Universidade Federal da Paraíba
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Doutorado em Matemática

Operadores múltiplo somantes: desiguadades de Hardy-Littlewood, índice de somabilidade e lineabilidade

por

Kleber Soares Câmara

João Pessoa - PB
Julho de 2021

Operadores múltiplo somantes: desiguadades de Hardy-Littlewood, índice de somabilidade e lineabilidade

por

Kleber Soares Câmara †

sob orientação do

Prof. Dr. Joedson Silva dos Santos

Tese apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Matemática.

João Pessoa - PB

Julho de 2021

†Este trabalho contou com o apoio financeiro da CAPES.

Catalogação na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

C172o Camara, Kleber Soares.
Operadores múltiplo somantes : desiguadades de Hardy-Littlewood, índice de somabilidade e lineabilidade / Kleber Soares Camara. - João Pessoa, 2021.
104 f. : il.

Orientação: Joedson Silva dos Santos.
Tese (Doutorado) - UFPB/CCEN.

1. Matemática. 2. Desigualdades de Hardy-Littlewood. 3. Índice de somabilidade. 4. Lineabilidade. I. Santos, Joedson Silva dos. II. Título.

UFPB/BC CDU 51(043)

Elaborado por Larissa Silva Oliveira de Mesquita - CRB-15/746

Universidade Federal da Paraíba

Programa de Pós-Graduação em Matemática

Doutorado em Matemática

Área de Concentração: Análise

Aprovada em: 09/07/2021

Prof. Dr. Daniel Marinho Pellegrino - UFPB

Prof. Dr. Uberlândio Batista Severo - UFPB

Prof. Dr. Daniel Núñes Alarcón - UNAL

Prof. Dr. Thiago Ginez Velanga Moreira - UNIR

Prof. Dra. Daniela Mariz Silva Vieira - USP

Prof. Dr. Joedson Silva dos Santos - UFPB

Orientador

Tese apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Matemática.

João Pessoa – PB

Julho de 2021

Resumo

Neste trabalho, apresentamos limites universais para as desigualdades de Hardy–Littlewood, desenvolvemos alguns resultados referentes à somabilidade de operadores multilineares que são múltiplo somantes numa perspectiva anisotrópica, bem como medimos o "tamanho", no sentido da lineabilidade, do conjunto dos operadores multilineares que tomam valores em ℓ_∞ e que não são múltiplo somantes.

Palavras-chave: Desigualdades de Hardy–Littlewood; Índice de somabilidade; Lineabilidade.

Abstract

In this work, we present universal limits for Hardy–Littlewood inequalities, we developed some results regarding the summability of multilinear operators that are multiple summing in an anisotropic perspective, as well as we measure the "size", in the sense of lineability, of the set of multilinear operators that take values in ℓ_∞ and that are not multiple summing.

Keywords: Hardy–Littlewood inequalities; Index of summability; Lineability.

Agradecimentos

A Deus, que nos faz sobressair. A Ele atribuo toda honra, poder e glória.

Ao meu orientador, Joedson Silva dos Santos, pela condução de cada artigo e problemas que deram origem ao presente trabalho. Pela paciência e companheirismo ao me ajudar com os resultados.

Aos professores Daniel Marinho Pellegrino, Nacib Gurgel Albuquerque e Gustavo da Silva Araújo que também trabalharam comigo e me ajudaram na realização dos resultados que originaram esta tese.

À minha família, pelo apoio. Em especial, à Aparecida Câmara (minha esposa), que muito contribuiu para a realização deste trabalho, bem como para a realização do curso inteiro.

A todos os professores do PPGMat, em particular àqueles dos quais eu fui aluno, pela forte contribuição em minha formação como matemático.

Aos meus colegas de trabalho, em especial, Ronaldo Garcia, Antônio Gomes e o Elmer R. L. Villa Real, pela força que me deram.

À UFERSA, pela liberação do meu afastamento e pelo apoio financeiro.

À CAPES, pelo apoio financeiro.

Aos professores que participaram da banca examinadora, pelas sugestões e correções.

"Na verdade, há um espírito no homem, e o sopro do Todo-Poderoso o faz sábio."

Jó, cap. 32, vers. 8
Bíblia Sagrada

Dedicatória

À minha família.

Sumário

Introdução 1

Notação e terminologia 4

1 Preliminares **7**

1.1 Desigualdades de Hardy–Littlewood 7

1.2 Índice de somabilidade 12

1.3 Lineabilidade em conjuntos de operadores não múltiplo somantes 17

2 Limites universais para as desigualdades de Hardy–Littlewood em formas multilineares **20**

2.1 Nova desigualdade do tipo Hardy–Littlewood 21

3 Somabilidade de operadores multilineares **28**

3.1 Introdução 28

3.2 Índice de somabilidade 29

3.2.1 Definições 29

3.2.2 Estimativas de norma somante da identidade em espaços de dimensão finita 34

3.3 Estimativas superiores para o índice 39

3.3.1 Aplicações 43

3.4 Situações de coincidência em espaços de Banach com cotipo finito . . . 49

3.5 Situações de coincidência mediante desigualdades de Hardy–Littlewood 51

3.6 Estimativas inferiores para o índice de somabilidade 57

3.7 Índices de somabilidade ótimos 65

3.8 Isometrias clássicas e desigualdades de Bohnenblust–Hille e Hardy–Littlewood 74

4 **Operadores múltiplo (p,q)-s-somantes** **77**

4.1 Abordagem anisotrópica da teoria multilinear 77

4.2 Lineabilidade 82

Apêndices

A **Desigualdade de Minkowski generalizada** **88**

B **Caso $n = 3$ da igualdade 3.21** **91**

Referências **93**

Introdução

Em 1930, visando resolver um problema proposto por P. J. Daniell, J. E. Littlewood provou que

$$\left(\sum_{j,k=1}^{\infty}|T(e_j,e_k)|^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{3}{4}}\leq\sqrt{2}\|T\|,$$

para toda forma bilinear contínua $T\colon c_0\times c_0\to\mathbb{C}$, onde o expoente 4/3 é ótimo e $c_0=\{(x_n)_{n=1}^{\infty}:x_n\in\mathbb{K}\text{ e }\lim x_n=0\}$. Essa é a famosa *Desigualdade* 4/3 *de Littlewood* [33], cuja notoriedade merece destaque, pois ela é o ponto de partida da teoria dos operadores múltiplo somantes, objeto do presente estudo.

A partir da desigualdade do 4/3 de Littlewood, foi possível obter outras várias desigualdades, como por exemplo, uma desigualdade que foi provada por Bohnenblust e Hille, em 1931, a qual surgiu como uma ferramenta para resolver problemas relacionados a séries de Dirichlet e, atualmente, é conhecida por ser importante para aplicações em Física (veja [37]). Nos referimos à *Desigualdade de Bohnenblust–Hille* [17], que garante a existência de uma constante $B_m\geq 1$, com $m\geq 2$, tal que

$$\left(\sum_{j_1,\ldots,j_m=1}^{\infty}|T(e_{j_1},\ldots,e_{j_m})|^{\frac{2m}{m+1}}\right)^{\frac{m+1}{2m}}\leq B_m\|T\|,$$

para toda forma m–linear contínua $T\colon c_0\times\cdots\times c_0\to\mathbb{C}$. Aqui se inicia a, propriamente dita, Teoria dos Operadores Múltiplo Somantes, pois podemos usar o fato de que $\mathcal{L}(c_0;E)$ é isometricamente isomorfo a $\ell_1^{\omega}(E)$ (vide [24, Proposição 2.2]) e, na terminologia adotada aqui, a desigualdade acima nos assegura que

$$\mathcal{L}(E_1,\ldots,E_m;\mathbb{K})=\Pi^m_{\left(\frac{2m}{m+1};1,\ldots,1\right)}(E_1,\ldots,E_m;\mathbb{K})$$

para todos os espaços de Banach $E_1, \ldots, E_m$ e todo $m \geq 2$, onde

$$\Pi^m_{\left(\frac{2m}{m+1};1,\ldots,1\right)}(E_1, \ldots, E_m; \mathbb{K})$$

denota o espaço dos operadores múltiplo $\left(\frac{2m}{m+1}; 1, \ldots, 1\right)$ – somantes (veja [6, Teorema 4.3]).

Três anos após apresentar a Desigualdade 4/3, precisamente em 1934, Hardy e Littlewood estenderam essa desigualdade para espaços ℓ_p. Também nessa linha, em 1981, Praciano–Pereira [48] estende a Desigualdade de Bohnenblust–Hille para espaços ℓ_p e, com a generalização mais recente dada, em 2016, por V. Dimant e P. Sevilla–Peris [25], as desigualdades de Hardy–Littlewood para formas multilineares em espaços de sequências afirmam que existem constantes $C_m \geq 1$ (que não dependem de n) tais que

$$\left(\sum_{j_1,\ldots,j_m=1}^{n} |T(e_{j_1}, \ldots, e_{j_m})|^{\rho}\right)^{\frac{1}{\rho}} \leq C_m \sup_{\|x_1\|,\ldots,\|x_m\|\leq 1} |T(x_1, \ldots, x_m)|,$$

para todos os inteiros positivos $m, n \geq 2$ e toda forma m-linear $T : \ell^n_{p_1} \times \cdots \times \ell^n_{p_m} \to \mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), onde $\rho = \frac{2m}{m+1-2\left(\frac{1}{p_1}+\cdots+\frac{1}{p_m}\right)}$ se $0 \leq \frac{1}{p_1}+\cdots+\frac{1}{p_m} \leq \frac{1}{2}$ ou $\rho = \frac{1}{1-\left(\frac{1}{p_1}+\cdots+\frac{1}{p_m}\right)}$ quando $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{p_1} + \cdots + \frac{1}{p_m} < 1$.

O Capítulo 1 do presente trabalho de tese traz um estudo preliminar, com ênfase nos resultados de [1, 13, 34, 35], que nos propomos a melhorar e estender.

No Capítulo 2, abordamos as desigualdades de Hardy-Littlewood para formas multilineares em espaços de Banach. As boas estimativas para as constantes que aparecem nessas desigualdades estão associadas a aplicações em matemática e física, embora o comportamento preciso dessas constantes ainda seja desconhecido; e é exatamente no tocante ao comportamento dessas constantes que damos uma nova contribuição.

Ainda no que se refere aos operadores múltiplo somantes, em 2003, Pérez–García ([43]) e M. C. Matos ([36]) apresentaram, de forma independente, o espaço vetorial $\Pi^m_{(p;q)}(E_1, \ldots, E_m; F)$ dos operadores multilineares contínuos que são $(p;q)$-somantes, isto é, dos operadores multilineares contínuos $T : E_1 \times \cdots \times E_m \to F$ para os quais existe uma constante $C \geq 0$ que cumpre a desigualdade

$$\left(\sum_{k_1,\ldots,k_m=1}^{n} \left\|T\left(x^{(1)}_{k_1}, \ldots, x^{(m)}_{k_m}\right)\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq C \prod_{i=1}^{m} \left(\sup_{\varphi_i \in B_{E_i^*}} \sum_{k_i=1}^{n} \left|\varphi_i\left(x^{(i)}_{k_i}\right)\right|^q\right)^{1/q} \tag{1}$$

para todo inteiro positivo n e todos os $x^{(i)}_{k_i} \in E_i$, com $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq k_i \leq n$. Todavia, nem todo operador multilinear contínuo satisfaz essa desigualdade, como nos mostra, por exemplo, uma versão fraca do Teorema de Dvoretzky–Rogers [27], que diz que, num espaço de Banach E, a aplicação identidade é $p-$somante ($(p;p)-$somante, na notação acima) se, e somente se, E tem dimensão finita. Em outras palavras, nem sempre existe uma constante C satisfazendo a desigualdade acima. Outrossim, não é óbvio que exista uma constante C_n, dependendo apenas de n, que satisfaça a desigualdade (1) para todo $T \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_m; F)$ e todos os $x_{k_i}^{(i)} \in E_i$, uma vez que, variando T ou os $x_{k_i}^{(i)}$, C_n poderia tender a infinito, embora isso não ocorra, como é provado em [34, 35], de Maia, Pellegrino e Santos. Nessas referências também é mostrado que, na hipótese de (1) falhar, sempre existirá, para cada n, uma constante da forma $C_n = Cn^s$, com $C > 0$ e $s \geq 0$ dependendo apenas de p, q, m, satisfazendo a desigualdade (1). Desse modo, se $s = 0$ satisfaz a desigualdade, o operador é absolutamente somante. Porém, quando a desigualdade acima só é satisfeita para $s > 0$, além de o operador não ser absolutamente somante, quanto menor for o valor de s satisfazendo a desigualdade, mais perto, digamos assim, o operador está de ser absolutamente somante. Daí, inspirados em [10], de Araújo e Pellegrino, Maia, Pellegrino e Santos definiram o $m-$índice de $(p;q)-$somabilidade do par de espaços de Banach $(E_1 \times \cdots \times E_m; F)$ como sendo o ínfimo dos s que satisfazem a desigualdade (1), com Cn^s em lugar de C, obviamente sob a hipótese de existir uma constante $C > 0$ que a satisfaça para todo $T \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_m; F)$ e todos os $x_k^{(i)} \in E_i$.

No Capítulo 3, apresentamos uma definição mais geral para o índice de somabiliade, que traz a definição acima como um caso particular. Essa generalização tem como base uma abordagem anisotrópica natural para operadores múltiplo-somantes que também é exposta no mesmo capítulo. Essa nova abordagem nos permite generalizar alguns dos resultados apresentados em [34, 35], mas não de forma trivial, pois tivemos que obter alguns outros resultados paralelamente, como por exemplo, a Proposição 3.2.9, que estende o intervalo, referente às desigualdades (veja [28, Corolário 16.3.1]) $\pi_{(p;q)}(T) \leq \|T\|^{1-\frac{r}{p}} \cdot \pi_{(r;q)}(T)^{\frac{r}{p}}$, para $0 < q \leq r \leq p$. Podemos citar o Corolário 3.5.2, que dá uma versão anisotrópica para as desigualdades clássicas de Hardy-Littlewood que, por sua vez, permitiu a generalização de uma situação de coincidência apresentada em [9, Teorema 3.2], a saber, reunimos as hipóteses sobre os números reais t_i, s_i com $i = 1, \ldots, m$, que são necessárias para que ocorra a igualdade $\mathcal{L}(E_1, \ldots, E_m; \mathbb{K}) = \Pi^m_{(\mathbf{t},\mathbf{s})}(E_1, ..., E_m; \mathbb{K})$ (onde $\mathbf{t} = (t_1, \ldots, t_m)$ e $\mathbf{s} = (s_1, \ldots, s_m)$), a qual é útil, por exemplo, na obtenção de índices de somabilidade com estimativa ótima.

Dedicamos o Capítulo 4 ao estudo do espaço $\prod_{(\mathbf{p};\mathbf{q})}^{m-\mathbf{s}}(E_1,\ldots,E_m;F)$ dos operadores múltiplo $(\mathbf{p},\mathbf{q})-\mathbf{s}-$somantes, o qual generaliza a noção apresentada em [34]. Entre outros resultados, mostramos que o conjunto $\Pi_{(\mathbf{p};\mathbf{q})}^{m-\mathbf{s}}\left(E_1,...,E_m;\ell_\infty\right)\backslash\Pi_{(\mathbf{p};\mathbf{q})}^{m}\left(E_1,...,E_m;\ell_\infty\right)$ é vazio ou $\mathfrak{c}-$lineável, onde $\mathfrak{c}$ é a cardinalidade de $\mathbb{R}$.

Notação e terminologia

- Em todo este trabalho, $\mathbb{K}$ denotará o corpo dos reais $\mathbb{R}$ ou o corpo dos complexos $\mathbb{C}$. Os espaços vetoriais sempre serão considerados sobre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Ocasionalmente, escreveremos $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$, com $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$.

- Usaremos o termo "operador" com o mesmo sentido de "função". Se E e F são espaços vetoriais normados sobre o corpo $\mathbb{K}$, denotaremos por $\mathcal{L}(E; F)$ o espaço dos operadores lineares contínuos de E em F.

- $e_j = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$ denota um vetor canônico dos espaços de sequências, o qual é definido escrevendo-se 1 na j-ésima coordenada e 0 nas demais.

- ℓ_p, $1 \leq p < \infty$, denotará o espaço de Banach de todas as sequências $x = (x_n)_{n=1}^{\infty}$ em $\mathbb{K}$ absolutamente p–somáveis, i.e, tais que $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty$, munido com a norma p $\|x\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$. Quando $p = \infty, \ell_\infty$ denotará o espaço de todas as sequências $x = (x_n)_{n=1}^{\infty}$ em $\mathbb{K}$ que são limitadas, munido com a norma do supremo, dada por $\|x\|_\infty = \sup_k |x_k|$. Escreveremos, também, ℓ_p^n para denotar o conjunto $\mathbb{K}^n$ munido com a norma p (norma do máximo, se $p = \infty$) e $c_0 = \{(x_n)_{n=1}^{\infty} : x_n \in \mathbb{K} \text{ e } \lim x_n = 0\}$.

- Para $p \in [1, \infty)$, definimos por
$$\ell_p^w(E) := \left\{ (x_j)_{j \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}} : \sum_{j=1}^{\infty} |\varphi(x_j)|^p < \infty, \text{ para todo } \varphi \in E^* \right\}$$
o espaço de todas as sequências que são fracamente p-somáveis.

- Dados $x_1, ..., x_n \in E$, escrevemos

$$\|(x_k)_{k=1}^n\|_{w,p} := \sup_{\varphi \in B_{E^*}} \left(\sum_{k=1}^n |\varphi(x_k)|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

para denotar a norma fraca de $(x_k)_{k=1}^n$ no espaço $\ell_p^\omega(E)$.

- Para $p \in [1, +\infty]$, p^* denota o conjugado de p, ou seja, p^* satisfaz a igualdade $\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1$.

- Para cada $p \geq 1$, escrevemos $X_p = \ell_p$ e $X_\infty = c_0$.

- Dado $\mathbf{p} := (p_1, \ldots, p_m) \in [1, \infty]^m$, $\ell_{\mathbf{p}}$ é o espaço de sequências com norma mista

$$\ell_{\mathbf{p}}(E) := \ell_{p_1}\left(\ell_{p_2}\left(\cdots\left(\ell_{p_m}\left(E\right)\right)\cdots\right)\right)$$

que reúne todas as matrizes valoradas com vetores multi-índices $\mathbf{x} := (x_{\mathbf{j}})_{\mathbf{j} \in \mathbb{N}^m} = \left(x_{j_1}^{(1)}, \ldots, x_{j_m}^{(m)}\right)_{(j_1, \ldots, j_m) \in \mathbb{N}^m}$ que têm norma $\mathbf{p}$ finita. Para $\mathbf{p} \in [1, \infty)^m$, uma matriz de vetores $\mathbf{x}$ pertence a $\ell_{\mathbf{p}}(E)$ se, e somente se,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}\|_{\mathbf{p}} &:= \left(\sum_{j_1=1}^{\infty} \left(\sum_{j_2=1}^{\infty} \left(\cdots \left(\sum_{j_{m-1}=1}^{\infty} \left(\sum_{j_m=1}^{\infty} \|x_{\mathbf{j}}\|^{p_m} \right)^{\frac{p_{m-1}}{p_m}} \right)^{\frac{p_{m-2}}{p_{m-1}}} \cdots \right)^{\frac{p_2}{p_3}} \right)^{\frac{p_1}{p_2}} \right)^{\frac{1}{p_1}} \\ &< \infty. \end{aligned}$$

- Para $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_m) \in [1, \infty]^m$ e $1 \leq k \leq m$, definimos

$$\left|\frac{1}{\mathbf{p}}\right|_{\leq k} := \frac{1}{p_1} + \cdots + \frac{1}{p_k}, \quad \left|\frac{1}{\mathbf{p}}\right|_{\geq k} := \frac{1}{p_k} + \cdots + \frac{1}{p_m} \quad \text{e} \quad \left|\frac{1}{\mathbf{p}}\right| := \left|\frac{1}{\mathbf{p}}\right|_{\leq m} = \left|\frac{1}{\mathbf{p}}\right|_{\geq 1}.$$

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo, expomos basicamente uma breve revisão de desigualdades do tipo Hardy–Littlewood e uma compilação de alguns resultados devidos a M. Maia, D. Pellegrino e J. Santos (que podem ser encontrados em [34, 35]) concernentes a operadores múltiplo somantes, índice de somabilidade de pares de espaços de Banach, e resultados relacionados ao "tamanho" – do ponto de vista da lineabilidade – do conjunto dos operadores não múltiplo somantes. O objetivo dessa compilação é tornar o texto mais autossuficiente, uma vez que esses mesmos resultados são objetos de nosso estudo, conforme é mostrado nos capítulos seguintes.

1.1 Desigualdades de Hardy–Littlewood

Na presente seção fazemos uma sinóptica revisão concernente às desigualdades do tipo Hardy–Littlewood, dentre as quais destacamos os Teoremas 1.1.2 e 1.1.3 de [1] e [13], respectivamente.

Doravante, $E_1, \ldots, E_m, F$ denotarão espaços de Banach arbitrários sobre um corpo $\mathbb{K}$.

Conforme mencionado na Introdução, para todos os inteiros $m, n \geq 2$ e toda forma m-linear $T : \ell_{p_1}^n \times \cdots \times \ell_{p_m}^n \to \mathbb{K}$, as desigualdades de Hardy–Littlewood para formas multilineares em espaços de sequências garantem a existência de constantes

$C_m \geq 1$ (que não dependem de n) tais que

$$\left(\sum_{j_1,\ldots,j_m=1}^{n} |T(e_{j_1},\ldots,e_{j_m})|^{\frac{2m}{m+1-2\left(\frac{1}{p_1}+\cdots+\frac{1}{p_m}\right)}}\right)^{\frac{m+1-2\left(\frac{1}{p_1}+\cdots+\frac{1}{p_m}\right)}{2m}} \leq C_m \|T\|$$

se $0 \leq \frac{1}{p_1}+\cdots+\frac{1}{p_m} \leq \frac{1}{2}$, e

$$\left(\sum_{j_1,\ldots,j_m=1}^{n} |T(e_{j_1},\ldots,e_{j_m})|^{\frac{1}{1-\left(\frac{1}{p_1}+\cdots+\frac{1}{p_m}\right)}}\right)^{1-\left(\frac{1}{p_1}+\cdots+\frac{1}{p_m}\right)} \leq C_m \|T\|$$

quando $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{p_1}+\cdots+\frac{1}{p_m} < 1$. Em ambas as desigualdades, $\|T\|$ representa a norma de T dada por $\|T\| = \sup_{\|x_1\|,\ldots,\|x_m\|\leq 1} |T(x_1,\ldots,x_m)|$. De um modo geral, para quaisquer espaços de Banach $E_1,\ldots,E_m$ e F sobre $\mathbb{K}$ e, para toda aplicação m-linear contínua $T: E_1\times\cdots\times E_m \to F$, definimos a norma de T por

$$\|T\| := \sup_{\|x_1\|,\ldots,\|x_m\|\leq 1} \|T(x_1,\ldots,x_m)\|.$$

Outrossim, a *desigualdade do 4/3 de Littlewood* [33], que data de 1930, e afirma que

$$\left(\sum_{j,k=1}^{\infty} |T(e_j,e_k)|^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{3}{4}} \leq \sqrt{2}\|T\|,$$

para toda forma bilinear contínua $T\colon c_0\times c_0 \to \mathbb{C}$, com o expoente 4/3 ótimo, merece destaque, pois, de certa forma, esse resultado é o ponto de partida da teoria dos operadores múltiplo somantes. Para resultados recentes em operadores múltiplo somantes, recomendamos a leitura de [1–3, 7, 8] e das referências contidas nesses trabalhos.

A desigualdade do 4/3 de Littlewood foi o ponto de partida de várias desigualdades, como é o caso da desigualdade devida a Bohnenblust e Hille [17] (1931), que garante a existência de uma constante $B_m \geq 1$ tal que

$$\left(\sum_{j_1,\ldots,j_m=1}^{\infty} |T(e_{j_1},\ldots,e_{j_m})|^{\frac{2m}{m+1}}\right)^{\frac{m+1}{2m}} \leq B_m \|T\|,$$

para toda forma m–linear contínua $T\colon c_0\times\cdots\times c_0 \to \mathbb{C}$.

Naturalmente, se $m=2$, recuperamos a desigualdade do 4/3 de Littlewood. Em 1934, Hardy e Littlewood [32] estenderam a desigualdade do 4/3 de Littlewood para aplicações bilineares definidas em $\ell_p\times\ell_q$. Em 1981, Praciano-Pereira [48] estendeu a desigualdade de Hardy–Littlewood para formas m-lineares sobre $\ell_{p_1}\times\cdots\times\ell_{p_m}$, com

$0 \leq \frac{1}{p_1} + \cdots + \frac{1}{p_m} \leq \frac{1}{2}$, e mais recentemente Dimant e Sevilla-Peris [25] generalizaram essas estimativas para o caso $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{p_1} + \cdots + \frac{1}{p_m} < 1$. Atualmente, ambas as desigualdades supracitadas são chamadas de *desigualdades de Hardy–Littlewood.*

Doravante, para qualquer função f, sempre que fizer sentido, definimos formalmente $f(\infty) = \lim_{p \to \infty} f(p)$. Além disso, para $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_m) \in [1, \infty]^m$ e $1 \leq k \leq m$, escrevemos

$$\left|\frac{1}{\mathbf{p}}\right|_{\leq k} := \frac{1}{p_1} + \cdots + \frac{1}{p_k}, \quad \left|\frac{1}{\mathbf{p}}\right|_{\geq k} := \frac{1}{p_k} + \cdots + \frac{1}{p_m} \quad \text{e} \quad \left|\frac{1}{\mathbf{p}}\right| := \left|\frac{1}{\mathbf{p}}\right|_{\leq m} = \left|\frac{1}{\mathbf{p}}\right|_{\geq 1}.$$

Sejam ainda E_j^* o dual topológico de E_j, $B_{E_j^*}$ a bola unitária fechada de $E_j^*, j = 1, \ldots, m$, e $\mathcal{L}(E_1, \ldots, E_m; F)$ o espaço dos operadores m-lineares (multilineares) contínuos de $E_1 \times \cdots \times E_m$ no espaço de Banach F.

A seguir, enunciamos as desigualdades clássicas de Hardy–Littlewood:

Teorema 1.1.1. *[Bohnenblust, Dimant, Hardy, Hille, Littlewood, Praciano-Pereira, Sevilla-Peris] Sejam $m \geq 2$ um inteiro positivo e $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_m) \in (1, \infty]^m$ com $0 \leq \left|\frac{1}{\mathbf{p}}\right| < 1$. Então existem constantes $C_{m,\mathbf{p}}^{\mathbb{K}} \geq 1$ tais que*

$$\left(\sum_{j_1,\ldots,j_m=1}^{n} |T(e_{j_1}, \ldots, e_{j_m})|^{\frac{2m}{m+1-2\left|\frac{1}{\mathbf{p}}\right|}}\right)^{\frac{m+1-2\left|\frac{1}{\mathbf{p}}\right|}{2m}} \leq C_{m,\mathbf{p}}^{\mathbb{K}} \|T\| \ \text{se}\ 0 \leq \left|\frac{1}{\mathbf{p}}\right| \leq \frac{1}{2}, \tag{1.1}$$

$$\left(\sum_{j_1,\ldots,j_m=1}^{n} |T(e_{j_1}, \ldots, e_{j_m})|^{\frac{1}{1-\left|\frac{1}{\mathbf{p}}\right|}}\right)^{1-\left|\frac{1}{\mathbf{p}}\right|} \leq C_{m,\mathbf{p}}^{\mathbb{K}} \|T\| \ \text{se}\ \frac{1}{2} \leq \left|\frac{1}{\mathbf{p}}\right| < 1, \tag{1.2}$$

para toda forma m-linear $T : \ell_{p_1}^n \times \cdots \times \ell_{p_m}^n \to \mathbb{K}$ e todo inteiro positivo n.

Quando $p_1 = \cdots = p_m = p$, denotamos $C_{m,\mathbf{p}}^{\mathbb{K}}$ por $C_{m,p}^{\mathbb{K}}$. Se $\left|\frac{1}{\mathbf{p}}\right| = 0$, isto é, se $p_1 = \cdots = p_m = \infty$, temos $\frac{2m}{m+1-2\left|\frac{1}{\mathbf{p}}\right|} = \frac{2m}{m+1}$, pelo que recaímos na desigualdade clássica de Bohnenblust–Hille. Em particular, se $m < p \leq \infty$, o Teorema 1.1.1 garante a existência de constantes $C_{m,p}^{\mathbb{K}} \geq 1$ tais que

$$\left(\sum_{j_1,\ldots,j_m=1}^{n} |T(e_{j_1}, \ldots, e_{j_m})|^{\frac{2mp}{mp+p-2m}}\right)^{\frac{mp+p-2m}{2mp}} \leq C_{m,p}^{\mathbb{K}} \|T\| \ \text{se } 2m \leq p \leq \infty,$$

$$\left(\sum_{j_1,\ldots,j_m=1}^{n} |T(e_{j_1}, \ldots, e_{j_m})|^{\frac{p}{p-m}}\right)^{\frac{p-m}{p}} \leq C_{m,p}^{\mathbb{K}} \|T\| \ \text{se } m < p \leq 2m,$$

Aplicando a desigualdade generalizada de Kahane–Salem–Zygmund em (1.1) (veja o Lema 1.2.10) e a desigualdade de Hölder em (1.2), verifica-se que os expoentes

$\frac{2m}{m+1-2\left|\frac{1}{\mathbf{p}}\right|}$ e $\frac{1}{1-\left|\frac{1}{\mathbf{p}}\right|}$ são ótimos no seguinte sentido: se trocarmos os expoentes por outros menores, as constantes que aparecem no segundo membro das desigualdades acima passam a depender de n também.

Além de serem desconhecidas as estimativas precisas das constantes de Hardy–Littlewood, o crescimento assintótico dessas constantes continua sendo um problema em aberto na Análise Matemática, como acontece, em particular, com a desigualdade de Bohnenblust–Hille. No entanto, olhando para as desigualdades acima de um ponto de vista anisotrópico, que consiste basicamente em olhar para os somatórios das desigualdades acima com expoentes variados, isto é, tendo um expoente para cada um dos m somatórios, verifica-se o surgimento de certa complexidade (veja, por exemplo, [5, 8, 11]). Nos Capítulos 3 e 4, fazemos uma abordagem nesse sentido ao estudar o índice de somabilidade de pares de espaços de Banach e operadores múltiplos $(\mathbf{p;q}) - \mathbf{s}-$somantes, respectivamente.

O crescimento preciso das constantes $C_{m,\mathbf{p}}^{\mathbb{K}}$, com $0 \leq \left|\frac{1}{\mathbf{p}}\right| < 1$, é relevante para as aplicações. As primeiras estimativas para $C_{m,\mathbf{p}}^{\mathbb{K}}$ tiveram crescimento exponencial; mais precisamente

$$C_{m,\mathbf{p}}^{\mathbb{K}} \leq \left(\sqrt{2}\right)^{m-1}.$$

O caso $0 \leq \left|\frac{1}{\mathbf{p}}\right| \leq \frac{1}{2}$ tem sido bastante explorado desde sua aparição e, nesse contexto, vários estudos apresentaram progressos significativos (vide [2,3,8,11,14]). Por exemplo, entre outros resultados, é provado em [8, 14] que, para $2m(m-1)^2 < p \leq \infty$, temos

$$\begin{aligned} C_{m,p}^{\mathbb{R}} &< \kappa_1 \cdot m^{\frac{2-\log 2-\gamma}{2}} \approx \kappa_1 \cdot m^{0.36482}, \\ C_{m,p}^{\mathbb{C}} &< \kappa_2 \cdot m^{\frac{1-\gamma}{2}} \approx \kappa_2 \cdot m^{0.21139}, \end{aligned}$$

para certas constantes $\kappa_1, \kappa_2 > 0$, onde γ é a constante de Euler–Mascheroni.

Em contrapartida, o caso $\frac{1}{2} \leq \left|\frac{1}{\mathbf{p}}\right| < 1$ foi pouco explorado e, só recentemente, em [1,13], é que a estimativa original foi melhorada. Nosso principal resultado, apresentado no Capítulo 2, melhora um dos principais resultados nessa linha, disposto em [1, 13], o qual destacamos abaixo:

Teorema 1.1.2. [1, Teorema 3.3] *Sejam $m \geq 2$ um inteiro positivo e $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_m) \in (1, \infty]^m$, com $\frac{1}{2} \leq \left|\frac{1}{\mathbf{p}}\right| < 1$. Então, para toda forma m-linear $T : \ell_{p_1}^n \times \cdots \times \ell_{p_m}^n \to \mathbb{K}$ e* *todo inteiro positivo n,*

$$\left(\sum_{j_1,\ldots,j_m=1}^{n}\left|T\left(e_{j_1},\ldots,e_{j_m}\right)\right|^{\frac{1}{1-\left|\frac{1}{\mathbf{p}}\right|}}\right)^{1-\left|\frac{1}{\mathbf{p}}\right|}\leq 2^{(m-1)\left(1-\left|\frac{1}{\mathbf{p}}\right|\right)}\left\|T\right\|.$$

Observamos que, quando $m < p_1 = \cdots = p_m = p \leq m+1$, temos $p - m \leq 1$ e $\left|\frac{1}{\mathbf{p}}\right| = \frac{1}{p} + \cdots + \frac{1}{p} = \frac{m}{p}$, pelo que

$$(m-1)\left(1-\left|\frac{1}{\mathbf{p}}\right|\right) = (m-1)\left(\frac{p-m}{p}\right) \leq (m-1)\frac{1}{m}.$$

Nesse caso, o Teorema 1.1.2 dá-nos

$$\left(\sum_{j_1,\ldots,j_m=1}^{n}\left|T\left(e_{j_1},\ldots,e_{j_m}\right)\right|^{\frac{p}{p-m}}\right)^{\frac{p-m}{p}}\leq 2^{\frac{m-1}{m}}\left\|T\right\| < 2\left\|T\right\|,$$

para toda forma m-linear $T : \ell_p^n \times \cdots \times \ell_p^n \to \mathbb{K}$ e todo inteiro positivo n, sendo $m < p \leq m+1$. Em razão disso, para esse caso particular, concluímos que as constantes ótimas das desigualdades de Hardy–Littlewood são uniformemente limitadas por 2. Para $m \geq 3$ temos, de um modo geral,

$$\begin{aligned}
2^{(m-1)\left(1-\left|\frac{1}{\mathbf{p}}\right|\right)} \leq 2 \quad &\Leftrightarrow \quad (m-1)\left(1-\left|\frac{1}{\mathbf{p}}\right|\right) \leq 1\\
&\Leftrightarrow \quad 1-\left|\frac{1}{\mathbf{p}}\right| \leq \frac{1}{m-1} = 1 - \frac{m-2}{m-1}\\
&\Leftrightarrow \quad \left|\frac{1}{\mathbf{p}}\right| \geq \frac{m-2}{m-1}.
\end{aligned}$$

Por outro lado, quando $m = 2$, a expressão $2^{(m-1)\left(1-\left|\frac{1}{\mathbf{p}}\right|\right)} \leq 2$ equivale a $1 - \left|\frac{1}{\mathbf{p}}\right| \leq 1$, o que é verdade sempre. Portanto, as constantes ótimas das desigualdades de Hardy–Littlewood são uniformemente limitadas por 2 quando $m = 2$, bem como para todo $m \geq 3$ desde que seja $\left|\frac{1}{\mathbf{p}}\right| \geq \frac{m-2}{m-1}$. Observemos, também, que $2^{(m-1)\left(1-\left|\frac{1}{\mathbf{p}}\right|\right)} > 2$ equivale a $\left|\frac{1}{\mathbf{p}}\right| < \frac{m-2}{m-1}$, que só poderá ocorrer se for $m \geq 4$, já que $\frac{1}{2} \leq \left|\frac{1}{\mathbf{p}}\right| < 1$.

Ainda nesse contexto ($\frac{1}{2} \leq \left|\frac{1}{\mathbf{p}}\right| < 1$), outra importante contribuição é o resultado de Aron, Núñez-Alarcón, Pellegrino e Serrano-Rodríguez (veja [13, Corolário 3.3]):

Teorema 1.1.3. *Sejam $m \geq 2$ um inteiro positivo e $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_m) \in (1, \infty]^m$ tais que $1 < p_m \leq 2 < p_1, \ldots, p_{m-1}$ e*

$$\frac{1}{2} \leq \left|\frac{1}{\mathbf{p}}\right| < 1.$$

Então

$$\left(\sum_{j_1,\ldots,j_m=1}^{n} |T(e_{j_1},\ldots,e_{j_m})|^{\frac{1}{1-\left|\frac{1}{\mathbf{p}}\right|}}\right)^{1-\left|\frac{1}{\mathbf{p}}\right|} \leq \|T\|,$$

para toda forma m-linear $T : \ell_{p_1}^n \times \cdots \times \ell_{p_m}^n \to \mathbb{K}$ *e todo inteiro positivo n.*

1.2 Índice de somabilidade

Nesta seção temos, essencialmente, uma compilação de alguns resultados de [34, 35], e que são objetos de nosso estudo. Iniciamos recordando um pouco da teoria dos operadores multilineares contínuos que são absolutamente e múltiplo somantes. Para o caso linear, que trata dos operadores absolutamente somantes, um estudo detalhado é esboçado em [24].

Sejam $E_1, ..., E_m, F$ espaços de Banach. O índice de somabilidade do par de espaços de Banach $(E_1 \times \cdots \times E_m, F)$ é um tipo de medida de quão longe os operadores m-lineares $T : E_1 \times \cdots \times E_m \to F$ estão de serem múltiplo somantes.

Em [36, 43] é considerada a definição a seguir.

Definição 1.2.1. *Sejam* $1 \leq q \leq p < \infty$. *Um operador multilinear contínuo* $T : E_1 \times \cdots \times E_m \to F$ *é múltiplo* (p, q)*-somante se existe uma constante* $C \geq 0$ *tal que*

$$\left(\sum_{k_1,\ldots,k_m=1}^{n} \left\| T\left(x_{k_1}^{(1)}, ..., x_{k_m}^{(m)}\right)\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq C \prod_{i=1}^{m} \left(\sup_{\varphi_i \in B_{E_i^*}} \sum_{k_i=1}^{n} \left|\varphi_i\left(x_{k_i}^{(i)}\right)\right|^q\right)^{1/q} \tag{1.3}$$

para todo inteiro positivo n e todo $x_{k_i}^{(i)} \in E_i$, *com* $1 \leq i \leq m$ *e* $1 \leq k_i \leq n$.

O espaço vetorial de todos os operadores multilineares contínuos que são múltiplo (p, q)-somantes é denotado por $\Pi_{(p,q)}^{mult}(E_1, \ldots, E_m; F)$. O ínfimo $\pi_{(p,q)}^{mult}(T)$, tomado sobre o conjunto das constantes C que satisfazem (1.3), define uma norma completa em $\Pi_{(p,q)}^{mult}(E_1, \ldots, E_m; F)$. Se $E_1 = \cdots = E_m = E$, simplificamos a notação escrevendo $\Pi_{(p,q)}^{mult}({}^m E; F)$. Para um estudo detalhado da teoria de operadores multilineares em espaços de Banach, sugerimos a leitura de [26, 38] e, para mais detalhes a respeito dos operadores múltiplo somantes, sugerimos [46, 47].

Se um operador m-linear $T : E_1 \times \cdots \times E_m \to F$ não satisfaz a desigualdade (1.3), faz sentido tentar medir o quão “distante” T está de satisfazer (1.3). Nessa perspectiva, em [35], passa a ser considerada a noção de índice de somabilidade, conforme a definição seguinte.

