

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Resultados de rigidez e não existência para subvariedades trapped em espaços Lorentzianos

Joyce Saraiva Sindeaux

JOÃO PESSOA – PB
JULHO DE 2020

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Resultados de rigidez e não existência para subvariedades trapped em espaços Lorentzianos

por

Joyce Saraiva Sindeaux

sob a orientação do

Prof. Dr. Márcio Silva Santos

e sob a co-orientação do

Prof. Dr. Adriano Alves de Medeiros

João Pessoa – PB
Julho de 2020

Catálogo na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

S616r Sindeaux, Joyce Saraiva.

Resultados de rigidez e não existência para
subvariedades trapped em espaços Lorentzianos / Joyce
Saraiva Sindeaux. - João Pessoa, 2020.
80 f.

Orientação: Márcio Silva Santos.

Coorientação: Adriano Alves de Medeiros.

Dissertação (Mestrado) - UFPB/CCEN.

1. Matemática. 2. Subvariedades marginally trapped. 3.
Subvariedades weakly trapped. 4. Forma espacial
Lorentziana. 5. Vetor curvatura média paralelo. 6.
Espaço-tempo Robertson-Walker generalizado. I. Santos,
Márcio Silva. II. Medeiros, Adriano Alves de. III.
Título.

UFPB/BC

CDU 51(043)

Resultados de rigidez e não existência para subvariedades trapped em espaços Lorentzianos

por

Joyce Saraiva Sindeaux¹

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Paraíba como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Geometria

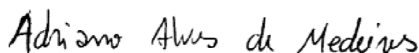
Aprovada em 27 de Julho de 2020.

Banca Examinadora:



Prof. Dr. Márcio Silva Santos – UFPB

(Orientador)



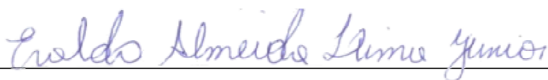
Prof. Dr. Adriano Alves de Medeiros – UFPB

(Co-orientador)



Prof. Dr. Fábio Reis dos Santos

(Examinador Externo)



Prof. Dr. Eraldo Almeida Lima Júnior

(Examinador Interno)

¹A autora foi bolsista da CAPES - Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - durante a elaboração desta dissertação.

À minha mãe, Neide.
À minha irmã, Jucy.

Agradecimentos

Agradeço, primeiramente, à Deus por ter me dado força durante toda essa trajetória.

Agradeço aos meus pais e aos meus avós, que sempre me apoiam em todas as minhas escolhas e sempre acreditaram em mim. Agradeço também à minha irmã, Jucy, por sempre estar ao meu lado, mesmo que de longe.

Agradeço à todos os meus amigos, em especial, Andressa, Clayton, Dayvison, Hadassa, Ivyson, Luíza, Marcílio, Ozana, Raeli, Raíza, Sabrina, Taína e Tony que estiveram ao meu lado em alguns dos momentos mais difíceis.

Agradeço aos meus amigos e colegas de curso Angélica, Lázaro, Lenin, Pedro, Ramon, Ranieri, Renato e Robson, por todos os momentos compartilhados e as horas de estudo em grupo.

Agradeço à todos os meus professores que contribuíram de alguma forma na minha caminhada até aqui, em especial, o professor Flávio França que foi meu orientador na Iniciação Científica e que sempre me incentivou a cursar o mestrado.

Agradeço também aos professores Márcio e Adriano, meu orientador e meu co-orientador, por toda ajuda e conhecimento a mim transmitido durante a realização deste trabalho.

Agradeço aos professores Eraldo e Fábio por terem aceitado o convite para a banca examinadora da minha dissertação.

Agradeço também ao professor Rosemberg de Sousa que me ajudou a compreender melhor alguns dos conceitos físicos citados nesse trabalho.

Agradeço à CAPES pelo apoio financeiro.

Resumo

Neste trabalho, estudamos subvariedades marginally trapped e weakly trapped imersas em espaços-tempo Robertson-Walker generalizados (GRW), e obtemos alguns resultados de rigidez que, sob hipóteses adequadas, garantem que tais subvariedades estão contidas em slices. Também obtemos resultados de não-existência para subvariedades weakly trapped imersas em tais espaços, e algumas aplicações para casos de relevância física. Depois, estudamos subvariedades trapped e marginally trapped imersas em uma forma espacial Lorentziana $L_1^{n+p}(c)$, com curvatura seccional constante c . Nesse sentido, estabelecemos condições suficientes para garantir que uma subvariedade trapped completa com vetor curvatura média paralelo de $L_1^{n+p}(c)$ seja pseudo-umbílica, obtemos um resultado de não-existência para subvariedades trapped no espaço de Minkowski, e por fim, estabelecemos condições suficientes para garantir que uma subvariedade marginally trapped pseudo-umbílica completa de $L_1^{n+p}(c)$ com vetor curvatura média paralelo seja totalmente umbílica.

Palavras-chave: Espaço-tempo Robertson-Walker generalizado; Subvariedades marginally trapped; Subvariedades weakly trapped; Forma espacial Lorentziana; Vetor curvatura média paralelo.

Abstract

In this work, we study marginally trapped and weakly trapped submanifolds immersed in generalized Robertson-Walker (GRW) spacetime, and we obtain some rigidity results that, under appropriate hypothesis, guarantee that such submanifolds are contained in slices. We also get non-existence results for weakly trapped submanifolds immersed in such spaces, and some applications for cases of physical relevance. After, we study trapped and marginally trapped submanifolds immersed in a Lorentzian space form $L_1^{n+p}(c)$, with constant sectional curvature c . In this sense, we establish sufficient conditions to guarantee that a complete trapped submanifolds with parallel mean curvature vector of $L_1^{n+p}(c)$ must be pseudo-umbilical, we obtain a non-existence result for trapped submanifolds in the Minkowski space, and finally, we establish sufficient conditions to guarantee that a complete pseudo-umbilical marginally trapped submanifolds of $L_1^{n+p}(c)$ with parallel mean curvature vector must be totally umbilical.

Keywords: Generalized Robertson-Walker spacetime; Marginally trapped submanifolds; Weakly trapped submanifolds; Lorentzian space form; Parallel mean curvature vector.

Sumário

Introdução	2
1 Preliminares	5
1.1 Variedades semi-Riemannianas	5
1.2 Conexão de Levi-Civita	6
1.3 Alguns operadores diferenciáveis	8
1.4 Curvatura	9
1.5 Subvariedades semi-Riemannianas	12
1.6 Espaços-tempo Robertson-Walker generalizados	14
2 Subvariedades marginally trapped em espaços-tempo Robertson-Walker generalizados	19
2.1 Subvariedades marginally trapped	19
2.1.1 Subvariedades marginally trapped contidas em slices	20
2.2 Completude estocástica e o princípio do máximo fraco	23
2.3 Subvariedades weakly trapped em espaços-tempo GRW	24
2.3.1 Não existência de subvariedades weakly trapped	26
2.3.2 Rigidez de subvariedades marginally trapped	30
2.4 Aplicações	34
3 Subvariedades weakly trapped imersas em espaços-tempo Robertson-Walker generalizados	39
3.1 Algumas considerações sobre a função altura	39
3.2 Resultados de rigidez em espaços-tempo GRW	40
3.2.1 Rigidez via condições de integrabilidade	41
3.2.2 Rigidez via princípio do máximo de Omori-Yau	45
3.3 Uma subvariedade weakly trapped não-trivial em $-\mathbb{R} \times \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$	51
4 Sobre a geometria de subvariedades trapped e marginally trapped em formas espaciais Lorentzianas	58

4.1	Preliminares	58
4.2	Subvariedades trapped com vetor curvatura média paralelo	62
4.3	Subvariedades marginally trapped em $L_1^{n+p}(c)$	68
Referências Bibliográficas		72

Introdução

Uma superfície é dita future (past) trapped se o seu vetor curvatura média $\vec{H}$ for tipo-tempo e apontar para o futuro (apontar para o passado) em todos os pontos. Geometricamente, essa condição sobre $\vec{H}$ nos diz que os raios de luz que partem a superfície devem convergir.

A noção de uma superfície trapped foi introduzida na Relatividade Geral por Penrose, em seu trabalho sobre colapso gravitacional e singularidades [18], e ela tem um importante papel no estudo sobre singularidades de buracos negros em um espaço-tempo. Mais especificamente, sabemos que todo corpo de massa possui a capacidade de exercer força de atração gravitacional sobre outros corpos, e essa força é proporcional à sua massa, como relatado pela quarta lei de Newton. Quando um corpo se torna muito denso, a força de atração gravitacional dele se torna tão grande que ele entra em colapso. Este colapso é a criação de um buraco negro. Em espaços-tempo com simetria esférica, a existência de superfícies trapped junto com a chamada condição de energia fraca garante o colapso gravitacional de todo um sistema para um buraco negro cujo horizonte de evento é determinado pela superfície trapped.

Já em um contexto puramente matemático este conceito de superfície trapped surgiu no trabalho de Schoen e Yau [23], sobre a prova do teorema da massa positiva.

Contudo, de um ponto de vista puramente matemático, não faz sentido limitar o estudo do conceito de trapped apenas as superfícies, uma vez que esta definição pode ser estendida mais geralmente. Por exemplo, recentemente, Cruz Jr., Lima Jr. e Santos [10], introduziram a noção de uma subvariedade r -trapped, e provaram alguns resultados de rigidez e de não-existência para tais subvariedades imersas em um espaço-tempo Robertson-Walker generalizado.

Nesta dissertação estudaremos subvariedades marginally trapped e weakly trapped imersas em um espaço-tempo Robertson-Walker generalizado, e depois, estudaremos subvariedades trapped e marginally trapped imersas em formas espaciais Lorentzianas.

Este trabalho é baseado nos artigos de Alías, Cánovas e Colares [1], Cunha, Lima, Lima Jr. e Santos [11] e de Lima, dos Santos e Velásquez [14].

No capítulo 1 estabeleceremos algumas notações e apresentaremos alguns resulta-

dos preliminares que serão utilizados no decorrer deste trabalho, dentre eles, alguns resultados sobre a coxexão, as curvaturas e a segunda forma fundamental. Além disso, apresentaremos a definição de um espaço-tempo Robertson-Walker generalizado, alguns exemplos de espaços desse tipo, e mostraremos que considerando uma orientação tipo-tempo em um espaço-tempo GRW $-I \times_f M^{n+1}$, para cada $\tau \in I$ o slice $M_\tau = \{\tau\} \times M$ é uma hipersuperfície tipo-espaço mergulhada em $-I \times_f M^{n+1}$ e $\tau \in I \rightarrow M_\tau$ determina uma foliação de $-I \times_f M^{n+1}$ por hipersuperfícies tipo-espaço totalmente umbílicas com curvatura média constante $\mathcal{H}(\tau) = -\frac{f'(\tau)}{f(\tau)}$.

No capítulo 2 consideraremos uma subvariedade tipo-espaço de codimensão dois imersa em um espaço-tempo Robertson-Walker generalizado $-I \times_f M^{n+1}$ e obteremos alguns resultados de rigidez para subvariedades marginally trapped imersas em tais espaços. Além disso, também obteremos resultados de não existência de subvariedades weakly trapped. Para tal, no caso em que a subvariedade for compacta, provaremos a rigidez via condições de integrabilidade, e quando estendermos ao caso em que a subvariedade é estocasticamente completa utilizaremos a equivalência entre o princípio do máximo fraco de Omori-Yau e a completude estocástica da subvariedade, provada por Pigola et. al em [19]. Por fim, apresentaremos algumas aplicações para espaços de relevância física, como por exemplo o espaço-tempo de Einstein- Sitter e algumas regiões abertas do espaço de Sitter.

No capítulo 3 continuaremos considerando uma subvariedade tipo-espaço de codimensão dois imersa em um espaço-tempo Robertson-Walker generalizado $-I \times_f M^{n+1}$, mas agora obteremos alguns resultados de rigidez para subvariedades weakly trapped imersas em tais espaços. Para tal, assim como no capítulo dois, utilizaremos condições de integrabilidade e a equivalência entre o princípio do máximo fraco e a completude estocástica. Mas, além disso, utilizaremos uma estimativa sobre a curvatura de Ricci. Por fim, faremos a construção de um exemplo não-trivial de uma subvariedade weakly trapped em um espaço-tempo GRW estático $-\mathbb{R} \times \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, ilustrando assim a importância dos resultados apresentados.

Por fim, no capítulo 4 estudaremos subvariedades trapped e marginally trapped imersas em uma forma espacial Lorentziana $L_1^{n+p}(c)$, com curvatura seccional contante c . Inicialmente vamos considerar as formas espaciais Lorentzianas padrões, $\mathbb{R}_1^{n+p}$, $\mathbb{S}_1^{n+p}$ e $\mathbb{H}_1^{n+p}$ com curvatura seccional constante igual a 0, 1 e -1, respectivamente, e denotaremos por $L_1^{n+p}(c)$, com $c \in \{-1, 0, 1\}$. Tais formas espaciais estão imersas no espaço semi-Euclidiano $\mathbb{R}_\nu^{n+p+1}$, de índice $\nu \in \{1, 2\}$. Consideraremos também uma subvariedade M tipo-espaço isometricamente imersa em $L_1^{n+p}(c)$. E, a partir dessas duas imersões, obteremos expressões para as fórmulas de Gauss e de Weingarten da imersão e M em $L_1^{n+p}(c)$. Depois, estabeleceremos condições suficientes para garantir

que uma subvariedade trapped completa com vetor curvatura média paralelo imersa em $L_1^{n+p}(c)$ seja pseudo-umbílica. Também obteremos um resultado de não-existência para subvariedades trapped no espaço de Minkowski. Por fim, estabeleceremos condições suficientes para garantir que uma subvariedade marginally trapped pseudo-umbílica completa de $L_1^{n+p}(c)$ com vetor curvatura média paralelo seja totalmente umbílica.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo apresentaremos algumas notações e resultados preliminares que serão importantes para o decorrer deste trabalho. Para maiores detalhes, indicamos como referência [17].

Inicialmente, apresentaremos a definição de uma variedade semi-Riemanniana, e depois os conceitos de conexão e curvatura, por fim, vamos apresentar a definição de um espaço-tempo Robertson-Walker generalizado e alguns exemplos.

1.1 Variedades semi-Riemannianas

Definição 1.1. Uma variedade semi-Riemanniana é um par (M, g) , onde M é uma variedade diferenciável e g é um tensor métrico, isto é, um $(0,2)$ tensor que associa cada ponto p de M a um produto escalar g_p no espaço tangente $T_p M$, com índice constante para todo p .

Lembre que o índice de g_p é definido como a maior dimensão de um subespaço σ de $T_p M$ tal que $g_p|_{\sigma \times \sigma}$ é negativa definida, isto é, $g_p(v, v) < 0$ para todo $v \in \sigma$, com $v \neq 0$.

O valor constante ν do índice de g_p em uma variedade semi-Riemanniana M é chamado de índice de M , com $0 \leq \nu \leq n = \dim M$. Se $\nu = 0$, então M é uma variedade Riemanniana e, nesse caso, g_p é um produto interno em $T_p M$. Se $\nu = 1$ e $n \geq 2$, então M é dita uma variedade Lorentziana.

Como uma notação alternativa, podemos escrever $\langle, \rangle$ no lugar de g , escrevendo $g(v, w) = \langle v, w \rangle$, para vetores tangentes, e $g(V, W) = \langle V, W \rangle$, para campos de vetores tangentes.

Exemplo 1.1. Para algum inteiro ν , com $0 \leq \nu \leq n$, considere o tensor métrico

$$\langle v, w \rangle = - \sum_{i=1}^{\nu} v^i w^i + \sum_{j=\nu+1}^n v^j w^j,$$

onde $v = (v^1, \dots, v^n)$ e $w = (w^1, \dots, w^n)$. Então, denotamos o espaço $\mathbb{R}^n$ munido com esse tensor por $\mathbb{R}_\nu^n$, e nesse caso, o chamamos de espaço semi-Euclidiano de índice ν . Para $\nu = 0$, ele é simplesmente o espaço Euclidiano com a métrica usual. Para $n \geq 2$, $\mathbb{R}_1^n$ é chamado de espaço de Minkowski n -dimensional.

Definição 1.2. Seja M uma variedade semi-Riemanniana com tensor métrico $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Um vetor v tangente à M é dito

- (i) tipo-espaço, se $\langle v, v \rangle > 0$ ou $v = 0$;
- (ii) nulo, se $\langle v, v \rangle = 0$ e $v \neq 0$;
- (iii) tipo-tempo, se $\langle v, v \rangle < 0$.

Em particular, no caso Lorentziano, vetores nulos são chamados de tipo-luz.

1.2 Conexão de Levi-Civita

Sejam X e Y dois campos de vetores em uma variedade semi-Riemanniana M . Essa seção tem por objetivo definir um novo campo vetorial em M que seja a derivada de Y na direção de X . No espaço semi-Euclidiano há uma maneira natural para se fazer isso.

Definição 1.3. Sejam $x^1, \dots, x^n$ coordenadas em $\mathbb{R}_\nu^n$. Se V e $W = \sum W^i \partial_i$ são campos de vetores em $\mathbb{R}_\nu^n$, então o campo de vetores

$$D_V W = \sum V(W^i) \partial_i$$

é chamado derivada covariante de W com relação a V .

Como a definição acima utiliza as coordenadas de $\mathbb{R}_\nu^n$, não é óbvio como estendê-la a uma variedade semi-Riemanniana arbitrária, portanto, iniciaremos axiomatizando suas propriedades. No que segue, $\mathfrak{X}(M)$ denota o conjunto dos campos de vetores de classe C^∞ tangentes à M e $C^\infty(M)$ denota o anel das funções reais de classe C^∞ definidas em M .

Definição 1.4. Uma conexão ∇ em uma variedade suave M é uma função $\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ tangentes à M , tal que

- (i) $\nabla_{(fX+gY)} Z = f \nabla_X Z + g \nabla_Y Z$,

$$(ii) \nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z,$$

$$(iii) \nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y,$$

para quaisquer $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ e todos $f, g \in C^\infty(M)$. O campo $\nabla_X Y$ é chamado de derivada covariante de Y com relação a X para a conexão ∇ .

Lema 1.1. Em uma variedade semi-Riemanniana M existe uma única conexão ∇ tal que

$$(i) [X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X,$$

$$(ii) X\langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle,$$

para quaisquer $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$. ∇ é chamada conexão de Levi-Civita de M , e é caracterizada pela fórmula de Koszul

$$\begin{aligned} 2\langle \nabla_X Y, Z \rangle &= X\langle Y, Z \rangle + Y\langle Z, X \rangle - Z\langle X, Y \rangle - \langle X, [Y, Z] \rangle \\ &\quad + \langle Y, [Z, X] \rangle + \langle Z, [X, Y] \rangle. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Em particular, quando (i) é satisfeita dizemos que a conexão é simétrica, e quando (ii) é satisfeita dizemos que a conexão é compatível com a métrica.

Demonstração. Suponha, inicialmente que tal conexão exista. Usando a compatibilidade com a métrica e a simetria, obtemos

$$X\langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_Z X - [Z, X] \rangle. \quad (1.2)$$

$$Y\langle Z, X \rangle = \langle \nabla_Y Z, X \rangle + \langle Z, \nabla_Y X \rangle = \langle \nabla_Y Z, X \rangle + \langle Z, \nabla_X Y - [X, Y] \rangle. \quad (1.3)$$

$$Z\langle X, Y \rangle = \langle \nabla_Z X, Y \rangle + \langle X, \nabla_Z Y \rangle = \langle \nabla_Z X, Y \rangle + \langle X, \nabla_Y Z - [Y, Z] \rangle. \quad (1.4)$$

Agora, somando (1.2) e (1.3), e subtraindo (1.4), conseguimos que

$$\begin{aligned} X\langle Y, Z \rangle + Y\langle Z, X \rangle - Z\langle X, Y \rangle &= \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_Z X \rangle - \langle Y, [Z, X] \rangle + \langle \nabla_Y Z, X \rangle \\ &\quad + \langle Z, \nabla_X Y \rangle - \langle Z, [X, Y] \rangle - \langle \nabla_Z X, Y \rangle - \langle X, \nabla_Y Z \rangle \\ &\quad + \langle X, [Y, Z] \rangle \\ &= 2\langle \nabla_X Y, Z \rangle - \langle Y, [Z, X] \rangle - \langle Z, [X, Y] \rangle + \langle X, [Y, Z] \rangle. \end{aligned}$$

Portanto,

$$2\langle \nabla_X Y, Z \rangle = X\langle Y, Z \rangle + Y\langle Z, X \rangle - Z\langle X, Y \rangle - \langle X, [Y, Z] \rangle + \langle Y, [Z, X] \rangle + \langle Z, [X, Y] \rangle.$$

Segue da expressão acima que se a conexão existir ela será única. Por fim, para provar a existência basta definir ∇ por (1.1), e é imediato verificar que ∇ assim definida é uma conexão afim, simétrica e compatível com a métrica. $\square$

1.3 Alguns operadores diferenciáveis

Nesta seção, estenderemos os conceitos de gradiente, divergente, Hessiano e Laplaciano para variedades semi-Riemannianas.

Definição 1.5. O gradiente de uma função $f \in C^\infty(M)$, o qual denotaremos por ∇f , é um campo vetorial metricamente equivalente a diferencial df .

Assim,

$$\langle \nabla f, X \rangle = df(X) = X(f),$$

para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$. Então, considerando um referencial ortonormal local $\{E_1, \dots, E_n\}$ em M temos

$$\nabla f = \sum_{i=1}^n \epsilon_i E_i(f) E_i,$$

onde $\epsilon_i = \langle E_i, E_i \rangle$ e $E_i(f) = \langle \nabla f, E_i \rangle$.

Definição 1.6. Dado um campo vetorial $X \in \mathfrak{X}(M)$ definimos a divergência do campo X como a função $\operatorname{div} X : M \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\operatorname{div} X = \operatorname{tr}\{Y(p) \rightarrow \nabla_Y X(p)\}, \quad p \in M.$$

Então, considerando um referencial ortonormal local $\{E_1, \dots, E_n\}$ em M temos

$$\operatorname{div} X = \sum_{i=1}^n \epsilon_i \langle \nabla_{E_i} X, E_i \rangle,$$

onde $\epsilon_i = \langle E_i, E_i \rangle$.

Definição 1.7. O Hessiano de uma função $f \in C^\infty(M)$ é definido como sendo a aplicação $\operatorname{Hess} : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow C^\infty(M)$ dada por

$$(\operatorname{Hess} f)(X, Y) = \langle \nabla_X (\nabla f), Y \rangle.$$

Definição 1.8. Seja M uma variedade semi-Riemanniana. Definimos o operador Laplaciano de M pela aplicação $\Delta : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$ dada por

$$\Delta f = \operatorname{tr}(\operatorname{Hess} f),$$

para toda função $f \in C^\infty(M)$.

O Laplaciano também pode ser visto como um divergente, com efeito, considerando

um referencial ortonormal local $\{E_1, \dots, E_n\}$ em M temos

$$\begin{aligned}\Delta f &= \sum_{i=1}^n \epsilon_i \langle (\text{Hess} f)(E_i), E_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \epsilon_i \langle \nabla_{E_i}(\nabla f), E_i \rangle \\ &= \text{div}(\nabla f).\end{aligned}$$

1.4 Curvatura

A partir das propriedades da conexão de Levi-Civita ∇ de uma variedade semi-Riemanniana obtemos o seguinte resultado.

Lema 1.2. Seja M uma variedade semi-Riemanniana com conexão de Levi-Civita ∇ . A função $R : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ dada por

$$R(X, Y)Z := \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z$$

é um (1,3) tensor em M , e é chamado o tensor curvatura de M .

Considere o (0,4) tensor $R_m : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathbb{R}$ definido por

$$R_m(X, Y, Z, W) := \langle R(X, Y)Z, W \rangle.$$

Com essa notação, obtemos o seguinte resultado.

Lema 1.3. Para quaisquer $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$, temos

- (i) $R_m(X, Y, Z, W) = -R_m(Y, X, Z, W)$,
- (ii) $R_m(X, Y, Z, W) = -R_m(X, Y, W, Z)$,
- (iii) $R_m(X, Y, Z, W) = R_m(Z, W, X, Y)$,
- (iv) $R_m(X, Y, Z, W) + R_m(Y, Z, X, W) + R_m(Z, X, Y, W) = 0$.

Agora, vamos apresentar a conceito de curvatura seccional.

Lema 1.4. Sejam M uma variedade semi-Riemanniana e $p \in M$. Considere σ um subespaço de $T_p M$ de dimensão dois não-degenerado. O número

$$K(\sigma) = \frac{\langle R(v, w)v, w \rangle}{\langle v, v \rangle \langle w, w \rangle - \langle v, w \rangle^2}$$

independe da base escolhida $\{v, w\}$ de σ , e é denominado a curvatura seccional de M associada a σ .

Definição 1.9. Dizemos que uma aplicação multilinear $F : T_p(M)^4 \rightarrow \mathbb{R}$ é tipo-curvatura se ela satisfaz todos os itens do Lema 1.3.

Em particular, se $F(x, y, x, y) = 0$ para quaisquer $x, y \in T_p M$ tais que $\{x, y\}$ é uma base para σ , onde σ é um subespaço de $T_p M$ não-degenerado, então $F = 0$.

Lema 1.5. Seja F uma função tipo-curvatura em $T_p M$ tal que

$$K(x, y) = \frac{F(x, y, x, y)}{\langle x, x \rangle \langle y, y \rangle - \langle x, y \rangle^2}$$

sempre que $\{x, y\}$ é uma base para σ , onde σ é um subespaço de $T_p M$ não-degenerado. Então

$$\langle R(x, y)z, w \rangle = F(x, y, z, w),$$

para todos $x, y, z, w \in T_p M$.

