

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Formulações da Massa ADM e Gráficos com Bordo Não Compacto

Victor Camillo Batista Pinheiro

JOÃO PESSOA – PB
JULHO DE 2020

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Formulações da Massa ADM e Gráficos com Bordo Não Compacto

por

Victor Camillo Batista Pinheiro

sob a orientação do

Prof. Dr. Allan George de Carvalho Freitas

João Pessoa – PB
Julho de 2020

Catalogação na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

P654f Pinheiro, Victor Camillo Batista.

Formulações da massa ADM e gráficos com bordo não compacto / Victor Camillo Batista Pinheiro. - João Pessoa, 2020.
116 f.

Orientação: Allan George de Carvalho Freitas.
Dissertação (Mestrado) - UFPB/CCEN.

1. Matemática. 2. Variedades assintoticamente planas.
3. Massa ADM. 4. Tensor de Einstein. 5. Desigualdade de Penrose. 6. Gráficos. I. Freitas, Allan George de Carvalho. II. Título.

UFPB/BC

CDU 51 (043)

Formulações da Massa ADM e Gráficos com Bordo Não Compacto

por

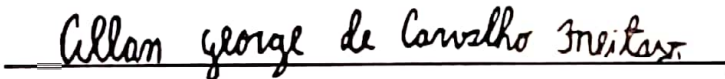
Victor Camillo Batista Pinheiro ¹

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Paraíba como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

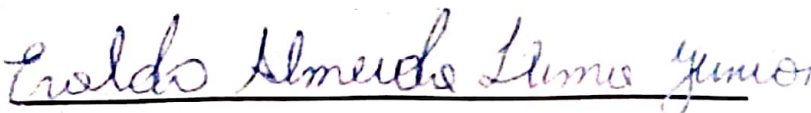
Área de Concentração: GEOMETRIA

Aprovada em 28 de julho de 2020.

Banca Examinadora:


Prof. Dr. Allan George de Carvalho Freitas – UFPB
(Orientador)


Prof. Dr. Sérgio de Moura Almaraz – UFF
(Examinador Externo)


Prof. Dr. Eraldo Almeida Lima Júnior – UFPB
(Examinador Interno)

¹O autor foi bolsista do(a) CAPES durante a elaboração desta dissertação.

*Dedico este trabalho aos
meus pais.*

Agradecimentos

Acima de tudo, a Deus por sua graça infinita.

Aos meus pais e irmãos por me apoiarem e estarem sempre dispostos a me ajudarem.

Ao meu orientador, Professor Dr. Allan George de Carvalho Freitas, pelos conselhos, pelo incentivo e pela atenção dedicada.

Aos professores que participaram da banca examinadora por contribuírem com seus conhecimentos.

Ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFPB por ter me concedido esta oportunidade.

Ao pessoal do mestrado e doutorado pelo companheirismo e momentos que estudamos juntos.

Aos professores de graduação pelos ensinamentos que foram de fundamental importância para minha formação.

Aos meus amigos da graduação, tanto da Física quanto da Matemática, pelo carinho e afeição que construímos ao longo desta jornada acadêmica.

Por fim, à minha querida noiva, Priscila, pela paciência, carinho e compreensão, sobretudo durante minhas preocupações e renúncias.

Resumo

A primeira parte deste trabalho consiste em demonstrar que a massa ADM de uma variedade assintoticamente plana pode ser calculada em termos de um limite assintótico de integrais envolvendo o tensor de Einstein. Para isso, seguimos o método proposto por Herzlich ([31]) que relaciona a análise de Michel ([51]) para invariantes assintóticos e uma fórmula de integração por partes baseada na identidade contraída de Bianchi. Dado o caráter geral desta abordagem, vamos analisar conjuntamente o centro de massa e, logo em seguida, um conceito de massa desenvolvido para variedades assintoticamente hiperbólicas.

Num segundo momento, estudamos as variedades assintoticamente planas que possuem bordo não compacto. Neste contexto, temos uma noção similar de massa desenvolvida por Almaraz, Barbosa e De Lima ([3]) que nos permite adaptar o método anterior para expressar a massa também em termos de tensores geométricos. Para isso, seguiremos o artigo de De Lima, Girão e Montalbán [24]

Por fim, com base no artigo de Barbosa e Meira [8], vamos provar uma versão da Desigualdade de Penrose para hipersuperfícies gráficas com bordo não compacto. Seguindo a ideia original de Lam, expressamos a curvatura escalar como a divergência de um campo vetorial e usamos a desigualdade de Aleksandrov-Fenchel para obter limitantes inferiores das integrais do bordo.

Palavras-chave: variedades assintoticamente planas, massa ADM, tensor de Einstein, desigualdade de Penrose, gráficos.

Abstract

The first part of this work consists of demonstrating that the ADM mass of an asymptotically flat variety can be calculated in terms of a asymptotic limit of integrals involving the Einstein tensor. For this purpose, we follow the method proposed by Herzlich ([31]) that relates Michel's analysis ([51]) for asymptotic invariants and a part-integration formula based on Bianchi's contracted identity. Given the general character of this approach, we will analyze jointly analysing the center of mass and a concept of mass developed for asymptotically hyperbolic manifolds.

In a second moment, we study asymptotically flat varieties with non-compact boundary. In this context, we have a similar notion of ADM mass developed by Almaraz, Barbosa and De Lima ([3]) that allows us to adapt the previous method to express the ADM mass also in terms of geometric tensors. For that, we will follow the article by De Lima, Girão and Montalbán [24].

Finally, based on the article by Barbosa e Meira [8], we prove a version of Penrose Inequality for graphic hypersurfaces with non-compact boundary. Following Lam's original idea, we express scalar curvature as the divergence of a vector field and use the Aleksandrov-Fenchel inequality to obtain lower limits of the boundary integrals.

Keywords: asymptotically flat manifolds, ADM mass, Einstein's tensor, Penrose inequality, graphs.

Sumário

1	Preliminares	9
1.1	Notação e Revisão de Tensores em Variedades	9
1.1.1	Variedades Diferenciáveis e Fibrados Vetoriais	9
1.1.2	Fibrados Tensoriais	11
1.2	Alguns Fundamentos de Geometria Riemanniana	15
1.2.1	Métricas Riemannianas	16
1.2.2	Conexões Lineares	19
1.2.3	Curvatura	22
1.2.4	Operadores Diferenciais	25
1.2.5	Imersões Isométricas	28
1.3	Limites Assintóticos	31
2	Massa ADM via Tensor de Einstein	32
2.1	Variedades Assintoticamente Planas	33
2.2	Massa ADM e Centro de Massa	40
2.3	A Análise de Michel para Invariantes Assintóticos	42
2.4	A Igualdade entre as Duas Versões de Massa	46
2.5	Variedades Assintoticamente Hiperbólicas	57
3	A Massa ABL via Tensor de Einstein e de Newton	61
3.1	Variedades Assintoticamente Planas com Bordo Não Compacto	61
3.2	Existência da Massa ABL	64
3.3	A Massa em Termos dos Tensores de Einstein e Newton	69
4	Gráficos de Funções Assintoticamente Planas	76
4.1	Funções Assintoticamente Planas	76

4.2	Massa Não-Negativa	80
4.3	Desigualdade de Penrose	87
A	Cálculo de Variação	97
	Referências Bibliográficas	105

Introdução

¹ Na teoria da Gravitação Newtoniana, o potencial gravitacional é determinado pela distribuição de matéria de acordo com a equação de Poisson

$$\Delta u = 4\pi\rho, \quad (1)$$

onde ρ é a densidade de massa e escolhemos as unidades de modo que a constante gravitacional G seja 1. Daí, uma vez fornecido o potencial u , podemos aplicar o teorema da Divergência para calcular a massa contida num domínio simplesmente conexo Ω

$$m_\Omega = \int_\Omega \rho \, dV_\Omega = \frac{1}{4\pi} \int_\Omega \Delta u \, dV_\Omega = \frac{1}{4\pi} \int_{\partial\Omega} \langle Du, \nu \rangle \, dV_{\partial\Omega}.$$

Com isso, a massa total do sistema pode ser calculada ao tomarmos o limite da integral acima para $\Omega \uparrow \mathbb{R}^3$.

Fazendo o caminho inverso, supomos que ρ tenha suporte compacto e que tenhamos como condição de fronteira $\lim_{x \rightarrow \infty} u(x) = 0$. Logo, podemos resolver a equação de Poisson usando a conhecida fórmula (veja Evans [26], p. 30)

$$u(x) = - \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho(y)}{|x - y|} dy, \quad (2)$$

onde dy é simplesmente a medida de Lebesgue usual em $\mathbb{R}^3$. Se ρ for vista como uma distribuição, então podemos, como caso particular, representar uma “massa pontual” m em x_0 utilizando a função delta de Dirac, isto é, $\rho(x) = m\delta(x - x_0)$, e recobramos a versão da lei Gravitacional de Newton para massas pontuais, em que o potencial gravitacional criado pela massa m em x_0 é dado por

$$u_{m,x_0}(x) = - \frac{m}{|x - x_0|}.$$

¹ Este texto introdutório se ancora nas ideias e no panorama histórico desenvolvidos nos textos de D. Lee [42], Lam [41] e Hermann e Humbert [30].

De fato, essa é (a menos de um fator constante), a solução fundamental da equação de Laplace.

Agora vamos considerar que o suporte de ρ está contido na região $|x| < r_1$. Pela Equação 1, temos que u é harmônica em $|x| \geq r_1$. Daí, expandindo em harmônicos esféricos (veja D. Lee [42], p. 318), encontramos

$$u(x) = -\frac{m}{|x|} + O_1(|x|^{-2}),$$

para alguma constante m . Assim,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} \rho(x) \, dx &= \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{4\pi} \Delta u \, dx \\ &= \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{S_r^2} \frac{1}{4\pi} \frac{\partial u}{\partial r} \, dV_{S_r^2}^\delta \\ &= \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{S_r^2} \frac{1}{4\pi} \left(\frac{m}{|x|^2} + O(|x|^{-3}) \right) \, dV_{S_r^2}^\delta \\ &= m. \end{aligned}$$

Chamamos a quantidade $m = \int_{\mathbb{R}^3} \rho(x) \, dx$ de massa total do sistema. Pelos cálculos acima, m pode ser interpretada fisicamente da seguinte forma: a maior potência de $u(x)$, para x grande o suficiente, é a mesma do potencial obtido por um ponto de massa m na origem, como na Equação 2. De forma concisa, a massa total nos informa sobre o comportamento assintótico de u e, deste ponto de vista, é mais natural definir a massa total por

$$m := \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{4\pi} \int_{S_r^2} \frac{\partial u}{\partial r} \, dV_{S_r^2}^\delta, \quad (3)$$

e ver o fato $m = \int_{\mathbb{R}^3} \rho(x) \, dx$ como uma consequência.

Em Relatividade Geral, a situação é completamente diferente. O universo é modelado por uma 4-variedade Lorentziana orientada temporalmente $(\mathcal{N}^4, \mathbf{g})$ chamada espaço-tempo, cuja métrica satisfaz a equação de Einstein:

$$\text{Ric}^\mathbf{g} - \frac{1}{2} S^\mathbf{g} \mathbf{g} = 8\pi T, \quad (4)$$

onde T é o tensor energia-momento. A Equação 4 descreve basicamente como a distribuição de matéria e energia no sistema (tensor T) se relaciona com a geometria do espaço-tempo (curvatura). Se supomos que exista uma hipersuperfície de Cauchy M em $\mathcal{N}$, isto é, uma variedade tridimensional do tipo-espaço que intersecta cada curva

causal em apenas um ponto, então dizemos que $\mathcal{N}$ é globalmente hiperbólica e Geroch [27] provou $\mathcal{N}$ é homeomorfo a $\mathbb{R} \times M$ e as hipersuperfícies $M_t := \{t\} \times M$ podem ser vistas como retratos de $\mathcal{N}$ no instante t fixado. Bernal e Sánchez [11] forneceram um resultado mais forte, mostrando que $\mathcal{N}$ é difeomorfo a $\mathbb{R} \times M$. Além disso, Choquet-Bruhat e Geroch [15] mostraram que uma hipersuperfície de Cauchy com determinadas condições iniciais permite reconstruir todo o espaço-tempo, o que confere à Relatividade Geral seu caráter determinístico.

Com esses resultados, podemos fazer um estudo semelhante à análise feita anteriormente para distribuições de massa em regiões limitadas. No contexto da Relatividade Geral consideramos os sistemas gravitacionais isolados, em que preservamos a ideia geral de que o campo gravitacional induzido decresce à medida que aumenta a distância ao sistema e se anula no infinito. Levando isso em conta, é natural impor que a métrica induzida g em uma hipersuperfície de Cauchy $M \subset \mathcal{N}$ se torna Euclidiana no infinito, mais precisamente, que são assintoticamente planas:

Definição 0.1. *Uma hipersuperfície de Cauchy M de $(\mathcal{N}, g)$ é dita assintoticamente plana se existe um subconjunto compacto $K \subset M$ e um difeomorfismo*

$$\Phi : M \setminus K \rightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \overline{B}, \quad p \mapsto (x, y, z),$$

onde B é a bola unitária em $\mathbb{R}^3$, tal que para a restrição de g em TM , g , satisfaz

$$g_{ij} - \delta_{ij} = O_2(r^{-\tau}),$$

onde $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ e δ é a métrica Euclidiana em $\mathbb{R}^3$.

Note que a definição acima é intrínseca e não envolve a métrica Lorentziana g . Dessa forma, introduzimos no Capítulo 2 as variedades assintoticamente planas (Definição 2.1), estudando suas propriedades no contexto exclusivo da Geometria Riemanniana. O exemplo principal dessa classe de variedades é o fim exterior do espaço de Schwarzschild: $(\mathbb{R}^3 \setminus B_{m/2}^3, (1 + \frac{m}{2r})^4 \delta)$ (veja Exemplo 2.2). Em Relatividade Geral, esse espaço modela um buraco negro estático cujo horizonte coincide com o bordo.

Para as variedades assintoticamente planas, existe uma quantidade análoga a massa total vista anteriormente na Gravitação Newtoniana (Equação 3), chamada de massa ADM (Definição 2.3), descoberta (em sua versão tridimensional) na década de 1960 pelos físicos Arnowitt, Deser e Misner [4, 5, 6]. Eles fizeram um estudo detalhado de sistemas gravitacionais isolados, adotando uma formulação Hamiltoniana com uma hipersuperfície de Cauchy como "dado inicial" e escrevendo as equações de evolução de Einstein com vínculo. Também por esse método, o centro de massa (Definição 2.5) foi

introduzido por Regge e Teitelboim [57, 58] e Beig e Ó Murchadha [10].

Agora vamos mostrar uma motivação alternativa para a definição da massa ADM baseada em razões físicas mais simples. Consideremos uma hipersuperfície de Cauchy (M^3, g) sem contribuições da segunda forma fundamental e assintoticamente plana. Novamente, podemos representar a distribuição de matéria como uma função densidade de energia $\rho : M \rightarrow \mathbb{R}$. Com isso, ρ não determina a métrica g , mas funciona como vínculo através da equação:

$$S^g = 16\pi\rho.$$

Ou seja, a curvatura escalar é a densidade de energia, a menos de uma constante, mais precisamente essa equação é equivalente às equações de Einstein com vínculo (veja D. Lee [42], p. 221). Além disso, as condições assintóticas da métrica g servem como condição de fronteira.

Como na Definição 3, temos que a massa deve ser expressa como um fluxo no infinito. Mas a curvatura escalar S^g não pode ser escrita de tal maneira. Para contornar essa dificuldade, utilizamos a linearização de S^g próxima da métrica Euclidiana, que é uma divergência (veja Apêndice A.2). Em outras palavras, S^g é uma divergência mais outros termos de derivadas com ordem maior, informalmente temos

$$S^g \approx DS_\delta(g - \delta).$$

Nesse caso, é razoável definir a massa como a integral de fluxo no infinito que corresponde a essa divergência:

$$\begin{aligned} m(g) &:= \frac{1}{16\pi} \int_{\mathbb{R}^3} DS_\delta(g - \delta) dV_{\mathbb{R}^3}^\delta \\ &= \frac{1}{16\pi} \int_{\mathbb{R}^3} (-\Delta^\delta(\text{tr}_\delta g) + \text{div}^\delta(\text{div}^\delta g)) dV_{\mathbb{R}^3}^\delta \\ &= \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{16\pi} \int_{S_r^2} (\text{div}^\delta g - d(\text{tr}_\delta g))(\nu^\delta) dV_{S_r^2}^\delta \\ &= \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{16\pi} \int_{S_r^2} \sum_{i,j=1}^3 (g_{ij,i} - g_{ii,j}) \frac{x^j}{|x|} dV_{S_r^2}^\delta, \end{aligned} \tag{5}$$

esta é justamente a fórmula da massa ADM para $n = 3$ expressa nas coordenadas assintóticas (Definição 2.3).

Apesar de atender à necessidade de formular um conceito de massa total, a fórmula 5 acima apresenta duas dificuldades:

-
1. Não está claro que o limite dado acima é finito e, se o for, parece depender, à primeira vista, das coordenadas assintóticas em que a métrica é representada;
 2. Por mais que se origine da linearização da curvatura escalar, não temos um sentido geométrico direto.

Com as condições impostas na Definição 2.3, foi provado por Bartnik [9] e, de modo independente, por Chruściel [17] que a massa ADM é um invariante assintótico bem-definido, isto é, o limite 5 existe e não depende da escolha de coordenadas assintóticas. Considerando o segundo problema, é conhecido na literatura que a massa ADM pode ser computada usando o tensor de Einstein $E^g = \text{Ric}^g - \frac{1}{2}S^g g$ (veja Ashtekar-Hansen [7] e Chruściel [18]). Similarmente, Schoen sugeriu um modo intrínseco de definir o centro de massa (cf.[33]), usando novamente o tensor de Einstein. A igualdade entre as duas formulações foi provada via teoremas de densidade por Corvino e Schoen [21], Schoen e Yau [62] e Huang [33, 34], conforme um trabalho prévio de Corvino e Wu [22]. Mais recentemente, Miao e Tam [50] também provaram por uma computação direta em coordenadas.

O capítulo 2 deste trabalho tem como objetivo provar a igualdade entre as duas definições propostas aos dois invariantes: massa ADM e centro de massa. Para isso, nos baseamos no artigo de Herzlich [31], que tem como eixo central a abordagem desenvolvida por Michel para construir invariantes assintóticos [51]. Dado o caráter geral desta análise, aproveitamos para introduzir uma noção de massa para variedades assintoticamente hiperbólicas(2.7). Esta por sua vez, foi definida por Chruściel e Herzlich [19] e independentemente por Wang [65], veja também [32] para uma comparação.

Em 2016, Almaraz, Barbosa e De Lima [3] consideraram variedades Riemannianas com bordo não-compacto. Semelhante ao caso sem bordo, existem, nesse contexto, a noção de variedade assintoticamente plana (Definição 3.1) e um conceito de massa associado (Definição 3.2), que chamaremos de massa ABL. No capítulo 3, seguiremos o artigo de De Lima, Girão e Montalbán [24] a fim de aplicar o método anterior proposto por Herzlich para essa classe de variedades. Com isso, podemos expressar a massa ABL em termos do tensor de Einstein da métrica no interior e do tensor de Newton associado à segunda forma fundamental do bordo.

Existe também um outro problema associado à definição original da massa ADM. Na gravidade Newtoniana, sabemos que a densidade de massa ρ deve ser uma função não-negativa e o teorema da Divergência nos diz que, se ρ é não-negativa e positiva em algum ponto, então a massa total na Definição 3 também é positiva. No nosso modelo relativístico simplificado, como a curvatura escalar é um múltiplo positivo da densidade de energia, temos que é fisicamente plausível esperar o seguinte resultado: se

a curvatura escalar for não-negativa, então a massa ADM também será não-negativa. No entanto, matematicamente, esse problema tem sido um desafio, sendo objeto de pesquisa intensa nos últimos sessenta anos.

O resultado mais notável desses estudos, tanto para a Relatividade Geral quanto por sua importância na Geometria Riemanniana é o famoso teorema da massa positiva, que já tinha sido conjecturado logo depois da formulação da massa ADM em 1961. Como existe uma versão mais geral no contexto da Relatividade Geral, vamos usar o termo Riemanniano para distinguir o teorema a seguir:

Teorema 0.1 (Teorema Riemanniano da Massa Positiva). *Se (M^3, g) é uma variedade assintoticamente plana com curvatura escalar não-negativa e massa ADM, m_{ADM} , então*

$$m_{ADM} \geq 0,$$

com $m_{ADM} = 0$ se e somente se, (M^3, g) é isométrica ao $\mathbb{R}^3$ com a métrica Euclidiana.

Em 1979, Schoen e Yau [61, 62] provaram o teorema acima usando técnicas envolvendo superfícies mínimas e um argumento de estabilidade, e logo perceberam como generalizar o resultado para dimensões $n < 8$ em [60]. Em 1981, Witten [64] deu uma prova alternativa que se aplica a variedades spin de qualquer dimensão. Para dimensões mais altas, o teorema da massa positiva é uma consequência de um resultado envolvendo somas conexas $T^n \# M^n$ de toros n -dimensionais e uma variedade compacta M^n . Tal resultado para dimensões $n > 8$ foi obtido mais recentemente por Schoen e Yau [63] e por uma série de publicações de Lohkamp [45, 46, 47, 48, 49].

Outro resultado importante envolvendo a massa ADM é a desigualdade de Penrose, que pode ser vista como uma generalização do teorema acima na presença de um horizonte aparente (veja D. Lee [42], p. 109, para mais detalhes). Penrose [55] argumentou de forma heurística que a contribuição da massa de um buraco negro deve ser $\sqrt{A/16\pi}$, onde A é a área do horizonte.

Teorema 0.2 (Desigualdade Riemanniana de Penrose, versão 1). *Seja (M^3, g) uma variedade assintoticamente plana com bordo suave e compacto ∂M . Se (M^3, g) tem curvatura escalar não-negativa e que ∂M é um horizonte aparente, então*

$$m_{ADM} \geq \sqrt{\frac{A}{16\pi}},$$

onde A é a área de qualquer componente conexa de ∂M . Além disso, a igualdade ocorre se, e somente se (M^3, g) é isométrica à variedade exterior de Schwarzschild (veja Exemplo 2.2 para mais detalhes).

Em 1977, Jang e Wald [38], com base nas ideias propostas por Geroch [28], forneceram uma prova heurística do Teorema 0.2 acima observando que uma quantidade monótona não decrescente, chamada de massa de Hawking, se aproxima da massa ADM no infinito sob o fluxo da curvatura média inversa. Porém, o argumento deles somente funciona quando o fluxo existe para todo o tempo de forma suave. Em 1997, Huisken e Ilmanen [37] formularam uma versão fraca desse fluxo e provaram sua existência, provando assim o Teorema 0.2.

Em 2001, Bray [13] provou uma versão mais geral, usando um fluxo conforme de métricas: o horizonte agora é êxtero-minimizante (D. Lee [42], p. 109) e A é área total do horizonte.

Teorema 0.3 (Desigualdade Riemanniana de Penrose, versão 2). *Seja (M^3, g) uma variedade assintoticamente plana com curvatura escalar não-negativa e um horizonte minimizante externo com área total A . Então*

$$m_{ADM} \geq \sqrt{\frac{A}{16\pi}},$$

com a igualdade se, e somente se (M^3, g) é isométrica à região exterior do horizonte minimizante externo da variedade de Schwarzschild.

Em [14], Bray e Lee generalizaram a prova deste teorema para dimensões $n \leq 7$, com a hipótese adicional de M ser spin pra a rigidez. Em dimensão n , a desigualdade de Penrose é

$$m_{ADM} \geq \frac{1}{2} \left(\frac{A}{\omega_{n-1}} \right)^{\frac{n-2}{n-1}}.$$

Em 2011, Lam [41] demonstrou de uma maneira simples e elegante uma versão sem rigidez dos teoremas 0.1 e 0.3 para gráficos Euclidianos de codimensão 1. Em 2015, houve duas versões estendidas deste resultado: Mirandola e Vitória [52] generalizaram para gráficos Euclidianos de qualquer codimensão com fibrado normal plano, e De Lima e Girão [23] para qualquer hipersuperfície. Em 2013 e 2015, a rigidez para os resultados obtidos por Lam foi tratada por Huang e Wu [33, 34].

No capítulo 4, vamos provar, para a massa ABL, uma versão sem rigidez do teorema da massa positiva e um tipo de desigualdade de Penrose em hipersuperfícies gráficas com bordo não compacto seguindo as mesmas ideias de Lam [41]. Esses resultados se encontram no artigo de Barbosa e Meira [8], cuja versão do teorema da massa positiva é um caso particular do resultado mais geral provado por Almaraz, Barbosa e De Lima [3]. Mais recentemente, Koerber [40] provou, nesse contexto de variedades com bordo não compacto, a desigualdade de Penrose em dimensão 3.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo, será apresentada uma breve revisão de Geometria Diferencial com a finalidade de assentar notações, terminologias e resultados que serão utilizados ao longo do texto. Teremos como referência básica para os estudos de variedades Riemannianas o livro de J. Lee [44]. Para um maior aprofundamento dos assuntos que abordaremos, também recomendamos ao leitor as referências [25, 43, 54, 56].

1.1 Notação e Revisão de Tensores em Variedades

1.1.1 Variedades Diferenciáveis e Fibrados Vetoriais

Neste texto, assumimos um conhecimento elementar da teoria das variedades diferenciáveis como exposto em Do Carmo [25], cap. 0. Também assumimos que as variedades (com ou sem bordo) são suaves (C^∞), Hausdorff, com base enumerável e conexas. Com isso, uma variedade M de dimensão $n > 0$, ou concisamente uma n -variedade, será denotada por M^n ou simplesmente por M , quando não houver necessidade de explicitar a dimensão. Utilizaremos o termo “diferenciável” para denotar objetos suaves (C^∞), por exemplo o espaço das funções diferenciáveis, $C^\infty(M)$. Escrevemos as coordenadas locais de uma carta (U, Φ) de M , como $(x^1, \dots, x^n)$ ou (x^i) , dependendo do contexto. Denotaremos por $T_p M$ o espaço tangente no ponto $p \in M$ e por $T_p^* M$ o respectivo espaço cotangente.

Se $\overline{M}^{n+k}$ ($k \geq 0$) é uma variedade, uma n -**subvariedade** de $\overline{M}$ é uma variedade M^n junto com uma imersão injetiva $i : M \rightarrow \overline{M}$, isto é, uma aplicação injetiva diferenciável cuja derivada $di_p : T_p M \rightarrow T_{i(p)} \overline{M}$ é injetiva para todo $p \in M$. Identificando M com sua imagem $i(M) \subset \overline{M}$, podemos considerar M como um subconjunto de $\overline{M}$. O mais importante tipo de subvariedade ocorre quando a aplicação i é um mergulho, isto é, além das condições anteriores, i também é um homeomorfismo sobre sua imagem

com a topologia induzida. Neste caso, M é chamada de **subvariedade mergulhada**.

Recordamos que podemos criar uma nova variedade de dimensão $2n$ a partir da união disjunta (indexada) de todos os vetores tangentes de M , conhecida como **fibrado tangente** TM :

$$TM := \bigsqcup_{p \in M} T_p M,$$

Além disso, a projeção usual $\pi : TM \rightarrow M$, $v_p \mapsto p$, nos permite ver TM como um fibrado vetorial, tal como definimos a seguir:

Definição 1.1. *Um **fibrado vetorial k -dimensional** é um par de variedades E (o **espaço total**) e M (a **base**), junto com um mapa sobrejetivo $\pi : E \rightarrow M$ (a **projeção**), satisfazendo as seguintes condições:*

1. *Para todo $p \in M$, o conjunto $E_p = \pi^{-1}(p)$ (**fibra** sobre p) possui uma estrutura de espaço vetorial k -dimensional;*
2. *Para cada $p \in M$, existe uma vizinhança $U \subset M$ de p e uma aplicação diferenciável $\Phi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^k$ (**trivialização local**) tal que:*

- (a) *Para cada $q \in U$, a restrição de Φ a E_q é um isomorfismo linear entre E_q e $\{q\} \times \mathbb{R}^k$;*
- (b) *Se $\pi_U : U \times \mathbb{R}^k$ denota a projeção sobre o primeiro fator, então $\pi = \pi_U \circ \Phi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U$.*

Se $\pi : E \rightarrow M$ é um fibrado vetorial sobre M , uma **seção** de E é uma aplicação diferenciável $\eta : M \rightarrow E$ tal que $\pi \circ \eta = \text{id}_M$. Com isso, temos que um **campo vetorial** diferenciável X de M é uma seção do fibrado tangente TM . Assumiremos a partir de agora que todos os campos vetoriais são diferenciáveis e denotamos o seu conjunto por $\mathfrak{X}(M)$.

Pela mesma construção do fibrado tangente TM , obtemos o **fibrado cotangente**

$$T^*M := \bigsqcup_{p \in M} T_p^*M,$$

que também é um fibrado vetorial n -dimensional, com a projeção usual $\omega_p \mapsto p$. Temos que as seções de T^*M são as **1-formas**, cujo espaço será denotado por $\mathfrak{X}^*(M)$.

Seja $(V_1, \dots, V_n)$ um **referencial local** para TM , isto é, n campos vetoriais definidos em um aberto $W \subset M$ tais que $(V_1|_p, \dots, V_n|_p)$ formam uma base para $T_p M$ para todo $p \in W$. Associado a este referencial temos o **co-referencial dual**, que denotamos por $(\phi^1, \dots, \phi^n)$, onde as 1-formas satisfazem $\phi^i(V_j) = \delta_j^i$. Ao utilizarmos

um sistema de coordenadas locais (x^i) , temos associado ao referencial coordenado (∂_i) , seu co-referencial dual (dx^j) .

1.1.2 Fibrados Tensoriais

Definição 1.2. *Seja M^n uma variedade e fixemos um ponto p de M . Para inteiros $r, s \geq 0$, um **tensor** T de ordem (r, s) em p ou simplesmente um (r, s) -**tensor** em p é uma aplicação $\mathbb{R}$ -multilinear*

$$T : \underbrace{T_p^*M \times \cdots \times T_p^*M}_{(r)} \times \underbrace{T_pM \times \cdots \times T_pM}_{(s)} \rightarrow \mathbb{R}.$$

Observação 1.1. *Denotamos por $T_s^r(T_pM)$ o conjunto dos (r, s) -tensores em p , o qual constitui um $\mathbb{R}$ -espaço vetorial. Quando $s = 0$, dizemos que T é um tensor r -contravariante; já quando $r = 0$, dizemos que T é um tensor s -covariante. Nesses casos, os espaços são denotados por $T^r(T_pM)$ e $T_s(T_pM)$, respectivamente. Com isso, recordamos as identificações: $T^1(T_pM) = (T_pM)^{**} = T_pM$, $T_1(T_pM) = T_p^*M$, e $T_0^0(T_pM) = \mathbb{R}$. Uma identificação menos óbvia é dada por $T_1^1(T_pM) = \text{End}(T_pM)$, o espaço dos endomorfismos lineares de T_pM .*

Semelhante à construção dos fibrados tangente e cotangente, TM e T^*M , respectivamente; podemos construir a partir de $T_s^r(T_pM)$ em cada ponto $p \in M$, os seguintes fibrados vetoriais sobre M :

$$T_s^rM := \bigsqcup_{p \in M} T_s^r(T_pM),$$

por meio da projeção $\pi : T_s^rM \rightarrow M$ que mapeia cada tensor $T \in T_s^r(T_pM)$ em p . T_s^rM é chamado de fibrado tensorial de ordem (r, s) sobre M . Com isso, podemos estender a noção de campos vetoriais para os tensores: um **campo tensorial** T (de ordem (r, s)) é uma seção do fibrado T_s^rM , ou seja, T é uma aplicação diferenciável que associa a cada ponto $p \in M$, um (r, s) -tensor $T_p \in T_s^r(T_pM)$. O conjunto dos campos tensoriais de ordem (r, s) será denotado por $\mathfrak{T}_s^r(M)$. Da mesma forma, $\mathfrak{T}^r(M)$ é o espaço dos campos tensoriais r -contravariantes, e $\mathfrak{T}_s(M)$ é o espaço dos campos tensoriais s -covariantes. Em particular, temos as identificações: $\mathfrak{T}^1(M) = \mathfrak{X}(M)$, $\mathfrak{T}_1(M) = \mathfrak{X}^*(M)$ e $\mathfrak{T}_0^0(M) = C^\infty(M)$.

O espaço $\mathfrak{T}_s^r(M)$ constitui um módulo sobre o anel das funções diferenciáveis $C^\infty(M)$, o que permite associar a cada (r, s) -campo tensorial T , um mapa diferenciável

$$\tau : \underbrace{\mathfrak{X}^*(M) \times \cdots \times \mathfrak{X}^*(M)}_{(r)} \times \underbrace{\mathfrak{X}(M) \times \cdots \times \mathfrak{X}(M)}_{(s)} \rightarrow C^\infty(M),$$

definido por

$$\tau(\omega^1, \dots, \omega^r, X_1, \dots, X_s)(p) = T_p(\omega^1|_p, \dots, \omega^r|_p, X_1|_p, \dots, X_s|_p). \quad (1.1)$$

É fácil verificar que τ é $C^\infty(M)$ -multilinear. Ademais, o valor da função τ num ponto $p \in M$ depende unicamente dos valores das 1-formas ω^j e dos campos vetoriais X_i em p (ver O'Neill [54], pg. 37). A este fato vamos nos referir como o caráter pontual dos campos tensoriais. Aproveitando esta característica e a identificação $T_1^1(T_p M) = \text{End}(T_p M)$ anterior, podemos introduzir o operador traço:

Definição 1.3. *Dado um (r, s) -campo tensorial T com $r, s \geq 1$, o **traço** de T é o $(r-1, s-1)$ -campo tensorial:*

$$\text{tr } T(\omega^1, \dots, \omega^{r-1}, X_1, \dots, X_{s-1}) = \text{tr}(T(\omega^1, \dots, \omega^{r-1}, \cdot, X_1, \dots, X_{s-1}, \cdot)). \quad (1.2)$$

Mais importante ainda é a seguinte propriedade:

Lema 1.1 (Lema de Caracterização dos Tensores). *Um mapa*

$$\tau : \underbrace{\mathfrak{X}^*(M) \times \dots \times \mathfrak{X}^*(M)}_{(r)} \times \underbrace{\mathfrak{X}(M) \times \dots \times \mathfrak{X}(M)}_{(s)} \rightarrow C^\infty(M)$$

é induzido por um (r, s) -campo tensorial como acima se, e somente se é $C^\infty(M)$ -multilinear.

Demonstração. Ver J. Lee [43], p. 318. □

Com esse resultado podemos ver um (r, s) -campo tensorial T como uma aplicação $C^\infty(M)$ -multilinear tal como na Equação 1.1. e, vice-versa, uma aplicação τ como acima também pode ser vista como um (r, s) -tensor.

Por meio dessa identificação podemos introduzir o produto tensorial, isto é, uma operação entre dois campos tensoriais quaisquer da seguinte forma: se $A \in \mathfrak{T}_s^r(M)$ e $B \in \mathfrak{T}_{s'}^{r'}(M)$, definimos

$$A \otimes B : \underbrace{\mathfrak{X}^*(M) \times \dots \times \mathfrak{X}^*(M)}_{(r+r')} \times \underbrace{\mathfrak{X}(M) \times \dots \times \mathfrak{X}(M)}_{(s+s')} \rightarrow C^\infty(M),$$

por

$$\begin{aligned} A \otimes B(\omega^1, \dots, \omega^{r+r'}, X^1, \dots, X^{s+s'}) \\ = A(\omega^1, \dots, \omega^r, X^1, \dots, X^s) B(\omega^{r+1}, \dots, \omega^{r+r'}, X^{s+1}, \dots, X^{s+s'}). \end{aligned}$$

$A \otimes B$ é um $(r + r', s + s')$ -campo tensorial, chamado de produto tensorial de A e B . Evidentemente, $\otimes$ é $C^\infty(M)$ -bilinear e associativo. O produto tensorial permite melhor caracterizar os campos tensoriais com base em um referencial local em M .

Seja $\{V_1, \dots, V_n\}$ um referencial local no aberto $U \subset M$ e seu dual $\{\omega^1, \dots, \omega^n\}$. Logo podemos escrever um (r, s) -campo tensorial T localmente da seguinte forma:

$$T = T_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} V_{i_1} \otimes \dots \otimes V_{i_r} \otimes \omega^{j_1} \otimes \dots \otimes \omega^{j_s},$$

onde $T_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} = T(\omega^{i_1}, \dots, \omega^{i_r}, V_{j_1}, \dots, V_{j_s})$, e o conjunto

$$\{V_{i_1} \otimes \dots \otimes V_{i_r} \otimes \omega^{j_1} \otimes \dots \otimes \omega^{j_s}; i_k = 1, \dots, n \text{ e } j_l = 1, \dots, n\},$$

constitui uma base para $T_s^r(T_p M)$ em cada ponto $p \in U$.

Em particular, se (x^i) é um sistema local de coordenadas, temos que

$$T = T_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} \partial_{i_1} \otimes \dots \otimes \partial_{i_r} \otimes dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_s}$$

Aproveitando o caráter pontual dos campos tensoriais e a identificação $T_1^1(T_p M) = \text{End}(T_p M)$ anterior, podemos introduzir o operador traço:

Definição 1.4. *Dado um (r, s) -campo tensorial T com $r, s \geq 1$, o **traço** de T é o $(r - 1, s - 1)$ -campo tensorial:*

$$\text{tr } T(\omega^1, \dots, \omega^{r-1}, X_1, \dots, X_{s-1}) = \text{tr}(T(\omega^1, \dots, \omega^{r-1}, \cdot, X_1, \dots, X_{s-1}, \cdot)), \quad (1.3)$$

onde tomamos o traço ao identificar $T(\omega^1, \dots, \omega^{r-1}, \cdot, X_1, \dots, X_{s-1}, \cdot)(p)$ com o espaço dos endomorfismos $\text{End}(T_p M)$ em cada ponto $p \in M$. Nas componentes de T com respeito a um referencial local, temos

$$(\text{tr } T)_{j_1 \dots j_{s-1}}^{i_1 \dots i_{r-1}} = T_{j_1 \dots j_{s-1} k}^{i_1 \dots i_{r-1} k}.$$

Agora vamos dar atenção para os campos tensoriais k -covariantes $T \in \mathfrak{T}_k(M)$.

