Universidade Federal da Paraíba
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Doutorado em Matemática

Quasi-normas tensoriais e operadores associados no ambiente de classes de sequências

por

Lucas de Carvalho Nascimento

João Pessoa - PB
Julho/2021

Quasi-normas tensoriais e operadores associados no ambiente de classes de sequências

por

Lucas de Carvalho Nascimento †

sob orientação do

Prof. Dr. Joedson Silva dos Santos

e coorientação do

Prof. Dr. Jamilson Ramos Campos

Tese apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Paraíba - UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Matemática.

João Pessoa - PB

Julho/2021

†Este trabalho contou com apoio financeiro da CAPES

Catalogação na publicação

Seção de Catalogação e Classificação

N244q Nascimento, Lucas de Carvalho.

Quasi-normas tensoriais e operadores associados no ambiente de classes de sequências / Lucas de Carvalho Nascimento. - João Pessoa, 2021.

129 f.

Orientador: Joedson Silva dos Santos.

Coorientador: Jamilson Ramos Campos.

Tese (Doutorado) - UFPB/CCEN.

1. Matemática. 2. Espaços de Banach. 3. Classes de sequências. 4. Ideais de operadores. 5. Produto tensorial. 6. Normas tensoriais. 7. Operadores somantes. 8. Operadores integrais. I. Santos, Joedson Silva dos. II. Campos, Jamilson Ramos. III. Título.

UFPB/BC CDU: 51(043)

Elaborado por Larissa Silva Oliveira de Mesquita - CRB-15/746

Universidade Federal da Paraíba

Programa de Pós-Graduação em Matemática

Doutorado em Matemática

Tese apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - UFPB como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Matemática.

Área de Concentração: Análise

Aprovada em 29 de julho de 2021.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Joedson Silva dos Santos – UFPB
(Orientador)

Prof. Dr. Jamilson Ramos Campos – UFPB
(Coorientador)

Prof. Dr. Nacib André Gurgel e Albuquerque – UFPB
(Examinador Interno)

Prof. Dr. Cleon da Silva Barroso – UFC
(Examinador Externo)

Prof. Dr. Geraldo Márcio de Azevedo Botelho – UFU
(Examinador Externo)

Prof. Dr. Nilson da Costa Bernardes Júnior – UFRJ
(Examinador Externo)

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço a Deus, fonte de toda a sabedoria e poder, por todas as bençãos derramadas sobre mim, por todos os livramentos e pela sua proteção.

À minha família, em especial, à minha mãe, Verônica Maria de Carvalho Nascimento; ao meu pai, Luciano Ferreira do Nascimento; à minha tia, Raimunda Cristina de Carvalho e à minha irmã, Vanessa de Carvalho Nascimento; pelo incetivo, zelo, confiança, dedicação e pelo o apoio em todas as minhas decisões. Esta conquista também é de vocês.

À Erilúcia Bernardino dos Santos pelo companheirismo, paciência e constante apoio em minhas decisões.

Ao meu coorientador, Jamilson Ramos Campos, por toda disponibilidade, paciência comigo nos meus momentos de ansiedade, boa vontade em tirar minhas dúvidas e por me ajudar sempre que precisei. Sendo desta forma um dos grandes responsáveis por esta conquista. À Joedson Silva dos Santos por ter aceitado ser meu orientador.

Aos professores da UPE, instituição onde tive o prazer de fazer a licenciatura em matemática. Em especial, a Esdras Jafet (meu orientador no período da graduação), a Ernani Martins, a Gutemberg Alves e a Islanita Cecília, com os quais tive o prazer de compartilhar vários momentos agradáveis.

Aos professores da pós-graduação. Em especial, a Jamilson Ramos Campos, a Joedson Silva dos Santos, a Adriano Alves de Medeiros, a Nacib Andrade Gurgel e Albuquerque, a Napoleon Caro Tuesta, a Antônio de Andrade e Silva, a Manasses Xavier de Souza e a Daniel Marinho Pellegrino que muito contribuíram para a minha formação no mestrado e doutorado.

Aos professores Nacib André, Cleon da Silva, Geraldo Márcio e Nilson da Costa, membros da banca examinadora, por aceitarem nosso convite e por suas valorosas contribuições ao trabalho.

Aos meus amigos e colegas da graduação e da pós-graduação. Em especial, a

Ricardo Dias pelos inúmeros dias de estudos e pela convivência durante o período do mestrado, a Francisco Calvi por todos os conselhos e momentos gratificantes durante o período do doutorado, a Adailton Souza por todos momentos agradráveis de estudo, a Eriverton José por todos os conselhos, incentivos e ajuda, e a Djair Paulino por toda ajuda que me deu desde o curso de verão em Álgebra Linear.

A todos os meus amigos que de forma direta ou indireta me ajudaram para a realização deste trabalho. Em especial, a Salatiel Dias pelos incentivos, conselhos e por toda ajuda que me deu, especialmente, quando vim morar em João Pessoa.

Aos meus amigos e colegas da SOCONTEL por me apoiarem e pelos incentivos para buscar aquilo que almejo. Em especial, a Alberto Guerra e a Bil Mendes por todas as oportunidades que me deram.

À CAPES pelo apoio financeiro.

Dedicatória

Aos meus pais Verônica e Luciano, à minha irmã Vanessa e à minha tia Raimunda.

Resumo

Neste trabalho, introduzimos e estudamos uma classe de quasi-normas no produto tensorial de espaços de Banach definidas por meio do ambiente abstrato de classes de sequências. São apresentadas relações dessa construção com classes de operadores somantes de sorte que resultados clássicos da teoria são recuperados e novos resultados são obtidos. Ainda pelo uso do ambiente de classes de sequências, definimos e estudamos normas no produto tensorial inspiradas na construção da norma injetiva e estabelecemos suas relações com certas classes de operadores de tipo integral. Com essas normas, além dos resultados e exemplos construídos, apresentamos uma caracterização de um espaço de sequências mid somáveis e estabelecemos seu dual.

Palavras-chave: Espaços de Banach, classes de sequências, ideais de operadores, produto tensorial, normas tensoriais, operadores somantes, operadores integrais.

Abstract

In this work we introduce and study a class of quasi-norms on the tensor product of Banach spaces defined by means of the abstract environment of sequence classes. Relationships of this construction with classes of summing operators are presented from which classical results of the theory are recovered and new results are obtained. Still using the sequence classes environment, we define and study norms in the tensor product inspired by the construction of the injective norm and establish their relations with certain classes of integral type operators. With these norms, in addition to the results and examples constructed, before we present a characterization of a space of mid summable sequences and establish its dual.

Keywords: Banach spaces, sequence classes, operator ideals, tensor product, tensor norms, summing operators, integral operators.

Sumário

Apêndices

Notações

- $\mathbb{N}$ denota o conjunto $\{1, 2, 3, \ldots\}$.

- $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ denotam os corpos dos números reais e dos números complexos, respectivamente.

- $\mathbb{K}$ representa o corpo $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

- p^* denota o conjugado do número $1 < p < \infty$, isto é, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1$. Também definimos $p^* = \infty$ como conjugado de $p = 1$ e vice-versa.

- As letra E, F, G, H, L, M e N representarão conjuntos e/ou espaços vetoriais e/ou normados e/ou de Banach sobre $\mathbb{K}$ dependendo do contexto. Para $n \in \mathbb{N}$, o símbolo E^n significa $\underbrace{E \times \cdots \times E}_{n \text{ parcelas}}$.

- $E^{\#}$ denota o dual algébrico do espaço E e E' denota o seu dual topológico.

- $\widehat{E}$ denota o completamento do espaço E.

- B_E denota a bola unitária fechada do espaço E.

- $E \otimes F$ denota o produto tensorial dos espaços vetoriais E e F.

- $E \otimes_\alpha F$ representa o produto tensorial munido de uma norma razoável α e seu completamento por $E \widehat{\otimes}_\alpha F$.

- X ou $X(\cdot)$ denota uma classe de sequências.

- X^{dual} ou $X^{\text{dual}}(\cdot)$ denotam a classe de sequências dual de X, no sentido da Definição 1.4.7.

- X_p^{mid} ou $X_p^{\text{mid}}(\cdot)$ denota a classe de sequências mid (X,p)-somável.

- X' ou $X'(\cdot)$ denotam a classe de sequências dual de X, no sentido da Definição 3.1.1.

- $\mathcal{F}(E)$ denota a coleção de todos subespaços de dimensão finita de E.

- $\mathcal{CF}(E)$ denota a coleção de todos subespaços de codimensão finita de E.

- A sequência $(0,0,\ldots,0,x,0,0,\ldots)$, onde x aparece na j-ésima coordenada, será denotada por $x \cdot e_j$.

- $(x_j)_{j=1}^n$ representa a sequência $(x_1,x_2,\ldots,x_n,0,0,\ldots)$.

- $I_M : M \longrightarrow E$ denota o operador inclusão do subespaço M no espaço E.

- J_E denota o mergulho canônico de E em E''.

- $E \overset{1}{=} F$ significa que os espaços E e F são isometricamente isomorfos.

- $E \overset{K}{\hookrightarrow} F$ significa $E \subseteq F$ e que $\|x\|_F \leq K \|x\|_E$ para todo $x \in E$.

- $L(E;F)$ denota o espaço dos operadores lineares de E em F.

- $\mathcal{L}(E;F)$ denota o espaço dos operadores lineares e contínuos de E em F.

- $T' \in \mathcal{L}(F';E')$ denota o operador adjunto de $T \in \mathcal{L}(E;F)$.

- $B(E,F;G)$ denota o espaço das aplicações bilineares de $E \times F$ em G. Quando $G = \mathbb{K}$, temos o espaço das formas bilineares sobre $E \times F$, denotado apenas por $B(E,F)$.

- $\mathcal{B}(E,F;G)$ denota o espaço das aplicações bilineares e contínuas de $E \times F$ em G. O espaço das formas bilineares contínuas será denotado por $\mathcal{B}(E,F)$.

- $\mathcal{B}_I(E,F)$ denota o espaço das formas bilineares integrais sobre $E \times F$.

- $\mathcal{L}_I(E;F)$ denota o espaço dos operadores lineares integrais de E em F.

- $\mathcal{B}I_{X,Y}^{p,q}(E,F)$ denota o espaço das formas bilineares $(\overset{p,q}{X,Y})$-integrais.

- $[\mathcal{A},\beta]$ denota um ideal de Banach.

- $\Pi_{q,p}$ denota a classe de todos os operadores absolutamente (q, p)-somantes.
- $\mathcal{D}_{q,p}$ denota a classe de todos os operadores Cohen fortemente (q, p)-somantes.
- $\mathcal{L}_{X_1,\ldots,X_n;Y}$ denota a classe dos operadores multilineares $(X_1, \ldots, X_n; Y)$-somantes.
- $\mathrm{conv}(\Omega)$ denota a envoltória convexa do conjunto Ω.
- $\Gamma(\Omega)$ denota a envoltória absolutamente convexa do conjunto Ω.
- $C(\Omega)$ denota o espaço de Banach das funções contínuas definidas no espaço topológico compacto Ω.
- $M_b(\Omega)$ denotará o espaço de todas as medidas complexas, se (Ω, Σ) um espaço mensurável, ou o espaço de todas as medidas regulares complexas, se Ω for um espaço Hausdorff localmente compacto e Σ a σ-álgebra de Borel em Ω.
- $\mathrm{Prob}(\Omega)$ denota o conjunto formado por todas as medidas de probabilidade de Borel regular no espaço Hausdorff compacto Ω.
- $\mathrm{D}(\Omega)$ denota o conjunto formado por todas as medidas de Dirac no espaço Hausdorff compacto Ω com a σ-álgebra de Borel.

Introdução

A teoria de produtos tensoriais topológicos que conhecemos teve início com os trabalhos de R. Schatten na década de 1930. O seu primeiro livro sobre essa teoria, intitulado "A theory of cross-spaces" [46], publicado no ano de 1950, já apresentava os fundamentos e o que havia sido desenvolvido na época. Um pouco depois, em seu famoso trabalho "Résumé de la théorie métrique des produits tensoriels topologiques" [23] de 1956, A. Grothendieck apresentou a importância e versatilidade da teoria dos produtos tensoriais na Análise Funcional. Ele não só aplicou o produto tensorial na teoria de operadores e espaços de Banach, como também investigou a atualmente denominada "teoria local": o estudo dos espaços de Banach em termos de subespaços de dimensão finita. A complexidade do trabalho de Grothendieck fez com que ele fosse bem compreendido apenas alguns anos depois de sua publicação, sendo Lindenstrauss e Pełczyński, em [29], os primeiros a contribuir para o seu melhor entendimento, reescrevendo essas ideias de forma mais acessível.

Apesar do pioneirismo de Schatten, sua teoria não avançou a ponto de prover resultados úteis de dualidade, quando estavam envolvidos espaços de Banach mais gerais. Isso ocorreu porque sua definição de norma tensorial dual o levou a ter vários problemas. De fato, por lidar bem com esse e com muitos outros aspectos da teoria é que os trabalhos de Grothendieck são considerados como marcos históricos das teorias envolvidas.

É bem conhecido que as teorias de produto tensorial e a de (ideais de) operadores estão intimamente relacionadas, embora, em geral, sejam desenvolvidas e/ou trabalhadas separadamente. Um exemplo disso é o estudo da classe dos operadores lineares absolutamente somantes, que tem sua origem nos trabalhos de Grothendieck, por abordagem tensorial, mas que são muito estudadas, como nos trabalhos de A. Pietsch (ver por exemplo [39]), usando caracterizações por desigualdades, por integrais, dentre outras. De fato, a teoria de ideais de operadores lineares, que inclui o estudo da classe dos operadores absolutamente somantes, foi profundamente explorada por Piestch no livro [40] (principal referência na teoria de ideais) com pouco uso de técnicas relacionadas a produtos tensoriais, o que ainda ocorre com muitos dos trabalhos produzidos recentemente.

Uma direção bem comum presente na pesquisa relacionada à teoria de produtos tensoriais e ideais de operadores nas últimas décadas procura dar conta de responder perguntas como estas: dado um ideal de Banach $\mathcal{A}$, é possível determinar uma norma razoável α no produto tensorial $E \otimes F$ (E e F espaços de Banach) tal que $(E \otimes_\alpha F)' = \mathcal{A}(E; F')$? Ou ainda a pergunta associada: dada uma norma α, quais as características do ideal $\mathcal{A}$ tal que $(E \otimes_\alpha F)' = \mathcal{A}(E; F')$? Também está associado a essa direção o estudo de propriedades da norma α e da classe $\mathcal{A}$, como por exemplo, o estudo da maximalidade do ideal $\mathcal{A}$ e relações de inclusão entre a classe $\mathcal{A}(E; F)$ e outras bem conhecidas. Podemos citar vários trabalhos nessa linha como, por exemplo, [1, 4, 17, 19, 21, 28, 30, 31, 32, 33, 35, 45], além das referências neles contidas.

Também é fato que produtos tensoriais, em certos casos, podem ser identificados com espaços de sequências a valores vetoriais. Como exemplos disso temos $E\widehat{\otimes}_\varepsilon c_0 \stackrel{1}{=} c_0(E)$ (veja [45, Example 3.3]) e $E\widehat{\otimes}_\pi \ell_p \stackrel{1}{=} \ell_p \langle E \rangle$ (ver [38, Section 2.]). Motivado por esse fato, uma questão pertinente a se responder seria: dado um espaço de sequências $X(E)$, existem uma norma α e um espaço F tais que $E\widehat{\otimes}_\alpha F \stackrel{1}{=} X(E)$?

Dentro da teoria de ideais de operadores, uma grande quantidade de pesquisa foi direcionada ao estudo de classes definidas ou caracterizadas pela transformação de sequências vetoriais. Por exemplo, a classe dos operadores absolutamente p-somantes pode ser caracterizada pela transformação de sequências fracamente p-somáveis em absolutamente p-somáveis. Trabalhos nessa linha de estudo versam, por exemplo, sobre a definição e estudo de novas classes, generalizações para contextos não lineares e estudos de resultados de inclusão, dualidade e de fatoração. O leitor pode encontrar vários aspectos dessa teoria nos trabalhos [2, 6, 7, 11, 17, 19, 20, 41], por exemplo.

Em [10], G. Botelho e J. R. Campos apresentam uma abordagem unificadora para ideais de operadores definidos ou caracterizados pela transformação de sequências vetoriais. Para isso, eles definem um ambiente abstrato, baseado no conceito de classes de sequências, que modela os vários objetos e propriedades necessárias a esse fim. Essa abordagem abstrata generaliza ideais de operadores somantes no sentido de recuperar vários ideais conhecidos, como casos particulares da teoria, e apresentar novas classes.

O ambiente de classes de sequências vem sendo aplicado como ferramenta e como base de novas construções abstratas, tanto no contexto linear quanto no contexto não linear, e exemplos disso podem ser vistos nos trabalhos [11, 14, 42, 43]. É importante comentar que o ambiente abstrato apresentado em [47] também pode ser usado para caracterizar operadores somantes.

Neste trabalho, apresentamos uma generalização de quasi-normas e normas no produto tensorial, que envolvem espaços de sequências vetoriais em sua definição, usando o conceito de classes de sequências. Exemplos de objetos dessa natureza que podem ser assim modelados são as normas de Chevet-Saphar (veja [45, Section 6.2]), a norma definida no trabalho [17] de J. S. Cohen e a quasi-norma definida por M. Matos em [33]. Com isso, este ambiente abstrato acomoda resultados bem conhecidos da teoria e novos resultados são apresentados como aplicações. Apresentamos também um estudo sobre o comportamento local de certas classes de operadores somantes e estabelecemos sua relação com o dual tensorial quando este é munido com a quasi-norma (ou norma) abstrata adequada. Como aplicações, estudamos a maximalidade de ideais de operadores somantes e ainda relações de inclusão entre as classes de operadores associadas.

Com base na definição da norma injetiva, introduzimos também normas no produto tensorial envolvendo classes de sequências em sua definição e estabelecemos suas relações com certas classes de operadores de tipo integral. Por se tratarem de conceitos novos, até onde sabemos, todos os resultados obtidos com essas normas são inéditos. Além de vários resultados e exemplos apresentados, caracterizamos um espaço de sequências mid somáveis e o seu dual.

O trabalho está dividido em três capítulos e dois apêndices. O primeiro capítulo é composto de preliminares, ou seja, definições, notações e resultados prévios que serão necessários para o desenvolvimento do texto. No segundo, generalizamos quasi-normas definidas no produto tensorial, caracterizadas por envolver espaços de sequências. Apresentamos resultados sobre o comportamento local, maximalidade e inclusões dos ideais e classes de operadores. No terceiro, definimos normas abstratas no produto tensorial inspiradas pela norma injetiva e, com isso, obtemos uma série de construções, exemplos e resultados, como a caracterização de um espaço de sequências mid somáveis e seu dual.

Por fim, o leitor deve perceber que muitos resultados clássicos e bem conhecidos de Análise Funcional são utilizados indistintamente ao longo da tese, sem menção ou indicação de referências.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo, relembramos algumas definições, notações e resultados que serão necessários para o desenvolvimento deste trabalho. Buscamos, assim, colecionar fundamentos que entendemos ser indispensáveis para o trato de cada tema abordado ao longo da tese.

Os resultados aqui citados encontram-se, pelo objetivo do capítulo, sem demonstrações. Alguns deles, por serem de trabalhos recentes ou por conveniência, estão devidamente referenciados. As principais referências usadas como fontes foram os trabalhos [9, 10, 12, 19, 45].

1.1 Fundamentos, espaços de sequências e operadores somantes

Nesta seção, apresentamos algumas definições e resultados que permeiam todas as partes do trabalho. Começamos apresentando alguns conceitos e resultados de Análise Funcional, embora, é claro, usemos muitos outros resultados clássicos da teoria ao longo do trabalho sem maiores referências.

Um subconjunto N do dual E' de um espaço de Banach E é dito *normante* para E se

$$\|x\| = \sup\{|\varphi(x)| : \varphi \in N \text{ e } \|\varphi\| \leq 1\} \text{ para todo } x \in E.$$

O Teorema de Hahn-Banach nos diz que $B_{E'}$ é normante para E. Considerando o mergulho canônico $J_E : E \longrightarrow E''$, é bem conhecido que $J_E(E)$ é normante para E' e, com isso,

$$\|\varphi\| = \sup_{\Phi \in B_{E''}} |\Phi(\varphi)| = \sup_{x \in B_E} |J_E(x)(\varphi)| \text{ para todo } \varphi \in E'.$$

Sendo $T \in \mathcal{L}(E; F)$, denotamos por $T' \in \mathcal{L}(F'; E')$ o operador adjunto de T.

Proposição 1.1.1 [9, Proposição 4.3.11.] *Seja $T \in \mathcal{L}(E; F)$. Então, $T' \in \mathcal{L}(F'; E')$ e $\|T'\| = \|T\|$. Mais ainda, se T é um isomorfismo (isométrico), então T' também é um isomorfismo (isométrico).*

Seja L um subespaço do espaço de Banach E. Dizemos que L tem *codimensão finita* se existe um espaço de dimensão finita $N \subset E$ tal que $L + N = E$ e $L \cap N = \{0\}$. A codimensão de L é a dimensão de N, ou seja, codim $L = \dim N = \dim (E/L)$.

É bom deixar claro que nem todo subespaço de codimensão finita é fechado. A partir de agora, sempre que tratarmos do espaço quociente $\frac{E}{L}$ estaremos considerando que o espaço de codimensão finita L é fechado. Denotamos por $Q_L : E \longrightarrow \frac{E}{L}$ a aplicação quociente usual.

Denotamos por $\mathcal{F}(E)$ a coleção de todos subespaços de dimensão finita de E e por $\mathcal{CF}(E)$ a coleção de todos subespaços de codimensão finita de E.

Sejam E um espaço normado e M um subconjunto não vazio de E. O anulador de M é definido por $M^\perp = \{\varphi \in E' : \varphi(x) = 0 \text{ para todo } x \in M\}$.

Alguns resultados bem conhecidos que relacionam os conceitos acima são apresentados abaixo.

Proposição 1.1.2 [9, Exercício 3.6.13.] *Se E é um espaço normado e M um subespaço fechado de E, então $M^\perp$ é isomorfo isometricamente a $\left(\frac{E}{M}\right)'$.*

O isomorfismo da proposição acima é dado pela aplicação $Q'_M : \left(\frac{E}{M}\right)' \longrightarrow M^\perp$, onde $Q'_M(\varphi)(x) = \varphi([x])$ para $\varphi \in \left(\frac{E}{M}\right)'$ e $x \in M$.

Proposição 1.1.3 [45, pág. 67] *Seja F um espaço de Banach. Se $N \in \mathcal{F}(F')$, então existe $L \in \mathcal{CF}(F)$ tal que $\left(\frac{F}{L}\right)'$ é isomorfo isometricamente a N.*

Espaços de sequências a valores vetoriais

Dado um espaço de Banach E, consideramos espaços de sequências formadas por elementos de E que satisfazem uma determinada condição. Estamos interessados, principalmente, em boas propriedades desses espaços, como, por exemplo, sua completude.

Os espaços

$$\ell_\infty(E) := \left\{(x_j)_{j=1}^\infty \in E^{\mathbb{N}} : \|(x_j)_{j=1}^\infty\|_\infty = \sup_j \|x_j\| < \infty\right\},$$

e

$$c_0(E) := \left\{(x_j)_{j=1}^\infty \in E^{\mathbb{N}} : \lim_{j\to\infty} \|x_j\| = 0\right\},$$

com a norma herdada do $\ell_\infty(E)$, são respectivamente, os espaços de Banach das sequências *(fortemente) limitadas* e *nulas em norma* a valores em E. O espaço $c_0(E)$ é fechado em $\ell_\infty(E)$.

Uma sequência $(x_n)_{n=1}^\infty$ em E é dita *eventualmente nula* se existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|x_n\| = 0$ sempre que $n \geq n_0$. Denotamos por $c_{00}(E)$ o espaço vetorial de todas as sequências eventualmente nulas. O espaço $c_{00}(E)$ não é fechado em $c_0(E)$ e consequentemente não é um espaço de Banach com a norma $\|\cdot\|_\infty$.

Para $p \in [1, \infty)$, os espaços

$$\ell_p(E) := \left\{(x_j)_{j=1}^\infty \in E^{\mathbb{N}} : \left\|(x_j)_{j=1}^\infty\right\|_p := \left(\sum_{j=1}^\infty \|x_j\|^p\right)^{1/p} < \infty\right\},$$

$$\ell_p^w(E) := \left\{(x_j)_{j=1}^\infty \in E^{\mathbb{N}} : \left\|(x_j)_{j=1}^\infty\right\|_{w,p} := \sup_{\varphi\in B_{E^*}} \left(\sum_{j=1}^\infty |\varphi(x_j)|^p\right)^{1/p} < \infty\right\}$$

e

$$\ell_p^u(E) = \left\{(x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_p^w(E) : \lim_k \|(x_j)_{j=k}^\infty\|_{w,p} = 0\right\},$$

com a norma herdada de $\ell_p^w(E)$, são, respectivamente, os espaços de Banach das sequências *absolutamente, fracamente* e *incondicionalmente p-somáveis* a valores em E. O espaço $\ell_p^u(E)$ é fechado em $\ell_p^w(E)$.

Para $1 \leq p < \infty$, é conhecido que $\ell_p^w(E') \stackrel{1}{=} \mathcal{L}(E; \ell_p)$ (para mais detalhes desses fatos, veja [45, pág. 134]) por meio da aplicação que associa $\varphi = (\varphi_j)_{j=1}^\infty \in \ell_p^w(E')$ ao operador $T_\varphi \in \mathcal{L}(E; \ell_p)$ dado por $T_\varphi(x) = (\varphi_j(x))_{j=1}^\infty$. Disso, chega-se a uma forma alternativa de se calcular a norma de uma sequência $(\varphi_j)_{j=1}^{\infty}$ em $\ell_p^w(E')$, por

$$\left\|(\varphi_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{\ell_p^w(E')} = \sup_{x\in B_E}\left(\sum_{j=1}^{\infty}|\varphi_j(x)|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

No que segue, sendo $1 < p < \infty$, denotamos por p^* o conjugado de p, isto é, o único numero real tal que $1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{p^*}$. Também definimos $p^* = \infty$ como conjugado de $p = 1$ e vice-versa.

Uma sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ em E é dita *Cohen fortemente p-somável* se a série $\sum_{n=1}^{\infty}|\varphi_n(x_n)|$ convergir para toda $(\varphi_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_{p^*}^w(E')$. O que equivale a dizer que a sequência $(\varphi_n(x_n))_{n=1}^{\infty} \in \ell_1$ para toda $(\varphi_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_{p^*}^w(E')$. Denotamos por $\ell_p\langle E\rangle$ o espaço vetorial de todas as sequências Cohen fortemente p-somáveis de E.

A definição original apresentada por Cohen em [17] é a seguinte: uma sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ em E é Cohen fortemente p-somável se a série $\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n(x_n)$ convergir para qualquer que seja $(\varphi_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_{p^*}^w(E')$. Em [15] foi demonstrado que essas definições são equivalentes.

A função $\|\cdot\|_{\ell_p\langle E\rangle} : \ell_p\langle E\rangle \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\|(x_n)_{n=1}^{\infty}\|_{\ell_p\langle E\rangle} := \sup_{(\varphi_n)_{n=1}^{\infty}\in B_{\ell_{p^*}^w(E')}} \|(\varphi_n(x_n))_{n=1}^{\infty}\|_{\ell_1(\mathbb{K})}$$

define uma norma completa em $\ell_p\langle E\rangle$. Para $p = 1$, tem-se $\ell_1\langle E\rangle = \ell_1(E)$.

Vamos apresentar agora um espaço de sequências introduzido por A. Karn e D. Sinha em 2014, no trabalho [27], e que foi revisitado em [11].

Sejam $1 \leq p < \infty$ e E um espaço de Banach. Uma sequência $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ em E é dita *mid p-somável* se $((\varphi_n(x_j))_{n=1}^{\infty})_{j=1}^{\infty} \in \ell_p(\ell_p)$ $\Big($o que equivale a $\left((\varphi_n(x_j))_{j=1}^{\infty}\right)_{n=1}^{\infty} \in \ell_p(\ell_p)\Big)$ sempre que $(\varphi_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_p^w(E')$. Denotamos por $\ell_p^{\mathrm{mid}}(E)$ o espaço vetorial de todas as sequências mid p-somáveis.

A função $\|\cdot\|_{\ell_p^{\mathrm{mid}}(E)} : \ell_p^{\mathrm{mid}}(E) \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\begin{aligned}\left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{\ell_p^{\mathrm{mid}}(E)} &:= \sup_{(\varphi_n)_{n=1}^{\infty}\in B_{\ell_p^w(E')}}\left(\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}|\varphi_n(x_j)|^p\right)^{\frac{1}{p}}\\ &= \sup_{(\varphi_n)_{n=1}^{\infty}\in B_{\ell_p^w(E')}}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}|\varphi_n(x_j)|^p\right)^{\frac{1}{p}}\end{aligned}$$

define uma norma completa em $\ell_p^{\mathrm{mid}}(E)$.

É fato que os espaços $\ell_p^{\mathrm{mid}}(E)$ e $\ell_p^u(E)$, em geral, são incomparáveis no seguinte sentido: existem $1 \leq p_1, p_2 < \infty$ e espaços de Banach E e F tais que $\ell_{p_1}^u(E) \nsubseteq \ell_{p_1}^{\mathrm{mid}}(E)$ e $\ell_{p_2}^{\mathrm{mid}}(F) \nsubseteq \ell_{p_2}^u(F)$ ([11, Example 1.7]).

Sejam E e F espaços de Banach. A notação $E \overset{K}{\hookrightarrow} F$ significa que $E \subseteq F$ e $\|x\|_F \leq K \|x\|_E$ para todo $x \in E$.

Para todo $1 \leq p < \infty$, vale a cadeia

$$c_{00}(E) \subseteq \ell_p\langle E\rangle \overset{1}{\hookrightarrow} \ell_p(E) \overset{1}{\hookrightarrow} \ell_p^{\mathrm{mid}}(E) \overset{1}{\hookrightarrow} \ell_p^w(E) \overset{1}{\hookrightarrow} \ell_\infty(E) \tag{1.1}$$

e também $\ell_p(E) \overset{1}{\hookrightarrow} \ell_p^u(E) \overset{1}{\hookrightarrow} \ell_p^w(E)$, para qualquer espaço de Banach E. Além disso, os Teoremas dos tipo Dvoretzky-Rogers (veja [15, 20]) nos garantem que

$$\ell_p\langle E\rangle = \ell_p(E) = \ell_p^w(E)$$

se, e somente se, a dimensão de E é finita.

Por fim, apresentamos um espaço de sequências introduzido recentemente no trabalho [16], o qual generaliza o espaço das sequências mid p-somáveis.

Sejam $1 \leq p, q < \infty$ e E um espaço de Banach. Uma sequência $(x_j)_{j=1}^\infty$ em E é dita *mid (q,p)-somável* se $((\varphi_n(x_j))_{n=1}^\infty)_{j=1}^\infty \in \ell_q(\ell_p)$ sempre que $(\varphi_n)_{n=1}^\infty \in \ell_p^w(E')$. Denotamos por $\ell_{q,p}^{\mathrm{mid}}(E)$ o espaço vetorial de todas as sequências mid (q,p)-somáveis. Naturalmente, se $q = p$, recuperamos o espaço $\ell_p^{\mathrm{mid}}(E)$.

A função $\|\cdot\|_{\ell_{q,p}^{\mathrm{mid}}(E)} : \ell_{q,p}^{\mathrm{mid}}(E) \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\left\|(x_j)_{j=1}^\infty\right\|_{\ell_{q,p}^{\mathrm{mid}}(E)} := \sup_{(\varphi_n)_{n=1}^\infty \in B_{\ell_p^w(E')}} \left(\sum_{j=1}^\infty \left(\sum_{n=1}^\infty |\varphi_n(x_j)|^p \right)^{\frac{q}{p}} \right)^{\frac{1}{q}}$$

define uma norma completa em $\ell_{q,p}^{\mathrm{mid}}(E)$.

Proposição 1.1.4 [16, Proposition 2.4] *Para todos q e p,*

$$\ell_q(E) \overset{1}{\hookrightarrow} \ell_{q,p}^{\mathrm{mid}}(E) \overset{1}{\hookrightarrow} \ell_q^w(E),$$

para cada espaço de Banach E.

Proposição 1.1.5 [16, Proposition 2.9] *Se $q \leq p \leq s \leq r$, então*

$$\ell_{q,p}^{\mathrm{mid}}(E) \overset{1}{\hookrightarrow} \ell_{r,s}^{\mathrm{mid}}(E),$$

para cada espaço de Banach E.

Operadores somantes

No contexto da teoria de operadores, muitas classes de operadores lineares são caracterizados por uma propriedade de transformação de sequências a valores vetoriais. O caso mais conhecido é o da classe dos operadores absolutamente somantes: um operador linear $T : E \to F$ é dito *absolutamente p-somante* se transforma sequências fracamente p-somáveis de E em sequências absolutamente somáveis de F.