Demonstração. Uma vez que a diferença de funções tipo-curvatura também é uma função tipo-curvatura, vamos definir $G(x, y, z, w) = F(x, y, z, w) - \langle R(x, y)z, w \rangle$. Deste modo, temos $G(x, y, x, y) = 0$ sempre que $\{x, y\}$ é uma base para σ , onde σ é um subespaço não-degenerado de $T_p M$. Assim, pela observação feita anteriormente, $G = 0$, ou seja,

$$\langle R(x, y)z, w \rangle = F(x, y, z, w),$$

para todos $x, y, z, w \in T_p M$. □

Uma variedade semi-Riemanniana M tem curvatura constante se a curvatura seccional for constante. Mais precisamente, se M tem curvatura seccional constante c , o próximo resultado nos fornece uma fórmula para o tensor curvatura.

Corolário 1.6. Seja M uma variedade semi-Riemanniana com curvatura seccional constante c , então

$$R(x, y)z = c\{\langle z, x \rangle y - \langle y, z \rangle x\}. \quad (1.5)$$

Demonstração. Definindo $F(x, y, z, w) = c\{\langle z, x \rangle \langle y, w \rangle - \langle y, z \rangle \langle x, w \rangle\}$, temos que F é uma função tipo-curvatura para cada ponto $p \in M$. Além disso,

$$F(x, y, x, y) = c\{\langle x, x \rangle \langle y, y \rangle - \langle x, y \rangle^2\}.$$

Deste modo, sendo $\{x, y\}$ uma base para σ , onde σ é um subespaço não-degenerado de $T_p M$, temos

$$K(x, y) = c = \frac{F(x, y, x, y)}{\langle x, x \rangle \langle y, y \rangle - \langle x, y \rangle^2},$$

e do Lema anterior, concluimos que

$$R(x, y)z = c\{\langle z, x \rangle y - \langle y, z \rangle x\}.$$

□

Definição 1.10. Uma variedade semi-Riemanniana completa e conexa com curvatura seccional constante é dita uma forma espacial.

Apresentaremos agora dois exemplos de formas espaciais, para mais detalhes veja ([17], Corolário 8.26).

Exemplo 1.2. O espaço de Sitter $\mathbb{S}_1^{n+1}$ dado por

$$\mathbb{S}_1^{n+1} = \{x \in \mathbb{R}_1^{n+2} : \langle x, x \rangle = 1\},$$

onde $\mathbb{R}_1^{n+2}$ é o espaço de Minkowski $(n+2)$ -dimensional, tem curvatura seccional constante igual a 1.

Exemplo 1.3. O espaço anti-de Sitter dado por

$$\mathbb{H}_1^{n+1} = \{x \in \mathbb{R}_2^{n+2} : \langle x, x \rangle = -1\}$$

tem curvatura seccional constante igual a -1.

Definição 1.11. Seja M uma variedade semi-Riemanniana n -dimensional, e considere $\{E_1, \dots, E_n\}$ um referencial ortonormal local em M . Então a aplicação $\text{Ric} : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow C^\infty(M)$ dada por

$$\text{Ric}(X, Y) = \sum_{i=1}^n \epsilon_i \langle R(X, E_i)Y, E_i \rangle,$$

onde $\epsilon_i = \langle E_i, E_i \rangle$, é chamada de tensor curvatura de Ricci de M .

Observe que na definição acima aparece o sinal de E_i , uma vez que uma coleção de campos de vetores $E_1, \dots, E_n$ em uma variedade semi-Riemanniana M é um referencial ortonormal em M quando $\langle E_i, E_j \rangle = \epsilon_i \delta_{i,j}$ em todo ponto de M e todos $i, j \in \{1, \dots, n\}$, onde ϵ denota o sinal de E_i .

Definição 1.12. Seja M uma variedade semi-Riemanniana n -dimensional. A curvatura escalar R de M é definida como o traço do tensor curvatura de Ricci.

1.5 Subvariedades semi-Riemannianas

Nesta seção definiremos, inicialmente, o que seria uma subvariedade semi-Riemanniana. Depois definiremos a segunda forma fundamental, o campo de vetores curvatura média e o operador forma de uma subvariedade semi-Riemanniana M imersa em uma variedade semi-Riemanniana $\overline{M}$. Além disso, também apresentaremos a chamada equação de Gauss.

Definição 1.13. Seja M uma subvariedade de uma variedade semi-Riemanniana $(\overline{M}, \overline{g})$. Considere a aplicação inclusão $i : M \rightarrow \overline{M}$. Se o pullback $i^*(\overline{g})$ for um tensor métrico em M então dizemos que M é uma subvariedade semi-Riemanniana de $\overline{M}$ com métrica $g := i^*(\overline{g})$. Mais precisamente, seja $p \in M$ para cada $u, v \in T_p M$, temos

$$g(u, v) = i^*(\overline{g}(u, v)) := \overline{g}(d_p i(u), d_p i(v)).$$

A partir de agora, seja M uma subvariedade semi-Riemanniana de uma variedade semi-Riemanniana $\overline{M}$. Cada espaço tangente $T_p M$ é, por definição, um subespaço não-degenerado de $T_p \overline{M}$, e consequentemente, podemos escrever $T_p \overline{M}$ pela soma direta

$$T_p \overline{M} = T_p M + T_p M^\perp,$$

$T_p M^\perp$ também é um subespaço não-degenerado de $T_p \overline{M}$. Os vetores em $T_p M^\perp$ são ditos normais à M , e os vetores em $T_p M$ são ditos tangentes à M .

Denotando a conexão de Levi-Civita de $\overline{M}$ por $\overline{\nabla}$. Se X e Y são campos locais de vetores em M , considerando, quando necessário, suas extensões locais à $\overline{M}$, temos que

$$\nabla_X Y = (\overline{\nabla}_X Y)^\top$$

denota a conexão de Levi-Civita de M .

Lema 1.7. A função $II : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)^\perp$ dada por

$$II(X, Y) = -(\overline{\nabla}_X Y)^\perp$$

é simétrica e bilinear sobre $C^\infty(M)$. II é chamada a segunda forma fundamental de $M \subset \overline{M}$.

Segue do Lema acima que

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y - II(X, Y), \tag{1.6}$$

onde $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. A decomposição apresentada em (1.6) é chamada de fórmula de Gauss. E essa decomposição nos leva a um resultado fundamental da curvatura, nós o chamamos de equação de Gauss.

Lema 1.8. Seja M uma subvariedade semi-Riemanniana de $\overline{M}$, com R e $\overline{R}$ seus respectivos tensores curvatura e II a segunda forma fundamental. Então para quaisquer vetores $X, Y, Z, W \in T_p M$, temos

$$\langle R(X, Y)Z, W \rangle = \langle \overline{R}(X, Y)Z, W \rangle - \langle II(X, W), II(Y, Z) \rangle + \langle II(X, Z), II(Y, W) \rangle. \quad (1.7)$$

Demonstração. Observe que

$$\begin{aligned} \langle \overline{R}(X, Y)Z, W \rangle &= \langle \overline{\nabla}_X \overline{\nabla}_Y Z - \overline{\nabla}_Y \overline{\nabla}_X Z - \overline{\nabla}_{[X, Y]} Z, W \rangle \\ &= \langle \overline{\nabla}_X (\nabla_Y Z - II(Y, Z)), W \rangle - \langle \overline{\nabla}_Y (\nabla_X Z - II(X, Z)), W \rangle \\ &\quad - \langle \nabla_{[X, Y]} Z - II([X, Y], Z), W \rangle \\ &= \langle \overline{\nabla}_X \nabla_Y Z, W \rangle - \langle \overline{\nabla}_X II(Y, Z), W \rangle - \langle \overline{\nabla}_Y \nabla_X Z, W \rangle \\ &\quad + \langle \overline{\nabla}_Y II(X, Z), W \rangle - \langle \nabla_{[X, Y]} Z, W \rangle \\ &= \langle \nabla_X \nabla_Y Z, W \rangle - \langle II(X, \nabla_Y Z), W \rangle + \langle II(X, W), II(Y, Z) \rangle \\ &\quad - \langle \nabla_Y \nabla_X Z, W \rangle + \langle II(Y, \nabla_X Z), W \rangle - \langle II(X, Z), II(Y, W) \rangle \\ &\quad - \langle \nabla_{[X, Y]} Z, W \rangle \\ &= \langle R(X, Y)Z, W \rangle + \langle II(X, W), II(Y, Z) \rangle - \langle II(X, Z), II(Y, W) \rangle. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\langle R(X, Y)Z, W \rangle = \langle \overline{R}(X, Y)Z, W \rangle - \langle II(X, W), II(Y, Z) \rangle + \langle II(X, Z), II(Y, W) \rangle.$$

□

Definição 1.14. Como II é um $(0,2)$ tensor com valores em $\mathfrak{X}(M)^\perp$, ele pode ser contraído metricamente para fornecer um campo vetorial normal em M . Dividindo por $n = \dim M$ obtemos o campo de vetores curvatura média H de M . Explicitamente, em cada $p \in M$,

$$H_p = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n II(e_i, e_i),$$

onde $e_1, \dots, e_n$ é um referencial ortonormal à M em p .

Definição 1.15. Seja M uma variedade semi-Riemanniana e N uma direção normal

à M . O $(1,1)$ tensor A_N em M tal que

$$\langle A_N X, Y \rangle = \langle II(X, Y), N \rangle,$$

para cada $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, é chamado de operador forma de M com respeito à N .

Como usual, A_N determina um operador linear $A_N : T_p M \rightarrow T_p M$ em cada ponto $p \in M$.

Lema 1.9. Se A_N é o operador forma de M com respeito à N então A_N é dado por

$$A_N X = (\bar{\nabla}_X N)^\top.$$

Sejam N uma direção normal a subvariedade semi-Riemanniana M e um campo de vetores $X \in \mathfrak{X}(M)$, vamos considerar agora a componente normal do campo $\bar{\nabla}_X N$, a qual chamamos de conexão normal $\nabla^\perp$ da subvariedade M . Sendo assim, temos

$$\nabla_X^\perp N = (\bar{\nabla}_X N)^\perp = \bar{\nabla}_X N - (\bar{\nabla}_X N)^\top = \bar{\nabla}_X N - A_N X.$$

Portanto,

$$\bar{\nabla}_X N = A_N X + \nabla_X^\perp N. \quad (1.8)$$

A expressão dada em (1.8) é chamada de fórmula de Weingarten.

1.6 Espaços-tempo Robertson-Walker generalizados

Definição 1.16. Sejam $(M^{n+1}, \langle, \rangle_M)$ uma variedade Riemanniana $(n+1)$ -dimensional, $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto e $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave positiva. Considere a variedade produto $I \times M^{n+1}$, $(n+2)$ -dimensional, com a métrica Lorentziana

$$\langle, \rangle := -dt^2 + f(t)^2 \langle, \rangle_M. \quad (1.9)$$

Nesse caso, escrevemos $-I \times_f M^{n+1}$, e dizemos que $-I \times_f M^{n+1}$ é um espaço-tempo Robertson-Walker generalizado (GRW).

De outro modo, $-I \times_f M^{n+1}$ nada mais é do que um produto warped Lorentziano com base Lorentziana $(I, -dt^2)$, fibra Riemanniana $(M^{n+1}, \langle, \rangle_M)$, e função warping f . Quando a fibra Riemanniana tiver curvatura constante vamos nos referir a $-I \times_f M^{n+1}$ como um espaço-tempo Robertson-Walker (RW).

Vejamos agora alguns exemplos de espaços desse tipo.

Exemplo 1.4. Considere o espaço de Sitter $\mathbb{S}_1^{n+1}$ definido no Exemplo 1.2. De acordo com o que é visto em [15], é possível mostrar que o espaço de Sitter admite o seguinte modelo GRW

$$\mathbb{S}_1^{n+1} = -\mathbb{R} \times_{\cosh t} \mathbb{S}^n,$$

onde $\mathbb{S}^n$ é a esfera unitária n -dimensional do espaço Euclidiano.

Exemplo 1.5. Considere o espaço de Minkowski $(n+3)$ -dimensional $\mathbb{R}_1^{n+3}$ munido com o produto Lorentziano $\langle, \rangle$ cuja forma quadrática equivalente é dada por $q(x) = -x_0^2 + \sum_{i=1}^{n+2} x_i^2$, onde $x = (x_0, x_1, \dots, x_{n+2}) \in \mathbb{R}_1^{n+2}$. Como sabemos, o espaço de Sitter é a hiperquádrica

$$\mathbb{S}_1^{n+2} = \{x \in \mathbb{R}_1^{n+3} : \langle x, x \rangle = 1\},$$

e o steady state spacetime $(n+2)$ -dimensional é a região aberta de $\mathbb{S}_1^{n+2}$ dada por

$$\{x \in \mathbb{S}_1^{n+2} : \langle x, a \rangle > 0\},$$

onde $a \in \mathbb{R}_1^{n+3}$ é um vetor tipo-luz. Então o produto warped Lorentziano $-\mathbb{R} \times_{e^t} \mathbb{R}^{n+1}$ é isométrico a região aberta de $\mathbb{S}_1^{n+2}$ (veja Proposição 2.17 de [22]). De fato, escolha, por exemplo, $a = (1, 0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{R}_1^{n+3}$, e assim, a aplicação $\phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{S}_1^{n+2}$ dada por

$$\phi(t, p) = \left(-\sinh(t) - \frac{e^t |p|^2}{2}, e^t p, \cosh(t) - \frac{e^t |p|^2}{2} \right)$$

define uma isometria entre $-\mathbb{R} \times_{e^t} \mathbb{R}^{n+1}$ e a região aberta de $\mathbb{S}_1^{n+2}$.

Exemplo 1.6. Considerando agora a região aberta do espaço de Sitter $(n+2)$ -dimensional dada por

$$\{x \in \mathbb{S}_1^{n+2} : \langle x, a \rangle > 1\},$$

e o espaço $\mathbb{H}^{n+1}$ dado por

$$\mathbb{H}^{n+1} = \{p \in \mathbb{R}_1^{n+2} : \langle p, p \rangle = -1\}.$$

Então é possível mostrar que existe uma isometria entre $-(0, +\infty) \times_{\sinh t} \mathbb{H}^{n+1}$ e a região aberta do espaço de Sitter. Para tal, escolha, por exemplo, $a = (0, \dots, 1) \in \mathbb{R}_1^{n+3}$. Então a aplicação $\phi : (0, +\infty) \times \mathbb{H}^{n+1} \rightarrow \mathbb{S}_1^{n+2}$ dada por

$$\phi(t, p) = \cosh(\log(1 + \sqrt{2}) - t)(p, \sqrt{2}) - \sinh(\log(1 + \sqrt{2}) - t)(\sqrt{2}p, 1)$$

define uma isometria entre o produto warped Lorentziano $-(0, +\infty) \times_{\sinh(t)} \mathbb{H}^{n+1}$ e a

região aberta de $\mathbb{S}_1^{n+2}$ definida por

$$\{x \in \mathbb{S}_1^{n+2} : \langle x, a \rangle > 1\}, \quad a = (0, \dots, 0, 1).$$

Considere agora $-I \times_f M^{n+1}$ um espaço-tempo GRW. Escolhemos em $-I \times_f M^{n+1}$ a orientação tipo-tempo dada pelo campo de vetores unitários globalmente definido

$$\partial_t = (\partial/\partial t)|_{(t,x)}.$$

Definição 1.17. Nós dizemos que um campo de vetores $X \in \mathfrak{X}(I \times M)$ aponta para o futuro quando $\langle X, \partial_t \rangle < 0$. Da mesma forma, dizemos que X aponta para o passado quando $\langle X, \partial_t \rangle > 0$.

Proposição 1.10. O campo de vetores dado por

$$K(t, x) = f(t)(\partial/\partial t)|_{(t,x)}, \quad (t, x) \in -I \times_f M^{n+1}, \quad (1.10)$$

é conforme, não-nulo, fechado e aponta para o futuro.

Demonstração. De fato, note que

$$\langle K, \partial_t \rangle = f(t)\langle \partial_t, \partial_t \rangle = -f(t) < 0,$$

ou seja, K aponta para o futuro. Agora, observe que para todo $V \in -I \times_f M^{n+1}$, temos $V = -a\partial_t + V^*$, onde $a \in C^\infty(M^{n+1})$ e $V^* \in \mathfrak{X}(M^{n+1})$, e deste modo, temos que

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_V K &= \bar{\nabla}_{(-a\partial_t + V^*)} f(t)\partial_t \\ &= -a\bar{\nabla}_{\partial_t} f(t)\partial_t + \bar{\nabla}_{V^*} f(t)\partial_t \\ &= -af(t)\bar{\nabla}_{\partial_t} \partial_t - a\partial_t(f(t))\partial_t + \bar{\nabla}_{f(t)\partial_t} V^* \\ &= -af'(t)\partial_t + f(t) \left(\frac{\partial_t(f(t))}{f(t)} \right) V^* \\ &= f'(t)(-a\partial_t + V^*) \\ &= f'(t)V. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\bar{\nabla}_V K = f'(t)V. \quad (1.11)$$

Logo, dados $X, Y \in -I \times_f M^{n+1}$, temos

$$\langle \bar{\nabla}_X K, Y \rangle + \langle X, \bar{\nabla}_Y K \rangle = \langle f'X, Y \rangle + \langle X, f'Y \rangle = 2f'\langle X, Y \rangle,$$

e assim, concluimos que K é conforme e fechado. Aqui $\bar{\nabla}$ denota a conexão de Levi-Civita de $-I \times_f M^{n+1}$. $\square$

Para cada $\tau \in I$, o slice $M_\tau = \{\tau\} \times M$ é uma hipersuperfície tipo-espaço mergulhada em $-I \times_f M^{n+1}$, no sentido de que a métrica induzida em M_τ pela métrica (1.9) é Riemanniana. Mais precisamente, a métrica induzida em M_τ é dada por $f(\tau)^2 \langle \cdot, \cdot \rangle_M$. Segue de (1.11) que

$$\bar{\nabla}_V \partial_t = \frac{1}{f(t)} f'(t) V - \frac{1}{f(t)^2} \langle V, \bar{\nabla} f \rangle K, \quad (1.12)$$

para cada campo de vetores V em $-I \times_f M^{n+1}$, onde $\bar{\nabla} f$ denota o gradiente em $-I \times_f M^{n+1}$ de $\bar{f}(t, x) = f(t)$. De fato, para todo $V \in -I \times_f M^{n+1}$, temos $V = -a\partial_t + V^*$, onde $a \in C^\infty(M^{n+1})$ e $V^* \in \mathfrak{X}(M^{n+1})$, e assim,

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_V \partial_t &= \bar{\nabla}_V \left(\frac{1}{f(t)} K \right) \\ &= \frac{1}{f(t)} \bar{\nabla}_V K + V \left(\frac{1}{f(t)} \right) K \\ &= \frac{1}{f(t)} f'(t) V - a \partial_t \left(\frac{1}{f(t)} \right) K + V^* \left(\frac{1}{f(t)} \right) K \\ &= \frac{1}{f(t)} f'(t) V + a \frac{\partial_t(f(t))}{f(t)^2} K \\ &= \frac{1}{f(t)} f'(t) V + \frac{a}{f(t)^2} \langle \partial_t, \bar{\nabla} f \rangle K - \frac{1}{f(t)^2} \langle V^*, \bar{\nabla} f \rangle K \\ &= \frac{1}{f(t)} f'(t) V - \frac{1}{f(t)^2} \langle V, \bar{\nabla} f \rangle K. \end{aligned}$$

Agora, observe que o gradiente em $-I \times_f M^{n+1}$ da projeção $\pi_I(t, x) = t$ é dado por

$$\bar{\nabla} \pi_I = -\partial_t.$$

Com efeito, para todo $X \in -I \times_f M^{n+1}$, podemos escrever $X = -\langle X, \partial_t \rangle \partial_t + X^*$, onde $X^* \in \mathfrak{X}(M^{n+1})$, e assim,

$$\langle \bar{\nabla} \pi_I, X \rangle = X(\pi_I) = -\langle X, \partial_t \rangle \partial_t(\pi_I) + X^*(\pi_I) = -\langle X, \partial_t \rangle.$$

Logo, escrevendo $\bar{f} = f \circ \pi_I$, temos

$$\bar{\nabla} f = f'(t) \bar{\nabla} \pi_I = -f'(t) \partial_t.$$

Substituindo em (1.12), obtemos

$$\bar{\nabla}_V \partial_t = \frac{f'(t)}{f(t)} (V + \langle V, \partial_t \rangle \partial_t), \quad (1.13)$$

para cada campo de vetores V em $-I \times_f M^{n+1}$. Em particular, M_τ é uma hipersuperfície totalmente umbílica em $-I \times_f M^{n+1}$ com operador forma dado por

$$A_\tau v = (\bar{\nabla}_v \partial_t)^\top = \frac{f'(\tau)}{f(\tau)} v,$$

para cada $v \in T_{(\tau,x)} M_\tau$.

Portanto, $\tau \in I \longrightarrow M_\tau \subset -I \times_f M^{n+1}$ determina a foliação de $-I \times_f M^{n+1}$ por hipersuperfícies tipo-espaço totalmente umbílicas, com curvatura média constante dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(\tau) &:= -\frac{1}{n+1} \text{tr}(A_\tau) \\ &= -\frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} \langle A_\tau e_i, e_i \rangle \\ &= -\frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} \left\langle \frac{f'(\tau)}{f(\tau)} e_i, e_i \right\rangle \\ &= -\frac{f'(\tau)}{f(\tau)}, \end{aligned}$$

onde $\{e_i\}$ é um referencial ortonormal em M_τ .

Observação 1.1. Neste trabalho a convenção para a segunda forma fundamental, e consequentemente, para o operador forma e o campo curvatura média, é a usual na Relatividade, que é oposta ao que geralmente é obtido na Geometria Diferencial. Sendo assim, com a escolha do sinal negativo na definição para curvatura média obtemos que o campo de vetores curvatura média de M_τ é dado por $\mathcal{H}_\tau \partial_t|_{(\tau,x)}$. Portanto, $\mathcal{H}(\tau) > 0$ se, e somente se, o vetor curvatura média de M_τ estiver apontando para o futuro.

Capítulo 2

Subvariedades marginally trapped em espaços-tempo Robertson-Walker generalizados

Neste capítulo vamos considerar uma subvariedade marginally trapped, de codimensão dois, imersa em um espaço-tempo GRW. Temos por objetivo apresentar alguns resultados de rigidez que garantem, a partir de certas hipóteses, que a subvariedade está contida em um slice. Além disso, também apresentaremos alguns resultados de não-existência para subvariedades weakly trapped. Por fim, obteremos algumas aplicações para alguns casos de relevância física. Este capítulo é baseado no trabalho de Alías, Cánovas e Colares [1].

2.1 Subvariedades marginally trapped

Seja Σ uma subvariedade tipo-espaço, de codimensão dois, imersa no espaço-tempo GRW $-I \times_f M^{n+1}$. Nesse sentido, seguindo a terminologia usual da Relatividade geral, nós temos a seguinte definição para subvariedades desse tipo.

Definição 2.1. Dizemos que Σ é future trapped se o campo de vetores curvatura média $\vec{H}$ de Σ for tipo-tempo e apontar para o futuro em Σ , similarmente, dizemos que Σ é past trapped quando $\vec{H}$ for tipo-tempo e apontar para o passado em Σ . Se $\vec{H}$ for tipo-luz e apontar para o futuro em Σ , então Σ é dita uma subvariedade marginally future trapped, similarmente definimos uma subvariedade marginally past trapped. Por fim, se $\vec{H}$ for causal, isto é, tipo-tempo ou tipo-luz, e apontar para o futuro em Σ , então Σ é dita uma subvariedade weakly future trapped, similarmente definimos uma subvariedade weakly past trapped. No caso em que $\vec{H} = 0$ dizemos que Σ é uma subvariedade mínima.

No que se segue, vamos denotar por $\bar{\nabla}$ e ∇ as conexões de Levi-Civita de $-I \times_f M^{n+1}$ e Σ , respectivamente.

2.1.1 Subvariedades marginally trapped contidas em slices

Seja Σ uma hipersuperfície imersa na variedade Riemanniana $(M_{n+1}, \langle \cdot, \cdot \rangle_M)$, ou seja, Σ é uma variedade n -dimensional para qual existe imersão suave $\phi : \Sigma \longrightarrow M^{n+1}$. Vamos denotar por $\langle \cdot, \cdot \rangle_\Sigma$ a métrica Riemanniana induzida em Σ por ϕ .

Para um $\tau \in I$ fixo, seja $\phi_\tau : \Sigma \longrightarrow -I \times_f M^{n+1}$ a aplicação definida por

$$\phi_\tau(p) = (\tau, \phi(p)), \text{ para cada } p \in \Sigma.$$

Então ϕ_τ é uma imersão tipo-espaço de Σ em $-I \times_f M^{n+1}$ que está contida no slice M_τ , e a métrica induzida em Σ por ϕ_τ a partir da métrica (1.9) é

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_\tau = \phi_\tau^*(\langle \cdot, \cdot \rangle) = f(\tau)^2 \langle \cdot, \cdot \rangle_\Sigma. \quad (2.1)$$

Segue daí que $(\Sigma, \langle \cdot, \cdot \rangle_\tau)$ é homotético a $(\Sigma, \langle \cdot, \cdot \rangle_\Sigma)$ com fator escalar $f(\tau)$.