Definição 1.2.2. *O m-índice multilinear de (p,q)-somabilidade de um par $(E_1 \times \cdots \times E_m, F)$ é definido como*

$$\eta_{(p,q)}^{m-mult}\left(E_1, ..., E_m; F\right) = \inf s_{m,p,q},$$

onde $s_{m,p,q} \geq 0$ satisfaz o seguinte:

Existe uma constante $C \geq 0$ (que não depende de n) tal que

$$\left(\sum_{k_1,...,k_m=1}^{n} \left\| T\left(x_{k_1}^{(1)}, ..., x_{k_m}^{(m)}\right)\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq C n^{s_{m,p,q}} \prod_{i=1}^{m}\left(\sup_{\varphi_i \in B_{E_i^*}} \sum_{k_i=1}^{n} \left|\varphi_i\left(x_{k_i}^{(i)}\right)\right|^q\right)^{1/q} \quad (1.4)$$

para todo $T \in \mathcal{L}(E_1, ..., E_m; F)$, todo inteiro positivo n e $x_{k_i}^{(i)} \in E_i$, com $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq k_i \leq n$.

Se $E_1 = \cdots = E_m = E$, escrevemos simplesmente $\eta_{(p,q)}^{m-mult}\left(E; F\right)$, ao invés de $\eta_{(p,q)}^{m-mult}\left(E, ..., E; F\right)$.

O índice de somabilidade mede, em certo sentido, quão "distantes" os espaços $\mathcal{L}\left(E_1, \ldots, E_m; F\right)$ e $\Pi_{(p,q)}^{mult}\left(E_1, \ldots, E_m; F\right)$ estão de coincidirem e, caso coincidam, tem-se

$$\eta_{(p,q)}^{m-mult}\left(E_1, ..., E_m; F\right) = 0.$$

Uma situação similar ocorre com o espaço de Banach $\mathcal{P}(^m E; F)$ de todos os polinômios m-homogêneos contínuos de E em F, mas este não é alvo do presente estudo (ao leitor interessado em resultados recentes e mais detalhes sobre esse tema, sugerimos a leitura de [2, 19, 49]) .

Vejamos alguns resultados extraídos de [34], relacionados a estimativas para o índice multilinear de somabilidade, cujos casos mais gerais exibimos no Capítulo 3.

Fixado $n \in \mathbb{N}$, o ínfimo tomado sobre as constantes $C \geq 0$ que satisfazem a desigualdade (1) é denotado por $\pi_p^{(n)}(T)$ ou, quando não houver perigo de confusão, por $\pi_p(T)$ simplesmente. Com uma demonstração similar à apresentada na prova da Proposição 4.1.5, prova-se que $\pi_p^{(n)}$ define uma norma.

Proposição 1.2.3. [35, Corolário 2.2] *Sejam $0 < p < \infty$. Se E é um espaço normado e $\dim E = n$, então*

$$\pi_p^{(n)}(id_E) \leq n^{\max\left\{\frac{1}{p}, \frac{1}{2}\right\}}.$$

Proposição 1.2.4. [35, Proposição 2.4] *Sejam $0 < p < \infty$ e $E_1, \ldots, E_m, F$ espaços de Banach. Então*

$$\eta_{(p,p)}^{m-mult}(E_1, \ldots, E_m; F) \leq m \cdot \max\left\{\frac{1}{p}, \frac{1}{2}\right\}.$$

Proposição 1.2.5. [35, Proposição 2.6] *Sejam* $1 \leq q \leq p < \infty$ *e* $E_1, \ldots, E_m, F$ *espaços de Banach. Então*

$$\eta_{(p,q)}^{m-mult}(E_1, \ldots, E_m; F) \leq \frac{mq}{p} \max\left\{\frac{1}{q}, \frac{1}{2}\right\}.$$

Doravante, todo resultado da forma

$$\mathcal{L}\left(E_1, ..., E_m; F\right) = \Pi_{(t,s)}^{mult}\left(E_1, ..., E_m; F\right)$$

é chamado *situação de coincidência* (veja [20,22]). Sua importância para nossa pesquisa reside no fato de que esse tipo de situação pode ser usado para estimar o índice de somabilidade.

Proposição 1.2.6 (M. Maia, [34]). *Sejam* $E_1, ..., E_m, F$ *espaços de Banach. Suponha que*

$$\mathcal{L}\left(E_1, ..., E_m; F\right) = \Pi_{(t,s)}^{mult}\left(E_1, ..., E_m; F\right).$$

Então

(a) Para todos p, q *satisfazendo* $1 < p \leq t$ *e* $1 < s \leq q$*, temos*

$$\eta_{(p,q)}^{m-mult}\left(E_1, ..., E_m; F\right) \leq \frac{m}{p} - \frac{m}{t} + \frac{m}{s} - \frac{m}{q}.$$

(b) Para todos p, q *satisfazendo* $1 < p \leq t$ *e* $1 < q \leq s$*, temos*

$$\eta_{(p,q)}^{m-mult}\left(E_1, ..., E_m; F\right) \leq \frac{m}{p} - \frac{m}{t}.$$

(c) Para todos p, q *satisfazendo* $1 < t \leq p$ *e* $1 < s \leq q$*, temos*

$$\eta_{(p,q)}^{m-mult}\left(E_1, ..., E_m; F\right) \leq \frac{m}{s} - \frac{m}{q}.$$

(d) Para todos p, q *satisfazendo* $1 < t \leq p$ *e* $1 < q \leq s$*, temos*

$$\eta_{(p,q)}^{m-mult}\left(E_1, ..., E_m; F\right) = 0.$$

É importante observar que todos os itens da proposição acima poderiam ser reunidos em um único, a saber, para todos $1 < p, q < \infty$, temos

$$\eta_{(p,q)}^{m-mult}\left(E_1, ..., E_m; F\right) \leq m\left(\max\left\{\frac{1}{p} - \frac{1}{t}, 0\right\} + \max\left\{\frac{1}{s} - \frac{1}{q}, 0\right\}\right).$$

Para mais detalhes, veja o Teorema 3.3.3, que traz uma versão mais geral desse resultado.

O lema a seguir é o Corolário 3.20 de [44] (veja também [25]), enunciado em virtude de sua relevância para teoria dos operadores somantes, em particular, para alguns resultados desenvolvidos no Capítulo 3.

Lema 1.2.7 (Corolário 3.20, [44]). *Seja $p \in [1, \infty]$. Então,*

$$\mathcal{L}(E_1, ..., E_m; F) = \Pi^{mult}_{(t,p^*)}(E_1, ..., E_m; F)$$

para todos os espaços de Banach $E_1, ..., E_m$ se, e somente se, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\left(\sum_{k_1,...,k_m=1}^{n} \|T(e_{k_1}, ..., e_{k_m})\|^t \right)^{\frac{1}{t}} \leq C\|T\|$$

para todo operador m-linear contínuo $T : \ell_p^n \times \cdots \times \ell_p^n \to F$.

Vale recordar também a noção de cotipo de um espaço de Banach. Com efeito, para $2 \leq q \leq \infty$, um espaço de Banach E tem cotipo q se existe uma constante $C \geq 0$ de tal forma que, não importa como selecionamos um número finito de vetores $x_1, ..., x_n$ de E, vale a desigualdade

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \|x_k\|^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq C \left(\int_0^1 \left\| \sum_{k=1}^{n} r_k(t) x_k \right\|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}},$$

onde r_k é a k-ésima função de Rademacher, as quais são definidas por

$$r_k(t) = \operatorname{sign}\left[\sin\left(2^k \pi t\right)\right],$$

$k \in \mathbb{N}$ e $t \in [0, 1]$. Quando $q = \infty$, o lado esquerdo da desigualdade acima é substituído pela norma do sup. O cotipo de E, denotado por $\cot(E)$, é definido como sendo o ínfimo tomado sobre todos os q que satisfazem essa desigualdade, em outras palavras

$$\cot(E) = \inf\{q : E \text{ tem cotipo } q\}.$$

Nessa linha, temos o teorema a seguir que, essencialmente, pode ser encontrado em [2, 9], e se destaca por ser uma boa ferramenta na obtenção de estimativas para o índice de somabilidade.

Teorema 1.2.8 (M. Maia, [34]). *Sejam $E_1, ..., E_m, F$ espaços de Banach de dimensão infinita e suponha que F tem cotipo finito $\cot(F) = r$.*

(a) Se $s \in [1, 2)$ e $m < \frac{s}{r(s-1)}$, então

$$\mathcal{L}\left(E_1, ..., E_m; F\right) = \Pi^{mult}_{(t,s)}\left(E_1, ..., E_m; F\right) \Leftrightarrow t \geq \frac{sr}{s - msr + mr}.$$

(b) Se $t \in \left[\frac{2m}{m+1}, 2\right]$, então

$$\mathcal{L}\left(E_1, ..., E_m; \mathbb{K}\right) = \Pi^{mult}_{(t,s)}\left(E_1, ..., E_m; \mathbb{K}\right) \Leftrightarrow s \leq \frac{2mt}{mt + 2m - t}.$$

(c) Se $t \in (2, \infty)$, então

$$\mathcal{L}(E_1, ..., E_m; \mathbb{K}) = \Pi^{mult}_{(t,s)}(E_1, ..., E_m; \mathbb{K}) \Leftrightarrow s \leq \frac{mt}{mt+1-t}.$$

O próximo corolário segue imediatamente do item (a) do Teorema 1.2.8 e da Proposição 1.2.6.

Corolário 1.2.9 (M. Maia, [34])**.** *Sejam $E_1, ..., E_m, F$ espaços de Banach de dimensão infinita. Se F tem cotipo finito $\cot(F) = r$, $1 \leq s < 2$, $m < \frac{s}{r(s-1)}$ e $t = \frac{sr}{s-msr+mr}$, então*

(a) Para todos p, q satisfazendo $0 < p \leq t$ e $\frac{mrt}{r-t+mrt} \leq q$, temos

$$\eta^{m-mult}_{(p,q)}(E_1, ..., E_m; F) \leq \frac{m}{p} + m - \frac{1}{r} - \frac{m}{q} - \frac{(m-1)}{t}.$$

(b) Para todos p, q satisfazendo $0 < p \leq t$ e $0 < q \leq \frac{mrt}{r-t+mrt}$, temos

$$\eta^{m-mult}_{(p,q)}(E_1, ..., E_m; F) \leq \frac{m}{p} - \frac{m}{t}.$$

(c) Para todos p, q satisfazendo $0 < t \leq p$ e $\frac{mrt}{r-t+mrt} \leq q$, temos

$$\eta^{m-mult}_{(p,q)}(E_1, ..., E_m; F) \leq m - \frac{1}{r} + \frac{1}{t} - \frac{m}{q}.$$

(d) Para todos p, q satisfazendo $0 < t \leq p$ e $0 < q \leq \frac{mrt}{r-t+mrt}$, temos

$$\eta^{m-mult}_{(p,q)}(E_1, ..., E_m; F) = 0.$$

Diante dos resultados acima, é possível obter um índice de somabilidade ótimo para certos pares de espaços de Banach, o que é feito com o auxílio de uma versão geral da desigualdade de Kahane - Salem - Zygmund, enunciada no lema abaixo.

Lema 1.2.10 (Lema 6.1 de Albuquerque et al. [3])**.** *Sejam $m, n \geq 1$, $p_k \in [1, \infty]$, $k = 1, \ldots, m$, e seja*

$$\alpha(p_k) = \begin{cases} \frac{1}{2} - \frac{1}{p_k}, & \text{se } p \geq 2 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Existe uma constante universal C_m (dependendo apenas de m) e existe uma forma $m-$linear $A : \ell^n_{p_1} \times \cdots \times \ell^n_{p_m} \to \mathbb{K}$ da forma

$$A(z^{(1)}, ..., z^{(m)}) = \sum_{i_1, ..., i_m = 1}^{n} \pm z^{(1)}_{i_1} \cdots z^{(m)}_{i_m}$$

tal que

$$\|A\| \leq C_m n^{\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{m} \alpha(p_k)}.$$

A proposição a seguir mostra dois casos em que o item (a) da Proposição 1.2.6 não pode ser melhorado. Em outras palavras, os dois casos abaixo trazem estimativas ótimas para o índice de somabilidade.

Proposição 1.2.11 (M. Maia, [34])**.** *Sejam p, q números reais.*

(a) Se $\frac{2m}{m+1} \leq p \leq 2$ e $\frac{2mp}{mp+2m-p} \leq q \leq 2$, então

$$\eta_{(p,q)}^{m-mult}\left({}^{m}\ell_{q^*};\mathbb{K}\right) = \frac{m}{p} + \frac{m}{2} - \frac{1}{2} - \frac{m}{q}.$$

(b) Se $2 < p < \infty$ e $\frac{mp}{mp+1-p} \leq q$, então

$$\eta_{(p,q)}^{m-mult}\left({}^{m}\ell_{q^*};\mathbb{K}\right) = m - 1 + \frac{1}{p} - \frac{m}{q}.$$

Estimativas superiores para o índice multilinear de somabilidade foram obtidas em [35, Proposições 2.6 e 2.7]. O próximo resultado garante que, quando $E_1 = \ldots, E_m = \ell_{q^*}$ e $F = c_0$, não é possível melhorar essas estimativas, uma vez que, nesse caso, o índice também é ótimo.

Proposição 1.2.12 (M. Maia, [34])**.** *Se $0 < p < \infty$ e $1 \leq q \leq 2$, então*

$$\eta_{(p,q)}^{m-mult}\left({}^{m}\ell_{q^*};c_0\right) = \frac{m}{p}.$$

1.3 Lineabilidade em conjuntos de operadores não múltiplo somantes

Nessa seção, trazemos alguns resultados apresentados em [34], em especial, relacionados à teoria de lineabilidade e, para esse fim, é pertinente relembrar alguns conceitos.

Definição 1.3.1. *Sejam X um espaço vetorial (topológico), M um subconjunto de X e μ um número cardinal. Diz-se que M é μ-lineável (μ-espaçável) se $M \cup \{0\}$ contém um espaço vetorial (fechado) de dimensão μ.*

Introduzida por Gurariy em [29], a noção de lineabilidade ganhou notória proeminência, pois, desde então, a busca por estruturas lineares dentro de certos subconjuntos de espaços vetoriais tem sido amplamente investigada. Para uma exposição recente da teoria, sugerimos a leitura de [12].

O problema objeto de nosso trabalho é, essencialmente, o seguinte:

$$\text{O conjunto } \mathcal{L}\left(E_1, ..., E_m; F\right) \backslash \Pi_{(p,q)}^{mult}\left(E_1, ..., E_m; F\right) \text{ é lineável?}$$

No caso linear, esse problema foi abordado em [21] e, no caso multilinear, foi tratado em [9], e ambos os autores obtiveram algumas soluções parciais.

A princípio, apresentamos solução para uma questão um pouco diferente, mas que serve como ferramenta para resolver esse problema. Com essa finalidade, e inspirado pela desigualdade (1.4), é possível pensar em uma nova classe de operadores multilineares, conforme Definição 2.3.1 de [34] e transcrita a seguir.

Definição 1.3.2. *Sejam* $0 < p, q_1, \cdots, q_m < \infty$, $s \geq 0$ *e* $E_1, \cdots, E_m, F$ *espaços de Banach. Um operador* m*-linear* $T \in \mathcal{L}(E_1, \cdots, E_m; F)$ *é chamado múltiplo* $(p, q_1, \cdots, q_m)$*-*s*-somante se existir uma constante* $C \geq 0$ *tal que*

$$\left(\sum_{k_1, \cdots, k_m = 1}^{n} \|T(x_{k_1}^{(1)}, \cdots, x_{k_m}^{(m)})\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq C n^s \prod_{i=1}^{m} \left\| \left(x_{k_i}^{(i)} \right)_{k_i=1}^{n} \right\|_{w, q_i} \tag{1.5}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, *e todo* $x_{k_i}^{(i)} \in E_i$, *com* $i = 1, \cdots, m$.

O espaço vetorial de todos os operadores múltiplo $(p; q_1, \cdots, q_m) - s-$somantes é denotado por

$$\Pi_{(p, q_1, \cdots q_m)}^{mult-s}(E_1, \cdots, E_m; F).$$

Quando $q_1 = \cdots = q_m = q$ ou $p = q_1 = \cdots = q_m$ escrevemos, respectivamente, $\Pi_{(p,q)}^{mult-s}(E_1, \cdots, E_m; F)$ ou $\Pi_{p}^{mult-s}(E_1, \cdots, E_m; F)$. Se ocorrer as igualdades $E_1 = \cdots = E_m$, a notação é mais uma vez simplificada, a saber, escreve-se apenas $\Pi_{(p,q)}^{mult-s}({}^m E; F)$.

Algumas propriedades elementares de $\Pi_{(p, q_1, \cdots, q_m)}^{mult-s}(E_1, \cdots, E_m; F)$ são exibidas em [34], tais como $\Pi_{(p, q_1, \cdots, q_m)}^{mult-s}(E_1, \cdots, E_m; F)$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{L}(E_1, \cdots, E_m; F)$, e valem as inclusões:

$$\Pi_{(p, q_1, \cdots, q_m)}^{mult}(E_1, \cdots, E_m; F) \subseteq \Pi_{(p, q_1, \cdots, q_m)}^{mult-s}(E_1, \cdots, E_m; F) \subseteq \mathcal{L}\left(E_1, ..., E_m; F\right)$$

para todo $s \geq 0$.

Vejamos alguns resultados objetos do presente estudo:

Proposição 1.3.3 (M. Maia, [34])**.** *O ínfimo* $\pi_{p, q_1, \cdots, q_m}^{mult-s}(u)$, *tomado sobre todas as possíveis constantes* C *satisfazendo (1.5) define uma norma completa em*

$$\Pi_{(p; q_1, \cdots q_m)}^{s}(E_1, \cdots, E_m; F).$$

Além disso, $\|u\| \leq \pi_{p, q_1, \cdots, q_m}^{mult-s}(u) \leq \pi_{p, q_1, \cdots, q_m}^{mult}(u)$.

Proposição 1.3.4 (M. Maia, [34]). *Se* $0 < q_i, p < \infty$, *para todo* $i = 1, \cdots, m$, *então* $\left(\Pi^{mult-s}_{p,q_1,\cdots,q_m}, \pi^{mult-s}_{p,q_1,\cdots,q_m}\right)$ *é um ideal de Banach injetivo.*

Proposição 1.3.5 (M. Maia, [34]). *Sejam* $0 < q, p < \infty$. *Existe* $0 \leq s < \infty$, *tal que*

$$\mathcal{L}(E_1, \cdots, E_m; \mathbb{K}) = \Pi^{mult-s}_{p,q}(E_1, \cdots, E_m; \mathbb{K}).$$

Semelhantemente, e de um modo menos geral, denota-se por $\Pi^{mult-s}_{(p,q)}(E_1, ..., E_m; F)$ o espaço vetorial de todos os operadores múltiplo (p, q)-s-somantes de $E_1 \times \cdots \times E_m$ em F. Se $E_1 = \cdots = E_m$, simplificamos a notação escrevendo apenas $\Pi^{mult-s}_{(p,q)}({}^m E; F)$. Observe que quando $s = 0$ essa definição recupera a noção de operadores (p, q)-somantes, cujo espaço é denotado por $\Pi^{mult}_{(p,q)}$ (observação análoga vale para os casos mais gerais, como é o caso do espaço $\Pi^{mult-s}_{(p;q_1,\cdots,q_m)}(E_1, \cdots, E_m; F)$, por exemplo). Nesse caso, as inclusões abaixo permanecem válidas.

$$\Pi^{mult}_{(p,q)}\left(E_1, ..., E_m; F\right) \subseteq \Pi^{mult-s}_{(p,q)}\left(E_1, ..., E_m; F\right) \subseteq \mathcal{L}\left(E_1, ..., E_m; F\right).$$

A próxima Proposição, cuja demonstração é embasada em [40], fornece uma solução para esse problema quando $F = \ell_\infty$. Mais precisamente, denotando por $\mathfrak{c}$ a cardinalidade de $\mathbb{R}$, ela nos diz que não importa quão "pequena" seja a diferença

$$\Pi^{mult-s}_{(p,q)}\left(E_1, ..., E_m; \ell_\infty\right) \backslash \Pi^{mult}_{(p,q)}\left(E_1, ..., E_m; \ell_\infty\right).$$

Se ela não for um conjunto vazio, existe um espaço vetorial com cardinalidade $\mathfrak{c}$ contido nela.

Proposição 1.3.6 (M. Maia, [34]). *Sejam* $E_1, ..., E_m$ *espaços de Banach,* $s > 0$ *e* $p, q \in [1, +\infty]$. *Então*

$$\Pi^{mult-s}_{(p,q)}\left(E_1, ..., E_m; \ell_\infty\right) \backslash \Pi^{mult}_{(p,q)}\left(E_1, ..., E_m; \ell_\infty\right)$$

é vazio ou $\mathfrak{c}-$*lineável.*

Corolário 1.3.7 (M. Maia, [34]). *Sejam* $E_1, ..., E_m$ *espaços de Banach e* $p, q \in (0, +\infty]$. *Então*

$$\mathcal{L}\left(E_1, ..., E_m; \ell_\infty\right) \backslash \Pi^{mult}_{(p,q)}\left(E_1, ..., E_m; \ell_\infty\right)$$

é vazio ou $\mathfrak{c}-$*lineável.*

Capítulo 2

Limites universais para as desigualdades de Hardy–Littlewood em formas multilineares

O presente capítulo está fundamentado em [7] e aborda as desigualdades de Hardy-Littlewood para formas multilineares em espaços de Banach. Em geral, boas estimativas para as constantes que aparecem nessas desigualdades, doravante denominadas constantes de Hardy–Littlewood, são associadas a aplicações em matemática e física, porém o comportamento exato dessas constantes ainda é desconhecido. Nesse sentido, damos uma nova contribuição para o comportamento dessas constantes e, como uma consequência do resultado obtido, apresentamos uma prova simplificada de um resultado concernente a certas desigualdades do tipo Hardy–Littlewood devido a Aron et al. ([13]).

O principal resultado deste capítulo, apresentado na seção seguinte, além de generalizar o Teorema 1.1.2, tem como consequência um resultado aparentemente mais geral que o Teorema 1.1.3. Todavia, segundo os autores, a demonstração do Teorema 1.1.3 permite fixar qualquer $p_i, i = 1, \ldots m-1$, ao invés de p_m na desigualdade $1 < p_m \leq 2 < p_1, \ldots, p_{m-1}$. É importante referir que a prova do resultado ora apresentado não é apenas uma adaptação da prova original de 1.1.2, e que a prova dada em [13] para o Teorema 1.1.3 é mais extensa e, em certo sentido, mais complicada, enquanto nossa abordagem é relativamente simples e mais independente.

2.1 Nova desigualdade do tipo Hardy–Littlewood

Alguns resultados auxiliares essenciais na realização dos propósitos desta seção são exibidos a seguir.

Iniciamos com um importante resultado, a saber, a *desigualdade de Khinchine* para escalares. Precisamente, esta desigualdade assegura que, para qualquer $0 < q < \infty$, existem constantes positivas A_q tais que, independentemente do inteiro n e da sequência de escalares $(a_j)_{j=1}^n$, temos

$$A_q \left(\sum_{j=1}^{n} |a_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_0^1 \left| \sum_{j=1}^{n} a_j r_j(t) \right|^q dt \right)^{\frac{1}{q}},$$

onde r_j são as funções de Rademacher.

Seja B_{E^*} a bola unitária fechada do dual topológico de E. Para $1 \leq q \leq \infty$, o símbolo q^* denota o conjugado de q. Será pertinente escrever $\frac{c}{\infty} = 0$ para qualquer constante $c > 0$.

Definição 2.1.1. *Dado $s \geq 1$, denotamos por $\ell_s^w(E)$ o espaço vetorial de todas as sequências $(x_j)_{j=1}^\infty$ em E tais que $(\varphi(x_j))_{j=1}^\infty \in \ell_s$ para todo funcional linear contínuo $\varphi : E \to \mathbb{K}$. A norma de $(x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_s^w(E)$ é definida pela expressão*

$$\|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{w,s} := \sup_{\varphi \in B_{E^*}} \| (\varphi(x_j))_{j=1}^\infty \|_s.$$

Para ver que a norma acima está bem definida e para mais alguns detalhes, sugerimos a leitura de [24].

O espaço de todos os operadores m-lineares contínuos $T : E_1 \times \cdots \times E_m \to F$, com a norma do supremo, é denotado por $\mathcal{L}(E_1, ..., E_m; F)$.

Definição 2.1.2. *Para $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in [1, +\infty)^m$, um operador multilinear $T : E_1 \times \cdots \times E_m \to F$ é múltiplo $(\mathbf{q}; \mathbf{p})$-somante se existir uma constante $C > 0$ tal que*

$$\left(\sum_{j_1=1}^{\infty} \left(\cdots \left(\sum_{j_m=1}^{\infty} \left\| T(x_{j_1}^{(1)}, \ldots, x_{j_m}^{(m)}) \right\|_F^{q_m} \right)^{\frac{q_{m-1}}{q_m}} \cdots \right)^{\frac{q_1}{q_2}} \right)^{\frac{1}{q_1}} \leq C \prod_{k=1}^{m} \left\| (x_j^{(k)})_{j=1}^\infty \right\|_{w,p_k}$$

para todo $(x_j^{(k)})_{j=1}^\infty \in \ell_{p_k}^w(E_k)$. Denotamos a classe de todos os operadores múltiplo $(\mathbf{q}; \mathbf{p})$-somantes por $\Pi_{(\mathbf{q};\mathbf{p})}^m(E_1, \ldots, E_m; F)$. Quando $q_1 = \cdots = q_m = q$, escrevemos $\Pi_{(q;\mathbf{p})}^m(E_1, \ldots, E_m; F)$ ao invés de $\Pi_{(\mathbf{q};\mathbf{p})}^m(E_1, \ldots, E_m; F)$.

Seja $\pi_{(\mathbf{p};\mathbf{q})}$ o ínfimo das constantes C que satisfazem a desigualdade acima. Em [6] G. Araújo mostrou, dentre outras propriedades, que $\pi_{(\mathbf{p};\mathbf{q})}$ é uma norma e $\left(\prod_{(\mathbf{p};\mathbf{q})}^m, \pi_{(\mathbf{p};\mathbf{q})}\right)$ é um espaço de Banach cujos elementos estão caracterizados como segue:

Proposição 2.1.3. [6, Proposição 5.2] *Sejam $T : E_1 \times \cdots \times E_m \to F$ um operador multilinear contínuo e $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in [1, \infty)^m$. As seguintes são equivalentes:*

(1) T é múltiplo $(\mathbf{q}, \mathbf{p})$-somante;

(2) $\left(T(x_{j_1}^{(1)}, \ldots, x_{j_m}^{(m)})\right)_{j_1,\ldots,j_m=1}^{\infty} \in \ell_{\mathbf{q}}(F)$ sempre que $(x_j^{(k)})_{j=1}^{\infty} \in \ell_{p_k}^{\omega}(E_k)$;

(3) Existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\left(\sum_{j_1=1}^{n}\left(\cdots\left(\sum_{j_m=1}^{n}\left\|T(x_{j_1}^{(1)}, \ldots, x_{j_m}^{(m)})\right\|_F^{q_m}\right)^{\frac{q_{m-1}}{q_m}}\cdots\right)^{\frac{q_1}{q_2}}\right)^{\frac{1}{q_1}} \leq C\prod_{k=1}^{m}\left\|(x_j^{(k)})_{j=1}^{n}\right\|_{\omega,p_k}$$

para todo inteiro positivo n e todo $(x_j^{(k)})_{j=1}^{\infty} \in \ell_{p_k}^{\omega}(E_k)$.

Para resultados recentes sobre a teoria de operadores múltiplo $(\mathbf{q};\mathbf{p})$-somantes, sugerimos a leitura de [41].

O próximo resultado, provado recentemente por Albuquerque e Rezende em [5, Teorema 3], diz respeito à teoria multilinear dos operadores absolutamente somantes iniciada por Pietsch [45], que também é um resultado essencial na demonstração da desigualdade de Hardy–Littlewood que se segue.

Teorema 2.1.4 (Teorema de Inclusão, [5])**.** *Sejam m um inteiro positivo e $r \geq 1, \mathbf{s}, \mathbf{p}, \mathbf{q} \in [1, \infty)^m$ tais que*

$$\frac{1}{r} - \left|\frac{1}{\mathbf{p}}\right| + \left|\frac{1}{\mathbf{q}}\right| > 0$$

e, para cada $k = 1, \ldots, m$, $q_k \geq p_k$ e

$$\frac{1}{s_k} - \left|\frac{1}{\mathbf{q}}\right|_{\geq k} = \frac{1}{r} - \left|\frac{1}{\mathbf{p}}\right|_{\geq k}.$$

Então

$$\Pi_{(r;\mathbf{p})}^m(E_1, \ldots, E_m; F) \subset \Pi_{(\mathbf{s},\mathbf{q})}^m(E_1, \ldots, E_m; F)$$

para quaisquer espaços de Banach $E_1, \ldots, E_m, F$ e o operador de inclusão tem norma 1.

De posse das definições e resultados acima, apresentamos abaixo o principal resultado deste capítulo, que é uma desigualdade do tipo Hardy–Littlewood, e que melhora a estimativa dada pelo Teorema 1.1.2.

Teorema 2.1.5. *Sejam $m \geq 2$ um inteiro positivo e $p_1, \ldots, p_m \in (1, \infty]$ tais que $\frac{1}{2} \leq \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{p_i} < 1$. Seja*

$$s := \min \left\{ r \ : \ \text{existem } r \text{ índices } k_1, \ldots, k_r \text{ tais que } \tfrac{1}{2} \leq \textstyle\sum_{i=1}^{r} \frac{1}{p_{k_i}} < 1 \right\}$$

e, para os possíveis $k_1, \ldots, k_s$ como acima, seja $\rho = \max \left\{ \frac{1}{p_{k_1}} + \cdots + \frac{1}{p_{k_s}} \right\}$. Então

$$\left(\sum_{j_1, \ldots, j_m = 1}^{n} |T(e_{j_1}, \ldots, e_{j_m})|^{\frac{1}{1 - \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{p_i}}} \right)^{1 - \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{p_i}} \leq 2^{(s-1)(1-\rho)} \|T\|,$$

para toda forma m-linear $T : \ell_{p_1}^n \times \cdots \times \ell_{p_m}^n \to \mathbb{K}$ e todo inteiro positivo n.

Demonstração. Por uma questão de simplicidade, vamos supor que $p_{k_1} = p_1, \ldots, p_{k_s} = p_s$, onde $s := \min \left\{ r \ : \ \text{existem } r \text{ índices } k_1, \ldots, k_r \text{ tais que } \frac{1}{2} \leq \sum_{i=1}^{r} \frac{1}{p_{k_i}} < 1 \right\}$. Uma vez que

$$\frac{1}{2} \leq \left| \frac{1}{\mathbf{p}} \right|_{\leq s} < 1,$$

segue do Teorema 1.1.2 que

$$\left(\sum_{j_1, \ldots, j_s = 1}^{n} |T_s(e_{j_1}, \ldots, e_{j_s})|^{\frac{1}{1 - \left| \frac{1}{\mathbf{p}} \right|_{\leq s}}} \right)^{1 - \left| \frac{1}{\mathbf{p}} \right|_{\leq s}} \leq 2^{(s-1)\left[1 - \left| \frac{1}{\mathbf{p}} \right|_{\leq s}\right]} \|T_s\|$$

para toda forma s-linear $T_s : \ell_{p_1}^n \times \cdots \times \ell_{p_s}^n \to \mathbb{K}$ e todo inteiro positivo n. Além disso, para todo n e toda forma $(s+1)$-linear $T_{s+1} : \ell_{p_1}^n \times \cdots \times \ell_{p_s}^n \times \ell_{\infty}^n \to \mathbb{K}$, tendo em vista a desigualdade de Khinchine, temos

$$\left(\sum_{j_1,\ldots,j_s=1}^{n}\left(\sum_{j_{s+1}=1}^{n}\left|T_{s+1}\left(e_{j_1},\ldots,e_{j_{s+1}}\right)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\left|\frac{1}{\mathbf{p}}\right|_{\leq s}}}\right)^{1-\left|\frac{1}{\mathbf{p}}\right|_{\leq s}}$$

$$\leq\left(\sum_{j_1,\ldots,j_s=1}^{n}A^{-1}_{\frac{1}{1-\left|\frac{1}{\mathbf{p}}\right|_{\leq s}}}\left(\int_0^1\left|\sum_{j_{s+1}=1}^{n}T_{s+1}\left(e_{j_1},\ldots,e_{j_{s+1}}\right)r_{j_{s+1}}(t)\right|^{\frac{1}{1-\left|\frac{1}{\mathbf{p}}\right|_{\leq s}}}dt\right)^{\frac{1-\left|\frac{1}{\mathbf{p}}\right|_{\leq s}}{1-\left|\frac{1}{\mathbf{p}}\right|_{\leq s}}}\right)^{1-\left|\frac{1}{\mathbf{p}}\right|_{\leq s}}$$

$$=A^{-1}_{\frac{1}{1-\left|\frac{1}{\mathbf{p}}\right|_{\leq s}}}\left(\int_0^1\sum_{j_1,\ldots,j_s=1}^{n}\left|T_{s+1}\left(e_{j_1},\ldots,e_{j_s},\sum_{j_{s+1}=1}^{n}e_{j_{s+1}}r_{j_{s+1}}(t)\right)\right|^{\frac{1}{1-\left|\frac{1}{\mathbf{p}}\right|_{\leq s}}}dt\right)^{1-\left|\frac{1}{\mathbf{p}}\right|_{\leq s}}$$

$$\leq A^{-1}_{\frac{1}{1-\left|\frac{1}{\mathbf{p}}\right|_{\leq s}}}\left(\sup_{t\in[0,1]}\sum_{j_1,\ldots,j_s=1}^{n}\left|T_{s+1}\left(e_{j_1},\ldots,e_{j_s},\sum_{j_{s+1}=1}^{n}e_{j_{s+1}}r_{j_{s+1}}(t)\right)\right|^{\frac{1}{1-\left|\frac{1}{\mathbf{p}}\right|_{\leq s}}}\right)^{1-\left|\frac{1}{\mathbf{p}}\right|_{\leq s}}$$

$$=A^{-1}_{\frac{1}{1-\left|\frac{1}{\mathbf{p}}\right|_{\leq s}}}\sup_{t\in[0,1]}\left(\sum_{j_1,\ldots,j_s=1}^{n}\left|T_{s+1}\left(e_{j_1},\ldots,e_{j_s},\sum_{j_{s+1}=1}^{n}e_{j_{s+1}}r_{j_{s+1}}(t)\right)\right|^{\frac{1}{1-\left|\frac{1}{\mathbf{p}}\right|_{\leq s}}}\right)^{1-\left|\frac{1}{\mathbf{p}}\right|_{\leq s}}$$

$$\leq A^{-1}_{\frac{1}{1-\left|\frac{1}{\mathbf{p}}\right|_{\leq s}}}2^{(s-1)\left[1-\left|\frac{1}{\mathbf{p}}\right|_{\leq s}\right]}\sup_{t\in[0,1]}\left\|T_{s+1}\left(\cdot,\ldots,\cdot,\sum_{j_{s+1}=1}^{n}e_{j_{s+1}}r_{j_{s+1}}(t)\right)\right\|$$

$$\leq A^{-1}_{\frac{1}{1-\left|\frac{1}{\mathbf{p}}\right|_{\leq s}}}2^{(s-1)\left[1-\left|\frac{1}{\mathbf{p}}\right|_{\leq s}\right]}\|T_{s+1}\|,$$

onde $A_{\frac{1}{1-\left|\frac{1}{\mathbf{p}}\right|_{\leq s}}}$ é a constante da desigualdade de Khinchine. Desde que $\frac{1}{2}=1-\frac{1}{2}\geq 1-\left|\frac{1}{\mathbf{p}}\right|_{\leq s}$, temos

$$\frac{1}{1-\left|\frac{1}{\mathbf{p}}\right|_{\leq s}}\geq 2,$$

pelo que $A_{\frac{1}{1-\left|\frac{1}{\mathbf{p}}\right|_{\leq s}}}=1$ (veja, por exemplo, [31]). Assim, aplicando a desigualdade anterior juntamente com a inclusão canônica dos espaços ℓ_p's, podemos escrever

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{j_1,\ldots,j_{s+1}=1}^{n}\left|T_{s+1}\left(e_{j_1},\ldots,e_{j_{s+1}}\right)\right|^{\frac{1}{1-\left|\frac{1}{\mathbf{p}}\right|_{\leq s}}}\right)^{1-\left|\frac{1}{\mathbf{p}}\right|_{\leq s}} \\
&= \left(\sum_{j_1,\ldots,j_s=1}^{n}\left(\sum_{j_{s+1}=1}^{n}\left|T_{s+1}\left(e_{j_1},\ldots,e_{j_{s+1}}\right)\right|^{\frac{1}{1-\left|\frac{1}{\mathbf{p}}\right|_{\leq s}}}\right)^{\left(1-\left|\frac{1}{\mathbf{p}}\right|_{\leq s}\right)\cdot\frac{1}{1-\left|\frac{1}{\mathbf{p}}\right|_{\leq s}}}\right)^{1-\left|\frac{1}{\mathbf{p}}\right|_{\leq s}} \\
&\leq \left(\sum_{j_1,\ldots,j_s=1}^{n}\left(\sum_{j_{s+1}=1}^{n}\left|T_{s+1}\left(e_{j_1},\ldots,e_{j_{s+1}}\right)\right|^{2}\right)^{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\left|\frac{1}{\mathbf{p}}\right|_{\leq s}}}\right)^{1-\left|\frac{1}{\mathbf{p}}\right|_{\leq s}} \\
&\leq 2^{(s-1)\left[1-\left|\frac{1}{\mathbf{p}}\right|_{\leq s}\right]}\|T_{s+1}\|,
\end{aligned}$$

para todo n e toda forma $(s+1)$-linear $T_{s+1}:\ell_{p_1}^n\times\cdots\times\ell_{p_s}^n\times\ell_\infty^n\to\mathbb{K}$. Usando os isomorfismos isométricos canônicos para os espaços de sequências fracamente somáveis (ver [24, Proposição 2.2]), sabemos que isso é equivalente a afirmar que (veja [25, p. 308])

$$\Pi^{s+1}_{\left(\frac{1}{1-\left|\frac{1}{\mathbf{p}}\right|_{\leq s}};p_1^*,\ldots,p_s^*,1\right)}(E_1,\ldots,E_{s+1};\mathbb{K})=\mathcal{L}(E_1,\ldots,E_{s+1};\mathbb{K})$$

para todos espaços de Banach $E_1,\ldots,E_{s+1}$. Além disso, o Teorema 2.1.4 fornece a inclusão

$$\Pi^{s+1}_{\left(\frac{1}{1-\left|\frac{1}{\mathbf{p}}\right|_{\leq s}};p_1^*,\ldots,p_s^*,1\right)}(E_1,\ldots,E_{s+1};\mathbb{K})\subseteq\Pi^{s+1}_{\left(\frac{1}{1-\left|\frac{1}{\mathbf{p}}\right|_{\leq s+1}};p_1^*,\ldots,p_{s+1}^*\right)}(E_1,\ldots,E_{s+1};\mathbb{K}).$$

De fato, a hipótese

$$\frac{1}{r}-\left|\frac{1}{\mathbf{p}}\right|+\left|\frac{1}{\mathbf{q}}\right|>0$$

do referido teorema é expressa aqui por

$$\begin{aligned}\left(1-\left|\frac{1}{\mathbf{p}}\right|_{\leq s}\right)-\left(\frac{1}{p_1^*}+\cdots+\frac{1}{p_s^*}+1\right)+\left(\frac{1}{p_1^*}+\cdots+\frac{1}{p_s^*}+\frac{1}{p_{s+1}^*}\right)=\\
-\left|\frac{1}{\mathbf{p}}\right|_{\leq s}+\frac{1}{p_{s+1}*}=1-\left|\frac{1}{\mathbf{p}}\right|_{\leq s+1}>0.\end{aligned}$$

Por sua vez, as hipóteses

$$\frac{1}{s_k}-\left|\frac{1}{\mathbf{q}}\right|_{\geq k}=\frac{1}{r}-\left|\frac{1}{\mathbf{p}}\right|_{\geq k},$$

para cada $k=1,\ldots,m$, $q_k\geq p_k$, equivalem, aqui, às igualdades

$$\left(1-\left|\frac{1}{\mathbf{p}}\right|_{\leq s+1}\right)-\left(\frac{1}{p_k^*}+\cdots+\frac{1}{p_{s+1}^*}\right)=\left(1-\left|\frac{1}{\mathbf{p}}\right|_{\leq s}\right)-\left(\frac{1}{p_k^*}+\cdots+\frac{1}{p_s^*}+1\right),$$

que são verdadeiras, pois, simplificando os termos semelhantes, a mesma equivale à

$$\frac{1}{p_{s+1}}+\frac{1}{p_{s+1}^*}=1.$$

Consequentemente,

$$\Pi^{s+1}_{\left(\frac{1}{1-\left|\frac{1}{\mathbf{p}}\right|_{\leq s+1}};p_1^*,\ldots,p_{s+1}^*\right)}(E_1,\ldots,E_{s+1};\mathbb{K})=\mathcal{L}(E_1,\ldots,E_{s+1};\mathbb{K})$$

para todos espaços de Banach $E_1,\ldots,E_{s+1}$. Novamente (ver [25, p. 308]), isso é equivalente a dizer que

$$\begin{aligned}&\left(\sum_{j_1,\ldots,j_{s+1}=1}^{n}\left|T_{s+1}\left(e_{j_1},\ldots,e_{j_{s+1}}\right)\right|^{\frac{1}{1-\left|\frac{1}{\mathbf{p}}\right|_{\leq s+1}}}\right)^{1-\left|\frac{1}{\mathbf{p}}\right|_{\leq s+1}}\\&\leq 2^{(s-1)\left[1-\left|\frac{1}{\mathbf{p}}\right|_{\leq s}\right]}\|T_{s+1}\|,\end{aligned}$$

para toda forma $(s+1)$-linear $T_{s+1}:\ell_{p_1}^n\times\cdots\times\ell_{p_{s+1}}^n\to\mathbb{K}$ e todo inteiro positivo n, pois a inclusão utilizada, por ter norma 1, preservou a constante $2^{(s-1)\left[1-\left|\frac{1}{\mathbf{p}}\right|_{\leq s}\right]}$. Portanto, para toda forma s-linear $T_s:\ell_{p_1}^n\times\cdots\times\ell_{p_s}^n\to\mathbb{K}$ e todo inteiro positivo n, a desigualdade

$$\left(\sum_{j_1,\ldots,j_s=1}^{n}\left|T_s(e_{j_1},\ldots,e_{j_s})\right|^{\frac{1}{1-\left|\frac{1}{\mathbf{p}}\right|_{\leq s}}}\right)^{1-\left|\frac{1}{\mathbf{p}}\right|_{\leq s}}\leq 2^{(s-1)\left[1-\left|\frac{1}{\mathbf{p}}\right|_{\leq s}\right]}\|T_s\|$$

implica na desigualdade

$$\left(\sum_{j_1,\ldots,j_{s+1}=1}^{n}\left|T_{s+1}\left(e_{j_1},\ldots,e_{j_{s+1}}\right)\right|^{\frac{1}{1-\left|\frac{1}{\mathbf{p}}\right|_{\leq s+1}}}\right)^{1-\left|\frac{1}{\mathbf{p}}\right|_{\leq s+1}}\leq 2^{(s-1)\left[1-\left|\frac{1}{\mathbf{p}}\right|_{\leq s}\right]}\|T_{s+1}\|,$$

para toda forma $(s+1)$-linear $T_{s+1}:\ell_{p_1}^n\times\cdots\times\ell_{p_{s+1}}^n\to\mathbb{K}$ e todo inteiro positivo n. A prova é completada por um argumento de indução padrão, mais precisamente, repetimos o argumento $t=m-s$ vezes até que seja T_{s+t} um operador m-linear e, para otimizar o expoente, trocamos $1-\left|\frac{1}{\mathbf{p}}\right|_{\leq s}$ por $1-\rho$, onde $\rho=\max\left\{\frac{1}{p_{k_1}}+\cdots+\frac{1}{p_{k_s}}\right\}$. □

Vale observar que, na demonstração acima, ao invés de citar o resultado apresentado na página 308 de [25], poderíamos citar um teorema mais geral, a saber, o Teorema 3.7.3 apresentado no próximo capítulo; neste caso, bastaria escrever

$$q_1=\cdots=q_m=\frac{1}{1-\left|\frac{1}{\mathbf{p}}\right|_{\leq s}}$$

no referido teorema.

