais explícitos acerca da caracterização dos autovalores de $-\Delta$ em $H^1(\Omega)$, veja [17, Theorem 8.5.2].

Teorema 3.8. *Sejam $\varphi = 1/\sqrt{\pi}$ a primeira autofunção e μ_2 o segundo autovalor do problema* (3.11)*, respectivamente. Definindo $\alpha_* = \pi\mu_2/2$ temos as seguintes afirmações:*

(1) *se $\alpha < \alpha_*$, φ é máximo local não degenerado de I^α na esfera unitária de $H^1(\Omega)$;*

(2) *se $\alpha = \alpha_*$, φ é ponto crítico degenerado de I^α na esfera unitária de $H^1(\Omega)$;*

(3) *se $\alpha > \alpha_*$, φ não é máximo local de I^α na esfera unitária de $H^1(\Omega)$.*

Demonstração. Defina

$$G(u) = \int_\Omega (e^{\alpha N(u)} - 1)dx$$

com $N(u) = \frac{u^2}{J(u)} = \frac{u^2}{\|u\|^2}$. O problema de maximizar I^α na bola unitária se transforma em

$$\sup_{u \in H^1(\Omega)\setminus\{0\}} G(u).$$

Calculando $G''(\varphi)(v,v)$ com $v \in \{u \in H^1(\Omega) : \langle u, \varphi \rangle = 0\}$, com os mesmos argumentos usados no Teorema 3.3 teremos

$$G''(\varphi)(v,v) = 2\alpha e^{\frac{\alpha}{\pi}} \int_\Omega v^2 dx \left(\frac{2\alpha}{\pi} + 1 - \frac{J(v)}{\int_\Omega v^2 dx} \right).$$

Por (3.12) teremos

$$\mu_2 = \inf_{u \in H \setminus \{0\}} \frac{\int_\Omega |\nabla u|^2 dx}{\int_\Omega u^2 dx},$$

onde $H = \{u \in H^1(\Omega) : \int_\Omega \varphi v dx = 0\}$. $v \in H$ pois sendo ortogonal a φ com φ sendo solução de (3.10) temos que

$$0 = \langle v, \varphi \rangle = \beta e^{\frac{\alpha}{\pi}} \int_\Omega v\varphi dx \Rightarrow 0 = \int_\Omega v \varphi dx.$$

Logo

$$\frac{J(v)}{\int_\Omega v^2 dx} = \frac{\int_\Omega |\nabla v|^2 dx + \int_\Omega v^2 dx}{\int_\Omega v^2 dx} \geq \mu_2 + 1.$$

De forma análoga ao que foi feito no Teorema 3.3, se $\alpha < \alpha_*$, então $G''(\varphi)(v,v) > 0$, para todo v ortogonal a φ. Além disso, se φ fosse degenerado como ponto crítico, existiria $u \in H^1(\Omega)$ tal que

$$Q'(u)(w) = 0, \quad \forall w \in H^1(\Omega),$$

onde $Q(v) = G''(\varphi)(v,v)$. Então

$$\begin{aligned} 0 &= Q'(u)(w) \\ &= 4\alpha e^{\frac{\alpha}{\pi}} \left[\left(\frac{2\alpha}{\pi} + 1 \right) \int_\Omega uw dx - \langle u, w \rangle \right]. \end{aligned}$$

Dividindo a igualdade por $4\alpha e^{\frac{\alpha}{\pi}}$ obtemos

$$\begin{aligned} \langle u, w \rangle &= (2\alpha\varphi^2 + 1) \int_\Omega uw dx \\ \Leftrightarrow \int_\Omega \nabla u \nabla w dx &= 2\alpha\varphi^2 \int_\Omega uw dx, \end{aligned}$$

para toda $w \in H^1(\Omega)$. Dessa forma u satisfaz fracamente

$$\begin{cases} -\Delta u = 2\alpha\varphi^2 u, & \text{em} \quad \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0, & \text{sobre} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.13}$$

Usando a definição de solução fraca para o problema acima com φ como função teste teríamos u ortogonal a φ. Dessa forma, u não poderia satisfazer (3.13) se $\mu_2 > \frac{2\alpha}{\pi} = 2\alpha\varphi^2$. Portanto, φ é não degenerada se $\alpha < \alpha_*$, concluindo o item (1).

Caso $\alpha = \alpha_*$, teríamos $G''(\varphi)(v,v) \leq 0$ e, tomando ψ_2 como autofunção do problema (3.11), teríamos $Q'(\psi_2) \equiv 0$, logo φ seria ponto crítico degenerado, concluindo o item (2).

Finalmente, se $\alpha > \alpha_*$, teríamos $G(\varphi)(\psi_2, \psi_2) > 0$. Logo, pelo Teorema C.4, φ não poderia ser máximo local.

$\square$

Teorema 3.9. *Seja B a bola unitária de $H^1(\Omega)$. Então, existe α_1 tal que, para $\alpha \leq \alpha_1$, I^α restrito a ∂B possui um único ponto crítico positivo. Consequentemente, para $\alpha \leq \alpha_1$, I^α possui um único máximo positivo, o qual é uma função constante.*

Demonstração. Se u é um ponto crítico positivo de I^α restrito a $\partial B = \{u \in H^1(\Omega) : \|u\|^2 = 1\}$, pelo Teorema dos multiplicadores de Lagrange, existe λ tal que

$$\langle u, v\rangle = \lambda \int_\Omega u e^{\alpha u^2} v dx, \quad \forall v \in H^1(\Omega),$$

ou seja, u é solução fraca do problema

$$\begin{cases} -\Delta u + u = \lambda u e^{\alpha u^2}, & \text{em} \quad \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0, & \text{sobre} \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

Assuma que $\alpha \leq c < 2\pi$. Afirmamos que u é limitada em L^∞ uniformemente com respeito a α em subintervalos compactos de $[0, 2\pi)$. Observe primeiro que, tomando $\alpha > 0$ e $v = 1$ na definição de solução fraca, teremos

$$\int_\Omega u dx = \lambda \int_\Omega u e^{\alpha u^2} > \lambda \int_\Omega u dx,$$

já que nesse caso $e^{\alpha u^2} > 1$ e, dessa forma, $\lambda < 1$. Como $\|u\| = 1$ e $H^1(\Omega)$ está imerso em qualquer $L^p(\Omega)$ com p finito teremos que $\lambda u e^{\alpha u^2} \in L^s(\Omega)$ para algum $s > 1$, pois, tomando $s > 1$ tal que $sc < 2\pi$ teremos, pela desigualdade de Hölder, que

$$\lambda^s \int_\Omega u^s e^{s\alpha u^2} dx \leq \lambda^s \left(\int_\Omega u^{sp'} dx\right)^{1/p'} \left(\int_\Omega e^{pscu^2} dx\right)^{1/p}$$

onde $p > 1$ é tal que $psc < 2\pi$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ e o Teorema 1.4 garante a finitude da última integral. Sendo $ue^{\alpha u^2} \in L^s(\Omega)$, segue que $u \in W^{2,s}(\Omega)$ pelo Lema D.1. Logo, pela imersão dada no Teorema B.11, concluímos a afirmação. Defina $\phi = u - \overline{u}$, com $\overline{u} = \frac{1}{\pi} \int_\Omega u dx$. Escolhendo $v = \phi$ na definição de solução fraca, temos

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \phi dx + \int_\Omega u \phi dx = \lambda \int_\Omega u e^{\alpha u^2} \phi dx.$$

Note que $\nabla u = \nabla \phi$ e que

$$\frac{1}{\pi} \int_\Omega \phi dx = \frac{1}{\pi} \int_\Omega (u - \overline{u}) dx = 0. \tag{3.14}$$

Dessa forma,

$$\int_\Omega u\phi dx = \int_\Omega (\phi + \overline{u})\phi dx = \int_\Omega \phi^2 dx + \frac{1}{\pi}\int_\Omega u dx \int_\Omega \phi dx = \int_\Omega \phi^2 dx.$$

Teremos então

$$\int_\Omega |\nabla\phi|^2 dx + \int_\Omega |\phi|^2 dx = \lambda \int_\Omega u e^{\alpha u^2}\phi dx. \tag{3.15}$$

Observe agora que

$$\int_0^1 (1 + 2\alpha(\overline{u} + t\phi)^2)e^{\alpha(\overline{u}+t\phi)^2}\phi dt = u e^{\alpha u^2} - \overline{u}e^{\alpha\overline{u}^2}, \tag{3.16}$$

onde o termo na integral do lado esquerdo é derivada da função $g(t) = (\overline{u} + t\phi)e^{\alpha(\overline{u}+t\phi)^2}$. Note também que

$$\int_\Omega \overline{u}e^{\alpha\overline{u}^2}\phi dx = \overline{u}e^{\alpha\overline{u}^2}\int_\Omega \phi dx = 0.$$

Como u é a priori limitada em $L^\infty(\Omega)$, multiplicando por ϕ e integrando em Ω, observamos que

$$\begin{aligned}\int_\Omega u e^{\alpha u^2}\phi dx &= \int_\Omega \left(\int_0^1 (1 + 2\alpha(\overline{u} + t\phi)^2)e^{\alpha(\overline{u}+t\phi)^2} dt\right)|\phi|^2 dx \\ &\leq (1 + 2\alpha C)e^{\alpha C}\int_\Omega |\phi|^2 dx.\end{aligned}$$

Podemos escolher $\alpha > 0$ suficientemente pequeno de forma que $(1 + 2\alpha C)e^{\alpha C} < \mu_2 + 1$. Usando que $\lambda < 1$, por (3.15) obtemos

$$\int_\Omega |\nabla\phi|^2 dx + \int_\Omega |\phi|^2 dx < \int_\Omega u e^{\alpha u^2}\phi dx < (\mu_2 + 1)\int_\Omega |\phi|^2 dx,$$

ou seja,

$$\int_\Omega |\nabla\phi|^2 dx < \mu_2 \int_\Omega |\phi|^2 dx.$$

Por (3.14) e a caracterização de μ_2 em (3.12), obtemos que $\phi = 0$ e, portanto, u é constante. Logo, como $\|u\| = 1$, devemos ter $u = \varphi$. Portanto, restrito a ∂B I^α, possui um único ponto crítico positivo se α é suficientemente pequeno e, consequentemente, um único máximo positivo o qual é uma função constante.

□

Capítulo 4

Simetria das extremais com peso de Hénon

Finalizamos o nosso trabalho neste capítulo respondendo a questão da simetria das funções que realizam $S(\alpha,\gamma)$ para α em certas regiões do intervalo $(0,2\pi)$. Essencialmente a quebra de simetria ocorre por dois motivos: a não limitação uniforme de $\int_{\partial\Omega} e^{\alpha u^2} d\sigma$ com $\|u\| \leq 1$ como no caso em que $\alpha \in (\pi, 2\pi)$ ou pela quebra de simetria de $T(\alpha)$ que ocorre quando $\alpha \in (\pi(\lambda_2 - \lambda_1), \pi]$. Mostramos também que se α é suficientemente pequeno, não importa o que ocorra com $\gamma > 0$, as extremais de $S(\alpha,\gamma)$ são radiais.

Este tipo de estudo no caso Sobolev, ou seja

$$\sup \int_{\Omega} |u|^p |x|^{\gamma} dx,$$

foi considerado nos artigos [30], [29] e [13]. Veja também a dissertação [16].

4.1 Quebra de simetria para γ grande

Teorema 4.1. *Para todo $\alpha \in (\pi(\lambda_2 - \lambda_1), 2\pi)$, todas as funções extremais de $S(\alpha,\gamma)$ são não radiais para γ suficientemente grande.*

Demonstração. Escrevamos $(\pi(\lambda_2 - \lambda_1), 2\pi) = (\pi(\lambda_2 - \lambda_2), \pi) \cup \{\pi\} \cup (\pi, 2\pi)$. Se $\alpha \in (\pi, 2\pi)$ o Teorema 2.9 nos assegura que $S(\alpha,\gamma) > S_r(\alpha,\gamma)$ se γ é suficientemente grande. Se $\alpha \in (\pi(\lambda_2 - \lambda_1), \pi)$, pelas Proposições 2.8 e 2.12 temos

$$\lim_{\gamma\to\infty} (\gamma+2) S(\alpha,\gamma) = T(\alpha) \quad \text{e} \quad \lim_{\gamma\to\infty} (\gamma+2) S_r(\alpha,\gamma) = T_r(\alpha).$$

Pelo Corolário 3.4 temos que $T(\alpha) > T_r(\alpha)$ se $\alpha \in (\pi(\lambda_2 - \lambda_1), \pi)$, teremos então

$$\lim_{\gamma\to\infty}(\gamma+2)S(\alpha,\gamma) = T(\alpha) > T_r(\alpha) = \lim_{\gamma\to\infty}(\gamma+2)S_r(\alpha,\gamma),$$

portanto $S(\alpha,\gamma) > S_r(\alpha,\gamma)$ se γ é suficientemente grande. Finalmente, se $\alpha = \pi$, a Proposição 3.5 não nos assegura que $\lim_{\gamma\to\infty}(\gamma+2)S(\pi,\gamma) = T(\pi)$, porém, note primeiro que $T(\alpha) \to T(\pi)$ quando $\alpha \to \pi^-$. De fato, suponha que u_π atinge $T(\pi)$(sua existência é assegurada pelo Teorema 1.5) e seja $\alpha < \pi$. Note então que indexada por α, $(e^{\alpha u_\pi} - 1)$ forma uma sequência monótona crescente com

$$\sup_\alpha \int_{\partial\Omega}(e^{\alpha u_\pi^2} - 1)d\sigma = \int_{\partial\Omega}(e^{\pi u_\pi^2} - 1)d\sigma < \infty,$$

daí, pelo Teorema da convergência monótona teremos

$$T(\pi) \geq T(\alpha) \geq \int_{\partial\Omega}(e^{\alpha u_\pi^2} - 1)d\sigma = \int_{\partial\Omega}(e^{\pi u_\pi^2} - 1)d\sigma + o(1) = T(\pi) + o(1)$$

quando $\alpha \to \pi^-$. Portanto $T(\alpha) \to T(\pi)$. Novamente pelo Corolário 3.4 teremos $T(\pi) > T_r(\pi)$. Pela continuidade de $T(\alpha)$, existe $\delta > 0$ tal que $T(\pi-\delta) > T_r(\pi)$, então, pelas proposições 2.8 e 2.12 teremos

$$\lim_{\gamma\to\infty}\inf(\gamma+2)S(\pi,\gamma) \geq \lim_{\gamma\to\infty}(\gamma+2)S(\pi-\delta,\gamma) = T(\pi-\delta) > T_r(\pi) = \lim_{\gamma\to\infty}(\gamma+2)S_r(\pi,\gamma),$$

portanto $S(\pi,\gamma) > S_r(\pi,\gamma)$ se γ é suficientemente grande. Tomando então γ suficientemente grande de modo a cobrir os três casos, concluímos o resultado.