Reciprocamente, se considerarmos $\psi : \Sigma \longrightarrow -I \times_f M^{n+1}$ uma imersão tipo-espaço contida no slice M_τ , então a projeção $\phi = \pi_M \circ \psi : \Sigma \longrightarrow M^{n+1}$ é uma hipersuperfície imersa para a qual $\psi(p) = (\tau, \phi(p)) = \phi_\tau(p)$.

Nosso objetivo agora é expressar a geometria extrínseca da subvariedade tipo-espaço de codimensão dois $\phi_\tau : \Sigma \rightarrow -I \times_f M^{n+1}$ a partir da geometria extrínseca da hipersuperfície $\phi : \Sigma \rightarrow M^{n+1}$.

Dessa forma, para calcular a segunda forma fundamental II_τ da imersão ϕ_τ , considere o campo de vetores normal $\bar{N}$ (localmente definido) da hipersuperfície $\phi : \Sigma \longrightarrow M^{n+1}$, com $\langle \bar{N}, \bar{N} \rangle_M = 1$. Observe que

$$\langle \bar{N}, \bar{N} \rangle = f(\tau)^2 \langle \bar{N}, \bar{N} \rangle_M = f(\tau)^2. \quad (2.2)$$

Então

$$\eta_\tau(p) = \frac{1}{f(\tau)} \bar{N}(p) \text{ e } \xi_\tau(p) = \partial_t|_{(\tau, \phi(p))}, \quad p \in \Sigma$$

define um referencial ortonormal local de campos de vetores normais ao longo da imersão ϕ_τ , com

$$\langle \eta_\tau, \eta_\tau \rangle = 1, \quad \langle \eta_\tau, \xi_\tau \rangle = 0 \text{ e } \langle \xi_\tau, \xi_\tau \rangle = -1.$$

Assim, segue que

$$\begin{aligned} II_\tau(X, Y) &= \langle II(X, Y), \eta_\tau \rangle \eta_\tau - \langle II(X, Y), \xi_\tau \rangle \xi_\tau \\ &= \langle A_{\eta_\tau} X, Y \rangle \eta_\tau - \langle A_{\xi_\tau} X, Y \rangle \xi_\tau \end{aligned} \quad (2.3)$$

para cada campo de vetores tangente $X, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma)$.

Observe que para cada $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$,

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_X \eta_\tau &= \bar{\nabla}_X \frac{1}{f(\tau)} \bar{N} \\ &= \frac{1}{f(\tau)} \bar{\nabla}_X \bar{N} + X \left(\frac{1}{f(\tau)} \right) \bar{N} = \frac{1}{f(\tau)} \tilde{\nabla}_X \bar{N}, \end{aligned}$$

onde $\tilde{\nabla}$ denota a conexão de Levi-Civita de $(M^{n+1}, \langle \cdot, \cdot \rangle_M)$. Portanto, como

$$AX = \tilde{\nabla}_X \bar{N}$$

onde $A : \mathfrak{X}(\Sigma) \rightarrow \mathfrak{X}(\Sigma)$ representa o operador forma da hipersuperfície $\phi : \Sigma \rightarrow M^{n+1}$ com respeito a $\bar{N}$, e usando a fórmula de Weingarten dada em (1.8), temos

$$\nabla_X^\perp \eta_\tau = \bar{\nabla}_X \eta_\tau - A_{\eta_\tau} X = 0 \text{ e } A_{\eta_\tau} X = \bar{\nabla}_X \eta_\tau = \frac{1}{f(\tau)} AX$$

para cada $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$.

Por outro lado, como $\langle X, \xi_\tau \rangle = 0$ para cada $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$, por (1.13) temos

$$\bar{\nabla}_X \xi_\tau = \frac{f'(\tau)}{f(\tau)} X,$$

daí, usando novamente a fórmula de Weingarten

$$\nabla_X^\perp \xi_\tau = 0 \text{ e } A_{\xi_\tau} X = \frac{f'(\tau)}{f(\tau)} X.$$

Substituindo em (2.3) obtemos

$$II(X, Y) = \frac{1}{f(\tau)^2} \langle AX, Y \rangle_\tau \bar{N} - \frac{f'(\tau)}{f(\tau)} \langle X, Y \rangle_\tau \xi_\tau,$$

para cada campo de vetores tangente $X, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma)$.

Portanto, o campo de vetores curvatura média de ψ  dado por

$$\vec{H}_\tau = \frac{1}{n} \text{tr}(II_\tau) = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{f(\tau)^2} \sum_{i=1}^n \langle AE_i, E_i \rangle_\tau \bar{N} - \frac{f'(\tau)}{f(\tau)} \sum_{i=1}^n \langle E_i, E_i \rangle_\tau \xi_\tau \right) \quad (2.4)$$

onde $\{E_1, \dots, E_n\}$   um referencial ortonormal local em Σ , com respeito a métrica τ .

Por outro lado, por (2.1) temos

$$\langle AE_i, E_i \rangle_\tau = f(\tau)^2 \langle AE_i, E_i \rangle_\Sigma = \langle Ae_i, e_i \rangle_\Sigma,$$

para cada $i = 1, \dots, n$, onde $e_i = f(\tau)E_i$ e $\{e_1, \dots, e_n\}$   um referencial ortonormal local em Σ com respeito a métrica $\langle, \rangle_\Sigma$

Observe que a função curvatura média da hipersuperfície $\phi : \Sigma \longrightarrow M^{n+1}$ é dada por

$$H = \frac{1}{n} \text{tr}(A) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \langle Ae_i, e_i \rangle_\Sigma = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \langle AE_i, E_i \rangle_\tau.$$

Voltando para (2.4), obtemos

$$\vec{H}_\tau = \frac{H}{f(\tau)^2} \bar{N} - \frac{f'(\tau)}{f(\tau)} \xi_\tau.$$

Em particular, usando (2.2) temos que

$$\begin{aligned} \langle \vec{H}_\tau, \vec{H}_\tau \rangle &= \frac{H^2}{f(\tau)^4} \langle \bar{N}, \bar{N} \rangle - 2H \frac{f'(\tau)}{f(\tau)} \langle \bar{N}, \xi_\tau \rangle + \frac{f'(\tau)^2}{f(\tau)^2} \langle \xi_\tau, \xi_\tau \rangle \\ &= \frac{H^2}{f(\tau)^4} f(\tau)^2 - \frac{f'(\tau)^2}{f(\tau)^2} \\ &= \frac{H^2 - f'(\tau)^2}{f(\tau)^2}. \end{aligned}$$

Deste modo, como

$$\langle \vec{H}_\tau, \vec{H}_\tau \rangle = \frac{H^2 - f'(\tau)^2}{f(\tau)^2},$$

segue que ϕ_τ é uma subvariedade weakly trapped de $-I \times_f M^{n+1}$ se, e somente se,

$$H^2 \leq f'(\tau)^2.$$

Especificamente, ϕ_τ   marginally trapped se, e somente se,

$$H^2 = f'(\tau)^2,$$

isto é, se, e somente se, $\phi : \Sigma \longrightarrow M^{n+1}$   uma hipersuperfície de curvatura média

constante $H = \pm f'(\tau) \neq 0$. Alem disso,

$$\begin{aligned}\langle \vec{H}_\tau, \xi_\tau \rangle &= \frac{H}{f(\tau)^2} \langle \bar{N}, \xi_\tau \rangle - \frac{f'(\tau)}{f(\tau)} \langle \xi_\tau, \xi_\tau \rangle \\ &= \frac{f'(\tau)}{f(\tau)}.\end{aligned}$$

Portanto, quando causal, $\vec{H}_\tau$ aponta para o futuro se, e somente se, $f'(\tau) < 0$.

2.2 Completude estocástica e o princípio do máximo fraco

Para provar os próximos resultados, usaremos uma versão do princípio do máximo fraco de Omori-Yau. De acordo com a terminologia introduzida por Pigola et. al. em [20], dizemos que o princípio do máximo de Omori-Yau se aplica a uma variedade Riemanniana Σ se para cada função suave $u \in C^2(\Sigma)$ com $u^* = \sup_\Sigma u < +\infty$ existir uma seqncia de pontos $\{p_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ em Σ com as propriedades

$$(i) \ u(p_k) > u^* - \frac{1}{k}, \ (ii) \ |\nabla u(p_k)| < \frac{1}{k}, \ e \ (iii) \ \Delta u(p_k) < \frac{1}{k}.$$

Equivalentemente, para cada função suave $u \in C^2(\Sigma)$ com $u_* = \inf_\Sigma u > -\infty$ existir uma seqncia de pontos $\{p_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ em Σ com as propriedades

$$(i) \ u(p_k) < u_* + \frac{1}{k}, \ (ii) \ |\nabla u(p_k)| < \frac{1}{k}, \ e \ (iii) \ \Delta u(p_k) > -\frac{1}{k}.$$

Nesse sentido, o resultado clássico de Omori-Yau [16, 24] pode ser generalizado da seguinte forma (ver Exemplo 1.13, [20]).

Lema 2.1. Seja Σ uma variedade Riemanniana completa n-dimensional tal que

$$\text{Ric}(\nabla r, \nabla r) \geq -G(r),$$

para uma função radial $G \in C^1([0, +\infty])$ obedecendo as seguintes propriedades

$$G(0) > 0, \ G' \geq 0 \ e \ G^{-1/2} \in L^1[0, +\infty),$$

onde r  a função distância em Σ para um ponto fixo. Se $u \in C^2(\Sigma)$ com $\sup_\Sigma u < +\infty$ existe uma seqncia de pontos $\{p_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ em Σ satisfazendo

$$(i) \ \lim_{k \rightarrow \infty} u(p_k) = \sup_\Sigma u, \ (ii) \ \lim_{k \rightarrow \infty} |\nabla u(p_k)| = 0, \ e \ (iii) \ \lim_{k \rightarrow \infty} \Delta u(p_k) \leq 0.$$

Definição 2.2. Dizemos que o princípio do máximo fraco é válido em uma subvariedade Riemanniana (não necessariamente completa) Σ^n se, para qualquer função suave $u \in C^2(\Sigma)$ com $u^* = \sup_{\Sigma} u < +\infty$ existir uma sequência de pontos $\{p_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ em Σ satisfazendo

$$(i) \ u(p_k) > u^* - \frac{1}{k}, \text{ e } (ii) \ \Delta u(p_k) < \frac{1}{k}.$$

Equivalentemente, para qualquer função suave $u \in C^2(\Sigma)$ com $u_* = \inf_{\Sigma} u > -\infty$ existir uma sequência de pontos $\{p_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ em Σ satisfazendo

$$(i) \ u(p_k) < u_* + \frac{1}{k}, \text{ e } (ii) \ \Delta u(p_k) > -\frac{1}{k}.$$

Definição 2.3. Uma variedade Riemanniana (não necessariamente completa)   dita estocasticamente completa se seu movimento Browniano   estocasticamente completo, isto é, a probabilidade de uma partícula ser encontrada no state space   constante igual a 1. Em outras palavras,

$$\int_{\Sigma} p(x, y, t) dy = 1, \text{ para qualquer } (x, t) \in \Sigma \times (0, +\infty),$$

onde $p(x, y, t)$   o núcleo de calor do operador laplaciano.

Agora, apresentaremos um resultado provado por Pigola et al. em [19], tal resultado relaciona o princípio do máximo fraco com a completude estocástica.

Lema 2.2. Uma variedade Riemanniana   estocasticamente completa se, e somente se, o princípio do máximo fraco é válido nela.

2.3 Subvariedades weakly trapped em espaços-tempo GRW

Seja $\psi : \Sigma \longrightarrow -I \times_f M^{n+1}$ uma subvariedade tipo-espaço, de codimensão dois, imersa em $-I \times_f M^{n+1}$. A função altura de Σ denotada por h ,   a restrição da projeção $\pi_I(t, x) = t$ é Σ , isto é, $h : \Sigma \longrightarrow I$ é dada por $h = \pi_I|_{\Sigma} = \pi_I \circ \psi$. Lembrando que $\bar{\nabla} \pi_I = -\partial_t$, segue que o gradiente de h em Σ é dado por

$$\nabla h = (\bar{\nabla} \pi_I)^{\top} = -\partial_t^{\top}, \quad (2.5)$$

onde

$$\partial_t = \partial_t^{\top} + \partial_t^{\perp}.$$

Aqui $\partial_t^\top \in \mathfrak{X}(\Sigma)$ e $\partial_t^\perp \in \mathfrak{X}^\perp(\Sigma)$ denotam, respectivamente, as componentes tangente e normal de ∂_t .

Lema 2.3. Seja Σ uma subvariedade tipo-espaço imersa em $-I \times_f M^{n+1}$. Considere a função $u = g(h)$, onde $g : I \rightarrow \mathbb{R}$  uma primitiva arbitrária de f . Então,

$$\Delta u = -n(f'(h) - f(h)\langle \vec{H}, \partial_t \rangle).$$

Demonstração. Vamos considerar $u = g(h)$, onde $g : I \rightarrow \mathbb{R}$  uma primitiva arbitrária de f . Como $g' = f > 0$, então $u = g(h)$ pode ser reparametrizada pela função altura. Em particular, por (2.5), o gradiente de u em Σ é

$$\nabla u = g'(h)\nabla h = f(h)\nabla h = -f(h)\partial_t^\top = -K^\top,$$

onde $K^\top$ denota a componente tangente do campo de vetores conforme e fechado K definido em (1.10). Escrevamos

$$K = K^\top + K^\perp.$$

Usando as fórmulas de Gauss e de Weingarten, obtemos

$$\bar{\nabla}_X K = \bar{\nabla}_X K^\top + \bar{\nabla}_X K^\perp = \nabla_X K^\top - II(X, K^\top) + A_{K^\perp} X + \nabla_X^\perp K^\perp$$

para cada $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$. Portanto,

$$(\bar{\nabla}_X K)^\top = \nabla_X K^\top + A_{K^\perp} X$$

e,

$$(\bar{\nabla}_X K)^\perp = -II(X, K^\top) + \nabla_X^\perp K^\perp.$$

Por outro lado, de (1.11) temos $\bar{\nabla}_X K = f'(h)X$, de modo que

$$(\bar{\nabla}_X K)^\top = f'(h)X \text{ e } (\bar{\nabla}_X K)^\perp = 0.$$

Então, segue que

$$\nabla_X K^\top = f'(h)X - A_{K^\perp} X.$$

Por fim, como $\nabla u = -K^\top$ conseguimos

$$\nabla_X \nabla u = \nabla_X (-K^\top) = -f'(h)X + A_{K^\perp} X. \quad (2.6)$$

Fixando uma base ortonormal $\{e_1, \dots, e_n\}$ em $T_q \Sigma$ e tomando o traço em (2.6), obtemos que o laplaciano de u é dado por

$$\begin{aligned}
 \Delta u &= \sum_{i=1}^n \langle \nabla e_i \nabla u, e_i \rangle \\
 &= \sum_{i=1}^n \langle -f'(h)e_i + A_{K^\perp} e_i, e_i \rangle \\
 &= \sum_{i=1}^n \langle -f'(h)e_i, e_i \rangle + \sum_{i=1}^n \langle A_{K^\perp} e_i, e_i \rangle \\
 &= -f'(h) \sum_{i=1}^n \langle e_i, e_i \rangle + \sum_{i=1}^n \langle II(e_i, e_i), K^\perp \rangle \\
 &= -nf'(h) + \langle n\vec{H}, K^\perp \rangle + \langle n\vec{H}, K^\top \rangle \\
 &= -nf'(h) + \langle n\vec{H}, K \rangle \\
 &= -nf'(h) + \langle n\vec{H}, f(h)\partial_t \rangle \\
 &= -n(f'(h) - f(h)\langle \vec{H}, \partial_t \rangle).
 \end{aligned}$$

□

2.3.1 Não existência de subvariedades weakly trapped

No que se segue, lembre que $\mathcal{H}(t) = -f'(t)/f(t)$. E, como consequência do Lema 2.3 temos os seguintes resultados para subvariedades fechadas.

Lema 2.4. Seja $-I \times_f M^{n+1}$ um espaço-tempo GRW, e seja $\psi : \Sigma^n \rightarrow -I \times_f M^{n+1}$ uma subvariedade tipo-espaço fechada imersa em $-I \times_f M^{n+1}$. Então o campo de vetores curvatura média de Σ satisfaz

$$\max_{\Sigma} \langle \vec{H}, \partial_t \rangle \geq -\mathcal{H}(h_*) = \frac{f'(h_*)}{f(h_*)}, \quad (2.7)$$

e

$$\min_{\Sigma} \langle \vec{H}, \partial_t \rangle \leq -\mathcal{H}(h^*) = \frac{f'(h^*)}{f(h^*)}, \quad (2.8)$$

onde $h_* = \min_{\Sigma} h$ e $h^* = \max_{\Sigma} h$.

Demonstrao. Seja Σ uma subvariedade tipo-espaço fechada de $-I \times_f M^{n+1}$, e considere a funo $u = g(h)$ como no Lema 2.3. Sendo Σ fechada, a funo u atinge seu mínimo e seu máximo em pontos de Σ , digamos em $p_{\min}$ e $p_{\max}$, respectivamente. Como

$g' = f > 0$, segue que a função g é estritamente crescente. Logo, no $p_{\min}$, temos que

$$u(p_{\min}) = u_* = \min_{\Sigma} u = g(h_*),$$

onde $h_* = h(p_{\min}) = \min_{\Sigma} h$. Usando a expressão para o laplaciano de u dada no Lema 2.3, segue que

$$\begin{aligned} \Delta u(p_{\min}) &= -n(f'(h_*) - f(h_*)\langle \vec{H}, \partial_t \rangle|_{p_{\min}}) \\ &= nf(h_*) \left(-\frac{f'(h_*)}{f(h_*)} + \langle \vec{H}, \partial_t \rangle|_{p_{\min}} \right) \geq 0. \end{aligned}$$

Logo,

$$\langle \vec{H}, \partial_t \rangle|_{p_{\min}} \geq \frac{f'(h_*)}{f(h_*)} = -\mathcal{H}(h_*).$$

Em particular, tomando o máximo na expressão acima, obtemos que

$$\max_{\Sigma} \langle \vec{H}, \partial_t \rangle \geq -\mathcal{H}(h_*) = \frac{f'(h_*)}{f(h_*)},$$

o que prova (2.7). Analogamente provamos (2.8), trabalhando agora no $p_{\max}$ e observando que $\Delta u(p_{\max}) \leq 0$. $\square$

Corolário 2.5. Seja $-I \times_f M^{n+1}$ um espaço-tempo GRW.

- (i) Se $\mathcal{H}(t) \geq 0$, então não existe subvariedade weakly past trapped fechada em $-I \times_f M^{n+1}$.
- (ii) Se $\mathcal{H}(t) \leq 0$, então não existe subvariedade weakly future trapped fechada em $-I \times_f M^{n+1}$.

Demonstração. Observe que para qualquer subvariedade weakly past trapped Σ em $-I \times_f M^{n+1}$ nós temos que $\langle \vec{H}, \partial_t \rangle > 0$ em Σ , em particular, tomando o mínimo, temos $\min_{\Sigma} \langle \vec{H}, \partial_t \rangle > 0$. Usando (2.8), segue que

$$\mathcal{H}(h^*) \leq -\min_{\Sigma} \langle \vec{H}, \partial_t \rangle < 0.$$

Analogamente, para qualquer subvariedade weakly future trapped Σ em $-I \times_f M^{n+1}$ nós temos que $\langle \vec{H}, \partial_t \rangle < 0$ em Σ , em particular, tomando o máximo, temos $\max_{\Sigma} \langle \vec{H}, \partial_t \rangle < 0$. Usando (2.7), segue que

$$\mathcal{H}(h_*) \geq -\max_{\Sigma} \langle \vec{H}, \partial_t \rangle > 0.$$

$\square$

Em particular, segue do Corolário 2.5 que se $\mathcal{H}(t) = 0$, não existe subvariedade

weakly trapped fechada em $-I \times_f M^{n+1}$.

Definição 2.4. Dizemos que uma subvariedade é limitada no infinito passado pela altura $\tau_* \in I$ se

$$\psi(\Sigma) \subset \{(t, x) \in -I \times_f M^{n+1} : t \geq \tau_*\}.$$

De modo similar, dizemos que uma subvariedade é limitada no infinito futuro pela altura $\tau^* \in I$ se

$$\psi(\Sigma) \subset \{(t, x) \in -I \times_f M^{n+1} : t \leq \tau^*\}.$$

Quando a altura τ_* (ou τ^*) não for importante diremos apenas que Σ é limitada no infinito passado (ou no infinito futuro). Finalmente, dizemos que Σ é limitada no infinito se  limitada no infinito passado e no infinito futuro; isto é, se existirem $\tau_*, \tau^* \in I$, $\tau_* \leq \tau^*$, tal que $\psi(\Sigma)$ está contido no slab

$$\Omega(\tau_*, \tau^*) = \{(t, x) \in -I \times_f M^{n+1} : \tau_* \leq t \leq \tau^*\}.$$

Dizemos que um slab  uma região limitada tipo-tempo.

A partir dessa definição podemos apresentar o seguinte resultado, que estende o Lema 2.4 ao caso não compacto acrescentando  Σ a hipótese da completude estocástica.

Lema 2.6. Seja $-I \times_f M^{n+1}$ um espaço-tempo GRW, e seja $\psi : \Sigma^n \rightarrow -I \times_f M^{n+1}$ uma subvariedade tipo-espaço estocasticamente completa imersa em $-I \times_f M^{n+1}$.

(i) Assuma que Σ é limitada no infinito passado. Então o campo de vetores curvatura média de Σ satisfaz

$$\sup_{\Sigma} \langle \vec{H}, \partial_t \rangle \geq -\mathcal{H}(h_*) = \frac{f'(h_*)}{f(h_*)},$$

onde $h_* = \inf_{\Sigma} h \in I$.

(ii) Assuma que Σ é limitada no infinito futuro. Então o campo de vetores curvatura média de Σ satisfaz

$$\inf_{\Sigma} \langle \vec{H}, \partial_t \rangle \leq -\mathcal{H}(h^*) = \frac{f'(h^*)}{f(h^*)},$$

onde $h^* = \sup_{\Sigma} h \in I$.

Demonstração. (i) Como Σ é limitada no infinito passado, temos que existe $\tau_* \in I$ tal que

$$\psi(\Sigma) \subset \{(t, x) \in -I \times_f M^{n+1} : t \geq \tau_*\},$$

em particular, $h_* = \inf_{\Sigma} h \geq \tau_*$. Como Σ  estocasticamente completa, segue do Lema 2.2 que vale o princípio do máximo fraco em Σ , então aplicando-o na função $u = g(h)$,

a qual satisfaz $u_* = \inf_{\Sigma} u = g(h_*) > -\infty$ temos que existe uma sequência de pontos $\{p_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ em Σ satisfazendo

$$u(p_k) < u_k + \frac{1}{k} \text{ e } \Delta u(p_k) > -\frac{1}{k}.$$

Observe que $\lim_{k \rightarrow \infty} h(p_k) = h_*$, pois g é estritamente crescente, uma vez que $g' = f > 0$. Usando o Lema 2.3, temos que

$$-\frac{1}{nk} < \frac{1}{n} \Delta u(p_k) = -f'(h(p_k)) + f(h(p_k)) \langle \vec{H}, \partial_t \rangle.$$

Portanto,

$$\langle \vec{H}, \partial_t \rangle > \frac{1}{f(h(p_k))} \left(f'(h(p_k)) - \frac{1}{nk} \right).$$

Em particular, tomando o supremo

$$\sup_{\Sigma} \langle \vec{H}, \partial_t \rangle > \frac{1}{f(h(p_k))} \left(f'(h(p_k)) - \frac{1}{nk} \right).$$

Por fim, fazendo $k \rightarrow \infty$, obtemos

$$\sup_{\Sigma} \langle \vec{H}, \partial_t \rangle > \frac{f'(h_*)}{f(h_*)} = -\mathcal{H}(h_*),$$

uma vez que $f(h(p_k)) \rightarrow f(h_*)$ e $f'(h(p_k)) \rightarrow f'(h_*)$. Analogamente provamos o item (ii). $\square$

Corolário 2.7. Seja $-I \times_f M^{n+1}$ um espaço-tempo GRW.

- (i) Seja $\tau^* \in I$ e assuma que $\mathcal{H}(t) > 0$ para $t \leq \tau^*$. Então não existe subvariedade weakly past trapped estocaticamente completa limitada no infinito futuro pela altura τ^* .
- (ii) Seja $\tau_* \in I$ e assuma que $\mathcal{H}(t) < 0$ para $t \geq \tau_*$. Então não existe subvariedade weakly future trapped estocaticamente completa limitada no infinito passado pela altura τ_* .

Demonstração. (i) Para qualquer subvariedade weakly past trapped Σ em $-I \times_f M^{n+1}$ temos $\langle \vec{H}, \partial_t \rangle > 0$ em Σ , em particular, $\inf_{\Sigma} \langle \vec{H}, \partial_t \rangle \geq 0$. Daí, pelo item (ii) do Lema 2.6, devemos ter

$$\mathcal{H}(h^*) \leq -\inf_{\Sigma} \langle \vec{H}, \partial_t \rangle \leq 0.$$

Logo, assumindo que $\mathcal{H}(t) > 0$, não existe subvariedade weakly past trapped estocaticamente completa limitada no infinito futuro pela altura τ^* . Analogamente provamos o item (ii), usando que $\langle \vec{H}, \partial_t \rangle < 0$ e o item (i) do Lema 2.6. $\square$

2.3.2 Rigidez de subvariedades marginally trapped

Nesta subseção, apresentaremos algumas condições de rigidez para subvariedades marginally trapped a partir da hipótese de que $\mathcal{H}'(t) \geq 0$.

