

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Teoria de Obstrução e as classes de Stiefel-Whitney

Lenin Alexandre de Almeida Bezerra

JOÃO PESSOA – PB
JULHO DE 2020

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Teoria de Obstrução e as classes de Stiefel-Whitney

por

Lenin Alexandre de Almeida Bezerra

sob a orientação da

Profa. Miriam da Silva Pereira

João Pessoa – PB
Julho de 2020

Catálogo na publicação
Seção de catalogação e classificação

B574t Bezerra, Lenin Alexandre de A.

Teoria de Obstrução e as Classes de Stiefel-Whitney
/ Lenin Alexandre de Almeida Bezerra. - João Pessoa, 2020
66 f. : il

Orientador: Miriam da Silva Pereira
Dissertação (Mestrado) - UFPB/CCEN.

1. Fibrados vetoriais. 2. Cohomologia. 3. Obstrução. 4.
Classes de Stiefel-Whitney. I. Pereira, Miriam da Silva. II. Título.

UFPB/BC

CDU: 512.72(043)

ATA DA SESSÃO PÚBLICA DE DEFESA DE DISSERTAÇÃO DE MESTRADO DO ALUNO LENIN ALEXANDRE DE ALMEIDA BEZERRA, CANDIDATO AO TÍTULO DE MESTRE EM MATEMÁTICA NA ÁREA DE GEOMETRIA/TOPOLOGIA.

Ao trigésimo primeiro dia de julho de dois mil e vinte (31/07/2020), às 14:00 horas, por videoconferência via plataforma Google |Meet, através do link: <https://meet.google.com/zoj-mxnw-cxf>, em conformidade com a portaria PRPG nº 54/2020, que dispõe sobre a regulamentação, em caráter excepcional e temporário, das atividades da pós-graduação da Universidade Federal da Paraíba durante o período de isolamento social imposto pela pandemia de coronavírus (covid-19), reuniram-se em caráter de solenidade pública, os membros da comissão designada para avaliar **Lenin Alexandre de Almeida Bezerra**, candidato ao grau de Mestre em Matemática, na área de **Geometria/Topologia**. Foram componentes da Banca Examinadora, os professores Dr.^a Miriam da Silva Pereira (Orientador), Dr. Nivaldo de Góes Grulha Júnior (USP) e Dr.^a Thaís Maria Dalbelo (UFSCAR). Dando início aos trabalhos, a Presidente da Banca, Miriam da Silva Pereira, após declarar os objetivos da reunião, apresentou o candidato a quem concedeu a palavra para que dissertasse, oral e sucintamente, sobre o tema apresentado, intitulado “**Uma introdução às classes de Stiefel-Whitney**”. Após discorrer sobre o referido tema, o candidato foi arguido pelos examinadores na forma regimental. Ato contínuo passou a comissão, em caráter secreto, a proceder à avaliação e julgamento do trabalho, concluindo por atribuir-lhe o conceito **Aprovado**. Em face de aprovação, declarou o Presidente achar-se o avaliado legalmente habilitado a receber o Grau de Mestre em Matemática, cabendo a Universidade Federal da Paraíba, providências como de direito, à expedição do Diploma a que o mesmo fez jus. Nada mais havendo a tratar, eu, Ewerton Bezerra Sarmento Monteiro, na qualidade de secretário, lavrei a Ata, que submeto à aprovação da Comissão Examinadora.

João Pessoa, 31 de julho de 2020.

Banca Examinadora:

Miriam da Silva Pereira



Nivaldo de Góes Grulha Júnior



Thaís Maria Dalbelo



Teoria de Obstrução e as Classes de Stiefel-Whitney

por

Lenin Alexandre de Almeida Bezerra¹

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Paraíba como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Geometria/Topologia

Aprovada em 31 de Julho de 2020.

Banca Examinadora:

Profª. Miriam da Silva Pereira – UFPB

(Orientador)

Prof. Dr. Nivaldo Góes Grulha Júnior – USP - São Carlos

(Examinador Externo)

Profª. Dra. Thaís Maria Dalbello – UFSCAR

(Examinador Externo)

¹O autor foi bolsista da CAPES durante a elaboração desta dissertação.

*A Giovanna, minha sobri-
nha*

Agradecimentos

Agradeço a minha família por todo apoio e força que me deram nesses dois anos, amo vocês.

Agradeço aos meus amigos de RPG, Kevin, Hide, Rafael, Leo, Luan, Rodrigo, Isabelly, Nicolas, Kênio e Truta. Sem vocês não teria conseguido concluir o mestrado.

Agradeço também aos Putos Safados Rafael, Tony, Pádua, Renato, Geovane, por nossas noites em Geradinho, na praça da paz em Fabio, etc. Vocês foram de grande ajuda neste período.

Agradeço à professora Miriam por ter me orientado, puxado minha orelha diversas vezes e por toda força que me deu.

Aos professores do DM-UFRPE, vocês foram e importantíssimos durante minha formação.

Por fim, mas não menos importante, agradeço à CAPES. Foi de grande ajuda a bolsa recebida durante os 24 meses.

Resumo

O principal objeto de estudo deste trabalho são as classes características de fibrados vetoriais, precisamente, consideramos as classes de Stiefel-Whitney. De maneira geral, podemos interpretar estas classes como uma forma de determinar a obstrução para a construção de seções linearmente independentes num fibrado vetorial. Apresentamos o ponto de vista axiomático e a definição usando a Teoria de Obstrução. Concluimos mostrando que as classes definidas usando teoria de obstrução satisfazem as exigências da definição axiomática.

Palavras-chave: Cohomologia; Fibrados Vetoriais; Obstrução; Classes de Stiefel-Whitney.

Abstract

The main object of study in this work is the characteristic classes of vector bundles, precisely, we consider the Stiefel-Whitney classes. In general, we can interpret these classes as a way to determine the obstruction for the construction of linearly independent sections in a vector bundle. We present the axiomatic point of view and the definition using the Obstruction Theory. We conclude by showing that the classes defined using obstruction theory satisfy the requirements of the axiomatic definition.

Keywords: Cohomology, Vector bundles, Obstruction, Stiefel-Whitney Classes.

Sumário

Introdução	2
1 Preliminares	4
1.1 Variedades Diferenciáveis	4
1.2 Espaço Tangente	8
1.3 Campo Vetorial e r -campos	9
1.4 Alguns conceitos de Topologia Algébrica	10
1.5 Homologia	11
1.6 Cohomologia	20
1.7 Produto Cup e o Teorema de Kunneth	23
2 Fibrados Vetoriais	25
2.1 Fibrado	25
2.2 Construção de alguns Fibrados Vetoriais	31
3 Teoria de Obstrução	37
3.1 Cocadeia de Obstrução	37
3.2 Índice de um r -frame	43
3.3 Classes de Stiefel-Whitney	46

Introdução

Os estudos sobre as classes características começaram em meados da década de 1930 com os trabalhos de Hassler Whitney e Eduard Stiefel. Em sua tese, Stiefel introduziu estas classes em homologia, enquanto Whitney trabalhou no caso de fibrados para esfera. Um pouco mais tarde, Whitney desenvolveu este estudo em cohomologia, daí o conceito das classes características em cohomologia ([7]). As classes características de Stiefel-Whitney foram as primeiras classes para variedades diferenciáveis que foram apresentadas à comunidade matemática e são as classes com maior interpretação geométrica.

Por outro lado, a Teoria de Obstrução é uma ferramenta que pode ser usada para estudar extensão de funções, isto é, prolongar uma função contínua $f : A \rightarrow Y$ a um ambiente mais amplo $X \supset A$ de modo que mantenha suas propriedades (continuidade, aditividade, etc.). A Teoria de Obstrução também vem auxiliar no problema de determinar a existência de r -frames à uma variedade M , a Variedade de Stiefel nos ajuda a solucionar este problema construindo r seções linearmente independentes no fibrado tangente à variedade M .

Neste trabalho dissertamos sobre a relação entre a Teoria de Obstrução e as classes de Stiefel-Whitney. Apresentamos algumas formas de definir as classes de Stiefel-Whitney, a nossa principal definição se baseia na Teoria de Obstrução, cuja definição reside na Geometria Algébrica que apresenta uma definição estritamente axiomática para as classes características, ou seja, as classes de Stiefel-Whitney que apresentamos por meio da Teoria de Obstrução satisfazem os axiomas apresentados na Geometria Algébrica.

Contudo, Hassler Whitney e Eduard Stiefel apresentam axiomas clássicos que definem estas classes, que não necessariamente estão relacionados à Geometria Algébrica. Em nosso trabalho, mostramos que a definição das classes características feita na Geometria Algébrica é equivalente à enunciada por Hassler Whitney e Eduard Stiefel.

Este trabalho foi dividido da seguinte forma:

No *Capítulo 1* apresentamos os conceitos introdutórios, mas que serão essenciais, sobre Variedades Diferenciáveis e Topologia Algébrica. Apresentamos alguns exem-

plos de variedades diferenciáveis, sendo a de maior relevância a variedade de Stiefel. Também apresentamos as teorias de homologia e cohomologia, onde exibimos alguns resultados e exemplos que serão úteis durante a dissertação. As principais referências usadas neste capítulo foram [2], [4] e [5].

O *Capítulo 2* é dedicado ao estudo dos Fibrados Vetoriais. Este vem a ser de grande importância para definir as classes de Stiefel-Whitney. Apresentamos definições, resultados básicos, exemplos de fibrados vetoriais como o fibrado tangente τ_M de uma variedade M e também mostramos a construção de alguns fibrados, que serão fundamentais para nosso trabalho. Como principal referência, usamos [7] e [9].

No *Capítulo 3*, estudamos a Teoria de Obstrução. Neste capítulo apresentamos a primeira e principal definição para as classes de Stiefel-Whitney. Estudamos sobre as cocadeias de obstrução e classificamos as obstruções através das classes definidas. Definimos as classes de Stiefel-Whitney através de seus axiomas clássicos e apresentamos algumas consequências imediatas destes axiomas. Apresentamos uma terceira forma de definir as classes, feita em [10] e concluímos o trabalho mostrando que as classes definidas via teoria de obstrução satisfazem os axiomas. Por fim, mostramos alguns exemplos das classes de Stiefel-Whitney. As principais referências usadas neste capítulo foram [6], [7], [8] e [10].

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo apresentamos alguns conceitos introdutórios relacionados às variedades diferenciáveis e a topologia algébrica que são ferramentas fundamentais para o objetivo principal deste trabalho. As principais referências para este capítulo foram [2], [4] e [5].

1.1 Variedades Diferenciáveis

O estudo de variedades diferenciáveis pode ser enxergado como uma generalização do estudo das superfícies, pois muitas das definições aqui exibidas, são análogas as que são vistas no estudo das superfícies. Contudo, devemos tomar cuidado pois as variedades, a priori, não necessariamente são subconjuntos do $\mathbb{R}^n$.

Definição 1.1. Sejam M um espaço topológico e $U \subset M$ um aberto. Dizemos que uma aplicação $x : U \rightarrow x(U)$ sobre o aberto $x(U) \subset \mathbb{R}^m$ é um **sistema de coordenadas locais** ou uma **carta local** em M se tal aplicação for um homeomorfismo. Nestas condições, dizemos que m é a dimensão de $x : U \rightarrow x(U)$.

Exemplo 1.1. Uma **superfície** é um subconjunto $S \subset \mathbb{R}^3$ tal que para cada x pertencente a S existe um aberto U de x e um homeomorfismo $\varphi : V \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow U$. Tal homeomorfismo é chamado de **parametrização** de U . Dada uma superfície $S \subset \mathbb{R}^3$, o homeomorfismo inverso das parametrizações $x = \varphi^{-1} : U \rightarrow U_0 \subset \mathbb{R}^2$ é um sistema de coordenadas locais em S , onde $\varphi : U_0 \rightarrow U$ é uma parametrização do subconjunto U , contido na superfície.

Definição 1.2. Dizemos que uma coleção $\mathfrak{U}$ de sistemas de coordenadas locais $x : U \rightarrow x(U)$ em M , cujos domínios U cobrem M é um **atlas** de dimensão m sobre o espaço topológico M . Os domínios U dos sistemas de coordenadas $x \in \mathfrak{U}$ são chamados **vizinhanças coordenadas** de $\mathfrak{U}$.

Exemplo 1.2. Consideramos a coleção formada pelos inversos das parametrizações de uma superfície $S \subset \mathbb{R}^3$. Temos que tal coleção forma um atlas de dimensão 2 sobre S .

Definição 1.3. Seja M um espaço topológico. Dizemos que M é uma **variedade topológica** de dimensão m quando existir um atlas $\mathfrak{U}$ de dimensão m em M . Em outras palavras, M é uma variedade topológica de dimensão m se, e somente se, cada ponto $p \in M$ possui vizinhança homeomorfa a um aberto do $\mathbb{R}^m$.

Exemplo 1.3. 1) Seja X um conjunto qualquer. Consideramos em X a topologia discreta. A família de funções $\varphi_x : \{x\} \rightarrow \{0\} \in \mathbb{R}^0$, onde $x \in X$, é um atlas de dimensão 0 em X . Observamos que o espaço $\mathbb{R}^0$ denota o espaço real de dimensão zero, ou seja, o ponto $\{0\}$;

2) Toda superfície $S \subset \mathbb{R}^3$ é uma variedade topológica.

Agora, sejam $x : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ e $y : V \rightarrow \mathbb{R}^m$ dois sistemas de coordenadas no espaço topológico M tais que $U \cap V \neq \emptyset$. A correspondência

$$(x_1(p), \dots, x_m(p)) \longleftrightarrow (y_1(p), \dots, y_m(p))$$

estabelece um homeomorfismo $\varphi_{xy} = y \circ x^{-1} : x(U \cap V) \rightarrow y(U \cap V)$ que é chamado **mudança de coordenadas**.

Consideramos $z : W \rightarrow \mathbb{R}^m$ outro sistema de coordenadas tal que $U \cap V \cap W \neq \emptyset$, então

$$\varphi_{xz} = \varphi_{yz} \circ \varphi_{xy} : x(U \cap V \cap W) \rightarrow y(U \cap V \cap W),$$

$$\varphi_{xx} = id_{x(U)} \text{ e } (\varphi_{yx})^{-1} = (x \circ y^{-1})^{-1} = y \circ x^{-1} = \varphi_{xy}.$$

Agora vamos munir o espaço topológico M com uma estrutura diferenciável. De maneira geral, fazemos isso considerando os sistemas de coordenadas de $\mathfrak{U}$ (atlas em M) como aplicações C^k .

Um atlas $\mathfrak{U}$ sobre um espaço topológico M é diferenciável de classe C^k ($k \geq 1$), se para quaisquer x e y elementos de $\mathfrak{U}$ as mudanças de coordenadas φ_{xy} são de classe C^k . Além disso, sendo $\varphi_{yx} = (\varphi_{xy})^{-1}$, concluímos que as mudanças de coordenadas são difeomorfismos de classe C^k .

Definição 1.4. Dizemos que um sistema de coordenadas $z : W \rightarrow \mathbb{R}^m$ é **admissível** ao atlas $\mathfrak{U}$ de classe C^k e dimensão m no espaço topológico M , se para todo sistema de coordenadas $x : U \rightarrow \mathbb{R}^m$, $U \cap W \neq \emptyset$, as mudanças de coordenadas φ_{xz} e φ_{zx} são de classe C^k . Além disso, um atlas é **máximal** quando contém todos os sistemas de coordenadas admissíveis a $\mathfrak{U}$.

Observação 1.1. (i) Um sistema de coordenadas $z : W \rightarrow \mathbb{R}^m$ é admissível quando $\mathfrak{U} \cup \{z\}$ ainda for um atlas de classe C^k .

(ii) Todo atlas de classe C^k em M pode ser ampliado, de modo único, até se tornar um atlas máximo. De fato, basta acrescentar todos os sistemas de coordenadas admissíveis.

Exemplo 1.4. Sejam M um espaço topológico, $\mathfrak{U}$ um atlas de classe C^k em M e $x : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ em $\mathfrak{U}$. Para todo $V \subset U$ aberto, a restrição $y = x|_V$ é admissível em relação a $\mathfrak{U}$. Se $\xi : x(U) \rightarrow \mathbb{R}^m$ é difeomorfismo de classe C^k , então $\xi \circ x : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ é admissível relativamente a $\mathfrak{U}$.

Definição 1.5. Uma **variedade diferenciável** de dimensão m e classe C^k é um par $(M, \mathfrak{U})$, onde M é um espaço topológico Hausdorff, com base enumerável e $\mathfrak{U}$ é um atlas máximo de dimensão m e classe C^k sobre M .

Exemplo 1.5. (i) O espaço euclidiano $\mathbb{R}^m$ é uma variedade diferenciável, onde o atlas máximo é formado apenas pela aplicação identidade $id : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$.

(ii) Se U é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^m$, então U é uma variedade diferenciável cujo atlas é formado pela aplicação identidade $id : U \rightarrow U$.

(iii) Seja M uma variedade diferenciável de classe C^k . Se U é um subconjunto aberto de M , então U também é uma variedade diferenciável de classe C^k de M com atlas formado pelos homeomorfismos do atlas de M , onde os domínios destes homeomorfismos estão restritos a U .

(iv) As superfícies $S \subset \mathbb{R}^3$ são variedades diferenciáveis. De fato, consideramos S com a topologia do subespaço do $\mathbb{R}^3$, temos que S é um espaço topológico, Hausdorff e com base enumerável. O atlas $\mathfrak{U}$ formado pelos sistemas de coordenadas que são os inversos das parametrizações, isto é, $x = \varphi^{-1} : U \subset S \rightarrow V \subset \mathbb{R}^2$, onde φ é de classe C^k , forma um atlas maximal de classe C^k . Logo, $S \subset \mathbb{R}^3$ é variedade diferenciável.

(v) A esfera n -dimensional $\mathbb{S}^n = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}; x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1\}$ é uma variedade diferenciável. Um possível atlas para $\mathbb{S}^n$ é $\mathfrak{U} = \{(U_i, \varphi_i), (V_i, \psi_i); 1 \leq i \leq n\}$, onde para cada $1 \leq i \leq n$, $U_i = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{S}^n; x_i > 0\}$, $V_i = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{S}^n; x_i < 0\}$ e $\varphi_i(x_1, \dots, x_{n+1}) = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{n+1}) = \psi_i(x_1, \dots, x_{n+1})$ são projeções sobre o $\mathbb{R}^n$ visto como o hiperplano $x_i = 0$.

Exemplo 1.6. O n -ésimo espaço projetivo real, denotado por $\mathbb{P}^n$, definido como o conjunto de todos os subespaços lineares unidimensionais do $\mathbb{R}^{n+1}$, com a topologia

quociente determinada pela aplicação $\pi : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{P}^n$, onde para cada $x \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ associa a sua classe $[x]$ em $\mathbb{P}^n$, é uma variedade diferenciável. De fato, para cada $i = 1, \dots, n$, seja $\bar{U}_i \subset \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ um aberto, onde a coordenada $x_i \neq 0$ e $U_i = \pi^{-1}(\bar{U}_i) \subset \mathbb{P}^n$. Desde que π é aplicação quociente, cada U_i é aberto e formam uma cobertura para $\mathbb{P}^n$. Sendo $\pi_i : \bar{U}_i \rightarrow U_i$ aplicação quociente, os sistemas de coordenadas $\varphi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^n$ definidos por $\varphi_i[x_1, \dots, x_{n+1}] = (\frac{x_1}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_{n+1}}{x_i})$, com inversa $\varphi_i^{-1}(u_1, \dots, u_n) = [u_1, \dots, u_{i-1}, 1, u_{i+1}, \dots, u_n]$ formam o atlas $\mathcal{U}$.

Para mostrar que $\mathbb{P}^n$ é Hausdorff e possui base enumerável, vamos considerar $p : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{P}^n$ aplicação quociente, onde para cada x em $\mathbb{S}^n$ associamos a $[x] = \{x, -x\} \in \mathbb{P}^n$. Aqui, damos uma nova definição para o espaço projetivo real, consideramos $\mathbb{P}^n$ como o quociente de $\mathbb{S}^n$ pela relação de equivalência de pontos antípodos, isto é, $x \sim y$ se, e somente se, $x = \pm y$.

As duas definições dadas acima para o espaço projetivo real são equivalentes pois cada reta que passa pela origem em $\mathbb{R}^{n+1}$ intercepta $\mathbb{S}^n$ em dois pontos antípodos.

Vamos verificar que $\mathbb{P}^n$ é Hausdorff. Consideramos dois elementos distintos x e y em $\mathbb{P}^n$. Podemos identificar estes pontos a um par de antípodos em $\mathbb{S}^n$, digamos u_+ e u_- para x e q_+ e q_- para y . Como $\mathbb{S}^n$ é variedade diferenciável, é Hausdorff e podemos encontrar vizinhanças disjuntas de $u_+ \in U_+$, $u_- \in U_-$, $q_+ \in V_+$ e $q_- \in V_-$. Por simetria, devemos ter que U_+, U_- e V_+, V_- tenham a mesma imagem, isto é, $p(U_+) = p(U_-)$ e $p(V_+) = p(V_-)$. Assim, tomando $a \in U_+ \cup U_-$, segue que a não pertence a $V_+ \cup V_-$, logo $p(U_+) \cap p(V_+) = \emptyset$. Portanto, $\mathbb{P}^n$ é Hausdorff.

Agora, como p é aplicação quociente, qualquer aberto de $\mathbb{P}^n$ é a imagem por p de um aberto de $\mathbb{S}^n$. Então, se B é um aberto básico da esfera, temos que $p(B)$ é aberto básico de $\mathbb{P}^n$ e como $\mathbb{S}^n$ possui base enumerável $\mathfrak{B}$, então o conjunto $\{p(B); B \in \mathfrak{B}\}$ é base enumeável para $\mathbb{P}^n$. Portanto, o espaço projetivo real $\mathbb{P}^n$ é variedade diferenciável.

Exemplo 1.7. Consideramos a coleção de todas r -uplas de vetores linearmente independentes em $\mathbb{R}^m$, denotada por $V_r(\mathbb{R}^m)$. Mostremos que $V_r(\mathbb{R}^m)$ é uma variedade.