Como caso particular do resultado anterior, obtemos as seguintes desigualdades do tipo Hardy–Littlewood com constantes iguais a 1:

Corolário 2.1.6. *Sejam $m \geq 2$ um inteiro positivo e $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_m) \in (1, \infty]^m$ tais que $1 < p_i \leq 2 < p_1, \ldots, p_{i-1}, p_{i+1}, \ldots, p_m$ para algum $1 \leq i \leq m$ e*

$$\frac{1}{2} \leq \left| \frac{1}{\mathbf{p}} \right| < 1.$$

Então

$$\left(\sum_{j_1, \ldots, j=m}^{n} |T(e_{j_1}, \ldots, e_{j_m})|^{\frac{1}{1 - \left| \frac{1}{\mathbf{p}} \right|}} \right)^{1 - \left| \frac{1}{\mathbf{p}} \right|} \leq \|T\|,$$

para toda forma m-linear $T : \ell_{p_1}^n \times \cdots \times \ell_{p_m}^n \to \mathbb{K}$ e todo inteiro positivo n.

Demonstração. Basta observar que, nessas hipóteses, temos o Teorema 2.1.5 com

$$s = \min \left\{ r \ : \quad \text{existem } r \text{ índices } k_1, \ldots, k_r \text{ tais que } \tfrac{1}{2} \leq \textstyle\sum_{i=1}^{r} \frac{1}{p_{k_i}} < 1 \ \right\} = 1$$

e $\rho = \frac{1}{2}$. □

O Corolário 2.1.6 é uma forma simplificada de obter um resultado recente, provado independentemente em [13, Corolário 3.3]. Nossa abordagem é diferente e mais auto-suficiente.

Capítulo 3

Somabilidade de operadores multilineares

O intuito do presente capítulo é, em uma abordagem anisotrópica natural, investigar até que ponto um operador multilinear é múltiplo somante e, nesse contexto, apresentar algumas aplicações.

3.1 Introdução

Em todo este capítulo, $E, E_1, E_2, \ldots, F$ denotam espaços de Banach sobre o corpo de escalares $\mathbb{K}$, de números reais ou complexos. O dual topológico de E e sua bola unitária fechada denotamos, respectivamente, por E^* e B_{E^*}. Dado $\mathbf{p} := (p_1, \ldots, p_m) \in [1, \infty]^m$, utilizamos a definição de espaços $L_{\mathbf{p}}$ de norma mista apresentada em [16] para os espaços de sequências com norma mista

$$\ell_{\mathbf{p}}(E) := \ell_{p_1}\left(\ell_{p_2}\left(\cdots\left(\ell_{p_m}\left(E\right)\right)\cdots\right)\right)$$

que, precisamente, é o espaço de sequências que reúne todas as matrizes valoradas com vetores multi-índices $\mathbf{x} := \left(x_{\mathbf{j}}\right)_{\mathbf{j}\in\mathbb{N}^m}$ que têm $\mathbf{p}$-norma finita; como usual, $\mathbf{j} := (j_1, \ldots, j_m)$ denota um multi-índice. É importante frisarmos que cada norma $\|\cdot\|_{p_k}$ é tomada sobre a componente de índice j_k e que cada índice j_k está relacionado à norma $\|\cdot\|_{p_k}$. Para uma melhor compreensão, suponhamos que $\mathbf{p} \in [1, \infty)^m$. Nesse caso, uma matriz de vetores $\mathbf{x}$ pertence a $\ell_{\mathbf{p}}(E)$ se, e somente se,

$$\|\mathbf{x}\|_{\mathbf{p}} := \left(\sum_{j_1=1}^{\infty}\left(\sum_{j_2=1}^{\infty}\left(\cdots\left(\sum_{j_{m-1}=1}^{\infty}\left(\sum_{j_m=1}^{\infty}\|x_{\mathbf{j}}\|^{p_m}\right)^{\frac{p_{m-1}}{p_m}}\right)^{\frac{p_{m-2}}{p_{m-1}}}\cdots\right)^{\frac{p_2}{p_3}}\right)^{\frac{p_1}{p_2}}\right)^{\frac{1}{p_1}} < \infty.$$

Nos últimos anos, muitas generalizações diferentes da teoria dos operadores múltiplo e absolutamente somantes foram obtidas. Uma abordagem anisotrópica natural para operadores múltiplo somantes é apresentada na Definição 2.1.2.

Vale relembrar que, dados $r \geq 1, \mathbf{p} \in [1,\infty)^m$, diz-se que um operador multilinear $T : E_1 \times \cdots \times E_m \to F$ é $(r;\mathbf{p})$-somante se existir uma constante $C > 0$ tal que

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty}\left\|T(x_j^1,\ldots,x_j^m)\right\|^r\right)^{\frac{1}{r}} \leq C \cdot \prod_{k=1}^{m}\left\|(x_j^k)_{j\in\mathbb{N}}\right\|_{w,p_k}$$

para qualquer sequência de vetores *fracamente p_k-somável* $(x_j^k)_{j\in\mathbb{N}} \in \ell_{p_k}^w(E_k)$, $k = 1,\ldots,m$. Nesse caso, a classe dos operadores e a norma dada pelo ínfimo das constantes são, respectivamente, denotados por $\Pi_{as(r;\mathbf{p})}$ e $\pi_{as(r;\mathbf{p})}(\cdot)$.

3.2 Índice de somabilidade

3.2.1 Definições

A definição abaixo generaliza a Definição 1.2.2 que nos é apresentada em [34, 35].

Definição 3.2.1. *Sejam m um inteiro positivo, p_k, $q_k \in (0,\infty)$ com $k = 1,\ldots,m$ e $E_1,\ldots,E_m,F$ espaços de Banach. Definimos o m-índice multilinear forte de $(\mathbf{p};\mathbf{q})$-somabilidade de um par $(E_1 \times \cdots \times E_m; F)$ como sendo a m-upla*

$$\xi_{(\mathbf{p};\mathbf{q})}^{m-mult}(E_1 \times \cdots \times E_m; F) = (\inf s_{m,p_k,q_k})_{k=1}^m$$

onde, para cada k, $s_{m,p_k,q_k} \geq 0$ cumpre o seguinte: existe uma constante $C > 0$ tal que, para todos $T \in \mathcal{L}(E_1,\ldots,E_m;F)$, $x^k := (x_j^k)_{j=1}^{n_k} \in \ell_{q_k}^w(E_k)$, $k = 1,\ldots,m$, e todo inteiro positivo n_k,

$$\left(\sum_{j_1=1}^{n_1}\left(\cdots\left(\sum_{j_m=1}^{n_m}\|T(x_{\mathbf{j}})\|^{p_m}\right)^{\frac{p_{m-1}}{p_m}}\cdots\right)^{\frac{p_1}{p_2}}\right)^{\frac{1}{p_1}} \leq C \cdot \prod_{k=1}^{m} n_k^{s_{m,p_k,q_k}} \cdot \prod_{k=1}^{m}\|x^k\|_{w,q_k}, \quad (3.1)$$

onde $T(x_{\mathbf{j}}) := T\left(x_{j_1}^1,\ldots,x_{j_m}^m\right)$.

Para operadores absolutamente $(p;\mathbf{q})$-somantes, utilizamos a notação

$$\xi_{as(p;\mathbf{q})}(E_1 \times \cdots \times E_m; F) = (\inf s_{m,p,q_k})_{k=1}^m$$

Observação 3.2.2. *A notação abaixo recupera o índice de somabilidade apresentado em* [35]*:*

$$\eta_{(\mathbf{p};\mathbf{q})}^{m-mult}(E_1 \times \cdots \times E_m; F) := \sum_{k=1}^m \inf s_{m,p_k,q_k}$$

onde, para cada k, $s_{m,p_k,q_k} \geq 0$ satisfaz (3.1)*, ou seja,*

$$\eta = \sum_i \xi_i$$

onde ξ_i são as coordenadas de $\xi_{(\mathbf{p};\mathbf{q})}^{m-mult}(E_1 \times \cdots \times E_m; F)$. Com efeito, quando $p_1, \ldots, p_m = p$ e $q_1, \ldots, q_m = q$ em (3.1)*, obtemos*

$$\left(\sum_{j_1,\ldots,j_m=1}^n \|T(x_{\mathbf{j}})\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq C \cdot n^{\sum_{k=1}^m s_{m,p,q}} \cdot \prod_{k=1}^m \|x^k\|_{w,q}$$

e, pela Definição 1.2.2,

$$\begin{aligned} \eta_{(p;q)}^{m-mult}(E_1 \times \cdots \times E_m; F) &:= \inf \sum_{k=1}^m s_{m,p,q} \\ &= \inf m s_{m,p,q} \\ &= m \inf s_{m,p,q} \\ &= \sum_{k=1}^m \inf s_{m,p,q}. \end{aligned}$$

A notação

$$\eta_{as(p;\mathbf{q})}^{m-mult}(E_1 \times \cdots \times E_m; F) := \sum_{k=1}^m \inf s_{m,p,q_k}$$

é utilizada para o índice de somabilidade referente aos operadores absolutamente $(p;\mathbf{q})$-somantes.

Vale salientar que, sob as condições apresentadas na Definição 3.2.1, vale a igualdade:

$$\inf \sum_{k=1}^m s_{m,p_k,q_k} = \sum_{k=1}^m \inf s_{m,p_k,q_k}. \tag{3.2}$$

De fato, seja $S^k \subset \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$, $k = 1, \ldots, m$, o conjunto dos s_{m,p_k,q_k} que satisfazem (3.1) e consideremos as sequências $(s_n^k)_{n=1}^\infty$ de cotas inferiores para S^k tais que $s_n^k \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $s_n^k \to \inf S^k$ (Princípio da Boa Ordenação). Consideremos também o conjunto $\sum_{k=1}^m S^k := \left\{\sum_{k=1}^m s_{m,p_k,q_k}; s_{m,p_k,q_k} \in S^k\right\}$ e uma sequência $(r_n)_{n=1}^\infty$ de cotas inferiores para $\sum_{k=1}^{m} S^k$ tal que $r_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $r_n \to \inf \sum_{k=1}^{m} S^k$. Nessas condições, temos

$$\sum_{k=1}^{m} s_n^k \leq \sum_{k=1}^{m} s_{m,p_k,q_k}$$

para todos $s_{m,p_k,q_k} \in S^k$, logo

$$\sum_{k=1}^{m} \inf S^k = \sum_{k=1}^{m} \lim s_n^k = \lim \sum_{k=1}^{m} s_n^k \leq \sum_{k=1}^{m} s_{m,p_k,q_k}$$

para todos $s_{m,p_k,q_k} \in S^k$, de onde concluímos que

$$\sum_{k=1}^{m} \inf S^k \leq \inf \sum_{k=1}^{m} S^k.$$

Por outro lado, de $r_n \leq \sum_{k=1}^{m} s_{m,p_k,q_k}$ para todos $s_{m,p_k,q_k} \in S^k$ e $n \in \mathbb{N}$, temos sucessivamente

$$\begin{aligned}
r_n - \sum_{k=1}^{m-1} s_{m,p_k,q_k} \leq s_{m,p_m,q_m} \quad &\Rightarrow \quad r_n - \sum_{k=1}^{m-1} s_{m,p_k,q_k} \leq \inf S^m, \\
r_n - \inf S^m - \sum_{k=1}^{m-2} s_{m,p_k,q_k} \leq s_{m,p_{m-1},q_{m-1}} \quad &\Rightarrow \quad r_n - \inf S^m - \sum_{k=1}^{m-2} s_{m,p_k,q_k} \leq \inf S^{m-1}, \\
&\vdots \\
r_n - \sum_{k=2}^{m} \inf S^k \leq s_{m,p_1,q_1} \quad &\Rightarrow \quad r_n - \sum_{k=2}^{m} \inf S^k \leq \inf S^1,
\end{aligned}$$

ou seja, $r_n \leq \sum_{k=1}^{m} \inf S^k$, daí

$$\inf \sum_{k=1}^{m} S^k := \lim r_n \leq \sum_{k=1}^{m} \inf S^k.$$

Portanto, $\inf \sum_{k=1}^{m} S^k = \sum_{k=1}^{m} \inf S^k$, isto é, $\inf \sum_{k=1}^{m} s_{m,p_k,q_k} = \sum_{k=1}^{m} \inf s_{m,p_k,q_k}$.

Observação 3.2.3. *Em vista da continuidade da função exponencial, concluímos que cada* $\inf s_{m,p_k,q_k}, k = 1, \ldots, m$ *satisfaz* (3.1)*. De fato, suponhamos que* $\inf s_{m,p_1,q_1}$ *não satisfaça* (3.1)*. Nesse caso, a continuidade da função exponencial garante a existência de um* $s_1 > \inf s_{m,p_1,q_1}$ *tal que*

$$\left(\sum_{j_1=1}^{n_1} \left(\cdots \left(\sum_{j_m=1}^{n_m} \|T(x_{\mathbf{j}})\|^{p_m} \right)^{\frac{p_{m-1}}{p_m}} \cdots \right)^{\frac{p_1}{p_2}} \right)^{\frac{1}{p_1}} > C n_1^{s_1} \cdot \prod_{k=2}^{m} n_k^{s_{m,p_k,q_k}} \cdot \prod_{k=1}^{m} \|x^k\|_{w,q_k},$$

e a definição de ínfimo, por sua vez, fornece um $\overline{s}_{m,p_1,q_1}$ *que satisfaz* (3.1) *tal que* $s_1 \geq \overline{s}_{m,p_1,q_1} > \inf s_{m,p_1,q_1}$, *pelo que vale também a desigualdade*

$$\left(\sum_{j_1=1}^{n_1}\left(\cdots\left(\sum_{j_m=1}^{n_m}\|T(x_{\mathbf{j}})\|^{p_m}\right)^{\frac{p_{m-1}}{p_m}}\cdots\right)^{\frac{p_1}{p_2}}\right)^{\frac{1}{p_1}} > Cn_1^{\overline{s}_{m,p_1,q_1}}\cdot\prod_{k=2}^{m}n_k^{s_{m,p_k,q_k}}\cdot\prod_{k=1}^{m}\|x^k\|_{w,q_k},$$

uma contradição. Portanto, podemos escrever ainda

$$\xi_{(\mathbf{p};\mathbf{q})}^{m-mult}(E_1\times\cdots\times E_m;F) = (\min s_{m,p_k,q_k})_{k=1}^{m}.$$

Não havendo perigo de confusão, chamamos indiscriminadamente os índices $\xi_{(\mathbf{p};\mathbf{q})}^{m-mult}$ (forte) e $\eta_{(\mathbf{p};\mathbf{q})}^{m-mult}$ de índice de somabilidade. Expressões do tipo

$$\xi_{(\mathbf{p};\mathbf{q})}^{m-mult}(E_1\times\cdots\times E_m;F) \leq (s_k)_{k=1}^{m}$$

são utilizadas para denotar a desigualdade entre as componentes de cada vetor:

$$\xi_k \leq s_k, k=1,\ldots,m.$$

Com o objetivo de simplificar os próximos resultados, dados $(x_{j_k}^k)_{j_k=1}^{\infty}\in\ell_{p_k}, k=1,\ldots,m$, utilizamos as notações $x_{\mathbf{j}} = (x_{j_1}^1,\ldots,x_{j_m}^m)$ e

$$\|x_{\mathbf{j}}\|_{p_i} = \left(\sum_{j_i=1}^{\infty}\|x_{\mathbf{j}}\|^{p_i}\right)^{\frac{1}{p_i}},$$

se $p_i<\infty, i=1,\ldots,m$, que nos permite escrever

$$\begin{aligned}
\|x_{\mathbf{j}}\|_{\mathbf{p}} &= \left(\sum_{j_1=1}^{\infty}\left(\cdots\left(\sum_{j_m=1}^{\infty}\|x_{\mathbf{j}}\|^{p_m}\right)^{\frac{p_{m-1}}{p_m}}\cdots\right)^{\frac{p_1}{p_2}}\right)^{\frac{1}{p_1}}\\
&= \left(\sum_{j_1=1}^{\infty}\left(\cdots\left(\sum_{j_{m-1}=1}^{\infty}\left(\|x_{\mathbf{j}}\|_{p_m}\right)^{p_{m-1}}\right)^{\frac{p_{m-2}}{p_{m-1}}}\cdots\right)^{\frac{p_1}{p_2}}\right)^{\frac{1}{p_1}}\\
&= \left(\sum_{j_1=1}^{\infty}\left(\cdots\left(\sum_{j_{m-2}=1}^{\infty}\left(\left\|\|x_{\mathbf{j}}\|_{p_m}\right\|_{p_{m-1}}\right)^{p_{m-2}}\right)^{\frac{p_{m-3}}{p_{m-2}}}\cdots\right)^{\frac{p_1}{p_2}}\right)^{\frac{1}{p_1}}\\
&\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots\\
&= \left(\sum_{j_1=1}^{\infty}\left(\left\|\cdots\left\|\|x_{\mathbf{j}}\|_{p_m}\right\|_{p_{m-1}}\cdots\right\|_{p_2}\right)^{p_1}\right)^{\frac{1}{p_1}} = \left\|\left\|\cdots\left\|\|x_{\mathbf{j}}\|_{p_m}\right\|_{p_{m-1}}\cdots\right\|_{p_2}\right\|_{p_1},
\end{aligned}$$

isto é,

$$\|x_{\mathbf{j}}\|_{\mathbf{p}} = \left\|\left\|\cdots\left\|\|x_{\mathbf{j}}\|_{p_m}\right\|_{p_{m-1}}\cdots\right\|_{p_2}\right\|_{p_1}. \tag{3.3}$$

Observe que essa igualdade permanece válida quando temos algum $p_k = \infty$ e utilizamos a notação

$$\|x_{\mathbf{j}}\|_{p_k} = \sup_{j_k \in \mathbb{N}} |x_{j_k}|.$$

Semelhantemente, dados $\mathbf{n} := (n_1, \ldots, n_m) \in \mathbb{N}^m$ e $(x_{j_k}^k)_{j_k=1}^{n_k} \in \mathbb{K}^{n_k}$, utilizando as notações

$$\|x_{\mathbf{j}}\|_{\mathbf{p},\mathbf{n}} := \left(\sum_{j_1=1}^{n_1}\left(\cdots\left(\sum_{j_m=1}^{n_m}\|x_{\mathbf{j}}\|^{p_m}\right)^{\frac{p_{m-1}}{p_m}}\cdots\right)^{\frac{p_1}{p_2}}\right)^{\frac{1}{p_1}},$$

e

$$\|x_{\mathbf{j}}\|_{p_i,n_i} = \left(\sum_{j_i=1}^{n_i}\|x_{\mathbf{j}}\|^{p_i}\right)^{\frac{1}{p_i}}, i = 1, \ldots, m,$$

obtemos

$$\|x_{\mathbf{j}}\|_{\mathbf{p},\mathbf{n}} = \left\|\left\|\cdots\left\|\|x_{\mathbf{j}}\|_{p_m,n_m}\right\|_{p_{m-1},n_{m-1}}\cdots\right\|_{p_2,n_2}\right\|_{p_1,n_1}, \tag{3.4}$$

que também permanece válida quando temos algum $p_k = \infty$ e utilizamos a notação

$$\|x_{\mathbf{j}}\|_{\infty,n_k} = \sup_{1 \le j_k \le n_k} |x_{j_k}|.$$

Com essa notação, a desigualdade apresentada na definição (3.2.1) é escrita da seguinte forma

$$\begin{aligned} \|T(x_{\mathbf{j}})\|_{\mathbf{p},\mathbf{n}} &= \left\|\left\|\cdots\left\|\|T(x_{\mathbf{j}})\|_{p_m,n_m}\right\|_{p_{m-1},n_{m-1}}\cdots\right\|_{p_2,n_2}\right\|_{p_1,n_1} \\ &\le C\prod_{k=1}^{m} n_k^{s_{m,p_k,q_k}} \cdot \prod_{k=1}^{m}\|x^k\|_{\omega,q_k}. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Lema 3.2.4. *Sejam $p_k, q_k \in (0,\infty)$, $k = 1, \ldots, m$, e $x_{\boldsymbol{j}} = (x_{j_1}^1, \ldots, x_{j_m}^m) \in \mathbb{K}^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{K}^{n_m}$, $\boldsymbol{n} = (n_1, \ldots, n_m) \in \mathbb{N}^m$. Então*

$$\|x_{\boldsymbol{j}}\|_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{n}} \le \|x_{\boldsymbol{j}}\|_{\boldsymbol{q},\boldsymbol{n}}\prod_{k=1}^{m} n_k^{\max\left\{\frac{1}{p_k}-\frac{1}{q_k},0\right\}}.$$

Em particular, se $(x_{j_k}^k) \in \ell_{p_k}$, $k = 1, \ldots, m$, temos

$$\|x_{\boldsymbol{j}}\|_{\boldsymbol{p}} \le \|x_{\boldsymbol{j}}\|_{\boldsymbol{q}}\prod_{k=1}^{m} n_k^{\max\left\{\frac{1}{p_k}-\frac{1}{q_k},0\right\}}.$$

Demonstração. Para fixar ideias, consideremos $m = 3, p_1 \leq q_1, q_2 \leq p_2$ e $p_3 \leq q_3$. Nessas condições, temos $\|\cdot\|_{p_2} \leq \|\cdot\|_{q_2}$, e

$$\frac{1}{p_1} = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{r_1} \text{ e } \frac{1}{p_3} = \frac{1}{q_3} + \frac{1}{r_3},$$

onde $r_i = \left(\frac{1}{p_i} - \frac{1}{q_i}\right)^{-1} > 0, i = 1, 3$. Com efeito, aplicando sucessivamente a desigualdade de Hölder $\|x_{\mathbf{j}}\|_{p_3,n_3} \leq \|x_{\mathbf{j}}\|_{q_3,n_3} \|1\|_{r_3,n_3}$, a da norma $\left\| \|x_{\mathbf{j}}\|_{p_3,n_3} \right\|_{p_2,n_2} \leq \left\| \|x_{\mathbf{j}}\|_{p_3,n_3} \right\|_{q_2,q_2}$ e a de Hölder $\left\| \left\| \|x_{\mathbf{j}}\|_{p_3,n_3} \right\|_{p_2,n_2} \right\|_{p_1,n_1} \leq \left\| \left\| \|x_{\mathbf{j}}\|_{p_3,n_3} \right\|_{p_2,n_2} \right\|_{q_1,n_1} \|1\|_{r_1,n_1}$, temos

$$\left\| \left\| \|x_{\mathbf{j}}\|_{p_3,n_3} \right\|_{p_2,n_2} \right\|_{p_1,n_1} \leq \left\| \left\| \|x_{\mathbf{j}}\|_{q_3,n_3} \right\|_{q_2,n_2} \right\|_{q_1,n_1} \|1\|_{r_1,n_1} \|1\|_{r_3,n_3}$$

que pode ser escrito como

$$\|x_{\mathbf{j}}\|_{\mathbf{p},\mathbf{n}} \leq \|x_{\mathbf{j}}\|_{\mathbf{q},\mathbf{n}} \prod_{k=1}^{m} n_k^{\max\left\{\frac{1}{p_k} - \frac{1}{q_k}, 0\right\}}.$$

Consideremos agora o caso geral. Se $q_k \leq p_k, k = 1, \ldots, m$, as desigualdades de norma nos dão

$$\|x_{\mathbf{j}}\|_{\mathbf{p},\mathbf{n}} \leq \|x_{\mathbf{j}}\|_{\mathbf{q},\mathbf{n}} = \|x_{\mathbf{j}}\|_{\mathbf{q},\mathbf{n}} \prod_{k=1}^{m} n_k^{\max\left\{\frac{1}{p_k} - \frac{1}{q_k}, 0\right\}}.$$

Por outro lado, se existem $s \in \{1, \ldots, m\}$ e índices $i_1, \ldots, i_s$ para os quais $p_{i_k} < q_{i_k}, k = 1, \ldots, s$, e $q_{i_k} \leq p_{i_k}$, caso contrário, escrevemos novamente $r_{i_k} = \left(\frac{1}{p_{i_k}} - \frac{1}{q_{i_k}}\right)^{-1} > 0, k = 1, \ldots, s$ e, assim como na primeira parte dessa demonstração, aplicando s vezes a desigualdade de Hölder e $m - s$ vezes a desigualdade de normas, obtemos

$$\begin{aligned} \|x_{\mathbf{j}}\|_{\mathbf{p},\mathbf{n}} &\leq \|x_{\mathbf{j}}\|_{\mathbf{q},\mathbf{n}} \prod_{k=1}^{s} n_{i_k}^{\frac{1}{p_{i_k}} - \frac{1}{q_{i_k}}} \\ &= \|x_{\mathbf{j}}\|_{\mathbf{q},\mathbf{n}} \prod_{k=1}^{m} n_k^{\max\left\{\frac{1}{p_k} - \frac{1}{q_k}, 0\right\}}. \end{aligned}$$

□

3.2.2 Estimativas de norma somante da identidade em espaços de dimensão finita

Os resultados a seguir são úteis para fornecer estimativas de normas somantes do operador identidade em espaços de dimensão finita.

Lema 3.2.5. [35, Corolário 2.2] *Se E é um espaço n-dimensional e $p \in (0, \infty)$, então*

$$\pi_p(id_E) \leq n^{\max\left\{\frac{1}{p}, \frac{1}{2}\right\}}, \tag{3.6}$$

e a igualdade ocorre quando $p = 2$.

Lema 3.2.6. [28, Corolário 16.3.1] *Sejam $1 \leq q \leq r \leq p$ e $T \in \Pi_{(r;q)}(E; F)$. Então*

$$\pi_{(p;q)}(T) \leq \|T\|^{1-\frac{r}{p}} \cdot \pi_{(r;q)}(T)^{\frac{r}{p}}. \tag{3.7}$$

O lema a seguir será útil para, através do Corolário 3.2.9, estender o Lema 3.2.6 para os casos em que se tem $q > 0$, e isto, por sua vez, permitirá que os próximos resultados abranjam todo o intervalo $(0, \infty)$. Assim como em [35], extrapolamos a noção de operadores absolutamente (p, q)-somantes para $p, q > 0$.

Lema 3.2.7. *Sejam E, F espaços de Banach, $T \in \mathcal{L}(E; F), 0 < q \leq p < \infty$ e $C > 0$. Então $T \in \Pi_{(p;q)}(E; F)$ e $\pi_{(p;q)} \leq C$ se, e somente se, para cada inteiro positivo N e cada $S \in \mathcal{L}(\ell_q^N; E)$,*

$$\left(\sum_{n=1}^{N} \|TS(e_n)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq C \sup_{\phi \in B_{E^*}} \|S^*(\phi)\|_q, \tag{3.8}$$

onde $\|S^*(\phi)\|_q$ representa a q-norma da matriz (vetor) do operador (funcional) $S^*(\phi) : \ell_q^N \to \mathbb{K}$.

Demonstração. Suponha primeiro que $T \in \Pi_{(p,q)}(E; F)$ e $\pi_{(p;q)} \leq C$. Sejam $S \in \mathcal{L}(\ell_q^N; E)$ e $x_n = S(e_n)$, então

$$\begin{aligned} \left(\sum_{n=1}^{N} \|TS(e_n)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} &\leq \pi_{(p;q)}(T) \sup_{\phi \in B_{E^*}} \left(\sum_{n=1}^{N} |\phi(S(e_n))|^q\right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \pi_{(p;q)}(T) \sup_{\phi \in B_{E^*}} \left(\sum_{n=1}^{N} |(S^*\phi)(e_n)|^q\right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \pi_{(p;q)}(T) \sup_{\phi \in B_{E^*}} \|S^*(\phi)\|_q, \end{aligned}$$

daí

$$\left(\sum_{n=1}^{N} \|TS(e_n)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq C \sup_{\phi \in B_{E^*}} \|S^*(\phi)\|_q.$$

Reciprocamente, suponha que para cada inteiro positivo N e cada $S \in \mathcal{L}(\ell_q^N; E)$, vale a desigualdade $\left(\sum_{n=1}^{N} \|TS(e_n)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq C \sup_{\phi \in B_{E^*}} \|S^*(\phi)\|_q$. Dados $x_1, \ldots, x_N \in E$, basta definir $S : \ell_q^N \to E$ por

$$S(\alpha_1, \ldots, \alpha_N) = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_N x_N,$$

de modo que $S(e_n) = x_n$ e

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{n=1}^{N} \|T(x_n)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} &= \left(\sum_{n=1}^{N} \|TS(e_n)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq C \sup_{\phi \in B_{E^*}} \|S^*(\phi)\|_q \\
&= C \sup_{\phi \in B_{E^*}} \left(\sum_{n=1}^{N} |\phi(S(e_n))|^q\right)^{\frac{1}{q}} \\
&= C \sup_{\phi \in B_{E^*}} \left(\sum_{n=1}^{N} |\phi(x_n)|^q\right)^{\frac{1}{q}}.
\end{aligned}$$

Portanto, $T \in \Pi_{(p;q)}(E;F)$ e $\pi_{(p;q)} \leq C$. □

Observação 3.2.8. *A primeira parte da demonstração nos permite, na implicação direta do lema acima, trocar* C *por* $\pi_{(p,q)}$. *Note também que, se* $q \geq 1$, $\|\cdot\|_q$ *será uma norma, pelo que podemos escrever*

$$\sup_{\phi \in B_{E^*}} \|S^*(\phi)\|_q = \|S^*\| = \|S\|,$$

fazendo a desigualdade (3.8) *coincidir com a desigualdade dada em* [28, Proposição 16.3.2] *isto é, obtemos um resultado análogo à Proposição 16.3.2 de* [28].

Proposição 3.2.9. *Sejam* $0 < q \leq r \leq p$ *e* $T \in \Pi_{r,q}(E;F)$. *Então*

$$\pi_{(p;q)}(T) \leq \|T\|^{1-\frac{r}{p}} \cdot \pi_{(r;q)}(T)^{\frac{r}{p}}. \tag{3.9}$$

Demonstração. Usando a mesma notação do Lema 3.2.7, observe o seguinte:

$$\begin{aligned}
\max_{1 \leq n \leq N} \|S(e_n)\| &= \sup_{\phi \in B_{E^*}} \max_{1 \leq n \leq N} \|\phi(S(e_n))\| \\
&\leq \sup_{\phi \in B_{E^*}} \left(\sum_{n=1}^{N} \|\phi(S(e_n))\|^q\right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \sup_{\phi \in B_{E^*}} \|S^*(\phi)\|_q,
\end{aligned}$$

isto é, note que

$$\max_{1 \leq n \leq N} \|S(e_n)\| \leq \sup_{\phi \in B_{E^*}} \|S^*(\phi)\|_q. \tag{3.10}$$

Daí,

$$
\begin{aligned}
\left(\sum_{n=1}^{N}\|T(S(e_n))\|^p\right)^{\frac{1}{p}} &\leq \left(\max_{1\leq n\leq N}\|T(S(e_n))\|^{p-r}\sum_{1\leq n\leq N}\|T(S(e_n))\|^r\right)^{\frac{1}{p}}\\
&= \max_{1\leq n\leq N}\|T(S(e_n))\|^{1-\frac{r}{p}}\left(\sum_{n=1}^{N}\|T(S(e_n))\|^r\right)^{\frac{1}{p}}\\
&= \max_{1\leq n\leq N}\|T(S(e_n))\|^{1-\frac{r}{p}}\left[\left(\sum_{n=1}^{N}\|T(S(e_n))\|^r\right)^{\frac{1}{r}}\right]^{\frac{r}{p}}\\
&\overset{(3.8)}{\leq} \max_{1\leq n\leq N}(\|T\|\|S(e_n)\|)^{1-\frac{r}{p}}\left[\pi_{(r;q)}(T)\sup_{\phi\in B_{E^*}}\left(\sum_{n=1}^{N}\|\phi(S(e_n))\|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right]^{\frac{r}{p}}\\
&\overset{(3.10)}{\leq} \|T\|^{1-\frac{r}{p}}\left(\sup_{\phi\in B_{E^*}}\|S^*(\phi)\|_q\right)^{1-\frac{r}{p}}\left[\pi_{(r;q)}(T)\sup_{\phi\in B_{E^*}}\|S^*(\phi)\|_q\right]^{\frac{r}{p}}\\
&= \|T\|^{1-\frac{r}{p}}\pi_{(r;q)}(T)^{\frac{r}{p}}\sup_{\phi\in B_{E^*}}\|S^*(\phi)\|_q
\end{aligned}
$$

e, da implicação recíproca do Lema 3.2.7, obtemos

$$\pi_{(p;q)}(T) \leq \|T\|^{1-\frac{r}{p}}\pi_{(r;q)}(T)^{\frac{r}{p}}.$$

□

A seguir, fornecemos uma estimativa para a norma π do operador identidade em espaços de dimensão finita que generaliza a Proposição 1.2.3 e servirá de elo para passar da teoria dos operadores absolutamente somantes para a dos múltiplos somantes (veja demonstração do Corolário 3.2.11).

Proposição 3.2.10. *Sejam $p, q \in (0,\infty)$ e E um espaço n-dimensional. Então*

$$\pi_{(p;q)}(id_E) \leq n^{\max\left\{\frac{1}{q},\frac{1}{2}\right\}\cdot\min\left\{\frac{q}{p},1\right\}+\max\left\{\frac{1}{p}-\frac{1}{q},0\right\}}. \tag{3.11}$$

Demonstração. Suponhamos inicialmente que seja $0 < q \leq p$. Dado $(x_j)_{j=1}^n \in \ell_q^w(E)$, da Proposição 3.2.9 segue que

$$\pi_{(p;q)}(id_E) \leq \pi_q(id_E)^{\frac{q}{p}}.$$

Assim,

$$
\begin{aligned}
\left(\sum_{j=1}^{n}\|id_E(x_j)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} &\leq \pi_{(p,q)}(id_E)\cdot\|(x_j)_{j=1}^n\|_{w,q}\\
&\overset{(3.9)}{\leq} \pi_q(id_E)^{\frac{q}{p}}\cdot\|(x_j)_{j=1}^n\|_{w,q}\\
&\overset{(3.6)}{\leq} n^{\max\left\{\frac{1}{q},\frac{1}{2}\right\}\cdot\frac{q}{p}}\cdot\|(x_j)_{j=1}^n\|_{w,q}.
\end{aligned}
$$

Supondo agora que seja $q > p$, aplicamos a desigualdade de Hölder:

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{j=1}^{n} \|id_E(x_j)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} &= \left(\sum_{j=1}^{n} \|x_j\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \left(\sum_{j=1}^{n} \|x_j\|^q\right)^{\frac{1}{q}} \cdot n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \\
&= \left(\sum_{j=1}^{n} \|id_E(x_j^k)\|^q\right)^{\frac{1}{q}} \cdot n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \\
&\leq \pi_q(id_E) \cdot n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \cdot \|(x_j)_{j=1}^n\|_{w,q} \\
&\overset{(3.6)}{\leq} n^{\max\left\{\frac{1}{q},\frac{1}{2}\right\}+\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \cdot \|(x_j)_{j=1}^n\|_{w,q}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\left(\sum_{j=1}^{n} \|id_E(x_j)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq n^{\max\left\{\frac{1}{q},\frac{1}{2}\right\}\cdot\min\left\{\frac{q}{p},1\right\}+\max\left\{\frac{1}{p}-\frac{1}{q},0\right\}} \cdot \|(x_j)_{j=1}^n\|_{w,q}.$$

□

O corolário a seguir traz-nos um resultado ainda mais geral que as Proposições 1.2.3 e 3.2.10, e será útil na obtenção de novas estimativas para o índice de somabilidade numa perspectiva anisotrópica.