□

4.2 Unicidade de extremais de $S(\alpha,\gamma)$ para α pequeno

Nosso objetivo nessa seção é provar que extremais de $S(\alpha,\gamma)$ são radias para α suficientemente pequeno e $\gamma > 0$, tal conclusão é feita ao obter a unicidade para extremais de $S(\alpha,\gamma)$.

4.2.1 Problema de autovalor com peso

O último resultado com respeito a simetria de funções extremais tem em sua prova a influência de mais um problema de autovalor, mais precisamente, de algumas propriedades do primeiro autovalor e da primeira autofunção do problema de autovalor com peso:

$$\begin{cases} -\Delta u + u = \lambda|x|^\gamma u, & \text{em} \quad \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0, & \text{sobre} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{4.1}$$

Portanto, nosso foco agora consiste em exibir tais propriedades.

Note que $u \in H^1(\Omega)\backslash\{0\}$ é solução fraca de (4.1) se, somente se,

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v dx + \int_\Omega uv dx = \lambda \int_\Omega |x|^\gamma uv dx, \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

Nesse caso dizemos também que u é uma autofunção do problema (4.1). Na verdade, podemos dizer que a autofunção u satisfaz pontualmente (4.1), pois estando $H^1(\Omega)$ imerso que qualquer $L^p(\Omega)$ com $p \in [1,\infty)$, temos que $\lambda|x|^\gamma u \in L^p(\Omega)$ para todo $p \in [1,\infty)$, daí, os lemas D.2 e D.5 nos garantem que $u \in C^{2,\beta}(\Omega)$ e, analogamente ao caso da Observação 1.14, u irá satisfazer (4.1).

Para cada $u \in H^1(\Omega)$ defina $T_u : H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ como

$$T_u(v) = \int_\Omega |x|^\gamma uv dx.$$

T é claramente linear e usando a desigualdade de Hölder juntamente com a imersão de $H^1(\Omega)$ em $L^2(\Omega)$ teremos

$$|T_u(v)| \leq \int_\Omega |x|^\gamma |uv| dx \leq \|u\|_2 \|v\|_2 \leq C\|v\|,$$

logo $T_u \in H^1(\Omega)^*$. Daí, pelo Teorema A.7, existe $Tu \in H^1(\Omega)$ tal que $\langle Tu, v\rangle = T_u(v)$ para todo $v \in H^1(\Omega)$, ou seja,

$$\langle Tu, v\rangle = \int_\Omega |x|^\gamma uv dx$$

Fica definido então o operador

$$\begin{array}{rccc} T : & H^1(\Omega) & \longrightarrow & H^1(\Omega) \\ & u & \longmapsto & Tu. \end{array}$$

Vejamos que T é um operador linear compacto e autoadjunto. T é linear pois dados $u_1, u_2 \in H^1(\Omega)$ e $c \in \mathbb{R}$ temos que

$$\langle T(u_1 + cu_2), v\rangle = \int_\Omega |x|^\gamma (u_1 + cu_2) v dx = \int_\Omega |x|^\gamma u_1 v dx + c\int_\Omega |x|^\gamma u_2 v dx = \langle Tu_1 + cTu_2, v\rangle$$

para todo $v \in H^1(\Omega)$, logo T é linear. Com respeito a continuidade temos que

$$\|Tu\|^2 = \langle Tu, Tu\rangle = T_u(Tu) = \int_\Omega |x|^\gamma u Tu dx \leq \|u\|_2 \|Tu\|_2 \leq C\|u\|\|Tu\|,$$

logo

$$\|Tu\| \leq C\|u\|.$$

T é autoadjunto pois

$$\langle Tu, v\rangle = T_u(v) = \int_\Omega |x|^\gamma uv dx = \langle Tv, u\rangle.$$

Finalmente, vejamos que T é compacto. Seja (u_n) uma sequência limitada, logo, pelo Teorema A.4, para uma subsequência temos $u_n \rightharpoonup u$ e, como $H^1(\Omega)$ está compactamente imerso em $L^2(\Omega)$, temos $u_n \to u$ em $L^2(\Omega)$. Daí

$$\begin{aligned}\|Tu_m - Tu_k\|^2 &= \langle T(u_m - u_k), T(u_m - u_k)\rangle \\ &= T_{u_m - u_k}(T(u_m - u_k)) \\ &= \int_\Omega |x|^\gamma (u_m - u_k) T(u_m - u_k) dx \\ &\leq C\|u_m - u_k\|_2 \|Tu_m - Tu_k\|\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \|Tu_m - Tu_k\| \leq C\|u_m - u_k\|_2 \to 0.$$

Logo (Tu_m) é de Cauchy em $H^1(\Omega)$, portanto converge em $H^1(\Omega)$ o que garante a compacidade de T. Observe que pela formulação fraca do problema (4.1), se u é solução fraca teremos

$$\langle u, v\rangle = \lambda \langle Tu, v\rangle \Rightarrow \langle u - \lambda Tu, v\rangle = 0, \quad \forall v \in H^1(\Omega),$$

logo λ é autovalor de (4.1) se, e somente se,

$$Tu = \frac{1}{\lambda} u.$$

Dessa forma, o menor autovalor do problema (4.1) digamos λ_γ é o inverso do maior autovalor do operador T digamos μ_γ e assim, pelo Teorema A.8 o espectro sem o 0 é composto apenas por autovalores e, pelo Teorema A.9 temos que

$$\frac{1}{\lambda_\gamma} = \mu_\gamma = \sup_{\|u\| \leq 1} \langle Tu, u\rangle = \sup_{\|u\| \leq 1} \int_\Omega |x|^\gamma u^2 dx > 0. \tag{4.2}$$

Vejamos que se uma função atinge o supremo acima, então ela será uma autofunção associada ao autovalor λ_γ. Note primeiramente que podemos também dizer que

$$\lambda_\gamma = \inf_{u \in H^1(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{\|u\|^2}{\int_\Omega |x|^\gamma u^2 dx}.$$

Suponha que ϕ atinge o ínfimo acima, temos então,

$$\|\phi\|^2 = \lambda_\gamma \int_\Omega |x|^\gamma \phi^2 dx.$$

Dada então $v \in H^1(\Omega)$ e $t \in \mathbb{R}$ teremos que

$$\lambda_\gamma \int_\Omega |x|^\gamma (\phi + vt)^2 dx \leq \int_\Omega |\nabla(\phi + vt)|^2 dx + \int_\Omega (\phi + vt)^2 dx.$$

Fazendo todas as distribuições e usando a igualdade envolvendo a norma de ϕ acima teremos

$$2t\lambda_\gamma \int_\Omega |x|^\gamma v\phi dx + \lambda_\gamma t^2 \int_\Omega v^2 dx \leq 2t\langle \phi, v\rangle + t^2\|v\|^2.$$

Tomando $t > 0$, dividindo tudo por $2t > 0$ e fazendo $t \to 0^+$ teremos

$$\lambda_\gamma \int_\Omega |x|^\gamma v\phi dx \leq \langle \phi, v\rangle.$$

Tomando $t < 0$, um raciocínio análogo nos dá desigualdade contrária e, portanto

$$\int_\Omega \nabla\phi\nabla v dx + \int_\Omega \phi v dx = \lambda_\gamma \int_\Omega |x|^\gamma \phi v dx,$$

logo ϕ é uma autofunção do problema (4.1) associada ao autovalor λ_γ.

Teorema 4.2. *Seja λ_γ o primeiro autovalor de* (4.1) *e ϕ_γ autofunção associada a λ_γ. Então*

(1) $\phi_\gamma > 0$ *ou* $\phi_\gamma < 0$ *em* Ω*;*

(2) λ_γ *é simples, isto é, se ψ é uma autofunção associada ao autovalor λ_γ então existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $\psi = k\phi_\gamma$;*

(3) ϕ_γ *é radial.*

Demonstração. Suponha que ϕ_γ troca de sinal, dessa forma podemos dizer que

$$\phi_\gamma = \phi_\gamma^+ - \phi_\gamma^-,$$

onde

$$\phi_\gamma^+ = \max\{u(x), 0\} \quad \text{e} \quad \phi_\gamma^- = \max\{-u(x), 0\}$$

com ϕ_γ^+ e ϕ_γ^- não identicamente nulas. Note que

$$\nabla\phi_\gamma^+ = \begin{cases} \nabla\phi_\gamma, & \text{em} \quad \{\phi_\gamma > 0\}, \\ 0, & \text{em} \quad \{\phi_\gamma \leq 0\}, \end{cases}$$

Tomando como função teste $v = \phi_\gamma^+$ na formulação fraca de (4.1) teremos

$$\int_\Omega \nabla\phi_\gamma\nabla\phi_\gamma^+ dx + \int_\Omega \phi_\gamma\phi_\gamma^+ dx = \lambda_\gamma \int_\Omega |x|^\gamma \phi_\gamma\phi_\gamma^+ dx.$$

Porém, note que

$$\int_\Omega \nabla\phi_\gamma\nabla\phi_\gamma^+ dx = \int_{\{\phi_\gamma > 0\}} |\nabla\phi_\gamma^+|^2 dx = \int_\Omega |\nabla\phi_\gamma^+|^2 dx$$

e que, analogamente o mesmo ocorre com os outros termos da formulação, logo

$$\|\phi_\gamma^+\|^2 = \lambda_\gamma \int_\Omega |x|^\gamma |\phi_\gamma^+|^2 dx,$$

o que nos diz que ϕ_γ^+ é uma autofunção de (4.1) associada ao autovalor λ_γ. De forma inteiramente análoga concluímos o mesmo para ϕ_γ^-. Podemos então dizer que

$$\begin{cases} -\Delta\phi_\gamma^\pm + \phi_\gamma^\pm = \lambda_\gamma |x|^\gamma \phi_\gamma^\pm, & \text{em} \quad \Omega, \\ \frac{\partial \phi_\gamma^\pm}{\partial \eta} = 0, & \text{sobre} \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

Vejamos que $\phi_\gamma^\pm > 0$. De fato, suponha que exista $x_0 \in \Omega$ tal que $\phi_\gamma^+ = 0$, dessa forma ϕ_γ^+ teria em x_0 um mínimo em Ω, sabendo que a autofunção é regular, pelo Princípio do máximo forte, devemos ter ϕ_γ^+ constante e, nesse caso, identicamente nula o que é uma contradição já que ϕ_γ^+ é não nula. Devemos ter então $\phi_\gamma^+ > 0$ e de forma análoga $\phi_\gamma^- > 0$, porém, isso contradiz o fato de que

$$\phi_\gamma^+ \phi_\gamma^- = 0.$$

Portanto ϕ_γ não troca de sinal e devemos ter $\phi_\gamma^+ \equiv 0$ ou $\phi_\gamma^- \equiv 0$. Se $\phi_\gamma^- \equiv 0$, temos $\phi_\gamma \geq 0$ em Ω. Aplicando o princípio do máximo novamente e de forma semelhante concluiremos que devemos ter $\phi_\gamma > 0$. Da mesma forma com o outro caso, o que conclui o item 1. Com respeito ao item 2, suponha que ψ e ϕ_γ são linearmente independentes, nesse caso

$$\dim(T - \frac{1}{\lambda_\gamma} Id) \geq 2.$$

Aplicando o Teorema A.10 em T, podemos dizer que existe uma base ortogonal formada por autofunções do problema (4.1). Dessa forma teremos

$$0 = \langle \phi_\gamma, \psi \rangle = \lambda_\gamma \int_\Omega |x|^\gamma \phi_\gamma \psi dx.$$

Porém, isso não não pode ocorrer, já que $\phi_\gamma \psi > 0$ ou $\phi_\gamma \psi < 0$. Portanto, ψ e ϕ_γ devem ser linearmente dependentes. O item 3 segue a mesma ideia do Teorema 2.5.

