UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

Maria Rita Rocha Nunes

DEMONSTRAÇÕES VISUAIS EM MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO BÁSICA

João Pessoa
2021

Maria Rita Rocha Nunes

DEMONSTRAÇÕES VISUAIS EM MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática do Centro de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade Federal da Paraíba como requisito parcial para obtenção do título de Licenciada em Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Elisandra de Fátima Gloss de Moraes.

João Pessoa
Outubro de 2021

Catalogação na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

N972d Nunes, Maria Rita Rocha.
Demonstrações visuais em matemática na educação básica
/ Maria Rita Rocha Nunes. - João Pessoa, 2021.
43 p. : il.

Orientação: Elisandra de Fatima Gloss de Moraes.
TCC (Graduação/Licenciatura em Matemática) - UFPB/CCEN.

1. Demonstrações visuais de problemas matemáticos. 2. Software Geogebra. 3. Geometria. I. Moraes, Elisandra de Fatima Gloss de. II. Título.

UFPB/CCEN CDU 514.11(043.2)

Elaborado por Josélia Maria Oliveira da Silva - CRB-15/113

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA

FOLHA Nº 3 / 2021 - CCEN-DM (11.01.14.04)

Nº do Protocolo: 23074.109122/2021-51

João Pessoa-PB, 27 de Outubro de 2021

DEMONSTRAÇÕES VISUAIS EM MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO BÁSICA

por

Maria Rita Rocha Nunes

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática do Centro de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade Federal da Paraíba como requisito parcial para obtenção do título de licenciada em Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Elisandra de Fátima Gloss de Moraes.

Aprovado em 27 de outubro de 2021.

Comissão Examinadora:

(Assinado digitalmente em 27/10/2021 17:16)
ADRIANO ALVES DE MEDEIROS
PROFESSOR DO MAGISTERIO SUPERIOR
Matrícula: 2130828

(Assinado digitalmente em 27/10/2021 15:35)
ELISANDRA DE FATIMA GLOSS DE MORAES
PROFESSOR DO MAGISTERIO SUPERIOR
Matrícula: 1737844

(Assinado digitalmente em 27/10/2021 16:29)
GABRIELA ALBUQUERQUE WANDERLEY
PROFESSOR DO MAGISTERIO SUPERIOR
Matrícula: 1622615

Para verificar a autenticidade deste documento entre em **https://sipac.ufpb.br/documentos/** informando seu número: **3**, ano: **2021**, documento(espécie): **FOLHA**, data de emissão: **27/10/2021** e o código de verificação: **4cd067bca6**

Dedicatória
A minha mãe Edinalva, aos meus irmãos Daniela e Davi e a Kaylanne.

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço a Deus, por nunca me desemparar e ter permitido que eu chegasse até aqui. Nos momentos difíceis o Senhor mostrou-se ainda mais presente.

À Santíssima Virgem Maria, por ser tão generosa e cuidadosa comigo, se estou aqui hoje é devido a sua intercessão.

Aos meus pais, pelo apoio incondicional, nestes anos de estudo. Tudo que sou devo a eles.

Aos meus irmãos, Davi e Daniela, por terem me ajudado em tudo nestes anos e por todo amor que têm por mim.

A Joemerson de Oliveira, pela sua amizade, pela sua paciência e atenção ao me ajudar em tantas disciplinas e no TCC. Muito obrigada mesmo jamais teria concluído a graduação sem a sua ajuda.

À Profa. Dra. Elisandra de Fátima Gloss de Moraes, minha orientadora, pela sua paciência, pela sua bondade e pelas inúmeras dúvidas esclarecidas, sem a sua ajuda não teria concluído este trabalho.

À Profa. Dra. Miriam da Silva Pereira, pela oportunidade de participar da Olimpíada Pessoense de Matemática - OPM durante dois anos e por toda atenção enquanto coordenadora do curso.

Ao prof. Dr. Adriano Alves de Medeiros e à Profa. Dra. Gabriela Albuquerque Wanderley, que aceitaram participar da banca examinadora e pelas sugestões.

Ao Cirurgião Geral Dr. Marcílio Moreira, por ter salvo minha vida ao realizar uma cirurgia de urgência no dia 22 de Maio de 2020 em Patos - PB, sem sua competência eu não teria sobrevivido, e aos profissionais da saúde que o ajudaram.

Ao cirurgião Geral Dr.Victor Cunha, por toda sua competência que me devolveu a qualidade de vida no dia 02 de Fevereiro de 2021, no Hospital Nova Esperança, eis um dos dias mais felizes da minha vida. Muito obrigada mesmo e a toda sua equipe, minha vida é outra desde aquele dia.

A todos os meus familiares, pelos apoio incondicional neste anos de estudo.

Aos amigos que o Catolicismo me presenteou nestes anos morando em João Pessoa, sem as orações e o amor de vocês eu não estaria aqui hoje.

A todos os alunos com os quais estudei nestes anos e aos servidores da UFPB.

Resumo

O presente trabalho aborda demonstrações de problemas matemáticos estudados no ensino básico com o auxílio do software Geogebra. Estes problemas são facilmente encontrados em livros didáticos e sites voltados ao ensino básico. Buscamos trazer as demonstrações mais simples de cada problema, de maneira que o texto seja acessível aos alunos do ensino básico. Apresentaremos algumas demonstrações que apesar de contemplarem assuntos do ensino fundamental II e ensino médio são pouco comuns em sala de aulas e são mais comuns em olimpíadas de matemática. Veremos também o uso da geometria em outras áreas da matemática.

Palavras-chave: Demonstrações Visuais; Geogebra; Geometria.

Abstract

The present work approaches demonstrations of mathematical problems studied in basic education with the help of Geogebra software. These problems are easily found in textbooks and websites aimed at basic education. We seek to bring the simplest demonstrations of each problem, so that the text is accessible to elementary school students. We will present some demonstrations that, despite covering subjects from elementary school II and high school, are uncommon in the classroom and are more common in math olympics. We will also see the use of geometry in the other areas of math.

Keywords: Visual demonstrations; GeoGebra; Geometry.

Conteúdo

Introdução **8**

1 Conhecendo o GeoGebra **10**
1.1 História do GeoGebra 10
1.2 A interface e os comandos do GeoGebra 10

2 Alguns resultados básicos em geometria plana **23**
2.1 Alguns resultados sobre triângulos 24

3 O uso da Geometria para resolver problemas de outros conteúdos da Matemática **33**
3.1 Desigualdades 33
3.2 Identidade 39

Considerações finais **42**

Bibliografia **43**

Introdução

"A demonstração matemática é o suporte para o desenvolver, gerar e transmitir os conhecimentos matemáticos, em qualquer nível escolar é necessário o estudo das demonstrações".(Amado, Sanchez e Pinto, 2015). Assim, a aplicação deste conhecimento será de grande importância para o desenvolvimento escolar dos alunos. Essas demonstrações no ensino básico devem começar de maneira mais simples. A utilização de materiais manipuláveis e softwares podem auxiliar os alunos com esse primeiro contato com as demonstrações.

Sendo assim, neste trabalho buscamos apresentar uma forma particular de argumentação, as demonstrações visuais denominadas "Provas Sem Palavra"(PSP). Apesar de não possuírem um rigor matemático as PSP podem facilitar no convencimento da veracidade de determinados resultados matemáticos. Conforme, Leivas, Mathias e Silva (2019) "A natureza das PSP as impossibilita de serem chamadas de provas/demonstrações sob a visão formalista". Com isso, apresentaremos alguns resultados matemáticos e recorreremos ao apelo visual e em seguida, ofereceremos um argumento analítico que justifica a primeira parte.

Acerca do tema PSP, utilizamos como base a dissertação de mestrado de I. Nunes (2020), "Demonstrações visuais provas com e sem palavras", que pode ser vista em [6], o artigo dos professores Carmen Vieira, Hilário Alencar e José Carlos Pinto, (2019), "Provas sem palavras, visualização, animação e Geogebra" (veja [3]), e o livro de R. Nelsen, (1993), "Proofs without words: Exercises in visual thinking", que nos auxiliaram para escrever esse trabalho. Citamos também uma palestra apresentada pelo Professor Mestre Edney Freitas Gregório no 1° Workshop de Matemática Pura e Aplicada da Universidade Federal do Ceará (edição online), ocorrida em Janeiro de 2021, cujo tema era "demonstrações visuais". Assim, podemos ver que "provas sem palavras" é objeto de estudos atuais na matemática.

O estudo da geometria sempre esteve presente na vida humana, mesmo que de forma não-sistematizada como temos hoje nas escolas. Os Egípcios, por exemplo, faziam uso da Geometria para construção das pirâmides, os babilônios faziam uso para calcular a posição dos astros.

Ao analisarmos a BNCC (Base Nacional Comum Curricular), vemos a

importância do estudo da geometria, que além de estar presente no nosso cotidiano, tem relação com outras áreas do conhecimento.

> A Geometria envolve o estudo de um amplo conjunto de conceitos e procedimentos necessários para resolver problemas do mundo físico e de diferentes áreas do conhecimento. Assim, nessa unidade temática, estudar posição e deslocamentos no espaço, formas e relações entre elementos de figuras planas e espaciais pode desenvolver o pensamento geométrico dos alunos. (Brasil, 2018, p.271).

O principal objetivo deste trabalho é apresentar formas mais dinâmicas para resolver alguns problemas da geometria, e também de outros saberes da matemática, usando demonstrações visuais. Para alcançar este objetivo, elencamos três objetivos específicos que são: Expor construções no GeoGebra; mostrar alguns resultados da geometria Euclidiana; apresentar "demonstrações"sem palavras que facilitam o entendimento do problema proposto e em seguida, oferecer um argumento analítico que valida a primeira parte.

A metodologia usada para construção deste trabalho foi a pesquisa bibliográfica com uma abordagem qualitativa.

O presente trabalho está dividido em três capítulos. No primeiro capítulo, apresentamos uma pequena explicação sobre o GeoGebra e realizamos algumas construções neste software que são utilizadas para realizar as demonstrações ao longo do trabalho.

No segundo capítulo apresentamos alguns resultados da geometria Euclidiana e realizamos "demonstrações"visuais de problemas da geometria Plana como os resultados que envolvem os ângulos internos e externos de um triângulo. Além disso, apresentaremos uma "Prova Sem Palavra"do famoso Teorema de Pitágoras e uma prova para a Lei dos Cossenos que generaliza o Teorema de Pitágoras.

No terceiro capítulo, tratamos de resultados que possuem um maior grau de dificuldade que os vistos anteriormente, e veremos como a geometria pode ajudar na resolução destes problemas. Realizaremos uma demonstração geométrica para provar a desigualdade das médias aritméticas, a veracidade de um somatório e a desigualdade de Cauchy Schwarz.

Capítulo 1

Conhecendo o GeoGebra

Este capítulo tem por finalidade apresentar o Software GeoGebra que será utilizado para o desenvolvimento do presente trabalho. A seguir, será apresentado um breve relato da origem do programa e depois conheceremos a inteface e alguns de seus comandos.

1.1 História do GeoGebra

O GeoGebra é um software de matemática dinâmica gratuito e multiplataforma para todos os níveis de ensino, que combina geometria, álgebra, tabelas, gráficos, estatística e cálculo numa única aplicação. Tem recebido vários prêmios na Europa e EUA.

O GeoGebra foi criado em 2001 como tese de Markus Hohenwarter e a sua popularidade tem crescido desde então.

1.2 A interface e os comandos do GeoGebra

Este software é usado para fins didáticos no ensino da Matemática. Com ele podemos realizar cálculos aritméticos, algébricos e representações gráficas de diversos objetos matemáticos. Veja a seguir a interface padrão do GeoGebra. Aqui estamos utilizando a versão 6.0.