De modo mais geral, sejam $1 \leq p \leq q < \infty$ e $T : E \longrightarrow F$ um operador linear contínuo entre espaços de Banach. Dizemos que T é *absolutamente (q,p)-somante* (ou simplesmente *(q,p)-somante*), se operador induzido

$$\widetilde{T} : \ell_p^w(E) \longrightarrow \ell_q(F), \text{ dado por } (x_j)_{j=1}^{\infty} \mapsto (T(x_j))_{j=1}^{\infty},$$

está bem definido. O espaço vetorial formado por todos os operadores (q,p)-somantes de E em F será denotado por $\Pi_{q,p}(E;F)$. Quando $p = q$, denotamos por $\Pi_p(E;F)$ o espaço dos operadores absolutamente p-somantes. Para um estudo aprofundado sobre essa classe, com caracterizações que utilizaremos no nosso texto, recomendamos [10] e [20].

Em ([39, page 338]), Pietsch mostrou que o operador identidade de ℓ_1 em ℓ_2 é absolutamente 2-somante, mas que seu adjunto de ℓ_2 em ℓ_∞ não é 2-somante. Motivado por esse fato, em [17], Cohen define o espaço das sequências Cohen fortemente p-somáveis e uma nova classe de operadores que caracteriza o adjunto de operadores absolutamente p-somantes. A classe em questão é apresentada a seguir.

Sejam $1 < p \leq \infty$ e $T : E \longrightarrow F$ um operador linear contínuo entre espaços de Banach. Dizemos que T é *Cohen fortemente p-somante* se operador induzido

$$\widetilde{T} : \ell_p(E) \longrightarrow \ell_p\langle F\rangle, \text{ dado por } (x_j)_{j=1}^{\infty} \mapsto (T(x_j))_{j=1}^{\infty},$$

está bem definido. O espaço vetorial formado por todos os operadores Cohen fortemente p-somantes de E em F será denotado por $\mathcal{D}_p(E;F)$. Para um estudo mais aprofundado sobre essa classe, recomendamos [15] e [17].

Em [5], H. Apiola generaliza a classe $\mathcal{D}_p(E;F)$ definindo a classe dos operadores Cohen fortemente (q,p)-somantes, aqueles onde o operador induzido $\widetilde{T} : \ell_p(E) \longrightarrow \ell_q\langle F\rangle$ está bem definido. O espaço vetorial formado por todos os operadores Cohen fortemente (q,p)-somantes de E em F será denotado por $\mathcal{D}_{q,p}(E;F)$. Claro, quando $q=p$ temos o caso Cohen fortemente p-somante.

Outras classes de operadores somantes, caracterizadas por transformações de sequências na cadeia (1.1), serão abordadas ao longo do texto, como o caso dos operadores mid somantes (ver [11] e [27]). Teremos em mente as ideias aqui discutidas sempre que apresentarmos e trabalharmos com classes de operadores dessa natureza.

1.2 Produto tensorial de espaços de Banach

Nesta seção apresentamos alguns resultados importantes da teoria que serão necessários ao longo deste texto. Para um estudo detalhado sobre o produto tensorial entre espaços de Banach recomendamos a leitura de [19] e [45].

Sejam E e F espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$. Denotamos por $x \otimes y$ o funcional dado pela avaliação de uma forma bilinear A no ponto $(x,y) \in E \times F$, isto é,

$$x \otimes y : B(E,F) \longrightarrow \mathbb{K}, \quad (x \otimes y)(A) = A(x,y).$$

O funcional $x \otimes y$ é chamado *tensor elementar* e o subespaço do dual algébrico $B(E,F)^{\#}$ gerado pelos elementos $x \otimes y$, com $x \in E$ e $y \in F$, será chamado de *produto tensorial de E por F*, denotado por $E \otimes F$. Chamamos os elementos de $E \otimes F$ de *tensores*. Em símbolos,

$$E \otimes F = \operatorname{span}\{x \otimes y : x \in E, y \in F\}$$

e, portanto, um tensor típico em $E \otimes F$ tem a forma $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j \otimes y_j$, onde $\lambda_j \in \mathbb{K}$, $x_j \in E$ e $y_j \in F$, com $1 \leq j \leq n$, ou ainda a forma $u = \sum_{j=1}^{n} z_j \otimes y_j$, onde $z_j = \lambda_j x_j$. Sem perda de generalidade, utilizaremos indistintamente qualquer uma das representações.

Podemos avaliar se um tensor $u = \sum_{j=1}^{n} x_j \otimes y_j$ é nulo calculando $\sum_{j=1}^{n} A(x_j, y_j)$ para cada forma bilinear $A \in B(E,F)$. No entanto, existem formas mais eficientes, como mostra a seguinte proposição:

Proposição 1.2.1 [45, Proposition 1.2] *Seja $u = \sum_{j=1}^{n} x_j \otimes y_j \in E \otimes F$. São equivalentes:*

(i) *$u = 0$;*

(ii) *$\sum_{j=1}^{n} \varphi(x_j)\psi(y_j)$ para todos $\varphi \in E^{\#}, \psi \in F^{\#}$;*

(iii) $\sum_{j=1}^n \varphi(x_j)y_j = 0$ *para todo* $\varphi \in E^{\#}$;

(iv) $\sum_{j=1}^n \psi(y_j)x_j = 0$ *para todo* $\varphi \in F^{\#}$.

Aplicações bilineares podem ser identificadas com aplicações lineares definidas no produto tensorial de espaços vetoriais. Esse é um dos aspectos mais importantes e úteis da teoria.

Teorema 1.2.2 [45, Proposition 1.4] *Sejam E, F e G espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$. Para cada aplicação bilinear $A : E \times F \longrightarrow G$ existe uma única aplicação linear $\tilde{A} : E \otimes F \longrightarrow G$ tal que $A(x, y) = \tilde{A}(x \otimes y)$ para todos $x \in E$, $y \in F$. Além disso, a correspondência $A \longleftrightarrow \tilde{A}$ é um isomorfismo entre os espaços vetoriais $B(E, F; G)$ e $L(E \otimes F; G)$.*

A aplicação $\tilde{A}$ acima é chamada *a linearização* da forma bilinear A.

Sejam $S : E \longrightarrow G$ e $T : F \longrightarrow H$ aplicações lineares. Definimos a aplicação linear $S \otimes T : E \otimes F \longrightarrow G \otimes H$, chamada *produto tensorial das aplicações lineares* S e T, como a linearização da aplicação bilinear $A : E \times F \longrightarrow G \otimes H$ dada por $A(x, y) = S(x) \otimes T(y)$. Assim, temos $S \otimes T(x \otimes y) = S(x) \otimes T(y)$ para todo $(x, y) \in E \times F$.

Um fato interessante é que podemos identificar tensores de diversas formas. Por exemplo, cada tensor $u = \sum_{j=1}^n x_j \otimes y_j$ gera uma aplicação linear

$$L_u : E^{\#} \longrightarrow F \text{ dada por } \ \varphi \mapsto L_u(\varphi) = \sum_{j=1}^n \varphi(x_j)y_j.$$

Note que a Proposição 1.2.1 garante que a aplicação linear $u \longmapsto L_u$ é injetiva. Daí temos a identificação $E \otimes F \subset L(E^{\#}; F)$.

Os elementos de $L(E; F)$ que correspondem a tensores de $E^{\#} \otimes F$ sob a identificação $\varphi \otimes y : E \longrightarrow F$, dada por $\varphi \otimes y(x) = \varphi(x)y$, são aplicações lineares de *posto finito*, isto é, aplicações cuja imagem é um subespaço de dimensão finita em F. Assim, quando $T \in \mathcal{L}(E; E)$ é de posto finito, podemos representá-lo na forma $T = \sum_{j=1}^n \varphi_j \otimes x_j$, com $x_1, \ldots, x_n \in E$ e $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in E'$.

Definimos o *traço* de T por

$$\operatorname{tr}(T) := \sum_{j=1}^n \varphi_j(x_j)$$

e, naturalmente, esse valor independe da representação.

Vamos agora apresentar algumas normas usuais no produto tensorial.

Sejam E e F espaços de Banach. Para cada tensor $u \in E \otimes F$, a *norma projetiva* de u é definida como sendo o número

$$\pi(u) := \inf \left\{ \sum_{j=1}^{n} \|x_j\| \, \|y_j\| : u = \sum_{j=1}^{n} x_j \otimes y_j \right\},$$

onde o ínfimo é tomado sobre todas as representações de u. Denotamos por $E \otimes_\pi F$ o produto tensorial $E \otimes F$ munido da norma projetiva π e por $E \widehat{\otimes}_\pi F$ o completamento de $E \otimes_\pi F$. O espaço de Banach $E \widehat{\otimes}_\pi F$ será chamado *produto tensorial projetivo*.

No Teorema 1.2.2 vimos que o produto tensorial $E \otimes F$ lineariza aplicações bilineares definidas em $E \times F$. O próximo resultado nos diz que o produto tensorial projetivo lineariza as aplicações bilineares contínuas.

Teorema 1.2.3 [45, Proposition 2.9] *Seja $A \in \mathcal{B}(E, F; G)$ uma aplicação bilinear contínua. Então, existe um único operador linear contínuo $\tilde{A} : E \widehat{\otimes}_\pi F \longrightarrow G$ satisfazendo $\tilde{A}(x \otimes y) = A(x, y)$ para todos $x \in E$, $y \in F$. Além disso, a correspondência $A \longleftrightarrow \tilde{A}$ é um isomorfismo isométrico entre os espaços $\mathcal{B}(E, F; G)$ e $\mathcal{L}(E \widehat{\otimes}_\pi F; G)$.*

Assim, se $G = \mathbb{K}$ no Teorema 1.2.3, temos $\mathcal{B}(E, F) \overset{1}{=} \left(E \widehat{\otimes}_\pi F\right)'$. Com essa identificação, a ação de uma forma bilinear contínua A como um funcional linear contínuo em $E \widehat{\otimes}_\pi F$ é dada por $A\left(\sum_{j=1}^{n} x_j \otimes y_j\right) = \sum_{j=1}^{n} A(x_j, y_j)$.

Não é difícil verificar que

$$\mathcal{B}(E, F) \overset{1}{=} \mathcal{L}(E; F') \overset{1}{=} \mathcal{L}(F; E'),$$

por meio das aplicações

$$\begin{array}{ccc} \Psi_1 : \mathcal{B}(E, F) \longrightarrow \mathcal{L}(E; F') & \text{e} & \Psi_2 : \mathcal{B}(E, F) \longrightarrow \mathcal{L}(F; E') \\ A \longmapsto \Psi_1(A)(x)(y) = A(x, y) & & A \longmapsto \Psi_2(A)(y)(x) = A(x, y). \end{array} \tag{1.2}$$

Dessa forma, a ação de um operador linear e contínuo $T : E \longrightarrow F'$ como um funcional linear contínuo em $E \widehat{\otimes}_\pi F$ é dada por

$$T\left(\sum_{j=1}^{n} x_j \otimes y_j\right) = \sum_{j=1}^{n} T(x_j)(y_j).$$

Analogamente, a ação de um operador linear e contínuo $S : F \longrightarrow E'$ como um funcional linear contínuo em $E \widehat{\otimes}_\pi F$ é dada por

$$S\left(\sum_{j=1}^{n} x_j \otimes y_j\right) = \sum_{j=1}^{n} S(y_j)(x_j).$$

Vejamos agora a definição da norma injetiva. Sejam E e F espaços de Banach. Para cada tensor $u \in E \otimes F$, a *norma injetiva* de u é definida como sendo o número

$$\varepsilon(u) = \sup \left\{ \left| \sum_{j=1}^{n} \varphi(x_j)\psi(y_j) \right| : \varphi \in B_{E'}, \psi \in B_{F'} \right\},$$

onde $\sum_{j=1}^{n} x_j \otimes y_j$ é uma representação qualquer de u. Denotamos por $E \otimes_\varepsilon F$ o produto tensorial $E \otimes F$ munido da norma injetiva ε e por $E\widehat{\otimes}_\varepsilon F$ o completamento de $E \otimes_\varepsilon F$. O espaço de Banach $E\widehat{\otimes}_\varepsilon F$ será chamado *produto tensorial injetivo.*

Proposição 1.2.4 [45, Proposition 3.14.] *Sejam E e F espaços de Banach e $B \in \mathcal{B}(E, F)$. Então, $\widetilde{B}$ é um funcional linear contínuo em $E\widehat{\otimes}_\varepsilon F$ se, e somente se, existe uma medida de Borel regular μ sobre o espaço compacto $B_{E'} \times B_{F'}$ (com a topologia produto das respectivas topologias fraca-estrela) tal que*

$$B(x, y) = \int_{B_{E'} \times B_{F'}} \varphi(x)\psi(y) \; d\mu(\varphi, \psi) \tag{1.3}$$

para todos $x \in E$, $y \in F$. Além disso, a norma de $\widetilde{B}$ é dada por

$$\left\| \widetilde{B} \right\| = \inf \|\mu\|,$$

onde μ varia sobre o conjunto de todas as medidas que correspondem à forma bilinear B dessa maneira e esse ínfimo é atingido.

Diz-se que uma forma bilinear B em $E \times F$ é *integral* se sua linearização $\widetilde{B}$ é um funcional linear e contínuo sobre o produto tensorial injetivo $E\widehat{\otimes}_\varepsilon F$. A norma integral de B é definida por $\|B\|_I = \inf \|\mu\|$, onde o ínfimo é tomado sobre todas as medidas de Borel regular em $B_{E'} \times B_{F'}$ que satisfaz (1.3). O espaço de Banach das formas bilineares integrais, munido da norma acima, é denotado por $B_I(E, F)$. Assim, temos

$$(E\widehat{\otimes}_\varepsilon F)' \stackrel{1}{=} \mathcal{B}_I(E, F). \tag{1.4}$$

A definição de operador linear integral é obtida a partir das formas bilineares integrais da seguinte forma: diz-se que um operador $T \in \mathcal{L}(E; F)$ é integral se a forma bilinear $\Gamma(T) : E \times F' \to \mathbb{K}$, dada por $\Gamma(T)(x)(\psi) = \psi(T(x))$, é integral. O espaço dos operadores lineares integrais de E em F é denotado por $\mathcal{L}_I(E; F)$.

Tomando as normas ε e π como modelo e tendo em mente propriedades interessantes que o produto tensorial normado deve possuir, a teoria formula definições para que uma norma qualquer seja, digamos, interessante sobre um produto tensorial. Esses tipos de propriedades serão apresentadas agora.

Sejam E e F espaços de Banach. Dizemos que uma norma α em $E \otimes F$ é uma *norma razoável* no produto tensorial (reasonable crossnorm) se

$$\varepsilon(u) \leq \alpha(u) \leq \pi(u)$$

para qualquer $u \in E \otimes F$. Esse fato será denotado, de modo mais simples, de agora em diante apenas por $\varepsilon \leq \alpha \leq \pi$.

Quando for necessário especificar os espaços componentes no produto tensorial, denotaremos a α-norma de u por $\alpha(u; E \otimes F)$. Denotamos por $E \otimes_\alpha F$ o produto tensorial $E \otimes F$ munido da norma razoável α e por $E \widehat{\otimes}_\alpha F$ o completamento de $E \otimes_\alpha F$.

Sejam E_1, E_2, F_1 e F_2 espaços de Banach. Dizemos que uma norma razoável α é *uniforme* se satisfaz a propriedade da aplicação métrica: se $T_i \in \mathcal{L}(E_i; F_i)$, $i = 1, 2$, então

$$\|T_1 \otimes T_2 : E_1 \otimes_\alpha E_2 \longrightarrow F_1 \otimes_\alpha F_2\| \leq \|T_1\| \, \|T_2\| \, .$$

Sejam α e β normas razoáveis em $E \otimes F$. A relação $\alpha \leq \beta$ significa que $\alpha(u) \leq \beta(u)$ para qualquer $u \in E \otimes F$. Perceba que se $\varphi \in (E \widehat{\otimes}_\alpha F)'$, então existe uma constante $C > 0$ tal que

$$|\varphi(u)| \leq C \cdot \alpha(u) \leq C \cdot \beta(u)$$

para qualquer $u \in E \otimes F$. Logo, $\varphi \in (E \otimes_\beta F)' \overset{1}{=} (E \widehat{\otimes}_\beta F)'$. Assim,

$$(E \widehat{\otimes}_\varepsilon F)' \subseteq (E \widehat{\otimes}_\alpha F)' \subseteq (E \widehat{\otimes}_\beta F)' \subseteq (E \widehat{\otimes}_\pi F)' \overset{1}{=} \mathcal{B}(E, F) \overset{1}{=} \mathcal{L}(E; F') \overset{1}{=} \mathcal{L}(F; E').$$

Se α é uma norma razoável uniforme, a *transposta de* α é a norma razoável uniforme α^t definida como segue: para cada par de espaços de Banach E, F e cada $u \in E \otimes F$,

$$\alpha^t(u; E \otimes F) = \alpha(u^t; F \otimes E),$$

onde a transposta u^t de $u = \sum_{j=1}^n x_j \otimes y_j$ é dada por $u^t = \sum_{j=1}^n y_j \otimes x_j$. Dizemos que α é *simétrica* se $\alpha^t = \alpha$; π e ε são simétricas. Além disso, $E \otimes_\alpha F$ é isometricamente isomorfo a $F \otimes_{\alpha^t} E$ sob a aplicação $u \mapsto u^t$. Essa aplicação estende-se por continuidade para um isomorfismo isométrico entre $E \widehat{\otimes}_\alpha F$ e $F \widehat{\otimes}_{\alpha^t} E$.

Uma norma razoável uniforme α é dita *finitamente gerada* se para cada par de espaços de Banach E e F e cada $u \in E \otimes F$, tivermos

$$\alpha(u; E \otimes F) = \inf \{\alpha(u; M \otimes N); u \in M \otimes N, \dim M < \infty, \dim N < \infty\},$$

tomando o ínfimo sobre toda representação de $u \in M \otimes N$ com $M \in \mathcal{F}(E)$ e $N \in \mathcal{F}(F)$.

De todo o exposto temos a definição de norma tensorial:

Definição 1.2.5 Uma *norma tensorial* em $E \otimes F$ é uma norma razoável, uniforme e finitamente gerada.

As normas injetiva ε e projetiva π são normas tensoriais. Vamos apresentar mais dois exemplos de normas tensoriais que serão muito citadas ao longo de nosso trabalho.

As *normas de Chevet-Saphar* são definidas para $1 \leq p \leq \infty$, como segue

$$d_p(u) = \inf \left\{ \left\| (x_j)_{j=1}^n \right\|_{\ell_{p^*}^w(E)} \left\| (y_j)_{j=1}^n \right\|_{\ell_p(F)}; u = \sum_{j=1}^n x_j \otimes y_j \right\}$$

e

$$g_p(u) = \inf \left\{ \left\| (x_j)_{j=1}^n \right\|_{\ell_p(E)} \left\| (y_j)_{j=1}^n \right\|_{\ell_{p^*}^w(F)}; u = \sum_{j=1}^n x_j \otimes y_j \right\},$$

onde, em ambos os casos, o ínfimo é tomado sobre todas as representações de $u \in E \otimes F$.

As normas d_p e g_p são normas tensoriais, onde $g_p^t = d_p$. Mais ainda, tem-se

$$(E \widehat{\otimes}_{d_p} F)' \stackrel{1}{=} \Pi_{p^*}(E; F') \quad \text{e} \quad (E \widehat{\otimes}_{g_p} F)' \stackrel{1}{=} \Pi_{p^*}(F; E'),$$

para todos os espaços E e F (veja [45, pág. 142]).

1.3 Ideais maximais

A teoria de ideais de operadores lineares foi sistematizada por A. Pietsch no livro [40], que exibe o conceito de ideal de operadores lineares, desenvolve a teoria geral, investiga muitos casos particulares e exibe várias aplicações. As principais referências desta seção são [19, 20, 45].

Definição 1.3.1 Um *ideal de operadores* $\mathcal{A}$ é um método de atribuir a cada par de espaços de Banach (E, F) um subespaço vetorial $\mathcal{A}(E, F)$ de $\mathcal{L}(E, F)$ tal que as seguintes condições são satisfeitas:

(I 1) $\varphi \otimes y \in \mathcal{A}(E, F)$, para todos $\varphi \in E'$ e $y \in F$;

(I 2) se E_0 e F_0 são espaços de Banach, então $UTS \in \mathcal{A}(E_0, F_0)$ sempre que $U \in \mathcal{L}(F, F_0), T \in \mathcal{A}(E, F)$ e $S \in \mathcal{L}(E_0, E)$.

Além disso, se para cada par (E, F), a classe $\mathcal{A}(E, F)$ é munida de uma norma β satisfaz as condições:

(N 1) $\beta(\varphi \otimes y) = \|\varphi\| \, \|y\|$, para todos $\varphi \in E'$ e $y \in F$;

(N 2) $\beta(UTS) \leq \|U\| \, \beta(T) \, \|S\|$, sempre que E_0 e F_0 são espaços de Banach e $U \in \mathcal{L}(F, F_0), T \in \mathcal{A}(E, F)$ e $S \in \mathcal{L}(E_0, E)$;

(N 3) $[\mathcal{A}(E, F), \beta]$ é um espaço de Banach;

então $[\mathcal{A}, \beta]$ é chamado um *ideal de Banach* de operadores ou simplesmente *ideal de Banach.*

Sejam $[\mathcal{A}, \beta]$ um ideal de Banach e E e F espaços de Banach. Dizemos que o operador $T : E \longrightarrow F$ pertence a $\mathcal{A}^*(E; F)$ se existe uma constante $c \geq 0$ tal que, independentemente dos espaços normados de dimensão finita E_0 e F_0 e dos operadores $U \in \mathcal{L}(E_0, E)$, $S \in \mathcal{L}(F, F_0)$ e $Q \in \mathcal{L}(F_0, E_0)$, a composição $E_0 \xrightarrow{U} E \xrightarrow{T} F \xrightarrow{S} F_0 \xrightarrow{Q} E_0$ satisfaz

$$|\mathrm{tr}(QSTU)| \leq c \cdot \beta(Q) \cdot \|S\| \cdot \|U\| \,.$$

Denotamos por $\beta^*(T)$ o ínfimo tomado sobre a coleção de todas as constantes c que fazem a desigualdade acima ser verdadeira.

Teorema 1.3.2 [20, Theorem 6.7] *$[\mathcal{A}^*, \beta^*]$ é um ideal de Banach.*

O ideal de Banach $[\mathcal{A}^*, \beta^*]$ é chamado o *ideal adjunto* de $[\mathcal{A}, \beta]$ e $[\mathcal{A}^{**}, \beta^{**}]$ é chamado o *ideal biadjunto* de $[\mathcal{A}, \beta]$, ou seja, o ideal adjunto de $[\mathcal{A}^*, \beta^*]$.

Sendo M um subespaço do espaço de Banach E, denotando por I_M o operador inclusão de M em E, temos o

Teorema 1.3.3 [20, 6.8, pág. 134] *Suponha que $[\mathcal{A}, \beta]$ seja um ideal de Banach e que E e F sejam espaços de Banach. Um operador $T \in \mathcal{L}(E; F)$ pertence a $\mathcal{A}^{**}(E; F)$ se, e somente se,*

$$c := \sup \{\beta(Q_L T I_M)\} < \infty,$$

onde o supremo é tomado sobre todo $M \in \mathcal{F}(E)$ e todo fechado $L \in \mathcal{CF}(F)$. Nesse caso, $\beta^{**}(T) = c$.

Dados dois ideais de Banach $[\mathcal{A}, \beta]$ e $[\mathcal{B}, \gamma]$, escrevemos

$$[\mathcal{A}, \beta] \subset [\mathcal{B}, \gamma]$$

se para quaisquer espaços de Banach E e F, temos $\mathcal{A}(E; F) \subset \mathcal{B}(E; F)$ e $\gamma(T) \leq \beta(T)$ para todo $T \in \mathcal{A}(E; F)$. Naturalmente, escrevemos

$$[\mathcal{A}, \beta] = [\mathcal{B}, \gamma]$$

se ambas as relações $[\mathcal{A}, \beta] \subset [\mathcal{B}, \gamma]$ e $[\mathcal{B}, \gamma] \subset [\mathcal{A}, \beta]$ ocorrem simultaneamente.

Proposição 1.3.4 [20, Corollary 6.9] *Se $[\mathcal{A}, \beta]$ é qualquer ideal de Banach, então $[\mathcal{A}, \beta] \subset [\mathcal{A}^{**}, \beta^{**}]$.*

Com respeito à inclusão estabelecida acima, é um fato que $[\mathcal{A}^{**}, \beta^{**}]$ é o maior dos ideais de Banach $[\mathcal{B}, \gamma]$ que satisfaz $\beta(T) = \gamma(T)$ para todo $T \in \mathcal{L}(E; F)$, sempre que E e F são de dimensão finita (ver, por exemplo, [20, pág. 135]).

Definição 1.3.5 ([20, pág. 135]) Dizemos que um ideal $[\mathcal{A}, \beta]$ é *maximal* se

$$[\mathcal{A}, \beta] = [\mathcal{A}^{**}, \beta^{**}].$$

Os ideais maximais são caracterizados por um comportamento local. Para apresentarmos essa característica, vejamos a seguinte definição:

Definição 1.3.6 [45, pág. 198] Dizemos que um ideal de Banach $[\mathcal{A}, \beta]$ é *finitamente gerado* se para cada par de espaços de Banach E e F e cada $T \in \mathcal{A}(E; F)$, o operador

$$Q_L T I_M : M \longrightarrow E \longrightarrow F \longrightarrow \frac{F}{L} \text{ satisfaz } \beta(T) = \sup\{\beta(Q_L T I_M)\},$$

onde o supremo é tomado sobre todo $M \in \mathcal{F}(E)$ e todo fechado $L \in \mathcal{CF}(F)$.

A partir dessa definição, apresentamos essa caracterização.

Teorema 1.3.7 [45, Theorem 8.11] *Seja $[\mathcal{A}, \beta]$ um ideal de Banach. São equivalentes:*

(i) $[\mathcal{A}, \beta]$ *é maximal.*

(ii) *Existe um ideal de Banach $[\mathcal{B}, \gamma]$ tal que $[\mathcal{A}, \beta] = [\mathcal{B}^{*}, \gamma^{*}]$.*

(iii) $[\mathcal{A}, \beta]$ *é finitamente gerado.*

O resultado a seguir traduz a estreita ligação entre a teoria de ideais de operadores e a de produto tensorial de espaços de Banach:

Teorema 1.3.8 [19, Exercise 17.2] *Um ideal de operadores normados $[\mathcal{A}, \beta]$ é maximal se, e somente se, existe uma norma tensorial α tal que*

$$\mathcal{A}(E; F) \stackrel{1}{=} (E \widehat{\otimes}_{\alpha} F')' \cap \mathcal{L}(E; F),$$

para todos espaços de Banach E e F.

1.4 Classes de sequências

O objetivo desta seção é descrever um aparato abstrato, conhecido como classe de sequências que permite considerar, de forma unificada, todos os espaços de sequências vetoriais que satisfaçam determinadas propriedades. Originalmente, classes de sequências foram apresentadas em [10]. Em [12], são introduzidas novas propriedades de classes de sequências que nos permitem falar em dualidade. Para mais detalhes recomendamos ver os trabalhos supracitados, de onde retiramos as definições e resultados dessa seção.

Sendo $j \in \mathbb{N}$, denotamos por e_j a sequência escalar $(0, 0, \ldots, 0, 1, 0, 0, \ldots)$, onde o número 1 aparece na j-ésima coordenada. A sequência $(0, 0, \ldots, 0, x, 0, 0, \ldots) \in E^{\mathbb{N}}$, em que x aparece na j-ésima coordenada, será denotada por $x \cdot e_j$.

Uma *classe de sequências* X é uma aplicação que a cada espaço espaço de Banach E corresponde um espaço de Banach $X(E) \subseteq E^{\mathbb{N}}$ tal que

(i) $c_{00}(E) \subseteq X(E) \overset{1}{\hookrightarrow} \ell_\infty(E)$ para cada espaço de Banach E.

(ii) $\|x \cdot e_j\|_{X(E)} = \|x\|_E$ para cada $j \in \mathbb{N}$.

Denotamos a classe de sequências $E \mapsto X(E)$ por $X(\cdot)$ ou, não havendo perigo de ambiguidade, denotamos simplesmente por X.

Dizemos que uma classe de sequências X é *finitamente determinada* se para cada $(x_j)_{j=1}^\infty \in E^{\mathbb{N}}$, tem-se $(x_j)_{j=1}^\infty \in X(E)$ se, e somente se, $\sup\limits_k \left\|(x_j)_{j=1}^k\right\|_{X(E)} < \infty$ e, neste caso,

$$\left\|(x_j)_{j=1}^\infty\right\|_{X(E)} = \sup_k \left\|(x_j)_{j=1}^k\right\|_{X(E)}.$$

Dizemos também que uma classe de sequências X é *finitamente dominada* se uma das seguintes condições abaixo é verdadeira:

(i) Existe uma classe de sequências finitamente determinada Y tal que, para todo espaço de Banach E, $X(E)$ é subespaço fechado de $Y(E)$ e, para toda sequência $(x_j)_{j=1}^\infty \in Y(E)$, $(x_j)_{j=1}^\infty \in X(E)$ se, e somente se, $\lim\limits_k \|(x_j)_{j=k}^\infty\|_{Y(E)} = 0$. Neste caso, escrevemos $X < Y$.

(ii) Existe uma classe de sequências finitamente determinada Y tal que, para todo espaço de Banach E, $X(E)$ é subespaço fechado de $Y(E)$ e, para toda sequência

$(x_j)_{j=1}^{\infty} \in Y(E)$, $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in X(E)$ se, e somente se, $\lim\limits_{k,l} \|(x_j)_{j=k}^{l}\|_{Y(E)} = 0$. Neste caso, escrevemos $X \prec Y$.

Acima, quando dizemos que $X(E)$ é subespaço fechado do espaço de Banach $Y(E)$, queremos dizer que $X(E)$ é subespaço vetorial de $Y(E)$ e $\|\cdot\|_{X(E)} = \|\cdot\|_{Y(E)}$ em $X(E)$.

É importante perceber que se $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in X(E)$ e X é finitamente dominada, então também temos $\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{X(E)} = \sup_k \|(x_j)_{j=1}^{k}\|_{X(E)}$.

Vejamos agora uma série de outras propriedades interessantes que uma classe de sequências pode possuir. Começamos com um comportamento associado a um tipo de operador induzido entre espaços de sequências.

Uma classe de sequências X é dita *linearmente estável* se para quaisquer espaços de Banach E e F e para qualquer $T \in \mathcal{L}(E;F)$, tem-se $(T(x_j))_{j=1}^{\infty} \in X(F)$ sempre que $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in X(E)$ e que o operador linear induzido

$$\widehat{T} : X(E) \longrightarrow X(F),\ \widehat{T}((x_j)_{j=1}^{\infty}) = (T(x_j))_{j=1}^{\infty}$$

é contínuo, com $\left\|\widehat{T}\right\| = \|T\|$. Isto nos diz que

$$\left\|(T(x_j))_{j=1}^{\infty}\right\|_{X(F)} \leq \|T\| \left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{X(E)},$$

sempre que $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in X(E)$ e $T \in \mathcal{L}(E;F)$.

Uma classe de sequências X é dita *esfericamente completa* se, para toda $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in X(E)$, as sentenças abaixo são verdadeiras:

(i) $(\lambda_j x_j)_{j=1}^{\infty} \in X(E)$ sempre que $(\lambda_j)_{j=1}^{\infty} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ e $|\lambda_j| = 1$ para todo j.

(ii) Sendo $(\lambda_j)_{j=1}^{\infty}$ como em (i), vale $\left\|(\lambda_j x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{X(E)} = \left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{X(E)}$.

Uma questão importante diz respeito a como uma classe de sequências se comporta observando subespaços ou cópias de um espaço de Banach. Em nosso caso, estamos interessados em sequências finitas.

Uma classe de sequências X é dita *finitamente injetiva* quando

$$\|(x_j)_{j=1}^{k}\|_{X(E)} \leq \|(i(x_j))_{j=1}^{k}\|_{X(F)}$$

sempre que $i : E \to F$ é uma injeção métrica, $k \in \mathbb{N}$ e $x_1, \ldots, x_k \in E$.

Observação 1.4.1 Aqui vale observar que se X é uma classe finitamente injetiva e linearmente estável, segue que $\|(x_j)_{j=1}^k\|_{X(E)} = \|(x_j)_{j=1}^k\|_{X(F)}$ sempre que E é um subespaço do espaço de Banach F, $k \in \mathbb{N}$ e $x_1, \ldots, x_k \in E$. Assim, X "respeita subespaços" para sequências finitas.

Vejamos alguns exemplos do que apresentamos.

Exemplo 1.4.2 a) Para $1 \leq p \leq \infty$, ℓ_p e ℓ_p^w são exemplos de classes de sequências linearmente estáveis, finitamente determinadas, esfericamente completas e finitamente injetivas.
b) Para $1 \leq p, q < \infty$, $\ell_p\langle\cdot\rangle$, ℓ_p^{mid} e $\ell_{q,p}^{\text{mid}}$ são classes de sequências linearmente estáveis, finitamente determinadas e esfericamente completas.
c) Para $1 \leq p < \infty$, ℓ_p^u, c_0 e ℓ_∞ são classes de sequências linearmente estáveis, esfericamente completas e finitamente injetivas. Tem-se também $\ell_p^u < \ell_p^w$ e $c_0 < \ell_\infty$.