Notamos que $V_r(\mathbb{R}^m)$ é um aberto em $\mathbb{R}^{mr}$. De fato, seja $\{u_1, \dots, u_r\}$ uma coleção de vetores linearmente independentes em $\mathbb{R}^m$. Completamos esta coleção com os vetores $u_{r+1}, \dots, u_m$, de modo que a coleção $\{u_1, \dots, u_r, u_{r+1}, \dots, u_m\}$ seja linearmente independente em $\mathbb{R}^{m^2}$. Assim, $\det\{u_1, \dots, u_m\} \neq 0$ e, portanto, este conjunto é um aberto em $\mathbb{R}^{m^2}$. Assim, consideramos o seguinte sistema de coordenadas global

$$\begin{aligned} \pi : \mathbb{R}^{m^2} &\rightarrow \mathbb{R}^{mr} \\ \{u_1, \dots, u_r, u_{r+1}, \dots, u_m\} &\mapsto \{u_1, \dots, u_r\} \end{aligned}$$

Temos que tal sistema é uma aplicação aberta e, desde que leva aberto em aberto,

segue que a coleção de todas r -uplas de vetores linearmente independentes do $\mathbb{R}^m$ forma um aberto em $\mathbb{R}^{mr}$ e, pelo (ii) no Exemplo 1.5, $V_r(\mathbb{R}^m)$ é uma variedade diferenciável chamada **variedade de Stiefel**.

1.2 Espaço Tangente

Se $S \subset \mathbb{R}^3$ é uma superfície, é possível definir o espaço tangente a S em um ponto e mostrar que este objeto tem estrutura de espaço vetorial (ver [2]). Analogamente, para variedades diferenciáveis podemos definir o espaço tangente à variedade em um ponto e, do mesmo modo que em superfícies, mostramos que tal espaço é um espaço vetorial. Em toda esta seção, consideramos M uma variedade de classe C^k e $p \in M$.

Definição 1.6. Um **caminho** que passa por p em M é uma aplicação contínua $\lambda : I \rightarrow M$, onde I é um intervalo aberto da reta que contém o zero e $\lambda(0) = p$. Dizemos que o caminho λ é **diferenciável** se existe um sistema de coordenadas $x : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ em M , com $\lambda(I) \subset U$ tal que a composição $x \circ \lambda : I \rightarrow \mathbb{R}^m$ é um caminho diferenciável.

Seja C_p o conjunto de todos os caminhos $\lambda : J \rightarrow M$ diferenciáveis em 0 que passam pelo ponto $p \in M$. Dizemos que dois caminhos $\lambda, \mu \in C_p$ são equivalentes e denotamos por $\lambda \sim \mu$, quando existir um sistema de coordenadas locais $x : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ em M , com $p \in U$, tal que as composições $x \circ \lambda$ e $x \circ \mu$ possuem o mesmo vetor velocidade, isto é, $(x \circ \lambda)'(0) = (x \circ \mu)'(0)$. Neste caso, a igualdade acima é verdadeira para todo sistema de coordenadas $x : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ em M , com $p \in U$. Assim, segue que $\sim$ é uma relação de equivalência em C_p e, portanto, podemos exibir a classe de equivalência de um caminho λ que pertença a C_p . Tal classe será definida do seguinte modo:

Dado $\lambda \in C_p$, seu vetor velocidade $\dot{\lambda}$ é, por definição, a classe de equivalência de λ , isto é, $\dot{\lambda} := \{\mu \in C_p; \mu \sim \lambda\}$. Desta forma, dados $\lambda, \mu \in C_p$, temos $\dot{\lambda} = \dot{\mu}$ se, e somente se, $(x \circ \lambda)'(0) = (x \circ \mu)'(0)$ para todo sistema de coordenadas. Usando a construção acima, podemos apresentar a seguinte definição:

Definição 1.7. O **espaço tangente** à variedade M no ponto p é o conjunto quociente $\frac{C_p}{\sim}$, denotado por $T_p M = \frac{C_p}{\sim}$.

Para munir $T_p M$ da estrutura de espaço vetorial, consideramos para cada sistema de coordenadas $x : U \rightarrow \mathbb{R}^m$, uma bijeção $\bar{x} : T_p M \rightarrow \mathbb{R}^m$ dada por $\bar{x}(\dot{\lambda}) = (x \circ \lambda)'(0)$. Desde que $(x \circ \lambda)'(0) = (x \circ \mu)'(0)$ se, e somente se, $\dot{\lambda} = \dot{\mu}$, segue que tal aplicação está bem definida e é injetora. Além disso, dado $v \in \mathbb{R}^m$, consideramos $\lambda \in C_p$ dado por $\lambda(t) = x^{-1}(x(p) + tv)$. Desta forma, $\bar{x}(\dot{\lambda}) = (x \circ \lambda)'(0) = v$, ou seja, $\bar{x}$ é sobrejetora. Portanto, as operações de soma e produto por escalar que tornam $T_p M$ um espaço

vetorial são definidas por: dados $\dot{\lambda}, \dot{\mu} \in T_p M$ e $c \in \mathbb{R}$, temos

$$\begin{aligned}\dot{\lambda} + \dot{\mu} &= \bar{x}^{-1}(\bar{x}(\dot{\lambda}) + \bar{x}(\dot{\mu})) \\ c\dot{\lambda} &= \bar{x}^{-1}(c\bar{x}(\dot{\lambda}))\end{aligned}$$

Deste modo, munimos $T_p M$ de uma estrutura de espaço vetorial, exigindo que a bijeção $\bar{x}$ seja isomorfismo.

Observação 1.2. (i) As operações que foram definidas acima não dependem do sistema de coordenadas;

(ii) Dado um sistema de coordenadas $x : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ em M e $p \in U$, o conjunto $\{\frac{\partial}{\partial x_1}(p), \dots, \frac{\partial}{\partial x_m}(p)\}$ é a base de $T_p M$ que é levada sobre a base $\{e_1, \dots, e_m\}$ do $\mathbb{R}^m$ via o isomorfismo $\bar{x}$;

(iii) O vetor $\frac{\partial}{\partial x_i} \in T_p M$ é a classe de equivalência de qualquer caminho $\lambda \in C_p$ tal que $(x \circ \lambda)'(0) = e_i$. Basta considerar $v = e_i$.

1.3 Campo Vetorial e r -campos

A seguir, apresentamos a definição de um campo de vetores em uma variedade M . De modo geral, a definição de um campo vetorial nos ajuda a encontrar pontos singulares.

Definição 1.8. Seja M uma variedade diferenciável n -dimensional. Um **campo de vetores tangente** à M é uma aplicação contínua $v : M \rightarrow \mathbb{R}^N$, onde para cada $p \in M$ associamos o vetor $v(p) \in T_p M$.

Definição 1.9. Seja M uma variedade diferenciável n -dimensional. Um ponto $p \in M$ é dito ser uma **singularidade** de um campo vetorial v sobre M se $v(p) = 0$.

Do ponto de vista local, todo o comportamento interessante de v ocorre em torno de suas singularidades, isto é, os pontos $p \in M$ tais que $v(p) = 0$. Pois se $v(p) \neq 0$, v é quase constante em torno de p . No entanto, quando $v(p) = 0$, a direção de v pode mudar radicalmente em qualquer vizinhança pequena de p .

Definição 1.10. Sejam M uma variedade diferenciável e $A \subset M$. Um **r -campo** em A é um conjunto $v^{(r)} = \{v_1, \dots, v_r\}$ onde os v_i são campos vetoriais contínuos tangentes a M . Dizemos que um ponto $p \in M$ é uma **singularidade** para o r -campo se os vetores $v_1(p), \dots, v_r(p)$ não forem linearmente independentes. Se $v^{(r)}$ não possuir pontos singulares, dizemos que tal campo é um **r -frame**.

1.4 Alguns conceitos de Topologia Algébrica

Em topologia, um dos problemas centrais é identificar quando dois espaços são homeomorfos ou não, isto é, a seguinte pergunta deve ser respondida: “dados dois espaços topológicos X e Y , é possível definir uma aplicação $f : X \rightarrow Y$ contínua, bijetora e com inversa contínua?”

Na topologia algébrica a ideia principal é transformar este problema topológico em um problema algébrico associando à estrutura topológica de um espaço um objeto algébrico. Nesta seção, abordamos algumas das ferramentas usadas na topologia algébrica.

Iniciamos com o conceito de homotopia que, de maneira intuitiva, se resume em deformar um espaço topológico em outro continuamente. Durante todo o texto, I denota o intervalo $[0, 1]$.

Definição 1.11. Sejam $f, g : X \rightarrow Y$ aplicações contínuas. Dizemos que f é **homotópica** a g se existe uma aplicação contínua $F : X \times I \rightarrow Y$ tal que $F(x, 0) = f(x)$ e $F(x, 1) = g(x)$. Neste caso, dizemos que F é uma homotopia entre f e g e denotamos $f \simeq g$.

Exemplo 1.8. Sejam X e Y espaços topológicos com $Y \subset \mathbb{R}^n$ convexo. Então, toda aplicação $F : X \times I \rightarrow Y$ dada por $F(x, t) = (1 - t)f(x) + tg(x)$ está bem definida e é contínua, logo define uma homotopia entre f e g chamada homotopia linear.

A definição a seguir é um caso particular de uma homotopia, o que chamamos de retrato por deformação.

Definição 1.12. Sejam X um espaço topológico e A um subespaço de X . Um **retrato por deformação** de X sobre A é uma família de aplicações contínuas $f_t : X \rightarrow X$, $t \in I$, tal que $f_0 = id_X$, $f_1(X) = A$ e $f_t|_A = id_A$ para todo $t \in I$.

Exemplo 1.9. Consideramos X como o cilindro e A o disco inferior deste cilindro. Podemos identificar o cilindro através do quociente de um retângulo, identificando um par de lados conforme a Figura 1.1.

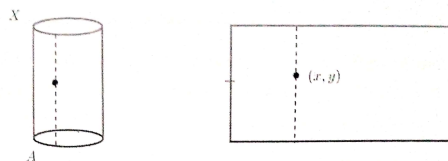


Figura 1.1: Cilindro como um espaço quociente

Assim, consideramos a homotopia $F : X \times I \rightarrow A$ dada por $F(x, t) = (1-t)id_X(x) + t\pi(x)$ onde $\pi : X \rightarrow A$ é a projeção do cilindro na base A . Logo, A é um retrato por deformação de X .

Nestes termos, um retrato por deformação de X sobre um subespaço A é uma homotopia da aplicação identidade de X com uma **retração** de X em A , isto é, um mapa $r : X \rightarrow A$ tal que $r(X) = A$ e $r|_A = id_A$. Mais ainda, se o espaço X é um retrato por deformação sobre um subespaço A via $f_t : X \rightarrow X$, então se $r : X \rightarrow A$ é uma retração e $i : A \rightarrow X$ é a inclusão, temos que $r \circ i \simeq id_A$ e $i \circ r \simeq id_X$.

Generalizando isto, uma aplicação $f : X \rightarrow Y$ é uma **equivalência homotópica** se existe uma aplicação $g : Y \rightarrow X$ tal que $f \circ g \simeq id_Y$ e $g \circ f \simeq id_X$. Neste caso, os espaços X e Y são ditos ter o mesmo **tipo de homotopia**.

Definição 1.13. Sejam X um espaço topológico e Y um espaço topológico constituído de apenas um ponto. Se existir uma equivalência homotópica $f : X \rightarrow Y$, então X é chamado de espaço **contrátil**, isto é, X possui o mesmo tipo de homotopia que um ponto.

Exemplo 1.10. Sejam $D^2 \subset \mathbb{R}^2$ o disco e p um ponto. Afirmamos que D^2 é contrátil. De fato, dado $x \in D^2$ basta considerar a aplicação $F : D^2 \times I \rightarrow \{p\}$ dada por

$$F(x, t) = (1 - t)id_{D^2}(x) + tf(x)$$

onde $f : D^2 \rightarrow \{p\}$ é a aplicação constante e id_{D^2} é a identidade no disco.

1.5 Homologia

Começamos esta seção construindo os R -módulos de homologia singular de um espaço topológico X . De modo geral, os R -módulos de homologia medem a quantidade de buracos g -dimensionais em X .

Nesta seção, a menos de menção do contrário, X será usado para denotar um espaço topológico e R um anel comutativo com unidade.

Definição 1.14. Dado um conjunto $G \subseteq \mathbb{R}^n$ qualquer, a **envoltória convexa** de G é a interseção de todos os subconjuntos convexos do $\mathbb{R}^n$ que contém G . Escrevemos

$$E(G) = \bigcap_{G \subset L} L$$

Definição 1.15. Dizemos que um conjunto de $(g + 1)$ -pontos $\{x_0, \dots, x_g\}$ em $\mathbb{R}^n$, $g \leq n$, é **geometricamente independente** (GI) se os vetores

$$v_0 = x_1 - x_0, v_1 = x_2 - x_0, \dots, v_g = x_g - x_0$$

são linearmente independentes em $\mathbb{R}^n$.

Definição 1.16. Seja $L = \{x_0, \dots, x_g\}$ uma coleção de $(g+1)$ -pontos GI em $\mathbb{R}^n$, $g \leq n$. O g -simplexo S gerado por $x_0, \dots, x_g$ é a envoltória convexa

$$S := E(\{x_0, \dots, x_g\}).$$

Cada ponto x_i é chamado vértice do g -simplexo S .

Quando $x_0, \dots, x_g$ são os vetores da base canônica do $\mathbb{R}^n$, o g -simplexo $E(\{x_0, \dots, x_g\})$ é chamado de g -simplexo padrão e será denotado por $\Delta_g \subset \mathbb{R}^n$.

Observação 1.3. (i) $E(G)$ é o menor subconjunto convexo que contém G ;

(ii) A definição de GI independe do ponto escolhido para ser a origem dos vetores, isto é, se $\{x_1 - x_0, \dots, x_g - x_0\}$ são linearmente independentes, então $\{x_1 - x_i, \dots, x_g - x_i\}$ também é linearmente independente;

(iii) $\Delta_g = \{(t_0, \dots, t_g) \in \mathbb{R}^{g+1}; \sum_{i=0}^g t_i = 1 \text{ e } 0 \leq t_i \leq 1\}$ esta igualdade é garantida devido ao Teorema das Coordenadas Baricêntricas (ver [5], p. 4).

Definição 1.17. Um **complexo de cadeias** (C_*, ∂_*)

$$\dots \xrightarrow{\partial_{g+1}} C_g(X; R) \xrightarrow{\partial_g} C_{g-1}(X; R) \xrightarrow{\partial_{g-1}} C_{g-2}(X; R) \xrightarrow{\partial_{g-2}} \dots$$

é uma coleção de R -módulos $C_i(X; R)$ e R -homomorfismos $\partial_g : C_g(X; R) \rightarrow C_{g-1}(X; R)$ tal que $\partial_{n-1} \circ \partial_n \equiv 0$.

Nosso objetivo, é construir R -módulos e R -homomorfismos que dependem do espaço topológico X e construir um complexo de cadeias entre esses módulos a partir dos homomorfismos obtidos.

Definição 1.18. Um g -simplexo singular de X é uma aplicação contínua $\sigma : \Delta_g \rightarrow X$.

Consideramos $C_g(X) := \{\sigma : \Delta_g \rightarrow X; \sigma \text{ é contínua}\}$ o conjunto de todos os g -simplexos singulares de X . Para cada $g \geq 0$, definimos o R -módulo livre gerado pelos g -simplexos singulares de X como

$$S_g(C_g; R) := \{f : C_g(X) \rightarrow R; f(\sigma) \neq 0_R \text{ apenas para uma quantidade finita de } \sigma \in C_g(X)\}.$$

Um elemento típico de $S_g(C_g; R)$ é uma soma formal $\alpha_1\sigma_1 + \cdots + \alpha_r\sigma_r$, onde $\alpha_i \in R$ e $\sigma_i \in C_g(X)$. A cada soma formal $\alpha_1\sigma_1 + \cdots + \alpha_r\sigma_r$ associamos uma função

$$\begin{aligned} f : C_g(X) &\rightarrow R \\ \sigma &\mapsto f(\sigma) := \begin{cases} \alpha_i, & \text{se } \sigma = \sigma_i \\ 0, & \text{se } \sigma \neq \sigma_i, \forall i = 1, \dots, r. \end{cases} \end{aligned}$$

Agora, para cada g -simplexo singular de X , $\sigma \in C_g(X)$, onde $\sigma : \Delta_g \rightarrow X$, a função

$$\begin{aligned} f_\sigma : C_g(X) &\rightarrow R \\ \tau &\mapsto f_\sigma(\tau) := \begin{cases} 1_R, & \text{se } \tau = \sigma \\ 0_R, & \text{se } \tau \neq \sigma. \end{cases} \end{aligned}$$

Assim, podemos identificar cada g -simplexo singular de X com a soma formal $1_R\sigma \in S_g(C_g(X); R)$. Logo,

$$S_g(C_g(X); R) := \left\{ \sum_{i=1}^r \alpha_i \sigma_i; \alpha_i \in R \text{ e } \sigma_i \in C_g(X) \right\}.$$

Consequentemente, podemos considerar $C_g(X) \subset S_g(C_g(X); R)$. Os elementos de $S_g(C_g(X); R)$ são chamados de **g -cadeias singulares** de X com coeficientes em R . Por simplicidade, denotamos o R -módulo livre gerado pelos g -simplexos singulares de X por $S_g(X; R)$.

Observação 1.4. No caso em que $g < 0$, o módulo $S_g(X; R)$ é o módulo trivial.

Agora que definimos os R -módulos necessários para construir a homologia, precisamos construir os R -homomorfismos $\partial_g : S_g(X; R) \rightarrow S_{g-1}(X; R)$. Para isto, consideramos a aplicação $\varepsilon_i : \Delta_{g-1} \rightarrow \Delta_g$ dada por $\varepsilon_i(t_0, \dots, t_{g-1}) = (t_0, \dots, t_{i-1}, 0, t_i, \dots, t_{g-1})$. Cada ε_i induz uma aplicação

$$\begin{aligned} \partial_i : C_g(X) &\rightarrow C_{g-1}(X) \\ \sigma &\mapsto \sigma \circ \varepsilon_i. \end{aligned}$$

Portanto, podemos definir o R -homomorfismo $\partial : S_g(X; R) \rightarrow S_{g-1}(X; R)$ dado por $\partial := \sum_{i=0}^g (-1)^i \partial_i$, chamado **operador bordo**. Consideramos a sequência

$$\cdots \xrightarrow{\partial} S_g(X; R) \xrightarrow{\partial} S_{g-1}(X; R) \xrightarrow{\partial} S_{g-2}(X; R) \xrightarrow{\partial} \cdots$$

Queremos mostrar que esta sequência é um complexo de cadeias, isto é, $\partial \circ \partial = 0$. Para isto, vamos verificar o que acontece quando aplicamos nos geradores do R -módulo. Seja

$\sigma \in C_g(X)$, então

$$\begin{aligned}
 (\partial \circ \partial)(\sigma) &= \partial\left(\sum_{i=0}^g (-1)^i \partial_i \sigma\right) \\
 &= \sum_{i=0}^g (-1)^i \partial(\partial_i \sigma) \\
 &= \sum_{i=0}^g (-1)^i \left(\sum_{j=0}^{g-1} (-1)^j \partial_j \partial_i \sigma\right) \\
 &= \sum_{i=0}^g \sum_{j=0}^{g-1} (-1)^{i+j} \partial_j \partial_i \sigma \\
 &= \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \partial_j \partial_i \sigma + \sum_{j \leq i} (-1)^{i+j} \partial_j \partial_i \sigma.
 \end{aligned}$$

A equivalência “ $i < j$ se, e somente se, $i \leq j - 1$ ” nos diz que cada parcela da primeira soma corresponde a apenas uma parcela da segunda soma e vice-versa. Assim, é suficiente verificar que $\partial_j \partial_i \sigma = \partial_i \partial_{j-1} \sigma$. De fato, seja $(t_0, \dots, t_g) \in \Delta_g$ temos

$$\begin{aligned}
 \partial_j \partial_i \sigma(t_0, \dots, t_g) &= \partial_j \sigma(t_0, \dots, t_{i-1}, 0, t_i, \dots, t_g) \\
 &= \sigma(t_0, \dots, t_{i-1}, 0, t_i, \dots, t_{j-2}, 0, t_{j-1}, t_j, \dots, t_g) \\
 &= \partial_i \sigma(t_0, \dots, t_{j-2}, 0, t_{j-1}, \dots, t_g) \\
 &= \partial_i \partial_{j-1} \sigma(t_0, \dots, t_g).
 \end{aligned}$$

Deste modo, concluimos que $\partial \circ \partial = 0$ e, portanto, $(S_*(X; R), \partial_*)$ é complexo de cadeias.

Definição 1.19. Sejam $\partial_g : S_g(X; R) \rightarrow S_{g-1}(X; R)$ operador bordo como definido acima, $\ker(\partial_g)$ e $\text{Im}(\partial_{g+1})$ o núcleo e imagem do operador bordo, respectivamente. Os elementos que estão no $\ker(\partial_g)$ são chamados de **g -ciclos**. Denotamos por $Z_g(X; R)$ o módulo dos ciclos; os elementos que estão na $\text{Im}(\partial_{g+1})$ são chamados de **g -bordos** (ou simplesmente **bordo**). Denotamos por $B_g(X; R)$ o módulo dos bordos.

Visto que em cada nível temos a inclusão $\text{Im}(\partial_{g+1}) \subset \ker(\partial_g)$, podemos definir o módulo quociente

$$H_g(X; R) := \frac{Z_g(X; R)}{B_g(X; R)}$$

chamado o **g -ésimo grupo de homologia singular** do espaço X com coeficientes em R .

Exemplo 1.11. Considere $X = \{p\}$. Então

$$H_g(X; R) = \begin{cases} R, & \text{se } g = 0 \\ 0, & \text{se } g > 0. \end{cases}$$

Desde que $X = \{p\}$, segue que $C_g(X) = \{\sigma : \Delta_g \rightarrow X; \sigma \text{ é contínua}\}$ é formado apenas por aplicações constantes, que denotamos por σ_g . Assim, $C_g(X; R) = \{\sigma_g\}$, para todo $g \geq 0$. Agora, para cada $g \geq 1$, a i -ésima face de σ_g é a função constante

$$\Delta_{g-1} \xrightarrow{\varepsilon_i} \Delta_g \xrightarrow{\sigma_g} X$$

onde, $\sigma_g \circ \varepsilon_i = \sigma_{g-1}$ com $i \in \{0, \dots, g\}$. Assim, $C_{g-1}(X) = \{\sigma_{g-1}\}$.

Concluimos que $S_g(X; R) = \{\alpha\sigma_g; \alpha \in R\}$ é isomorfo a R . Analogamente, $S_{g-1}(X; R) = \{\alpha\sigma_{g-1}; \alpha \in R\}$ é isomorfo a R .