Definição 1.5. *Seja $\phi : M \rightarrow N$, um mapa diferenciável. Se $T \in \mathfrak{T}_k(N)$, com $s \geq 1$, seja*

$$(\phi^* T)(X_1, \dots, X_k) = T(\phi_* X_1, \dots, \phi_* X_k),$$

para todo $X_i \in \mathfrak{X}(M)$. Então $\phi^* T$ é chamado de **pullback** de T por ϕ . Pontualmente temos

$$(\phi^* T)_p(v_1, \dots, v_k) = T_{\phi(p)}(D\phi_p(v_1), \dots, D\phi_p(v_k)),$$

para todo $v_i \in T_p M$ e $p \in M$.

Por computação direta em coordenadas, verifica-se que $\phi^* T$ é um campo tensorial k -covariante em M . No caso especial de um $(0,0)$ -campo tensorial, isto é, uma função $f \in C^\infty(N)$, o pullback de f é definido por $\phi^*(f) = f \circ \phi$.

Distinguimos no espaço $\mathfrak{T}_k(M)$ dois tipos de campos tensoriais:

Definição 1.6. Um campo tensorial k -covariante T é dito **simétrico**, se dados os campos $X_1, \dots, X_k$ e permutação $\sigma \in S_k$, então

$$T(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(k)}) = T(X_1, \dots, X_k).$$

Além disso, dizemos que T é k -alternado ou uma k -forma, quando

$$T(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(k)}) = \text{sgn}(\sigma) T(X_1, \dots, X_k).$$

O espaço dos tensores simétricos será denotado por $\mathcal{S}_k(M)$, e o espaço das k -formas por $\Omega_k(M)$.

No espaço dos campos tensoriais alternados existe um produto $C^\infty(M)$ -bilinear, associativo chamado **produto exterior** definido em 1-formas por

$$\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_k(X_1, \dots, X_k) = \det(\omega^i(X_j)), \quad \forall \omega^i \in \mathfrak{X}^*(M), \forall X_j \in \mathfrak{X}(M),$$

e estendido por linearidade. Além disso, podemos criar campos tensoriais dos dois tipos da definição acima a partir dos seguintes operadores: anti-simetrização:

Definição 1.7. Definimos os operadores de **simetrização** e **anti-simetrização** por

$$\begin{aligned} 1. \quad \mathcal{S} : \mathfrak{T}_k(M) &\rightarrow \mathcal{S}_k(M), \quad \mathcal{S}(T)(X_1, \dots, X_k) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} T(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(k)}); \\ 2. \quad \mathcal{A} : \mathfrak{T}_k(M) &\rightarrow \Omega_k(M), \quad \mathcal{A}(T)(X_1, \dots, X_k) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} \text{sgn}(\sigma) T(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(k)}), \end{aligned}$$

respectivamente.

Observação 1.2. Em particular, para um campo tensorial 2-covariante α , temos que $\alpha = \mathcal{S}(\alpha) + \mathcal{A}(\alpha)$.

Agora introduzimos uma importante derivação de campos vetoriais: a **derivada de Lie**. Para $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, definimos

$$\mathcal{L}_X Y|_p := \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t=0} (D\phi_{-t})_{\phi(p)} Y|_{\phi(p)},$$

onde ϕ_t é o fluxo gerado por X em uma vizinhança de p . Podemos provar que $\mathcal{L}_X Y = [X, Y]$. Mais ainda, podemos estender esta operação pra campos tensoriais covariantes de modo que

1. $\mathcal{L}_X f = X(f), \quad \forall f \in C^\infty(M);$
2. $\mathcal{L}_X T|_p = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\phi_t^* T)_p, \quad \forall T \in \mathfrak{T}_s(M).$

Em particular, estaremos interessados na seguinte expressão da derivada de Lie em campos tensoriais 2-covariantes: dado $\alpha \in \mathfrak{T}_2(M)$, temos

$$(\mathcal{L}_X \alpha)(Y, Z) = X(\alpha(Y, Z)) - \alpha([X, Y], Z) - \alpha(Y, [X, Z]). \quad (1.4)$$

Além disso, temos a seguinte propriedade

Proposição 1.2. *Suponha que M é uma variedade com ou sem bordo e $X \in \mathfrak{X}(M)$ um campo vetorial tal que, se $\partial M \neq \emptyset$, então X é tangente a ∂M . Seja ϕ o fluxo de X . Para qualquer campo tensorial covariante T e qualquer (t_0, p) no domínio de ϕ , temos que*

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=t_0} (\phi_t^* T)_p = (\phi_{t_0}^* (\mathcal{L}_X T))_p.$$

Demonstração. Ver J. Lee [43], p. 324. □

Outra operação em campos tensoriais covariantes que vamos precisar é o **produto interior**: fixado um campo vetorial X , definimos o mapa $\iota_X : \mathfrak{T}_s(M) \rightarrow \mathfrak{T}_{s-1}(M)$, por

$$\iota_X(T)(X_1, \dots, X_{s-1}) = T(X, X_1, \dots, X_{s-1}).$$

1.2 Alguns Fundamentos de Geometria Riemanniana

Para facilitar a compreensão dos conceitos que serão apresentados nesta seção, convencionamos chamar de tensor não só os elementos de um fibrado tensorial sobre uma determinada variedade, como também suas respectivas seções, isto é, os campos tensoriais. Mais precisamente, chamaremos de tensor tanto o campo tensorial quanto seu valor pontual.

1.2.1 Métricas Riemannianas

Nesta parte, vamos introduzir as variedades Riemannianas e derivar algumas propriedades recorrentes, como os isomorfismos musicais e a forma de volume, definidas mais adiante.

Definição 1.8. Uma **variedade Riemanniana** (M^n, g) é uma variedade M munida de um tensor 2-covariante simétrico $g \in \mathcal{S}_2(M)$ tal que, em cada ponto $p \in M$, g_p é um produto interno, isto é

1. $g_p : T_p M \times T_p M$, é $\mathbb{R}$ -bilinear, $\forall p \in M$;
2. $g_p(X, Y) = g_p(Y, X)$ e $g_p(X, X) > 0$, se $X \neq 0$, $\forall X, Y \in T_p M$.

Dizemos que g é uma **métrica Riemanniana**, ou simplesmente uma **métrica** em M . Também denotaremos g por $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana. Se (x^i) é um sistema local de coordenadas no aberto $U \subset M$, temos que g pode ser expresso por

$$g = g_{ij} dx^i \otimes dx^j,$$

tal que $g_{ij} = \langle \partial_i, \partial_j \rangle \in C^\infty(U)$ e $g_{ij} = g_{ji}$, para todo $i, j = 1, \dots, n$.

Além disso, um referencial local $\{E_i\}$ de M é dito **ortonormal**, se $\langle E_i, E_j \rangle = \delta_{ij}$, para todo $i, j = 1, \dots, n$.

A métrica g viabiliza uma identificação natural entre os campos vetoriais $X \in \mathfrak{X}(M)$ e as 1-formas $\omega \in \mathfrak{X}^*(M)$ por meio da aplicação:

$$X \mapsto X^\flat(Y) := \langle X, Y \rangle, \quad \forall Y \in \mathfrak{X}(M).$$

É imediato que $X^\flat$ está unicamente determinada. Também considerarmos a inversa do isomorfismo $^\flat : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}^*(M)$ acima, isto é, a aplicação $^\sharp : \mathfrak{X}^*(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$, dada por

$$\langle \omega^\sharp, Y \rangle = \omega(Y).$$

Essas identificações são conhecidas como **isomorfismos musicais**. Em coordenadas, temos que $X = X^i \partial_i$ e se tomarmos $Y = \partial_j$, então

$$X^\flat(\partial_j) = g(X, \partial_j) = g_{ij} X^i,$$

Logo, as coordenadas da 1-forma $X^\flat = X_i dx^i$ são dadas por

$$X_j := (X^\flat)_j = g_{ij} X^i.$$

Similarmente, dado $\omega = \omega_i dx^i$, então

$$\omega_j = \omega(\partial_j) = \langle \omega^\sharp, \partial_j \rangle = (\omega^\sharp)^i g_{ij}.$$

Logo, as coordenadas do vetor $\omega^\sharp := \omega^i \partial_i$ são dadas por

$$\omega^i = \omega_k g^{ik}.$$

Com isso, também podemos munir de um produto interno cada fibra de T^*M , bastando definir

$$\langle \alpha, \beta \rangle := \langle \alpha^\sharp, \beta^\sharp \rangle, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathfrak{X}^*(M),$$

Aqui também denotamos por $g = \langle \cdot, \cdot \rangle$ a métrica induzida em T^*M . Nas coordenadas (x^i) , temos que $\langle \alpha, \beta \rangle = g^{ij} \alpha_i \beta_j$. Com essa definição é fácil ver que

$$\langle X, Y \rangle = \langle X^\flat, Y^\flat \rangle \quad \text{e} \quad \langle \alpha, \beta \rangle = \langle \alpha^\sharp, \beta^\sharp \rangle.$$

Mais geralmente, dado um tensor s -covariante T , podemos identificá-lo com um $(1, s-1)$ -tensor $\bar{T}$:

$$\langle \bar{T}(Y_1, \dots, Y_{s-1}), Y_s \rangle := T(Y_1, \dots, Y_s). \quad (1.5)$$

Em coordenadas, temos que $\bar{T}_{j_1 \dots j_{s-1}}^i = g^{ik} T_{j_1 \dots j_{s-1} k}$. Daí, podemos estender o operador traço (Definição 1.4) para tensores s -covariantes:

$$\text{tr}_g T := \text{tr } \bar{T}.$$

Em coordenadas, temos que $(\text{tr}_g T)_{j_1 \dots j_{s-1}} = g^{ik} T_{ij_1 \dots j_{s-1} k}$. Ou ainda,

$$(\text{tr}_g T)(X_1, \dots, X_{s-1}) = \sum_{i=1}^n T(e_i, X_1, \dots, X_{s-1}, e_i),$$

onde $\{e_i\}$ é um referencial ortonormal.

Da mesma forma que no fibrado cotangente, podemos munir cada fibra de $T_s(M)$ por um produto interno. Denotando também por g , temos em coordenadas

$$g(T, S) = \langle T, S \rangle := g^{i_1 j_1} \dots g^{i_s j_s} T_{i_1 \dots i_s} S_{j_1 \dots j_s}, \quad \forall T, S \in \mathfrak{T}_s(M). \quad (1.6)$$

Muitas métricas surgem a partir de subvariedades de uma variedade Riemanniana.

Definição 1.9. *Seja $i : M^n \rightarrow \bar{M}^{n+k}$ uma imersão injetiva. Se $\bar{M}$ possui uma métrica*

$\bar{g}$, então a **métrica induzida** g em M é definida por $g = i^*\bar{g}$.

Exemplo 1.1. Se $\psi : (N^{n+k}, g) \longrightarrow M^n$ é uma função diferenciável e $p \in M$ é um valor regular de ψ , isto é, $d\psi_p$ é sobrejetiva para todo $q \in \psi^{-1}(p)$. Nesse caso, sabemos que $\psi^{-1}(p) \subset N$ será uma subvariedade mergulhada em N de dimensão k . Logo podemos dar-lhe a métrica induzida pela inclusão $i : \psi^{-1}(p) \rightarrow N$, isto é, i^*g .

Exemplo 1.2. Outro exemplo importante ocorre quando a variedade Riemanniana (M, g) possui bordo ∂M , que é uma subvariedade mergulhada de dimensão $n - 1$. Da mesma forma, consideramos a métrica induzida pela inclusão.

Definição 1.10. Duas métricas g_1 e g_2 sobre M são ditas **conformes** uma em relação à outra, se existe uma função estritamente positiva $f \in C^\infty(M)$ tal que $g_2 = fg_1$. Duas variedades Riemannianas (M^n, g_M) e (N^n, g_N) são ditas **conformemente equivalentes** se existe um difeomorfismo $\phi : M \longrightarrow N$ tal que ϕ^*g_N é conforme a g_M . Nesse caso, dizemos que ϕ é um **difeomorfismo conforme**. Quando $\phi^*g_N = g_M$, dizemos que (M, g_M) e (N, g_N) são **isométricas** e ϕ é uma **isometria**.

Quando a variedade M^n é orientada, a métrica Riemanniana g permite construir uma n -forma global, denominada **forma de volume**, definida localmente por

$$dV_M := \left(\sqrt{\det G} \right) V^1 \wedge \cdots \wedge V^n,$$

onde $\{V^i\}$ é um co-referencial local de M dual ao referencial orientado $\{V_i\}$, e $G = (g_{ij})$ é a matriz dos coeficientes da métrica nesse referencial, isto é, $g_{ij} = g(V_i, V_j)$. Note que para um referencial ortonormal orientado $\{e_i\}$, temos $dV_M = e^1 \wedge \cdots \wedge e^n$.

A forma de volume dV_M é usada para construir uma medida em M , denominada **medida Riemanniana**. Mais precisamente, os conjuntos mensuráveis em M são formados pela união enumerável daqueles contidos em uma vizinhança coordenada que correspondem aos conjuntos mensuráveis a Lebesgue em $\mathbb{R}^n$ pelo difeomorfismo da carta. Logo, para qualquer conjunto mensurável $U \subset M$, definimos seu **volume** por

$$V(U) := |U| := \int_U dV.$$

Observação 1.3. Se N é uma $(n - 1)$ -subvariedade de M , denotaremos por dV_N a forma de volume definida pela métrica induzida. Se, além de orientada, supomos que M possui bordo ∂M . Então, com a orientação induzida, existe um único campo normal unitário e externo ν sobre o bordo ∂M tal que

$$dV_{\partial M} = \iota_\nu dV_M,$$

onde o lado direito é restrito aos pontos $p \in \partial M$.

Com o produto interno induzido pela métrica g em tensores covariantes (Equação 1.6), podemos associar o **produto interno global** definido por

$$(T, S) := \int_M \langle T, S \rangle dV_M, \quad (1.7)$$

se a integral fizer sentido. Com isso, podemos definir a adjunta de um operador diferencial em tensores covariantes:

Definição 1.11. *Sejam $P : \mathfrak{T}_{s_1}(M) \rightarrow \mathfrak{T}_{s_2}(M)$ e $Q : \mathfrak{T}_{s_2}(M) \rightarrow \mathfrak{T}_{s_1}(M)$ dois operadores diferenciais. Dizemos que Q é a **adjunta formal** ou simplesmente a **adjunta** de P se*

$$\int_M \langle P(T), S \rangle dV_M = \int_M \langle T, Q(S) \rangle dV_M,$$

para todos os tensores com suporte compacto $T \in \mathfrak{T}_{s_1}(M)$ e $S \in \mathfrak{T}_{s_2}(M)$.

1.2.2 Conexões Lineares

Para melhorar a compreensão dos objetos que vamos estudar ao longo do texto, vamos chamar os campos tensoriais também de tensores. No que segue, (M^n, g) é uma variedade Riemanniana.

Definição 1.12. *Uma **conexão linear**, ou simplesmente uma **conexão** ∇ em M é uma aplicação*

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M),$$

denotada por $(X, Y) \xrightarrow{\nabla} \nabla_X Y$, satisfazendo as seguintes propriedades:

1. $\nabla_X Y$ é $C^\infty(M)$ -linear em X :

$$\nabla_{fX_1 + gX_2} Y = f\nabla_{X_1} Y + g\nabla_{X_2} Y, \quad \forall f, g \in C^\infty(M);$$

2. $\nabla_X Y$ é $\mathbb{R}$ -linear em Y :

$$\nabla_X (aY_1 + bY_2) = a\nabla_X Y_1 + b\nabla_X Y_2, \quad \forall a, b \in \mathbb{R};$$

3. $\nabla_X Y$ satisfaz a seguinte regra do produto:

$$\nabla_X (fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y, \quad \forall f \in C^\infty(M).$$

Observação 1.4. *É importante notar que a conexão é um conceito local (veja J. Lee [44], p. 89). Dizemos que $\nabla_X Y$ é a **derivada covariante** de Y na direção de X . No caso de X ser um campo coordenado, isto é, $X = \partial_i$, denotaremos $\nabla_{\partial_i} Y$ por $\nabla_i Y$, e sua j -ésima coordenada por $\nabla_i Y^j$ ou $Y^j_{;i}$.*

Escolhendo um referencial local $\{V_i\}$, podemos computar $\nabla_{V_i} V_j$ em termos do próprio referencial:

$$\nabla_{V_i} V_j = \Gamma_{ij}^k V_k,$$

onde as funções Γ_{ij}^k são chamadas de **símbolos de Christoffel** da conexão ∇ com respeito ao referencial dado.

Dados os campos $X = X^i V_i$, $Y = Y^j V_j$, podemos usar as propriedades da conexão para computar a derivada covariante em termos dos símbolos de Christoffel:

$$\nabla_X Y = X^i V_i(Y^j) V_j + X^i Y^j \nabla_i V_j = (X(Y^k) + X^i Y^j \Gamma_{ij}^k) V_k. \quad (1.8)$$

Uma conexão linear ∇ automaticamente induz conexões nos fibrados tensoriais de M , de tal forma que a derivada covariante ∇_X constitui uma derivação.

Proposição 1.3 (Conexão em Fibrados Tensoriais). *Seja ∇ uma conexão linear em M . Existe uma única conexão em cada fibrado tensorial $T_s^r M$, também denotada por ∇ , tal que as seguintes condições são satisfeitas:*

- (a) *Em TM , ∇ coincide com a conexão dada;*
- (b) *Em $T_0^0 M = C^\infty(M)$, ∇ é dada pela diferenciação ordinária de funções:*

$$\nabla_X f = X(f).$$

- (c) *∇ obedece a seguinte regra com respeito a produtos tensoriais:*

$$\nabla_X (F \otimes G) = \nabla_X F \otimes G + F \otimes \nabla_X G.$$

- (d) *∇ comuta com todas as contrações: se tr denota o traço de qualquer par de índices,*

$$\nabla_X (\text{tr} F) = \text{tr} (\nabla_X F).$$

Essa conexão também satisfaz as seguintes propriedades adicionais:

- (i) *Dados $\omega \in \mathfrak{X}^*(M)$, $Y \in \mathfrak{X}(M)$, temos que*

$$\nabla_X (\omega(Y)) = \omega(\nabla_X Y) + \nabla_X \omega(Y).$$

(ii) Para quaisquer $T \in \mathfrak{T}_s^r(M)$, campos vetoriais Y_i e 1-formas ω^j ,

$$\begin{aligned} \nabla_X T(\omega^1, \dots, \omega^r, Y_1, \dots, Y_s) &= X(T(\omega^1, \dots, \omega^r, Y_1, \dots, Y_s)) \\ &\quad - \sum_{j=1}^r T(\omega^1, \dots, \nabla_X \omega^j, \dots, \omega^r) \\ &\quad - \sum_{i=1}^s T(Y_1, \dots, \nabla_X Y_i, \dots, Y_s), \end{aligned}$$

Demonstração. Veja Biezuner [12], p. 140-148. □

Como a derivada covariante de um (r, s) -tensor T , $\nabla_X T$, é $C^\infty(M)$ -linear em X , pelo Lema de Caracterização dos Tensores 1.1, podemos usá-la para construir o $(r, s+1)$ -tensor:

$$\nabla T(\omega^1, \dots, \omega^r, Y_1, \dots, Y_s, X) := \nabla_X T(\omega^1, \dots, \omega^r, Y_1, \dots, Y_s),$$

o qual chamaremos de **derivada covariante total** de T .

A partir de agora, andaremos na direção de encontrar uma conexão natural para variedades Riemannianas. Para isto, relembremos duas propriedades notáveis para conexões:

Definição 1.13. A partir de uma conexão ∇ em M , definimos o $(1, 2)$ -tensor **torsão** $\tau : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$, definido por

$$\tau(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y].$$

Dizemos que ∇ é **simétrica** se a torsão é identicamente nula.

Agora impomos a relação necessária entre a métrica g e uma conexão:

Definição 1.14. Uma conexão linear ∇ é dita **compatível com a métrica** g se satisfaz a seguinte regra para o produto interno:

$$\nabla_X \langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle, \quad \forall X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M).$$

Com essas definições podemos enunciar o Teorema Fundamental da Geometria Riemanniana.

Teorema 1.4 (Levi-Civita). *Existe uma única conexão linear ∇ simétrica e compatível com a métrica g . ∇ é chamada de **conexão Riemanniana** ou **conexão de Levi-***

Civita e é dada pela fórmula de Koszul:

$$\langle Z, \nabla_Y X \rangle = \frac{1}{2} (X \langle Y, Z \rangle + Y \langle Z, X \rangle - Z \langle X, Y \rangle - \langle [X, Z], Y \rangle - \langle [Y, X], Z \rangle + \langle [Z, Y], X \rangle) \quad (1.9)$$

Demonstração. Em J. Lee [44], p. 122-124, encontramos a demonstração desse teorema. $\square$

Vamos utilizar a fórmula de Koszul 1.9 para expressar os símbolos de Christoffel em termos da métrica. Em coordenadas locais (x^i) , temos que $[\partial_i, \partial_j] = 0$ e, escrevendo $\Gamma_{ij,k} := g_{kl} \Gamma_{ij}^l$, encontramos

$$\Gamma_{ij,k} = \langle \partial_k, \Gamma_{ij}^l \partial_l \rangle = \langle \partial_k, \nabla_i \partial_j \rangle = \frac{1}{2} (\partial_i (g_{jk}) + \partial_j (g_{ki}) - \partial_k (g_{ij})).$$

Portanto,

$$\Gamma_{ij}^k = g^{kl} \Gamma_{ij,l} = \frac{1}{2} g^{lk} (\partial_i (g_{jl}) + \partial_j (g_{li}) - \partial_l (g_{ij})). \quad (1.10)$$

Observação 1.5. Para simplificação do cálculo, convencionamos o uso da vírgula para denotar a derivada parcial, isto é,

$$g_{ij,k} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}, \quad g_{ij,kl} = \frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial x^l \partial x^k}.$$

1.2.3 Curvatura

Um conceito fundamental na geometria é a curvatura, a qual abordaremos a seguir

Definição 1.15. Definimos o **tensor curvatura** de uma variedade Riemanniana (M, g) pela aplicação $R : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$, dada por

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z,$$

para cada $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$, sendo ∇ a conexão de Levi-Civita de M .

Observação 1.6. Decorre da expressão acima que R é $C^\infty(M)$ -linear com relação aos campos X, Y e Z . Logo, R é um campo $(1, 3)$ -tensorial e consequentemente, o valor de $R(X, Y)Z$ em cada ponto depende somente dos valores de X, Y e Z naquele ponto, o que permite ver R como uma aplicação $\mathbb{R}$ -multilinear $R_p : T_p M \times T_p M \times T_p M \rightarrow T_p M$.

Em um sistema de coordenadas locais (x^i) , temos

$$R(\partial_i, \partial_j) \partial_k = R_{ijk}^l \partial_l.$$

Os coeficientes R_{ijk}^l são as componentes do tensor curvatura, isto é,

$$R = R_{ijk}^l \partial_l \otimes dx^i \otimes dx^j \otimes dx^k.$$

Como

$$R(\partial_i, \partial_j) \partial_k = \nabla_i \nabla_j \partial_k - \nabla_j \nabla_i \partial_k,$$

obtemos as seguintes expressões para as componentes do tensor curvatura

$$R_{ijk}^l = \partial_i \Gamma_{jk}^l - \partial_j \Gamma_{ik}^l + \Gamma_{jk}^m \Gamma_{im}^l - \Gamma_{ik}^m \Gamma_{jm}^l.$$

Podemos usar a identificação da Equação 1.5 para caracterizar o tensor curvatura de outra forma:

Definição 1.16. Também chamamos de **tensor curvatura** o $(0, 4)$ -tensor, Rm , obtido ao descer o índice contra-variante de R . Dessa forma, $\text{Rm}(X, Y, Z, W) = \langle R(X, Y)Z, W \rangle$. Em coordenadas locais,

$$R_{ijkl} = \text{Rm}(\partial_i, \partial_j, \partial_k, \partial_l) = \langle R(\partial_i, \partial_j) \partial_k, \partial_l \rangle = g_{ml} R_{ijk}^m.$$

Proposição 1.5 (Propriedades do Tensor Curvatura). Em coordenadas, Rm satisfaz as seguintes propriedades:

1. $R_{ijkl} = -R_{jikl}$.
2. $R_{ijkl} = -R_{ijlk}$.
3. $R_{ijkl} = R_{klij}$.
4. $R_{ijkl} + R_{jkil} + R_{kijl} = 0$. (Primeira Identidade de Bianchi)
5. $R_{ijkl,m} + R_{jmkil,i} + R_{miklj} = 0$. (Segunda Identidade de Bianchi)

Demonstração. Ver J. Lee [44], p. 202-205. □

A partir do tensor curvatura definimos uma série de quantidades mais simples de lidar:

Definição 1.17. Fixado $p \in M$, considere σ um plano de $T_p M$. A **curvatura seccional** de M associada a σ é definida por

$$K(X, Y) = \frac{\text{Rm}(X, Y, Y, X)}{\|X\|^2 \|Y\|^2 - \langle X, Y \rangle^2},$$

onde $X, Y \in T_p M$ são quaisquer vetores que formam uma base para σ .

Definição 1.18. Definimos o **tensor de Ricci** como sendo o $(0, 2)$ -tensor obtido de R pela contração do primeiro índice covariante e o contra-variante. De forma equivalente, dados $X, Y \in \mathcal{T}(M)$,

$$\text{Ric}(X, Y) = \text{tr} \{ Z \mapsto R(Z, X)Y \}.$$

Em coordenadas (x^i) ,

$$\begin{aligned} \text{Ric}_{ij} &= R_{kij}^k = g^{kl} R_{kijl} \\ &= \partial_k \Gamma_{ij}^k - \partial_j \Gamma_{ki}^k + \Gamma_{kl}^k \Gamma_{ji}^l - \Gamma_{jl}^k \Gamma_{ki}^l \end{aligned} \quad (1.11)$$

Assim, se $\{e_i\}$ é um referencial ortonormal em U , então

$$\text{Ric}_{ij} = \sum_{i=1}^n \langle R(e_i, \partial_i) \partial_j, e_i \rangle = \sum_{i=1}^n \text{Rm}(e_i, \partial_i, \partial_j, e_i)$$

Segue-se facilmente da Proposição 1.5 que o tensor de Ricci é simétrico.

Aproveitamos os termos acima para também definir o seguinte conceito.

Definição 1.19. A **curvatura escalar** de M é a função $S \in C^\infty(M)$ definida como o traço em relação à métrica do tensor de Ricci, isto é,

$$S = \text{tr}_g \text{Ric} = g^{ij} R_{ij}. \quad (1.12)$$

Definição 1.20. Dizemos que uma variedade Riemanniana (M, g) é Einstein quando o tensor de Ricci é um múltiplo escalar da métrica g .

Dessa forma, sendo M Einstein de dimensão n , existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\text{Ric} = \lambda g$. Tomando o traço de ambos os lados, tem-se que $S = \lambda n$. Daí, $\text{Ric} = \frac{S}{n} g$.

Portanto, M ser de Einstein é equivalente à parte sem traço do tensor de Ricci $\overset{\circ}{\text{Ric}} = \text{Ric} - \frac{1}{n} Sg$ ser identicamente nula.

Definimos agora outro importante $(0, 2)$ -tensor que será do nosso interesse para os capítulos subsequentes.

Definição 1.21. O tensor 2-covariante definido por

$$E = \text{Ric} - \frac{1}{2} Sg,$$

é chamado **tensor de Einstein**.

1.2.4 Operadores Diferenciais

A derivação covariante de tensores permite estender às variedades Riemannianas certos operadores diferenciais (gradiente, laplaciano, etc.) de uso frequente no Espaço Euclidiano. Passaremos à exposição de alguns destes operadores. Em tudo que segue, (M^n, g) denotará uma variedade Riemanniana de dimensão n com métrica $g = \langle \cdot, \cdot \rangle$ e conexão de Levi-Civita ∇ .

Definição 1.22. *Seja $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável. O **gradiente** de f é o campo vetorial $Df \in \mathfrak{X}(M)$, definido por*

$$\langle Df, X \rangle = df(X) = X(f), \quad \forall X \in \mathfrak{X}(M).$$

Observação 1.7. *Pelo isomorfismo musical, vemos que o gradiente Df também é igual a $df^\sharp$. Já que a 1-forma df tem componentes $\partial_j(f) = f_j$ num sistema de coordenadas (x^i) , então $Df = g^{ij} f_j \partial_i$. Além disso, é imediato das propriedades de derivação, que para $f, h \in C^\infty(M)$, vale:*

$$D(f + h) = Df + Dh \quad e \quad D(fh) = fDh + hDf.$$

Definição 1.23. *Seja X um campo vetorial em M . A **divergência** de X é a função diferenciável $\operatorname{div} X : M \rightarrow \mathbb{R}$, definida por*

$$\operatorname{div} X(p) = \operatorname{tr} \{v \mapsto \nabla_v X(p)\},$$

Observação 1.8. *Devido à linearidade sobre $C^\infty(M)$ da primeira entrada de ∇ e ao fato de, uma vez fixado X , $\nabla_Y X(p)$ depender somente do valor de Y_p , temos que ∇X é um $(1, 1)$ -tensor, por isso podemos tomar seu traço.*

Dado um referencial ortonormal $\{e_i\}$, temos que

$$\operatorname{div} X = \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{e_i} X, e_i \rangle.$$

Para obter a expressão de $\operatorname{div} X$ em um sistema de coordenadas arbitrário (x^i) , comecemos com o seguinte: se $X = X^i \partial_i$, então

$$\begin{aligned} \operatorname{div} X &= dx^i(\nabla_i X) \\ &= dx^i((\partial_i X^k) \partial_k + \Gamma_{ij}^k X^j \partial_k) \\ &= \partial_i X^i + \Gamma_{ij}^i X^j. \end{aligned}$$

Com isso, temos o seguinte resultado

$$\operatorname{div} X = \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial}{\partial x^i} (X^i \sqrt{G}), \quad (1.13)$$

onde $G = \det(g_{ij})$ (veja Muniz Neto [53], p. 14). Além disso, uma conta direta, prova que para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ e $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, vale:

$$\operatorname{div}(X + Y) = \operatorname{div} X + \operatorname{div} Y \quad \text{e} \quad \operatorname{div}(fX) = f \operatorname{div} X + \langle Df, X \rangle.$$

Um fato importante relacionando o tensor de Ricci e a curvatura escalar por meio da divergência é a seguinte identidade:

Proposição 1.6 (Identidade Contraída de Bianchi). *As derivadas covariantes do tensor de Ricci e da curvatura escalar satisfazem a seguinte relação*

$$\operatorname{div} \operatorname{Ric} = \frac{1}{2} \nabla S.$$

Demonstração. Veja J. Lee [44], p. 125. □

A seguir, atestamos uma versão do teorema da divergência para variedades Riemannianas compactas.

Teorema 1.7. *Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana compacta orientada e $X \in \mathfrak{X}(M)$. Se o bordo de M é munido com a orientação e a métrica induzidas por M , e ν denota o campo normal unitário externo a M ao longo de ∂M , então*

$$\int_M (\operatorname{div} X) \, dV = \int_{\partial M} \langle X, \nu \rangle \, dV.$$

Demonstração. Veja J. Lee [43], p. 424. □

As definições a seguir, também estendem novos conceitos de operadores a variedades Riemannianas, a dizer o Laplaciano e o Hessiano.

Definição 1.24. *Seja $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável. O **laplaciano** de f é a função $\Delta f : M \rightarrow \mathbb{R}$ dada por*

$$\Delta f = \operatorname{div}(Df).$$

Definição 1.25. *Seja $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável. A **hessiana** de f é o $(0, 2)$ -tensor definido por*

$$\operatorname{Hess} f(X, Y) = \nabla_{X,Y}^2 f = \nabla^2 f(X, Y) = (\nabla_Y \nabla f)(X).$$

Observação 1.9. *É possível mostrar que $\text{Hess}f$ é um tensor simétrico (veja O'Neill [54], p. 86).*

Desenvolvendo $\nabla^2 f(X, Y)$, encontramos

$$\begin{aligned}\nabla^2 f(X, Y) &= Y(X(f)) - \nabla f(\nabla_Y X) = Y(X(f)) - \nabla_{\nabla_Y X} f \\ &= Y(X(f)) - \nabla_Y X(f) = Y\langle Df, X \rangle - \langle Df, \nabla_Y X \rangle \\ &= \langle \nabla_Y Df, X \rangle.\end{aligned}$$

Logo $\Delta f = \text{div} Df = \text{tr}_g(\text{Hess}f)$.

Dentre as propriedades relacionadas com as curvaturas, temos as que envolvem uma mudança conforme de métrica. Dadas as métricas conformes g e $\tilde{g}$, podemos sempre escrever $\tilde{g} = e^{2f}g$ para alguma função diferenciável f .

Proposição 1.8 (Transformação conforme da curvatura). *Sejam g e $\tilde{g} = e^{2f}g$ duas métricas na n -variedade M . Os tensores de curvatura de $\tilde{g}$ (representados por $\tilde{t}$) estão relacionados àqueles de g pelas seguintes fórmulas:*

1. $\widetilde{\text{Ric}} = \text{Ric} - (n-2)(\nabla^2 f) + (n-2)(df \otimes df) - (\Delta f + (n-2)|df|_g^2)g$,
2. $\widetilde{S} = e^{-2f}(S - 2(n-1)\Delta f - (n-1)(n-2)|df|_g^2)$.

Demonstração. Veja J. Lee [44], p. 217-218. □

Definição 1.26. *Dado um tensor s -covariante T , a **divergência** de T é o tensor $(s-1)$ -covariante*

$$\text{div} T = \text{tr}_g \nabla T.$$

Mais precisamente,

$$\text{div} T(X_1, \dots, X_{s-1}) = \sum_{i=1}^n \nabla_{e_i} T(e_i, X_1, \dots, X_{s-1}).$$

Em coordenadas, temos que $(\text{div} T)_{i_1 \dots i_{s-1}} = g^{jk} \nabla_k T_{j i_1 \dots i_{s-1}}$. Com essa definição podemos relacionar as divergências de um campo vetorial e do seu dual:

Proposição 1.9. *Se $X \in \mathfrak{X}(M)$, então $\text{div} X = \text{div} X^\flat$.*

Demonstração. Considere um referencial ortonormal $\{e_i\}$, então

$$\begin{aligned}\operatorname{div} X^\flat &= \sum_{i=1}^n (\nabla_{e_i} X^\flat)(e_i) \\ &= \sum_{i=1}^n \nabla_{e_i} g(X, e_i) - \sum_{i=1}^n g(X, \nabla_{e_i} e_i) \\ &= \sum_{i=1}^n g(\nabla_{e_i} X, e_i) = \operatorname{div} X.\end{aligned}$$

□

Além disso, temos que o oposto da divergência em tensores $-\operatorname{div}$ é a adjunta da derivada covariante ∇ com respeito ao produto interno integrado. Para ver isso, precisamos de uma versão mais geral do Teorema da Divergência para tensores covariantes:

Teorema 1.10. *Seja (M^n, g) é uma variedade Riemanniana compacta e orientável com bordo. Se F, G são campos tensoriais covariantes de ordem s e $s+1$, respectivamente, então*

$$\int_M \langle \nabla F, G \rangle \, dV = \int_{\partial M} \langle F \otimes \nu^\flat, G \rangle \, dV - \int_M \langle F, \operatorname{div} G \rangle \, dV.$$

Demonstração. Veja Petersen [56], p. 60. □

1.2.5 Imersões Isométricas

Seja $i : (M^n, i^*g) \rightarrow (\overline{M}^{n+k}, g)$ uma imersão injetiva. Então para cada $p \in M$, existe uma vizinhança $U \subset M$ de p , tal que $i(U) \subset \overline{M}$ é uma subvariedade regular de $\overline{M}$, logo, para todo $p \in M$, existe uma vizinhança $\overline{U} \subset \overline{M}$ de $i(p)$, e um difeomorfismo $\phi : \overline{U} \rightarrow V \subset \mathbb{R}^{n+k}$ tal que $\phi(i(U) \cap \overline{U}) = \{(x^1, \dots, x^{n+k}) \in V; x^{n+1} = \dots = x^{n+k} = 0\}$.

Identificando U com $i(U)$, cada vetor $v \in T_p M$ com $di_p(v) \in T_{i(p)} \overline{M}$ e usando o difeomorfismo ϕ , podemos estender um campo vetorial definido em U a um campo em $\overline{U}$. Também consideramos i^*g como a restrição de g a M .

Para cada $p \in M$, o produto interno de $T_p \overline{M}$ nos permite decompor:

$$T_p \overline{M} = T_p M \oplus T_p M^\perp,$$

onde $T_p M^\perp$ é o complemento ortogonal de $T_p M$ em $T_p \overline{M}$. Se $v \in T_p \overline{M}$, então temos a seguinte igualdade:

$$v = v^\top + v^\perp,$$

em que $v^\top \in T_p M$ e $v^\perp \in T_p M^\perp$ são denominadas de componentes tangencial e normal de v , respectivamente. Dessa decomposição obtemos um fibrado vetorial

$$TM^\perp := \bigsqcup_{p \in M} T_p M^\perp,$$

chamado o fibrado normal a M . O espaço das seções desse fibrado será denotado por $\mathfrak{X}(M)^\perp$ e seus elementos serão chamados de campos normais a M .

Denotaremos por $\overline{\nabla}$ a conexão de $\overline{M}$. Sejam X, Y campos vetoriais definidos em M e considere a extensão local $\overline{Y}$ de Y em $\overline{M}$. Definimos

$$\nabla_X Y := (\overline{\nabla}_X \overline{Y})^\top,$$

A expressão da direita faz sentido devido ao carácter pontual da conexão em X e por não depender da extensão de Y , já que podemos restringir os valores de Y em curvas tangentes a X contidas em M .

Pela unicidade da conexão, no teorema de Levi-Civita, podemos verificar que esta é a conexão compatível com a métrica induzida em M pela imersão f .

Proposição 1.11. *Seja agora a aplicação $\mathbf{A} : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)^\perp$, dada por*

$$\mathbf{A}(X, Y) = \overline{\nabla}_X \overline{Y} - \nabla_X Y = \overline{\nabla}_X \overline{Y} - (\overline{\nabla}_X \overline{Y})^\top = (\overline{\nabla}_X \overline{Y})^\perp.$$

Então $\mathbf{A}$ é bilinear e simétrica.