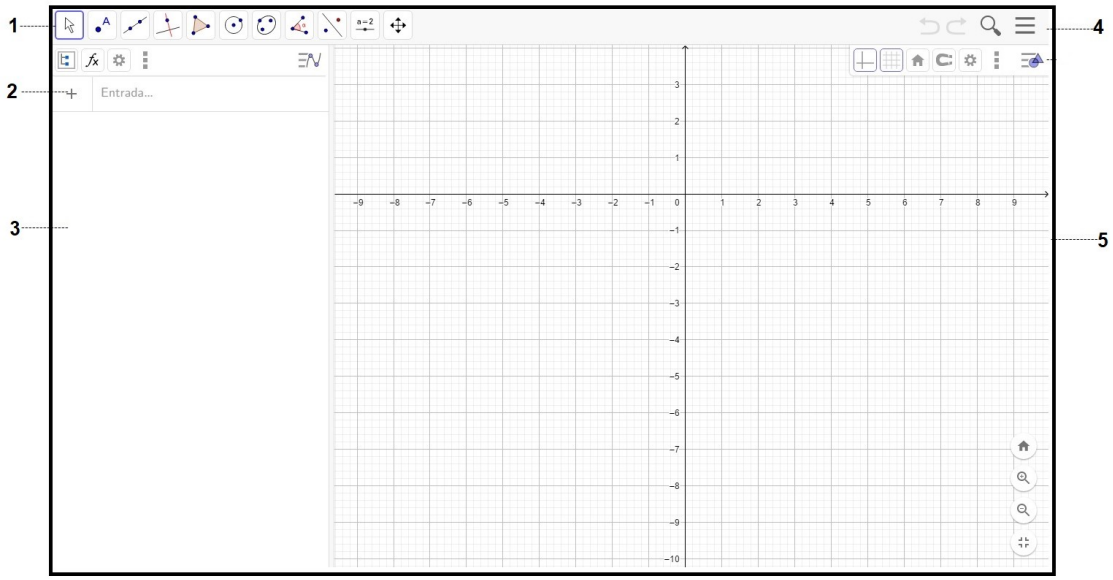

Figura 1.1: Área de trabalho do GeoGebra

1. BARRA DE FERRAMENTAS

A Barra de Ferramentas concentra todas as ferramentas úteis para construir pontos, retas, figuras geométricas, obter medidas de objetos construídos, entre outros. Cada ícone dessa barra esconde outros ícones que podem ser acessados clicando com o mouse em seu canto inferior direito.

2. ENTRADA

Campo de entrada para digitação de comandos.

3. JANELA DE ÁLGEBRA

Área em que são exibidas as coordenadas, equações, medidas e outros atributos dos objetos construídos.

4. A BARRA DE MENUS

A barra de menus disponibiliza opções para salvar o projeto em arquivo (.ggb) e para controlar configurações gerais.

5. JANELA DE VISUALIZAÇÃO

Área de visualização gráfica de objetos que possuam representação geométrica e que podem ser desenhados com o mouse usando ícones da Barra de Ícones ou comandos digitados na Entrada.

A seguir apresentaremos as principais funções do software GeoGebra para a realização das tarefas.

COMANDOS	FIGURAS	PROCEDIMENTOS
Mover		Clique sobre o objeto construído e o movimente na área de trabalho
Novo Ponto		Clique na área de trabalho e o ponto fica determinado
Ponto médio ou centro		Clique sobre dois pontos e o ponto médio fica determinado
Reta definida por dois pontos		Clique em dois pontos da área de trabalho e a reta é traçada
Segmento definido por dois pontos		Clique em dois pontos da área de trabalho e o segmento é traçado
Segmento com comprimento conhecido		Clique em um ponto da área de trabalho e dê a medida do segmento
Vetor definido por dois pontos		Clique em dois pontos da área de trabalho e o vetor fica determinado
Vetor a partir de um ponto		
Polígono		Clique em três ou mais pontos fazendo do primeiro também o último ponto. Fica determinado o polígono
Retas perpediculares		Selecione uma reta e um ponto e a reta perpendicular fica determinada
Retas paralelas		Selecione uma reta e um ponto e a reta paralela fica determinada
Mediatriz		Selecione um segmento ou dois pontos e a mediatriz fica determinada
Bissetriz		Clique em três pontos, o segundo ponto determina a bissetriz

Figura 1.2: Principais funções do GeoGebra

Vejamos a seguir como realizar algumas construções no GeoGebra.

Exemplo 1 *Construção de duas retas paralelas.*

Na área de trabalho no GeoGebra, clicando na janela 3 da barra de ferramentas,

bastar selecionar o comando retas e selecionar dois pontos quaisquer, como mostra a Figura 1.3. Assim construímos a primeira reta.

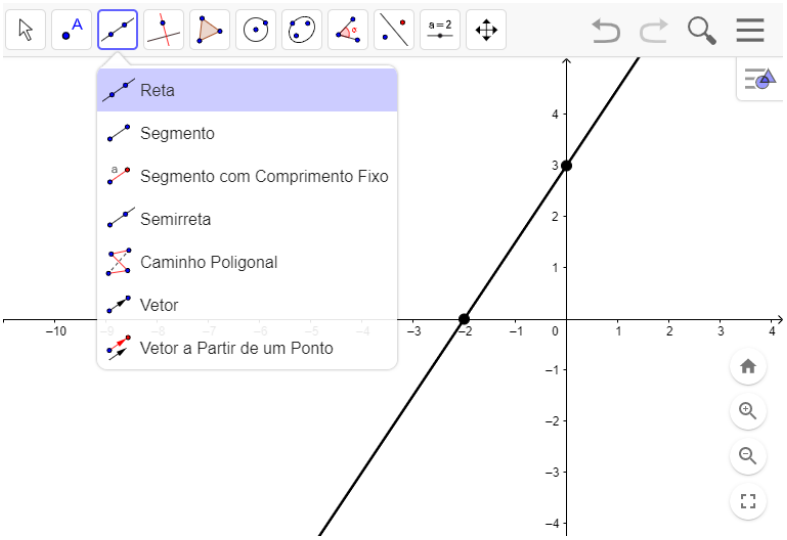

Figura 1.3: Reta definida por dois pontos

Agora, na janela 4 da barra de ferramentas, selecionaremos o comando retas paralelas. Após isso, basta clicar na reta criada anteriormente e selecionar mais um ponto qualquer e assim teremos construído duas retas paralelas, como verificamos na Figura 1.4

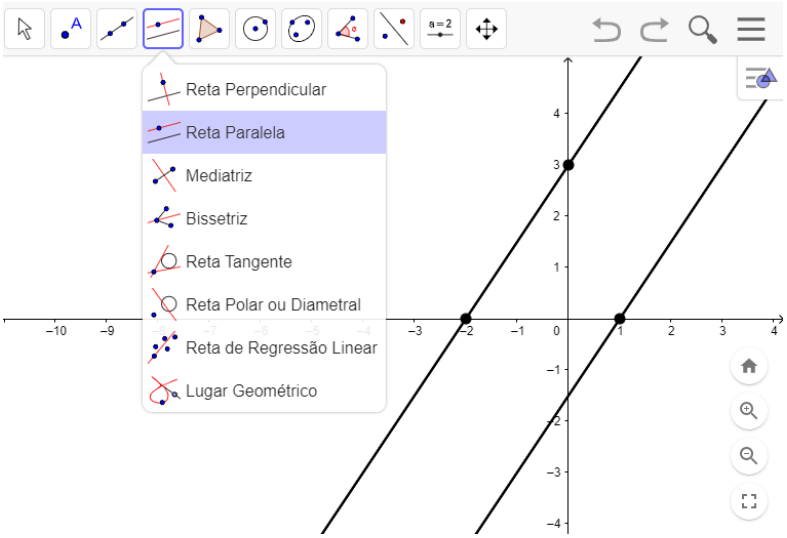

Figura 1.4: Retas paralelas

Exemplo 2 *Traçando a altura de um triângulo.*

Na área de trabalho no GeoGebra, clicando na janela 3 da barra de ferramentas, bastar selecionar o comando polígonos e selecionar 3 pontos quaisquer, e assim teremos formado um triângulo, cujos vértices são A B e C, como mostra a Figura 1.5.

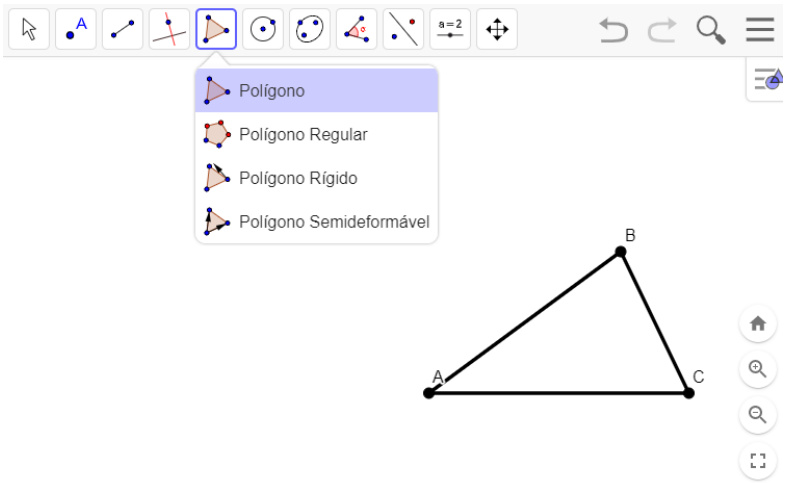

Figura 1.5: Triângulo a partir de 3 pontos

Em seguida, clicando na janela 5 da barra de ferramentas, basta selecionar o comando Reta Perpendicular, depois selecionar um dos lados dos do triângulo e um vértice oposto a este lado, como mostra a Figura 1.6

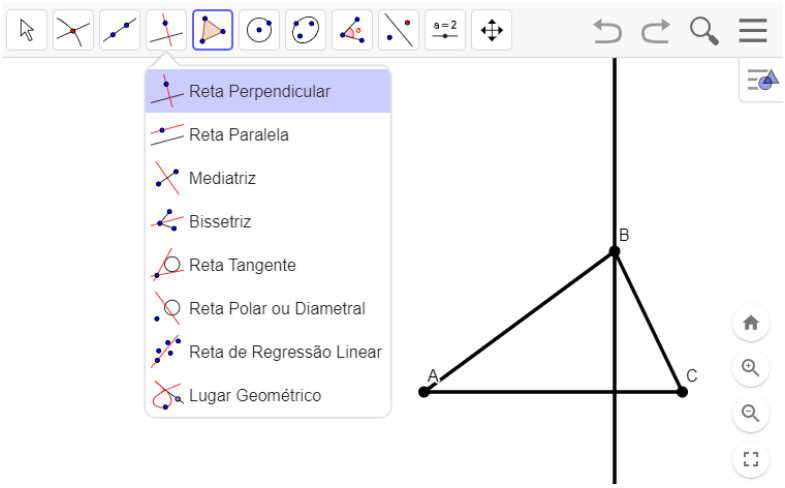

Figura 1.6: Reta perpendicular

Agora, clicando na janela 2 da barra de ferramentas, basta selecionar o comando interseção de dois objetos. Em seguida, selecione à reta e o lado do triângulo que é perpendicular a reta. Com isso criamos um ponto de interseção entre ambos, o ponto D na Figura 1.6.

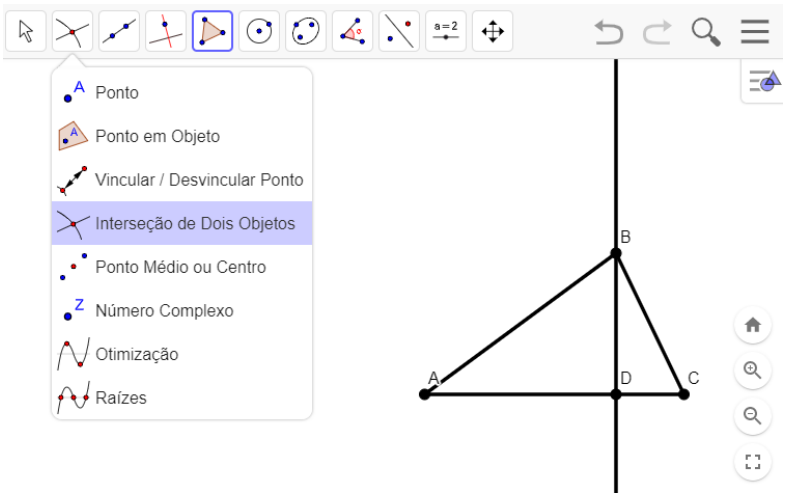

Figura 1.7: Interseção de retas

A reta é usada apenas como suporte. Clicando com o botão esquerdo do mouse na reta, desmarque a opção exibir objeto, como indica a Figura 1.8, e assim a reta será apagada.