Vejamos como se comporta os operadores de bordo

$$\partial : S_g(X; R) \rightarrow S_{g-1}(X; R)$$

Para cada $g \geq 1$, ∂ é definido pela seguinte expressão

$$\begin{aligned} \partial(\sigma_g) &= \partial_0\sigma_g - \partial_1\sigma_g + \partial_2\sigma_g - \dots + (-1)^g\partial_g\sigma_g \\ &= \sigma_{g-1} - \sigma_{g-1} + \sigma_{g-1} - \dots + (-1)^g\sigma_{g-1}. \end{aligned}$$

Portanto,

- Se g for ímpar, $\partial_g : S_g(X; R) \rightarrow S_{g-1}(X; R)$ é o R -homomorfismo nulo;
- Se g for par, ∂_g leva gerador em gerador. Logo, $\partial_g : S_g(X; R) \rightarrow S_{g-1}(X; R)$ é R -isomorfismo.

Deste modo, analisamos os seguintes casos:

1º) Se $g \geq 1$ e g é ímpar, então $g + 1$ é par. Assim,

$$S_{g+1}(X; R) \xrightarrow{\partial_{g+1}} S_g(X; R) \xrightarrow{\cong} S_{g-1}(X; R)$$

∂_{g+1} é isomorfismo, logo

$$H_g(X; R) = \frac{Z_g(X; R)}{B_g(X; R)} = \frac{S_g(X; R)}{S_g(X; R)} = \{0\}.$$

2º) Se $g \geq 1$ e g é par, então $g + 1$ é ímpar. Assim,

$$S_{g+1}(X; R) \xrightarrow{\cong} S_g(X; R) \xrightarrow{\partial_g} S_{g-1}(X; R)$$

Então teremos $Im(\partial_{g+1}) = \{0\} = B_g(X; R)$ e $ker(\partial_g) = Z_g(X; R) = \{0\}$. Logo,

$$H_g(X; R) = \frac{Z_g(X; R)}{B_g(X; R)} = \{0\}.$$

3º) Caso $g = 0$, segue que

$$S_1(X; R) \xrightarrow{\partial_1} S_0(X; R) \xrightarrow{\partial_0} \{0\}$$

e assim, $Im(\partial_1) = \{0\} = B_0$ e $ker(\partial_0) = S_0(X; R)$. Portanto,

$$H_0(X; R) = \frac{S_0(X; R)}{Im(\partial_1)} \cong R$$

como queríamos.

Exemplo 1.12. ([1]; p. 26) Os grupos de homologia de $\mathbb{S}^n$ são dados por

$$H_g(\mathbb{S}^n; R) = \begin{cases} R, & \text{se } g = 0, n \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Teorema 1.1. ([4]; p. 109) *Seja X um espaço conexo por caminhos. Então, $H_0(X; R)$ é isomorfo à R .*

No que segue, apresentamos uma outra forma de definir os grupos de homologia usando as estruturas de complexo simplicial cuja definição apresentamos nesta seção.

Definição 1.20. Sejam $\{a_1, \dots, a_g\}$ um conjunto de vetores geometricamente independentes no $\mathbb{R}^n$. Definimos o **g -simplexo simplicial** como sendo

$$\sigma := \left\{ x = \sum_{i=1}^g t_i a_i; \sum_{i=1}^g t_i = 1 \text{ e } t_i \geq 0 \right\}.$$

Qualquer simplexo simplicial gerado por um subconjunto de $\{a_1, \dots, a_g\}$ é chamado **face** de σ . Se o subconjunto for próprio, chamamos de **face própria** de σ . Os pontos $\{a_1, \dots, a_g\}$ são chamados de **vértices** do simplexo; o número g é chamado **dimensão** do simplexo σ , denotamos $dim \sigma$.

Exemplo 1.13. Os 0-simplexos são pontos, 1-simplexos são segmentos, etc, como representado na Figura 1.2.

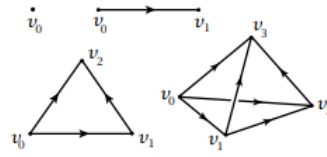


Figura 1.2: Simplexos Simpliciais

Definição 1.21. Seja σ um simplexo simplicial. Dizemos que duas orientações de seus vértices são **equivalentes** se elas diferem por uma permutação par de seus vértices.

Se $\dim \sigma > 0$, então a orientação dos vértices define duas classes de equivalência. Cada classe de equivalência é chamada uma **orientação** de σ . Se $\dim \sigma = 0$, então só existe uma orientação possível para σ . Dizemos que σ é um **g -simplexo orientado** se possui uma orientação fixada.

Definição 1.22. Um **complexo simplicial** K em $\mathbb{R}^n$ é uma coleção de simplexos simpliciais em $\mathbb{R}^n$ tais que

- (1) Toda face de um simplexo em K é um simplexo em K ;
- (2) A interseção de dois simplexos em K é uma face comum a eles.

Definição 1.23. Sejam K um complexo simplicial e $\sigma \in K$. O **bordo** de σ é a união das faces próprias de σ que denotamos por $\partial\sigma$. O **interior** de um simplexo σ é definido por $\text{int}(\sigma) = \sigma \setminus \partial\sigma$.

Definição 1.24. Seja K um complexo simplicial e L subconjunto de K que contém todos os seus vértices, L também é um complexo simplicial chamado **subcomplexo** de K . Os simplexos de K que têm dimensão no máximo p , é chamado **p -esqueleto** de K . Denotamos por K^p a coleção de todos os p -esqueletos de K . Em particular, K^0 é a coleção formada pelos vértices de K . Denotamos por $|K| \subset \mathbb{R}^n$ a união de todos os simplexos de K , chamado de **subespaço adjacente** de K .

Observação 1.5. Podemos munir $|K|$ com a seguinte topologia

$$A \subset |K| \text{ é fechado } \Leftrightarrow A \cap \sigma \text{ é fechado em } \sigma, \forall \sigma \in K$$

Sejam K um complexo simplicial e G um grupo abeliano livre. Uma **g -cadeia** c em K é uma função do conjunto de todos os g -simplexos orientados de K em G tal que:

- (i) $c(\sigma) = -c(\sigma')$, onde σ e σ' possuem orientações opostas no mesmo simplexo;
- (ii) $c(\sigma) \neq 0$ para finitos g -simplexos orientados.

Se σ é um g -simplexo orientado, uma **g -cadeia padrão (elementar)** é dada pela seguinte função:

$$c(\sigma) = 1, \quad c(\sigma') = -1 \text{ e } c(\tau) = 0, \text{ para todo } \tau \text{ simplexo de } \sigma$$

Denotamos por $C_g(K; G)$ o grupo das g -cadeias orientadas de K . Tal grupo é abeliano, livre, cuja base é formada pelas g -cadeias elementares associadas aos g -simplexos de K . Com isto, um elemento de $C_g(K; G)$ pode ser escrito da forma $\sum_{i=1}^k n_i c_i$, com $n_i \in G$ e c_i são as g -cadeias elementares.

O operador bordo $\partial_g : C_g(K; G) \rightarrow C_{g-1}(K; G)$ será o homomorfismo dado por

$$\partial_g(\sigma) = \sum_{i=0}^g (-1)^i [a_0, \dots, \hat{a}_i, \dots, a_g]$$

Tal operador satisfaz $\partial_{g+1} \circ \partial_g \equiv 0$ e, portanto, define um complexo de cadeias do tipo

$$\dots \xrightarrow{\partial_{g+1}} C_g(K; G) \xrightarrow{\partial_g} C_{g-1}(K; G) \xrightarrow{\partial_{g-1}} C_{g-2}(K; G) \xrightarrow{\partial_{g-2}} \dots$$

onde os elementos de $\ker(\partial_g)$ são chamados de **ciclos** e os elementos de $\text{Im}(\partial_{g+1})$ são chamados de **bordo** então, podemos definir o **g -ésimo grupo de homologia simplicial** como sendo

$$H_g(K; G) = \frac{\ker(\partial_g)}{\text{Im}(\partial_{g+1})}.$$

Existe uma equivalência entre as teorias de homologia simplicial e singular (ver [4], p. 128). Portanto, os resultados e exemplos que são apresentados durante o texto são válidos para ambos os casos.

Vimos que dado um espaço topológico X , obtemos um complexo de cadeias $(S_*(X; R))$ e os R -modulos de homologia $H_*(X; R)$. Agora, dados dois espaços topológicos X e Y , procuramos relacionar seus grupos de homologia $H_g(X; R)$ e $H_g(Y; R)$.

Sejam X e Y dois espaços topológicos e $f : X \rightarrow Y$ aplicação contínua. Um g -simplexo singular de X induz um g -simplexo singular em Y da seguinte maneira: dado $\sigma \in C_g(X)$, podemos definir a aplicação contínua $f \circ \sigma : \Delta_g \rightarrow Y$, que é um g -simplexo singular de Y . Em outras palavras, temos uma aplicação

$$\begin{aligned} f_{\#} : S_g(X; R) &\rightarrow S_g(Y; R) \\ \sigma &\mapsto f \circ \sigma. \end{aligned}$$

Assim, $f_{\#}$ é uma aplicação entre cadeias e satisfaz $f_{\#} \circ \partial_g = \partial_g \circ f_{\#}$. Consequentemente-

mente, $f_{\sharp}$ leva ciclos em ciclos, bordos em bordos e, portanto, induz um homomorfismo $f_* : H_g(X; R) \rightarrow H_g(Y; R)$.

Teorema 1.2. (*Teorema da Invariancia Homotópica, [4]; p. 111*) Se duas aplicações $f, g : X \rightarrow Y$ são homotópicas, então elas induzem o mesmo homomorfismo, isto é, $f_* = g_*$.

Corolário 1.3. ([4]; p. 111) Os homomorfismos $f_* : H_g(X; R) \rightarrow H_g(Y; R)$ induzidos por uma equivalência homotópica $f : X \rightarrow Y$ são isomorfismos para todo $g \geq 0$. Em outras palavras, se os espaços X e Y possuem o mesmo tipo de homotopia, então seus grupos de homologia são isomorfos.

Continuando nossa discussão sobre as aplicações induzidas, definimos em seguida os grupos de homologia relativa considerando pares de espaços topológicos (X, Y) , onde X é um espaço topológico e Y é um subespaço de X .

Dado $i : Y \rightarrow X$ a aplicação inclusão, temos que $i_{\sharp} : S_g(Y; R) \rightarrow S_g(X; R)$ é o homomorfismo induzido, onde $i_{\sharp}(\sigma) = i \circ \sigma$.

Deste modo, $S_g(Y; R) \subset S_g(X; R)$ para todo $g \geq 0$. Assim, consideramos o quociente $\frac{S_g(X; R)}{S_g(Y; R)}$ denotado por $S_g(X, Y; R)$, cujo operador bordo induz um homomorfismo

$$\begin{aligned} \bar{\partial}_g : S_g(X, Y; R) &\rightarrow S_{g-1}(X, Y; R) \\ c_g + S_g(Y; R) &\mapsto \partial_g(c_g) + S_{g-1}(Y; R). \end{aligned}$$

Logo, $S_*(X, Y; R) := \{S_g(X, Y; R), \bar{\partial}_g\}_{g \geq 0}$ é complexo de cadeias.

Definição 1.25. Os grupos de homologia relativa são definidos por

$$H_g(X, Y; R) = \frac{\ker(\bar{\partial}_g)}{\text{Im}(\bar{\partial}_{g+1})}, \quad \forall g \geq 0.$$

Um resultado importante para estes grupos é dado pelo seguinte teorema.

Teorema 1.4. (*Teorema de Excisão, [4]; p. 119*) Sejam X um espaço topológico, A e Z subespaços de X tais que $Z \subset A \subset X$, $\bar{Z} \subset \text{int}(A)$ e R um anél comutativo. A inclusão $i : (X \setminus Z, A \setminus Z) \rightarrow (X, A)$ induz um isomorfismo $H_g(X \setminus Z, A \setminus Z; R) \rightarrow H_g(X, A; R)$ para todo $g \geq 0$. Em outras palavras, para subespaços A e B de X tal que $X = \text{int}(A) \cup \text{int}(B)$, a inclusão $(B, A \cap B) \rightarrow (X, A)$ induz um isomorfismo $H_g(B, A \cap B; R) \rightarrow H_g(X, A; R)$ para todo $g \geq 0$.

1.6 Cohomologia

Dado um espaço topológico X , queremos definir os grupos de cohomologia. Esses grupos foram definidos logo após os grupos de homologia, isto porque os grupos de cohomologia são menos intuitivos do que os grupos de homologia e são menos geométricos. Suas origens estão na álgebra, não na geometria, para ser mais preciso, os grupos de cohomologia são o “dual” dos grupos de homologia.

Seja K um complexo simplicial e G um grupo abeliano. O grupo das cocadeias de K com coeficientes em G é denotado por

$$C^g(K; G) := \text{Hom}(C_g(K); G).$$

O **operador cobordo** δ é definido como o dual do operador bordo $\partial : C_{g+1}(K) \rightarrow C_g(K)$. Assim, $\delta : C^g(K; G) \rightarrow C^{g+1}(K; G)$ é dado por $\delta(\sigma) = \sigma \circ \partial$.

Definição 1.26. Definimos $Z^g(K; G)$ o grupo dos g -**cociclos**, isto é, o núcleo do homomorfismo δ e $B^{g+1}(K; G)$ o grupo dos **cobordos**, isto é, imagem do homomorfismo δ . Uma vez que $\partial \circ \partial \equiv 0$, temos $\delta \circ \delta \equiv 0$. Assim, podemos definir

$$H^g(K; G) := \frac{Z^g(K; G)}{B^{g+1}(K; G)}, \quad \forall g \geq 0$$

o grupo de **cohomologia simplicial** de K com coeficientes em G .

Se c^g é uma g -cocadeia e c_g uma g -cadeia, usamos a notação $\langle c^g, c_g \rangle$ para denotar o valor da cocadeia c^g na cadeia c_g . Com esta notação, a definição do operador cobordo se torna

$$\langle \delta c^g, c_{g+1} \rangle = \langle c^g, \partial c_{g+1} \rangle.$$

Observamos que

- $C_g(K, G)$ é um grupo abeliano livre que tem como base natural os g -simplexos orientados de K ;
- $\{\sigma_\alpha\}_{\alpha \in J}$ é a coleção destes g -simplexos orientados;
- $c_g = \sum_{\alpha \in J} n_\alpha \sigma_\alpha \in C_g(K; G)$.

Os elementos $c^g \in C^g(K; G)$ são determinados pelos seus valores g_α em cada elemento σ_α e estes valores podem ser associados arbitrariamente. Não existe garantia que c^g se anule em todos exceto uma quantidade finita de índices.

Denotamos por σ_α^* a cocadeia padrão com coeficientes em G cujo valor é 1 no elemento básico σ_α e 0 caso contrário. Assim, dado $q \in G$, temos que $q\sigma_\alpha^*$ denota a

cocadeia que tem valor q em σ_α e 0 em qualquer outro. Usando esta notação, segue que

$$c^g = \sum q_\alpha \sigma_\alpha^*.$$

Esta soma pode ser finita ou não. Mais ainda, desde que $c^g = \sum_{\alpha \in J} q_\alpha \sigma_\alpha^*$, então $\delta c^g = \sum_{\alpha \in J} q_\alpha (\delta \sigma_\alpha^*)$. Deste modo, podemos usar a igualdade $\delta \sigma^* = \sum \varepsilon_j \tau_j^*$, onde a soma é feita sobre todos os simplexes τ_j que têm σ como uma das faces e $\varepsilon_j = \pm 1$ é o sinal que σ assume na expressão de $\partial \tau_j$.

Exemplo 1.14. Consideramos K o complexo simplicial abaixo

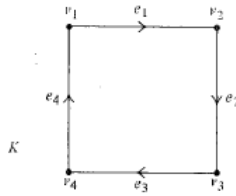


Figura 1.3: Complexo Simplicial

Vamos encontrar os grupos de cohomologia. A 0-cocadeia é uma soma da forma $c^0 = \sum n_i v_i^*$. Temos que $\langle \delta c^0, e_i \rangle = \langle c^0, \partial e_i \rangle$. Então, $\langle \delta c^0, e_1 \rangle = \langle c^0, \partial e_1 \rangle = n_2 - n_1$, $\langle \delta c^0, e_2 \rangle = \langle c^0, \partial e_2 \rangle = n_3 - n_2$, $\langle \delta c^0, e_3 \rangle = \langle c^0, \partial e_3 \rangle = n_4 - n_3$, e $\langle \delta c^0, e_4 \rangle = \langle c^0, \partial e_4 \rangle = n_1 - n_4$.

Assim, c^0 é um cociclo se, e somente se, $\delta c^0 = 0$, isto é, $n_1 = n_2 = n_3 = n_4$, ou seja, $c^0 = n \sum v_i^*$. Portanto,

$$H^0(K; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}.$$

Temos que c^1 é um cociclo e afirmamos que c^1 é cohomólogo a um múltiplo de e_1^* , e_3^* é cohomólogo a e_1^* . De fato,

$$\delta(v_4^* + v_1^*) = (e_3^* - e_4^*) + (e_4^* - e_1^*) = e_3^* - e_1^*.$$

Além disso, nenhum múltiplo de e_1^* é um cobordo. De fato, seja z um 1-ciclo. Então, para uma zero cocadeia c^0 , temos $\langle \delta c^0, z \rangle = \langle c^0, \partial z \rangle = 0$. Mas, $\langle n e_1^*, z \rangle = n$ não é cobordo a menos que $n = 0$. Concluimos então que

$$H^1(K; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}.$$

Observação 1.6. De maneira análoga ao que fizemos para os grupos de homologia

relativa, definimos os grupos de cohomologia relativa como sendo

$$H^g(K, L; G) = \frac{Z^g(K, L; G)}{B^g(K, L; G)}$$

onde $Z^g(K, L; G)$ é o grupo dos cociclos relativos e $B^g(K, L; G)$ é o grupo dos cobordos relativos.

Apresentamos duas formas de definir os grupos de homologia, o singular e o simplicial. Podemos fazer de modo análogo para os grupos de cohomologia. Já definimos os grupos de cohomologia simplicial, a seguir, mostramos a definição dos grupos de cohomologia singular, isto é feito de maneira axiomática e, assim como em homologia, as definições dos grupos de cohomologia simplicial e singular são equivalentes. Os axiomas apresentados a seguir definem a cohomologia singular e são chamados de axiomas de Eilenberg-Steenrod. Sejam X e Y espaços topológicos, A e B subespaços de X e Y , respectivamente e G um grupo abeliano. A teoria de cohomologia satisfaz os seguintes axiomas:

Axioma 1: A aplicação identidade $i : X \rightarrow X$ induz, para cada $g \geq 0$, a aplicação identidade $i_g^* : H^g(X; G) \rightarrow H^g(X; G)$.

Axioma 2: Se as aplicações $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ e $h : (Y, B) \rightarrow (Z, C)$ são contínuas, então $(h \circ f)_g^* = f_g^* \circ h_g^* : H^g(Z, C; G) \rightarrow H^g(X, A; G)$, para todo $g \geq 0$.

Axioma 3: Sejam $i : A \rightarrow X$ a aplicação inclusão e $j : X \rightarrow (X, A)$ a projeção no quociente entre cocadeias, então a sequência

$$\dots \rightarrow H^{g-1}(A; G) \rightarrow H^g(X, A; G) \xrightarrow{j^*} H^g(X; G) \xrightarrow{i^*} H^g(A; G) \rightarrow \dots$$

é exata.

Axioma 4: As aplicações induzidas por $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ são tais que o diagrama

$$\begin{array}{ccccc} \dots & \rightarrow & H^{g-1}(B; G) & \xrightarrow{\delta^{g-1}} & H^g(Y, B; G) & \rightarrow & \dots \\ & & \downarrow f^* & & \downarrow f^* & & \\ \dots & \rightarrow & H^{g-1}(A; G) & \xrightarrow{\delta^{g-1}} & H^g(X, A; G) & \rightarrow & \dots \end{array}$$

é comutativo para todo g .

Axioma 5: Sejam $f, h : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ duas aplicações homotópicas. Então, as aplicações induzidas nos grupos de cohomologia f_g^* e h_g^* são iguais para todo $g \geq 0$.

Axioma 6 (Teorema da Excisão): Sejam X um espaço topológico, A e Z subespaços de X tais que $Z \subset A \subset X$ e $\bar{Z} \subset \text{int}(A)$ e seja G um grupo abeliano. A inclusão $i : (X \setminus Z, A \setminus Z) \rightarrow (X, A)$ induz um isomorfismo $H^g(X \setminus Z, A \setminus Z; G) \rightarrow H^g(X, A; G)$ para todo $g \geq 0$. Em outras palavras, para subespaços A e B de X tal que $X = \text{int}(A) \cup \text{int}(B)$,

a inclusão $(B, A \cap B) \rightarrow (X, A)$ induz um isomorfismo $H^g(B, A \cap B; G) \rightarrow H^g(X, A; G)$ para todo $g \geq 0$.

Axioma 7: Se X é um espaço topológico constituído de apenas um ponto, então

$$H^g(X; G) = \begin{cases} G, & \text{se } g = 0 \\ 0, & \text{se } g > 0. \end{cases}$$

Observação 1.7. (i) Assim como fizemos para homologia, também podemos definir os grupos de cohomologia singular como sendo

$$H^g(X; G) = H^g(S^g(X); G)$$

onde $S^g(X; G) = \text{Hom}(S_g(X); G)$ e $S_g(X)$ é o módulo livre dos g -simplexos singulares que satisfaz os axiomas acima;

(ii) As definições dos grupos de cohomologia singular e simplicial são equivalentes (ver [5], p. 268) e, portanto, os resultados enunciados valem para ambos os casos.

1.7 Produto Cup e o Teorema de Kunneth

Nesta seção, apresentamos alguns resultados e operações entre os grupos de homologia e cohomologia que usamos no decorrer deste trabalho. Destacamos duas ferramentas importantes que se conectam na teoria de cohomologia. São elas o produto cup e a cohomologia para um produto cartesiano de espaços, $H^*(X \times Y; R)$. O Teorema de Kunneth é o que conecta essas duas coisas. O produto cup é uma operação entre os grupos de cohomologia que nos permite dar aos grupos de cohomologia a estrutura de um anel.