Demonstração. Veja [25], pg. 140. □

A aplicação $\mathbf{A}$ da proposição anterior, é chamada de **segunda forma fundamental** de f e a equação

$$\overline{\nabla}_X \overline{Y} = \nabla_X Y + \mathbf{A}(X, Y),$$

é chamada **fórmula de Gauss**.

Fixado $\nu \in T_p M^\perp$, podemos definir também o **operador de Weingarten**

$$S_\nu : T_p M \rightarrow T_p M, \quad S_\nu(X) := (-\overline{\nabla}_X \overline{\nu})^\top,$$

onde $\overline{\nu}$ é qualquer extensão de ν que permanece normal ao longo de M . A segunda forma fundamental e o operador de Weingarten estão relacionados pela **equação de Weingarten**,

$$\langle \mathbf{A}(X, Y), \nu \rangle = \langle S_\nu X, Y \rangle.$$

Como $\mathbf{A}$ é simétrica, temos que S_ν é auto-adjunto. E pela própria definição de S_ν , obtemos a **fórmula de Weingarten** $\bar{\nabla}_X \bar{\nu} = -S_\nu(X) + (\bar{\nabla}_X \bar{\nu})^\perp$, em que $\bar{\nu}$ é uma extensão normal a M .

Além de descrever a diferença entre as conexões intrínseca e extrínseca, a segunda forma fundamental tem um importante papel com relação aos tensores de curvatura de $\bar{M}$ e M . As equações de Gauss-Codazzi são dadas pelos seguintes teoremas.

Teorema 1.12 (Equação de Gauss). *Para quaisquer $X, Y, Z, W \in T_p M$, vale a seguinte equação*

$$\bar{\text{Rm}}(X, Y, Z, W) = \text{Rm}(X, Y, Z, W) - \langle \mathbf{A}(X, W), \mathbf{A}(Y, Z) \rangle + \langle \mathbf{A}(X, Z), \mathbf{A}(Y, W) \rangle.$$

Demonstração. Ver J. Lee [44], pg. 136. □

Teorema 1.13 (Equação de Codazzi). *Para quaisquer $X, Y, Z \in T_p M$ e $\nu \in (T_p M)^\perp$, vale a seguinte equação*

Demonstração. Ver do Carmo [25], p. 137. □

$$\bar{\text{Rm}}(X, Y, Z, \nu) = \langle \bar{\nabla}_Y \mathbf{A}(X, Z) - \bar{\nabla}_X \mathbf{A}(Y, Z), \nu \rangle.$$

Demonstração. Ver J. Lee [44], p. 136. □

No caso de M ser uma hipersuperfície, isto é, a imersão isométrica $i : M^n \rightarrow \bar{M}^{n+1}$ ter codimensão 1, e possuir um campo normal unitário global ν , podemos escrever a segunda forma fundamental como uma aplicação bilinear escalar, definida por:

$$A(X, Y) := \langle \mathbf{A}(X, Y), \nu \rangle.$$

Pela equação de Weingarten, encontramos

$$A(X, Y) = \langle Y, S_\nu X \rangle.$$

Se escolhermos $\{e_1, \dots, e_n\}$ uma base ortonormal de $T_p M$, podemos definir a **curvatura média** como

$$H := \sum_{i=1}^n A(e_i, e_i) = \text{tr}_g A = \text{tr } S_\nu.$$

Dado um campo X em $\bar{M}$, definido ao longo de M , podemos definir a **divergência tangencial** de X como

$$\text{div}_M X := \sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{e_i} X, e_i \rangle,$$

onde $\{e_1, \dots, e_n\}$ é um referencial ortonormal de M . Com essa notação, obtemos uma nova expressão para a curvatura média de M :

$$H = \text{tr}_g A = -\text{div}_M \nu = -\text{div } \nu.$$

1.3 Limites Assintóticos

Como vamos trabalhar sistematicamente com limites assintóticos, é conveniente já no começo consolidar as seguintes notações.

Definição 1.27. *Sejam $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ duas funções. Simbolizamos por $f(x) = O_k(g(x))$, quando existir constantes reais $C, N > 0$ tais que*

$$|f(x)| + |x| \cdot |\partial f(x)| + \dots + |x|^k |\partial^k f(x)| < C|g(x)|,$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $|x| > N$. Aqui demos uma notação mais concisa para a derivada parcial sem especificar os índices das coordenadas, a fim de evitar carregar demais a notação.

Definição 1.28. *Sejam $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ duas funções. Simbolizamos por $f(x) = o(g(x))$, quando*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Capítulo 2

Massa ADM via Tensor de Einstein

Este capítulo tem como objetivo principal obter uma expressão alternativa para a massa ADM e para o centro de massa de uma variedade assintoticamente plana, envolvendo o tensor de Einstein e campos de Killing conforme. Inicialmente, na Seção 2.1, vamos definir uma variedade assintoticamente plana (Definição 2.1) e calcular as propriedades assintóticas dos objetos geométricos de nosso interesse.

Na Seção 2.2, vamos impor condições adicionais para essa classe de variedades a fim de introduzirmos os conceitos de massa ADM e centro de massa, tanto as definições clássicas (2.3 e 2.5) quanto às formuladas pelo tensor de Einstein (2.4 e 2.6). Além disso, vamos mostrar que os limites assintóticos envolvidos nas definições clássicas de fato existem. Para isso, utilizamos a abordagem geral de invariantes assintóticos formulada por Michel ([51]).

Finalmente, veremos na Seção 2.3 o resultado principal: a igualdade entre as duas definições dos dois invariantes assintóticos: a massa ADM e do centro de massa. Para isso, nos baseamos no método proposto por Herzlich ([31]) que relaciona a análise de Michel com uma fórmula de integração por partes associada à identidade contraída de Bianchi. Devido ao caráter geral dessa abordagem, na Seção 2.4, vamos abordar as variedades assintoticamente hiperbólicas e demonstrar um resultado similar ao caso anterior.

Ao longo deste capítulo, denotamos por $B_r^n \subset \mathbb{R}^n$ a bola de raio $r > 0$ centrada na origem com respeito à norma Euclidiana, denotada por $|\cdot|$. Os cálculos apresentados ao longo do texto envolvem conceitos geométricos relacionados com mais de uma métrica, por isso usaremos sobrescritos indicando em que métrica esses objetos estão sendo calculados.

2.1 Variedades Assintoticamente Planas

Primeiramente, introduzimos os espaços em que vamos trabalhar: as variedades assintoticamente planas. De forma concisa, são variedades Riemannianas tais que, a menos de um compacto, são difeomorfas ao complementar de uma bola fechada no espaço Euclidiano e cujas métricas se aproximam da métrica Euclidiana no infinito. Tal aproximação é regida por certas condições de decaimento que veremos a seguir.

Definição 2.1. *Seja (M^n, g) , $n \geq 3$, uma variedade Riemanniana completa. Dizemos que (M, g) é **assintoticamente plana** de ordem $\tau > 0$, se existe um compacto $K \subset M$ tal que $M \setminus K$ é uma união finita de **íns** $M_1, \dots, M_l$, em que, para cada M_k , existe um difeomorfismo $\Phi_k : M_k \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \bar{B}_{r_k}^n$, para algum $r_k > 0$ e, nas coordenadas induzidas por Φ_k , isto é, na carta $(M_k, \Phi_k = (x^1, \dots, x^n))$, a métrica g satisfaz*

$$g_{ij}(x) - \delta_{ij} = O_2(r^{-\tau}) \quad (2.1)$$

onde $r = |x|$ e usamos a identificação usual $g(p) = (\Phi_k^* g)(x)$. A métrica g , a carta Φ_k e suas coordenadas são ditas **assintoticamente planas** ou simplesmente **assintóticas**.

Observação 2.1. 1. Ao longo do texto, identificaremos

$$(M_k, g) \cong (\mathbb{R}^n \setminus \bar{B}_{r_k}^n, \Phi_k^* g);$$

2. Podemos reescrever a condição de decaimento 2.1 de forma equivalente a

$$(g_{ij} - \delta_{ij}) + r g_{ij,k} + r^2 g_{ij,kl} = O(r^{-\tau}).$$

Exemplo 2.1. O espaço euclidiano $(\mathbb{R}^n, \delta)$ é um exemplo trivial de variedade assintoticamente plana.

Exemplo 2.2. O exemplo principal de variedade assintoticamente plana é a variedade de Schwarzschild tridimensional:

$$(M^3, g) := (\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}, u^4 \delta),$$

com $u = 1 + m/2r$, onde m é uma constante positiva e $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ é a distância Euclidiana do ponto (x, y, z) à origem. Mostremos que (M^3, g) é assintoticamente plana

de ordem $\tau = 1$, calculando primeiramente as derivadas da métrica g :

$$\begin{aligned} g_{ij} &= \left(1 + \frac{m}{2r}\right)^4 \delta_{ij} \\ &= \delta_{ij} + O(r^{-1}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_{ij,k} &= -4 \left(1 + \frac{m}{2r}\right)^3 \left(\frac{mx^k}{2r^3}\right) \delta_{ij} \\ &= (1 + O(r^{-1}))(O(r^{-2})) \\ &= O(r^{-2}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_{ij,kl} &= 3 \left(1 + \frac{m}{2r}\right)^2 \left(\frac{m^2 x^k x^l}{r^6}\right) \delta_{ij} \\ &\quad + 2 \left(1 + \frac{m}{2r}\right)^3 \left(\frac{m\delta_{kl}}{r^3} + \frac{3mx^k x^l}{r^5}\right) \delta_{ij} \\ &= (1 + O(r^{-1}))(O(r^{-4})) + (1 + O(r^{-1}))(O(r^{-3})) \\ &= O(r^{-3}). \end{aligned}$$

Portanto,

$$g_{ij} - \delta_{ij} = O_2(r^{-1}).$$

Além disso, como a reflexão simétrica em relação à esfera de raio $r = m/2$:

$$\Phi : (M^3, g) \rightarrow (M^3, g), \quad (x, y, z) \mapsto \left(\frac{m}{2}\right)^2 r^{-1}(x, y, z),$$

define uma isometria que mapeia $B_{m/2}^3$ em $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{B}_{m/2}^3$. Logo (M^3, g) tem dois fins: escolhendo como compacto $K \subset M$ a esfera $S_{m/2}^2$, temos que $M \setminus K = M_1 \cup M_2$, onde $M_1 = B_{m/2}^3 \setminus \{0\}$ e $M_2 = \mathbb{R}^3 \setminus \bar{B}_{m/2}^3$. Chamamos fim exterior a variedade $(\mathbb{R}^3 \setminus B_{m/2}^3, u^4 \delta)$.

Agora vamos calcular as ordens de decaimento para os objetos geométricos associados a uma métrica assintótica g . Mais adiante, estas propriedades nos serão úteis ao estudarmos a massa ADM.

Proposição 2.1. *Seja (M^n, g) uma variedade assintoticamente plana de ordem $\tau > 0$. Então em uma carta assintótica, temos os seguintes decaimentos*

- (i) $\det G = 1 + O_1(r^{-\tau})$, $\sqrt{\det G} = 1 + O(r^{-\tau})$, onde $G = (g_{ij})$;
- (ii) $g^{ij}(x) = \delta^{ij} + O_1(r^{-\tau})$;
- (iii) $\Gamma_{ij}^k(x) = O_1(r^{-\tau-1})$, $\text{Ric}_{ij}(x) = O(r^{-\tau-2})$ e $S(x) = O(r^{-\tau-2})$.

Demonstração. Para provar o item (i) precisamos usar a seguinte fórmula do determinante

$$\det G = \sum_{\sigma \in S^n} g_{1\sigma(1)} \cdots g_{n\sigma(n)}.$$

De $g_{ij} = \delta_{ij} + O(r^{-\tau})$, segue-se que

$$\begin{aligned} \det G &= g_{1\sigma(1)} \cdots g_{n\sigma(n)} = g_{11} \cdots g_{nn} + \sum_{\sigma \neq \text{id}} g_{1\sigma(1)} \cdots g_{n\sigma(n)} \\ &= (1 + O(r^{-\tau}))^n + O(r^{-\tau}) = 1 + O(r^{-\tau}). \end{aligned}$$

Da regra de Leibniz em derivações junto com a condição $g_{ij,k} = O(r^{-\tau-1})$ aplicadas na fórmula do determinante acima, segue-se facilmente que $\partial_k(\det G) = O(r^{-\tau-1})$. Já para a raiz quadrada $\sqrt{\det G}$, usamos a desigualdade abaixo junto com o que já provamos para $\det G$.

$$\begin{aligned} \left| \sqrt{\det G} - 1 \right| &\leq \left| \sqrt{\det G} - 1 \right| \left| \sqrt{\det G} + 1 \right| \\ &= |\det G - 1|, \end{aligned}$$

Provemos agora (ii). Denotemos por M_{ij} a (ij) -submatriz de G , daí podemos expressar as componentes da inversa $G^{-1} = (g^{ij})$ como $g^{ij} = (-1)^{i+j} \det M_{ij} / \det G$. Como $\det G$ tende a 1 quando x tende ao infinito, temos que $|g^{ij}| \leq 2|\det M_{ij}|$, para x suficientemente grande. Similarmente ao cálculo do decaimento de $\det G$, tem-se $\det M_{ij} = \delta^{ij} + O_1(r^{-\tau})$. Assim, $g^{ij} = \delta^{ij} + O(r^{-\tau})$.

Agora, basta aplicar esses resultados no cálculo da derivada de g^{ij} :

$$\begin{aligned} \partial_k g^{ij} &= \frac{(-1)^{i+j}}{(\det G)^2} [(\det G) \partial_k (\det M_{ij}) - (\det M_{ij}) \partial_k (\det G)] \\ &= (1 + O(r^{-\tau})) O(r^{-\tau-1}) + (\delta^{ij} + O(r^{-\tau})) O(r^{-\tau-1}) \\ &= O(r^{-\tau-1}). \end{aligned}$$

Portanto, $g^{ij} = \delta^{ij} + O_1(r^{-\tau})$.

Para provar (iii), analisamos as respectivas definições e suas relações com as condições

assintóticas. Primeiramente para os símbolos de Christoffel:

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{ij}^k &= \frac{1}{2} g^{kl} (g_{jl,i} + g_{il,j} - g_{ij,l}) \\
 &= \frac{1}{2} (\delta^{kl} + O(r^{-\tau})) (g_{jl,i} + g_{il,j} - g_{ij,l}) \\
 &= \frac{1}{2} (g_{jk,i} + g_{ik,j} - g_{ij,k}) + O(r^{-2\tau-1}) \\
 &= O(r^{-\tau-1}).
 \end{aligned}$$

Aplicando novamente a regra de Leibniz ao derivar Γ_{ij}^k ,

$$\begin{aligned}
 \partial_l \Gamma_{ij}^k &= \frac{1}{2} (\partial_l (g^{km}) (g_{jm,i} + g_{im,j} - g_{ij,m}) + g^{km} \partial_l (g_{jm,i} + g_{im,j} - g_{ij,m})) \\
 &= \frac{1}{2} \partial_l (g_{jk,i} + g_{ik,j} - g_{ij,k}) + O(r^{-2\tau-2}) \\
 &= O(r^{-\tau-2}).
 \end{aligned}$$

Assim, $\Gamma_{ij}^k = O_1(r^{-\tau-1})$.

Agora unimos estes resultados às definições em coordenadas para o tensor de Ricci e a curvatura escalar (Equações 1.11 e 1.12)

$$\begin{aligned}
 2\text{Ric}_{ij} &= 2\partial_k \Gamma_{ij}^k - 2\partial_j \Gamma_{ki}^k + 2\Gamma_{kl}^k \Gamma_{ji}^l - 2\Gamma_{jl}^k \Gamma_{ki}^l \\
 &= \partial_k (g_{ki,j} + g_{kj,i} - g_{ij,k}) - \partial_j (g_{ki,k} + g_{kk,i} - g_{ki,k}) + O(r^{-2\tau-2}) \\
 &= g_{ki,kj} + g_{kj,ki} - g_{ij,kk} - g_{kk,ij} + O(r^{-2\tau-2}) \\
 &= O(r^{-\tau-2})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S &= g_{ik,ik} - g_{kk,ii} + O(r^{-2\tau-2}) \\
 &= O(r^{-\tau-2}),
 \end{aligned}$$

como queríamos demonstrar. □

Já que vamos analisar em conjunto a massa ADM e o centro de massa, será necessário descrever condições adicionais à métrica assintótica g concernentes à sua parte ímpar. Para ser mais preciso, introduzimos a seguir essa caracterização de funções.

Seja $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ uma função cujo domínio $U \subset \mathbb{R}^n$ é simétrico em relação à origem, isto é, se $x \in \mathbb{R}^n$, então $-x \in \mathbb{R}^n$. Com isso, podemos decompor f em suas partes par e ímpar:

$$f(x) = f^{\text{even}}(x) + f^{\text{odd}}(x),$$

onde $f^{\text{even}}(x) := (f(x) + f(-x))/2$ e $f^{\text{odd}}(x) := (f(x) - f(-x))/2$.

Definição 2.2. *Seja (M^n, g) uma variedade assintoticamente plana de ordem $\tau > 0$. Dizemos que (M^n, g) satisfaz as condições de Regge-Teitelboim (RT) se, em um sistema de coordenadas assintóticas, a parte ímpar da métrica g satisfaz*

$$g_{ij}^{odd} = O_2(r^{-\tau-1}). \quad (2.2)$$

Com as condições RT, podemos deduzir os seguintes decaimentos necessários ao estudo do centro de massa:

Proposição 2.2. *Seja (M^n, g) uma variedade assintoticamente plana de ordem $\tau > 0$ que satisfaz as condições RT. Dada uma carta assintótica, temos que*

$$(i) \quad (\det G)^{odd}(x) = O_1(r^{-\tau-1}),$$

$$(ii) \quad (g^{ij})^{odd}(x) = O_1(r^{-\tau-1});$$

$$(iii) \quad (\Gamma_{ij}^k)^{even}(x) = O_1(r^{-\tau-2}), \quad \text{Ric}_{ij}^{odd}(x) = O(r^{-\tau-3}) \quad e \quad S^{odd}(x) = O(r^{-\tau-3});$$

$$(iv) \quad (\Gamma_{ij}^k)^{odd}(x) = O_1(r^{-\tau-1}), \quad \text{Ric}_{ij}^{even}(x) = O(r^{-\tau-2}) \quad e \quad S^{even}(x) = O(r^{-\tau-2}).$$

Demonstração. Os cálculos se baseiam na decomposição de g_{ij} em suas partes par e ímpar:

$$\begin{aligned} g_{ij}(x) &= g_{ij}^{even}(x) + g_{ij}^{odd}(x) \\ &= \frac{1}{2}(g_{ij}(x) + g_{ij}(-x)) + \frac{1}{2}(g_{ij}(x) - g_{ij}(-x)). \end{aligned}$$

De $g_{ij}(x) = \delta_{ij} + O_2(r^{-\tau})$, temos $g_{ij}^{even}(x) = \delta_{ij} + O_2(r^{-\tau})$. E pelas condições RT, temos $g_{ij}^{odd}(x) = O_2(r^{-\tau-1})$. Com isso, calculamos as partes pares e ímpares das derivadas:

$$\begin{aligned} g_{ij,k}^{even}(x) &= \frac{1}{2}(g_{ij,k}(x) + g_{ij,k}(-x)) \\ &= \partial_k \left(\frac{1}{2}(g_{ij}(x) - g_{ij}(-x)) \right) \\ &= \partial_k g_{ij}^{odd}(x) = O(r^{-\tau-2}). \end{aligned}$$

Similarmente, $g_{ij,k}^{odd}(x) = \partial_k g_{ij}^{even}(x) = O(r^{-\tau-1})$.

$$\begin{aligned} g_{ij,kl}^{odd}(x) &= \frac{1}{2}(g_{ij,kl}(x) - g_{ij,kl}(-x)) \\ &= \partial_l \left(\frac{1}{2}(g_{ij,k}(x) + g_{ij,k}(-x)) \right) \\ &= \partial_l (g_{ij,k}^{even}(x)) \\ &= \partial_l \partial_k g_{ij}^{odd}(x) = O(r^{-\tau-3}). \end{aligned}$$

Similarmente, $g_{ij,kl}^{even}(x) = \partial_l(g_{ij,k}^{odd}(x)) = \partial_l \partial_k g_{ij}^{even}(x) = O(r^{-\tau-2})$.

Da fórmula padrão do determinante, segue-se que $(\det G)^{odd}$ deve conter ao menos um termo da forma g_{ij}^{odd} em cada uma de suas parcelas. Logo, $(\det G)^{odd}(x) = O(r^{-\tau-1})$. Enquanto que $(\det G)^{even}$ deve conter parcelas que possuem somente termos da forma g_{ij}^{even} . Logo, $(\det G)^{even}(x) = 1 + O(r^{-\tau})$. Já para as derivadas do determinante temos que aplicar novamente a regra de Leibniz, o que implica $(\partial_k \det G)^{even}(x) = 1 + O_1(r^{-\tau})$ e $(\partial_k \det G)^{odd}(x) = O_1(r^{-\tau-1})$. Daí, segue que

$$\begin{aligned} (\partial_k \det G)^{even} &= \partial_k((\det G)^{odd}) \\ &= O(r^{-\tau-2}), \\ (\partial_k \det G)^{odd} &= \partial_k((\det G)^{even}) \\ &= O(r^{-\tau-1}). \end{aligned}$$

Os cálculos acima resultam no mesmo resultado para $\det M_{ij}$, a (ij) -submatriz de G , isto é, $(\det M_{ij})^{even}(x) = \delta^{ij} + O_1(r^{-\tau})$ e $(\det M_{ij})^{odd}(x) = O_1(r^{-\tau-1})$. Daí, segue que

$$\begin{aligned} (\partial_k \det M_{ij})^{even} &= \partial_k((\det M_{ij})^{odd}) \\ &= O(r^{-\tau-2}), \\ (\partial_k \det M_{ij})^{odd} &= \partial_k((\det M_{ij})^{even}) \\ &= O(r^{-\tau-1}). \end{aligned}$$

Com isso, pela fórmula da inversa $g^{ij} = (-1)^{i+j} \det M_{ij} (\det G)^{-1}$:

$$\begin{aligned} (g^{ij})^{even}(x) &= (-1)^{i+j} \left(\frac{\det M_{ij}}{\det G}(x) + \frac{\det M_{ij}}{\det G}(-x) \right) \\ &= (-1)^{i+j} \left(\frac{\det M_{ij}(x) \det G(-x) + \det M_{ij}(-x) \det G(x)}{\det G(x) \det G(-x)} \right) \\ &= (-1)^{i+j} \frac{(\det M_{ij}(x) \det G(-x))^{even}}{\det G(x) \det G(-x)} \\ &= (\delta^{ij} + O(r^{-\tau}))(1 + O(r^{-\tau})) + O(r^{-\tau-1})O(r^{-\tau-1}) \\ &= \delta^{ij} + O(r^{-\tau}) \end{aligned}$$

Da mesma forma, temos a parte ímpar da inversa

$$\begin{aligned} (g^{ij})^{odd}(x) &= (-1)^{i+j} \frac{(\det M_{ij}(x) \det G(-x))^{odd}}{\det G(x) \det G(-x)} \\ &= O(r^{-\tau-1}). \end{aligned}$$

Pela fórmula da derivada de g^{ij} :

$$\partial_k g^{ij} = \frac{(-1)^{i+j}}{(\det G)^2} (\partial_k (\det M_{ij}) \det G - \partial_k (\det G) \det M_{ij})$$

segue-se que

$$\begin{aligned} (\partial_k g^{ij})^{even} &= \partial_k ((g^{ij})^{odd}) = \frac{(-1)^{i+j}}{(\det G)^2} ((\partial_k (\det M_{ij}) \det G)^{even} - (\partial_k (\det G) \det M_{ij})^{even}) \\ &= O(r^{-\tau-2})(1 + O(r^{-\tau})) + O(r^{-\tau-1})O(r^{-\tau-1}) \\ &= O(r^{-\tau-2}) \end{aligned}$$

Da mesma forma, temos $(\partial_k g^{ij})^{odd} = \partial_k ((g^{ij})^{even}) = O(r^{-\tau-1})$.

$$\begin{aligned} (\Gamma_{ij}^k)^{even} &= \frac{1}{2} ((g^{kl})^{even} (g_{jl,i} + g_{il,j} - g_{ij,l})^{even} + (g^{kl})^{odd} (g_{jl,i} + g_{il,j} - g_{ij,l})^{odd}) \\ &= (\delta^{ij} + O(r^{-\tau})) O(r^{-\tau-2}) + O(r^{-\tau-1}) O(r^{-\tau-1}) \\ &= O(r^{-\tau-2}). \end{aligned}$$

Da mesma forma, temos $(\Gamma_{ij}^k)^{odd} = O(r^{-\tau-1})$. Pela fórmula da derivada de Γ_{ij}^k :

$$\partial_s \Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} [(\partial_s g^{kl})(g_{jl,i} + g_{il,j} - g_{ij,l}) + g^{kl} \partial_s (g_{jl,i} + g_{il,j} - g_{ij,l})],$$

temos que

$$\begin{aligned} (\partial_s \Gamma_{ij}^k)^{odd} &= \frac{1}{2} [(\partial_s g^{kl})^{even} (g_{jl,i} + g_{il,j} - g_{ij,l})^{odd} + (\partial_s g^{kl})^{odd} (g_{jl,i} + g_{il,j} - g_{ij,l})^{even} \\ &\quad + (g^{kl})^{even} (\partial_s (g_{jl,i} + g_{il,j} - g_{ij,l}))^{odd} + (g^{kl})^{odd} (\partial_s (g_{jl,i} + g_{il,j} - g_{ij,l}))^{even}] \\ &= O(r^{-\tau-2}) O(r^{-\tau-1}) + O(r^{-\tau-1}) O(r^{-\tau-2}) \\ &\quad + (\delta^{kl} + O(r^{-\tau})) O(r^{-\tau-3}) + O(r^{-\tau-1}) O(r^{-\tau-2}) \\ &= O(r^{-\tau-3}). \end{aligned}$$

Da mesma forma, temos $(\partial_s \Gamma_{ij}^k)^{even} = O(r^{-\tau-2})$. Finalmente, utilizando esses resultados nas fórmulas das curvaturas 1.11, 1.12, temos que

$$\begin{aligned} \text{Ric}_{ij}^{odd} &= (\partial_k \Gamma_{ij}^k)^{odd} - (\partial_j \Gamma_{ki}^k)^{odd} + (\Gamma_{kl}^k \Gamma_{ji}^l)^{odd} - (\Gamma_{jl}^k \Gamma_{ki}^l)^{odd} \\ &= O(r^{-\tau-3}) \end{aligned}$$

da mesma forma, $\text{Ric}_{ij}^{\text{even}} = O(r^{-\tau-2})$. Para a curvatura escalar, temos

$$\begin{aligned} S^{\text{odd}} &= (g^{ij})^{\text{even}}(\text{Ric}_{ij})^{\text{odd}} + (g^{ij})^{\text{odd}}(\text{Ric}_{ij})^{\text{even}} \\ &= (\delta^{ij} + O(r^{-\tau}))O(r^{-\tau-3}) + O(r^{-\tau-1})O(r^{-\tau-2}) \\ &= O(r^{-\tau-3}) \end{aligned}$$

da mesma forma, $S^{\text{even}} = O(r^{-\tau-2})$. □

2.2 Massa ADM e Centro de Massa

Agora definimos os principais invariantes assintóticos que vamos estudar. Nesta seção, vamos supor que (M^n, g) é uma variedade assintoticamente plana de ordem $\tau > 0$ com apenas um fim.

Temos a seguinte formulação clássica da massa ADM:

Definição 2.3. *Se $\tau > (n-2)/2$ e a curvatura escalar S^g for integrável sobre (M^n, g) , então definimos a **massa ADM** pela quantidade*

$$m(g) = c_n \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{S_r^{n-1}} (\text{div}^\delta g - d \text{tr}_\delta g)(\nu^\delta) dV_{S_r^{n-1}}^\delta, \quad (2.3)$$

onde, com respeito à métrica Euclidiana δ determinada por uma carta assintótica, $\nu^\delta = \nu^i \partial_i$ denota o campo normal unitário externo às esferas coordenadas S_r^{n-1} e $c_n := 1/2(n-1)\omega_{n-1}$, onde ω_{n-1} é o volume da esfera unitária de dimensão $n-1$. Mais explicitamente, podemos expressar em coordenadas:

$$m(g) = c_n \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{S_r^{n-1}} \sum_{i,j=1}^n (g_{ij,i} - g_{ii,j}) \nu^j dV_{S_r^{n-1}}^\delta.$$

Exemplo 2.3. *Calculemos a massa ADM do fim exterior da variedade de Schwarzschild (Exemplo 2.2):*

$$\left(\mathbb{R}^3 \setminus B_{m/2}^3, \left(1 + \frac{m}{2r}\right)^4 \delta \right).$$

Temos

$$\begin{aligned} g_{ij,i} &= 4 \left(1 + \frac{m}{2r}\right)^3 \frac{\partial}{\partial x^i} \left(1 + \frac{m}{2r}\right) \delta_{ij} \\ &= 4 \left(1 + \frac{m}{2r}\right)^3 \left(-\frac{m}{2} \frac{x^i}{r^3}\right) \delta_{ij}, \end{aligned}$$

e da mesma forma,

$$g_{ii,j} = 4 \left(1 + \frac{m}{2r}\right)^3 \left(-\frac{m}{2} \frac{x^j}{r^3}\right) \delta_{ii}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^3 (g_{ij,i} - g_{ii,j}) \nu^j &= 4 \left(1 + \frac{m}{2r}\right)^3 \frac{m}{2} \sum_{i,j=1}^3 \left(\left(-\frac{x^i}{r^3}\right) \delta_{ij} + \left(\frac{x^j}{r^3}\right) \delta_{ii} \right) \frac{x^j}{r} \\ &= 4 \left(1 + \frac{m}{2r}\right)^3 \frac{m}{2r^4} \sum_{i,j=1}^3 (-x^i \delta_{ij} + x^j \delta_{ii}) x^j \\ &= 4 \left(1 + \frac{m}{2r}\right)^3 \frac{m}{2r^4} 2r^2 \\ &= \frac{4m}{r^2} \left(1 + \frac{m}{2r}\right)^3. \end{aligned}$$

Usando a definição da massa ADM,

$$\begin{aligned} m(g) &= \frac{1}{16\pi} \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{S_r^2} \sum_{i,j=1}^3 (g_{ij,i} - g_{ii,j}) \nu^j dV_{S_r^2}^\delta \\ &= \frac{1}{16\pi} \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{S_r^2} \frac{4m}{r^2} \left(1 + \frac{m}{2r}\right)^3 dV_{S_r^2}^\delta \\ &= \frac{1}{16\pi} \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{4m}{r^2} \left(1 + \frac{m}{2r}\right)^3 4\pi r^2 \\ &= \lim_{r \rightarrow \infty} m \left(1 + \frac{m}{2r}\right)^3 \\ &= m. \end{aligned}$$

Agora definimos a versão geométrica da massa ADM:

Definição 2.4. Se (M^n, g) tal como na Definição 2.3. Considere o campo vetorial radial $X = r\partial_r = x^i \partial_i$ definido em uma carta assintótica. Então definimos a **massa intrínseca** por

$$m_I(g) = d_n \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{S_r^{n-1}} E^g(X, \nu^g) dV_{S_r^{n-1}}^g, \quad (2.4)$$

se o limite existir. Aqui E^g é o tensor de Einstein da Definição 1.21 e $d_n = 1/(n-1)(2-n)\omega_{n-1}$.

Para definirmos o centro de massa, precisamos de hipóteses adicionais para a métrica assintótica.

Definição 2.5. Supomos que (M^n, g) satisfaz as seguintes condições:

1. $\tau > (n - 2)/2$;
2. Em uma carta assintótica, a métrica g satisfaz as condições RT.
3. Abusando da notação, escolhemos uma função diferenciável e positiva r em M tal que $r = |x|$ na carta assintótica e que rS^g seja integrável em (M^n, g) ;
4. $m(g) \neq 0$.

Então definimos o **centro de massa** como sendo o vetor $C(g) = (c^1(g), \dots, c^n(g))$, cujas componentes são dadas por

$$c^\alpha(g) = \frac{c_n}{m(g)} \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{S_r^{n-1}} [x^\alpha (\operatorname{div}^\delta g - d \operatorname{tr}_\delta g) - \iota_{\partial_\alpha}(g - \delta) + \operatorname{tr}_\delta(g - \delta) dx^\alpha] (\nu^\delta) dV_{S_r^{n-1}}^\delta. \quad (2.5)$$

Também expressando em coordenadas, temos

$$c^\alpha(g) = \frac{c_n}{m(g)} \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{S_r^{n-1}} \left[\sum_{i,j=1}^n x^\alpha (g_{ij,i} - g_{ii,j}) \nu^j - \sum_{i=1}^n (g_{i\alpha} \nu^i - g_{ii} \nu^\alpha) \right] dV_{S_r^{n-1}}^\delta.$$

Note que no segundo termo substituímos $g_{i\alpha} - \delta_{i\alpha}$, $g_{ii} - \delta_{ii}$ por $g_{i\alpha}$, g_{ii} , respectivamente. Além disso, o vetor $C(g)$ existe e é independente da carta assintótica escolhida, a menos de ação por movimentos rígidos Euclidianos.

Por fim, temos também a formulação geométrica do centro de massa:

Definição 2.6. Seja (M^n, g) tal como na Definição 2.5 e, para cada $\alpha = 1, \dots, n$, considere os campos $X_{(\alpha)} = |x|^2 \partial_\alpha - 2x^\alpha x^i \partial_i$. Com isso, definimos o **centro de massa intrínseco** $C_I(g)$, como sendo o vetor cujas coordenadas são dadas por

$$c_I^\alpha(g) = -\frac{d_n}{2m(g)} \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{S_r^{n-1}} E^g(X_{(\alpha)}, \nu^g) dV_{S_r^{n-1}}^g, \quad (2.6)$$

se o limite existir.

2.3 A Análise de Michel para Invariantes Assintóticos

Com base na abordagem de Michel ([51]), provaremos a existência da massa e do centro de massa, isto é, que os limites em 2.3 e 2.5 existem.

Dentro de um escopo geral, consideramos duas métricas g e b numa variedade

completa M e um operador diferencial

$$F : \mathcal{M}(M) \rightarrow C^\infty(M),$$

aplicado no espaço das métricas de M , $\mathcal{M}(M)$. A ideia principal leva em consideração as propriedades do co-núcleo da linearização do operador F

$$\ker DF_b^* \subseteq C^\infty(M),$$

onde DF_b^* é a adjunta de DF_b .

Considere uma função $W \in C^\infty(M)$ e $(M_r)_{r \geq 0}$ uma exaustão de M por subconjuntos compactos, cujas fronteiras serão denotadas por S_r . Logo podemos computar

$$\int_{M_r} W(F(g) - F(b)) dV_{M_r}^b = \int_{M_r} W(DF_b(g - b)) dV_{M_r}^b + \int_{M_r} WQ(b, g) dV_{M_r}^b,$$

onde Q denota o termo quadrático na expansão de Taylor para F em torno de b .

Para que possa aparecer a integral de fluxo, a adjunta de DF_b^* deve satisfazer a identidade

$$\langle W, DF_b(g - b) \rangle_b - \langle DF_b^*(W), g - b \rangle_b = \operatorname{div}^b \mathbb{U}(W, g, b), \quad (2.7)$$

onde $\mathbb{U}(W, g, b)$ é uma 1-forma que depende linearmente de g e de b , e $\langle \cdot, \cdot \rangle_b$ é a métrica induzida por b nos fibrados tensoriais de M . Daí, obtemos

$$\begin{aligned} W(F(g) - F(b)) &= \langle W, F(g) - F(b) \rangle_b \\ &= \langle W, DF_b(g - b) + Q(b, g) \rangle_b \\ &= \langle DF_b^*(W), g - b \rangle_b + \langle W, Q(b, g) \rangle_b + \operatorname{div}^b \mathbb{U}(W, g, b) \\ &= \operatorname{div}^b \mathbb{U}(W, g, b) + \langle W, Q(b, g) \rangle_b \\ &= \operatorname{div}^b \mathbb{U}(W, g, b) + WQ(b, g), \end{aligned}$$

para $W \in \ker DF_b^*$. Integrando por partes o termo com divergente (Teorema ??), segue que

$$\int_{M_r} W(F(g) - F(b)) dV_{M_r}^b = \int_{S_r} \langle \mathbb{U}(W, g, b), \nu_b^b \rangle_b dV_{S_r}^b + \int_{M_r} WQ(g, b) dV_{M_r}^b,$$

isto é,

$$\int_{M_r} W(F(g) - F(b)) dV_{M_r}^b = \int_{S_r} \mathbb{U}(W, g, b)(\nu^b) dV_{S_r}^b + \int_{M_r} WQ(g, b) dV_{M_r}^b \quad (2.8)$$

Essa fórmula nos mostra que a integral de fluxo

$$\mathcal{H}_F(W, g, b) := \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{S_r} \mathbb{U}(W, g, b)(\nu^b) dV_{S_r}^b$$

existe, se as seguintes condições são satisfeitas:

1. A métrica g é assintótica a b de modo que $W(F(g) - F(b))$ e $WQ(g, b)$ são integráveis;
2. W pertence ao núcleo de DF_b^* .

Se escolhermos como operador F a curvatura escalar $S : \mathcal{S}(M) \rightarrow C^\infty(M)$. Temos que a linearização de S com base na métrica b (Apêndice A.2) é dada por

$$DS_b(h) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} S^{b+th} = \operatorname{div}^b \operatorname{div}^b(h) - \Delta^b(\operatorname{tr}_b h) - \langle \operatorname{Ric}^b, h \rangle_b,$$

Com isso, podemos computar sua adjunta:

Lema 2.3. *Seja S^b a curvatura escalar de uma variedade Riemanniana (M, b) . A adjunta da linearização DS_b é dada por*

$$DS_b^*(W) = \operatorname{Hess}^b W - (\Delta^b W)b - W\operatorname{Ric}^b,$$

para toda função $W \in C^\infty(M)$. Aqui, Hess^b denota a Hessiana e Δ^b o Laplaciano, tal como nas definições 1.24 e 1.25.