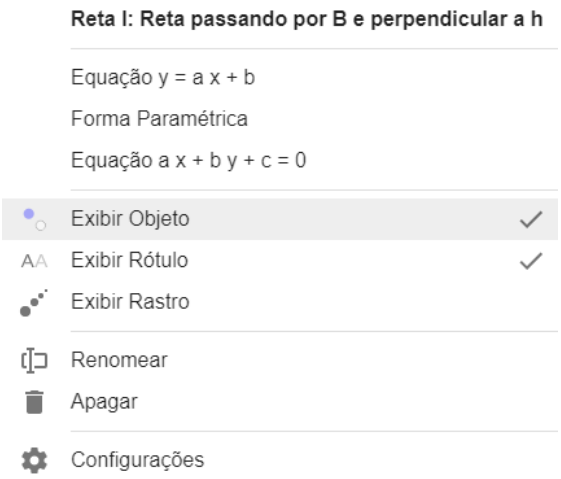

Figura 1.8: Objeto oculto

Por fim, clicando na janela 2 da barra de ferramentas, basta selecionar o comando

segmento e clicar no pontos B e D, e assim teremos um segmento BD,que representa a altura desse triângulo, com relação ao lado AC, como mostra a Figura 1.9.

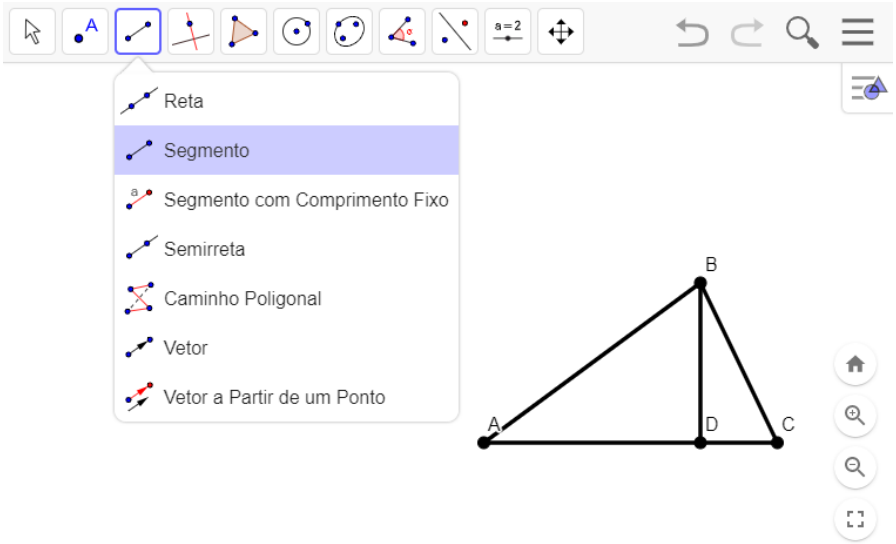

Figura 1.9: Altura do triângulo

A seguir, usando a ferramenta reflexão em relação a uma reta, iremos construir triângulos congruentes. Este processo será utilizado posteriormente para a demonstração geométrica do Teorema de Pitágoras.

Exemplo 3 *Reflexão de triângulos em torno de uma reta.*

De início construiremos um triângulo e uma reta, como mostra a Figura 1.10. Em seguida, clicando na 9ª janela da barra de ferramentas, basta selecionar o comando reflexão em relação a uma reta. Agora, clique no triângulo e depois na reta. Teremos assim construído um triângulo congruente ao primeiro, como se vê na Figura 1.11.

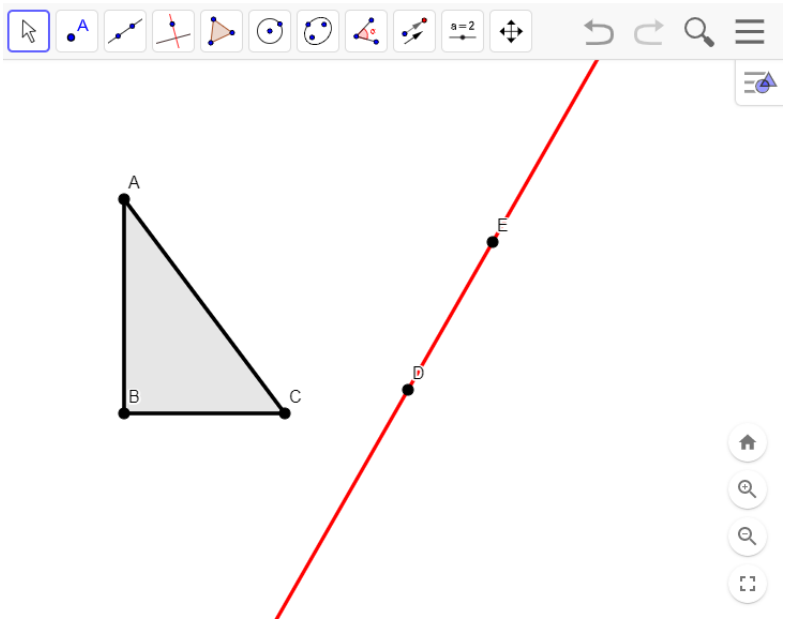

Figura 1.10: Reta e triângulo

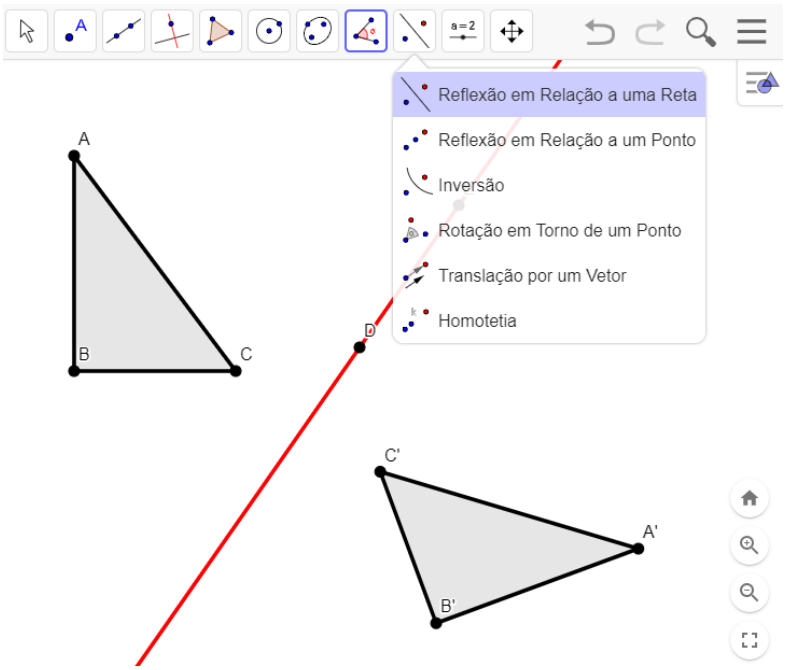

Figura 1.11: Reflexão em relação a uma reta

Movendo a reta podemos criar novos triângulos congruentes ao primeiro e com

diferentes posições no plano cartesiano, como observamos na Figura 1.12.

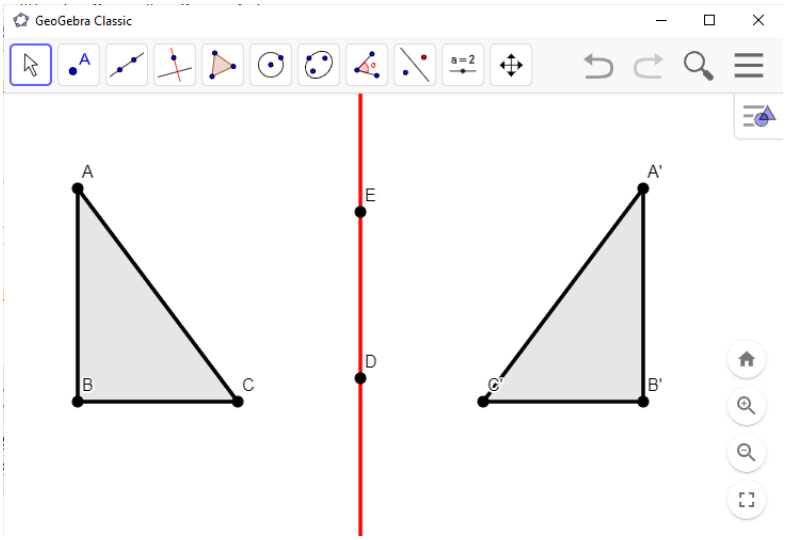

Figura 1.12: Congruência via reflexão

Exemplo 4 *Rotação de triângulo em torno de um ponto.*

De início construiremos um triângulo e um ponto, como mostra a Figura 1.13.

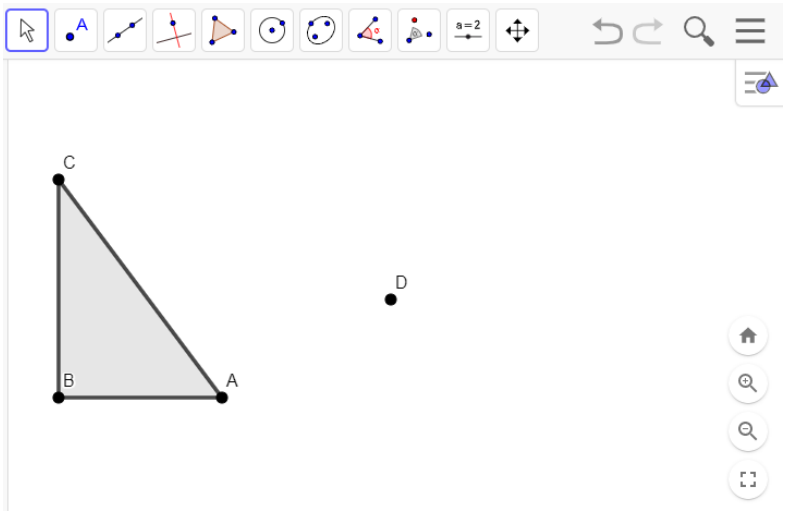

Figura 1.13:

Em seguida, clicando na 9ª janela da barra de ferramenta, basta selecionar o comando rotação em torno de um ponto. Agora clique no triângulo, depois no ponto e por fim escolha valor do angulo de rotação, como mostra a Figura 1.14.

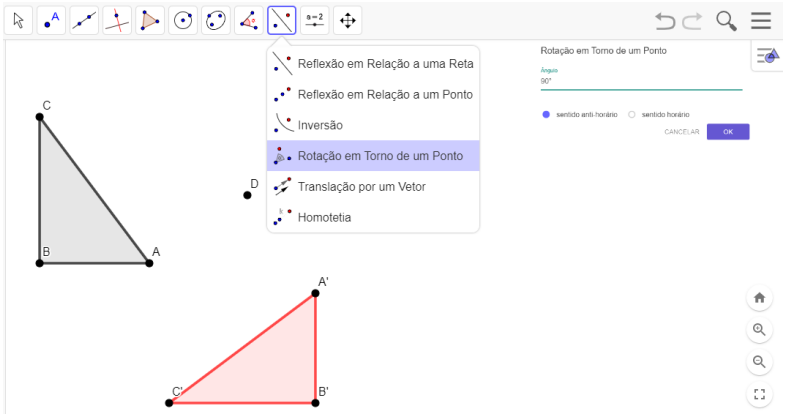

Figura 1.14: Rotação em torno de um ponto

Alterando o ângulo de rotação do triângulo ABC em torno do ponto D, podemos criar novos triângulos congruentes ao triângulo ABC, como observamos na Figura 1.15.