Corolário 3.2.11. *Sejam $p_k, q_k \in (0,\infty)$ e E_k espaços n_k-dimensionais, $k = 1,\ldots,m$. Então*

$$\pi_{(\mathbf{p};\mathbf{q})}(id_{E_1\times\cdots\times E_m}) \leq \prod_{k=1}^{m} n_k^{\max\left\{\frac{1}{q_k},\frac{1}{2}\right\}\cdot\min\left\{\frac{q_k}{p_k},1\right\}+\max\left\{\frac{1}{p_k}-\frac{1}{q_k},0\right\}}.$$

Em particular, se $p_k = q_k$, $k = 1,\ldots,m$, então

$$\pi_{\mathbf{p}}(id_{E_1\times\cdots\times E_m}) \leq \prod_{k=1}^{m} n_k^{\max\left\{\frac{1}{p_k},\frac{1}{2}\right\}}.$$

Demonstração. Dado $x^k := (x_j^k)_{j=1}^{n_k} \in \ell_{p_k}^w(E_k)$, $k = 1, \ldots, m$, temos

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{j_1=1}^{n_1}\left(\cdots\left(\sum_{j_m=1}^{n_m}\|id_{E_1\times\cdots\times E_m}(x_{\mathbf{j}})\|^{p_m}\right)^{\frac{p_{m-1}}{p_m}}\cdots\right)^{\frac{p_1}{p_2}}\right)^{\frac{1}{p_1}}\\
&\leq \|id_{E_1\times\cdots\times E_m}\|\cdot\prod_{k=1}^{m}\left(\sum_{j_k=1}^{n_k}\|x_{j_k}^k\|^{p_k}\right)^{\frac{1}{p_k}}\\
&=\prod_{k=1}^{m}\left(\sum_{j_k=1}^{n_k}\|id_{E_k}(x_{j_k}^k)\|^{p_k}\right)^{\frac{1}{p_k}}\\
&\leq \prod_{k=1}^{m}\pi_{(p_k;q_k)}(id_{E_k})\cdot\prod_{k=1}^{m}\|x^k\|_{w,q_k}.
\end{aligned}$$

O resultado segue da Proposição 3.2.10. □

3.3 Estimativas superiores para o índice

O resultado abaixo garante a existência do índice de somabilidade e, além de reunir e generalizar simultaneamente as Proposições 1.2.4 e 1.2.5, também melhora os intervalos em que p, q variam na Proposição 1.2.5.

Teorema 3.3.1 (Existência do índice). *Sejam $0 < q_k, p_k < \infty$ e E_k, F espaços de Banach com $k = 1, \ldots, m$. Então*

$$\xi_{(\mathbf{p};\mathbf{q})}^{m-mult}(E_1\times\cdots\times E_m;F)\leq\left(\max\left\{\frac{1}{q_k},\frac{1}{2}\right\}\cdot\min\left\{\frac{q_k}{p_k},1\right\}+\max\left\{\frac{1}{p_k}-\frac{1}{q_k},0\right\}\right)_{k=1}^{m}.$$

Em particular, se cada $q_k = p_k$, podemos tomar $p_k \in (0, \infty)$ e então

$$\xi_{\mathbf{p}}^{m-mult}(E_1\times\cdots\times E_m;F)\leq\left(\max\left\{\frac{1}{p_k},\frac{1}{2}\right\}\right)_{k=1}^{m}.$$

Demonstração. Sejam $T \in \mathcal{L}(E_1, \cdots, E_m; F)$, $x^k := (x_j^k)_{j=1}^{n_k} \in \ell_{p_k}^w(E_k)$ e $X_k := span\{x_1^k, \ldots, x_{n_k}^k\}$, $k =$

$1,\ldots,m$. Usando o teorema de extensão de Hahn-Banach e o Corolário 3.2.11, tem-se

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{j_1=1}^{n_1}\left(\cdots\left(\sum_{j_m=1}^{n_m}\|T(x_{\mathbf{j}})\|^{p_m}\right)^{\frac{p_{m-1}}{p_m}}\cdots\right)^{\frac{p_1}{p_2}}\right)^{\frac{1}{p_1}}\\
&\leq \|T\|\left(\sum_{j_1=1}^{n_1}\left(\cdots\left(\sum_{j_m=1}^{n_m}\|id_{X_1\times\cdots\times X_m}(x_{\mathbf{j}})\|^{p_m}\right)^{\frac{p_{m-1}}{p_m}}\cdots\right)^{\frac{p_1}{p_2}}\right)^{\frac{1}{p_1}}\\
&\leq \|T\|\cdot\pi_{(\mathbf{p},\mathbf{q})}(id_{X_1\times\cdots\times X_m})\cdot\prod_{k=1}^{m}\left[\sup_{\psi\in B_{X_k^*}}\left(\sum_{j=1}^{n_k}\left|\psi\left(x_j^k\right)\right|^{q_k}\right)^{\frac{1}{q_k}}\right]\\
&\leq \|T\|\cdot\pi_{(\mathbf{p},\mathbf{q})}(id_{X_1\times\cdots\times X_m})\cdot\prod_{k=1}^{m}\left[\sup_{\phi\in B_{E_k^*}}\left(\sum_{j=1}^{n_k}\left|\phi\left(x_j^k\right)\right|^{q_k}\right)^{\frac{1}{q_k}}\right]\\
&\leq \|T\|\cdot\prod_{k=1}^{m} n_k^{\max\left\{\frac{1}{q_k},\frac{1}{2}\right\}\cdot\min\left\{\frac{q_k}{p_k},1\right\}+\max\left\{\frac{1}{p_k}-\frac{1}{q_k},0\right\}}\cdot\prod_{k=1}^{m}\|x^k\|_{w,q_k}.
\end{aligned}$$

□

Observação 3.3.2. *Se $0 < q_k \leq p_k$ para cada $k = 1,\ldots,m$ obtemos*

$$\xi_{(\mathbf{p};\mathbf{q})}^{m-mult}(E_1\times\cdots\times E_m;F) \leq \xi_{\mathbf{p}}^{m-mult}(E_1\times\cdots\times E_m;F).$$

De fato, uma vez que

$$\prod_{k=1}^{m}\|x^k\|_{w,p_k} \leq \prod_{k=1}^{m}\|x^k\|_{w,q_k}$$

sempre que for $0 < q_k \leq p_k$, temos

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{j_1=1}^{n_1}\left(\cdots\left(\sum_{j_m=1}^{n_m}\|T(x_{\mathbf{j}})\|^{p_m}\right)^{\frac{p_{m-1}}{p_m}}\cdots\right)^{\frac{p_1}{p_2}}\right)^{\frac{1}{p_1}} &\leq C\cdot\prod_{k=1}^{m} n_k^{s_{m,p_k}}\cdot\prod_{k=1}^{m}\|x^k\|_{w,p_k}.\\
&\leq C\cdot\prod_{k=1}^{m} n_k^{s_{m,p_k}}\cdot\prod_{k=1}^{m}\|x^k\|_{w,q_k}.
\end{aligned}$$

Desse modo, chamando de S_{m,p_k} o conjunto dos s_{m,p_k} que satisfazem a primeira desigualdade acima, bem como de S_{m,p_k,q_k} o dos s_{m,p_k,q_k} que satisfazem a segunda, temos

$$\inf\{S_{m,p_k,q_k}\} \leq \inf\{S_{m,p_k}\},$$

isto é, $\xi_{(\mathbf{p};\mathbf{q})}^{m-mult}(E_1\times\cdots\times E_m;F) \leq \xi_{\mathbf{p}}^{m-mult}(E_1\times\cdots\times E_m;F)$.

O teorema abaixo fornece, de um modo geral, uma estimativa para o índice $\xi_{(\mathbf{p};\mathbf{q})}^{m-mult}(E_1\times\cdots\times E_m;F)$ como uma consequência da coincidência $\mathcal{L}(E_1,\ldots,E_m;F) =$

$\Pi^m_{(\mathbf{t};\mathbf{s})}(E_1,\ldots,E_m;F)$. O referido teorema, além de estender os intervalos em que p, q variam na Proposição 1.2.6, fornece uma forma sintética de escrevê-la, como também estende a mesma ao caso dos operadores multilineares que são múltiplo $(\mathbf{p};\mathbf{q})-$somantes.

Teorema 3.3.3. *Sejam* $0 < p_k, q_k < \infty, 1 \leq t_k, s_k < \infty$, $k = 1, \ldots, m$, *e* $E_1, \ldots, E_m, F$ *espaços de Banach. Se*

$$\mathcal{L}(E_1,\ldots,E_m;F) = \Pi^m_{(\mathbf{t};\mathbf{s})}(E_1,\ldots,E_m;F)$$

então

$$\xi^{m-mult}_{(\mathbf{p};\mathbf{q})}(E_1 \times \cdots \times E_m; F) \leq \left(\max\left\{\frac{1}{p_k} - \frac{1}{t_k}, 0\right\} + \max\left\{\frac{1}{s_k} - \frac{1}{q_k}, 0\right\}\right)_{k=1}^m.$$

Demonstração. Dado $T \in \mathcal{L}(E_1,\ldots,E_m;F)$ e aplicando o Lema 3.2.4, tem-se

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{j_1=1}^{n_1}\left(\cdots\left(\sum_{j_m=1}^{n_m}\|T(x_{\mathbf{j}})\|^{p_m}\right)^{\frac{p_{m-1}}{p_m}}\cdots\right)^{\frac{p_1}{p_2}}\right)^{\frac{1}{p_1}} \\
&\leq \left(\sum_{j_1=1}^{n_1}\left(\cdots\left(\sum_{j_m=1}^{n_m}\|T(x_{\mathbf{j}})\|^{t_m}\right)^{\frac{t_{m-1}}{t_m}}\cdots\right)^{\frac{t_1}{t_2}}\right)^{\frac{1}{t_1}} \cdot \prod_{k=1}^m n_k^{\max\left\{\frac{1}{p_k}-\frac{1}{t_k},0\right\}}
\end{aligned}$$

Daí, em vista da igualdade $\mathcal{L}(E_1,\ldots,E_m;F) = \Pi^m_{(\mathbf{t};\mathbf{s})}(E_1,\ldots,E_m;F)$, obtemos

$$\left(\sum_{j_1=1}^{n_1}\left(\cdots\left(\sum_{j_m=1}^{n_m}\|T(x_{\mathbf{j}})\|^{p_m}\right)^{\frac{p_{m-1}}{p_m}}\cdots\right)^{\frac{p_1}{p_2}}\right)^{\frac{1}{p_1}} \leq C \cdot \prod_{k=1}^m n_k^{\max\left\{\frac{1}{p_k}-\frac{1}{t_k},0\right\}} \cdot \prod_{k=1}^m \|x^k\|_{w,s_k}.$$

Além disso, de modo análogo à prova do Lema 3.2.4, se $s_k \geq q_k$, vale a desigualdade $\|x^k\|_{w,s_k} \leq \|x^k\|_{w,q_k}$; caso contrário, isto é, se $s_k < q_k$, aplicamos a desigualdade de Hölder

$$\begin{aligned}
\|x^k\|_{w,s_k} &= \sup_{\psi \in B_{E_k^*}}\left(\sum_{j=1}^{n_k}\left|\psi\left(x_j^k\right)\right|^{s_k}\right)^{\frac{1}{s_k}} \\
&\leq \sup_{\psi \in B_{E_k^*}}\left(\sum_{j=1}^{n_k}\left|\psi\left(x_j^k\right)\right|^{q_k}\right)^{\frac{1}{q_k}} \cdot \left(\sum_{j=1}^{n_k}|1|^{\frac{s_k q_k}{q_k - s_k}}\right)^{\frac{1}{s_k}-\frac{1}{q_k}} \\
&= \|x^k\|_{w,q_k} \cdot n_k^{\frac{1}{s_k}-\frac{1}{q_k}}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\left(\sum_{j_1=1}^{n_1}\left(\cdots\left(\sum_{j_m=1}^{n_m}\|T\left(x_{\mathbf{j}}\right)\|^{p_m}\right)^{\frac{p_{m-1}}{p_m}}\cdots\right)^{\frac{p_1}{p_2}}\right)^{\frac{1}{p_1}}$$

$$\leq C\cdot\prod_{k=1}^{m} n_k^{\max\left\{\frac{1}{p_k}-\frac{1}{t_k},0\right\}+\max\left\{\frac{1}{s_k}-\frac{1}{q_k},0\right\}}\cdot\prod_{k=1}^{m}\|x^k\|_{w,q_k}.$$

□

Observação 3.3.4. *A demonstração do Teorema 3.3.3 permanece a mesma se tomarmos $0 < t_k, s_k < \infty, k = 1, \ldots, m$. Todavia, a abordagem do presente estudo se limita ao conjunto $\Pi^m_{(\mathbf{t};\mathbf{s})}\left(E_1, \ldots, E_m; F\right)$ com $1 \leq t_k, s_k < \infty, k = 1, \ldots, m$. Vale a mesma observação para o próximo teorema.*

Em se tratando dos operadores multilineares $T : E_1 \times \cdots \times E_m \to F$ que são $(p;\mathbf{q})$-somantes, temos o seguinte caso similar ao Teorema 3.3.3:

Teorema 3.3.5. *Sejam $0 < p, q_k < \infty, 1 \leq t, s_k < \infty$, $k = 1, \ldots, m$, e $E_1, \ldots, E_m, F$ espaços de Banach. Se*

$$\mathcal{L}\left(E_1, \ldots, E_m; F\right) = \Pi^m_{as(t;\mathbf{s})}\left(E_1, \ldots, E_m; F\right)$$

então

$$\eta^{m-mult}_{(p;\mathbf{q})}(E_1 \times \cdots \times E_m; F) \leq \max\left\{\frac{1}{p}-\frac{1}{t},0\right\}+\sum_{k=1}^{m}\max\left\{\frac{1}{s_k}-\frac{1}{q_k},0\right\}.$$

Demonstração. Dado $T \in \mathcal{L}\left(E_1, \ldots, E_m; F\right)$ e aplicando a desigualdade de Hölder, temos

$$\left(\sum_{j=1}^{n}\left\|T(x_j^1,\ldots,x_j^m)\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{j=1}^{n}\left\|T(x_j^1,\ldots,x_j^m)\right\|^t\right)^{\frac{1}{t}}\cdot n^{\max\{\frac{1}{p}-\frac{1}{t},0\}}.$$

Por outro lado, sendo $T \in \Pi^m_{as(t;\mathbf{s})}\left(E_1, \ldots, E_m; F\right)$, temos

$$\left(\sum_{j=1}^{n}\left\|T(x_j^1,\ldots,x_j^m)\right\|^t\right)^{\frac{1}{t}} \leq C\cdot\prod_{k=1}^{m}\left\|(x_j^k)_{j=1}^n\right\|_{w,s_k},$$

logo

$$\left(\sum_{j=1}^{n}\left\|T(x_j^1,\ldots,x_j^m)\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq C\cdot\prod_{k=1}^{m}\left\|(x_j^k)_{j=1}^n\right\|_{w,s_k}\cdot n^{\max\{\frac{1}{p}-\frac{1}{t},0\}}.$$

Como a desigualdade de Hölder fornece também

$$\left\|(x_j^k)_{j=1}^n\right\|_{w,s_k} \leq \left\|(x_j^k)_{j=1}^n\right\|_{w,q_k}\cdot n^{\max\{\frac{1}{s_k}-\frac{1}{q_k},0\}},$$

obtemos

$$\left(\sum_{j=1}^{n}\left\|T(x_j^1,\ldots,x_j^m)\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq C\cdot n^{\max\{\frac{1}{p}-\frac{1}{t},0\}+\sum_{k=1}^{m}\max\{\frac{1}{s_k}-\frac{1}{q_k},0\}}\prod_{k=1}^{m}\left\|(x_j^k)_{j=1}^n\right\|_{w,q_k}$$

e, portanto,

$$\eta_{(p;\mathbf{q})}^{m-mult}(E_1\times\cdots\times E_m;F)\leq \max\left\{\frac{1}{p}-\frac{1}{t},0\right\}+\sum_{k=1}^{m}\max\left\{\frac{1}{s_k}-\frac{1}{q_k},0\right\}.$$

□

3.3.1 Aplicações

Através do Corolário 3.3.7, o resultado a seguir traz-nos um exemplo de aplicação do Teorema 3.3.3. O lema abaixo é o Corolário 1 de [5], que reúne condições para uma determinada situação de coincidência.

Lema 3.3.6 (Albuquerque e Rezende, [5])**.** *Se* $|1/\mathbf{s}^*|<1$ *e* $s_1^*,\ldots,s_m^*\leq 2m$*, então*

$$\mathcal{L}\left(E_1,\ldots,E_m;\mathbb{K}\right)=\Pi_{(\mathbf{t};\mathbf{s})}^{m}\left(E_1,\ldots,E_m;\mathbb{K}\right),$$

para quaisquer espaços de Banach $E_1,\ldots,E_m$ *e*

$$t_k=\left[\frac{1}{2}+\frac{m-k+1}{2m}-\left|\frac{1}{\mathbf{s}^*}\right|_{\geq k}\right]^{-1},\qquad \textit{para } k=1,\ldots,m.$$

Corolário 3.3.7. *Sejam* $E_1,\ldots,E_m,F$ *espaços de Banach,* $|1/\mathbf{s}^*|<1$, $s_1^*,\ldots,s_m^*\leq 2m$ *e*

$$t_k:=\left[\frac{1}{2}+\frac{m-k+1}{2m}-\left|\frac{1}{\mathbf{s}^*}\right|_{\geq k}\right]^{-1},\qquad \textit{para } k=1,\ldots,m.$$

Então

$$\xi_{(\boldsymbol{p};\mathbf{q})}^{m-mult}(E_1\times\cdots\times E_m;F)\leq\left(\max\left\{\frac{1}{p_k}-\frac{1}{t_k},0\right\}+\max\left\{\frac{1}{s_k}-\frac{1}{q_k},0\right\}\right)_{k=1}^{m}$$

para todos $0<p_k,q_k<\infty$*, com* $k=1,\ldots,m$*.*

Demonstração. A prova consiste em aplicar o Teorema 3.3.3 e a situação de coincidência fornecida pelo Lema 3.3.6. □

O resultado abaixo, devido a Botelho e Pellegrino, é o Teorema 2.1 de [23].

Lema 3.3.8. *Sejam $p, r \in [1, q]$ e seja F um espaço de Banach. Por $B(p,q,r,F)$ denotamos a coleção de todos os espaços de Banach E tais que*

$$\mathcal{L}(E;F) = \Pi_{(q;p)}(E;F) \text{ e } \mathcal{L}(E;\ell_q(F)) = \Pi_{(q;r)}(E;\ell_q(F)).$$

Então, para cada $n \geq 2$,

$$\mathcal{L}(E_1,\ldots,E_n;F) = \Pi^n_{(q;r,\ldots,r,p)}(E_1,\ldots,E_n;F)$$

sempre que $E_1,\ldots,E_n \in B(p,q,r,F)$.

Uma vez que vale a coincidência

$$\Pi^n_{(q;r,\ldots,r,p)}(E_1,\ldots,E_n;F) = \Pi^n_{(q,\ldots,q;r,\ldots,r,p)}(E_1,\ldots,E_n;F)$$

e dispondo da notação utilizada no Lema 3.3.8, aplicamos o Teorema 3.3.3 para obter a seguinte estimativa.

Corolário 3.3.9. *Sejam $p, r \in [1, q]$ e F um espaço de Banach. Então, para cada $n \geq 2$ e $0 < p_k, q_k < \infty, k = 1,\ldots,n$,*

$$\xi^{n-mult}_{(\boldsymbol{p};\mathbf{q})}(E_1\times\cdots\times E_n;F) \leq \left(\max\left\{\frac{1}{p_1}-\frac{1}{q},0\right\}+\max\left\{\frac{1}{r}-\frac{1}{q_1},0\right\},\ldots,\right.$$
$$\left.\max\left\{\frac{1}{p_{n-1}}-\frac{1}{q},0\right\}+\max\left\{\frac{1}{r}-\frac{1}{q_{n-1}},0\right\},\max\left\{\frac{1}{p_n}-\frac{1}{q},0\right\}+\max\left\{\frac{1}{p}-\frac{1}{q_n},0\right\}\right)$$

sempre que $E_1,\ldots,E_n \in B(p,q,r,F)$.

Resultados inteiramente análogos ao corolário acima são obtidos se, ao invés de utilizarmos o Lema 3.3.8, fizermos uso do Teorema 2.2 ou dos Corolários 2.3 e 2.4, todos apresentados em [23].

Os três lemas a seguir são devidos a Bombal, Pérez-García e Villanueva, e podem ser encontrados em [23] e [18], simultaneamente.

Lema 3.3.10. [23, Proposição 3.1] *Se F tem cotipo q e $E_1,\ldots,E_n$ são espaços de Banach arbitrários, então*

$$\mathcal{L}(E_1,\ldots,E_n;F) = \Pi^n_{(q;1)}(E_1,\ldots,E_n;F) \text{ e}$$
$$\pi_{(q;1)}(A) \leq C_q(F)^n\|A\| \text{ para cada } A \in \mathcal{L}(E_1,\ldots,E_n;F),$$

onde $C_q(F)$ é a constante cotipo q de F.

Corolário 3.3.11. *Se F tem cotipo q e $E_1,\ldots,E_n$ são espaços de Banach arbitrários, então para todos $0 < p_1, q_1 < \infty$ temos*

$$\xi^{n-mult}_{(p_1;q_1)}(E_1\times\cdots\times E_n;F) \leq \left(\max\left\{\frac{1}{p_1}-\frac{1}{q},0\right\}+\max\left\{1-\frac{1}{q_1},0\right\}\right)^n_{k=1}.$$

Lema 3.3.12. [23, Proposição 3.2] *Se $E_1, \ldots, E_n$ são $\mathcal{L}_1$-espaços e H é um espaço de Hilbert, então*

$$\mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F) = \Pi^n_{(2;2)}(E_1, \ldots, E_n; F) \text{ e}$$
$$\pi_{(2;2)}(A) \leq K_G^n \|A\| \text{ para cada } A \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; H),$$

onde K_G representa a constante de Grothendieck.

Corolário 3.3.13. *Se $E_1, \ldots, E_n$ são $\mathcal{L}_1$-espaços e H é um espaço de Hilbert, então para todos $0 < p, q < \infty$ temos*

$$\xi^{n-mult}_{(p;q)}(E_1 \times \cdots \times E_n; H) \leq \left(\max\left\{\frac{1}{p} - \frac{1}{2}, 0\right\} + \max\left\{\frac{1}{2} - \frac{1}{q}, 0\right\}\right)^n_{k=1}.$$

Lema 3.3.14. [23, Proposição 3.3] *Se F tem cotipo 2 e $E_1, \ldots, E_n$ são $\mathcal{L}_\infty$-espaços, então $\mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F) = \Pi^n_{(2;2)}(E_1, \ldots, E_n; F)$.*

Corolário 3.3.15. *Se F tem cotipo 2 e $E_1, \ldots, E_n$ são $\mathcal{L}_\infty$-espaços, então para todos $0 < p, q < \infty$*

$$\xi^{n-mult}_{(p;q)}(E_1 \times \cdots \times E_n; F) \leq \left(\max\left\{\frac{1}{p} - \frac{1}{2}, 0\right\} + \max\left\{\frac{1}{2} - \frac{1}{q}, 0\right\}\right)^n_{k=1}.$$

Lema 3.3.16. [23, Proposição 3.4] *Se F tem cotipo $q > 2$ e $E_1, \ldots, E_n$ são $\mathcal{L}_\infty$-espaços e $r < q$, então $\mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F) = \Pi^n_{(q;r)}(E_1, \ldots, E_n; F)$.*

Corolário 3.3.17. *Se F tem cotipo $q > 2$ e $E_1, \ldots, E_n$ são $\mathcal{L}_\infty$-espaços e $r < q$, então para todos $0 < p_1, q_1 < \infty$*

$$\xi^{n-mult}_{(p_1;q_1)}(E_1 \times \cdots \times E_n; F) \leq \left(\max\left\{\frac{1}{p_1} - \frac{1}{q}, 0\right\} + \max\left\{\frac{1}{r} - \frac{1}{q_1}, 0\right\}\right)^n_{k=1}.$$

Lema 3.3.18. [23, Proposição 3.5] *Se $E_1, \ldots, E_n, F$ são espaços de Banach arbitrários e $q \geq 2$, então*

$$\mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F) = \Pi^n_{(q;1,\ldots,1,q)}(E_1, \ldots, E_n; F) \text{ e}$$
$$\pi_{(q;1,\ldots,1,q)}(A) \leq C_q(\ell_q)^{n-1} \|A\| \text{ para cada } A \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F).$$

Corolário 3.3.19. *Se $E_1, \ldots, E_n, F$ são espaços de Banach arbitrários e $q \geq 2$, então para todos $0 < p_k, q_k < \infty, k = 1, \ldots, n$,*

$$\xi^{n-mult}_{(\mathbf{p};\mathbf{q})}(E_1 \times \cdots \times E_n; F) \leq \left(\max\left\{\frac{1}{p_1} - \frac{1}{q}, 0\right\} + \max\left\{1 - \frac{1}{q_1}, 0\right\}, \ldots, \right.$$
$$\left. \max\left\{\frac{1}{p_{n-1}} - \frac{1}{q}, 0\right\} + \max\left\{1 - \frac{1}{q_{n-1}}, 0\right\}, \max\left\{\frac{1}{p_n} - \frac{1}{q}, 0\right\} + \max\left\{\frac{1}{q} - \frac{1}{q_n}, 0\right\}\right).$$

Lema 3.3.20. [23, Proposição 3.6] *Se $E_1, \ldots, E_n$ são $\mathcal{L}_\infty$-espaços e $2 \leq r < q$, então $\mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F) = \Pi^n_{(q;r,\ldots,r,q)}(E_1, \ldots, E_n; F)$.*

Corolário 3.3.21. *Se $E_1, \ldots, E_n$ são $\mathcal{L}_\infty$-espaços e $2 \leq r < q$, então para todos $0 < p_k, q_k < \infty, k = 1, \ldots, n$, temos*

$$\xi_{(\boldsymbol{p};\mathbf{q})}^{n-mult}(E_1 \times \cdots \times E_n; F) \leq \left(\max\left\{\frac{1}{p_1} - \frac{1}{q}, 0\right\} + \max\left\{\frac{1}{r} - \frac{1}{q_1}, 0\right\}, \ldots,\right.$$
$$\left.\max\left\{\frac{1}{p_{n-1}} - \frac{1}{q}, 0\right\} + \max\left\{\frac{1}{r} - \frac{1}{q_{n-1}}, 0\right\}, \max\left\{\frac{1}{p_n} - \frac{1}{q}, 0\right\} + \max\left\{\frac{1}{q} - \frac{1}{q_n}, 0\right\}\right).$$

Lema 3.3.22. [23, Proposição 3.7] *Se $E_1, \ldots, E_n$ são $\mathcal{L}_\infty$-espaços e $q > r, q > 2$, então $\mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F) = \Pi^n_{(q;r,\ldots,r,q)}(E_1, \ldots, E_n; F)$.*

Corolário 3.3.23. *Se $E_1, \ldots, E_n$ são $\mathcal{L}_\infty$-espaços e $q > r, q > 2$, então para todos $0 < p_k, q_k < \infty, k = 1, \ldots, n$,*

$$\xi_{(\boldsymbol{p};\mathbf{q})}^{n-mult}(E_1 \times \cdots \times E_n; F) \leq \left(\max\left\{\frac{1}{p_1} - \frac{1}{q}, 0\right\} + \max\left\{\frac{1}{r} - \frac{1}{q_1}, 0\right\}, \ldots,\right.$$
$$\left.\max\left\{\frac{1}{p_{n-1}} - \frac{1}{q}, 0\right\} + \max\left\{\frac{1}{r} - \frac{1}{q_{n-1}}, 0\right\}, \max\left\{\frac{1}{p_n} - \frac{1}{q}, 0\right\} + \max\left\{\frac{1}{q} - \frac{1}{q_n}, 0\right\}\right).$$

Lema 3.3.24. [23, Proposição 4.1] *Sejam $E_1, \ldots, E_n$ $\mathcal{L}_1$-espaços.*

(a) $\mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; H) = \Pi^n_{(q;1,\ldots,1,q)}(E_1, \ldots, E_n; H)$ para cada espaço de Hilbert H e qualquer $q \geq 2$.

(b) $\mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F) = \Pi^n_{(q;1,\ldots,1,r)}(E_1, \ldots, E_n; F)$ para cada $\mathcal{L}_q$-espaço F e quaisquer $2 \leq r < q$.

Corolário 3.3.25. *Sejam $E_1, \ldots, E_n$ $\mathcal{L}_1$-espaços. Então para todos $0 < p_k, q_k < \infty, k = 1, \ldots, n$, temos*

(a)

$$\xi_{(\boldsymbol{p};\mathbf{q})}^{n-mult}(E_1 \times \cdots \times E_n; H) \leq \left(\max\left\{\frac{1}{p_1} - \frac{1}{q}, 0\right\} + \max\left\{1 - \frac{1}{q_1}, 0\right\}, \ldots,\right.$$
$$\left.\max\left\{\frac{1}{p_{n-1}} - \frac{1}{q}, 0\right\} + \max\left\{1 - \frac{1}{q_{n-1}}, 0\right\}, \max\left\{\frac{1}{p_n} - \frac{1}{q}, 0\right\} + \max\left\{\frac{1}{q} - \frac{1}{q_n}, 0\right\}\right).$$

para cada espaço de Hilbert H e qualquer $q \geq 2$;

(b)

$$\xi_{(\boldsymbol{p};\mathbf{q})}^{n-mult}(E_1 \times \cdots \times E_n; F) \leq \left(\max\left\{\frac{1}{p_1} - \frac{1}{q}, 0\right\} + \max\left\{1 - \frac{1}{q_1}, 0\right\}, \ldots,\right.$$
$$\left.\max\left\{\frac{1}{p_{n-1}} - \frac{1}{q}, 0\right\} + \max\left\{1 - \frac{1}{q_{n-1}}, 0\right\}, \max\left\{\frac{1}{p_n} - \frac{1}{q}, 0\right\} + \max\left\{\frac{1}{r} - \frac{1}{q_n}, 0\right\}\right).$$

para cada $\mathcal{L}_q$-espaço F e quaisquer $2 \leq r < q$.

Lema 3.3.26. [23, Teorema 4.2] *Sejam $r \geq s$. Se $\mathcal{L}(\ell_1; F) = \Pi_{(r;s)}(\ell_1; F)$, então*

$$\mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F) = \Pi^n_{(r;\min\{s,2\})}(E_1, \ldots, E_n; F)$$

para cada $n \in \mathbb{N}$ e quaisquer $\mathcal{L}_1-$espaços $E_1, \ldots, E_n$.

Corolário 3.3.27. *Sejam $r \geq s$. Se $\mathcal{L}(\ell_1; F) = \Pi_{(r;s)}(\ell_1; F)$, então para todos $0 < p, q < \infty$,*

$$\xi_{(p;q)}^{n-mult}(E_1 \times \cdots \times E_n; F) \leq \left(\max\left\{\frac{1}{p} - \frac{1}{r}, 0\right\} + \max\left\{\frac{1}{\min\{s,2\}} - \frac{1}{q}, 0\right\}\right)_{k=1}^{n}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$ e quaisquer $\mathcal{L}_1-$espaços $E_1, \ldots, E_n$.

Lema 3.3.28. [23, Corolário 4.4] *Sejam $E_1, \ldots, E_n$ $\mathcal{L}_1$-espaços e seja F um $\mathcal{L}_q$-espaço, $1 \leq q < \infty$. Então*

$$\mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F) = \Pi_{(r;p)}^{n}(E_1, \ldots, E_n; F)$$

se

(a) $q < 2, r \geq q^*$ e $p = 2$, onde $\frac{1}{q} + \frac{1}{q^*} = 1$, ou

(b) $q > 2, r \geq q$ e $p = 2$, ou

(c) $q = 2$ e $1 \leq p \leq r \leq 2$.

Corolário 3.3.29. *Sejam $E_1, \ldots, E_n$ espaços $\mathcal{L}_1$ e seja F um $\mathcal{L}_q$-espaço, $1 \leq q < \infty$. Então para todos $0 < p_1, q_1 < \infty$, temos*

$$\xi_{(p_1;q_1)}^{m-mult}(E_1 \times \cdots \times E_m; F) \leq \left(\max\left\{\frac{1}{p_1} - \frac{1}{r}, 0\right\} + \max\left\{\frac{1}{p} - \frac{1}{q_1}, 0\right\}\right)_{k=1}^{m}$$

se

(a) $q < 2, r \geq q^*$ e $p = 2$, ou

(b) $q > 2, r \geq q$ e $p = 2$, ou

(c) $q = 2$ e $1 \leq p \leq r \leq 2$.

Os próximos lemas são resultados apresentados por Bayart, Pellegrino e Rueda em [15].

Lema 3.3.30. [15, Teorema 3.1] *Sejam $r \geq s \geq 1$ e $p = \min\{s, 2\}$. Se $\mathcal{L}(^2\ell_1, E; F) = \Pi_{(r;s)}^{m}(^2\ell_1, E; F)$, então $\mathcal{L}(^m\ell_1, \ldots, \ell_1, E; F) = \Pi_{(r;p)}^{m}(\ell_1, \ldots, \ell_1, E; F)$ para qualquer $m \geq 2$.*

Corolário 3.3.31. *Sejam $r \geq s \geq 1$. Se $\mathcal{L}(^2\ell_1, E; F) = \Pi_{(r;s)}^{m}(^2\ell_1, E; F)$, então para todos $0 < p_1, q_1 < \infty$,*

$$\xi_{(p_1;q_1)}^{m-mult}(\ell_1 \times \cdots \times \ell_1 \times E; F) \leq \left(\max\left\{\frac{1}{p_1} - \frac{1}{r}, 0\right\} + \max\left\{\frac{1}{\min\{s,2\}} - \frac{1}{q_1}, 0\right\}\right)_{k=1}^{m}$$

para qualquer $m \geq 2$.

Lema 3.3.32. [15, Teorema 3.2] *Sejam $m \geq 1, Z$ um espaço com cotipo 2. Então*

$$\mathcal{L}(^{m+1}\ell_1, \ldots, \ell_1, Z; \mathbb{K}) = \Pi^m_{(1;1)}(^{m+1}\ell_1, \ldots, \ell_1, Z; \mathbb{K}).$$

Corolário 3.3.33. *Sejam $m \geq 1, Z$ um espaço com cotipo 2. Então para todos $0 < p, q < \infty$,*

$$\xi^{m+1-mult}_{(p;q)}(^{m+1}\ell_1 \times \ldots \times \ell_1 \times Z; \mathbb{K}) \leq \left(\max\left\{\frac{1}{p} - 1, 0\right\} + \max\left\{1 - \frac{1}{q}, 0\right\}\right)_{k=1}^{m+1}.$$

Lema 3.3.34. [15, Proposição 3.3] *Seja $m \geq 1$. Então para cada forma $(m+1)$-linear em $\ell_1 \times \ell_2 \times \cdots \times \ell_2$ é $\left(\frac{2m}{m+1}, 1\right)$-múltiplo somante, e esse valor é ótimo.*

Corolário 3.3.35. *Se $m \geq 1$ então, para todos $0 < p, q < \infty$,*

$$\xi^{m+1-mult}_{(p;q)}(^{m+1}\ell_1 \times \ell_2 \ldots \times \ell_2; \mathbb{K}) \leq \left(\max\left\{\frac{1}{p} - \frac{m+1}{2m}, 0\right\} + \max\left\{1 - \frac{1}{q}, 0\right\}\right)_{k=1}^{m+1}.$$

O resultado a seguir é devido a Botelho [19].

Lema 3.3.36. [15, Lema 4.6] *Sejam $Z_1, \ldots, Z_m, W$ espaços de Banach.*

(1) Assuma que cada Z_i tem cotipo q_i. Então $\mathcal{L}(Z_1, \ldots, Z_m; W) = \Pi^{abs}_{(r;1)}(Z_1, \ldots, Z_m; W)$ desde que seja $\frac{1}{r} \leq \sum_{j+1}^{m} \frac{1}{q_j}$.

(2) Assuma que W tem cotipo q. Então $\mathcal{L}(Z_1, \ldots, Z_m; W) = \Pi^{abs}_{(q;1)}(Z_1, \ldots, Z_m; W)$.

Corolário 3.3.37. *Sejam $Z_1, \ldots, Z_m, W$ espaços de Banach.*

(1) Assuma que cada Z_i tem cotipo q_i. Então para todos $0 < p_1, q_1 < \infty$,

$$\xi^{m-mult}_{(p_1;q_1)}(Z_1 \times \ldots \times Z_m; W) \leq \left(\max\left\{\frac{1}{p_1} - \frac{1}{r}, 0\right\} + \max\left\{1 - \frac{1}{q_1}, 0\right\}\right)_{k=1}^{m}.$$

desde que seja $\frac{1}{r} \leq \sum_{j+1}^{m} \frac{1}{q_j}$.

(2) Assuma que W tem cotipo q. Então para todos $0 < p_1, q_1 < \infty$,

$$\xi^{m-mult}_{(p_1;q_1)}(Z_1 \times \ldots \times Z_m; W) \leq \left(\max\left\{\frac{1}{p_1} - \frac{1}{q}, 0\right\} + \max\left\{1 - \frac{1}{q_1}, 0\right\}\right)_{k=1}^{m}.$$

Lema 3.3.38. [15, Corolário 4.8] *Sejam $m \geq 1$ e W um espaço de Banach com dimensão infinita. Então para quaisquer espaços de Banach de dimensão infinita Z_j com cotipo q_{Z_j}, para todos $j = 2, \ldots, m$, temos*

$$\mathcal{L}(\ell_2, Z_2, \ldots, Z_m; W) = \Pi^m_{(r;1)}(\ell_2, Z_2, \ldots, Z_m; W) \Leftrightarrow \frac{1}{r} \leq \frac{1}{2} + \sum_{j=2}^{m} \frac{1}{q_{Z_j}}.$$

Corolário 3.3.39. *Sejam $m \geq 1$ e W um espaço de Banach com dimensão infinita. Então para quaisquer espaços de Banach de dimensão infinita Z_j com cotipo q_{Z_j}, para todos $j = 2, \ldots, m$, e para todos $0 < p, q < \infty$, temos*

$$\xi_{(p;q)}^{m-mult}(\ell_2 \times Z_2 \times \cdots \times Z_m; W) \leq \left(\max\left\{\frac{1}{p} - \frac{1}{r}, 0\right\} + \max\left\{1 - \frac{1}{q}, 0\right\}\right)_{k=1}^{m},$$

sempre que $\frac{1}{r} \leq \frac{1}{2} + \sum_{j=2}^{m} \frac{1}{q_{Z_j}}$.

Lema 3.3.40. [15, Corolário 4.9] *Sejam $m \geq p \geq 2$. Então $\mathcal{L}(^m\ell_p; \mathbb{K}) = \Pi_{(r;1)}^{m}(^m\ell_p; \mathbb{K})$ se, e somente se, $r \geq \frac{p}{m}$.*

Corolário 3.3.41. *Sejam $m \geq p \geq 2$. Se $r \geq \frac{p}{m}$, então para todos $0 < p_1, q_1 < \infty$, temos*

$$\xi_{(p;q)}^{m-mult}(\ell_p \times \cdots \times \ell_p; \mathbb{K}) \leq \left(\max\left\{\frac{1}{p} - \frac{1}{r}, 0\right\} + \max\left\{1 - \frac{1}{q}, 0\right\}\right)_{k=1}^{m}.$$

Lema 3.3.42. [15, Corolário 4.10] *Sejam $m \geq 1$ e Z um espaço de Banach sem cotipo finito. Então*

$$\mathcal{L}(Z, \ldots, Z; \mathbb{K}) = \Pi_{(r;1)}^{m}(Z, \ldots, Z; \mathbb{K})$$

se,e somente se, $r \geq 1$. Além disso, o resultado é ótimo no seguinte sentido: se Z é qualquer espaço de Banach com cotipo finito q, então para qualquer $0 < r < 1$

$$\mathcal{L}(Z, \ldots, Z; \mathbb{K}) = \Pi_{(r;1)}^{m}(Z, \ldots, Z; \mathbb{K}).$$

Corolário 3.3.43. *Sejam $m \geq 1$ e Z um espaço de Banach sem cotipo finito. Então para todos $0 < p, q < \infty$,*

$$\xi_{(p;q)}^{m-mult}(Z \times \cdots \times Z; \mathbb{K}) \leq \left(\max\left\{\frac{1}{p} - \frac{1}{r}, 0\right\} + \max\left\{1 - \frac{1}{q}, 0\right\}\right)_{k=1}^{m}$$

se

(a) Z não tem cotipo finito e $r \geq 1$, ou

(b) Z tem cotipo finito q e $0 < r < 1$.