Note que no exemplo acima utilizamos a notação mais simples de classe de sequências, ou seja, X ao invés de $X(\cdot)$. Para não sobrecarregar o texto de notações, fazemos isso daqui em diante, salvo quando houver perigo de confusão, como por exemplo entre a classe de sequências ℓ_p e o espaço de sequências escalares ℓ_p. Uma exceção importante: a classe de sequências $\ell_p\langle\cdot\rangle$ sempre será denotada dessa forma para evitar confundi-la com a classe de sequências ℓ_p.

A próxima proposição, um dos primeiros resultados de [10], descreve como a transformação de sequências vetoriais por operadores multilineares funciona no ambiente de classes de sequências. Para o caso linear, basta tomar $m = 1$.

Proposição 1.4.3 [10, Proposition 2.4] *Sejam $m \in \mathbb{N}$ e $X_1, \ldots, X_m$ e Y classes de sequências. As seguintes condições são equivalentes para um dado operador multilinear $T \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_m; F)$:*

(a) $\left(T(x_j^1, \ldots, x_j^m)\right)_{j=1}^\infty \in Y(F)$ *sempre que* $(x_j^i)_{j=1}^\infty \in X_i(E_i)$, *com* $i = 1, \ldots, m$.

(b) *O operador induzido* $\widetilde{T} : X_1(E_1) \times \cdots \times X_m(E_m) \longrightarrow Y(F)$, *dado por*

$$\widetilde{T}\left((x_j^1)_{j=1}^\infty, \ldots, (x_j^m)_{j=1}^\infty\right) = \left(T(x_j^1, \ldots, x_j^m)\right)_{j=1}^\infty,$$

é um operador bem definido, m-linear e contínuo.

As condições acima implicam na condição **(c)** *abaixo, e todas são equivalentes se as classes de sequências $X_1, \ldots, X_m$ e Y são finitamente determinadas.*

(c) *Existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$\left\| \left(T(x_j^1, \ldots, x_j^m)\right)_{j=1}^k \right\|_{Y(F)} \leq C \cdot \prod_{i=1}^m \left\| (x_j^i)_{j=1}^k \right\|_{X_i(E_i)}, \tag{1.5}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$ e todas sequências finitas $x_j^i \in E_i$, $j = 1, \ldots, k$ e $i = 1, \ldots, m$. Nesse caso,

$$\left\| \widetilde{T} \right\| = \inf \{C : (1.5) \text{ é válida}\}.$$

Um fato não comentado na demonstração da proposição anterior (em [10, Proposition 2.4]) é que todos os itens também são equivalentes se qualquer uma das classes de sequências $X_1, \ldots, X_m$ for finitamente dominada.

A proposição anterior proporciona a definição de classes abstratas de operadores que envolvem classes de sequências:

Definição 1.4.4 [10, Definition 3.1] Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $X_1, \ldots, X_n$ e Y classes de sequências. Um operador multilinear $T \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$ é $(X_1, \ldots, X_n; Y)$-*somante* se uma das condições equivalentes da Proposição 1.4.3 é verdadeira para T. Neste caso, escrevemos $T \in \mathcal{L}_{X_1,\ldots,X_n;Y}(E_1, \ldots, E_n; F)$ e definimos

$$\|T\|_{X_1,\ldots,X_n;Y} = \left\| \widetilde{T} \right\|_{\mathcal{L}(X_1(E_1),\ldots,X_n(E_n);Y(F))}.$$

No caso linear, isto é $n = 1$, escrevemos $\mathcal{L}_{X;Y}(E; F)$ e $\|\cdot\|_{X;Y}$.

Dadas $X_1, \ldots, X_n$ e Y classes de sequências, dizemos que $X_1(\mathbb{K}) \cdots X_n(\mathbb{K}) \overset{1}{\hookrightarrow} Y(\mathbb{K})$ se $(\lambda_j^1 \cdots \lambda_j^n)_{j=1}^\infty \in Y(\mathbb{K})$ e

$$\left\| (\lambda_j^1 \cdots \lambda_j^n)_{j=1}^\infty \right\|_{Y(\mathbb{K})} \leq \prod_{m=1}^n \left\| (\lambda_j^m)_{j=1}^\infty \right\|_{X_m(\mathbb{K})}$$

para todas $(\lambda_j^m)_{j=1}^\infty \in X_m(\mathbb{K})$ e $m = 1, \ldots, n$.

O próximo resultado, um dos resultados centrais do trabalho [10], mostra-nos quando a classe dos operadores multilineares $(X_1, \ldots, X_n; Y)$-somantes é um ideal de Banach de operadores n-lineares.

Teorema 1.4.5 [10, Theorem 3.6] *Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $X_1, \ldots, X_n$, Y classes de sequências linearmente estáveis tais que $X_1(\mathbb{K}) \cdots X_n(\mathbb{K}) \overset{1}{\hookrightarrow} Y(\mathbb{K})$. Então, $\left[\mathcal{L}_{X_1,\ldots,X_n;Y}, \|\cdot\|_{X_1,\ldots,X_n;Y}\right]$ é um ideal de Banach de operadores n-lineares.*

Exemplo 1.4.6 Os ideais de operadores (q, p)-somantes e de operadores Cohen fortemente p-somantes (ver definição dessas classes no final da Seção 1.1), na linguagem de classes de sequências, correspondem aos ideais de operadores (ℓ_p^w, ℓ_q)-somantes e dos operadores $(\ell_p, \ell_p \langle \cdot \rangle)$-somantes, respectivamente. Isto é

$$\mathcal{L}_{\ell_p^w, \ell_q} = \Pi_{q,p} \quad \text{e} \quad \mathcal{L}_{\ell_p, \ell_p\langle \cdot \rangle} = \mathcal{D}_p.$$

Recentemente em [12], Botelho e Campos desenvolvem uma teoria de dualidade para classes de sequências. Essa teoria é baseada na definição de classe dual de uma classe de sequências.

Definição 1.4.7 [12, Definition 2.3] O *dual* de uma classe de sequências X é uma regra que associa cada espaço de Banach E ao espaço de sequências vetoriais:

$$X^{\text{dual}}(E) = \left\{ (x_j)_{j=1}^{\infty} \in E^{\mathbb{N}} : \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j(x_j) \text{ converge }, \forall (\varphi_j)_{j=1}^{\infty} \in X(E') \right\}.$$

Se X é uma classe de sequências esfericamente completa, então a expressão

$$\left\| (x_j)_{j=1}^{\infty} \right\|_{X^{\text{dual}}(E)} := \sup_{(\varphi_j)_{j=1}^{\infty} \in B_{X(E')}} \sum_{j=1}^{\infty} |\varphi_j(x_j)| = \sup_{(\varphi_j)_{j=1}^{\infty} \in B_{X(E')}} \left| \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j(x_j) \right|,$$

define uma norma completa em $X^{\text{dual}}(E)$ e $X^{\text{dual}}(E) \overset{1}{\hookrightarrow} \ell_\infty(E)$ para todo espaço de Banach E. Com isso, se X é esfericamente completa, então X^{dual} é uma classe de sequências.

Exemplo 1.4.8 Se $1 \leq p \leq \infty$, então $(\ell_p^w)^{\text{dual}} = \ell_{p^*}\langle \cdot \rangle$ e $(\ell_p)^{\text{dual}} = \ell_{p^*}$ (ver [12, Examples 2.6 and 2.11]).

A próxima proposição nos fornece algumas propriedades da classe de sequências X^{dual}.

Proposição 1.4.9 [12, Proposition 2.5] *Seja X uma classe de sequências esfericamente completa. Então X^{dual} é uma classe de sequências finitamente determinada e esfericamente completa. Além disso, se X é linearmente estável, então X^{dual} também é linearmente estável.*

Para $1 \leq p < \infty$, são fatos conhecidos as dualidades $(\ell_p(E))' = \ell_{p^*}(E')$, $\ell_p \langle E \rangle' = \ell_{p^*}^w(E')$ e $(\ell_p^u(E))' = \ell_{p^*} \langle E' \rangle$. Então, sendo X uma classe de sequências, como determinar $(X(E))'$?

O teorema a seguir, um dos principais resultados mostrados em [12], oferece condições sobre a classe de sequências X para a caracterização do espaço $(X(E))'$, além de justificar a terminologia "dual" usada na Definição 1.4.7.

Teorema 1.4.10 [12, Theorem 2.10] *Sejam E um espaço de Banach e X uma classe de sequências linearmente estável, finitamente determinada (ou dominada) e esfericamente completa. Então,*
(a) *A aplicação*

$$J \colon X^{\mathrm{dual}}(E') \longrightarrow X(E)' \ , \ J\left((\varphi_j)_{j=1}^{\infty}\right)\left((x_j)_{j=1}^{\infty}\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j(x_j),$$

define um operador linear, injetivo e contínuo.

Suponha ainda que X seja finitamente injetiva. Então:
(b) *J é um isomorfismo isométrico de $X^{\mathrm{dual}}(E')$ sobre um subespaço complementado de $X(E)'$.*
(c) *J é um isomorfismo isométrico de $X^{\mathrm{dual}}(E')$ em $X(E)'$ se, e somente se, $c_{00}(E)$ é denso em $X(E)$.*

O teorema recupera algumas dualidades acima citadas e mais exemplos de aplicações desse resultado podem ser vistos em [12, Example 2.11].

1.5 Espaços quasi-normados

Nesta seção, apresentamos algumas definições e resultados que tratam de espaços quasi-normados. As principais referências são [25] e [26].

Uma *quasi-norma* num espaço vetorial E é uma aplicação $\|\cdot\| : E \longrightarrow \mathbb{R}$ que eventualmente difere de uma norma apenas no que diz respeito à desigualdade triangular. No caso de uma quasi-norma, tem-se

$$\|x + y\| \leq K\left(\|x\| + \|y\|\right) \text{ para todos } \ x, y \in E,$$

sendo $K \geq 1$ uma constante. Quando $K = 1$, segue que $\|\cdot\|$ é uma norma.

A constante K é conhecida como o *módulo de concavidade* da quasi-norma $\|\cdot\|$. Ao par $(E, \|\cdot\|)$ dá-se o nome de *espaço vetorial quasi-normado.* Se E é completo com respeito à topologia oriunda da quasi-norma, diz-se que E é um espaço *quasi-Banach.*

Se E e F são espaços quasi-Banach, denotamos por $\mathcal{L}(E; F)$ (a mesma notação do espaço dos operadores lineares e contínuos entre espaços de Banach) o espaço dos operadores $T : E \to F$ lineares e contínuos munido com a quasi-norma

$$\|T\| = \sup_{x \in B_E} \|T(x)\| \, .$$

Um caso especial e importante é o espaço dual $E' = \mathcal{L}(E;\mathbb{K})$, que é um espaço de Banach (veja [26, pág. 1102]).

Observação 1.5.1 É um fato que a caracterização a seguir também vale se os espaços envolvidos são quasi-normados: $T \in \mathcal{L}(E;F)$ se, e somente se, $\|T(x)\| \leq \|T\| \|x\|$ para todo $x \in E$.

Exemplos bem conhecidos de espaços quasi-Banach são os espaços ℓ_p e $L_p(0,1)$, quando $0 < p < 1$. Além disso, também é conhecido que, neste caso, $(\ell_p)' = \ell_\infty$ e $(L_p(0,1))' = \{0\}$ (dual trivial). O resultado que obtém o dual do espaço $L_p(0,1)$ aparece no trabalho [18], de M. Day, e que é, a menos do que sabemos, um dos primeiros artigos sobre espaços quasi-Banach.

Observação 1.5.2 É bem conhecido o fato de que se E é um espaço normado, F um espaço de Banach e $T : E \longrightarrow F$ um operador linear e contínuo, então existe uma única extensão linear e contínua $\widetilde{T} : \widehat{E} \longrightarrow F$ de T, onde $\widehat{E}$ é o completamento de E. Na demonstração desse resultado, usa-se o fato de que a norma $\|\cdot\|_E$ é contínua na sua topologia. No entanto, em [40, Section 6.1.9], Pietsch nos mostra que uma quasi-norma não é necessariamente contínua na sua topologia. Por isso, não tomamos extensões ao completamento desse tipo quando E é um espaço quasi-normado.

1.6 Resultados de topologia

Nesta seção, vamos apresentar algumas definições e resultados a respeito de conceitos topológicos que serão necessários ao longo do trabalho. As principais referências desta seção são [19] e [34].

Seja Ω um subconjunto do espaço vetorial E. Dizemos que Ω é *balanceado* se $\lambda\omega \in \Omega$ para qualquer escalar $|\lambda| \leq 1$ e qualquer $\omega \in \Omega$.

A *envoltória convexa* de Ω, denotada por $\mathrm{conv}(\Omega)$, é a interseção de todos subconjuntos convexos que contêm Ω enquanto que a *envoltória absolutamente convexa* de Ω, denotada por $\Gamma(\Omega)$, é definida como a interseção de todos subconjuntos convexos e balanceados que contêm Ω.

Assim, é imediato que $\mathrm{conv}(\Omega) \subseteq \Gamma(\Omega)$. O próximo resultado é uma adaptação imediata de [34, Theorem 4.2.11].

Teorema 1.6.1 *Se Ω é balanceado, então conv$(\Omega) = \Gamma(\Omega)$.*

Um *sistema dual de separação* $\langle E, F\rangle$ é definido por um par de espaços vetoriais E e F e uma forma bilinear $\langle \cdot, \cdot\rangle : E \times F \longrightarrow \mathbb{K}$ tal que para cada $0 \neq x \in E$ existe $y \in F$ de modo que $\langle x, y\rangle \neq 0$ e para cada $0 \neq y \in F$ existe $x \in E$ com $\langle x, y\rangle \neq 0$. A topologia em E da convergência pontual com respeito a F é denotada por $\sigma(E, F)$ e, por simetria, $\sigma(F, E)$ denota a topologia em F da convergência pontual com respeito a E. Para cada $A \subset E$, definimos o *polar absoluto* A^0 de A por

$$A^0 = \{y \in F; |\langle a, y\rangle| \leq 1 \text{ para todo } a \in A\}$$

e, por analogia, podemos definir o polar absoluto B^0 de B para cada $B \subset F$.

O próximo resultado é conhecido como Teorema Bipolar.

Teorema 1.6.2 [19, pág. 490] *Para cada $A \subset E$, tem-se $A^{00} = \overline{\Gamma(A)}^{\sigma(E,F)}$.*

Um exemplo importante de sistema dual de separação é $\langle E, E'\rangle$, em que E é um espaço normado com a forma bilinear $\langle x, \varphi\rangle = \varphi(x)$. A topologia $\sigma(E, E')$ é chamada a topologia fraca de E e $\sigma(E', E)$ é chamada a topologia fraca-estrela de E', como de costume. Note que em E' também existe a topologia fraca $\sigma(E', E'')$. Para mais detalhes sobre sistema dual de separação veja [19, Appendix A2].

Para finalizar esta seção, enunciamos um resultado de continuidade fraca-estrela para o operador adjunto, que segue da definição da topologia $\sigma(F', F)$ e dos fatos:

- Se Z é espaço topológico e $f : Z \to (E', \sigma(E', E))$ é uma função, então f é contínua se, e somente se, $J_E(x) \circ f : Z \to \mathbb{K}$ é contínua para todo $x \in E$.
- Seja $T \in \mathcal{L}(E; F)$. Para todo $x \in E$, vale $J_E(x) \circ T' = J_F(T(x))$.

Proposição 1.6.3 *Sejam E e F espaços de Banach e $T \in \mathcal{L}(E; F)$. Então o operador adjunto $T' : (F', \sigma(F', F)) \longrightarrow (E', \sigma(E', E))$ é contínuo.*

1.7 Resultados de medida e integração

Nesta seção, apresentamos algumas definições e resultados conhecidos da Teoria da Medida que serão necessários em algumas partes deste texto. Para um estudo mais detalhado, recomendamos ver [8] e [44].

Seja Σ uma σ-álgebra no conjunto Ω. Uma *medida positiva* é uma função $\mu : \Sigma \longrightarrow [0, \infty] \subset \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ que satisfaz as seguintes condições:

(a) $\mu(\emptyset) = 0$;

(b) se $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência de conjuntos disjuntos dois a dois de Σ, então

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

A medida positiva μ é dita *finita* se $\mu(\Omega) < \infty$.

Uma *medida complexa* é uma função $\mu : \Sigma \longrightarrow \mathbb{C}$ que satisfaz as condições (a) e (b) acima. Neste caso deve-se observar que a convergência da série no item (b) agora faz parte da exigência dessa definição (diferente das medidas positivas, onde a série pode convergir ou divergir para ∞).

Denotamos por (Ω, Σ, μ) o espaço de medida complexa quando μ é uma medida complexa em Ω. Quando μ é uma medida positiva, chamamos (Ω, Σ, μ) simplesmente de espaço de medida.

Seja (Ω, Σ, μ) um espaço de medida finita. Denotamos por $L_1(\mu)$ o espaço de Banach das classes de equivalências das funções $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{K}$ μ-integráveis; por $\mathcal{L}_\infty(\mu)$ o espaço de todas as funções mesuráveis $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{K}$ que são limitadas μ-quase sempre e por $L_\infty(\mu)$ o espaço de Banach das classes de equivalência das funções mensuráveis $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{K}$ que são limitadas μ-quase sempre.

O resultado abaixo é conhecido como Teorema de Maharam.

Teorema 1.7.1 ([19, Appendix B7]) *Cada medida finita μ admite uma aplicação linear, multiplicativa e positiva*

$$\rho : L_\infty(\mu) \longrightarrow \mathcal{L}_\infty(\mu)$$

que é a inversa a direita da aplicação quociente $\mathcal{L}_\infty(\mu) \longrightarrow L_\infty(\mu)$ e tal que $\rho([1]) = 1$. Essa aplicação ρ é chamada levantamento.

A *variação total* de uma medida complexa μ é uma função definida em Σ por

$$|\mu|(A) = \sup\left\{\sum_{i=1}^{n} |\mu(A_i)| : \{A_1, \ldots, A_n\} \text{ é uma partição de } A\right\},$$

em que a partição de A é uma coleção finita de conjuntos mensuráveis dois a dois disjuntos cuja união é A.

Note que se μ é uma medida positiva, então naturalmente $\mu = |\mu|$.

Teorema 1.7.2 ([8, Theorem 5.1.12]) *Seja* (Ω, Σ, μ) *um espaço de medida complexa. Então,*

(a) $(\Omega, \Sigma, |\mu|)$ *é um espaço de medida finita.*

(b) $|\mu(A)| \leq |\mu|(A)$ *para cada* $A \in \Sigma$.

Vamos agora definir um espaço cujos elementos são medidas complexas; o espaço $M_b(\Omega)$:

(a) Seja (Ω, Σ) um espaço mensurável. O conjunto $M_b(\Omega)$ de todas as medidas complexas é um espaço vetorial normado com a norma $\|\mu\| = |\mu|(\Omega)$.

(b) Sejam Ω um espaço Hausdorff localmente compacto e Σ a σ-álgebra de Borel em Ω. Nesse caso, $M_b(\Omega)$ denota o espaço das medidas regulares complexas definidas em Σ e nos referimos a $M_b(\Omega)$ como o espaço das medidas de Borel regular complexas. $M_b(\Omega)$ é um espaço de Banach com a norma $\|\mu\| = |\mu|(\Omega)$.

O próximo resultado é uma consequência do Teorema de Radon-Nikodym, embora muitos autores o citem como o Teorema de Radon-Nikodym.

Teorema 1.7.3 ([8], Theorem 5.3.5.) *Sejam* (Ω, Σ) *um espaço mensurável e* $\mu \in M_b(\Omega)$. *Então, existe uma função* $|\mu|$*-integrável* h *tal que* $|h(x)| = 1$ *para todo* $x \in \Omega$ *e*

$$\int_\Omega f \; d\mu = \int_\Omega fh \; d|\mu| \tag{1.6}$$

para todo $f \in L_1(|\mu|)$.

Na literatura, é comum encontrar a segunda afirmação do teorema acima escrita na forma

$$d\mu = h \; d|\mu|. \tag{1.7}$$

A igualdade em (1.7) simplesmente significa que (1.6) é verdade para cada função $f \in L_1(|\mu|)$. Pela semelhança com a representação de números complexos, a equação (1.7) é conhecida como a *representação polar* (ou decomposição polar) de μ.

Seja Ω um espaço topológico compacto. Denotamos por $C(\Omega)$ o espaço de Banach das funções contínuas $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{K}$ munido da norma

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in \Omega} |f(x)|\,.$$

O próximo resultado é conhecido como Teorema de representação de Riesz.

Teorema 1.7.4 ([8, Theorem 7.2.7]) *Seja Ω um espaço Hausdorff compacto. Então, $M_b(\Omega) \overset{1}{=} C(\Omega)'$. Esse isomorfismo isométrico nos diz que para cada $L \in C(\Omega)'$, existe uma única medida $\mu \in M_b(\Omega)$ tal que*

$$L(f) = \int_\Omega f \; d\mu$$

para cada $f \in C(\Omega)$. Além disso, $\|L\| = \|\mu\|$.

Seja Ω um espaço Hausdorff compacto. Denotamos por $\mathrm{Prob}(\Omega)$ o conjunto formado por todas as medidas de probabilidade de Borel regulares em Ω. O conjunto $\mathrm{Prob}(\Omega)$ (que é um subconjunto de $M_b(\Omega)$) é convexo e compacto na topologia fraca-estrela. Para mais detalhes sobre esse fato, veja [36, pág. 206].

Denotamos por $\mathrm{D}(\Omega)$ o conjunto formado por todas as medidas de Dirac no espaço Hausdorff compacto Ω com a σ-álgebra de Borel. Como toda medida de Dirac é uma medida de probabilidade de Borel regular (veja [3, pág. 443]), temos

$$\mathrm{D}(\Omega) \subset \mathrm{Prob}(\Omega).$$

Capítulo 2

Quasi-normas tensoriais e classes de operadores somantes

Muitas das normas definidas no produto tensorial envolvem espaços de sequências vetoriais, como por exemplo as normas de Chevet-Saphar. Neste capítulo, generalizamos a construção de normas dessa natureza e alguns dos resultados associados conhecidos. Para isso, fazemos uso do conceito de quasi-norma e classes de sequências. Obtemos também uma série de novos exemplos/resultados.

Em nossa primeira seção, introduzimos algumas propriedades, resultados ligados a um tipo especial de operador somante e duas classes de sequências. Isso será usado para compor a teoria e exemplos do capítulo.

Na segunda, nosso objetivo é, num sentido que ficará claro mais adiante, unificar a construção de quasi-normas que envolvem espaços de sequências através da definição de quasi-normas abstratas envolvendo classes de sequências. Com essa ferramenta abstrata, além de conseguirmos recuperar casos existentes, também é possível gerar novas quasi-normas.

Na terceira seção, apresentamos caracterizações para operadores $(X; Y^{\text{dual}})$-somantes e, com elas, estudamos o comportamento local desses operadores, resultados de inclusão e de maximalidade de ideais, no sentido apresentado em [20, Cap. 6].

Na quarta seção, caracterizamos o espaço dual do produto tensorial (X, Y)-quasi-normado dos espaços de Banach E e F. Fazemos isso identificando esse espaço dual tanto com subespaços do espaço dos operadores lineares e contínuos quanto com um subespaço do espaço das formas bilineares contínuas.

2.1 Definições, resultados e duas classes de sequências

Vamos introduzir algumas propriedades no contexto de classes de sequências e operadores somantes. A primeira delas faz referência a como uma classe de sequências pode "respeitar" subsequências, no sentido que explicamos agora. Este conceito é uma adaptação para o contexto de classes de sequências de [13, Definition 3.1].

Sendo E um espaço vetorial e $x = (x_j)_{j=1}^{\infty} \in E^{\mathbb{N}}$, tomamos $x^0 := (x_j^0)_{j=1}^{\infty}$, onde x_j^0 é a j-ésima coordenada não nula de x se esse termo existir, e $x_j^0 = 0$ caso contrário.

Definição 2.1.1 Dizemos que uma classe de sequências X é *norma monótona* se para todo espaço de Banach E e toda sequência $x = (x_j)_{j=1}^{\infty} \in X(E)$, tem-se

(i) $x \in X(E) \Leftrightarrow x^0 \in X(E)$ e, neste caso, $\|x^0\|_{X(E)} = \|x\|_{X(E)}$.

(ii) Toda subsequência $(x_{k_j})_{j=1}^{\infty}$ de x pertence a $X(E)$ e $\left\|(x_{k_j})_{j=1}^{\infty}\right\|_{X(E)} \leq \|x\|_{X(E)}$.

A próxima propriedade define um conceito mais abrangente que o de uma classe de sequências ser esfericamente completa.

Definição 2.1.2 Uma classe de sequências X é dita ser ℓ_∞*-completa* se para qualquer espaço de Banach E e todos $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in X(E)$ e $(\lambda_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_\infty$, tem-se $(\lambda_j x_j)_{j=1}^{\infty} \in X(E)$ e

$$\left\|(\lambda_j x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{X(E)} \leq \left\|(\lambda_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{\infty} \cdot \left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{X(E)}.$$

Para $1 \leq p, q < \infty$, as classes de sequências $\ell_p, \ell_p^w, \ell_p^u$, $\ell_p\langle\cdot\rangle$, c_0, ℓ_∞, ℓ_p^{mid} e $\ell_{q,p}^{\mathrm{mid}}$ são exemplos de classes norma monótonas e ℓ_∞-completas.

Em conexão com a teoria de classes de sequências e operadores, o corolário a seguir estabelece uma espécie de versão da Proposição 1.4.3 para um caso particular envolvendo o dual de uma classe de sequências. Este resultado será muito útil, por exemplo, na Seção 2.3.

Corolário 2.1.3 (da Proposição 1.4.3) *Sejam X e Y classes de sequências, em que Y é esfericamente completa. As seguintes sentenças são equivalentes para um dado operador linear $T \in \mathcal{L}(E;F)$:*

(a) $T \in \mathcal{L}_{X;Y^{\text{dual}}}(E;F)$

(b) *Existe uma constante* $C > 0$ *tal que* $\left\|(T(x_j))_{j=1}^{\infty}\right\|_{Y^{\text{dual}}(F)} \leq C \cdot \left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{X(E)}$ *para todo* $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in X(E)$.

(c) *Existe uma constante* $C > 0$ *tal que*

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\psi_j(T(x_j))| \leq C \cdot \left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{X(E)} \cdot \left\|(\psi_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{Y(F')}$$

para todos $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in X(E)$ *e* $(\psi_j)_{j=1}^{\infty} \in Y(F')$.

Mais ainda, os itens acima implicam nos itens abaixo e tem-se (e) $\Rightarrow$ (b) *se* X *for finitamente determinada e* (d) $\Rightarrow$ (c) *se* X *e* Y *forem finitamente determinadas (onde todos serão equivalentes).*

(d) *Existe uma constante* $C > 0$ *tal que*

$$\sum_{j=1}^{n} |\psi_j(T(x_j))| \leq C \cdot \left\|(x_j)_{j=1}^{n}\right\|_{X(E)} \cdot \left\|(\psi_j)_{j=1}^{n}\right\|_{Y(F')}$$

para todos $n \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_n \in E$ *e* $\psi_1, \ldots, \psi_n \in F'$.

(e) *Existe uma constante* $C > 0$ *tal que* $\left\|(T(x_j))_{j=1}^{n}\right\|_{Y^{\text{dual}}(F)} \leq C \cdot \left\|(x_j)_{j=1}^{n}\right\|_{X(E)}$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *e* $x_1, \ldots, x_n \in E$.

Neste caso, $\|T\|_{X,Y^{\text{dual}}}$ *é o ínfimo das constantes que satisfazem as desigualdades acima.*

Demonstração. Com efeito, como Y é esfericamente completa, segue que Y^{dual} é finitamente determinada. Assim, a equivalência dos itens (a), (b) e (e) segue imediatamente da Proposição 1.4.3. Não é difícil mostrar a equivalência dos itens (b), (c) e (d), uma vez que segue da manipulação da expressão da norma em Y^{dual} e do fato que X e Y são finitamente determinadas. ■

Da mesma forma que na Proposição 1.4.3, o corolário acima também vale no caso em que qualquer uma das classes X e Y ou até ambas sejam finitamente dominadas.

2.1.1 As classes de sequências X_p^{mid} e X^u

Nesta subseção, definimos e estudamos duas novas classes de sequências definidas a partir de uma dada classe de sequências X. A primeira é inspirada no conceito de sequências mid p-somáveis e a segunda no conceito de sequências incondicionalmente p-somáveis.

Para a primeira classe de sequências, vamos omitir boa parte das demonstrações dos resultados, uma vez que elas seguem um caminho análogo às demonstrações feitas para a classe de sequências ℓ_p^{mid}, que podem ser encontradas em [11]. Serão feitas as devidas referências a essas demonstrações quando necessário. Já para a segunda classe, inspirada no espaço $\ell_p^u(E)$, as demonstrações eventualmente omitidas são imediatas.

No que segue, sendo X e Y classes de sequências, vamos usar a notação $X \overset{1}{\hookrightarrow} Y$ para indicar que $X(E) \overset{1}{\hookrightarrow} Y(E)$ para todo espaço de Banach E.

Seja X uma classe de sequências tal que $X \overset{1}{\hookrightarrow} \ell_p^w$. Disso e graças à identificação entre $\ell_p^w(E')$ e $\mathcal{L}(E;\ell_p)$ (veja a Seção 1.1), para toda $(x_j)_{j=1}^\infty \in E^{\mathbb{N}}$, temos

$$(\varphi_n(x_j))_{n=1}^\infty \in \ell_p, \forall j \in \mathbb{N} \text{ sempre que } (\varphi_n)_{n=1}^\infty \in X(E').$$

Levando-se agora os dois índices acima em conta, podemos estabelecer a seguinte definição:

Definição 2.1.4 Sejam $1 \leq p < \infty$, X uma classe de sequências tal que $X \overset{1}{\hookrightarrow} \ell_p^w$ e E um espaço de Banach. Uma sequência $(x_j)_{j=1}^\infty$ em E é dita ser *mid* (X,p)*-somável* quando

$$\left((\varphi_n(x_j))_{n=1}^\infty\right)_{j=1}^\infty \in \ell_p(\ell_p)$$

sempre que $(\varphi_n)_{n=1}^\infty \in X(E')$. Simbolicamente,

$$X_p^{\mathrm{mid}}(E) := \left\{ (x_j)_{j=1}^\infty \in E^{\mathbb{N}} : \sum_{j=1}^\infty \sum_{n=1}^\infty |\varphi_n(x_j)|^p < \infty \text{ sempre que } (\varphi_n)_{n=1}^\infty \in X(E') \right\}.$$

Não é difícil mostrar que $X_p^{\mathrm{mid}}(E)$ é um espaço vetorial com as operações usuais de sequências e, como no caso do espaço $\ell_p^{\mathrm{mid}}(E)$, os somatórios nos índices j e n na definição de $X_p^{\mathrm{mid}}(E)$ também podem ser permutados.

Seguindo a mesma linha da demonstração em [11, Proposition 1.4], temos a

Proposição 2.1.5 *A função* $\|\cdot\|_{X_p^{\mathrm{mid}}(E)} : X_p^{\mathrm{mid}}(E) \longrightarrow [0,\infty)$ *dada por*

$$\left\|(x_j)_{j=1}^\infty\right\|_{X_p^{\mathrm{mid}}(E)} := \sup_{(\varphi_n)_{n=1}^\infty \in B_{X(E')}} \left(\sum_{j=1}^\infty \sum_{n=1}^\infty |\varphi_n(x_j)|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

define uma norma completa em $X_p^{\mathrm{mid}}(E)$ *e ainda* $X_p^{\mathrm{mid}}(E) \overset{1}{\hookrightarrow} \ell_p^w(E)$ *para todo espaço de Banach* E.