□

4.2.2 Unicidade de extremais para $S(\alpha, \gamma)$ com α pequeno

Provaremos agora que extremais de $S(\alpha, \gamma)$ são radias para α suficientemente pequeno. Para isto vamos primeiramente estabelecer alguns resultados que serão usados na prova deste fato. Lembremos que φ_1 denota a primeira autofunção do problema de Steklov (2.1) associada ao autovalor λ_1.

Lema 4.3. Assuma que $\alpha_n \to 0$ e $\gamma_n \to +\infty$ quando $n \to \infty$. Então temos que

$$\frac{\gamma_n + 2}{\alpha_n} \int_\Omega (e^{\alpha_n u^2} - 1)|x|^{\gamma_n} dx = \int_{\partial\Omega} u^2 d\sigma + o(1),$$

quando $n \to \infty$, uniformemente para $\|u\| \leq 1$.

Demonstração. Usando a relação em (2.5) teremos

$$\frac{\gamma_n + 2}{\alpha_n} \int_\Omega (e^{\alpha_n u^2} - 1)|x|^{\gamma_n} dx = \frac{1}{\alpha_n} \int_{\partial\Omega} (e^{\alpha_n u^2} - 1) d\sigma - \frac{1}{\alpha_n} \int_\Omega \nabla(e^{\alpha_n u^2} - 1).x|x|^{\gamma_n} dx.$$

Note que

$$\frac{1}{\alpha_n} \int_\Omega \nabla(e^{\alpha_n u^2} - 1).x|x|^{\gamma_n} dx = 2 \int_\Omega u e^{\alpha_n u^2} \nabla u.x|x|^{\gamma_n} dx = o(1)$$

quando $n \to \infty$, pois se n é suficientemente grande para que $6\alpha_n < 2\pi$, usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz e a desigualdade de Hölder generalizada teremos

$$\begin{aligned} 2 \int_\Omega u e^{\alpha_n u^2} \nabla u.x|x|^{\gamma} dx &\leq 2 \int_\Omega u e^{\alpha_n u^2} |\nabla u||x|^{\gamma_n} dx \\ &\leq 2\|u\|_6 \|e^{\alpha_n u^2}\|_6 \|\nabla u\|_2 \||x|^{\gamma_n}\|_6 = o(1), \end{aligned}$$

já que $\|\nabla u\|_2 \leq \|u\| \leq 1$, $\|u\|_6 \leq C\|u\|$, $\|e^{\alpha_n u^2}\|_6 \leq C$ pelo Teorema 1.4 e o último termo tende a 0 quando $n \to \infty$. Por fim, usando a desigualdade $e^x - 1 - x \leq \frac{1}{2} x^2 e^x$ teremos

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{\alpha_n} \int_{\partial\Omega} (e^{\alpha_n u^2} - 1) d\sigma - \int_{\partial\Omega} u^2 d\sigma \right| &= \left| \frac{1}{\alpha_n} \int_{\partial\Omega} (e^{\alpha_n u^2} - 1 - \alpha_n u^2) \right| \\ &\leq \frac{\alpha_n}{2} \int_{\partial\Omega} u^4 e^{\alpha_n u^2} d\sigma \\ &\leq \frac{\alpha_n}{2} \left(\int_{\partial\Omega} e^{p\alpha_n u^2} \right)^{1/p} \left(\int_{\partial\Omega} u^{4p'} d\sigma \right)^{1/p'} \\ &= O(\alpha_n), \end{aligned}$$

quando $n \to \infty$, onde $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ com $p > 1$, onde, sem perda de generalidade, podemos supor que α_n é tal que $p\alpha_n < \pi$, logo

$$\frac{1}{\alpha_n} \int_{\partial\Omega} (e^{\alpha_n u^2} - 1) d\sigma = \int_{\partial\Omega} u^2 d\sigma + o(1)$$

e, portanto

$$\frac{\gamma_n + 2}{\alpha_n} \int_\Omega (e^{\alpha_n u^2} - 1)|x|^{\gamma_n} dx = \int_{\partial\Omega} u^2 d\sigma + o(1).$$

□

Lema 4.4. Assuma que $\alpha_n \to 0$, $\gamma_n \to +\infty$ quando $n \to +\infty$ e seja u_n extremal de $S(\alpha_n, \gamma_n)$

para cada $n \in \mathbb{N}$. Então, quando $n \to +\infty$, temos que

$$\frac{\gamma_n + 2}{\alpha_n} S(\alpha_n, \gamma_n) \to \frac{1}{\lambda_1} \tag{4.3}$$

$$u_n \to \varphi_1 \quad \text{em} \quad H^1(\Omega). \tag{4.4}$$

Demonstração. (4.3) segue do lema anterior tomando o supremo. Como $\|u_n\| = 1$, pelo Teorema A.4, para alguma subsequência temos $u_n \rightharpoonup u$ em $H^1(\Omega)$ e, pela compacidade da imersão $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\partial\Omega)$, $u_n \to u$ em $L^p(\partial\Omega)$, daí, por (4.3) e pelo Lema 4.3 temos

$$\frac{1}{\lambda_1} + o(1) = \frac{\gamma_n + 2}{\alpha_n} \int_{\partial\Omega} (e^{\alpha_n u_n^2} - 1)|x|^{\gamma_n} dx = \int_{\partial\Omega} u_n^2 d\sigma + o(1) = \int_{\partial\Omega} u^2 d\sigma + o(1),$$

logo $\int_{\partial\Omega} u^2 d\sigma = 1/\lambda_1$, ou seja, u é uma autofunção do problema de Steklov associada ao autovalor λ_1, dessa forma, pela Proposição 2.4 u é múltipla de φ_1, sendo então radial e, por outro lado,

$$\int_{\partial\Omega} u^2 d\sigma = \frac{1}{\lambda_1} = \int_{\partial\Omega} \varphi_1^2 d\sigma \Rightarrow u = \varphi_1 \quad \text{em} \quad \partial\Omega,$$

logo $u = \varphi_1$. Além disso, $\limsup \|u_n\| = 1 = \|\varphi_1\|$, logo pela Proposição A.5, $u_n \to \varphi_1$ fortemente em $H^1(\Omega)$ e, argumentando como no final das proposições 2.8 e 3.5 a sequência inteira (u_n) converge. $\square$

Se u_n atinge $S(\alpha_n, \gamma_n)$, pela Proposição 1.12 temos que u_n é uma solução fraca do problema

$$\begin{cases} -\Delta u + u = \lambda |x|^{\gamma_n} u e^{\alpha_n u^2}, & \text{em} \quad \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0, & \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{4.5}$$

ou seja,

$$\langle u_n, u_n \rangle = \lambda(u_n) \int_{\Omega} |x|^{\gamma_n} u_n^2 e^{\alpha_n u_n^2} dx.$$

Desde que $\|u_n\| = 1$, temos que $\lambda(u_n)$ satisfaz

$$\lambda(u_n) = \frac{1}{\int_{\Omega} |x|^{\gamma_n} u_n^2 e^{\alpha_n u_n^2} dx}.$$

O lema seguinte visa explicitar o comportamento de $\lambda(u_n)$ quando $n \to \infty$.

Lema 4.5. Assuma que $\alpha_n \to 0$ e $\gamma_n \to +\infty$ quando $n \to \infty$. Então, quando $n \to \infty$, temos

$$\frac{\lambda(u_n)}{\gamma_n + 2} \to \lambda_1$$

Demonstração. Assim como observamos no Lema 2.7, $(\gamma_n + 2)|x|^{\gamma_n} = \operatorname{div}(x|x|^{\gamma_n})$ e aplicando o

Teorema da divergência como no Lema 2.7 com $f = u_n^2 e^{\alpha_n u_n^2}$ e $F = x|x|^{\gamma_n}$ teremos

$$\begin{aligned}(\gamma_n + 2)\int_\Omega u_n^2 e^{\alpha_n u_n^2}|x|^{\gamma_n}dx &= \int_\Omega u_n^2 e^{\alpha_n u_n^2}\operatorname{div}(x|x|^{\gamma_n})dx \\ &= \int_{\partial\Omega} u_n^2 e^{\alpha_n u_n^2}d\sigma - \int_\Omega \nabla(u_n^2 e^{\alpha_n u_n^2}).x|x|^{\gamma_n}dx.\end{aligned}$$

Como $u_n \to \varphi_1$ e $\alpha_n \to 0 < \pi$, pelo Lema 3.6

$$\int_{\partial\Omega} u_n^2 e^{\alpha_n u_n^2}d\sigma = \int_{\partial\Omega}\varphi_1^2 d\sigma + o(1) = \frac{1}{\lambda_1} + o(1).$$

Com respeito a segunda integral temos

$$\int_\Omega \nabla(u_n^2 e^{\alpha_n u_n^2}).x|x|^{\gamma_n}dx = o(1)$$

pelo Lema 2.11. Portanto

$$\frac{\lambda(u_n)}{(\gamma_n+2)} = \frac{1}{(\gamma_n+2)\int_\Omega u_n^2 e^{\alpha_n u_n^2}|x|^{\gamma_n}dx} \to \frac{1}{\int_{\partial\Omega}\varphi_1^2 d\sigma} = \lambda_1.$$

□

Suponha que u_n, v_n sejam maximizantes distintos de $S(\alpha_n, \gamma_n)$, pelo Lema 4.4 temos $u_n, v_n \to \varphi_1$ em $H^1(\Omega)$. Tome

$$\psi_n = \frac{u_n - v_n}{\|u_n - v_n\|},$$

então, para alguma subsequência temos $\psi_n \rightharpoonup \psi$. Note então que

$$\langle \psi, \varphi_1\rangle = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\langle \psi_n, u_n + v_n\rangle = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left\langle \frac{u_n - v_n}{\|u_n - v_n\|}, u_n + v_n\right\rangle = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\frac{\|u_n\|^2 - \|v_n\|^2}{\|u_n - v_n\|} = 0. \quad (4.6)$$

Sabemos que

$$\begin{cases} -\Delta\varphi_1 + \varphi_1 = 0, & \text{em} \quad \Omega, \\ \frac{\partial\varphi_1}{\partial\eta} = \lambda_1\varphi_1, & \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

então pela formulação fraca do problema devemos ter

$$\langle \varphi_1, \phi\rangle = \lambda_1\int_{\partial\Omega}\varphi_1\phi d\sigma \quad \forall \phi \in H^1(\Omega),$$

tomando $\phi = \psi$, por (4.6) teremos

$$0 = \langle \varphi_1, \psi\rangle = \lambda_1\int_{\partial\Omega}\varphi_1\psi d\sigma \Rightarrow 0 = \int_{\partial\Omega}\varphi_1\psi d\sigma. \quad (4.7)$$

u_n e v_n satisfazem fracamente

$$\begin{cases} -\Delta u_n + u_n = \lambda(u_n) u_n e^{\alpha_n u_n^2}|x|^{\gamma_n}, & \text{em} \quad \Omega, \\ \frac{\partial u_n}{\partial \eta} = 0, & \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases} \qquad \begin{cases} -\Delta v_n + v_n = \lambda(v_n) v_n e^{\alpha_n v_n^2}|x|^{\gamma_n}, & \text{em} \quad \Omega, \\ \frac{\partial v_n}{\partial \eta} = 0, & \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

dessa forma, como

$$\frac{-\Delta(u_n - v_n) + u_n - v_n}{\|u_n - v_n\|} = \frac{\lambda(u_n) u_n e^{\alpha_n u_n^2}|x|^{\gamma_n} - \lambda(v_n) v_n e^{\alpha_n v_n^2}|x|^{\gamma_n}}{\|u_n - v_n\|},$$

ψ_n satisfazem fracamente

$$\begin{cases} -\Delta \psi_n + \psi_n = \frac{\lambda(u_n) u_n e^{\alpha_n u_n^2}|x|^{\gamma_n}}{\|u_n - v_n\|} - \frac{\lambda(v_n) v_n e^{\alpha_n v_n^2}|x|^{\gamma_n}}{\|u_n - v_n\|}, & \text{em} \quad \Omega, \\ \frac{\partial \psi_n}{\partial \eta} = 0, & \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

Fazendo então a formulação fraca, para toda $\phi \in H^1(\Omega)$ teremos

$$\langle \psi_n, \phi \rangle = \frac{\lambda(u_n)}{\|u_n - v_n\|} \int_\Omega u_n e^{\alpha_n u_n^2}|x|^{\gamma_n} \phi dx - \frac{\lambda(v_n)}{\|u_n - v_n\|} \int_\Omega v_n e^{\alpha_n v_n^2}|x|^{\gamma_n} \phi dx.$$

Somando e subtraindo o termo

$$\frac{\lambda(v_n)}{\|u_n - v_n\|} \int_\Omega u_n e^{\alpha_n u_n^2}|x|^{\gamma_n} \phi dx$$

teremos

$$\langle \psi_n, \phi \rangle = \frac{\lambda(u_n) - \lambda(v_n)}{\|u_n - v_n\|} \int_\Omega u_n e^{\alpha_n u_n^2}|x|^{\gamma_n} \phi dx - \frac{\lambda(v_n)}{\|u_n - v_n\|} \int_\Omega (v_n e^{\alpha_n v_n^2} - u_n e^{\alpha_n u_n^2})|x|^{\gamma_n} \phi dx := A_n - B_n \tag{4.8}$$

A igualdade acima é equivalente a formulação fraca do problema, porém numa melhor forma para estudar seu comportamento quando $n \to \infty$. Estimaremos A_n e B_n no lema seguinte.