Demonstração. Para computar a adjunta, basta supor que M é fechada, isto é, com-

pacta e sem bordo (veja Definição 1.11). Logo,

$$\begin{aligned}
 \int_M W DS_b(h) dV_M^b &= \int_M W (-\Delta^b(\text{tr}_b h) + \text{div}^b(\text{div}^b h) - \langle h, \text{Ric}^b \rangle_b) dV_M^b \\
 &= \int_M (\langle \nabla W, \nabla(\text{tr}_b h) \rangle_b + \langle \nabla^2 W, h \rangle_b - W \langle h, \text{Ric}^b \rangle_b) dV_M^b \\
 &= \int_M (\langle -\Delta^b W, \text{tr}_b h \rangle_b + \langle \text{Hess}^b W, h \rangle_b - W \langle h, \text{Ric}^b \rangle_b) dV_M^b \\
 &= \int_M \langle h, (-\Delta^b W)b + \text{Hess}^b W - W \text{Ric}^b \rangle_b dV_M^b.
 \end{aligned}$$

Portanto, $DS_b^*(W) = \text{Hess}^b W - (\Delta^b W)b - W \text{Ric}^b$. □

Além disso, se W pertence a $\ker DS_b^*$, então

$$\begin{aligned}
 W DS_b(h) &= W(\text{div}^b(\text{div}^b h) - \Delta^b(\text{tr}_b h)) - \langle \text{Hess}^b W - (\Delta^b W)b, h \rangle_b \\
 &= \text{div}^b(W \text{div}^b h - W d(\text{tr}_b h) - \iota_{D^b W} h + (\text{tr}_b h)dW).
 \end{aligned}$$

Logo, para satisfazer 2.7, devemos definir a 1-forma $\mathbb{U}$ pela fórmula seguinte

$$\begin{aligned}
 \mathbb{U}(W, g, b) &= W(\text{div}^b(g - b) - d \text{tr}_b(g - b)) - \iota_{\nabla^b W}(g - b) + \text{tr}_b(g - b)dW \\
 &= W(\text{div}^b g - d \text{tr}_b g) - \iota_{D^b W}(g - b) + \text{tr}_b(g - b)dW.
 \end{aligned} \tag{2.9}$$

Até o momento consideramos apenas que F é a curvatura escalar. Para avançarmos, vamos trabalhar com a métrica de base $b = \delta$. Daí utilizamos as fórmulas da adjunta no Lema 2.3 e de $\mathbb{U}$ em 2.9, para obter, respectivamente, as seguintes identidades

$$DS_\delta^*(W) = \text{Hess}^\delta W - (\Delta^\delta W)\delta, \tag{2.10}$$

$$\mathbb{U}(W, g, \delta) = W(\text{div}^\delta g - d \text{tr}_\delta g) - \iota_{D^\delta W}(g - \delta) + \text{tr}_\delta(g - \delta)dW, \tag{2.11}$$

Por 2.10, verifica-se facilmente que as funções afim pertencem ao espaço $\ker DS_\delta^*$.

Seja agora $W \equiv 1$ e impomos as seguintes condições: S^g é integrável sobre (M^n, g) e g é uma métrica assintoticamente plana com ordem $\tau > (n - 2)/2$. Fixemos uma carta assintótica $(M \setminus K, \Phi)$ e consideremos a exaustão M_r cujas fronteiras S_r são as esferas coordenadas nesta carta. Da equação 2.8, obtemos

$$\mathcal{H}_S(1, g, \delta) = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{M_r} S^g dV_{M_r}^\delta - \int_{M_r} Q(g, \delta) dV_{M_r}^\delta, \tag{2.12}$$

cuja existência se deve à integrabilidade de S^g , que faz convergir o primeiro termo, e ao fato de que $Q(g, \delta)$ consiste de uma combinação de termos $(g - \delta) * \bar{\nabla}^2 g$ e $\bar{\nabla} g * \bar{\nabla} g$ (veja Apêndice A.4), que são integráveis devido ao valor de τ . Aqui, $*$ é a notação de Hamilton para uma combinação de produtos tensoriais com contrações e $\bar{\nabla}$ é a conexão Euclidiana. Além disso,

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_S(1, g, \delta) &= \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{S_r} \mathbb{U}(1, g, \delta)(\nu^\delta) dV_{S_r}^\delta \\ &= \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{S_r^{n-1}} (\operatorname{div}^\delta g - d(\operatorname{tr}_\delta g))(\nu^\delta) dV_{S_r^{n-1}}^\delta \\ &= 2(n-1)\omega_{n-1}m(g), \end{aligned}$$

onde $m(g)$ é a massa dada na Definição 2.2.

Observação 2.2. *Como dito anteriormente na Introdução, Bartnik e Chruściel ([9, 17]) também provaram que a massa ADM independe da carta assintótica escolhida. Michel ([51]) também prova este resultado num contexto mais geral que abrange tanto a massa ADM quanto o centro de massa.*

Se na equação 2.11 escolhermos $W = W^{(\alpha)} = x^\alpha$ (α -ésima função coordenada da carta Φ , para α em $\{1, \dots, n\}$), o mesmo procedimento leva à definição clássica da α -ésima coordenada do centro de massa da Definição 2.5, isto é,

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_S(W^{(\alpha)}, g, \delta) &= \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{S_r} \mathbb{U}(W^{(\alpha)}, g, \delta)(\nu^\delta) dV_{S_r}^\delta \\ &= 2(n-1)\omega_{n-1}m(g)c^\alpha(g), \end{aligned}$$

para qualquer $\alpha \in \{1, \dots, n\}$. Se impusermos as condições da Definição 2.5, então esse limite converge.

2.4 A Igualdade entre as Duas Versões de Massa

Para provarmos a igualdade entre as versões clássica e intrínseca da massa ADM e do centro de massa, vamos precisar de resultados preliminares envolvendo a aplicação do tensor de Einstein em campos vetoriais Killing conforme.

Primeiramente estudamos as propriedades desses tipos de vetores: seja X um campo vetorial sobre uma variedade Riemanniana (M^n, g) . Dizemos que X é **Killing conforme** se

$$\mathcal{L}_X g = 2\psi_X g,$$

para alguma função $\psi_X \in C^\infty(M)$, denominada o **fator conforme** de X . Da Equação 1.4, segue que

$$\begin{aligned}
 2\psi_X \langle Y, Z \rangle &= \mathcal{L}_X \langle Y, Z \rangle \\
 &= X(\langle Y, Z \rangle) - \langle [X, Y], Z \rangle - \langle Y, [X, Z] \rangle \\
 &= \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle - \langle [X, Y], Z \rangle - \langle Y, [X, Z] \rangle \\
 &= \langle \nabla_Y X, Z \rangle + \langle Y, \nabla_Z X \rangle,
 \end{aligned} \tag{2.13}$$

para todos $Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$. Em particular, tomando um referencial ortonormal $\{e_i\}$ em M , fazendo $Y = Z = e_i$ em 2.13 e somando sobre $1 \leq i \leq n$, obtemos

$$\psi_X = \frac{1}{n} \operatorname{div}^g X. \tag{2.14}$$

Seja agora ϕ_t o fluxo gerado por X . Fixado um ponto $p \in M$, consideremos a família de tensores 2-covariantes em p , dada por $g(t) = (\phi_t^* g)|_p$. Pela Proposição 1.2, temos que

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=t_0} g(t) = \phi_{t_0}^* (\mathcal{L}_X g) = \phi_{t_0}^* (2\psi_X g)|_p = (2\psi_X \circ \phi_{t_0}(p)) \phi_{t_0}^* g|_p = (2\psi_X \circ \phi_{t_0}(p)) g(t_0).$$

Logo, $g(t)$ é solução da seguinte equação diferencial:

$$\frac{d}{dt} g(t) = (2\psi_X \circ \phi_t(p)) g(t), \quad g(0) = g_p$$

cuja solução é dada por

$$g(t) = e^{2u_t} g_p, \quad u_t = \int_0^t \psi_X \circ \phi_s(p) ds. \tag{2.15}$$

Portanto, o fluxo ϕ_t de X age por difeomorfismos conformes com fator e^{2u_t} .

Agora vamos calcular a adjunta da divergência de campos vetoriais quando nos restringimos a $(0, 2)$ -tensores simétricos. Para isso precisamos do seguinte caso particular do teorema da Divergência 1.10:

Lema 2.4. *Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana compacta e orientável com bordo ∂M . Se $\omega \in \mathfrak{X}^*(M)$ e T é um tensor 2-covariante simétrico ($T \in \mathcal{S}_2(M)$), então*

$$\int_M \langle \mathcal{S}(\nabla \omega), T \rangle \, dV_M = \int_{\partial M} \langle \omega \otimes \nu^\flat, T \rangle \, dV_{\partial M} - \int_M \langle \omega, \operatorname{div} T \rangle \, dV_M.$$

Demonstração. Pela Observação 1.2, temos que $\nabla \omega = \mathcal{S}(\nabla \omega) + \mathcal{A}(\nabla \omega)$. Logo, é

suficiente mostrar que $\langle \nabla \omega, T \rangle = \langle \mathcal{S}(\nabla \omega), T \rangle$, ou equivalentemente, $\langle \mathcal{A}(\nabla \omega), T \rangle = 0$. Em coordenadas,

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\nabla \omega)_{ij} &= \frac{1}{2}(\omega_{j;i} - \omega_{i;j}) \\ &= \frac{1}{2}(\partial_i(\omega_j) - \partial_j(\omega_i) + (\Gamma_{ji}^k - \Gamma_{ij}^k)\omega_k) \\ &= \frac{1}{2}(\partial_i(\omega_j) - \partial_j(\omega_i)). \end{aligned}$$

Como T é simétrico, temos que $\langle \mathcal{A}(\nabla \omega), T \rangle = \frac{1}{2}g^{ik}g^{jl}(\partial_k(\omega_l) - \partial_l(\omega_k))T_{ij} = 0$. $\square$

Se fizermos $\omega = X^\flat$, segue imediatamente que:

Corolário 2.5. *Se $X \in \mathfrak{X}(M)$, então*

$$\int_M \langle (-\operatorname{div}^g)^* X, T \rangle_g dV_M^g = \int_{\partial M} T(X, \nu^g) dV_{\partial M}^g - \int_M \langle X^\flat, \operatorname{div}^g T \rangle_g dV_M^g,$$

onde definimos a seguinte adjunta operando em campos vetoriais:

$$(-\operatorname{div})^* : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathcal{S}_2(M), \quad (-\operatorname{div})^* X \mapsto \mathcal{S}(\nabla X^\flat).$$

Mais especificamente, dados $Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$

$$\begin{aligned} (-\operatorname{div}^h)^* X(Y, Z) &= \frac{1}{2} (Y \langle X, Z \rangle - \langle X, \nabla_Y Z \rangle + Z \langle X, Y \rangle - \langle X, \nabla_Z Y \rangle) \\ &= \frac{1}{2} (\langle \nabla_Y X, Z \rangle + \langle \nabla_Z X, Y \rangle) \\ &= \frac{1}{2} \mathcal{L}_X g(Y, Z). \end{aligned}$$

Pela Equação 2.14, obtemos finalmente para X Killing conforme

$$(-\operatorname{div}^g)^* X = \frac{1}{2} \mathcal{L}_X g = \frac{1}{n} (\operatorname{div}^g X) g. \quad (2.16)$$

Lema 2.6 (Identidade Integral de Bianchi.). *Seja h uma métrica Riemanniana em uma variedade compacta e orientável Ω com bordo $\partial\Omega$ e X um campo Killing conforme. Então*

$$\int_{\partial\Omega} E^h(X, \nu^h) dV_{\partial\Omega}^h = \frac{2-n}{2n} \int_{\Omega} S^h(\operatorname{div}^h X) dV_{\Omega}^h,$$

onde ν^h é o campo normal unitário externo a $\partial\Omega$.

Demonstração. Da identidade contraída de Bianchi 1.6, temos que $\operatorname{div}^h E^h = 0$. Daí,

pelo Corolário 2.5, segue que

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} E^h(X, \nu^h) dV_{\partial\Omega}^h &= \int_{\partial\Omega} \left(\text{Ric}^h - \frac{1}{2} S^h h \right) (X, \nu^h) dV_{\partial\Omega}^h \\ &= \int_{\Omega} \left\langle \text{Ric}^h - \frac{1}{2} S^h h, (-\text{div}^h)^* X \right\rangle_h dV_{\Omega}^h, \end{aligned}$$

Pela Equação 2.16, encontramos

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} \left(\text{Ric}^h - \frac{1}{2} S^h h \right) (X, \nu^h) dV_{\partial\Omega}^h &= \frac{1}{n} \int_{\Omega} \text{tr}_h \left(\text{Ric}^h - \frac{1}{2} S^h h \right) (\text{div}^h X) dV_{\Omega}^h \\ &= \frac{2-n}{2n} \int_{\Omega} S^h (\text{div}^h X) dV_{\Omega}^h, \end{aligned}$$

e isso conclui a prova. $\square$

Lema 2.7. *Seja h uma métrica Riemanniana C^3 e X um campo Killing conforme. Se h é uma métrica de Einstein com constante $\lambda(n-1)$, então $V = \text{div}^h X$ pertence ao núcleo de DS_h^* . Mais precisamente,*

$$\text{Hess}^h V = \lambda V h. \quad (2.17)$$

Demonstração. Pelo Lema 2.3 temos que $DS_h^*(V) = \text{Hess}^h V - (\Delta^h V)h - V\text{Ric}^h$, logo seu núcleo é o conjunto das soluções de 2.17 se $\text{Ric}^h = \lambda(n-1)h$.

Seja ϕ_t o fluxo local de X , o qual, pela Equação 2.15, age por difeomorfismos conforme com fator e^{2u_t} no tempo $t \geq 0$, com $u_0 = 0$. Segue que

$$\text{Ric}^{\phi_t^* h} = \phi_t^* \text{Ric}^h = \lambda(n-1)\phi_t^* h,$$

que pode ser escrito na forma

$$\text{Ric}^{e^{2u_t} h} = \lambda(n-1)e^{2u_t} h,$$

Pela Proposição 1.8, os tensores de Ricci das duas métricas se relacionam por

$$\text{Ric}^{e^{2u_t} h} = \text{Ric}^h - (n-2) (\text{Hess}^h u_t - du_t \otimes du_t) + (-\Delta_h u_t - (n-2)|du_t|_h^2) h,$$

donde podemos deduzir que

$$-(n-2) (\text{Hess}^h u_t - du_t \otimes du_t) + (-\Delta_h u_t - (n-2)|du_t|_h^2) h = \lambda(n-1)(e^{2u_t} - 1)h.$$

Agora diferenciamos em $t = 0$. Denotando por $\dot{u}$ a primeira variação de u_t , segue das equações 2.14 e 2.15

$$\dot{u}(p) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} u(t) = \psi_X(p) = \frac{1}{n} \operatorname{div}^g X(p),$$

para todo $p \in M$. Logo $\operatorname{div}^g X = n\dot{u}$. Como $u_0 = 0$, segue que

$$-(n-2)\operatorname{Hess}^h \dot{u} - (\Delta_h \dot{u})h = 2(n-1)\lambda \dot{u}h. \quad (2.18)$$

Tomando o traço, obtemos a identidade

$$-2(n-1)\Delta_h \dot{u} = 2n(n-1)\lambda \dot{u},$$

logo $\Delta_h \dot{u} = -n\lambda \dot{u}$. Inserindo na Equação 2.18 leva a $\operatorname{Hess}^h \dot{u} = \lambda \dot{u}h$, que é a expressão desejada. $\square$

Agora temos os resultados necessários para provar a igualdade entre a expressão clássica da massa e a versão via tensor de Einstein.

Teorema 2.8. *Seja (M^n, g) é uma variedade assintoticamente plana de ordem $\tau > (n-2)/2$, satisfazendo as condições RT e com $S^g, rS^g \in L^1(dV^g)$. Então $m(g) = m_I(g)$ e $C(g) = C_I(g)$.*

Demonstração. Fixemos uma carta assintótica $\Phi : M \setminus K \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \overline{B}_{r_0}$. Como a massa é definida no infinito, podemos substituir a parte compacta K de M pela bola topológica $\overline{B}_{r_0}$ na carta. A variedade não é modificada fora de K . Para $R \gg 4r_0$, definimos uma função de corte χ_R que se anula dentro da esfera de raio $R/2$, é igual a 1 fora da esfera de raio $3R/4$ e satisfaz

$$|\nabla \chi_R| \leq C_1 R^{-1}, \quad |\nabla^2 \chi_R| \leq C_2 R^{-2}, \quad \text{e} \quad |\nabla^3 \chi_R| \leq C_3 R^{-3}. \quad (2.19)$$

para algumas constantes C_i ($i = 1, 2, 3$) que não dependem de R . Para construir χ_R , partimos da função $C^\infty(\mathbb{R})$

$$f(t) = \begin{cases} \exp(-t^{-1}) & t > 0, \\ 0 & t \leq 0. \end{cases}$$

Com isso, definimos

$$\psi(t) = \frac{f(t)}{f(t) + f(1-t)},$$

de modo que ψ é identicamente 1 quando $t \geq 1$ e é nula se $t \leq 0$. Agora escrevemos

$$\phi(t) = \psi(t+2)\psi(2-t).$$

Essa função é nula se $|t| \geq 2$ e idêntica a 1 se $|t| \leq 1$. Além disso, as derivadas de todas as ordens de ϕ são limitadas em toda a reta $\mathbb{R}$. Agora faremos uma mudança de variáveis linear que leva o segmento $[\frac{R}{2}, \frac{3R}{4\sqrt{n}}]$ para $[1, 2]$:

$$s \mapsto t = \frac{4s\sqrt{n} + R(3 - 4\sqrt{n})}{R(3 - 2\sqrt{n})},$$

Daí, temos a composta $k(s) = \phi(t(s))$. Construimos χ_R da forma

$$\chi_R(x) = 1 - k(x^1) \dots k(x^n),$$

é de fácil verificação que tal função satisfaz as condições dadas acima. Denotemos $\chi = \chi_R$ e definimos a seguinte métrica no anel $\Omega_R = A(\frac{R}{4}, R)$:

$$h = \chi g + (1 - \chi)\delta,$$

e colamos a métrica Euclidiana dentro da bola $B(\frac{R}{4})$, obtendo assim uma métrica completa em $\mathbb{R}^n$ que também denotaremos por h .

Seja agora X um campo de Killing conforme em relação à métrica Euclidiana δ . O Lema 2.7 nos diz que $V = \operatorname{div}^\delta X$ pertence a $\ker DS_\delta^*$. Agora aplicamos o Corolário 2.5 sobre o anel $\Omega_R = A(\frac{R}{4}, R)$:

$$\int_{S_R^{n-1}} \left(\operatorname{Ric}^g - \frac{1}{2} S^g g \right) (X, \nu^g) dV_{S_R^{n-1}}^g = \int_{\Omega_R} \left\langle \operatorname{Ric}^h - \frac{1}{2} S^h h, (-\operatorname{div}^h)^* X \right\rangle_h dV_{\Omega_R}^h,$$

Note que a contribuição em $\frac{R}{4}$ para a integral do bordo se anula, pois h é plana nessa região. Pela Equação 2.16, decompomos

$$(-\operatorname{div}^h)^* X = \frac{1}{n} (\operatorname{div}^h X) h - (\operatorname{div}^h)_0^* X,$$

onde $-(\operatorname{div}^h)_0^* X$ é a parte sem traço. Dessa forma,

$$\begin{aligned} \int_{S_R^{n-1}} \left(\operatorname{Ric}^g - \frac{1}{2} S^g g \right) (X, \nu^g) dV_{S_R^{n-1}}^g &= \frac{1}{n} \int_{\Omega_R} \operatorname{tr}_h \left(\operatorname{Ric}^h - \frac{1}{2} S^h h \right) (\operatorname{div}^h X) dV_{\Omega_R}^h \\ &\quad - \int_{\Omega_R} \left\langle \operatorname{Ric}^h - \frac{1}{2} S^h h, (\operatorname{div}^h)_0^* X \right\rangle_h dV_{\Omega_R}^h. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \int_{S_R} \left(\operatorname{Ric}^g - \frac{1}{2} S^g g \right) (X, \nu^g) dV_{S_R^{n-1}}^g &= \frac{2-n}{2n} \int_{\Omega_R} (\operatorname{div}^h X) S^h dV_{\Omega_R}^h \\ &\quad - \int_{\Omega_R} \left\langle \operatorname{Ric}^h - \frac{1}{2} S^h h, (\operatorname{div}^h)_0^* X \right\rangle_h dV_{\Omega_R}^h. \quad (2.20) \end{aligned}$$

Agora escolhamos o campo radial $X = r\partial_r$. Com isso,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_X \delta(Y, Z) &= \delta(\bar{\nabla}_Y X, Z) + \delta(\bar{\nabla}_Z X, Y) \\ &= \delta(Y^i \bar{\nabla}_i X, Z) + \delta(Z^i \bar{\nabla}_i X, Y) \\ &= \delta(Y^i \partial_i, Z) + \delta(Z^i \partial_i, Y) \\ &= 2\delta(Y, Z), \end{aligned}$$

logo X é Killing conforme com relação a δ . Além disso, $\operatorname{div}^\delta X = n$ e $(\operatorname{div}^\delta)_0^* X = 0$, pois

$$\begin{aligned} (\operatorname{div}^\delta)_0^* X &= (\operatorname{div}^\delta)^* X + \frac{1}{n} (\operatorname{div}^\delta) \delta \\ &= -\frac{1}{2} \mathcal{L}_X \delta + \delta \\ &= -\delta + \delta = 0 \end{aligned}$$

Podemos substituir dV^h , div^h e $(\operatorname{div}^h)_0^*$ pelos seus respectivos termos calculados na métrica δ . De fato, das condições de decaimento calculadas na Proposição 2.1, das propriedades da função de corte χ 2.19, do fato de $\tau > (n-2)/2$ e de $|X| = r$, obtemos

do primeiro termo no lado direito de 2.20:

$$\begin{aligned}
 & \left| \int_{\Omega_R} S^h \operatorname{div}^h X \, dV_{\Omega_R}^h - \int_{\Omega_R} S^h \operatorname{div}^\delta X \, dV_{\Omega_R}^\delta \right| \\
 &= \left| \int_{\Omega_R} S^h \operatorname{div}^h X (1 + O(r^{-\tau})) \, dV_{\Omega_R}^\delta - \int_{\Omega_R} S^h \operatorname{div}^\delta X \, dV_{\Omega_R}^\delta \right| \\
 &\leq \int_{\Omega_R} |S^h (\operatorname{div}^h X - \operatorname{div}^\delta X)| \, dV_{\Omega_R}^\delta + \int_{\Omega_R} |S^h \operatorname{div}^h X (O(r^{-\tau}))| \, dV_{\Omega_R}^\delta \\
 &\leq C(|\Gamma| \|X\| |S^h|) R^n \leq C R^{-2\tau-2+n}, \tag{2.21}
 \end{aligned}$$

para R suficientemente grande. Aqui $|\Gamma| := \sup \{\Gamma_{ij}^k(x); x \in \Omega_R \text{ e } i, j, k = 1, \dots, n\}$, que existe, pois Ω_R é limitado. Como $(\operatorname{div}^\delta)_0^* X = 0$, o último termo em 2.20 pode ser tratado do mesmo jeito. Expressando em coordenadas, temos que

$$\begin{aligned}
 (\operatorname{div}^h)_0^* X_{ij} &= -\frac{1}{2}(\langle \nabla_i X, \partial_j \rangle + \langle \nabla_j X, \partial_i \rangle) + \frac{h_{ij}}{n} \operatorname{div}^h X \\
 &= -\frac{1}{2}((\partial_i x^k) h_{kj} + \Gamma_{im}^n x^m h_{nj} + (\partial_j x^k) h_{ki} + \Gamma_{jm}^n x^m h_{ni}) + h_{ij} + \frac{h_{ij}}{n} \Gamma_{nm}^n x^m \\
 &= -\frac{1}{2}(\delta_i^k h_{kj} + \delta_j^k h_{ki} + \Gamma_{im}^n x^m h_{nj} + \Gamma_{jm}^n x^m h_{ni}) + h_{ij} + \frac{h_{ij}}{n} \Gamma_{nm}^n x^m \\
 &= -\frac{1}{2}(h_{ij} + h_{ji} + \Gamma_{im}^n x^m h_{nj} + \Gamma_{jm}^n x^m h_{ni}) + h_{ij} + \frac{h_{ij}}{n} \Gamma_{nm}^n x^m \\
 &= \frac{h_{ij}}{n} \Gamma_{nm}^n x^m - \frac{1}{2}(\Gamma_{im}^n x^m h_{nj} + \Gamma_{jm}^n x^m h_{ni}).
 \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
 \langle \operatorname{Ric}^h, (\operatorname{div}^h)_0^* X \rangle_h &= h^{ik} h^{jl} (\operatorname{Ric}^h)_{kl} \left(\frac{h_{ij}}{n} \Gamma_{nm}^n x^m - \frac{1}{2} \Gamma_{im}^n x^m h_{nj} - \frac{1}{2} \Gamma_{jm}^n x^m h_{ni} \right) \\
 &= (\operatorname{Ric}^h)_{kl} \left(\frac{1}{n} \delta_j^k h^{jl} \Gamma_{nm}^n x^m - \frac{1}{2} \delta_n^l h^{ik} \Gamma_{im}^n x^m - \frac{1}{2} \delta_n^k h^{jl} \Gamma_{jm}^n x^m \right) \\
 &= (\operatorname{Ric}^h)_{kl} \left(\frac{1}{n} h^{kl} \Gamma_{nm}^n x^m - \frac{1}{2} h^{ik} \Gamma_{im}^l x^m - \frac{1}{2} h^{jl} \Gamma_{jm}^k x^m \right).
 \end{aligned}$$

Da mesma forma,

$$\begin{aligned}
 \left\langle -\frac{1}{2}S^h h, (\operatorname{div}^h)_0^* X \right\rangle_h &= -h^{ik}h^{jl}\frac{1}{2}S^h h_{kl} \left(\frac{1}{n}h_{ij}\Gamma_{nm}^n x^m - \frac{1}{2}\Gamma_{im}^n x^m h_{nj} - \frac{1}{2}\Gamma_{jm}^n x^m h_{ni} \right) \\
 &= -\frac{1}{2}S^h h^{ij} \left(\frac{1}{n}h_{ij}\Gamma_{nm}^n x^m - \frac{1}{2}\Gamma_{im}^n x^m h_{nj} - \frac{1}{2}\Gamma_{jm}^n x^m h_{ni} \right) \\
 &= -\frac{1}{2}S^h \Gamma_{nm}^n x^m + \frac{1}{4}S^h \delta_n^i \Gamma_{im}^n x^m + \frac{1}{4}S^h \delta_n^j \Gamma_{jm}^n x^m \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Juntando os dois produtos internos, segue que

$$\begin{aligned}
 \left\langle \operatorname{Ric}^h - \frac{1}{2}S^h h, (\operatorname{div}^h)_0^* X \right\rangle_h &= (\operatorname{Ric}^h)_{kl}h^{ik}h^{jl}(n^{-1}\Gamma_{nm}^n h_{ij}x^m - 2^{-1}\Gamma_{im}^n h_{nj}x^m - 2^{-1}\Gamma_{jm}^n h_{ni}x^m) \\
 &= (\operatorname{Ric}^h)_{kl}(n^{-1}\delta_j^k h^{jl}\Gamma_{nm}^n x^m - 2^{-1}\delta_n^l h^{ik}\Gamma_{im}^n x^m - 2^{-1}\delta_n^k h^{jl}\Gamma_{jm}^n x^m) \\
 &= (\operatorname{Ric}^h)_{kl}(n^{-1}h^{kl}\Gamma_{nm}^n x^m - 2^{-1}h^{ik}\Gamma_{im}^l x^m - 2^{-1}h^{jl}\Gamma_{jm}^k x^m).
 \end{aligned}$$

Pelas mesmas razões da desigualdade 2.21, segue que para R suficientemente grande

$$\int_{\Omega_R} \left\langle \operatorname{Ric}^h - \frac{1}{2}S^h h, (\operatorname{div}^h)_0^* X \right\rangle_h dV_{\Omega_R}^h \leq C(|\Gamma||X||\operatorname{Ric}^h|)R^n \leq CR^{-2\tau-2+n}, \quad (2.22)$$

para R grande o suficiente. Aqui $|\operatorname{Ric}^h| := \sup \{ \operatorname{Ric}_{ij}^h(x); x \in \Omega_R \text{ e } i, j = 1, \dots, n \}$, que existe, pois Ω_R é limitado. Da Equação 2.20 junto com as desigualdades 2.21 e 2.22 acima, concluímos que

$$\int_{S_R} \left(\operatorname{Ric}^g - \frac{1}{2}S^g g \right) (X, \nu^g) dV_{S_R}^g = \frac{2-n}{2n} \int_{\Omega_R} (\operatorname{div}^\delta X) S^h dV_{\Omega_R}^\delta + o(1). \quad (2.23)$$

Agora argumentamos conforme a análise de Michel expressa pela Equação 2.8). Aplicando na região Ω_R :

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega_R} (\operatorname{div}^\delta X) S^h dV_{\Omega_R}^\delta &= \int_{S_R^{n-1}} \mathbb{U}(\operatorname{div}^\delta X, g, \delta)(\nu^\delta) dV_{S_R^{n-1}}^\delta + \int_{S_{R/4}^{n-1}} \mathbb{U}(\operatorname{div}^\delta X, h, \delta)(\nu^\delta) dV_{S_{R/4}^{n-1}}^\delta \\
 &\quad + \int_{\Omega_R} (\operatorname{div}^\delta X) Q(h, \delta) dV_{\Omega_R}^\delta.
 \end{aligned}$$

Como $h = \delta$ em $|x| = R/4$, a contribuição da integral de fronteira em $S_{R/4}^{n-1}$ se anula. Além disso, levando-se em consideração as propriedades 2.19 de χ , as condições de decaimento com $\tau > (n-2)/2$ e que $\operatorname{div}^\delta X = n$, temos que a integral com o termo

quadrático Q tende a 0 quando R tende ao infinito. Usando 2.23, obtemos

$$c_n \int_{S_R^{n-1}} E^g(X, \nu^g) dV_{S_R^{n-1}}^g = c_n \int_{S_R^{n-1}} \left(\text{Ric}^g - \frac{1}{2} S^g g \right) (X, \nu^g) dV_{S_R^{n-1}}^g = \frac{2-n}{2} m(g) + o(1),$$

o que dá, no caso da massa, o resultado esperado.

Para provar a igualdade no caso do centro de massa, escolhemos $X = X_{(\alpha)} = |x|^2 \partial_\alpha - 2x^\alpha x^i \partial_i$. Daí, podemos computar

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{X_{(\alpha)}} \delta(Y, Z) &= \delta(Y^i \bar{\nabla}_i X_{(\alpha)}, Z) + \delta(Z^i \bar{\nabla}_i X_{(\alpha)}, Y) \\ &= \delta(Y^i \partial_i (r^2 - 2(x^\alpha)^2) \partial_\alpha + \sum_{j \neq \alpha} Y^i \partial_i (-2x^\alpha x^j) \partial_j, Z) \\ &\quad + \delta(Z^i \partial_i (r^2 - 2(x^\alpha)^2) \partial_\alpha + \sum_{j \neq \alpha} Z^i \partial_i (-2x^\alpha x^j) \partial_j, Y) \\ &= \delta(-2Y^\alpha x^\alpha \partial_\alpha + 2(\sum_{i \neq \alpha} Y^i x^i) \partial_\alpha + \sum_{i \neq \alpha} (-2Y^\alpha x^i - 2Y^i x^\alpha) \partial_i, Z) \\ &\quad + \delta(-2Z^\alpha x^\alpha \partial_\alpha + 2(\sum_{i \neq \alpha} Z^i x^i) \partial_\alpha + \sum_{i \neq \alpha} (-2Z^\alpha x^i - 2Z^i x^\alpha) \partial_i, Y). \\ &= \delta(-2Y^\alpha x^i \partial_i + 2(\sum_{i \neq \alpha} Y^i x^i) \partial_\alpha - 2x^\alpha \sum_{j \neq \alpha} Y^j \partial_j, Z) \\ &\quad + \delta(-2Z^\alpha x^i \partial_i + 2(\sum_{i \neq \alpha} Z^i x^i) \partial_\alpha - 2x^\alpha \sum_{j \neq \alpha} Z^j \partial_j, Y). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{X_{(\alpha)}} \delta(Y, Z) &= -2Y^\alpha (\sum_i Z^i x^i) + 2Z^\alpha (\sum_{i \neq \alpha} Y^i x^i) - 2x^\alpha \sum_{i \neq \alpha} Z^i Y^i \\ &\quad - 2Z^\alpha (\sum_i Y^i x^i) + 2Y^\alpha (\sum_{i \neq \alpha} Z^i x^i) - 2x^\alpha \sum_{i \neq \alpha} Z^i Y^i \\ &= -4x^\alpha (\sum_{i \neq \alpha} Y^i Z^i) - 2Y^\alpha Y^\alpha x^\alpha - 2Z^\alpha Y^\alpha x^\alpha \\ &= -4x^\alpha (\sum_i Y^i Z^i) = -4x^\alpha \delta(Y, Z). \end{aligned}$$

Assim, $X_{(\alpha)}$ é Killing conforme. Mais ainda, $\text{div}^\delta X_{(\alpha)} = -2nx^\alpha = 2nW^{(\alpha)}$ e

$$\begin{aligned} (\text{div}^\delta)_0^* X_{(\alpha)} &= -\frac{1}{2} \mathcal{L}_{X_{(\alpha)}} \delta + \frac{1}{n} (-2nx^\alpha) \delta \\ &= 2x^\alpha \delta - 2x^\alpha \delta = 0. \end{aligned}$$

Agora podemos usar o mesmo argumento anterior ao substituir a métrica h por δ :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_R} S^h \operatorname{div}^h X_{(\alpha)} dV_{\Omega_R}^h - \int_{\Omega_R} S^h \operatorname{div}^\delta X_{(\alpha)} dV_{\Omega_R}^\delta \\ &= \int_{\Omega_R} S^h \operatorname{div}^h X_{(\alpha)} (1 + O(r^{-\tau})) dV_{\Omega_R}^\delta - \int_{\Omega_R} S^h \operatorname{div}^\delta X_{(\alpha)} dV_{\Omega_R}^\delta. \end{aligned}$$

Expressando em coordenadas, temos

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\Omega_R} S^h \operatorname{div}^h X_{(\alpha)} dV_{\Omega_R}^h - \int_{\Omega_R} S^h \operatorname{div}^\delta X_{(\alpha)} dV_{\Omega_R}^\delta \right| \\ & \leq \int_{\Omega_R} |S^h (\operatorname{div}^h X_{(\alpha)} - \operatorname{div}^\delta X_{(\alpha)})| dV_{\Omega_R}^\delta + \int_{\Omega_R} |S^h \operatorname{div}^h X_{(\alpha)} (O(r^{-\tau}))| dV_{\Omega_R}^\delta \\ &= \int_{\Omega_R} \left| S^h \left(\Gamma_{i\alpha}^i (r^2 - 2(x^\alpha)^2) + \sum_{j \neq \alpha} \Gamma_{ij}^i (-2x^\alpha x^i) \right) \right| dV_{\Omega_R}^\delta \\ &+ \int_{\Omega_R} \left| S^h \left(\Gamma_{i\alpha}^i (r^2 - 2(x^\alpha)^2) + \sum_{j \neq \alpha} \Gamma_{ij}^i (-2x^\alpha x^i) \right) (O(r^{-\tau})) \right| dV_{\Omega_R}^\delta \\ &+ \int_{\Omega_R} |S^h (-2nx^\alpha) (O(r^{-\tau}))| dV_{\Omega_R}^\delta. \end{aligned}$$

Usando as condições RT com $\tau > (n-2)/2$, ou, mais precisamente, as ordens de decaimento da Proposição 2.2, e novamente as propriedades da função de corte χ :

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\Omega_R} S^h \operatorname{div}^h X_{(\alpha)} dV_{\Omega_R}^h - \int_{\Omega_R} S^h \operatorname{div}^\delta X_{(\alpha)} dV_{\Omega_R}^\delta \right| \\ & \leq \int_{\Omega_R} \left| \left((S^h \Gamma_{i\alpha}^i)^{\text{even}} (r^2 - 2(x^\alpha)^2) + (S^h \sum_{j \neq \alpha} \Gamma_{ij}^i)^{\text{even}} (-2x^\alpha x^i) \right) \right| dV_{\Omega_R}^\delta \\ & \leq \int_{\Omega_R} \left| \left((S^h \Gamma_{i\alpha}^i)^{\text{even}} (r^2 - 2(x^\alpha)^2) + (S^h \sum_{j \neq \alpha} \Gamma_{ij}^i)^{\text{even}} (-2x^\alpha x^i) \right) O(r^{-\tau}) \right| dV_{\Omega_R}^\delta \\ &+ \int_{\Omega_R} |(S^h)^{\text{odd}} (-2nx^\alpha) (O(r^{-\tau}))| dV_{\Omega_R}^\delta \\ & \leq CR^n (R^{-\tau-1} R^2 R^{-\tau-3} + R^{-\tau-2} R^2 R^{-\tau-2} + R R^{-\tau-3} R^{-\tau}) \\ &= CR^{-2\tau-2+n}, \end{aligned}$$

para R suficientemente grande. Já que $(\operatorname{div}^\delta)_0^* X_{(\alpha)} = 0$, podemos fazer os mesmos cálculos que fizemos com o campo radial em 2.22 e utilizar os mesmos decaimentos

acima para concluir que

$$\int_{\Omega_R} \left\langle \text{Ric}^h - \frac{1}{2} S^h h, (\text{div}^h)_0^* X_{(\alpha)} \right\rangle_h dV_{\Omega_R}^h = o(1).$$

Agora argumentamos conforme a análise de Michel expressa pela Equação 2.8). Aplicando na região Ω_R :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_R} (\text{div}^\delta X_{(\alpha)}) S^h dV_{\Omega_R}^\delta &= \int_{S_R^{n-1}} \mathbb{U}(\text{div}^\delta X_{(\alpha)}, g, \delta)(\nu^\delta) dV_{S_R^{n-1}}^\delta + \int_{S_{R/4}^{n-1}} \mathbb{U}(\text{div}^\delta X_{(\alpha)}, h, \delta)(\nu^\delta) dV_{S_{R/4}^{n-1}}^\delta \\ &\quad + \int_{\Omega_R} (\text{div}^\delta X_{(\alpha)}) Q(h, \delta) dV_{\Omega_R}^\delta. \end{aligned}$$

Agora basta relacionar com o centro de massa:

$$c_n \int_{S_R^{n-1}} \left(\text{Ric}^g - \frac{1}{2} S^g g \right) (X_{(\alpha)}, \nu^g) dV_{S_R^{n-1}}^g = (n-2)m(g)c^\alpha(g) + o(1),$$

como esperado. □

2.5 Variedades Assintoticamente Hiperbólicas

Nesta seção mostraremos que a mesma abordagem pode ser usada para obter expressões análogas em outros espaços onde invariantes assintóticos podem ser definidos. Retomando o que já fizemos, vemos que as provas se baseiam nos seguintes fatos cruciais:

1. A definição do invariante deve vir de um funcional Riemanniano, o qual deve estar vinculado com alguma reformulação da identidade de Bianchi;
2. Deve existir uma ligação entre campos de Killing conforme e funções no núcleo da adjunta do operador linearização do funcional.