Como $X \overset{1}{\hookrightarrow} \ell_p^w$, então $\ell_p^{\mathrm{mid}}(E) \overset{1}{\hookrightarrow} X_p^{\mathrm{mid}}(E)$ qualquer que seja o espaço de Banach E. De fato, se $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p^{\mathrm{mid}}(E)$, temos

$$\begin{aligned}\left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{X_p^{\mathrm{mid}}(E)} &= \sup_{(\varphi_n)_{n=1}^{\infty} \in B_{X(E')}} \left(\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi_n(x_j)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \sup_{(\varphi_n)_{n=1}^{\infty} \in B_{\ell_p^w(E')}} \left(\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi_n(x_j)|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{\ell_p^{\mathrm{mid}}(E)}.\end{aligned}$$

Daí, segue que

$$c_{00}(E) \subseteq \ell_p^{\mathrm{mid}}(E) \overset{1}{\hookrightarrow} X_p^{\mathrm{mid}}(E) \overset{1}{\hookrightarrow} \ell_p^w(E) \overset{1}{\hookrightarrow} \ell_\infty(E)$$

e

$$\|x\| = \|x \cdot e_j\|_{\ell_p^w(E)} \leq \|x \cdot e_j\|_{X_p^{\mathrm{mid}}(E)} \leq \|x \cdot e_j\|_{\ell_p^{\mathrm{mid}}(E)} = \|x\|,$$

o que nos diz que X_p^{mid} é uma classe de sequências. Vejamos agora que X_p^{mid} é finitamente determinada. Para toda sequência $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in E^{\mathbb{N}}$, temos

$$\begin{aligned}\sup_k \left\|(x_j)_{j=1}^{k}\right\|_{X_p^{\mathrm{mid}}(E)} &= \sup_k \left(\sup_{(\varphi_n)_{n=1}^{\infty} \in B_{X(E')}} \left(\sum_{j=1}^{k}\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi_n(x_j)|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right) \\ &= \sup_{(\varphi_n)_{n=1}^{\infty} \in B_{X(E')}} \left(\sup_k \left(\sum_{j=1}^{k}\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi_n(x_j)|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right) \\ &= \sup_{(\varphi_n)_{n=1}^{\infty} \in B_{X(E')}} \left(\lim_{k\to\infty} \left(\sum_{j=1}^{k}\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi_n(x_j)|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right) \\ &= \sup_{(\varphi_n)_{n=1}^{\infty} \in B_{X(E')}} \left(\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi_n(x_j)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{X_p^{\mathrm{mid}}(E)}.\end{aligned}$$

Essa igualdade implica que a classe X_p^{mid} é finitamente determinada mesmo que X não o seja.

Além disso, a construção da norma nos garante de imediato que X_p^{mid} é esfericamente completa e ℓ_∞-completa.

Se X é linearmente estável, um cálculo análogo ao feito em [11, Proposition 1.10] nos diz que X_p^{mid} é também linearmente estável. Não é difícil mostrar que se X é norma monótona, então X_p^{mid} também é norma monótona.

Por tudo que foi exposto acima, segue que

Proposição 2.1.6 *Sejam $1 \leq p < \infty$ e X uma classe de sequências tal que $X \overset{1}{\hookrightarrow} \ell_p^w$. Então:*

a) *X_p^{mid} é uma classe de sequências finitamente determinada, esfericamente completa e ℓ_∞-completa.*

b) *Se X é linearmente estável, então X_p^{mid} também é linearmente estável.*

c) *Se X é norma monótona, então X_p^{mid} também é norma monótona.*

Vejamos alguns exemplos de classes que provêm dos resultados anteriores além de alguns fatos dignos de nota.

Exemplo 2.1.7 a) Para qualquer $1 \leq p < \infty$, sabemos que $\ell_p\langle\cdot\rangle$, ℓ_p, ℓ_p^{mid} e ℓ_p^w são classes de sequências linearmente estáveis e norma monótonas. Logo $(\ell_p\langle\cdot\rangle)_p^{\mathrm{mid}}$, $(\ell_p)_p^{\mathrm{mid}}$ e $(\ell_p^{\mathrm{mid}})_p^{\mathrm{mid}}$ são classes de sequências finitamente determinadas, esfericamente completas, ℓ_∞-completas, linearmente estáveis e norma monótonas. Note que $(\ell_p^w)_p^{\mathrm{mid}} = \ell_p^{\mathrm{mid}}$.

b) Para $1 \leq p < \infty$, a classe de sequência $(\ell_p)_p^{\mathrm{mid}}$ é finitamente injetiva. De fato, seja $i : E \to F$ uma injeção métrica e $x_1, \ldots, x_k \in E$ com $k \in \mathbb{N}$. Segue que

$$\begin{aligned}
\left\|(x_j)_{j=1}^k\right\|_{(\ell_p)_p^{\mathrm{mid}}(E)} &= \sup_{(\varphi_n)_{n=1}^\infty \in B_{\ell_p(E')}} \left(\sum_{j=1}^k \sum_{n=1}^\infty |\varphi_n(x_j)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \sup_{(\varphi_n)_{n=1}^\infty \in B_{\ell_p(E')}} \left(\sum_{j=1}^k \sum_{n=1}^\infty \left|\varphi_n \circ i^{-1}((i(x_j)))\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \sup_{(\psi_n)_{n=1}^\infty \in B_{\ell_p((i(E))')}} \left(\sum_{j=1}^k \sum_{n=1}^\infty |\psi_n(i(x_j))|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \sup_{(\widetilde{\psi}_n)_{n=1}^\infty \in B_{\ell_p(F')}} \left(\sum_{j=1}^k \sum_{n=1}^\infty \left|\widetilde{\psi}_n(i(x_j))\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \sup_{(\phi_n)_{n=1}^\infty \in B_{\ell_p(F')}} \left(\sum_{j=1}^k \sum_{n=1}^\infty |\phi_n(i(x_j))|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left\|(i(x_j))_{j=1}^k\right\|_{(\ell_p)_p^{\mathrm{mid}}(F)},
\end{aligned}$$

onde $\widetilde{\psi}_n \in F'$ é uma extensão de Hahn-Banach de $\psi_n \in i(E)'$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Note que estamos usando o fato: se E é subespaço de F e se $(\varphi_n)_{n=1}^\infty \in B_{\ell_p(E')}$, então qualquer sequência $(\widetilde{\varphi}_n)_{n=1}^\infty$, construída com extensões de Hahn-Banach de cada funcional $\varphi_n \in E'$, pertence a $B_{\ell_p(F')}$.

c) Para $1 \leq p < \infty$, a classe de sequência $(\ell_p\langle\cdot\rangle)_p^{\mathrm{mid}}$ é finitamente injetiva. Sejam $i : E \to F$ uma injeção métrica, $k \in \mathbb{N}$ e $x_1, \ldots, x_k \in E$. Vamos considerar E como um subespaço de F por meio da identificação $E \overset{1}{=} i(E)$. Assim, se $(\varphi_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_p\langle E'\rangle$, sendo $\ell_p\langle E'\rangle \overset{1}{=} (\ell_{p^*}^u(E))'$, segue que $(\varphi_n)_{n=1}^{\infty} = \varphi \in (\ell_{p^*}^u(E))'$. Como $\ell_{p^*}^u(E)$ é um subespaço de $\ell_{p^*}^u(F)$ (com igualdade de norma), então pelo Teorema de Hahn-Banach existe $\widetilde{\varphi} = (\widetilde{\varphi}_n)_{n=1}^{\infty} \in (\ell_{p^*}^u(F))' \overset{1}{=} \ell_p\langle F'\rangle$ tal que $\widetilde{\varphi}((x_j)_{j=1}^{\infty}) = \varphi((x_j)_{j=1}^{\infty})$ para todo $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_{p^*}^u(E)$ e

$$\|(\varphi_n)_{n=1}^{\infty}\|_{\ell_p\langle E'\rangle} = \|\varphi\|_{(\ell_{p^*}^u(E))'} = \|\widetilde{\varphi}\|_{(\ell_{p^*}^u(F))'} = \|(\widetilde{\varphi}_n)_{n=1}^{\infty}\|_{\ell_p\langle F'\rangle}.$$

Do fato de que $\ell_{p^*}^u$ é uma classe de sequências, segue que $x \cdot e_j \in \ell_{p^*}^u(E)$ para todo $j \in \mathbb{N}$ e todo $x \in E$. Logo, temos $\widetilde{\varphi}(x \cdot e_j) = \varphi(x \cdot e_j)$ o que implica em $\widetilde{\varphi}_j(x) = \varphi_j(x)$ para todo $x \in E$ e todo $j \in \mathbb{N}$. Dessa forma,

$$\begin{aligned}
\left\|(x_j)_{j=1}^{k}\right\|_{(\ell_p\langle\cdot\rangle)_p^{\text{mid}}(E)} &= \sup_{(\varphi_n)_{n=1}^{\infty} \in B_{\ell_p\langle E'\rangle}} \left(\sum_{j=1}^{k}\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi_n(x_j)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \sup_{(\widetilde{\varphi}_n)_{n=1}^{\infty} \in B_{\ell_p\langle F'\rangle}} \left(\sum_{j=1}^{k}\sum_{n=1}^{\infty} |\widetilde{\varphi}_n(x_j)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \sup_{(\psi_n)_{n=1}^{\infty} \in B_{\ell_p\langle F'\rangle}} \left(\sum_{j=1}^{k}\sum_{n=1}^{\infty} |\psi_n(x_j)|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left\|(x_j)_{j=1}^{k}\right\|_{(\ell_p\langle\cdot\rangle)_p^{\text{mid}}(F)}.
\end{aligned}$$

Nosso objetivo agora é definir uma nova classe de sequências inspirada no conceito de sequências incondicionalmente p-somáveis.

Se E é um espaço de Banach e X uma classe de sequências, definimos

$$X^u(E) := \left\{(x_j)_{j=1}^{\infty} \in X(E);\, \lim_{n\to\infty} \left\|(x_j)_{j=n}^{\infty}\right\|_{X(E)} = 0\right\}.$$

A proposição a seguir nos garante uma condição suficiente para que $X^u(E)$ seja um subespaço fechado de $X(E)$, e portanto um espaço de Banach com a norma herdada de X.

Proposição 2.1.8 *Se X é uma classe de sequências norma monótona, então $X^u(E)$ é um subespaço fechado de $X(E)$ para todo espaço de Banach E.*

Demonstração. Sejam $(x_j)_{j=1}^{\infty}, (y_j)_{j=1}^{\infty} \in X^u(E)$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. Note que

$$0 \leq \left\|(x_j)_{j=n}^{\infty} + \lambda (y_j)_{j=n}^{\infty}\right\|_{X(E)} \leq \left\|(x_j)_{j=n}^{\infty}\right\|_{X(E)} + |\lambda| \left\|(y_j)_{j=n}^{\infty}\right\|_{X(E)}$$

e assim temos

$$\lim_{n\to\infty} \left\|(x_j)_{j=n}^{\infty} + \lambda (y_j)_{j=n}^{\infty}\right\|_{X(E)} = 0,$$

o que nos diz que $X^u(E)$ é um subespaço de $X(E)$.

Seja $(x^{(k)})_{k=1}^{\infty}$ um sequência em $X^u(E)$. Para cada $k \in \mathbb{N}$, por definição, segue que $\lim_{n\to\infty} \left\| (x_j^{(k)})_{j=n}^{\infty} \right\|_{X(E)} = 0$, ou seja, dado $\eta > 0$, existe $n_0^{(k)} \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq n_0^{(k)} \quad \Rightarrow \quad \left\| (x_j^{(k)})_{j=n}^{\infty} \right\|_{X(E)} < \frac{\eta}{2}.$$

Suponhamos que $x^{(k)} \to x = (x_j)_{j=1}^{\infty}$ em $X(E)$. Assim, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$k \geq k_0 \quad \Rightarrow \quad \left\| (x_j^{(k)})_{j=1}^{\infty} - (x_j)_{j=1}^{\infty} \right\|_{X(E)} < \frac{\eta}{2},$$

e como X é norma monótona, segue que

$$k \geq k_0 \quad \Rightarrow \quad \left\| (x_j^{(k)})_{j=n}^{\infty} - (x_j)_{j=n}^{\infty} \right\|_{X(E)} < \frac{\eta}{2}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Dessa forma, para todo $n \geq n_0^{(k_0)}$, temos

$$\left\| (x_j)_{j=n}^{\infty} \right\|_{X(E)} \leq \left\| (x_j)_{j=n}^{\infty} - (x_j^{(k_0)})_{j=n}^{\infty} \right\|_{X(E)} + \left\| (x_j^{(k_0)})_{j=n}^{\infty} \right\|_{X(E)} < \frac{\eta}{2} + \frac{\eta}{2} = \eta,$$

ou seja, $x = (x_j)_{j=1}^{\infty} \in X^u(E)$. Portanto, $X^u(E)$ é fechado. ■

A proposição acima fornece a completude de $X^u(E)$ para todo espaço de Banach E. Esse fato consiste a parte "difícil" de se mostrar que X^u, com a norma herdada de X, é uma classe de sequências. Mais que isso, temos a seguinte proposição:

Proposição 2.1.9 *Seja X uma classe de sequência norma monótona. Então, X^u também é uma classe de sequências norma monótona. Mais ainda,*

(a) *Se X é finitamente determinada, então X^u é finitamente dominada.*

(b) *Se X é linearmente estável, então X^u é linearmente estável.*

(c) *Se X é esfericamente completa, então X^u é esfericamente completa.*

(d) *Se X é finitamente injetiva, então X^u é finitamente injetiva.*

(e) *Se X é ℓ_∞-completa, então X^u é ℓ_∞-completa.*

A demonstração dessa proposição será omitida, uma vez que é consequência imediata das definições e/ou do fato de que X^u herda a norma de X. Vejamos alguns exemplos de classes de sequências que provêm do resultado anterior.

Exemplo 2.1.10 Para qualquer $1 \leq p < \infty$, tem-se que $(\ell_p\langle\cdot\rangle)^u$ e $(\ell_p^{\text{mid}})^u$ são classes de sequências norma monótonas. Note que $(\ell_p^w)^u = \ell_p^u$, $(\ell_p)^u = \ell_p$ e $(\ell_\infty)^u = c_0 = (c_0)^u$.

2.2 (X, Y)-quasi-normas tensoriais

Nesta seção, introduzimos e estudamos um conceito abstrato de quasi-normas tensoriais. Casos particulares onde essas são normas tensoriais serão apresentadas em uma subseção adiante.

Quando escrevermos $u = \sum_{j=1}^{n} x_j \otimes y_j \in E \otimes F$, isso significará que $\sum_{j=1}^{n} x_j \otimes y_j$ é uma representação do tensor $u \in E \otimes F$.

Definição 2.2.1 Sejam E e F espaços de Banach. Uma quasi-norma α em $E \otimes F$ é dita *quasi-razoável* se

$$\varepsilon(u) \leq \alpha(u) \quad \text{e} \quad \alpha(x \otimes y) \leq \|x\| \|y\|$$

para qualquer $u \in E \otimes F$ e todos $x \in E$ e $y \in F$.

Sejam E e F espaços de Banach e X e Y classes de sequências. Consideremos a função $\alpha_{X,Y} : E \otimes F \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\alpha_{X,Y}(u) = \inf \left\{ \left\| (x_j)_{j=1}^{n} \right\|_{X(E)} \left\| (y_j)_{j=1}^{n} \right\|_{Y(F)} ; u = \sum_{j=1}^{n} x_j \otimes y_j \right\},$$

em que o ínfimo é tomando sobre todas as representações de $u \in E \otimes F$ (o ínfimo acima, é claro, está bem definido).

Nosso objetivo agora é estabelecer condições para que a função $\alpha_{X,Y}$ defina uma quasi-norma quasi-razoável em $E \otimes F$. Neste caso, chamamos $\alpha_{X,Y}$ de (X, Y)-*quasi-norma* no produto tensorial $E \otimes F$. Quando $\alpha_{X,Y}$ for uma norma, vamos chamá-la de (X, Y)-*norma* no produto tensorial $E \otimes F$.

Denotaremos por $E \otimes_{\alpha_{X,Y}} F$ o produto tensorial $E \otimes F$ munido da (X, Y)-quasi-norma $\alpha_{X,Y}$ e o seu completamento será denotado por $E \widehat{\otimes}_{\alpha_{X,Y}} F$.

O resultado a seguir nos diz em quais condições $\alpha_{X,Y}$ define uma quasi-norma quasi-razoável em $E \otimes F$.

Proposição 2.2.2 *Sejam E e F espaços de Banach e X e Y classes de sequências. Se X e Y são norma monótonas e $\varepsilon(u) \leq \alpha_{X,Y}(u)$ para qualquer tensor $u \in E \otimes F$, então $\alpha_{X,Y}$ é uma quasi-norma quasi-razoável em $E \otimes F$.*

Demonstração. A definição de classes de sequências garante de imediato que a aplicação $\alpha_{X,Y}$ satisfaz a propriedade $\alpha_{X,Y}(x \otimes y) \leq \|x\| \|y\|$ para todos $x \in E$ e $y \in F$.

Resta-nos mostrar então que $\alpha_{X,Y}$ é de fato uma quasi-norma. É claro que $\alpha_{X,Y}(u) \geq 0$ para qualquer tensor $u \in E \otimes F$ e que se $u = 0$, então $\alpha_{X,Y}(u) = 0$. Por outro lado, se $\alpha_{X,Y}(u) = 0$, temos $u = 0$, uma vez que $\varepsilon(u) \leq \alpha_{X,Y}(u)$ para qualquer tensor $u \in E \otimes F$.

Mostramos agora que $\alpha_{X,Y}(\lambda u) = |\lambda| \, \alpha_{X,Y}(u)$. Quando $\lambda = 0$, não há o que demonstrar. Suponhamos que $\lambda \neq 0$. Se $\sum_{j=1}^{n} x_j \otimes y_j$ é uma representação de u, então $\lambda u = \sum_{j=1}^{n} (\lambda x_j) \otimes y_j$ e daí

$$\alpha_{X,Y}(\lambda u) \leq \left\| (\lambda x_j)_{j=1}^{n} \right\|_{X(E)} \left\| (y_j)_{j=1}^{n} \right\|_{Y(F)} = |\lambda| \left\| (x_j)_{j=1}^{n} \right\|_{X(E)} \left\| (y_j)_{j=1}^{n} \right\|_{Y(F)}.$$

Como essa desigualdade é válida para toda representação de u, segue que $\alpha_{X,Y}(\lambda u) \leq |\lambda| \alpha_{X,Y}(u)$. De modo análogo, tem-se $\alpha_{X,Y}(u) = \alpha_{X,Y}(\lambda^{-1} \lambda u) \leq |\lambda|^{-1} \alpha_{X,Y}(\lambda u)$, ou seja, $|\lambda| \alpha_{X,Y}(u) \leq \alpha_{X,Y}(\lambda u)$. Logo, $\alpha_{X,Y}(\lambda u) = |\lambda| \alpha_{X,Y}(u)$. Resta apenas mostrar que existe $K \geq 1$ tal que

$$\alpha_{X,Y}(u_1 + u_2) \leq K \left(\alpha_{X,Y}(u_1) + \alpha_{X,Y}(u_2) \right)$$

para quaisquer $u_1, u_2 \in E \otimes F$. Quando $u_1 = 0$ ou $u_2 = 0$ a demonstração é imediata. Suponhamos que $u_1, u_2 \neq 0$. Dado $\eta > 0$, podemos escolher representações $u_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \otimes y_{ij}$ tais que

$$\left\| (x_{ij})_{j=1}^{n} \right\|_{X(E)} \leq \alpha_{X,Y}(u_i) + \eta \quad \text{e} \quad \left\| (y_{ij})_{j=1}^{n} \right\|_{Y(F)} \leq 1,$$

para $i = 1, 2$. Assim, $\sum_{j=1}^{n} x_{1j} \otimes y_{1j} + \sum_{j=1}^{n} x_{2j} \otimes y_{2j}$ é uma representação de $u_1 + u_2$. Denotando as sequências

$$(x_{11}, \ldots, x_{1n}, x_{21}, \ldots, x_{2n}, 0, 0, \ldots) \quad \text{e} \quad (y_{11}, \ldots, y_{1n}, y_{21}, \ldots, y_{2n}, 0, 0, \ldots)$$

por $(x_{ij})_{ij}$ e $(y_{ij})_{ij}$, respectivamente, como X e Y são classes de sequências norma monótonas, temos

$$\begin{aligned}
\alpha_{X,Y}(u_1 + u_2) &\leq \|(x_{ij})_{ij}\|_{X(E)} \|(y_{ij})_{ij}\|_{Y(F)} \\
&\leq \left(\left\| (x_{1j})_{j=1}^{n} \right\|_{X(E)} + \left\| (x_{2j})_{j=1}^{n} \right\|_{X(E)} \right) \left(\left\| (y_{1j})_{j=1}^{n} \right\|_{Y(F)} + \left\| (y_{2j})_{j=1}^{n} \right\|_{Y(F)} \right) \\
&\leq 2 \left(\alpha_{X,Y}(u_1) + \alpha_{X,Y}(u_2) + 2\eta \right).
\end{aligned}$$

Como $\eta > 0$ é arbitrário, segue que $\alpha_{X,Y}(u_1 + u_2) \leq 2 \left(\alpha_{X,Y}(u_1) + \alpha_{X,Y}(u_2) \right)$. ■

Observação 2.2.3 As noções de quasi-norma uniforme, finitamente gerada e tensorial são definidas de forma análoga ao que foi feito no primeiro capítulo para uma norma no produto tensorial. Usamos, portanto, essas noções de forma indistinta para norma e quasi-norma no produto tensorial.

As próximas proposições apresentam condições suficientes sobre as classes de sequências X e Y para que uma quasi-norma quasi-razoável $\alpha_{X,Y}$ seja uniforme e finitamente gerada.

Proposição 2.2.4 *Sejam X e Y classes de sequências tais que $\alpha_{X,Y}$ é uma quasi-norma quasi-razoável. Se X e Y são linearmente estáveis, então $\alpha_{X,Y}$ é uniforme.*

Demonstração. Sejam E_1, E_2, F_1 e F_2 espaços de Banach, $T_i \in \mathcal{L}(E_i; F_i)$, $i = 1, 2$, e $T_1 \otimes T_2 : E_1 \otimes_{\alpha_{X,Y}} E_2 \longrightarrow F_1 \otimes_{\alpha_{X,Y}} F_2$, onde $T_1 \otimes T_2(x \otimes y) = T_1(x) \otimes T_2(y)$. Sejam $u \in E_1 \otimes_{\alpha_{X,Y}} E_2$ e $\sum\limits_{j=1}^{n} x_j \otimes y_j$ uma representação de u. Assim,

$$\begin{aligned}\alpha_{X,Y}\left(T_1 \otimes T_2(u)\right) = \alpha_{X,Y}\left(\sum_{j=1}^{n} T_1(x_j) \otimes T_2(y_j)\right) &\leq \left\|(T_1(x_j))_{j=1}^{n}\right\|_{X(F_1)} \left\|(T_2(y_j))_{j=1}^{n}\right\|_{Y(F_2)} \\ &\leq \|T_1\|\,\|T_2\| \left\|(x_j)_{j=1}^{n}\right\|_{X(E_1)} \left\|(y_j)_{j=1}^{n}\right\|_{Y(E_2)},\end{aligned}$$

onde na última desigualdade usamos a hipótese de X e Y serem linearmente estáveis. Tomando o ínfimo sobre todas as representações de u, temos $\alpha_{X,Y}\left(T_1 \otimes T_2(u)\right) \leq \|T_1\|\,\|T_2\|\,\alpha_{X,Y}(u)$ e portanto $\|T_1 \otimes T_2\| \leq \|T_1\|\,\|T_2\|$. ■

Observação 2.2.5 É claro que, na proposição acima, se X, Y e $\alpha_{X,Y}$ satisfazem as hipóteses da Proposição 2.2.2, segue imediatamente que $\alpha_{X,Y}$ uma quasi-norma quasi-razoável. Entretanto, até onde investigamos, não sabemos se a recíproca da Proposição 2.2.2 é verdadeira. Assim, como no caso da proposição acima, nos resultados apresentados daqui em diante, estaremos levando em conta a possibilidade de existirem classes de sequências X e Y que não satisfaçam, parcial ou integralmente, as hipóteses desses resultados e mesmo assim se tenha $\alpha_{X,Y}$ gozando das propriedades de suas respectivas teses.

Proposição 2.2.6 *Sejam X e Y classes de sequências tais que $\alpha_{X,Y}$ é uma quasi-norma quasi-razoável uniforme. Se X e Y são finitamente injetivas, então $\alpha_{X,Y}$ é finitamente gerada.*

Demonstração. Sejam E e F espaços de Banach e $u \in E \otimes F$. Dado $\eta > 0$, existe uma representação $\sum\limits_{j=1}^{n} x_j \otimes y_j$ de u tal que

$$\left\|(x_j)_{j=1}^n\right\|_{X(E)} \left\|(y_j)_{j=1}^n\right\|_{Y(F)} \leq \alpha_{X,Y}(u; E \otimes F) + \eta.$$

Tomando $M = [x_1, \ldots, x_n]$ e $N = [y_1 \ldots, y_n]$, temos $u \in M \otimes N$ e assim, como $\alpha_{X,Y}$ é uniforme, segue que

$$\alpha_{X,Y}(u; E \otimes F) \leq \alpha_{X,Y}(u; M \otimes N).$$

Além disso, como as classes X e Y são finitamente injetivas, segue que

$$\begin{aligned}\alpha_{X,Y}(u; M \otimes N) &\leq \left\|(x_j)_{j=1}^n\right\|_{X(M)} \left\|(y_j)_{j=1}^n\right\|_{Y(N)} \\ &\leq \left\|(x_j)_{j=1}^n\right\|_{X(E)} \left\|(y_j)_{j=1}^n\right\|_{Y(F)} \leq \alpha_{X,Y}(u; E \otimes F) + \eta\end{aligned}$$

e portanto $\alpha_{X,Y}(u; E \otimes F) = \inf\left\{\alpha_{X,Y}(u; M \otimes N); u \in M \otimes N, \dim M, \dim N < \infty\right\}$. ■

Vejamos agora alguns exemplos, observando que estes não esgotam todos os casos possíveis e que em outras partes deste trabalho também faremos uso de quasi-normas não apresentadas aqui.

Exemplo 2.2.7 Sejam E e F espaços de Banach e $1 \leq p, q \leq \infty$, onde $1 \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q^*}$. São quasi-normas quasi-razoáveis uniformes em $E \otimes F$:

(a) $\alpha_{\ell_p, \ell_{q^*}^w}(u) = \inf\left\{\left\|(x_j)_{j=1}^n\right\|_{\ell_p(E)} \left\|(y_j)_{j=1}^n\right\|_{\ell_{q^*}^w(F)}; u = \sum_{j=1}^n x_j \otimes y_j\right\}$.

(b) $\alpha_{\ell_p^w, \ell_{q^*}^w}(u) = \inf\left\{\left\|(x_j)_{j=1}^n\right\|_{\ell_p^w(E)} \left\|(y_j)_{j=1}^n\right\|_{\ell_{q^*}^w(F)} u = \sum_{j=1}^n x_j \otimes y_j\right\}$.

- Quando $1 \leq p < \infty$:

(c) $\alpha_{(\ell_p)_p^{\text{mid}}, \ell_{q^*}}(u) = \inf\left\{\left\|(x_j)_{j=1}^n\right\|_{(\ell_p)_p^{\text{mid}}(E)} \left\|(y_j)_{j=1}^n\right\|_{\ell_{q^*}(F)}; u = \sum_{j=1}^n x_j \otimes y_j\right\}$.

(d) $\alpha_{\ell_p^{\text{mid}}, \ell_{q^*}}(u) = \inf\left\{\left\|(x_j)_{j=1}^n\right\|_{\ell_p^{\text{mid}}(E)} \left\|(y_j)_{j=1}^n\right\|_{\ell_{q^*}(F)}; u = \sum_{j=1}^n x_j \otimes y_j\right\}$.

(e) $\alpha_{(\ell_p^{\text{mid}})_p^{\text{mid}}, \ell_{q^*}}(u) = \inf\left\{\left\|(x_j)_{j=1}^n\right\|_{(\ell_p^{\text{mid}})_p^{\text{mid}}(E)} \left\|(y_j)_{j=1}^n\right\|_{\ell_{q^*}(F)}; u = \sum_{j=1}^n x_j \otimes y_j\right\}$.

(f) $\alpha_{\ell_p^{\text{mid}}, \ell_{q^*}^w}(u) = \inf\left\{\left\|(x_j)_{j=1}^n\right\|_{\ell_p^{\text{mid}}(E)} \left\|(y_j)_{j=1}^n\right\|_{\ell_{q^*}^w(F)}; u = \sum_{j=1}^n x_j \otimes y_j\right\}$.

- Quando $1 \leq p, r < \infty$:

(g) $\alpha_{\ell_{p,r}^{\text{mid}}, \ell_{q^*}}(u) = \inf\left\{\left\|(x_j)_{j=1}^n\right\|_{\ell_{p,r}^{\text{mid}}(E)} \left\|(y_j)_{j=1}^n\right\|_{\ell_{q^*}(F)}; u = \sum_{j=1}^n x_j \otimes y_j\right\}$.

Além disso, as quasi-normas (a), (b) e (c) são quasi-normas tensoriais.

Observação 2.2.8 A expressão do item (a) já é uma quasi-norma tensorial conhecida e sua demostração pode ser encontrada em [33, Proposition 3.1], no caso multilinear. A quasi-norma definida nesse trabalho possui uma expressão aparentemente diferente da nossa do item (a). Entretanto, por um argumento usual (veja a Observação 2.3.5), mostra-se que as quasi-normas são iguais. Até onde sabemos, este é o único exemplo de quasi-norma nesse contexto presente na literatura.

Vamos apenas mostrar que a expressão do item (b) é uma quasi-norma tensorial, uma vez que as demonstrações dos outros itens seguem um caminho análogo. Primeiro, mostraremos que

$$\varepsilon(u) \leq \alpha_{\ell_p^w, \ell_{q^*}^w}(u)$$

para qualquer $u \in E \otimes F$. Seja $\sum_{j=1}^n x_j \otimes y_j$ uma representação de $u \in E \otimes F$. Pela desigualdade Hölder temos

$$\begin{aligned}\varepsilon(u) &= \sup_{\varphi \in B_{E'}} \sup_{\psi \in B_{F'}} \left| \sum_{j=1}^n \varphi(x_j)\psi(y_j) \right| \leq \sup_{\varphi \in B_{E'}} \sup_{\psi \in B_{F'}} \sum_{j=1}^n |\varphi(x_j)\psi(y_j)| \\ &\leq \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{j=1}^n |\varphi(x_j)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \sup_{\psi \in B_{F'}} \left(\sum_{j=1}^n |\psi(y_j)|^{q^*} \right)^{\frac{1}{q^*}} = \left\| (x_j)_{j=1}^n \right\|_{\ell_p^w(E)} \left\| (y_j)_{j=1}^n \right\|_{\ell_{q^*}^w(F)}.\end{aligned}$$

Como essa desigualdade vale para qualquer representação de u, temos $\varepsilon(u) \leq \alpha_{\ell_p^w, \ell_{q^*}^w}(u)$. Assim, como ℓ_p^w é norma monótona, pela Proposição 2.2.2, tem-se que $\alpha_{\ell_p^w, \ell_{q^*}^w}$ é uma quasi-norma quasi-razoável. Além disso, como ℓ_p^w é linearmente estável e finitamente injetiva, as Proposições 2.2.4 e 2.2.6 garantem que $\alpha_{\ell_p^w, \ell_{q^*}^w}$ é uma quasi-norma tensorial.

O leitor pode achar estranho o fato de usarmos no exemplo anterior o número q^*, conjugado de q, em vez do próprio número q. Isso não atrapalha a generalidade dos exemplos, mas poderia ser encarado como algo sem propósito. Entretanto, a real vantagem do uso desse argumento se tornará clara quando estivermos trabalhando com ideais de operadores (X, Y)-somantes, por exemplo, na Seção 2.3.

Por fim, apresentamos um fato que será útil mais adiante, como por exemplo na Seção 2.3. Ele sempre será aplicado sem maiores comentários e o leitor deve estar atento ao contexto de sua aplicação. A demonstração (um tanto simples) será omitida.

Proposição 2.2.9 Sejam E, F e G espaços de Banach, em que $F \overset{1}{=} G$ através do operador $T : F \longrightarrow G$, e X e Y classes de sequências tais que $\alpha_{X,Y}$ é uma quasi-norma quasi-razoável. Se Y é linearmente estável, então

$$E \otimes_{\alpha_{X,Y}} F \overset{1}{=} E \otimes_{\alpha_{X,Y}} G$$

por meio da aplicação $x \otimes y \longmapsto x \otimes T(y)$, em que $x \in E$ e $y \in F$.

2.2.1 (X, Y)-normas tensoriais

Nesta subseção, apresentamos alguns exemplos de (X, Y)-normas tensoriais, algumas delas recuperando normas já conhecidas.