Lema 4.6. Se $\alpha_n \to 0, \gamma_n \to \infty$ e $w_n \rightharpoonup w$ em $H^1(\Omega)$ quando $n \to \infty$, com $\|w_n\| \leq 1$, então

$$\lim_{n\to\infty} \langle \psi_n, w_n \rangle = \lambda_1 \int_\Omega \psi w d\sigma.$$

Demonstração. Vejamos primeiro que $\langle \psi_n, \phi \rangle \to \lambda_1 \int_{\partial\Omega} \psi \phi d\sigma$ para toda $\phi \in H^1(\Omega)$. Para isso, provemos que primeiramente que $A_n \to 0$ quando $n \to \infty$. De fato, com auxílio do Lema 4.5, teremos

$$A_n = \frac{1}{\|u_n - v_n\|} \left(\frac{\int_\Omega u_n e^{\alpha_n u_n^2}|x|^{\gamma_n} \phi dx}{\int_\Omega u_n^2 e^{\alpha_n u_n^2}|x|^{\gamma_n} dx} - \frac{\int_\Omega u_n e^{\alpha_n u_n^2}|x|^{\gamma_n} \phi dx}{\int_\Omega v_n^2 e^{\alpha_n v_n^2}|x|^{\gamma_n} dx} \right)$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\|u_n - v_n\|} \left(\frac{\int_\Omega v_n^2 e^{\alpha_n v_n^2} |x|^{\gamma_n} dx \int_\Omega u_n e^{\alpha_n u_n^2} |x|^{\gamma_n} \phi dx - \int_\Omega u_n^2 e^{\alpha_n u_n^2} |x|^{\gamma_n} dx \int_\Omega u_n e^{\alpha_n u_n^2} |x|^{\gamma_n} \phi dx}{\int_\Omega u_n^2 e^{\alpha_n u_n^2} |x|^{\gamma_n} dx \int_\Omega v_n^2 e^{\alpha_n v_n^2} |x|^{\gamma_n} dx} \right) \\
&= \frac{\lambda(u_n)\lambda(v_n)}{\|u_n - v_n\|} \frac{(\gamma_n+2)^2}{(\gamma_n+2)^2} \int_\Omega (v_n^2 e^{\alpha_n v_n^2} - u_n^2 e^{\alpha_n u_n^2}) |x|^{\gamma_n} dx \int_\Omega u_n e^{\alpha_n u_n^2} |x|^{\gamma_n} \phi dx \\
&= (\lambda_1^2 + o(1)) \int_\Omega \frac{(v_n^2 e^{\alpha_n v_n^2} - u_n^2 e^{\alpha_n u_n^2})(\gamma_n+2)|x|^{\gamma_n}}{\|u_n - v_n\|} dx \int_\Omega u_n e^{\alpha_n u_n^2} (\gamma_n+2) |x|^{\gamma_n} \phi dx.
\end{aligned}
$$

Como já observamos antes, $(\gamma_n+2)|x|^{\gamma_n} = \mathrm{div}(x|x|^{\gamma_n})$, logo na última integral acima temos

$$
\int_\Omega u_n e^{\alpha_n u_n^2} (\gamma_n+2) |x|^{\gamma_n} \phi dx = \int_\Omega u_n e^{\alpha_n u_n^2} \mathrm{div}(x|x|^{\gamma_n}) \phi dx,
$$

aplicando o Teorema da divergência como no Lema 2.7 com $F = x|x|^{\gamma_n}$ e $f = u_n e^{\alpha_n u_n^2} \phi$ teremos

$$
\int_\Omega u_n e^{\alpha_n u_n^2} \mathrm{div}(x|x|^{\gamma_n}) \phi dx = \int_{\partial\Omega} u_n e^{\alpha_n u_n^2} \phi d\sigma - \int_\Omega \nabla(u_n e^{\alpha_n u_n^2} \phi).x|x|^{\gamma_n} dx.
$$

Pelo Lema 2.11 teremos

$$
\int_\Omega \nabla(u_n e^{\alpha_n u_n^2} \phi).x|x|^{\gamma_n} dx = o(1),
$$

e como $u_n \to \varphi_1$ em $H^1(\Omega)$ e $\alpha_n \to 0 < \pi$, pelo Lema 3.6 temos que $u_n e^{\alpha_n u_n^2} \to \varphi_1$ em $L^2(\partial\Omega)$, daí teremos

$$
\int_\Omega u_n e^{\alpha_n u_n^2} \phi (\gamma_n+2) |x|^{\gamma_n} dx = \int_{\partial\Omega} \varphi_1 \phi d\sigma + o(1).
$$

Vejamos agora que a primeira integral em A_n tende a 0. Para isto escrevamos

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega \frac{v_n^2 e^{\alpha_n u_n^2} - u_n^2 e^{\alpha_n u_n^2}}{\|u_n - v_n\|} (\gamma_n+2)|x|^{\gamma_n} dx &= \int_\Omega \frac{v_n^2 e^{\alpha_n v_n^2} - u_n^2 e^{\alpha_n u_n^2 +} u_n^2 e^{\alpha_n v_n^2 +} - u_n^2 e^{\alpha_n u_n^2}}{\|u_n - v_n\|} (\gamma_n+2)|x|^{\gamma_n} dx \\
&= \int_\Omega \frac{(v_n^2 - u_n^2) e^{\alpha_n v_n^2} (\gamma_n+2)|x|^{\gamma_n}}{\|u_n - v_n\|} dx \\
&- \int_\Omega \frac{u_n^2 (e^{\alpha_n u_n^2} - e^{\alpha_n v_n^2})}{\|u_n - v_n\|} (\gamma_n+2)|x|^{\gamma_n} dx \\
&:= C_n - D_n.
\end{aligned}
$$

Analisaremos C_n e D_n separadamente. Com respeito a C_n teremos

$$
\begin{aligned}
C_n &= \int_\Omega \frac{(v_n^2 - u_n^2) e^{\alpha_n v_n^2} (\gamma_n+2)|x|^{\gamma_n}}{\|u_n - v_n\|} dx \\
&= \int_\Omega \frac{(v_n - u_n)(v_n + u_n) e^{\alpha_n v_n^2} \mathrm{div}(x|x|^{\gamma_n})}{\|u_n - v_n\|} dx \\
&= - \int_\Omega \psi_n (v_n + u_n) e^{\alpha_n v_n^2} \mathrm{div}(x|x|^{\gamma_n}) dx.
\end{aligned}
$$

Aplicando mais uma vez o Teorema da divergência como no Lema 2.7, teremos

$$
\begin{aligned}
C_n &= -\int_{\partial\Omega} \psi_n(u_n+v_n)e^{\alpha_n v_n^2}d\sigma + \int_\Omega \nabla(\psi_n(u_n+v_n)e^{\alpha_n v_n^2}).x|x|^{\gamma_n}dx \\
&= -\int_{\partial\Omega} (\psi_n u_n e^{\alpha_n v_n^2} + \psi_n v_n e^{\alpha_n v_n^2})d\sigma + \int_\Omega \nabla(\psi_n u_n e^{\alpha_n v_n^2}).x|x|^{\gamma_n}dx + \int_\Omega \nabla(\psi_n v_n e^{\alpha_n v_n^2}).x|x|^{\gamma_n}dx.
\end{aligned}
$$

Tendo que $\psi_n \to \psi$ em qualquer $L^p(\Omega)$, pelo Lema 3.6, $v_n e^{\alpha_n u_n^2}, u_n e^{\alpha_n u_n^2} \to \varphi_1$ em qualquer $L^p(\Omega)$ e as duas últimas integrais acima tendem a 0 pelo Lema 2.11, podemos dizer que

$$
C_n \to -2\int_{\partial\Omega} \psi\varphi_1 d\sigma + o(1) = o(1),
$$

onde usamos também (4.7) na última igualdade. Voltando-se agora para D_n, considerando a desigualdade $|e^x - e^y| \leq |x-y|(e^x+e^y)$ teremos

$$
\begin{aligned}
|D_n| &\leq \int_\Omega \frac{u_n^2|e^{\alpha_n u_n^2} - e^{\alpha_n v_n^2}|}{\|u_n - v_n\|}(\gamma_n+2)|x|^{\gamma_n}dx \\
&\leq \alpha_n \int_\Omega \frac{u_n^2|u_n^2 - v_n^2|(e^{\alpha_n u_n^2} + e^{\alpha_n v_n^2})}{\|u_n - v_n\|}(\gamma_n+2)|x|^{\gamma_n}dx \\
&\leq \alpha_n \int_\Omega \frac{u_n^2(u_n - v_n)(u_n+v_n)}{\|u_n - v_n\|}\mathrm{div}(x|x|^{\gamma_n})dx \\
&\leq \alpha_n \int_\Omega u_n^2\psi_n(u_n+v_n)(e^{\alpha_n u_n^2} + e^{\alpha_n v_n^2})\mathrm{div}(x|x|^{\gamma_n})dx.
\end{aligned}
$$

Usando o Teorema da divergência como em C_n teremos

$$
\begin{aligned}
|D_n| &\leq \alpha_n \int_{\partial\Omega} u_n^2\psi_n(u_n+v_n)(e^{\alpha_n u_n^2} + e^{\alpha_n v_n^2})d\sigma - \alpha_n\int_\Omega \nabla(u_n^2\psi_n(u_n+v_n)(e^{\alpha_n u_n^2} + e^{\alpha_n v_n^2})).x|x|^{\gamma_n}dx \\
&= \alpha_n(I_1 - I_2).
\end{aligned}
$$

Note então que

$$
I_1 = \int_{\partial\Omega} \psi_n u_n^3 e^{\alpha_n u_n^2}d\sigma + \int_{\partial\Omega} \psi_n u_n^3 e^{\alpha_n v_n^2}d\sigma + \int_{\partial\Omega} \psi_n v_n u_n^2 e^{\alpha_n v_n^2}d\sigma + \int_{\partial\Omega} \psi_n v_n u_n^2 e^{\alpha_n u_n^2}d\sigma,
$$

usando o Lema 3.6 juntamente com o fato de que ψ_n e v_n convergem em qualquer $L^p(\Omega)$ teremos a convergência em todas integrais acima. Com respeito a I_2, considere o seguinte termo que faz parte de I_2

$$
I = \int_\Omega \nabla(u_n^2\psi_n v_n e^{\alpha_n u_n^2}).x|x|^{\gamma_n}dx.
$$

Se distribuirmos os termos de I_2 notaremos que teremos uma soma de termos semelhantes a I de forma que o raciocínio usado para provar que I tende a 0 quando $n \to \infty$ servirá para os outros termos também.

$$\begin{aligned}I &= \int_\Omega (\nabla(\psi_n v_n) u_n^2 e^{\alpha_n u_n^2} + \nabla(u_n^2 e^{\alpha_n u_n^2})\psi_n v_n).x|x|^{\gamma_n} dx \\ &= \int_\Omega v_n u_n^2 \nabla\psi_n.x|x|^{\gamma_n} dx + \int_\Omega u_n^2 \psi_n \nabla v_n.x|x|^{\gamma_n} dx + \int_\Omega \nabla(u_n^2 e^{\alpha_n u_n^2})\psi_n v_n.x|x|^{\gamma_n} dx \\ &= A + B + C.\end{aligned}$$

Como $\alpha_n \to 0$ quando $n \to \infty$ podemos considerar que n seja suficientemente grande para que $10\alpha_n < 2\pi$. Em relação ao termo A, pela desigualdade de Hölder generalizada teremos

$$\begin{aligned}|A| &\leq \|v_n\|_8 \|u_n^2\|_8 \|e^{\alpha_n u_n^2}\|_8 \|\nabla\psi_n\|_2 \||x|^{\gamma_n+1}\|_8 \\ &\leq K\||x|^{\gamma_n+1}\|_8 \to 0,\end{aligned}$$

onde, na segunda desigualdade, a limitação do terceiro termo é dada pelo Teorema 1.4 e os outros são limitados em $H^1(\Omega)$ que está imerso em $L^8(\Omega)$. De forma análoga, o termo B tende a 0. No termo C teremos

$$\begin{aligned}C &= \int_\Omega \psi_n v_n (2u_n \nabla u_n e^{\alpha_n u_n^2} + 2\alpha_n u_n^3 \nabla u_n e^{\alpha_n u_n^2}).x|x|^{\gamma_n} dx \\ &= 2\int_\Omega \psi_n v_n u_n \nabla u_n e^{\alpha_n u_n^2} dx + 2\alpha_n \int_\Omega \psi_n v_n u_n^2 \nabla u_n e^{\alpha_n u_n^2}.x|x|^{\gamma_n} dx.\end{aligned}$$