Na presença desses dois fatores, a igualdade entre as definições clássicas dos invariantes e as versões intrínsecas segue-se com as estimativas oriundas das condições de decaimento. Veja por exemplo a equação 2.20 e os argumentos ao redor dela.

Insistimos no fato de que essa ideia é completamente geral e pode ser aplicado em diferentes espaços. Como exemplo disso, estudaremos o caso das variedades assintoticamente hiperbólicas. A massa foi definida por Chruściel e Herzlich ([19]) e

independentemente por Wang ([65]), veja [32] para uma comparação.

Definição 2.7. *Seja (M^n, g) , $n \geq 3$ uma variedade Riemanniana completa. Dizemos que (M, g) é **assintoticamente hiperbólica** de ordem $\tau > 0$, se existe subconjunto compacto $K \subset M$ e um difeomorfismo $\Phi : M \setminus K \rightarrow \mathbb{H}^n \setminus \overline{B}_{r_0}$, para algum $r_0 > 0$ ($\mathbb{H}^n$ equipado com a métrica $b = dr^2 + \sinh^2 r g_{\mathbb{S}^{n-1}}$), satisfazendo a seguinte condição: se $(\epsilon_0 = \partial_r, \epsilon_1, \dots, \epsilon_n)$ é uma base b -ortonormal, e $g_{ij} = g(\epsilon_i, \epsilon_j)$ satisfaz as seguintes condições de decaimento:*

$$g_{ij}(x) - \delta_{ij} = O(e^{-\tau r}), \quad \overline{\nabla}_k g_{ij} = O(e^{-\tau r}), \quad \overline{\nabla}_{kl}^2 g_{ij} = O(e^{-\tau r}), \quad (2.24)$$

onde a conexão $\overline{\nabla}$ refere-se à métrica b .

Definição 2.8. *Se $\tau > \frac{n}{2}$ e $(S^g + n(n-1))$ é integrável em $L^1(e^r dV^b)$, o mapa linear $M(g)$ definido por*

$$\begin{aligned} W \mapsto c_n \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{S_r^{n-1}} [W(\operatorname{div}^b(g-b) - d \operatorname{tr}_b(g-b)) \\ - \iota_{\nabla^b W}(g-b) + \operatorname{tr}_b(g-b) dW](\nu^b) dV_{S_r^{n-1}}^b \end{aligned}$$

está bem definido no núcleo de DS_b^* e é independente da carta assintótica. Chamamos a aplicação acima de **massa** da variedade assintoticamente hiperbólica (M, g) .

Existência e invariância da massa pode ser provada usando a abordagem de Michel ([51]).

Os campos de Killing conforme no modelo hiperbólico são os mesmos que no caso Euclidiano, mas a divergência agora deve ser calculada com respeito à métrica hiperbólica. O modelo da bola de Poincaré $\mathbb{B}^n$ identifica-se com o hiperboloide $\mathbb{H}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ por meio da aplicação $\pi : \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{B}^n$, $\pi(x^0, x^1, \dots, x^n) = u = (u^1, \dots, u^n)$:

$$\pi^{-1}(u) = \left(\frac{1 + |u|^2}{1 - |u|^2}, \frac{2u}{1 - |u|^2} \right)$$

Temos

$$b_{ij} = \frac{4}{(1 - |u|^2)^2} \delta_{ij}, \quad b^{ij} = \frac{(1 - |u|^2)^2}{4} \delta^{ij} \quad e \quad b_{ij,k} = \frac{16u^k}{(1 - |u|^2)^3} \delta_{ij}.$$

Com isso, obtemos os símbolos de Christoffel:

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{2}{1 - |u|^2} (u^i \delta_{jk} + u^j \delta_{ik} - u^k \delta_{ij}).$$

Agora calculamos a divergência do campo radial $X_{(0)} = u^i \partial_i$:

$$\operatorname{div}^b X_{(0)} = \partial_i u^i + \Gamma_{ij}^i u^j = n + \frac{2n|u|^2}{1-|u|^2} = n \left(\frac{1+|u|^2}{1-|u|^2} \right)$$

Logo, $\operatorname{div}^b X_{(0)} = nx^0$.

Escolhendo os campos $X_{(\alpha)} = 2u^\alpha u^i \partial_i - |u|^2 \partial_\alpha$ ($\alpha = 1, \dots, n$), encontramos

$$\operatorname{div}^b X_{(\alpha)} = 2nu^\alpha + \frac{2nu^\alpha |u|^2}{1-|u|^2} = \frac{2nu^\alpha}{1-|u|^2}.$$

Logo, $\operatorname{div}^b X_{(\alpha)} = nx^\alpha$.

Podemos agora argumentar como no caso anterior, mas modificando o tensor de Einstein

$$\tilde{E}^g = E^g - \frac{(n-1)(n-2)}{2} g = \operatorname{Ric}^g - \frac{1}{2} S^g g - \frac{(n-1)(n-2)}{2} g.$$

A fórmula análoga à identidade integral de Bianchi no Lema 2.6, para um campo de Killing conforme X , é da forma

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} \tilde{E}^g(X, \nu^g) dV_{\partial\Omega}^g &= \int_{\Omega} \left\langle \tilde{E}^g, (-\operatorname{div}^g)^* X \right\rangle_g dV_{\Omega}^g \\ &= -\frac{1}{n} \int_{\Omega} (\operatorname{div}^g X) \operatorname{tr}_g \left(E^g - \frac{(n-1)(n-2)}{2} g \right) dV_{\Omega}^g \\ &= \frac{2-n}{2n} \int_{\Omega} (S^g + n(n-1)) (\operatorname{div}^g X) dV_{\Omega}^g, \end{aligned}$$

e notamos que o lado direito é a expressão esperada para aplicar a análise de Michel para a definição da massa ([19, 51]). Prosseguindo com a prova, o argumento agora é similar ao dado anteriormente e, por isso, ao manter a mesma notação da seção anterior:

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} \tilde{E}^h(X, \nu^g) dV_{\partial\Omega}^h &= \frac{2-n}{2n} \int_{\Omega} (S^h + n(n-1)) (\operatorname{div}^h X_{(i)}) dV_{\Omega}^h \\ &\quad + \int_{\Omega} \left\langle \tilde{E}^h, (\operatorname{div}^h)_0^* X_{(i)} \right\rangle dV_{\Omega}^h \end{aligned}$$

e levando em consideração o decaimento exponencial, temos que

$$\int_{\Omega_R} (S^h + n(n-1))(\operatorname{div}^h X) dV_{\Omega_R}^h = \int_{S_R^{n-1}} \mathbb{U}(\operatorname{div}^b X, g, b) dV_{S_R^{n-1}}^b + o(1).$$

A relação entre a divergência dos campos de Killing conforme e os elementos de $\ker DS_b^*$ vem novamente do Lema 2.7, e concluímos da igualdade acima a seguinte definição alternativa envolvendo o tensor de Einstein:

Teorema 2.9. *Para $i \in \{0, \dots, n\}$,*

$$M(g)[V^{(i)}] = \frac{1}{n} M(g)[\operatorname{div}^b X^{(i)}] = d_n \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{S_r^{n-1}} \tilde{E}^g(X^{(i)}, \nu^b) dV_{S_r^{n-1}}^b.$$

Capítulo 3

A Massa ABL via Tensor de Einstein e de Newton

Almaraz, Barbosa, e De Lima ([3]) consideraram variedades Riemannianas com bordo não-compacto e uma noção de massa atrelada que denominaremos de massa ABL.

Na Seção 3.1, introduzimos esses conceitos e, para defini-los, em vez do espaço Euclidiano todo, $\mathbb{R}^n$, devemos considerar o semi-espaço superior $\mathbb{R}_+^n = \{x \in \mathbb{R}^n; x_n \geq 0\}$ como referência para o sistema de coordenadas assintóticas. Além disso, fixado $r_0 > 0$, denotamos o conjunto $\mathbb{R}_{r_0,+}^n := \{x \in \mathbb{R}_+^n; r > r_0\}$.

Na Seção 3.2, deduzimos os decaimentos dos objetos de geométricos associados à nova classe de variedades assintoticamente planas e mostraremos, como no caso anterior sem bordo, que o limite assintótico que define a massa ABL é finito.

Por fim, na Seção 3.3 vamos provar a igualdade entre a definição original e a reformulação geométrica da massa ABL. Para isso, vamos adaptar o método utilizado no capítulo anterior por Herzlich [32].

3.1 Variedades Assintoticamente Planas com Bordo Não Compacto

Para introduzir os conceitos necessários, assumimos também neste capítulo que as variedades assintóticas tem apenas um fim.

Definição 3.1. *Seja (M^n, g) , $n \geq 3$, uma variedade Riemanniana completa e orientada com bordo não compacto Σ . Dizemos que (M, g) é **assintoticamente plana** de ordem $\tau > 0$, se existe subconjunto compacto K de M e um difeomorfismo $\Phi : M \setminus K \rightarrow \mathbb{R}_{r_0,+}^n$,*

para algum $r_0 > 0$, de modo que nas coordenadas induzidas por $\Phi(p) = x = (x^1, \dots, x^n)$,

$$|g_{ij}(x) - \delta_{ij}| + r|g_{ij,k}(x)| + r^2|g_{ij,kl}(x)| = O(r^{-\tau}).$$

A métrica g , a carta Φ e suas coordenadas são ditas **assintoticamente planas** ou simplesmente **assintóticas**, caso o contexto deixe claro que se trata de uma variedade assintoticamente plana.

Como já observado no caso sem bordo, na presença de uma carta assintótica Φ podemos identificar $M \setminus K$ com $\mathbb{R}_{r_0,+}^n$. Isso nos permite definir para $r_0 < r < r'$, $M_{r,r'} := \{x \in M \setminus K; r \leq |x| \leq r'\}$, $\Sigma_{r,r'} = \{x \in \partial(M \setminus K); r \leq |x| \leq r'\}$ e o $(n-1)$ -hemisfério coordenado $S_{r,+}^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}_+^n; |x| = r\}$, de forma que

$$\partial M_{r,r'} = S_{r,+}^{n-1} \cup \Sigma_{r,r'} \cup S_{r',+}^{n-1}.$$

Representamos por μ^δ o campo normal unitário externo a $S_{r,+}^{n-1}$, computado com respeito à métrica δ . Também consideramos a $(n-2)$ -esfera $S_r^{n-2} = \partial S_{r,+}^{n-1}$ munido do campo co-normal unitário ϑ^δ , que é tangente a Σ (veja a Figura 3.1 abaixo). Vamos preservar a convenção de Einstein para somatórios, mas chamando atenção para a seguinte notação: usaremos índices latinos para quantidades variando de 1 a n ($i, j, k = 1, \dots, n$) e índices gregos para aquelas variando de 1 a $n-1$ ($\alpha, \beta = 1, \dots, n-1$). Observe que, ao longo de Σ , $\{\partial_\alpha\}$ expande $T\Sigma$ enquanto que $\eta^\delta = -\partial_n$ é o campo normal unitário externo ao longo de Σ . Além disso, também denotaremos pelo mesmo símbolo as métricas induzidas em Σ .

Nesse contexto, para definir a massa ABL aproveitamos a 1-forma definida anteriormente na Equação 1.9

$$\mathbb{U}(W, g, \delta) = W(\operatorname{div}^\delta g - d \operatorname{tr}_\delta g) - \iota_{D^\delta W}(g - \delta) + \operatorname{tr}_\delta(g - \delta)dW, \quad (3.1)$$

onde W é uma função do $\mathbb{R}_+^n$. Também retomamos as constantes

$$c_n = \frac{1}{2(n-1)\omega_{n-1}}, \quad d_n = \frac{1}{(n-1)(2-n)\omega_{n-1}},$$

onde ω_{n-1} é o volume da $(n-1)$ -esfera unitária.

Definição 3.2. *Seja (M^n, g) uma variedade assintoticamente plana de ordem $\tau > (n-2)/2$ e bordo não compacto Σ . Suponha que a curvatura escalar S^g seja integrável e que Σ , orientado pelo campo normal unitário externo η^g , tenha curvatura média*

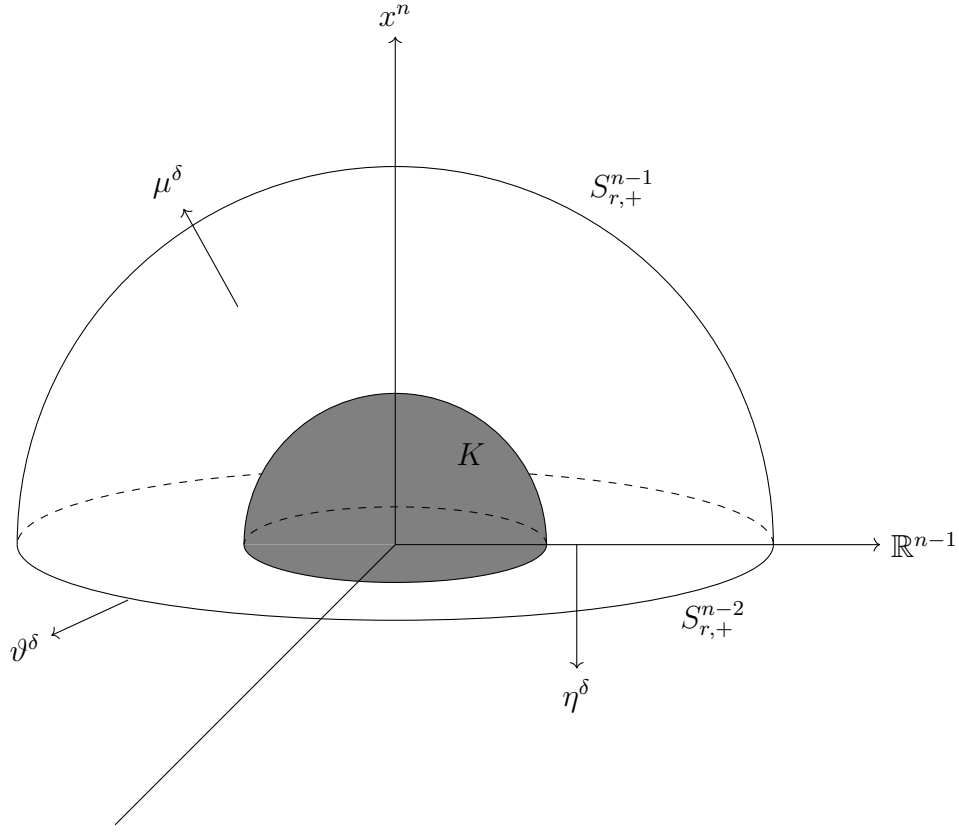


Figura 3.1: Hemisfério coordenado $S_{r,+}^{n-1}$ em $M \setminus K$.

$H^g = \operatorname{div}^g \eta^g$ também integrável. Chamamos de **massa ABL**, a quantidade

$$m(g) = c_n \lim_{r \rightarrow \infty} \left[\int_{S_{r,+}^{n-1}} \mathbb{U}(1, g, \delta)(\mu^\delta) dV_{S_{r,+}^{n-1}}^\delta - \int_{S_r^{n-2}} g(\eta^\delta, \vartheta^\delta) dV_{S_r^{n-2}}^\delta \right] \quad (3.2)$$

Em coordenadas, $m(g)$ é dada por

$$m(g) = c_n \lim_{r \rightarrow \infty} \left[\int_{S_{r,+}^{n-1}} \sum_{i,j} (g_{ij,j} - g_{jj,i}) \mu^i dV_{S_{r,+}^{n-1}}^\delta + \int_{S_r^{n-2}} g_{\alpha n} \vartheta^\alpha dV_{S_r^{n-2}}^\delta \right],$$

Observação 3.1. Almaraz, Barbosa, e De Lima em [3] provaram que sob as hipóteses dadas na definição acima, a massa ABL é finita e seu valor não depende da carta assintótica escolhida.

Também vamos definir um conceito alternativo de massa em termos de objetos geométricos fundamentais. Retomamos agora o tensor de Einstein

$$E^g = \operatorname{Ric}^g - \frac{S^g}{2} g,$$

e introduzimos o tensor de Newton ao longo do bordo:

$$J^g = A^g - H^g g,$$

onde A^g é a segunda forma fundamental de Σ em relação a $-\eta^g$, o campo normal, unitário e interno, e $H^g = \text{tr}_g A^g$ é a curvatura média. Como no caso sem bordo, esses tensores devem ser avaliados no campo radial $X = r\partial_r = x^i\partial_i$.

Definição 3.3. *Seja (M^n, g) uma variedade assintoticamente plana com as condições impostas na Definição 3.2. Considere o campo vetorial radial $X = r\partial_r = x^i\partial_i$ definido em uma carta assintótica. Com isso, definimos a **massa intrínseca** como*

$$m_I(g) = d_n \lim_{r \rightarrow \infty} \left[\int_{S_{r,+}^{n-1}} E^g(X, \nu^g) dV_{S_{r,+}^{n-1}}^g + \int_{S_r^{n-2}} J^g(X, \vartheta^g) dV_{S_r^{n-2}}^g \right]. \quad (3.3)$$

Observação 3.2. *Como vimos anteriormente no caso sem bordo, a partir da técnica usada por Herzlich ([31]) fomos capazes de exibir a massa ADM em termos do tensor de Einstein ($m(g) = m_I(g)$). Girão, Montalbán e De Lima ([24]), bem como Chai ([16]), trabalhando de forma independente, adaptaram esse mesmo método ao contexto atual com bordo não compacto a fim de provar a igualdade entre as duas versões acima para a massa ABL. Isso é o que faremos mais adiante.*

3.2 Existência da Massa ABL

Nesta seção, provaremos a existência do limite que define a massa com as hipóteses dadas na Definições 3.2. Para isso, precisamos calcular as ordens de decaimento dos objetos geométricos que vamos utilizar.

Lema 3.1. *Seja (M^n, g) uma variedade assintoticamente plana de ordem $\tau > 0$ com bordo não compacto. Então temos os seguintes decaimentos:*

- (i) $dV_{S_{r,+}^{n-1}}^g = (1 + O(r^{-\tau}))dV_{S_{r,+}^{n-1}}^\delta$ e $dV_{S_r^{n-2}}^g = (1 + O(r^{-\tau}))dV_{S_r^{n-2}}^\delta$;
- (ii) $\det G = 1 + O_1(r^{-\tau})$, $\sqrt{\det G} = 1 + O(r^{-\tau})$, onde $G = (g_{ij})$;
- (iii) $g^{ij}(x) = \delta^{ij} + O_1(r^{-\tau})$;
- (iv) $\Gamma_{ij}^k(x) = O_1(r^{-\tau-1})$, $\text{Ric}_{ij}(x) = O(r^{-\tau-2})$ e $S(x) = O(r^{-\tau-2})$;
- (v) $A_{\alpha\beta} = O(r^{-\tau-1})$ e $H^g = O(r^{-\tau-1})$.

Demonstração. Fixemos uma carta assintótica $(M \setminus K, \Phi)$. Para provar (i) considere $\{e_i\}_{i=1}^n$ um δ -referencial ortonormal com $e_n = \mu^\delta$, o campo normal unitário externo aos hemisférios coordenados. Temos que $e_i = a_i^j \partial_j$ com (a_i^j) sendo uma matriz ortogonal e $|a_i^j| \leq 1$. Logo,

$$\begin{aligned} g(e_i, e_j) &= a_i^k a_j^l g_{kl} = a_i^k a_j^l (\delta_{kl} + O(r^{-\tau})) \\ &= \sum_k a_i^k a_j^k + O(r^{-\tau}) = \delta_{ij} + O(r^{-\tau}) \end{aligned}$$

Seja $\omega^i = e_i^\flat$, com $i = 1, \dots, n-1$ o δ -co-referencial dual a $\{e_i\}$. Então, em $S_{r,+}^{n-1}$,

$$\begin{aligned} dV^g &= \sqrt{\det g(e_i, e_j)} \omega^1 \wedge \dots \wedge \omega^{n-1} \\ &= (1 + O(r^{-\tau})) \omega^1 \wedge \dots \wedge \omega^{n-1} \\ &= (1 + O(r^{-\tau})) dV^\delta \end{aligned}$$

Similarmente, em S_r^{n-2} temos que $dV^g = (1 + O(r^{-\tau})) dV^\delta$.

Os itens de (ii) a (iv) são provados de forma idêntica ao item (iii) da Proposição 2.1.

Com os campos ortonormais $\partial_n = -\eta^\delta$ e $\eta^g = -(g^{nn})^{-\frac{1}{2}} g^{ni} \partial_i = -(g^{nn})^{\frac{1}{2}} \partial_n - (g^{nn})^{-\frac{1}{2}} g^{n\alpha} \partial_\alpha$, podemos calcular as ordens de decaimento da segunda forma fundamental A . Pela definição:

$$\begin{aligned} A_{\alpha\beta} &= -\langle \eta^g, \nabla_\alpha \partial_\beta \rangle_g \\ &= \langle (g^{nn})^{-\frac{1}{2}} g^{ni} \partial_i, \Gamma_{\alpha\beta}^n \partial_n \rangle_g \\ &= (g^{nn})^{-\frac{1}{2}} \Gamma_{\alpha\beta}^n \\ &= \frac{1}{2} (g^{nn})^{-\frac{1}{2}} g^{ni} (g_{\beta i, \alpha} + g_{\alpha i, \beta} - g_{\alpha\beta, i}) \\ &= \frac{1}{2} (g^{nn})^{\frac{1}{2}} (g_{\beta n, \alpha} + g_{\alpha n, \beta} - g_{\alpha\beta, n}) + \frac{1}{2} (g^{nn})^{-\frac{1}{2}} g^{n\gamma} (g_{\beta\gamma, \alpha} + g_{\alpha\gamma, \beta} - g_{\alpha\beta, \gamma}). \end{aligned}$$

Agora utilizamos o decaimento em (ii) e da derivada da métrica:

$$\begin{aligned} A_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} (1 + O(r^{-\tau})) (g_{\beta n, \alpha} + g_{\alpha n, \beta} - g_{\alpha\beta, n}) + O(r^{-2\tau-1}) \\ &= \frac{1}{2} (g_{\beta n, \alpha} + g_{\alpha n, \beta} - g_{\alpha\beta, n}) + O(r^{-2\tau-1}) \\ &= O(r^{-\tau-1}) \end{aligned}$$

Lembremos aqui a convenção de denotar a métrica induzida no bordo Σ pela mesma letra g . Tal como foi calculado acima, podemos finalizar o item (v). A curvatura média

de Σ é dada por

$$\begin{aligned}
 H &= g^{\alpha\beta} A_{\alpha\beta} \\
 &= \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} (g^{nn})^{-\frac{1}{2}} g^{ni} (g_{\beta i, \alpha} + g_{\alpha i, \beta} - g_{\alpha\beta, i}) \\
 &= \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} (g^{nn})^{\frac{1}{2}} (g_{\beta n, \alpha} + g_{\alpha n, \beta} - g_{\alpha\beta, n}) + O(r^{-2\tau-1}) \\
 &= \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} (g^{nn})^{\frac{1}{2}} (2g_{n\alpha, \beta} - g_{\alpha\beta, n}) + O(r^{-2\tau-1}) \\
 &= \frac{1}{2} (g^{nn})^{\frac{1}{2}} (2g_{n\alpha, \alpha} - g_{\alpha\alpha, n}) + \sum_{\gamma \neq \alpha} \frac{1}{2} g^{\alpha\gamma} (g^{nn})^{\frac{1}{2}} (2g_{n\alpha, \gamma} - g_{\alpha\gamma, n}) + O(r^{-2\tau-1}) \\
 &= \frac{1}{2} (2g_{n\alpha, \alpha} - g_{\alpha\alpha, n}) + O(r^{-2\tau-1}) \\
 &= O(r^{-\tau-1}),
 \end{aligned}$$

□

Tal como na demonstração do Teorema 2.8, usamos uma função de corte para colar a bola $\bar{B}_{r_0, +}^n$ em $(M \setminus K)$. Para $R \gg 4r_0$, definimos uma função de corte χ_R que se anula dentro da esfera de raio $R/2$, é igual a 1 fora da esfera de raio $3R/4$ e satisfaz

$$|\nabla \chi_R| \leq C_1 R^{-1}, \quad |\nabla^2 \chi_R| \leq C_2 R^{-2}, \quad \text{e} \quad |\nabla^3 \chi_R| \leq C_3 R^{-3},$$

para algumas constantes C_i ($i = 1, 2, 3$) que não dependem de R . Denotemos $\chi = \chi_R$ e definimos a seguinte métrica em $M_R := M_{R/4, R}$ e em $\Sigma_R := \Sigma_{R/4, R}$ (ver Figura 3.2):

$$h = \chi g + (1 - \chi) \delta, \tag{3.4}$$

e colamos a métrica Euclidiana dentro de $\bar{B}_{R/4, +}^n = \{x \in \mathbb{R}_+^n; |x| \leq R/4\}$, obtendo assim uma métrica completa em $\mathbb{R}_+^n$ que também denotaremos por h .

Para demonstrar que a massa é finita, provaremos o seguinte:

Proposição 3.2. *Seja (M^n, g) uma variedade assintoticamente plana com as condições impostas na Definição 3.2. Então*

$$m(g) = c_n \lim_{R \rightarrow \infty} \left[\int_{M_R} S^h dV_{M_R}^\delta + 2 \int_{\Sigma_R} H^h dV_{\Sigma_R}^\delta \right].$$

Demonstração. Usando 3.1 temos, $\mathbb{U}(1, h, \delta) = \text{div}^\delta h - d \text{tr}_\delta h$ ou em coordenadas $\mathbb{U}(1, h, \delta) = h_{ij, j} - h_{jj, i}$. Da fórmula de linearização da curvatura escalar (Lemas A.2,

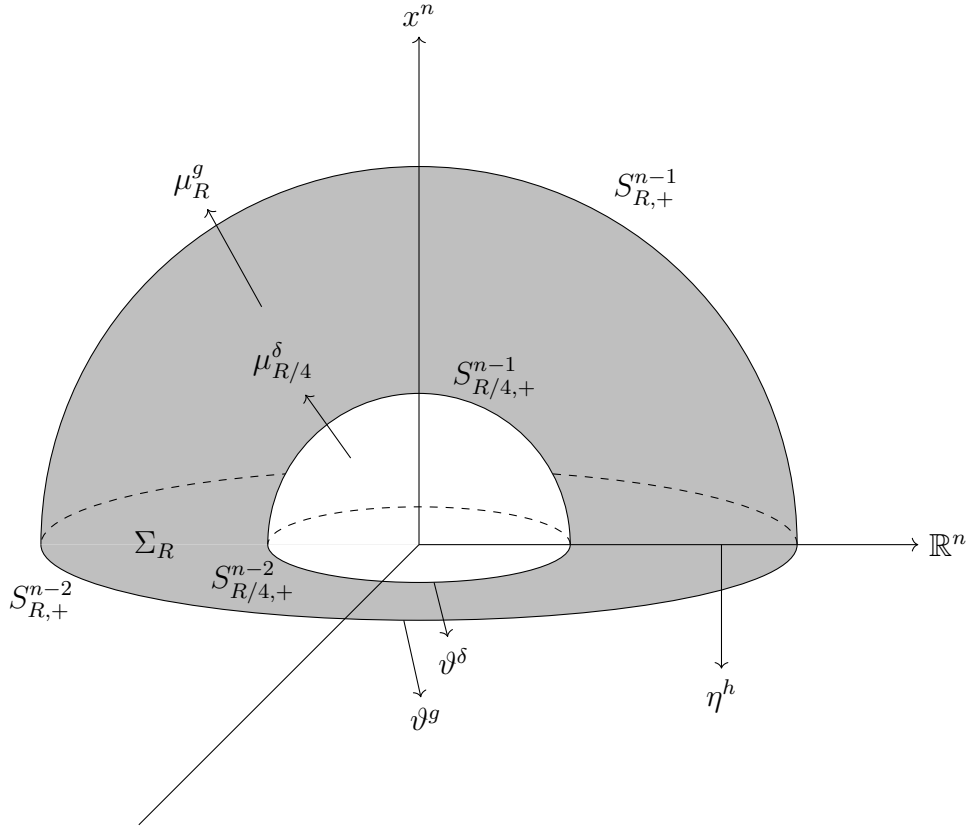


Figura 3.2: Região M_R

A.4), temos que

$$\begin{aligned}
 \mathcal{R}_1 &:= \int_{M_R} S^h dV_{M_R}^\delta \\
 &= \int_{M_R} (S^\delta + DS_\delta(h - \delta) + Q(\delta, h)) dV_{M_R}^\delta \\
 &= \int_{M_R} (DS_\delta(h - \delta) + O(r^{-2\tau-2})) dV_{M_R}^\delta \\
 &= \int_{M_R} \operatorname{div}^\delta(\operatorname{div}^\delta h - d\operatorname{tr}_\delta h) dV_{M_R}^\delta + o(1) \\
 &= \int_{\partial M_R} (\operatorname{div}^\delta h - d\operatorname{tr}_\delta h)(N^\delta) dV_{\partial M_R}^\delta + o(1) \\
 &= \int_{\partial M_R} \mathbb{U}(1, h, \delta)(N^\delta) dV_{\partial M_R}^\delta + o(1)
 \end{aligned}$$

Como $\partial M_R = S_{R/4,+}^{n-1} \cup \Sigma_R \cup S_{R,+}^{n-1}$, temos que

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_1 &= \int_{S_{R/4,+}^{n-1}} \mathbb{U}(1, \delta, \delta)(-\mu_{R/4}^\delta) dV_{S_{R/4,+}^{n-1}}^\delta + \int_{S_{R,+}^{n-1}} \mathbb{U}(1, g, \delta)(\mu_R^\delta) dV_{S_{R,+}^{n-1}}^\delta \\ &\quad + \int_{\Sigma_R} \mathbb{U}(1, h, \delta)(\eta^\delta) dV_{\Sigma_R}^\delta + o(1) \\ &= \int_{S_{R,+}^{n-1}} \mathbb{U}(1, g, \delta)(\mu_R^\delta) dV_{S_{R,+}^{n-1}}^\delta + \int_{\Sigma_R} \mathbb{U}(1, h, \delta)(\eta^\delta) dV_{\Sigma_R}^\delta + o(1). \end{aligned}$$

Além disso, pelo Lema 3.1 item (v), temos que

$$\begin{aligned} 2\mathcal{R}_2 &:= 2 \int_{\Sigma_R} H^h dV_{\Sigma_R}^\delta \\ &= 2 \int_{\Sigma_R} \left(\frac{1}{2} (2h_{n\alpha,\alpha} - h_{\alpha\alpha,n}) + O(r^{-2\tau-1}) \right) dV_{\Sigma_R}^\delta \\ &= \int_{\Sigma_R} (2h_{n\alpha,\alpha} - h_{\alpha\alpha,n}) dV_{\Sigma_R}^\delta + o(1) \end{aligned}$$

Ao longo de Σ_R , temos que $\eta^\delta = -\partial_n$ e

$$\mathbb{U}(1, h, \delta)(\eta^\delta) = (h_{ij,j} - h_{jj,i})(\eta^\delta)^i = -h_{n\alpha,\alpha} + h_{\alpha\alpha,n}.$$

Daí,

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_1 + 2\mathcal{R}_2 &= \int_{S_{R,+}^{n-1}} \mathbb{U}(1, g, \delta)(\mu_R^\delta) dV_{S_{R,+}^{n-1}}^\delta + \int_{\Sigma_R} h_{n\alpha,\alpha} dV_{\Sigma_R}^\delta + o(1) \\ &= \int_{S_{R,+}^{n-1}} (g_{ij,j} - g_{jj,i})\mu^i dV_{S_{R,+}^{n-1}}^\delta + \int_{S_R^{n-2}} g_{n\alpha}\vartheta^\alpha dV_{S_R^{n-2}}^\delta + o(1) \end{aligned}$$

Na segunda igualdade acima, usamos o teorema da Divergência 1.12:

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma_R} \operatorname{div}^\delta(\iota_{\partial_n} h) dV_{\Sigma_R}^\delta &= \int_{S_R^{n-2}} \langle (\vartheta^\delta)^\flat, \iota_{\partial_n} g \rangle_\delta dV_{S_R^{n-2}}^\delta + \int_{S_{R/4}^{n-2}} \langle (-\vartheta^\delta)^\flat, \iota_{\partial_n} \delta \rangle_\delta dV_{S_{R/4}^{n-2}}^\delta \\ &= \int_{S_R^{n-2}} g(\partial_n, \vartheta^\delta) dV_{S_R^{n-2}}^\delta \end{aligned}$$

Portanto, $m(g) = c_n \lim_{r \rightarrow \infty} (\mathcal{R}_1 + 2\mathcal{R}_2)$, cuja existência vem da integrabilidade de S^g e H^g . □

3.3 A Massa em Termos dos Tensores de Einstein e Newton

A partir de agora, andaremos na direção de demonstrar a equivalência entre massas, assim como sugerido no Capítulo 2.

Proposição 3.3. *Seja uma variedade Riemanniana (M^n, h) . Então, dado $Y \in \mathfrak{X}(M)$ e $T \in \mathcal{S}^2(M)$*

$$\operatorname{div}^h(\iota_Y T) = \langle \operatorname{div}^h T, Y \rangle + \langle T, -(\operatorname{div}^h)_0^* Y \rangle + \frac{1}{n} \operatorname{div}^h Y \operatorname{tr}_h T,$$

onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sem o sub-índice denota a avaliação entre 1-formas e campos vetoriais.

Demonstração. Para melhor compreensão, vamos deixar de lado a convenção de Einstein. Calculando no centro de um sistema de coordenadas normais, temos

$$\begin{aligned} \operatorname{div}^h(\iota_Y T) &= \sum_j \nabla_j \iota_Y T(\partial_j) \\ &= \sum_{i,j} \nabla_j (Y^i \iota_{\partial_i} T)(\partial_j) \\ &= \sum_{i,j} (\partial_j Y^i) \iota_{\partial_i} T(\partial_j) + Y^i (\nabla_j \iota_{\partial_i} T)(\partial_j) \\ &= \sum_{i,j} (\nabla_j Y^i) T_{ij} + Y^i (\nabla_j \iota_{\partial_i} T)(\partial_j) \\ &= \sum_{i,j} T_{ij} Y_{;j}^i + \sum_i Y^i \operatorname{div}^h(\iota_{\partial_i} T). \end{aligned} \tag{3.5}$$

Além disso, temos as seguintes igualdades

$$\begin{aligned} (\operatorname{div}^h T)_i &= \sum_j \nabla_j T(\partial_i, \partial_j) \\ &= \sum_j (\partial_j (T_{ji}) - T(\nabla_j \partial_j, \partial_i) - T(\partial_j, \nabla_j \partial_i)) \\ &= \sum_j \partial_j (T_{ji}). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \operatorname{div}^h(\iota_{\partial_i} T) &= \sum_j \nabla_j \iota_{\partial_i} T(\partial_j) \\
 &= \sum_j \partial_j(\iota_{\partial_i} T(\partial_j)) - \iota_{\partial_i} T(\nabla_j \partial_j) \\
 &= \sum_j \partial_j(T_{ji}).
 \end{aligned}$$

Logo as duas equações acima são iguais:

$$(\operatorname{div}^h T)_i = \operatorname{div}^h(\iota_{\partial_i} T) \quad (3.6)$$

Substituindo 3.6 em 3.5, encontramos

$$\operatorname{div}^h(\iota_Y T) = \sum_{i,j} T_{ij} Y_{;j}^i + \sum_i Y^i (\operatorname{div}^h T)_i = \sum_{i,j} T_{ij} Y_{;j}^i + Y^i \nabla_j T_{ji}$$

Daí aproveitamos a simetria de T para obter

$$\begin{aligned}
 \operatorname{div}^h(\iota_Y T) &= \sum_{i,j} T_{ij} Y_{;j}^i + Y^i T_{ij;j} \\
 &= \sum_{i,j} \frac{1}{2} (T_{ij} Y_{;j}^i + T_{ji} Y_{;i}^j) + Y^i T_{ij;j} \\
 &= \sum_{i,j} \frac{1}{2} T_{ij} (Y_{;j}^i + Y_{;i}^j) + Y^i T_{ij;j}
 \end{aligned}$$

Como $(Y^b)_i = Y^i$, temos que $\langle \operatorname{div}^h T, Y^b \rangle_h = \operatorname{div}^h T(Y) = \sum_{i,j} Y^i T_{ij;j}$. Juntando com a igualdade acima, obtemos

$$\operatorname{div}^h(\iota_Y T) = \langle \operatorname{div}^h T, Y \rangle + \sum_{i,j} \frac{1}{2} T_{ij} (Y_{;j}^i + Y_{;i}^j) \quad (3.7)$$

Agora calculamos a derivada de Lie da métrica:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_Y h_{ij} &= h(\nabla_i Y, \partial_j) + h(\nabla_j Y, \partial_i) \\
 &= h\left(\sum_k (\partial_i Y^k) \partial_k, \partial_j\right) + h\left(\sum_k (\partial_j Y^k) \partial_k, \partial_i\right) \\
 &= \partial_i Y^j + \partial_j Y^i \\
 &= \nabla_i Y^j + \nabla_j Y^i.
 \end{aligned}$$

Com isso, encontramos

$$\frac{1}{2}T_{ij}(Y_{,j}^i + Y_{,i}^j) = \frac{1}{2}\langle T, \mathcal{L}_Y h \rangle_h = -\langle T, (\operatorname{div}^h)^* Y \rangle_h$$

Substituindo a identidade acima em 3.7, temos que

$$\operatorname{div}^h(\iota_Y T) = \langle \operatorname{div}^h T, Y \rangle - \langle T, (\operatorname{div}^h)^* Y \rangle_h.$$

Já vimos na demonstração da fórmula integral de Bianchi que

$$(\operatorname{div}^h)_0^* Y = (\operatorname{div}^h)^* Y + \frac{1}{n}(\operatorname{div}^h Y)h.$$

Portanto,

$$\operatorname{div}^h(\iota_Y T) = \langle \operatorname{div}^h T, Y \rangle + \langle T, -(\operatorname{div}^h)_0^* Y \rangle + \frac{1}{n} \operatorname{div}^h Y \operatorname{tr}_h T$$

□

Agora já temos os resultados necessários para provar a igualdade entre as duas versões da massa.