Exemplo 2.2.10 Sejam E e F espaços de Banach. São normas razoáveis uniformes em $E \otimes F$:

- Quando $1 \leq p \leq \infty$:

(a) $\alpha_{\ell_{p^*}^w,\ell_p}(u) = \inf \left\{ \left\|(x_j)_{j=1}^n\right\|_{\ell_{p^*}^w(E)} \left\|(y_j)_{j=1}^n\right\|_{\ell_p(F)} ; u = \sum_{j=1}^n x_j \otimes y_j \right\}.$

(b) $\alpha_{\ell_p,\ell_{p^*}^w}(u) = \inf \left\{ \left\|(x_j)_{j=1}^n\right\|_{\ell_p(E)} \left\|(y_j)_{j=1}^n\right\|_{\ell_{p^*}^w(F)} ; u = \sum_{j=1}^n x_j \otimes y_j \right\}.$

(c) $\alpha_{\ell_p^w,\ell_{p^*}^w}(u) = \inf \left\{ \left\|(x_j)_{j=1}^n\right\|_{\ell_p^w(E)} \left\|(y_j)_{j=1}^n\right\|_{\ell_{p^*}^w(F)} ; u = \sum_{j=1}^n x_j \otimes y_j \right\}.$

- Quando $1 \leq p < \infty$:

(d) $\alpha_{(\ell_p)_p^{\rm mid},\ell_{p^*}}(u) = \inf \left\{ \left\|(x_j)_{j=1}^n\right\|_{(\ell_p)_p^{\rm mid}(E)} \left\|(y_j)_{j=1}^n\right\|_{\ell_{p^*}(F)} ; u = \sum_{j=1}^n x_j \otimes y_j \right\}.$

(e) $\alpha_{\ell_p^{\rm mid},\ell_{p^*}}(u) = \inf \left\{ \left\|(x_j)_{j=1}^n\right\|_{\ell_p^{\rm mid}(E)} \left\|(y_j)_{j=1}^n\right\|_{\ell_{p^*}(F)} ; u = \sum_{j=1}^n x_j \otimes y_j \right\}.$

(f) $\alpha_{\ell_p^{\rm mid},\ell_{p^*}^w}(u) = \inf \left\{ \left\|(x_j)_{j=1}^n\right\|_{\ell_p^{\rm mid}(E)} \left\|(y_j)_{j=1}^n\right\|_{\ell_{p^*}^w(F)} ; u = \sum_{j=1}^n x_j \otimes y_j \right\}.$

- Quando $1 < p < \infty$:

(g) $\alpha_{\ell_p^{\rm mid},\ell_{p^*}^{\rm mid}}(u) = \inf \left\{ \left\|(x_j)_{j=1}^n\right\|_{\ell_p^{\rm mid}(E)} \left\|(y_j)_{j=1}^n\right\|_{\ell_{p^*}^{\rm mid}(F)} ; u = \sum_{j=1}^n x_j \otimes y_j \right\}$ e

(h) $\alpha_{\ell_{p^*}^{\rm mid},(\ell_p^{\rm mid})_p^{\rm mid}}(u) = \inf \left\{ \left\|(x_j)_{j=1}^n\right\|_{\ell_{p^*}^{\rm mid}(E)} \left\|(y_j)_{j=1}^n\right\|_{(\ell_p^{\rm mid})_p^{\rm mid}(F)} ; u = \sum_{j=1}^n x_j \otimes y_j \right\}.$

Além disso, as normas em (a), (b), (c) e (d) são normas tensoriais.

As expressões dos itens $(a), (b)$ e (c) já são normas tensoriais conhecidas: os itens (a) e (b) são as normas de Chevet-Saphar d_p e g_p, respectivamente, apresentadas no primeiro capítulo (veja o final da Seção 1.2) e cujas demonstrações podem ser encontradas em [45]; uma demonstração do item (c) pode ser encontrada, no caso multilinear, em [1]. As expressões dos itens (d) ao (h), até onde sabemos, são novas normas no produto tensorial. Vamos apenas mostrar que a expressão do item (e) é uma norma razoável uniforme, uma vez que as demonstrações dos outros itens seguem analogamente. Após isso, restaria apenas mostrar que a norma no item (d) é finitamente gerada (i.e. norma tensorial), mas isso segue imediatamente do fato de que as classes de sequências envolvidas na expressão dessa norma são finitamente injetivas.

Primeiro, vamos mostrar que

$$\varepsilon(u) \leq \alpha_{\ell_p^{\mathrm{mid}}, \ell_{p^*}}(u) \tag{2.1}$$

para qualquer $u \in E \otimes F$. Seja $\sum_{j=1}^{n} x_j \otimes y_j$ uma representação de $u \in E \otimes F$. Quando $1 < p < \infty$, pela desigualdade Hölder, temos

$$\begin{aligned}
\varepsilon(u) &= \sup_{\varphi \in B_{E'}} \sup_{\psi \in B_{F'}} \left| \sum_{j=1}^{n} \varphi(x_j)\psi(y_j) \right| \leq \sup_{\varphi \in B_{E'}} \sup_{\psi \in B_{F'}} \sum_{j=1}^{n} |\varphi(x_j)\psi(y_j)| \\
&\leq \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{j=1}^{n} |\varphi(x_j)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \sup_{\psi \in B_{F'}} \left(\sum_{j=1}^{n} |\psi(y_j)|^{p^*} \right)^{\frac{1}{p^*}} = \left\| (x_j)_{j=1}^{n} \right\|_{\ell_p^w(E)} \left\| (y_j)_{j=1}^{n} \right\|_{\ell_{p^*}^w(F)} \\
&\leq \left\| (x_j)_{j=1}^{n} \right\|_{\ell_p^{\mathrm{mid}}(E)} \left\| (y_j)_{j=1}^{n} \right\|_{\ell_{p^*}(F)}.
\end{aligned}$$

Como essa desigualdade vale para qualquer representação de u, temos $\varepsilon(u) \leq \alpha_{\ell_p^{\mathrm{mid}}, \ell_{p^*}}(u)$. Quando $p = 1$, segue que

$$\begin{aligned}
\varepsilon(u) &\leq \sup_{\varphi \in B_{E'}} \sup_{\psi \in B_{F'}} \sum_{j=1}^{n} |\varphi(x_j)| \, |\psi(y_j)| \leq \left\| (x_j)_{j=1}^{n} \right\|_{\ell_1^w(E)} \left\| (y_j)_{j=1}^{n} \right\|_{\ell_\infty(F)} \\
&\leq \left\| (x_j)_{j=1}^{n} \right\|_{\ell_1^{\mathrm{mid}}(E)} \left\| (y_j)_{j=1}^{n} \right\|_{\ell_\infty(F)}
\end{aligned}$$

e novamente temos $\varepsilon(u) \leq \alpha_{\ell_1^{\mathrm{mid}}, \ell_\infty}(u)$.

Vamos agora mostrar que $\alpha_{\ell_p^{\mathrm{mid}}, \ell_{p^*}}$ satisfaz a desigualdade triangular. Sejam $u_1, u_2 \in E \otimes F$. Quando $u_1 = 0$ ou $u_2 = 0$ a demonstração é imediata. Suponhamos que $u_1,\ u_2 \neq 0$. Vejamos primeiro o caso em que $1 < p < \infty$. Dado $\eta > 0$, podemos escolher representações $u_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \otimes y_{ij}$, $i = 1, 2$, tais que

$$\left\| (x_{ij})_{j=1}^{n} \right\|_{\ell_p^{\mathrm{mid}}(E)} \leq (\alpha_{\ell_p^{\mathrm{mid}}, \ell_{p^*}}(u_i) + \eta)^{\frac{1}{p}} \quad \text{e} \quad \left\| (y_{ij})_{j=1}^{n} \right\|_{\ell_{p^*}(F)} \leq (\alpha_{\ell_p^{\mathrm{mid}}, \ell_{p^*}}(u_i) + \eta)^{\frac{1}{p^*}}.$$

De fato, a escolha dessas representações é possível, pois existem representações $u_i = \sum_{j=1}^{n} z_{ij} \otimes w_{ij}$ tais que

$$\left\| (z_{ij})_{j=1}^{n} \right\|_{\ell_p^{\mathrm{mid}}(E)} \left\| (w_{ij})_{j=1}^{n} \right\|_{\ell_{p^*}(F)} \leq \alpha_{\ell_p^{\mathrm{mid}}, \ell_{p^*}}(u_i) + \eta,$$

para $i = 1, 2$. Observando que $\left\|(w_{ij})_{j=1}^n\right\|_{\ell_{p^*}(F)} > 0$ e $u_1, u_2 \neq 0$; consideramos

$$\lambda_i = \frac{\left\|(w_{ij})_{j=1}^n\right\|_{\ell_{p^*}(F)}}{(\alpha_{\ell_p^{\mathrm{mid}},\ell_{p^*}}(u_i) + \eta)^{\frac{1}{p^*}}} > 0,$$

para $i = 1, 2$. Assim,

$$u_i = \sum_{j=1}^n z_{ij} \otimes w_{ij} = \sum_{j=1}^n (\lambda_i z_{ij}) \otimes (\frac{w_{ij}}{\lambda_i}).$$

Tomando $x_{ij} = \lambda_i z_{ij}$ e $y_{ij} = \frac{w_{ij}}{\lambda_i}$ para $i = 1, 2$ e $j = 1, \ldots, n$, temos

$$u_i = \sum_{j=1}^n x_{ij} \otimes y_{ij},$$

$$\left\|(y_{ij})_{j=1}^n\right\|_{\ell_{p^*}(F)} = \frac{1}{\lambda_i} \left\|(w_{ij})_{j=1}^n\right\|_{\ell_{p^*}(F)} = (\alpha_{\ell_p^{\mathrm{mid}},\ell_{p^*}}(u_i) + \eta)^{\frac{1}{p^*}}$$

e

$$\left\|(x_{ij})_{j=1}^n\right\|_{\ell_p^{\mathrm{mid}}(E)} \leq (\alpha_{\ell_p^{\mathrm{mid}},\ell_{p^*}}(u_i) + \eta)^{\frac{1}{p}},$$

como queríamos mostrar.

Assim, $\sum_{j=1}^n x_{1j} \otimes y_{1j} + \sum_{j=1}^n x_{2j} \otimes y_{2j}$ é uma representação de $u_1 + u_2$ e denotando as sequências

$$(x_{11}, \ldots, x_{1n}, x_{21}, \ldots, x_{2n}, 0, 0, \ldots) \text{ e } (y_{11}, \ldots, y_{1n}, y_{21}, \ldots, y_{2n}, 0, 0, \ldots)$$

por $(x_{ij})_{ij}$ e $(y_{ij})_{ij}$, respectivamente, temos

$$\begin{aligned}
\|(x_{ij})_{ij}\|_{\ell_p^{\mathrm{mid}}(E)} &= \sup_{(\varphi_k)_{k=1}^\infty \in B_{\ell_p^w(E')}} \left(\sum_{k=1}^\infty \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^2 |\varphi_k(x_{ij})|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \sup_{(\varphi_k)_{k=1}^\infty \in B_{\ell_p^w(E')}} \left(\sum_{k=1}^\infty \sum_{j=1}^n |\varphi_k(x_{1j})|^p + \sum_{k=1}^\infty \sum_{j=1}^n |\varphi_k(x_{2j})|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \left(\sup_{(\varphi_k)_{k=1}^\infty \in B_{\ell_p^w(E')}} \sum_{k=1}^\infty \sum_{j=1}^n |\varphi_k(x_{1j})|^p + \sup_{(\varphi_k)_{k=1}^\infty \in B_{\ell_p^w(E')}} \sum_{k=1}^\infty \sum_{j=1}^n |\varphi_k(x_{2j})|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\left\|(x_{1j})_{j=1}^n\right\|_{\ell_p^{\mathrm{mid}}(E)}^p + \left\|(x_{2j})_{j=1}^n\right\|_{\ell_p^{\mathrm{mid}}(E)}^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \left(\alpha_{\ell_p^{\mathrm{mid}},\ell_{p^*}}(u_1) + \alpha_{\ell_p^{\mathrm{mid}},\ell_{p^*}}(u_2) + 2\eta \right)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

Analogamente, mostra-se

$$\|(y_{ij})_{ij}\|_{\ell_{p^*}(F)} \leq \left(\alpha_{\ell_p^{\mathrm{mid}},\ell_{p^*}}(u_1) + \alpha_{\ell_p^{\mathrm{mid}},\ell_{p^*}}(u_2) + 2\eta \right)^{\frac{1}{p^*}}.$$

Desta forma, temos

$$\begin{aligned}
\alpha_{\ell_p^{\text{mid}},\ell_{p^*}}(u_1+u_2) &\leq \|(x_{ij})_{ij}\|_{\ell_p^{\text{mid}}(E)} \|(y_{ij})_{ij}\|_{\ell_{p^*}(F)} \\
&\leq (\alpha_{\ell_p^{\text{mid}},\ell_{p^*}}(u_1) + \alpha_{\ell_p^{\text{mid}},\ell_{p^*}}(u_2) + 2\eta)^{\frac{1}{p}} (\alpha_{\ell_p^{\text{mid}},\ell_{p^*}}(u_1) + \alpha_{\ell_p^{\text{mid}},\ell_{p^*}}(u_2) + 2\eta)^{\frac{1}{p^*}} \\
&= \alpha_{\ell_p^{\text{mid}},\ell_{p^*}}(u_1) + \alpha_{\ell_p^{\text{mid}},\ell_{p^*}}(u_2) + 2\eta,
\end{aligned}$$

e como $\eta > 0$ é arbitrário, segue que $\alpha_{\ell_p^{\text{mid}},\ell_{p^*}}(u_1 + u_2) \leq \alpha_{\ell_p^{\text{mid}},\ell_{p^*}}(u_1) + \alpha_{\ell_p^{\text{mid}},\ell_{p^*}}(u_2)$.

Vejamos agora o caso em que $p = 1$. Dado $\eta > 0$, podemos escolher representações $u_i = \sum_{j=1}^n x_{ij} \otimes y_{ij}$ tais que

$$\left\|(x_{ij})_{j=1}^n\right\|_{\ell_1^{\text{mid}}(E)} \leq \alpha_{\ell_1^{\text{mid}},\ell_\infty}(u_i) + \eta \quad \text{e} \quad \left\|(y_{ij})_{j=1}^n\right\|_{\ell_\infty(F)} \leq 1,$$

para $i = 1, 2$. Uma vez que $\sum_{j=1}^n x_{1j} \otimes y_{1j} + \sum_{j=1}^n x_{2j} \otimes y_{2j}$ é uma representação de $u_1 + u_2$, temos

$$\begin{aligned}
\alpha_{\ell_1^{\text{mid}},\ell_\infty}(u_1 + u_2) &\leq \|(x_{ij})_{ij}\|_{\ell_1^{\text{mid}}(E)} \|(y_{ij})_{ij}\|_{\ell_\infty(F)} \\
&\leq \left\|(x_{1j})_{j=1}^n\right\|_{\ell_1^{\text{mid}}(E)} + \left\|(x_{2j})_{j=1}^n\right\|_{\ell_1^{\text{mid}}(E)} \\
&\leq \alpha_{\ell_1^{\text{mid}},\ell_\infty}(u_1) + \alpha_{\ell_1^{\text{mid}},\ell_\infty}(u_2) + 2\eta.
\end{aligned}$$

Como $\eta > 0$ é arbitrário, segue que $\alpha_{\ell_1^{\text{mid}},\ell_\infty}(u_1 + u_2) \leq \alpha_{\ell_1^{\text{mid}},\ell_\infty}(u_1) + \alpha_{\ell_1^{\text{mid}},\ell_\infty}(u_2)$.

Acabamos de mostrar que $\alpha_{\ell_p^{\text{mid}},\ell_{p^*}}$ satisfaz a desigualdade triangular. Como vale (2.1) e as classes de sequências ℓ_p^{mid} e ℓ_{p^*} são norma monótonas e linearmente estáveis, as Proposições 2.2.2 e 2.2.4 garantem que $\alpha_{\ell_p^{\text{mid}},\ell_{p^*}}$ é uma norma razoável uniforme.

Observação 2.2.11 Para cada $u = \sum_{j=1}^n x_j \otimes y_j \in E \otimes F$, temos $\alpha_{X,Y}^t(u) = \alpha_{Y,X}(u)$. Com efeito,

$$\begin{aligned}
\alpha_{X,Y}^t(u; E \otimes F) &= \alpha_{X,Y}(u^t; F \otimes E) \\
&= \inf \left\{ \left\|(y_j)_{j=1}^n\right\|_{X(F)} \left\|(x_j)_{j=1}^n\right\|_{Y(E)}; u^t = \sum_{j=1}^n y_j \otimes x_j \right\} \\
&= \inf \left\{ \left\|(x_j)_{j=1}^n\right\|_{Y(E)} \left\|(y_j)_{j=1}^n\right\|_{X(F)}; u = \sum_{j=1}^n x_j \otimes y_j \right\} \\
&= \alpha_{Y,X}(u; E \otimes F).
\end{aligned}$$

Além disso, é bom deixar claro que se X e Y são classes de sequências finitamente injetivas e $\alpha_{X,Y}$ é uma norma razoável uniforme (e portanto norma tensorial), então $\alpha_{X,Y}^t$ é uma norma tensorial. De fato, se $\alpha_{X,Y}$ é uma norma razoável uniforme, segue que $\alpha_{X,Y}^t$ é uma norma razoável uniforme (resultado geral) e como X e Y são finitamente injetivas, a Proposição 2.2.6 garante que $\alpha_{X,Y}^t$ é uma norma tensorial.

Definimos a transposta de uma quasi-norma quasi-razoável α da mesma forma que a da norma razoável, ou seja,

$$\alpha^t(u; E \otimes F) = \alpha(u^t; F \otimes E),$$

para cada par de espaços de Banach E, F e cada $u \in E \otimes F$. Não é difícil verificar que a observação anterior é também válida para o contexto em que $\alpha_{X,Y}$ é uma quasi-norma.

Além disso, é imediato que se α e β são quasi-normas quasi-razoáveis (ou normas razoáveis), então $\alpha \leq \beta$ se, e somente se, $\alpha^t \leq \beta^t$.

Vamos apresentar agora uma representação de elementos no produto tensorial completo $E \widehat{\otimes}_{\alpha_{X,Y}} F$, sendo $\alpha_{X,Y}$ uma norma razoável. O lema a seguir realiza parte importante desse trabalho.

Lema 2.2.12 *Sejam E e F espaços de Banach e X e Y classes de sequências tais que $\alpha_{X,Y}$ é uma norma razoável. Se X e Y são norma monótonas, $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in X(E)$ e $(y_j)_{j=1}^{\infty} \in Y^u(F)$, então a série $\sum_{j=1}^{\infty} x_j \otimes y_j$ converge em $E \widehat{\otimes}_{\alpha_{X,Y}} F$.*

Demonstração. É suficiente mostrar que a sequência $(\sum_{j=1}^{n} x_j \otimes y_j)_{n=1}^{\infty}$ é de Cauchy em $E \widehat{\otimes}_{\alpha_{X,Y}} F$. Dado $\eta > 0$, como $(y_j)_{j=1}^{\infty} \in Y^u(F)$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\left\|(y_j)_{j=n}^{\infty}\right\|_{Y(F)} < \eta$ para qualquer $n \geq n_0$. Mais ainda, como Y é norma monótona, tem-se $\left\|(y_j)_{j=n}^{m}\right\|_{Y(F)} < \eta$, para quaisquer $m \geq n \geq n_0$. Disso e do fato de X também ser norma monótona, segue que

$$\alpha_{X,Y}\left(\sum_{j=n}^{m} x_j \otimes y_j\right) \leq \left\|(x_j)_{j=n}^{m}\right\|_{X(E)} \left\|(y_j)_{j=n}^{m}\right\|_{Y(F)} < \left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{X(E)} \cdot \eta,$$

para quaisquer $m \geq n \geq n_0$. ■

Note que o lema acima também vale no caso em que $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in X^u(E)$ e $(y_j)_{j=1}^{\infty} \in Y(F)$ ou ainda caso $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in X^u(E)$ e $(y_j)_{j=1}^{\infty} \in Y^u(F)$

Proposição 2.2.13 *Sejam E e F espaços de Banach e X e Y classes de sequências tais que $\alpha_{X,Y}$ é uma norma razoável. Se X e Y são norma monótonas, X é finitamente determinada (ou dominada), Y é finitamente determinada (ou dominada) e $u \in E \widehat{\otimes}_{\alpha_{X,Y}} F$, então existem sequências $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in X^u(E)$ e $(y_j)_{j=1}^{\infty} \in Y^u(F)$ tais que a série $\sum_{j=1}^{\infty} x_j \otimes y_j$ converge para u e, nestas condições,*

$$\alpha_{X,Y}(u) = \inf\left\{\left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{X(E)} \left\|(y_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{Y(F)}; u = \sum_{j=1}^{\infty} x_j \otimes y_j\right\},$$

com o ínfimo sendo tomado sobre todas as possíveis representações de u dessa forma.

Demonstração. Dado $\eta > 0$, vamos encontrar uma sequência $(u_n)_{n=1}^\infty$ em $E \otimes F$ tal que $u = \sum_{n=1}^\infty u_n$ com $\alpha_{X,Y}(u_1) < \alpha_{X,Y}(u) + \eta$ e $\alpha_{X,Y}(u_n) < \dfrac{\eta^2}{4^n}$ quando $n \geq 2$. Como $u \in E\widehat{\otimes}_{\alpha_{X,Y}}F$, existe uma sequência $(v_n)_{n=1}^\infty$ em $E \otimes_{\alpha_{X,Y}} F$ tal que $v_n \longrightarrow u$. Assim, existe $n^{(0)} \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq n^{(0)}$, então $\alpha_{X,Y}(v_n) < \alpha_{X,Y}(u) + \eta$. Por outro lado, como $(v_n)_{n=1}^\infty$ é de Cauchy, existe $m^{(0)} \in \mathbb{N}$ tal que se $n, m \geq m^{(0)}$, então $\alpha_{X,Y}(v_m - v_n) < \dfrac{\eta^2}{4^2}$. Denotamos $k_1 = \max\left\{n^{(0)}, m^{(0)}\right\}$ e $u_1 = v_{k_1}$. Note que para cada $n \geq 2$, existe $k_n \in \mathbb{N}$ tal que se $m \geq k_n$, então $\alpha_{X,Y}(v_m - v_{k_n}) < \dfrac{\eta^2}{4^{n+1}}$. Denotamos por $u_n = v_{k_n} - v_{k_{n-1}}$ quando $n \geq 2$. Assim, obtemos a sequência desejada, pois $(u_n)_{n=1}^\infty$ é uma sequência em $E \otimes F$,

$$\alpha_{X,Y}(u_1) = \alpha_{X,Y}(v_{k_1}) < \alpha_{X,Y}(u) + \eta$$

e

$$\alpha_{X,Y}(u_n) = \alpha_{X,Y}(v_{k_n} - v_{k_{n-1}}) < \frac{\eta^2}{4^n}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$.

Do que temos acima, podemos escolher uma representação de u_1 da forma $\sum\limits_{j=1}^{l_1} x_{1j} \otimes y_{1j}$ tal que

$$\left\|(x_{1j})_{j=1}^{l_1}\right\|_{X(E)} \leq \alpha_{X,Y}(u) + \eta \quad \text{e} \quad \left\|(y_{1j})_{j=1}^{l_1}\right\|_{Y(F)} \leq 1$$

e, para $n \geq 2$, escolhemos uma representação de u_n da forma $u_n = \sum_{j=1}^{l_n} x_{nj} \otimes y_{nj}$ tal que

$$\left\|(x_{nj})_{j=1}^{l_n}\right\|_{X(E)} \leq \frac{\eta}{2^n} \quad \text{e} \quad \left\|(y_{nj})_{j=1}^{l_n}\right\|_{Y(F)} \leq \frac{\eta}{2^n}.$$

Note que para cada $n \in \mathbb{N}$, obtemos sequências finitas $(x_{nj})_{j=1}^{l_n}$ em E e $(y_{nj})_{j=1}^{l_n}$ em F. A partir dessas sequências, formamos duas novas sequências, uma em E e outra em F, da seguinte forma:

$$(x_j)_{j=1}^\infty := (x_{11}, \ldots, x_{1l_1}, x_{21}, \ldots, x_{2l_2}, \ldots, x_{n1}, \ldots, x_{nl_n}, \ldots)$$

e

$$(y_j)_{j=1}^\infty := (y_{11}, \ldots, y_{1l_1}, y_{21}, \ldots, y_{2l_2}, \ldots, y_{n1}, \ldots, y_{nl_n}, \ldots).$$

Agora, vamos mostrar que $(x_j)_{j=1}^\infty \in X^u(E)$. Suponhamos que $l_1 + \cdots + l_{n-1} < m \leq l_1 + \cdots + l_n$, então

$$\left\|(x_j)_{j=1}^m\right\|_{X(E)} \leq \left\|(x_{1j})_{j=1}^{l_1}\right\|_{X(E)} + \ldots + \left\|(x_{(n-1)j})_{j=1}^{l_{(n-1)}}\right\|_{X(E)} +$$

$$
\begin{aligned}
&+ \left\| (x_{nj})_{j=1}^{m-(l_1+\cdots+l_{n-1})} \right\|_{X(E)} \\
&\leq \left\| (x_{1j})_{j=1}^{l_1} \right\|_{X(E)} + \ldots + \left\| (x_{nj})_{j=1}^{l_n} \right\|_{X(E)} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left\| (x_{nj})_{j=1}^{l_n} \right\|_{X(E)} \qquad (2.2) \\
&\leq \alpha_{X,Y}(u) + \eta + \eta \cdot \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2^n},
\end{aligned}
$$

onde usamos o fato de X ser norma monótona. Disso, como X é finitamente determinada (ou dominada), temos

$$
\begin{aligned}
\left\| (x_j)_{j=1}^{\infty} \right\|_{X(E)} &= \sup_m \left\| (x_j)_{j=1}^{m} \right\|_{X(E)} \\
&\leq \alpha_{X,Y}(u) + \eta + \eta \cdot \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \infty. \qquad (2.3)
\end{aligned}
$$

Observando o que fizemos em (2.2) e (2.3) e a construção da sequência $(x_j)_{j=1}^{\infty}$, temos $\lim_{k\to\infty} \|(x_j)_{j=k}^{\infty}\|_{X(E)} = 0$ (quando $k \to \infty$ essa norma é majorada apenas pelo rabo da série em (2.3)). De fato, para $k = l_1 + 1$, temos

$$
\left\| (x_j)_{j=l_1+1}^{\infty} \right\|_{X(E)} \leq \eta \cdot \sum_{s=2}^{\infty} \frac{1}{2^s}
$$

e para $k = l_n + 1$ com $n \geq 2$,

$$
\left\| (x_j)_{j=l_n+1}^{\infty} \right\|_{X(E)} \leq \eta \cdot \sum_{s=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^s}.
$$

Portanto, $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in X^u(E)$. Seguindo de maneira análoga ao que fizemos acima, mostra-se que

$$
\left\| (y_j)_{j=1}^{\infty} \right\|_{Y(F)} \leq 1 + \eta \cdot \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \infty
$$

e que $(y_j)_{j=1}^{\infty} \in Y^u(F)$. Pelo Lema 2.2.12, a série $\sum_{j=1}^{\infty} x_j \otimes y_j$ converge em $E \widehat{\otimes}_{\alpha_{X,Y}} F$ e, por nossa construção, temos $u = \sum_{j=1}^{\infty} x_j \otimes y_j$. Usando as estimativas que obtivemos para $\left\| (x_j)_{j=1}^{\infty} \right\|_{X(E)}$ e $\left\| (y_j)_{j=1}^{\infty} \right\|_{Y(F)}$, temos

$$
\left\| (x_j)_{j=1}^{\infty} \right\|_{X(E)} \left\| (y_j)_{j=1}^{\infty} \right\|_{Y(F)} \leq \left(\alpha_{X,Y}(u) + \eta + \eta \cdot \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2^n} \right) \left(1 + \eta \cdot \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2^n} \right),
$$

e dessa forma $\alpha_{X,Y}(u) \geq \inf \left\{ \left\| (x_j)_{j=1}^{\infty} \right\|_{X(E)} \left\| (y_j)_{j=1}^{\infty} \right\|_{Y(F)} ; u = \sum_{j=1}^{\infty} x_j \otimes y_j \right\}$.

Para a outra desigualdade, sendo $\sum_{j=1}^{\infty} x_j \otimes y_j$ convergente para u em $E \widehat{\otimes}_{\alpha_{X,Y}} F$, tome $u^N = \sum_{j=1}^{N} x_j \otimes y_j$, $N \in \mathbb{N}$. Dado $\eta > 0$, existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $N \geq N_0$, então $\alpha_{X,Y}(u) - \eta \leq \alpha_{X,Y}(u^N)$. Assim,

$$
\alpha_{X,Y}(u) - \eta \leq \alpha_{X,Y}(u^{N_0}) \leq \left\| (x_j)_{j=1}^{N_0} \right\|_{X(E)} \left\| (y_j)_{j=1}^{N_0} \right\|_{Y(F)}
$$

$$\leq \left\| (x_j)_{j=1}^{\infty} \right\|_{X(E)} \left\| (y_j)_{j=1}^{\infty} \right\|_{Y(F)},$$

e como $\eta > 0$ é arbitrário, segue que $\alpha_{X,Y}(u) \leq \left\| (x_j)_{j=1}^{\infty} \right\|_{X(E)} \left\| (y_j)_{j=1}^{\infty} \right\|_{Y(F)}$ e temos

$$\alpha_{X,Y}(u) \leq \inf \left\{ \left\| (x_j)_{j=1}^{\infty} \right\|_{X(E)} \left\| (y_j)_{j=1}^{\infty} \right\|_{Y(F)} ; u = \sum_{j=1}^{\infty} x_j \otimes y_j \right\}.$$

$\blacksquare$

2.3 O comportamento local de operadores $(X; Y^{\text{dual}})$-somantes

Nesta seção, apresentamos caracterizações para operadores $(X; Y^{\text{dual}})$-somantes. A primeira envolve funcionais lineares definidos em um produto tensorial. Com ela, por exemplo, conseguimos obter resultados de inclusão entre classes de operadores $(X; Y^{\text{dual}})$-somantes. A segunda, nos diz que os operadores dessa natureza se comportam bem localmente, ou seja, eles têm propriedades que asseguram seu bom comportamento em espaços de Banach gerais, levando em consideração apenas subespaços de dimensão finita. Em seguida, mostramos que essas caracterizações nos permitem estudar a maximalidade dos ideais de operadores $(X; Y^{\text{dual}})$-somantes.

Antes de apresentarmos a primeira caracterização, observemos que o Teorema 1.4.5 apresenta condições sobre as classes de sequências X e Y (e também, claro, para Y^{dual}) com as quais se garante que $\mathcal{L}_{X;Y}$ (e que também $\mathcal{L}_{X;Y^{\text{dual}}}$) é um ideal de Banach. Portanto, esse ambiente nos oferece classes de operadores não triviais e as classes a seguir, para $1 \leq p \leq q \leq \infty$, são alguns exemplos de ideais de operadores gerados pelo Teorema 1.4.5:

(a) $\left[\mathcal{L}_{\ell_p^w;\ell_q}, \|\cdot\|_{\ell_p^w;\ell_q}\right]$ (operadores absolutamente (q,p)-somantes);

(b) $\left[\mathcal{L}_{\ell_p;\ell_q\langle\cdot\rangle}, \|\cdot\|_{\ell_p;\ell_q\langle\cdot\rangle}\right]$ (operadores Cohen fortemente (q,p)-somantes);

(c) $\left[\mathcal{L}_{(\ell_p)_p^{\text{mid}};\ell_q\langle\cdot\rangle}, \|\cdot\|_{(\ell_p)_p^{\text{mid}};\ell_q\langle\cdot\rangle}\right]$, com $p \neq \infty$;

(d) $\left[\mathcal{L}_{(\ell_p)_p^{\text{mid}};\ell_q^{\text{mid}}}, \|\cdot\|_{(\ell_p)_p^{\text{mid}};\ell_q^{\text{mid}}}\right]$, com $q \neq \infty$;

(e) $\left[\mathcal{L}_{\ell_p^w;(\ell_q^{\text{mid}})_q^{\text{mid}}}, \|\cdot\|_{\ell_p^w;(\ell_q^{\text{mid}})_q^{\text{mid}}}\right]$, com $q \neq \infty$.

Note ainda que no item (a) acima, no caso particular $q = \infty$, o ideal $\mathcal{L}_{\ell_p^w;\ell_\infty}$ é justamente o ideal dos operadores lineares e contínuos $\mathcal{L}$. Casos como esse não justificam restrições nos parâmetros p e q, já que a teoria continua válida.

O seguinte fato geral motiva a nossa primeira caracterização: para qualquer $T \in L(E,F)$, consideramos o funcional linear $\varphi_T : E \otimes F' \longrightarrow \mathbb{K}$ definido como a linearização da forma bilinear $A_T : E \times F' \longrightarrow \mathbb{K}$ dada por $A_T(x,\psi) = \psi(T(x))$. Assim, para qualquer $u = \sum_{j=1}^n x_j \otimes \psi_j \in E \otimes F'$, tem-se

$$\varphi_T\left(\sum_{j=1}^n x_j \otimes \psi_j\right) = \sum_{j=1}^n \psi_j(T(x_j)).$$

Isso nos mostra que a aplicação de $L(E;F)$ em $(E \otimes F')^{\#}$ dada por $T \mapsto \varphi_T$ está bem definida.