Um raciocínio análogo ao usado em A só que usando a norma de $L^{10}(\Omega)$ conclui que C tende a 0. Dessa forma, sendo I_1 limitada e $I_2 = o(1)$, como $\alpha_n \to 0$, teremos $|D_n| \to 0$ e, portanto $A_n \to 0$. Mostremos agora que

$$B_n \to -\lambda_1 \int_{\partial\Omega} \psi\phi d\sigma.$$

Somando e subtraindo o termo $u_n e^{\alpha_n v_n^2}$ dentro da integral e usando o Lema 4.5 em

$$B_n = \frac{\lambda(v_n)}{\|u_n - v_n\|} \int_\Omega (v_n e^{\alpha_n v_n^2} - u_n e^{\alpha_n u_n^2})|x|^{\gamma_n} \phi dx,$$

teremos

$$\begin{aligned}B_n &= \frac{\lambda(v_n)}{\|u_n - v_n\|}\frac{(\gamma_n+2)}{(\gamma_n+2)}\left[\int_\Omega (v_n - u_n)e^{\alpha_n v_n^2}|x|^{\gamma_n}\phi dx - \int_\Omega u_n(e^{\alpha_n u_n^2} - e^{\alpha_n v_n^2})|x|^{\gamma_n}\phi dx\right] \\ &= \frac{(\lambda_1 + o(1))(\gamma_n+2)}{\|u_n - v_n\|}\left[\int_\Omega (v_n - u_n)e^{\alpha_n v_n^2}|x|^{\gamma_n}\phi dx - \int_\Omega u_n(e^{\alpha_n u_n^2} - e^{\alpha_n v_n^2})|x|^{\gamma_n}\phi dx\right] \\ &= -(\lambda_1 + o(1))\left[\int_\Omega \psi_n e^{\alpha_n v_n^2}(\gamma_n+2)|x|^{\gamma_n}\phi dx + \int_\Omega \frac{u_n(e^{\alpha_n u_n^2} - e^{\alpha_n v_n^2})}{\|u_n - v_n\|}(\gamma_n+2)|x|^{\gamma_n}\phi dx\right] \\ &:= -(\lambda_1 + o(1))(E_n + F_n).\end{aligned}$$

Argumentando de forma semelhante a termos anteriores teremos

$$\begin{aligned} E_n &= \int_\Omega \psi_n e^{\alpha_n v_n^2} \phi \operatorname{div}(x|x|^{\gamma_n}) dx \\ &= \int_{\partial\Omega} \psi_n e^{\alpha_n v_n^2} \phi d\sigma - \int_\Omega \nabla(\psi_n e^{\alpha_n v_n^2} \phi).x|x|^{\gamma_n} dx \\ &= \int_{\partial\Omega} \psi\phi d\sigma + o(1). \end{aligned}$$

De forma análoga ao termo D_n, temos que $F_n \to 0$. Logo, $B_n \to -\lambda_1 \int_{\partial\Omega} \psi\phi d\sigma$ para toda $\phi \in H^1(\Omega)$ e, portanto,

$$\langle \psi_n, \phi \rangle \to \lambda_1 \int_{\partial\Omega} \psi\phi d\sigma \quad \forall \phi \in H^1(\Omega).$$

Note que todos os argumentos permanecem válidos caso se troque ϕ por w_n e nesse caso teremos

$$\langle \psi_n, w_n \rangle \to \lambda_1 \int_{\partial\Omega} \psi w d\sigma.$$

□

Lema 4.7. Suponha que $\alpha_n \to 0$ e $\gamma_n \to +\infty$ quando $n \to \infty$ e seja

$$\psi := \lim_{n\to\infty} \psi_n.$$

Então ψ não é identicamente nula.

Demonstração. Suponha que $\psi_n \rightharpoonup \psi = 0$, daí, pelo Lema 4.6 teremos

$$1 = \langle \psi_n, \psi_n \rangle \to \lambda_1 \int_{\partial\Omega} \psi^2 d\sigma = 0,$$

um absurdo.

□

O resultado de unicidade de extremal para $S(\alpha, \gamma)$ é estabelecido a seguir.

Teorema 4.8 (Unicidade)**.** *Para α suficientemente pequeno e para todo $\gamma > 0$, o problema*

$$S(\alpha, \gamma) = \sup_{\substack{u \in H^1(\Omega) \\ \|u\| \leq 1}} \int_\Omega (e^{\alpha u^2} - 1)|x|^\gamma dx$$

possui uma única função extremal, a qual portanto é radial.

Demonstração. Suponha que o resultado não ocorre, ou seja, existem sequências $\alpha_n \to 0$, $\gamma_n > 0$ e funções u_n, v_n distintas que realizam $S(\alpha_n, \gamma_n)$. Precisamos considerar dois casos, o caso de

$\gamma_n \to \infty$ e $\gamma_n \to \gamma \geq 0$. Suponha primeiramente que $\gamma_n \to \infty$ e considere novamente

$$\psi_n := \frac{u_n - v_n}{\|u_n - v_n\|}.$$

A menos de subsequência podemos supor que $\psi_n \rightharpoonup \psi$ em $H^1(\Omega)$ e pelo Lema 4.6 temos

$$\langle \psi, \phi \rangle = \lambda_1 \int_{\partial\Omega} \psi\phi d\sigma,$$

para toda $\phi \in H^1(\Omega)$, isto é, ψ é uma autofunção do problema de Steklov associada ao autovalor λ_1, logo, pela Proposição 2.4, existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $\psi = k\varphi_1$, onde k não é nulo pois $\varphi_1 \neq 0$ e, pelo Lema 4.7 ψ também, por outro lado em (4.7) temos que ψ é ortogonal a φ_1, o que nos dá uma contradição. Suponhamos agora que $\gamma_n \to \gamma$. Note que

$$\frac{1}{\alpha_n}\int_\Omega (e^{\alpha_n u^2} - 1)|x|^{\gamma_n} dx \to \int_\Omega u^2 |x|^\gamma dx,$$

para todo $u \in H^1(\Omega)$ com $\|u\| \leq 1$. Temos $|x|^{\gamma_n} \to |x|^\gamma$ em qualquer $L^p(\Omega)$ e, usando a desigualdade $e^x - 1 - x \leq \frac{1}{2}x^2 e^x$, temos também

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{\alpha_n}\int_\Omega (e^{\alpha_n u^2} - 1)dx - \int_\Omega u^2 dx\right| &= \frac{1}{\alpha_n}\left|\int_\Omega (e^{\alpha_n u^2} - 1 - \alpha_n u^2)dx\right| \\ &\leq \frac{\alpha_n}{2}\int_\Omega u^4 e^{\alpha_n u^2} dx \to 0,\end{aligned}$$

já que a última integral acima é limitada pelo Lema 3.6 e $\alpha_n \to 0$. Daí, usando a desigualdade de Hölder

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{\alpha_n}\int_\Omega (e^{\alpha_n u^2} - 1)|x|^{\gamma_n} dx - \int_\Omega u^2|x|^\gamma dx\right| &= \left|\int_\Omega \frac{(e^{\alpha_n u^2} - 1)}{\alpha_n}|x|^{\gamma_n} - u^2|x|^{\gamma_n} + u^2|x|^{\gamma_n} - u^2|x|^\gamma dx\right| \\ &\leq \int_\Omega \left|\frac{e^{\alpha_n u^2} - 1}{\alpha_n} - u^2\right| |x|^{\gamma_n} dx + \int_\Omega u^2(|x|^{\gamma_n} - |x|^\gamma)dx \\ &\leq \int_\Omega \left|\frac{e^{\alpha_n u^2} - 1}{\alpha_n} - u^2\right| dx + \|u^2\|_p \||x|^\gamma - |x|^{\gamma_n}\|_{p'} \to 0.\end{aligned}$$

Denote por λ_γ o primeiro autovalor e por ϕ_γ a primeira autofunção positiva, normalizada em $H^1(\Omega)$ e radial do problema (4.1). Vejamos que se u_n atinge $S(\alpha_n, \gamma_n)$ temos

$$\frac{1}{\alpha_n} S(\alpha_n, \gamma_n) \to \frac{1}{\lambda_\gamma}$$

$$u_n \to \phi_\gamma \;\text{ em } H^1(\Omega).$$

Tomando o supremo com respeito a $\|u\| \leq 1$ em

$$\frac{1}{\alpha_n}\int_\Omega (e^{\alpha_n u^2}-1)|x|^{\gamma_n}dx = \int_\Omega u^2|x|^\gamma dx + o(1)$$

teremos por (4.2)

$$\frac{1}{\alpha_n}S(\alpha_n,\gamma_n) \to \frac{1}{\lambda_\gamma}.$$

$u_n \to \phi_\gamma$ em $H^1(\Omega)$ segue de forma análoga ao Lema 4.4. De forma análoga a feita na equação (4.6), temos

$$\langle \psi, \phi_\gamma\rangle = 0. \tag{4.9}$$

Sendo ϕ_γ autofunção do problema em (4.1) temos $\langle \phi_\gamma, \psi\rangle = \lambda_\gamma \int_\Omega |x|^\gamma \phi_\gamma \psi dx$, logo

$$\int_\Omega |x|^\gamma \phi_\gamma \psi dx = 0. \tag{4.10}$$

Observe também que, como $u_n \to \phi_\gamma$ em $H^1(\Omega)$, pelo Lema 3.6 $u_n^2 e^{\alpha_n u_n^2} \to \phi_\gamma^2$ em $L^2(\Omega)$, logo

$$(\gamma_n+2)\int_\Omega u_n^2 e^{\alpha_n u_n^2}|x|^{\gamma_n}dx \to (\gamma+2)\int_\Omega \phi_\gamma^2|x|^\gamma dx \Rightarrow \frac{\lambda(u_n)}{(\gamma_n+2)} \to \frac{\lambda_\gamma}{(\gamma+2)}. \tag{4.11}$$

Faremos agora algo semelhante ao que foi feito no Lema 4.6 com o objetivo de alcançar uma contradição de forma semelhante ao caso $\gamma_n \to \infty$, porém sem a necessidade do uso repetido do Teorema da divergência já que dessa vez temos $|x|^{\gamma_n} \to |x|^\gamma$ em qualquer $L^p(\Omega)$. Como em (4.8) temos

$$\langle \psi_n, \phi\rangle = \frac{\lambda(u_n)-\lambda(v_n)}{\|u_n-v_n\|}\int_\Omega u_n e^{\alpha_n u_n^2}|x|^{\gamma_n}\phi dx - \frac{\lambda(v_n)}{\|u_n-v_n\|}\int_\Omega (v_n e^{\alpha_n v_n^2} - u_n e^{\alpha_n u_n^2})|x|^{\gamma_n}\phi dx := A_n - B_n.$$

Provaremos que $A_n \to 0$ e que $B_n \to -\lambda_\gamma \int_\Omega |x|^\gamma \psi\phi dx$. Agindo da mesma forma que no Lema 4.6, porém usufruindo agora de (4.11) temos

$$A_n = \left(\frac{(\lambda_\gamma)^2}{(\gamma+2)^2} + o(1)\right)\int_\Omega \frac{(v_n^2 e^{\alpha_n v_n^2} - u_n^2 e^{\alpha_n u_n^2})(\gamma_n+2)|x|^{\gamma_n}}{\|u_n-v_n\|}dx \int_\Omega u_n e^{\alpha_n u_n^2}(\gamma_n+2)|x|^{\gamma_n}\phi dx.$$

Pelo Lema 3.6 $u_n e^{\alpha_n u_n^2} dx \to \phi_\gamma$, em $L^2(\Omega)$ daí, na última integral acima teremos

$$\int_\Omega u_n e^{\alpha_n u_n^2}(\gamma_n+2)|x|^{\gamma_n}\phi dx \to (\gamma+2)\int_\Omega \phi_\gamma \phi |x|^\gamma dx.$$

Para que $A_n \to 0$ basta agora provarmos que a outra integral tende a 0. Para isto escrevamos

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \frac{(v_n^2 e^{\alpha_n v_n^2} - u_n^2 e^{\alpha_n u_n^2})(\gamma_n+2)|x|^{\gamma_n}}{\|u_n - v_n\|} dx &= \int_\Omega \frac{(v_n^2 - u_n^2) e^{\alpha_n v_n^2}(\gamma_n+2)|x|^{\gamma_n} dx}{\|u_n - v_n\|} \\
&- \int_\Omega \frac{u_n^2 (e^{\alpha_n u_n^2} - e^{\alpha v_n^2})(\gamma_n+2)|x|^{\gamma_n}}{\|u_n - v_n\|} dx \\
&= \int_\Omega \frac{(v_n - u_n)(v_n + u_n) e^{\alpha_n v_n^2}(\gamma_n+2)|x|^{\gamma_n} dx}{\|u_n - v_n\|} \\
&- \int_\Omega \frac{u_n^2 (e^{\alpha_n u_n^2} - e^{\alpha v_n^2})(\gamma_n+2)|x|^{\gamma_n}}{\|u_n - v_n\|} dx \\
&= \int_\Omega \psi_n (v_n + u_n) e^{\alpha_n v_n^2}(\gamma_n+2)|x|^{\gamma_n} dx \\
&- \int_\Omega \frac{u_n^2 (e^{\alpha_n u_n^2} - e^{\alpha_n v_n^2})(\gamma_n+2)|x|^{\gamma_n}}{\|u_n - v_n\|} dx \\
&= C_n - D_n.
\end{aligned}$$