3.4 Situações de coincidência em espaços de Banach com cotipo finito

Se necessário, vide o capítulo preliminar para recordar a noção de cotipo.

Para obter algumas estimativas dos índices de somabilidade, precisamos do teorema de coincidência seguinte, que foi inspirado em [2, 9] e, sob certas hipóteses, estende o Teorema 1.2.8. Com essa finalidade, usaremos a notação

$$\mathbf{p}^* = (p_1^*, \ldots, p_m^*), \text{ onde } p_i^* = \frac{p_i}{p_i - 1}, i = 1, \ldots, m \text{ é o conjugado de } p_i.$$

Teorema 3.4.1. *Dado $\boldsymbol{p} \in [2,+\infty]^m$ sejam $E_1,...,E_m,F$ espaços de Banach de dimensão infinita e suponhamos que F tem cotipo finito $\cot(F)$ tal que $\left|\frac{1}{\boldsymbol{p}}\right| < \frac{1}{\cot(F)}$. Então*

(i) para $r>0$, tem-se

$$\frac{1}{r} \leq \frac{1}{\cot(F)} - \left|\frac{1}{\boldsymbol{p}}\right| \Leftrightarrow \mathcal{L}\left(E_1,...,E_m;F\right) = \Pi^m_{(r,\boldsymbol{p}^*)}\left(E_1,...,E_m;F\right).$$

(ii) para $r \geq 1$, tem-se

$$\frac{1}{r} \leq \frac{1}{\cot(F)} - \left|\frac{1}{\boldsymbol{p}}\right| \Rightarrow \mathcal{L}\left(E_1,...,E_m;F\right) = \Pi^m_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{q})}\left(E_1,...,E_m;F\right)$$

para todos $\boldsymbol{s},\boldsymbol{q} \in [2,+\infty]^m$ tais que $q_k \geq p_k^*$, $\frac{1}{s_k} - \left|\frac{1}{\boldsymbol{q}}\right|_{\geq k} = \frac{1}{r} - \left|\frac{1}{\boldsymbol{p}^*}\right|, k=1,\dots,m$, e $\frac{1}{r} - \left|\frac{1}{\boldsymbol{p}^*}\right| + \left|\frac{1}{\boldsymbol{q}}\right| > 0$.

Demonstração.
(i) O Teorema 1.5 de [2] afirma que, se $p \in [2,\infty]$ e F tem dimensão infinita e cotipo finito $\cot(F)$ satisfazendo a desigualdade $\left|\frac{1}{\mathbf{p}}\right| < \frac{1}{\cot(F)}$, então existe uma constante $C_{\mathbf{p}} \geq 1$ tal que

$$\frac{1}{r} \leq \frac{1}{\cot(F)} - \left|\frac{1}{\mathbf{p}}\right| \Leftrightarrow \left(\sum_{k_1,\dots,k_m=1}^{\infty} \|A(e_{k_1},...,e_{k_m})\|^t\right)^{\frac{1}{t}} \leq C_{\mathbf{p}}\|A\|$$

para todo operador m-linear contínuo $A: \ \ell_{p_1} \times \cdots \times \ell_{p_m} \to F$, e sabemos que essa última desigualdade é equivalente a afirmar que (veja [25, p. 308] ou o Teorema 3.7.3)

$$\mathcal{L}\left(E_1,...,E_m;F\right) = \Pi^{mult}_{(r,\mathbf{p}^*)}\left(E_1,...,E_m;F\right),$$

concluindo assim a prova do item (i).
(ii) Segue do item (i) que $\frac{1}{r} \leq \frac{1}{\cot(F)} - \left|\frac{1}{\mathbf{p}}\right| \Rightarrow \mathcal{L}\left(E_1,...,E_m;F\right) = \Pi^{mult}_{(r,\mathbf{p}^*)}\left(E_1,...,E_m;F\right)$ e, uma vez que $r \geq 1$, aplicamos o Teorema 3 de [5] para obter

$$\Pi^{mult}_{(r,\mathbf{p}^*)}\left(E_1,...,E_m;F\right) \subset \Pi^{mult}_{(\mathbf{s},\mathbf{q})}\left(E_1,...,E_m;F\right),$$

para todos $\mathbf{s},\mathbf{q} \in [2,+\infty]^m$ tais que

$$q_k \geq p_k^*, \frac{1}{s_k} - \left|\frac{1}{\mathbf{q}}\right|_{\geq k} = \frac{1}{r} - \left|\frac{1}{\mathbf{p}^*}\right|, k=1,\dots,m, \text{ e } \frac{1}{r} - \left|\frac{1}{\mathbf{p}^*}\right| + \left|\frac{1}{\mathbf{q}}\right| > 0.$$

Daí,

$$\Pi^{mult}_{(\mathbf{s},\mathbf{q})}\left(E_1,...,E_m;F\right) = \mathcal{L}\left(E_1,...,E_m;F\right)$$

e, portanto,

$$\frac{1}{r} \leq \frac{1}{\cot(F)} - \left|\frac{1}{\mathbf{p}}\right| \Rightarrow \mathcal{L}\left(E_1,...,E_m;F\right) = \Pi^{mult}_{(\mathbf{s},\mathbf{q})}\left(E_1,...,E_m;F\right).$$

□

Sob as mesmas condições do Teorema 3.4.1, o corolário abaixo, por sua vez, estende o Corolário 1.2.9 ao âmbito dos operadores multilineares múltiplo $(\mathbf{p};\mathbf{q})-$somantes.

Corolário 3.4.2. *Sejam* $\boldsymbol{s} \in [2,+\infty]^m$ *e* $E_1, ..., E_m, F$ *espaços de Banach com dimensão infinita, e suponha que* F *tem cotipo finito* $\cot(F)$ *tal que* $\left|\frac{1}{\boldsymbol{s}}\right| < \frac{1}{\cot(F)}$.

(i) Se $t > 0$ *e* $\frac{1}{t} \leq \frac{1}{\cot(F)} - \left|\frac{1}{\boldsymbol{s}}\right|$ *então*

$$\xi_{(p;\boldsymbol{q})}^{m-mult}(E_1 \times \cdots \times E_m; F) \leq \left(\max\left\{\frac{1}{p} - \frac{1}{t}, 0\right\} + \max\left\{\frac{1}{s_k^*} - \frac{1}{q_k}, 0\right\}\right)_{k=1}^m$$

para todos $p, q_k \in (0,\infty), k = 1, \ldots, m$.

(ii) Se $t \geq 1$ *e* $\frac{1}{t} \leq \frac{1}{\cot(F)} - \left|\frac{1}{\boldsymbol{s}}\right|$ *então*

$$\xi_{(\boldsymbol{p};\boldsymbol{q})}^{m-mult}(E_1 \times \cdots \times E_m; F) \leq \left(\max\left\{\frac{1}{p_k} - \frac{1}{\hat{t}_k}, 0\right\} + \max\left\{\frac{1}{s_k^*} - \frac{1}{q_k}, 0\right\}\right)_{k=1}^m$$

para todos $p_k, q_k \in (0,\infty), k = 1, \ldots, m,$ *e todos os* $\hat{\boldsymbol{t}}, \hat{\boldsymbol{s}} \in [2,+\infty]^m$ *tais que* $\hat{s}_k \geq s_k^*, \frac{1}{\hat{t}_k} - \left|\frac{1}{\hat{\boldsymbol{s}}}\right|_{\geq k} = \frac{1}{t} - \left|\frac{1}{\boldsymbol{s}^*}\right|, k = 1, \ldots, m$ *e* $\frac{1}{t} - \left|\frac{1}{\boldsymbol{s}^*}\right| + \left|\frac{1}{\hat{\boldsymbol{s}}}\right| > 0$.

Demonstração. Segue imediatamente dos Teoremas 3.4.1 e 3.3.3. □

3.5 Situações de coincidência mediante desigualdades de Hardy–Littlewood

Nesta seção, apresentamos uma abordagem anisotrópica das desigualdades de Hardy–Littlewood, por meio das quais é possível estabelecer situações de coincidência e, assim, obter novas estimativas superiores para o índice.

O teorema abaixo descreve as desigualdades clássicas de Hardy–Littlewood que, para sermos mais precisos, podemos chamá-las de desigualdades clássicas de Bohnenblust, Dimant, Hardy, Hille, Littlewood, Praciano-Pereira e Sevilla-Peris:

Teorema 3.5.1. *Seja* $m \geq 2$ *um inteiro positivo e* $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_m) \in (1,\infty]^m$ *com* $0 \leq \left|\frac{1}{\mathbf{p}}\right| < 1$. *Então existem constantes* $C_{m,\mathbf{p}}^{\mathbb{K}} \geq 1$ *tais que*

$$\left(\sum_{j_1,\ldots,j_m=1}^{n} |T(e_{j_1},\ldots,e_{j_m})|^{\frac{2m}{m+1-2\left|\frac{1}{\mathbf{p}}\right|}}\right)^{\frac{m+1-2\left|\frac{1}{\mathbf{p}}\right|}{2m}} \leq C_{m,\mathbf{p}}^{\mathbb{K}} \|T\| \text{ se } 0 \leq \left|\frac{1}{\mathbf{p}}\right| \leq \frac{1}{2}, \tag{3.12}$$

$$\left(\sum_{j_1,\ldots,j_m=1}^{n} |T(e_{j_1},\ldots,e_{j_m})|^{\frac{1}{1-\left|\frac{1}{\mathbf{p}}\right|}}\right)^{1-\left|\frac{1}{\mathbf{p}}\right|} \leq C_{m,\mathbf{p}}^{\mathbb{K}} \|T\| \text{ se } \frac{1}{2} \leq \left|\frac{1}{\mathbf{p}}\right| < 1, \tag{3.13}$$

para toda forma m-linear $T : \ell_{p_1}^n \times \cdots \times \ell_{p_m}^n \to \mathbb{K}$ *e todo inteiro positivo* n.

O resultado abaixo fornece uma versão anisotrópica para as desigualdades clássicas de Hardy–Littlewood que nos permite obter situações de coincidência para o conjunto dos operadores multilineares e múltiplo somantes.

Corolário 3.5.2. *Seja $m \geq 2$ um inteiro positivo e $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_m) \in (1, \infty]^m$ com $0 \leq \left|\frac{1}{\mathbf{p}}\right| < 1$. Então existem constantes $C^{\mathbb{K}}_{m,\mathbf{p}} \geq 1$ tais que*

$$\left(\sum_{j_1=1}^{n}\left(\cdots\left(\sum_{j_m=1}^{n}|T(e_{j_1},\ldots,e_{j_m})|^{t_m}\right)^{\frac{t_{m-1}}{t_m}}\cdots\right)^{\frac{t_1}{t_2}}\right)^{\frac{1}{t_2}} \leq C^{\mathbb{K}}_{m,\mathbf{p}}\,\|T\| \ \text{ se } 0 \leq \left|\frac{1}{\mathbf{p}}\right| \leq \frac{1}{2}, \tag{3.14}$$

$$\forall t_i \geq \frac{2m}{m+1-2\left|\frac{1}{\mathbf{p}}\right|},$$

$$\left(\sum_{j_1=1}^{n}\left(\cdots\left(\sum_{j_m=1}^{n}|T(e_{j_1},\ldots,e_{j_m})|^{t_m}\right)^{\frac{t_{m-1}}{t_m}}\cdots\right)^{\frac{t_1}{t_2}}\right)^{\frac{1}{t_2}} \leq C^{\mathbb{K}}_{m,\mathbf{p}}\,\|T\| \ \text{ se } \frac{1}{2} \leq \left|\frac{1}{\mathbf{p}}\right| < 1, \tag{3.15}$$

$$\forall t_i \geq \frac{1}{1-\left|\frac{1}{\mathbf{p}}\right|},$$

para toda foma m-linear $T : \ell^n_{p_1} \times \cdots \times \ell^n_{p_m} \to \mathbb{K}$ e todo inteiro positivo n.

Demonstração. As demonstrações de ambas as desigualdades são idênticas, pelo que provaremos apenas a primeira delas. Para simplificar, escrevamos $\rho = \frac{2m}{m+1-2\left|\frac{1}{\mathbf{p}}\right|}$. Assim temos $t_i \geq \rho$ e $\|\cdot\|_{t_i} \leq \|\cdot\|_\rho, i = 1, \ldots, m$, e, desse modo, valem as desigualdades

$$
\begin{aligned}
&\left(\sum_{j_1=1}^n \left(\cdots \left(\sum_{j_m=1}^n |T(e_{j_1}, \ldots, e_{j_m})|^{t_m}\right)^{\frac{t_{m-1}}{t_m}} \cdots\right)^{\frac{t_1}{t_2}}\right)^{\frac{1}{t_2}} \\
\overset{\|\cdot\|_{t_m} \leq \|\cdot\|_\rho}{\leq} &\left(\sum_{j_1=1}^n \left(\cdots \left(\sum_{j_m=1}^n |T(e_{j_1}, \ldots, e_{j_m})|^{\rho}\right)^{\frac{t_{m-1}}{\rho}} \cdots\right)^{\frac{t_1}{t_2}}\right)^{\frac{1}{t_2}} \\
\overset{\|\cdot\|_{t_{m-1}} \leq \|\cdot\|_\rho}{\leq} &\left(\sum_{j_1=1}^n \left(\cdots \left(\sum_{j_{m-1}=1}^n \left(\sum_{j_m=1}^n |T(e_{j_1}, \ldots, e_{j_m})|^{\rho}\right)^{\frac{\rho}{\rho}}\right)^{\frac{t_{m-2}}{\rho}} \cdots\right)^{\frac{t_1}{t_2}}\right)^{\frac{1}{t_2}} \\
&\vdots \\
\overset{\|\cdot\|_{t_2} \leq \|\cdot\|_\rho}{\leq} &\left(\sum_{j_1=1}^n \left(\cdots \left(\sum_{j_{m-1}=1}^n \left(\sum_{j_m=1}^n |T(e_{j_1}, \ldots, e_{j_m})|^{\rho}\right)^{\frac{\rho}{\rho}}\right)^{\frac{\rho}{\rho}} \cdots\right)^{\frac{t_1}{\rho}}\right)^{\frac{1}{t_2}} \\
\overset{\|\cdot\|_{t_2} \leq \|\cdot\|_\rho}{\leq} &\left(\sum_{j_1=1}^n \left(\cdots \left(\sum_{j_{m-1}=1}^n \left(\sum_{j_m=1}^n |T(e_{j_1}, \ldots, e_{j_m})|^{\rho}\right)^{\frac{\rho}{\rho}}\right)^{\frac{\rho}{\rho}} \cdots\right)^{\frac{\rho}{\rho}}\right)^{\frac{1}{\rho}} \\
= &\left(\sum_{j_1, \ldots, j_m=1}^n |T(e_{j_1}, \ldots, e_{j_m})|^{\rho}\right)^{\frac{1}{\rho}} \\
\overset{(3.12)}{\leq} &\, C_{m,\mathbf{p}}^{\mathbb{K}} \|T\|
\end{aligned}
$$

como queríamos demonstrar. □

Utilizando um raciocínio análogo ao da demonstração anterior, e de posse do teorema de inclusão (ver [5, Teorema 3]) apresentado por Albuquerque e Rezende, é possível obter o seguinte exemplo de inclusão:

Exemplo 3.5.3 (Inclusão)**.** *Sejam m um inteiro positivo, $r \geq 1, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{q} \in [1, \infty)^m$ e $\boldsymbol{r} \in (0, \infty)^m$ tais que $q_k \geq p_k, r \geq r_k$ para $k = 1, \ldots, m$ e*

$$\frac{1}{r} - \left|\frac{1}{\boldsymbol{p}}\right| + \left|\frac{1}{\boldsymbol{q}}\right| > 0.$$

Então

$$\Pi^m_{(\boldsymbol{r};\boldsymbol{p})}(X_1, \ldots, X_m; Y) \subset \Pi^m_{(\boldsymbol{s};\boldsymbol{q})}(X_1, \ldots, X_m; Y),$$

para quaisquer espaços de Banach $X_1, \ldots, X_m$ e Y, com

$$\frac{1}{s_k} - \left|\frac{1}{\boldsymbol{q}}\right|_{\geq k} = \frac{1}{r} - \left|\frac{1}{\boldsymbol{p}}\right|_{\geq k},$$

para cada $k \in \{1, \ldots, m\}$, e o operador inclusão tem norma 1.

Demonstração. Seja $T \in \Pi^m_{(\mathbf{r};\mathbf{p})}(X_1,\ldots,X_m;Y)$, isto é, T tal que

$$\left(\sum_{j_1=1}^{\infty}\left(\cdots\left(\sum_{j_{m-1}=1}^{\infty}\left(\sum_{j_m=1}^{\infty}\left\|T(x^{(1)}_{j_1},\ldots,x^{(m)}_{j_m})\right\|^{r_m}\right)^{\frac{r_{m-1}}{r_m}}\right)^{\frac{r_{m-3}}{r_{m-2}}}\cdots\right)^{\frac{r_1}{r_2}}\right)^{\frac{1}{r_1}} \leq C\prod_{k=1}^{m}\left\|\left(x^{(k)}_{j_k}\right)_{j_k=1}^{\infty}\right\|_{\omega,p_k}$$

para todos $\left(x^{(k)}_{j_k}\right)_{j_k=1}^{\infty} \in \ell^{\omega}_{p_k}(X_k)$. Como $r \geq r_k$ implica $\|\cdot\|_r \leq \|\cdot\|_{r_k}, k = 1,\ldots,m$, temos

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{j_1,\ldots,j_m=1}^{\infty}\left\|T(x^{(1)}_{j_1},\ldots,x^{(m)}_{j_m})\right\|^{r}\right)^{\frac{1}{r}}\\
&=\left(\sum_{j_1=1}^{\infty}\left(\cdots\left(\sum_{j_{m-1}=1}^{\infty}\left(\sum_{j_m=1}^{\infty}\left\|T(x^{(1)}_{j_1},\ldots,x^{(m)}_{j_m})\right\|^{r}\right)^{\frac{r}{r}}\right)^{\frac{r}{r}}\cdots\right)^{\frac{r}{r}}\right)^{\frac{1}{r}}\\
&\leq\left(\sum_{j_1=1}^{\infty}\left(\cdots\left(\sum_{j_{m-1}=1}^{\infty}\left(\sum_{j_m=1}^{\infty}\left\|T(x^{(1)}_{j_1},\ldots,x^{(m)}_{j_m})\right\|^{r_m}\right)^{\frac{r}{r_m}}\right)^{\frac{r}{r}}\cdots\right)^{\frac{r}{r}}\right)^{\frac{1}{r}}\\
&\leq\left(\sum_{j_1=1}^{\infty}\left(\cdots\left(\sum_{j_{m-1}=1}^{\infty}\left(\sum_{j_m=1}^{\infty}\left\|T(x^{(1)}_{j_1},\ldots,x^{(m)}_{j_m})\right\|^{r_m}\right)^{\frac{r_{m-1}}{r_m}}\right)^{\frac{r}{r_{m-2}}}\cdots\right)^{\frac{r}{r}}\right)^{\frac{1}{r}}\\
&\vdots\\
&\leq\left(\sum_{j_1=1}^{\infty}\left(\cdots\left(\sum_{j_{m-1}=1}^{\infty}\left(\sum_{j_m=1}^{\infty}\left\|T(x^{(1)}_{j_1},\ldots,x^{(m)}_{j_m})\right\|^{r_m}\right)^{\frac{r_{m-1}}{r_m}}\right)^{\frac{r_{m-3}}{r_{m-2}}}\cdots\right)^{\frac{r_1}{r_2}}\right)^{\frac{1}{r_1}}\\
&\leq C\prod_{k=1}^{m}\left\|\left(x^{(k)}_{j_k}\right)_{j_k=1}^{\infty}\right\|_{\omega,p_k}
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\left(\sum_{j_1,\ldots,j_m=1}^{\infty}\left\|T(x^{(1)}_{j_1},\ldots,x^{(m)}_{j_m})\right\|^{r}\right)^{\frac{1}{r}} \leq C\prod_{k=1}^{m}\left\|\left(x^{(k)}_{j_k}\right)_{j_k=1}^{\infty}\right\|_{\omega,p_k}$$

par todos $\left(x^{(k)}_{j_k}\right)_{j_k=1}^{\infty} \in \ell^{\omega}_{p_k}(X_k)$. Em outras palavras, $T \in \Pi^m_{(\mathbf{r};\mathbf{p})}(X_1,\ldots,X_m;Y)$ implica $T \in \Pi^m_{(r;\mathbf{p})}(X_1,\ldots,X_m;Y)$, ou ainda,

$$\Pi^m_{(\mathbf{r};\mathbf{p})}(X_1,\ldots,X_m;Y) \subset \Pi^m_{(r;\mathbf{p})}(X_1,\ldots,X_m;Y).$$

Uma vez que, por [5, Teorema 3], vale a inclusão

$$\Pi^m_{(r;\mathbf{p})}(X_1,\ldots,X_m;Y)\subset\Pi^{mult}_{(\mathbf{s},\mathbf{q})}\left(E_1,...,E_m;F\right),$$

para quaisquer espaços de Banach $X_1,\ldots,X_m$ e Y, com

$$\frac{1}{s_k}-\left|\frac{1}{\mathbf{q}}\right|_{\geq k}=\frac{1}{r}-\left|\frac{1}{\mathbf{p}}\right|_{\geq k},$$

para cada $k\in\{1,\ldots,m\}$ e, neste caso, a constante C é preservada (veja a demonstração de [5, Teorema 3]), isto é, vale a desigualdade

$$\left(\sum_{j_1=1}^{\infty}\left(\cdots\left(\sum_{j_{m-1}=1}^{\infty}\left(\sum_{j_m=1}^{\infty}\left\|T(x^{(1)}_{j_1},\ldots,x^{(m)}_{j_m})\right\|^{s_m}\right)^{\frac{s_{m-1}}{s_m}}\right)^{\frac{s_{m-3}}{s_{m-2}}}\cdots\right)^{\frac{r_1}{s_2}}\right)^{\frac{1}{s_1}}$$
$$\leq C\prod_{k=1}^{m}\left\|\left(x^{(k)}_{j_k}\right)_{j_k=1}^{\infty}\right\|_{\omega,q_k}.$$

Portanto, obtemos

$$\Pi^m_{(\mathbf{r};\mathbf{p})}(X_1,\ldots,X_m;Y)\subset\Pi^m_{(\mathbf{s};\mathbf{q})}(X_1,\ldots,X_m;Y)$$

e, desde que a constante C acima é preservada, o operador inclusão de $\Pi^m_{(\mathbf{r};\mathbf{p})}(X_1,\ldots,X_m;Y)$ em $\Pi^m_{(\mathbf{s};\mathbf{q})}(X_1,\ldots,X_m;Y)$ tem norma 1, e isso finaliza a demonstração. □

O próximo resultado é uma situação de coincidência que estende a implicação direta do Teorema 3.2 de Araújo e Pellegrino – ver [9], aos operadores multilineares múltiplo somantes.

Teorema 3.5.4. *Sejam $m\geq 2$ e $\hat{t}_i\in\left[\frac{2m}{m+1},\infty\right),i=1,\ldots,m$. Então*

$$\mathcal{L}(E_1,\ldots,E_m;\mathbb{K})=\Pi^m_{(\boldsymbol{t},\boldsymbol{s})}\left(E_1,...,E_m;\mathbb{K}\right)$$

sempre que

(i) $s_i\leq\hat{s}_i:=\frac{2m\hat{t}_i}{m\hat{t}_i+2m-\hat{t}_i}$ *e* $t_i\geq\frac{2m}{m+1-2\left|\frac{1}{\boldsymbol{s}^*}\right|}=\frac{m}{\left|\frac{1}{\boldsymbol{t}}\right|}$, *se* $\hat{t}_i\in\left[\frac{2m}{m+1},2\right]$;

(ii) $s_i\leq\hat{s}_i:=\frac{m\hat{t}_i}{m\hat{t}_i+1-\hat{t}_i}$ *e* $t_i\geq\frac{1}{1-\left|\frac{1}{\boldsymbol{s}^*}\right|}=\frac{m}{\left|\frac{1}{\boldsymbol{t}}\right|}$, *se* $\hat{t}_i\in(2,\infty)$.

Demonstração. Prova do item (i).

Para cada $p\geq 1$, escrevamos $X_p=\ell_p$ e $X_\infty=c_0$. Consideremos o conjugado de cada $\hat{s}_i=\frac{2m\hat{t}_i}{m\hat{t}_i+2m-\hat{t}_i}$, a saber,

$$\hat{s}^*_i=\frac{2m\hat{t}_i}{\hat{t}_i+m\hat{t}_i-2m},i=1\ldots,m.$$

Como $\hat{t}_i \in \left[\frac{2m}{m+1}, 2\right]$, segue-se que $\hat{s}_i^* \in [2m, \infty]$, e consequentemente

$$0 \leq \left|\frac{1}{\hat{\mathbf{s}}^*}\right| \leq \frac{1}{2}.$$

Assim, para todos os $t_i, i = 1, \ldots, m$, tais que

$$t_i \geq \frac{2m}{m+1-2m\left|\frac{1}{\hat{\mathbf{s}}^*}\right|},$$

a desigualdade (3.14) do Corolário 3.5.2 garante a existência de uma constante $C \geq 1$ tal que

$$\left(\sum_{j_1=1}^{\infty}\left(\cdots\left(\sum_{j_m=1}^{\infty}|A(e_{j_1},\ldots,e_{j_m})|^{t_m}\right)^{\frac{t_{m-1}}{t_m}}\cdots\right)^{\frac{t_1}{t_2}}\right)^{\frac{1}{t_2}} \leq C\,\|A\| \tag{3.16}$$

para toda forma $m-$linear contínua $A : X_{\hat{s}_1^*} \times \cdots \times X_{\hat{s}_m^*} \to \mathbb{K}$. Agora, dados $T \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_m; \mathbb{K})$ e $(x_j^{(k)})_{j=1}^{\infty} \in \ell_{s_k}^{\omega}(E_k)$, vamos usar um argumento clássico (vide [2]) para generalizar o resultado, isto é, para trocar os $X_{\hat{s}_k^*}$ por espaços de Banach arbitrários. Com efeito, a Proposição 2.2 de [24] nos fornece operadores lineares contínuos $u_k : X_{\hat{s}_k^*} \to E_k$ tais que $u_k(e_{j_k}) = x_{j_k}^{(k)}$ e

$$\|u_k\| = \left\|(x_j^{(k)})_{j=1}^{\infty}\right\|_{\omega,\hat{s}_k}$$

com $k = 1, \ldots, m$. Desse modo, o operador $S : X_{\hat{s}_1^*} \times \cdots \times X_{\hat{s}_1^*} \to \mathbb{K}$ definido por

$$S(y_1, \ldots, y_m) = T(u_1(y_1), \ldots, u_m(y_m))$$

é $m-$linear, contínuo e satisfaz

$$\|S\| \leq \|T\| \prod_{k=1}^{m} \|u_k\| = \|T\| \prod_{k=1}^{m} \left\|(x_j^{(k)})_{j=1}^{\infty}\right\|_{\omega,\hat{s}_k}.$$

Como $S(e_{j_1}, \ldots, e_{j_m}) = T(x_{j_1}^{(1)}, \ldots, x_{j_m}^{(m)})$, temos

$$\left(\sum_{j_1=1}^{\infty}\left(\cdots\left(\sum_{j_m=1}^{\infty}\left|T(x_{j_1}^{(1)},\ldots,x_{j_m}^{(m)})\right|^{t_m}\right)^{\frac{t_{m-1}}{t_m}}\cdots\right)^{\frac{t_1}{t_2}}\right)^{\frac{1}{t_2}} =$$

$$\left(\sum_{j_1=1}^{\infty}\left(\cdots\left(\sum_{j_m=1}^{\infty}|S(e_{j_1},\ldots,e_{j_m})|^{t_m}\right)^{\frac{t_{m-1}}{t_m}}\cdots\right)^{\frac{t_1}{t_2}}\right)^{\frac{1}{t_2}} \overset{(3.16)}{\leq}$$

$$C\|S\| \leq C\|T\| \prod_{k=1}^{m} \left\|(x_j^{(k)})_{j=1}^{\infty}\right\|_{\omega,\hat{s}_k}.$$

Essa última desigualdade prova que, para todos $m \geq 2, \hat{t}_i \in \left[\frac{2m}{m+1}, 2\right]$ e $t_i \geq \frac{2m}{m+1-2m\left|\frac{1}{\hat{\mathbf{s}}^*}\right|}$ tem-se

$$\mathcal{L}(E_1, \ldots, E_m; \mathbb{K}) = \Pi^{mult}_{(\mathbf{t},\hat{\mathbf{s}})}\left(E_1, ..., E_m; \mathbb{K}\right)$$

Desde que

$$\Pi^{mult}_{(\mathbf{t},\hat{\mathbf{s}})}\left(E_1, ..., E_m; \mathbb{K}\right) \subset \Pi^{mult}_{(\mathbf{t},\mathbf{s})}\left(E_1, ..., E_m; \mathbb{K}\right)$$

sempre que $s_k \leq \hat{s}_k = \frac{2mt_k}{mt_k+2m-t_k}, k = 1, \ldots, m$, o item (i) está demonstrado.

Prova do item (ii).

Analogamente à prova do item (i), para $\hat{t}_i \in (2, \infty)$, obtemos

$$\hat{s}_i^* := \left(\frac{m\hat{t}_k}{m\hat{t}_k + 1 - \hat{t}_k}\right)^* = \frac{m\hat{t}_k}{\hat{t}_k - 1} \in (m, 2m),$$

consequentemente

$$\frac{1}{2} < \left|\frac{1}{\hat{\mathbf{s}}^*}\right| < 1.$$

Assim, basta aplicar a desigualdade (3.15) do Corolário 3.5.2 para todos os

$$t_i \geq \frac{1}{1 - \left|\frac{1}{\hat{\mathbf{s}}^*}\right|}, i = 1, \ldots, m.$$

O restante da prova é idêntico à prova do item (i). □

Finalmente, reunimos no corolário abaixo as hipóteses necessárias à obtenção de estimativas superiores do índice.

Corolário 3.5.5. *Sejam $1 \leq p_k, q_k < \infty, k = 1, \ldots, m, m \geq 2$ e $E_1, \ldots, E_m$ espaços de Banach. Então*

$$\xi^{m-mult}_{(\boldsymbol{p};\boldsymbol{q})}\left(E_1 \times \cdots \times E_m; F\right) \leq \left(\max\left\{\frac{1}{p_k} - \frac{1}{t_k}, 0\right\} + \max\left\{\frac{1}{s_k} - \frac{1}{q_k}, 0\right\}\right)_{k=1}^m$$

para todos os

(i) $s_k \leq \frac{2m\hat{t}_k}{m\hat{t}_k+2m-\hat{t}_k}$ *e* $t_k \geq \frac{m}{\left|\frac{1}{\hat{\boldsymbol{t}}}\right|}$, *se* $\hat{t}_k \in \left[\frac{2m}{m+1}, 2\right]$;

(ii) $s_k \leq \frac{m\hat{t}_k}{m\hat{t}_k+1-\hat{t}_k}$ *e* $t_k \geq \frac{m}{\left|\frac{1}{\hat{\boldsymbol{t}}}\right|}$, *se* $\hat{t}_k \in (2, \infty)$.

Demonstração. Segue imediatamente dos Teoremas 3.5.4 e 3.3.3. □

3.6 Estimativas inferiores para o índice de somabilidade

Iniciamos esta seção observando que a função α definida no Lema 1.2.10 pode ser escrita como

$$\alpha(p) = \max\left\{\frac{1}{2} - \frac{1}{p}, 0\right\}$$

para todo $p \in [1, \infty]$. A partir do referido lema ser-nos-á possível obter majorações inferiores conforme exibido nos próximo resultados.

Proposição 3.6.1. *Sejam* $0 < q_k, p_k < \infty$. *Então*

$$\left|\frac{1}{\boldsymbol{p}}\right| - \frac{1}{2} - \sum_{k=1}^{m} \max\left\{\frac{1}{2} - \frac{1}{r_k}, 0\right\} \leq \eta_{(\boldsymbol{p};\boldsymbol{q})}^{m-mult}\left(\ell_{r_1} \times \cdots \times \ell_{r_m}; \mathbb{K}\right)$$

para todo $r_k \geq 1, k = 1, \ldots, m$.

Demonstração. Pelo Lema 1.2.10 existe um operador $A : \ell_{r_1}^n \times \cdots \times \ell_{r_m}^n \to \mathbb{C}$ de forma que

$$A(z^{(1)}, \ldots, z^{(m)}) = \sum_{i_1, \ldots, i_m = 1}^{n} \pm z_{i_1}^{(1)} \cdots z_{i_m}^{(m)}$$

com

$$\|A\| \leq C_m n^{\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{m} \alpha(r_k)}.$$

Observe que, sendo $e^{(j)}$ o vetor canônico com $j-$ésima coordenada igual a 1 e $e_{i_j}^{(j)}$ a i_j-ésima coordenada de $e^{(j)}$, temos $e_{i_j}^{(j)} = 1$, se $j = i_j$, e $e_{i_j}^{(j)} = 0$, caso contrário. Desse modo, tomando $n \geq m$,

$$\left|A(e^{(1)}, \ldots, e^{(m)})\right| = \left|\sum_{i_1, \ldots, i_m = 1}^{n} \pm e_{i_1}^{(1)} \cdots e_{i_m}^{(m)}\right| = 1$$

quando tivermos simultaneamente $i_1 = 1, \ldots, i_m = m$, caso contrário, temos

$$A(e^{(1)}, \ldots, e^{(m)}) = 0.$$

Além disso, escrevendo $e^{(k)} := e^{(j_k)}, k = 1, \ldots, m$, obtemos por indução

$$\begin{aligned}
\sum_{j_1=1}^{n_1} \left|A(e^{(j_1)}, \ldots, e^{(j_m)})\right| &= n_1 \cdot 1 = n_1, \\
\sum_{j_1=1}^{n_1} \sum_{j_2=1}^{n_2} \left|A(e^{(j_1)}, \ldots, e^{(j_m)})\right| &= n_1 n_2, \\
&\vdots \\
\sum_{j_1=1}^{n_1} \cdots \sum_{j_m=1}^{n_m} \left|A(e^{(j_1)}, \ldots, e^{(j_m)})\right| &= n_1 \cdots n_m,
\end{aligned}$$

bem como

$$\left(\sum_{j_m=1}^{n_m}\left|A(e^{(j_1)},\ldots,e^{(j_m)})\right|^{p_m}\right)^{\frac{1}{p_m}} = (n_m\cdot 1^{p_m})^{\frac{1}{p_m}} = n_m^{\frac{1}{p_m}},$$

$$\begin{aligned}\left(\sum_{j_{m-1}=1}^{n_{m-1}}\left(\sum_{j_m=1}^{n_m}\left|A(e^{(j_1)},\ldots,e^{(j_m)})\right|^{p_m}\right)^{\frac{p_{m-1}}{p_m}}\right)^{\frac{1}{p_{m-1}}} &= \left(\sum_{j_{m-1}=1}^{n_{m-1}}(n_m\cdot 1^{p_m})^{\frac{p_{m-1}}{p_m}}\right)^{\frac{1}{p_{m-1}}}\\ &= \left(n_{m-1}n_m^{\frac{p_{m-1}}{p_m}}\right)^{\frac{1}{p_{m-1}}} = n_{m-1}^{\frac{1}{p_{m-1}}}n_m^{\frac{1}{p_m}},\\ &\vdots\end{aligned}$$

$$\left(\sum_{j_1=1}^{n_1}\left(\cdots\left(\sum_{j_m=1}^{n_m}\left|A(e^{(j_1)},\ldots,e^{(j_m)})\right|^{p_m}\right)^{\frac{p_{m-1}}{p_m}}\cdots\right)^{\frac{p_1}{p_2}}\right)^{\frac{1}{p_1}} = n_1^{\frac{1}{p_1}}\cdots n_m^{\frac{1}{p_m}}.$$

Em particular, quando $n_1=\cdots=n_m=n$, tem-se

$$\left(\sum_{j_1=1}^{n}\left(\cdots\left(\sum_{j_m=1}^{n}\left|A(e^{(j_1)},\ldots,e^{(j_m)})\right|^{p_m}\right)^{\frac{p_{m-1}}{p_m}}\cdots\right)^{\frac{p_1}{p_2}}\right)^{\frac{1}{p_1}} = n^{\frac{1}{p_1}+\cdots+\frac{1}{p_m}}. \tag{3.17}$$

Pelo Teorema 3.3.1 (ver demonstração), existem $s_1,\ldots,s_m$ tais que

$$\begin{aligned}\left(\sum_{j_1=1}^{n_1}\left(\cdots\left(\sum_{j_m=1}^{n_m}\left|A(e^{(j_1)},\ldots,e^{(j_m)})\right|^{p_m}\right)^{\frac{p_{m-1}}{p_m}}\cdots\right)^{\frac{p_1}{p_2}}\right)^{\frac{1}{p_1}} &\leq \|A\|n_1^{s_1}\cdots n_m^{s_m}\prod_{k=1}^{m}\|e^{(k)}\|_{w,q_k} \\ &= \|A\|n_1^{s_1}\cdots n_m^{s_m}\end{aligned} \tag{3.18}$$

e, tendo em vista a observação 3.2.3, podemos escrever

$$\left(\sum_{j_1=1}^{n_1}\left(\cdots\left(\sum_{j_m=1}^{n_m}\left|A(e^{(j_1)},\ldots,e^{(j_m)})\right|^{p_m}\right)^{\frac{p_{m-1}}{p_m}}\cdots\right)^{\frac{p_1}{p_2}}\right)^{\frac{1}{p_1}} \leq \|A\|n_1^{\inf s_1}\cdots n_m^{\inf s_m},$$

onde cada s_i satisfaz 3.18. Em particular, quando $n_1=\cdots=n_m=n$, tem-se

$$\left(\sum_{j_1=1}^{n}\left(\cdots\left(\sum_{j_m=1}^{n}\left|A(e^{(j_1)},\ldots,e^{(j_m)})\right|^{p_m}\right)^{\frac{p_{m-1}}{p_m}}\cdots\right)^{\frac{p_1}{p_2}}\right)^{\frac{1}{p_1}} \leq \|A\|n^{\sum_{k=1}^{m}\inf s_k} \tag{3.19}$$

Observe, ainda, que o conjunto $\hat{S}$ dos $\hat{s}=\sum_{k=1}^{m}\hat{s}_k$, tais que $\hat{s}_k$ satisfaz (3.1) para todo $T\in\mathcal{L}(E_1\times\cdots\times E_m;\mathbb{K})$ e todos os inteiros positivos $n_k, k=1,\ldots,m$, está contido no conjunto S dos $s = \sum_{i=1}^{m} s_i$ tais que s_i satisfaz (3.18) para todos os inteiros positivos n_k (nesse último caso o operador $T := A$ está fixo). Então, uma vez que $s_k, \hat{s}_k \geq 0, k = 1, \ldots, m$ e em vista da igualdade (3.2), podemos escrever

$$\begin{aligned}
\sum_{i=k}^{m} \inf s_k &= \inf S \\
&\leq \inf \hat{S} \\
&= \sum_{i=k}^{m} \inf \hat{s}_k \\
&:= \eta_{(\mathbf{p};\mathbf{q})}^{m-mult} \left(\ell_{r_1} \times \cdots \times \ell_{r_m}; \mathbb{K} \right). \qquad (3.20)
\end{aligned}$$

Por outro lado, juntando a igualdade (3.17) com a desigualdade (3.19) e com o Lema 1.2.10, obtemos

$$n^{\frac{1}{p_1} + \cdots + \frac{1}{p_m}} \leq C_m n^{\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{m} \alpha(r_k)} n^{\sum_{k=1}^{m} \inf s_k}$$

para todo inteiro positivo $n \geq m$. Uma vez que C_m e os exponentes em ambos os lados da desigualdade acima não dependem de n, temos

$$\left| \frac{1}{\mathbf{p}} \right| - \frac{1}{2} - \sum_{k=1}^{m} \alpha(r_k) \leq \sum_{k=1}^{m} \inf s_k$$

que, juntamente com a desigualdade (3.20), resulta em

$$\left| \frac{1}{\mathbf{p}} \right| - \frac{1}{2} - \sum_{k=1}^{m} \alpha(r_k) \leq \eta_{(\mathbf{p};\mathbf{q})}^{m-mult} \left(\ell_{r_1} \times \cdots \times \ell_{r_m}; \mathbb{K} \right).$$

□

Corolário 3.6.2. *Sejam $0 < q_k, p_k < \infty$. Então*

$$\frac{1}{p_1} - 1 + \left| \frac{1}{\boldsymbol{r}} \right| \leq \eta_{(\boldsymbol{p};\boldsymbol{q})}^{n-mult} \left(\ell_{r_1} \times \cdots \times \ell_{r_n}; \mathbb{K} \right)$$

para todos os $r_k, k = 1, \ldots, n$, tais que $\left| \frac{1}{\boldsymbol{r}} \right| \leq 1$.