Proposição 2.3.1 *Sejam E e F espaços de Banach, $T \in \mathcal{L}(E;F)$ e X e Y classes de sequências tais que $\alpha_{X,Y}$ é uma quasi-norma quasi-razoável e Y é esfericamente completa. Com isso:*

(a) *Se $T \in \mathcal{L}_{X;Y^{\text{dual}}}(E;F)$, então o funcional linear $\varphi_T : E \otimes_{\alpha_{X,Y}} F' \longrightarrow \mathbb{K}$ é contínuo e $\|\varphi_T\| \le \|T\|_{X;Y^{\text{dual}}}$.*

(b) *Se o funcional linear $\varphi_T : E \otimes_{\alpha_{X,Y}} F' \longrightarrow \mathbb{K}$ é contínuo, X é finitamente determinada (ou dominada) e Y é norma monótona, então $T \in \mathcal{L}_{X;Y^{\text{dual}}}(E;F)$ e $\|T\|_{X;Y^{\text{dual}}} \le \|\varphi_T\|$.*

Claro, as sentenças (a) *e* (b) *são equivalentes juntando-se suas hipóteses e, neste caso, vale $\|T\|_{X;Y^{\text{dual}}} = \|\varphi_T\|$.*

Demonstração. (a) Suponhamos que $T \in \mathcal{L}_{X;Y^{\text{dual}}}(E;F)$. Se $u = \sum\limits_{j=1}^n x_j \otimes \psi_j \in E \otimes F'$, então

$$\begin{aligned} |\varphi_T(u)| &= \left|\varphi_T\left(\sum_{j=1}^n x_j \otimes \psi_j\right)\right| = \left|\sum_{j=1}^n \psi_j(T(x_j))\right| \le \sum_{j=1}^n |\psi_j(T(x_j))| \\ &\le \|T\|_{X;Y^{\text{dual}}} \left\|(x_j)_{j=1}^n\right\|_{X(E)} \left\|(\psi_j)_{j=1}^n\right\|_{Y(F')}, \end{aligned}$$

onde na última desigualdade estamos usando a caracterização do Corolário 2.1.3 (d). Como isso vale para qualquer representação de u, temos $|\varphi_T(u)| \le \|T\|_{X;Y^{\text{dual}}} \alpha_{X,Y}(u)$ e assim $\varphi_T : E \otimes_{\alpha_{X,Y}} F' \longrightarrow \mathbb{K}$ é contínuo, com $\|\varphi_T\| \le \|T\|_{X;Y^{\text{dual}}}$.

(b) Se $n \in \mathbb{N}$ e $x_1, \ldots, x_n \in E$, segue que

$$\left\|(T(x_j))_{j=1}^n\right\|_{Y^{\text{dual}}(F)} = \sup_{(\psi_j)_{j=1}^\infty \in B_{Y(F')}} \left|\sum_{j=1}^n \psi_j(T(x_j))\right| = \sup_{(\psi_j)_{j=1}^\infty \in B_{Y(F')}} \left|\varphi_T\left(\sum_{j=1}^n x_j \otimes \psi_j\right)\right|$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \sup_{(\psi_j)_{j=1}^{\infty} \in B_{Y(F')}} \|\varphi_T\| \cdot \alpha_{X,Y}\left(\sum_{j=1}^{n} x_j \otimes \psi_j\right) \\
&\leq \|\varphi_T\| \left\|(x_j)_{j=1}^{n}\right\|_{X(E)} \sup_{(\psi_j)_{j=1}^{\infty} \in B_{Y(F')}} \left\|(\psi_j)_{j=1}^{n}\right\|_{Y(F')} \\
&\leq \|\varphi_T\| \left\|(x_j)_{j=1}^{n}\right\|_{X(E)} \sup_{(\psi_j)_{j=1}^{\infty} \in B_{Y(F')}} \left\|(\psi_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{Y(F')} \\
&= \|\varphi_T\| \left\|(x_j)_{j=1}^{n}\right\|_{X(E)},
\end{aligned}
$$

onde na última desigualdade usamos o fato de Y ser norma monótona. Como Y^{dual} é finitamente determinada e X é finitamente determinada (ou dominada), usando novamente o Corolário 2.1.3, temos $T \in \mathcal{L}_{X;Y^{\text{dual}}}(E;F)$ e $\|T\|_{X;Y^{\text{dual}}} \leq \|\varphi_T\|$. ■

Vejamos agora alguns exemplos de caracterizações de classes fornecidas pela proposição acima.

Exemplo 2.3.2 Se $1 \leq p \leq q \leq \infty$, temos $1 \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q^*}$ e a Proposição 2.3.1 nos garante que:

(a) $T \in \mathcal{L}_{\ell_p^w;\ell_q}(E;F)$ se, e somente se, o funcional linear $\varphi_T : E \otimes_{\alpha_{\ell_p^w,\ell_{q^*}}} F' \longrightarrow \mathbb{K}$ é contínuo. Neste caso, $\|T\|_{\ell_p^w;\ell_q} = \|\varphi_T\|$.

(b) $T \in \mathcal{L}_{\ell_p^w;\ell_q\langle\cdot\rangle}(E;F)$ se, e somente se, o funcional linear $\varphi_T : E \otimes_{\alpha_{\ell_p^w,\ell_{q^*}^w}} F' \longrightarrow \mathbb{K}$ é contínuo. Neste caso, $\|T\|_{\ell_p^w;\ell_q\langle\cdot\rangle} = \|\varphi_T\|$.

(c) Se $p \neq \infty$, então $T \in \mathcal{L}_{(\ell_p)_p^{\text{mid}};\ell_q}(E;F)$ se, e somente se, o funcional linear $\varphi_T : E \otimes_{\alpha_{(\ell_p)_p^{\text{mid}},\ell_{q^*}}} F' \longrightarrow \mathbb{K}$ é contínuo. Neste caso, $\|T\|_{(\ell_p)_p^{\text{mid}};\ell_q} = \|\varphi_T\|$.

Como consequência da proposição anterior é possível estabelecer resultados de inclusão para classes de operadores $(X;Y^{\text{dual}})$-somantes.

Corolário 2.3.3 *Sejam X_i e Y_i classes de sequências tais que α_{X_i,Y_i} é quasi-norma quasi-razoável, Y_i é esfericamente completa ($i = 1, 2$) e $\alpha_{X_1,Y_1} \leq \alpha_{X_2,Y_2}$. Então, para quaisquer espaços de Banach E e F, se X_2 é finitamente determinada (ou dominada) e Y_2 é norma monótona, tem-se*

$$
\mathcal{L}_{X_1;Y_1^{\text{dual}}}(E;F) \overset{1}{\hookrightarrow} \mathcal{L}_{X_2;Y_2^{\text{dual}}}(E;F).
$$

Disso e do fato de que $\alpha^t_{X_1,Y_1} \leq \alpha^t_{X_2,Y_2}$, segue que

$$
\mathcal{L}_{Y_1;X_1^{\text{dual}}}(E;F) \overset{1}{\hookrightarrow} \mathcal{L}_{Y_2;X_2^{\text{dual}}}(E;F),
$$

se Y_2 é finitamente determinada (ou dominada) e X_2 é norma monótona.

Demonstração. Seja $T \in \mathcal{L}_{X_1;Y_1^{\mathrm{dual}}}(E;F)$. Pela Proposição 2.3.1, temos $\varphi_T \in (E \otimes_{\alpha_{X_1,Y_1}} F')'$ e $\|\varphi_T\|_{(E\otimes_{\alpha_{X_1,Y_1}}F')'} \leq \|T\|_{X_1;Y_1^{\mathrm{dual}}}$. Como $\alpha_{X_1,Y_1} \leq \alpha_{X_2,Y_2}$, segue que

$$|\varphi_T(u)| \leq \|T\|_{X_1;Y_1^{\mathrm{dual}}}\, \alpha_{X_1,Y_1}(u) \leq \|T\|_{X_1;Y_1^{\mathrm{dual}}}\, \alpha_{X_2,Y_2}(u),$$

para qualquer $u \in E \otimes F'$. Assim, $\varphi_T \in (E \otimes_{\alpha_{X_2,Y_2}} F')'$ e $\|\varphi_T\|_{(E\otimes_{\alpha_{X_2,Y_2}}F')'} \leq \|T\|_{X_1;Y_1^{\mathrm{dual}}}$. Como X_2 é finitamente determinada (ou dominada) e Y_2 é norma monótona, usando a Proposição 2.3.1 mais uma vez, segue que $T \in \mathcal{L}_{X_2;Y_2^{\mathrm{dual}}}(E;F)$ e

$$\|T\|_{X_2;Y_2^{\mathrm{dual}}} \leq \|\varphi_T\|_{(E\otimes_{\alpha_{X_2,Y_2}}F')'} \leq \|T\|_{X_1;Y_1^{\mathrm{dual}}}.$$

■

Vamos agora apresentar exemplos de quasi-normas quasi-razoáveis α_{X_1,Y_1} e α_{X_2,Y_2} que satisfazem $\alpha_{X_1,Y_1} \leq \alpha_{X_2,Y_2}$, e os correspondentes resultados de inclusão obtidos mediante o uso do corolário anterior.

Sabemos que se $p \leq q$, então $\alpha_{\ell_{q^*}^w,\ell_q} = d_q \leq d_p = \alpha_{\ell_{p^*}^w,\ell_p}$ (veja [45, Proposition 6.6]). Pela transposição dessas normas, temos $g_q \leq g_p$ e assim o Corolário 2.3.3 garante o

Exemplo 2.3.4 Se $p \leq q$, então

$$\Pi_{q^*}(E;F) = \mathcal{L}_{\ell_{q^*}^w,\ell_{q^*}}(E;F) \overset{1}{\hookrightarrow} \mathcal{L}_{\ell_{p^*}^w,\ell_{p^*}}(E;F) = \Pi_{p^*}(E;F)$$

e

$$D_q(E;F) = \mathcal{L}_{\ell_q,\ell_q\langle\cdot\rangle}(E;F) \overset{1}{\hookrightarrow} \mathcal{L}_{\ell_p,\ell_p\langle\cdot\rangle}(E;F) = D_p(E;F),$$

para quaisquer espaços de Banach E e F.

Os resultados de inclusão obtidos acima, claro, já são bem conhecidos. O primeiro pode ser encontrado em [20, Theorem 2.8] (observando-se que $p \leq q \Leftrightarrow q^* \leq p^*$) e o segundo em [17, Theorem 2.4.1.].

Perceba que esses tipos de inclusões, em geral, são obtidas por dois resultados distintos (e também em trabalhos distintos, como no caso acima) enquanto que o Corolário 2.3.3 realiza esse trabalho em uma única etapa.

Para apresentar um exemplo de um novo resultado de inclusão, faremos antes a seguinte observação.

Observação 2.3.5 Sejam $1 \leq q \leq \infty$ e X uma classe de sequências tais que α_{X,ℓ_q} seja uma quasi-norma quasi-razoável em $E \otimes F$. Então, a quasi-norma α_{X,ℓ_q} admite ser expressa na forma

$$\alpha_{X,\ell_q}(u) = \inf \left\{ \left\|(\lambda_j)_{j=1}^k\right\|_q \left\|(x_j)_{j=1}^k\right\|_{X(E)} \left\|(y_j)_{j=1}^k\right\|_{\ell_\infty(F)} ; u = \sum_{j=1}^k \lambda_j x_j \otimes y_j \right\}.$$

Para verificar esse fato, vamos denotar o lado direito da expressão acima por $\delta_{X,\ell_q}(u)$ e notar primeiro que cada representação de u da forma $\sum_{j=1}^k \lambda_j x_j \otimes y_j$ pode ser escrita como $\sum_{j=1}^k x_j \otimes (\lambda_j y_j)$. Consequentemente,

$$\alpha_{X,\ell_q}(u) \leq \left\|(x_j)_{j=1}^k\right\|_{X(E)} \left\|(\lambda_j y_j)_{j=1}^k\right\|_{\ell_q(F)} \leq \left\|(\lambda_j)_{j=1}^k\right\|_q \left\|(x_j)_{j=1}^k\right\|_{X(E)} \left\|(y_j)_{j=1}^k\right\|_{\ell_\infty(F)}$$

e assim $\alpha_{X,\ell_q}(u) \leq \delta_{X,\ell_q}(u)$. Por outro lado, seja $\sum_{j=1}^k x_j \otimes y_j$ uma representação de u. Podemos escrever u como $\sum_{j=1}^k \|y_j\| \, x_j \otimes \frac{y_j}{\|y_j\|}$. Logo, $\delta_{X,\ell_q}(u) \leq \left\|(x_j)_{j=1}^k\right\|_{X(E)} \left\|(y_j)_{j=1}^k\right\|_{\ell_q(F)}$ e consequentemente $\delta_{X,\ell_q}(u) \leq \alpha_{X,\ell_q}(u)$.

Note que a observação acima vale, com as adaptações óbvias, para a norma transposta $\alpha_{\ell_q,X}$.

Exemplo 2.3.6 Suponha que $1 \leq p_j \leq q_j < \infty$ $(j = 1, 2)$, $q_1 \leq q_2$, $p_1 \leq p_2$ e $\frac{1}{p_1} - \frac{1}{q_1} \leq \frac{1}{p_2} - \frac{1}{q_2}$. Então,

$$\alpha_{\ell_{p_1}^{\mathrm{mid}},\ell_{q_1^*}} \leq \alpha_{\ell_{p_2,p_1}^{\mathrm{mid}},\ell_{q_2^*}}. \tag{2.4}$$

Com isso, a aplicação do Corolário 2.3.3 nos dá

$$\mathcal{L}_{\ell_{p_1}^{\mathrm{mid}};\ell_{q_1}}(E;F) \overset{1}{\hookrightarrow} \mathcal{L}_{\ell_{p_2,p_1}^{\mathrm{mid}};\ell_{q_2}}(E;F) \quad \text{e} \quad \mathcal{L}_{\ell_{q_1^*};(\ell_{p_1}^{\mathrm{mid}})^{\mathrm{dual}}}(E;F) \overset{1}{\hookrightarrow} \mathcal{L}_{\ell_{q_2^*};(\ell_{p_2,p_1}^{\mathrm{mid}})^{\mathrm{dual}}}(E;F),$$

para quaisquer espaços de Banach E e F.

Vamos dividir a demonstração de (2.4) em casos. Se $q_1 = q_2$, temos $p_1 = p_2$ e as normas são iguais. Suponhamos agora que $1 < q_1 < q_2 < \infty$. Sejam E, F espaços de Banach, $u \in E \otimes F$ e $\eta > 0$. É suficiente mostrar que $\alpha_{\ell_{p_1}^{\mathrm{mid}},\ell_{q_1^*}}(u) \leq \alpha_{\ell_{p_2,p_1}^{\mathrm{mid}},\ell_{q_2^*}}(u) + \eta$. Pela Observação 2.3.5, podemos escolher uma representação de u da forma $\sum_{j=1}^k \lambda_j x_j \otimes y_j$ tal que

$$\left\|(\lambda_j)_{j=1}^k\right\|_{q_2^*} \left\|(x_j)_{j=1}^k\right\|_{\ell_{p_2,p_1}^{\mathrm{mid}}(E)} \left\|(y_j)_{j=1}^k\right\|_{\ell_\infty(F)} \leq \alpha_{\ell_{p_2,p_1}^{\mathrm{mid}},\ell_{q_2^*}}(u) + \eta.$$

Reescrevemos essa representação como

$$u = \sum_{j=1}^k \lambda_j^{\frac{q_2^*}{q_1^*}} \left(\lambda_j^{1-\frac{q_2^*}{q_1^*}} x_j\right) \otimes y_j$$

e temos

$$\alpha_{\ell_{p_1}^{\mathrm{mid}},\ell_{q_1^*}}(u) \leq \left\|\left(\lambda_j^{\frac{q_2^*}{q_1^*}}\right)_{j=1}^k\right\|_{q_1^*} \left\|\left(\lambda_j^{1-\frac{q_2^*}{q_1^*}} x_j\right)_{j=1}^k\right\|_{\ell_{p_1}^{\mathrm{mid}}(E)} \left\|(y_j)_{j=1}^k\right\|_{\ell_\infty(F)}. \tag{2.5}$$

Note que

$$\begin{aligned}\left\|\left(\lambda_j^{1-\frac{q_2^*}{q_1^*}}x_j\right)_{j=1}^k\right\|_{\ell_{p_1}^{\text{mid}}(E)} &= \sup_{(\varphi_n)_{n=1}^\infty\in B_{\ell_{p_1}^w(E')}}\left(\sum_{j=1}^k\sum_{n=1}^\infty|\lambda_j|^{(1-\frac{q_2^*}{q_1^*})p_1}|\varphi_n(x_j)|^{p_1}\right)^{\frac{1}{p_1}}\\ &= \sup_{(\varphi_n)_{n=1}^\infty\in B_{\ell_{p_1}^w(E')}}\left(\sum_{j=1}^k|\lambda_j|^{(1-\frac{q_2^*}{q_1^*})p_1}\left(\sum_{n=1}^\infty|\varphi_n(x_j)|^{p_1}\right)\right)^{\frac{1}{p_1}}.\end{aligned}$$

Com as hipóteses sobre p_1,p_2,q_1 e q_2 não é difícil verificar que

$$\frac{1}{\frac{p_2}{p_1}}+\frac{1}{\frac{q_2^*q_1^*}{p_1q_1^*-p_1q_2^*}}\geq 1$$

e aplicando a desigualdade Hölder, obtemos

$$\begin{aligned}\left\|\left(\lambda_j^{1-\frac{q_2^*}{q_1^*}}x_j\right)_{j=1}^k\right\|_{\ell_{p_1}^{\text{mid}}(E)} &\leq \left(\sum_{j=1}^k|\lambda_j|^{(1-\frac{q_2^*}{q_1^*})p_1\cdot\frac{q_2^*q_1^*}{p_1q_1^*-p_1q_2^*}}\right)^{\frac{1}{p_1}\cdot\frac{p_1q_1^*-p_1q_2^*}{q_2^*q_1^*}}.\\ &\qquad \sup_{(\varphi_n)_{n=1}^\infty\in B_{\ell_{p_1}^w(E')}}\left(\sum_{j=1}^k\left(\sum_{n=1}^\infty|\varphi_n(x_j)|^{p_1}\right)^{\frac{p_2}{p_1}}\right)^{\frac{1}{p_1}\cdot\frac{p_1}{p_2}}\\ &= \left(\sum_{j=1}^k|\lambda_j|^{q_2^*}\right)^{\frac{1}{q_2^*}-\frac{1}{q_1^*}}\left\|(x_j)_{j=1}^k\right\|_{\ell_{p_2,p_1}^{\text{mid}}(E)}.\end{aligned}$$

Substituindo o que fizemos acima em (2.5), obtemos

$$\alpha_{\ell_{p_1}^{\text{mid}},\ell_{q_1^*}}(u)\leq\left\|(\lambda_j)_{j=1}^k\right\|_{q_2^*}\left\|(x_j)_{j=1}^k\right\|_{\ell_{p_2,p_1}^{\text{mid}}(E)}\left\|(y_j)_{j=1}^k\right\|_{\ell_\infty(F)}\leq\alpha_{\ell_{p_2,p_1}^{\text{mid}},\ell_{q_2^*}}(u)+\eta.$$

O último caso, em que $q_1=1$, é demonstrado da mesma forma que o caso anterior, mas considerando agora a desigualdade de Hölder com os índices p_2 e q_2^*, já que $1\leq\frac{1}{p_2}+\frac{1}{q_2^*}$.

O argumento usado para obter o novo resultado de inclusão acima também serve para mostrar mais um resultado conhecido que pode ser recuperado pelo Corolário 2.3.3. A demonstração neste caso, por ser análoga, será omitida.

Exemplo 2.3.7 Suponha que $1\leq p_j\leq q_j<\infty$ $(j=1,2)$, $q_1\leq q_2$, $p_1\leq p_2$ e $\frac{1}{p_1}-\frac{1}{q_1}\leq\frac{1}{p_2}-\frac{1}{q_2}$. Então

$$\alpha_{\ell_{p_1}^w,\ell_{q_1^*}}\leq\alpha_{\ell_{p_2}^w,\ell_{q_2^*}}$$

e, aplicando o Corolário 2.3.3, temos

$$\mathcal{L}_{\ell_{p_1}^w;\ell_{q_1}}(E;F)\overset{1}{\hookrightarrow}\mathcal{L}_{\ell_{p_2}^w;\ell_{q_2}}(E;F)\quad\text{e}\quad\mathcal{L}_{\ell_{q_1^*};\ell_{p_1^*}\langle\cdot\rangle}(E;F)\overset{1}{\hookrightarrow}\mathcal{L}_{\ell_{q_2^*};\ell_{p_2^*}\langle\cdot\rangle}(E;F),$$

isto é,

$$\Pi_{q_1,p_1}(E;F)\overset{1}{\hookrightarrow}\Pi_{q_2,p_2}(E;F)\quad\text{e}\quad D_{p_1^*,q_1^*}(E;F)\overset{1}{\hookrightarrow}D_{p_2^*,q_2^*}(E;F),$$

para quaisquer espaços de Banach E e F,

A primeira inclusão acima pode ser encontrada em [20, Theorem 10.4] e a segunda é obtida em [5, Theorem 3.2], fazendo uso da primeira.

Vamos agora à nossa segunda caracterização dos operadores $(X; Y^{\text{dual}})$-somantes: aquela por meio dos seus comportamentos em subespaços de dimensão finita.

Teorema 2.3.8 *Sejam E e F espaços de Banach, $T \in \mathcal{L}(E;F)$ e X e Y classes de sequências tais que Y é esfericamente completa, $\mathcal{L}_{X;Y^{\text{dual}}}$ é um ideal de Banach e $\alpha_{X,Y}$ uma quasi-norma tensorial. Suponha ainda que X seja finitamente determinada (ou dominada) e Y seja norma monótona. Então, $T \in \mathcal{L}_{X;Y^{\text{dual}}}(E;F)$ se, e somente se, existe uma constante $C > 0$ tal que para quaisquer $M \in \mathcal{F}(E)$ e $L \in \mathcal{CF}(F)$, o operador*

$$Q_L \circ T \circ I_M : M \longrightarrow E \longrightarrow F \longrightarrow \frac{F}{L}$$

satisfaz $\|Q_L \circ T \circ I_M\|_{X;Y^{\text{dual}}} \leq C$. Além disso, $\|T\|_{X;Y^{\text{dual}}} = \sup \|Q_L \circ T \circ I_M\|_{X;Y^{\text{dual}}}$, onde o supremo é tomado sobre todos os pares $(M, L) \in \mathcal{F}(E) \times \mathcal{CF}(F)$.

Demonstração. Suponhamos que $T \in \mathcal{L}_{X;Y^{\text{dual}}}(E;F)$ e $s := \sup \|Q_L \circ T \circ I_M\|_{X;Y^{\text{dual}}}$. Como $\left[\mathcal{L}_{X;Y^{\text{dual}}}, \|\cdot\|_{X;Y^{\text{dual}}}\right]$ é um ideal, tem-se $Q_L \circ T \circ I_M \in \mathcal{L}_{X;Y^{\text{dual}}}(M; \frac{F}{L})$ e

$$\|Q_L \circ T \circ I_M\|_{X;Y^{\text{dual}}} \leq \|Q_L\| \, \|T\|_{X;Y^{\text{dual}}} \, \|I_M\| = \|T\|_{X;Y^{\text{dual}}} .$$

Assim, $s \leq \|T\|_{X;Y^{\text{dual}}}$.

Reciprocamente, sejam $u \in E \otimes F'$ e $\eta > 0$. Como $\alpha_{X,Y}$ é finitamente gerada, existem subespaços $M \in \mathcal{F}(E)$ e $N \in \mathcal{F}(F')$ tais que $u = \sum\limits_{j=1}^{n} x_j \otimes y_j' \in M \otimes N$ e

$$\alpha_{X,Y}(u; M \otimes N) \leq (1+\eta)\alpha_{X,Y}(u; E \otimes F').$$

Considere o subespaço $L \in \mathcal{CF}(F)$ tal que $\left(\frac{F}{L}\right)' \overset{1}{=} N$, por meio da aplicação $Q_L' : \left(\frac{F}{L}\right)' \longrightarrow N$. Seja $\psi_j \in \left(\frac{F}{L}\right)'$ tal que $Q_L'(\psi_j) = y_j', j = 1, \ldots, n$. Note que $\sum\limits_{j=1}^{n} x_j \otimes y_j'$ e $\sum\limits_{j=1}^{n} x_j \otimes \psi_j$ são representações de u e que

$$\begin{aligned} \varphi_{Q_L \circ T \circ I_M}(u) = \varphi_{Q_L \circ T \circ I_M}\left(\sum_{j=1}^{n} x_j \otimes \psi_j\right) &= \sum_{j=1}^{n} \psi_j\left(Q_L(T(x_j))\right) = \sum_{j=1}^{n} Q_L'(\psi_j)(T(x_j)) \\ &= \sum_{j=1}^{n} y_j'(T(x_j)) = \varphi_T\left(\sum_{j=1}^{n} x_j \otimes y_j'\right) = \varphi_T(u). \end{aligned}$$

Por hipótese $Q_L \circ T \circ I_M \in \mathcal{L}_{X;Y^{\text{dual}}}(M; \frac{F}{L})$ e assim, pela Proposição 2.3.1, segue que o funcional linear $\varphi_{Q_L \circ T \circ I_M} : M \otimes_{\alpha_{X,Y}} \left(\frac{F}{L}\right)' \longrightarrow \mathbb{K}$ é contínuo e $\|\varphi_{Q_L \circ T \circ I_M}\| \leq \|Q_L \circ T \circ I_M\|_{X;Y^{\text{dual}}}$. Daí, tem-se

$$
\begin{aligned}
|\varphi_T(u)| = |\varphi_{Q_L \circ T \circ I_M}(u)| &\leq \|\varphi_{Q_L \circ T \circ I_M}\| \, \alpha_{X,Y}\left(u; M \otimes \left(\frac{F}{L}\right)'\right) \\
&= \|Q_L \circ T \circ I_M\|_{X;Y^{\text{dual}}} \cdot \alpha_{X,Y}(u; M \otimes N) \leq s \cdot (1+\eta)\alpha_{X,Y}(u; E \otimes F')
\end{aligned}
$$

e segue que $|\varphi_T(u)| \leq s \cdot \alpha_{X,Y}(u)$ e $\varphi_T : E \otimes_{\alpha_{X,Y}} F' \longrightarrow \mathbb{K}$ é contínuo. Usando novamente a Proposição 2.3.1, segue que $T \in \mathcal{L}_{X;Y^{\text{dual}}}(E; F)$ e que $\|T\|_{X;Y^{\text{dual}}} \leq \|\varphi_T\|$, donde temos $\|T\|_{X;Y^{\text{dual}}} \leq s$. ∎

Observe que, com todas as hipóteses do teorema acima, o Teorema 1.3.7 garante que o ideal de Banach $[\mathcal{L}_{X;Y^{\text{dual}}}, \|\cdot\|_{X;Y^{\text{dual}}}]$ é maximal e assim temos o seguinte corolário:

Corolário 2.3.9 *Sejam X e Y classes de sequências tais que Y é esfericamente completa, $\mathcal{L}_{X;Y^{\text{dual}}}$ é um ideal de Banach e $\alpha_{X,Y}$ uma quasi-norma tensorial. Suponha ainda que X é finitamente determinada (ou dominada) e Y é norma monótona. Então, o ideal $\mathcal{L}_{X;Y^{\text{dual}}}$ é maximal.*

Vejamos alguns exemplos da aplicação do corolário acima.

Exemplo 2.3.10 a) Considerando $1 \leq p \leq q \leq \infty$, $X = \ell_p^w, Y = \ell_{q^*}$ e a quasi-norma tensorial $\alpha_{\ell_p^w, \ell_{q^*}}$, segue que

$$\left[\mathcal{L}_{\ell_p^w;\ell_q}, \|\cdot\|_{\ell_p^w;\ell_q}\right] = [\Pi_{q,p}, \pi_{q,p}]$$

é um ideal maximal, o que é bem conhecido (ver [20, Proposition 10.2], por exemplo).
b) Considerando $1 \leq p \leq q \leq \infty$, $X = \ell_p, Y = \ell_{q^*}^w$ e a quasi-norma tensorial $\alpha_{\ell_p, \ell_{q^*}^w}$, o ideal

$$\left[\mathcal{L}_{\ell_p;\ell_q\langle\cdot\rangle}, \|\cdot\|_{\ell_p;\ell_q\langle\cdot\rangle}\right] = [\mathcal{D}_{q,p}, d_{q,p}]$$

é maximal. Acreditamos que este deva ser um caso conhecido, pelo menos para $p = q$, mas não encontramos referências sobre isso na literatura.
c) Agora três casos novos. Seja $1 \leq p \leq q \leq \infty$ com $p \neq \infty$.

- Se $X = (\ell_p)_p^{\text{mid}}$ e $Y = \ell_{q^*}^w$, então

$$\left[\mathcal{L}_{(\ell_p)_p^{\text{mid}};\ell_q\langle\cdot\rangle}, \|\cdot\|_{(\ell_p)_p^{\text{mid}};\ell_q\langle\cdot\rangle}\right]$$

  é um ideal maximal.

- Se $X = (\ell_p)_p^{\mathrm{mid}}$ e $Y = \ell_{q^*}$, então

$$\left[\mathcal{L}_{(\ell_p)_p^{\mathrm{mid}};\ell_q}, \|\cdot\|_{(\ell_p)_p^{\mathrm{mid}};\ell_q}\right]$$

é um ideal maximal.

- Se $X = (\ell_p\langle\cdot\rangle)_p^{\mathrm{mid}}$ e $Y = \ell_{q^*}$, então

$$\left[\mathcal{L}_{(\ell_p\langle\cdot\rangle)_p^{\mathrm{mid}};\ell_q}, \|\cdot\|_{(\ell_p\langle\cdot\rangle)_p^{\mathrm{mid}};\ell_q}\right]$$

é um ideal maximal.

2.4 Dual tensorial e operadores somantes

O espaço dual do produto tensorial $E \otimes_\alpha F$, onde α é uma norma razoável, pode ser interpretado como um subespaço de formas bilineares em $E \times F$, um subespaço de operadores lineares de E em F' ou um subespaço de operadores lineares de F em E'. De fato, como $(E \otimes_\alpha F)' \subseteq (E \otimes_\pi F)'$, do Teorema 1.2.3 e do que foi discutido na Seção 1.2, temos

$$(E \otimes_\alpha F)' \subseteq \mathcal{B}(E,F) \stackrel{1}{=} \mathcal{L}(E;F') \stackrel{1}{=} \mathcal{L}(F;E'). \tag{2.6}$$

Mas quando α é uma quasi-norma quasi-razoável qualquer, não conseguimos garantir que $\alpha \leq \pi$ e, portanto, que (2.6) faça sentido.

Apresentamos nesta seção condições para que a identificação do dual do produto tensorial, munido com a quasi-norma quasi-razoável $\alpha_{X,Y}$, com subespaços como em (2.6) seja possível.

Um fato importante: pode ocorrer que o dual de um espaço quasi-normado seja o espaço nulo (dual trivial). Como, em nosso contexto, estamos identificando esses duais com classes de operadores, justifica-se, ao longo da seção, um cuidado em estabelecer condições que excluam esse tipo de trivialidade.

Nosso primeiro objetivo será identificar $(E \otimes_{\alpha_{X,Y}} F)'$, onde $\alpha_{X,Y}$ é uma quasi-norma, com um subespaço de formas bilineares em $\mathcal{B}(E,F)$. É o que faremos no resultado abaixo.

Teorema 2.4.1 *Sejam E e F espaços de Banach e X e Y classes de sequências tais que $\alpha_{X,Y}$ é uma quasi-norma quasi-razoável. Suponha que X seja finitamente determinada (ou dominada), Y seja finitamente determinada (ou dominada) e que X ou Y seja ℓ_∞-completa. Então,*

$$\left(E \otimes_{\alpha_{X,Y}} F\right)' \stackrel{1}{=} \mathcal{L}_{X,Y;\ell_1}(E,F;\mathbb{K}).$$

Demonstração. Considere a aplicação

$$\Psi : \mathcal{L}_{X,Y;\ell_1}(E,F;\mathbb{K}) \longrightarrow \left(E \otimes_{\alpha_{X,Y}} F\right)'$$

definida por

$$\Psi(A)\left(\sum_{j=1}^{n} x_j \otimes y_j\right) = \sum_{j=1}^{n} A(x_j, y_j).$$

Note que $\Psi(A) : E \otimes F \longrightarrow \mathbb{K}$ é um funcional linear, uma vez que por definição $\Psi(A)$ é a linearização da forma bilinear A. Se $u = \sum\limits_{j=1}^{n} x_j \otimes y_j \in E \otimes F$, temos

$$|\Psi(A)(u)| = \left|\sum_{j=1}^{n} A(x_j, y_j)\right| \leq \sum_{j=1}^{n} |A(x_j, y_j)| \leq \|A\|_{X,Y;\ell_1} \left\|(x_j)_{j=1}^{n}\right\|_{X(E)} \left\|(y_j)_{j=1}^{n}\right\|_{Y(F)},$$

onde na última desigualdade usamos a Proposição 1.4.3 para $A \in \mathcal{L}_{X,Y;\ell_1}(E,F;\mathbb{K})$. Como isso vale para qualquer representação de u, temos $|\Psi(A)(u)| \leq \|A\|_{X,Y;\ell_1} \alpha_{X,Y}(u)$ e dessa forma $\Psi(A) : E \otimes_{\alpha_{X,Y}} F \longrightarrow \mathbb{K}$ é contínuo. Isso nos diz que Ψ está bem definida. Observe ainda que Ψ é linear e além disso contínua, pois, do que fizemos acima, segue que $\|\Psi(A)\| \leq \|A\|_{X,Y;\ell_1}$.