Teorema 3.4. *A massa ABL é igual a massa intrínseca, isto é,*

$$m(g) = d_n \lim_{r \rightarrow \infty} \left[\int_{S_{r,+}^{n-1}} E^g(X, \nu^g) dV_{S_{r,+}^{n-1}}^g + \int_{S_r^{n-2}} J^g(X, \vartheta^g) dV_{S_r^{n-2}}^g \right].$$

onde $X = r\partial_r$ é o campo radial em uma carta assintótica.

Demonstração. Podemos integrar ambos os lados da identidade da Proposição 3.3 na região do anel (M_R, h) , onde h é a métrica de interpolação dada em 3.4. Assim, tomamos $T = E^h$ e $Y = X$,

$$\begin{aligned} \int_{M_R} \operatorname{div}^h(\iota_X E^h) dV_{M_R}^h &= \int_{M_R} \langle \operatorname{div}^h E^h, X \rangle_h dV_{M_R}^h - \int_{M_R} \langle E^h, (\operatorname{div}^h)_0^* X \rangle_h dV_{M_R}^h \\ &\quad + \frac{1}{n} \int_{M_R} (\operatorname{div}^h X) \operatorname{tr}_h E^h dV_{M_R}^h. \end{aligned}$$

Aplicando o teorema da Divergência no lado esquerdo e recordando que $\operatorname{div}^h E^h = 0$ e $\operatorname{tr}_h E^h = \frac{2-n}{n} S^h$, encontramos

$$\int_{\partial M_R} E^h(X, N^h) dV_{\partial M_R}^h = - \int_{M_R} \langle E^h, (\operatorname{div}^h)_0^* X \rangle_h dV_{M_R}^h + \frac{2-n}{2n} \int_{M_R} S^h \operatorname{div}^h X dV_{M_R}^h.$$

Como $\partial M_R = S_{R/4,+}^{n-1} \cup \Sigma_R \cup S_{R,+}^{n-1}$ e $E^h = E^\delta = 0$ em $S_{R/4,+}^{n-1}$, temos que

$$\begin{aligned} \int_{S_{R,+}^{n-1}} E^h(X, \mu_R^h) dV_{S_{R,+}^{n-1}}^h + \int_{\Sigma_R} E^h(X, \eta^h) dV_{\Sigma_R}^h &= - \int_{M_R} \langle E^h, (\operatorname{div}^h)_0^* X \rangle_h dV_{M_R}^h \\ &\quad + \frac{2-n}{2n} \int_{M_R} S^h \operatorname{div}^h X dV_{M_R}^h. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Pelos mesmos cálculos feitos no caso sem bordo, temos que $\mathcal{L}_X \delta(Y, Z) = 2\delta(Y, Z)$, $\operatorname{div}^\delta X = n$ e $(\operatorname{div}^\delta)_0^* X = 0$. Logo X é Killing conforme com relação a δ .

Das condições de decaimento com $\tau > (n-2)/2$ e das propriedades da função de corte χ , segue que

$$\begin{aligned} &\left| \int_{M_R} S^h \operatorname{div}^h X dV_{M_R}^h - \int_{M_R} S^h \operatorname{div}^\delta X dV_{M_R}^\delta \right| \\ &= \left| \int_{M_R} S^h \operatorname{div}^h X (1 + O(r^{-\tau})) dV_{M_R}^\delta - \int_{M_R} S^h \operatorname{div}^\delta X dV_{M_R}^\delta \right| \\ &\leq \int_{M_R} |S^h (\operatorname{div}^h X - \operatorname{div}^\delta X)| dV_{M_R}^\delta + \int_{M_R} |S^h \operatorname{div}^h X (O(r^{-\tau}))| dV_{M_R}^\delta \\ &\leq C(|\Gamma||X||S^h|)R^n \leq CR^{-2\tau-2+n}, \end{aligned}$$

para R grande o suficiente. Logo,

$$\int_{M_R} S^h \operatorname{div}^h X dV_{M_R}^h - n \int_{M_R} S^h dV_{M_R}^\delta = o(1). \quad (3.9)$$

Também similarmente ao caso sem bordo, temos em M_R que

$$\langle E^h, (\operatorname{div}^h)_0^* X \rangle_h = O(R^{-2\tau-2}),$$

o que nos dá

$$\int_{M_R} \langle E^h, (\operatorname{div}^h)_0^* X \rangle_h dV_{M_R}^h = o(1). \quad (3.10)$$

Juntando as equações 3.9 e 3.10 em 3.8, concluimos

$$\int_{S_{R,+}^{n-1}} E^h(X, \mu_R^h) dV_{S_{R,+}^{n-1}}^h + \int_{\Sigma_R} E^h(X, \eta^h) dV_{\Sigma_R}^h = \frac{2-n}{2} \int_{M_R} S^h dV_{M_R}^\delta + o(1). \quad (3.11)$$

Agora tomamos $Y = X|_{\Sigma_r}$ e $T = J^h$, o tensor de Newton, e integramos 3.8 em Σ_R

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma_R} \operatorname{div}^h(\iota_X J^h) dV_{\Sigma_R}^h &= \int_{\Sigma_R} \langle \operatorname{div}^h J^h, X \rangle_h dV_{\Sigma_R}^h - \int_{\Sigma_R} \langle J^h, (\operatorname{div}^h)_0^* X \rangle_h dV_{\Sigma_R}^h \\ &\quad + \frac{1}{n-1} \int_{\Sigma_R} (\operatorname{div}^h X) \operatorname{tr}_h J^h dV_{\Sigma_R}^h. \end{aligned}$$

Aplicando o teorema da Divergência no lado esquerdo e usando os seguintes resultados: $\operatorname{div}^h J^h = \iota_{\eta^h} \operatorname{Ric}^h$ e $\operatorname{tr}_h J^h = (2-n)H^h$, segue que

$$\begin{aligned} \int_{\partial \Sigma_R} J^h(X, N^h) dV_{\Sigma_R}^h &= \int_{\Sigma_R} \operatorname{Ric}^h(\eta^h, X) dV_{\Sigma_R}^h - \int_{\Sigma_R} \langle J^h, (\operatorname{div}^h)_0^* X \rangle_h dV_{\Sigma_R}^h \\ &\quad + \frac{2-n}{n-1} \int_{\Sigma_R} H^h \operatorname{div}^h X dV_{\Sigma_R}^h. \end{aligned}$$

Como $\partial \Sigma_R = S_{R/4}^{n-2} \cup S_R^{n-2}$, temos que

$$\int_{\partial \Sigma_R} J^h(X, N^h) dV_{\Sigma_R}^h = \int_{S_{R/4}^{n-2}} J^h(X, -\vartheta^h) dV_{S_{R/4}^{n-2}}^h + \int_{S_R^{n-2}} J^h(X, \vartheta^h) dV_{S_R^{n-2}}^h.$$

Note que, para algum $r_0 < r' < R/4$, temos que $h = \delta$ em uma vizinhança de $\Sigma_{r', R/4}$, inclusive em $S_{R/4}^{n-2}$, daí segue-se que $\nabla_\alpha \eta^h = -\bar{\nabla}_\alpha(\partial_n) = 0$ e consequentemente, $A_{\alpha\beta}^h = H^h = 0$ em $S_{R/4}^{n-2}$. O que nos dá $J^h(X, -\vartheta^h) = J^\delta(X, -\vartheta^\delta) = 0$ em $S_{R/4}^{n-2}$.

Com isso, temos que

$$\begin{aligned} \int_{S_R^{n-2}} J^h(X, \vartheta^h) dV_{S_R^{n-2}}^h &= \int_{\Sigma_R} \operatorname{Ric}^h(\eta^h, X) dV_{\Sigma_R}^h - \int_{\Sigma_R} \langle J^h, (\operatorname{div}^h)_0^* X \rangle_h dV_{\Sigma_R}^h \\ &\quad + \frac{2-n}{n-1} \int_{\Sigma_R} H^h \operatorname{div}^h X dV_{\Sigma_R}^h. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Pela escolha do campo Killing conforme X , temos que $\operatorname{div}^\delta X = n-1$. Dessa forma,

pelas condições de decaimento e pelas propriedades da função de corte χ , temos que

$$\begin{aligned}
 & \left| \int_{\Sigma_R} H^h \operatorname{div}^h X \, dV_{\Sigma_R}^h - \int_{\Sigma_R} H^h \operatorname{div}^\delta X \, dV_{\Sigma_R}^{h\delta} \right| \\
 &= \left| \int_{\Sigma_R} H^h \operatorname{div}^h X (1 + O(r^{-\tau})) \, dV_{\Sigma_R}^\delta - \int_{\Sigma_r} H^h \operatorname{div}^\delta X \, dV_{\Sigma_r}^\delta \right| \\
 &\leq \int_{\Sigma_R} |H^h (\operatorname{div}^h X - \operatorname{div}^\delta X)| \, dV_{\Sigma_R}^\delta + \int_{\Sigma_R} |H^h \operatorname{div}^h X (O(r^{-\tau}))| \, dV_{\Sigma_R}^\delta \\
 &\leq C(|\Gamma||X||H^h|)R^{n-1} \leq CR^{-2\tau-2+n},
 \end{aligned}$$

para R grande o suficiente. Logo,

$$\int_{\Sigma_R} H^h \operatorname{div}^h X \, dV_{\Sigma_R}^h - (n-1) \int_{\Sigma_R} H^h \, dV_{\Sigma_R}^\delta = o(1). \quad (3.13)$$

Além disso, por $(\operatorname{div}^\delta)_0^* X = 0$, temos também

$$\langle J^h, (\operatorname{div}^h)_0^* X \rangle_h = O(R^{-2\tau-2}),$$

o que nos dá

$$\int_{\Sigma_R} \langle J^h, (\operatorname{div}^h)_0^* X \rangle_h \, dV_{\Sigma_R}^h = o(1). \quad (3.14)$$

Ao juntarmos 3.13 e 3.14 em 3.12, concluímos que

$$\int_{S_R^{n-2}} J^h(X, \vartheta^h) \, dV_{S_R^{n-2}}^h = \int_{\Sigma_R} \operatorname{Ric}^h(X, \eta^h) \, dV_{\Sigma_R}^h + \frac{2-n}{2} \int_{\Sigma_R} 2H^h \, dV_{\Sigma_R}^\delta + o(1).$$

Como X é tangente ao bordo Σ , temos que

$$E^h(X, \eta^h) - \operatorname{Ric}^h(X, \eta^h) = -\frac{1}{2} S^h \langle X, \eta^h \rangle_\delta = 0.$$

Logo,

$$\int_{S_R^{n-2}} J^h(X, \vartheta^h) \, dV_{S_R^{n-2}}^h = \int_{\Sigma_R} E^h(X, \eta^h) \, dV_{\Sigma_R}^h + \frac{2-n}{2} \int_{\Sigma_R} 2H^h \, dV_{\Sigma_R}^\delta + o(1). \quad (3.15)$$

Das equações 3.8 e 3.15, segue que

$$\begin{aligned} \int_{S_{R,+}^{n-1}} E^g(X, \mu^g) dV_{S_{R,+}^{n-1}}^g + \int_{S_R^{n-2}} J^g(X, \vartheta^g) dV_{S_R^{n-2}}^g \\ = \frac{2-n}{2} \left(\int_{M_R} S^h dV_{M_R}^\delta + \int_{\Sigma_R} 2H^h dV_{\Sigma_R}^\delta \right) + o(1). \end{aligned}$$

Multiplicando ambos os lados por d_n ,

$$\begin{aligned} d_n \left[\int_{S_{R,+}^{n-1}} E^g(X, \mu^g) dV_{S_{R,+}^{n-1}}^g + \int_{S_R^{n-2}} J^g(X, \vartheta^g) dV_{S_R^{n-2}}^g \right] = \\ = c_n \left(\int_{M_R} S^h dV_{M_R}^\delta + \int_{\Sigma_R} 2H^h dV_{\Sigma_R}^\delta \right) + o(1) \end{aligned}$$

Da Proposição 3.2 , segue-se finalmente que

$$m(g) = d_n \lim_{R \rightarrow \infty} \left[\int_{S_{R,+}^{n-1}} E^g(X, \mu^g) dV_{S_{R,+}^{n-1}}^g + \int_{S_R^{n-2}} J^g(X, \vartheta^g) dV_{S_R^{n-2}}^g \right]$$

□

Capítulo 4

Gráficos de Funções

Assintoticamente Planas

Neste capítulo, vamos dar provas elementares, sem o resultado da rigidez, de versões particulares do teorema da massa positiva (veja versão geral em [3]) e da desigualdade de Penrose, relacionadas à massa ABL. Vamos trabalhar com variedades assintoticamente planas que são hipersuperfícies gráficas com bordo não compacto nos espaços Euclidianos. Na Seção 4.1, fornecemos uma representação gráfica do fim exterior da variedade de Schwarzschild com o propósito de introduzir os gráficos de funções assintoticamente planas. Na Seção 4.2, demonstramos uma versão sem rigidez do teorema da massa positiva para gráficos. Em seguida, na Seção 4.3, se o gráfico tem horizontes convexos, provaremos também uma versão da desigualdade de Penrose, fornecendo uma cota inferior das integrais do bordo usando a desigualdade de Alexandrov-Fenchel [1, 2].

4.1 Funções Assintoticamente Planas

Considere $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável, temos que o gráfico de f , que denotamos por $G(f)$, é uma hipersuperfície em $\mathbb{R}^{n+1}$. Além disso, podemos dar uma caracterização especial para a variedade Riemanniana $(G(f), g)$, onde g é a métrica induzida pela inclusão no espaço Euclidiano.

Proposição 4.1. *Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto. Suponha que $f : \mathbb{R}^n \setminus \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, seja de classe C^1 até o bordo. Seja $g = \iota^* \delta$ a métrica induzida sobre o gráfico de f , $G(f) \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$. Então, $(G(f), g)$ é isométrica a $(\mathbb{R}^n \setminus \Omega, \delta + df \otimes df)$. Aqui utilizamos o mesmo símbolo δ para denotar as métricas Euclidianas de $\mathbb{R}^n$ e de $\mathbb{R}^{n+1}$.*

Demonstração. Considere $\psi : (\mathbb{R}^n \setminus \Omega, \delta + df \otimes df) \rightarrow (G(f), g)$. É fácil verificar

que ψ é um difeomorfismo de classe C^1 , cujo inverso é a projeção $\pi : (G(f), g) \rightarrow (\mathbb{R}^n \setminus \Omega, \delta + df \otimes df)$, $\pi(x, f(x)) = x$. Com isso, basta verificar que $\psi^*g = \delta + df \otimes df$. Sejam $\{e_i\}_{i=1}^n$ e $\{(e_i, 0), (0, 1)\}_{i=1}^n$ as bases canônicas de $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^{n+1}$, respectivamente. Temos que $\{\partial_i\}$, em que $\partial_i = \psi_*e_i = (e_i, f_i) = (e_i, 0) + (0, f_i)$, $i = 1, \dots, n$, é um referencial coordenado sobre $G(f)$ e

$$\begin{aligned} \psi^*g(e_i, e_j) &= g(\psi_*e_i, \psi_*e_j) \\ &= \delta((e_i, 0) + (0, f_i), (e_j, 0) + (0, f_j)) \\ &= \delta_{ij} + f_i f_j \\ &= (\delta + df \otimes df)(e_i, e_j). \end{aligned}$$

Portanto, os coeficientes da métrica são dados por $g_{ij} = \delta_{ij} + f_i f_j$. □

Observação 4.1. *Com esse resultado, podemos construir variedades com bordo não compacto se restringirmos o domínio de uma função f como acima à região $\mathbb{R}_+^n \setminus \Omega$, isto é, consideramos o gráfico $G(\tilde{f})$, onde $\tilde{f} := f|_{\mathbb{R}_+^n \setminus \Omega}$.*

Graças à Proposição 4.1, em cálculos posteriores, vamos tratar o gráfico $(G(f), g)$ através da identificação acima com seu domínio $(\mathbb{R}^n \setminus \Omega, \delta + df \otimes df)$. Isto nos permitirá expressar integrais de funções que, a priori, estão definidas sobre o gráfico, em termos de integrais cujos domínios de integração são subconjuntos de $\mathbb{R}^n$.

Definição 4.1. *Sejam $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ um conjunto limitado e $f : \mathbb{R}_+^n \setminus \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^2 . Diz-se que f é **assintoticamente plana**, com ordem $\tau > 0$, se a curvatura escalar, S , de $G(f)$ munido com a métrica induzida de $\mathbb{R}^{n+1}$, $\iota^*\delta$, for integrável sobre $G(f)$, e se existe um subconjunto compacto $K \subseteq \mathbb{R}^n$ tal que $\Omega \subseteq K$ e, sobre $\mathbb{R}_+^n \setminus K$, tivermos*

$$|f_i| + r|f_{ij}(x)| + r^2|f_{ijk}(x)| = O(r^{-\frac{\tau}{2}}),$$

para todo $i, j, k = 1, \dots, n$. Aqui usamos a notação: $f_i = \partial_i f$, $f_{ij} = \partial_{ij}^2 f$ e $f_{ijk} = \partial_{ijk}^3 f$.

Observe que a variedade $(G(f), g)$ é assintoticamente plana de ordem τ se a função f for assintoticamente plana de ordem $\tau/2$. Com efeito, $g_{ij} = \delta_{ij} + f_i f_j = \delta_{ij} + O(r^{-\tau})$, $g_{ij,k} = f_{ik} f_j + f_i f_{jk} = O(r^{-\tau-1})$ e $g_{ij,kl} = O(r^{-\tau-2})$.

Exemplo 4.1. *Considere a variedade de Schwarzschild (M^3, g) de massa $m > 0$ tal como no Exemplo 2.2. Temos que a métrica $g = u^4 \delta$ é conforme à métrica Euclidiana δ , esta por sua vez, tem curvatura escalar S^δ nula e a função $u = (1 + m/2r)$ é harmônica em $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, isto é, $\Delta^\delta u = 0$. Relacionamos esses resultados com uma fórmula alternativa da mudança conforme de métricas da Proposição 1.8: se $e^{2f} = u^4$,*

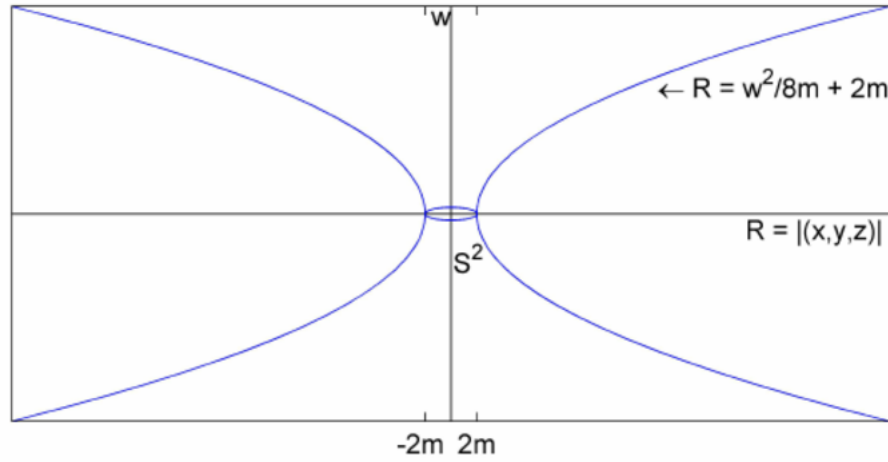


Figura 4.1: 3-variedade de Schwarzschild

então

$$Df = 2u^{-1}Du,$$

e, a partir daí,

$$\begin{aligned}\Delta^\delta f &= 2(\langle D(u^{-1}), Du \rangle_\delta + u^{-1}\Delta^\delta u) \\ &= 2(-u^{-2}|Du|_\delta^2 + u^{-1}\Delta^\delta u).\end{aligned}$$

Substituindo tais expressões na fórmula 2 da Proposição 1.8, obtemos

$$\begin{aligned}S^g u^4 &= S^\delta - \frac{4(3-1)}{3-2}(-u^{-2}|Du|_\delta^2 + u^{-1}\Delta^\delta u) - \frac{4(3-1)}{3-2}u^{-2}|Du|_\delta^2 \\ &= S^\delta - \frac{4(3-1)}{3-2} \frac{\Delta^\delta u}{u}.\end{aligned}$$

Assim, as duas curvaturas estão relacionadas pela equação

$$\begin{aligned}S^g &= u^{-\frac{3+2}{3-2}} \left(-\frac{4(3-1)}{(3-2)} \Delta^\delta u + S^\delta u \right) \\ &= u^{-5} (-8\Delta^\delta u + S^\delta u)\end{aligned}$$

Daí, segue de imediato que $S^g = 0$. De fato,

Além disso, a esfera $S_{m/2}^2$ é uma superfície mínima em (M^3, g) . Com efeito, considere o campo normal e unitário à esfera dado por

$$N^g = \frac{x}{|x|_g} = \frac{x^i}{u^2|x|} \partial_i = \frac{x^i}{u^2 r} \partial_i.$$

E agora calculamos a curvatura média H^g com relação a N^g , isto é, $H = -\text{div} N^g$.

Logo, pela Equação 1.13

$$\begin{aligned}
 H^g &= \frac{1}{\sqrt{\det G}} \partial_i \left(\frac{x^i}{u^2 r} \sqrt{\det G} \right) \\
 &= -\frac{1}{u^6} \partial_i \left(\frac{x^i}{r} u^4 \right) \\
 &= -\frac{1}{u^6} \left(u^4 \partial_i \left(\frac{x^i}{r} \right) + \frac{x^i}{r} \partial_i (u^4) \right) \\
 &= -\frac{1}{u^6} \left(u^4 \left(\frac{3}{r} - \frac{r^2}{r^3} \right) + 4u^3 \frac{\partial u}{\partial r} \right) \\
 &= -\frac{1}{u^2} \left(\frac{2}{r} + \frac{4}{u} \frac{\partial u}{\partial r} \right).
 \end{aligned}$$

Em particular, se tomarmos $r = m/2$, teremos

$$\frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{m}{2r^2} \quad e \quad ru = \left(1 + \frac{m}{2r}\right) r = m.$$

Com isso, encontramos

$$\begin{aligned}
 H^g &= -\frac{1}{u^2} \left(\frac{2}{r} - \frac{4}{u} \frac{m}{2r^2} \right) \\
 &= -\frac{1}{u^2} \left(\frac{2}{r} - \frac{2m}{r^2 u} \right) \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

E assim garantimos que a esfera $S_{m/2}^2$ é uma superfície mínima. Dessa forma, o fim exterior

$$(\mathbb{R}^3 \setminus B_{m/2}^3, u^4 \delta),$$

é agora uma variedade assintoticamente plana com apenas um fim que tem bordo mínimo $\Sigma := S_{m/2}^2$.

Além disso, esse fim pode ser representada como o gráfico de $f : \mathbb{R}^3 \setminus B_{2m}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, em que $f(x) = \sqrt{8m(|x| - 2m)}$ é uma função assintoticamente plana de ordem 1/2 (veja Huang e Wu [36], Proposição 2.6). Dessa forma, o fim exterior pode ser visto como a parte superior da parábola de rotação em torno do eixo w (veja a Figura 4.1). Com isso, pela Proposição 4.1 temos uma isometria entre $(\mathbb{R}^3 \setminus B_{m/2}^3, u^4 \delta)$ e o gráfico $(G(f), \delta + df \otimes df)$.

Pela Observação 4.1, se restringirmos o gráfico para $f|_{\mathbb{R}_+^3 \setminus B_{2m}^3}$, então obteremos uma variedade assintoticamente plana e com bordo não compacto. Além disso, levando

em conta a Definição 3.2 da massa ABL, temos que

$$g_{n\alpha}\vartheta^\alpha = \left(1 + \frac{m}{2r}\right)^4 \delta_{n\alpha} \left(\frac{x^\alpha}{|x|}\right) = 0,$$

logo

$$m(g) = c_n \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{S_{r,+}^{n-1}} \sum_{i,j} (g_{ij,j} - g_{jj,i}) \mu^i dV_{S_{r,+}^{n-1}}^\delta.$$

Como a métrica de Schwarzschild é esféricamente simétrica, utilizamos a massa ADM calculada no Exemplo 2.3 para concluir que $m(g) = m/2$.

4.2 Massa Não-Negativa

Para provar a desigualdade do teorema da massa positiva, temos que ver a curvatura escalar como a divergência de um campo vetorial, o que nos permite aplicar o Teorema da Divergência 1.7. A partir de agora, denotaremos a métrica Euclidiana em colchetes sem sub-índice, $\delta = \langle \cdot, \cdot \rangle$.

Proposição 4.2. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^2 . Seja $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ o campo vetorial dado por*

$$X = \overline{U}(f_i f_{kk} - f_k f_{ik}) e_i, \quad (4.1)$$

em que $\overline{U} = \frac{1}{U}$, $U = 1 + \langle Df, Df \rangle$. Considere a função $s : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ dada por

$$s = \overline{U}(f_{ii} f_{kk} - f_{ik} f_{ik}) - 2\overline{U}^2 f_l f_{li} (f_i f_{kk} - f_k f_{ik}).$$

Então, $s = \operatorname{div} X$.

Demonstração. Um cálculo direto da divergência conduzirá a demonstração. De fato,

$$\begin{aligned} \operatorname{div} X &= \overline{U}_i (f_i f_{kk} - f_k f_{ik}) \overline{U} (f_i f_{kk} - f_k f_{ik})_i \\ &= \frac{-2f_l f_{li}}{U^2} (f_i f_{kk} - f_k f_{ik}) + \overline{U} (f_{ii} f_{kk} - f_i f_{kki} - f_{ki} f_{ik} - f_k f_{iki}) \\ &= -2\overline{U}^2 f_l f_{li} (f_i f_{kk} - f_k f_{ik}) + \overline{U} (f_{ii} f_{kk} - f_{ki} f_{ik}). \end{aligned}$$

□

A próxima proposição nos permitirá, juntamente com o Teorema da Divergência 1.7, fornecer uma demonstração simples - sem uso de teorias mais avançadas - de que a massa de hipersuperfícies gráficas com bordo não compacto é não negativa.

Proposição 4.3. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^2 . Então, a curvatura escalar de $(G(f), g)$ é*

$$S = \overline{U}(f_{ii}f_{kk} - f_{ik}f_{ik}) - 2\overline{U}^2 f_l f_l (f_i f_{kk} - f_k f_{ik}).$$

Demonstração. Sabemos que $\{\partial_i = (e_i, f_i)\}_{i=1}^n$ é um referencial coordenado e $\eta = (-Df, 1)$ é um campo normal a $G(f)$, assim

$$\begin{aligned} \overline{\nabla}_i \partial_j &= (0, \dots, 0, \partial_i f_j) = (0, \dots, 0, \langle Df_j, \partial_i \rangle) \\ &= (0, \dots, 0, \langle (f_{j1}, \dots, f_{jn}, 0), (e_i, f_i) \rangle) \\ &= (0, \dots, 0, f_{ji}). \end{aligned}$$

Portanto, $\mathbf{A}(\partial_i, \partial_j) = (\overline{\nabla}_i \partial_j)^\perp = \langle \overline{\nabla}_i \partial_j, \frac{\eta}{|\eta|} \rangle \frac{\eta}{|\eta|} = \frac{f_{ij}}{1+|Df|^2} \eta$. Pela equação de Gauss 1.12,

$$\begin{aligned} R_{iklj} &= \langle \mathbf{A}(\partial_i, \partial_j), \mathbf{A}(\partial_k, \partial_l) \rangle - \langle \mathbf{A}(\partial_i, \partial_l), \mathbf{A}(\partial_k, \partial_j) \rangle \\ &= \frac{1}{1+|Df|^2} (f_{ij}f_{kl} - f_{il}f_{kj}). \end{aligned}$$

Como a inversa da métrica $g_{ij} = \delta_{ij} + f_i f_j$ é $g^{ij} = \delta_{ij} - \frac{f_i f_j}{1+|Df|^2}$, obtemos

$$\begin{aligned} S &= g^{ij} g^{kl} R_{iklj} = (\delta_{ij} - \overline{U} f_i f_j)(\delta_{kl} - \overline{U} f_k f_l) \overline{U}(f_{ij}f_{kl} - f_{il}f_{kj}) \\ &= \overline{U}(\delta_{ij} - \overline{U} f_i f_j)(\delta_{kl} f_{ij}f_{kl} - \delta_{kl} f_{il}f_{jk} - \overline{U} f_k f_l f_{ij}f_{kl} + \overline{U} f_k f_l f_{il}f_{jk}) \\ &= \overline{U}(\delta_{ij} \delta_{kl} f_{ij}f_{kl} - \delta_{ij} \delta_{kl} f_{il}f_{jk} - \delta_{ij} \overline{U} f_k f_l f_{ij}f_{kl} + \delta_{ij} \overline{U} f_k f_l f_{il}f_{jk} \\ &\quad - \overline{U} f_i f_j \delta_{kl} f_{ij}f_{kl} + \overline{U} f_i f_j \delta_{kl} f_{il}f_{jk} + \overline{U}^2 f_i f_j f_k f_l f_{ij}f_{kl} - \overline{U}^2 f_i f_j f_k f_l f_{il}f_{jk}). \end{aligned}$$

Como as duas últimas parcelas se cancelam, obtemos

$$\begin{aligned} S &= \overline{U}(f_{ii}f_{kk} - f_{ik}f_{ik}) + \overline{U}^2(-f_k f_l f_{ii}f_{kl} + f_k f_l f_{ik}f_{il} - f_i f_j f_{ij}f_{kk} + f_i f_j f_{ik}f_{jk}) \\ &= \overline{U}(f_{ii}f_{kk} - f_{ik}f_{ik}) - \overline{U}^2(f_k f_l f_{ii}f_{kl} - f_k f_l f_{ik}f_{il} f_i f_j f_{ij}f_{kk} - f_i f_j f_{ik}f_{jk}) \\ &= \overline{U}(f_{ii}f_{kk} - f_{ik}f_{ik}) - 2f_l f_l \overline{U}^2(f_i f_{kk} - f_k f_{ik}). \end{aligned}$$

□

Observação 4.2. *Embora a curvatura escalar seja, por definição, uma função definida sobre $G(f)$, pelo fato dela ser expressa em termos de f e esta ser uma função definida sobre $\mathbb{R}_+^n$, também podemos considerar a curvatura escalar como uma função definida sobre $\mathbb{R}_+^n$.*

Dizer que $S \in L^1(\mathbb{R}_+^n, \delta)$ é equivalente a dizer que $S \in L^1(G(f), g)$. Com efeito, como $(G(f), g)$ é isométrica a $(\mathbb{R}_+^n, \delta + df \otimes df)$, temos que $g_{ij} = \delta_{ij} + f_i f_j$ e $dV^g =$

$\sqrt{\det(g_{ij})}dV^\delta$. Como $\sqrt{1+|Df|^2}$ se aproxima de 1 quando $x \rightarrow \infty$ e

$$\begin{aligned} \int_{G(f)} S dV_{G(f)}^g &= \int_{\mathbb{R}_+^n} S dV_{\mathbb{R}_+^n}^g = \int_{\mathbb{R}_+^n} S \sqrt{1+|Df|^2} dV_{\mathbb{R}_+^n}^\delta, \text{ e} \\ \int_{\mathbb{R}_+^n} S dV_{\mathbb{R}_+^n}^\delta &= \int_{\mathbb{R}_+^n} \frac{S}{\sqrt{1+|Df|^2}} dV_{\mathbb{R}_+^n}^g = \int_{G(f)} \frac{S}{\sqrt{1+|Df|^2}} dV_{G(f)}^g, \end{aligned}$$

temos que $\int_{\mathbb{R}_+^n} S dV^\delta$ é finito se, e somente se, $\int_{G(f)} S dV^g$ é finito. Uma observação semelhante também é válida para a curvatura média do bordo do gráfico de f .

A seguir, apresentaremos uma expressão para a massa de hipersuperfícies gráficas mergulhadas no espaço Euclidiano.

Teorema 4.4. *Seja $f : \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função assintoticamente plana sobre $\mathbb{R}_+^n \setminus \Omega$, e de classe C^2 até o bordo, com ordem $\tau > (n-2)/2$. Seja $(G(f), g) = (\mathbb{R}_+^n, \delta + df \otimes df)$ o gráfico de f . Supomos os seguintes itens:*

- $f_n \geq 0$ sobre $\partial\mathbb{R}_+^n$ e $\partial_n = (e_n, f_n)$ é normal ao bordo não compacto (isso ocorre quando $f_n = 0$ sobre $\partial\mathbb{R}_+^n$, por exemplo);
- A curvatura escalar de $G(f)$ é integrável e não negativa, isto é, $S \in L^1(\mathbb{R}_+^n)$ e $S \geq 0$;
- A curvatura média $\bar{H}$ do bordo de $G(f)$, isto é, $\partial G(f)$ visto como uma subvariedade de $G(f)$, é tal que $\bar{H} \geq 0$ (com respeito ao campo normal, unitário e externo) e $\bar{H} \in L^1(\partial\mathbb{R}_+^n)$;
- A segunda forma fundamental $\tilde{A}$ (com respeito ao campo normal, unitário e apontando para cima) de $\partial G(f) = \partial\mathbb{R}_+^n$, visto como subvariedade de $(\mathbb{R}^n, \delta) = (\partial\mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}, \delta)$ é tal que $\sum_{i=1}^{n-1} \tilde{A}(\tilde{\partial}_i, \tilde{\partial}_i) \geq 0$ e $\sum_{i=1}^{n-1} \tilde{A}(\tilde{\partial}_i, \tilde{\partial}_i) \in L^1(\partial\mathbb{R}_+^n)$. Aqui, $\tilde{\partial}_i = (\tilde{e}_i, f_i)$ é um campo de vetores tangentes com $\tilde{e}_i \in \mathbb{R}^{n-1}$ é o i -ésimo vetor da base canônica.

Então,

$$\begin{aligned} \frac{m(g)}{c_n} &= \int_{\mathbb{R}_+^n} S dV_{\mathbb{R}_+^n}^\delta + \int_{\partial\mathbb{R}_+^n} \frac{\bar{H}|Df|^2}{\sqrt{1+(f_n)^2}} dV_{\partial\mathbb{R}_+^n}^\delta \\ &\quad + \int_{\partial\mathbb{R}_+^n} f_n \sqrt{1+|\bar{D}f|^2} \left(\sum_{i=1}^{n-1} \tilde{A}(\tilde{\partial}_i, \tilde{\partial}_i) \right) \frac{2+|Df|^2}{1+|Df|^2} dV_{\partial\mathbb{R}_+^n}^\delta, \end{aligned} \quad (4.2)$$

onde $\bar{D}f = (f_1, \dots, f_{n-1})$. Em particular, a massa ABL será não negativa.