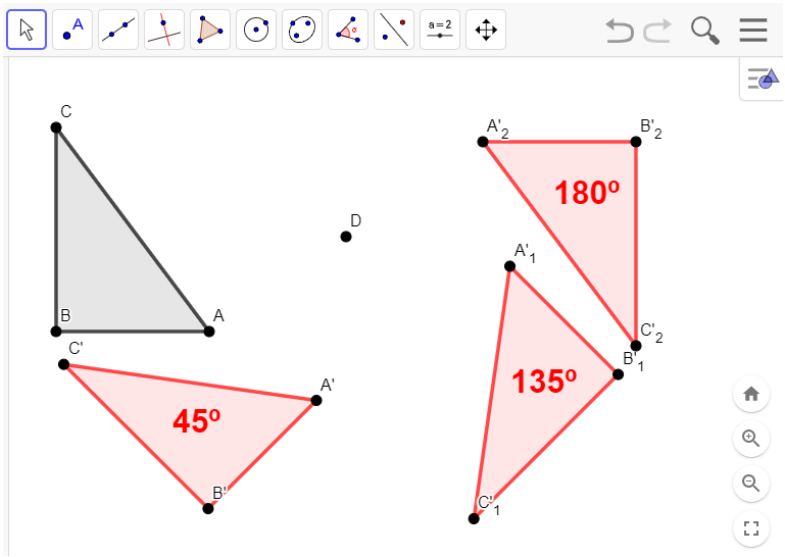

Figura 1.15: Congruência via rotação

Exemplo 5 *Translação de triângulo por um vetor.*

Iniciamos construindo um triângulo e um vetor, como observamos na Figura 1.16.

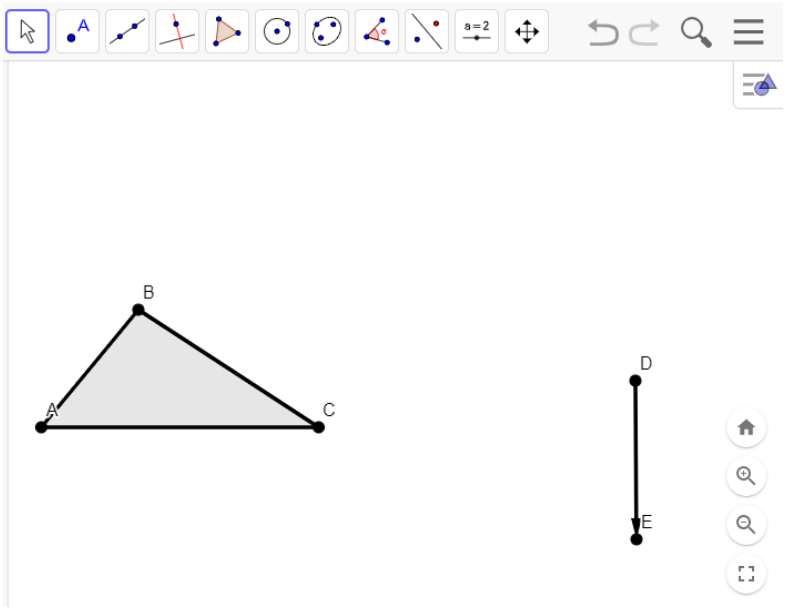

Figura 1.16:

Em seguida, clicando na 9ª janela da barra de ferramenta, basta selecionar o comando Translação por um vetor. Agora clique no triângulo e depois no vetor, como indica a Figura 1.17.

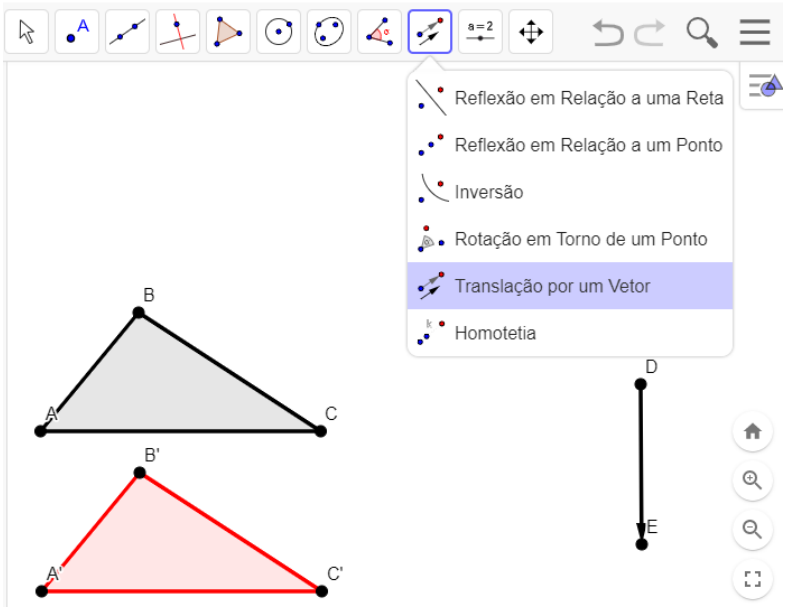

Figura 1.17: Translação por um vetor

Conforme mudamos a posição do vetor, criamos novos triângulos. Veja os exemplos das Figuras 1.18 e 1.19.

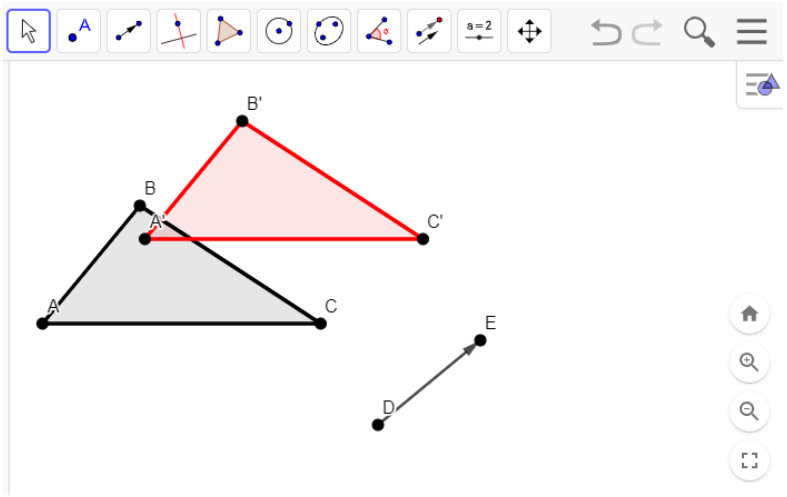

Figura 1.18:

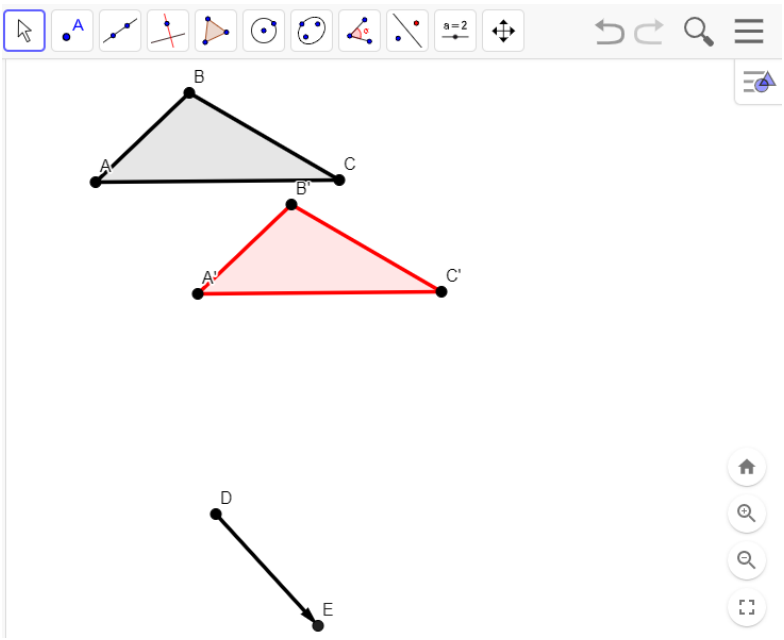

Figura 1.19: Congruência via translação

Capítulo 2

Alguns resultados básicos em geometria plana

Neste capítulo, apresentamos alguns resultados da geometria euclidiana e soluções com argumentos simples para problemas clássicos, como o Teorema de Pitágoras.

Definição 1 *Uma poligonal é uma figura formada por uma sequência de pontos* A_1,A_2,..., A_n *e pelos segmentos* A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4,...,$A_{n-1}A_n$. *Os pontos são vértices da poligonal e o seus segmentos são os seus lados.*

Definição 2 *Um polígono é uma poligonal em que as três seguintes condições são satisfeitas:*

1- $A_n = A_1$;

2- *os lados da poligonal se interceptam somente em suas extremidades;*

3- *dois lados com a mesma extremidade não pertencem a mesma reta.*

Definição 3 *Um segmento ligando os vértices não consecutivos de um polígono é chamado de diagonal do polígono.*

Definição 4 *Um polígono é convexo se está sempre contido em um dos semi-planos determinados por cada reta que contém os seus lados.*

Polígonos convexos recebem designações especiais. São as seguintes as designações dadas a estes polígonos de acordo com o seu número de lados, até 10 lados.

Número de lados	Nome do polígono
3	Triângulo
4	Quadrilátero
5	Pentágono
6	Hexágono
7	Heptágono
8	Octágono
9	Nonágono
10	Decágono

2.1 Alguns resultados sobre triângulos

Definição 5 *O triângulo é uma figura formada por três pontos que não pertencem a uma mesma reta e pelos três segmentos determinados por estes três pontos. Os três pontos são chamados vértices do triângulo e os segmentos, lados do triângulo.*

Uma das principais propriedades dos triângulos se refere à soma dos seus ângulos internos, que é sempre igual a 180°, independente do comprimento dos seus lados ou das medidas dos seus ângulos. Esse resultado será demonstrado no próximo problema. A demonstração geométrica a seguir foi feita utilizando a construção de retas paralelas apresentada no Exemplo 1.

Problema 1 *A soma dos ângulos internos de um triângulo é* 180°.

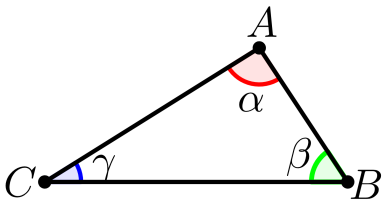

Figura 2.1:

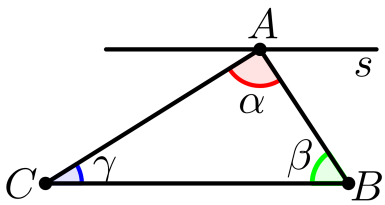

Figura 2.2:

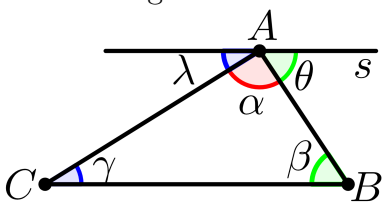

Figura 2.3:

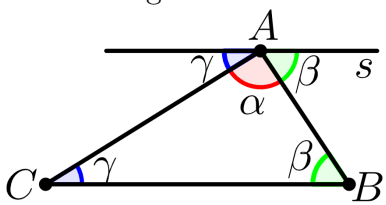

Figura 2.4:

Demonstração analítica: Seja ABC um triângulo qualquer, como mostra a Figura 2.1. Considere uma reta s, passando pelo ponto A e paralela ao lado BC, como na Figura 2.2 (essa reta sempre existe e é única, isso nos é garantido pelo quinto postulado de Euclides). Note que, os ângulos de medidas θ e β são alternos internos, veja Figura 2.3, portanto, são congruentes. O mesmo ocorre com os ângulos λ e γ. Assim, temos que:

$$180^\circ = \lambda + \alpha + \theta = \alpha + \gamma + \beta,$$

como afirmamos. ■

Outra propriedade importante dos triângulos diz respeito a seus ângulos externos.