Vamos mostrar agora que Ψ é sobrejetiva. Seja $\varphi \in (E \otimes_{\alpha_{X,Y}} F)'$. Considere a aplicação $A_\varphi : E \times F \longrightarrow \mathbb{K}$ definida por $A_\varphi(x,y) = \varphi(x \otimes y)$, que claramente está bem definida e é bilinear. Vejamos que $A_\varphi \in \mathcal{L}_{X,Y;\ell_1}(E,F;\mathbb{K})$.

Se $(x_j)_{j=1}^{n}$ em E^n e $(y_j)_{j=1}^{n}$ em F^n, supondo que X é ℓ_∞-completa, temos

$$\begin{aligned}
\left\|(A_\varphi(x_j, y_j))_{j=1}^{n}\right\|_1 &= \sup_{\Phi \in B_{(\ell_1)'}} \left|\Phi\left((A_\varphi(x_j, y_j))_{j=1}^{n}\right)\right| = \sup_{(\lambda_j)_{j=1}^{\infty} \in B_{\ell_\infty}} \left|\sum_{j=1}^{n} A_\varphi(x_j, y_j) \cdot \lambda_j\right| \\
&= \sup_{(\lambda_j)_{j=1}^{\infty} \in B_{\ell_\infty}} \left|\sum_{j=1}^{n} \varphi(x_j \otimes y_j) \cdot \lambda_j\right| = \sup_{(\lambda_j)_{j=1}^{\infty} \in B_{\ell_\infty}} \left|\sum_{j=1}^{n} \varphi((\lambda_j x_j) \otimes y_j)\right| \\
&= \sup_{(\lambda_j)_{j=1}^{\infty} \in B_{\ell_\infty}} \left|\varphi\left(\sum_{j=1}^{n} (\lambda_j x_j) \otimes y_j\right)\right| \\
&\leq \sup_{(\lambda_j)_{j=1}^{\infty} \in B_{\ell_\infty}} \|\varphi\| \left\|(\lambda_j x_j)_{j=1}^{n}\right\|_{X(E)} \left\|(y_j)_{j=1}^{n}\right\|_{Y(F)} \\
&\leq \|\varphi\| \left\|(x_j)_{j=1}^{n}\right\|_{X(E)} \left\|(y_j)_{j=1}^{n}\right\|_{Y(F)}.
\end{aligned}$$

Supondo, sem perda de generalidade, que X e Y sejam finitamente determinadas, o cálculo anterior mostra que $A_\varphi \in \mathcal{L}_{X,Y;\ell_1}(E,F;\mathbb{K})$ e que $\|A_\varphi\|_{X,Y;\ell_1} \leq \|\varphi\|$.

Resta-nos mostrar que $\Psi(A_\varphi) = \varphi$ em $E \otimes_{\alpha_{X,Y}} F$. Se $u = \sum_{j=1}^{n} x_j \otimes y_j \in E \otimes_{\alpha_{X,Y}} F$, temos

$$\begin{aligned}\Psi\left(A_\varphi\right)(u) = \Psi\left(A_\varphi\right)\left(\sum_{j=1}^{n} x_j \otimes y_j\right) &= \sum_{j=1}^{n} A_\varphi(x_j, y_j) \\ = \sum_{j=1}^{n} \varphi(x_j \otimes y_j) = \varphi\left(\sum_{j=1}^{n} x_j \otimes y_j\right) &= \varphi(u).\end{aligned}$$

Portanto, $\mathcal{L}_{X,Y;\ell_1}(E, F; \mathbb{K})$ e $(E \otimes_{\alpha_{X,Y}} F)'$ são isometricamente isomorfos. ■

Observação 2.4.2 No Teorema acima e em muitos resultados deste capítulo, temos o espaço $E \otimes_{\alpha_{X,Y}} F$ sem o completamento, em virtude do fato apontado pela Observação 1.5.2. Quando $\alpha_{X,Y}$ for de fato uma norma, usando o argumento de extensão ao fecho, vale o resultado para o completamento do espaço e, neste caso, temos

$$\left(E \widehat{\otimes}_{\alpha_{X,Y}} F\right)' \stackrel{1}{=} \mathcal{L}_{X,Y;\ell_1}(E, F; \mathbb{K}).$$

Antes de mostrarmos exemplos da aplicação do resultado anterior, vejamos alguns casos em que classes da forma $\mathcal{L}_{X,Y;\ell_1}(E, F; \mathbb{K})$ não sejam triviais. Por exemplo, o Teorema 1.4.5 apresenta condições sobre as classes de sequências X e Y de modo que $\mathcal{L}_{X,Y;\ell_1}(E, F; \mathbb{K}) \neq \{0\}$, uma vez que todo ideal de operadores bilineares contém os operadores de tipo finito. Como ilustração, apresentamos alguns ideais de operadores bilineares gerados por esse teorema:

• Sendo $1 \leq p \leq q \leq \infty$, tem-se $1 \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q^*}$ e são ideais de Banach de operadores bilineares as classes:

(a) $\left[\mathcal{L}_{\ell_p^w,\ell_{q^*};\ell_1}, \|\cdot\|_{\ell_p^w,\ell_{q^*};\ell_1}\right]$;

(b) $\left[\mathcal{L}_{\ell_p,\ell_{q^*}\langle\cdot\rangle;\ell_1}, \|\cdot\|_{\ell_p,\ell_{q^*}\langle\cdot\rangle;\ell_1}\right]$;

(c) $\left[\mathcal{L}_{(\ell_p)_p^{\text{mid}},\ell_{q^*}\langle\cdot\rangle;\ell_1}, \|\cdot\|_{(\ell_p)_p^{\text{mid}},\ell_{q^*}\langle\cdot\rangle;\ell_1}\right]$ com $p \neq \infty$;

(d) $\left[\mathcal{L}_{(\ell_p)_p^{\text{mid}},\ell_{q^*}^{\text{mid}};\ell_1}, \|\cdot\|_{(\ell_p)_p^{\text{mid}},\ell_{q^*}^{\text{mid}};\ell_1}\right]$ com $p \neq \infty$ e $q \neq 1$.

Vejamos agora exemplos do uso do Teorema 2.4.1.

Exemplo 2.4.3 Sejam $1 \leq p \leq q \leq \infty$.
a) Se $X = \ell_p^w$ e $Y = \ell_{q^*}$, tomando-se a quasi-norma $\alpha_{\ell_p^w,\ell_{q^*}}$, segue que

$$\left(E \otimes_{\alpha_{\ell_p^w,\ell_{q^*}}} F\right)' \stackrel{1}{=} \mathcal{L}_{\ell_p^w,\ell_{q^*};\ell_1}(E, F; \mathbb{K}).$$

b) Se $q \neq 1$, $X = \ell_p^w$ e $Y = \ell_{q^*}^{\mathrm{mid}}$, para a quasi-norma $\alpha_{\ell_p^w, \ell_{q^*}^{\mathrm{mid}}}$, tem-se

$$\left(E \otimes_{\alpha_{\ell_p^w, \ell_{q^*}^{\mathrm{mid}}}} F\right)' \stackrel{1}{=} \mathcal{L}_{\ell_p^w, \ell_{q^*}^{\mathrm{mid}}; \ell_1}(E, F; \mathbb{K}).$$

c) Se $p \neq \infty$, $X = (\ell_p)_p^{\mathrm{mid}}$ e $Y = \ell_{q^*}$, para a quasi-norma $\alpha_{(\ell_p)_p^{\mathrm{mid}}, \ell_{q^*}}$, tem-se

$$\left(E \otimes_{\alpha_{(\ell_p)_p^{\mathrm{mid}}, \ell_{q^*}}} F\right)' \stackrel{1}{=} \mathcal{L}_{(\ell_p)_p^{\mathrm{mid}}, \ell_{q^*}; \ell_1}(E, F; \mathbb{K}).$$

Agora, tendo em mente o Teorema 2.4.1 e o primeiro isomorfismo em (2.6), uma questão imediata surge: qual a classe de operadores lineares e contínuos $\mathcal{A}(E; F')$, descrita em termos das classes de sequências X e Y, está associada à classe $\mathcal{L}_{X,Y;\ell_1}(E, F; \mathbb{K})$?

Assim, uma vez que consigamos determinar esta classe, teremos as identificações

$$\left(E \otimes_{\alpha_{X,Y}} F\right)' \stackrel{1}{=} \mathcal{L}_{X,Y;\ell_1}(E, F; \mathbb{K}) \stackrel{1}{=} \mathcal{A}(E; F'),$$

considerando-se todas as hipóteses necessárias para tal.

Nesta direção, apresentamos a seguir um resultado que acreditamos ser interessante por si só e que poderia ser estudado, independentemente, no contexto da teoria de operadores somantes. Mas antes, vamos apresentar um lema que fornece uma caracterização da norma em Y^{dual} em espaços duais, que será útil para este resultado e em outras partes do trabalho.

Lema 2.4.4 *Sejam F um espaço de Banach e Y uma classe de sequências esfericamente completa, linearmente estável, finitamente determinada (ou dominada) e finitamente injetiva. Se $(\varphi_j)_{j=1}^\infty \in Y^{\mathrm{dual}}(F')$, então*

$$\left\|(\varphi_j)_{j=1}^\infty\right\|_{Y^{\mathrm{dual}}(F')} = \sup_{(y_j)_{j=1}^\infty \in B_{Y(F)}} \left|\sum_{j=1}^\infty \varphi_j(y_j)\right|.$$

Demonstração. Aplicando o item (b) do Teorema 1.4.10 e usando o fato de que $J_{Y(F)}(Y(F))$ é normante para $Y(F)'$, temos

$$\begin{aligned}
\left\|(\varphi_j)_{j=1}^\infty\right\|_{Y^{\mathrm{dual}}(F')} &= \left\|J\left((\varphi_j)_{j=1}^\infty\right)\right\|_{Y(F)'} \\
&= \sup_{\Phi \in B_{(Y(F))''}} \left|\Phi\left(J\left((\varphi_j)_{j=1}^\infty\right)\right)\right| \\
&= \sup_{\Phi \in B_{J_{Y(F)}Y(F)}} \left|\Phi\left(J\left((\varphi_j)_{j=1}^\infty\right)\right)\right|
\end{aligned}$$

$$= \sup_{(y_j)_{j=1}^\infty \in B_{Y(F)}} \left| J_{Y(F)}\left((y_j)_{j=1}^\infty\right)\left(J\left((\varphi_j)_{j=1}^\infty\right)\right)\right|$$
$$= \sup_{(y_j)_{j=1}^\infty \in B_{Y(F)}} \left| J\left((\varphi_j)_{j=1}^\infty\right)\left((y_j)_{j=1}^\infty\right)\right|$$
$$= \sup_{(y_j)_{j=1}^\infty \in B_{Y(F)}} \left| \sum_{j=1}^\infty \varphi_j(y_j)\right|.$$

■

Proposição 2.4.5 *Sejam E e F espaços de Banach e X e Y classes de sequências, onde Y é esfericamente completa, linearmente estável, finitamente determinada (ou dominada) e finitamente injetiva. Então,*

$$\mathcal{L}_{X,Y;\ell_1}(E,F;\mathbb{K}) \overset{1}{=} \mathcal{L}_{X;Y^{\text{dual}}}(E;F').$$

Demonstração. Considere a aplicação

$$\Psi : \mathcal{L}_{X,Y;\ell_1}(E,F;\mathbb{K}) \longrightarrow \mathcal{L}_{X;Y^{\text{dual}}}(E;F')$$

definida por $\Psi\,(A)\,(x)\,(y) = A(x,y)$. Usando a bilinearidade e continuidade de A, é imediato mostrar que $\Psi(A) \in \mathcal{L}(E,F')$. Mais ainda, se $(x_j)_{j=1}^\infty \in X(E)$, então

$$\left\|(\Psi(A)(x_j))_{j=1}^\infty\right\|_{Y^{\text{dual}}(F')} = \sup_{(y_j)_{j=1}^\infty \in B_{Y(F)}} \left|\sum_{j=1}^\infty \Psi(A)(x_j)(y_j)\right|$$
$$\leq \sup_{(y_j)_{j=1}^\infty \in B_{Y(F)}} \sum_{j=1}^\infty |A(x_j,y_j)| \leq \|A\|_{X,Y;\ell_1} \left\|(x_j)_{j=1}^\infty\right\|_{X(E)},$$

onde o Lema 2.4.4 está sendo usado na primeira igualdade. Dessa forma, $\Psi(A) \in \mathcal{L}_{X;Y^{\text{dual}}}(E;F')$ e isso nos diz que Ψ está bem definida. É fácil mostrar que Ψ é linear e, do cálculo anterior, segue sua continuidade e que

$$\|\Psi(A)\|_{X;Y^{\text{dual}}} \leq \|A\|_{X,Y;\ell_1}.$$

Agora mostraremos que Ψ é sobrejetiva. Se $T \in \mathcal{L}_{X;Y^{\text{dual}}}(E;F')$, considere a forma bilinear contínua $A_T : E \times F \longrightarrow \mathbb{K}$ definida por $A_T(x,y) = T(x)(y)$. Vejamos que $A_T \in \mathcal{L}_{X,Y;\ell_1}(E,F;\mathbb{K})$.

Se $(x_j)_{j=1}^\infty$ em $X(E)$ e $(y_j)_{j=1}^\infty$ em $Y(F)$, temos

$$\left\|(A_T(x_j,y_j))_{j=1}^\infty\right\|_1 = \sum_{j=1}^\infty |A_T(x_j,y_j)| = \sum_{j=1}^\infty |T(x_j)(y_j)| = \sum_{j=1}^\infty |J_F(y_j)(T(x_j))|$$

$$\leq \|T\|_{X;Y^{\text{dual}}} \left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{X(E)} \left\|(J_F(y_j))_{j=1}^{\infty}\right\|_{Y(F'')}$$
$$\leq \|T\|_{X;Y^{\text{dual}}} \left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{X(E)} \left\|(y_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{Y(F)},$$

onde na penúltima desigualdade usamos o fato de que $T \in \mathcal{L}_{X;Y^{\text{dual}}}(E;F')$ e na última os fatos de que Y é linearmente estável e $\|J_F\| = 1$. Isso mostra que $A_T \in \mathcal{L}_{X,Y;\ell_1}(E,F;\mathbb{K})$ e que $\|A_T\|_{X,Y;\ell_1} \leq \|T\|_{X;Y^{\text{dual}}}$.

Resta mostrarmos que $\Psi(A_T) = T$. De fato, se $x \in E$ e $y \in F$, então

$$\Psi(A_T)(x)(y) = A_T(x,y) = T(x)(y).$$

Portanto, $\mathcal{L}_{X,Y;\ell_1}(E,F;\mathbb{K})$ e $\mathcal{L}_{X;Y^{\text{dual}}}(E;F')$ são isometricamente isomorfos. ■

Como comentado acima, de posse do Teorema 2.4.1 e da Proposição 2.4.5, segue imediatamente o seguinte corolário:

Corolário 2.4.6 *Sejam E e F espaços de Banach e X e Y classes de sequências tais que $\alpha_{X,Y}$ é uma quasi-norma quasi-razoável, com Y esfericamente completa. Suponha que X é finitamente determinada (ou dominada), Y é finitamente determinada (ou dominada), linearmente estável e finitamente injetiva, e que X ou Y seja ℓ_∞-completa. Então,*

$$\left(E \otimes_{\alpha_{X,Y}} F\right)' \overset{1}{=} \mathcal{L}_{X;Y^{\text{dual}}}(E;F').$$

O resultado acima pode ser obtido de maneira direta e, dessa forma, a hipótese de que ao menos uma das classes de sequências X ou Y seja ℓ_∞-completa pode ser substituída pela hipótese de que Y seja norma monótona.

Proposição 2.4.7 (versão direta do Corolário 2.4.6) *Sejam E e F espaços de Banach e X e Y classes de sequências tais que $\alpha_{X,Y}$ é uma quasi-norma quasi-razoável, com Y esfericamente completa. Suponha ainda que X é finitamente determinada (ou dominada), Y é finitamente determinada (ou dominada), linearmente estável, finitamente injetiva e norma monótona. Então,*

$$\left(E \otimes_{\alpha_{X,Y}} F\right)' \overset{1}{=} \mathcal{L}_{X;Y^{\text{dual}}}(E;F').$$

Demonstração. Considere a aplicação

$$\Psi : \mathcal{L}_{X;Y^{\text{dual}}}(E;F') \longrightarrow \left(E \otimes_{\alpha_{X,Y}} F\right)'$$

definida por

$$\Psi(T)\left(\sum_{j=1}^{n} x_j \otimes y_j\right) = \sum_{j=1}^{n} T(x_j)(y_j).$$

Note que $\Psi(T) : E \otimes F \longrightarrow \mathbb{K}$ é um funcional linear, uma vez que $\Psi(T)$ coincide com a linearização da forma bilinear $A_T : E \times F \longrightarrow \mathbb{K}$ definida por $A_T(x,y) = T(x)(y)$. Além disso, se $u = \sum\limits_{j=1}^{n} x_j \otimes y_j \in E \otimes F$, temos

$$\begin{aligned}
|\Psi(T)(u)| = \left|\sum_{j=1}^{n} T(x_j)(y_j)\right| &\leq \sum_{j=1}^{n} |T(x_j)(y_j)| = \sum_{j=1}^{n} |J_F(y_j)(T(x_j))| \\
&\leq \|T\|_{X;Y^{\text{dual}}} \left\|(x_j)_{j=1}^{n}\right\|_{X(E)} \left\|(J_F(y_j))_{j=1}^{n}\right\|_{Y(F'')} \\
&\leq \|T\|_{X;Y^{\text{dual}}} \left\|(x_j)_{j=1}^{n}\right\|_{X(E)} \left\|(y_j)_{j=1}^{n}\right\|_{Y(F)}
\end{aligned}$$

e como isso vale para qualquer representação de u, temos

$$|\Psi(T)(u)| \leq \|T\|_{X;Y^{\text{dual}}} \alpha_{X,Y}(u).$$

Dessa forma, o funcional $\Psi(T) : E \otimes_{\alpha_{X,Y}} F \longrightarrow \mathbb{K}$ é contínuo e isso nos mostra que Ψ está bem definida. Observe ainda que Ψ é linear (fácil) e contínua, já que, pelo que calculamos acima, temos

$$\|\Psi(T)\| \leq \|T\|_{X;Y^{\text{dual}}}.$$

Mostraremos agora que Ψ é sobrejetiva. Se $\varphi \in (E \otimes_{\alpha_{X,Y}} F)'$, considere a aplicação linear $T_\varphi : E \longrightarrow F'$ definida por $T_\varphi(x)(y) = \varphi(x \otimes y)$. Vejamos que $T_\varphi \in \mathcal{L}_{X;Y^{\text{dual}}}(E;F')$.

Se $(x_j)_{j=1}^{n}$ em E^n, temos

$$\begin{aligned}
\left\|(T_\varphi(x_j))_{j=1}^{n}\right\|_{Y^{\text{dual}}(F')} &= \sup_{(y_j)_{j=1}^{\infty} \in B_{Y(F)}} \left|\sum_{j=1}^{n} T_\varphi(x_j)(y_j)\right| = \sup_{(y_j)_{j=1}^{\infty} \in B_{Y(F)}} \left|\sum_{j=1}^{n} \varphi(x_j \otimes y_j)\right| \\
&= \sup_{(y_j)_{j=1}^{\infty} \in B_{Y(F)}} \left|\varphi\left(\sum_{j=1}^{n} x_j \otimes y_j\right)\right| \leq \|\varphi\| \left\|(x_j)_{j=1}^{n}\right\|_{X(E)},
\end{aligned}$$

onde na primeira igualdade aplicamos o Lema 2.4.4 e na última desigualdade usamos que Y é norma monótona. Como Y^{dual} é finitamente determinada e X é finitamente determinada (ou dominada), segue que $T_\varphi \in \mathcal{L}_{X;Y^{\text{dual}}}(E;F')$ e que $\|T_\varphi\|_{X;Y^{\text{dual}}} \leq \|\varphi\|$.

Resta-nos mostrar que $\Psi(T_\varphi) = \varphi$ em $E \otimes_{\alpha_{X,Y}} F$. Assim, se $u = \sum_{j=1}^{n} x_j \otimes y_j \in E \otimes_{\alpha_{X,Y}} F$, temos

$$\Psi\left(T_\varphi\right)(u) = \Psi\left(T_\varphi\right)\left(\sum_{j=1}^{n} x_j \otimes y_j\right) = \sum_{j=1}^{n} T_\varphi(x_j)(y_j)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \varphi(x_j \otimes y_j) = \varphi\left(\sum_{j=1}^{n} x_j \otimes y_j\right) = \varphi(u).$$

Portanto, $\mathcal{L}_{X;Y^{\mathrm{dual}}}(E;F')$ e $(E \otimes_{\alpha_{X,Y}} F)'$ são isometricamente isomorfos. $\blacksquare$

Antes de apresentarmos alguns exemplos de aplicações dos resultados anteriores, vamos primeiramente identificar o espaço $(E \otimes_{\alpha_{X,Y}} F)'$ com um subespaço de operadores em $\mathcal{L}(F;E')$, em função do segundo isomorfismo em (2.6), e em seguida caracterizar o espaço $(E \otimes_{\alpha^t_{X,Y}} F)'$. A demonstração do primeiro resultado será omitida por ser análoga àquela da Proposição 2.4.7, apenas trocando as hipóteses da classe de sequências Y para X e fazendo adaptações sutis. A do segundo foi estabelecida como um corolário da Proposição 2.4.7 mas, claro, poderia ter sido estabelecida de forma independente e direta.

Proposição 2.4.8 *Sejam E e F espaços de Banach e X e Y classes de sequências tais que $\alpha_{X,Y}$ é uma quasi-norma quasi-razoável, com X esfericamente completa. Suponha ainda que Y é finitamente determinada (ou dominada) e que X é finitamente determinada (ou dominada), linearmente estável, finitamente injetiva e norma monótona. Então, temos*

$$\left(E \otimes_{\alpha_{X,Y}} F\right)' \overset{1}{=} \mathcal{L}_{Y;X^{\mathrm{dual}}}(F;E').$$

Corolário 2.4.9 (da Proposição 2.4.7) *Sejam E e F espaços de Banach e X e Y classes de sequências tais que $\alpha_{X,Y}$ uma quasi-norma quasi-razoável, com Y esfericamente completa. Suponha ainda que X é finitamente determinada (ou dominada) e que Y é finitamente determinada (ou dominada), linearmente estável, finitamente injetiva e norma monótona. Então*

$$\left(E \otimes_{\alpha^t_{X,Y}} F\right)' \overset{1}{=} \mathcal{L}_{X;Y^{\mathrm{dual}}}(F;E').$$

Demonstração. Seguido um caminho análogo ao da demonstração da Proposição 1.1.1 é possível mostrar que

$$\left(E \otimes_{\alpha^t_{X,Y}} F\right)' \overset{1}{=} \left(F \otimes_{\alpha_{X,Y}} E\right)'$$

e a Proposição 2.4.7 garante que $\left(F \otimes_{\alpha_{X,Y}} E\right)' \overset{1}{=} \mathcal{L}_{X;Y^{\mathrm{dual}}}(F;E')$. $\blacksquare$

Agora, vamos às aplicações desses resultados. No primeiro e segundo exemplos, conseguimos recuperar casos conhecidos. O terceiro apresenta novos casos.

Exemplo 2.4.10 Considerando $1 \leq p \leq \infty$, $X = \ell_{p^*}^w$ e $Y = \ell_p$, a Proposição 2.4.7 garante que

$$(E \otimes_{d_p} F)' = (E \otimes_{\alpha_{\ell_{p^*}^w, \ell_p}} F)' \stackrel{1}{=} \mathcal{L}_{\ell_{p^*}^w, \ell_{p^*}}(E; F') = \Pi_{p^*}(E; F'). \tag{2.7}$$

Como $g_p = d_p^t$, o Corolário 2.4.9 nos dá

$$(E \otimes_{g_p} F)' = (E \otimes_{\alpha_{\ell_p, \ell_{p^*}^w}} F)' \stackrel{1}{=} \mathcal{L}_{\ell_{p^*}^w, \ell_{p^*}}(F; E') = \Pi_{p^*}(F; E'). \tag{2.8}$$

Esses resultados podem ser encontrados, por exemplo, em [45, Sections 6.2 and 6.3]. Agora, calculando o dual do produto tensorial munido da norma g_p diretamente pela Proposição 2.4.7 e o dual $(E \otimes_{d_p} F)'$ pelo Corolário 2.4.9, temos, respectivamente,

$$(E \otimes_{g_p} F)' \stackrel{1}{=} \mathcal{L}_{\ell_p, \ell_p\langle\cdot\rangle}(E; F') = \mathcal{D}_p(E; F') \quad \text{e} \quad (E \otimes_{d_p} F)' \stackrel{1}{=} \mathcal{D}_p(F; E'),$$

Não encontramos as caracterizações dadas pelas duas expressões acima na literatura e o comum é encontrar as caracterizações em (2.7) e (2.8). Observamos ainda que pelo exposto acima, por exemplo, obtivemos a identificação

$$\Pi_{p^*}(E; F') \stackrel{1}{=} \mathcal{D}_p(F; E'), \tag{2.9}$$

que se dá por meio da aplicação $T \mapsto \overline{T}$ dada por $\overline{T}(y)(x) := T(x)(y)$. Entretanto, isso não representa uma novidade. De fato, em [17, Theorem 2.2.2], foi demonstrado que:

(i) $T \in \Pi_{p^*}(E; F) \Leftrightarrow T' \in \mathcal{D}_p(F'; E')$, com igualdade de normas.

(ii) $T \in \mathcal{D}_p(E; F) \Leftrightarrow T' \in \Pi_{p^*}(F'; E')$, com igualdade de normas.

Daí, a identificação em (2.9) se justifica não só por nossos resultados mas também de (i) e do fato de que $T'|_{J_F(F)=F} = \overline{T}$.

Exemplo 2.4.11 a) Sendo $1 \leq p \leq \infty$, $X = \ell_p^w$ e $Y = \ell_{p^*}^w$, temos

$$(E \otimes_{\alpha_{\ell_p^w, \ell_{p^*}^w}} F)' \stackrel{1}{=} \mathcal{L}_{\ell_p^w, \ell_p\langle\cdot\rangle}(E; F').$$

Resultado apresentado em [1, Theorem 3.3.], no contexto multilinear.
b) Considerando $1 \leq p \leq q \leq \infty$, $X = \ell_p^w$ e $Y = \ell_{q^*}$, então

$$(E \otimes_{\alpha_{\ell_p^w, \ell_{q^*}}} F)' \stackrel{1}{=} \mathcal{L}_{\ell_p^w, \ell_q}(E; F') = \Pi_{q,p}(E; F').$$

Resultado apresentado em [33, Proposition 3.2], no contexto multilinear.

Exemplo 2.4.12 Sejam $1 \leq p \leq q \leq \infty$. Então:
a) Se $p \neq \infty$, $X = \ell_p^{\mathrm{mid}}$ e $Y = \ell_{q^*}$, temos

$$(E \otimes_{\alpha_{\ell_p^{\mathrm{mid}}, \ell_{q^*}}} F)' \overset{1}{=} \mathcal{L}_{\ell_p^{\mathrm{mid}}, \ell_q}(E; F').$$

b) Se $p \neq \infty$, $X = (\ell_p)_p^{\mathrm{mid}}$ e $Y = \ell_{q^*}$, segue que

$$(E \otimes_{\alpha_{(\ell_p)_p^{\mathrm{mid}}, \ell_{q^*}}} F)' \overset{1}{=} \mathcal{L}_{(\ell_p)_p^{\mathrm{mid}}, \ell_q}(E; F').$$

c) Sendo $X = \ell_p^w$ e $Y = \ell_{q^*}^w$, temos

$$(E \otimes_{\alpha_{\ell_p^w, \ell_{q^*}^w}} F)' \overset{1}{=} \mathcal{L}_{\ell_p^w, \ell_q\langle \cdot \rangle}(E; F').$$

Note que quando $p = q$ nos itens a) e b) acima, estamos calculando o dual do produto tensorial munido de novas normas razoáveis.

Observação 2.4.13 Em alguns casos, em função das propriedades das classes de sequências envolvidas, conseguimos usar todas as identificações de nossos resultados simultaneamente. Por exemplo,

$$\mathcal{L}_{\ell_p^w, \ell_{q^*}^w; \ell_1}(E, F; \mathbb{K}) \overset{1}{=} (E \otimes_{\alpha_{\ell_p^w, \ell_{q^*}^w}} F)' \overset{1}{=} \mathcal{L}_{\ell_p^w, \ell_q\langle \cdot \rangle}(E; F') \overset{1}{=} \mathcal{L}_{\ell_{q^*}^w, \ell_{p^*}\langle \cdot \rangle}(F; E').$$

No entanto, pode ocorrer de não podermos usar alguns dos resultados. Por exemplo, temos

$$(E \otimes_{\alpha_{\ell_p^w, \ell_{q^*}^{\mathrm{mid}}}} F)' \overset{1}{=} \mathcal{L}_{\ell_p^w, \ell_{q^*}^{\mathrm{mid}}; \ell_1}(E, F; \mathbb{K}),$$

mas não é possível construir, por nossos resultados, a identificação entre $(E \otimes_{\alpha_{\ell_p^w, \ell_{q^*}^{\mathrm{mid}}}} F)'$ e $\mathcal{L}_{\ell_p^w; (\ell_{q^*}^{\mathrm{mid}})^{\mathrm{dual}}}(E; F')$, uma vez que a classe de sequências $\ell_{q^*}^{\mathrm{mid}}$ não é finitamente injetiva.

Juntando-se as hipóteses das Proposições 2.4.7 e 2.4.8, tem-se

$$\mathcal{L}_{Y; X^{\mathrm{dual}}}(F; E') \overset{1}{=} \mathcal{L}_{X; Y^{\mathrm{dual}}}(E; F'),$$

como no caso particular de (2.9) no Exemplo 2.4.10. No entanto, pode-se provar este fato, com menos hipóteses, diretamente no contexto da teoria de operadores. Omitimos a demonstração, já que ela segue linhas bem parecidas às da demonstração da Proposição 2.4.5.

Proposição 2.4.14 *Sejam E e F espaços de Banach e X e Y classes de sequências esfericamente completas, linearmente estáveis e finitamente injetivas. Suponha ainda que X seja finitamente determinada (ou dominada) e Y seja finitamente determinada (ou dominada). Então*

$$\mathcal{L}_{X; Y^{\mathrm{dual}}}(E; F') \overset{1}{=} \mathcal{L}_{Y; X^{\mathrm{dual}}}(F; E'),$$

por meio do isomorfismo

$$\Psi : \mathcal{L}_{X,Y^{\mathrm{dual}}}(E;F') \longrightarrow \mathcal{L}_{Y;X^{\mathrm{dual}}}(F;E')$$

definido por $\Psi\left(T\right)\left(y\right)\left(x\right) = T(x)(y)$ *para todos* $x \in E$ *e* $y \in F$.

Vejamos agora que podemos tomar, para quaisquer espaços de Banach E e F, a identificação

$$\mathcal{L}_{X;Y}(E;F) \overset{1}{=} \mathcal{L}_{X;Y}(E;J_F(F)),$$

por meio da aplicação $\Phi(T) = J_F \circ T$, sempre que X e Y forem classes de sequências com Y linearmente estável. De fato, sejam $T \in \mathcal{L}_{X;Y}(E;F)$ e $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in X(E)$. Como Y é linearmente estável, temos

$$\left\|(J_F(T(x_j)))_{j=1}^{\infty}\right\|_{Y(J_F(F))} \leq \|J_F\| \cdot \left\|(T(x_j))_{j=1}^{\infty}\right\|_{Y(F)} \leq \|T\|_{X;Y} \cdot \left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{X(E)},$$

donde segue que $J_F \circ T \in \mathcal{L}_{X;Y}(E;J_F(F))$ e $\|J_F \circ T\|_{X;Y} \leq \|T\|_{X;Y}$.

Por outro lado, se $A \in \mathcal{L}_{X;Y}(E;J_F(F))$, tome $T \in \mathcal{L}(E;F)$ dado por $T = J_F^{-1} \circ A$. Claro que $\Phi(T) = A$. Se $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in X(E)$, usando a estabilidade linear de Y mais uma vez, temos

$$\begin{aligned}
\left\|(T(x_j))_{j=1}^{\infty}\right\|_{Y(F)} &= \left\|\left(J_F^{-1} \circ A(x_j)\right)_{j=1}^{\infty}\right\|_{Y(F)} \\
&\leq \left\|J_F^{-1}\right\| \cdot \left\|(A(x_j))_{j=1}^{\infty}\right\|_{Y(J_F(F))} \\
&\leq \|A\|_{X;Y} \cdot \left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{X(E)}
\end{aligned}$$

e portanto $T \in \mathcal{L}_{X;Y}(E;F)$ e $\|T\|_{X;Y} \leq \|A\|_{X;Y}$. Assim, a identificação está provada.