Demonstração. Note que $\partial B_{r,+}^n = S_{r,+}^{n-1} \cup \bar{B}_r^{n-1}$ e $S_r^{n-2} = \partial B_r^{n-1}$, denotamos por N^δ o campo normal unitário externo a $\partial B_{r,+}^n$. Pela Proposição 4.3 anterior, temos que $S = \operatorname{div} X$ e

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}_+^n} S \, dV_{\mathbb{R}_+^n}^\delta &= \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\bar{B}_{r,+}^n} S \, dV_{\bar{B}_{r,+}^n}^\delta \\ &= \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\bar{B}_{r,+}^n} \operatorname{div} X \, dV_{\bar{B}_{r,+}^n}^\delta \\ &= \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\partial B_{r,+}^n} \langle X, N^\delta \rangle \, dV_{\partial B_{r,+}^n}^\delta \\ &= \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{S_{r,+}^{n-1}} \left\langle X, \frac{x}{|x|} \right\rangle \, dV_{S_{r,+}^{n-1}}^\delta + \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\bar{B}_r^{n-1}} \langle X, -e_n \rangle \, dV_{\bar{B}_r^{n-1}}^\delta. \end{aligned}$$

Por hipótese, $f_i = O(r^{-\frac{\tau}{2}})$ e $f_{ik} = O(r^{-\frac{\tau}{2}-1})$ para todos $i, k = 1, \dots, n$. Já que $U - 1 = \langle Df, Df \rangle = O(r^{-\tau})$, temos que $\lim_{r \rightarrow \infty} U = 1$. Daí que $\lim_{r \rightarrow \infty} \bar{U} = U^{-1} = 1$. Assim, $\bar{U} - 1 = -\bar{U} \langle Df, Df \rangle = O(r^{-\tau})$. Com isso, concluímos que

$$(\bar{U} - 1)(f_i f_{kk} - f_k f_{ik}) = O(r^{-2\tau-1}).$$

Como $\tau > (n-2)/2$, temos que $2\tau + 1 > n - 1 = \dim S_{r,+}^{n-1}$. Daí,

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{S_{r,+}^{n-1}} \left| (\bar{U} - 1)(f_i f_{kk} - f_k f_{ik}) \frac{x^i}{|x|} \right| \, dV_{S_{r,+}^{n-1}}^\delta &\leq \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{S_{r,+}^{n-1}} C \cdot r^{-2\tau-1} \, dV_{S_{r,+}^{n-1}}^\delta \\ &\leq C \lim_{r \rightarrow \infty} r^{-2\tau-1} |S_{r,+}^{n-1}| = 0. \end{aligned}$$

Logo,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{S_{r,+}^{n-1}} (\bar{U} - 1)(f_i f_{kk} - f_k f_{ik}) \frac{x^i}{|x|} \, dV_{S_{r,+}^{n-1}}^\delta = 0.$$

Portanto,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{S_{r,+}^{n-1}} \bar{U}(f_i f_{kk} - f_k f_{ik}) \frac{x^i}{|x|} \, dV_{S_{r,+}^{n-1}}^\delta = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{S_{r,+}^{n-1}} (f_i f_{kk} - f_k f_{ik}) \frac{x^i}{|x|} \, dV_{S_{r,+}^{n-1}}^\delta. \quad (4.3)$$

Com isso,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{S_{r,+}^{n-1}} \left\langle X, \frac{x}{|x|} \right\rangle \, dV_{S_{r,+}^{n-1}}^\delta = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{S_{r,+}^{n-1}} (f_i f_{kk} - f_k f_{ik}) \frac{x^i}{|x|} \, dV_{S_{r,+}^{n-1}}^\delta.$$

Agora note que $\langle X, -e_n \rangle = -\bar{U}(f_n f_{kk} - f_k f_{nk}) = -\bar{U} \sum_{k \neq n} (f_n f_{kk} - f_k f_{nk})$, pois quando $k = n$ os termos se cancelam. Por outro lado, como $-\bar{U} = 1 - \frac{2+|Df|^2}{1+|Df|^2}$,

$$\langle X, -e_n \rangle = \sum_{k=1}^{n-1} (f_n f_{kk} - f_k f_{nk}) - \frac{2+|Df|^2}{1+|Df|^2} \sum_{k=1}^{n-1} (f_n f_{kk} - f_k f_{nk}).$$

Isso implica que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}_+^n} S \, dV_{\mathbb{R}_+^n}^\delta &= \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{S_{r,+}^{n-1}} (f_i f_{kk} - f_k f_{ik}) \frac{x^i}{|x|} \, dV_{\mathbb{R}_+^n}^\delta + \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\bar{B}_r^{n-1}} \sum_{k=1}^{n-1} (f_n f_{kk} - f_k f_{nk}) \, dV_{\bar{B}_r^{n-1}}^\delta \\ &\quad - \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\bar{B}_r^{n-1}} \frac{2+|Df|^2}{1+|Df|^2} \sum_{k=1}^{n-1} (f_n f_{kk} - f_k f_{nk}) \, dV_{\bar{B}_r^{n-1}}^\delta. \end{aligned}$$

Continuando com os cálculos,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}_+^n} S \, dV_{\mathbb{R}_+^n}^\delta &= \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{S_{r,+}^{n-1}} (g_{ki,k} - g_{kk,i})(\mu^\delta) \, dV_{S_{r,+}^{n-1}}^\delta \\ &\quad + \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\bar{B}_r^{n-1}} (\operatorname{div}_{\mathbb{R}^{n-1}}(f_n \bar{D}f) - 2\langle \bar{D}f, \bar{D}f_n \rangle) \, dV_{\bar{B}_r^{n-1}}^\delta \\ &\quad - \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\bar{B}_r^{n-1}} \frac{2+|Df|^2}{1+|Df|^2} \sum_{k=1}^{n-1} (f_n f_{kk} - f_k f_{nk}) \, dV_{\bar{B}_r^{n-1}}^\delta. \end{aligned}$$

Aqui, $\bar{D}f = (\partial_1 f, \dots, \partial_{n-1} f)$, μ^δ é o campo unitário normal a $S_{r,+}^{n-1}$ e ϑ^δ é o campo co-normal a S_r^{n-2} . Do Teorema da Divergência,

$$\int_{\bar{B}_r^{n-1}} (\operatorname{div}_{\mathbb{R}^{n-1}}(f_n \bar{D}f)) \, dV_{\bar{B}_r^{n-1}}^\delta = \int_{S_r^{n-2}} f_n \langle \bar{D}f, \vartheta^\delta \rangle \, dV_{S_r^{n-2}}^\delta,$$

encontramos

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbb{R}_+^n} S \, dV_{\mathbb{R}_+^n}^\delta &= \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{S_{r,+}^{n-1}} (g_{ki,k} - g_{kk,i})(\mu^i) \, dV_{S_{r,+}^{n-1}}^\delta + \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{S_r^{n-2}} \sum_{k=1}^{n-1} f_n f_k \vartheta^k \, dV_{S_r^{n-2}}^\delta \\
 &\quad - 2 \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\bar{B}_r^{n-1}} \langle \bar{D}f, \bar{D}f_n \rangle \, dV_{\bar{B}_r^{n-1}}^\delta - \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\bar{B}_r^{n-1}} \frac{2 + |Df|^2}{1 + |Df|^2} \sum_{k=1}^{n-1} (f_n f_{kk} - f_k f_{nk}) \, dV_{\bar{B}_r^{n-1}}^\delta \\
 &= \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{S_{r,+}^{n-1}} (g_{ki,k} - g_{kk,i})(\mu^i) \, dV_{S_{r,+}^{n-1}}^\delta + \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{S_r^{n-2}} \sum_{k=1}^{n-1} g_{nk} \vartheta^k \, dV_{S_r^{n-2}}^\delta \\
 &\quad - 2 \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\bar{B}_r^{n-1}} \langle \bar{D}f, \bar{D}f_n \rangle \, dV_{\bar{B}_r^{n-1}}^\delta - \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\bar{B}_r^{n-1}} \frac{2 + |Df|^2}{1 + |Df|^2} \sum_{k=1}^{n-1} (f_n f_{kk} - f_k f_{nk}) \, dV_{\bar{B}_r^{n-1}}^\delta.
 \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
 \frac{m(g)}{c_n} &= \int_{\mathbb{R}_+^n} S \, dV_{\mathbb{R}_+^n}^\delta + 2 \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\bar{B}_r^{n-1}} \sum_{i=1}^{n-1} f_{ni} f_i \, dV_{\bar{B}_r^{n-1}}^\delta \\
 &\quad + \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\bar{B}_r^{n-1}} \frac{2 + |Df|^2}{1 + |Df|^2} \sum_{k=1}^{n-1} (f_n f_{kk} - f_k f_{nk}) \, dV_{\bar{B}_r^{n-1}}^\delta.
 \end{aligned}$$

Agora calculamos a segunda forma fundamental do bordo visto como uma subvariedade de $G(f)$. Por hipótese, $N = -\partial_n = -(e_n, f_n)$ é um campo normal no bordo, e além disso, externo e tangente a $G(f)$. Seja $\bar{\nabla}$ a conexão Euclidiana do $\mathbb{R}^{n+1}$, temos que

$$\begin{aligned}
 \bar{\nabla}_i \partial_n &= (0, \dots, 0, \partial_i f_n) = (0, \dots, 0, \langle Df_n, \partial_i \rangle) \\
 &= (0, \dots, 0, f_{ni}).
 \end{aligned}$$

Já que $\partial_j = (e_j, f_j)$, temos que $\langle \bar{\nabla}_i N, \partial_j \rangle = f_{ni} f_j$. Logo,

$$\langle \bar{\nabla}_i N, \partial_j \rangle = -\langle \bar{\nabla}_i \partial_n, \partial_j \rangle = -f_{ni} f_j.$$

Aqui usamos o fato de $\langle \bar{\nabla}_i N, \partial_j \rangle = -\langle N, \bar{\mathbf{A}}(\partial_i, \partial_j) \rangle$, onde $\bar{\mathbf{A}}$ é a segunda forma fundamental do bordo visto como subvariedade de $G(f)$, e encontramos $\langle N, \bar{\mathbf{A}}(\partial_i, \partial_j) \rangle = f_{ni} f_j$. Logo, denotando a segunda forma fundamental escalar por $\bar{A}$, encontramos

$$\bar{A}(\partial_i, \partial_j) = \left\langle \frac{N}{|N|}, \bar{\mathbf{A}}(\partial_i, \partial_j) \right\rangle = \frac{f_{ni} f_j}{\sqrt{1 + (f_n)^2}}.$$

Com disso, a curvatura média $\bar{H} = \text{tr}_g \bar{A}$ é dada por

$$\begin{aligned}
 \bar{H} &= \sum_{i,j=1}^{n-1} g^{ij} \bar{A}(\partial_i, \partial_j) = \sum_{i,j=1}^{n-1} \left(\delta_{ij} - \frac{f_i f_j}{1 + |Df|^2} \right) \frac{f_{ni} f_j}{\sqrt{1 + (f_n)^2}} \\
 &= \sum_{i,j=1}^{n-1} \left(\frac{\delta_{ij} f_{ni} f_j}{\sqrt{1 + (f_n)^2}} - \frac{f_{ni} f_i (f_j)^2}{(1 + |Df|^2) \sqrt{1 + (f_n)^2}} \right) \\
 &= \sum_{i=1}^{n-1} \frac{f_{ni} f_i}{\sqrt{1 + (f_n)^2}} - \sum_{i,j=1}^{n-1} \frac{f_{ni} f_i (f_j)^2}{(1 + |Df|^2) \sqrt{1 + (f_n)^2}} \\
 &= \sum_{i=1}^{n-1} \frac{f_{ni} f_i}{\sqrt{1 + (f_n)^2}} - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{f_{ni} f_i}{\sqrt{1 + (f_n)^2}} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{(f_j)^2}{1 + |Df|^2} \\
 &= \sum_{i=1}^{n-1} \frac{f_{ni} f_i}{\sqrt{1 + (f_n)^2}} \left(1 - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{(f_j)^2}{1 + |Df|^2} \right).
 \end{aligned}$$

Logo,

$$\sum_{i=1}^{n-1} f_{ni} f_i = \frac{\bar{H} \sqrt{1 + (f_n)^2}}{1 - \sum_{j=1}^{n-1} (f_j)^2 / (1 + |Df|^2)} = \frac{\bar{H}}{\sqrt{1 + (f_n)^2}}.$$

$$\begin{aligned}
 \frac{m(g)}{c_n} &= \int_{\mathbb{R}_+^n} S \, dV_{\mathbb{R}_+^n}^\delta + 2 \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\bar{B}_r^{n-1}} \frac{\bar{H}}{\sqrt{1 + (f_n)^2}} \, dV_{\bar{B}_r^{n-1}}^\delta \\
 &\quad + \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\bar{B}_r^{n-1}} \frac{2 + |Df|^2}{1 + |Df|^2} \sum_{k=1}^{n-1} (f_n f_{kk} - f_k f_{nk}) \, dV_{\bar{B}_r^{n-1}}^\delta \\
 &= \int_{\mathbb{R}_+^n} S \, dV_{\mathbb{R}_+^n}^\delta + \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\bar{B}_r^{n-1}} \frac{\bar{H}}{\sqrt{1 + (f_n)^2}} \left(2 - \frac{2 + |Df|^2}{1 + |Df|^2} \right) \, dV_{\bar{B}_r^{n-1}}^\delta \\
 &\quad + \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\bar{B}_r^{n-1}} \frac{2 + |Df|^2}{1 + |Df|^2} \sum_{k=1}^{n-1} f_n f_{kk} \, dV_{\bar{B}_r^{n-1}}^\delta.
 \end{aligned}$$

Por hipótese $f_n \geq 0$ sobre $\partial \mathbb{R}_+^n$. Também, $\sum_{k=1}^{n-1} f_{kk} = \sqrt{1 + |\bar{D}f|^2} \sum_{i=1}^{n-1} \tilde{A}(\tilde{\partial}_i, \tilde{\partial}_i)$ como veremos abaixo. Desse modo,

$$\begin{aligned}
 \frac{m(g)}{c_n} &= \int_{\mathbb{R}_+^n} S \, dV_{\mathbb{R}_+^n}^\delta + \int_{\partial \mathbb{R}_+^n} \frac{\bar{H} |Df|^2}{\sqrt{1 + (f_n)^2}} \, dV_{\partial \mathbb{R}_+^n}^\delta \\
 &\quad + \int_{\partial \mathbb{R}_+^n} f_n \sqrt{1 + |\bar{D}f|^2} \left(\sum_{i=1}^{n-1} \tilde{A}(\tilde{\partial}_i, \tilde{\partial}_i) \right) \frac{2 + |Df|^2}{1 + |Df|^2} \, dV_{\partial \mathbb{R}_+^n}^\delta \\
 &\geq 0,
 \end{aligned}$$

Para concluir, mostremos que $\sum_{k=1}^{n-1} f_{kk} = \sqrt{1 + |\overline{Df}|^2} \sum_{i=1}^{n-1} \tilde{A}(\tilde{\partial}_i, \tilde{\partial}_i)$. Visto como uma subvariedade de $\partial\mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}$, o bordo de $G(f)$ é o gráfico de $\bar{f} = f|_{\partial\mathbb{R}_+^n}$. Logo, $\tilde{\partial}_i = (\tilde{e}_i, \bar{f}_i)$, $i = 1, \dots, n-1$, são campos de vetores tangentes. Ademais, $\tilde{\eta} = (-\overline{Df}, 1) = (-\overline{Df}, 1)$ é um campo normal. Temos

$$\overline{\nabla}_{\tilde{\partial}_i} \tilde{\eta} = (-\tilde{\partial}_i \bar{f}_1, \dots, -\tilde{\partial}_i \bar{f}_{n-1}, 0).$$

Com isso, $\langle \overline{\nabla}_{\tilde{\partial}_i} \tilde{\eta}, \tilde{\partial}_j \rangle = -\bar{f}_{ji}$. Usando a equação de Weingarten, encontramos

$$\langle \tilde{\mathbf{A}}(\tilde{\partial}_i, \tilde{\partial}_j), \tilde{\eta} \rangle = \bar{f}_{ji} = f_{ji}.$$

Logo,

$$\sum_{i=1}^{n-1} \tilde{A}(\tilde{\partial}_i, \tilde{\partial}_i) = \sum_{j=1}^{n-1} \left\langle \tilde{\mathbf{A}}(\tilde{\partial}_i, \tilde{\partial}_i), \frac{\tilde{\eta}}{|\tilde{\eta}|} \right\rangle = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f_{kk}}{\sqrt{1 + |\overline{Df}|^2}},$$

como esperado. □

4.3 Desigualdade de Penrose

Vamos começar esta seção com uma simples proposição que será útil à próxima.

Proposição 4.5. *Seja (M, g) uma $(n+1)$ -variedade Riemanniana e $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave. Seja $\Sigma \subset M$ uma hipersuperfície mergulhada e ν um campo normal e unitário a Σ . Suponha que f é constante em Σ ; então em Σ temos*

$$\Delta f = \text{Hess}f(\nu, \nu) - H_\Sigma \langle Df, \nu \rangle.$$

Aqui, H_Σ está relacionado a ν .

Demonstração. Dado um ponto $x \in \Sigma$, temos

$$\begin{aligned} \Delta f &= \text{div } Df = \text{div}(\langle Df, \nu \rangle \nu) = \langle D\langle Df, \nu \rangle, \nu \rangle + \langle Df, \nu \rangle \text{div } \nu \\ &= \langle \overline{\nabla}_\nu Df, \nu \rangle + \langle Df, \overline{\nabla}_\nu \nu \rangle + \langle Df, \nu \rangle \text{div } \nu. \end{aligned}$$

Usando que Σ é uma subvariedade regular de M , tomamos uma vizinhança U de x em Σ tal que $U = g^{-1}(a)$, onde $g : V \subset M \rightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável, $u \subset V$, e $a \in \mathbb{R}$ é um valor regular de g . Seja $E_1, \dots, E_{n+1}$ um referencial ortonormal tal que $E_{n+1} = Dg/|Dg| = \nu$ e denotemos por H a curvatura média e por $\mathbf{A}$ a segunda forma fundamental de Σ .

Então

$$\begin{aligned} H &= \sum_{i=1}^n \langle \mathbf{A}(E_i, E_i), \nu \rangle = \sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{E_i} E_i, \nu \rangle \\ &= - \sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{E_i} \nu, E_i \rangle - \langle \bar{\nabla}_\nu \nu, \nu \rangle = - \sum_{i=1}^{n+1} \langle \bar{\nabla}_{E_i} \nu, E_i \rangle = -\operatorname{div} \nu. \end{aligned}$$

Daí, segue que

$$\begin{aligned} \Delta f &= \langle \bar{\nabla}_\nu Df, \nu \rangle + \langle Df, \bar{\nabla}_\nu \nu \rangle - H_\Sigma \langle Df, \nu \rangle \\ &= \operatorname{Hess} f(\nu, \nu) + \langle Df, \nu \rangle \langle \nu, \bar{\nabla}_\nu \nu \rangle - H_\Sigma \langle Df, \nu \rangle \\ &= \operatorname{Hess} f(\nu, \nu) - H_\Sigma \langle Df, \nu \rangle, \end{aligned}$$

como esperado. □

A próxima proposição será usada na prova da desigualdade de Penrose.

Proposição 4.6. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto limitado tal que a fronteira de $\mathbb{R}_+^n \setminus \Omega$ é suave. Seja $f : \mathbb{R}_+^n \setminus \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C_2 até à fronteira, assintoticamente plana, constante em cada componente de $\partial\Omega$, e tal que $|Df| \rightarrow \infty$ quando $x \rightarrow \partial\Omega$. Supomos que o gráfico $G(f)$ de f está munido da métrica induzida do $\mathbb{R}^{n+1}$. Denotando por $\dot{\Omega}_i$, $i = 1, \dots, \dot{n}$, as componentes conexas de Ω tais que $\dot{\Omega}_i \cap \{x^n < 0\} \neq \emptyset$ e $\dot{\Omega}_i \cap \{x^n > 0\} \neq \emptyset$; e por $\tilde{\Omega}_i$, $i = 1, \dots, \tilde{n}$, as componentes conexas de Ω tais que $\tilde{\Omega}_i \subset \mathbb{R}_+^n$, então*

$$\begin{aligned} \frac{m(g)}{c_n} &= \int_{\mathbb{R}_+^n \setminus \Omega} S \, dV + \int_{\partial\mathbb{R}_+^n \cup \dot{\Omega}_i} \frac{\bar{H}|Df|^2}{\sqrt{1 + (f_n)^2}} \, dV \\ &\quad + \int_{\partial\mathbb{R}_+^n \cup \dot{\Omega}_i} f_n \sqrt{1 + |\bar{D}f|^2} \left(\sum_{i=1}^{n-1} \tilde{A}(\tilde{\partial}_i, \tilde{\partial}_i) \right) \frac{2 + |Df|^2}{1 + |Df|^2} \, dV \\ &\quad - \sum_{i=1}^{\dot{n}} \int_{\partial\dot{\Omega}_i \cap \partial\mathbb{R}_+^n} f_n \langle \bar{D}f, \dot{\eta} \rangle \, dV + \int_{\cup \partial\tilde{\Omega}_i \cap \{x^n > 0\}} H_{\partial\Omega} \, dV \\ &\quad + \int_{\cup \partial\tilde{\Omega}_i} H_{\partial\Omega} \, dV. \end{aligned}$$

Aqui $\dot{\eta}$ é o campo unitário e normal a $\partial\dot{\Omega}$ interno a $\dot{\Omega}$, $\bar{H}$ e $\tilde{A}$ são a curvatura média e a segunda forma fundamental escalar definidas no Teorema 4.4 e $H_{\partial\Omega}$ é a curvatura média de $\partial\Omega$ visto como uma subvariedade dos hiperplanos que contêm as componentes conexas. Veja a Figura 4.2 para melhor compreensão.

Demonstração. Temos novamente pelo Teorema da Divergência

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbb{R}_+^n \setminus \Omega} S \, dV &= \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{B_+^n \setminus \Omega} \operatorname{div} X \, dV \\
 &= \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{S_+^{n-1} \setminus \Omega} \left\langle X, \frac{x}{|x|} \right\rangle dV + \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{B_r^{n-1} \setminus \cup \dot{\Omega}_i} \langle X, -e_n \rangle dV \\
 &\quad + \int_{\cup \partial \dot{\Omega}_i \cap \{x^n > 0\}} \langle X, \dot{\eta}_i \rangle dV + \int_{\cup \partial \tilde{\Omega}_i} \langle X, \tilde{\eta}_i \rangle dV,
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

onde $X = 1/(1 + |Df|^2)(f_i f_{kk} - f_k f_{ik})e_i$. Como no Teorema 4.4, encontramos

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{S_+^{n-1} \setminus \Omega} \left\langle X, \frac{x}{|x|} \right\rangle dV = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{S_{r,+}^{n-1}} (f_i f_{kk} - f_k f_{ik}) \frac{x^i}{|x|} dV. \tag{4.5}$$

Por outro lado, como $-\bar{U} = 1 - \frac{2+|Df|^2}{1+|Df|^2}$:

$$\langle X, -e_n \rangle = \sum_{k=1}^{n-1} (f_n f_{kk} - f_k f_{nk}) - \frac{2 + |Df|^2}{1 + |Df|^2} \sum_{k=1}^{n-1} (f_n f_{kk} - f_k f_{nk}).$$

Logo,

$$\begin{aligned}
 &\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\bar{B}_r^{n-1} \setminus \cup \dot{\Omega}} \langle X, -e_n \rangle dV + \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\bar{B}_r^{n-1} \setminus \cup \dot{\Omega}} \sum_{k=1}^{n-1} (f_n f_{kk} - f_k f_{nk}) dV \\
 &\quad - \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\bar{B}_r^{n-1} \setminus \cup \dot{\Omega}} \frac{2 + |Df|^2}{1 + |Df|^2} \sum_{k=1}^{n-1} (f_n f_{kk} - f_k f_{nk}) dV \\
 &= \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\bar{B}_r^{n-1} \setminus \cup \dot{\Omega}} (\operatorname{div}_{\mathbb{R}^{n-1}}(f_n \bar{D}f) - 2\langle \bar{D}f, \bar{D}f_n \rangle) dV \\
 &\quad - \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\bar{B}_r^{n-1} \setminus \cup \dot{\Omega}} \frac{2 + |Df|^2}{1 + |Df|^2} \sum_{k=1}^{n-1} (f_n f_{kk} - f_k f_{nk}) dV.
 \end{aligned}$$

Aqui, $\bar{D}f = (\partial_1 f, \dots, \partial_{n-1} f)$. Usando que

$$\begin{aligned}
 &\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\bar{B}_r^{n-1} \setminus \cup \dot{\Omega}_i} (\operatorname{div}_{\mathbb{R}^{n-1}}(f_n \bar{D}f)) dV \\
 &= \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{S_r^{n-2}} f_n \langle \bar{D}f, \vartheta^\delta \rangle dV + \sum_{i=1}^{\dot{n}} \int_{\partial \dot{\Omega}_i \cap \partial \mathbb{R}_+^n} f_n \langle \bar{D}f, \dot{\eta} \rangle dV,
 \end{aligned}$$

onde ϑ^δ é o campo unitário co-normal em S_r^{n-2} externo a $\bar{B}_r^{n-1}$. Com isso,

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\bar{B}_r^{n-1} \setminus \cup \dot{\Omega}} \langle X, -e_n \rangle dV &= \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{S_r^{n-2} \Omega} f_n \langle \bar{D}f, \vartheta^\delta \rangle dV + \sum_{i=1}^n \int_{\partial \dot{\Omega} \cap \partial \mathbb{R}_+^n} f_n \langle \bar{D}f, \dot{\eta} \rangle dV \\ &- 2 \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\bar{B}_r^{n-1} \setminus \cup \dot{\Omega}} \langle \bar{D}f, \bar{D}f_n \rangle dV - \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\bar{B}_r^{n-1} \setminus \cup \dot{\Omega}} \frac{2 + |Df|^2}{1 + |Df|^2} \sum_{k=1}^{n-1} (f_n f_{kk} - f_k f_{nk}) dV. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Usando 4.4, 4.5, e 4.6, encontramos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}_+^n \setminus \Omega} S dV &= \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{S_{r,+}^{n-1}} (f_i f_{kk} - f_k f_{ik}) \frac{x^i}{|x|} dV + \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{S_r^{n-2}} f_n \langle \bar{D}f, \vartheta^\delta \rangle dV \\ &+ \sum_{i=1}^n \int_{\partial \dot{\Omega} \cap \partial \mathbb{R}_+^n} f_n \langle \bar{D}f, \dot{\eta} \rangle dV - 2 \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\bar{B}_r^{n-1} \setminus \cup \dot{\Omega}} \langle \bar{D}f, \bar{D}f_n \rangle dV \\ &- \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\bar{B}_r^{n-1} \setminus \cup \dot{\Omega}} \frac{2 + |Df|^2}{1 + |Df|^2} \sum_{k=1}^{n-1} (f_n f_{kk} - f_k f_{nk}) dV \\ &+ \int_{\cup \partial \dot{\Omega}_i \cap \{x^n > 0\}} \langle X, \dot{\eta}_i \rangle dV + \int_{\cup \partial \tilde{\Omega}_i} \langle X, \tilde{\eta}_i \rangle dV, \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\begin{aligned} \frac{m(g)}{c_n} &= \int_{\mathbb{R}_+^n \setminus \Omega} S dV - \sum_{i=1}^n \int_{\partial \dot{\Omega} \cap \partial \mathbb{R}_+^n} f_n \langle \bar{D}f, \dot{\eta} \rangle dV \\ &+ 2 \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\bar{B}_r^{n-1} \setminus \cup \dot{\Omega}} \langle \bar{D}f, \bar{D}f_n \rangle dV \\ &+ \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\bar{B}_r^{n-1} \setminus \cup \dot{\Omega}} \frac{2 + |Df|^2}{1 + |Df|^2} \sum_{k=1}^{n-1} (f_n f_{kk} - f_k f_{nk}) dV \\ &- \int_{\cup \partial \dot{\Omega}_i \cap \{x^n > 0\}} \langle X, \dot{\eta}_i \rangle dV - \int_{\cup \partial \tilde{\Omega}_i} \langle X, \tilde{\eta}_i \rangle dV \end{aligned} \quad (4.7)$$

Como no Teorema 4.4, temos

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\bar{B}_r^{n-1} \setminus \cup \dot{\Omega}} f_k f_{nk} \left(2 - \frac{2 + |Df|^2}{1 + |Df|^2} \right) dV = \int_{\partial \mathbb{R}_+^n \setminus \cup \dot{\Omega}} \frac{\bar{H} |Df|^2}{\sqrt{1 + (f_n)^2}} dV, \quad (4.8)$$

onde $\bar{H}$ é a curvatura média de $\partial G(f)$, visto como subvariedade de $G(f)$, e também

temos

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\bar{B}_r^{n-1} \setminus \cup \dot{\Omega}} f_n f_{kk} \left(2 - \frac{2 + |Df|^2}{1 + |Df|^2} \right) dV \\ = \int_{\partial \mathbb{R}_+^n \setminus \cup \dot{\Omega}_i} f_n \sqrt{1 + |\bar{D}f|^2} \left(\sum_{i=1}^{n-1} \tilde{A}(\tilde{\partial}_i, \tilde{\partial}_i) \right) \frac{2 + |Df|^2}{1 + |Df|^2} dV, \end{aligned} \quad (4.9)$$

onde $\tilde{A}$ é a segunda forma fundamental escalar de $\partial G(f)$, visto como subvariedade de $\partial \mathbb{R}_+^n$. Logo,

$$\begin{aligned} \frac{m(g)}{c_n} &= \int_{\mathbb{R}_+^n \setminus \Omega} S dV + \int_{\partial \mathbb{R}_+^n \setminus \cup \dot{\Omega}} \frac{\bar{H} |Df|^2}{\sqrt{1 + (f_n)^2}} dV \\ &+ \int_{\partial \mathbb{R}_+^n \setminus \cup \dot{\Omega}_i} f_n \sqrt{1 + |\bar{D}f|^2} \left(\sum_{i=1}^{n-1} \tilde{A}(\tilde{\partial}_i, \tilde{\partial}_i) \right) \frac{2 + |Df|^2}{1 + |Df|^2} dV \\ &- \sum_{i=1}^n \int_{\partial \dot{\Omega}_i \cap \partial \mathbb{R}_+^n} f_n \langle \bar{D}f, \dot{\eta} \rangle dV \\ &- \int_{\cup \partial \dot{\Omega}_i \cap \{x^n > 0\}} \langle X, \dot{\eta}_i \rangle dV - \int_{\cup \partial \tilde{\Omega}_i} \langle X, \tilde{\eta}_i \rangle dV. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Os próximos cálculos da curvatura média do conjunto de nível $\partial \Omega$ podem ser encontrados em Lam ([41], Equação 5.3) ou Mirandola e Vitório ([52], Equação 33). Como f é constante sobre $\partial \Omega$, tem-se que Df é normal a este conjunto. Denote por Ω^c uma componente de Ω tal que f cresce quando $x \rightarrow \partial \Omega^c$, assim $Df/|Df|$ é o campo normal, unitário e externo ao gráfico ao longo de $\partial \Omega^c$ ($Df/|Df|$ aponta pra dentro de Ω^c no hiperplano que o contém). Denote por Ω^d uma componente de Ω , tal que f decresce quando $x \rightarrow \partial \Omega^d$, assim $-Df/|Df|$ é o campo normal, unitário e externo ao gráfico ao longo de $\partial \Omega^d$ ($-Df/|Df|$ aponta para dentro de Ω^d no hiperplano que o contém).

Temos que

$$\begin{aligned} \left\langle X, \frac{Df}{|Df|} \right\rangle &= \left\langle \bar{U}(f_i f_{kk} - f_k f_{ik}) e_i, \frac{f_j}{|Df|} e_j \right\rangle = \frac{f_i \bar{U}}{|Df|} (f_i f_{kk} - f_k f_{ik}) \\ &= \frac{\bar{U}}{|Df|} (f_i^2 f_{kk} - f_k f_i f_{ik}) = \frac{\bar{U}}{|Df|} (|Df|^2 \Delta f - \text{Hess} f(Df, Df)) \\ &= \frac{|Df|^2}{|Df|} \bar{U} \left(\Delta f - \text{Hess} f \left(\frac{Df}{|Df|}, \frac{Df}{|Df|} \right) \right). \end{aligned}$$

Como $\nu = Df/|Df|$ é o campo normal, unitário e inteiro a Ω^c , usando a Proposição

4.5 e que $\bar{U} = 1/(1 + |Df|^2)$, encontramos

$$\begin{aligned} \left\langle X, \frac{Df}{|Df|} \right\rangle &= \frac{|Df|}{1 + |Df|^2} \left(-H_{\partial\Omega^c} \left\langle Df, \frac{Df}{|Df|} \right\rangle \right) \\ &= -\frac{|Df|^2}{1 + |Df|^2} H_{\partial\Omega^c} \left\langle \frac{Df}{|Df|}, \frac{Df}{|Df|} \right\rangle = -\frac{|Df|^2}{1 + |Df|^2} H_{\partial\Omega^c}. \end{aligned}$$

Como $\nu = -Df/|Df|$ é o campo normal, unitário e inteiro a Ω^d , usando a Proposição 4.5 e que $\bar{U} = 1/(1 + |Df|^2)$, encontramos

$$\begin{aligned} \left\langle X, -\frac{Df}{|Df|} \right\rangle &= -\frac{|Df|}{1 + |Df|^2} \left(-H_{\partial\Omega^d} \left\langle Df, \frac{Df}{|Df|} \right\rangle \right) \\ &= -\frac{|Df|^2}{1 + |Df|^2} H_{\partial\Omega^d} \left\langle -\frac{Df}{|Df|}, -\frac{Df}{|Df|} \right\rangle = -\frac{|Df|^2}{1 + |Df|^2} H_{\partial\Omega^d}. \end{aligned}$$

Aqui, $H_{\partial\Omega}$ é a curvatura média da fronteira de Ω com relação ao campo normal, unitário e interno a Ω . Sabemos que $\lim_{x \rightarrow \partial\Omega} |Df(x)| = \infty$, logo $\lim_{x \rightarrow \partial\Omega} |Df|^2/(1 + |Df|^2) = 1$, e assim,

$$\langle X, \nu \rangle = -H_{\partial\Omega}.$$

Usando 4.7, temos finalmente

$$\begin{aligned} \frac{m(g)}{c_n} &= \int_{\mathbb{R}_+^n \setminus \Omega} S \, dV + \int_{\partial\mathbb{R}_+^n \setminus \cup \dot{\Omega}} \frac{\bar{H}|Df|^2}{\sqrt{1 + (f_n)^2}} \, dV \\ &\quad + \int_{\partial\mathbb{R}_+^n \setminus \cup \dot{\Omega}_i} f_n \sqrt{1 + |\bar{D}f|^2} \left(\sum_{i=1}^{n-1} \tilde{A}(\tilde{\partial}_i, \tilde{\partial}_i) \right) \frac{2 + |Df|^2}{1 + |Df|^2} \, dV \\ &\quad - \sum_{i=1}^{\dot{n}} \int_{\partial\dot{\Omega}_i \cap \partial\mathbb{R}_+^n} f_n \langle \bar{D}f, \dot{\eta} \rangle \, dV + \int_{\cup \partial\dot{\Omega}_i \cap \{x^n > 0\}} H_{\partial\Omega} \, dV \\ &\quad + \int_{\cup \partial\tilde{\Omega}_i} H_{\partial\Omega} \, dV. \end{aligned}$$

□

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, um conjunto limitado, cujo bordo $\partial\Omega$ seja suave. Dado $x \in \partial\Omega$, denote por $\kappa(x) = (\kappa_1(x), \dots, \kappa_{n-1}(x))$ as curvaturas principais de $\partial\Omega$ em x . Para $0 \leq k \leq n-1$, considere as funções simétricas $\sigma_k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, definidas por

$$\sigma_k(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}) = \binom{n-1}{k}^{-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n-1} \lambda_{i_1} \dots \lambda_{i_k}.$$

Note que $\sigma_0(\kappa_1(x), \dots, \kappa_{n-1}(x)) = 1$, $\sigma_1(\kappa_1(x), \dots, \kappa_{n-1}(x)) = \frac{1}{n-1}H(x)$, onde H é a curvatura média de $\partial\Omega$ e $\sigma_{n-1}(\kappa_1(x), \dots, \kappa_{n-1}(x)) = \prod_{i=1}^{n-1} \kappa_i$ é a curvatura Gaussiana de $\partial\Omega$. Definimos também a quantidade

$$V_{n-k}(\Omega) := C_{n-1,k} \int_{\partial\Omega} \sigma_{k-1}(\kappa) dV,$$

em que

$$C_{n-1,k} = \frac{\sigma_k(I)}{\sigma_{k-1}(I)}, \quad I = (1, \dots, 1).$$

Com essas definições podemos fazer a seguinte caracterização para Ω :

Definição 4.2. Dizemos que Ω é **k -convexo**, se $\kappa(x) \in \bar{\Gamma}_k$ para todo $x \in \partial\Omega$, em que Γ_k é o **cone de Garding**:

$$\Gamma_k := \{\lambda \in \mathbb{R}^n; \sigma_k(\lambda) > 0, \forall m \leq k\}.$$

Diz-se que Ω é **estritamente k -convexo**, se $\kappa(x) \in \Gamma_k$ para todo $x \in \partial\Omega$. Da mesma forma, dizemos que o bordo $\partial\Omega$ é **(estritamente) k -convexo**, se Ω é (estritamente) k -convexo.

Observação 4.3. Mais concisamente, dizemos que a hipersuperfície $\partial\Omega$ é **convexa** se ela é $n-1$ -convexa e que é **média-convexa** se a mesma é 1-convexa.

Agora supomos também que Ω seja um domínio de $\mathbb{R}^n$ com $n \geq 3$, isto é, um aberto limitado e conexo. As desigualdades de Alexandrov-Fenchel, provadas por Alexandrov em 1937-38 [1, 2], dizem que

$$\left(\frac{V_{n-k}(\Omega)}{V_{n-k}(B)} \right)^{\frac{1}{n-k}} \leq \left(\frac{V_{n-k-1}(\Omega)}{V_{n-k-1}(B)} \right)^{\frac{1}{n-k-1}}, \quad (4.11)$$

onde B é uma bola unitária em $\mathbb{R}^n$. Ademais, a igualdade em 4.11 ocorre se, e somente se $\partial\Omega$ é uma esfera redonda. Em 2009, Guan e Li [29] generalizaram a desigualdade 4.11 para domínios Ω estrelados e k -convexos:

Teorema 4.7. Suponha que Ω é um domínio suave k -convexo e estrelado em $\mathbb{R}^n$, então

$$\left(\frac{V_{n-m}(\Omega)}{V_{n-m}(B)} \right)^{\frac{1}{n-k}} \leq \left(\frac{V_{n-m-1}(\Omega)}{V_{n-m-1}(B)} \right)^{\frac{1}{n-m-1}},$$

para $0 \leq m \leq k$. A igualdade ocorre se, e somente se Ω é uma bola.

Demonstração. Veja [29], Teorema 2. □

Corolário 4.8. *Suponha que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ seja um domínio estrelado com bordo $\partial\Omega$ suave e médio-convexo. Seja $H_{\partial\Omega}$ a curvatura média de $\partial\Omega$ com respeito ao campo normal, unitário e interno a Ω . Então*

$$\frac{1}{2(n-1)\omega_{n-1}} \int_{\partial\Omega} H_{\partial\Omega} dV \geq \frac{1}{2} \left(\frac{|\partial\Omega|}{\omega_{n-1}} \right)^{\frac{n-2}{n-1}}.$$

Ademais, a igualdade ocorrerá se, e somente se Ω é uma bola.

Demonstração. Usando o teorema acima para $m = 1$, encontramos

$$\left(\frac{V_{n-1}(\Omega)}{V_{n-1}(B)} \right)^{\frac{1}{n-1}} \leq \left(\frac{V_{n-2}(\Omega)}{V_{n-2}(B)} \right)^{\frac{1}{n-2}}.$$

Temos

$$V_{n-1}(\Omega) = C_{n-1,1} \int_{\partial\Omega} \sigma_0(\kappa) dV = C_{n-1,1} |\partial\Omega|, \quad V_{n-1}(B) = C_{n-1,1} |S^{n-1}| = C_{n-1,1} \omega_{n-1},$$

e

$$V_{n-2}(\Omega) = C_{n-1,2} \int_{\partial\Omega} \sigma_1(\kappa) dV = \frac{C_{n-1,2}}{n-1} \int_{\partial\Omega} H_{\partial\Omega} dV,$$

e

$$V_{n-2}(B) = C_{n-1,2} \int_{S^{n-1}} \sigma_1(\kappa) dV = \frac{C_{n-1,2}}{n-1} \int_{S^{n-1}} H_{S^{n-1}} dV = C_{n-1,2} \omega_{n-1}.$$

Assim,

$$\left(\frac{C_{n-1,2} \int_{\partial\Omega} H_{\partial\Omega} dV}{(n-1)C_{n-1,2} \omega_{n-1}} \right)^{\frac{1}{n-2}} \geq \left(\frac{C_{n-1,1} |\partial\Omega|}{C_{n-1,1} \omega_{n-1}} \right)^{\frac{1}{n-1}},$$

ou seja,

$$\frac{1}{(n-1)\omega_{n-1}} \int_{\partial\Omega} H_{\partial\Omega} dV \geq \left(\frac{|\partial\Omega|}{\omega_{n-1}} \right)^{\frac{n-2}{n-1}}.$$

□

A seguinte proposição pode ser encontrada em [36],

Proposição 4.9. *Sejam $a_1, \dots, a_k$ números reais não negativos e $0 \leq \beta \leq 1$. Então,*

$$\sum_{i=1}^k a_i^\beta \geq \left(\sum_{i=1}^k a_i \right)^\beta.$$

Se $0 \leq \beta < 1$, então a igualdade ocorrerá se, e somente se no máximo um elemento de $\{a_1, \dots, a_k\}$ for não nulo.