Sejam R um anel comutativo com unidade, $\alpha \in C^k(X; R)$ e $\beta \in C^l(X; R)$ cocadeias. Para cada simplexo singular $\sigma : \Delta^{k+l} \rightarrow X$, o **produto cup** é uma cocadeia $\alpha \smile \beta \in C^{k+l}(X; R)$ tal que

$$(\alpha \smile \beta)(\sigma) = \alpha(\sigma|_{[v_0, \dots, v_k]})\beta(\sigma|_{[v_k, \dots, v_{k+l}]}).$$

Temos então a induzida em cohomologia, $\smile: H^k(X; R) \times H^l(X; R) \rightarrow H^{k+l}(X; R)$, a qual é associativa, distributiva e existe o elemento identidade $1 \in H^0(X; R)$. Para os

grupos de cohomologia relativa valem que:

$$\begin{aligned} \smile: H^k(X; R) \times H^l(X, A; R) &\rightarrow H^{k+l}(X, A; R) \\ \smile: H^k(X, A; R) \times H^l(X; R) &\rightarrow H^{k+l}(X, A; R) \\ \smile: H^k(X, A; R) \times H^l(X, A; R) &\rightarrow H^{k+l}(X, A; R) \\ \smile: H^k(X, A; R) \times H^l(X, B; R) &\rightarrow H^{k+l}(X, A \cup B; R) \end{aligned}$$

onde A e B são subespaços de X .

Proposição 1.5. ([4]; p. 210) Para uma aplicação $f : X \rightarrow Y$ contínua, a aplicação induzida em cohomologia $f^* : H^n(Y; R) \rightarrow H^n(X; R)$ satisfaz $f^*(\alpha \smile \beta) = f^*(\alpha) \smile f^*(\beta)$.

Proposição 1.6. ([4]; p. 210) Seja R um anel comutativo. Então para todo $\alpha \in H^k(X, A; R)$ e $\beta \in H^l(X, A; R)$, vale que $\alpha \smile \beta = (-1)^{kl} \beta \smile \alpha$.

A seguir mostramos uma conexão entre o produto cup definido acima e a cohomologia para o produto cartesiano de espaços. Para isto, começamos definindo o *produto cross*.

Definição 1.27. Consideramos $p_1 : X \times Y \rightarrow X$ e $p_2 : X \times Y \rightarrow Y$ projeções. O **produto cross** é dado por

$$\begin{aligned} \times : H^*(X; R) \times H^*(Y; R) &\rightarrow H^*(X \times Y; R) \\ (a, b) &\mapsto a \times b = p_1^*(a) \smile p_2^*(b). \end{aligned}$$

Com isto podemos enunciar o teorema que faz uma conexão entre o produto cup e a cohomologia para um produto cartesiano de espaços, o chamado Teorema de Kunneth.

Teorema 1.7. (*Teorema de Kunneth*, [4]; p. 216) O produto cross $H^*(X; R) \otimes H^*(Y; R) \rightarrow H^*(X \times Y; R)$ é um isomorfismo se X e Y são CW complexos e $H^k(Y; R)$ é um R -módulo finitamente gerado para todo k .

Observação 1.8. Para a definição de um CW complexo, consulte [4], página 5.

Capítulo 2

Fibrados Vetoriais

Baseado em [7] e [9] apresentamos uma ferramenta importante para definir as classes de Stiefel-Whitney, a teoria dos Fibrados Vetoriais. Nosso principal objetivo neste capítulo é apresentar pontos principais no estudo dos fibrados vetoriais reais, propriedades e construções de alguns fibrados.

2.1 Fibrado

Definição 2.1. Um **fibrado vetorial real** de dimensão n , ξ sobre B é uma terna $\xi = (E, \pi, B)$, onde E e B são espaços topológicos, $\pi : E \rightarrow B$ é uma aplicação tal que para cada x em B o conjunto $F_x = \pi^{-1}(x)$ é um espaço vetorial de dimensão n sobre $\mathbb{R}$. Além disso, a condição de **trivialidade local** deve ser satisfeita, isto é, para cada ponto $x \in B$ existe um aberto U_x em B e um homeomorfismo $\varphi : U_x \times \mathbb{R}^n \rightarrow \pi^{-1}(U_x)$ tal que para cada $b \in U_x$, a aplicação $\varphi|_{\{b\} \times \mathbb{R}^n} : \{b\} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \pi^{-1}(b)$ define um isomorfismo de espaços vetoriais.

Quando para cada $x \in B$, F_x não possuir estrutura de espaço vetorial, dizemos apenas que ξ é um **fibrado**. Os espaços E e B são chamados de **espaço total** e **espaço base**, respectivamente, π a aplicação de projeção e F_x é a **fibra**.

Observação 2.1. Seja $\xi = (E, \pi, B)$ um fibrado vetorial.

- (i) Desde que π é sobrejetora, $F_x \neq \emptyset$;
- (ii) Se for possível escolher $U_x = B$ na condição de trivialidade local, dizemos que o fibrado ξ é um **fibrado trivial**.

Exemplo 2.1. Seja B um espaço topológico. Consideramos ξ_B^n o fibrado vetorial em

que o espaço base é B , o espaço total é dado por $E = B \times \mathbb{R}^n$ e a aplicação projeção é

$$\begin{aligned}\pi : E &\rightarrow B \\ (b, x) &\mapsto b.\end{aligned}$$

Assim, para cada $b \in B$ podemos escolher o próprio B como vizinhança de b e $h = Id_E : B \times \mathbb{R}^n \rightarrow \pi^{-1}(B) = B \times \mathbb{R}^n$ com $h(b, x) = (b, x)$, que é um homeomorfismo. Portanto, ξ_B^n é um fibrado vetorial trivial.

Exemplo 2.2. (Fibrado Linha Canônico) O fibrado γ_n^1 com espaço base $B = \mathbb{P}^n$ (Exemplo 1.6) e espaço total

$$E(\gamma_n^1) = \{(\{\pm x\}, v) \in \mathbb{P}^n \times \mathbb{R}^{n+1}; v = \lambda x, \lambda \in \mathbb{R}\}$$

com a aplicação

$$\begin{aligned}\pi : E(\gamma_n^1) &\rightarrow \mathbb{P}^n \\ (\{\pm x\}, v) &\mapsto \{\pm x\}\end{aligned}$$

é um fibrado vetorial. De fato, o espaço vetorial $\pi^{-1}(\{\pm x\})$ é a reta α que intercepta $\mathbb{S}^n$ nos pontos x e $-x$.

Para mostrar a condição de trivialidade local, consideramos $U \subset \mathbb{S}^n$ suficientemente pequeno de tal forma que U não contenha pontos antípodas. Como existe a aplicação quociente canônica $g : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{P}^n$, consideramos o conjunto $U_1 = g(U) \subset \mathbb{P}^n$. Assim, definimos o homeomorfismo

$$\begin{aligned}h : U_1 \times \mathbb{R} &\rightarrow \pi^{-1}(U_1) \\ (\{\pm x\}, t) &\mapsto (\{\pm x\}, tx).\end{aligned}$$

Portanto, o fibrado linha canônico γ_n^1 é localmente trivial.

Exemplo 2.3. (Fibrado Tangente) Seja M uma variedade diferenciável de dimensão n . O fibrado $\tau_M = (TM, \pi, M)$, onde $TM = \{(p, v); p \in M \text{ e } v \in T_p M\}$ com projeção

$$\begin{aligned}\pi : TM &\rightarrow M \\ (p, v) &\mapsto p\end{aligned}$$

é um fibrado vetorial chamado **fibrado tangente** à variedade M . Temos que em cada ponto $p \in M$, $\pi^{-1}(p) = \{(p, v); v \in T_p M\}$ é espaço vetorial onde as operações de soma

e produto são definidas da seguinte forma:

$$\begin{aligned}(p, v_1) + (p, v_2) &= (p, v_1 + v_2) \\ t(p, v) &= (p, tv)\end{aligned}$$

$t \in \mathbb{R}$ e $v, v_1, v_2 \in T_p M$. Desde que M é Hausdorff, temos que $TM = \dot{\cup}_{p \in M} T_p M$. Se U é um aberto de M , então um aberto em TM é da forma $TU = \cup_{q \in U} T_q M$. Para verificar a condição de trivialidade local, queremos definir um homeomorfismo $\varphi : \pi^{-1}(U) = TU \rightarrow U \times \mathbb{R}^n$. Dado $p \in M$, existe $U \subset M$ aberto com $p \in U$ e um sistema de coordenadas $x : U \rightarrow \mathbb{R}^n$. A topologia de TU faz com que o sistema de coordenadas x induza um homeomorfismo

$$\begin{aligned}\bar{x} : TU &\rightarrow x(U) \times \mathbb{R}^n \\ (q, v) &\mapsto ((x \circ \pi)(q, v), (a_1, \dots, a_n))\end{aligned}$$

onde $(a_1, \dots, a_n)$ são as coordenadas de v em $T_q M$. Daí, φ é homeomorfismo visto que

$$\begin{array}{ccc} TU & \xrightarrow{\varphi} & U \times \mathbb{R}^n \\ \bar{x} \downarrow & \nearrow x^{-1} \times Id & \\ x(U) \times \mathbb{R}^n & & \end{array}$$

$\varphi = (x^{-1} \times Id) \circ \bar{x}$ é homeomorfismo. Portanto, τ_M é um fibrado vetorial.

Exemplo 2.4. Sejam M uma variedade diferenciável n -dimensional e $V_r(TM)$ o espaço formado pelos r -frames tangentes a M , isto é, o conjunto de todos os pares $(x, (v_1, \dots, v_r))$ onde $x \in M$ e $(v_1, \dots, v_r)$ são vetores linearmente independentes em $T_x M$. A terna $\xi = (V_r(TM), \pi, M)$ é um fibrado de dimensão nr , com projeção

$$\begin{aligned}\pi : V_r(TM) &\rightarrow M \\ (x, (v_1, \dots, v_r)) &\mapsto x\end{aligned}$$

cujas fibras em cada ponto $x \in M$ é a variedade de Stiefel $V_r(T_x M)$.

Dado $p \in M$, existe $U \subset M$ aberto com $p \in U$ e um sistema de coordenadas $x : U \rightarrow \mathbb{R}^n$. A topologia de $V_r(TU)$ faz com que o sistema de coordenadas x induza um homeomorfismo

$$\begin{aligned}\bar{x} : V_r(TU) &\rightarrow x(U) \times \mathbb{R}^{nr} \\ (q, v) &\mapsto ((x \circ \pi)(q, v), (v_1, \dots, v_n)).\end{aligned}$$

Daí, φ é homeomorfismo visto que

$$\begin{array}{ccc} V_r(TU) & \xrightarrow{\varphi} & U \times \mathbb{R}^{nr} \\ \bar{x} \downarrow & \nearrow x^{-1} \times Id & \\ x(U) \times \mathbb{R}^{nr} & & \end{array}$$

$\varphi = (x^{-1} \times Id) \circ \bar{x}$ é homeomorfismo. Portanto, ξ é um fibrado.

Definição 2.2. Sejam ξ e η dois fibrados vetoriais sobre o mesmo espaço base B . Dizemos que ξ é **isomorfo** a η , se existir um homeomorfismo $f : E(\xi) \rightarrow E(\eta)$ tal que para cada $b \in B$, a fibra $F_b(\xi)$ é levada isomorficamente na fibra $F_b(\eta)$. Quando existir o isomorfismo, denotamos $\xi \cong \eta$.

Lema 2.1. Sejam ξ e η dois fibrados vetoriais sobre o mesmo espaço base B com uma aplicação contínua $f : E(\xi) \rightarrow E(\eta)$ tal que $f|_{F_b(\xi)} : F_b(\xi) \rightarrow F_b(\eta)$ é um isomorfismo linear, para todo $b \in B$. Então, f é homeomorfismo e, conseqüentemente, $\xi \cong \eta$.

Demonstração. Dado b_0 em B , existem abertos U e V de B contendo b_0 , homeomorfismos $g : U \times \mathbb{R}^n \rightarrow \pi_\xi^{-1}(U)$, $h : V \times \mathbb{R}^n \rightarrow \pi_\eta^{-1}(V)$ que são as trivializações locais de ξ e η , respectivamente. Consideramos $h^{-1} \circ f \circ g : (U \cap V) \times \mathbb{R}^n \rightarrow (U \cap V) \times \mathbb{R}^n$ definida por $(h^{-1} \circ f \circ g)(b, x) = (b, y)$, onde $y = (y_1, \dots, y_n)$ e $y_i = \sum_{j=1}^n f_{ij}(b)x_j$. Denotamos $[f_{ij}(b)]$ a matriz não-nula. Como em uma vizinhança de b , f é isomorfismo linear, deve existir a matriz inversa $[F_{ji}(b)]$. Além disso, $f_{ij}(b)$ depende continuamente de b . Assim, $(g^{-1} \circ f^{-1} \circ h)(b, y) = (b, x)$ para todo $(b, y) \in (U \cap V) \times \mathbb{R}^n$ e $x_j = \sum_{i=1}^n F_{ji}(b)y_i$.

Como $F_{ji}(b)$ dependem continuamente da matriz $[f_{ij}(b)]$, então eles dependem continuamente de b . Logo, a aplicação $g^{-1} \circ f^{-1} \circ h$ é contínua e, portanto, f^{-1} é contínua. $\square$

Definição 2.3. Seja ξ um fibrado vetorial. Uma **seção** de ξ é uma aplicação contínua $s : B \rightarrow E$ que associa a cada $b \in B$ um vetor $s(b)$ em sua fibra $F_b(\xi)$. Se $s(b) \neq 0$ para todo $b \in B$, dizemos que s é uma **seção nunca nula**.

Observação 2.2. Seja M uma variedade diferenciável como na Definição 1.5. Uma seção para τ_M é o mesmo que definir um campo vetorial em M (Definição 1.8).

Definição 2.4. Consideramos uma coleção finita $\{s_1, \dots, s_n\}$ de seções sobre um fibrado vetorial ξ . Dizemos que as seções são **independentes** se os vetores $s_1(b), \dots, s_n(b)$ são linearmente independentes na fibra F_b , para todo $b \in B$.

Teorema 2.2. *Seja ξ um fibrado vetorial. O fibrado ξ é trivial se, e somente se, admite n seções $s_1, \dots, s_n$ independentes.*

Demonstração. Supomos inicialmente que $s_1, \dots, s_n$ são independentes. Definimos

$$\begin{aligned} f : B \times \mathbb{R}^n &\rightarrow E \\ (b, x) &\mapsto x_1 s_1(b) + \dots + x_n s_n(b). \end{aligned}$$

Com isto, temos f contínua. Mostremos que $f|_{\{b\} \times \mathbb{R}^n} : \{b\} \times \mathbb{R}^n \rightarrow F_b(\xi)$ é isomorfismo linear. De fato, dados $(x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, temos

$$\begin{aligned} f(\alpha(b, (x_1, \dots, x_n)) + (b, (y_1, \dots, y_n))) &= f(b, (\alpha x_1 + y_1, \dots, \alpha x_n + y_n)) \\ &= (\alpha x_1 + y_1) s_1(b) + \dots + (\alpha x_n + y_n) s_n(b) \\ &= \alpha x_1 s_1(b) + y_1 s_1(b) + \dots + \alpha x_n s_n(b) + y_n s_n(b) \\ &= \alpha f(b, (x_1, \dots, x_n)) + f(b, (y_1, \dots, y_n)). \end{aligned}$$

Então, $f|_{\{b\} \times \mathbb{R}^n}$ é linear. Agora, considere $f(b, (x_1, \dots, x_n)) = f(b, (y_1, \dots, y_n))$, isto é, $x_1 s_1(b) + \dots + x_n s_n(b) = y_1 s_1(b) + \dots + y_n s_n(b)$. Então,

$$(x_1 - y_1) s_1(b) + \dots + (x_n - y_n) s_n(b) = 0$$

logo $x_i = y_i$ para $1 \leq i \leq n$. Portanto, f é injetora. Por fim, seja $e \in F_b(\xi)$. Como as seções são linearmente independentes e $\dim F_b(\xi) = n$, segue que as seções formam uma base para o espaço vetorial $F_b(\xi)$. Assim, existem únicos $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ tais que $e = x_1 s_1(b) + \dots + x_n s_n(b)$, ou seja, para $x = (x_1, \dots, x_n)$, temos que $e = f(b, x)$. Portanto, f é sobrejetora e, pelo lema anterior, $\xi \cong \xi_B^n$.

Reciprocamente, se ξ é trivial, consideramos a trivialização local $h : B \times \mathbb{R}^n \rightarrow \pi^{-1}(B)$. Definimos as seções como sendo $s_i(b) = h(b, (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)) \in F_b(\xi)$. Como para cada i , os vetores $(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ são linearmente independentes, segue que as seções $s_1, \dots, s_n$ são independentes. $\square$

Observação 2.3. Construir uma seção em $V_r(TM)$ equivale a construir r -seções linearmente independentes em τ_M . De fato, uma seção em $V_r(TM)$ é uma aplicação contínua $s : M \rightarrow V_r(TM)$ tal que para cada $x \in M$, $s(x) \in V_r(T_x M)$. Assim, $s(x)$ é uma r -upla de vetores linearmente independentes de $T_x M$. Deste modo, para cada ponto $x \in M$ temos r -seções linearmente independentes em τ_M , visto que uma seção de τ_M é um vetor de $T_x M$. Reciprocamente, se tomamos r -seções linearmente independentes em τ_M , $s_1, \dots, s_r$, então para cada $x \in M$, os vetores $s_1(x), \dots, s_r(x)$ são linearmente independentes e pertencem a $V_r(T_x M)$ e, portanto, define uma seção em $V_r(TM)$.

A partir de agora definimos os fibrados vetoriais euclidianos. Para isto, relembramos

a definição de um espaço vetorial euclidiano.

Definição 2.5. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita. Uma função $\mu : V \rightarrow \mathbb{R}$ é chamada **quadrática** se pode ser expressa na forma

$$\mu(v) = \sum_{i=1}^n l_i(v)l'_i(v),$$

onde $l_i, l'_i : V \rightarrow \mathbb{R}$ são transformações lineares para todo $i = 1, \dots, n$. A função quadrática μ é chamada **positiva definida** se $\mu(v) > 0$ para $v \neq 0$.

Cada função quadrática determina uma forma bilinear $\langle \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\langle v, w \rangle = \frac{1}{2}(\mu(v+w) - \mu(v) - \mu(w)).$$

Além disso, tal aplicação satisfaz $\langle v, v \rangle = \mu(v)$.

Definição 2.6. Um **espaço vetorial euclidiano** é um espaço vetorial V com uma função quadrática positiva. Dados v e w em V , o número real $\langle v, w \rangle$ é chamado **produto interno** dos vetores v e w .

Definição 2.7. Dizemos que um fibrado vetorial ξ é **euclidiano** se existir uma função contínua $\mu : E \rightarrow \mathbb{R}$ tal que a restrição $\mu|_{F_b(\xi)} : F_b(\xi) \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função quadrática positiva definida. Nestas condições, μ é chamada **métrica euclidiana** do fibrado ξ .

Exemplo 2.5. Considere o fibrado trivial ξ_B^n cujo espaço total é $E = B \times \mathbb{R}^n$. Definimos

$$\begin{aligned} \mu : B \times \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ (b, x) &\mapsto \sum_{i=1}^n x_i^2. \end{aligned}$$

Assim, temos que μ é contínua e $\mu|_{F_b(\xi)} : F_b(\xi) \rightarrow \mathbb{R}$ é quadrática positiva definida.

Exemplo 2.6. Para qualquer variedade diferenciável $M \subset \mathbb{R}^n$, temos que τ_M é um fibrado vetorial euclidiano. De fato, desde que $TM \subset T\mathbb{R}^n$, a aplicação $\mu : M \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\mu(p, (x_1, \dots, x_n)) = \sum_{i=1}^n x_i^2$ é métrica euclidiana para τ_M .

Exemplo 2.7. O fibrado linha canônico γ_n^1 é euclidiano. De fato, consideramos o espaço total

$$E(\gamma_n^1) = \{(x, v); v = \lambda x \text{ e } x \in \mathbb{S}^n\}.$$

Temos que $\lambda = \langle x, v \rangle$, pois $x \in \mathbb{S}^n$. Assim, defina $\mu : E(\gamma_n^1) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $\langle x, v \rangle$, se $\lambda \geq 0$ e $-\langle x, v \rangle$, se $\lambda < 0$. Portanto, μ é contínua e define uma métrica euclidiana para γ_n^1 .

Lema 2.3. Seja ξ um fibrado vetorial trivial. Então, existem n seções $s_1, \dots, s_n$ de ξ ortonormais, isto é para cada $b \in B$, $\langle s_i(b), s_j(b) \rangle = \delta_{ij}$ (delta de Kronecker).

Demonstração. Desde que ξ é um fibrado vetorial trivial, segue que existem n seções $s_i : B \rightarrow E$ independentes, para $i = 1, \dots, n$. Ou seja, para cada $b \in B$ o conjunto de vetores $\{s'_1(b), \dots, s'_n(b)\}$ é linearmente independente. Aplicando o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt nesses vetores, obtemos uma base ortonormal $\{s_1(b), \dots, s_n(b)\}$ de $F_b(\xi)$ para cada $b \in B$.

Como as funções s_i dependem das s'_i que são contínuas, segue que s_i são contínuas para todo i . Logo, $s_i : B \rightarrow E$ são seções ortonormais de ξ para todo $i = 1, \dots, n$. $\square$

2.2 Construção de alguns Fibrados Vetoriais

Nesta seção, apresentamos a construção de alguns fibrados que são particularmente importantes no desenvolvimento do último capítulo do nosso trabalho.

Exemplo 2.8. (Fibrado Restrição) Dado um fibrado vetorial ξ com projeção $\pi : E \rightarrow B$ e $\bar{B} \subset B$ subespaço topológico de B . O fibrado restrição de ξ a $\bar{B}$ é denotado por $\xi|_{\bar{B}}$, cuja projeção é $\bar{\pi} = \pi|_{\pi^{-1}(\bar{B})} : \bar{E} \rightarrow \bar{B}$. Para cada $b \in \bar{B}$,

$$F_b(\xi|_{\bar{B}}) = \bar{\pi}^{-1}(b) = \pi^{-1}(b) \cap \pi^{-1}(\bar{B}) = \pi^{-1}(b) = F_b(\xi)$$

as fibras possuem a mesma estrutura de espaço vetorial.

Para verificar a condição de trivialidade local, seja $b \in \bar{B} \subset B$. Como ξ é fibrado vetorial, existe $U \subset B$ aberto, com $b \in U$ e um homeomorfismo $h : U \times \mathbb{R}^n \rightarrow \pi^{-1}(U)$. Considerando $\bar{U} = U \cap \bar{B}$, temos que $\bar{U} \subset \bar{B}$ é vizinhança de b . Daí, $\bar{h} = h|_{\bar{U} \times \mathbb{R}^n} : \bar{U} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \bar{\pi}^{-1}(\bar{U}) = \pi^{-1}(\bar{U})$ é homeomorfismo.