Problema 2 *Teorema do ângulo externo: A medida de cada ângulo externo de um triângulo é igual à soma das medidas dos ângulos internos não adjacentes.*

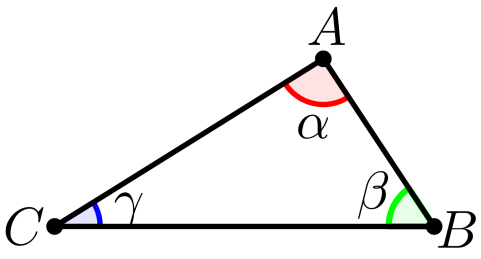

Figura 2.5:

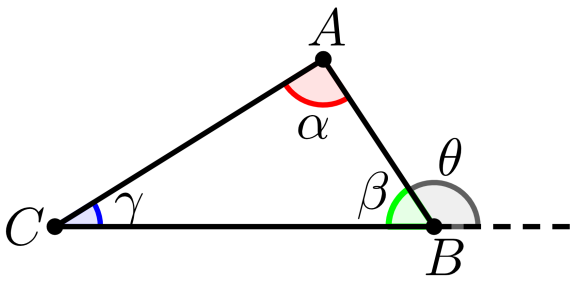

Figura 2.6:

Demonstração analítica: Seja ABC um triângulo qualquer, com $\hat{A} = \alpha, \hat{B} = \beta$ e $\hat{C} = \gamma$ como mostra a Figura 2.5. Prolongando o segmento CB na direção de B, vejamos que o ângulo externo ao triângulo formado em B tem medida $\alpha+\gamma$. Como a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180° (veja Problema 1), temos que

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ.$$

Por outro lado, sendo $\theta + \beta$ a medida de um ângulo raso, temos

$$\beta + \theta = 180^\circ.$$

Logo,

$$\theta = \alpha + \gamma,$$

como afirmamos. De modo análogo, vemos que o resultado é válido para os outros ângulos externos. ■

Um dos teoremas mais conhecidos na geometria é o Teorema de Pitágoras. Esse teorema é uma expressão matemática que relaciona as medidas dos lados de um triângulo retângulo. A demonstração a seguir, é uma das mais famosas usadas para demonstrar a validade deste resultado. Na demonstração visual a seguir, utilizamos as construções realizadas nos Exemplos 3, 4 e 5.

Problema 3 (Teorema de Pitágoras) *Em um triângulo retângulo, o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos.*

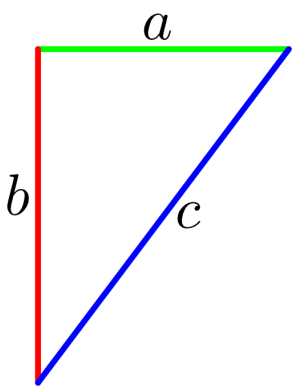

Figura 2.7:

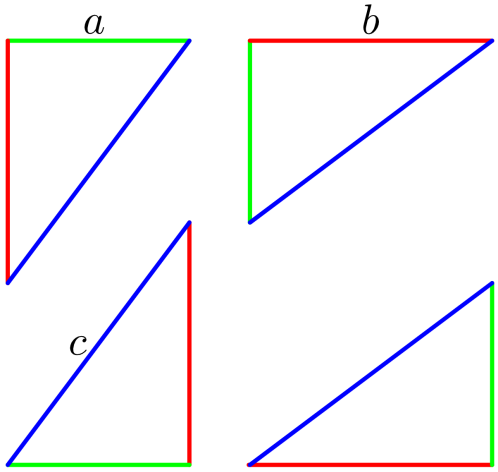

Figura 2.8:

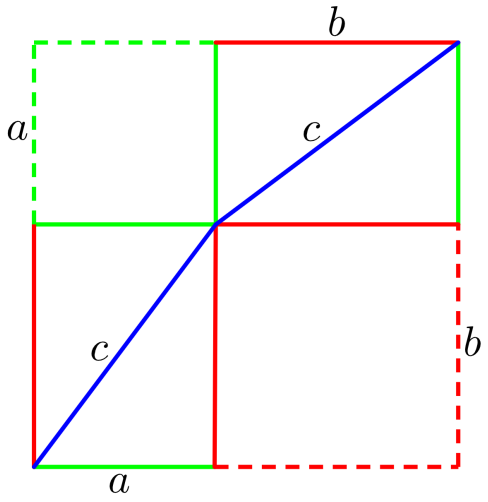

Figura 2.9:

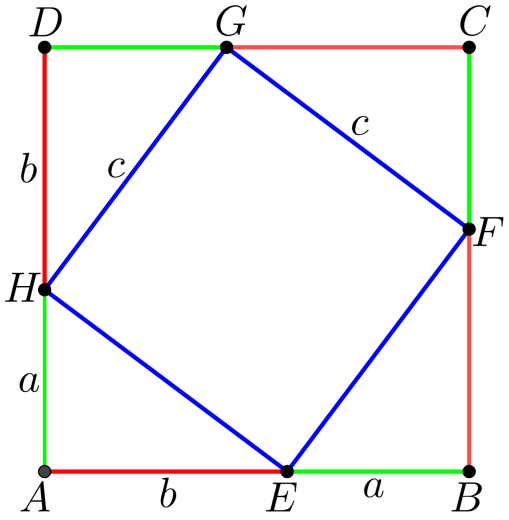

Figura 2.10:

Demonstração analítica: Dado um triângulo retângulo qualquer, construiremos outros três triângulos congruentes Figura 2.8. A partir daí, posicionamos estes triângulos de maneira a formarmos dois quadrados: um quadrado de lado que corresponde ao menor cateto do triângulo e outro quadrado de lado que corresponde ao maior cateto, como mostra a Figura 2.9. Em um outro posicionamento, os triângulos contornam um quadrilátero EFGH de lado c que corresponde à medida da hipotenusa, Figura 2.10. Como os lados desse quadrilátero são congruentes, sabemos então que é um losango. A partir disso, basta que mostremos que a figura possui ao menos um ângulo reto para concluirmos que ela é um quadrado. Note que $A\widehat{H}D$ é igual 180°, pois os pontos são colineares. Sabendo que os ângulos internos não retos do triângulo são complementares temos que:

$$D\widehat{G}H + D\widehat{H}G = 90°.$$

Como os triângulos são congruentes(LLL) as medidas dos ângulos $D\widehat{G}H$ e $A\widehat{H}E$ são iguais. Logo,

$$D\widehat{H}G + A\widehat{H}E = 90°.$$

Assim:

$$180° = D\widehat{H}G + A\widehat{H}E + E\widehat{H}G = 90° + E\widehat{H}G \Rightarrow E\widehat{H}G = 90°.$$

Provamos assim que é EHG é um ângulo reto, consequentemente EFGH é um quadrado. Com essas informações agora demonstraremos o Teorema de Pitágoras. A área do quadrado de lado medindo $a + b$ da Figura 2.9 é igual a:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

A área do quadrado maior da Figura 2.10 é igual a quatro vezes a área triângulo mais a área do quadrado menor, ou seja,

$$4.\frac{ab}{2} + c^2 = 2ab + c^2.$$

Como os quadrados de ambas as figuras são de lado $a + b$, temos que as áreas desses quadrados são iguais, logo :

$$a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + c^2 \Rightarrow a^2 + b^2 = c^2,$$

como desejado. ■

O próximo problema trata de uma expressão que relaciona os lados e os ângulos de um triângulo qualquer. Conhecendo alguma das medidas do triângulo, com essa expressão que chamamos de Lei dos Cossenos, podemos calcular a medida de um lado ou ângulo desconhecido. Este resultado generaliza o Teorema de Pitágoras. Realizamos a demonstração seguinte, utilizando a construção dada nos Exemplos 1 e 2.

Problema 4 (Lei dos cossenos) *Em qualquer triângulo, o quadrado de um dos lados corresponde à soma dos quadrados dos outros dois lados, menos o dobro do produto desses dois lados pelo cosseno do ângulo entre eles.*

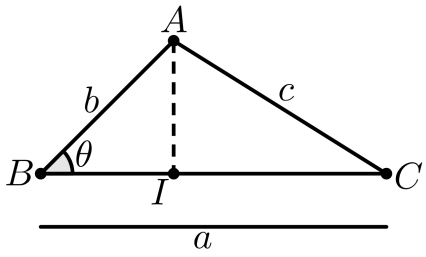

Figura 2.11:

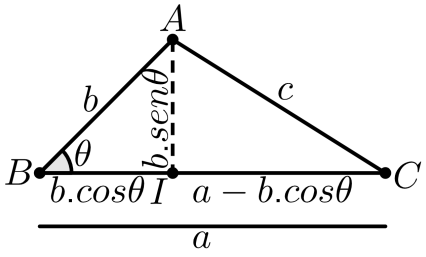

Figura 2.12:

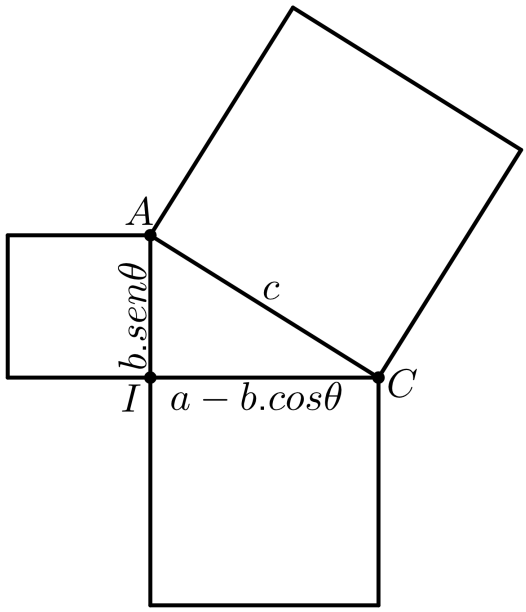

Figura 2.13:

Demonstração analítica: Seja ABC um triângulo qualquer, cujos lados AB, BC e CA possuem comprimento b, a e c, respectivamente, e altura que corresponde ao segmento AI, como mostra a Figura 2.11. Agora aplicaremos as relações seno e cosseno no triângulo retângulo AIC. Temos

$$sen\theta = \frac{cat.oposto}{hipotenusa} = \frac{\overline{AI}}{b} \Rightarrow b.sen\theta = \overline{AI}$$

e

$$cos\theta = \frac{cat.adjacente}{hipotenusa} = \frac{\overline{BI}}{b} \Rightarrow b.cos\theta = \overline{BI}.$$

Partindo dessas novas medidas observaremos o triângulo AIC, e os quadrados projetados sobre seus catetos e hipotenusa, conforme Figura 2.13. Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo AIC, temos que

$$\begin{aligned} c^2 &= (bsen\theta)^2 + (a - bcos\theta)^2 \\ &= b^2.sen^2\theta + a^2 - 2ab.cos\theta + b^2.cos^2\theta \\ &= b^2(sen^2\theta + cos^2\theta) + a^2 - 2ab.cos\theta. \end{aligned}$$

Usando a relação fundamental da trigonometria, $sen^2\theta + cos^2\theta = 1$, concluímos que

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2abcos\theta,$$

como afirmamos. ■

Utilizando resultados já vistos anteriormente, demonstraremos que a soma dos dos ângulos internos da estrela de cinco pontas é igual à 180°, este problema aparece com frequência no estudo da Geometria.

Problema 5 *A soma dos ângulos dos vértices de uma estrela de 5 pontas é* 180°.