Demonstração. Escrevamos $e^{(j_k)}$ para denotar o vetor canônico cuja única coordenada não nula é a j_k–ésima, e $e_i^{(j_k)}$ para indicar a i–ésima coordenada de $e^{(j_k)}$. Nesses termos, considerando um operador $S : \ell_{r_1}^n \times \cdots \times \ell_{r_n}^n \to \mathbb{K}$ definido por

$$S(x^{(1)}, \ldots, x^{(n)}) = \sum_{i=1}^{n} x_i^{(1)} \cdots x_i^{(n)},$$

temos $S(e^{(j_1)}, \ldots, e^{(j_n)}) = \sum_{i=1}^{n} e_i^{(j_1)} \cdots e_i^{(j_n)} = 1$ quando $j_1 = \cdots = j_n = i$, caso contrário tem-se $S(e^{(j_1)}, \ldots, x^{(j_n)}) = 0$. Desse modo, se fixarmos algum $j_i \in \{1, \ldots, n\}$, digamos $j_1 = 1$, obtemos

$$\begin{aligned}
\sum_{j_2=1}^{n}\sum_{j_3=1}^{n}\cdots\sum_{j_m=1}^{n} S(e^{(1)}, e^{(j_2)}, \ldots, e^{(j_n)}) &= \sum_{j_2=1}^{n}\sum_{j_3=1}^{n}\cdots\sum_{j_m=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} e_i^{(1)} e_i^{(j_2)} \cdots e_i^{(j_n)} \\
&= e_1^{(1)} e_1^{(1)} \cdots e_1^{(1)} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Assim, (vide caso particular no Apêndice B)

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{j_1=1}^{n}\left(\cdots\left(\sum_{j_n=1}^{n}\left|S(e^{(j_1)}, \ldots, e^{(j_n)})\right|^{p_n}\right)^{\frac{p_{n-1}}{p_n}}\cdots\right)^{\frac{p_1}{p_2}}\right)^{\frac{1}{p_1}} \\
&= \left[\sum_{j_2=1}^{n}\left(\cdots\left(\sum_{j_n=1}^{n}\left|S(e^{(1)}, e^{(j_2)}, \ldots, e^{(j_n)})\right|^{p_n}\right)^{\frac{p_{n-1}}{p_n}}\cdots\right)^{\frac{p_1}{p_2}} + \right. \\
&\sum_{j_2=1}^{n}\left(\cdots\left(\sum_{j_n=1}^{n}\left|S(e^{(2)}, e^{(j_2)}, \ldots, e^{(j_n)})\right|^{p_n}\right)^{\frac{p_{n-1}}{p_n}}\cdots\right)^{\frac{p_1}{p_2}} + \cdots \\
&\left.\cdots + \sum_{j_2=1}^{n}\left(\cdots\left(\sum_{j_n=1}^{n}\left|S(e^{(n)}, e^{(j_2)}, \ldots, e^{(j_n)})\right|^{p_n}\right)^{\frac{p_{n-1}}{p_n}}\cdots\right)^{\frac{p_1}{p_2}}\right]^{\frac{1}{p_1}} \\
&= [1 + \cdots + 1]^{\frac{1}{p_1}} = n^{\frac{1}{p_1}}
\end{aligned}$$

isto é,

$$\left(\sum_{j_1=1}^{n}\left(\cdots\left(\sum_{j_m=1}^{n}\left|S(e^{(j_1)}, \ldots, e^{(j_m)})\right|^{p_m}\right)^{\frac{p_{m-1}}{p_m}}\cdots\right)^{\frac{p_1}{p_2}}\right)^{\frac{1}{p_1}} = [1 + \cdots + 1]^{\frac{1}{p_1}} = n^{\frac{1}{p_1}}. \tag{3.21}$$

Por outro lado, sendo $\left|\frac{1}{\mathbf{r}}\right| \leq 1$, podemos estimar a norma de S utilizando a desigualdade de Hölder generalizada. Com efeito, tomando $x^{(i)} \in B_{\ell_{r_i}}, i = 1, \ldots, n$, temos

$$\begin{aligned}
\left|S(x^{(1)}, \ldots, x^{(n)})\right| &= \left|\sum_{i=1}^{n} x_i^{(1)} \ldots x_i^{(n)}\right| \\
&\leq \left(\sum_{i=1}^{n}\left|x_i^{(1)}\right|^{r_1}\right)^{\frac{1}{r_1}} \cdots \left(\sum_{i=1}^{n}\left|x_i^{(n)}\right|^{r_n}\right)^{\frac{1}{r_n}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} 1\right)^{1-\left(\frac{1}{r_1}+\cdots+\frac{1}{r_m}\right)} \\
&= 1 \cdots 1 \cdot n^{1-\left(\frac{1}{p_1}+\cdots+\frac{1}{r_n}\right)} = n^{1-\left|\frac{1}{\mathbf{r}}\right|},
\end{aligned}$$

de onde concluímos que

$$\|S\| \leq n^{1-\left|\frac{1}{\mathbf{r}}\right|}.$$

Então, usando o mesmo argumento da prova anterior, obtemos

$$\begin{aligned}
n^{\frac{1}{p_1}} &\leq \|S\| n^{\sum_{k=1}^{n} \inf s_k} \\
&\leq n^{1-\left|\frac{1}{\mathbf{r}}\right|} n^{\sum_{k=1}^{n} \inf s_k}
\end{aligned}$$

e, consequentemente,

$$\frac{1}{p_1} - 1 + \left|\frac{1}{\mathbf{r}}\right| \leq \eta_{(\mathbf{p};\mathbf{q})}^{n-mult}\left(\ell_{r_1} \times \cdots \times \ell_{r_n}; \mathbb{K}\right).$$

□

A seguinte versão vetorial do Lema 1.2.10, cuja aplicação $m-$linear nele definida assume valores vetoriais, é útil no que se refere a obtenção de estimativas inferiores para o índice de somabilidade.

Lema 3.6.3 (Albuquerque et al. [3]). *Sejam $m, n \geq 1, s, p_1, \ldots, p_m \in [1, +\infty]$ e, para $p \geq 1$, seja*

$$\alpha(p) = \begin{cases} \frac{1}{2} - \frac{1}{p} & \text{se } p \geq 2 \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Então existe uma aplicação m-linear $A : \ell_{p_1}^n \times \cdots \times \ell_{p_m}^n \to \ell_s^n$ de modo que

$$A(z^{(1)}, \ldots, z^{(m)}) = \sum_{i_1,\ldots,i_m=1}^{n} \pm z_{i_1}^{(1)} \cdots z_{i_m}^{(m)} e_{i_{m+1}}$$

e vale a desigualdade

$$\|A\| \leq C_m n^{\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{m}\alpha(p_k)+\alpha(s^*)}.$$

Proposição 3.6.4. *Sejam $0 < q_k, p_k < \infty$. Então*

$$\left|\frac{1}{\boldsymbol{p}}\right| - \frac{1}{r} - \sum_{k=1}^{m} \max\left\{\frac{1}{2} - \frac{1}{r_k}, 0\right\} \leq \eta_{(\boldsymbol{p};\boldsymbol{q})}^{m-mult}\left(\ell_{r_1} \times \cdots \times \ell_{r_m}; \ell_r\right)$$

para todos $r, r_k \geq 1, k = 1, \ldots, m$.

Demonstração. Basta trocar o Lema 1.2.10 pelo Lema 3.6.3 na demonstração da Proposição 3.6.1. □

O Teorema abaixo foi extraído de [42]; trata-se de um resultado mais geral do que a desigualdade de Kahane - Salem - Zygmund enunciada no Lema 1.2.10, que utilizamos para melhorar a estimativa inferior para o índice de somabilidade apresentada na Proposição 3.6.1.

Teorema 3.6.5 (Pellegrino, Serrano-Rodríguez, Silva, [42]). *Sejam m, n inteiros positivos e $p_1, \ldots, p_m \in [1, +\infty]$. Então existem uma constante universal C (que depende apenas de m), uma escolha de sinais 1 e -1 e uma forma $m-$linear $A_{m,n}$: $\ell_{p_1}^n \times \cdots \times \ell_{p_m}^n \to \mathbb{K}$ do tipo*

$$A_{m,n}(z^{(1)}, \ldots, z^{(m)}) = \sum_{j_1,\ldots,j_m=1}^{n} \pm z_{j_1}^{(1)} \cdots z_{j_m}^{(m)}$$

tais que

$$\|A_{m,n}\| \leq C n^{\frac{1}{\min_{1\leq k\leq m}\left\{\max\left\{2,p_k^*\right\}\right\}}+\sum_{k=1}^{m}\max\left\{\frac{1}{2}-\frac{1}{p_k},0\right\}}.$$

Vejamos que a estimativa inferior decorrente do Teorema 3.6.5, a qual enunciamos na proposição seguinte, melhora a estimativa fornecida pela Proposição 3.6.1, pois, uma vez que $\max\{2,p_k^*\} \geq 2, k=1,\ldots,m$, temos

$$\frac{1}{\min_{1\leq k\leq m}\{\max\{2,p_k^*\}\}} \leq \frac{1}{2}.$$

Proposição 3.6.6. *Sejam $0 < q_k, p_k < \infty$. Então*

$$\left|\frac{1}{\boldsymbol{p}}\right| - \frac{1}{\min_{1\leq k\leq m}\{\max\{2,r_k^*\}\}} - \sum_{k=1}^{m}\max\left\{\frac{1}{2}-\frac{1}{r_k},0\right\} \leq \eta_{(\boldsymbol{p};\boldsymbol{q})}^{m-mult}(\ell_{r_1}\times\cdots\times\ell_{r_m};\mathbb{K})$$

para todos $r_1\ldots,r_m \in [1,+\infty]$.

Demonstração. Pelo Teorema 3.6.5 existe um operador $A_{m,n} : \ell_{r_1}^n \times \cdots \times \ell_{r_m}^n \to \mathbb{K}$ do tipo

$$A_{m,n}(z^{(1)},\ldots,z^{(m)}) = \sum_{i_1,\ldots,i_m=1}^{n} \pm z_{i_1}^{(1)}\cdots z_{i_m}^{(m)}$$

e tal que

$$\|A_{m,n}\| \leq C n^{\frac{1}{\min_{1\leq k\leq m}\left\{\max\left\{2,r_k^*\right\}\right\}}+\sum_{k=1}^{m}\max\left\{\frac{1}{2}-\frac{1}{r_k},0\right\}}.$$

Repetindo o argumento utilizado na demonstração da Proposição 3.6.1, obtemos

$$\left(\sum_{j_1=1}^{n}\left(\cdots\left(\sum_{j_m=1}^{n}\left|A_{m,n}(e^{(j_1)},\ldots,e^{(j_m)})\right|^{p_m}\right)^{\frac{p_{m-1}}{p_m}}\cdots\right)^{\frac{p_1}{p_2}}\right)^{\frac{1}{p_1}} = n^{\frac{1}{p_1}+\cdots+\frac{1}{p_m}}. \quad (3.22)$$

Da mesma forma, o Teorema 3.3.1 garante a existência de $s_1,\ldots,s_m$ para os quais vale a desigualdade

$$\left(\sum_{j_1=1}^{n_1}\left(\cdots\left(\sum_{j_m=1}^{n_m}\left|A_{m,n}(e^{(j_1)},\ldots,e^{(j_m)})\right|^{p_m}\right)^{\frac{p_{m-1}}{p_m}}\cdots\right)^{\frac{p_1}{p_2}}\right)^{\frac{1}{p_1}} \leq \|A\| n_1^{s_1}\cdots n_m^{s_m} \quad (3.23)$$

o que também, em vista da observação 3.2.3, permite-nos escrever

$$\left(\sum_{j_1=1}^{n_1}\left(\cdots\left(\sum_{j_m=1}^{n_m}\left|A_{m,n}(e^{(j_1)},\ldots,e^{(j_m)})\right|^{p_m}\right)^{\frac{p_{m-1}}{p_m}}\cdots\right)^{\frac{p_1}{p_2}}\right)^{\frac{1}{p_1}} \leq \|A\| n_1^{\inf s_1}\cdots n_m^{\inf s_m},$$

onde cada s_i satisfaz 3.23. Em particular, sempre que $n_1 = \cdots = n_m = n$, obtemos

$$\left(\sum_{j_1=1}^{n}\left(\cdots\left(\sum_{j_m=1}^{n}\left|A_{m,n}(e^{(j_1)},\ldots,e^{(j_m)})\right|^{p_m}\right)^{\frac{p_{m-1}}{p_m}}\cdots\right)^{\frac{p_1}{p_2}}\right)^{\frac{1}{p_1}}$$
$$\leq \|A\| n^{\sum_{k=1}^{m}\inf s_k}. \tag{3.24}$$

De forma idêntica à demonstração da Proposição 3.6.1, juntamos (3.22), (3.24) e o Teorema 3.6.5, para obter a desigualdade

$$n^{\frac{1}{p_1}+\cdots+\frac{1}{p_m}} \leq C n^{\frac{1}{\min_{1\leq k\leq m}\left\{\max\left\{2,r_k^*\right\}\right\}}+\sum_{k=1}^{m}\max\left\{\frac{1}{2}-\frac{1}{r_k},0\right\}} n^{\sum_{k=1}^{m}\inf s_k}$$

para todo inteiro positivo n, bem como a desigualdade requerida

$$\left|\frac{1}{\mathbf{p}}\right| - \frac{1}{\min_{1\leq k\leq m}\left\{\max\left\{2,r_k^*\right\}\right\}} - \sum_{k=1}^{m}\max\left\{\frac{1}{2}-\frac{1}{r_k},0\right\}$$
$$\leq \eta_{(\mathbf{p};\mathbf{q})}^{m-mult}\left(\ell_{r_1}\times\cdots\times\ell_{r_m};\mathbb{K}\right),$$

pois também C e os expoentes de ambos os lados da penúltima desigualdade acima não dependem de n.

□

O teorema abaixo, devido a N. Albuquerque e L. Rezende, fornece uma ferramenta para obtenção de estimativas inferiores.

Teorema 3.6.7. [5, Teorema 4.4] *Sejam $m \geq 2$ um inteiro, $\mathbf{q} := (q_1,\ldots,q_m) \in [1,+\infty]^m$ tal que $\left|\frac{1}{\mathbf{q}}\right| \leq \frac{1}{2}$ e seja também $s_k, p_k \in (0,\infty)$, para $k = 1,\ldots,m$. Suponha que exista $D_{m,bmp,\mathbf{q}}^{\mathbb{K}} \geq 1$ tal que*

$$\left(\sum_{j_1=1}^{n_1}\left(\cdots\left(\sum_{j_m=1}^{n_m}\left|T\left(e_{j_1},\ldots,e_{j_m}\right)\right|^{p_m}\right)^{\frac{p_{m-1}}{p_m}}\cdots\right)^{\frac{p_1}{p_2}}\right)^{\frac{1}{p_1}} \leq D_{m,bmp,\mathbf{q}}^{\mathbb{K}} n_1^{s_1}\cdots n_m^{s_m}\|T\|,$$

para todos operadores m-lineares limitados $T : \ell_{q_1}^{n_1}\times\cdots\times\ell_{q_m}^{n_m} \to \mathbb{K}$ e quaisquer inteiros positivos $n_1,\ldots,n_m$. Então, para todo $\mathcal{I} \subset \{1,\ldots,m\}$,

$$\sum_{j\in\mathcal{I}} s_j \geq \max\left\{\sum_{j\in\mathcal{I}}\frac{1}{p_j} - \frac{card\mathcal{I}+1}{2} + \sum_{j\in\mathcal{I}}\frac{1}{q_j}, 0\right\}.$$

Corolário 3.6.8. *Sejam $m \geq 2$ um inteiro positivo, $\mathbf{q} := (q_1,\ldots,q_m) \in [1,+\infty]^m$ tal que $\left|\frac{1}{\mathbf{q}}\right| \leq \frac{1}{2}$ e seja também $p_k \in (0,\infty)$, para $k = 1,\ldots,m$. Então*

$$\xi_{(\mathbf{p};\mathbf{q}^*)}^{m-mult}(E_1\times\cdots\times E_m;F)$$
$$\geq \left(\max\left\{\tfrac{1}{p_1}-1+\tfrac{1}{q_1},0\right\},\max\left\{\tfrac{1}{p_2}-1+\tfrac{1}{q_2},0\right\},\ldots,\max\left\{\tfrac{1}{p_m}-1+\tfrac{1}{q_m},0\right\}\right)$$

Demonstração. Basta tomarmos $\mathcal{I} = \{k\}$ no teorema acima, para obtermos

$$s_k \geq \max\left\{\frac{1}{p_k} - 1 + \frac{1}{q_k}, 0\right\},$$

para cada $k = 1, \ldots, m$. □

3.7 Índices de somabilidade ótimos

A seguir, apresentamos algumas condições em que o Corolário 3.5.5 não pode ser melhorado, isto é, condições em que ocorre a otimalidade do índice. O corolário abaixo estende a Proposição 1.2.11.

Corolário 3.7.1.

(a) Se $\frac{2m}{m+1} \leq p_k \leq 2$ *e* $\frac{2mp_k}{mp_k+2m-p_k} \leq q_k \leq 2, k = 1, \ldots, m$ *e* $m \geq 2$, *então*

$$\eta_{(\boldsymbol{p};\boldsymbol{q})}^{m-mult}\left(\ell_{q_1^*} \times \cdots \times \ell_{q_m^*}; \mathbb{K}\right) = \left|\frac{1}{\boldsymbol{p}}\right| - \left|\frac{1}{\boldsymbol{q}}\right| + \frac{m-1}{2}.$$

(b) Se $p_1 = \min\{p_k\}$ *é tal que* $2 < p_1 < \infty$ *e* $\frac{mp_1}{mp_1+1-p_1} \leq q_k$, *com* $\left|\frac{1}{\boldsymbol{q}^*}\right| \leq 1, k = 1, \ldots, m$ *e* $m \geq 2$, *então*

$$\eta_{(\boldsymbol{p};\boldsymbol{q})}^{m-mult}\left(\ell_{q_1^*} \times \cdots \times \ell_{q_m^*}; \mathbb{K}\right) = m - 1 + \frac{1}{p_1} - \left|\frac{1}{\boldsymbol{q}}\right|.$$

Demonstração. (a) Tomando $t_k = p_k$ e $s_k = \frac{2mp_k}{mp_k+2m-p_k}$ no item (i) do Corolário 3.5.5, obtemos

$$\begin{aligned}&\xi_{(\mathbf{p};\mathbf{q})}^{m-mult}\left(\ell_{q_1^*} \times \cdots \times \ell_{q_m^*}; \mathbb{K}\right) \\ &\leq \left(\max\left\{\frac{1}{p_k} - \frac{1}{p_k}, 0\right\} + \max\left\{\frac{mp_k + 2m - p_k}{2mp_k} - \frac{1}{q_k}, 0\right\}\right)_{k=1}^{m}\end{aligned}$$

e, uma vez que $\frac{2m_k}{mp_k+2m-p_k} \leq q_k$, podemos escrever

$$\begin{aligned}\eta_{(\mathbf{p};\mathbf{q})}^{m-mult}\left(\ell_{q_1^*} \times \cdots \times \ell_{q_m^*}; \mathbb{K}\right) &\leq \sum_{k=1}^{m}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{p_k} - \frac{1}{2m} - \frac{1}{q_k}\right) \\ &= \left|\frac{1}{\mathbf{p}}\right| - \left|\frac{1}{\mathbf{q}}\right| + \frac{m-1}{2}.\end{aligned}$$

Por outro lado, a Proposição 3.6.1, bem como a Proposição 3.6.6 (nessa, a desigualdade $q_k \leq 2$ nos fornece $\frac{1}{\min\{\max\{2,q_k\}\}} = \frac{1}{2}$) dá-nos

$$\left|\frac{1}{\mathbf{p}}\right| - \frac{1}{2} - \sum_{k=1}^{m}\max\left\{\frac{1}{2} - \frac{1}{q_k^*}, 0\right\} \leq \eta_{(\mathbf{p};\mathbf{q})}^{m-mult}\left(\ell_{q_1^*} \times \cdots \times \ell_{q_m^*}; \mathbb{K}\right)$$

e, sendo $q^* \geq 2$ (pois $q_k \leq 2$), temos

$$\left|\frac{1}{\mathbf{p}}\right| - \frac{1}{2} - \sum_{k=1}^{m} \max\left\{\frac{1}{2} - \frac{1}{q_k^*}, 0\right\} = \left|\frac{1}{\mathbf{p}}\right| - \left|\frac{1}{\mathbf{q}}\right| + \frac{m-1}{2},$$

concluindo assim a prova do item (a).

(b) Semelhantemente, tomando $t_k = p_1$ e $s_k = \frac{mp_1}{mp_1+1-p_1}$ no item (ii) do Corolário 3.5.5, obtemos

$$\begin{aligned} &\xi_{(\mathbf{p};\mathbf{q})}^{m-mult}\left(\ell_{q_1^*} \times \cdots \times \ell_{q_m^*}; \mathbb{K}\right) \\ &\leq \left(\max\left\{\frac{1}{p_k} - \frac{1}{p_1}, 0\right\} + \max\left\{\frac{mp_1+1-p_1}{mp_1} - \frac{1}{q_k}, 0\right\}\right)_{k=1}^{m} \end{aligned}$$

e, desde que são $p_1 = \min\{p_k\}$ e $\frac{mp_1}{mp_1+1-p_1} \leq q_k$, tem-se

$$\eta_{(\mathbf{p};\mathbf{q})}^{m-mult}\left(\ell_{q_1^*} \times \cdots \times \ell_{q_m^*}; \mathbb{K}\right) \leq \sum_{k=1}^{m}\left(1 + \frac{1}{mp_1} - \frac{1}{m} - \frac{1}{q_k}\right) = m - 1 + \frac{1}{p_1} - \left|\frac{1}{\mathbf{q}}\right|.$$

Por outro lado, sendo $\left|\frac{1}{\mathbf{q}^*}\right| \leq 1$, o Corolário 3.6.2 dá-nos

$$\frac{1}{p_1} - 1 + \left|\frac{1}{\mathbf{q}^*}\right| \leq \eta_{(\mathbf{p};\mathbf{q})}^{m-mult}\left(\ell_{q_1^*} \times \cdots \times \ell_{q_m^*}; \mathbb{K}\right).$$

Uma vez que

$$\frac{1}{p_1} - 1 + \left|\frac{1}{\mathbf{q}^*}\right| = m - 1 + \frac{1}{p_1} - \left|\frac{1}{\mathbf{q}}\right|,$$

está demonstrado o item (b).

□

A Proposição a seguir estende a Proposição 1.2.12.

Proposição 3.7.2. *Sejam* $0 < q_k, p_k < \infty$ *e* $1 \leq r_k \leq \infty, k = 1, \ldots, m$. *Então*

$$\left|\frac{1}{\boldsymbol{p}}\right| \leq \eta_{(\boldsymbol{p};\boldsymbol{q})}^{m-mult}\left(\ell_{r_1} \times \cdots \times \ell_{r_m}; c_0\right).$$

Em particular, se $p_k \leq q_k \leq 2$, *obtemos*

$$\eta_{(\boldsymbol{p};\boldsymbol{q})}^{m-mult}\left(\ell_{r_1} \times \cdots \times \ell_{r_m}; c_0\right) = \left|\frac{1}{\boldsymbol{p}}\right|.$$

Demonstração. Considere $T \in \mathcal{L}(\ell_{r_1}, \ldots, \ell_{r_m}; c_0)$ definido por

$$T\left(x^{(1)}, \ldots, x^{(m)}\right) = \left(x_{j_1}^{(1)} \cdots x_{j_m}^{(m)}\right)_{j_1,\ldots,j_m=1}^{n}.$$

Observe que $\|T\| = 1$ e, de forma análoga a (3.17), obtemos

$$\left(\sum_{j_1=1}^{n_1}\left(\cdots\left(\sum_{j_m=1}^{n_m}\left\|T(e^{(j_1)},\ldots,e^{(j_m)})\right\|^{p_m}\right)^{\frac{p_{m-1}}{p_m}}\cdots\right)^{\frac{p_1}{p_2}}\right)^{\frac{1}{p_2}} = n_1^{\frac{1}{p_1}}\cdots n_m^{\frac{1}{p_m}}.$$

Por outro lado, sejam $s_1,\ldots,s_m$ tais que

$$\begin{aligned}\left(\sum_{j_1=1}^{n_1}\left(\cdots\left(\sum_{j_m=1}^{n_m}\left\|T(e^{(j_1)},\ldots,e^{(j_m)})\right\|^{p_m}\right)^{\frac{p_{m-1}}{p_m}}\cdots\right)^{\frac{p_1}{p_2}}\right)^{\frac{1}{p_2}} &\leq \|T\| n_1^{s_1}\cdots n_m^{s_m}\prod_{k=1}^{m}\|e^{(k)}\|_{w,q_k}\\ &= n_1^{s_1}\cdots n_m^{s_m}.\end{aligned}$$

O mesmo argumento usado na prova da Proposição 3.6.1 fornece

$$n^{\frac{1}{p_1}+\cdots+\frac{1}{p_m}} \leq n^{\sum_{k=1}^{m}\inf s_k}$$

que, por sua vez, dá-nos

$$\left|\frac{1}{\mathbf{p}}\right| \leq \eta_{(\mathbf{p};\mathbf{q})}^{m-mult}\left(\ell_{r_1}\times\cdots\times\ell_{r_m};c_0\right).$$

Em particular, quando $p_k \leq q_k \leq 2$, o Teorema 3.3.1 dá-nos

$$\eta_{(\mathbf{p};\mathbf{q})}^{m-mult}\left(\ell_{r_1}\times\cdots\times\ell_{r_m};c_0\right) \leq \left|\frac{1}{\mathbf{p}}\right|,$$

portanto $\eta_{(\mathbf{p};\mathbf{q})}^{m-mult}\left(\ell_{r_1}\times\cdots\times\ell_{r_m};c_0\right) = \left|\frac{1}{\mathbf{p}}\right|$. □

O teorema a seguir, devido essencialmente a D. Pérez-García e I. Villanueva, associa os operadores múltiplos somantes com as desigualdades de Hardy - Littlewood.

Teorema 3.7.3. [41, Teorema 3.2] *Seja $(p_1,\ldots,p_m) \in [1,\infty]^m$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(1) Existe uma constante $C > 0$ tal que, para cada $T \in \mathcal{L}\left(\ell_{p_1},\ldots,\ell_{p_m};F\right)$, ocorre o seguinte

$$\left(\sum_{j_i=1}^{\infty}\left(\cdots\left(\sum_{j_m=1}^{\infty}\left\|T\left(e_{j_1},\ldots,e_{j_m}\right)\right\|^{q_m}\right)^{\frac{q_{m-1}}{q_m}}\cdots\right)^{\frac{q_1}{q_2}}\right)^{\frac{1}{q_1}} \leq C\|T\|.$$

(2) Para todos espaços de Banach $E_1,\ldots,E_m$, temos

$$\mathcal{L}\left(E_1,\ldots,E_m;F\right) = \Pi^m_{(q_1,\ldots,q_m;p_1^*,\ldots,p_m^*)}\left(E_1,\ldots,E_m;F\right).$$

O resultado a seguir é o Teorema 5.1 de [41], o qual fornece uma caracterização para as formas bilineares em espaços ℓ_p que nos permite obter, sob certas hipóteses, otimalidade do índice.

Teorema 3.7.4. [41, Pellegrino, Santos, Serrano–Rodriguez, Teixeira] *Sejam* $q_1,\ q_2 \in [2,\infty]$, *com* $\frac{1}{q_1}+\frac{1}{q_2}<1$ *e* $a,b>0$. *As seguintes afirmações são equivalentes:*

a) Existe uma constante $C_{q_1,q_2,a,b}\geq 1$ *tal que*

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}|A(e_i,e_j)|^{a}\right)^{\frac{b}{a}}\right)^{\frac{1}{b}}\leq C_{q_1,q_2,a,b}\|A\|,$$

para toda forma bilinear $A:\ell_{q_1}\times\ell_{q_2}\to\mathbb{K}$ *e todo inteiro positivo* n.

b) Os exponentes a,b *satisfazem* $(a,b)\in\left[\frac{q_2}{q_2-1},\infty\right)\times\left[\frac{q_1q_2}{q_1q_2-q_1-q_2},\infty\right)$ *e*

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\leq\frac{3}{2}-\left(\frac{1}{q_1}+\frac{1}{q_2}\right).$$

Usando $a=q_2^{*}$ e $b=\left[1-\left(\frac{1}{q_1}+\frac{1}{q_2}\right)\right]^{-1}$, obtemos as seguintes estimativas relacionadas à desigualdade clássica de Hardy-Littlewood.

Corolário 3.7.5. *Sejam* $q_1,\ q_2\in[2,\infty]$, *com* $\frac{1}{q_1}+\frac{1}{q_2}<1$. *Então*

$$\xi^{2-mult}_{(p_1,p_2;q_1^{*},q_2^{*})}(\ell_{q_1}\times\ell_{q_2};\mathbb{K})=\left(\max\left\{\frac{1}{p_1}-1+\frac{1}{q_1}+\frac{1}{q_2},0\right\},\max\left\{\frac{1}{p_2}-\frac{1}{q_2^{*}},0\right\}\right).$$

Demonstração. Com efeito, tomando $a=q_2^{*}$ e $b=\left[1-\left(\frac{1}{q_1}+\frac{1}{q_2}\right)\right]^{-1}$ no Teorema 3.7.4, temos $(a,b)\in\left[\frac{q_2}{q_2-1},\infty\right)\times\left[\frac{q_1q_2}{q_1q_2-q_1-q_2},\infty\right)$ e

$$\begin{aligned}\frac{1}{a}+\frac{1}{b} &= \frac{1}{q_2^{*}}+1-\left(\frac{1}{q_1}+\frac{1}{q_2}\right)\\ &= 2-\frac{1}{q_2}-\left(\frac{1}{q_1}+\frac{1}{q_2}\right)\\ &\leq 2-\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{q_1}+\frac{1}{q_2}\right)=\frac{3}{2}-\left(\frac{1}{q_1}+\frac{1}{q_2}\right).\end{aligned}$$

Logo, pelo Teorema 3.7.4, existe $C\geq 1$ tal que

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}|A(e_i,e_j)|^{q_2^{*}}\right)^{\frac{\left[1-\left(\frac{1}{q_1}+\frac{1}{q_2}\right)\right]^{-1}}{q_2^{*}}}\right)^{\frac{1}{\left[1-\left(\frac{1}{q_1}+\frac{1}{q_2}\right)\right]^{-1}}}\leq C\|A\|,$$

para toda forma bilinear $A : \ell_{q_1} \times \ell_{q_2} \to \mathbb{K}$ e todo inteiro positivo n. Daí, segue imediatamente do Teorema 3.7.3 que

$$\mathcal{L}\left(\ell_{q_1}, \ell_{q_2}; \mathbb{K}\right) = \Pi^2_{\left(\left[1-\left(\frac{1}{q_1}+\frac{1}{q_2}\right)\right]^{-1}, q_2^*; q_1^*, q_2^*\right)}\left(\ell_{q_1}, \ell_{q_2}; \mathbb{K}\right).$$

Assim, pelo Teorema 3.3.3, obtemos a majoração

$$\xi^{2-mult}_{(p_1,p_2;q_1^*,q_2^*)}(\ell_{q_1} \times \ell_{q_2}; \mathbb{K}) \leq \left(\max\left\{\frac{1}{p_1} - 1 + \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2}, 0\right\}, \max\left\{\frac{1}{p_2} - \frac{1}{q_2^*}, 0\right\}\right).$$

Considere agora $T : \ell_{q_1} \times \ell_{q_2} \to \mathbb{K}$, definido por

$$T(x; y) = x_1 \sum_{j=1}^{n_2} y_j$$

com $\|T\| \leq n_2^{1/q_2^*}$ – basta aplicar a desigualdade de Hölder a $\left|\sum_{j=1}^{n} y_j \cdot 1\right|$ e, pelo Teorema de Existência do Índice, supor que

$$\left(\sum_{i=1}^{n_1}\left(\sum_{j=1}^{n_2}|T(e_i, e_j)|^{p_2}\right)^{\frac{p_1}{p_2}}\right)^{\frac{1}{p_1}} \leq C n_1^{s_1} n_2^{s_2} \|T\|.$$

Então

$$n_2^{\frac{1}{p_2}} \leq C n_1^{s_1} n_2^{s_2 + \frac{1}{q_2^*}}$$

e, desse modo,

$$\frac{n_2^{\frac{1}{p_2}}}{n_1^{s_1} n_2^{s_2+\frac{1}{q_2^*}}} \leq C.$$

Considere os caminhos $n_2 = D \cdot t$ e $n_1 = D$, onde $D > 0$ é constante, fazendo $t \to \infty$ obtemos

$$s_2 \geq \frac{1}{p_2} - \frac{1}{q_2^*}.$$

Agora vamos supor que

$$\left(\sum_{i=1}^{n_1}\left(\sum_{j=1}^{n_2}|S(e_i, e_j)|^{p_2}\right)^{\frac{p_1}{p_2}}\right)^{\frac{1}{p_1}} \leq C n_1^{s_1} n_2^{s_2} \|T\|.$$

para $S : \ell_{q_1} \times \ell_{q_2} \to \mathbb{K}$ definido por

$$S(x; y) = \sum_{j=1}^{n_1} x_j y_j.$$

Como $\frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} < 1$, aplicamos a desigualdade de Hölder generalizada para majorar a norma de S :

$$\begin{aligned}
\|S\| &= \sup_{\|x\|_{q_1}, \|y\|_{q_2} \leq 1} \left|\sum_{j=1}^{n_1} x_j y_j\right| \\
&\leq \sup_{\|x\|_{q_1}, \|y\|_{q_2} \leq 1} \|x\|_{q_1} \|y\|_{q_2} \|1\|_{\left(1-\frac{1}{q_1}+\frac{1}{q_2}\right)^{-1}},
\end{aligned}$$

ou seja, $\|S\| \leq n_1^{1-(1/q_1+1/q_2)}$. Então,

$$n_1^{\frac{1}{p_1}} \leq C n_1^{s_1+1-\left(\frac{1}{q_1}+\frac{1}{q_2}\right)} n_2^{s_2}$$

e, portanto,

$$s_1 \geq \frac{1}{p_1} - 1 + \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2}.$$

□

Em [39], ao lidar com formas bilineares em ℓ_2^n, D. Paulino obteve estimativas ótimas:

Teorema 3.7.6. [39, Teorema 5] *Sejam $p_1,\ p_2 \in (0, \infty]$. Se (p_1, p_2) são não-admissíveis, então*

$$\left(\sum_{j_1=1}^{n_1}\left(\sum_{j_2=1}^{n_2}|A(e_{j_1}, e_{j_2})|^{p_2}\right)^{\frac{p_1}{p_2}}\right)^{\frac{1}{p_1}} \leq n_1^{\frac{1}{p_1}} \cdot n_2^{\frac{1}{p_2}-\frac{1}{2}}\|A\|,$$

para todas as formas bilineares contínuas $A : \ell_2^{n_1} \times \ell_2^{n_2} \to \mathbb{K}$ e todos os números inteiros positivos n_1 e n_2. Além disso, o expoente $s_2 := \frac{1}{p_2} - \frac{1}{2}$ é ótimo, e quando $s_2 := \frac{1}{p_2} - \frac{1}{2}$ o expoente $s_1 := \frac{1}{p_1}$ é ótimo.

Corolário 3.7.7. *Sejam $p_1,\ p_2 \in (0, \infty]$. Se (p_1, p_2) são não-admissíveis, então*

$$\xi^{2-mult}_{(p_1,p_2;q_1^*,q_2^*)}(E_1 \times E_2; \mathbb{K}) = \left(\frac{1}{p_1}, \frac{1}{p_2} - \frac{1}{2}\right).$$

Teorema 3.7.8. *(Defant-Voigt) Para quaisquer espaços de Banach $E_1, \ldots, E_m$, vale a igualdade*

$$\mathcal{L}\left(E_1, \ldots, E_m; \mathbb{K}\right) = \Pi^m_{as(1;1,\ldots,1)}\left(E_1, \ldots, E_m; \mathbb{K}\right).$$

Corolário 3.7.9. *Sejam $1 \leq p, q_k < \infty$, com $k = 1, \ldots, m$. Então*

$$\eta^{m-mult}_{as(p;\mathbf{q})}(\ell_{q_1^*} \times \cdots \times \ell_{q_m^*}; \mathbb{K}) \leq \sum_{k=1}^{m}\left(1 - \frac{1}{q_k}\right).$$

Além disso, quando $p = 1$ o índice $\eta_{as(p;\mathbf{q})}$ obtido é ótimo.