Utilizando o Lema 3.6 juntamente com (4.10) teremos

$$C_n \to 2(\gamma+2) \int_\Omega \psi \phi_\gamma |x|^\gamma dx = 0.$$

Utilizando a mesma ideia do termo D_n do Lema 4.6 teremos

$$|D_n| \to 0.$$

Portanto $A_n \to 0$. Vejamos agora que $B_n \to -\lambda_\gamma \int_\Omega |x|^\gamma \psi \phi dx$. Assim como adaptamos A_n do Lema 4.6, teremos para B_n

$$\begin{aligned}
B_n &= -\left(\frac{\lambda_\gamma}{(\gamma+2)} + o(1)\right)\left[\int_\Omega \psi_n e^{\alpha_n v_n^2}(\gamma_n+2)|x|^{\gamma_n}\phi dx + \int_\Omega \frac{u_n (e^{\alpha_n u_n^2} - e^{\alpha_n v_n})(\gamma_n+2)|x|^{\gamma_n}\phi}{\|u_n - v_n\|} dx\right] \\
&= \left(\frac{\lambda_\gamma}{(\gamma+2)} + o(1)\right)(E_n + F_n).
\end{aligned}$$

De forma análoga a $|D_n|$ teremos $|F_n| \to 0$ e

$$E_n = \int_\Omega \psi_n e^{\alpha_n v_n^2}(\gamma_n+2)|x|^{\gamma_n}\phi dx \to (\gamma+2)\int_\Omega \psi\phi|x|^\gamma dx.$$

Logo

$$B_n \to -\lambda_\gamma \int_\Omega \psi\phi|x|^\gamma dx$$

e, portanto,

$$\langle \psi_n, \phi \rangle \to \lambda_\gamma \int_\Omega \psi\phi|x|^\gamma dx.$$

Por outro lado, como $\psi_n \rightharpoonup \psi$, temos $\langle \psi_n, \phi \rangle \to \langle \psi, \phi \rangle$, daí

$$\langle \psi, \phi \rangle = \lambda_\gamma \int_\Omega \psi \phi |x|^\gamma dx,$$

ou seja, ψ é uma autofunção do problema em (4.1) associada ao autovalor λ_γ e, pelo item (2) do Teorema 4.2, temos que ψ é proporcional ao ϕ_γ ao mesmo tempo em que, por (4.9), são ortogonais, como as duas funções são não nulas temos ai uma contradição, finalizando então o caso $\gamma_n \to \gamma$. Portanto, para α suficientemente pequeno, $S(\alpha, \gamma)$ é atingido por uma única função, a qual consequentemente é radial pelo Teorema 1.8.

$\square$

Por fim, o problema de simetria da funções estremais de $S(\alpha, \gamma)$, com α^* suficientemente pequeno e γ^* suficientemente grande, fica graficamente descrito da seguinte forma:

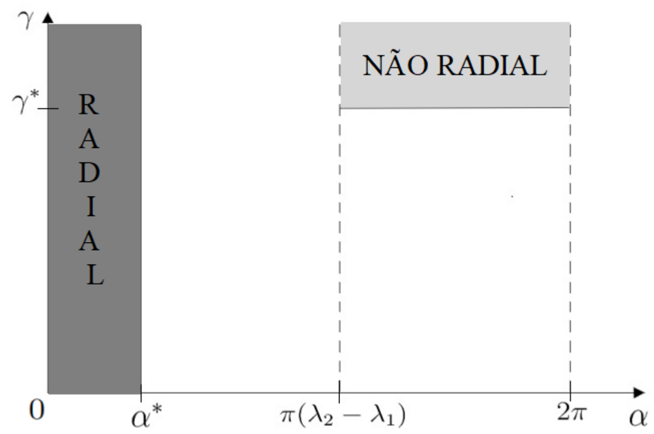

Figura 4.1: Simetria das funções extremais de $S(\alpha, \gamma)$

Apêndice A

Análise funcional

Proposição A.1. Seja X um espaço de Banach, X^* seu dual e (u_n) uma sequência em X. Então

(1) $u_n \rightharpoonup u$ se, e somente se, $f(u_n) \to f(u)$ para todo $f \in X^*$;

(2) se $u_n \to u$, então $u_n \rightharpoonup u$;

(3) se $u_n \rightharpoonup u$, então $\|u_n\|$ é limitada e $\|u\| \leq \liminf \|u_n\|$;

(4) Se $u_n \rightharpoonup u$ e $f_n \to f$ em X^*, então $f_n(u_n) \to f(u)$.

Demonstração. Veja Brezis [6, Proposition 3.5].

□

Proposição A.2. Seja X um espaço normado e $C \subset X$ convexo, então C é fechado na topologia fraca se, e somente se, é fechado na topologia da norma.

Demonstração. Veja [6, Theorem 3.7.].

□

Definição A.1. Seja X um espaço normado. Considere a aplicação $J : X \to X^{**}$ tal que $J(u)(f) = f(u)$, para todo $u \in X$ e todo $f \in X^*$. Esta aplicação é uma isometria e, quando J é sobrejetora, dizemos que X é um espaço reflexivo.

Teorema A.3 (Kakutani)**.** *Um espaço de Banach X é reflexivo se, e somente se, $\{u \in X : \|u\| \leq 1\}$ é compacto na topologia fraca.*

Demonstração. Veja Brezis [6, Theorem 3.17].

□

Teorema A.4. *Em espaços reflexivos, toda sequência limitada possui uma subsequência que converge fracamente.*

Demonstração. Veja Brezis [6, Theorem 3.18].

□

Definição A.2. Um espaço normado X é dito uniformemente convexo se, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\|u\|, \|v\| \leq 1 \quad \text{e} \quad \|u - v\| \geq \varepsilon \Rightarrow \left\| \frac{u+v}{2} \right\| \leq 1 - \delta.$$

Observação A.1. Todo espaço com produto interno é um espaço uniformemente convexo.

Proposição A.5. Seja X um espaço de Banach uniformemente convexo. Se

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{e} \quad \limsup \|u_n\| \leq \|u\|,$$

então $u_n \to u$.

Demonstração. Veja Brezis [6, Proposition 3.32].

□

Definição A.3. Dizemos que um operador linear $T : X \to Y$ é fracamente contínuo se, para toda sequência tal que $x_n \rightharpoonup x$ em X, tem-se $T(u_n) \to T(u)$ em Y.

Definição A.4. Um operador linear contínuo entre espaços normados $T : X \to Y$ é dito compacto se, para todo $A \subset X$ limitado, tem-se $\overline{T(A)}$ compacto.

Observe que, sendo compacto, um operador manda sequências limitadas em sequências que possuem subsequência convergente.

Proposição A.6. Seja $T : X \to Y$ um operador linear contínuo entre espaços normados. Então

(1) se T é compacto, então T é fracamente contínuo;

(2) se X é reflexivo, então T é compacto se, e somente se, é fracamente contínuo.

Demonstração. Veja Botelho et al [4, Proposição 7.2.8].

□

Teorema A.7. *(Representação de Riesz) Seja H um espaço de Hilbert. Dado $f \in H^*$, existe um único $u \in H$ tal que*

$$f(v) = \langle v, u \rangle, \quad \forall v \in H.$$

Além disso,

$$\|f\|_{H^*} = \|u\|.$$

Demonstração. Veja Brezis [6, Theorem 5.5].

□

Observação A.2. Voltemos a atenção rapidamente para dois fatos importantes. Se tivermos $v_n \rightharpoonup v$ em $H^1(\Omega)$, usando as propriedades da convergência fraca juntamente com o Teorema A.7 acima teremos que

$$\langle v_n, w\rangle \to \langle v, w\rangle, \quad \forall w \in H^1(\Omega).$$

Indo mais além, se $v_n \rightharpoonup v$ em $H^1(\Omega)$ e $w_n \to w$ em $H^1(\Omega)$, então teremos $\langle v_n, w_n\rangle \to \langle v, w\rangle$, pois

$$\begin{aligned} |\langle v_n, w_n\rangle - \langle v, w\rangle| &= |\langle v_n, w_n\rangle - \langle v_n, w\rangle + \langle v_n, w\rangle - \langle v, w\rangle| \\ &\leq \|v_n\|\|w_n - w\| + |\langle v_n - v, w\rangle| \\ &\leq C\|w_n - w\| + |\langle v_n - v, w\rangle| \to 0. \end{aligned}$$

Definição A.5. Seja H um espaço de Hilbert e $T : H \to H$ um operador linear contínuo. Chamamos de resolvente de T o conjunto

$$\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{R} : T - \lambda Id : H \to H \ \text{ é uma bijeção}\}.$$

O espectro de T é o conjunto

$$\sigma(T) = \mathbb{R}\backslash\rho(T).$$

O conjunto de autovalores, também chamado de espectro pontual, é dado por

$$\sigma_p(T) = \{\lambda \in \mathbb{R} : Ker(T - \lambda Id) \neq \{0\}\}.$$

Observe que se λ é autovalor, existe $u \in H\backslash\{0\}$ tal que

$$Tu = \lambda u.$$

Teorema A.8. *Seja H um espaço de Hilbert real e $T : H \to H$ um operador compacto. Então*

(1) $0 \in \sigma(T)$;

(2) $\sigma(T)\backslash\{0\} = \sigma_p(T)\backslash\{0\}$;

(3) *Se $\sigma(T)\backslash\{0\}$ é um conjunto infinito, então $\sigma(T)\backslash\{0\} = (\lambda_m)_{m\in\mathbb{N}}$ com $\lambda_m \to 0$.*

Demonstração. Veja Brezis [6, Theorem 6.8.].

□

Teorema A.9. *Seja H um espaço de Hilbert e $T : H \to H$ um operador linear compacto e autoadjunto. Defina*

$$m := \inf_{\|u\|\leq 1} \langle Tu, u\rangle \quad e \quad M := \sup_{\|u\|\leq 1} \langle Tu, u\rangle.$$

Então $m, M \in \sigma(T)$ e $\sigma(T) \subset [m, M]$.

Demonstração. Veja Brezis [6, Proposition 6.9.].

□

Teorema A.10 (Teorema Espectral)**.** *Seja H um espaço de Hilbert separável e T um operador linear compacto autoadjunto. Então existe uma base ortonormal formada por autovetores de T.*

Demonstração. Veja Brezis [6, Theorem 6.11].

□

Definição A.6. Sejam $X \subset Y$ dois espaços normados com $X \subset Y$. Dizemos que X está imerso continuamente em Y se a aplicação identidade $Id : X \to Y$ é um operador linear contínuo, ou seja, se existe $C > 0$ tal que

$$\|v\|_Y \leq C\|u\|_X,$$

para todos $u \in X$ e $v \in Y$. Nesse caso, denotamos $X \hookrightarrow Y$. Se Id for um operador compacto, então dizemos que X está imerso compactamente em Y.

Apêndice B

Espaços L^p e espaços de Sobolev

Definição B.1. Seja $p \in [1, \infty)$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Chamamos de $L^p(\Omega)$ o espaço de Banach das (classes de) funções $u : \Omega \to \mathbb{R}$ mensuráveis tais que $|u|^p$ é integrável em Ω e

$$\|u\|_p = \left(\int_\Omega |u|^p dx \right)^{1/p}.$$

Se $p = \infty$, $L^\infty(\Omega)$ é o espaço de Banach das funções $u : \Omega \to \mathbb{R}$ essencialmente limitadas e

$$\|u\|_\infty = \sup_{x \in \Omega} \text{ess} = \inf\{C \in \mathbb{R} : |u(x)| \leq C \text{ q.t.p. em } \Omega\}.$$

Teorema B.1 (Continuidade absoluta da integral de Lebesgue)**.** *Seja u uma função integrável em Ω. Então, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que*

$$V \subset \Omega \quad e \quad |V| < \delta \Rightarrow \left| \int_V u dx \right| < \varepsilon.$$

Demonstração. Veja Kolmogorov et al [20, p. 294].

□

Teorema B.2 (Desigualdade de Hölder)**.** *Sejam $u \in L^p(\Omega)$ e $v \in L^{p'}(\Omega)$, com $p \in [1, \infty]$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Então,*

$$\int_\Omega |uv| \leq \|u\|_p \|v\|_{p'}.$$

Demonstração. Veja Brezis [6, Theorem 4.6].

□

Teorema B.3 (Desigualdade de Hölder Generalizada)**.** *Sejam $u_1 \in L^{p_1}(\Omega), \ldots, u_k \in L^{p_k}(\Omega)$, com*

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \ldots + \frac{1}{p_k} \leq 1.$$

Se $u = u_1 \dots u_k$, *temos*
$$\|u\|_p \leq \|u_1\|_{p_1} \dots \|u_k\|_{p_k}.$$

Demonstração. Veja Brezis [6, p.118]. □

Teorema B.4 (Teorema da convergência monótona)**.** *Seja* $(u_n) \subset L^1(\Omega)$ *tal que*

(1) $u_1 \leq \dots u_n \leq \dots$ *q.t.p. em* Ω*;*

(2) $\sup_n \int_\Omega u_n < \infty$.

Então $u_n(x)$ *converge q.t.p., digamos para* $u(x)$*, com* $u \in L^1(\Omega)$ *e* $\|u_n - u\|_1 \to 0$.

Demonstração. Veja Kolmogorov et al [20, p.296].

□

Teorema B.5 (Teorema da convergência dominada)**.** *Seja* $(u_n) \subset L^1(\Omega)$ *tal que*

(1) $u_n(x) \to u(x)$ *q.t.p. em* Ω*;*

(2) *existe* $v \in L^1(\Omega)$ *tal que, para todo* n, $|u_n(x)| \leq v(x)$ *q.t.p. em* Ω.