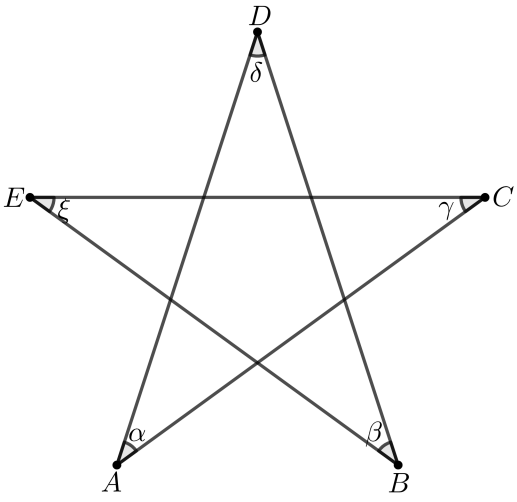

Figura 2.14:

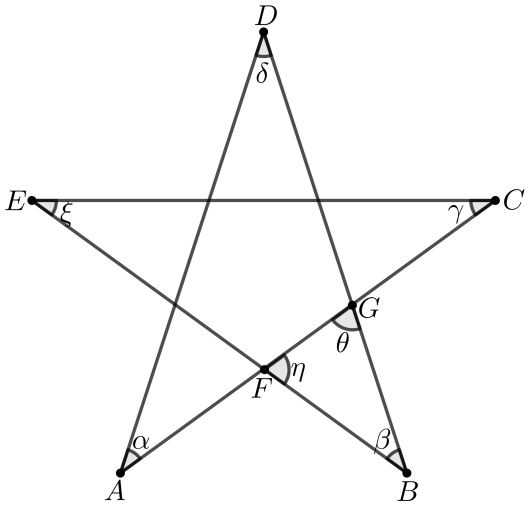

Figura 2.15:

Demonstração analítica: Sejam A,B,C,D,E os vértices do estrela como mostra a Figura 2.14. A partir dessa figura podemos observar dois triângulos, EFC e AGD, que possuem ângulos externos η e θ, respectivamente, como mostra a Figura 2.15. Com isso, temos que: $\eta = \xi + \gamma$ e $\theta = \alpha + \delta$, pelo Problema 2. Portanto,

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta + \xi = (\xi + \gamma) + (\alpha + \delta) + \beta = \eta + \theta + \beta = 180°,$$

como visto no Problema 1. ■

No próximo problema usaremos a seguinte definição: Um triângulo está inscrito na semicircunferência quando um vértice pertence a semicircunferência e os outros dois vértices correspondem as extremidades do diâmetro.

Problema 6 *Todo triângulo inscrito em uma semicircunferência é um triângulo retângulo*

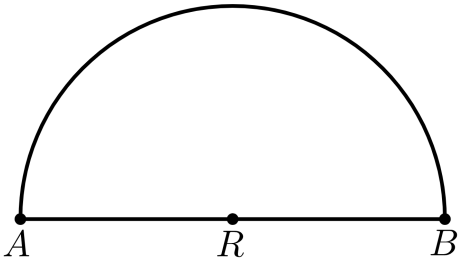

Figura 2.16:

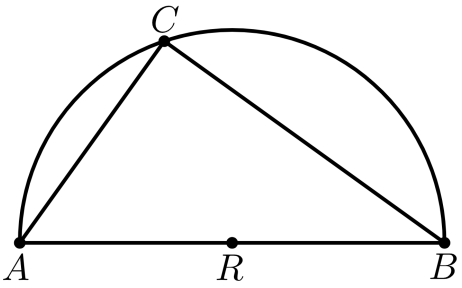

Figura 2.17:

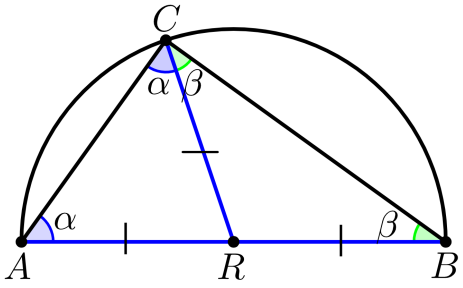

Figura 2.18:

Demonstração analítica: Seja AB o diâmetro da semicircunferência e R o ponto médio de AB, como mostra a Figura 2.16. Dado um ponto C na semicircunferência, construa agora dois segmentos que liguem o ponto C aos vértices A e B, como mostra a Figura 2.17. Com isso temos um triângulo ABC inscrito em uma semicircunferência. Se traçarmos um segmento de reta RC, que corresponde ao raio da circunferência, construímos assim dois triângulos isósceles ARC e RBC, conforme Figura 2.18. Lembrando que os ângulos da base de um triângulo isósceles são iguais e que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180°, vemos que:

$$\alpha + (\alpha + \beta) + \beta = 180^\circ \Rightarrow 2.\alpha + 2.\beta = 180^\circ \Rightarrow \alpha + \beta = 90^\circ.$$

Consequentemente, o triângulo ABC é retângulo em C. ■

Problema 7 *O quadrado da altura relativa a hipotenusa de um triângulo retângulo é igual ao produto das projeções de seus catetos sobre a hipotenusa.*

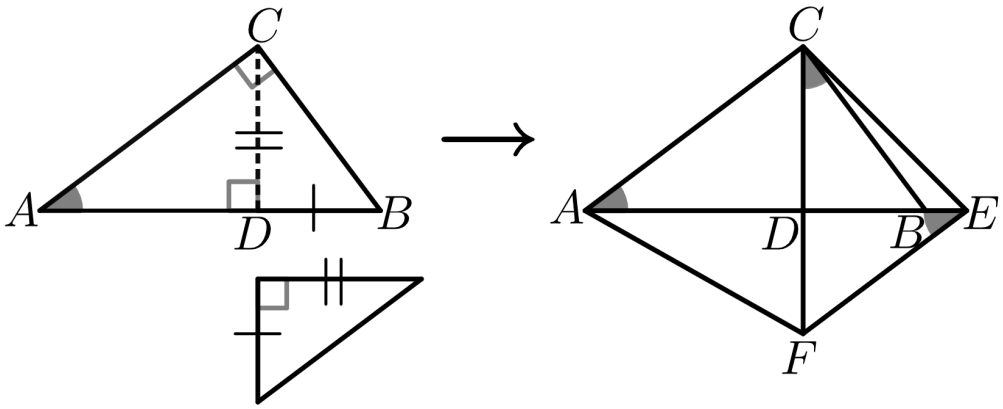

Figura 2.19:

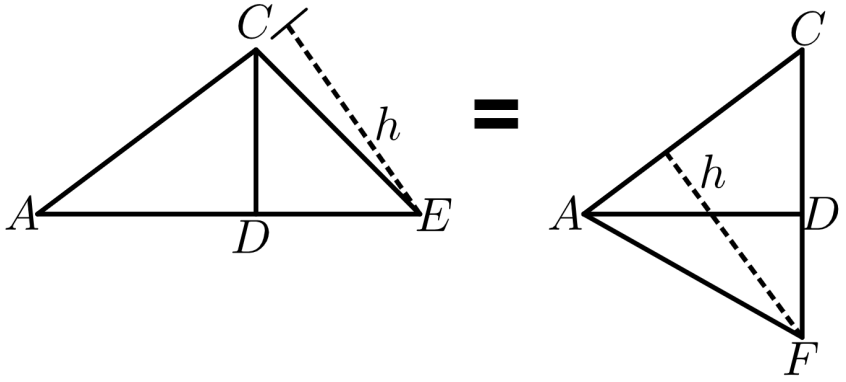

Figura 2.20:

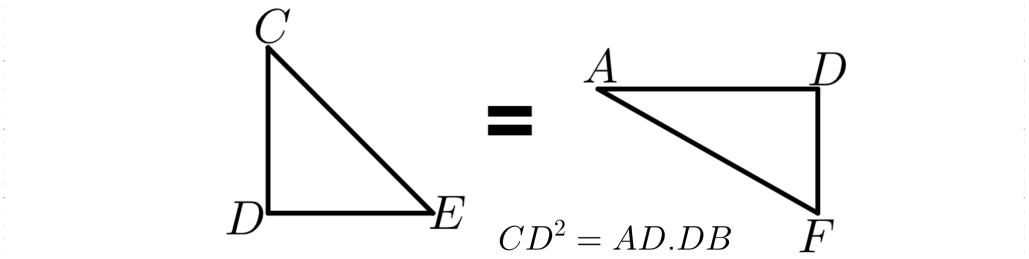

Figura 2.21:

Demonstração analítica: Seja ABC um triângulo retângulo em C e cuja altura em relação a AB é o segmento CD. Agora, tomamos o ponto $E \in \overrightarrow{DB}$ tal que $\overline{DE} = \overline{DC}$ e o ponto $F \in \overrightarrow{CD}$ tal que $D \in CF$ e $\overline{DF} = \overline{DB}$. Com isso obtemos a congruência $DEF \equiv DCB$. Em particular, temos que $D\widehat{E}F = \widehat{C}D$. Note que os ângulos não retos dos triângulos ACD e BCD são complementares. Logo

$$D\widehat{A}C + A\widehat{C}D = 90^\circ = A\widehat{C}B = A\widehat{C}D + D\widehat{C}B$$

e daí

$$D\widehat{A}C = D\widehat{C}B = D\widehat{E}F,$$

como visto na Figura 2.19. Observe que a reta $\overleftrightarrow{AE}$ corta as retas $\overleftrightarrow{AC}$ e $\overleftrightarrow{EF}$ e temos que $C\widehat{A}D$ e $D\widehat{E}F$, que são iguais, são ângulos alternos internos. Isso nos garante que $\overleftrightarrow{AE}$ e $\overleftrightarrow{EF}$ são retas paralelas, ou seja, a distância de F até a reta $\overleftrightarrow{AC}$ é igual a distância de E até a $\overleftrightarrow{AC}$. Logo, as alturas do triângulos ACF e ACE são iguais, como mostra a Figura 2.20. Como os triângulos ACF e ACE possuem a mesma base AC e a mesma altura, concluímos que suas áreas são iguais. Vemos que o triângulo ACD compõe o triângulo ACE, e também o triângulo ACF, então as áreas do triângulo CDE e ADF devem ser iguais. Assim,

$$\frac{\overline{DE}.\overline{CD}}{2} = \frac{\overline{AD}.\overline{DF}}{2},$$

e isso implica em

$$\overline{DE}.\overline{CD} = \overline{AD}.\overline{FD}.$$

Como $\overline{CD} = \overline{DE}$ e $\overline{DF} = \overline{DB}$, temos que:

$$\overline{CD}^2 = \overline{AD}.\overline{DB},$$

como afirmamos. ∎

Capítulo 3

O uso da Geometria para resolver problemas de outros conteúdos da Matemática

Neste capítulo, trataremos de alguns resultados que envolvem assuntos do ensino básico, mas que não são vistos em sala de aula e estão presentes em projetos como a OBMEP, por apresentarem um grau maior de dificuldade.

3.1 Desigualdades

A seguir, realizaremos comparações entre as médias aritmética, geométrica, harmônica e quadrática. Faremos isso, utilizando elementos da semicircunferência e do triângulo retângulo, já vistos em problemas anteriores.

Relembremos suas definições. Consideremos dois números reais positivos, a e b. Definimos as médias entre a e b:

- **média aritmética:** $\dfrac{a+b}{2}$.
- **média geométrica:** $\sqrt{a.b}$.
- **média harmônica:** $\dfrac{2a.b}{a+b}$.
- **média quadrática:** $\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$.