Exemplo 2.9. (Fibrado Induzido) Sejam ξ um fibrado vetorial e B_1 um espaço topológico qualquer. Dada uma aplicação contínua $f : B_1 \rightarrow B$, construímos o fibrado induzido $f^*\xi$ sobre B_1 . Seu espaço total é

$$E_1 = \{(b, e) \in B_1 \times E; f(b) = \pi(e)\} \subset B_1 \times E$$

com projeção $\pi_1 : E_1 \rightarrow B_1$ tal que a cada par (b, e) associa à $b \in B_1$. Com isto, o diagrama

$$\begin{array}{ccc} E_1 & \xrightarrow{\hat{f}} & E \\ \pi_1 \downarrow & & \downarrow \pi \\ B_1 & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

é comutativo, onde $\hat{f}(b, e) = e$. Além disso, $\hat{f}$ leva $F_b(f^*\xi)$ isomorficamente em $F_{f(b)}(\xi)$. De fato, dado $b \in B_1$, segue que

$$\begin{aligned} F_b(f^*\xi) &= \pi_1^{-1}(b) \\ &= \{(b, y) \in E_1; \pi_1(b, y) = b\} \\ &= \{(b, y) \in E_1\} \\ &= \{(b, y) \in B_1 \times E; f(b) = \pi(y)\} \\ &= \{b\} \times F_b(\xi) \cong F_{f(b)}(\xi). \end{aligned}$$

Por fim, devemos verificar a condição de trivialidade local. Dado $b \in B_1$, temos $f(b) \in B$ e sendo ξ um fibrado vetorial, podemos considerar a trivialização local $h : U \times \mathbb{R}^n \rightarrow \pi^{-1}(U)$, onde $U \subset B$ é vizinhança de $f(b)$. Desde que f é aplicação contínua, segue que $f^{-1}(U) = U_1$ é vizinhança de $b \in B_1$. Consideramos a aplicação

$$\begin{aligned} h_1 : U_1 \times \mathbb{R}^n &\rightarrow \pi_1^{-1}(U_1) \\ h_1(b, x) &\mapsto (b, h(f(b), x)). \end{aligned}$$

Vamos mostrar que h_1 é um homeomorfismo. Se $(b_1, h(f(b_1), x_1)) = (b_2, h(f(b_2), x_2))$, então $b_1 = b_2$ e $h(f(b_1), x_1) = h(f(b_2), x_2)$, como h é homeomorfismo segue que $x_1 = x_2$, logo h_1 é injetora. Reciprocamente, seja $(b, e) \in \pi_1^{-1}(U_1)$. Então, $f(b) = \pi(e)$ e $e \in F_{f(b)}(\xi)$. Desde que h é homeomorfismo, com $h|_{\{f(b)\} \times \mathbb{R}^n}$ isomorfismo, existe $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $h(f(b), x) = e$. Logo, existe $(b, x) \in U_1 \times \mathbb{R}^n$ tal que $h_1(b, x) = (b, h(f(b), x)) = (b, e)$, ou seja, h_1 é sobrejetora e portanto, uma bijeção.

Além disso, h_1 é uma aplicação contínua, pois é definida como composição de aplicações contínuas e $h_1^{-1}(b, e) = (b, h^{-1}(e))$. Portanto, h_1 é homeomorfismo.

O diagrama construído acima sugere um conceito que, a priori, é mais geral.

Definição 2.8. Sejam $\xi = (E', \pi', B')$ e $\eta = (E, \pi, B)$ fibrados vetoriais. Dizemos que a aplicação $g : E(\eta) \rightarrow E(\xi)$ é uma **aplicação fibrada** se for contínua e leva $F_b(\eta)$ isomorficamente à $F_{b'}(\xi)$.

Fazendo $\bar{g}(b) = b'$, temos que a aplicação $\bar{g} : B(\eta) \rightarrow B(\xi)$ é contínua. De fato, desde que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} E(\eta) & \xrightarrow{g} & E(\xi) \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi' \\ B(\eta) & \xrightarrow{\bar{g}} & B(\xi) \end{array}$$

é comutativo, temos $\bar{g} \circ \pi = \pi' \circ g$. Assim, dado $U \subset B(\xi)$ aberto, $\bar{g}^{-1}(U) = (\pi \circ g^{-1} \circ \pi'^{-1})(U)$ é aberto pois as aplicações π , g e π' são contínuas.

Lema 2.4. Se $g : E(\eta) \rightarrow E(\xi)$ é aplicação fibrada e $\bar{g}$ é a aplicação correspondente nos espaços base, então $\eta \cong \bar{g}^*\xi$.

Demonstração. Defina $h : E(\eta) \rightarrow E(\bar{g}^*\xi)$ por $h(x) = (\pi_\eta(x), g(x)) = (b, g(x))$ (que pertence a $F_b(\bar{g}^*\xi)$) onde π_η é a projeção do fibrado η . Sendo π_η e g aplicações contínuas então, h também o é. Para mostrar que $\eta \cong \bar{g}^*\xi$, precisamos mostrar que h é homeomorfismo.

Para isto, mostramos que h é isomorfismo nas fibras. De fato, notamos que a aplicação

$$\begin{aligned} h|_{F_b(\eta)} : F_b(\eta) &\rightarrow F_b(\bar{g}^*\xi) \cong F_{\bar{g}(b)}(\xi) \\ (b, x) &\mapsto (b, g(x)) \end{aligned}$$

é linear pois g é linear. Agora, se $(b, g(x)) = (b, g(y))$ então, $x = y$ pois g é isomorfismo nas fibras, logo $h|_{F_b(\eta)}$ é injetora. Como g é aplicação fibrada, segue que $F_b(\eta) \cong F_{\bar{g}(b)}(\xi) \cong F_b(\bar{g}^*\xi)$, isto é, são espaços vetoriais de mesma dimensão. Assim, desde que $h|_{F_b(\eta)}$ é linear e injetora, $h|_{F_b(\eta)}$ é isomorfismo. Além disso, sendo h contínua, concluímos que h é homeomorfismo. $\square$

Exemplo 2.10. (Produto Cartesiano de Fibrados) Sejam ξ_1 e ξ_2 dois fibrados vetoriais com projeções $\pi_i : E_i \rightarrow B_i$, $i = 1, 2$. O produto cartesiano $\xi_1 \times \xi_2$ com projeção $\pi = \pi_1 \times \pi_2 : E_1 \times E_2 \rightarrow B_1 \times B_2$, onde cada fibra $\pi^{-1}(b_1, b_2) = F_{b_1}(\xi_1) \times F_{b_2}(\xi_2)$ possui estrutura de fibrado vetorial.

Para verificar a condição de trivialidade local, consideramos $h_1 : U \times \mathbb{R}^n \rightarrow \pi_1^{-1}(U)$ e $h_2 : V \times \mathbb{R}^m \rightarrow \pi_2^{-1}(V)$ as trivializações locais de ξ_1 e ξ_2 , respectivamente. Fazendo

$$h = h_1 \times h_2 : (U \times V) \times \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \pi^{-1}(U \times V)$$

dada por $h((b_1, b_2), x) = (h_1(b_1, (x_1, \dots, x_n)), h_2(b_2, (x_{n+1}, \dots, x_{n+m})))$, temos que h é homeomorfismo pois h_1 e h_2 o são.

Exemplo 2.11. (Soma de Whitney) Considere ξ_1 e ξ_2 dois fibrados vetoriais sobre mesmo espaço base B . Seja $d : B \rightarrow B \times B$ a aplicação diagonal, isto é, $d(b) = (b, b)$. O fibrado **soma de Whitney** de ξ_1 e ξ_2 é denotado por

$$\xi_1 \oplus \xi_2 := d^*(\xi_1 \times \xi_2).$$

Desde que $\xi_1 \times \xi_2$ é um fibrado vetorial e d é aplicação contínua, segue que o fibrado soma de Whitney é um fibrado induzido do produto $\xi_1 \times \xi_2$. Deste modo, o espaço total é dado por

$$E = \{(b, e) \in B \times E_*; d(b) = \pi_*(e)\}$$

onde E_* e π_* denotam o espaço total e projeção do fibrado $\xi_1 \times \xi_2$. A projeção será $\pi : E \rightarrow B$ tal que a cada par (b, e) associa à $b \in B$.

Além disso, a fibra em cada ponto $b \in B$ é isomorfa a soma direta das fibras de ξ_1 e ξ_2 no ponto em questão. De fato, dado $b \in B$

$$\begin{aligned} F_b(\xi_1 \times \xi_2) &= F_{d(b)}(d^*(\xi_1 \times \xi_2)) \\ &= \{b\} \times F_{(b,b)}(\xi_1 \times \xi_2) \\ &= \{b\} \times F_b(\xi_1) \times F_b(\xi_2) \\ &\cong F_b(\xi_1) \oplus F_b(\xi_2). \end{aligned}$$

Definição 2.9. Sejam ξ e η dois fibrados vetoriais sobre o mesmo espaço base B , com $E(\xi) \subset E(\eta)$. Então ξ é um **subfibrado** de η , denotamos por $\xi \subset \eta$, se cada fibra $F_b(\xi)$ for subespaço de $F_b(\eta)$.

Lema 2.5. Sejam ξ_1 e ξ_2 subfibrados de η tal que $F_b(\eta) = F_b(\xi_1) \oplus F_b(\xi_2)$. Então, $\eta \cong \xi_1 \oplus \xi_2$.

Demonstração. Definimos

$$\begin{aligned} f : E(\xi_1 \oplus \xi_2) &\rightarrow E(\eta) \\ (b, (x, y)) &\mapsto x + y \end{aligned}$$

Notamos que f restrita as fibras é linear. De fato, dados $(b, (x_1, y_1)), (b, (x_2, y_2)) \in F_b(\xi_1 \oplus \xi_2)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, temos

$$\begin{aligned} f(b, (x_1, y_1) + \alpha(b, (x_2, y_2))) &= f(b, (x_1 + \alpha x_2, y_1 + \alpha y_2)) \\ &= x_1 + y_1 + \alpha(x_2 + y_2) \\ &= f(b, (x_1, y_1)) + \alpha f(b, (x_2, y_2)). \end{aligned}$$

Além disso, $f|_{F_b(\xi_1 \oplus \xi_2)}$ é sobrejetora, já que $F_b(\eta) = F_b(\xi_1) \oplus F_b(\xi_2)$ e pelo teorema do núcleo imagem, f restrita às fibras é bijetora. Sendo f contínua, segue que $\eta \cong \xi_1 \oplus \xi_2$. $\square$

Exemplo 2.12. (Complemento Ortogonal) Sejam $\eta = (E, \pi, B)$ um fibrado vetorial

euclidiano e $\xi \subset \eta$ subfibrado. Consideramos $F_b(\xi^\perp)$ subespaço de $F_b(\eta)$, onde

$$F_b(\xi^\perp) = F_b(\xi)^\perp = \{v \in F_b(\xi); \langle v, w \rangle = 0, \forall w \in F_b(\xi)\}, \forall b \in B.$$

Definição 2.10. Dados o fibrado η e o subfibrado $\xi \subset \eta$, o fibrado **complemento ortogonal** de ξ , denotado por $\xi^\perp$, é o fibrado formado por $\xi^\perp = (E^\perp, \pi^\perp, B)$, onde $E^\perp = \cup_{b \in B} F_b(\xi^\perp)$ e $\pi^\perp = \pi|_{E^\perp}: E^\perp \rightarrow B$.

Então, para todo $b \in B$,

$$\begin{aligned} (\pi^\perp)^{-1}(b) &= (\pi|_{E^\perp})^{-1}(b) \\ &= F_b(\eta) \cap (\cup_{x \in B} F_x(\xi^\perp)) \\ &= \cup_{x \in B} (F_b(\eta) \cap F_x(\xi^\perp)) \\ &= F_b(\eta) \cap F_b(\xi^\perp) \\ &= F_b(\xi^\perp). \end{aligned}$$

Para verificar a condição de trivialidade local, consideramos $\eta = (E, \pi, B)$ um n -fibrado vetorial e $\xi = (E', \pi', B)$ um m -fibrado vetorial com $m \leq n$. Então, para todo $b_0 \in B$, seja $U \subset B$ vizinhança de b_0 tal que ξ e η são localmente triviais, isto é, existem homeomorfismos $h_1: U \times \mathbb{R}^m \rightarrow (\pi')^{-1}(U)$ e $h_2: U \times \mathbb{R}^n \rightarrow \pi^{-1}(U)$ tal que $h_1|_{\{b_0\} \times \mathbb{R}^m}$ e $h_2|_{\{b_0\} \times \mathbb{R}^n}$ são isomorfismos lineares.

Sabemos que existem $s_1, \dots, s_m: U \rightarrow E'$ seções ortonormais de $\xi|_U$ e $s'_1, \dots, s'_n: U \rightarrow E$ seções ortonormais de $\eta|_U$. Daí, a matriz $A = (\langle s_i(b_0), s'_j(b_0) \rangle)_{m \times n}$ tem posto m .

De fato, dados $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, com

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i (\langle s_i(b_0), s'_1(b_0) \rangle, \dots, \langle s_i(b_0), s'_n(b_0) \rangle) = (0, \dots, 0).$$

Então, $\langle \sum_{i=1}^m \alpha_i s_i(b_0), s'_j(b_0) \rangle = 0$, para todo $j = 1, \dots, n$ se, e somente se, $\sum_{i=1}^m \alpha_i s_i(b_0) = 0$ se, e somente se, $\alpha_i = 0$, para todo $i = 1, \dots, m$.

Temos que as m linhas de A são linearmente independentes. Assim, reordenando as seções $s'_1, \dots, s'_n$, se necessário, as primeiras m colunas de A formam uma submatriz com determinante não-nulo. Então, existe $V \subset U$ vizinhança de b_0 tal que para cada $b \in B$ esta submatriz em questão tem posto m .

Deste modo, para todo $b \in V$, o conjunto $\{s_1(b), \dots, s_m(b), s'_{m+1}(b), \dots, s'_n(b)\}$ é formado por vetores linearmente independentes em $F_b(\eta)$. Por Gram-Schmidt, obtemos uma base ortonormal $\{s_1(b), \dots, s_m(b), s_{m+1}(b), \dots, s_n(b)\}$ de $F_b(\eta)$ para todo $b \in B$. Logo a aplicação $h: V \times \mathbb{R}^{n-m} \rightarrow \pi^{-1}(V)$ dada por $h(b, (x_1, \dots, x_{n-m})) =$

$\sum_{i=1}^{n-m} x_i s_{m+i}(b)$ é homeomorfismo.

Exemplo 2.13. Sejam $N \subset \mathbb{R}^n$ uma variedade riemanniana e $M \subset N$ subvariedade diferenciável. Então $\tau_M \subset \tau_{N|M}$. Notamos que $E(\tau_M) \subset E(\tau_{N|M})$, pois dado $(p, v) \in E(\tau_M) = TM$, temos $p \in M$ e $v \in T_p M$. Como $M \subset N$ é subvariedade, $T_p M$ é subespaço vetorial de $T_p N$. Então, $p \in N$ e $v \in T_p N$, isto é, $(p, v) \in TN = E(\tau_N)$. Como $p \in M$, concluímos que $(p, v) \in E(\tau_{N|M})$. Além disso, $F_b(\tau_M)$ é subespaço vetorial de $F_b(\tau_{N|M})$ pois para todo $b \in M$, o conjunto $T_b M$ é subespaço de $T_b N$, então $F_b(\tau_M) = \{b\} \times T_b M$ é subespaço de $\{b\} \times T_b N = F_b(\tau_N) = F_b(\tau_{N|M})$.

Proposição 2.6. Sejam η um fibrado euclidiano e $\xi \subset \eta$. Então $\eta \cong \xi \oplus \xi^\perp$

Demonstração. Desde que $F_b(\xi^\perp) = F_b(\xi)^\perp$ para todo $b \in B$, a fibra $F_b(\eta)$ se decompõe por $F_b(\eta) = F_b(\xi) \oplus F_b(\xi)^\perp$. Logo, $\eta \cong \xi \oplus \xi^\perp$. $\square$

Definição 2.11. Sejam N uma variedade riemanniana e M subvariedade diferenciável de N . O **fibrado normal** de M é o fibrado $\tau_M^\perp$, denotado por ν_M .

Com isto, podemos reescrever o fibrado $\tau_{N|M}$ como sendo a soma de Whitney dos fibrados tangente e normal à variedade M , temos então que

$$\tau_{N|M} \cong \tau_M \oplus \nu_M.$$

Capítulo 3

Teoria de Obstrução

A teoria de obstrução é uma ferramenta que pode ser usada para estudar extensão de funções, isto é, prolongar uma função contínua $f : A \rightarrow Y$ a um ambiente mais amplo $X \supset A$ de modo que mantenha suas propriedades (continuidade, aditividade, etc.). Sejam $A \subset X$, Y espaços topológicos e $f : A \rightarrow Y$ aplicação contínua. Procuramos responder as seguintes perguntas:

- 1º) Existe extensão de f a todo espaço X ? Isto é, existe uma aplicação $g : X \rightarrow Y$ contínua tal que $g|_A = f$;
- 2º) Se existir extensões, como classificá-las?
- 3º) Que tipo de informação podemos extrair da existência ou não existência de extensões?

Neste capítulo, faremos estudo destas perguntas sobre a estrutura simplicial, apresentado na Definição 1.21.

3.1 Cocadeia de Obstrução

Sejam K um complexo simplicial e L um subcomplexo. Denotamos por $X = |K|$ e $Y = |L|$ seus respectivos subespaços adjacentes e por $X_p = |K^p|$ o subespaço adjacente dos p -esqueletos de K (Definição 1.24). Consideramos ainda $\xi = (E, \pi, X)$ um fibrado com fibra F .

Estudamos extensões de aplicações contínuas definidas em X_{p-1} , $f : X_{p-1} \rightarrow F$, à aplicações $g : X_p \rightarrow F$ tais que $g|_{X_{p-1}} = f$.

Seja $f : X \rightarrow F$ uma função, f_{p-1} a restrição de f a X_{p-1} e suponhamos que f_{p-1} é contínua. Deste modo, dado d um p -simplexo, se denotamos por ∂d seu bordo, temos que f_{p-1} está definida em ∂d . Assim, f_{p-1} determina um elemento $[f_{p-1}|_{\partial d}] \in \pi_{p-1}(F)$, onde $\pi_{p-1}(F)$ é o grupo de homotopia (ver [6], Lema 6.12).

Definição 3.1. A cocadeia relativa $c(f_{p-1}) \in C^p(K, L; \pi_{p-1}(F))$ definida por

$$c(f_{p-1})(d) = [f_{p-1}|_{\partial d}] \in \pi_{p-1}(F)$$

é chamada de **cocadeia de obstrução** para a extensão de f_{p-1} à X_p .

O próximo lema apresenta informações sobre extensões de aplicações definidas na esfera.

Lema 3.1. (Lema da Extensão, [6], p. 33) Seja Y um espaço topológico. Uma aplicação contínua $f : \mathbb{S}^n \rightarrow Y$ se estende a uma aplicação contínua $g : \mathbb{B}^{n+1} \rightarrow Y$ se, e somente se, f representa o elemento nulo no grupo $\pi_n(Y)$.

Segue que toda função f_{p-1} pode ser estendida à X_p se, e somente se, $c(f_{p-1}) = 0$. De fato, desde que ∂d é homeomorfo a $\mathbb{S}^{p-1}$, aplicando o Lema da Extensão segue que a aplicação $f_{p-1}|_{\partial d}$ se estende a $f_p|_d$ se, e somente se, $[f_{p-1}|_{\partial d}] = 0 \in \pi_{p-1}(F)$, ou seja, $c(f_{p-1}) = 0$. Em particular, se $\pi_i(F) = 0$, para $i = 1, \dots, p-1$, então toda aplicação $f_i : X_i \rightarrow F$ pode ser estendida à f_{i+1} .

Lema 3.2. Seja $g_{p-1} : X_{p-1} \rightarrow F$ uma aplicação contínua. Então, se f_{p-1} é homotópico a g_{p-1} , então $c(f_{p-1}) = c(g_{p-1})$.

Demonstração. Desde que $f_{p-1}|_{\partial d}$ é homotópico a $g_{p-1}|_{\partial d}$, segue que eles representam a mesma classe em $\pi_{p-1}(F)$. Logo, $c(f_{p-1}) = c(g_{p-1})$. $\square$

Seja ρ^{p+1} uma $(p+1)$ -cadeia. Usamos a notação $[\rho^{p+1} : d_i^p]$ para indicar a orientação da face d_i^p induzida pela orientação de ρ^{p+1} , ou seja, $[\rho^{p+1} : d_i^p]$ assume valores iguais a mais ou menos 1. Quando assumir valor igual a 1, dizemos que a incidência da face d_i^p de ρ^{p+1} é positiva. Caso contrário, dizemos que a incidência é negativa.

O lema a seguir nos auxilia na demonstração do próximo teorema.

Lema 3.3. ([6], p. 46) Seja ρ^{p+1} uma $(p+1)$ -cadeia orientada. Orientamos as suas faces p -dimensionais $d_1^p, d_2^p, \dots, d_s^p$ de modo que a incidência em todas as faces tenham o mesmo sinal. Sejam X_{p-1} o $(p-1)$ -esqueleto de ρ^{p+1} e $f_{p-1} : X_{p-1} \rightarrow F$. Denotamos $\alpha_i = [f_{p-1}|_{\partial d_i^p}]$, então $\sum_{i=1}^s \alpha_i = 0$.

Teorema 3.4. Seja $\delta : C^p(K, L; \pi_{p-1}(F)) \rightarrow C^{p+1}(K, L; \pi_{p-1}(F))$ operador cobordo. Então, $c(f_{p-1})$ é um cociclo.

Demonstração. Seja ρ^{p+1} uma $(p+1)$ -cadeia. Queremos mostrar que $\langle \delta c(f_{p-1}), \rho^{p+1} \rangle =$

0. Temos que

$$\begin{aligned}
 \langle \delta c(f_{p-1}), \rho^{p+1} \rangle &= \langle c(f_{p-1}), \partial \rho^{p+1} \rangle \\
 &= \langle c(f_{p-1}), \sum [\rho^{p+1} : d_i^p] d_i^p \rangle \\
 &= \sum [\rho^{p+1} : d_i^p] \langle c(f_{p-1}), d_i^p \rangle \\
 &= \sum [\rho^{p+1} : d_i^p] [f_{p-1} |_{\partial d_i^p}]
 \end{aligned}$$

onde a soma é tomada em todos os simplexes d_i^p que são faces de ρ^{p+1} .

Suponhamos que a incidência de todas as faces d_i^p de ρ^{p+1} é positiva. Desde que ∂d_i^p é um $(p-1)$ -simplexo, podemos considerar $f_{p-1}|_{\partial d_i^p}$. Aplicando o Lema 3.3 e tomando $[f_{p-1}|_{\partial d_i^p}] = \alpha_i$, segue que $\sum \alpha_i = 0$, portanto $\delta c(f_{p-1}) = 0$.