Então $u \in L^1(\Omega)$ *e* $\|u_n - u\|_1 \to 0$.

Demonstração. Veja Kolmogorov et al [20, p.295].

□

Teorema B.6 (Recíproca do Teorema da convergência dominada)**.** *Seja* $(u_n) \subset L^p(\Omega)$ *tal que* $u_n \to u$ *em* $L^p(\Omega)$*. Então existem uma subsequência* u_{n_k} *e uma função* $h \in L^p(\Omega)$ *tais que*

(1) $u_{n_k}(x) \to u(x)$ *q.t.p. em* Ω*;*

(2) $|u_{n_k}(x)| \leq h(x)$ *q.t.p. em* Ω*, para todo* $k \in \mathbb{N}$.

Demonstração. Veja Brezis [6, Theorem 4.9]

□

Definição B.2. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto. O espaço de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ é definido por

$$W^{1,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : \exists g_1, \dots, g_n \in L^p \text{ tais que } \int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = -\int_\Omega g_i \varphi dx \ \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega), \forall i = 1, \dots, n\}.$$

Quando $p = 2$, denotamos
$$H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega).$$

Para $u \in W^{1,p}(\Omega)$, definimos $\frac{\partial u}{\partial x_i} = g_i$, e escrevemos

$$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right).$$

Teorema B.7. *$W^{1,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach, para todo $p \in [1, \infty]$. $W^{1,p}(\Omega)$ é reflexivo, se $p \in (1, \infty)$, e é separável quando $p \in [1, \infty)$.*

No caso $p = 2$, temos que $H^1(\Omega)$ é um espaço de Hilbert reflexivo munido do produto interno

$$\langle u, v \rangle = \int_\Omega uv dx + \int_\Omega \nabla u \nabla v dx. \tag{B.1}$$

Demonstração. Veja Brezis [6, Proposition 9.1.].

□

Observação B.1. Se $(u_n) \subset H^1(\Omega)$ é tal que $u_n \to u$ em $L^2(\Omega)$ e ∇u_n é limitado em $L^2(\Omega)$ então $u \in H^1(\Omega)$(veja Brezis[5]).

Teorema B.8. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado de classe C^1. Se V é um aberto tal que $\overline{\Omega} \subset V$, então existe um operador linear*

$$E : W^{1,p}(\Omega) \to W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$$

tal que, para cada $u \in W^{1,p}(\Omega)$:

(1) *$Eu = u$ q.t.p. em Ω;*

(2) *supp $Eu \subset V$;*

(3) *existe $C = C(p, \Omega, V)$ tal que*

$$\|Eu\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}.$$

Demonstração. Veja Evans [11, p. 254]

□

Teorema B.9 (Rellich-Kondrachov)**.** *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado de classe C^1. Então as seguintes imersões são compactas:*

(1) *se $p < n$, $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, para todo $q \in [1, \frac{np}{n-p})$;*

(2) *se $p = n$, $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, para todo $q \in [1, \infty)$;*

(3) *se $p < n$, $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$, para todo $\alpha \in (0, 1 - n/p)$.*

Demonstração. Veja Furtado [12, Teorema 4.33].

□

O teorema acima é de extrema importância para a teoria dos espaços de Sobolev e das equações diferenciais parciais. Ele gera consequências importantes neste trabalho, no caso $p = n = 2$. Note que, em particular, todas essas imersões são contínuas. Considere então o espaço $H^1(\Omega)$. Se $n = 2$, pela continuidade da imersão (2), temos que

$$\|u\|_p \leq C\|u\|_{H_1},$$

para todo $p \in [1, \infty)$, o que nos diz que limitação em $H^1(\Omega)$ implica em limitação em todo $L^p(\Omega)$.

Teorema B.10 (Traço)**.** *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio limitado de classe C^2, $n \geq 2$ e $p \in [1, \infty)$. Então existe um único operador, $\Gamma : W^{1,p}(\Omega) \to L^q(\partial\Omega)$, chamado operador traço, que é compacto quando*

(1) $p < n$ *e* $1 \leq q < \frac{(n-1)p}{n-p}$ *ou*

(2) $p \geq n$ *e* $q \in [1, \infty)$.

Demonstração. Veja Adams-Fournier [1, 5.36 Theorem].

□

Observação B.2. Combinando os dois teoremas acima com o resultado dado pela Proposição A.6, percebemos que, nas devidas restrições, obter convergência fraca nos espaços de Sobolev nos dá convergência forte em espaços L^p.

Usando a notação de multi-índice para derivada parcial, temos

$$D^\beta u(x) = \frac{\partial^{|\beta|} u(x)}{\partial x_1^{\beta_1} \dots \partial x_n^{\beta_n}},$$

onde $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbb{N}^n$ e $|\beta| = \beta_1 + \dots + \beta_n$.

Definição B.3. Sejam $1 \leq p \leq \infty$ e $k \in \mathbb{N}$. Definimos o espaço de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ como sendo

$$W^{k,p} = \{u \in L^p(\Omega) : D^\beta u \in L^p(\Omega), \quad \text{para todo } \beta \text{ tal que } |\beta| \leq k\}.$$

Lembremos que, nessa definição, $D^\beta u$ denota a derivada no sentido fraco.

Teorema B.11. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto limitado de classe C^1. Se $p \geq 1$ e $0 \leq m < k - \frac{n}{p} < m + 1$, então*

$$W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{m,\beta}(\bar{\Omega}).$$

Demonstração. Veja Gilbarg-Trudinger [14, Theorem 7.26].

□

Definição B.4. Considere $\Omega = B(0,r) \subset \mathbb{R}^n$. O espaço $W^{1,p}_{rad}(\Omega)$ é definido por

$$W^{1,p}_{rad}(\Omega) = \{u \in W^{1,p}(\Omega) : u(R(x)) = u(x), \quad \text{para toda rotação } R\}.$$

Nesse caso, sendo $u \in W^{1,p}(\Omega)$, dizemos que u é radialmente simétrica e seu valor depende apenas da norma do ponto, dessa forma, sendo $|x| = r$, denotamos

$$u(x) = u(|x|) = u(r)$$

e

$$\int_\Omega u(x)dx = \omega_n \int_0^r s^{n-1}u(s)ds,$$

onde ω_n é a medida de S^{n-1}.

O espaço de funções radialmente simétricas de interesse para este trabalho é o espaço $H^1_{rad}(\Omega)$, onde $\Omega = B(0,1) \subset \mathbb{R}^2$. Note que, usando a fórmula acima para integração de funções radialmente simétricas sobre bolas, se $u \in H^1_{rad}(\Omega)$,

$$\|u\|_2^2 = 2\pi \int_0^1 |u(r)|^2 r dr.$$

Além disso, note que,

$$|\nabla u(x)|^2 = |\nabla u(|x|)|^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}(|x|)\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x_2}(|x|)\right)^2,$$

onde

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}(|x|) = \frac{\partial u}{\partial |x|}\frac{\partial |x|}{\partial x_i} = \frac{\partial u}{\partial r}\frac{x_i}{|x|} = u'(r)\frac{x_i}{|x|},$$

logo $|\nabla u(x)|^2 = |u'(r)|^2$, o que nos dá

$$\|\nabla u\|_2^2 = 2\pi \int_0^1 |u'(r)|^2 r dr. \tag{B.2}$$

Apêndice C

Diferenciabilidade em Espaços Normados

Sejam X, Y espaços de normados e $U \subset X$ um aberto.

Definição C.1. Seja $f : U \to Y$ uma função. Dizemos que f possui derivada de Gateaux em $a \in U$, se para todo $h \in X$, existe o limite

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(a+th) - f(a)}{t}.$$

Se isso ocorre em todos os pontos de U, dizemos que f é Gateaux diferenciável.

Definição C.2. Seja $f : U \to Y$. Dizemos que f é Fréchet diferenciável em $a \in U$ se existe $T_a \in \mathcal{L}(X, Y)$ tal que

$$\|f(a+h) - f(a) - T_a(h)\|_Y = o(\|h\|_X),$$

ou, equivalentemente

$$f(a+h) - f(a) - T_a(h) = r(h),$$

onde $\frac{r(h)}{\|h\|_X} \to 0$ quando $\|h\|_X \to 0$. Usaremos a seguinte notação

$$f'(a) = T_a.$$

Note que, se f é Fréchet diferenciável em $a \in U$, então f é Gateaux diferenciável em a e vale

$$f'(a)h = \lim_{t \to 0} \frac{f(a+th) - f(a)}{t}.$$

Definição C.3. Seja $f : U \to Y$ diferenciável em cada $a \in U$. Se a aplicação

$$\begin{array}{rccc} f' : & U & \longrightarrow & \mathcal{L}(X, Y) \\ & a & \longmapsto & f'(a) \end{array}$$

é contínua, dizemos que f é de classe C^1 ou que $f \in C^1(U, F)$.

Proposição C.1. Se $f : U \to \mathbb{R}$ tem derivada de Gateaux contínua, então $f \in C^1(U, \mathbb{R})$.

Demonstração. Veja Willem [34, Proposition 1.3].

□

Definição C.4. Seja $f \in C^1(U, \mathbb{R})$. Dizemos que f tem derivada segunda de Gateaux $f''(a) \in \mathcal{L}_2(X, \mathbb{R})$ se, para todos $h, k \in X$, existe

$$f''(a)(h, k) = \lim_{t \to 0} \frac{(f'(a + th) - f'(a))k}{t}.$$

O conceito de diferenciabilidade se estende naturalmente para a aplicação $f' : U \to X^*$ e $f \in C^2(U, \mathbb{R})$ se $f' \in C^1(U, X^*)$.

Definição C.5. Seja X um espaço de Hilbert e $Q : X \to \mathbb{R}$ uma forma quadrática. Q é dita não degenerada se existe $C > 0$ tal que

$$\|Q'(h)\| \geq C\|h\|,$$

para todo $h \in X$.

Observação C.1. Se uma forma quadrática Q é degenerada, então existe $a \in X \backslash \{0\}$ tal que, para todo $m > 0$

$$\|Q'(a)\| < m\|a\|.$$

Fazendo $m \to 0$ teremos que $Q'(a) = 0$.

Definição C.6. Seja $f \in C^2(U, \mathbb{R})$. Dizemos que um ponto crítico $a \in U$ é não degenerado se a forma quadrática $f''(a)$ é não degenerada.

Proposição C.2. Se $f : U \to \mathbb{R}$ tem derivada segunda de Gateaux, $u \longmapsto f''(u)$, contínua em U, então $f \in C^2(U, \mathbb{R})$.

Demonstração. Veja Willem [34, Proposition 1.6].

□

Teorema C.3 (Fórmula de Taylor)**.** *Seja $f : U \to \mathbb{R}$ diferenciável em U e duas vezes diferenciável em a. Então*

$$f(a + h) - f(a) = f'(a)h + f''(a)(h, h) + r(h),$$

onde $\frac{r(h)}{\|h\|^2} \to 0$ *quando* $\|h\| \to 0$.

Demonstração. Veja Kesavan [19, Theorem 1.2.1]

□

Como consequência do teorema anterior temos o seguinte resultado:

Teorema C.4. *Seja $f : U \subset X \to \mathbb{R}$ diferenciável em U e duas vezes diferenciável em $a \in U$. Se f possui um máximo local em a então, para todo $h \in X$ temos*

$$f''(a)(h,h) \leq 0.$$

Demonstração. Veja Kesavan [19, Theorem 1.4.3]

□

Definição C.7. Seja X um espaço de Banach, $J \in C^1(X, \mathbb{R})$ e um conjunto de vínculo

$$S = \{v \in X : J(v) = 0\}.$$

Suponha que, para todo $v \in S$ tenhamos que $J'(v) \neq 0$. Seja $F \in C^1(X, \mathbb{R})(C^1$ em S ou numa vizinhança de $S)$, dizemos que $c \in \mathbb{R}$ é um valor crítico de F sobre S se existem $u \in S$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ tais que

$$F(u) = c \quad \text{e} \quad J'(u) = \lambda F'(u), \quad \forall\, h \in X.$$

u é um ponto crítico de F sobre S e λ é dito multiplicador de Lagrange para o ponto crítico u. Se X é um espaço de funções, a segunda equação acima corresponderá a uma equação diferencial parcial, e dizemos que $J'(u) = \lambda F'(u)$ é a equação de Euler-Lagrange satisfeita pelo ponto crítico u sobre S.

Teorema C.5 (Multiplicadores de Lagrange)**.** *Seja X espaço de Banach, $J \in C^1(X, \mathbb{R})$ e um conjunto de vínculo $S = \{v \in X : J(v) = 0\}$, onde para todo $u \in S$ temos que $J'(u) \neq 0$. Seja $F \in C^1(X, \mathbb{R})(C^1$ em S ou numa vizinhança de $S)$ e suponhamos que $u_0 \in S$ é tal que $F(u_0) = \sup_{v \in S} F(v)$. Então existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que*

$$J'(u_0) = \lambda F'(u_0).$$

Demonstração. Veja Kavian [18, Proposition 14.3].