Problema 8 (Desigualdades das médias) *Para dois números reais positivos a e b, tem-se que:*

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geq \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{a.b} \geq \frac{2a.b}{a+b}.$$

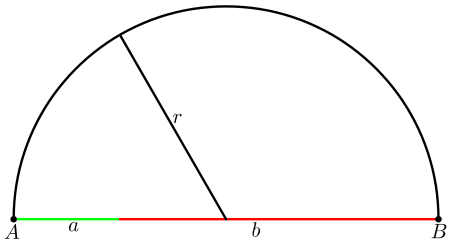

Figura 3.1:

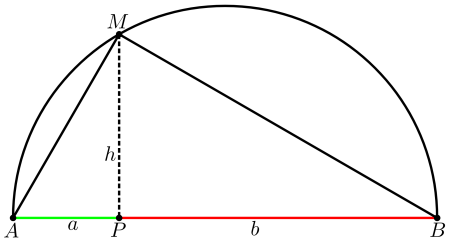

Figura 3.2:

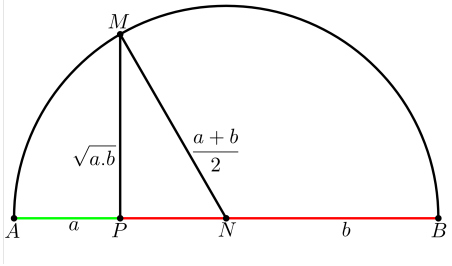

Figura 3.3:

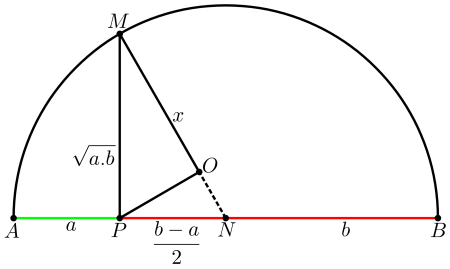

Figura 3.4:

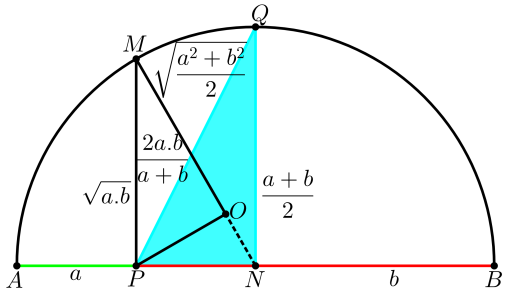

Figura 3.5:

Demonstração analítica: Sejam a e b números reais positivos distintos, digamos que $0 < a < b$. Considere um segmento de comprimento a, outro segmento de comprimento b e a semicircunferência de diâmetro $a + b$, como mostra a Figura 3.1. Denotado por r o raio desta, temos:

$$2r = a + b \Rightarrow r = \frac{a+b}{2}.$$

Portanto, r é igual a média aritmética entre os números a e b Agora, tome um segmento ortogonal ao diâmetro, partindo do ponto P (ponto de interseção entre a e b) até o M, Figura 3.3. Observe que h é altura relativa à hipotenusa do triângulo retângulo AMB. Partindo disso, utilizaremos a seguinte relação métrica do triângulo retângulo: o quadrado da altura relativa à hipotenusa é igual ao produto das projeções de seus catetos sobre a hipotenusa. Vamos representar essa relação métrica pela seguinte expressão:

$$h^2 = a.b \;\Rightarrow\; h = \sqrt{a.b}.$$

Portanto, h corresponde a média geométrica entre os números a e b. Denotado por N o centro da circunferência, observe que o triângulo PMN é retângulo, onde r e h correspondem à hipotenusa e um cateto, respectivamente. Sabendo que a hipotenusa é o maior lado do triângulo temos que $r > h$. Logo,

$$(a+b)/2 > \sqrt{a.b}$$

Seja PO a altura relativa à hipotenusa do triângulo PMN, Figura 3.4. Aplicando a semelhança de triângulo entre os triângulos PMN e OMP, temos que:

$$\frac{h}{x} = \frac{r}{h} \Rightarrow x = \frac{h^2}{r} = \frac{a.b}{\frac{a+b}{2}} = \frac{2a.b}{a+b}.$$

A expressão $(2a.b)/(a+b)$ corresponde à média harmônica entre a e b. Se observarmos o triângulo retângulo PMO, vemos que x, que corresponde a média harmônica, é um cateto desse triângulo e h, que corresponde a média geométrica, é a hipotenusa, assim $h > x$. Logo,

$$\sqrt{a.b} > (2a.b)/(a+b).$$

Agora devemos encontrar a média quadrática e assim concluiremos a desigualdade entre as 4 médias. Considere, o triângulo PQN, retângulo em N, como na Figura 3.5. Usando o Teorema de Pitágoras temos que

$$\overline{PQ}^2 = \overline{PN}^2 + \overline{NQ}^2 = \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad \overline{PQ} = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

A expressão $(a^2+b^2)/2$ corresponde à média quadrática entre a e b, e também corresponde ao valor da hipotenusa do triângulo PQN. Com isso observamos que a média quadrática é maior que a média aritmética. A partir das desigualdades encontradas, podemos concluir que :

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} > \frac{a+b}{2} > \sqrt{a.b} > \frac{2a.b}{a+b},$$

sempre que $a, b > 0$ e $a \neq b$. Quando $a = b$, é fácil ver que cada um destes termos é a, logo são todos iguais. Assim concluímos que a igualdade só se verifica entre as médias se $a = b$. ∎

No próximo problema apresentamos uma prova geométrica para uma desigualdade numérica elementar. Este problema poderia ser rapidamente resolvido utilizando-se a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica.

Problema 9 *A soma de um número positivo e seu inverso é maior ou igual a 2.*

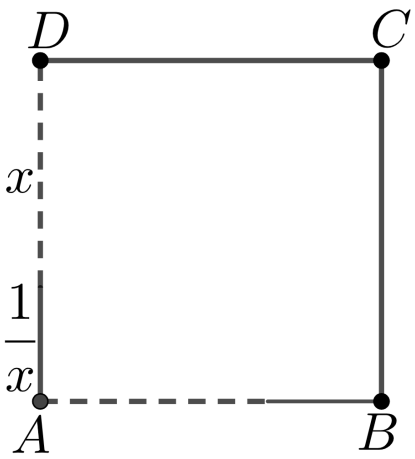

Figura 3.6:

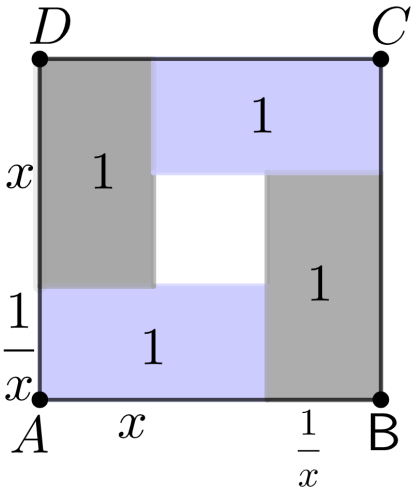

Figura 3.7:

Demonstração analítica: Considere um segmento de reta cujo comprimento mede $x + 1/x$. A partir desse segmento construa um quadrado de vértices ABCD, como na Figura 3.6. Note que, com esse quadrado é possível formar 4 retângulos de lados x e $1/x$. Uma vez que a área do retângulo é dada pelo produto da base pela altura temos que $x.(1/x) = 1$. Logo a área de cada retângulo formado é igual a 1, como mostra a Figura 3.7. Como a soma das áreas dos retângulos é igual a 4, concluímos que a área do quadrado é maior ou igual a 4. Lembrando que x é um número postivo, vemos que

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 \geq 4 \;\Rightarrow\; \left|x + \frac{1}{x}\right| \geq \sqrt{4} \;\Rightarrow\; x + \frac{1}{x} \geq 2,$$

como afirmamos. ∎

A seguir, apresentamos um caso particular, para $n = 2$, da desigualdade de Cauchy-Schwarz, contando inicialmente com um auxilio geométrico. Em seguida, apresentaremos o caso geral. Para a demonstração visual, contamos com o auxilio dos Exemplos 3 e 4.

Problema 10 (Desigualdade de Cauchy-Schwarz, para $n = 2$) *Dados os pares de números reais (a, b) e (x, y), tem-se:*

$$|ax + by| \leq \sqrt{a^2 + b^2}.\sqrt{x^2 + y^2}.$$

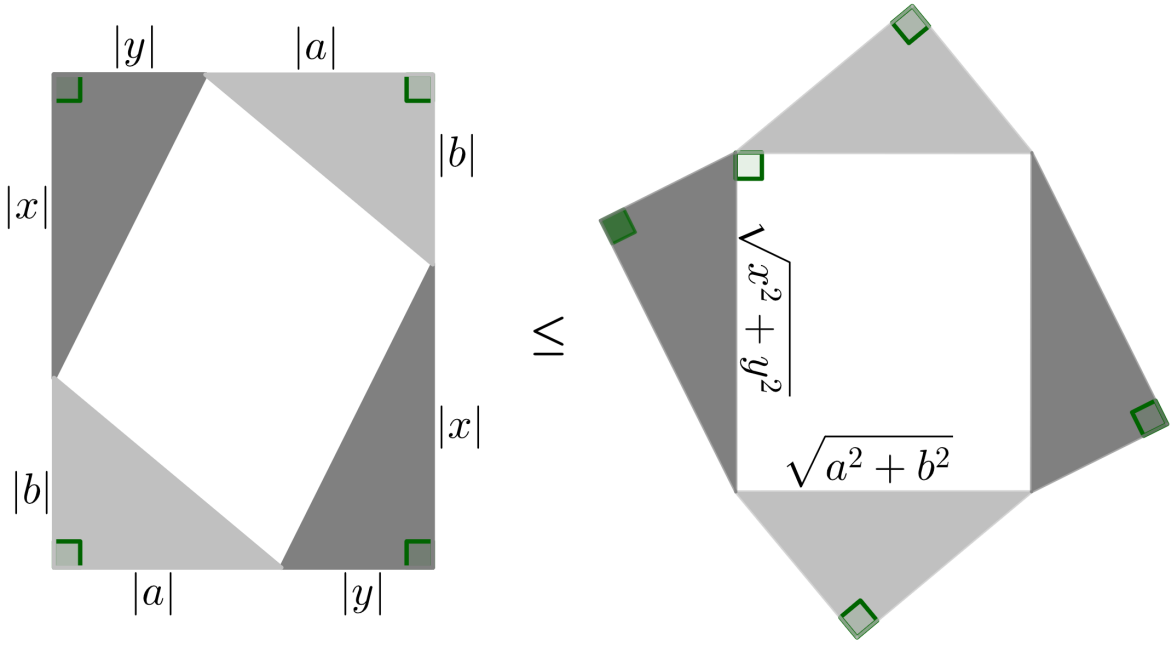

Figura 3.8:

Demonstração analítica: A figura é formada por um par de triângulos retângulos cujos catetos medem $|x|$ e $|y|$, um par de triângulos retângulos cujos catetos medem $|a|$ e $|b|$ e um quadrilátero central que é um paralelogramo com dois lados paralelos iguais a $\sqrt{x^2 + y^2}$ e dois lados paralelos iguais a $\sqrt{a^2 + b^2}$. Na Figura 3.8, podemos observar que temos os mesmos 4 triângulos e um retângulo cujos lados medem $\sqrt{a^2 + b^2}$ e $\sqrt{x^2 + y^2}$. Lembrando que a área de um retângulo é sempre maior ou igual a área de um paralelogramo de mesmos lados (pois a altura do retângulo é maior), vemos que

$$\begin{aligned}(|a| + |y|).(|b| + |x|) &\leq \left(\frac{2.|a|.|b|}{2} + \frac{2.|x|.|y|}{2}\right) + \sqrt{a^2 + b^2}.\sqrt{x^2 + y^2} \\ &= |a|.|b| + |x|.|y| + \sqrt{a^2 + b^2}.\sqrt{x^2 + y^2}.\end{aligned}$$

Uma vez que

$$(|a| + |y|).(|b| + |x|) = |a|.|b| + |a|.|x| + |y|.|b| + |y|.|x|,$$

concluímos que

$$|a|.|x| + |y|.|b| \leq \sqrt{a^2 + b^2}.\sqrt{x^2 + y^2}.$$

Então, pela desigualdade triangular temos,

$$|ax + yb| \leq |ax| + |yb| = |a|.|x| + |y|.|b| \leq \sqrt{a^2 + b^2}.\sqrt{x^2 + y^2},$$

como afirmamos. ∎

Caso geral da desigualdade de Cauchy-Schwarz:

Demonstração analítica: Se $a_1, a_2, ..., a_n$ e $b_1, b_2, ..., b_n$ são números reais, então:

$$(a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2) \geq (a_1.b_1 + a_2.b_2 + ... + a_n.b_n)^2,$$

com a igualdade acontecendo se, e somente se, $a_i = \lambda.b_i \, \forall \; i \in \{1, 2, ..., n\}$ ou $b_i = \lambda.a_i \; \forall \; i, \in \{1, 2, ..., n\}$ para algum $\lambda \in \mathbb{R}$.