Nesse sentido, nosso primeiro resultado  válido para subvariedades marginally trapped fechadas, e ele é dado da seguinte maneira.

Teorema 2.8. *Seja $-I \times_f M^{n+1}$ um espaço-tempo GRW tal que $\mathcal{H}'(t) \geq 0$ (equivalentemente, $(\log f)'' \leq 0$). Seja $\psi : \Sigma^n \longrightarrow -I \times_f M^{n+1}$ uma subvariedade marginally future trapped fechada imersa em $-I \times_f M^{n+1}$. Então*

$$\min_{\Sigma} \|\vec{H}_0\| \leq \mathcal{H}(h_*) \leq \mathcal{H}(h^*) \leq \max_{\Sigma} \|\vec{H}_0\|,$$

onde $h_* = \min_{\Sigma} h$, $h^* = \max_{\Sigma} h$, e $\vec{H}_0$ representa a componente tipo-espaço do vetor tipo-luz $\vec{H}$, a qual é ortogonal a ∂_t . Como consequência, se $\|\vec{H}_0\|$  constante, então $\psi(\Sigma)$ está contido em um slice $\{\tau\} \times M$ com $f'(\tau) < 0$, e $\Sigma = \{\tau\} \times \Sigma_0$, onde $\Sigma_0 \subset M$  uma hipersuperfície fechada de curvatura média constante $|H| = -f'(\tau) > 0$.

Demonstração. Inicialmente, note que o vetor curvatura média $\vec{H}$ de Σ  decomposto por

$$\vec{H} = \vec{H}_0 - \langle \vec{H}, \partial_t \rangle \partial_t.$$

Assim, $\langle \vec{H}, \vec{H} \rangle = \|\vec{H}_0\|^2 - \langle \vec{H}, \partial_t \rangle^2$. Sendo Σ marginally future trapped, temos que $\langle \vec{H}, \vec{H} \rangle = 0$ e $\langle \vec{H}, \partial_t \rangle = -\|\vec{H}_0\| < 0$. Usando o Lema 2.4,

$$\max_{\Sigma} \|\vec{H}_0\| = -\min_{\Sigma} \langle \vec{H}, \partial_t \rangle \geq \mathcal{H}(h^*)$$

e,

$$\min_{\Sigma} \|\vec{H}_0\| = -\max_{\Sigma} \langle \vec{H}, \partial_t \rangle \leq \mathcal{H}(h_*)$$

Como $\mathcal{H}'(t) \geq 0$, $\mathcal{H}(t)$  não-decrescente. Logo, $\mathcal{H}(h_*) \leq \mathcal{H}(h^*)$, e assim,

$$\min_{\Sigma} \|\vec{H}_0\| \leq \mathcal{H}(h_*) \leq \mathcal{H}(h^*) \leq \max_{\Sigma} \|\vec{H}_0\|.$$

Agora, se $\|\vec{H}_0\|$  constante, então $\|\vec{H}_0\| = \mathcal{H}(h_*) = \mathcal{H}(h^*)$. E como, $\mathcal{H}(t)$  não-decrescente, temos que $\mathcal{H}(t) = \|\vec{H}_0\| = -\langle \vec{H}, \partial_t \rangle$ em $[h_*, h^*]$. Logo, em Σ ,

$$f'(h) - f(h) \langle \vec{H}, \partial_t \rangle = 0.$$

Deste modo, usando a expressão para o laplaciano de u dada no Lema 2.3, segue que $\Delta u = 0$ em Σ . Ou seja, u é uma função harmnica em Σ , que é uma subvariedade

fechada, logo $u = g(h)$   constante em Σ , e como g   crescente, uma vez que $g' = f > 0$, segue que h   constante em Σ , isto é, $\psi(\Sigma)$ é contido em um slice $\{\tau\} \times M$ para algum $\tau \in I$. Por fim, pelo que vimos na seção 2.1.1, como $\psi : \Sigma \longrightarrow -I \times_f M^{n+1}$   marginally future trapped temos que $f'(\tau) < 0$ e $\Sigma = \{\tau\} \times \Sigma_0$, onde $\Sigma_0 \subset M$   uma hipersuperfície fechada de curvatura média constante $|H| = -f'(\tau) > 0$. $\square$

Agora, apresentaremos um resultado análogo ao anterior, contudo sob a hipótese de que a subvariedade   marginally past trapped, ou seja, teremos $\langle \vec{H}, \partial_t \rangle = \|\vec{H}_0\| > 0$ em Σ .

Teorema 2.9. *Seja $-I \times_f M^{n+1}$ um espaço-tempo GRW tal que $\mathcal{H}'(t) \geq 0$ (equivalentemente, $(\log f)'' \leq 0$). Seja $\psi : \Sigma^n \longrightarrow -I \times_f M^{n+1}$ uma subvariedade marginally past trapped fechada imersa em $-I \times_f M^{n+1}$. Então*

$$\min_{\Sigma} \|\vec{H}_0\| \leq -\mathcal{H}(h^*) \leq -\mathcal{H}(h_*) \leq \max_{\Sigma} \|\vec{H}_0\|,$$

onde $h_* = \min_{\Sigma} h$, $h^* = \max_{\Sigma} h$, e $\vec{H}_0$ representa a componente tipo-espaço do vetor tipo-luz $\vec{H}$, a qual é ortogonal a ∂_t . Como consequência, se $\|\vec{H}_0\|$   constante, então $\psi(\Sigma)$ é contido em um slice $\{\tau\} \times M$ com $f'(\tau) < 0$, e $\Sigma = \{\tau\} \times \Sigma_0$, onde $\Sigma_0 \subset M$   uma hipersuperfície fechada de curvatura média constante $|H| = f'(\tau) > 0$.

Como consequência dos Teoremas 2.8 e 2.9, temos o seguinte resultado.

Corolário 2.10. *Seja $-I \times_f M^{n+1}$ um espaço-tempo GRW tal que $\mathcal{H}(t) \neq 0$ e $\mathcal{H}'(t) \geq 0$ (equivalentemente, $(\log f)'' \leq 0$), e seja $\psi : \Sigma^n \longrightarrow -I \times_f M^{n+1}$ uma subvariedade marginally trapped fechada imersa em $-I \times_f M^{n+1}$.*

(i) Se $\mathcal{H}(t) \geq 0$, então Σ é necessariamente marginally future trapped e

$$\min_{\Sigma} \|\vec{H}_0\| \leq \mathcal{H}(h_*) \leq \mathcal{H}(h^*) \leq \max_{\Sigma} \|\vec{H}_0\|.$$

(ii) Se $\mathcal{H}(t) \leq 0$, então Σ é necessariamente marginally past trapped e

$$\min_{\Sigma} \|\vec{H}_0\| \leq -\mathcal{H}(h^*) \leq -\mathcal{H}(h_*) \leq \max_{\Sigma} \|\vec{H}_0\|.$$

Como consequência, se $\|\vec{H}_0\|$   constante então $\psi(\Sigma)$ é contido em um slice $\{\tau\} \times M$ com $\mathcal{H}(t) \neq 0$, e $\Sigma = \{\tau\} \times \Sigma_0$, onde $\Sigma_0 \subset M$   uma hipersuperfície fechada de curvatura média constante $|H| = |f'(\tau)| > 0$.

Demonstração. Se $\mathcal{H}(t) \geq 0$, segue do Corolário 2.5 que não existe subvariedade marginally past trapped, logo Σ deve ser necessariamente marginally future trapped. E do

Teorema 2.8

$$\min_{\Sigma} \|\vec{H}_0\| \leq \mathcal{H}(h_*) \leq \mathcal{H}(h^*) \leq \max_{\Sigma} \|\vec{H}_0\|.$$

O que prova o item (i). A prova do item (ii)   análoga, basta usar o Teorema 2.9. A consequência segue diretamente dos Teoremas 2.8 e 2.9. $\square$

Agora, estenderemos os resultados já apresentados ao caso em que Σ é estocasticamente completa. O próximo resultado nada mais   do que a extensão do Teorema 2.8.

Teorema 2.11. *Seja $-I \times_f M^{n+1}$ um espaço-tempo GRW tal que $\mathcal{H}'(t) \geq 0$ (equivalentemente, $(\log f)'' \leq 0$). Seja $\psi : \Sigma^n \rightarrow -I \times_f M^{n+1}$ uma subvariedade marginally future trapped estocasticamente completa a qual é limitada no infinito. Então*

$$\inf_{\Sigma} \|\vec{H}_0\| \leq \mathcal{H}(h_*) \leq \mathcal{H}(h^*) \leq \sup_{\Sigma} \|\vec{H}_0\|,$$

onde $h_* = \inf_{\Sigma} h$, $h^* = \sup_{\Sigma} h$, e $\vec{H}_0$ representa a componente tipo-espaço do vetor tipo-luz $\vec{H}$, a qual é ortogonal a ∂_t . Como consequência, se $\|\vec{H}_0\|$   constante e $\mathcal{H}(t)$ não é localmente constante (em outras palavras $\mathcal{H}'(t) = 0$ vale somente para pontos isolados de I), então $\psi(\Sigma)$ está contido em um slice $\{\tau\} \times M$ com $\mathcal{H}(t) > 0$ e $\Sigma = \{\tau\} \times \Sigma_0$, onde $\Sigma_0 \subset M$   uma hipersuperfície de curvatura média constante $|H| = -f'(\tau) > 0$.

Demonstração. O vetor curvatura média $\vec{H}$ de Σ   decomposto por

$$\vec{H} = \vec{H}_0 - \langle \vec{H}, \partial_t \rangle \partial_t.$$

Assim, $\langle \vec{H}, \vec{H} \rangle = \|\vec{H}_0\|^2 - \langle \vec{H}, \partial_t \rangle^2$. Sendo Σ marginally future trapped, temos que $\langle \vec{H}, \vec{H} \rangle = 0$ e $\langle \vec{H}, \partial_t \rangle = -\|\vec{H}_0\| < 0$. Usando o Lema 2.6,

$$\sup_{\Sigma} \|\vec{H}_0\| = -\inf_{\Sigma} \langle \vec{H}, \partial_t \rangle \geq \mathcal{H}(h^*)$$

e,

$$\inf_{\Sigma} \|\vec{H}_0\| = -\sup_{\Sigma} \langle \vec{H}, \partial_t \rangle \leq \mathcal{H}(h_*)$$

Como $\mathcal{H}'(t) \geq 0$, $\mathcal{H}(t)$   não-decrescente, logo, $\mathcal{H}(h_*) \leq \mathcal{H}(h^*)$, assim,

$$\inf_{\Sigma} \|\vec{H}_0\| \leq \mathcal{H}(h_*) \leq \mathcal{H}(h^*) \leq \sup_{\Sigma} \|\vec{H}_0\|.$$

Se $\|\vec{H}_0\|$   constante, então $\|\vec{H}_0\| = \mathcal{H}(h_*) = \mathcal{H}(h^*)$, e se $\mathcal{H}(t)$ não é localmente constante, então $\mathcal{H}(t)$ é estritamente crescente, ou seja, $h_* = h^*$, e assim, h ,   constante em Σ . Portanto, $\psi(\Sigma)$ está contida em um slice $\{\tau\} \times M$, e pelo que foi visto na seção

2.1.1, como $\psi : \Sigma \longrightarrow -I \times_f M^{n+1}$   marginally future trapped temos

$$\mathcal{H}(\tau) > 0 \text{ e } |H| = -f'(\tau) > 0.$$

□

Analogamente, obtemos a extensão do Teorema 2.9 ao caso em que Σ é estocasticamente completa.

Teorema 2.12. *Seja $-I \times_f M^{n+1}$ um espaço-tempo GRW tal que $\mathcal{H}'(t) \geq 0$ (equivalentemente, $(\log f)'' \leq 0$). Seja $\psi : \Sigma^n \longrightarrow -I \times_f M^{n+1}$ uma subvariedade marginally past trapped estocasticamente completa a qual é limitada no infinito. Então*

$$\inf_{\Sigma} \|\vec{H}_0\| \leq -\mathcal{H}(h^*) \leq -\mathcal{H}(h_*) \leq \sup_{\Sigma} \|\vec{H}_0\|,$$

onde $h_* = \inf_{\Sigma} h$, $h^* = \sup_{\Sigma} h$, e $\vec{H}_0$ representa a componente tipo-espaço do vetor tipo-luz $\vec{H}$, a qual é ortogonal a ∂_t . Como consequência, se $\|\vec{H}_0\|$   constante e $\mathcal{H}(t)$ não é localmente constante (em outras palavras $\mathcal{H}'(t) = 0$ vale somente para pontos isolados de I), então $\psi(\Sigma)$ está contido em um slice $\{\tau\} \times M$ com $\mathcal{H}(t) < 0$ e $\Sigma = \{\tau\} \times \Sigma_0$, onde $\Sigma_0 \subset M$   uma hipersuperfície de curvatura média constante $|H| = f'(\tau) > 0$.

Consequentemente, conseguimos a seguinte extensão do Corolário 2.10 ao caso estocasticamente completo.

Corolário 2.13. *Seja $-I \times_f M^{n+1}$ um espaço-tempo GRW tal que $\mathcal{H}(t) \neq 0$ e $\mathcal{H}'(t) \geq 0$ (equivalentemente, $(\log f)'' \leq 0$), e seja $\psi : \Sigma^n \longrightarrow -I \times_f M^{n+1}$ uma subvariedade marginally trapped estocasticamente completa a qual é limitada no infinito.*

(i) Se $\mathcal{H}(t) > 0$, então Σ é necessariamente marginally future trapped e

$$\inf_{\Sigma} \|\vec{H}_0\| \leq \mathcal{H}(h_*) \leq \mathcal{H}(h^*) \leq \sup_{\Sigma} \|\vec{H}_0\|.$$

(ii) Se $\mathcal{H}(t) < 0$, então Σ é necessariamente marginally past trapped e

$$\inf_{\Sigma} \|\vec{H}_0\| \leq -\mathcal{H}(h^*) \leq -\mathcal{H}(h_*) \leq \sup_{\Sigma} \|\vec{H}_0\|.$$

Como consequência, se $\|\vec{H}_0\|$   constante e $\mathcal{H}(t)$ não é localmente constante (em outras palavras $\mathcal{H}'(t) = 0$ vale somente para pontos isolados de I), então $\psi(\Sigma)$ está contido em um slice $\{\tau\} \times M$ e $\Sigma = \{\tau\} \times \Sigma_0$, onde $\Sigma_0 \subset M$   uma hipersuperfície de curvatura média constante $|H| = |f'(\tau)| > 0$.

Demonstração. (i) Se $\mathcal{H}(t) > 0$, segue do Corolário 2.7 que não existe subvariedade marginally past trapped, logo Σ deve ser necessariamente marginally future trapped. E pelo Teorema 2.11

$$\inf_{\Sigma} \|\vec{H}_0\| \leq \mathcal{H}(h_*) \leq \mathcal{H}(h^*) \leq \sup_{\Sigma} \|\vec{H}_0\|.$$

(ii) A prova deste item é análoga a do item (i), basta usar o Teorema 2.12. A consequência segue diretamente dos Teoremas 2.11 e 2.12. $\square$

2.4 Aplicações

Nesta seção obteremos algumas aplicações para alguns casos de relevância física, como, por exemplo, o espaço-tempo de Einstein-de Sitter e certas regiões abertas do espaço de Sitter. Mas antes, enunciaremos dois importantes resultados que serão necessários para essas aplicações, são eles o Teorema de Hopf-Chern [9, 12] e o Teorema de Alexandrov [21].

Teorema 2.14 (Teorema de Hopf-Chern). *Seja Σ uma 2-esfera imersa em M com curvatura média constante, onde M é uma variedade tridimensional de curvatura constante. Então Σ é totalmente umbílica, e portanto, isométrica a uma esfera redonda.*

Teorema 2.15 (Teorema de Alexandrov). *Seja Σ^n uma hipersuperfície compacta mergulhada no espaço Euclidiano $\mathbb{R}^{n+1}$, ou no espaço hiperbólico $\mathbb{H}^{n+1}$, ou num hemisfério aberto da esfera $\mathbb{S}^{n+1}$. Se H_r é constante para algum $r = 1, \dots, n$ então Σ^n é uma hipersfera geodésica.*

No Teorema acima, H_r é a r -ésima curvatura de Σ , em particular, quando $r = 1$, temos que H_r é exatamente a curvatura média H de Σ .

Consideremos agora a fibra Riemanniana como sendo o espaço Euclidiano $\mathbb{R}^{n+1}$. Quando $n = 2$, temos o seguinte resultado para a 2-esfera topológica imersa em $-I \times_f \mathbb{R}^3$.

Teorema 2.16. *Seja $-I \times_f \mathbb{R}^3$ um espaço-tempo RW cuja fibra é o espaço Euclidiano $\mathbb{R}^3$ e tal que $\mathcal{H}'(t) \geq 0$ (equivalentemente, $(\log f)'' \leq 0$). As únicas 2-esferas topológicas marginally trapped as quais estão imersas em $-I \times_f \mathbb{R}^3$ com $\|\vec{H}_0\|$ constante são as esferas mergulhadas dadas por $\{\tau\} \times \mathbb{S}^2(r_\tau)$, com $r_\tau = \frac{1}{|f'(\tau)|}$ para todo $\tau \in I$ com $f'(\tau) \neq 0$.*

Demonstração. Seja Σ uma 2-esfera topológica marginally trapped a qual está imersa em $-I \times_f \mathbb{R}^3$ com $\|\vec{H}_0\|$ constante. Segue dos Teoremas 2.8 e 2.9 que $\Sigma = \{\tau\} \times \Sigma_0$

onde $f'(\tau) \neq 0$ e Σ_0 é uma 2-esfera topológica imersa em $\mathbb{R}^3$ com curvatura média constante $H^2 = f'(\tau)^2 > 0$. O Teorema de Hopf-Chern nos diz que as únicas 2-esfera topológicas imersas em $\mathbb{R}^3$ são as esferas redondas $\mathbb{S}^2(r)$, com raio $r > 0$ e $H^2 = \frac{1}{r^2} > 0$. Logo, $\Sigma_0 = \mathbb{S}^2(r_\tau)$ com $r_\tau = \frac{1}{|f'(\tau)|}$. $\square$

O Teorema acima inclui alguns casos de muita relevância física. Considere, por exemplo, o caso em que $I = \mathbb{R}$ e $f(t) = e^t$, então $-\mathbb{R} \times_{e^t} \mathbb{R}^3$ nada mais é do que o steady state 4-spacetime. Mais geralmente, o exemplo 1.5 nós diz que o produto warped Lorentziano $-\mathbb{R} \times_{e^t} \mathbb{R}^{n+1}$ é isométrico a região aberta de $\mathbb{S}_1^{n+2}$ dada por

$$\{x \in \mathbb{S}_1^{n+2} : \langle x, a \rangle > 0\},$$

onde $a \in \mathbb{R}_1^{n+3}$ é um vetor tipo-luz. Em particular, para $n = 2$, $-\mathbb{R} \times_{e^t} \mathbb{R}^3$ modela o steady state 4-spacetime, e o Teorema 2.16 nos fornece o seguinte resultado.

Corolário 2.17. Seja $-\mathbb{R} \times_{e^t} \mathbb{R}^3$ o steady state 4-spacetime. As únicas 2-esferas topológicas marginally trapped as quais estão imersas no steady state 4-spacetime com $\|\vec{H}_0\|$ contante são as esferas mergulhadas (necessariamente marginally past trapped) dadas por $\{\tau\} \times \mathbb{S}^2(r_\tau)$, para todo $\tau \in \mathbb{R}$, onde $r_\tau = e^{-\tau}$.

O resultado acima segue diretamente do Teorema 2.16. Agora, observe que as esferas serão necessariamente marginally past trapped, pois, nesse caso, $\mathcal{H}(t) < 0$ para cada $t \in \mathbb{R}$, portanto, pelo Corolário 2.5 sabemos que não existe subvariedade weakly future trapped fechada em tais espaços ambientes.

Se considerarmos agora o caso em que $I = (0, +\infty)$ e $f(t) = t^{2/3}$, então $-(0, +\infty) \times_{t^{2/3}} \mathbb{R}^3$ é o chamado espaço-tempo de Einstein-de Sitter e é correspondido ao modelo cosmológico de Friedmann com fibra Riemanniana flat, e segue do Teorema 2.16 o seguinte.

Corolário 2.18. Seja $-(0, +\infty) \times_{t^{2/3}} \mathbb{R}^3$ o espaço-tempo de Einstein-Sitter. As únicas 2-esferas topológicas marginally trapped as quais estão imersas no espaço-tempo de Einstein-Sitter com $\|\vec{H}_0\|$ contante são as esferas mergulhadas (necessariamente marginally past trapped) dadas por $\{\tau\} \times \mathbb{S}^2(r_\tau)$, para todo $\tau > 0$, onde $r_\tau = \frac{3\tau^{1/3}}{2}$.

Baseado no Teorema de Alexandrov para o espaço Euclidiano, apresentaremos agora a seguinte versão n-dimensional para o Teorema 2.16.

Teorema 2.19. *Seja $-I \times_f \mathbb{R}^{n+1}$ um espaço-tempo RW cuja fibra é o espaço Euclidiano $\mathbb{R}^{n+1}$ e tal que $\mathcal{H}'(t) \geq 0$ (equivalentemente, $(\log f)'' \leq 0$). As únicas n-subvariedades marginally trapped fechadas mergulhadas em $-I \times_f \mathbb{R}^{n+1}$ com $\|\vec{H}_0\|$ constante são as n-esferas mergulhadas dadas por $\{\tau\} \times \mathbb{S}^2(r_\tau)$, com $r_\tau = \frac{1}{|f'(\tau)|}$ para todo $\tau \in I$ com $f'(\tau) \neq 0$.*

Demonstração. Seja Σ uma n -subvariedade marginally trapped fechada a qual está mergulhada em $-I \times_f \mathbb{R}^{n+1}$ com $\|\vec{H}_0\|$ constante. Segue dos Teoremas 2.8 e 2.9 que $\Sigma = \{\tau\} \times \Sigma_0$ onde $f'(\tau) \neq 0$ e Σ_0 é uma hipersuperfície fechada mergulhada em $\mathbb{R}^{n+1}$ com curvatura média constante $H^2 = f'(\tau)^2 > 0$. Como sabemos, o Teorema de Alexandrov afirma que as únicas hipersuperfícies mergulhadas em $\mathbb{R}^{n+1}$ com curvatura média constante são as esferas $\mathbb{S}^n(r)$ de raio $r > 0$, com $H^2 = \frac{1}{r^2} > 0$. Portanto, $\Sigma_0 = \mathbb{S}^n(r_\tau)$ com $r_\tau = \frac{1}{|f'(\tau)|}$. $\square$

Em particular, os Corolários 2.17 e 2.18 tem as seguintes versões n -dimensionais.

Corolário 2.20. Seja $-\mathbb{R} \times_{e^t} \mathbb{R}^{n+1}$ o steady state spacetime. As únicas n -subvariedades marginally trapped fechadas as quais estão mergulhadas no steady state spacetime com $\|\vec{H}_0\|$ contante são as n -esferas mergulhadas (necessariamente marginally past trapped) dadas por $\{\tau\} \times \mathbb{S}^n(r_\tau)$, para todo $\tau \in \mathbb{R}$, onde $r_\tau = e^{-\tau}$.

Corolário 2.21. Seja $-(0, +\infty) \times_{t^{2/3}} \mathbb{R}^{n+1}$ o espaço-tempo de Einstein-Sitter. As únicas n -subvariedades marginally trapped fechadas as quais estão mergulhadas no espaço-tempo de Einstein-Sitter com $\|\vec{H}_0\|$ contante são as n -esferas mergulhadas (necessariamente marginally past trapped) dadas por $\{\tau\} \times \mathbb{S}^n(r_\tau)$, para todo $\tau > 0$, onde $r_\tau = \frac{3\tau^{1/3}}{2}$.

Por outro lado, o Teorema de Hopf-Chern vale também para a 2-esfera topológica imersa na esfera tridimensional $\mathbb{S}^3$ e no espaço hiperbólico tridimensional $\mathbb{H}^3$, sendo assim, são válidos os seguintes resultados.

Teorema 2.22. *Seja $-I \times_f \mathbb{S}^3$ um espaço-tempo RW cuja fibra é a esfera tridimensional $\mathbb{S}^3$ e tal que $\mathcal{H}'(t) \geq 0$ (equivalentemente, $(\log f)'' \leq 0$). As únicas 2-esferas topológicas marginally trapped as quais estão imersas em $-I \times_f \mathbb{S}^3$ com $\|\vec{H}_0\|$ constante são as esferas mergulhadas dadas por $\{\tau\} \times \mathbb{S}^2(r_\tau)$, com $r_\tau = \frac{1}{\sqrt{1+f'(\tau)^2}}$ para todo $\tau \in I$ com $f'(\tau) \neq 0$.*

Teorema 2.23. *Seja $-I \times_f \mathbb{H}^3$ um espaço-tempo RW cuja fibra é o espaço hiperbólico tridimensional $\mathbb{H}^3$ e tal que $\mathcal{H}'(t) \geq 0$ (equivalentemente, $(\log f)'' \leq 0$). As únicas 2-esferas topológicas marginally trapped as quais estão imersas em $-I \times_f \mathbb{H}^3$ com $\|\vec{H}_0\|$ constante são as esferas mergulhadas dadas por $\{\tau\} \times \mathbb{S}^2(r_\tau)$, com $r_\tau = \frac{1}{\sqrt{f'(\tau)^2 - 1}}$ para todo $\tau \in I$ com $f'(\tau)^2 - 1 > 0$.*

A prova dos resultados acima é análoga a prova do Teorema 2.16, observando que pelo Teorema de Hopf-Chern as únicas 2-esferas topológicas imersas em $\mathbb{S}^3$ com curvatura média constante são as esferas $\mathbb{S}^2(r)$ com $0 < r < 1$, e $H^2 = (1 - r^2)/r^2$,

o que implica $r_\tau = 1/\sqrt{1 + f'(\tau)^2}$ no Teorema 2.22. E, para o caso do espaço hiperbólico tridimensional, o Teorema de Hopf-Chern diz que as únicas 2-esferas topológicas imersas em $\mathbb{H}^3$ com curvatura média constante são as esferas $\mathbb{S}^2(r)$ com $r > 0$, e $H^2 = (1 + r^2)/r^2 > 1$, o que implica $f'(\tau)^2 > 1$ e $r_\tau = 1/\sqrt{f'(\tau)^2 - 1}$ no Teorema 2.23.