Demonstração. Usando os Teoremas 3.3.5 e 3.7.8, obtemos

$$\eta^{m-mult}_{as(p;\mathbf{q})}(\ell_{q_1^*} \times \cdots \times \ell_{q_m^*}; \mathbb{K}) \leq \sum_{k=1}^{m}\left(1 - \frac{1}{q_k}\right).$$

Agora vamos mostrar que quando $p = 1$ o índice $\eta_{(p;\mathbf{q})}$ obtido é ótimo. Dado $q_k^* \geq 2$, por [5, Proposição 2.3] existem sinais $\varepsilon_{\mathbf{j}} = \pm 1$ e uma aplicação m-linear $A : \ell_{q_1^*}^{n_1} \times \cdots \times \ell_{q_m^*}^{n_m} \to \mathbb{K}$ da forma

$$A\left(z^1, \ldots, z^m\right) = \sum_{i_1=1}^{n_1} \cdots \sum_{i_m=1}^{n_m} \varepsilon_{\mathbf{j}} z^1_{i_1} \cdots z^m_{i_m},$$

tal que

$$\|A\| \leq D \cdot \prod_{k=1}^{m} n_k^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q_k^*}} \cdot \left(\sum_{k=1}^{m} n_k\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Suponha que

$$\left(\sum_{j_1=1}^{n_1}\left(\cdots\left(\sum_{j_m=1}^{n_m}\left\|A\left(e^{j_1},\ldots,e^{j_m}\right)\right\|^p\right)^{\frac{p}{p}}\cdots\right)^{\frac{p}{p}}\right)^{\frac{1}{p}} \leq C\prod_{k=1}^{m} n_k^{s_{m,p_k,q_k}}\|A\|.$$

Então, tendo em vista a desigualdade $(\sum_{k=1}^{m} n_k)^{\frac{1}{2}} \leq \sum_{k=1}^{m} n_k^{\frac{1}{2}}$, temos

$$\begin{aligned}
\prod_{k=1}^{m} n_k^{\frac{1}{p}} &\leq C\cdot D\cdot\prod_{k=1}^{m} n_k^{s_k}\cdot\prod_{k=1}^{m} n_k^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q_k^*}}\cdot\left(\sum_{k=1}^{m} n_k\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\leq C\cdot D\cdot\prod_{k=1}^{m} n_k^{s_k}\cdot\prod_{k=1}^{m} n_k^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q_k^*}}\cdot\sum_{k=1}^{m} n_k^{\frac{1}{2}}\\
&= C\cdot D\cdot\prod_{k=1}^{m} n_k^{s_k}\cdot\prod_{k=1}^{m} n_k^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q_k^*}}\cdot n_m^{\frac{1}{2}}\cdot\left(1+\frac{\sum_{k=1}^{m-1} n_k}{n_m}\right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

ou ainda,

$$\prod_{k=1}^{m-1} n_k^{\frac{1}{p}-\left(s_k+\frac{1}{2}-\frac{1}{q_k^*}\right)}\cdot n_m^{\frac{1}{p}-\left(s_m+1-\frac{1}{q_m^*}\right)} \leq C\cdot D\left(1+\frac{\sum_{k=1}^{m-1} n_k}{n_m}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Fixando $n_1,\ldots,n_{m-1}$ constantes, obtemos

$$\lim_{n_m\to\infty} n_m^{\frac{1}{p}-\left(s_m+1-\frac{1}{q_m^*}\right)} < \infty$$

e, assim, $\frac{1}{p}-\left(s_m+1-\frac{1}{q_m^*}\right)<0$. Daí,

$$s_m \geq \frac{1}{p}-\frac{1}{2}+\frac{1}{q_m^*}-\frac{1}{2}=\frac{1}{p}-\frac{1}{q_m}.$$

Um argumento inteiramente análogo fornece, para cada $k=1,\ldots,m-1$,

$$s_k \geq \frac{1}{p}-\frac{1}{q_k}.$$

Portanto, tomando $p=1$ obtemos

$$\eta_{as(1;\mathbf{q})}^{m-mult}(\ell_{q_1^*}\times\cdots\times\ell_{q_m^*};\mathbb{K})=\sum_{k=1}^{m}\left(1-\frac{1}{q_k}\right).$$

$\square$

Para todos os inteiros positivos m, $k = 1, \ldots, m$, vamos definir

$$\delta_{m-k+1}^{q_k,\ldots,q_m} := \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{q_k} + \cdots + \frac{1}{q_m}\right)}.$$

Teorema 3.7.10. [4, Teorema 7] *Sejam $m \geq 2$ um inteiro, $\mathbf{p} := (p_1, \ldots, p_m) \in (1, +\infty)^m$ e $1 < q_m \leq 2 < q_k$, para $k = 1, \ldots, m$ tal que $\left|\frac{1}{\mathbf{q}}\right| < 1$. Então existe $D_{m,\mathbf{p},\mathbf{q}}^{\mathbb{K}} \geq 1$ tal que*

$$\left(\sum_{j_1=1}^{n_1}\left(\ldots\left(\sum_{j_m=1}^{n_m}|T(e_{j_1},\ldots,e_{j_m})|^{p_m}\right)^{\frac{p_{m-1}}{p_m}}\ldots\right)^{\frac{p_1}{p_2}}\right)^{\frac{1}{p_1}}$$
$$\leq D_{m,\mathbf{p},\mathbf{q}}^{\mathbb{K}}\|T\|\prod_{k=1}^{m} n_k^{\max\left\{\frac{1}{p_k}-\frac{1}{\delta_{m-k+1}^{q_k,\ldots,q_m}},0\right\}},$$

para todos os operadores m-lineares $T : \ell_{q_1}^{n_1} \times \cdots \times \ell_{q_m}^{n_m} \to \mathbb{K}$ e quaisquer números inteiros positivos $n_1, \ldots, n_m$.

Além disso, o expoente $\max\left\{\frac{1}{p_m} - \frac{1}{\delta_1^{q_m}}, 0\right\}$ é ótimo e, para cada $k = 1, \ldots, m-1$, o exponente $\max\left\{\frac{1}{p_k} - \frac{1}{\delta_{m-k+1}^{q_k,\ldots,q_m}}, 0\right\}$ é ótimo se $p_j \geq \delta_{m-j+1}^{q_j,\ldots,q_m}$ para $k+1 \leq j \leq m$.

Corolário 3.7.11. *Sejam $m \geq 2$ um inteiro, $\mathbf{p} := (p_1, \ldots, p_m) \in (1, +\infty)^m$ e $1 < q_m \leq 2 < q_k$, para $k = 1, \ldots, m$, tal que $\left|\frac{1}{\mathbf{q}}\right| < 1$. Seja também $p_j \geq \delta_{m-j+1}^{q_j,\ldots,q_m}$ para $k = 1, \ldots, m-1$ e $k+1 \leq j \leq m$. Então*

$$\xi_{(\mathbf{p};\mathbf{q}^*)}^{m-mult}(E_1 \times \cdots \times E_m; F) = \left(\max\left\{\frac{1}{p_k} - \frac{1}{\delta_{m-k+1}^{q_k,\ldots,q_m}}, 0\right\}\right)_{k=1}^{m}.$$

Corolário 3.7.12. *Sejam $0 < p, q < \infty, r, r_k \geq 1, k = 1, \ldots, m$. Se $r_1, r_2 \geq 2, r_3, \ldots, r_m \leq 2$ e $\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = \frac{1}{q}$, então*

$$\xi_{(p;q)}^{m-mult}(\ell_{r_1} \times \cdots \times \ell_{r_m}; \ell_r) = \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{r} + 1 - \frac{1}{q}\right)_{k=1}^{m}$$

sempre que $r \geq p$.

Demonstração. Uma vez que ℓ_r tem cotipo r, aplicamos o Corolário 3.3.11 para obter a estimativa superior

$$\xi_{(p;q)}^{m-mult}(\ell_{r_1} \times \cdots \times \ell_{r_m}; \ell_r) \leq \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{r} + 1 - \frac{1}{q}\right)_{k=1}^{m}$$

porque $r \geq p$ e $r_1, r_2 \geq 2$ com $\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = \frac{1}{q}$ fornece $q \geq 1$. Por outro lado, a Proposição 3.6.4 nos fornece

$$\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{r} - \sum_{k=1}^{m}\max\left\{\frac{1}{2} - \frac{1}{r_k}, 0\right\}\right)_{k=1}^{m} \leq \xi_{(p;q)}^{m-mult}(\ell_{r_1} \times \cdots \times \ell_{r_m}; \ell_r).$$

Como $r_1, r_2 \geq 2, r_3, \ldots, r_m \leq 2$ e $\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = \frac{1}{q}$, tem-se

$$\sum_{k=1}^{m} \max\left\{\frac{1}{2} - \frac{1}{r_k}, 0\right\} = 1 - \frac{1}{q},$$

e essa última igualdade conclui a demonstração. □

Obviamente, no corolário acima, em vez de r_1 e r_2, poderíamos tomar quaisquer outros r_i, r_j atendendo às mesmas condições.

O item (b) do resultado abaixo fornece um exemplo em que não é possível concluir a otimalidade do índice se, ao invés da Proposição 3.6.6, citarmos a Proposição 3.6.1.

Corolário 3.7.13. *(a) Se $0 < p, q \leq 2$, então*

$$\xi_{(p;q)}^{m-mult}({}^m\ell_1; \mathbb{K}) = \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{2}\right)_{k=1}^{m}.$$

(b) Se $p, q > 2$ são tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{2}$, então

$$\xi_{(p;q)}^{m-mult}({}^m\ell_1; \mathbb{K}) = \left(\frac{1}{p}\right)_{k=1}^{m}.$$

Demonstração. (a) O Corolário 3.3.13 fornece a seguinte estimativa superior

$$\begin{aligned}\xi_{(p;q)}^{m-mult}({}^m\ell_1; \mathbb{K}) &\leq \left(\max\left\{\frac{1}{p} - \frac{1}{2}, 0\right\} + \max\left\{\frac{1}{2} - \frac{1}{q}, 0\right\}\right)_{k=1}^{m} \\ &= \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{2}\right)_{k=1}^{m}.\end{aligned}$$

Por outro lado, da Proposição 3.6.1, obtemos a estimativa inferior

$$\begin{aligned}\xi_{(p;q)}^{m-mult}({}^m\ell_1; \mathbb{K}) &\geq \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{2} - \sum_{k=1}^{m} \max\left\{\frac{1}{2} - \frac{1}{1}, 0\right\}\right)_{k=1}^{m} \\ &= \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{2}\right)_{k=1}^{m}.\end{aligned}$$

(b) Como $p, q > 2$ e $\frac{1}{2} - \frac{1}{q} = \frac{1}{p}$, resulta do Corolário 3.3.13 a desigualdade

$$\xi_{(p;q)}^{m-mult}({}^m\ell_1; \mathbb{K}) \leq \left(\frac{1}{p}\right)_{k=1}^{m},$$

e, da Proposição 3.6.6, a desigualdade

$$\begin{aligned}\xi_{(p;q)}^{m-mult}({}^m\ell_1; \mathbb{K}) &\geq \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{\min_{1\leq j\leq m}\{\max\{2, 1^*\}\}} - \sum_{k=1}^{m} \max\left\{\frac{1}{2} - \frac{1}{1}, 0\right\}\right)_{k=1}^{m} \\ &= \left(\frac{1}{p} - 0 - 0\right)_{k=1}^{m}.\end{aligned}$$

□

O próximo resultado recupera o item (a) do Corolário 3.7.1 quando $q_m = 2$ e, nesse caso, nos mostra que a estimativa nele apresentada – em particular, apresentada na Proposição 1.2.11 (a), permanece válida quando tomamos $0 < p_k \leq 2$ e $1 \leq q_k \leq 2, k = 1, \ldots, m$, independentemente do inteiro positivo $m \geq 2$.

Corolário 3.7.14. *Se $0 < p_k \leq 2$ e $1 \leq q_k \leq 2, k = 1, \ldots, m$, então*

$$\eta_{(\boldsymbol{p};\boldsymbol{q})}^{m-mult}\left(\ell_{q_1^*} \times \cdots \times \ell_{q_m^*}; \mathbb{K}\right) = \left|\frac{1}{\boldsymbol{p}}\right| - \left|\frac{1}{\boldsymbol{q}}\right|_{m-1} + \frac{m-2}{2}.$$

Demonstração. Basta aplicar o Corolário 3.3.19 com $q = 2$ para obter a estimativa superior e, em seguida, aplicar a Proposição 3.6.1 (tendo em vista que $1 \leq q_k \leq 2$ fornece $q_k^* \geq 2$) para obter a estimativa inferior; ambas coincidem com $\left|\frac{1}{\mathbf{p}}\right| - \left|\frac{1}{\mathbf{q}}\right|_{m-1} + \frac{m-2}{2}$. □

Sob a hipótese $q_m \geq p_1$, o corolário abaixo melhora os intervalos do item (b) da Proposição 3.7.1, bem como da Proposição 1.2.11 (b).

Corolário 3.7.15. *Sejam $2 \leq p_k < \infty, 1 \leq q_k < \infty, k = 1, \ldots, m$. Se $q_m \geq p_1 := \min\{p_k\}$ com $\left|\frac{1}{\boldsymbol{q}^*}\right| \leq 1$, então*

$$\eta_{(\boldsymbol{p};\boldsymbol{q})}^{m-mult}\left(\ell_{q_1^*} \times \cdots \times \ell_{q_m^*}; \mathbb{K}\right) = m - 1 + \frac{1}{p_1} - \left|\frac{1}{\boldsymbol{q}}\right|.$$

Demonstração. Para obter a estimativa superior, aplique o Corolário 3.3.19 com $q = p_1$. A estimativa inferior é dada pelo Corolário 3.6.2 e ambas estimativas coincidem com $m - 1 + \frac{1}{p_1} - \left|\frac{1}{\mathbf{q}}\right|$. □

3.8 Isometrias clássicas e desigualdades de Bohnenblust–Hille e Hardy–Littlewood

As isometrias clássicas entre $\mathcal{L}(X_p, X)$ e $\ell_{p^*}^w(X)$, para $1 < p \leq \infty$, permitem ler as desigualdades generalizadas de Bohnenblust–Hille e Hardy–Littlewood como resultados de coincidência (consulte [6, 24]).

Sejam $m \geq 2$ um inteiro positivo, F um espaço de Banach, $A \subset I_m := \{1, \ldots, m\}$, $p_1, \ldots, p_m, s, \alpha \geq 1$ e

$$B_{\mathbf{p},s,\alpha}^{A,F}(n) :=$$
$$\inf\left\{C(n) \geq 0 \,:\, \left(\textstyle\sum_{j_i=1}^{n}\left(\sum_{\widehat{j_i}=1}^{n}\left\|T\left(e_{j_1}, \ldots, e_{j_m}\right)\right\|^s\right)^{\frac{1}{s}\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \leq C(n), \quad \text{para todo } i \in A\right\},$$

onde $\widehat{j_i}$ no somatório significa que a soma é efetuada em todos os índices, exceto em j_i, e o ínfimo é tomado sobre todos os operadores m-lineares $T : \ell_{p_1}^n \times \cdots \times \ell_{p_m}^n \to F$ com norma igual a um.

Lema 3.8.1. [1, Lema 2.1] *Sejam* $1 \leq p_k < q_k \leq \infty$, $k = 1, \ldots, m$ *e* $\lambda_0, s \geq 1$.
(a) Se

$$\eta_1 := \left[\frac{1}{\lambda_0} - \sum_{j=1}^{m}\left(\frac{1}{p_j} - \frac{1}{q_j}\right)\right]^{-1} > 0, \quad e \quad s \geq \eta_1,$$

então

$$B_{\mathbf{p},s,\eta_1}^{I_m,F}(n) \leq B_{\mathbf{q},s,\lambda_0}^{I_m,F}(n).$$

(b) Se

$$\eta_1 > 0 \quad e \quad s \geq \left[\frac{1}{\lambda_0} - \sum_{j=1}^{m-1}\left(\frac{1}{p_j} - \frac{1}{q_j}\right)\right]^{-1} := \eta_2 \tag{3.25}$$

então

$$B_{\mathbf{p},s,\eta_2}^{\{m\}F}(n) \leq B_{\mathbf{q},s,\lambda_0}^{I_m,F}(n).$$

Teorema 3.8.2. *Sejam* $1 \leq p_k < q_k \leq \infty$, $k = 1, \ldots, m$ *e* $\lambda_0, s \geq 1$. *Se*

$$\eta_1 := \left[\frac{1}{\lambda_0} - \sum_{j=1}^{m}\left(\frac{1}{p_j} - \frac{1}{q_j}\right)\right]^{-1} \quad e \quad s \geq \eta_1, \tag{3.26}$$

então

$$\eta_{(\eta_1,s,\ldots,s;\mathbf{p}^*)}^{m-mult}(E_1 \times \cdots \times E_m; F) \leq \eta_{(\lambda_0,s,\ldots,s;\mathbf{q}^*)}^{m-mult}(E_1 \times \cdots \times E_m; F).$$

Demonstração. Suponha que

$$\left(\sum_{j_1=1}^{n}\left(\sum_{j_2,\ldots,j_m=1}^{n}\|T\left(x_{\mathbf{j}}\right)\|^s\right)^{\frac{1}{s}\lambda_0}\right)^{\frac{1}{\lambda_0}} \leq C \cdot n^{\mathbf{s}_{m,s,\lambda_0,\mathbf{q}^*}} \cdot \prod_{k=1}^{m}\|x^k\|_{w,q_k^*},$$

para cada $T \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_m; F)$. Usando as isometrias clássicas entre $\mathcal{L}(\ell_q, E)$ e $\ell_{q^*}^w(E)$, para $1 < q \leq \infty$, como fizemos na demonstração do Teorema 3.5.4 (i), obtemos um operador m-linear contínuo $S : \ell_{q_1^*} \times \cdots \times \ell_{q_m^*} \to \mathbb{K}$ definido por $S(y_1, \ldots, y_m) = T(u_1(y_1), \ldots, u_m(y_m))$ e que satisfaz a igualdade

$$S(e_{j_1}, \ldots, e_{j_m}) = T(x_{j_1}^{(1)}, \ldots, x_{j_m}^{(m)}).$$

Desse modo, temos

$$\left(\sum_{j_1=1}^{n}\left(\sum_{j_2,\ldots,j_m=1}^{n}\|S\left(e_{j_1}, \ldots, e_{j_m}\right)\|^s\right)^{\frac{1}{s}\lambda_0}\right)^{\frac{1}{\lambda_0}} \leq C \cdot n^{\mathbf{s}_{m,s,\lambda_0,\mathbf{q}^*}} \cdot \prod_{k=1}^{m}\|x^k\|_{w,q_k^*},$$

para toda forma m-linear $S : \ell_{q_1}^n \times \cdots \times \ell_{q_m}^n \to F$. Pelo item (a) do Lema 3.8.1,

$$\left(\sum_{j_1=1}^{n}\left(\sum_{j_2,\ldots,j_m=1}^{n}\left\|\overline{S}\left(e_{j_1},\ldots,e_{j_m}\right)\right\|^s\right)^{\frac{1}{s}\eta_1}\right)^{\frac{1}{\eta_1}} \leq C \cdot n^{\mathbf{s}_{m,s,\lambda_0,\mathbf{q}^*}} \cdot \prod_{k=1}^{m}\|x^k\|_{w,p_k^*},$$

para todo operador m-linear $\overline{S} : \ell_{p_1}^n \times \cdots \times \ell_{p_m}^n \to F$. Utilizando novamente as isometrias clássicas, temos

$$\left(\sum_{j_1=1}^{n}\left(\sum_{j_2,\ldots,j_m=1}^{n}\left\|\overline{T}\left(x_{\mathbf{j}}\right)\right\|^s\right)^{\frac{1}{s}\eta_1}\right)^{\frac{1}{\eta_1}} \leq C \cdot n^{\mathbf{s}_{m,s,\lambda_0,\mathbf{q}^*}} \cdot \prod_{k=1}^{m}\|x^k\|_{w,p_k^*},$$

para cada $\overline{T} \in \mathcal{L}(E_1,\ldots,E_m;F)$. $\square$

Capítulo 4

Operadores múltiplo (p,q)-s-somantes

Neste último capítulo, apresentamos alguns resultados concernentes à teoria de operadores multilineares que, conforme definimos a seguir, são múltiplo $(\mathbf{p},\mathbf{q})$-$\mathbf{s}$-somantes, dentre os quais destacamos o tamanho do conjunto desses operadores no sentido da lineabilidade; as definições e os resultados são apresentados numa perspectiva mais geral do que a apresentada por M. Maia em [34] (veja Definição 1.3.2), pois damos uma abordagem anisotrópica ao assunto.

4.1 Abordagem anisotrópica da teoria multilinear

Dados espaços de Banach $E_1,\ldots,E_m,F$, chamamos conjunto dos operadores múltiplo $(\mathbf{p},\mathbf{q})$-s-somantes (forte), o conjunto dos operadores $u\in\mathcal{L}\left(E_1,\ldots,E_m;F\right)$ que satisfazem a desigualdade (3.1) ou (3.5), se estivermos considerando a notação utilizada na Seção 2 do Capítulo 3, com $\mathbf{s}=(s_1,\ldots,s_m)$ fixo, $s_k\geq 0, k=1,\ldots,m$. Mais precisamente, definimos:

Definição 4.1.1. *Sejam $\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}\in(0,\infty)^m$, $\boldsymbol{s}\geq 0$ e $E_1,\cdots,E_m,F$ espaços de Banach. Um operador $m-$linear $u\in\mathcal{L}(E_1,\cdots,E_m;F)$ é chamado múltiplo $(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})$-$s-$somante se existir uma constante $C\geq 0$ tal que*

$$\left(\sum_{j_1=1}^{n_1}\left(\cdots\left(\sum_{j_m=1}^{n_m}\|u(x_{\boldsymbol{j}})\|^{p_m}\right)^{\frac{p_{m-1}}{p_m}}\cdots\right)^{\frac{p_1}{p_2}}\right)^{\frac{1}{p_1}}\leq C\prod_{i=1}^{m}n_i^{s_i}\prod_{i=1}^{m}\left\|\left(x_{k_i}^{(i)}\right)_{k_i=1}^{n}\right\|_{w,q_i} \tag{4.1}$$

para todo $n_i\in\mathbb{N}$, e todo $x_{k_i}^{(i)}\in E_i$, com $i=1,\cdots,m$. O conjunto de todos os operadores *múltiplo* $(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})$*-s-somantes é denotado por*

$$\Pi^{m-\boldsymbol{s}}_{(\boldsymbol{p};\boldsymbol{q})}\left(E_1, \ldots, E_m; F\right).$$

Proposição 4.1.2. *Sejam* $0 < q_k, p_k < \infty$ *e* E_k, F *espaços de Banach com* $k = 1, \ldots, m$*. Então existe* $\boldsymbol{s} \in [0, \infty)^m$ *tal que*

$$\mathcal{L}\left(E_1, \ldots, E_m; F\right) = \Pi^{m-\mathbf{s}}_{(\mathbf{p};\mathbf{q})}\left(E_1, \ldots, E_m; F\right).$$

Demonstração. É uma consequência imediata do Teorema 3.3.1, pois basta tomar $\mathbf{s} \geq \xi^{m-mult}_{(\mathbf{p};\mathbf{q})}(E_1 \times \cdots \times E_m; F)$. □

Proposição 4.1.3. $\prod^{m-\boldsymbol{s}}_{(\boldsymbol{p};\boldsymbol{q})}\left(E_1, \ldots, E_m; F\right)$ *é um subespaço vetorial de* $\mathcal{L}\left(E_1, \ldots, E_m; F\right)$*.*

Demonstração. Com efeito, dados $u, v \in \prod^{m-\mathbf{s}}_{(\mathbf{p};\mathbf{q})}\left(E_1, \ldots, E_m; F\right)$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, temos

$$\|u(x_{\mathbf{j}})\|_{\mathbf{p},\ \mathbf{n}} = \left(\sum_{j_1=1}^{n_1}\left(\cdots\left(\sum_{j_m=1}^{n_m}\|u(x_{\mathbf{j}})\|^{p_m}\right)^{\frac{p_{m-1}}{p_m}}\cdots\right)^{\frac{p_1}{p_2}}\right)^{\frac{1}{p_1}} \leq C_1\prod_{k=1}^{m} n_k^{s_{m,p_k,q_k}}\cdot\prod_{k=1}^{m}\|x^k\|_{\omega,q_k},$$

e

$$\|\lambda v(x_{\mathbf{j}})\|_{\mathbf{p},\ \mathbf{n}} = \left(\sum_{j_1=1}^{n_1}\left(\cdots\left(\sum_{j_m=1}^{n_m}\|\lambda v(x_{\mathbf{j}})\|^{p_m}\right)^{\frac{p_{m-1}}{p_m}}\cdots\right)^{\frac{p_1}{p_2}}\right)^{\frac{1}{p_1}} \leq C_2\prod_{k=1}^{m} n_k^{s_{m,p_k,q_k}}\cdot\prod_{k=1}^{m}\|x^k\|_{\omega,q_k}.$$

Precisamos mostrar que existe $C \geq 0$ tal que

$$\|(u+\lambda v)(x_{\mathbf{j}})\|_{\mathbf{p},\ \mathbf{n}} \leq C\prod_{k=1}^{m} n_k^{s_{m,p_k,q_k}}\cdot\prod_{k=1}^{m}\|x^k\|_{\omega,q_k}.$$

Com este fim, utilizemos, respectivamente, as desigualdades triangular e de Minkowski relativas ao índice j_m,

$$\begin{aligned}\|(u+\lambda v)(x_{\mathbf{j}})\|_{p_m,n_m} := \left(\sum_{j_m=1}^{n_m}\|u(x_{\mathbf{j}})+\lambda v(x_{\mathbf{j}})\|^{p_m}\right)^{\frac{1}{p_m}} &\leq \left(\sum_{j_m=1}^{n_m}\left(\|u(x_{\mathbf{j}})\|+\|\lambda v(x_{\mathbf{j}})\|\right)^{p_m}\right)^{\frac{1}{p_m}}\\ &\leq \left(\sum_{j_m=1}^{n_m}\|u(x_{\mathbf{j}})\|^{p_m}\right)^{\frac{1}{p_m}} + \left(\sum_{j_m=1}^{n_m}\|\lambda v(x_{\mathbf{j}})\|^{p_m}\right)^{\frac{1}{p_m}}\\ &= \|u(x_{\mathbf{j}})\|_{p_m,n_m} + \|\lambda v(x_{\mathbf{j}})\|_{p_m,n_m}.\end{aligned}$$

Tendo em vista a igualdade (3.4), utilizamos sucessivamente a desigualdade de Mincowski, agora começando pelo somatório de índice j_{m-1}, indo até o somatório de índice

j_1,

$$\begin{aligned}
\|u(x_{\mathbf{j}})+\lambda v(x_{\mathbf{j}})\|_{\mathbf{p},\ \mathbf{n}} &= \left\|\left\|\cdots\left\|\|u(x_{\mathbf{j}})+\lambda v(x_{\mathbf{j}})\|_{p_m,n_m}\right\|_{p_{m-1},n_{m-1}}\cdots\right\|_{p_2,n_2}\right\|_{p_1,n_1} \\
&\le \left\|\left\|\cdots\left\|\|u(x_{\mathbf{j}})\|_{p_m,n_m}+\|\lambda v(x_{\mathbf{j}})\|_{p_m,n_m}\right\|_{p_{m-1},n_{m-1}}\cdots\right\|_{p_2,n_2}\right\|_{p_1,n_1}
\end{aligned}$$

$$\le \left\|\left\|\cdots\left\|\left\|\|u(x_{\mathbf{j}})\|_{p_m,n_m}\right\|_{p_{m-1},n_{m-1}}+\left\|\|\lambda v(x_{\mathbf{j}})\|_{p_m,n_m}\right\|_{p_{m-1},n_{m-1}}\right\|_{p_{m-2},n_{m-2}}\cdots\right\|_{p_2,n_2}\right\|_{p_1,n_1}$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$\begin{aligned}
&\le \left\|\left\|\cdots\left\|\|u(x_{\mathbf{j}})\|_{p_m,n_m}\right\|_{p_{m-1},n_{m-1}}\cdots\right\|_{p_2,n_2}\right\|_{p_1,n_1}+ \\
&\quad \left\|\left\|\cdots\left\|\|\lambda v(x_{\mathbf{j}})\|_{p_m,n_m}\right\|_{p_{m-1},n_{m-1}}\cdots\right\|_{p_2,n_2}\right\|_{p_1,n_1} \\
&= \|u(x_{\mathbf{j}})\|_{\mathbf{p},\ \mathbf{n}}+\|\lambda v(x_{\mathbf{j}})\|_{\mathbf{p},\ \mathbf{n}} \le C\prod_{k=1}^{m} n_k^{s_{m,p_k,q_k}}\cdot\prod_{k=1}^{m}\|x^k\|_{\omega,q_k},
\end{aligned}$$

com $C=C_1+C_2$. □

Sejam $T\in\mathcal{L}(E_1,\ldots,E_m;F)$ e $\pi^{\mathbf{s}}_{\mathbf{p},\mathbf{q}}(T)$ o ínfimo das constantes C que verificam a desigualdade (4.1). Como usual, $\prod^{m}_{(\mathbf{p};\mathbf{q})}(E_1,\ldots,E_m;F)$ denota o espaço dos operadores múltiplo $(\mathbf{p},\mathbf{q})$-somantes e $\pi_{(\mathbf{p};\mathbf{q})}(\cdot)$ a norma desse espaço.

Observação 4.1.4. *Note que, quando* $\boldsymbol{s}=\boldsymbol{0}=(0,\ldots,0)$, *temos* $\prod^{m-\boldsymbol{0}}_{(\boldsymbol{p};\boldsymbol{q})}(E_1,\ldots,E_m;F)=\prod^{m}_{(\boldsymbol{p};\boldsymbol{q})}(E_1,\ldots,E_m;F)$. *Além disso, vale a inclusão*

$$\Pi^{m}_{(\boldsymbol{p};\boldsymbol{q})}(E_1,\ldots,E_m;F)\subset\Pi^{m-\boldsymbol{s}}_{(\boldsymbol{p};\boldsymbol{q})}(E_1,\ldots,E_m;F).$$

De fato, dado $u\in\prod^{m}_{(\boldsymbol{p};\boldsymbol{q})}(E_1,\ldots,E_m;F)$, *existe* $C\ge 0$ *tal que*

$$\|u(x_{\boldsymbol{j}})\|_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{n}}\le C\prod_{k=1}^{m}\|x^k\|_{\omega,q_k}. \tag{4.2}$$

Como $n_k^{s_{m,p_k,q_k}}\ge 1$ *para todos* $s_{m,p_k,q_k}\ge 0, k=1,\ldots,m$, *vale ainda*

$$\|u(x_{\boldsymbol{j}})\|_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{n}}\le C\prod_{k=1}^{m} n_k^{s_{m,p_k,q_k}}\prod_{k=1}^{m}\|x^k\|_{\omega,q_k}. \tag{4.3}$$

Portanto, todo operador absolutamente $(\boldsymbol{p};\boldsymbol{q})-$*somante é absolutamente* $(\boldsymbol{p};\boldsymbol{q})$-$\boldsymbol{s}$-*somante. Por outro lado, se for* $\xi^{m-mult}_{(\mathbf{p};\mathbf{q})}(E_1\times\cdots\times E_m)=\boldsymbol{0}$, *temos*

$$\begin{aligned}
\|u(x_{\boldsymbol{j}})\|_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{n}} &\le C\prod_{k=1}^{m} n_k^{\inf s_{m,p_k,q_k}}\prod_{k=1}^{m}\|x^k\|_{\omega,q_k} \\
&= C\prod_{k=1}^{m}\|x^k\|_{\omega,q_k},
\end{aligned}$$

isto é, $\mathcal{L}(E_1,\ldots,E_m;F)=\Pi^m_{(\boldsymbol{p};\boldsymbol{q})}(E_1,\ldots,E_m;F)$ *e, da inclusão acima,*

$$\Pi^{m-\boldsymbol{s}}_{(\boldsymbol{p};\boldsymbol{q})}(E_1,\ldots,E_m;F)=\Pi^m_{(\boldsymbol{p};\boldsymbol{q})}(E_1,\ldots,E_m;F).$$

Finalmente, observe que o ínfimo tomado sobre as constantes C *que satisfazem a desigualdade (4.3) é menor ou igual ao ínfimo tomado sobre as constantes* C *que satisfazem a desigualdade (4.2), em outras palavras,*

$$\pi^{\boldsymbol{s}}_{(\boldsymbol{p};\boldsymbol{q})}(u)\leq\pi_{(\boldsymbol{p};\boldsymbol{q})}(u).$$

Proposição 4.1.5. $\pi^{\boldsymbol{s}}_{(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})}$ *define uma norma em* $\prod^{m-\boldsymbol{s}}_{(\boldsymbol{p};\boldsymbol{q})}(E_1,\ldots,E_m;F)$ *que satisfaz as desigualdades*

$$\|\cdot\|\leq\pi^{\boldsymbol{s}}_{(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})}(\cdot)\leq\pi_{(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})}(\cdot).$$

Demonstração. Seja $u\in\prod^{m-\mathbf{s}}_{(\mathbf{p};\mathbf{q})}(E_1,\ldots,E_m;F)$. Como o ínfimo é tomado no conjunto de constantes $C\geq 0$, segue-se que $\pi^{\mathbf{s}}_{(\mathbf{p},\mathbf{q})}(u)\geq 0$. Se $u=0$, a desigualdade (3.5) é satisfeita para $C=0$, logo $\pi^{\mathbf{s}}_{(\mathbf{p},\mathbf{q})}(u)=0$. Por outro lado, quando $\pi^{\mathbf{s}}_{(\mathbf{p},\mathbf{q})}(u)=0$ tomamos $n_k=1, k=1,\ldots,m$, e a mesma desigualdade nos fornece $0\leq\|u\|_{\mathbf{p},\mathbf{n}}\leq C\prod_{k=1}^m\|x^k\|_{\omega,q_k}$, de onde vem $u=0$. Logo $\pi^{\mathbf{s}}_{(\mathbf{p},\mathbf{q})}(u)=0$ se, e somente se, $u=0$.

Agora, tendo em vista a desigualdade (3.5), dado $\lambda\in\mathbb{K}$, temos

$$\|\lambda u(x_{\mathbf{j}})\|_{\mathbf{p},\mathbf{n}}=|\lambda|\|u(x_{\mathbf{j}})\|_{\mathbf{p},\mathbf{n}}\leq|\lambda|\pi^{\mathbf{s}}_{(\mathbf{p},\mathbf{q})}(u)\prod_{k=1}^m n_k^{s_{m,p_k,q_k}}\prod_{k=1}^m\|x^k\|_{\omega,q_k}.$$

Como $\pi^{\mathbf{s}}_{\mathbf{p},\mathbf{q}}(\lambda u)$ é o ínfimo das constantes que satisfazem a desigualdade acima, obtemos

$$\pi^{\mathbf{s}}_{(\mathbf{p},\mathbf{q})}(\lambda u)\leq|\lambda|\pi^{\mathbf{s}}_{(\mathbf{p},\mathbf{q})}(u).$$

Por outro lado,

$$|\lambda|\|u(x_{\mathbf{j}})\|_{\mathbf{p},\mathbf{n}}=\|\lambda u(x_{\mathbf{j}})\|_{\mathbf{p},\mathbf{n}}\leq\pi^{\mathbf{s}}_{(\mathbf{p},\mathbf{q})}(\lambda u)\prod_{k=1}^m n_k^{s_{m,p_k,q_k}}\prod_{k=1}^m\|x^k\|_{\omega,q_k},$$

ou seja,

$$\|u(x_{\mathbf{j}})\|_{\mathbf{p},\mathbf{n}}\leq\frac{\pi^{\mathbf{s}}_{(\mathbf{p},\mathbf{q})}(\lambda u)}{|\lambda|}\prod_{k=1}^m n_k^{s_{m,p_k,q_k}}\prod_{k=1}^m\|x^k\|_{\omega,q_k}$$

que, por sua vez, nos fornece $\pi^{\mathbf{s}}_{(\mathbf{p},\mathbf{q})}(u)\leq\frac{\pi^{\mathbf{s}}_{(\mathbf{p},\mathbf{q})}(\lambda u)}{|\lambda|}$. Daí concluímos que $\pi^{\mathbf{s}}_{(\mathbf{p},\mathbf{q})}(\lambda u)=|\lambda|\pi^{\mathbf{s}}_{(\mathbf{p},\mathbf{q})}(u)$.

Para verificar a desigualdade triangular, considere, ainda $v\in\prod^{m-\mathbf{s}}_{(\mathbf{p},\mathbf{q})}(E_1,\ldots,E_m;F)$ e a desigualdade obtida na prova da Proposição (4.1.3), a saber,

$$\|u(x_{\mathbf{j}})+v(x_{\mathbf{j}})\|_{\mathbf{p},\mathbf{n}}\leq\|u(x_{\mathbf{j}})\|_{\mathbf{p},\mathbf{n}}+\|v(x_{\mathbf{j}})\|_{\mathbf{p},\mathbf{n}}.$$

Desse modo,

$$\begin{aligned}\|u(x_{\mathbf{j}})+v(x_{\mathbf{j}})\|_{\mathbf{p},\mathbf{n}} &\leq \pi^{\mathbf{s}}_{(\mathbf{p},\mathbf{q})}(u)\prod_{k=1}^{m} n_k^{s_{m,p_k,q_k}}\prod_{k=1}^{m}\|x^k\|_{\omega,q_k}+\pi^{\mathbf{s}}_{(\mathbf{p},\mathbf{q})}(v)\prod_{k=1}^{m} n_k^{s_{m,p_k,q_k}}\prod_{k=1}^{m}\|x^k\|_{\omega,q_k}\\ &= \left(\pi^{\mathbf{s}}_{(\mathbf{p},\mathbf{q})}(u)+\pi^{\mathbf{s}}_{(\mathbf{p},\mathbf{q})}(v)\right)\prod_{k=1}^{m} n_k^{s_{m,p_k,q_k}}\prod_{k=1}^{m}\|x^k\|_{\omega,q_k},\end{aligned}$$

de onde segue que $\pi^{\mathbf{s}}_{(\mathbf{p},\mathbf{q})}(u+v)\leq \pi^{\mathbf{s}}_{(\mathbf{p},\mathbf{q})}(u)+\pi^{\mathbf{s}}_{(\mathbf{p},\mathbf{q})}(v)$.

Finalmente, para mostrar a desigualdade das normas, tomamos $n_k = 1, k = 1,\ldots,m$, em (3.5) para obter a desigualdade

$$\|u(x_{\mathbf{j}})\| = \|u(x_{\mathbf{j}})\|_{\mathbf{p},\mathbf{1}} \leq \pi^{\mathbf{s}}_{(\mathbf{p},\mathbf{q})}(u)\prod_{k=1}^{m}\|x^k\|_{\omega,q_k},$$

onde $\mathbf{1}$ denota a $n-$upla $(1,\ldots,1)$. Como $n_k = 1$, temos

$$\|x^k\|_{\omega,q_k} = \sup_{\varphi\in E^*}|\varphi(x^k)| = \|x^k\| \text{ (Hahn–Banach)}$$

e, sendo

$$\|u\| = \inf\left\{C\geq 0; \|u(x_{\mathbf{j}})\|\leq C\prod_{k=1}^{m}\|x^k\|_{\omega,q_k}\right\},$$

obtemos $\|u\|\leq \pi^{\mathbf{s}}_{(\mathbf{p},\mathbf{q})}(u)$. A última desigualdade foi-nos apresentada na observação 4.1.4. $\square$

Proposição 4.1.6. *Se $0 < q_i, p_i < \infty$, para todo $i = 1,\cdots,m$, então*

$$\left(\Pi^{m-\boldsymbol{s}}_{(\boldsymbol{p};\boldsymbol{q})}(E_1,\cdots,E_m;F),\pi^{\boldsymbol{s}}_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}}\right)$$

é um espaço de Banach.

Demonstração. Seja $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência de Cauchy em $\left(\Pi^{m-\mathbf{s}}_{(\mathbf{p};\mathbf{q})}(E_1,\cdots,E_m;F),\pi^{\mathbf{s}}_{\mathbf{p},\mathbf{q}}\right)$. Como $\|\cdot\|\leq \pi^{\mathbf{s}}_{\mathbf{p},\mathbf{q}}(\cdot)$, temos $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ é de Cauchy em $\mathcal{L}(E_1,\cdots,E_m;F)$ que é Banach, logo $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ converge para algum $u\in\mathcal{L}(E_1,\cdots,E_m;F)$. Vamos mostrar que $u\in\Pi^{m-\mathbf{s}}_{(\mathbf{p};\mathbf{q})}(E_1,\cdots,E_m;F)$. Com efeito, dado $\varepsilon>0$ existe $m_0\in\mathbb{N}$ tal que, para todos $m_1,m_2\geq m_0$,

$$\pi^{\mathbf{s}}_{\mathbf{p},\mathbf{q}}(u_{m_1}-u_{m_2})\leq\epsilon$$

e, sendo $\pi^{\mathbf{s}}_{\mathbf{p},\mathbf{q}}$ o ínfimo das constantes que satisfazem (3.5), podemos escrever

$$\|u_{m_1}(x_{\mathbf{j}})-u_{m_2}(x_{\mathbf{j}})\|_{\mathbf{p},\mathbf{n}}\leq\varepsilon\prod_{k=1}^{m} n_k^{s_{m,p_k,q_k}}\cdot\prod_{k=1}^{m}\|x^k\|_{\omega,q_k}.$$

Fazendo $m_2\to\infty$, obtemos

$$\|u_{m_1}(x_{\mathbf{j}})-u(x_{\mathbf{j}})\|_{\mathbf{p},\mathbf{n}}\leq\varepsilon\prod_{k=1}^{m} n_k^{s_{m,p_k,q_k}}\cdot\prod_{k=1}^{m}\|x^k\|_{\omega,q_k},$$

ou seja, $u_{m_1} - u \in \Pi^{mult-s}_{(\mathbf{p};\mathbf{q})}(E_1, \cdots, E_m; F)$. Uma vez que a Proposição 4.1.3 nos garante que $\Pi^{mult-s}_{(\mathbf{p};\mathbf{q})}(E_1, \cdots, E_m; F)$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{L}(E_1, \cdots, E_m; F)$, obtemos finalmente

$$u = u_{m_1} - (u_{m_1} - u) \in \Pi^{mult-s}_{(\mathbf{p};\mathbf{q})}(E_1, \cdots, E_m; F).$$

□

4.2 Lineabilidade

Trazemos aqui a questão da lineabilidade num conjunto de operadores multilineares não múltiplo somantes, a saber, indagamos se há resposta para o seguinte problema:

Problema 4.2.1. *Dados espaços de Banach $E_1, \ldots, E_m, F$, o conjunto*

$$\Pi^{m-\boldsymbol{s}}_{(\boldsymbol{p};\boldsymbol{q})}(E_1, ..., E_m; F) \setminus \Pi^{m}_{(\boldsymbol{p};\boldsymbol{q})}(E_1, ..., E_m; F)$$

é lineável?