□

Teorema C.6 (Multiplicadores de Lagrange Generalizado)**.** *Sejam X um espaço de Banach e $F, G_1, \ldots, G_k \in C^1(X, \mathbb{R})$. Se $y_0 \in X$ for um extremo de F restrito ao conjunto $\bigcap_{i=1}^{k} G_i^{-1}(G_i(y_0))$, então uma das alternativas ocorre:*

(1) $\det A(v_1, \ldots, v_k) = 0$*, para quaisquer* $v_1, \ldots, v_k \in X$*, onde*

$$A(v_1, \ldots, v_k) = \begin{bmatrix} G_1'(y_0)(v_1) & G_1'(y_0)(v_2) & \cdots & G_1'(y_0)(v_k) \\ G_2'(y_0)(v_1) & G_2'(y_0)(v_2) & \cdots & G_2'(y_0)(v_k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_k'(y_0)(v_1) & G_k'(y_0)(v_2) & \cdots & G_k'(y_0)(v_k) \end{bmatrix}.$$

(2) Existem $\mu_i \in \mathbb{R}$*,* $i = 1, \ldots, k$*, tais que* $F'(y_0).v = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \mu_i G_i'(y_0).v$*, para todo* $v \in X$*.*

Demonstração. Veja Soares [31, Teorema 2.3.1.]

□

Apêndice D

Resultado de Regularidade

Em todos os resultados abaixo considere $\Omega = B_1 \subset \mathbb{R}^2$.

Lema D.1. Seja $u \in H^1(\Omega)$ uma solução de

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x), & \text{em} \quad \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = g(x), & \text{sobre} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{D.1}$$

Se $f \in L^p(\Omega)$ e $g \in W^{1,p}(\Omega)$, com $p \in (1, \infty)$ então $u \in W^{2,p}(\Omega)$ e

$$\|u\|_{W^{2,p}(\Omega)} \leq C(\|f\|_p + \|g\|_{W^{1,p}(\Omega)}).$$

Demonstração. Veja Wang [33, Lemma 5.2]. □

Lema D.2. Seja $u \in H^1(\Omega)$ uma solução fraca do problema

$$\begin{cases} -\Delta u = h(x), & \text{em} \quad \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = g(x), & \text{sobre} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{D.2}$$

Se $h \in L^p(\Omega)$ e $g \in W^{1,p}(\Omega)$ com $p \in (1, \infty)$ então $u \in C^{1,\beta}(\bar{\Omega})$.

Demonstração. Pelo Lema D.1, temos que $u \in W^{2,p}(\Omega)$. Pelo Teorema B.11, temos que

$$W^{2,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{1,\beta}(\bar{\Omega}),$$

para algum $\beta > 0$. □

Lema D.3. Suponha que $u \in H^1(\Omega)$ é uma solução de

$$\begin{cases} -\Delta u = h(x), & \text{em} \quad \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0, & \text{sobre} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{D.3}$$

Se $h \in C^{\beta}(\Omega)$, então $u \in C^{2,\beta}(\Omega)$.

Demonstração. Veja Gilbarg-Trudinger [14]. $\square$

Lema D.4. Seja $u \in H^1(\Omega)$ uma solução de

$$\begin{cases} -\Delta u = h(x), & \text{em} \quad \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = g(x), & \text{sobre} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{D.4}$$

Se $h \in C^\beta(\Omega)$ e $g \in W^{1,p}(\Omega)$, então $u \in C^{2,\beta}(\Omega)$.

Demonstração. Veja Gilbarg-Trudinger[14]

$\square$

Lema D.5. Suponha que $\gamma \geq 1$ e seja $u \in H^1(\Omega)$ uma solução de

$$\begin{cases} -\Delta u = |x|^\gamma f(x), & \text{em} \quad \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0, & \text{sobre} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{D.5}$$

Se $f \in C^\alpha(\Omega)$, então $u \in C^{2,\alpha}(\Omega)$.

Demonstração. Veja Gilbarg-Trudinger [14]. $\square$

Apêndice E

Outros resultados auxiliares

Teorema E.1 (Princípio do Máximo Forte)**.** *Seja $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ tal que $-\Delta u + u \geq 0$. Se u possui um ponto de máximo em Ω, então u é constante.*

Demonstração. Veja Furtado [12, Teorema 3.9]. □

Teorema E.2 (Lema de Hopf)**.** *Seja $u \in C^2(\Omega)$ tal que $u > 0$ em Ω e $-\Delta u + u \geq 0$. Se $x_0 \in \partial\Omega$ é tal que $u(x_0) = 0$, com u contínua em x_0, então*

$$\frac{\partial u}{\partial \eta}(x_0) < 0.$$

Demonstração. Veja Furtado [12, Lema 3.7]

□

Teorema E.3 (Teorema da divergência)**.** *Seja $F = (F_1, F_2) : \Omega \to \mathbb{R}^2$ tal que $F_i \in C^1(\bar{\Omega})$. Então*

$$\int_\Omega div(F)dx = \int_{\partial\Omega} F.\eta d\sigma,$$

onde η denota o vetor normal unitário exterior em cada ponto de $\partial\Omega$.

Demonstração. Veja Evans [11, Theorem 1 p. 627]. □

Observação E.1. Note que o Teorema da divergência é válido ainda se as funções coordenadas estiverem no espaço de Sobolev $H^1(\Omega)$. De fato, suponha que $F_i \in H^1(\Omega)$. Por Evans[11, Theorem 3, p.252] podemos dizer que existem sequências $(F_n^i)_n \subset C^\infty(\bar{\Omega})$ tais que $F_n^i \to F_i$ em $H^1(\Omega)$. Considerando $F_n = (F_n^1, F_n^2)$, pelo Teorema da divergência temos

$$\int_\Omega div(F_n)dx = \int_{\partial\Omega} F_n.\eta d\sigma.$$

Pela convergência em $H^1(\Omega)$, as derivadas parciais das funções coordenadas de F_n convergem para as derivadas fracas de F_i em $L^2(\Omega)$ e, pela compacidade da imersão no traço, $F_n^i \to F_i$ em $L^2(\partial\Omega)$.

Logo, fazendo $n \to \infty$ na igualdade acima, teremos

$$\int_\Omega div(F)dx = \int_{\partial\Omega} F.\eta d\sigma.$$

Teorema E.4 (Identidade de Green)**.** *Sejam* $u, v \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$*. Então*

$$\int_\Omega \Delta u.vdx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta} vd\sigma - \int_\Omega \nabla u \nabla vdx.$$

Demonstração. Veja Evans [11, Theorema 3 p. 628].

□

Observação E.2. Vejamos que se $u \in C^2(\Omega)$ e $v \in H^1(\Omega)$, a Identidade de Green ainda funciona. Assim como na Observação E.1, podemos tomar $(v_n) \subset C^\infty(\bar{\Omega})$ tal que $v_n \to v$ em $H^1(\Omega)$. Pela Identidade de Green, teríamos então

$$\int_\Omega \Delta u.v_n dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta} v_n d\sigma - \int_\Omega \nabla u \nabla v_n dx.$$

Como $H^1(\Omega)$ está imerso compactamente em $L^2(\Omega)$ e $L^2(\partial\Omega)$, fazendo $n \to \infty$, teremos

$$\int_\Omega \Delta u.vdx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta} vd\sigma - \int_\Omega \nabla u \nabla vdx.$$

Teorema E.5 (Lema de Du Bois Reymond)**.** *Seja u integrável. Se*

$$\int_\Omega u\phi dx = 0,$$

para toda $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$*, então* $u = 0$ *q.t.p. em* Ω*.*

Demonstração. Veja Medeiros-Miranda [23, Proposição 1.3.1].

□

Referências Bibliográficas

[1] Adams, R. A.; Fournier, J. J., *Sobolev spaces*. Elsevier, 2003. 81

[2] Adimurthi; Yadava, S. L., *Critical exponent problem in* $\mathbb{R}^2$ *with Neumann boundary condition.* Comm. Partial Differential Equations **15** (1990), 461-501. 7

[3] Bonheure, D.; Serra, E; Tarallo, M., *Symmetry of extremal functions in Moser-Trudinger inequalities and a Hénon type problem in dimension two.* Advances in Differential Equations, **13** (2008), 105-138. 2, 39

[4] Botelho, G.; Pellegrino, D.; Teixeira, E., *Fundamentos de análise funcional.* SBM, 2012. 75

[5] Brezis, H., *Analyse fonctionnelle.* Masson, Paris 1982. 80

[6] Brezis, H., *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations.* Springer Science and Business Media, 2010. 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80

[7] Calanchi, M.; Terraneo, E., *Non-radial Maximizers For Functionals With Exponential Non-linearity in* $\mathbb{R}^2$. Advanced Nonlinear Studies **5** (2005), 337-350.

[8] De Figueiredo, D.; do Ó, J.M.; dos Santos, E. *Trudinger-Moser inequalities involving fast growth and weights with strong vanishing at zero.* Proceedings of the American Mathematical Society **144** (2016), 3369-3380.

[9] Do Ó, J. M., Medeiros, E.,Severo, U. *A nonhomogeneous elliptic problem involving critical growth in dimension two.* Journal of Mathematical Analysis and Applications, **1** (2008), 286–304.

[10] Dutra, L. P., *Existência e multiplicidade de soluções fracas para equações diferenciais parciais com não linearidade de fronteira.* 2017. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal de Santa Maria. 27

[11] Evans, L. C., *Partial differential equations.* American Mathematical Soc., 2010. 80, 89, 90

[12] Furtado, M. *Notas de EDP2.* 2012. 80, 89

[13] Gazzini, M.; Serra, E., *The Neumann problem for the Hénon equation, trace inequalities and Steklov eigenvalues.* In Annales de l'Institut Henri Poincaré Non Linear Analysis, **25** (2008), 281-302. 2, 3, 56

[14] Gilbarg, D.; Trudinger, N. S., *Elliptic partial differential equations of second order.* Springer, 2015. 81, 88

[15] Hénon, M. *Numerical experiments on the stability of spherical stellar systems.* Astronomy and astrophysics, **24** (1973), 229. 2

[16] Jonas, J. S. C., *Soluções radiais e não radiais para a Equação de Hénon na bola unitária.* 2010. Universidade Federal de Campina Grande. 56

[17] Jost, J., *Partial differential equations.* 2013. 52

[18] Kavian, O., *Introduction à la théorie des points critiques et applications aux problèmes elliptiques.* Springer, 1993. 85

[19] Kesavan, S., *Nonlinear functional analysis: a first course.* Springer, 2004. 84, 85

[20] Kolmogorov, A. N.; Fomine, S.V., *Eléments de la théorie des fonctions et de l'analyse fonctionnelle.* Editions Mir, 1974. 78, 79

[21] Li, Y.; Liu, P., *A Moser-Trudinger inequality on the boundary of a compact Riemann surface.* Mathematische Zeitschrift, **250** (2005), 363-386. 11

[22] Martínez, S. ; Rossi, J. D., *Isolation and simplicity for the first eigenvalue of the p-Laplacian with a nonlinear boundary condition.* Abstract and Applied Analysis. Hindawi, (2002) 287-293. 24, 39

[23] Medeiros, L. A.; Miranda, M. M., *Espaços de Sobolev e Iniciação aos Problemas Elípticos não Homogêneos*, IM-UFRJ, 2000. 90

[24] Moser, J., *A sharp form of an inequality by N. Trudinger.* Indiana University Mathematics Journal, **20** (1971), 1077-1092. 2, 6

[25] Ni, W. M., *A nonlinear Dirichlet problem on the unit ball and its applications.* Indiana University Mathematics Journal, **31** (1982), 801-807. 3

[26] Pohozaev, S. I., *The Sobolev embedding in the case $pl = n$.* Proceedings of the technical scientific conference on advances of scientific research, (1964), 158-170. 2

[27] Rothe, E. H., *Morse theory in Hilbert space.* The Rocky Mountain Journal of Mathematics, **3** (1973), 251-274.

[28] Secchi, S.; Serra, E., *Symmetry breaking results for problems with exponential growth in the unit disk.* Communications in Contemporary Mathematics **8** (2006), 823–839. 2

[29] Serra, E. *Non radial positive solutions for the Hénon equation with critical growth.* Calculus of Variations and Partial Differential Equations, **23** (2005), 301-326. 2, 56

[30] Smets, D.; Willem, M.; Su, J., *Non-radial ground states for the Hénon equation.* Communications in Contemporary Mathematics, **4** (2002), 467-480. 2, 56

[31] Soares, R. O., *Cálculo Variacional com Aplicação ao Problema de Sturm-Liouville.* 2016. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal de Pernambuco. 86

[32] Trudinger, N.S., *On the embedding into Orlicz spaces and some aplications.* J. Math. Mech, **17** (1967), 473-484. 2

[33] Wang, X. J., *Neumann problems of semilinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents.* Journal of Differential equations, **93** (1991), 283-310. 87

[34] Willem, M., *Minimax theorems.* Springer Science and Business Media, 1997. 84

[35] Yang, Y., *Moser–Trudinger trace inequalities on a compact Riemannian surface with boundary.* Pacific journal of mathematics, **227** (2006) 177-200. 11

[36] Yang, Y., *Extremal functions for Moser–Trudinger inequalities on 2-dimensional compact Riemannian manifolds with boundary.* International Journal of Mathematics, **17** (2006), 313-330. 9

[37] Yudovich, V. I., *Some estimates connected with integral operators and with solutions of elliptic equations.* Doklady Akademii Nauk, **138** (1961), 805-808. 2