Considerando agora o caso em que $I = (0, +\infty)$ e $f(t) = \sinh(t)$, temos que $-(0, +\infty) \times_{\sinh(t)} \mathbb{H}^3$ nada mais é do que a região aberta do espaço de Sitter 4-dimensional $\mathbb{S}_1^4$ dada por

$$\{x \in \mathbb{S}_1^4 : \langle x, a \rangle > 1\},$$

onde $a \in \mathbb{R}_1^5$ é um vetor tipo-espaço unitário. Mais geralmente, pelo que vimos no exemplo 1.6 existe uma isometria entre o produto warped Lorentziano $-(0, +\infty) \times_{\sinh(t)} \mathbb{H}^{n+1}$ e a região aberta de $\mathbb{S}_1^{n+2}$ dada por

$$\{x \in \mathbb{S}_1^{n+2} : \langle x, a \rangle > 1\}.$$

Em particular, para $n = 2$, $-(0, +\infty) \times_{\sinh(t)} \mathbb{H}^3$ modela a região aberta o espaço de Sitter 4-dimensional $\mathbb{S}_1^4$ dada por

$$\{x \in \mathbb{S}_1^4 : \langle x, a \rangle > 1\}.$$

Portanto, segue diretamente do Teorema 2.23 o seguinte resultado.

Corolário 2.24. Seja $-(0, +\infty) \times_{\sinh(t)} \mathbb{H}^3$ a região aberta do espaço de Sitter 4-dimensional definido por $\{x \in \mathbb{S}_1^4 : \langle x, a \rangle > 1\}$, onde $a \in \mathbb{R}_1^5$ é um vetor tipo-espaço unitário. As únicas 2-esferas topológicas marginally trapped as quais estão imersas nessa região com $\|\vec{H}_0\|$ contante são as esferas mergulhadas (necessariamente marginally past trapped) dadas por $\{\tau\} \times \mathbb{S}^2(r_\tau)$, para todo $\tau > 0$, onde $r_\tau = \frac{1}{\sinh(\tau)}$.

Por fim, consideremos agora as seguintes versões n-dimensionais para o Teorema 2.23 e o Corolário 2.24, que são baseadas no Teorema de Alexandrov para o espaço Hiperbólico.

Teorema 2.25. *Seja $-I \times_f \mathbb{H}^{n+1}$ um espaço-tempo RW cuja fibra é o espaço hiperbólico $(n+1)$ -dimensional $\mathbb{H}^{n+1}$ e tal que $\mathcal{H}'(t) \geq 0$ (equivalentemente, $(\log f)'' \leq 0$). As únicas n-subvariedades marginally trapped fechadas as quais estão mergulhadas em $-I \times_f \mathbb{H}^{n+1}$ com $\|\vec{H}_0\|$ constante são as n-esferas mergulhadas dadas por $\{\tau\} \times \mathbb{S}^n(r_\tau)$, com $r_\tau = \frac{1}{\sqrt{f'(\tau)^2 - 1}}$ para todo $\tau \in I$ com $f'(\tau)^2 - 1 > 0$.*

Corolário 2.26. Seja $-(0, +\infty) \times_{\sinh(t)} \mathbb{H}^{n+1}$ a região aberta do espaço de Sitter $(n+2)$ -dimensional definido por $\{x \in \mathbb{S}_1^{n+2} : \langle x, a \rangle > 1\}$, onde $a \in \mathbb{R}_1^{n+3}$ é um vetor tipo-espaço

unitário. As únicas n -subvariedades marginally trapped as quais estão mergulhadas nessa região com $||\vec{H}_0||$ constante são as n -esferas mergulhadas (necessariamente marginally past trapped) dadas por $\{\tau\} \times \mathbb{S}^n(r_\tau)$, para todo $\tau > 0$, onde $r_\tau = \frac{1}{\sinh(\tau)}$.

A prova do Teorema 2.25 é análoga a demonstração do Teorema 2.19, usando a versão do Teorema de Alexandrov correspondente que afirma que quando a fibra Riemanniana é o espaço hiperbólico as únicas hipersuperfícies mergulhadas em $\mathbb{H}^{n+1}$ fechadas e com curvatura média constante são as esferas $\mathbb{S}^n(r)$ de raio $r > 0$ e com $H^2 = (1 + r^2)/r^2 > 1$. E, por fim, o Corolário 2.26 segue diretamente do Teorema 2.25.

Capítulo 3

Subvariedades weakly trapped imersas em espaços-tempo Robertson-Walker generalizados

A partir de agora vamos considerar uma subvariedade weakly trapped, de codimensão dois, imersa em um espaço-tempo GRW. Iremos apresentar alguns resultados de rigidez que garantem, a partir de certas hipóteses, que a subvariedade está contida em um slice. Além disso, também vamos construir um exemplo não-trivial de uma subvariedade weakly trapped em um espaço-tempo GRW estático $-\mathbb{R} \times \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, ilustrando assim a importância dos resultados apresentados. Este capítulo é baseado no artigo de Cunha, Lima, Lima Jr. e Santos [11].

3.1 Algumas considerações sobre a função altura

Seja $-I \times_f M^{n+1}$ um espaço-tempo GRW. Considere Σ uma subvariedade tipo-espaço de codimensão dois imersa em $-I \times_f M^{n+1}$. Deste modo, temos que existe uma base ortonormal $\{N, \nu\}$ de $\mathfrak{X}^\perp(\Sigma)$, a qual é formada por um campo de vetores normal unitário N tipo-tempo apontando para o futuro (apontando para o passado), e um campo de vetores normal unitário tipo-espaço ν .

Se N apontar para o futuro (apontar para o passado), temos $\langle N, \partial_t \rangle \leq -1$ ($\langle N, \partial_t \rangle \geq 1$). De fato, como ∂_t é um campo de vetores unitários tipo-tempo globalmente definido em $-I \times_f M^{n+1}$, sendo N um campo de vetores normal unitário tipo-tempo, segue da desigualdade de Cauchy-Schwarz reversa que

$$|\langle N, \partial_t \rangle| \geq |N| |\partial_t| = 1,$$

e a igualdade ocorre se, e somente se, N e ∂_t forem linearmente dependentes. Então, sendo N um campo que aponta para o futuro (aponta para o passado) temos $\langle N, \partial_t \rangle \leq -1 < 0$ ($\langle N, \partial_t \rangle \geq 1 > 0$).

Lembremos agora que por (2.5)

$$\nabla h = -\partial_t^\top,$$

onde h denota a função altura em Σ . Então, nesse contexto, podemos escrever

$$\nabla h = -\partial_t + \partial_t^\perp = -\partial_t - \langle N, \partial_t \rangle N + \langle \nu, \partial_t \rangle \nu. \quad (3.1)$$

Assim, temos que

$$\begin{aligned} |\nabla h|^2 &= \langle \nabla h, \nabla h \rangle \\ &= \langle \partial_t, \partial_t \rangle + 2\langle N, \partial_t \rangle^2 - 2\langle \nu, \partial_t \rangle^2 + \langle N, \partial_t \rangle^2 \langle N, N \rangle - \langle N, \partial_t \rangle \langle \nu, \partial_t \rangle \langle N, \nu \rangle \\ &\quad + \langle \nu, \partial_t \rangle^2 \langle \nu, \nu \rangle \\ &= -1 + \langle N, \partial_t \rangle^2 - \langle \nu, \partial_t \rangle^2 \\ &= \langle N, \partial_t \rangle^2 - (1 + \langle \nu, \partial_t \rangle^2). \end{aligned}$$

Portanto,

$$|\nabla h|^2 = \langle N, \partial_t \rangle^2 - (1 + \langle \nu, \partial_t \rangle^2), \quad (3.2)$$

onde $|\cdot|$ denota a norma de um campo de vetores em Σ . Então, denotando $\theta_1 = \langle N, \partial_t \rangle$ e $\theta_2 = \langle \nu, \partial_t \rangle$ obtemos

$$|\nabla h|^2 = \theta_1^2 - (1 + \theta_2^2). \quad (3.3)$$

3.2 Resultados de rigidez em espaços-tempo GRW

Aqui estabeleceremos condições que irão garantir que a subvariedade tipo-espaço Σ esteja contida na fibra Riemanniana M^{n+1} . Com esse objetivo, observe inicialmente que o campo de vetores curvatura média $\vec{H}$ de Σ , que é definido por $\vec{H} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n II(e_i, e_i)$, para algum referencial ortonormal $\{e_1, \dots, e_n\}$ em Σ , onde II denota a segunda forma fundamental de Σ , pode ser expresso da seguinte maneira

$$\vec{H} = -H_N N + H_\nu \nu, \quad (3.4)$$

para funções suaves H_N e H_ν definidas em Σ .

3.2.1 Rigidez via condições de integrabilidade

Lema 3.1. Seja Σ uma subvariedade tipo-espaço imersa em $-I \times_f M^{n+1}$. Então

$$\Delta h = -(\log f)'(h)[n + |\nabla h|^2] + n\langle \vec{H}, \partial_t \rangle.$$

Demonstração. Inicialmente, lembre que de (1.11) o campo de vetores $(f \circ \pi_I)\partial_t$ é metricamente equivalente a sua 1-forma fechada, ou seja,

$$\bar{\nabla}_X(f \circ \pi_I)\partial_t = (f' \circ \pi_I)X \quad (3.5)$$

para todo $X \in T(I \times_f M^{n+1})$. Desse modo, tomando um referencial ortonormal $\{e_i\}_{i=1}^n$ em Σ , e usando (3.5), obtemos que

$$\begin{aligned} f(h)\operatorname{div}\partial_t &= f(h) \sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{e_i}\partial_t, e_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \langle f(h)\bar{\nabla}_{e_i}\partial_t, e_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{e_i}f(h)\partial_t, e_i \rangle - \sum_{i=1}^n \langle e_i(f(h))\partial_t, e_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{e_i}(f \circ \pi_I)\partial_t, e_i \rangle - \sum_{i=1}^n \langle \partial_t, e_i(f(h))e_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \langle f' \circ \pi_I e_i, e_i \rangle - \langle \partial_t, \nabla f(h) \rangle \\ &= nf'(h) + \langle \partial_t, -f'(h)\nabla h \rangle \\ &= f'(h)[n - \langle \partial_t, \nabla h \rangle] \\ &= f'(h)[n + \langle \nabla h, -(\partial_t^\top + \partial_t^\perp) \rangle] \\ &= f'(h)[n + \langle \nabla h, \nabla h \rangle] \\ &= f'(h)[n + |\nabla h|^2]. \end{aligned}$$

Portanto,

$$f(h)\operatorname{div}\partial_t = f'(h)[n + |\nabla h|^2]. \quad (3.6)$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
 \operatorname{div} N &= \sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{e_i} N, e_i \rangle \\
 &= \sum_{i=1}^n \langle A_N e_i, e_i \rangle \\
 &= \sum_{i=1}^n \langle II(e_i, e_i), N \rangle \\
 &= n \langle \vec{H}, N \rangle = n H_N,
 \end{aligned}$$

ou seja,

$$\operatorname{div} N = n H_N, \quad (3.7)$$

e, analogamente, temos

$$\operatorname{div} \nu = n H_\nu. \quad (3.8)$$

Assim, usando (3.6), (3.7) e (3.8), obtemos que

$$\begin{aligned}
 \Delta h &= \operatorname{div}(-\partial_t - \theta_1 N + \theta_2 \nu) \\
 &= -\frac{f'(h)}{f(h)}[n + |\nabla h|^2] - \theta_1(n H_N) + \theta_2(n H_\nu) \\
 &= -(\log f)'(h)[n + |\nabla h|^2] - n \langle N, \partial_t \rangle H_N + n \langle \nu, \partial_t \rangle H_\nu \\
 &= -(\log f)'(h)[n + |\nabla h|^2] + n \langle \vec{H}, \partial_t \rangle.
 \end{aligned}$$

□

Agora, devido a Caminha [6], o próximo Lema nos dá condições para garantir que o divergente de um campo de vetores em uma variedade Riemanniana seja nulo, e como consequência, obtemos um Corolário que apresenta um resultado semelhante para o laplaciano de uma função suave definida em uma variedade Riemanniana. No que se segue, $\mathcal{L}^1(M)$ denota o espaço das funções Lebesgue integráveis em Σ^n .

Lema 3.2. Seja X um campo de vetores suave na variedade Riemanniana Σ^n n -dimensional completa e orientável, tal que $\operatorname{div} X$ não muda de sinal em Σ^n . Se $|X| \in \mathcal{L}^1(M)$, então $\operatorname{div} X = 0$.

Corolário 3.3. Seja u uma função suave definida em uma variedade Riemanniana completa Σ , tal que Δu não muda de sinal em Σ . Se $|\nabla u| \in \mathcal{L}^1(\Sigma)$, então Δu é identicamente nulo em Σ .

Lembrando que uma região limitada tipo-tempo de $-I \times_f M^{n+1}$ nada mais é que um slab

$$[t_1 \times t_2] \times M^{n+1} = \{(t, q) \in -I \times_f M^{n+1} : t_1 \leq t \leq t_2\}.$$

E com auxílio do Corolário apresentado acima, estamos prontos para apresentar o próximo resultado.

Teorema 3.4. *Seja Σ uma subvariedade tipo-espaço completa que mora em uma região limitada tipo-tempo de $-I \times_f M^{n+1}$ e tal que f é monótona não-crescente (não-decrescente). Se $\langle \vec{H}, \partial_t \rangle$ é não-negativa (não-positiva) em Σ e $|\nabla h| \in \mathcal{L}^1(\Sigma)$, então Σ está contida em um slice $\{t\} \times M^{n+1}$ com $f'(t) = 0$.*

Demonstração. Sendo f monótona não-crescente (não-decrescente) temos que $f' \leq 0$ ($f' \geq 0$), e sendo $\langle \vec{H}, \partial_t \rangle \geq 0$ ($\langle \vec{H}, \partial_t \rangle \leq 0$) em Σ , temos pelo Lema 3.1 que

$$\Delta h = -\frac{f'(h)}{f(h)}[n + |\nabla h|^2] + n\langle \vec{H}, \partial_t \rangle \geq 0 \quad (\leq 0),$$

ou seja, Δh não muda de sinal em Σ . Como, por hipótese, $|\nabla h| \in \mathcal{L}^1(\Sigma)$, segue do Corolário 3.3 que $\Delta h = 0$ em Σ .

Por outro lado, como estamos supondo que Σ mora em uma região limitada tipo-tempo de $-I \times_f M^{n+1}$ temos que $|\nabla h^2| \in \mathcal{L}^1(\Sigma)$. E, como

$$\Delta h^2 = 2h\Delta h + 2|\nabla h|^2 = 2|\nabla h|^2 \geq 0,$$

podemos, então, aplicar o Corolário 3.3 para a função h^2 e, segue que $\Delta h^2 = 0$ em Σ , logo, $|\nabla h| = 0$ em Σ . Portanto, h é constante em Σ , o que significa que Σ está contida em um slice $\{t\} \times M^{n+1}$. Além disso, pelo Lema 3.1, concluímos que $f'(h) = 0$. $\square$

Observe que quando Σ é uma subvariedade weakly future (past) trapped a hipótese de que a função $\langle \vec{H}, \partial_t \rangle$ é não-positiva (não-negativa) é satisfeita automaticamente, desse modo, segue do Teorema 3.4 o seguinte resultado.

Corolário 3.5. Não existe subvariedade weakly future (past) trapped Σ que more em uma região limitada tipo-tempo de $-I \times_f M^{n+1}$, com f sendo monótona não-decrescente (não-crescente), e tal que $|\nabla h| \in \mathcal{L}^1(\Sigma)$.

Demonstração. Suponha que exista uma subvariedade weakly future trapped de Σ contida em uma região limitada tipo-tempo de $-I \times_f M^{n+1}$, com f sendo monótona não-decrescente e $|\nabla h| \in \mathcal{L}^1(\Sigma)$. Pelo Teorema 3.4, essa subvariedade estaria contida em um slice $\{t\} \times M^{n+1}$ e teríamos $f'(t) = 0$. Por outro lado, analogamente ao que foi feito na demonstração do Teorema 3.4 concluímos que $\Delta h = 0$ em Σ . Assim, pelo Lema

3.1 e usando que $f'(t) = 0$, concluímos que $\langle \vec{H}, \partial_t \rangle = 0$, o que contraria a hipótese sobre a subvariedade ser future trapped. Analogamente prova-se que não existe subvariedade weakly past trapped sob tais condições. $\square$

Definição 3.1. Dizemos que uma subvariedade tipo-espaço Σ é ν -mínima quando a componente na direção espacial H_ν da sua curvatura média, a qual está definida em (3.4), é nula em Σ .

Nessa configuração, temos o seguinte resultado.

Teorema 3.6. *Seja Σ uma subvariedade completa tipo-espaço que mora em uma região limitada tipo-tempo de $-I \times_f M^{n+1}$. Suponha que Σ seja ν -mínima e*

$$H_N \geq \sup_{\Sigma} (\log f)'(h) > 0, \quad (3.9)$$

com respeito a orientação que aponta para o futuro N de Σ . Se $|\nabla h| \in \mathcal{L}^1(\Sigma)$, então Σ está contida em um slice $\{t\} \times M^{n+1}$.

Demonstração. Como estamos considerando a orientação que aponta para o futuro, temos que $\langle N, \partial_t \rangle \leq -1$, desse modo, usando isso e o Lema 2.3 temos que

$$\begin{aligned} \Delta u &= -n(f'(h) - f(h)\langle \vec{H}, \partial_t \rangle) \\ &= -n(f'(h) - f(h)[-\langle N, \partial_t \rangle H_N + \langle \nu, \partial_t \rangle H_\nu]) \\ &= nf(h) \left(-\frac{f'(h)}{f(h)} - \langle N, \partial_t \rangle H_N \right) \\ &\geq nf(h)(H_N - (\log f)'(h)), \end{aligned} \quad (3.10)$$

e, em particular,

$$\Delta u \geq nf(h)(H_N - \sup_{\Sigma} (\log f)'(h)).$$

Portanto, usando a hipótese dada em (3.9), segue que $\Delta u \geq 0$ em Σ .

Por outro lado, como Σ mora em uma região limitada tipo-tempo de $-I \times_f M^{n+1}$, existe uma constante C tal que

$$|\nabla u| = f(h)|\nabla h| \leq C|\nabla h|$$

o que implica que $|\nabla u| \in \mathcal{L}^1(\Sigma)$, uma vez que, por hipótese, $|\nabla h| \in \mathcal{L}^1(\Sigma)$. Então a função u satisfaz as condições do Corolário 3.3, logo aplicando-o nela obtemos que $\Delta u = 0$ em Σ . Portanto, voltando a (3.10) conseguimos

$$(\log f)'(h) = -\langle N, \partial_t \rangle H_N.$$

Consequentemente,

$$H_N \geq \sup_{\Sigma} (\log f)'(h) \geq (\log f)'(h) = -\langle N, \partial_t \rangle H_N.$$

O que implica $\langle N, \partial_t \rangle \geq -1$, e como já tínhamos $\langle N, \partial_t \rangle \leq -1$, segue que $\langle N, \partial_t \rangle = -1$ em Σ . Logo, concluímos que Σ está contido em um slice $\{t\} \times M^{n+1}$. $\square$

Corolário 3.7. Seja Σ uma subvariedade completa tipo-espaço que mora em uma região limitada tipo-tempo de $-I \times_f M^{n+1}$. Suponha que Σ é ν -mínima e H_N é constante. Se

$$H_N \geq \sup_{\Sigma} (\log f)'(h) \geq 0$$

com respeito a orientação que aponta para o futuro N de Σ e $|\nabla h| \in \mathcal{L}^1(\Sigma)$, então Σ é uma subvariedade mínima ou está contida em um slice $\{t\} \times M^{n+1}$.

Demonstração. Suponha que H_N é constante, se for $H_N = 0$, sendo Σ ν -mínima, segue que $\vec{H} = 0$, ou seja, Σ é uma subvariedade mínima. Agora, se tivermos $H_N \neq 0$, então segue do Teorema 3.6 que Σ está contida em um slice $\{t\} \times M^{n+1}$. $\square$

3.2.2 Rigidez via princípio do máximo de Omori-Yau

De acordo com [2], suporemos a partir de agora que o espaço-tempo GRW $-I \times_f M^{n+1}$ obedece a chamada condição de convergência forte nula

$$K_M \geq \sup_I (f^2(\log f)''), \quad (3.11)$$

onde K_M representa a curvatura seccional da base Riemanniana M^{n+1} .

Lema 3.8. Seja Σ uma subvariedade tipo-espaço imersa em um espaço-tempo GRW $-I \times_f M^{n+1}$, a qual obedece a condição de convergência forte nula dada em (3.11). Então, para todo $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$, a curvatura de Ricci de Σ satisfaz a seguinte desigualdade

$$\text{Ric}(X, X) \geq (n-1) \frac{f''}{f} |X|^2 + \left| AX - \frac{nH_N}{2} X \right|^2 - \left| SX - \frac{nH_\nu}{2} X \right|^2 + \frac{\epsilon n^2 |\vec{H}|^2}{4} |X|^2,$$

onde $\vec{H}$ é o campo de vetores curvatura média de Σ , $\epsilon = \text{sgn} \langle \vec{H}, \vec{H} \rangle$, $|\vec{H}|^2 = |\langle \vec{H}, \vec{H} \rangle|$ e as funções H_N e H_ν são as definidas em (3.4).

Demonstração. Por simplicidade, assumiremos que $\vec{H}$ é causal. Como sabemos, a equação de Gauss é dada por

$$\langle R(X, Y)Z, W \rangle = \langle \bar{R}(X, Y)Z, W \rangle + \langle II(X, Z), II(Y, W) \rangle - \langle II(X, W), II(Y, Z) \rangle,$$

para cada campo de vetores $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(\Sigma)$, onde R e $\bar{R}$ denotam o tensor curvatura de Σ e $-I \times_f M^{n+1}$, respectivamente.