Por outro lado, se a incidência não for positiva, então considere $\alpha_i = [\rho^{p+1} : d_i^p] [f_{p-1}|_{\partial d_i^p}]$ elemento de $\pi_{p-1}(F)$ obtido da função f_{p-1} restrita a ∂d_i^p com orientação induzida de ρ^{p+1} e, pelo mesmo resultado acima, segue que $\sum [\rho^{p+1} : d_i^p] [f_{p-1}|_{\partial d_i^p}] = \sum \alpha_i = 0$, o que conclui o resultado. $\square$

Acabamos de verificar que cocadeias de obstrução são cociclos. Isto significa que o estudo de extensões de aplicações podem ser vistas através de elementos em grupos de cohomologia do complexo K . Em seguida, entendamos a diferença entre as cocadeias.

Sejam f_{p-1} e g_{p-1} duas extensões de $f_{p-2} : X_{p-2} \rightarrow F$. Pretendemos fornecer uma expressão de sua diferença. Para isto, consideramos d^{p-1} um $(p-1)$ -simplexo em K . Então, temos duas aplicações $f_{p-1}|_{d^{p-1}}$ e $g_{p-1}|_{d^{p-1}}$ que coincidem em ∂d^{p-1} , pois ambas são extensões de f_{p-2} . Denotamos por D_+ e D_- os hemisférios norte e sul da esfera, respectivamente. Como d^{p-1} é homeomorfo a ambos os hemisférios norte e sul, podemos interpretar $f_{p-1}|_{d^{p-1}}$ e $g_{p-1}|_{d^{p-1}}$ como uma função de D_+ em F , respectivamente para D_- . Como tais funções coincidem no equador $\mathbb{S}^{p-2}$ (homeomorfo a ∂d^{p-1}), temos que elas definem uma função $\gamma : \mathbb{S}^{p-1} \rightarrow F$, dada por

$$\gamma(x) = \begin{cases} f_{p-1}(x), & \text{se } x \in \mathbb{S}^{p-2} \\ f_{p-1}(x), & \text{se } x \in D_+^{p-1} \\ g_{p-1}(x), & \text{se } x \in D_-^{p-1} \end{cases}$$

Com isto, definimos a **cocadeia diferença** como sendo $d(f_{p-1}, g_{p-1})(d^{p-1}) = (-1)^p [\gamma] \in \pi_{p-1}(F)$, onde $d(f_{p-1}, g_{p-1}) \in C^{p-1}(K, L; \pi_{p-1}(F))$.

Se consideramos a função $H : X_{p-1} \times I \rightarrow F$ dada por

$$H(x, t) = \begin{cases} f_{p-2}(x), & \text{se } x \in X_{p-2} \text{ e } t \in I \\ f_{p-1}(x), & \text{se } x \in X_{p-1} \text{ e } t = 0 \\ g_{p-1}(x), & \text{se } x \in X_{p-1} \text{ e } t = 1 \end{cases}$$

Tal aplicação está bem definida pois g_{p-1} e f_{p-1} coincidem em f_{p-2} e é contínua pois é uma homotopia entre g_{p-1} e f_{p-1} . Assim, dado $d^{p-1} \in K$, a restrição $h_{d^{p-1}} = H|_{\partial d^{p-1} \times I} : \partial d^{p-1} \times I \rightarrow F$ é dada por

$$h_{d^{p-1}}(x, t) = \begin{cases} f_{p-2}(x), & \text{se } x \in \partial d^{p-1} \text{ e } t \in I \\ f_{p-1}(x), & \text{se } x \in d^{p-1} \text{ e } t = 0 \\ g_{p-1}(x), & \text{se } x \in d^{p-1} \text{ e } t = 1 \end{cases}$$

Tal aplicação é uma homotopia entre f_{p-1} e g_{p-1} . Assim, segue que $[\gamma] = [h_{d^{p-1}}]$. Portanto, a cocadeia diferença também fica definida por $d(f_{p-1}, g_{p-1})(d^{p-1}) = (-1)^p [h_{d^{p-1}}] \in \pi_{p-1}(F)$.

Agora, consideramos h_{p-1} outra extensão de f_{p-2} . Então,

$$d(f_{p-1}, h_{p-1}) = d(f_{p-1}, g_{p-1}) + d(g_{p-1}, h_{p-1}).$$

De fato, seja $H' : X_{p-1} \times I \rightarrow F$ construída analogamente a H , a partir de g_{p-1} e h_{p-1} , isto é,

$$H'(x, t) = \begin{cases} f_{p-2}(x), & \text{se } x \in X_{p-2} \text{ e } t \in I \\ g_{p-1}(x), & \text{se } x \in X_{p-1} \text{ e } t = 0 \\ h_{p-1}(x), & \text{se } x \in X_{p-1} \text{ e } t = 1 \end{cases}$$

Obtemos outra construção análoga para f_{p-1} e h_{p-1} , pondo $H'' : X_{p-1} \times I \rightarrow F$ dada por

$$H''(x, t) = \begin{cases} H(x, 2t), & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ H'(x, 2t - 1), & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Temos que H'' conecta H e H' pois $H''(x, \frac{1}{2}) = H(x, 1) = H'(x, 0) = g_{p-1}(x)$, $\forall x \in X_{p-1}$. Portanto, dado $d^{p-1} \in K$,

- $[H'' \mid ((\partial d^{p-1} \times [0, \frac{1}{2}]) \cup (d^{p-1} \times \{0\}) \cup (d^{p-1} \times \{\frac{1}{2}\}))]$ é o mesmo que

$$h_{d^{p-1}}(x, t) = \begin{cases} f_{p-2}(x), & \text{se } x \in \partial d^{p-1} \text{ e } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ f_{p-1}(x), & \text{se } x \in d^{p-1} \text{ e } t = 0 \\ g_{p-1}(x), & \text{se } x \in d^{p-1} \text{ e } t = 1 \end{cases}$$

e, portanto, define $d(f_{p-1}, g_{p-1})(d^{p-1})$;

- $[H'' \mid (\partial d^{p-1} \times [\frac{1}{2}, 1]) \cup (d^{p-1} \times \{\frac{1}{2}\}) \cup (d^{p-1} \times \{1\})]$ é o mesmo que

$$h_{d^{p-1}}(x, t) = \begin{cases} f_{p-2}(x), & \text{se } x \in \partial d^{p-1} \text{ e } t \in [\frac{1}{2}, 1] \\ g_{p-1}(x), & \text{se } x \in d^{p-1} \text{ e } t = \frac{1}{2} \\ h_{p-1}(x), & \text{se } x \in d^{p-1} \text{ e } t = 1 \end{cases}$$

e, portanto, define $d(g_{p-1}, h_{p-1})(d^{p-1})$;

- $[H'' \mid (\partial d^{p-1} \times I) \cup (d^{p-1} \times \{0\}) \cup (d^{p-1} \times \{1\})]$ é o mesmo que

$$h_{d^{p-1}}(x, t) = \begin{cases} f_{p-2}(x), & \text{se } x \in \partial d^{p-1} \text{ e } t \in I \\ f_{p-1}(x), & \text{se } x \in d^{p-1} \text{ e } t = 0 \\ h_{p-1}(x), & \text{se } x \in d^{p-1} \text{ e } t = 1 \end{cases}$$

e, portanto, define $d(f_{p-1}, h_{p-1})(d^{p-1})$.

Aplicando o Lema da Soma em [6], segue que $d(f_{p-1}, h_{p-1}) = d(f_{p-1}, g_{p-1}) + d(g_{p-1}, h_{p-1})$.

Lema 3.5. Se f_{p-1} é uma extensão de f_{p-2} e $c^{p-1} \in C^{p-1}(K, L; \pi_{p-1}(F))$ é uma cocadeia relativa qualquer, então existe outra extensão g_{p-1} de f_{p-2} tal que $d(f_{p-1}, g_{p-1}) = c^{p-1}$.

Demonstração. Consideramos a aplicação $G : X_{p-1} \times I \rightarrow F$ dada por

$$G(x, t) = \begin{cases} f_{p-1}(x), & \text{para } x \in X_{p-1} \text{ e } t = 0 \\ f_{p-2}(x), & \text{para } x \in X_{p-2} \text{ e } t \in I \end{cases}$$

Sejam agora $d_i^{p-1} \in K$, $(p-1)$ -simplexos orientados. Assim, temos que $G|_{d_i^{p-1}} : d_i^{p-1} \times I \rightarrow F$ é dada por

$$G(x, t) = \begin{cases} f_{p-1}(x), & \text{para } x \in d_i^{p-1} \text{ e } t = 0 \\ f_{p-2}(x), & \text{para } x \in \partial d_i^{p-1} \text{ e } t \in I \end{cases}$$

pelo Lema da construção em [6], podemos restringir esta função a uma aplicação $H_i : \partial d_i^{p-1} \times I \rightarrow F$ tal que $H_i|_{\partial d_i^{p-1} \times I} = G$ e cuja classe de homotopia é $(-1)^p c^{p-1}(d_i^{p-1})$. Como os H_i coincidem em $\partial d_i^{p-1} \times I$, obtemos $H : X_{p-1} \times I \rightarrow F$ dada por

$$H(x, t) = \begin{cases} f_{p-1}(x), & \text{para } t = 0 \\ f_{p-2}(x), & \text{para } t \in I \\ g_{p-1}(x), & \text{para } t = 1 \end{cases}$$

H é a extensão desejada tal que $d(f_{p-1}, g_{p-1}) = c^{p-1}$ e $H(x, 1) = g_{p-1}$. $\square$

O resultado a seguir é o mais importante desta seção pois ele nos dá uma expressão para a cocadeia diferença.

Teorema 3.6. $\delta d(f_{p-1}, g_{p-1}) = c(f_{p-1}) - c(g_{p-1})$

Demonstração. Seja $d^p \in K$ um p -simplexo orientado. Então,

$$\begin{aligned} \langle \delta d(f_{p-1}, g_{p-1}), d^p \rangle &= \langle d(f_{p-1}, g_{p-1}), \partial d^p \rangle \\ &= \langle d(f_{p-1}, g_{p-1}), \sum [d^p : \sigma_i^{p-1}] \sigma_i^{p-1} \rangle \\ &= \sum [d^p : \sigma_i^{p-1}] \langle d(f_{p-1}, g_{p-1}), \sigma_i^{p-1} \rangle \\ &= \sum [d^p : \sigma_i^{p-1}] [h_{\sigma_i^{p-1}}] \\ &= \sum [d^p \times I : \sigma_i^{p-1} \times I] [H|_{\partial \sigma_i^{p-1} \times I}] \end{aligned}$$

somado sobre as faces de d^p .

Desde que d^p é um p -simplexo, $d^p \times I$ é um $(p+1)$ -simplexo. Além disso, sendo σ_i^{p-1} faces de d^p , então $\sigma_i^{p-1} \times I$ são faces de $d^p \times I$, e suas orientações não mudam, logo vale a última igualdade. Mais ainda, sendo $d^p \times I$ um $(p+1)$ -simplexo, $d^p \times \{0\}$ e $d^p \times \{1\}$ são faces do mesmo. Logo, pelo Lema 3.3, segue que

$$(-1)^p \sum [d^p \times I : \sigma_i^{p-1} \times I] [H|_{\partial \sigma_i^{p-1} \times I}] + [d^p \times I : d^p \times \{0\}] [H|_{\partial d^p \times \{0\}}] + [d^p \times I : d^p \times \{1\}] [H|_{\partial d^p \times \{1\}}] = 0$$

Temos que $[H|_{\partial d^p \times \{0\}}] = [f_{p-1}|_{\partial d^p}] = c(f_{p-1})$ e $[H|_{\partial d^p \times \{1\}}] = [g_{p-1}|_{\partial d^p}] = c(g_{p-1})$.

Logo, $\delta d(f_{p-1}, g_{p-1}) - c(f_{p-1}) + c(g_{p-1}) = 0$ e, portanto, $\delta d(f_{p-1}, g_{p-1}) = c(f_{p-1}) - c(g_{p-1})$ $\square$

Com isto, podemos concluir que a diferença de dois cociclos de obstrução para duas extensões de f_{p-2} é um cobordo.

O resultado a seguir nos permite enxergar os cociclos de obstrução como elementos em grupos de cohomologia.

Lema 3.7. Se f_{p-2} pode ser estendida a uma função $f_{p-1} : X_{p-1} \rightarrow F$, então todos cociclos de obstrução $c(f_{p-1})$ de extensões de f_{p-2} a X_{p-1} pertencem a mesma classe de cohomologia

$$\bar{c}(f_{p-2}) \in H^p(K, L; \pi_{p-1}(F)).$$

Demonstração. Seja $b^p = \delta(-c^{p-1})$ um cobordo. Podemos construir g_{p-1} extensão de f_{p-2} tal que $d(f_{p-1}, g_{p-1}) = c^{p-1}$. Então, $c(f_{p-1}) - c(g_{p-1}) = \delta(c^{p-1}) = -b^p$ e, portanto, $c(g_{p-1}) = c(f_{p-1}) + b^p$.

Logo, em $H^p(K, L; \pi_{p-1}(F))$ os cociclos de obstrução pertencem a mesma classe de cohomologia. $\square$

Desde que $\bar{c}(f_{p-2}) \in H^p(K, L; \pi_{p-1}(F))$, podemos escrevê-lo na forma $\bar{c}(f_{p-2}) = c(f_{p-1}) + B^p(K, L; \pi_{p-1}(F))$. O lema acima nos diz que qualquer cociclo de obstrução para extensões da f_{p-2} representa a mesma classe de cohomologia relativa. O elemento $\bar{c}(f_{p-2}) \in H^p(K, L; \pi_{p-1}(F))$ é chamado de **obstrução primária**.

Teorema 3.8. *Seja $f_{p-1} : X_{p-1} \rightarrow F$, então f_{p-2} se estende a $g_p : X_p \rightarrow F$ se, e somente se, $\bar{c}(f_{p-2}) = 0$.*

Demonstração. Se f_{p-2} se estende a g_p , então $c(g_{p-1}) = 0$, onde g_{p-1} também é uma extensão de f_{p-2} . Logo, $\bar{c}(f_{p-2}) = 0$ em $H^p(K, L; \pi_{p-1}(F))$.

Reciprocamente, se $\bar{c}(f_{p-2}) = 0$, temos $c(f_{p-1}) + B^p(K, L; \pi_{p-1}(F)) = 0$, isto é, $c(f_{p-1}) \in B^p(K, L; \pi_{p-1}(F))$. Então, existe $u^{p-1} \in C^{p-1}(K, L; \pi_{p-1}(F))$ tal que $c(f_{p-1}) = \delta(u^{p-1})$. Sendo u^{p-1} uma cocadeia relativa, existe g_{p-1} extensão de f_{p-2} tal que $d(f_{p-1}, g_{p-1}) = u^{p-1}$. Assim, $c(f_{p-1}) - c(g_{p-1}) = \delta(u^{p-1}) = c(f_{p-1})$. Portanto, $c(g_{p-1}) = 0$, ou seja, f_{p-2} se estende à X_p . $\square$

3.2 Índice de um r -frame

Nosso objetivo nesta seção é avaliar a obstrução para a construção de r seções linearmente independentes de τ_M em cada ponto, isto é, avaliar a obstrução para a construção de um r -frame. Queremos responder a seguinte pergunta: Suponhamos que exista uma seção v^r de $V_r(TM)$ no bordo de um k -simplexo d . É possível estender esta seção no interior de d ?

Para responder esta pergunta, definimos a noção de índice de um r -campo em um ponto singular.

Seja M uma variedade n -dimensional sobre $\mathbb{R}$. Lembramos que o conjunto $V_r(TM) = \{(x, (v_1, \dots, v_r)); x \in M \text{ e } (v_1, \dots, v_r) \text{ são vetores linearmente independentes em } T_x M\}$ é o espaço total do fibrado ξ sobre M (Exemplo 2.4). E, como na Observação 2.3, construir r seções linearmente independentes de τ_M sobre $A \subset M$ equivale a construir uma seção de $V_r(TM)$ sobre A .

Seja K um complexo simplicial em M suficientemente pequeno tal que todo simplexo d esteja contido em um aberto U de M tal que $V_r(TM)$ é trivial, isto é, existe uma vizinhança de M por meio de abertos de modo que a restrição de $V_r(TM)|_U$ é homeomorfo a $U \times \mathbb{R}^n$.

Consideramos v^r um r -frame definido no bordo de um k -simplexo d , $d \in K$. Sendo v^r uma seção de $V_r(TM)$, temos as seguintes aplicações

$$\partial d \xrightarrow{v^r} V_r(TM)|_U \cong U \times V_r(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{pr_2} V_r(\mathbb{R}^n)$$

onde pr_2 é a segunda projeção.

Com isto, obtemos a aplicação $\mathbb{S}^{k-1} \cong \partial d \xrightarrow{pr_2 \circ v^r} V_r(\mathbb{R}^n)$ que define um elemento em $\pi_{k-1}(V_r(\mathbb{R}^n))$ que denotamos por $\xi = pr_2 \circ v^r$ e o elemento no grupo de homotopia é denotado por $[\xi(v^r, d)]$.

Como vimos anteriormente (Lema 3.1), se $[\xi(v^r, d)] = 0$ a aplicação pode ser estendida para o interior da bola $\mathbb{B}^k$. Em outras palavras, o r -frame pode ser estendido para d . Neste caso, isto significa que não existe obstrução à extensão da seção v^r em d . Isto acontece, por exemplo, no caso em que o $\pi_{k-1}(V_r(\mathbb{R}^n)) = 0$.

Para continuar a responder nossa pergunta, precisamos conhecer o grupo de homotopia de $V_r(\mathbb{R}^n)$, feito por Stiefel e Whitney. Tem-se

$$\pi_i(V_r(\mathbb{R}^n)) = \begin{cases} 0, & \text{se } i < n - r \\ \mathbb{Z}, & \text{se } i = n - r \text{ par, ou } i = n - r \text{ se } r = 1 \\ \mathbb{Z}_2, & \text{se } i = n - r \text{ ímpar e } r > 1 \end{cases}$$

O resultado a seguir é a resposta para a pergunta no início desta seção.

Proposição 3.9. Dada uma r -frame v^r definida no bordo do k -simplexo d .

- (i) Se $k < n - r + 1$, então $[\xi(v^r, d)] = 0$ e podemos estender o r -frame definido em ∂d à d sem singularidade;
- (ii) Se $r = 1$ e $k = n$, então o campo vetorial v^r pode ser estendido à d com uma singularidade isolada a no interior de d , com índice $[\xi(v^r, d)] = I(v, a)$;
- (iii) Se $r > 1$ e $k = n - r + 1$, então o r -frame v^r definido em ∂d pode ser estendido à d com uma singularidade isolada a no interior de d . Neste caso, $[\xi(v^r, d)]$ é um número inteiro se k for ímpar e será inteiro *mod* 2 quando k for par. Reduzindo estes valores a modulo 2, obtemos um índice $I(v^r, a)$ que mede o valor da obstrução para a extensão de v^r ao interior de d .

Demonstração. (i) Se $k = \dim(d) < n - r + 1$, então $k - 1 < n - r$. Como $\xi : \partial d \rightarrow V_r(\mathbb{R}^n)$ define um elemento em $\pi_{k-1}(V_r(\mathbb{R}^n))$ e $k - 1 < n - r$, segue que $\pi_{k-1}(V_r(\mathbb{R}^n)) = 0$. Portanto, ξ se estende à d sem singularidades.

- (ii) Se $r = 1$ e $k = n$, então a aplicação $\xi : \partial d \rightarrow V_1(\mathbb{R}^n)$ será o mesmo que $\xi : \mathbb{S}^{k-1} \rightarrow \mathbb{S}^{k-1}$, a qual define um elemento no grupo $\pi_{k-1}(V_1(\mathbb{R}^n)) = \mathbb{Z} = \pi_{k-1}(\mathbb{S}^{k-1})$ e,

portanto, temos uma singularidade isolada, a qual podemos identificar do seguinte modo:

Consideramos a esfera $S_\varepsilon^{k-1}(a)$ de centro a e raio ε , com $0 < \varepsilon \leq 1$. Temos que, dado $x \in \mathbb{S}^{k-1}$, então $\varepsilon x \in S_\varepsilon^{k-1}(a)$ e $v(\varepsilon x) = \varepsilon v(x)$. Deste modo, ao fazermos $\varepsilon \rightarrow 0$, $S_\varepsilon^{k-1}(a) = \{a\}$ e assim, $v(\varepsilon a) = 0$. Portanto, o ponto a será a singularidade.

Por fim, devemos mostrar que $[\xi(v, d)] = I(v, a)$, onde $I(v, a)$ é o grau de Brower da aplicação de Gauss¹.

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{S}^{k-1} &\rightarrow \mathbb{S}^{k-1} \\ x &\mapsto \frac{v(x)}{\|v(x)\|} \end{aligned}$$

Consideramos a aplicação

$$\begin{aligned} \psi : \pi_{k-1}(\mathbb{S}^{k-1}) &\rightarrow \mathbb{Z} \\ \alpha &\mapsto d_\alpha \end{aligned}$$

onde d_α é o grau de Brower. Damos aqui uma ideia para mostrar este homomorfismo.

Consideramos S_1^{n-1} e S_2^{n-1} duas esferas trianguladas e orientadas. Sejam $\alpha, \beta \in \pi_{k-1}(\mathbb{S}^{k-1})$, $f \in \alpha$ e $g \in \beta$ com f definida na calota interior à D_+ e g definida na calota interior à D_- . Consideramos K uma triangulação suficientemente fina de S_1^{n-1} de modo que existam aproximações simpliciais γ de f e ω de g , com γ definida em D_+ e ω definida em D_- . Com isto, definimos uma aplicação $h : S_1^{n-1} \rightarrow S_2^{n-1}$ dada por

$$h(x) = \begin{cases} \gamma|_{D_+}, & \text{se } x \in D_+ \\ \omega|_{D_-}, & \text{se } x \in D_- \end{cases}$$

Temos que h representa $\alpha + \beta$ e é simplicial. Agora, seja z^{n-1} ciclo fundamental de S_1^n , então $h_*(z^{n-1})$ é ciclo de S_2^{n-1} pois o homomorfismo induzido $h_* : H_{n-1}(S_1^{n-1}; \mathbb{Z}) \rightarrow H_{n-1}(S_2^n; \mathbb{Z})$ leva ciclo em ciclo. Além disso, dado qualquer $(n-1)$ -simplexo σ^{n-1} de S_2^n , este aparece em $h_*(z^{n-1})$, pois $h_*(z^{n-1})$ é a soma de todos $(n-1)$ -simplexos de S_2^{n-1} . Então, temos que σ^{n-1} aparece com coeficiente d_f devido aos $(n-1)$ -simplexos de D_+ e deve aparecer com coeficiente d_g devido aos $(n-1)$ -simplexos de D_- . Então, em $h_*(z^{n-1})$, σ^{n-1} comparece

¹Definido no anexo

$d_f + d_g$ vezes e $d_h = d_f + d_g$, isto é, $d_{\alpha+\beta} = d_\alpha + d_\beta$. Portanto, ψ é homomorfismo aditivo. Como $\pi_{k-1}(\mathbb{S}^{k-1}) = \mathbb{Z}$, $\psi : \pi_{k-1}(\mathbb{S}^{k-1}) \rightarrow \mathbb{Z}$ dada por $\psi(\alpha) = d_\alpha$ é isomorfismo. Logo, $[\xi(v, d)] = I(v, a)$.