Demonstração. Suponha, inicialmente, $k = 2$. Fixe $x \geq 0$, $\beta \in [0, 1]$ e defina $w(y) = x^\beta + y^\beta - (x + y)^\beta$. Temos que $w(0) = 0$ e

$$w'(y) = \beta(y^{\beta-1} - (x + y)^{\beta-1}) \geq 0, \quad \forall y \geq 0.$$

Portanto, $w(y) \geq 0$ para todo $y \geq 0$ com $w(y) = 0$ se, e somente se $x = 0$ ou $y = 0$ ou $\beta = 1$. Se $k = n > 2$, então, por indução,

$$\begin{aligned} (a_1 + \cdots + a_n)^\beta &\leq (a_1 + \cdots + a_{n-1})^\beta + a_n^\beta \\ &\leq a_1^\beta + \cdots + a_n^\beta. \end{aligned}$$

□

Agora estamos em condições de provar a seguinte versão da desigualdade de Penrose, incluímos

Teorema 4.10. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}_+^n \setminus \{x^n = 0\}$, $n \geq 3$, um conjunto aberto cujo bordo é suave e médio-convexo. Suponha que cada componente conexa de Ω é estrelada. Seja $f : \mathbb{R}_+^n \setminus \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável até o bordo, assintoticamente plana, constante em cada componente de $\partial\Omega$ e tal que $|Df| \rightarrow \infty$, quando $x \rightarrow \partial\Omega$. Suponha também que $f_n = 0$ em $\partial\mathbb{R}_+^n$, e que as curvaturas que aparecem na Proposição 4.5 são não negativas. Então,*

$$m(g) \geq \frac{1}{2} \left(\frac{|\partial\Omega|}{\omega_{n-1}} \right)^{\frac{n-2}{n-1}}.$$

Demonstração. Pela Proposição 4.5, temos

$$\frac{m(g)}{c_n} = \int_{\mathbb{R}_+^n \setminus \Omega} S \, dV + \int_{\partial\mathbb{R}_+^n} \frac{\overline{H}}{\sqrt{1 + (f_n)^2}} (2 + |Df|^2) \, dV + \int_{\partial\Omega} H_{\partial\Omega} \, dV.$$

Denotando por Ω_i , $i = 1, \dots, k$, as componentes conexas de Ω , segue-se que

$$\begin{aligned} m(g) &\geq \frac{1}{2(n-1)\omega_{n-1}} \sum_i \int_{\partial\Omega_i} H_{\partial\Omega_i} \, dV \geq \frac{1}{2} \sum_i \left(\frac{|\partial\Omega_i|}{\omega_{n-1}} \right)^{\frac{n-2}{n-1}} \\ &\geq \frac{1}{2} \left(\sum_i \frac{|\partial\Omega_i|}{\omega_{n-1}} \right)^{\frac{n-2}{n-1}} = \frac{1}{2} \left(\frac{|\partial\Omega|}{\omega_{n-1}} \right)^{\frac{n-2}{n-1}}. \end{aligned}$$

□

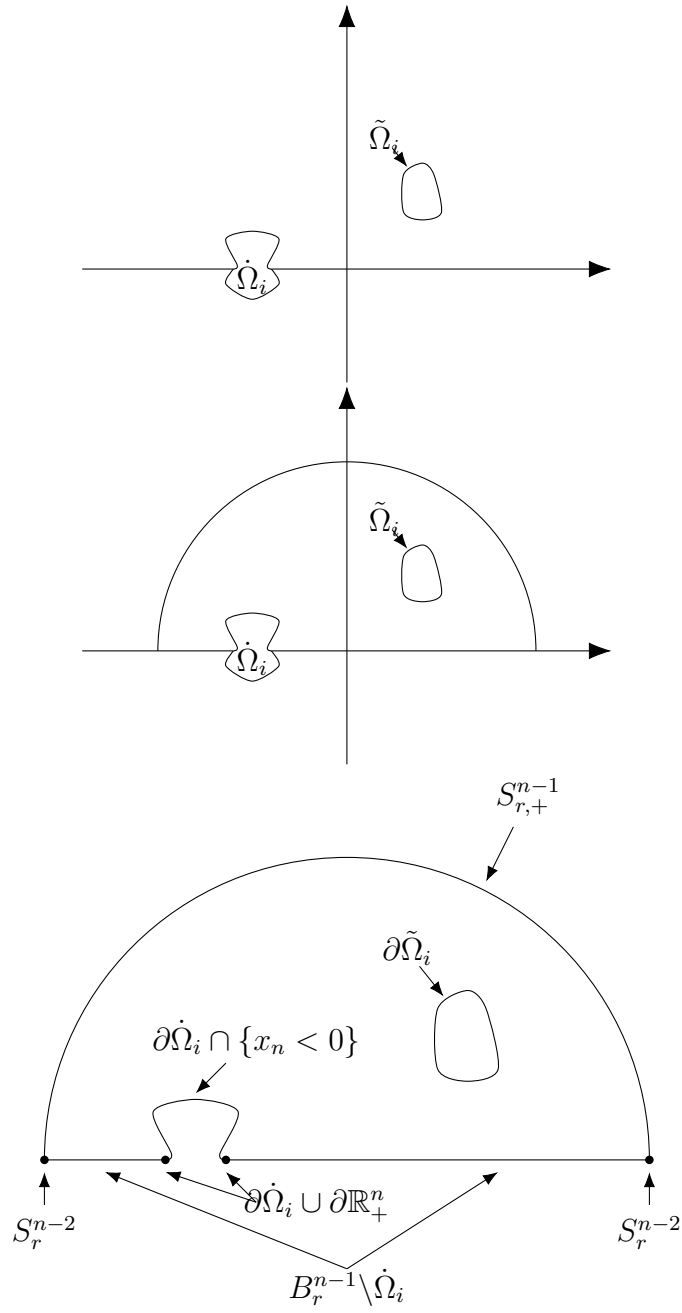


Figura 4.2

Apêndice A

Cálculo de Variação

Aqui provamos as fórmulas de variação que usaremos ao longo da tese. Esses resultados se baseiam em Kröncke [39], Apêndice.

Lema A.1. *Sejam $\omega, \xi \in \Omega_1(M)$ e $T, S \in \mathcal{S}_2(M)$. Então a primeira variação do produto escalar, do traço e da forma volume são dadas por*

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \langle \omega, \xi \rangle_{g+th} &= -h(\omega^\sharp, \xi^\sharp), \\ \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \langle T, S \rangle_{g+th} &= -2\langle T, h \circ S \rangle_g, \\ \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \text{tr}_{g+th} T &= -\langle T, h \rangle_g, \\ \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} dV_{g+th} &= \frac{1}{2}(\text{tr}_g h) dV_g. \end{aligned}$$

Demonstração. Usemos coordenadas locais. A primeira fórmula segue de

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (g + th)^{ij} \omega_i \xi_j = -h^{ij} \omega_i \xi_j = -h_{kl} g^{ki} \omega_i g^{lj} \xi_j.$$

A segunda fórmula segue de

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (g + th)^{ij} (g + th)^{kl} T_{ik} S_{jl} &= -h^{ij} g^{kl} T_{ik} S_{jl} - g^{ij} h^{kl} T_{ik} S_{jl} \\ &= -2g^{ij} g^{km} T_{ik} S_{jl} g^{ln} h_{nm} \\ &= -2g^{ij} g^{km} T_{ik} (h \circ S)_{jm}. \end{aligned}$$

A variação do traço segue de

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (g + th)^{ij} T_{ij} = -h^{ij} T_{ij} = -g^{ki} g^{lj} h_{kl} T_{ij}.$$

Finalmente, computamos a primeira variação do elemento de volume e obtemos

$$\begin{aligned}
 \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} dV &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} [\det((g + th)_{ij})]^{1/2} dx \\
 &= \frac{1}{2} \det(g_{ij})^{-1/2} \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} [\det((g + th)_{ij})] dx \\
 &= \frac{1}{2} (\text{tr} h) \det(g_{ij})^{1/2} dx = \frac{1}{2} \text{tr} h \cdot dV. \quad \square
 \end{aligned}$$

Lema A.2. *Seja (M, g) uma variedade Riemanniana e denote a primeira variação da conexão de Levi-Civita na direção de h por G . Então G é um $(1, 2)$ -campo tensorial, dada por*

$$g(G(X, Y), Z) = \frac{1}{2} (\nabla_X h(Y, Z) + \nabla_Y h(X, Z) - \nabla_Z h(X, Y)).$$

A primeira variação do tensor de curvatura de Riemann (como um $(1, 3)$ e como um $(0, 4)$ -tensor), o tensor de Ricci e a curvatura escalar são dados por

$$\begin{aligned}
 \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} R_{X,Y}^{g+th} Z &= (\nabla_X G)(Y, Z) - (\nabla_Y G)(X, Z), \\
 \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} R^{g+th}(X, Y, Z, W) &= \frac{1}{2} (\nabla_{X,Z}^2 h(Y, W) + \nabla_{Y,W}^2 h(X, Z) - \nabla_{Y,Z}^2 h(X, W) \\
 &\quad - \nabla_{X,W}^2 h(Y, Z) + h(R_{X,Y} Z, W) - h(Z, R_{X,Y} W)), \\
 \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \text{Ric}^{g+th}(X, Y) &= \frac{1}{2} \Delta_L h(X, Y) - (\text{div}^g)^* \text{div}^g h(X, Y) - \frac{1}{2} \nabla_{X,Y}^2 \text{tr}_g h, \\
 \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} S^{g+th} &= -\Delta^g(\text{tr}_g h) + \text{div}^g(\text{div}^g h) - \langle \text{Ric}^g, h \rangle_g.
 \end{aligned}$$

Demonstração. A diferença entre duas conexões é um $(1, 2)$ -campo tensorial, logo G também o é. Faremos as computações em um ponto p usando coordenadas normais com respeito a g centrado em p . Primeiramente, temos

$$\begin{aligned}
 G_{ij}^k &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{kl} (\partial_i h_{jl} + \partial_j h_{il} - \partial_k h_{ij}) \\
 &= \frac{1}{2} g^{kl} (\nabla_i h_{jl} + \nabla_j h_{il} - \nabla_k h_{ij}).
 \end{aligned}$$

Para o $(1, 3)$ tensor de curvatura,

$$\begin{aligned}\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} R_{ijk}^l &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (\partial_i \Gamma_{jk}^l - \partial_j \Gamma_{ik}^l + \Gamma_{jk}^m \Gamma_{im}^l - \Gamma_{ik}^m \Gamma_{jm}^l) \\ &= \partial_i G_{jk}^l - \partial_j G_{ik}^l \\ &= \nabla_i G_{jk}^l - \nabla_j G_{ik}^l.\end{aligned}$$

Para o $(0, 4)$ tensor de curvatura,

$$\begin{aligned}\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} R_{ijkl} &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} g_{lm} R_{ijk}^m = h_{lm} R_{ijk}^m + g_{lm} (\nabla_i G_{jk}^m - \nabla_j G_{ik}^m) \\ &= h_{lm} R_{ijk}^m + \frac{1}{2} (\nabla_{ij}^2 h_{kl} + \nabla_{ik}^2 h_{jl} - \nabla_{il}^2 h_{jk}) \\ &\quad - \frac{1}{2} (\nabla_{ji}^2 h_{kl} + \nabla_{jk}^2 h_{il} - \nabla_{jl}^2 h_{ik}).\end{aligned}$$

Pela identidade de Ricci,

$$\frac{1}{2} (\nabla_{ij}^2 h_{kl} - \nabla_{ji}^2 h_{kl}) = -\frac{1}{2} (R_{ijk}^m h_{ml} + R_{ijl}^m h_{km}),$$

o que dá

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} R_{ijkl} = \frac{1}{2} (\nabla_{ik}^2 h_{jl} - \nabla_{il}^2 h_{jk} - \nabla_{jk}^2 h_{il} + \nabla_{jl}^2 h_{ik} + h_{lm} R_{ijk}^m - R_{ijl}^m h_{km}).$$

A primeira variação do tensor de Ricci é

$$\begin{aligned}\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} R_{jk} &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} R_{ijk}^i = \nabla_i G_{jk}^i - \nabla_j G_{ik}^i \\ &= \frac{1}{2} g^{im} (\nabla_{ij}^2 h_{km} + \nabla_{ik}^2 h_{jm} - \nabla_{im}^2 h_{jk}) \\ &\quad - \frac{1}{2} g^{im} (\nabla_{ji}^2 h_{km} + \nabla_{jk}^2 h_{im} - \nabla_{jm}^2 h_{ik}).\end{aligned}$$

Novamente pela identidade de Ricci,

$$\frac{1}{2} g^{im} (\nabla_{ij}^2 h_{km} - \nabla_{ji}^2 h_{km}) = -\frac{1}{2} g^{im} R_{ijk}^n h_{nm} + \frac{1}{2} Ric_j^n h_{kn},$$

e

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2}g^{im}\nabla_{ik}^2h_{jm} &= \frac{1}{2}g^{im}\nabla_{ik}^2h_{mj} = \frac{1}{2}g^{im}(\nabla_{ik}^2h_{mj} - \nabla_{ki}^2h_{mj} + \nabla_{ki}^2h_{mj}) \\
 &= \frac{1}{2}g^{im}(R_{kim}^nh_{nj} + R_{kij}^nh_{mn}) + \frac{1}{2}g^{im}\nabla_{ki}^2h_{mj} \\
 &= \frac{1}{2}\text{Ric}_k^mh_{mj} + \frac{1}{2}g^{im}R_{kij}^nh_{mn} + \frac{1}{2}\nabla_k(\text{div}^gh)_j.
 \end{aligned}$$

Fazendo um rearranjo dos termos acima,

$$\begin{aligned}
 \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} R_{jk} &= \frac{1}{2}(-g^{im}\nabla_{im}^2h_{jk} + \text{Ric}_k^mh_{mj} + \text{Ric}_j^mh_{km} - 2g^{im}R_{ijk}^nh_{nm}) \\
 &\quad + \frac{1}{2}(\nabla_k(\text{div}^gh)_j + \nabla_j(\text{div}^gh)_k) - \frac{1}{2}\nabla_{jk}^2\text{tr}_gh \\
 &= \frac{1}{2}\Delta_L h_{jk} - (\text{div}^g)^*(\text{div}^gh)_{jk} - \frac{1}{2}\nabla_{jk}^2\text{tr}_gh.
 \end{aligned}$$

A primeira variação da curvatura escalar é

$$\begin{aligned}
 \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} S^{g+th} &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (g^{ij}\text{Ric}_{ij}) = -h^{ij}\text{Ric}_{ij} + g^{ij}\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} R_{ij} \\
 &= -h^{ij}\text{Ric}_{ij} - \Delta^g(\text{tr}_gh) + \text{div}^g(\text{div}^gh).
 \end{aligned}$$

□

Lema A.3. *A primeira variação da Hessiana e do Laplaciano são dadas por*

$$\begin{aligned}
 \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} {}^{g+th}\nabla_{X,Y}^2f &= -\frac{1}{2}[\nabla_Xh(Y, Df) + \nabla_Yh(X, Df) - \nabla_{Df}h(X, Y)], \\
 \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \Delta^{g+th}f &= \langle \text{div}^gh - \frac{1}{2}\nabla\text{tr}_gh, \nabla f \rangle + \langle h, \nabla^2f \rangle.
 \end{aligned}$$

A primeira variação da derivada covariante simetrizada e da divergência de uma 1-forma ω são dadas por

$$\begin{aligned}
 \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (\mathcal{S}\nabla)\omega(X, Y) &= -\frac{1}{2}[\nabla_Xh(Y, \omega^\sharp) + \nabla_Yh(X, \omega^\sharp) - \nabla_{\omega^\sharp}h(X, Y)], \\
 \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \text{div}^{g+th}\omega &= \frac{1}{2}\langle \nabla\text{tr}_gh, \omega \rangle - \text{div}^gh(\omega^\sharp) - \langle h, \nabla\omega \rangle.
 \end{aligned}$$

Demonstração. Primeiramente provaremos as duas últimas fórmulas. Seja ω uma 1-

forma. Então

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\mathcal{S}\nabla)\omega_{ij} &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \frac{1}{2} (\partial_i \omega_j + \partial_j \omega_i - (\Gamma_{ij}^k + \Gamma_{ji}^k) \omega_k) \\ &= -\frac{1}{2} g^{kl} (\nabla_i h_{jl} + \nabla_j h_{il} - \nabla_l h_{ij}) \omega_k, \end{aligned}$$

pela primeira variação da conexão de Levi-Civita. No caso da divergência,

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \operatorname{div}^{g+th} \omega &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} ((g+th)^{ij} (\mathcal{S}\nabla)\omega_{ij}) \\ &= -h^{ij} (\mathcal{S}\nabla)\omega_{ij} - \frac{1}{2} g^{ij} g^{kl} (\nabla_i h_{jl} + \nabla_j h_{il} - \nabla_l h_{ij}) \omega_k \\ &= -h^{ij} (\nabla \omega)_{ij} - g^{kl} (\operatorname{div}^g h_l) \omega_k + \frac{1}{2} g^{kl} (\nabla_l \operatorname{tr}_g h) \omega_k. \end{aligned}$$

Como $\nabla^2 f = -(\operatorname{div}^g)^*(\nabla f) = (\mathcal{S}\nabla)(\nabla f)$ e $\Delta^g f = \operatorname{div}^g(\nabla f)$, as primeiras duas fórmulas seguem das outras colocando $\omega = \nabla f$. $\square$

Lema A.4. *Seja h um campo $(0, 2)$ -tensorial. Então temos*

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} {}^{g+tk} \nabla h &= k * \nabla h + \nabla k * h, \\ \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \operatorname{div}^{g+tk} h &= k * \nabla h + \nabla k * h, \\ \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \Delta_L^{g+tk} h &= k * \nabla^2 h + \nabla^2 k * h + \nabla k * \nabla h + R * k * h, \\ \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \Delta_E^{g+tk} h &= k * \nabla^2 h + \nabla^2 k * h + \nabla k * \nabla h + R * k * h. \end{aligned}$$

Aqui, $*$ é a notação de Hamilton para uma combinação de produtos tensoriais com contrações.

Demonstração. A variação da derivada covariante de um $(0, 2)$ -campo tensorial h na direção k é dada por

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \nabla_i h_{jk} &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\partial_i h_{jk} - \Gamma_{ij}^l h_{lk} - \Gamma_{ik}^l h_{jl}) \\ &= -\frac{1}{2} g^{lm} (\nabla_i k_{jm} + \nabla_j k_{im} - \nabla_m k_{ij}) h_{lk} \\ &\quad -\frac{1}{2} g^{lm} (\nabla_i k_{km} + \nabla_k k_{im} - \nabla_m k_{ik}) h_{jl}, \end{aligned}$$

o que dá

$$\begin{aligned}
 \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \operatorname{div}^{g+th} h_k &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} ((g+tk)^{ij}) \nabla_i h_{jk} \\
 &= -k^{ij} \nabla_i h_{jk} + g^{ij} \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \nabla_i h_{jk} \\
 &= -k^{ij} \nabla_i h_{jk} - \frac{1}{2} g^{ij} g^{lm} (\nabla_i k_{jm} + \nabla_j k_{im} - \nabla_m k_{ij}) h_{lk} \\
 &\quad - \frac{1}{2} g^{ij} g^{lm} (\nabla_i k_{km} + \nabla_k k_{im} - \nabla_m k_{ik}) h_{jl}.
 \end{aligned}$$

Para computar as duas últimas fórmulas, precisamos primeiramente da expressão local da Hessiana em $(0, 2)$ -tensores, que pode ser escrita como

$$\nabla_{ij}^2 h_{kl} = \partial_i (\partial_j h_{kl} + (\Gamma * h)_{jkl}) + (\Gamma * \nabla h)_{ijkl}.$$

Agora usamos coordenadas normais com respeito a g centradas em um ponto fixado p . Então

$$\begin{aligned}
 \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\nabla_{ij}^2 h_{kl}) &= \partial_i \left(\left(\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \Gamma \right) * h \right)_{jkl} + \left(\left(\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \Gamma \right) * \nabla h \right)_{ijkl} \\
 &= \nabla_i ((\nabla k * h)_{jkl}) + (\nabla k * \nabla h)_{ijkl} \\
 &= (\nabla^2 k * h)_{ijkl} + (\nabla k * \nabla h)_{ijkl}.
 \end{aligned}$$

Para a conexão Laplaciana, temos

$$\begin{aligned}
 \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\nabla^* \nabla h)_{kl} &= - \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (g^{ij} \nabla_{ij}^2 h_{kl}) \\
 &= k^{ij} \nabla_{ij}^2 h_{kl} - g^{ij} \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\nabla_{ij}^2 h_{kl}) \\
 &= (k * \nabla^2 h)_{kl} + (\nabla^2 k * h)_{kl} + (\nabla k * \nabla h)_{kl}.
 \end{aligned}$$

Pelo Lema A.2, a primeira fórmula de variação do tensor de curvatura Riemanniano e do tensor de Ricci podem ser escritos da forma

$$\begin{aligned}
 \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} R_{ijkl} &= (\nabla^2 * h)_{ijkl} + (R * h)_{ijkl}, \\
 \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \operatorname{Ric}_{ij} &= \frac{1}{2} \Delta_L^g h_{ij} - (\operatorname{div}^g)^* (\operatorname{div}^g h)_{ij} - \frac{1}{2} \nabla_{ij}^2 (\operatorname{tr}_g h), \\
 &= (\nabla^2 * h)_{ij} + (R * h)_{ij}.
 \end{aligned}$$

Dessa forma, a variação do Laplaciano de Lichnerowicz na direção de k é dada por

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\Delta_L h)_{ij} &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\nabla^* \nabla h - \text{Ric} \circ h - h \circ \text{Ric} - 2\mathring{R}h)_{ij} \\ &= (k * \nabla^2 h)_{ij} + (\nabla^2 k * h)_{ij} + \nabla k * \nabla h)_{ij} + (R * k * h)_{ij}. \end{aligned}$$

Similarmente,

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\Delta_E h)_{ij} &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\nabla^* \nabla h - 2\mathring{R}h)_{ij} \\ &= (k * \nabla^2 h)_{ij} + (\nabla^2 k * h)_{ij} + \nabla k * \nabla h)_{ij} + (R * k * h)_{ij}. \end{aligned}$$

□

Lema A.5. *A segunda variação da Hessiana, do Laplaciano, do tensor de Ricci e da curvatura escalar podem ser descritas da seguinte forma:*

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{ds} \frac{d}{dt} \right|_{s,t=0} \nabla_{g+sk+th}^2 f &= k * \nabla h * \nabla f + \nabla k * h * \nabla f, \\ \left. \frac{d}{ds} \frac{d}{dt} \right|_{s,t=0} \Delta^{g+sk+th} f &= k * \nabla h * \nabla f + \nabla k * h * \nabla f, \\ \left. \frac{d}{ds} \frac{d}{dt} \right|_{s,t=0} \text{Ric}^{g+sk+th} &= k * \nabla^2 h + \nabla^2 k * h + \nabla k * \nabla h + R * k * h, \\ \left. \frac{d}{ds} \frac{d}{dt} \right|_{s,t=0} \text{S}^{g+sk+th} &= k * \nabla^2 h + \nabla^2 k * h + \nabla k * \nabla h + R * k * h. \end{aligned}$$

Demonstração. Primeiramente computamos a segunda variação da Hessiana na direção de h e k . Usando os lemas A.3 e A.4, obtemos

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{ds} \frac{d}{dt} \right|_{s,t=0} \nabla_{ij}^2 f &= \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \left(-\frac{1}{2} g^{kl} (\nabla_i h_{jl} + \nabla_j h_{il} - \nabla_l h_{ij}) \partial_k f \right) \\ &= \frac{1}{2} k^{kl} (\nabla_i h_{jl} + \nabla_j h_{il} - \nabla_l h_{ij}) \partial_k f + \nabla k * h * \nabla f \\ &= k * \nabla h * \nabla f + \nabla k * h * \nabla f. \end{aligned}$$

Logo, usando o Lema A.3 novamente, a segunda variação do Laplaciano é dada por

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{ds} \frac{d}{dt} \right|_{s,t=0} \Delta^{g+sk+th} f &= \left. \frac{d}{ds} \frac{d}{dt} \right|_{s,t=0} (g^{ij} \nabla_{ij}^2 f) \\ &= -h^{ij} \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \nabla_{ij}^2 f - k^{ij} \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \nabla_{ij}^2 f + g^{ij} \left. \frac{d}{ds} \frac{d}{dt} \right|_{s,t=0} \nabla_{ij}^2 f \\ &= k * \nabla h * \nabla f + \nabla k * h * \nabla f. \end{aligned}$$

Agora estamos aptos a computar a segunda variação do tensor de Ricci nas direções de h e k . Pelos lemas A.1, A.3 e A.4,

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{ds} \frac{d}{dt} \Big|_{s,t=0} \text{Ric}_{ij}^{g+sk+th} &= \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \left(\frac{1}{2} \Delta_L h_{ij} - (\text{div}^{g+sk})^* \text{div}^{g+sk} h_{ij} - \frac{1}{2} \nabla_{ij}^2 \text{tr}_{g+sk} h \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \Delta_L \right) h_{ij} - \left(\frac{d}{ds} \Big|_{s=0} (\text{div}^{g+sk})^* \right) \text{div}^g h_{ij} \\
 &\quad - (\text{div}^g)^* \left(\frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \text{div}^{g+sk} h_{ij} \right) \\
 &\quad - \frac{1}{2} \left(\frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \nabla_{ij}^2 \right) (\text{tr}_g h) + \frac{1}{2} \nabla_{ij}^2 \langle k, h \rangle \\
 &= (k * \nabla^2 h)_{ij} + (\nabla^2 k * h)_{ij} + (\nabla k * \nabla h)_{ij} + (R * k * h)_{ij}.
 \end{aligned}$$

Para a curvatura escalar, obtemos pelo Lema A.2,

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{ds} \frac{d}{dt} \Big|_{s,t=0} S^{g+sk+th} &= \frac{d}{ds} \frac{d}{dt} \Big|_{s,t=0} (g + sk + th)^{ij} \text{Ric}_{ij}^{g+sk+th} \\
 &= -k^{ij} \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \text{Ric}_{ij}^{g+th} - h^{ij} \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \text{Ric}_{ij}^{g+sk} \\
 &\quad + g^{ij} \frac{d}{ds} \frac{d}{dt} \Big|_{s,t=0} \text{Ric}_{ij}^{g+sk+th} \\
 &= (k * \nabla^2 h) + (\nabla^2 k * h) + (\nabla k * \nabla h) + (R * k * h).
 \end{aligned}$$

□

Referências Bibliográficas

- [1] A. D. ALEXANDROV, *Zur Theorie der gemischten Volumina von konvexen Körpern II. Neue Ungleichungen zwischen den gemischten Volumina und ihre Anwendungen*, Rec. Math. (Moscou) [Mat. Sbornik] N.S **2** (1937), p. 1205-1238.
- [2] A. D. ALEXANDROV, *Zur Theorie der gemischten Volumina von konvexen Körpern III. Die Erweiterung zweier Lehrsätze Minkowskis über die konvexen Polyeder auf die beliebigen konvexen Körper*, Rec. Math. (Moscou) [Mat. Sbornik] N.S **3** (1938), p. 27-46.
- [3] S. ALMARAZ, E. BARBOSA E L. L. DE LIMA, *A positive mass theorem for asymptotically flat manifolds with a non-compact boundary*, Comm. Anal. Geom. **24** (2016), p. 673–715.
- [4] R. ARNOWITT, S. DENSER E C. W. MISNER, *Energy and the criteria for radiation in general relativity*, Phys. Rev. (2) **118** (1960), p. 1100–1104.
- [5] R. ARNOWITT, S. DENSER E C. W. MISNER, *Coordinate invariance and energy expressions in general relativity*, Phys. Rev. (2) **122** (1961), p. 997 - 1006.
- [6] R. ARNOWITT, S. DENSER E C. W. MISNER, *The dynamics of general relativity*, Gravitation: An introduction to current research, Wiley, New York (1962), p. 227–265.
- [7] A. ASHTEKAR E R. O. HANSEN, *A unified treatment of null and spacial infinity in general relativity. I. Universal structure, asymptotic symmetries, and conserved quantities at spatial infinity*, J. Math. Phys. **19** (1978), p. 1542-1566.
- [8] E. BARBOSA E A. MEIRA, *A positive mass theorem and Penrose inequality for graphs with noncompact Boundary*, Pacific Journal of Mathematics **294** (2018), p. 257-273.
- [9] R. BARTNIK, *The mass of an asymptotically flat manifold*, Commun. Pure Appl. Math. **39** (1986), no. 5, p. 661-693.

- [10] R. BEIG E N. Ó MURCHADHA, *The Poincaré group as the symmetric group of canonical general relativity*, Ann. Physics **174** (1987), no.2, p. 463-498.
- [11] A.N. BERNAL E M. SÁNCHEZ, *On smooth Cauchy hypersurfaces and Geroch's splitting theorem*, Commun. Math. Phys. **243**(3) (2003), p. 461-470.
- [12] R. J. BIEZUNER, *Notas de Aula de Geometria Riemanniana*, 2017.
- [13] H. L. BRAY, *Proof of the Riemannian Penrose inequality using the positive mass theorem*, J. Differential Geom. **59** (2001), no. 2, p. 177-267.
- [14] H. L. BRAY E D. LEE, *On the Riemannian Penrose inequality in dimensions less than eight*, Duke Math. J. **148** (2009), no. 1, p. 81-106
- [15] Y. CHOQUET-BRUHAT E R. GEROCH, *Global aspects of the Cauchy problem in general relativity*, Commun. Math. Phys. **14** (1969), p. 329-335.
- [16] X. CHAI, *two quasi-local masses evaluated on surfaces with boundary*, arXiv:1811.06168 (2018).
- [17] P. T. CHRUSCIEL, *Boundary conditions at spatial infinity from a Hamiltonian point of view*, Topological properties and global structure of space-time (Erice, 1985), NATO Adv. Sci. Inst. Ser. B Phys. **138** (1986), Plenum, New York, p. 49-59.
- [18] P. T. CHRUSCIEL, *A remark on the positive energy theorem*, Class. Quant. Grav. **3** (1986), L115-L121
- [19] P. T. CHRUSCIEL E M. HERZLICH, *The mass of asymptotically hyperbolic Riemannian manifolds*, Pac. J. Math. **212** (2003), p. 231-264.
- [20] J. CORVINO E D. POLLACK, *Scalar curvature and the Einstein constraint equations*, Surveys in geometric analysis and relativity, Adv. Lect. Math. (ALM) **20** (2011), Int. Press, Somerville, MA, p. 145-188.
- [21] J. CORVINO E R. M. SCHOEN, *On the asymptotics for the vacuum Einstein constraint equations*, J. Differential Geom. **73** (2006), no.2, p. 185-217.
- [22] J. CORVINO E H. WU, *On the center of mass of isolated systems*, Class. Quant. Grav. **25** (2008), 085008.
- [23] L. L. DE LIMA E F. GIRÃO, *The ADM mass of asymptotically at hypersurfaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **367** (2015), n. 9, p. 6247-6266.

- [24] L. L. DE LIMA, F. GIRÃO E A. MONTALBÁN, *The mass in terms of Einstein and Newton*, Class. Quantum Grav. **36** (2019), 075017.
- [25] M. P. DO CARMO, *Geometria Riemanniana*, Coleção Projeto Euclides, 5ª Ed., SBM, Rio de Janeiro, 2015.
- [26] L. EVANS, *Partial differential equations*, 2ª Ed., Graduate Studies in Mathematics, vol. 19, American Mathematical Society, Providence, RI, 2010.
- [27] R. GEROCH, *Domain of dependence*, J. Math. Phys. **11** (1970), p. 437–449.
- [28] R. GEROCH, *Energy extraction*, Ann. New York Acad. Sci. **224** (1973), p. 108–117.
- [29] P. GUAN E J. LI, *The quermassintegral inequalities for k -convex starshaped domains*, Adv. Math. **221**:5 (2009), p. 1725–1732.
- [30] A. HERMANN E E. HUMBERT, *On the Positive Mass Theorem for Closed Riemannian Manifolds*, Em: L. Ji et al. (eds.), From Riemann to Differential Geometry and Relativity, Springer International Publishing, AG, 2017.
- [31] M. HERZLICH, *Computing asymptotic invariants with the Ricci tensor on asymptotically flat and asymptotically hyperbolic manifolds*, Ann. Henri Poincaré **17**, 3605–17.
- [32] M. HERZLICH, *Mass formulae for asymptotically hyperbolic manifolds*, Em: AdS/CFT correspondence: Einstein metrics and their conformal boundaries (O. Biquard, ed.), IRMA Lectures in Mathematics and Theoretical Physics, vol. 8, European Mathematical Society, Zürich (2005), p. 103–121.
- [33] L-H. HUANG, *On the center of mass of isolated systems with general asymptotics*, Classical Quantum Gravity **26** (2009), no.1, 015012, 25.
- [34] L-H. HUANG, *On the center of mass in general relativity*, Em: FifthMS/IP Studies in Advanced Mathematics, vol. 51, Amer. Math. Soc., Providence, RI (2012), p. 575–591.
- [35] L-H. HUANG E D. WU, *Hypersurfaces with nonnegative scalar curvature*, J. Differential Geom. **95** (2013), n. 2, p. 249–278.
- [36] L-H. HUANG E D. WU, *The equality case of the Penrose inequality for asymptotically flat graphs*, Trans. Amer. Math. Soc **367** (2015), n. 1, p. 31–47.
- [37] G. HUISKEN E T. ILMANEN, *The inverse mean curvature flow and the Riemannian Penrose inequality*, J. Differential Geom. **59** (2001), no. 3, p. 353–437.

- [38] P. S. JANG E R. WALD, *The positive energy conjecture and the cosmic censor hypothesis*, J. Math. Phys. **18** (1977), p. 41-44.
- [39] K. KRÖNCKE, *Stability of Einstein manifolds*, Ph.D. thesis, Universität Potsdam (2013).
- [40] T. KOERBER, *The Riemannian Penrose inequality for asymptotically flat manifolds with non-compact boundary*, arXiv:1909.13283v2 (2020).
- [41] M.-K. G. LAM, *The graph cases of Riemannian Positive Mass and Penrose Inequality in all dimensions*, Ph.D. thesis, Duke University, 2011.
- [42] D. LEE, *Geometric Relativity*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 201, American Mathematical Society, Providence, RI, 2019.
- [43] J. M. LEE, *Introduction to smooth manifolds*, 2^a Ed., Graduate Texts in Mathematics, vol. 218, Springer Science+Business Media, New York, 2013.
- [44] J. M. LEE, *Introduction to Riemannian manifolds*., 2^aEd., Graduate Texts in Mathematics, vol. 176, Springer International Publishing, AG, 2018.
- [45] J. LOHKAMP, *The higher dimensional positive mass theorem I*, arXiv:math/0608795v1 (2006).
- [46] J. LOHKAMP, *Hyperbolic geometry and potential theory on minimal hypersurfaces*, arXiv:1512.08251 (2015).
- [47] J. LOHKAMP, *Skin structures in scalar curvature geometry*, arXiv:1512.08251 (2015).
- [48] J. LOHKAMP, *Skin structures on minimal hypersurfaces*, arXiv:1512.08249 (2015).
- [49] J. LOHKAMP, *The higher dimensional positive mass theorem II*, arXiv:1612.07505 (2016).
- [50] P. MIAO E L.-F. TAM, *Evaluation of the ADM mass and center of mass via the Ricci tensor*, Proc. Amer. Math. Soc. **144** (2016), p. 753-761.
- [51] B. MICHEL, *Geometric invariance of mass-like invariants*, J. Math. Phys. **52** (2011), 052504.
- [52] H. MIRANDOLA E F. VITÓRIO, *The positive mass theorem and Penrose inequality for graphical manifolds*, Comm. Anal. Geom. **23** (2015), p. 273-292.

- [53] A. C. MUNIZ NETO, *Tópicos de Geometria Diferencial*, Coleção Fronteiras da Matemática, SBM, 2014.
- [54] B. O'NEILL, *Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity*, Pure and Applied Mathematics, vol. 103, Academic Press, Inc., New York, 1983.
- [55] R. PENROSE, *Naked singularities*, Ann. New York Acad. Sci. **224** (1973), p. 125-134.
- [56] P. PETERSEN, *Riemannian Geometry*, 3^a Ed., Graduate Texts in Mathematics, vol. 176, Springer International Publishing, AG, 2016.
- [57] T. REGGE E C. TEITELBOIM, *Role of surface integrals in the Hamiltonian formulation of general relativity*, Ann. Physics **38** (1974), p. 286-318.
- [58] T. REGGE E C. TEITELBOIM, *Improved Hamiltonian for general relativity*, Phys. Lett. B **53** (1974), p. 101-105.
- [59] R. M. SCHOEN, *The existence of weak solutions with prescribed singular behavior for a conformally invariant scalar equations*, Comm. Pure Appl. Math. **41** (1988), no.3, p. 317-392.
- [60] R. M. SCHOEN E S. T. YAU, *Complete manifolds with nonnegative scalar curvature and the positive action conjecture in general relativity*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **76** (1979), no. 3, p. 1024–1025.
- [61] R. M. SCHOEN E S. T. YAU, *On the proof of the positive mass conjecture in general relativity*, Manuscripta Math. **65** (1979), no. 1-3, p. 159–183.
- [62] R. M. SCHOEN E S. T. YAU, *The energy and the linear momentum of space-times in general relativity*, Comm. Math. Phys. **79** (1981), no.1, p. 47-51.
- [63] R. M. SCHOEN E S. T. YAU, *Positive scalar curvature and minimal hypersurface singularities*, arXiv:1704.05490 (2017)
- [64] E. WITTEN, *A new proof of the positive energy theorem*, Comm. Math. Phys. **80** (1981), no. 3, p. 381–402.
- [65] X. WANG, *Mass for asymptotically hyperbolic manifolds*, J. Diff. Geom. **57** (2001), p. 273-299.