Considerando $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$ e um referencial ortonormal local $\{E_i\}_{i=1}^n$ de $\mathfrak{X}(\Sigma)$, tomando o traço da expressão acima, obtemos

$$\begin{aligned}
 \text{Ric}(X, X) &= \sum_{i=1}^n \langle \bar{R}(X, E_i)X, E_i \rangle + \sum_{i=1}^n \langle II(X, X), II(E_i, E_i) \rangle \\
 &\quad + \sum_{i=1}^n \langle II(X, E_i), II(E_i, X) \rangle \\
 &= \sum_{i=1}^n \langle \bar{R}(X, E_i)X, E_i \rangle + \langle II(X, X), n\vec{H} \rangle - \sum_{i=1}^n |II(X, E_i)|^2 \\
 &= \sum_{i=1}^n \langle \bar{R}(X, E_i)X, E_i \rangle + n \langle -\langle AX, X \rangle N + \langle SX, X \rangle \nu, \vec{H} \rangle \\
 &\quad - \sum_{i=1}^n \langle AX, E_i \rangle^2 \langle N, N \rangle - \sum_{i=1}^n \langle SX, E_i \rangle^2 \langle \nu, \nu \rangle \\
 &= \sum_{i=1}^n \langle \bar{R}(X, E_i)X, E_i \rangle - n \langle AX, X \rangle H_N + n \langle SX, X \rangle H_\nu + |AX|^2 - |SX|^2,
 \end{aligned}$$

onde $II(X, Y) = -\langle AX, Y \rangle N + \langle SX, Y \rangle \nu$, ou seja, A e S denotam o operador forma de Σ com respeito a N e ν , respectivamente. Completando os quadrados na expressão acima obtemos

$$\begin{aligned}
 \text{Ric}(X, X) &= \sum_{i=1}^n \langle \bar{R}(X, E_i)X, E_i \rangle + \left| AX - \frac{nH_N}{2}X \right|^2 - \frac{n^2}{4}H_N^2|X|^2 - \left| SX - \frac{nH_\nu}{2}X \right|^2 \\
 &\quad + \frac{n^2}{4}H_\nu^2|X|^2 \\
 &= \sum_{i=1}^n \langle \bar{R}(X, E_i)X, E_i \rangle + \left| AX - \frac{nH_N}{2}X \right|^2 - \left| SX - \frac{nH_\nu}{2}X \right|^2 \\
 &\quad + \frac{n^2}{4}(-H_N^2 + H_\nu^2)|X|^2 \\
 &= \sum_{i=1}^n \langle \bar{R}(X, E_i)X, E_i \rangle + \left| AX - \frac{nH_N}{2}X \right|^2 - \left| SX - \frac{nH_\nu}{2}X \right|^2 + \frac{n^2}{4}\langle \vec{H}, \vec{H} \rangle |X|^2.
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

Agora, vamos calcular uma estimativa para o primeiro termo do lado direito de (3.12). Inicialmente, escrevendo $X = -\langle X, \partial_t \rangle \partial_t + X^*$ e $E_i = -\langle E_i, \partial_t \rangle \partial_t + E_i^*$, onde

$X^*, E_i^* \in \mathfrak{X}(M^{n+1})$, e utilizando as propriedades do tensor curvatura obtemos

$$\begin{aligned}\bar{R}(X, E_i)X &= \bar{R}(X^*, E_i^*)X^* - \langle X, \partial_t \rangle \bar{R}(X^*, E_i^*)\partial_t - \langle E_i, \partial_t \rangle \bar{R}(X^*, \partial_t)X^* \\ &\quad + \langle E_i, \partial_t \rangle \langle X, \partial_t \rangle \bar{R}(X^*, \partial_t)\partial_t - \langle X, \partial_t \rangle \bar{R}(\partial_t, E_i^*)X^* + \langle X, \partial_t \rangle^2 \bar{R}(\partial_t, E_i^*)\partial_t \\ &\quad + \langle X, \partial_t \rangle \langle E_i, \partial_t \rangle \bar{R}(\partial_t, \partial_t)X^* - \langle X, \partial_t \rangle^2 \langle E_i, \partial_t \rangle \bar{R}(\partial_t, \partial_t)\partial_t.\end{aligned}\quad (3.13)$$

Utilizando a Proposição 7.42 de [17], temos que

- (i) $\bar{R}(X^*, E_i^*)\partial_t = 0$;
- (ii) $\bar{R}(X^*, \partial_t)X^* = -\bar{R}(\partial_t, X^*)X^* = |X^*|^2 \frac{f''}{f} \partial_t = (|X|^2 + \langle X, \partial_t \rangle^2) \frac{f''}{f} \partial_t$;
- (iii) $\bar{R}(X^*, \partial_t)\partial_t = \frac{Hess f(\partial_t, \partial_t)}{f} X^* = \frac{f''}{f} X^* = \frac{f''}{f} (X + \langle X, \partial_t \rangle \partial_t)$;
- (iv) $\bar{R}(\partial_t, E_i^*)X^* = -\langle E_i^*, X^* \rangle \frac{f''}{f} \partial_t = -(\langle X, E_i \rangle + \langle X, \partial_t \rangle \langle E_i, \partial_t \rangle) \frac{f''}{f} \partial_t$;
- (v) $\bar{R}(\partial_t, E_i^*)\partial_t = -\bar{R}(E_i^*, \partial_t)\partial_t = -\frac{f''}{f} E_i^* = -\frac{f''}{f} (E_i + \langle E_i, \partial_t \rangle \partial_t)$;
- (vi) $\bar{R}(\partial_t, \partial_t) = 0$.

Assim, voltando para (3.13), conseguimos que

$$\begin{aligned}\bar{R}(X, E_i)X &= \bar{R}(X^*, E_i^*)X^* - \langle E_i, \partial_t \rangle (|X|^2 + \langle X, \partial_t \rangle^2) \frac{f''}{f} \partial_t \\ &\quad + \langle E_i, \partial_t \rangle \langle X, \partial_t \rangle \frac{f''}{f} (X + \langle X, \partial_t \rangle \partial_t) + \langle X, \partial_t \rangle \langle X, E_i \rangle \frac{f''}{f} \partial_t \\ &\quad + \langle X, \partial_t \rangle^2 \langle E_i, \partial_t \rangle \frac{f''}{f} \partial_t - \frac{f''}{f} \langle X, \partial_t \rangle^2 (E_i + \langle E_i, \partial_t \rangle \partial_t).\end{aligned}$$

Desse modo, temos que

$$\begin{aligned}\langle \bar{R}(X, E_i)X, E_i \rangle &= \langle \bar{R}(X^*, E_i^*)X^*, E_i^* \rangle - \langle E_i, \partial_t \rangle \langle \bar{R}(X^*, E_i^*)X^*, \partial_t \rangle - \langle E_i, \partial_t \rangle^2 |X|^2 \frac{f''}{f} \\ &\quad - \langle E_i, \partial_t \rangle^2 \langle X, \partial_t \rangle^2 \frac{f''}{f} + \langle E_i, \partial_t \rangle \langle X, \partial_t \rangle \langle X, E_i \rangle \frac{f''}{f} + \langle E_i, \partial_t \rangle^2 \langle X, \partial_t \rangle^2 \frac{f''}{f} \\ &\quad + \langle X, \partial_t \rangle \langle X, E_i \rangle \langle E_i, \partial_t \rangle \frac{f''}{f} + \langle X, \partial_t \rangle^2 \langle E_i, \partial_t \rangle^2 \frac{f''}{f} - \langle X, \partial_t \rangle^2 |E_i|^2 \frac{f''}{f} \\ &\quad - \langle E_i, \partial_t \rangle^2 \langle X, \partial_t \rangle^2 \frac{f''}{f} \\ &= \langle \bar{R}(X^*, E_i^*)X^*, E_i^* \rangle - \langle E_i, \partial_t \rangle^2 |X|^2 \frac{f''}{f} + 2\langle E_i, \partial_t \rangle \langle X, \partial_t \rangle \langle X, E_i \rangle \frac{f''}{f} \\ &\quad - \langle X, \partial_t \rangle^2 |E_i|^2 \frac{f''}{f}.\end{aligned}\quad (3.14)$$

Por outro lado, observe que

$$\begin{aligned}\overline{R}(X^*, E_i^*)X^* &= R_M(X^*, E_i^*)X^* - \frac{\langle \nabla f, \nabla f \rangle}{f^2} \{ \langle X^*, X^* \rangle E_i^* - \langle E_i^*, X^* \rangle X^* \} \\ &= R_M(X^*, E_i^*)X^* + ((\log f)')^2 |X|^2 E_i - ((\log f)')^2 \langle E_i, X \rangle X \\ &\quad + ((\log f)')^2 |X|^2 \langle E_i, \partial_t \rangle \partial_t + ((\log f)')^2 \langle X, \partial_t \rangle^2 E_i \\ &\quad - ((\log f)')^2 \langle E_i, X \rangle \langle X, \partial_t \rangle \partial_t - ((\log f)')^2 \langle X, \partial_t \rangle \langle E_i, \partial_t \rangle X.\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}\langle \overline{R}(X^*, E_i^*)X^*, E_i^* \rangle &= \langle R_M(X^*, E_i^*)X^*, E_i^* \rangle + ((\log f)')^2 |X|^2 |E_i|^2 - ((\log f)')^2 \langle E_i, X \rangle^2 \\ &\quad + ((\log f)')^2 \langle X, \partial_t \rangle^2 |E_i|^2 - 2((\log f)')^2 \langle X, \partial_t \rangle \langle E_i, \partial_t \rangle \langle X, E_i \rangle \\ &\quad + ((\log f)')^2 |X|^2 \langle E_i, \partial_t \rangle^2.\end{aligned}$$

Portanto, voltando a (3.14) e usando que $\nabla h = -\partial_t^\top$, obtemos

$$\begin{aligned}\langle \overline{R}(X, E_i)X, E_i \rangle &= \langle R_M(X^*, E_i^*)X^*, E_i^* \rangle + ((\log f)')^2 |X|^2 |E_i|^2 - ((\log f)')^2 \langle E_i, X \rangle^2 \\ &\quad + ((\log f)')^2 \langle X, \nabla h \rangle^2 |E_i|^2 - 2((\log f)')^2 \langle X, \nabla h \rangle \langle E_i, \nabla h \rangle \langle X, E_i \rangle \\ &\quad + ((\log f)')^2 |X|^2 \langle E_i, \nabla h \rangle^2 - \langle E_i, \nabla h \rangle^2 |X|^2 \frac{f''}{f} \\ &\quad + 2\langle E_i, \nabla h \rangle \langle X, \nabla h \rangle \langle X, E_i \rangle \frac{f''}{f} - \langle X, \nabla h \rangle^2 |E_i|^2 \frac{f''}{f}.\end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned}\sum_i \langle \overline{R}(X, E_i)X, E_i \rangle &= \sum_i \langle R_M(X^*, E_i^*)X^*, E_i^* \rangle + (n-1)((\log f)')^2 |X|^2 \\ &\quad - (n-2)(\log f)'' \langle X, \nabla h \rangle^2 - (\log f)'' |\nabla h|^2 |X|^2.\end{aligned}\tag{3.15}$$

Agora, observe que

$$\begin{aligned}\langle R_M(X^*, E_i^*)X^*, E_i^* \rangle &= \frac{1}{f^2} (|X^*|_M^2 |E_i^*|_M^2 - \langle X^*, E_i^* \rangle_M^2) K_M(X^*, E_i^*) \\ &= \frac{1}{f^2} (|X|^2 |E_i|^2 + |X|^2 \langle E_i, \partial_t \rangle^2 + \langle X, \partial_t \rangle^2 |E_i|^2 \\ &\quad - \langle X, E_i \rangle^2 - 2\langle X, E_i \rangle \langle E_i, \partial_t \rangle \langle X, \partial_t \rangle) K_M(X^*, E_i^*).\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \sum_i \langle R_M(X^*, E_i^*) X^*, E_i^* \rangle &= \frac{1}{f^2} \sum_i K_M(X^*, E_i^*) ((n-1)|X|^2 + |X|^2 |\nabla h|^2 \\ &\quad + (n-2) \langle X, \nabla h \rangle^2). \end{aligned}$$

Por outro lado, por hipótese, a condição de convergência forte nula dada em (3.11) é satisfeita, então, segue que

$$\sum_i \langle R_M(X^*, E_i^*) X^*, E_i^* \rangle \geq ((n-1)|X|^2 + |X|^2 |\nabla h|^2 + (n-2) \langle X, \nabla h \rangle^2) (\log f)''.$$

Por fim, substituindo a desigualdade acima em (3.15), obtemos

$$\sum_i \langle \bar{R}(X, E_i) X, E_i \rangle \geq (n-1) \frac{f''}{f} |X|^2. \quad (3.16)$$

Para concluir a prova do Lema basta substituir (3.16) em (3.12). $\square$

A partir da estimativa para curvatura de Ricci obtida no Lema acima e com o auxílio do Lema 2.1, podemos apresentar o seguinte resultado.

Teorema 3.9. *Seja Σ uma subvariedade weakly trapped completa que mora em uma região limitada tipo-tempo de um espaço-tempo GRW $-I \times_f M^{n+1}$ obedecendo a condição de convergência forte nula dada em (3.11). Suponha que o operador forma espacial S , relativo à ν , de Σ satisfaz $|S|^2 \leq G(r)$, para alguma função radial $G(r)$ satisfazendo as propriedades do Lema 2.1. Se $|\vec{H}| := \sqrt{-\langle \vec{H}, \vec{H} \rangle}$ é limitada e*

$$|\nabla h| \leq C \inf_{\Sigma} (|\vec{H}| - (\log f)'(h)), \quad (3.17)$$

para alguma constante C positiva, então Σ está contida em um slice $\{t\} \times M^{n+1}$.

Demonstração. Vamos supor que Σ é uma subvariedade weakly past trapped, então $\vec{H}$ é causal e aponta para o passado, isto é, $\langle \vec{H}, \partial_t \rangle > 0$. Escrevendo $\vec{H} = \vec{H}_0 - \langle \vec{H}, \partial_t \rangle \partial_t$, onde $\vec{H}_0$ é a componente tipo-espaço de $\vec{H}$, temos que

$$|\vec{H}|^2 = \langle \vec{H}, \partial_t \rangle^2 - |\vec{H}_0|^2 \leq \langle \vec{H}, \partial_t \rangle^2,$$

e portanto, segue que $\langle \vec{H}, \partial_t \rangle \geq |\vec{H}|$. Pelo Lema 3.1 conseguimos

$$\Delta h = -(\log f)'(h)[n + |\nabla h|^2] + n \langle \vec{H}, \partial_t \rangle \geq n(|\vec{H}| - (\log f)'(h)) - (\log f)'(h)|\nabla h|^2. \quad (3.18)$$

Além disso, como assumimos que Σ mora em uma região limitada tipo-tempo de $-I \times_f M^{n+1}$, e levando em consideração as restrições em S e $\vec{H}$, podemos aplicar os Lemas 3.8 e 2.1, e assim, obtemos que existe uma sequência $\{p_k\}$ em Σ tal que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} h(p_k) = \sup_{\Sigma} h, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} |\nabla h(p_k)| = 0 \text{ e } \lim_{k \rightarrow \infty} \sup \Delta h(p_k) \leq 0.$$

Sendo assim, de (3.18) conseguimos

$$0 \geq \limsup_k \Delta h(p_k) \geq n \lim_k (|\vec{H}| - (\log f)'(h))(p_k) \geq 0.$$

Logo, $\lim_{k \rightarrow \infty} (|\vec{H}| - (\log f)'(h))(p_k) = 0$, e pela hipótese dada em (3.17), segue $\nabla h = 0$, ou seja, h é constante em Σ , o que significa que Σ está contida em um slice $\{t\} \times M^{n+1}$. Se Σ for weakly future trapped a prova é analoga. $\square$

No próximo resultado utilizaremos a equivalência entre variedades estocasticamente completas e o princípio do máximo fraco, dada no Lema 2.2, para inferir a rigidez de subvariedades weakly trapped estocasticamente completas imersas em um espaço-tempo GRW.

Teorema 3.10. *Seja Σ uma subvariedade weakly future (past) trapped estocasticamente completa que mora em uma região limitada tipo-tempo de um espaço-tempo GRW $-I \times_f M^{n+1}$, com $f' \geq 0$ ($f' \leq 0$) em Σ . Se $|\vec{H}|$ é limitado e (3.17) é satisfeito, então Σ é uma hipersuperfície mínima completa de um slice $\{t_0\} \times M^{n+1}$, com $f'(t_0) = 0$.*

Demonstração. Vamos assumir que Σ é uma subvariedade weakly past trapped, então já vimos na demonstração do Teorema 3.9 que $\langle \vec{H}, \partial_t \rangle \geq |\vec{H}|$. Do Lema 2.3 conseguimos

$$\Delta u = -n(f'(h) - f(h)\langle \vec{H}, \partial_t \rangle) \geq -n(f'(h) - f(h)|\vec{H}|),$$

e, como Σ é estocasticamente completa, do Lema 2.2, existe uma sequência de pontos $\{p_k\}$ em Σ tal que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} u(p_k) = \sup_{\Sigma} u \text{ e } \lim_{k \rightarrow \infty} \Delta u(p_k) \leq 0.$$

Juntando isso, obtemos que

$$\begin{aligned} 0 &\geq \lim \Delta u(p_k) \geq n \lim (f(h)(-(\log f)' + |\vec{H}|))(p_k) \\ &\geq Cn \lim (|\vec{H}| - (\log f)')(p_k) \geq 0, \end{aligned}$$

onde $C = \inf_{\Sigma} f > 0$. Deste modo,

$$\lim_k (|\vec{H}| - (\log f)')(p_k) = 0.$$

Como $|\vec{H}|$ é limitado e $f' \leq 0$, conseguimos que $|\vec{H}| = 0$ e $(\log f)'(t_0) = 0$, para algum $t_0 \in I$. Por fim, como temos por hipótese que (3.17) é satisfeito, segue que h é constante em Σ , e concluímos que Σ é uma hipersuperfície mínima completa contida em um slice $\{t_0\} \times M^{n+1}$, com $f'(t_0) = 0$. Se Σ for weakly future trapped a prova é análoga. $\square$

3.3 Uma subvariedade weakly trapped não-trivial em $-\mathbb{R} \times \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$

Aqui nós apresentaremos um exemplo de uma subvariedade weakly trapped em um espaço-tempo GRW estático, que não está contida em um slice do espaço ambiente, o que ilustra a importância dos resultados apresentados na seção anterior.

Exemplo 3.1. Vamos considerar uma função suave $u_a : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $u_a(x, y) = a \ln y$ e com gráfico inteiro correspondente

$$\Sigma(a, b) = \{(a \ln y, x, y, b \ln y) : y > 0\} \subset -\mathbb{R} \times \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}.$$

Nós temos que $\nabla u_a = (0, ay)$. Com efeito, considere a parametrização canônica de $\mathbb{H}^2$ dada por

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{H}^2 \\ (x, y) &\mapsto (x, y). \end{aligned}$$

Desse modo, $d\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow T\mathbb{H}^2$. Sejam $\partial_x = d\phi(e_1) = (1, 0)$ e $\partial_y = d\phi(e_2) = (0, 1)$. Então,

$$\partial_x(u_a) = \frac{\partial}{\partial x}(u_a \circ \phi) = \frac{\partial}{\partial x}(a \ln y) = 0$$

e,

$$\partial_y(u_a) = \frac{\partial}{\partial y}(u_a \circ \phi) = \frac{\partial}{\partial y}(a \ln y) = \frac{a}{y}.$$

Note que

$$\langle \partial_x, \partial_x \rangle_{\mathbb{H}^2} = \frac{\langle e_1, e_1 \rangle_g}{y^2} = \frac{1}{y^2}$$

e,

$$\langle \partial_y, \partial_y \rangle_{\mathbb{H}^2} = \frac{\langle e_2, e_2 \rangle_g}{y^2} = \frac{1}{y^2},$$

onde g denota a métrica usual de $\mathbb{R}^2$. Logo, $\{y\partial_x, y\partial_y\}$ é um referencial ortonormal em

$\mathbb{H}^2$. Portanto,

$$\begin{aligned}\nabla u_a &= (y\partial_x)(u_a)y\partial_x + (y\partial_y)(u_a)y\partial_y \\ &= y^2\partial_x(u_a)\partial_x + y^2\partial_y(u_a)\partial_y \\ &= 0 + y^2\left(\frac{a}{y}\right)\partial_y \\ &= ay(0, 1) \\ &= (0, ay).\end{aligned}$$

E, portanto,

$$\langle \nabla u_a, \nabla u_a \rangle_{\mathbb{H}^2} = \frac{\langle (0, ay), (0, ay) \rangle_g}{y^2} = a^2.$$

Se tomarmos $0 < |a| < 1$, nós temos que $\Sigma(a, b)$ será uma superfície tipo-espaço em $-\mathbb{R} \times \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. De fato, observe que $\Sigma(a, b)$ tem dimensão dois. Além disso, temos dois campos tangentes $\partial_x = (0, 1, 0, 0)$ e $\partial_y = (a/y, 0, 1, b/y)$ bem definidos ao longo de $\Sigma(a, b)$. Considere $\vec{V} = k_1\partial_x + k_2\partial_y$, então $\vec{V} = (k_2(a/y), k_1, k_2, k_2(b/y))$. Assim,

$$\langle \vec{V}, \vec{V} \rangle_{\bar{g}} = -\frac{k_2^2 a^2}{y^2} + \frac{k_1^2 + k_2^2}{y^2} + \frac{k_2^2 b^2}{y^2},$$

onde $\bar{g}$ é a métrica em $-\mathbb{R} \times \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. Portanto, $\langle \vec{V}, \vec{V} \rangle > 0$ desde que $0 < |a| < 1$.

Além disso, os campos de vetores normais são dados por

$$N = \frac{\partial_t + \nabla u_a}{\sqrt{1 - a^2}} \quad e \quad \bar{\nu} = \frac{\partial_s - \nabla u_b}{\sqrt{1 + b^2}}.$$

De fato, veja que

$$\begin{aligned}N &= \frac{\partial_t + \nabla u_a}{\sqrt{1 - a^2}} \\ &= \frac{(1, 0, 0, 0) + (0, 0, ay, 0)}{\sqrt{1 - a^2}} \\ &= \frac{(1, 0, ay, 0)}{\sqrt{1 - a^2}}.\end{aligned}$$

Logo, $\langle N, \partial_x \rangle = 0$ e

$$\begin{aligned}\langle N, \partial_y \rangle &= \frac{\langle (a/y, 0, 1, b/y), (1, 0, ay, 0) \rangle_{\bar{g}}}{\sqrt{1 - a^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - a^2}} \left(-\frac{a}{y} + \frac{ay}{y^2} \right) = 0.\end{aligned}$$

Ou seja, N é normal à $\Sigma(a, b)$. Analogamente provamos que $\bar{\nu}$ é normal à $\Sigma(a, b)$.

Agora, apesar desses vetores serem unitários e normais à $\Sigma(a, b)$, eles não são ortogonais entre si, sendo assim, utilizamos o processo de Gram-Schmidt para ortonormalizar $\{N, \bar{\nu}\}$. Mais precisamente, tomando o vetor

$$\tilde{\nu} = \bar{\nu} + \langle N, \bar{\nu} \rangle N,$$

então o vetor espacial normal ν será dado por

$$\nu = \frac{\tilde{\nu}}{|\tilde{\nu}|}.$$

Desse modo, temos que

$$\begin{aligned} \tilde{\nu} &= \frac{\partial_s - \nabla u_b}{\sqrt{1+b^2}} + \left\langle \frac{\partial_t + \nabla u_a}{\sqrt{1-a^2}}, \frac{\partial_s - \nabla u_b}{\sqrt{1+b^2}} \right\rangle \frac{\partial_t + \nabla u_a}{\sqrt{1-a^2}} \\ &= \frac{\partial_s - \nabla u_b}{\sqrt{1+b^2}} + \frac{\langle (1, 0, ay, 0), (0, 0, -by, 1) \rangle_{\bar{g}}}{y^2} \frac{\partial_t + \nabla u_a}{(1-a^2)\sqrt{1+b^2}} \\ &= \frac{\partial_s - \nabla u_b}{\sqrt{1+b^2}} - \frac{ab}{\sqrt{1+b^2}} \frac{\partial_t + \nabla u_a}{1-a^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+b^2}} \left(\partial_s - \frac{ab}{1-a^2} \partial_t - \frac{b \nabla u}{1-a^2} \right), \end{aligned}$$

onde dizemos que $u_a = au_1$ e, apenas por uma questão de notação, denotaremos $u_1 = u$. E, observando que ∂_t , ∂_s e ∇u são ortonormais e unitários, segue que

$$\begin{aligned} |\tilde{\nu}|^2 &= \langle \tilde{\nu}, \tilde{\nu} \rangle \\ &= \frac{1}{1+b^2} \left(1 - \frac{a^2 b^2}{(1-a^2)^2} + \frac{b^2}{(1-a^2)^2} \right) \\ &= \frac{1-a^2+b^2}{(1+b^2)(1-a^2)}. \end{aligned}$$

Em particular, se $a = b$, temos

$$|\tilde{\nu}|^2 = \frac{1}{1-a^4}.$$

Além disso, se $a = 0$, esse vetor é unitário. Pela equação (3.2) a função altura

satisfaz

$$\begin{aligned}
 |\nabla h|^2 &= \langle N, \partial_t \rangle^2 - (1 + \langle \nu, \partial_t \rangle^2) \\
 &= \left\langle \frac{\partial_t + \nabla u_a}{\sqrt{1 - a^2}}, \partial_t \right\rangle^2 - \left(1 + \left\langle \frac{\tilde{\nu}}{|\tilde{\nu}|}, \partial_t \right\rangle^2 \right) \\
 &= \frac{1}{1 - a^2} - 1 + \frac{1}{|\tilde{\nu}|} \langle \tilde{\nu}, \partial_t \rangle^2 \\
 &= \frac{a^2}{1 - a^2} + \frac{1}{|\tilde{\nu}|} \langle \tilde{\nu}, \partial_t \rangle^2.
 \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned}
 |\nabla h|^2 &= \frac{a^2}{1 - a^2} + \frac{(1 + b^2)(1 - a^2)}{1 - a^2 + b^2} \left\langle \frac{1}{\sqrt{1 + b^2}} \left(\partial_s - \frac{ab}{1 - a^2} \partial_t - \frac{b \nabla u}{1 - a^2} \right), \partial_t \right\rangle^2 \\
 &= \frac{a^2}{1 - a^2} + \frac{(1 + b^2)(1 - a^2)}{1 - a^2 + b^2} \frac{a^2 b^2}{(1 + b^2)(a - a^2)^2} \langle \partial_t, \partial_t \rangle^2 \\
 &= \frac{a^2}{1 - a^2} + \frac{a^2 b^2}{(1 - a^2)(1 - a^2 + b^2)}.
 \end{aligned}$$

Portanto,

$$|\nabla h|^2 = \frac{a^2}{1 - a^2} + \frac{a^2 b^2}{(1 - a^2)(1 - a^2 + b^2)}. \quad (3.19)$$

Se $a = b$, obtemos

$$|\nabla u|^2 = \frac{a^4 + a^2}{1 - a^2}.$$

Se $b = 0$ obtemos a mesma fórmula para a superfície em $-\mathbb{R} \times \mathbb{H}^2$, isto é,

$$|\nabla h|^2 = \frac{a^2}{1 - a^2}.$$

Então, se $a = 0$, conseguimos que $\nabla h = 0$, isto é, que $\Sigma(a, b)$ está contido em um slice $\{0\} \times \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$.

Além disso, a curvatura média tipo-tempo H_N de $\Sigma(a, b)$ é dada por

$$2H_N = \text{Div} \left(\frac{a \nabla u}{\sqrt{1 - a^2 |\nabla u|^2}} \right) = \text{Div} \left(\frac{a \nabla u}{\sqrt{1 - a^2}} \right),$$

onde Div é o divergente em $\mathbb{H}^2$.