- (iii) A demonstração é análoga ao que fizemos acima. O índice $I(v^r, a)$ será da aplicação $\varphi : \mathbb{S}^{k-1} \rightarrow \mathbb{S}^{k-1}$ dada por $\frac{v^r(x)}{\|v^r(x)\|}$.

□

A dimensão $k = n - r + 1$ é chamada **dimensão de obstrução** para a construção de um r -frame tangente à M .

3.3 Classes de Stiefel-Whitney

Usando as ferramentas que definimos até aqui, apresentamos a primeira definição das classes de Stiefel-Whitney, introduzida pelos matemáticos Edward Stiefel e Hassler Whitney ([7]).

Vimos na Proposição 3.8 que os grupos de homotopia da variedade de Stiefel nos dá informações sobre a obstrução à construção de uma seção v^r de $V_r(TM)$, ou equivalentemente, à um conjunto linearmente independente de campos de vetores tangentes a M .

Assim sendo, seja K uma decomposição simplicial de M e $(v^r)_p : X_p \rightarrow V_r(\mathbb{R}^n)$, com $p \in \{0, \dots, n - r + 1\}$. Como vimos anteriormente, tais aplicações se estendem sem singularidades até a dimensão $p - 1$ e possui singularidade isolada na dimensão $p = n - r + 1$.

Restringindo a aplicação $(v^r)_p$ ao bordo de um p -simplexo d , temos que $(v^r)_p|_{\partial d} = p_{r-1} \circ v^r : \partial d \rightarrow V_r(\mathbb{R}^n)$. Logo, $[\xi(v^r, d)] = [(v^r)_{p-1}|_{\partial d}] \in \pi_{p-1}(V_r(\mathbb{R}^n))$. Mas, temos que

$$\pi_{p-1}(V_r(\mathbb{R}^n)) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{se } p = n - r + 1 \text{ ímpar, ou } p = n \text{ se } r = 1 \\ \mathbb{Z}_2, & \text{se } p = n - r + 1 \text{ par e } r > 1 \end{cases}$$

Portanto, temos que $[\xi(v^r, d)] = [(v^r)_p|_{\partial d}] = I(v^r, a) \in \pi_{p-1}(V_r(\mathbb{R}^n))$.

Consideramos inicialmente $I(v^r, a) \in \mathbb{Z}_2$. Definimos os elementos da p -cocadeia como sendo $\sum I(v^r, a)d^* \in C^p(K; \mathbb{Z}_2)$, que assume o valor $I(v^r, a)$ em d e 0 caso contrário (aqui d^* denota a cocadeia padrão com coeficientes em $\mathbb{Z}_2$, cujo valor é 1 no elemento básico d e 0 caso contrário).

Desde que a p -cocadeia $c^p = \sum I(v^r, a)d^*$ é um cociclo de obstrução, este define um elemento $w^p(M)$ em $H^p(M; \mathbb{Z}_2)$. Com isto, definimos:

Definição 3.2. A p -ésima classe de Stiefel-Whitney de M , denotada por $w^p(M) \in H^p(M; \mathbb{Z}_2)$ é a classe de obstrução primária correspondente a criação de um r -frame

tangente a M .

Observação 3.1. (i) Devido ao Lema 3.6, a classe obtida não depende da escolha do r -frame;

(ii) Se $r = 1$, temos $I(v^r, a) \in \mathbb{Z}$. A avaliação $w^p(M) \in H^p(M; \mathbb{Z})$ é a característica de Euler-Poincaré de M (ver [8], p. 17).

Teoria de Obstrução e as classes de Stiefel-Whitney

Os estudos sobre as classes características começaram em meados da década de 1930 com os trabalhos de Hassler Whitney e Eduard Stiefel. Em sua tese, Stiefel introduziu estas classes em homologia, enquanto Whitney trabalhou no caso de fibrados para esfera. Um pouco mais tarde, Whitney desenvolveu este estudo em cohomologia, daí o conceito das classes características em cohomologia ([7]).

A classe de Stiefel-Whitney que apresentamos via Teoria de Obstrução é a mesma definida em Geometria Algébrica, a qual apresenta uma definição estritamente axiomática para as classes características, ou seja, a classe de Stiefel-Whitney que apresentamos por meio da Teoria de Obstrução satisfaz os axiomas apresentados na Geometria Algébrica.

Baseado em [7] e [10], concluímos este trabalho mostrando que a classe de Stiefel-Whitney definida na seção anterior, via teoria de obstrução, satisfaz os axiomas clássicos que Stiefel e Whitney enunciaram. Assim, temos que a definição para as classes características apresentadas na Geometria Algébrica é equivalente a definição dada por Hassler Whitney e Eduard Stiefel.

Os axiomas clássicos apresentados por Hassler Whitney e Eduard Stiefel são os seguintes:

Axioma 1 Para cada fibrado vetorial ξ existe uma sequência de classes de cohomologia

$$w_i(\xi) \in H^i(B(\xi); \mathbb{Z}_2), \quad i = 0, 1, \dots$$

chamadas **classes de Stiefel-Whitney** de ξ . Estas classes são tais que $w_0(\xi) = 1 \in H^0(B(\xi); \mathbb{Z}_2)$ e $w_i(\xi) = 0$ para todo $i > n$, onde n é a dimensão do fibrado.

Axioma 2 (Naturalidade) Sejam ξ e η dois fibrados vetoriais. Se $f : B(\xi) \rightarrow B(\eta)$ é uma aplicação induzida nos espaços base de cada fibrado (Exemplo 2.9), então

$$w_i(\xi) = f^*(w_i(\eta))$$

onde $f^* : H^i(B(\eta); \mathbb{Z}_2) \rightarrow H^i(B(\xi); \mathbb{Z}_2)$ é a aplicação nos grupos de cohomologia.

Axioma 3 (Produto de Whitney) Se ξ e η são fibrados vetoriais sobre o mesmo espaço base, então

$$w_k(\xi \oplus \eta) = \sum_{i=0}^k w_i(\xi) \smile w_{k-i}(\eta)$$

Axioma 4 Para o fibrado linha canônico γ_1^1 sobre $\mathbb{P}^1$, tem-se $w_1(\gamma_1^1) = b$, não nulo, onde $\langle b \rangle = H^1(\mathbb{P}^1; \mathbb{Z}_2)$.

Apresentamos a seguir algumas consequências destes axiomas.

Proposição 3.10. Sejam ξ e η dois fibrados vetoriais sobre mesmo espaço base B . Se ξ e η são isomorfos, então para todo $i \geq 0$, $w_i(\xi) = w_i(\eta)$.

Demonstração. Desde que $\xi \cong \eta$, existe um homeomorfismo $f : E(\xi) \rightarrow E(\eta)$ tal que $f(F_b(\xi)) \subset F_b(\eta)$ e $f|_{F_b(\xi)}$ é isomorfismo linear. Com isto, temos que f é aplicação fibrada e a aplicação induzida no espaço base $\bar{f} : B \rightarrow B$ é a identidade. Deste modo, a aplicação nos grupos de cohomologia será a identidade $(id_B)^* : H^i(B; \mathbb{Z}_2) \rightarrow H^i(B; \mathbb{Z}_2)$. Logo, pelo Axioma 2 segue que

$$w_i(\xi) = (id_B)^*(w_i(\eta)) = w_i(\eta).$$

□

Proposição 3.11. Se ξ é um fibrado vetorial trivial, então $w_i(\xi) = 0$ para todo $i > 0$.

Demonstração. Sendo ξ fibrado vetorial trivial, temos $\xi \cong \varepsilon_B^n$ para algum $n \geq 0$. Dado $b \in B$, consideramos $f : B \times \mathbb{R}^n \rightarrow \{b\} \times \mathbb{R}^n$ dada por $f(x, y) = (b, y)$. Temos então que f é contínua e $f|_{\{x\} \times \mathbb{R}^n} : \{x\} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \{b\} \times \mathbb{R}^n$ é isomorfismo linear para todo $x \in B$.

Deste modo, f é aplicação fibrada de ε_B^n em $\varepsilon_{\{b\}}^n$ sendo $c : B \rightarrow \{b\}$ a aplicação induzida nos espaços base. Pelo Axioma 2, segue que

$$w_i(\varepsilon_B^n) = c^*(w_i(\varepsilon_{\{b\}}^n))$$

onde $c^* : H^i(\{b\}; \mathbb{Z}_2) \rightarrow H^i(B; \mathbb{Z}_2)$. Mas, $H^i(\{b\}; \mathbb{Z}_2) = \{0\}$, para todo $i > 0$. Portanto, pela Proposição 3.10, concluímos que

$$w_i(\xi) = w_i(\varepsilon_B^n) = c^*(w_i(\varepsilon_{\{b\}}^n)) = 0.$$

□

Proposição 3.12. Sejam ξ e η dois fibrados vetoriais sobre mesmo espaço base B , com ξ trivial. Então, $w_k(\xi \oplus \eta) = w_k(\eta)$, para todo $k > 0$.

Demonstração. Para todo $k > 0$, o Axioma 3 nos diz que

$$w_k(\xi \oplus \eta) = w_0(\xi) \smile w_k(\eta) + w_1(\xi) \smile w_{k-1}(\eta) + \cdots + w_k(\xi) \smile w_0(\eta).$$

Como ξ é trivial, a proposição anterior nos diz que $w_i(\xi) = 0$ para todo $i > 0$. Logo,

$$w_k(\xi \oplus \eta) = 1 \smile w_k(\eta) + 0 + \cdots + 0 = w_k(\eta).$$

□

Proposição 3.13. Seja ξ um n -fibrado euclidiano. Se ξ possui k seções independentes, com $1 \leq k \leq n$, então

$$w_{n-k+1}(\xi) = w_{n-k+2}(\xi) = \cdots = w_k(\xi) = 0.$$

Demonstração. Como ξ possui k seções independentes, consideramos um k -subfibrado trivial de ξ , que denotamos por η . Temos que $\xi \cong \eta \oplus \eta^\perp$, onde $\eta^\perp$ é um $(n-k)$ -fibrado. Daí, $w_i(\xi) = w_i(\eta \oplus \eta^\perp) = w_i(\eta^\perp)$, pois η é trivial. Logo, pelo Axioma 1, para todo $i > n-k$, $w_i(\xi) = 0$. □

Denotamos por $H^\Pi(B; \mathbb{Z}_2)$ o conjunto das somas formais $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$, com $a_i \in H^i(B; \mathbb{Z}_2)$. Munindo este conjunto com as operações de soma e produto definidas por:

- $a + b = \sum_{i=0}^{\infty} c_i$, onde $c_i = a_i + b_i$;
- $a \cdot b = \sum_{k=0}^{\infty} d_k$, onde $d_k = \sum_{i=0}^k a_i \smile b_{k-i}$

com $a = \sum_{i=0}^{\infty} a_i$ e $b = \sum_{i=0}^{\infty} b_i$ em $H^\Pi(B; \mathbb{Z}_2)$, segue que $H^\Pi(B; \mathbb{Z}_2)$ é um anel comutativo, pois os coeficientes estão em $\mathbb{Z}_2$.

Com isto, dado $\xi = (E, \pi, B)$ um n -fibrado vetorial, definimos a classe total de Stiefel-Whitney como sendo

$$\omega(\xi) = 1 + w_1(\xi) + w_2(\xi) + \cdots + w_n(\xi) + 0 + \cdots \in H^\Pi(B; \mathbb{Z}_2).$$

Observação 3.2. O axioma Produto de Whitney nos diz que $\omega(\xi \oplus \eta) = \omega(\xi) \cdot \omega(\eta)$.

Lema 3.14. Dado um fibrado vetorial $\xi = (E, \pi, B)$, o conjunto

$$W = \{w_0(\xi) + w_1(\xi) + \cdots \in H^\Pi(B; \mathbb{Z}_2); w_0(\xi) = 1\}$$

é um grupo abeliano com o produto definido acima com unidade.

Demonstração. Tal conjunto herda as propriedades de ser comutativo e possuir unidade de $H^{\Pi}(B; \mathbb{Z}_2)$. Vamos mostrar que, dado $\omega(\xi) \in W$, existe $\omega^{-1}(\xi) \in W$ tal que $\omega(\xi) \cdot \omega^{-1}(\xi) = 1$.

Consideramos o elemento $\omega^{-1}(\xi) = w_0^{-1}(\xi) + w_1^{-1}(\xi) + \cdots \in W$, onde $w_0^{-1}(\xi) = 1$ e $w_k^{-1}(\xi) = \sum_{i=1}^k w_i(\xi) \smile w_{k-i}^{-1}(\xi)$ para todo $k \geq 1$.

Daí, $\omega(\xi) \cdot \omega^{-1}(\xi) = \sum_{j=0}^{\infty} d_j$, onde $d_j = \sum_{i=0}^j w_i(\xi) \smile w_{j-i}^{-1}(\xi)$.

Temos que $d_0 = 1 \smile 1 = 1$ e para todo $j > 0$,

$$\begin{aligned} d_j &= w_0(\xi) \smile w_j^{-1}(\xi) + \sum_{i=1}^j w_i(\xi) \smile w_{j-i}^{-1}(\xi) \\ &= 2 \left(\sum_{i=1}^j w_i(\xi) \smile w_{j-i}^{-1}(\xi) \right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Portanto, existe $\omega^{-1}(\xi) \in W$ tal que $\omega(\xi) \cdot \omega^{-1}(\xi) = 1$. □

Assim, se consideramos ξ e η dois fibrados vetoriais sobre o mesmo espaço base, temos que $\omega(\xi \oplus \eta) = \omega(\xi) \cdot \omega(\eta)$ e, portanto, $\omega^{-1}(\xi) \cdot \omega(\xi \oplus \eta) = \omega(\eta)$. Em particular, se $\xi \oplus \eta$ for trivial, então $\omega^{-1}(\xi) = \omega(\eta)$.

Teorema 3.15. (Teorema da Dualidade de Whitney). *Seja M uma variedade diferenciável. Então*

$$w_i(\nu_M) = w_i^{-1}(\tau_M)$$

para todo $i \geq 0$, onde ν_M denota o fibrado normal de M .

Demonstração. Desde que $\tau_M \oplus \nu_M$ é um fibrado trivial, segue que $\omega(\nu_M) = \omega^{-1}(\tau_M)$. Logo, $w_i(\nu_M) = w_i^{-1}(\tau_M)$, para todo $i \geq 0$. □

A partir de agora, caminhamos com o objetivo de mostrar que as classes de Stiefel-Whitney definidas via teoria de obstrução satisfazem os axiomas enunciados no início desta seção.

Seja $\xi = (E, \pi, B)$ um fibrado vetorial n -dimensional com fibra F . Denotamos por F_0 o conjunto de todos elementos não nulos da fibra, similarmente, denotamos por E_0 o conjunto de todos elementos não nulos do espaço total E .

Para cada $b \in B$, temos que o par $(\pi^{-1}(b), \pi_0^{-1}(b))$ é homotópico ao par $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$. Então, para todo $i \geq 0$, temos que

$$H^i(\pi^{-1}(b), \pi_0^{-1}(b); \mathbb{Z}_2) = \begin{cases} 0, & \text{se } i \neq n \\ \mathbb{Z}_2, & \text{se } i = n. \end{cases}$$

De fato, desde que $(\pi^{-1}(b), \pi_0^{-1}(b))$ é homotópico a $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$, basta calcular $H^i(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}; \mathbb{Z}_2)$ e usar o Teorema da Invariância Homotópica.

Desde que $\mathbb{S}^{n-1}$ é homotópico a $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, calculamos $H^i(\mathbb{R}^n, \mathbb{S}^{n-1}; \mathbb{Z}_2)$. Sendo $\mathbb{S}^{n-1}$ subespaço topológico de $\mathbb{R}^n$, obtemos a seguinte sequência em homologia

$$\cdots \rightarrow H_i(\mathbb{S}^{n-1}; \mathbb{Z}_2) \rightarrow H_i(\mathbb{R}^n; \mathbb{Z}_2) \rightarrow H_i(\mathbb{R}^n, \mathbb{S}^{n-1}; \mathbb{Z}_2) \rightarrow H_{i-1}(\mathbb{S}^{n-1}; \mathbb{Z}_2) \rightarrow H_{i-1}(\mathbb{R}^n; \mathbb{Z}_2) \rightarrow \cdots$$

Para $i > 1$, temos que $H_i(\mathbb{R}^n, \mathbb{S}^{n-1}; \mathbb{Z}_2) \cong H_{i-1}(\mathbb{S}^{n-1}; \mathbb{Z}_2)$, pois $\mathbb{R}^n$ é conexo por caminhos. E, portanto, $H^i(\mathbb{R}^n, \mathbb{S}^{n-1}; \mathbb{Z}_2) \cong H^{i-1}(\mathbb{S}^{n-1}; \mathbb{Z}_2)$.

Para $i = n$, se $H_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1}; \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2$, então $H^{n-1}(\mathbb{S}^{n-1}; \mathbb{Z}_2) = \text{Hom}_{\mathbb{Z}_2}(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2$. E para $i \neq n$, se $H_{i-1}(\mathbb{S}^{n-1}; \mathbb{Z}_2) = \{0\}$, então $H^{i-1}(\mathbb{S}^{n-1}; \mathbb{Z}_2) = \text{Hom}_{\mathbb{Z}_2}(\{0\}, \mathbb{Z}_2) = \{0\}$.

Portanto,

$$H^i(\pi^{-1}(b), \pi_0^{-1}(b); \mathbb{Z}_2) = H^i(\mathbb{R}^n, \mathbb{S}^{n-1}; \mathbb{Z}_2) = \begin{cases} 0, & \text{se } i \neq n \\ \mathbb{Z}_2, & \text{se } i = n. \end{cases}$$

Teorema 3.16. ([10], p. 21) O grupo $H^i(E, E_0; \mathbb{Z}_2)$ é zero para $i < n$ e $H^n(E, E_0; \mathbb{Z}_2)$ contém uma única classe u tal que para cada fibra $F = \pi^{-1}(b)$, a restrição $u|_{(F, F_0)} = i^n(u) \in H^n(F, F_0; \mathbb{Z}_2)$ é a única classe não nula em $H^n(F, F_0; \mathbb{Z}_2)$, onde i^n é o homomorfismo induzido que leva $H^n(E, E_0; \mathbb{Z}_2)$ à $H^n(F, F_0; \mathbb{Z}_2)$. Além disso, a correspondência $x \mapsto x \smile u$ define um isomorfismo $\smile u : H^k(E; \mathbb{Z}_2) \rightarrow H^{k+n}(E, E_0; \mathbb{Z}_2)$ para todo k .

A classe de cohomologia $u \in H^n(E, E_0; \mathbb{Z}_2)$ é chamada de **classe de cohomologia fundamental** de ξ .

Observamos que o espaço total E do fibrado ξ é um retrato por deformação na seção zero de ξ (ver [10], p.21). Lembramos que a zero seção no fibrado vetorial é uma aplicação contínua $s_0 : B \rightarrow E$ tal que para cada $b \in B$, $s_0(b) = 0 \in \pi^{-1}(b)$ e $\pi \circ s_0 = id_B$. Denotamos por

$$E_z = \{s_0(b) \in \pi^{-1}(b); s_0(b) = 0\} \subset E$$

o conjunto das zero seções do fibrado ξ .

Temos que a aplicação $s_0 : B \rightarrow E_z$ é uma equivalência homotópica, cuja “inversa” s_0^{-1} é a projeção do fibrado. Logo, desde que B e E_z possuem o mesmo tipo de homotopia, segue que $H^k(B; \mathbb{Z}_2) \cong H^k(E_z; \mathbb{Z}_2)$. Além disso, desde que E é um retrato por deformação do subespaço E_z , consideramos a inclusão $i : E_z \rightarrow E$ e $r = s_0 \circ \pi : E \rightarrow E_z$ uma retração, então, temos que $r \circ i = id_{E_z}$ e $i \circ r = id_E$, ou seja, E e E_z

possuem o mesmo tipo de homotopia, logo, $H^k(E; \mathbb{Z}_2) \cong H^k(E_z; \mathbb{Z}_2)$. Portanto,

$$H^k(B; \mathbb{Z}_2) \cong H^k(E_z; \mathbb{Z}_2) \cong H^k(E; \mathbb{Z}_2).$$

Com isto, definimos o **Isomorfismo de Thom** como sendo a composição

$$H^k(B; \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{l^*} H^k(E; \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\sim^u} H^{k+n}(E, E_0; \mathbb{Z}_2)$$

denotamos tal isomorfismo por $\phi : H^k(B; \mathbb{Z}_2) \rightarrow H^{k+n}(E, E_0; \mathbb{Z}_2)$.

Deste modo, usando o teorema anterior e o isomorfismo de Thom, podemos concluir que

$$H^i(E, E_0; \mathbb{Z}_2) = \begin{cases} 0, & \text{se } i < n \\ H^{i-n}(B; \mathbb{Z}_2), & \text{se } i \geq n. \end{cases}$$

A partir do que foi construído anteriormente, definimos as classes de Stiefel-Whitney usando as *Operações de Steenrod* em $H^*(E, E_0; \mathbb{Z}_2)$. Apresentamos suas propriedades básicas, o leitor interessado pode ver mais em [11].

Sejam X e X' espaços topológicos, Y e Y' seus respectivos subespaços topológicos.

- (i) Para cada par $Y \subset X$ e cada par de inteiros n, i , existe um homomorfismo aditivo $Sq^i : H^n(X, Y; \mathbb{Z}_2) \rightarrow H^{n+i}(X, Y; \mathbb{Z}_2)$.
- (ii) *Naturalidade*: Se $f : (X, Y) \rightarrow (X', Y')$ é uma aplicação de pares, então $Sq^i \circ f^* = f^* \circ Sq^i$, isto é, o diagrama

$$\begin{array}{ccc} H^n(X', Y'; \mathbb{Z}_2) & \xrightarrow{f^*} & H^n(X, Y; \mathbb{Z}_2) \\ Sq^i \downarrow & & \downarrow Sq^i \\ H^{n+i}(X', Y'; \mathbb{Z}_2) & \xrightarrow{f^*} & H^{n+i}(X, Y; \mathbb{Z}_2) \end{array}$$

é comutativo.