Prova: Se $b_1 = b_2 = ... = b_n = 0$, a igualdade é imediata e temos $b_i = 0.a_i$, $\forall \; i \in \{1, 2, ..., n\}$. Se tivermos $b_i \neq 0$ para algum i, consideremos a seguinte função formada por números das nossas sequências:

$$f(x) = (a_1 - b_1.x)^2 + (a_2 - b_2.x)^2 + ... + (a_n - b_n.x)^2.$$

Note que, $f(x)$ é formada por parcelas de função do segundo grau, e $f(x)$ também é uma função de segundo grau. Como cada parcela é maior ou igual a zero, uma vez que cada parcela corresponde ao quadrado de um número real, temos que $f(x) \geq 0$ para todo x real. Vamos desenvolver a função $f(x)$:

$$\begin{aligned} f(x) &= (a_1 - b_1.x)^2 + (a_2 - b_2.x)^2 + ... + (a_n - b_n.x)^2 \\ &= a_1^2 - 2a_1.b_1.x + b_1^2.x^2 + a_2^2 - 2.a_2.b_2.x + b_2^2.x^2 + ... + a_n^2 - 2a_n.b_n.x + b_n^2.x^2 \\ &= x^2(b_1^2 + ... + b_n^2) - 2(a_1.b_1 + a_2.b_2 + ... + a_n.b_n).x + (a_1^2 + ... + a_n^2). \end{aligned}$$

Lembramos que, se a função quadrática é maior ou igual a zero, necessariamente seu descriminante é zero ou negativo. Como

$$\begin{aligned} \Delta &= b^2 - 4.ac \\ &= [2(a_1.b_1 + a_2.b_2 + ... + a_n.b_n)]^2 - 4.(b_1^2 + ... + b_n^2)(a_1^2 + ... + a_n^2) \\ &= 4.(a_1.b_1 + a_2.b_2 + ... + a_n.b_n)^2 - 4.(b_1^2 + ... + b_n^2)(a_1^2 + ... + a_n^2), \end{aligned}$$

então,

$$4.(a_1.b_1 + a_2.b_2 + ... + a_n.b_n)^2 - 4.(b_1^2 + ... + b_n^2)(a_1^2 + ... + a_n^2) \leq 0$$

donde

$$(a_1.b_1 + a_2.b_2 + ... + a_n.b_n)^2 \leq (b_1^2 + ... + b_n^2)(a_1^2 + ... + a_n^2).$$

Agora, verificamos quando ocorre a igualdade, e isso acontece quando $\Delta = 0$. Neste caso a nossa função $f(x)$ possui apenas um zero, ou seja, $\exists x_0 \in \mathbb{R}$ único tal que $f(x_0) = 0$. Sendo assim,

$$(a_1 - b_1.x_0)^2 + ... + (a_n - b_n.x_0)^2 = 0$$

Para que essa soma seja nula, cada parcela deve ser igual a zero, isto significa,

$$a_1 - b_1.x_0 = 0, a_2 - b_2.x_0 = 0, ..., a_n - b_n.x_0 = 0.$$

Daí, tomando $\lambda = x_0$, obtemos:

$$a_i = \lambda.b_i, \forall\ i \in \{1, 2, ..., n\},$$

como desejado. ∎

3.2 Identidade

A seguir, daremos uma prova geométrica de que a soma dos termos de uma Progressão Geométrica de razão igual a 1/2 é 1. Aqui, utilizamos o Exemplo 1 para a construção da sequência das figuras.

Problema 11 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + ... = 1$

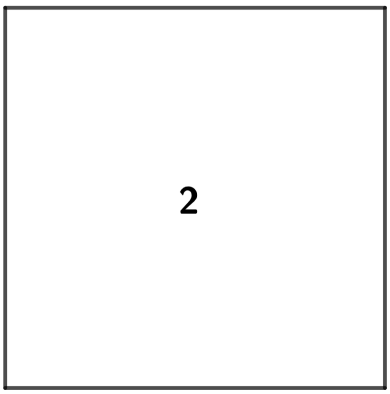

Figura 3.9:

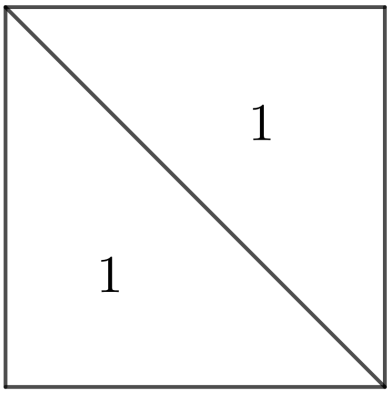

Figura 3.10:

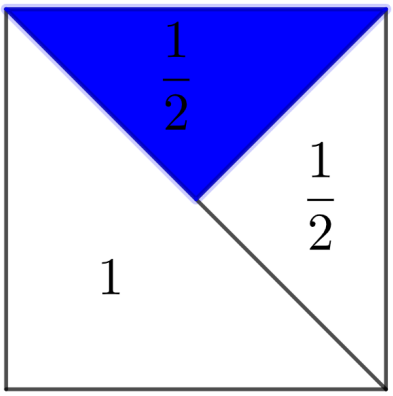

Figura 3.11:

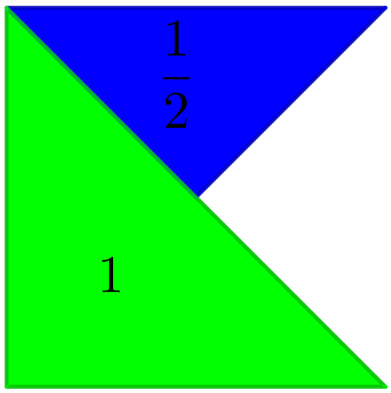

Figura 3.12:

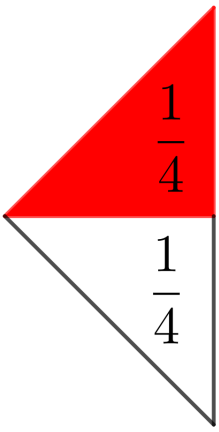

Figura 3.13:

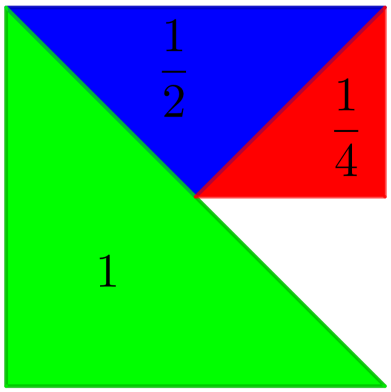

Figura 3.14:

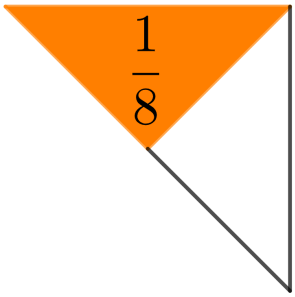

Figura 3.15:

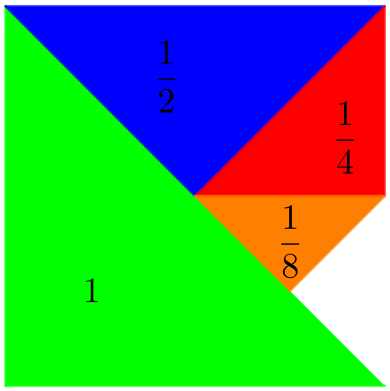

Figura 3.16:

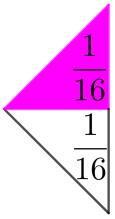

Figura 3.17:

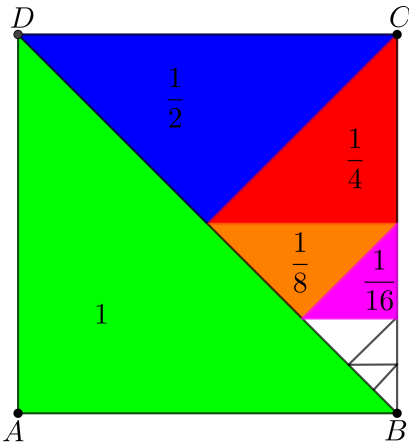

Figura 3.18:

Demonstração analítica: Considere um quadrado cuja área é igual a 2, como na Figura 3.9. Traçando a diagonal desse quadrado dividiremos ele em dois triângulos isósceles, cujas áreas sejam iguais a 1. Dividiremos um desses triângulos ao meio, assim teremos dois novos triângulos, cujas áreas são iguais a 1/2, conforma a Figura 3.11. Encaixe um desses triângulos sobre o triângulo de área 1, Figura 3.12. Divida o triângulo que sobrou de área 1/2 em duas partes iguais, assim teremos dois novos triângulos de área 1/4. Encaixe um desses triângulos sobre o triângulo de área 1, como na Figura 3.14. Repetindo o processo divida o triângulo de área 1/4, assim teremos dois novos triângulos de área 1/8. Encaixe um desses triângulos de área 1/8, sobre o triângulo de área 1, e repetiremos esse processo infinitamente. Note que as áreas dos triângulo ABD e BDC, mostrados na Figura 3.18, são iguais a 1 . Assim, temos que :

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} \ldots ,$$

como afirmamos. ■

Considerações finais

Diante da pesquisa realizada, acreditamos que os objetivos traçados foram alcançados e que este trabalho contribuiu com o nosso processo de formação. Apresentando sempre soluções simples para cada problema matemático proposto, temos a certeza de que é possível trabalhar as demonstrações matemáticas já no ensino básico, mesmo que de início seja necessário recorrer ao apelo visual.

Neste projeto propomos estudar as demonstrações matemáticas no ensino básico, e como elas auxiliam a entender o conteúdo apresentado. Além disso, apresentamos a importância de um software como o GeoGebra, para o ensino da matemática, nos auxiliando nas construções das figuras utilizadas para as demonstrações. Buscamos apresentar como as demonstrações são importantes na vida estudantil, para que os alunos possam compreender de onde surgiram as diversas fórmulas que utilizamos na matemática, pois sabemos das dificuldades para justificar resultados matemáticos.

Desejamos que os problemas aqui mencionados possam contribuir com alunos que terão um primeiro contato com determinados assuntos da matemática e também aos professores quanto a maneira de abordar novos conteúdos em sala de aula. E que de alguma maneira possa despertar em alunos e professores o interesse pela argumentação matemática.

Bibliografia

[1] Barbosa, J. L. M. *Geometria Euclidiana Plana*. 4º edição: SBM, 2015.

[2] BRASIL. Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasil, 2018.

[3] Leivas, J. C. P.; Mathias, C. V.; Silva, H. A. *Provas sem palavras, visualização, animação e Geogebra*. Revista do Instituto Geogebra de São Paulo, 2019. Disponível em:
⟨ https://revistas.pucsp.br/index.php/IGISP/article/view/44701/30657 ⟩.

[4] Nelsen, R. B. *Proofs Without Words*. 2ª edição: Mathematical Association of America, 1993.

[5] Instituto GeoGebra de São Paulo. Disponível em
⟨ https://https://www.pucsp.br/geogebrasp/geogebra.html ⟩.

[6] Nunes, I. B. D. *Demonstrações visuais: provas com e sem palavras*. 2020. 144f. Dissertação (PROFMAT) - Centro de Ciências Exatas e da Terra, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2020. Disponível em: ⟨https://repositorio.ufrn.br/jspui/handle/123456789/29256 ⟩.