Observe agora que

$$\text{Div} = \text{Div}_0 - \frac{2}{y}dy \quad (3.20)$$

onde Div_0 denota o divergente usual em $\mathbb{R}^2$. De fato, seja $X \in T\mathbb{H}^2$, como $\{y\partial_x, y\partial_y\}$ é um referencial ortonormal em $\mathbb{H}^2$ temos que

$$\begin{aligned} \text{Div}(X) &= \langle \nabla_{y\partial_y} X, y\partial_x \rangle + \langle \nabla_{y\partial_y} X, y\partial_y \rangle \\ &= y^2 \langle \nabla_{\partial_x} X, \partial_x \rangle + y^2 \langle \nabla_{\partial_y} X, \partial_y \rangle. \end{aligned}$$

Pela fórmula de Koszul, dada no Lema 1.1, temos que

$$\begin{aligned} 2\langle \nabla_{\partial_x} X, \partial_x \rangle &= \partial_x \langle X, \partial_x \rangle + X \langle \partial_x, \partial_x \rangle - \partial_x \langle \partial_x, X \rangle - \langle \partial_x, [X, \partial_x] \rangle + \langle X, [\partial_x, \partial_x] \rangle + \langle \partial_x, [\partial_x, X] \rangle \\ &= X \left(\frac{1}{y^2} \right) + \frac{2}{y^2} \langle \partial_x, [\partial_x, X] \rangle_g, \end{aligned}$$

onde g é a métrica usual em $\mathbb{R}^2$. Logo, denotando por $\bar{\nabla}$ a conexão de Levi-Civita em $\mathbb{R}^2$, obtemos

$$\langle \nabla_{\partial_x} X, \partial_x \rangle = \frac{1}{y^2} \langle \bar{\nabla}_{\partial_x} X, \partial_x \rangle_g + \frac{1}{2} X \left(\frac{1}{y^2} \right).$$

Analogamente, obtemos

$$\langle \nabla_{\partial_y} X, \partial_y \rangle = \frac{1}{y^2} \langle \bar{\nabla}_{\partial_y} X, \partial_y \rangle_g + \frac{1}{2} X \left(\frac{1}{y^2} \right).$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \text{Div}(X) &= \text{Div}_0(X) + y^2 X \left(\frac{1}{y^2} \right) \\ &= \text{Div}_0(X) - \frac{2}{y} dy(X). \end{aligned}$$

O que prova (3.20).

Usando (3.20) conseguimos provar que $\Delta u = -1$. Com efeito,

$$\begin{aligned} \Delta u &= \text{Div}(\nabla u) \\ &= \text{Div}_0(\nabla u) - \frac{2}{y} dy(\nabla u) \\ &= \text{Div}_0[(0, y)] - \frac{2}{y} dy(0, y) \\ &= 1 - \frac{2}{y} y = -1. \end{aligned}$$

Então,

$$H_N = -\frac{a}{2\sqrt{1-a^2}}. \quad (3.21)$$

E, para a curvatura média espacial, conseguimos $2H_\nu = \text{Div} \left(\frac{\tilde{\nu}}{|\tilde{\nu}|} \right)$, isto é,

$$2H_\nu = \frac{1}{|\tilde{\nu}|} \frac{b}{\sqrt{1+b^2}(1-a^2)}.$$

Portanto,

$$H_\nu = \frac{1}{2} \frac{b}{\sqrt{(1-a^2+b^2)}(1-a^2)}. \quad (3.22)$$

Consequentemente, lembrando que de (3.4) temos $\vec{H} = -H_N N + H_\nu \nu$, segue de (3.21) e (3.22) que $|\vec{H}|$ é limitada, e por (3.19), temos que a hipótese dada em (3.17) é satisfeita.

Além disso, $\Sigma(a, b)$ é estocasticamente completa, uma vez que é homotético à $\mathbb{H}^2$ que, por sua vez, é estocasticamente completo. De fato, dado $\vec{V} \in T\Sigma(a, b)$, mostramos que

$$\begin{aligned} \bar{g}(\vec{V}, \vec{V}) &= \left(dt^2 + \frac{1}{y^2}(dx^2 + dy^2) + ds^2 \right) (\vec{V}, \vec{V}) \\ &= -\frac{k_2^2 a^2}{y^2} + \frac{k_1^2 + k_2^2}{y^2} + \frac{k_2^2 b^2}{y^2}, \end{aligned}$$

onde $\vec{V} = k_1 \partial_x + k_2 \partial_y$. Portanto,

$$\bar{g}|_{\Sigma(a,b)} = -\frac{a^2}{y^2} dy^2 + \frac{dx^2 + dy^2}{y^2} + \frac{b^2}{y^2} dy^2$$

é a métrica induzida de $\bar{g}$ em $\Sigma(a, b)$. Então

$$\bar{g}|_{\Sigma(a,b)} = (1 + b^2 - a^2) \left(\frac{dx^2}{(\sqrt{1+b^2-a^2}y)^2} + \frac{dy^2}{y^2} \right).$$

Por fim, considerando a mudança de variáveis $\bar{x} = x$ e $\bar{y} = \sqrt{1+b^2-a^2}y$, temos que

$$\bar{g} = (1 + b^2 - a^2) \left(\frac{d\bar{x}^2 + d\bar{y}^2}{\bar{y}^2} \right).$$

Consequentemente, $\Sigma(a, b)$ é homotético a $\mathbb{H}^2$.

Ou seja, $\Sigma(a, b)$ satisfaz todas as hipóteses assumidas no Teorema 3.10 exceto a hipótese de estar contida em uma região limitada tipo-tempo, e não temos $\Sigma(a, b)$ con-

tida em um slice, portanto, a hipótese assumida no Teorema 3.10 de que a subvariedade deve estar contida em uma região limitada tipo-tempo do espaço ambiente é, de fato, necessária.

Capítulo 4

Sobre a geometria de subvariedades trapped e marginally trapped em formas espaciais Lorentzianas

Neste capítulo consideraremos subvariedades trapped e marginally trapped imersas em formas espaciais Lorentzianas. Nesse contexto, obteremos condições suficientes para garantir que subvariedades trapped, sob a hipótese de possuir vetor curvatura média paralelo, sejam pseudo-umbílicas. Também apresentaremos um resultado de não existência para subvariedades trapped imersa no espaço de Minkowski. Por fim, obteremos condições suficientes para garantir que subvariedades marginally trapped, com vetor curvatura média paralelo, sejam totalmente umbílicas. Este capítulo é baseado no artigo escrito por de Lima, dos Santos e Velásquez [14].

4.1 Preliminares

Considere o espaço semi-Euclidiano $(n + p + 1)$ -dimensional $\mathbb{R}_\nu^{n+p+1}$ munido com o tensor métrico $\langle, \rangle$ de índice $\nu \in \{1, 2\}$, dado por

$$\langle v, w \rangle = - \sum_{i=1}^{\nu} v^i w^i + \sum_{j=\nu+1}^{n+p+1} v^j w^j,$$

onde $v = (v^1, \dots, v^{n+p+1})$ e $w = (w^1, \dots, w^{n+p+1})$. Como já vimos, $\mathbb{R}_1^{n+p}$ é chamado o espaço de Minkowski $(n + p)$ -dimensional. Além disso, como é conhecido, o espaço de Sitter $(n + p)$ -dimensional é definido pela seguinte hiperquádrica de $\mathbb{R}_1^{n+p+1}$

$$\mathbb{S}_1^{n+p} = \{x \in \mathbb{R}_1^{n+p+1} : \langle x, x \rangle = 1\},$$

e o espaço anti-de Sitter $(n + p)$ -dimensional é dado por

$$\mathbb{H}_1^{n+p} = \{x \in \mathbb{R}_2^{n+p+1} : \langle x, x \rangle = -1\}.$$

Os espaços $\mathbb{R}_1^{n+p}$, $\mathbb{S}_1^{n+p}$ e $\tilde{\mathbb{H}}_1^{n+p}$ são as formas espaciais Lorentzianas padrões, simplesmente conexas, com curvatura seccional constante 0, 1 e -1, respectivamente. Aqui, $\tilde{\mathbb{H}}_1^{n+p}$ denota a cobertura universal de $\mathbb{H}_1^{n+p}$ (ver Seção 8.6, [17]).

Ao longo deste capítulo, a fim de facilitar nossa notação, denotaremos os espaços descritos acima por $L_1^{n+p}(c)$, onde $c \in \{-1, 0, 1\}$. Vamos também considerar $x : M^n \rightarrow L_1^{n+p}(c)$ uma subvariedade tipo-espaço isometricamente imersa em uma forma espacial Lorentziana $L_1^{n+p}(c)$, e denotaremos por ∇^0 , $\bar{\nabla}$ e ∇ as conexões de $\mathbb{R}_1^{n+p+1}$, $L_1^{n+p}(c)$ e M^n , respectivamente. E, $\nabla^\perp$ denotará a conexão normal de M^n em $L_1^{n+p}(c)$.

No que segue, II e α denotam as segundas formas fundamentais de M^n em $L_1^{n+p}(c)$ e de $L_1^{n+p}(c)$ em $\mathbb{R}_1^{n+p+1}$, respectivamente. Denotaremos por A_ξ e S_N os operadores forma associados a II e α , respectivamente.

Nesse contexto, temos que a fórmula de Gauss de M^n em $L_1^{n+p}(c)$ é dada por

$$\nabla_X^0 Y = \bar{\nabla}_X Y - c\langle X, Y \rangle x = \nabla_X Y - II(X, Y) - c\langle X, Y \rangle x. \quad (4.1)$$

Com efeito, considerando a imersão de $L_1^{n+p}(c)$ em $\mathbb{R}_1^{n+p+1}$, nós temos que o normal é dado por $N = x$. Então, temos que

$$\langle \alpha(X, Y), N \rangle = \langle S_N X, Y \rangle = \langle (\bar{\nabla}_X N)^\top, Y \rangle = \langle X^\top, Y \rangle.$$

Logo,

$$\alpha(X, Y) = \langle \alpha(X, Y), N \rangle N = c\langle X, Y \rangle x.$$

Portanto, utilizando a fórmula de Gauss dada em (1.6) para a imersão de $L_1^{n+p}(c)$ em $\mathbb{R}_1^{n+p+1}$ e depois para a imersão de M^n em $L_1^{n+p}(c)$ obtemos (4.1). Além disso, podemos observar que $L_1^{n+p}(c)$ é umbílico (veja Lema 4.27, [17]).

Agora, note que a fórmula de Weingarten de M^n em $L_1^{n+p}(c)$ é dada por

$$\nabla_X^0 \xi = \bar{\nabla}_X \xi = A_\xi X + \nabla_x^\perp \xi, \quad (4.2)$$

onde $\xi \in \mathfrak{X}^\perp(M)$. De fato,

$$\nabla_X^0 \xi - \bar{\nabla}_X \xi = -\alpha(X, \xi) = -c\langle X, \xi \rangle x = 0,$$

ou seja, $\nabla_X^0 \xi = \bar{\nabla}_X \xi$, por fim, usando a fórmula de Weingarten dada em (1.8) para

imersão de M^n em $L_1^{n+p}(c)$ obtemos (4.2).

Denotando por R e $\bar{R}$ os tensores curvatura de M^n e $L_1^{n+p}(c)$. E, levando em conta que nosso espaço $L_1^{n+p}(c)$ tem curvatura seccional constante c , segue de (1.5) que

$$\bar{R}(X, Y)Z = c\{\langle Z, X \rangle Y - \langle Y, Z \rangle X\},$$

e desse modo, da equação de Gauss dada em (1.7) temos

$$\begin{aligned} \langle R(X, Y)Z, W \rangle &= c(\langle X, Z \rangle \langle Y, W \rangle - \langle Y, Z \rangle \langle X, W \rangle) + \langle II(X, Z), II(Y, W) \rangle \\ &\quad - \langle II(X, W), II(Y, Z) \rangle, \end{aligned} \quad (4.3)$$

para cada campo de vetores tangentes $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$. Além disso, para todo $\xi \in \mathfrak{X}^\perp(M)$, nós temos a equação de Codazzi, dada por

$$(\nabla_X A_\xi)Y = (\nabla_Y A_\xi)X. \quad (4.4)$$

Definição 4.1. Nós dizemos que M^n tem vetor curvatura média $\vec{H}$ paralelo quando $\nabla_X^\perp \vec{H} = 0$, para cada $X \in \mathfrak{X}(M)$.

Em particular, se $\vec{H} \neq 0$, então $\langle \vec{H}, \vec{H} \rangle$ é constante em M^n . De fato, dado $X \in \mathfrak{X}(M)$, então

$$X \langle \vec{H}, \vec{H} \rangle = 2 \langle \nabla_X \vec{H}, \vec{H} \rangle = 2 \langle \nabla_X^\perp \vec{H}, \vec{H} \rangle = 0.$$

Relembre que M^n é chamada totalmente geodésica quando a sua segunda forma fundamental é identicamente nula, e é chamada totalmente umbílica quando

$$II(X, Y) = \langle X, Y \rangle \vec{H},$$

para todo campo de vetor $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Definição 4.2. Dizemos que uma subvariedade M^n é pseudo-umbílica quando o vetor curvatura média $\vec{H}$ é uma direção umbílica.

Definição 4.3. As hiperesferas em $L_1^{n+p}(c)$ são as hipersuperfícies dadas por

$$|x - a| = Const.,$$

onde $a = (a_1, \dots, a_{n+p+1})$ é um ponto fixo arbitrário de $\mathbb{R}_\nu^{n+p+1}$. Em $L_1^{n+p}(0)$, estas são apenas as hiperesferas habituais em $\mathbb{R}_1^{n+p}$. Entre essas hiperesferas, as que são hipersuperfícies totalmente geodésicas nós chamamos de grandes hiperesferas. Todas as outras hiperesferas em $L_1^{n+p}(c)$ são chamadas de pequenas hiperesferas.

Seguindo o raciocínio utilizado na prova de ([7], Proposição 4.2), conseguimos o seguinte resultado para subvariedades pseudo-umbílicas de uma forma espacial Lorentziana.

Lema 4.1. Seja M^n uma subvariedade tipo-espaço pseudo-umbílica de uma forma espacial Lorentziana $L_1^{n+p}(c)$. Se M^n tem vetor curvatura média paralelo diferente de zero e não-nulo, então M^n é uma subvariedade mínima de uma hiperesfera pequena de $L_1^{n+p}(c)$.

Demonstração. Seja M^n uma subvariedade tipo-espaço pseudo-umbílica de uma forma espacial $L_1^{n+p}(c)$. Como, por hipótese, o vetor curvatura média $\vec{H}$ é diferente de zero, temos que $\langle \vec{H}, \vec{H} \rangle$ é constante em M^n , digamos $\langle \vec{H}, \vec{H} \rangle = a$. Além disso, como $\vec{H}$ não é tipo-luz, temos $a \neq 0$. Então podemos considerar ξ como sendo o vetor unitário na direção de $\vec{H}$, isto é, $\xi = \frac{\vec{H}}{|\vec{H}|}$. Agora, consideremos o seguinte campo de vetores em $\mathbb{R}_\nu^{n+p+1}$

$$Y(p) = x(p) + \frac{1}{a}\xi_p, \quad (4.5)$$

onde x é o vetor posição de M^n em $L_1^{n+p}(c)$. Então, derivando (4.5) na direção de um campo $X \in \mathfrak{X}(M)$ obtemos

$$X_Y = \nabla_X^0 x + \frac{1}{a} \nabla_x^0 \xi = X - \frac{1}{a} A_\xi X.$$

Como M^n é pseudo-umbílica, temos que $A_\xi = aI$. Portanto, segue que Y é constante, digamos $Y = k$. Então, voltando a (4.5) obtemos

$$|x - k| = \frac{1}{a} |\xi| = \frac{1}{a},$$

o que implica que M^n mora na hiperesfera S de $L_1^{n+p}(c)$ de centro k e raio a^{-1} .

Para finalizar, só falta concluirmos que M^n é mínima na hiperesfera S . Para tal, observe que, como o vetor curvatura média $\vec{H}$ de M^n em $L_1^{n+p}(c)$ é paralelo a ξ e, por sua vez, ξ é paralelo ao vetor $x - k$, $\vec{H}$ é sempre perpendicular à S . Portanto, $\vec{H}^\top = 0$ em S , ou seja, M é uma subvariedade mínima na pequena hiperesfera S de $L_1^{n+p}(c)$. $\square$

4.2 Subvariedades trapped com vetor curvatura média paralelo

Fixe um vetor $a \in \mathbb{R}_\nu^{n+p+1}$, então podemos escrever $a = v_1 + v_2$, onde $v_1 \in T_p L_1^{n+p}(c)$ e $v_2 \in (T_p L_1^{n+p}(c))^\perp$. Como o vetor normal é dado por $N = x$, segue que

$$v_2 = \pm \langle a, x \rangle x.$$

Se $c < 0$, então $v_2 = -\langle a, x \rangle x$. Se $c > 0$, então $v_2 = \langle a, x \rangle x$. De toda forma, $v_2 = c \langle a, x \rangle x$, logo, $a = v_1 + c \langle a, x \rangle x$. Escrevendo $a^\top$ e a^N como as projeções de v_1 sobre M e $TM^\perp$, respectivamente, temos

$$a = a^\top + a^N + c \langle a, x \rangle x. \quad (4.6)$$

Tomando a derivada covariante em (4.6) e usando as fórmulas de Gauss e de Weingarten dadas em (4.1) e (4.2), respectivamente, temos que, para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$,

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla_X^0 a = \nabla_X^0 a^\top + \nabla_X^0 a^N + \nabla_X^0 c \langle a, x \rangle x \\ &= \nabla_X a^\top - II(X, a^\top) - c \langle X, a^\top \rangle x + A_{a^N} X + \nabla_X^\perp a^N + c \langle a, x \rangle X + c \langle a^\top, X \rangle x \\ &= \nabla_X a^\top - II(X, a^\top) + A_{a^N} X + \nabla_X^\perp a^N + c \langle a, x \rangle X. \end{aligned}$$

Logo,

$$0 = (\nabla_X^0 a)^\top = \nabla_X a^\top + A_{a^N} X + c \langle a, x \rangle X,$$

e portanto,

$$\nabla_X a^\top = -A_{a^N} X - c \langle a, x \rangle X. \quad (4.7)$$

Além disso,

$$0 = (\nabla_X^0 a)^\perp = -II(X, a^\top) + \nabla_X^\perp a^N,$$

e consequentemente,

$$\nabla_X^\perp a^N = II(a^\top, X). \quad (4.8)$$

Vamos lembrar que pela Definição 1.15 temos a seguinte relação entre o operador forma A_ξ e a segunda forma fundamental de M^n em $L_1^{n+p}(c)$

$$\langle A_\xi X, Y \rangle = \langle II(X, Y), \xi \rangle.$$

Então, usando essa relação e a equação (4.7), temos

$$\begin{aligned}
 \operatorname{div}(a^\top) &= \sum_i \langle \nabla_{e_i} a^\top, e_i \rangle \\
 &= \sum_i \langle -A_{a^\top} e_i, e_i \rangle - \sum_i \langle c\langle a, x \rangle e_i, e_i \rangle \\
 &= - \sum_i \langle II(e_i, e_i), a^\top \rangle - nc\langle a, x \rangle \\
 &= -n\langle \vec{H}, a^\top \rangle - nc\langle a, x \rangle \\
 &= -n\langle \vec{H}, a \rangle - nc\langle a, x \rangle.
 \end{aligned} \tag{4.9}$$

Além disso, escrevendo $II(X, Y, \xi) = \langle II(X, Y), \xi \rangle$, e lembrando que a derivada covariante se estende a este tipo de tensor da seguinte maneira

$$(\nabla_X II)(Y, Z, \xi) = X(II(Y, Z, \xi)) - II(\nabla_X Y, Z, \xi) - II(Y, \nabla_X Z, \xi) - II(Y, Z, \nabla_X \xi),$$

obtemos

$$\begin{aligned}
 \operatorname{tr}(\nabla_{a^\top} A_\xi) &= \sum_i (\nabla_{a^\top} II)(e_i, e_i, \xi) \\
 &= \sum_i \nabla_{a^\top} II(e_i, e_i, \xi) - \sum_i II(\nabla_{a^\top} e_i, e_i, \xi) - \sum_i II(e_i, \nabla_{a^\top} e_i, \xi) \\
 &\quad - \sum_i II(e_i, e_i, \nabla_{a^\top} \xi) \\
 &= \sum_i \nabla_{a^\top} \langle A_\xi e_i, e_i \rangle - \sum_i \langle A_\xi \nabla_{a^\top} e_i, e_i \rangle - \sum_i \langle A_\xi e_i, \nabla_{a^\top} e_i \rangle \\
 &\quad - \sum_i a^\top \langle II(e_i, e_i), \xi \rangle + \sum_i \langle \nabla_{a^\top} II(e_i, e_i), \xi \rangle \\
 &= \sum_i \langle \nabla_{a^\top} A_\xi e_i, e_i \rangle + \sum_i \langle A_\xi e_i, \nabla_{a^\top} e_i \rangle - \sum_i \langle \nabla_{a^\top} e_i, A_\xi e_i \rangle \\
 &\quad - \sum_i \langle A_\xi e_i, \nabla_{a^\top} e_i \rangle - \sum_i a^\top \langle A_\xi e_i, e_i \rangle + n\langle \nabla_{a^\top} \vec{H}, \xi \rangle \\
 &= \sum_i \langle \nabla_{a^\top} A_\xi e_i, e_i \rangle - \sum_i \langle \nabla_{a^\top} e_i, A_\xi e_i \rangle - \sum_i a^\top \langle A_\xi e_i, e_i \rangle + n\langle \nabla_{a^\top}^\perp \vec{H}, \xi \rangle
 \end{aligned}$$

Portanto, tomando um referencial ortonormal local $\{e_1, \dots, e_n\}$ em M^n tal que $A_\xi e_i = \lambda_i^\xi e_i$, obtemos

$$\operatorname{tr}(\nabla_{a^\top} A_\xi) = n\langle \nabla_{a^\top}^\perp \vec{H}, \xi \rangle. \tag{4.10}$$

Por fim, sendo $\{e_1, \dots, e_n\}$ um referencial geodésico e usando a fórmula de Codazzi dada

em (4.4), e as equações (4.7) e (4.10) conseguimos que

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(A_\xi a^\top) &= \sum_i \langle \nabla_{e_i}(A_\xi a^\top), e_i \rangle \\
&= \sum_i e_i \langle A_\xi a^\top, e_i \rangle \\
&= \sum_i e_i (II(a^\top, e_i, \xi)) \\
&= \sum_i \nabla_{e_i} II(a^\top, e_i, \xi) \\
&= \sum_i (\nabla_{e_i} II)(a^\top, e_i, \xi) + \sum_i II(\nabla_{e_i} a^\top, e_i, \xi) + \sum_i II(a^\top, e_i, \nabla_{e_i}^\perp \xi) \\
&= \sum_i (\nabla_{a^\top} II)(e_i, e_i, \xi) - \sum_i \langle (A_{a^N} \circ A_\xi)(e_i), e_i \rangle - c \langle a, x \rangle \sum_i \langle A_\xi e_i, e_i \rangle \\
&\quad + \sum_i \langle II(a^\top, e_i), \nabla_{e_i}^\perp \xi \rangle \\
&= n \langle \nabla_{a^\top}^\perp \vec{H}, \xi \rangle - \operatorname{tr}(A_{a^N} \circ A_\xi) - c \langle a, x \rangle \operatorname{tr}(A_\xi) + \sum_i \langle II(a^\top, e_i), \nabla_{e_i}^\perp \xi \rangle.
\end{aligned}$$

Portanto, para todo $\xi \in \mathfrak{X}^\perp(M)$, temos

$$\operatorname{div}(A_\xi a^\top) = n \langle \nabla_{a^\top}^\perp \vec{H}, \xi \rangle - \operatorname{tr}(A_{a^N} \circ A_\xi) - c \langle a, x \rangle \operatorname{tr}(A_\xi) + \sum_i \langle II(a^\top, e_i), \nabla_{e_i}^\perp \xi \rangle. \quad (4.11)$$

Agora, feitas as considerações acima, podemos apresentar o primeiro resultado deste capítulo.