- (iii) Se $a \in H^n(X, Y; \mathbb{Z}_2)$, então $Sq^0(a) = a$, $Sq^n(a) = a \smile a$ e $Sq^i(a) = 0$, para todo $i > n$.

- (iv) *Formula de Cartan*: A identidade

$$Sq^k(a \smile b) = \sum_{i+j=k} Sq^i(a) \smile Sq^j(b)$$

é válida sempre que $a \smile b$ é definido.

Deste modo, dado um fibrado vetorial $\xi = (E, \pi, B)$, definimos a classe de Stiefel-

Whitney de grau k como sendo

$$w_k(\xi) = \phi^{-1}(Sq^k(u))$$

onde u é a classe de cohomologia fundamental de ξ .

A partir de agora, verificamos os axiomas para as classes de Stiefel-Whitney. Dado $a \in H^n(X, Y; \mathbb{Z}_2)$, definimos a **Operação Total de Steenrod** como sendo

$$Sq(a) = a + Sq^1(a) + Sq^2(a) + \cdots + Sq^n(a).$$

Pela formula de Cartan, temos $Sq(a \smile b) = Sq(a) \smile Sq(b)$. Além disso, o isomorfismo de Thom nos dá um isomorfismo entre $H^\Pi(B; \mathbb{Z}_2)$ e $H^\Pi(E, E_0; \mathbb{Z}_2)$.

Axioma 1

Sejam ξ um n -fibrado vetorial e $u \in H^n(E, E_0; \mathbb{Z}_2)$ a classe de cohomologia fundamental de ξ . O isomorfismo $\smile u : H^0(E; \mathbb{Z}_2) \rightarrow H^n(E, E_0; \mathbb{Z}_2)$ nos diz que $(\smile u)^{-1}(u) = 1 \in H^0(E; \mathbb{Z}_2)$. Logo, $w_0(\xi) = \phi^{-1}(Sq^0(u)) = \phi^{-1}(u) = 1 \in H^0(B; \mathbb{Z}_2)$.

Além disso, se $m > n$, pela Propriedade (iii) das operações de Steenrod, $Sq^m(u) = 0$ e, portanto, $w_m(\xi) = 0$.

Axioma 2: Naturalidade

Sejam $\xi = (E, \pi, B)$ e $\xi' = (E', \pi', B')$ dois fibrados vetoriais. Consideramos $G : E \rightarrow E'$ aplicação fibrada, isto é, G é aplicação contínua tal que para cada $b \in B$, $F_b \cong F'_{f(b)}$, onde $f : B \rightarrow B'$ é aplicação contínua induzida nos espaços base. Desde que G é aplicação fibrada, ela induz uma aplicação de pares $g : (E, E_0) \rightarrow (E', E'_0)$. Deste modo, a classe de cohomologia fundamental $u' \in H^n(E', E'_0; \mathbb{Z}_2)$ de ξ' é levada na classe de cohomologia $g^*(u') = u \in H^n(E, E_0; \mathbb{Z}_2)$. Além disso, para cada fibra F de ξ , temos que $g|_{(F, F_0)} : (F, F_0) \rightarrow (F', F'_0)$ é uma equivalência homotópica.

Assim, como o diagrama

$$\begin{array}{ccc} (F, F_0) & \xrightarrow{g|_{(F, F_0)}} & (F', F'_0) \\ i \downarrow & & \downarrow i' \\ (E, E_0) & \xrightarrow{g} & (E', E'_0) \end{array}$$

é comutativo, segue que

$$\begin{array}{ccc} H^n(E', E'_0; \mathbb{Z}_2) & \longrightarrow & H^n(E, E_0; \mathbb{Z}_2) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^n(F', F'_0; \mathbb{Z}_2) & \longrightarrow & H^n(F, F_0; \mathbb{Z}_2) \end{array}$$

também é um diagrama comutativo. Como u' é classe de cohomologia fundamental, segue que $g^*(u') = u \in H^n(E, E_0; \mathbb{Z}_2)$ é classe de cohomologia fundamental de ξ .

Consideramos agora, o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} H^{n+k}(E', E'_0; \mathbb{Z}_2) & \xrightarrow{g^*} & H^{n+k}(E, E_0; \mathbb{Z}_2) \\ (\smile u')^{-1} \downarrow & & \downarrow (\smile u)^{-1} \\ H^n(E'; \mathbb{Z}_2) & \xrightarrow{G^*} & H^n(E; \mathbb{Z}_2) \\ ((l')^*)^{-1} \downarrow & & \downarrow (l^*)^{-1} \\ H^n(B'; \mathbb{Z}_2) & \xrightarrow{f^*} & H^n(B; \mathbb{Z}_2) \end{array}$$

Então, $(l^*)^{-1} \circ (\smile u)^{-1} \circ g^* = f^* \circ ((l')^*)^{-1} \circ (\smile u')^{-1}$. Mas,

$$\phi^{-1} = (l^*)^{-1} \circ (\smile u)^{-1} \quad \text{e} \quad (\phi')^{-1} = ((l')^*)^{-1} \circ (\smile u')^{-1}.$$

Logo, $\phi^{-1} \circ g^* = f^* \circ (\phi')^{-1}$. Portanto,

$$\begin{aligned} f^*(w_k(\xi')) &= (f^* \circ (\phi')^{-1})(Sq^k(u')) \\ &= (\phi^{-1} \circ g^*)(Sq^k(u')) \\ &= \phi^{-1}(Sq^k(u)) = w_k(\xi). \end{aligned}$$

Axioma 3: Produto de Whitney

Aqui, queremos mostrar que dados dois fibrados vetoriais sobre o mesmo espaço base B , ξ e δ , então

$$w_k(\xi \oplus \delta) = \sum_{i=0}^k w_i(\xi) \smile w_{k-i}(\delta).$$

Para isto, mostramos que $\omega(\xi \oplus \delta) = \omega(\xi) \smile \omega(\delta)$. Consideramos o seguinte lema.

Lema 3.17. Se $a \in H^n(A, A'; \mathbb{Z}_2)$ e $b \in H^n(B, B'; \mathbb{Z}_2)$, então $Sq(a \times b) = Sq(a) \times Sq(b)$, onde “ $\times$ ” denota o produto cross.

Demonstração. Sejam $p_1 : (A \times B, A' \times B) \rightarrow (A, A')$ e $p_2 : (A \times B, A \times B') \rightarrow (B, B')$

projeções. Então,

$$\begin{aligned} Sq(a \times b) &= Sq(p_1^*(a) \smile p_2^*(b)) \\ &= Sq(p_1^*(a)) \smile Sq(p_2^*(b)) \\ &= Sq(a) \times Sq(b). \end{aligned}$$

□

Agora, sejam $\xi = (E, \pi, B)$ e $\delta = (E', \pi', B)$ dois fibrados vetoriais sobre o mesmo espaço base B , com dimensões n e m , respectivamente, $u \in H^n(E, E_0; \mathbb{Z}_2)$ e $u' \in H^m(E', E'_0; \mathbb{Z}_2)$ as classes de cohomologia fundamental de ξ e δ , respectivamente.

Vimos no Exemplo 2.10 que o produto cartesiano $\xi \times \delta = \eta$ é um fibrado vetorial com dimensão $n + m$, cujo o espaço total é dado por $E'' = E \times E'$.

Vamos mostrar que $\omega(\eta) = \omega(\xi) \times \omega(\delta)$. Notamos que $E''_0 = E \times E'_0 \cup E_0 \times E'$ e $u \times u' \in H^{n+m}(E'', E''_0; \mathbb{Z}_2)$. Consideramos o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} H^{n+m}(E'', E''_0; \mathbb{Z}_2) & \longrightarrow & H^{n+m}(F'', F''_0; \mathbb{Z}_2) \\ \uparrow & & \uparrow \\ H^n(E, E_0; \mathbb{Z}_2) \times H^m(E', E'_0; \mathbb{Z}_2) & \longrightarrow & H^n(F, F_0; \mathbb{Z}_2) \times H^m(F', F'_0; \mathbb{Z}_2) \end{array}$$

sendo u e u' classes de cohomologia fundamental de ξ e δ , respectivamente, então $u|_{(F, F_0)} \in H^n(F, F_0; \mathbb{Z}_2)$ e $u'|_{(F', F'_0)} \in H^m(F', F'_0; \mathbb{Z}_2)$ são não nulos. Desde que a flecha da direita é um isomorfismo (Teorema 1.7), segue que $u|_{(F, F_0)} \times u'|_{(F', F'_0)} \in H^{n+m}(F'', F''_0; \mathbb{Z}_2)$ é não nulo. Portanto, $u \times u' \in H^{n+m}(E'', E''_0; \mathbb{Z}_2)$ é classe de cohomologia fundamental de η . Denotamos $u \times u'$ por u'' .

Agora, sejam ϕ , ϕ' e ϕ'' os isomorfismos de Thom para os fibrados ξ , δ e η , respectivamente. Consideramos as projeções $p_E : E \times B \rightarrow E$, $p_{(E, E_0)} : (E \times B, E_0 \times B) \rightarrow (E, E_0)$, $p_{E'} : E' \times B \rightarrow E'$ e $p_{(E', E'_0)} : (E' \times B, E'_0 \times B) \rightarrow (E', E'_0)$. Dados quaisquer $a, b \in H^\Pi(B; \mathbb{Z}_2)$, temos

$$\begin{aligned} \phi''(a \times b) &= (a \times b) \smile (u \times u') \\ &= (l \times l')^*(a \times b) \smile (u \times u') \\ &= (l^*(a) \times (l')^*(b)) \smile (u \times u') \\ &= (p_E^*(l^*(a)) \smile p_{E'}^*((l')^*(b))) \smile (p_{(E, E_0)}^*(u) \smile p_{(E', E'_0)}^*(u')) \\ &= (p_E^*(l^*(a)) \smile p_{(E, E_0)}^*(u)) \smile (p_{E'}^*((l')^*(b)) \smile p_{(E', E'_0)}^*(u')) \\ &= p_{(E, E_0)}^*(l^*(a) \smile u) \smile p_{(E', E'_0)}^*((l')^*(b) \smile u') \\ &= \phi(a) \times \phi'(b). \end{aligned}$$

Então, considerando a classe total de Stiefel-Whitney dos fibrados η , ξ e δ , temos

$$\phi''(\omega(\eta)) = \phi(\omega(\xi)) \times \phi'(\omega(\delta)) = Sq(u) \times Sq(u').$$

Desde que ϕ'' é isomorfismo, em particular injetor, segue que $\omega(\eta) = \omega(\xi) \times \omega(\delta)$. Sendo ξ e δ dois fibrados vetoriais sobre o mesmo espaço base B , podemos considerar o fibrado soma de Whitney $\xi \oplus \delta$ e o fibrado $\xi \times \delta$ sobre $B \times B$. Seja $d : B \rightarrow B \times B$ a aplicação diagonal. Então, por naturalidade, segue que $d^*(\omega(\xi) \times \omega(\delta)) = \omega(\xi \oplus \delta)$. Além disso, tomando as projeções $p_i : B \times B \rightarrow B$, $i = 1, 2$, temos que $p_i \circ d = id_B$ e, portanto,

$$\begin{aligned} d^*(\omega(\xi) \times \omega(\delta)) &= d^*(p_1^*(\omega(\xi)) \smile p_2^*(\omega(\delta))) \\ &= d^*(p_1^*(\omega(\xi))) \smile d^*(p_2^*(\omega(\delta))) \\ &= \omega(\xi) \smile \omega(\delta) \end{aligned}$$

pois $(p_i \circ d)^* = d^* \circ p_i^* = (id_B)^*$. Logo,

$$\omega(\xi \oplus \delta) = \omega(\xi) \smile \omega(\delta).$$

Axioma 4

Consideramos o fibrado linha canonico $\gamma_1^1 = (E, \pi, \mathbb{S}^1)$ e o grupo $H^1(E, E_0; \mathbb{Z}_2)$. É possível verificar que o espaço total E é homeomorfo a faixa de Mobius M (ver [7], p.17). Além disso, temos que E_0 é um retrato por deformação do bordo da faixa de Mobius ∂M (ver [10], p.25).

Consideramos $\mathbb{P}^2$ como uma colagem da faixa de Mobius com o disco D^2 , isto é, $\mathbb{P}^2 = M \cup D^2$. Temos a seguinte inclusão de conjuntos, $\partial M \subset M \subset \mathbb{P}^2$. Daí, usando o Teorema de Excisão em Cohomologia (Axioma 6 de cohomologia), segue que $H^1(M, \partial M; \mathbb{Z}_2) \cong H^1(\mathbb{P}^2, O; \mathbb{Z}_2)$, onde O é homeomorfo ao disco D^2 . Desde que O é contrátil (Exemplo 1.10), segue que $H^1(\mathbb{P}^2, O; \mathbb{Z}_2) \cong H^1(\mathbb{P}^2; \mathbb{Z}_2)$.

Portanto, temos

$$H^1(E, E_0; \mathbb{Z}_2) \cong H^1(M, \partial M; \mathbb{Z}_2) \cong H^1(\mathbb{P}^2, O; \mathbb{Z}_2) \cong H^1(\mathbb{P}^2; \mathbb{Z}_2).$$

Denotamos por $f : H^1(E, E_0; \mathbb{Z}_2) \rightarrow H^1(\mathbb{P}^2; \mathbb{Z}_2)$ o isomorfismo estabelecido acima. Desde que a classe de cohomologia fundamental u é não nula, segue que $u = f^{-1}(a)$,

onde a é o gerador de $H^1(\mathbb{P}^2; \mathbb{Z}_2)$. Assim,

$$w_1(\gamma_1^1) = f(Sq^1(u)) = f(u \smile u) = a \smile a \neq 0.$$

Como $H^i(\mathbb{P}^n; \mathbb{Z}_2)$ é isomorfo à $\mathbb{Z}_2$ para todo $i = 0, \dots, n$ (ver [4], p.154), segue que $a \smile a$ gera $H^2(\mathbb{P}^2; \mathbb{Z}_2) \cong H^1(\mathbb{P}^1; \mathbb{Z}_2)$.

Para concluir, notamos que o que foi feito acima vale para quaisquer fibrados vetoriais. Com isto, para que as classes de Stiefel-Whitney definidas via teoria de obstrução satisfaça os axiomas, basta considerar o seguinte fibrado vetorial $\xi = (V_r(TM), \pi, M)$ apresentado no Exemplo 2.4.

Exemplo 3.1. Consideramos o fibrado tangente (τ) de $\mathbb{S}^n$. A classe total de Stiefel-Whitney é $\omega(\tau) = 1$. De fato, desde que $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ é variedade diferenciável, pelo Teorema da Dualidade de Whitney segue que $w_i(\tau) = w_i^{-1}(\nu)$, para todo $i \geq 0$, onde ν é o fibrado normal de $\mathbb{S}^n$. Como $\dim(T_p\mathbb{S}^n)^\perp = 1$, qualquer $p \in \mathbb{S}^n$ é um vetor normal de $T_p\mathbb{S}^n$ para todo $p \in \mathbb{S}^n$, segue que $p \in (T_p\mathbb{S}^n)^\perp$. Assim, seja $s : \mathbb{S}^n \rightarrow E(\nu)$ aplicação dada por $s(x) = (x, x)$. Temos que s é uma seção nunca nula e pelo Teorema 2.2, segue que ν é fibrado trivial. Portanto, $w_0(\nu) = 1$ e $w_i(\nu) = 0$ para todo $i \geq 1$. Então $w_0^{-1}(\nu) = 1$ e $w_i^{-1}(\nu) = 0$, para todo $i \geq 1$. Logo, para todo $i \geq 1$, $w_i(\tau) = w_i^{-1}(\nu) = 0$, ou seja, $\omega(\tau) = 1$.

Exemplo 3.2. Para o fibrado linha canônico γ_n^1 , a classe total de Stiefel-Whitney sobre $\mathbb{P}^n$ é dada por $\omega(\gamma_n^1) = 1 + a$, onde $\langle a \rangle = H^1(\mathbb{P}^n; \mathbb{Z}_2)$.

Seja $h : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^n$ a aplicação inclusão nos espaços base dos fibrados γ_1^1 e γ_n^1 . Pelo axioma da naturalidade, temos $h^*(w_k(\gamma_n^1)) = w_k(\gamma_1^1)$, para todo $k \geq 0$. Como γ_n^1 é fibrado linha, segue que $w_k(\gamma_n^1) = 0$ para todo $k > 1$. Além disso, pelo Axioma 4, $w_1(\gamma_1^1) = b$, onde $\langle b \rangle = H^1(\mathbb{P}^1; \mathbb{Z}_2)$. Assim, concluímos que $h^*(w_1(\gamma_n^1)) = w_1(\gamma_1^1) = b$ e, portanto, $w_1(\gamma_n^1) = a$, pois h^* é homomorfismo. Logo, $\omega(\gamma_n^1) = w_0(\gamma_n^1) + w_1(\gamma_n^1) + \dots = 1 + a$.

Com isto, temos que $\gamma_n^1 \subset \varepsilon_{\mathbb{P}^n}^{n+1}$ (fibrado trivial). O exemplo a seguir mostra que todas as n classes de Stiefel-Whitney de um n -fibrado podem ser não nulas.

Exemplo 3.3. Seja $\gamma^\perp$ o fibrado complemento ortogonal e γ_n^1 em $\varepsilon_{\mathbb{P}^n}^{n+1}$. Então

$$\omega(\gamma^\perp) = 1 + a + a^2 + \dots + a^n.$$

De fato, desde que $\gamma_n^1 \oplus \gamma^\perp \cong \varepsilon_{\mathbb{P}^n}^{n+1}$ é trivial, temos $\omega(\gamma^\perp) = \omega^{-1}(\gamma_n^1)$.

Como $w_k(\gamma_n^1) = 0$ para todo $k > 1$, obtemos

$$w_k^{-1}(\gamma_n^1) = \sum_{i=1}^k w_i(\gamma_n^1) \smile w_{k-i}^{-1}(\gamma_n^1) = w_1(\gamma_n^1) \smile w_{k-1}^{-1}(\gamma_n^1)$$

pois.

Usando indução e o fato que a gera $H^1(\mathbb{P}^n; \mathbb{Z}_2)$, vamos verificar que $w_k^{-1}(\gamma_n^1) = a^k$.

Para $k = 1$, usamos o Axioma 4 e, obtemos $w_1^{-1}(\gamma_n^1) = w_1(\gamma_n^1) \smile w_0^{-1}(\gamma_n^1) = a$.

Agora, supomos $w_k^{-1}(\gamma_n^1) = a^k$. Então,

$$w_{k+1}^{-1}(\gamma_n^1) = w_1(\gamma_n^1) \smile w_k^{-1}(\gamma_n^1) = a \smile a^k = a^{k+1}$$

e, portanto, $\omega(\gamma^\perp) = 1 + a + a^2 + \cdots + a^n$.

Anexo

Grau de uma aplicação

Desde que conhecemos o grupo $H_g(\mathbb{S}^n; R)$ (Exemplo 1.10), podemos explorar um pouco sobre a noção do grau de Brower para aplicações $f : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$.

Dado $f : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$, com $n > 0$, a aplicação induzida $f_* : H_n(\mathbb{S}^n; \mathbb{Z}) \rightarrow H_n(\mathbb{S}^n; \mathbb{Z})$ é um homomorfismo entre grupos cíclicos infinitos e é da forma $f_*(\alpha) = d_f \alpha$ para algum inteiro d_f . Este número inteiro é chamado **grau de Brower** da aplicação f , denotado por $\deg f$.

Lembramos que cada aplicação contínua $f : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$ define um elemento de $\pi_n(\mathbb{S}^n)$ ([6], Lema 6.12). Como o grau de uma aplicação depende apenas de sua classe de homotopia, a cada elemento $\alpha \in \pi_n(\mathbb{S}^n)$ podemos corresponder o número inteiro d_α , onde $d_\alpha = d_f$, com $f \in \alpha$.

Apresentamos agora algumas propriedades do grau de Brower. Sejam $f, g : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$, então:

- i) $\deg Id = 1$;
- ii) Se $f \simeq g$, então $\deg f = \deg g$;
- iii) $\deg(f \circ g) = \deg(f)\deg(g)$. Consequentemente, se f for uma equivalência homotópica, $\deg(f)\deg(g) = 1$, pois $f \circ g \simeq Id$.

Observação 3.3. No segundo item da demonstração na Proposição 3.9 nos referimos ao grau da aplicação de Gauss

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{S}^n &\rightarrow \mathbb{S}^n \\ x &\mapsto \frac{v(x)}{\|v(x)\|} \end{aligned}$$

onde v denota um campo vetorial (como definido em 1.4). Este grau será o grau de Brower da aplicação φ .

Para mais informações sobre, veja [4], página 134.

Referências Bibliográficas

- [1] CASTELO BRANCO, J.L.J., *Classes de Stiefel-Whitney* (Dissertação de mestrado), UFPB, João Pessoa-PB, 2019.
- [2] LIMA, E.L., *Variedades Diferenciáveis*, IMPA, Rio de Janeiro, 2007.
- [3] GUILLEMIN, V; POLLACK, A., *Differential Topology*, Prentice Hall, 1974.
- [4] HATCHER, A., *Algebraic Topology*, Cambridge University Press, 2001.
- [5] MUNKRES, J.R., *Elements of Algebraic Topology*, Addison-Wesley Publishing Company, Menlo Park, CA, 1984.
- [6] LOIBEL, G.F., *Introdução a Teoria de Obstrução*, Escola de Engenharia de São Carlos, 1963.
- [7] MILNOR, J.W; STASHEFF, J.D., *Characteristic Classes*, Annals of Mathematics Studies, Princeton University Press, Princeton, 1974.
- [8] BRASSELET, J.P., *Characteristic Classes and Singular Varieties*, Notas de aula: ICMC-USP, 2002.
- [9] STEENROD, N., *The Topology of Fibre Bundles*, Princeton University Press, 1951.
- [10] LOPEZ, M.E.G., *Introduction to Characteristic Classes*, University of Copenhagen.
- [11] GULDBERG, C., *Steenrod operations-construction and application*, University of Copenhagen, 2009.
- [12] LEE, J., *Introduction to Smooth Manifolds*, Graduate Texts in Mathematics, Springer, 2002
- [13] KRULEWSKI, C., *Projective Space: An Abstract Manifold*, Math 132, Project I, 2017