Em vista da inclusão $\Pi^{m-\mathbf{s}}_{(\mathbf{p};\mathbf{q})}(E_1, ..., E_m; \ell_\infty) \subset \mathcal{L}(E_1, ..., E_m; \ell_\infty)$, o Problema 4.2.1 é mais "forte" do que o problema da lineabilidade de

$$\mathcal{L}(E_1, ..., E_m; F) \setminus \Pi^{m}_{(\mathbf{p};\mathbf{q})}(E_1, ..., E_m; F),$$

que valerá como consequência imediata da inclusão acima. Quando $F = \ell_\infty$, a resposta para o Problema 4.2.1 é positiva. O próximo resultado apresenta-nos uma demonstração para esta assertiva que está baseada em [40].

Proposição 4.2.2. *Sejam $E_1, ..., E_m$ espaços de Banach, $\boldsymbol{s} \geq 0$ e $\boldsymbol{p},\boldsymbol{q} \in [1, +\infty)^m$. Então*

$$\Pi^{m-\boldsymbol{s}}_{(\boldsymbol{p};\boldsymbol{q})}(E_1, ..., E_m; \ell_\infty) \setminus \Pi^{m}_{(\boldsymbol{p};\boldsymbol{q})}(E_1, ..., E_m; \ell_\infty)$$

é vazio ou $\mathfrak{c}-$lineável, onde $\mathfrak{c}$ é a cardinalidade de $\mathbb{R}$.

Demonstração. Dados $\mathbf{p},\mathbf{q} \in [1, +\infty)^m$, $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_m)$ e $\mathbf{q} = (q_1, \ldots, q_m)$, suponhamos que exista

$$u \in \Pi^{m-\mathbf{s}}_{(\mathbf{p};\mathbf{q})}(E_1, ..., E_m; \ell_\infty) \setminus \Pi^{m}_{(\mathbf{p};\mathbf{q})}(E_1, ..., E_m; \ell_\infty).$$

Então $u \notin \Pi^{m}_{(\mathbf{p};\mathbf{q})}(E_1, ..., E_m; \ell_\infty)$ e, pelo item (2) da Proposição 2.1.3, existem $(x_j^{(k)})_{j\in\mathbb{N}} \in \ell^w_{q_k}(E_k)$, $k = 1, ..., m$, tais que

$$(u(x_{\mathbf{j}}))_{\mathbf{j}\in\mathbb{N}^m} \notin \ell_{\mathbf{p}}(\ell_\infty), \quad \text{onde } x_{\mathbf{j}} = \left(x^{(1)}_{j_1}, ..., x^{(m)}_{j_m}\right),$$

ou seja,

$$\left\|u\left(x_{\mathbf{j}}\right)\right\|_{\mathbf{p}}:=\left(\sum_{j_1=1}^{\infty}\left(\cdots\left(\sum_{j_m=1}^{\infty}\|u(x_{\mathbf{j}})\|_{\infty}^{p_m}\right)^{\frac{p_{m-1}}{p_m}}\cdots\right)^{\frac{p_1}{p_2}}\right)^{\frac{1}{p_1}}=\infty. \tag{4.4}$$

Utilizando um argumento padrão, a saber, o de decompor $\mathbb{N}$ como uma união enumerável $\mathbb{N}=\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k$ de subconjuntos infinitos $A_k=\left\{a_1^{(k)},a_2^{(k)},\cdots\right\}$ disjuntos ($A_i\cap A_j=\emptyset$, sempre que $i\neq j$), consideremos $\ell_\infty^{(k)}:=\{x\in\ell_\infty : x_j=0,\ \text{se } j\notin A_k\}$ e, para cada inteiro positivo k, definamos $u_k:E_1\times\cdots\times E_m\to\ell_\infty^{(k)}$ por

$$u_k\left(z_1,...,z_m\right)_{a_j^{(k)}}=u\left(z_1,...,z_m\right)_j$$

para todo inteiro positivo j; mais precismente, escrevendo $z=(z_1,\ldots,z_m)$, definimos a j-ésima entrada de $u_k(z)$ por

$$(u_k(z))_j=\begin{cases}0, & j\notin A_k\\ u(z)_l, & j=a_l^{(k)}\in A_k.\end{cases}$$

Consideremos, ainda, as inclusões canônicas $\iota_k:\ell_\infty^{(k)}\to\ell_\infty$ e os operadores

$$v_k=\iota_k\circ u_k:E_1\times\cdots\times E_m\to\ell_\infty.$$

Observemos que, uma vez que os subconjuntos A_k's têm infinitos elementos, as sequências $v_k\left(z\right),u_k\left(z\right)$ e $u\left(z\right)$ têm as mesmas componentes se ignorarmos os zeros intercalados entre elas. Ou seja, para cada inteiro positivo k e todo $z\in E_1\times\cdots\times E_m$, valem as igualdades

$$\left\|v_k\left(z\right)\right\|_\infty=\left\|u_k\left(z\right)\right\|_\infty=\left\|u\left(z\right)\right\|_\infty.$$

Assim, tendo em vista a igualdade (4.4), obtemos

$$\left\|v_k\left(x_{\mathbf{j}}\right)\right\|_{\mathbf{p}}=\left\|u\left(x_{\mathbf{j}}\right)\right\|_{\mathbf{p}}=\infty$$

para todo inteiro positivo k e, uma vez que $u\in\Pi_{(\mathbf{p};\mathbf{q})}^{m-\mathbf{s}}\left(E_1,...,E_m;\ell_\infty\right)$, vale também

$$\begin{aligned}\left\|v_k\left(z_{\mathbf{j}}\right)\right\|_{\mathbf{p},\mathbf{n}}&=\left\|u\left(z_{\mathbf{j}}\right)\right\|_{\mathbf{p},\mathbf{n}}\\&\leq C\prod_{i=1}^{m}n_i^{s_i}\prod_{i=1}^{m}\|\left(z_{j_i}^{(i)}\right)_{j_i=1}^{n}\|_{w,q_i}\end{aligned}$$

para todo inteiro positivo k e todos $(z_j^{(k)})_{j\in\mathbb{N}}\in\ell_{q_k}^{w}\left(E_k\right),\ k=1,...,m,.$ Desse modo, concluímos que

$$v_k\in\Pi_{(\mathbf{p};\mathbf{q})}^{m-\mathbf{s}}\left(E_1,...,E_m;\ell_\infty\right)\backslash\Pi_{(\mathbf{p};\mathbf{q})}^{m}\left(E_1,...,E_m;\ell_\infty\right),$$

para todo inteiro positivo k. Provemos agora que o conjunto $\{v_1, v_2, ...\}$ é linearmente independente. De fato, uma vez que os operadores $v_1, v_2, \ldots$ têm suportes disjuntos, isto é, para todo $z \in E_1 \times \cdots \times E_m$,

$$\{n \in \mathbb{N}; v_i(z)_n \neq 0\} \bigcap \{n \in \mathbb{N}; v_j(z)_n \neq 0\} = \emptyset$$

sempre que $i \neq j$, temos, para todo $z \in E_1 \times \cdots \times E_m$,

$$\begin{aligned}\left\| \sum_{k=1}^{r} \alpha_k v_k\,(z) \right\|_\infty &= \max_{1 \le k \le r} |\alpha_k| \|v_k(z)\|_\infty \\ &= \max_{1 \le k \le r} |\alpha_k| \|u(z)\|_\infty\end{aligned}$$

para todo inteiro positivo r e quaisquer escalares $\alpha_k \neq 0, k = 1, \ldots, r$, pelo que $\sum_{k=1}^{r} \alpha_k v_k\,(z) = 0$ implica $\max_{1 \le k \le r} |\alpha_k| \|u(z)\|_\infty = 0$ para todo z e, como $u \neq 0$, obtemos $\max_{1 \le k \le r} |\alpha_k| = 0$, logo $\alpha_k = 0, k = 1, \ldots, m$. Vejamos agora que o espaço gerado pelos operadores $v_1, v_2, \ldots$ está contido em

$$\Pi^{m-\mathbf{s}}_{(\mathbf{p};\mathbf{q})}\,(E_1, ..., E_m; \ell_\infty) \backslash \Pi^{m}_{(\mathbf{p};\mathbf{q})}\,(E_1, ..., E_m; \ell_\infty) \bigcup \{0\}\,.$$

Com efeito, para todo $z \in E_1 \times \cdots E_m$ e quaisquer escalares não nulos $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$, temos

$$\begin{aligned}\|\textstyle\sum_{k=1}^{r} \alpha_k v_k\,(z)\|_{\mathbf{p}} &= \left(\textstyle\sum_{j_1=1}^{\infty} \left(\cdots \left(\sum_{j_m=1}^{\infty} \|\sum_{k=1}^{r} \alpha_k v_k\,(z)\|_\infty^{p_m} \right)^{\frac{p_{m-1}}{p_m}} \cdots \right)^{\frac{p_1}{p_2}} \right)^{\frac{1}{p_1}} \\ &= \max\nolimits_{1 \le k \le r} |\alpha_k| \left(\textstyle\sum_{j_1=1}^{\infty} \left(\cdots \left(\sum_{j_m=1}^{\infty} \|u\,(z)\|_\infty^{p_m} \right)^{\frac{p_{m-1}}{p_m}} \cdots \right)^{\frac{p_1}{p_2}} \right)^{\frac{1}{p_1}} \\ &= \max\nolimits_{1 \le k \le r} |\alpha_k|\, \|u\,(z)\|_{\mathbf{p}}\,,\end{aligned}$$

e, de forma similar, temos também $\|\sum_{k=1}^{r} \alpha_k v_k\,(z)\|_{\mathbf{p},\mathbf{n}} = \max_{1 \le k \le r} |\alpha_k|\, \|u\,(z)\|_{\mathbf{p},\mathbf{n}}$. Daí

$$\left\| \sum_{k=1}^{r} \alpha_k v_k\,(x_{\mathbf{j}}) \right\|_{\mathbf{p}} = \max_{1 \le k \le r} |\alpha_k|\, \|u\,(x_{\mathbf{j}})\|_{\mathbf{p}} = \infty$$

e, para todos $(z_j^{(k)})_{j \in \mathbb{N}} \in \ell_{q_k}^{w}\,(E_k)\,, k = 1, ..., m,$

$$\begin{aligned}\left\| \sum_{k=1}^{r} \alpha_k v_k\,(z_{\mathbf{j}}) \right\|_{\mathbf{p},\mathbf{n}} &= \max_{1 \le k \le r} |\alpha_k|\, \|u\,(z_{\mathbf{j}})\|_{\mathbf{p},\mathbf{n}} \\ &\le C \max_{1 \le k \le r} |\alpha_k| \prod_{i=1}^{m} n_i^{s_i} \prod_{i=1}^{m} \| \left(z_{j_i}^{(i)} \right)_{j_i=1}^{n} \|_{w,q_i}\end{aligned}$$

nos fornecem a pertinência

$$\sum_{k=1}^{r} \alpha_k v_k \in \Pi^{m-\mathbf{s}}_{(\mathbf{p};\mathbf{q})}\,(E_1, ..., E_m; \ell_\infty) \backslash \Pi^{m}_{(\mathbf{p};\mathbf{q})}\,(E_1, ..., E_m; \ell_\infty)\,.$$

Resta-nos mostrar que o espaço gerado por $\{v_1, v_2 \ldots\}$ tem cardinalidade $\mathfrak{c}$. Para esse fim, consideremos o operador

$$S : \ell_1 \to \Pi^{m-\mathbf{s}}_{(\mathbf{p};\mathbf{q})}\left(E_1, ..., E_m; \ell_\infty\right)$$

dado por $S\left((a_k)_{k=1}^\infty\right) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k v_k$. Provemos que S está bem definido. De fato, dados $(a_k)_{k=1}^\infty \in \ell_1$ e $z \in E_1 \times \cdots \times E_m$, temos

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_k v_k(z) \right\|_\infty \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \left\| v_k(z) \right\|_\infty = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \left\| u(z) \right\|_\infty < \infty$$

e, como consequência,

$$\begin{aligned}
\left\| \left(S\left((a_k)_{k=1}^\infty\right)\right)(z_{\mathbf{j}}) \right\|_{\mathbf{p},\mathbf{n}} &= \left(\sum_{j_1=1}^{n_1} \left(\cdots \left(\sum_{j_m=1}^{n_m} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_k v_k\left(z_{\mathbf{j}}\right) \right\|_\infty^{p_m} \right)^{\frac{p_{m-1}}{p_m}} \cdots \right)^{\frac{p_1}{p_2}} \right)^{\frac{1}{p_1}} \\
&\leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \left(\sum_{j_1=1}^{n_1} \left(\cdots \left(\sum_{j_m=1}^{n_m} \left\| u\left(z_{\mathbf{j}}\right) \right\|_\infty^{p_m} \right)^{\frac{p_{m-1}}{p_m}} \cdots \right)^{\frac{p_1}{p_2}} \right)^{\frac{1}{p_1}} \\
&\leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| C \prod_{i=1}^{m} n_i^{s_i} \prod_{i=1}^{m} \| \left(z_{j_i}^{(i)}\right)_{j_i=1}^{n} \|_{w,q_i}.
\end{aligned}$$

para todos $(z_j^{(k)})_{j\in\mathbb{N}} \in \ell_{q_k}^w\left(E_k\right)$, $k = 1, ..., m$. Como $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k| < \infty$, obtemos

$$S\left((a_k)_{k=1}^\infty\right)(z) \in \Pi^{m-\mathbf{s}}_{(\mathbf{p};\mathbf{q})}\left(E_1, ..., E_m; \ell_\infty\right)$$

para todo $z \in E_1 \times \cdots \times E_m$. Agora observe que S é linear e, uma vez que os v_k têm suportes disjuntos, S é também injetivo; com efeito, $S\left((a_k)_{k=1}^\infty\right)(z) = 0$ implica

$$0 = \left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_k v_k(z) \right\|_\infty \geq \left\| a_{k_0} v_{k_0}(z) \right\|_\infty$$

para qualquer índice k_0 e, uma vez que $v_{k_0} \neq 0$ para todo k_0, resulta $a_k = 0$ para todo índice k. Finalmente, considerando a desigualdade acima novamente e $(a_k)_{k=1}^\infty \in$

$\ell_1 \backslash \{0\}$, seja k_0 tal que $a_{k_0} \neq 0$. Nessas condições, temos

$$\begin{aligned}
\left\| \left(S\left((a_k)_{k=1}^{\infty} \right) \right) (x_{\mathbf{j}}) \right\|_{\mathbf{p}} &= \left(\sum_{j_1=1}^{\infty} \left(\cdots \left(\sum_{j_m=1}^{\infty} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_k v_k \left(x_{\mathbf{j}} \right) \right\|_{\infty}^{p_m} \right)^{\frac{p_{m-1}}{p_m}} \cdots \right)^{\frac{p_1}{p_2}} \right)^{\frac{1}{p_1}} \\
&\geq \left(\sum_{j_1=1}^{\infty} \left(\cdots \left(\sum_{j_m=1}^{\infty} \left\| a_{k_0} v_{k_0} (x_{\mathbf{j}}) \right\|_{\infty}^{p_m} \right)^{\frac{p_{m-1}}{p_m}} \cdots \right)^{\frac{p_1}{p_2}} \right)^{\frac{1}{p_1}} \\
&= |a_{k_0}| \left(\sum_{j_1=1}^{\infty} \left(\cdots \left(\sum_{j_m=1}^{\infty} \left\| u(x_{\mathbf{j}}) \right\|_{\infty}^{p_m} \right)^{\frac{p_{m-1}}{p_m}} \cdots \right)^{\frac{p_1}{p_2}} \right)^{\frac{1}{p_1}} \\
&= \infty.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$S(\ell_1) \subset \left(\Pi_{(\mathbf{p};\mathbf{q})}^{m-\mathbf{s}} \left(E_1, ..., E_m; \ell_\infty \right) \backslash \Pi_{(\mathbf{p},\mathbf{q})}^{m} \left(E_1, ..., E_m; \ell_\infty \right) \right) \bigcup \{0\}$$

e, desde que ℓ_1 tem cardinalidade $\mathfrak{c}$, concluímos que

$$\Pi_{(\mathbf{p};\mathbf{q})}^{m-\mathbf{s}} \left(E_1, ..., E_m; \ell_\infty \right) \backslash \Pi_{(\mathbf{p};\mathbf{q})}^{m} \left(E_1, ..., E_m; \ell_\infty \right)$$

é $\mathfrak{c}-$lineável. □

Corolário 4.2.3. *Sejam $E_1, ..., E_m$ espaços de Banach e $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q} \in [1, +\infty)^m$. Então*

$$\mathcal{L} \left(E_1, ..., E_m; \ell_\infty \right) \backslash \Pi_{(\boldsymbol{p};\boldsymbol{q})}^{m} \left(E_1, ..., E_m; \ell_\infty \right)$$

é vazio ou $\mathfrak{c}-$lineável.

Demonstração. Resulta imediatamente da inclusão

$$\Pi_{(\mathbf{p};\mathbf{q})}^{m-\mathbf{s}} \left(E_1, ..., E_m; \ell_\infty \right) \subset \mathcal{L} \left(E_1, ..., E_m; \ell_\infty \right).$$

□

Apêndices

Apêndice A

Desigualdade de Minkowski generalizada

Neste apêndice, expomos um resultado complementar que generaliza uma desigualdade, frequentemente creditada a Minkowski, o qual permite-nos obter um corolário que complementa o Teorema 3.7.3 (Teorema 3.2 de [41]).

Consideremos a desigualdade que é creditada a Minkowski:

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{\infty}|a_{i,j}|^{p}\right)^{\frac{q}{p}}\right)^{\frac{1}{q}} \leq \left(\sum_{j=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{\infty}|a_{i,j}|^{q}\right)^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{1}{p}}$$

sempre que $1 \leq p \leq q$. Assim, quando $m = 2$ e $1 \leq p \leq q$, a igualdade (3.3) nos diz que

$$\|\mathbf{x}\|_{(p,q)} = \left\|\|x_{\mathbf{j}}\|_{p}\right\|_{q} \leq \left\|\|x_{\mathbf{j}}\|_{q}\right\|_{p} = \|\mathbf{x}\|_{(q,p)}. \tag{A.1}$$

Vejamos agora o caso $m = 3$ com $1 \leq p_1 \leq p_2 \leq p_3$:

$$\begin{aligned}
\left\|\left\|\|x_{\mathbf{j}}\|_{p_1}\right\|_{p_2}\right\|_{p_3} &\overset{(A.1,p_1\leq p_2)}{\leq} \left\|\left\|\|x_{\mathbf{j}}\|_{p_2}\right\|_{p_1}\right\|_{p_3} \\
&\overset{(A.1,p_1\leq p_3)}{\leq} \left\|\left\|\|x_{\mathbf{j}}\|_{p_2}\right\|_{p_3}\right\|_{p_1} \\
&\overset{(A.1,p_2\leq p_3)}{\leq} \left\|\left\|\|x_{\mathbf{j}}\|_{p_3}\right\|_{p_2}\right\|_{p_1},
\end{aligned}$$

que também pode ser escrito do seguinte modo:

$$\left\|\left\|\|x_{\mathbf{j}}\|_{p_1}\right\|_{p_2}\right\|_{p_3} \overset{(A.1, p_2\leq p_3)}{\leq} \left\|\left\|\|x_{\mathbf{j}}\|_{p_1}\right\|_{p_3}\right\|_{p_2} \overset{(A.1, p_1\leq p_3)}{\leq} \left\|\left\|\|x_{\mathbf{j}}\|_{p_3}\right\|_{p_1}\right\|_{p_2} \overset{(A.1, p_1\leq p_2)}{\leq} \left\|\left\|\|x_{\mathbf{j}}\|_{p_3}\right\|_{p_2}\right\|_{p_1}.$$

Escrevendo $\mathbf{x} = (x_{\mathbf{j}})$, vamos destacar a desigualdade

$$\left\|\left\|\|x_{\mathbf{j}}\|_{p_1}\right\|_{p_2}\right\|_{p_3} \leq \left\|\left\|\|x_{\mathbf{j}}\|_{p_3}\right\|_{p_2}\right\|_{p_1}$$

que, por um argumento de indução padrão, resulta em

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{x}\|_{(p_1,\ldots,p_m)} &= \left\|\left\|\cdots\left\|\|x_{\mathbf{j}}\|_{p_1}\right\|_{p_2}\cdots\right\|_{p_{m-1}}\right\|_{p_m} \\
&\leq \left\|\left\|\cdots\left\|\|x_{\mathbf{j}}\|_{p_m}\right\|_{p_{m-1}}\cdots\right\|_{p_2}\right\|_{p_1} \\
&= \|\mathbf{x}\|_{(p_m,\ldots,p_1)}
\end{aligned}$$

sempre que $1 \leq p_1 \leq \cdots \leq p_m$. Em outras palavras, obtemos uma generalização para a desigualdade de Minkoswski, cujo enunciado é o seguinte:

Proposição A.1 (Desigualdade de Minkowski generalizada)**.** *Se* $1 \leq p_1 \leq \cdots \leq p_m$, *então*

$$\left(\sum_{j_m=1}^{\infty}\left(\cdots\left(\sum_{j_1=1}^{\infty}|a_{j_1,\ldots,j_m}|^{p_1}\right)^{\frac{p_2}{p_1}}\cdots\right)^{\frac{p_m}{p_{m-1}}}\right)^{\frac{1}{p_m}}$$

$$\leq \left(\sum_{j_1=1}^{\infty}\left(\cdots\left(\sum_{j_m=1}^{\infty}|a_{j_1,\ldots,j_m}|^{p_m}\right)^{\frac{p_{m-1}}{p_m}}\cdots\right)^{\frac{p_1}{p_2}}\right)^{\frac{1}{p_1}}.$$

De um modo mais geral, note que, sempre que $p_i \leq p_{i+1}, i = 1, \ldots, m$, vale

$$\|\mathbf{x}\|_{(p_1,\ldots,p_i,p_{i+1},\ldots,p_m)} \leq \|\mathbf{x}\|_{(p_1,\ldots,p_{i+1},p_i,\ldots,p_m)} \tag{A.2}$$

Dessa forma, obtemos um corolário para o Teorema 3.7.3:

Corolário A.2. *Sejam* $p_i \in [1,\infty]\,, q_i \in [1,\infty)\,.$ *Se* $q_{i+1} \geq q_i$ *para algum* $i = 1, \ldots, m-1$, *e existe* $C > 0$ *tal que, para todo* $T \in \mathcal{L}\left(\ell_{p_1}, \ldots, \ell_{p_m}; F\right)$,

$$\left(\sum_{j_1=1}^{\infty}\left(\cdots\left(\sum_{j_m=1}^{\infty}\|T(e_{j_1},\ldots,e_{j_m})\|^{q_m}\right)^{\frac{q_{m-1}}{q_m}}\cdots\right)^{\frac{p_1}{q_2}}\right)^{\frac{1}{q_1}} \leq C\,\|T\|\,,$$

então, para todos espaços de Banach $E_1,\ldots,E_m$, temos

$$\mathcal{L}\left(E_1,\ldots,E_m;F\right)=\Pi^m_{(q_1,q_2\ldots,q_{i-1},q_{i+1},q_i,q_{i+2},\ldots,q_m;p_1^*,\ldots,p_m^*)}\left(E_1,\ldots,E_m;F\right).$$

Em particular, se $q_{i+1}\geq q_i$ para todo $i=1,\ldots,m-1$, obtemos

$$\mathcal{L}\left(E_1,\ldots,E_m;F\right)=\Pi^m_{(q_m,\ldots,q_1;p_1^*,\ldots,p_m^*)}\left(E_1,\ldots,E_m;F\right).$$

Demonstração. Por simplicidade, suponhamos que seja $q_2\geq q_1$. Neste caso, segue da desigualdade (A.2) que

$$\left(\sum_{j_1=1}^{\infty}\left(\sum_{j_1=1}^{\infty}\left(\cdots\left(\sum_{j_m=1}^{\infty}\|T(e_{j_1},\ldots,e_{j_m})\|^{q_m}\right)^{\frac{q_{m-1}}{q_m}}\cdots\right)^{\frac{q_1}{q_3}}\right)^{\frac{q_2}{q_1}}\right)^{\frac{1}{q_2}}$$

$$\leq\left(\sum_{j_1=1}^{\infty}\left(\sum_{j_1=1}^{\infty}\left(\cdots\left(\sum_{j_m=1}^{\infty}\|T(e_{j_1},\ldots,e_{j_m})\|^{q_m}\right)^{\frac{q_{m-1}}{q_m}}\cdots\right)^{\frac{q_2}{q_3}}\right)^{\frac{q_1}{q_2}}\right)^{\frac{1}{q_1}}.$$

Consequentemente, a implicação (1) $\Rightarrow$ (2) do Teorema 3.7.3 fornece

$$\mathcal{L}\left(E_1,\ldots,E_m;F\right)=\Pi^m_{(q_2,q_1,q_3,\ldots,q_m;p_1^*,\ldots,p_m^*)}\left(E_1,\ldots,E_m;F\right).$$

Em particular, se $q_{i+1}\geq q_i$ para todo $i=1,\ldots,m-1$, da desigualdade de Minkowski generalizada (Proposição A.1) vem

$$\left(\sum_{j_1=1}^{\infty}\left(\cdots\left(\sum_{j_m=1}^{\infty}\|T(e_{j_1},\ldots,e_{j_m})\|^{q_1}\right)^{\frac{q_2}{q_1}}\cdots\right)^{\frac{q_m}{q_{m-1}}}\right)^{\frac{1}{q_m}}$$

$$\leq\left(\sum_{j_1=1}^{\infty}\left(\cdots\left(\sum_{j_m=1}^{\infty}\|T(e_{j_1},\ldots,e_{j_m})\|^{q_m}\right)^{\frac{q_{m-1}}{q_m}}\cdots\right)^{\frac{q_1}{q_2}}\right)^{\frac{1}{q_1}}.$$

Usando novamente a implicação (1) $\Rightarrow$ (2) do Teorema 3.7.3, obtemos

$$\mathcal{L}\left(E_1,\ldots,E_m;F\right)=\Pi^m_{(q_m,\ldots,q_1;p_1^*,\ldots,p_m^*)}\left(E_1,\ldots,E_m;F\right).$$

$\square$

Apêndice B

Caso $n = 3$ da igualdade 3.21

Neste apêndice, consideremos um caso particular do operador S definido na demonstração da Proposição 3.6.2, a saber, $S : \ell_{r_1}^3 \times \ell_{r_2}^3 \times \ell_{r_3}^3 \to \mathbb{K}$ dado por

$$S(x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}) = \sum_{i=1}^{3} x_i^{(1)} x_i^{(2)} x_i^{(3)}.$$

Já vimos que $S(e^{(j_1)}, e^{(j_2)}, e^{(j_3)}) = \sum_{i=1}^{m} e_i^{(j_1)} e_i^{(j_2)} e_i^{(j_3)} = 1$ quando $j_1 = j_2 = j_3 = i$ e $S(e^{(j_1)}, e^{(j_2)}, x^{(j_3)}) = 0$, caso contrário. Desse modo,

$$\begin{aligned}
\sum_{j_2=1}^{3}\sum_{j_3=1}^{3} S(e^{(1)}, e^{(j_2)}, e^{(j_3)}) &= e_1^{(1)} e_1^{(1)} e_1^{(1)} = 1, \\
\sum_{j_2=1}^{3}\sum_{j_3=1}^{3} S(e^{(2)}, e^{(j_2)}, e^{(j_3)}) &= e_2^{(2)} e_2^{(2)} e_2^{(2)} = 1, \\
\sum_{j_2=1}^{3}\sum_{j_3=1}^{3} S(e^{(3)}, e^{(j_2)}, e^{(j_3)}) &= e_3^{(3)} e_3^{(3)} e_3^{(3)} = 1.
\end{aligned}$$

Vamos desenvolver o somatório em j_1 como segue

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{j_1=1}^{3}\left(\sum_{j_2=1}^{3}\left(\sum_{j_m=1}^{3}\left|S(e^{(j_1)}, e^{(j_2)}, e^{(j_3)})\right|^{p_3}\right)^{\frac{p_2}{p_3}}\right)^{\frac{p_1}{p_2}}\right)^{\frac{1}{p_1}} \\
&= \left[\left(\sum_{j_2=1}^{3}\left(\sum_{j_3=1}^{3}\left|S(e^{(1)}, e^{(j_2)}, e^{(j_3)})\right|^{p_3}\right)^{\frac{p_2}{p_3}}\right)^{\frac{p_1}{p_2}} + \right. \\
&\quad \left(\sum_{j_2=1}^{3}\left(\sum_{j_3=1}^{3}\left|S(e^{(2)}, e^{(j_2)}, e^{(j_3)})\right|^{p_3}\right)^{\frac{p_2}{p_3}}\right)^{\frac{p_1}{p_2}} + \\
&\quad \left.\left(\sum_{j_2=1}^{3}\left(\sum_{j_3=1}^{3}\left|S(e^{(3)}, e^{(j_2)}, e^{(j_3)})\right|^{p_3}\right)^{\frac{p_2}{p_3}}\right)^{\frac{p_1}{p_2}}\right]^{\frac{1}{p_1}}
\end{aligned}$$

Consideremos a primeira das três parcelas acima, a saber,

$$\left(\sum_{j_2=1}^{3}\left(\sum_{j_3=1}^{3}\left|S(e^{(1)},e^{(j_2)},e^{(j_3)})\right|^{p_3}\right)^{\frac{p_2}{p_3}}\right)^{\frac{p_1}{p_2}},$$

e vejamos como fica a soma em j_2:

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{j_2=1}^{3}\left(\sum_{j_3=1}^{3}\left|S(e^{(1)},e^{(j_2)},e^{(j_3)})\right|^{p_3}\right)^{\frac{p_2}{p_3}}\right)^{\frac{p_1}{p_2}} &= \left(\left(\sum_{j_3=1}^{3}\left|S(e^{(1)},e^{(1)},e^{(j_3)})\right|^{p_3}\right)^{\frac{p_2}{p_3}}+\right.\\
&\left.\left(\sum_{j_3=1}^{3}\left|S(e^{(1)},e^{(2)},e^{(j_3)})\right|^{p_3}\right)^{\frac{p_2}{p_3}}+\left(\sum_{j_3=1}^{3}\left|S(e^{(1)},e^{(3)},e^{(j_3)})\right|^{p_3}\right)^{\frac{p_2}{p_3}}\right)^{\frac{p_1}{p_2}}\\
&= \left(\left(\sum_{j_3=1}^{3}\left|S(e^{(1)},e^{(1)},e^{(j_3)})\right|^{p_3}\right)^{\frac{p_2}{p_3}}+0+0\right)^{\frac{p_1}{p_2}}\\
&= \left((1^{p_3})^{\frac{p_2}{p_3}}\right)^{\frac{p_1}{p_2}} = 1.
\end{aligned}$$

Analogamente ocorre o mesmo com as outras duas parcelas da soma, ou seja,

$$\begin{aligned}
&\left(\textstyle\sum_{j_1=1}^{3}\left(\sum_{j_2=1}^{3}\left(\sum_{j_m=1}^{3}\left|S(e^{(j_1)},e^{(j_2)},e^{(j_3)})\right|^{p_3}\right)^{\frac{p_2}{p_3}}\right)^{\frac{p_1}{p_2}}\right)^{\frac{1}{p_1}}\\
&= [1+1+1]^{\frac{1}{p_1}} = 3^{\frac{1}{p_1}}.
\end{aligned}$$

Referências Bibliográficas

[1] N. Albuquerque, G. Araújo, M. Maia, T. Nogueira, D. Pellegrino, J. Santos, *Optimal Hardy–Littlewood inequalities uniformly bounded by a universal constant.* Annales Mathématiques Blaise Pascal, **25** (2018), 1–20.

[2] N. Albuquerque, F. Bayart, D. Pellegrino, J.B. Seoane–Sepúlveda, *Optimal Hardy–Littlewood type inequalities for polynomials and multilinear operators*, Israel J. Math., **211** (2016), 197-220.

[3] N. Albuquerque, F. Bayart, D. Pellegrino, J. B. Seoane-Sepúlveda, *Sharp generalizations of the multilinear Bohnenblust–Hille inequality*, J. Funct. Anal., **266** (2014), 3726–3740.

[4] N. Albuquerque, T. Nogueira, D. Núñez-Alarcón, D. Pellegrino, P. Rueda, *Some applications of the Hölder inequality for mixed sums*, Positivity, **21** (2017), 1575–1592.

[5] N. Albuquerque, L. Rezende, *Anisotropic regularity principle in sequence spaces and applications*, Communications in Contemporary Mathematics, **20** 2018, 1750087.

[6] G. Araújo, *Some classical inequalities, summability of multilinear operators and strange functions*, 2016. Thesis–Universidade Federal da Paraíba-Campina Grande.

[7] G. Araújo, K. Câmara, *Universal Bounds for the Hardy–Littlewood Inequalities on Multilinear Forms*, Results in Mathematics, **73** (2017), 124.

[8] G. Araújo, D. Pellegrino, *On the constants of the Bohnenblust-Hille and Hardy-Littlewood inequalities*, Bull. Braz. Math. Soc. (N.S.), **48** (2017), 141–169.

[9] G. Araújo, D. Pellegrino, *Optimal estimates for summing multilinear operators*, Linear and Multilinear Algebra, **65** (2017), 930–942.

[10] G. Araújo, D. Pellegrino, *Optimal Hardy–Littlewood inequalities for m–linear forms on ℓ_p spaces with $1 \leq p \leq m$*, Arch. Math., **106** (2015), 285–295.

[11] G. Araújo, D. Pellegrino, D. D. Silva e Silva, *On the upper bounds for the constants of the Hardy–Littlewood inequality*, J. Funct. Anal., **267** (2014) 1878–1888.

[12] R. M. Aron, L. Bernal-Gonzalez, D. Pellegrino, J. B. Seoane-Sepúlveda, *Lineability: The Search for Linearity in Mathematics*, CRC Press, Boca Raton, FL, 2016.

[13] R. Aron, D. Núñez-Alarcón, D. Pellegrino, D. Serrano-Rodríguez, *Optimal exponents for Hardy–Littlewood inequalities for m-linear operators*, Linear Algebra Appl., **531** (2017), 399–422.

[14] F. Bayart, D. Pellegrino, J. B. Seoane–Sepúlveda, *The Bohr radius of the n–dimensional polydisc is equivalent to $\sqrt{(\log n)/n}$*, Advances in Math., **264** (2014), 726–746.

[15] F. Bayart, D. Pellegrino, P. Rueda, *On coincidence results for summing multilinear operators: interpolation, ℓ_1-spaces and cotype*, Collectanea Mathematica, **71** (2020), 301.

[16] A. Benedek, R. Panzone,*The space $L_{\mathbf{p}}$, with mixed norm*, Duke Math. J. **28** (1961) 301–324.

[17] H. F. Bohnenblust, E. Hille, *On the absolute convergence of Dirichlet series*, Ann. of Math., **32** (1931), 600–622.

[18] F. Bombal, D. Pérez-García, I. Villanueva, *Multilinear extensions of Grothendieck's theorem*, Quart. J. Math., **55** (2004), 441–450.

[19] G. Botelho, *Cotype and absolutely summing multilinear mappings and homogeneous polynomials*, Proc. Roy. Irish Acad. Sect. A., **97** (1997), 145–153.

[20] G. Botelho, H. A. Braunss, H. Junek, D. Pellegrino, *Inclusions and coincidences for multiple summing multilinear mappings*, Proc. Amer. Math. Soc., **137** (2009), 991–1000.

[21] G. Botelho, D. Diniz, D. Pellegrino, *Lineability of the set of bounded linear non-absolutely summing operators*, J. Math. Anal. Appl., **357** (2009), 171–175.

[22] G. Botelho, C. Michels, D. Pellegrino, *Complex interpolation and summability properties of multilinear operators*, Rev. Mat. Complut., **23** (2010), 139–161.

[23] G. Botelho, D. Pellegrino, *When every multilinear mapping is multiple summing*, Mathematische Nachrichten, **282** (2009), 1414–1422.

[24] J. Diestel, H. Jarchow, A. Tonge, Absolutely Summing Operators, Cambridge University Press, 1995.

[25] V. Dimant, P. Sevilla–Peris, *Summation of coefficients of polynomials on ℓ_p spaces*, Publ. Mat. **60** (2016), 289–310.

[26] S. Dineen, *Complex analysis on infinite-dimensional spaces.* Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag London, Ltd., London, 1999.

[27] A. Dvoretzky, C. A. Rogers, Absolute and unconditional convergence in normed linear spaces, Proc. Nat. Acad. Sci. USA., **36** (1950), 192–197.

[28] D. J. H. Garling, *Inequalities: A Journey into Linear Analysis*, Cambridge University Press, Cambridge, 2007.

[29] V. I. Gurariy, *Subspaces and bases in spaces of continuous functions*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **167** (1966), 971–973.

[30] V. I. Gurariy and L. Quarta, *On lineability of sets of continuous functions*, J. Math. Anal. Appl. **294** (2004), 62–72.

[31] U. Haagerup, *The best constants in the Khintchine inequality*, Studia Mathematica **70** (1981), 231-283.

[32] G. Hardy, J. E. Littlewood, *Bilinear forms bounded in space $[p,q]$*, Quart. J. Math. **5** (1934), 241–254.

[33] J. E. Littlewood, *On bounded bilinear forms in an infinite number of variables*, Quart. J. (Oxford Ser.) **1** (1930), 164–174.

[34] M. Maia, *Um índice de somabilidade para operadores entre espaços de Banach.* Tese (Doutorado em Matemática) - Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa. (2017) 73 f.

[35] M. Maia, D. Pellegrino, J. Santos, *An index of summability for pairs of Banach spaces*, J. Math. Anal. Appl., **441** (2016), 702–722.

[36] M. C. Matos, *Fully absolutely summing mappings and Hilbert Schmidt operators*, Collect. Math., **54** (2003), 111–136.

[37] A. Montanaro, *Some applications of hypercontractive inequalities in quantum information theory*, J. Math. Physics **53** (2012), 122206.

[38] J. Mujica, *Complex analysis in Banach spaces. Holomorphic functions and domains of holomorphy in finite and infinite dimensions.* North-Holland Mathematics Studies, 120. Notas de Matemática [Mathematical Notes], 107. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1986.

[39] D. Paulino, *Critical Hardy–Littlewood inequality for multilinear forms*, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo Series 2, (2019), 1–12.

[40] D. Pellegrino, J. Santos, *Uniformly dominated sets of summing nonlinear operators*, Arch. Math. (Basel), **105** (2015), no. 1, 55–66.

[41] D. Pellegrino, J. Santos, D. Serrano-Rodríguez, E. Teixeira, *A regularity principle in sequence spaces and applications*, Bull. Sci. Math., **141** (2017), no. 8 802–837.

[42] D. Pellegrino, D. Serrano–Rodríguez, J. Silva, *On unimodular multlinear forms with small norms on sequence spaces*, **595** (2020), 24–32.

[43] D. Pérez-García, *Operadores multilineales absolutamente sumantes*, Thesis, Universidad Complutense de Madrid, 2003.

[44] D. Pérez-García, I. Villanueva, *Multiple summing operators on $C(\mathcal{K})$ spaces*, Ark. Mat., **42** (1) (2004), 153–171.

[45] A. Pietsch, *Ideals of multilinear functionals*, Proceedings of the Second International Conference on Operator Algebras, Ideals and Their Applications in Theoretical Physics, Teubner–texte Math. **67** (1983), 185–199.

[46] D. Popa, *Multiple summing operators on l_p spaces*, Studia Math, **225** (2014), 9–28.

[47] D. Popa, *Reverse inclusions for multiple summing operators*, J. Math. Anal. Appl., **350** (2009), 360–368.

[48] T. Praciano-Pereira, *On bounded multilinear forms on a class of l^p spaces*, J. Math. Anal. Appl. **81** (1981), 561–568.

[49] P. Rueda, E. A. Sánchez-Pérez, *Factorization of $p-$dominated polynomials through L_p-spaces*, Michigan Math. J., **63** (2014), 345–354.