Teorema 4.2. *Seja $x : M^n \rightarrow L_1^{n+p}(c)$ uma subvariedade trapped completa com vetor curvatura média $\vec{H}$ paralelo e curvatura escalar normalizada R limitada. Suponha que existe um vetor $a \in \mathbb{R}_v^{n+p+1}$ diferente de zero tal que a^N é colinear à $\vec{H}$ e $|a^\top| \in \mathcal{L}^1(M)$. Assuma, além disso, quando $c \geq 0$, o vetor a tipo-tempo e, quando $c < 0$, a^N tipo-tempo. Então M^n é pseudo-umbílica e, em particular, M^n é uma subvariedade mínima de uma pequena hipersfera de $L_1^{n+p}(c)$.*

Demonstração. Inicialmente, tomaremos um referencial ortonormal local $\{e_1, \dots, e_n\}$ em M^n . Então, de (4.3) obtemos que a norma ao quadrado da segunda forma funda-

mental II de M^n satisfaz

$$\begin{aligned}
 |II|^2 &= \sum_{i,j} |II(e_i, e_j)|^2 \\
 &= \sum_{i,j} [c(|e_i||e_j| - \langle e_i, e_j \rangle) + \langle II(e_i, e_i), II(e_j, e_j) \rangle - \langle R(e_i, e_j)e_i, e_j \rangle] \\
 &= cn(n-1) + n^2 \langle \vec{H}, \vec{H} \rangle - n(n-1)R \\
 &= n^2 \langle \vec{H}, \vec{H} \rangle + n(n-1)(c-R).
 \end{aligned} \tag{4.12}$$

Por hipótese, temos que M^n tem vetor curvatura média paralelo, ou seja, $\langle \vec{H}, \vec{H} \rangle$ é constante, e que a curvatura escalar normalizada é limitada, portanto, de (4.12) segue que II é limitada em M^n . Então, tomando $\xi = \vec{H}$ em (4.11) conseguimos

$$\operatorname{div}(A_{\vec{H}}a^\top) = -\operatorname{tr}(A_{a^N} \circ A_{\vec{H}}) - c\langle a, x \rangle \operatorname{tr}(A_{\vec{H}}).$$

Utilizando (4.9), obtemos

$$\begin{aligned}
 \operatorname{div}(A_{\vec{H}}a^\top) &= -\operatorname{tr}(A_{a^N} \circ A_{\vec{H}}) + \operatorname{tr}(A_{\vec{H}}) \left(\frac{1}{n} \operatorname{div}(a^\top) + \frac{1}{n} \langle a, n\vec{H} \rangle \right) \\
 &= -\operatorname{tr}(A_{a^N} \circ A_{\vec{H}}) + \operatorname{tr}(A_{\vec{H}}) \frac{1}{n} \operatorname{div}(a^\top) + \frac{1}{n} \operatorname{tr}(A_{a^N}) \operatorname{tr}(A_{\vec{H}}).
 \end{aligned}$$

E usando, novamente, que o vetor curvatura média de M^n é paralelo, conseguimos que

$$\operatorname{div}(\operatorname{tr}(A_{\vec{H}})a^\top) = \operatorname{tr}(A_{\vec{H}}) \operatorname{div}(a^\top).$$

Portanto, considerando $\mathcal{K} = (A_{\vec{H}} - \langle \vec{H}, \vec{H} \rangle I)a^\top$ segue que

$$\begin{aligned}
 \operatorname{div}\mathcal{K} &= -\operatorname{tr}(A_{a^N} \circ A_{\vec{H}}) + \operatorname{tr}(A_{\vec{H}}) \frac{1}{n} \operatorname{div}(a^\top) + \frac{1}{n} \operatorname{tr}(A_{a^N}) \operatorname{tr}(A_{\vec{H}}) - \frac{1}{n} \operatorname{tr}(A_{\vec{H}}) \operatorname{div}(a^\top) \\
 &= -\operatorname{tr}(A_{a^N} \circ A_{\vec{H}}) + \frac{1}{n} \operatorname{tr}(A_{a^N}) \operatorname{tr}(A_{\vec{H}}).
 \end{aligned} \tag{4.13}$$

Por outro lado, como a^N é colinear à $\vec{H}$, existe uma função suave $\lambda : M^n \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $a^N = \lambda \vec{H}$. Além disso, como M^n é uma subvariedade trapped e levando em consideração nossa hipótese sobre a ser tipo-tempo no caso em que $c \geq 0$, e a^N ser tipo-tempo no caso em que $c < 0$, podemos concluir que λ tem sinal estrito em M^n . Com efeito, suponha, por absurdo, que λ mude de sinal em M^n , então sendo M^n conexa, teríamos $\lambda = 0$ para algum $p_0 \in M^n$. Logo, nesse p_0 , se $c \geq 0$, temos

$$0 > |a|^2 = |a^\top|^2 + \langle a, x \rangle^2,$$

e se $c < 0$, temos

$$0 > |a^N|^2 = 0.$$

Em ambos os casos temos um absurdo, e assim, concluímos que λ tem sinal estrito em M^n .

Agora, usando que $a^N = \lambda \vec{H}$ em (4.13), conseguimos

$$\operatorname{div} \mathcal{K} = \lambda \left(-\operatorname{tr}(A_{\vec{H}}^2) + \frac{1}{n} \operatorname{tr}(A_{\vec{H}})^2 \right).$$

Consequentemente, concluímos que $\operatorname{div} \mathcal{K}$ não muda de sinal em M^n , uma vez que, $\frac{1}{n} \operatorname{tr}(A_{\xi})^2 - \operatorname{tr}(A_{\xi}^2)$ é sempre não-positivo, e é identicamente nulo se, e somente se, $\xi \in \mathfrak{X}^\perp(M)$ for uma direção umbílica. Além disso, nós temos que

$$|\mathcal{K}| \leq (|A_{\vec{H}}| - |\langle \vec{H}, \vec{H} \rangle|) |a^\top| \in \mathcal{L}^1(M).$$

Então, podemos aplicar o Lema 3.2 no campo de vetores $\mathcal{K}$, e assim, concluímos que $\operatorname{div} \mathcal{K} = 0$ em M^n . Portanto,

$$\lambda \left(-\operatorname{tr}(A_{\vec{H}}^2) + \frac{1}{n} \operatorname{tr}(A_{\vec{H}})^2 \right) = 0$$

o que implica que $\vec{H}$ é uma direção umbílica, ou seja, M^n é uma subvariedade pseudo-umbílica. Em particular, pelo Lema 4.1, concluímos que M^n é uma subvariedade mínima de uma pequena hipersfera de $L_1^{n+p}(c)$. $\square$

Seguindo o raciocínio utilizado por Alías e Pastor ([3], ver Seção 2) é possível verificar que não existe subvariedade n -dimensional tipo-espaço fechada em $\mathbb{R}_p^{n+p}$. De fato, seja M^n uma subvariedade tipo-espaço de $\mathbb{R}_p^{n+p}$. Tome $a \in \mathbb{R}_p^{n+p}$ um vetor arbitrário não-nulo. Podemos escrever

$$a = a^\top - \sum_{i=1}^p \langle a, N_i \rangle N_i,$$

onde $a^\top \in \mathfrak{X}(M)$ e $\{N_1, \dots, N_p\}$ é uma base ortonormal de $\mathfrak{X}^\perp(M)$.

Considere a função altura $\langle a, x \rangle$ definida em M . Nós temos que o gradiente de $\langle a, x \rangle$ é dado por

$$\nabla \langle a, x \rangle = a^\top = a + \sum_{i=1}^p \langle a, N_i \rangle N_i.$$

Logo,

$$|\nabla \langle a, x \rangle|^2 = \langle a, a \rangle + \sum_{i=1}^p \langle a, N_i \rangle^2 \geq \langle a, a \rangle.$$

Em particular, quando a é tipo-espaço, a função altura não possui ponto crítico em M . Portanto, M não pode ser fechada.

O próximo resultado é uma extensão do fato citado acima, e ele garante, sob as hipóteses adequadas, a não-existência de subvariedades trapped imersas no espaço de Minkowski $\mathbb{R}_1^{n+p}$ ($n + p$)-dimensional.

Proposição 4.3. Não existe subvariedade trapped completa n -dimensional imersa em $\mathbb{R}_1^{n+p}$ com vetor curvatura média paralelo, curvatura escalar normalizada limitada e tal que, para algum vetor tipo-tempo $a \in \mathbb{R}_1^{n+p}$, $|a^\top| \in \mathcal{L}^1(M)$ e a^N seja colinear à $\vec{H}$.

Demonstração. Suponhamos, por absurdo, que exista tal subvariedade satisfazendo as condições descritas na Proposição. Tomando $\xi = \vec{H}$ em (4.11) obtemos

$$\operatorname{div}(A_{\vec{H}}a^\top) = -\operatorname{tr}(A_{a^N} \circ A_{\vec{H}}) = -\lambda \operatorname{tr}(A_{\vec{H}}^2),$$

onde $\lambda : M^n \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função suave tal que $a^N = \lambda \vec{H}$.

Como observado na demonstração do Teorema 4.2, λ tem sinal estrito em M^n , logo $\operatorname{div}(A_{\vec{H}}a^\top)$ não muda de sinal em M^n . Além disso, como estamos supondo que a curvatura escalar normalizada de M^n é limitada, segue de (4.12) que a segunda forma fundamental é limitada, e consequentemente, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$|A_{\vec{H}}a^\top| \leq C|a^\top| \in \mathcal{L}^1(M).$$

Logo, pelo Lema 3.2, concluímos que $\operatorname{div}(A_{\vec{H}}a^\top) = 0$, e consequentemente, $\operatorname{tr}(A_{\vec{H}}^2) = 0$ em M^n . Contudo,

$$0 \leq \operatorname{tr}(A_{\vec{H}}^2) - \frac{1}{n}\operatorname{tr}(A_{\vec{H}})^2 = -\frac{1}{n}\operatorname{tr}(A_{\vec{H}})^2 \leq 0,$$

portanto, $\operatorname{tr}(A_{\vec{H}}) = \langle \vec{H}, \vec{H} \rangle = 0$ em M^n , o que contradiz a hipótese de que M^n é uma subvariedade trapped. $\square$

Observação 4.1. Note que se $p = 1$ a definição de pseudo-umbílica coincide com a de totalmente umbílica. Mais ainda, a condição de a^N ser colinear a $\vec{H}$ é satisfeita automaticamente.

Corolário 4.4. As únicas hipersuperfícies tipo-espaço completas de $\mathbb{R}_1^{n+1}$ tendo curvatura média constante e tais que $|a^\top| \in \mathcal{L}^1(M)$, para algum vetor tipo-tempo $a \in \mathbb{R}_1^{n+1}$, são os hiperplanos tipo-espaço.

Demonstração. Seja Σ uma hipersuperfície tipo-espaço completa de $\mathbb{R}_1^{n+p}$. Pela observação acima temos que a condição de a^N ser colinear a $\vec{H}$ é automaticamente satisfeita. Além disso, pelo Teorema 1 de [13] sabemos que uma hipersuperfície tipo-espaço

completa de $\mathbb{R}_1^{n+1}$ com curvatura média constante deve ter segunda forma fundamental limitada, e consequentemente, curvatura escalar normalizada limitada. Então Σ não pode ser uma subvariedade trapped, uma vez que pela Proposição 4.3 não existe subvariedade trapped em $\mathbb{R}_1^{n+1}$ com tais propriedades.

Por outro lado, observe que em codimensão 1, uma subvariedade é trapped desde que o vetor curvatura média $\vec{H}$ seja não-nulo. Então, devemos ter $\vec{H} = 0$, ou seja, Σ será uma hipersuperfície mínima completa, e pelo Teorema de Cheng-Yau [8], temos que as únicas mínimas completas no espaço de Minkowski são os hiperplanos. $\square$

Observação 4.2. Em 1914, Bernstein provou que as únicas superfícies mínimas no espaço Euclidiano $\mathbb{R}^3$ são os planos. Posteriormente, em [5], Calabi mostrou que as únicas hipersuperfícies mínimas completas tipo-espaço no espaço de Minkowski $\mathbb{R}^{n+1}$ para $n \leq 4$ são os hiperplanos tipo-espaço. O teorema de Cheng-Yau [8] estende o resultado de Calabi para o caso geral.

4.3 Subvariedades marginally trapped em $L_1^{n+p}(c)$

Tomando um referencial ortonormal $\{e_1, \dots, e_n\}$ em M^n , pela equação de Gauss dada em (4.3) temos

$$\begin{aligned} \text{Ric}(X, Y) &= \sum_i \langle R(X, e_i)Y, e_i \rangle \\ &= \sum_i [c(\langle X, Y \rangle \langle e_i, e_i \rangle - \langle e_i, Y \rangle \langle X, e_i \rangle) + \langle II(X, Y), II(e_i, e_i) \rangle \\ &\quad - \langle II(X, e_i), II(e_i, Y) \rangle] \\ &= c(n-1)\langle X, Y \rangle + n\langle II(X, Y), \vec{H} \rangle - \sum_i \langle II(X, e_i), II(e_i, Y) \rangle, \end{aligned} \quad (4.14)$$

onde Ric denota a curvatura de Ricci de M^n .

Agora, tomando $\xi = a^N$ em (4.11) e usando que, de acordo com (4.8), $\nabla_X^\perp a^N = II(a^\top, X)$, obtemos

$$\text{div}(A_{a^N} a^\top) = n\langle \nabla_{a^\top}^\perp \vec{H}, a^N \rangle - \text{tr}(A_{a^N}^2) - c\langle a, x \rangle \text{tr}(A_{a^N}) + \sum_i \langle II(a^\top, e_i), II(a^\top, e_i) \rangle.$$

Por fim, considerando $X = Y = a^\top$ em (4.14), e substituindo na expressão acima para o $\text{div}(A_{a^N} a^\top)$, obtemos a seguinte fórmula para a divergência

$$\begin{aligned} \text{div}(A_{a^N} a^\top) &= n\langle \nabla_{a^\top}^\perp \vec{H}, a^N \rangle - \text{tr}(A_{a^N}^2) - c\langle a, x \rangle \text{tr}(A_{a^N}) - \text{Ric}(a^\top, a^\top) \\ &\quad + c(n-1)|a^\top|^2 + n\langle II(a^\top, a^\top), \vec{H} \rangle. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Se considerarmos, inicialmente, o nosso espaço ambiente como sendo o espaço de Minkowski $\mathbb{R}_1^{n+p}$ $(n+p)$ -dimensional, obtemos o seguinte resultado.

Proposição 4.5. Seja $x : M^n \rightarrow \mathbb{R}_1^{n+p}$ uma subvariedade marginally trapped completa, pseudo-umbílica, com vetor curvatura média $\vec{H}$ paralelo e curvatura de Ricci não-negativa. Se existem p vetores $a_1, \dots, a_p \in \mathbb{R}_1^{n+p}$ tais que $a_1^N, \dots, a_p^N$ são linearmente independentes, com $|a_i^\top| \in \mathcal{L}^1(M)$ e $A_{a_i^N}$ limitado em M^n para cada $1 \leq i \leq p$, então M^n é totalmente geodésica.

Demonstração. Sendo M^n pseudo-umbílica, se denotarmos por $\lambda_i^{\vec{H}}$, $i = 1, \dots, n$ os autovalores de $A_{\vec{H}}$, obtemos

$$\lambda_1^{\vec{H}} = \dots = \lambda_n^{\vec{H}} = \langle \vec{H}, \vec{H} \rangle.$$

Por outro lado, como M^n é uma subvariedade marginally trapped nós temos que $\vec{H}$ é tipo-luz, e portanto, $\lambda_i^{\vec{H}} = 0$ para todo $i = 1, \dots, n$. Então, como $A_{\vec{H}}$ é simétrico e todos os seus autovalores são iguais a zero, nós concluímos que $A_{\vec{H}}$ é um operador nulo.

Considerando $a = a_i$, para algum $i = 1, \dots, p$, e usando nossas hipóteses sobre o vetor curvatura média ser paralelo e a curvatura de Ricci ser não-negativa, obtemos de (4.15)

$$\operatorname{div}(A_{a^N} a^\top) = -\operatorname{tr}(A_{a^N}^2) - \operatorname{Ric}(a^\top, a^\top) \leq 0.$$

Por outro lado, como, por hipótese, o operador $A_{a_i^N}$ é limitado para cada $1 \leq i \leq p$, segue que existe uma constante $C > 0$ tal que

$$|A_{a^N} a^\top| \leq C |a^\top| \in \mathcal{L}^1(M).$$

Então, usando o Lema 3.2, concluímos que $\operatorname{div}(A_{a^N} a^\top) = 0$ em M^n . Consequentemente, $\operatorname{tr}(A_{a^N}^2) = 0$. Logo, $A_{a^N} = 0$ em M^n , e portanto,

$$II(X, Y) = \sum_{i=1}^p \langle A_{a_i^N} X, Y \rangle a_i^N = 0.$$

Ou seja, M^n é totalmente geodésica. □

Agora, semelhante ao que fizemos na seção anterior, vamos obter uma expressão para o $\operatorname{div}(\langle a, \vec{H} \rangle a^\top)$, para assim, podermos calcular o divergente do campo $\mathcal{V} = (A_{a^N} -$

$\langle a, \vec{H} \rangle I a^\top$. Para tal, observe que, usando (4.8) e (4.9), obtemos

$$\begin{aligned}
 \operatorname{div}(\langle a, \vec{H} \rangle a^\top) &= \langle a, \vec{H} \rangle \operatorname{div}(a^\top) + a^\top \langle a, \vec{H} \rangle \\
 &= -\frac{1}{n} \operatorname{tr}(A_{a^N})^2 - c \langle a, x, \rangle \operatorname{tr}(A_{a^N}) + a^\top \langle a^N, \vec{H} \rangle \\
 &= -\frac{1}{n} \operatorname{tr}(A_{a^N})^2 - c \langle a, x, \rangle \operatorname{tr}(A_{a^N}) + \langle \nabla_{a^\top}^0 a^N, \vec{H} \rangle + \langle a^N, \nabla_{a^\top}^0 \vec{H} \rangle \\
 &= -\frac{1}{n} \operatorname{tr}(A_{a^N})^2 - c \langle a, x, \rangle \operatorname{tr}(A_{a^N}) + \langle \nabla_{a^\top}^\perp a^N, \vec{H} \rangle + \langle a^N, \nabla_{a^\top}^\perp \vec{H} \rangle \\
 &= -\frac{1}{n} \operatorname{tr}(A_{a^N})^2 - c \langle a, x, \rangle \operatorname{tr}(A_{a^N}) + \langle II(a^\top, a^\top), \vec{H} \rangle + \langle a^N, \nabla_{a^\top}^\perp \vec{H} \rangle.
 \end{aligned} \tag{4.16}$$

Portanto, de (4.15) e (4.16), obtemos

$$\begin{aligned}
 \operatorname{div}[(A_{a^N} - \langle a, \vec{H} \rangle I) a^\top] &= n \langle \nabla_{a^\top}^\perp \vec{H}, a^N \rangle - \operatorname{tr}(A_{a^N}^2) - c \langle a, x \rangle \operatorname{tr}(A_{a^N}) - \operatorname{Ric}(a^\top, a^\top) \\
 &\quad + c(n-1)|a^\top|^2 + n \langle II(a^\top, a^\top), \vec{H} \rangle + \frac{1}{n} \operatorname{tr}(A_{a^N})^2 \\
 &\quad + c \langle a, x \rangle \operatorname{tr}(A_{a^N}) - \langle II(a^\top, a^\top), \vec{H} \rangle - \langle a^N, \nabla_{a^\top}^\perp \vec{H} \rangle \\
 &= (n-1) \langle \nabla_{a^\top}^\perp \vec{H}, a^N \rangle - \operatorname{tr}(A_{a^N}^2) + \frac{1}{n} \operatorname{tr}(A_{a^N})^2 - T(a^\top, a^\top).
 \end{aligned} \tag{4.17}$$

Aqui, I denota a identidade na álgebra de campos de vetores suaves e, seguindo a terminologia estabelecida em [4], T é um tensor covariante em M^n definido por

$$T(X, X) = \operatorname{Ric}(X, X) - c(n-1)|X|^2 - (n-1) \langle II(X, X), \vec{H} \rangle. \tag{4.18}$$

Agora, já temos todas as ferramentas necessárias para apresentar o último resultado deste trabalho.

Teorema 4.6. *Seja $x : M^n \rightarrow L_1^{n+p}(c)$ uma subvariedade marginally trapped completa, pseudo-umbílica, com vetor curvatura média $\vec{H}$ paralelo e $\operatorname{Ric} \geq c(n-1)$. Se existem p vetores $a_1, \dots, a_p \in L_1^{n+p}(c)$ tais que $a_1^N, \dots, a_p^N$ são linearmente independentes, com $A_{a_i^N}$ limitado em M^n e $|a_i^\top| \in \mathcal{L}^1(M)$ para cada $1 \leq i \leq p$, então M^n é totalmente umbílica.*

Demonstração. Seguindo como na primeira parte da Proposição 4.5, conseguimos mostrar que o operador $A_{\vec{H}}$ é nulo, logo $\langle II(X, X), \vec{H} \rangle = 0$, para cada $X \in \mathfrak{X}(M)$. Portanto, tomando $a = a_i$ para algum $i = 1, \dots, p$ e, usando nossa hipótese sobre a curvatura de Ricci de M^n , segue de (4.18) que

$$T(a^\top, a^\top) = \operatorname{Ric}(a^\top, a^\top) - c(n-1)|a^\top|^2 \geq 0.$$

Consequentemente, considerando o campo de vetores $\mathcal{V} = (A_{a^N} - \langle a, \vec{H} \rangle I)a^\top$, obtemos de (4.17)

$$\operatorname{div} \mathcal{V} = -\operatorname{tr}(A_{a^N}^2) + \frac{1}{n} \operatorname{tr}(A_{a^N})^2 - T(a^\top, a^\top) \leq 0.$$

Por outro lado,

$$|\mathcal{V}| \leq (|A_{a^N}| + |\langle a, \vec{H} \rangle|)|a^\top| \in \mathcal{L}^1(M).$$

Então, aplicando o Lema 3.2 obtemos que $\operatorname{div} \mathcal{V} = 0$ em M^n , portanto,

$$-\operatorname{tr}(A_{a^N}^2) + \frac{1}{n} \operatorname{tr}(A_{a^N})^2 = 0,$$

o que implica que a^N é uma direção umbílica de M^n . Consequentemente, temos

$$II(X, Y) = \sum_{i=1}^n \langle A_{a_i^N} X, Y \rangle a_i^N = \langle X, Y \rangle \vec{H},$$

ou seja, M^n é totalmente umbílica. □

Referências Bibliográficas

- [1] L. J. Alías, V. L. Cánovas, A. G. Colares, *Marginally trapped submanifolds in generalized Robertson–Walker spacetimes*, Gen Relativ Gravit **49** (2017), 1-23.
- [2] L. J. Alías, A.G. Colares, *Uniqueness of spacelike hypersurfaces with constant higher order mean curvature in generalized Robertson-Walker spacetimes*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc., **143** (2007), 703-729.
- [3] L. J. Alías, J. A. Pastor, *Constant mean curvature spacelike hypersurfaces with spherical boundary in the Lorentz–Minkowski space*, J. Geom. Phys. **28** (1998), 85–93.
- [4] L. J. Alías, A. Romero, *Integral formulas for compact spacelike n -submanifolds in de Sitter spaces applications to the parallel mean curvature vector case*, Manuscripta Math., **87** (1995), 405-416.
- [5] E. Calabi, *Examples of Bernstein problems for some nonlinear equations*, Math. Proc. Cambridge Phil. Soc., **82** (1977), 489–495.
- [6] A. Caminha, P. Souza, F. Camargo, *Complete foliations of space forms by hypersurfaces*, Bull. Brazilian Math. Soc., **41** (2010), 339-353.
- [7] B.-Y. Chen, *Total Mean Curvature and Submanifolds of Finite Type*, World Scientific, New Jersey, (1984).
- [8] S. Y. Cheng, S. T. Yau, *Maximal spacelike hypersurfaces in the Lorentz- Minkowski space*, Ann. of Math., **104** (1976), 407-419.
- [9] S.S. Chern, *On surfaces of constant mean curvature in a three-dimensional space of constant curvature*, Geometric Dynamics, Springer Lecture Notes, **1007** (1983), 104-108.
- [10] F. C. Cruz Jr., E. A. Lima Jr., M. S. Santos, *Rigidity and nonexistence results for r -trapped submanifolds in GRW spacetimes*, Preprint.

- [11] A. W., Cunha, H. F. Lima, E. A. Lima Jr., M. S. Santos, *Weakly trapped submanifolds immersed in generalized Robertson-Walker spacetimes*, J. Math. Anal., **484** (2020).
- [12] H. Hopf, *Differential Geometry in the large*. Lectures Notes in Mathematics, vol. 1000. Springer, Berlin, (1983).
- [13] U.-H. Ki, H.-J. Kim, H. Nakagawa, *On space-like hypersurfaces with constant mean curvature of a Lorentz space form*, Tokyo J. Math., **14** (1991), 205-216.
- [14] H. F. Lima, F. R. Santos, A. L. Velásquez, *On the geometry of trapped and marginally trapped submanifolds in Lorentzian space forms*, Commun. Contemp. Math., **18** (2016) 1550073.
- [15] S. Montiel, *Uniqueness of spacelike hypersurfaces of constant mean curvature in foliated spacetimes*, Math. Ann., **314** (1999), 529-553.
- [16] H. Omori, *Isometric immersions of Riemannian manifolds*, J. Math. Soc. Japan, **19** (1967), 205-214.
- [17] B. O'Neill, *Semi-Riemannian Geometry, with Applications to Relativity*, Academic Press, New York, (1983).
- [18] R. Penrose, *Gravitational collapse and space-time singularities*, Phys. Rev. Lett. **14** (1965), 57.
- [19] S. Pigola, M. Rigoli, A. G. Setti, *A remark on the maximum principle and stochastic completeness*, Proc. Am. Math. Soc., **131** (2003), 1283-1288.
- [20] S. Pigola, M. Rigoli, A. G. Setti, *Maximum principles on Riemannian manifolds and applications*, Memories of the American Mathematical Society, vol. 174, no. 822., American Mathematical Society, Providence, (2005).
- [21] A. Ros, S. Montiel, *Compact Hypersurfaces: The Alexandrov Theorem for Higher Order Mean Curvatures*, in Differential Geometry. Essex: Longman (1991).
- [22] F. R. Santos, *Hipersuperfícies Tipo-Espaço com Curvatura de Ordem Superior Constante no Espaço de Sitter*, Dissertação de Mestrado, UFCG (2013).
- [23] R. Schoen, S.T. Yau, *Proof of the positive mass theorem. II*, Commun. Math. Phys. **79** (1981), 231-260.
- [24] S. T. Yau, *Harmonic function on complete Riemannian manifolds*, Commun. Pure Appl. Math., **28** (1975), 201-228.