Um caso particular da identificação acima, que usamos no próximo resultado, é dada por

$$\mathcal{L}_{X;Y^{\mathrm{dual}}}(E;F) \overset{1}{=} \mathcal{L}_{X;Y^{\mathrm{dual}}}(E;J_F(F)),$$

onde, neste caso, Y deve ser esfericamente completa e Y^{dual} linearmente estável.

Vamos usar esse tipo de identificação e também a identificação $J_F(F) = F$, sem maiores comentários, no que segue.

De acordo com o Teorema 1.3.8, sendo $\left[\mathcal{L}_{X;Y^{\mathrm{dual}}}, \|\cdot\|_{X;Y^{\mathrm{dual}}}\right]$ um ideal de Banach, então esse ideal é maximal se, e somente se, existe uma norma tensorial α tal que

$$\mathcal{L}_{X;Y^{\mathrm{dual}}}(E;F) = (E\widehat{\otimes}_{\alpha}F')' \cap \mathcal{L}(E,F), \tag{2.10}$$

para quaisquer espaços de Banach E e F. O próximo resultado estabelece condições com as quais uma quasi-norma tensorial $\alpha_{X,Y}$ satisfaz (2.10).

Teorema 2.4.15 *Sejam E e F espaços de Banach e X e Y classes de sequências tais que $\alpha_{X,Y}$ é uma quasi-norma tensorial e Y é esfericamente completa. Suponha ainda que X e Y sejam linearmente estáveis e finitamente injetivas, que X é finitamente determinada (ou dominada) e que Y seja finitamente determinada (dominada) e norma monótona. Então*

$$\mathcal{L}_{X;Y^{\text{dual}}}(E;F) \stackrel{1}{=} (E \otimes_{\alpha_{X,Y}} F')' \cap \mathcal{L}(E;F).$$

Demonstração. Considere a aplicação $\Phi : \mathcal{L}_{X;Y^{\text{dual}}}(E,F) \longrightarrow (E \otimes_{\alpha_{X,Y}} F')' \cap \mathcal{L}(E,F)$ definida por

$$\Phi(T)\left(\sum_{j=1}^{n} x_j \otimes \psi_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \psi_j(T(x_j)).$$

Note que $\Phi(T) : E \otimes F' \longrightarrow \mathbb{K}$ é um funcional linear já que é a linearização da forma bilinear $A_T : E \times F' \longrightarrow \mathbb{K}$, definida por $A_T(x,\psi) = \psi(T(x))$. Além disso, se $u = \sum\limits_{j=1}^{n} x_j \otimes \psi_j \in E \otimes F'$, então

$$\begin{aligned}
|\Phi(T)(u)| &= \left|\sum_{j=1}^{n} \psi_j(T(x_j))\right| \leq \sum_{j=1}^{n} |\psi_j(T(x_j))| \\
&\leq \|T\|_{X;Y^{\text{dual}}} \left\|(x_j)_{j=1}^{n}\right\|_{X(E)} \left\|(\psi_j)_{j=1}^{n}\right\|_{Y(F')}
\end{aligned}$$

e como isso vale para qualquer representação de u, temos

$$|\Phi(T)(u)| \leq \|T\|_{X;Y^{\text{dual}}} \, \alpha_{X,Y}(u),$$

donde $\Phi(T) : E \otimes_{\alpha_{X,Y}} F' \longrightarrow \mathbb{K}$ é contínuo. Vejamos que $\Phi(T) \in \mathcal{L}(E,F) \stackrel{1}{=} \mathcal{L}(E, J_F(F))$. Observe que $\Phi(T) \in L(E,F)$, pois

$$\Phi(T)(x)(\psi) = \Phi(T)(x \otimes \psi) = \psi(T(x)) = J_F(T(x))(\psi),$$

onde a primeira igualdade acima segue do Proposição 2.4.7. Agora, dados $x \in E$ e $\psi \in F'$, temos

$$|\Phi(T)(x)(\psi)| = |\psi(T(x))| \leq \|\psi\| \, \|T\| \, \|x\|$$

e assim $\|\Phi(T)(x)\| \leq \|T\| \, \|x\|$. Portanto, $\Phi(T) \in (E \otimes_{\alpha_{X,Y}} F')' \cap \mathcal{L}(E,F)$ e isso nos diz que Φ está bem definida. Observe agora que Φ é linear (fácil) e contínua, já que $\|\Phi(T)\| \leq \|T\|_{X;Y^{\text{dual}}}$. Mostraremos agora que Φ é sobrejetiva.

Seja $\varphi \in (E \otimes_{\alpha_{X,Y}} F')' \cap \mathcal{L}(E,F)$. Considere $T_\varphi : E \longrightarrow F \overset{1}{=} J_F(F)$ definida por $T_\varphi(x)(\psi) = \varphi(x \otimes \psi)$. Não é difícil mostrar que $T_\varphi \in \mathcal{L}(E,F)$. Sejam $M \in \mathcal{F}(E)$ e $L \in \mathcal{CF}(F)$. Temos $(\frac{F}{L})' \overset{1}{=} L^\perp$, por meio da aplicação $Q'_L : (\frac{F}{L})' \longrightarrow L^\perp$. Note que M e $\frac{F}{L}$ são espaços de Banach com dimensões finita. Assim, pela Proposição 2.4.7

$$\left(M \otimes_{\alpha_{X,Y}} \left(\frac{F}{L}\right)'\right)' \overset{1}{=} \mathcal{L}_{X;Y^{\text{dual}}}\left(M; \left(\frac{F}{L}\right)''\right) \overset{1}{=} \mathcal{L}_{X;Y^{\text{dual}}}\left(M; \frac{F}{L}\right). \tag{2.11}$$

Observe que $\varphi \mid_{\left(M \otimes_{\alpha_{X,Y}} L^\perp\right)} \in \left(M \otimes_{\alpha_{X,Y}} L^\perp\right)' \overset{1}{=} \left(M \otimes_{\alpha_{X,Y}} (\frac{F}{L})'\right)'$ e que se $\sum_{j=1}^n x_j \otimes \psi_j \in M \otimes L^\perp$ é uma representação de um tensor u, então $\sum_{j=1}^n x_j \otimes Q_L'^{-1}(\psi_j) \in M \otimes \left(\frac{F}{L}\right)'$ é também uma representação de u. Logo,

$$\begin{aligned}
\varphi \circ (I_M \otimes Q'_L)(u) &= \varphi \circ (I_M \otimes Q'_L)\left(\sum_{j=1}^n x_j \otimes Q_L'^{-1}(\psi_j)\right) = \varphi\left(\sum_{j=1}^n x_j \otimes \psi_j\right) \\
&= \varphi \mid_{\left(M \otimes_{\alpha_{X,Y}} L^\perp\right)} \left(\sum_{j=1}^n x_j \otimes \psi_j\right) = \varphi \mid_{\left(M \otimes_{\alpha_{X,Y}} L^\perp\right)} (u)
\end{aligned}$$

e isso nos diz que $\varphi \mid_{\left(M \otimes_{\alpha_{X,Y}} L^\perp\right)} = \varphi \circ (I_M \otimes Q'_L)$. Além disso,

$$\begin{aligned}
\varphi \circ (I_M \otimes Q'_L)\left(\sum_{j=1}^n x_j \otimes Q_L'^{-1}(\psi_j)\right) &= \varphi\left(\sum_{j=1}^n x_j \otimes \psi_j\right) = \sum_{j=1}^n \varphi(x_j \otimes \psi_j) \\
&= \sum_{j=1}^n T_\varphi(x_j)(\psi_j) = \sum_{j=1}^n \psi_j(T_\varphi(x_j)) = \sum_{j=1}^n \psi_j(T_\varphi \circ I_M)(x_j) \\
&= \sum_{j=1}^n (T_\varphi \circ I_M)'(\psi_j)(x_j) = \sum_{j=1}^n (I'_M \circ T'_\varphi)(\psi_j)(x_j) \\
&= \sum_{j=1}^n (I'_M \circ T'_\varphi \circ Q'_L)(Q_L'^{-1}(\psi_j))(x_j) = \sum_{j=1}^n (Q_L \circ T_\varphi \circ I_M)'(Q_L'^{-1}(\psi_j))(x_j) \\
&= \sum_{j=1}^n Q_L'^{-1}(\psi_j)(Q_L \circ T_\varphi \circ I_M)(x_j).
\end{aligned}$$

Por (2.11), existe um único operador

$$T \in \mathcal{L}_{X;Y^{\text{dual}}}(M; \frac{F}{L}) \overset{\Psi}{\mapsto} \varphi \circ (I_M \otimes Q'_L) \in (M \otimes_{\alpha_{X,Y}} (\frac{F}{L})')'$$

e note que $T = Q_L \circ T_\varphi \circ I_M$, pois

$$\Psi(Q_L \circ T_\varphi \circ I_M)\left(\sum_{j=1}^n x_j \otimes Q_L'^{-1}(\psi_j)\right) = \sum_{j=1}^n Q_L'^{-1}(\psi_j)(Q_L \circ T_\varphi \circ I_M)(x_j).$$

Assim,

$$\|Q_L \circ T_\varphi \circ I_M\|_{X;Y^{\text{dual}}} = \|\varphi \circ (I_M \otimes Q_L')\| \leq \|\varphi\| \, \|I_M \otimes Q_L'\| \leq \|\varphi\| \, \|I_M\| \, \|Q_L'\| = \|\varphi\|$$

e pelo Teorema 2.3.8 $T_\varphi \in \mathcal{L}_{X;Y^{\text{dual}}}(E;F)$ com

$$\|T_\varphi\|_{X;Y^{\text{dual}}} \leq \sup \|Q_L \circ T_\varphi \circ I_M\|_{X;Y^{\text{dual}}} \leq \|\varphi\| \, .$$

Resta mostrar que $\Phi(T_\varphi) = \varphi$ em $E \otimes_{\alpha_{X,Y}} F'$. Assim, se $u = \sum_{j=1}^{n} x_j \otimes \psi_j \in E \otimes_{\alpha_{X,Y}} F'$, temos

$$\begin{aligned} \Phi(T_\varphi)\,(u) &= \Phi(T_\varphi) \left(\sum_{j=1}^{n} x_j \otimes \psi_j \right) = \sum_{j=1}^{n} \psi_j(T_\varphi(x_j)) = \sum_{j=1}^{n} T_\varphi(x_j)(\psi_j) \\ &= \sum_{j=1}^{n} \varphi(x_j \otimes \psi_j) = \varphi \left(\sum_{j=1}^{n} x_j \otimes \psi_j \right) = \varphi\,(u) \, . \end{aligned}$$

Portanto, $\mathcal{L}_{X;Y^{\text{dual}}}(E;F)$ e $(E \otimes_{\alpha_{X,Y}} F')' \cap \mathcal{L}(E;F)$ são isometricamente isomorfos. ■

Observamos que quando $\alpha_{X,Y}$ for de fato uma norma tensorial, com o argumento de extensão ao fecho, o Teorema 2.4.15 nos diz que

$$\mathcal{L}_{X;Y^{\text{dual}}}(E;F) \stackrel{1}{=} (E \widehat{\otimes}_{\alpha_{X,Y}} F')' \cap \mathcal{L}(E;F).$$

Vamos a aplicações do resultado anterior.

Exemplo 2.4.16 Considerando $1 \leq p \leq q \leq \infty$, temos:
a) Para $X = \ell_p^w$ e $Y = \ell_{q^*}$,

$$\mathcal{L}_{\ell_p^w;\ell_q}(E;F) \stackrel{1}{=} (E \otimes_{\alpha_{\ell_p^w,\ell_{q^*}}} F')' \cap \mathcal{L}(E;F).$$

b) Para $X = \ell_p^w$ e $Y = \ell_{q^*}^w$,

$$\mathcal{L}_{\ell_p^w;\ell_q\langle\cdot\rangle}(E;F) \stackrel{1}{=} (E \otimes_{\alpha_{\ell_p^w,\ell_{q^*}^w}} F')' \cap \mathcal{L}(E;F).$$

c) Se $p \neq \infty$, $X = (\ell_p)_p^{\text{mid}}$ e $Y = \ell_{q^*}$, temos

$$\mathcal{L}_{(\ell_p)_p^{\text{mid}};\ell_q}(E;F') \stackrel{1}{=} (E \otimes_{\alpha_{(\ell_p)_p^{\text{mid}},\ell_{q^*}}} F')' \cap \mathcal{L}(E;F).$$

Quando $p = q$ nos itens $a)$ e $b)$ do exemplo anterior, estamos recuperando casos já conhecidos: o caso do item (a) pode ser encontrado em [45, pág. 143] e o do item (b) em [17, Lemma 2.5.1].

Capítulo 3

A norma $\gamma_{X,Y}^{p,q}$ e classes de aplicações $(\overset{p,q}{X,Y})$-integrais

Neste capítulo, vamos definir uma nova classe de normas no produto tensorial, por meio de classes de sequências, e a partir disso obter uma série de construções, exemplos e resultados. Além disso, vamos estabelecer o dual do produto tensorial munido com esse tipo de norma.

Quando trabalhamos com ambientes abstratos, esperamos que estes recuperem exemplos já conhecidos da teoria, como também nos forneçam novos exemplos. Entretanto, até onde sabemos, todos os resultados obtidos neste capítulo são inéditos, embora sejam claras as referências e paralelos relacionados à norma injetiva.

3.1 A norma tensorial $\gamma_{X,Y}^{p,q}$

Começamos introduzindo o conceito de classe de sequências dual.

Definição 3.1.1 Seja X uma classe de sequências. Dizemos que uma classe de sequências X' é dual de X se $X(E)' \overset{1}{=} X'(E')$ para qualquer espaço de Banach E, por meio da aplicação

$$\begin{aligned}
\Psi :& X'(E') \longrightarrow X(E)' \\
& (\varphi_j)_{j=1}^{\infty} \mapsto \Psi\left((\varphi_j)_{j=1}^{\infty}\right) : X(E) \longrightarrow \mathbb{K} \\
& \qquad\qquad (x_j)_{j=1}^{\infty} \mapsto \Psi\left((\varphi_j)_{j=1}^{\infty}\right)\left((x_j)_{j=1}^{\infty}\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j(x_j).
\end{aligned} \tag{3.1}$$

Vejamos alguns exemplos de classes de sequências duais.

Exemplo 3.1.2 a) ℓ_1 é o dual de c_0.
b) Para $1 \leq p < \infty$, ℓ_{p^*} é dual de ℓ_p.
c) Para $1 \leq p < \infty$, $\ell_{p^*}^w$ é dual de $\ell_p\langle\cdot\rangle$ e $\ell_{p^*}\langle\cdot\rangle$ é dual de ℓ_p^u.

Uma observação importante: neste capítulo, optamos por usar classes de sequência duais de X ao invés de classes do tipo X^{dual} por dois motivos. Primeiro, não queremos sobrecarregar as nossas definições e resultados com as hipóteses necessárias sobre uma classe X para que o item (c) do Teorema 1.4.10 seja válido. Segundo, e mais importante, pode existir uma classe de sequências X que não satisfaça as hipóteses desse teorema e, mesmo assim, exista uma classe de sequências X' que é dual de X, no sentido da Definição 3.1.1. Isto é, esse teorema não caracteriza o dual de todas as classes de sequências; ele tem limitações. Por exemplo, $\ell_{p^*}^w$ é dual de $\ell_p\langle\cdot\rangle$, mas não é um caso particular do Teorema 1.4.10. Entretanto, é claro, o Teorema 1.4.10 fornece uma classe de sequências dual de uma classe X, desde que X satisfaça suas hipóteses, e isso já nos fornece diversos exemplos dessas classes.

Vamos agora introduzir uma norma razoável, envolvendo classes de sequências, no produto tensorial $E \otimes F$. Esse tipo de norma tem inspiração na construção da norma injetiva.

Proposição 3.1.3 *Sejam E e F espaços de Banach e X e Y classes de sequências. Suponha que existam $1 \leq p, q < \infty$, números reais satisfazendo $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \geq 1$, tais que $X \overset{1}{\hookrightarrow} \ell_p^w$ e $Y \overset{1}{\hookrightarrow} \ell_q^w$. Então, a expressão*

$$\gamma(u) = \sup \left\{ \left| \sum_{j=1}^{k} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x_j)\psi_n(y_j) \right| ; (\varphi_n)_{n=1}^{\infty} \in B_{X(E')}, (\psi_n)_{n=1}^{\infty} \in B_{Y(F')} \right\}$$

define uma norma razoável em $E \otimes F$, onde $\sum_{j=1}^{k} x_j \otimes y_j$ é qualquer representação de $u \in E \otimes F$.

Demonstração. Para cada $x \in E$ e $y \in F$, definimos a forma bilinear

$$\begin{aligned} B_{x,y} :& X(E') \times Y(F') \longrightarrow \mathbb{K} \\ & ((\varphi_n)_{n=1}^{\infty}, (\psi_n)_{n=1}^{\infty}) \longmapsto B_{x,y}((\varphi_n)_{n=1}^{\infty}, (\psi_n)_{n=1}^{\infty}) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x)\psi_n(y). \end{aligned}$$

De fato, vamos primeiro mostrar que $B_{x,y}$ está bem definida. Note que

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}|\varphi_n(x)|\,|\psi_n(y)| &\leq \left(\sum_{n=1}^{\infty}|\varphi_n(x)|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{n=1}^{\infty}|\psi_n(y)|^q\right)^{\frac{1}{q}} \qquad (3.2)\\ &= \|(\varphi_n)_{n=1}^{\infty}\|_{X(E')}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\varphi_n}{\|(\varphi_l)_{l=1}^{\infty}\|_{X(E')}}(x)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}\cdot\\ &\qquad \|(\psi_n)_{n=1}^{\infty}\|_{Y(F')}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\psi_n}{\|(\psi_l)_{l=1}^{\infty}\|_{Y(F')}}(y)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}\\ &\leq \|(\varphi_n)_{n=1}^{\infty}\|_{X(E')}\,\|(\psi_n)_{n=1}^{\infty}\|_{Y(F')}\cdot\\ &\qquad \sup_{(\tilde{\varphi}_n)_{n=1}^{\infty}\in B_{X(E')}}\left(\sum_{n=1}^{\infty}|\tilde{\varphi}_n(x)|^p\right)^{\frac{1}{p}}\sup_{(\tilde{\psi}_n)_{n=1}^{\infty}\in B_{Y(F')}}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left|\tilde{\psi}_n(y)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}\\ &= \|(\varphi_n)_{n=1}^{\infty}\|_{X(E')}\,\|(\psi_n)_{n=1}^{\infty}\|_{Y(F')}\cdot\|x\cdot e_1\|_{X_p^{\mathrm{mid}}(E)}\,\|y\cdot e_1\|_{Y_q^{\mathrm{mid}}(F)}\\ &= \|x\|\|y\|\,\|(\varphi_n)_{n=1}^{\infty}\|_{X(E')}\,\|(\psi_n)_{n=1}^{\infty}\|_{Y(F')}<\infty.\end{aligned}$$

Assim, $\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n(x)\psi_n(y)$ é convergente e

$$\begin{aligned}|B_{x,y}((\varphi_n)_{n=1}^{\infty},(\psi_n)_{n=1}^{\infty})| = \left|\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n(x)\psi_n(y)\right| &\leq \sum_{n=1}^{\infty}|\varphi_n(x)|\,|\psi_n(y)|\\ &\leq \|x\|\|y\|\,\|(\varphi_n)_{n=1}^{\infty}\|_{X(E')}\,\|(\psi_n)_{n=1}^{\infty}\|_{Y(F')}<\infty.\end{aligned}$$

Um cálculo simples mostra que $B_{x,y}$ é bilinear. É imediato verificar que a aplicação $A : E\times F \longrightarrow B(X(E'),Y(F'))$, dada por $A(x,y) = B_{x,y}$, é bilinear e tomando sua linearização, temos

$$\begin{aligned}\widetilde{A}:&E\otimes F\longrightarrow B(X(E'),Y(F'))\\ u=&\sum_{j=1}^{k}x_j\otimes y_j\longmapsto\sum_{j=1}^{k}B_{x_j,y_j},\end{aligned}$$

em que $\sum_{j=1}^{k}B_{x_j,y_j}((\varphi_n)_{n=1}^{\infty},(\psi_n)_{n=1}^{\infty}) = \sum_{j=1}^{k}\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n(x_j)\psi_n(y_j)$. Seja $u\in E\otimes F$ e $\sum_{j=1}^{k}x_j\otimes y_j$ uma representação de u. Seguindo de maneira análoga ao cálculo feito em (3.2), segue que

$$\begin{aligned}\left|\widetilde{A}(u)((\varphi_n)_{n=1}^{\infty},(\psi_n)_{n=1}^{\infty})\right| &\leq \sum_{j=1}^{k}\sum_{n=1}^{\infty}|\varphi_n(x_j)\psi_n(y_j)|\\ &\leq \sum_{j=1}^{k}\left(\sum_{n=1}^{\infty}|\varphi_n(x_j)|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{n=1}^{\infty}|\psi_n(y_j)|^q\right)^{\frac{1}{q}}\end{aligned}$$

$$\leq \|(\varphi_n)_{n=1}^\infty\|_{X(E')} \|(\psi_n)_{n=1}^\infty\|_{Y(F')} \sum_{j=1}^k \|x_j\|\|y_j\|$$

e isso mostra que, na verdade, ocorre que $\widetilde{A} : E \otimes F \longrightarrow \mathcal{B}(X(E'), Y(F'))$, isto é, $\widetilde{A}$ mapeia $E \otimes F$ em formas bilineares contínuas. Vejamos agora que $\widetilde{A}$ é injetiva. Se $\widetilde{A}(u = \sum_{j=1}^k x_j \otimes y_j) = 0$, então

$$\sum_{j=1}^k \sum_{n=1}^\infty \varphi_n(x_j)\psi_n(y_j) = 0,$$

para todos $(\varphi_n)_{n=1}^\infty \in X(E')$ e $(\psi_n)_{n=1}^\infty \in Y(F')$. Em particular, $\sum_{j=1}^k \varphi(x_j)\psi(y_j) = 0$ para todas $\varphi \in E'$ e $\psi \in F'$, pois $\varphi \cdot e_1 \in X(E')$ e $\psi \cdot e_1 \in Y(F')$. Logo, $u = 0$.

Acabamos de mostrar que $\widetilde{A} : E \otimes F \longrightarrow \mathcal{B}(X(E'), Y(F'))$ é uma imersão algébrica. Definimos uma norma em $E \otimes F$ como a norma induzida por essa imersão. Denotamos essa norma por

$$\begin{aligned}
\gamma(u) &= \left\|\widetilde{A}(u)\right\| \\
&= \sup \left\{ \left| \sum_{j=1}^k \sum_{n=1}^\infty \varphi_n(x_j)\psi_n(y_j) \right| ; (\varphi_n)_{n=1}^\infty \in B_{X(E')}, (\psi_n)_{n=1}^\infty \in B_{Y(F')} \right\}.
\end{aligned}$$

Perceba que o valor acima não depende da representação de u. Falta-nos apenas mostrar que essa norma é razoável. É imediato verificar que $\varepsilon \leq \gamma$. Para mostrar que $\gamma \leq \pi$, basta observar que γ, por sua definição, já satisfaz a desigualdade triangular e que, usando os argumentos do cálculo em (3.2), tem-se

$$\begin{aligned}
\gamma(x \otimes y) &= \sup \left\{ \left| \sum_{n=1}^\infty \varphi_n(x)\psi_n(y) \right| ; (\varphi_n)_{n=1}^\infty \in B_{X(E')}, (\psi_n)_{n=1}^\infty \in B_{Y(F')} \right\} \\
&\leq \|x \cdot e_1\|_{X_p^{\mathrm{mid}}(E)} \|y \cdot e_1\|_{Y_q^{\mathrm{mid}}(F)} = \|x\| \, \|y\| \, .
\end{aligned}$$

■

Observação 3.1.4 Os somatórios de índices j e n na definição de γ podem ser permutados, ou seja,

$$\gamma(u) = \sup \left\{ \left| \sum_{n=1}^\infty \sum_{j=1}^k \varphi_n(x_j)\psi_n(y_j) \right| ; (\varphi_n)_{n=1}^\infty \in B_{X(E')}, (\psi_n)_{n=1}^\infty \in B_{Y(F')} \right\}.$$

Isso ocorre porque a série $\sum_{j=1}^k \sum_{n=1}^\infty |\varphi_n(x_j)\psi_n(y_j)|$ é convergente para todas $(\varphi_n)_{n=1}^\infty \in B_{X(E')}, (\psi_n)_{n=1}^\infty \in B_{Y(F')}$.

Um caso particular e importante da proposição anterior ocorre quando exigimos, em suas hipóteses, que existam classes duais X' e Y' de X e Y, respectivamente, com $X' \overset{1}{\hookrightarrow} \ell_p^w$ e $Y' \overset{1}{\hookrightarrow} \ell_q^w$. Neste caso, usaremos uma notação bem específica para a norma, cuja utilidade ficará clara na próxima seção.

Proposição 3.1.5 *Sejam E e F espaços de Banach e X e Y classes de sequências. Suponha que existam $1 \leq p, q < \infty$, números reais satisfazendo $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \geq 1$, e classes X' dual de X e Y' é dual de Y tais que $X' \overset{1}{\hookrightarrow} \ell_p^w$ e $Y' \overset{1}{\hookrightarrow} \ell_q^w$. Então, a expressão*

$$\gamma_{X,Y}^{p,q}(u) = \sup\left\{\left|\sum_{j=1}^{k}\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n(x_j)\psi_n(y_j)\right|; (\varphi_n)_{n=1}^{\infty} \in B_{X'(E')}, (\psi_n)_{n=1}^{\infty} \in B_{Y'(F')}\right\},$$

define uma norma razoável em $E \otimes F$, onde $\sum_{j=1}^{k} x_j \otimes y_j$ é qualquer representação de $u \in E \otimes F$.

Vejamos que a hipótese $X \overset{1}{\hookrightarrow} \ell_p^w$, para algum $1 \leq p < \infty$, pode ser relaxada na Proposição 3.1.3 para o caso $X = \ell_\infty$ (e, é claro, o caso associado $Y = \ell_\infty$). Como consideramos esse fato um complemento dessa proposição, denotaremos a norma obtida pelo mesmo símbolo.

Proposição 3.1.6 *Sejam E e F espaços de Banach e Y uma classe de sequências tal que $Y \overset{1}{\hookrightarrow} \ell_1^w$. Então, a expressão*

$$\gamma(u) = \sup\left\{\left|\sum_{j=1}^{k}\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n(x_j)\psi_n(y_j)\right|; (\varphi_n)_{n=1}^{\infty} \in B_{\ell_\infty(E')}, (\psi_n)_{n=1}^{\infty} \in B_{Y(F')}\right\}$$

define uma norma razoável em $E \otimes F$, onde $\sum_{j=1}^{k} x_j \otimes y_j$ é qualquer representação de $u \in E \otimes F$.

Demonstração. Para cada $x \in E$ e $y \in F$, associamos a forma bilinear

$$\begin{aligned} B_{x,y} :& \ell_\infty(E') \times Y(F') \longrightarrow \mathbb{K} \\ & ((\varphi_n)_{n=1}^{\infty}, (\psi_n)_{n=1}^{\infty}) \longmapsto B_{x,y}((\varphi_n)_{n=1}^{\infty}, (\psi_n)_{n=1}^{\infty}) = \sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n(x)\psi_n(y). \end{aligned}$$

De fato, vamos primeiro mostrar que $B_{x,y}$ está bem definida. Note que

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty}|\varphi_n(x)\psi_n(y)| &\leq \sum_{n=1}^{\infty}\|\varphi_n\|\,\|x\|\,|\psi_n(y)| \leq \|x\|\,\|(\varphi_n)_{n=1}^{\infty}\|_{\ell_\infty(E')}\sum_{n=1}^{\infty}|\psi_n(y)| \\ &= \|x\|\,\|(\varphi_n)_{n=1}^{\infty}\|_{\ell_\infty(E')}\,\|(\psi_n)_{n=1}^{\infty}\|_{Y(F')}\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\psi_n}{\|(\psi_n)_{n=1}^{\infty}\|_{Y(F')}}(y)\right| \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \|x\| \, \|(\varphi_n)_{n=1}^{\infty}\|_{\ell_\infty(E')} \, \|(\psi_n)_{n=1}^{\infty}\|_{Y(F')} \sup_{(\tilde{\psi}_n)_{n=1}^{\infty} \in B_{Y(F')}} \sum_{n=1}^{\infty} \left| \tilde{\psi}_n(y) \right| \\
&\leq \|x\| \, \|(\varphi_n)_{n=1}^{\infty}\|_{\ell_\infty(E')} \, \|(\psi_n)_{n=1}^{\infty}\|_{Y(F')} \, \|y \cdot e_1\|_{Y_1^{\mathrm{mid}}(F)} \\
&= \|x\| \, \|y\| \, \|(\varphi_n)_{n=1}^{\infty}\|_{\ell_\infty(E')} \, \|(\psi_n)_{n=1}^{\infty}\|_{Y(F')} < \infty.
\end{aligned}
$$

Assim, $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x)\psi_n(y)$ é convergente e

$$
\begin{aligned}
|B_{x,y}((\varphi_n)_{n=1}^{\infty}, (\psi_n)_{n=1}^{\infty})| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x)\psi_n(y) \right| &\leq \sum_{n=1}^{\infty} |\varphi_n(x)\psi_n(y)| \\
&\leq \|x\| \, \|y\| \, \|(\varphi_n)_{n=1}^{\infty}\|_{\ell_\infty(E')} \, \|(\psi_n)_{n=1}^{\infty}\|_{Y(F')} < \infty.
\end{aligned}
$$

Além disso, $B_{x,y}$ é bilinear (fácil). A aplicação $A : E \times F \longrightarrow B(\ell_\infty(E'), Y(F'))$, dada por $A(x, y) = B_{x,y}$, é bilinear e, de forma análoga ao que foi feito na demonstração da Proposição 3.1.3, tem-se que $\widetilde{A} : E \otimes F \longrightarrow \mathcal{B}(\ell_\infty(E'), Y(F'))$ é uma imersão algébrica. Daí

$$
\begin{aligned}
\gamma(u) &= \left\| \widetilde{A}(u) \right\| \\
&= \sup \left\{ \left| \sum_{j=1}^{k} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x_j)\psi_n(y_j) \right| ; (\varphi_n)_{n=1}^{\infty} \in B_{\ell_\infty(E')}, (\psi_n)_{n=1}^{\infty} \in B_{Y(F')} \right\}
\end{aligned}
$$

define uma norma razoável em $E \otimes F$. ■

Os somatórios nos índices j e n na definição de γ, nesse novo contexto, também podem ser permutados e, novamente, um caso particular e importante ocorre quando exigimos que exista a classe dual Y' de Y. Também nesse caso, usamos uma notação específica.

Proposição 3.1.7 Se existe uma classe Y' dual de Y e $Y' \overset{1}{\hookrightarrow} \ell_1^w$, então a expressão

$$
\gamma_{\ell_1,Y}(u) = \sup \left\{ \left| \sum_{j=1}^{k} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x_j)\psi_n(y_j) \right| ; (\varphi_n)_{n=1}^{\infty} \in B_{\ell_\infty(E')}, (\psi_n)_{n=1}^{\infty} \in B_{Y'(F')} \right\}
$$

define uma norma razoável em $E \otimes F$, onde $\sum_{j=1}^{k} x_j \otimes y_j$ é qualquer representação de $u \in E \otimes F$.

A partir deste ponto vamos nos concentrar no estudo das normas geradas pelas Proposições 3.1.5 e 3.1.7. A razão disso decorre de nosso interesse em estudar o dual do produto tensorial munido de uma norma do tipo $\gamma_{X,Y}^{p,q}$. Neste caso, veremos que a existência das classes duais X' e Y' desempenha um papel importante.

Denotamos por $E \otimes_{\gamma_{X,Y}^{p,q}} F$ o produto tensorial $E \otimes F$ munido da norma $\gamma_{X,Y}^{p,q}$ e o seu completamento, por $E \widehat{\otimes}_{\gamma_{X,Y}^{p,q}} F$. O espaço de Banach $E \widehat{\otimes}_{\gamma_{X,Y}^{p,q}} F$ é chamado *produto tensorial* $\gamma_{X,Y}^{p,q}$*-normado* dos espaços de Banach E e F. Como veremos em exemplos mais adiante, a norma $\gamma_{X,Y}^{p,q}$ poderá ser denotada apenas por $\gamma_{X,Y}$ quando os parâmetros p e q estiverem de certa forma bem determinados (como na norma da Proposição 3.1.7).

Uma observação importante: em todos os resultados apresentados a partir deste ponto, sempre que afirmarmos que $\gamma_{X,Y}^{p,q}$ é uma norma razoável e satisfaz alguma determinada propriedade, estaremos admitindo que as classes X e Y, os parâmetros p e q e as classes X' e Y' duais de X e Y (que existem) satisfazem as condições suficientes para essa afirmação. Isso vai simplificar muito a escrita desses resultados. A proposição seguinte é um bom exemplo disso.

Proposição 3.1.8 *Sejam X e Y classes de sequências tais que $\gamma_{X,Y}^{p,q}$ é uma norma razoável. Se as classes X' e Y' são linearmente estáveis, então $\gamma_{X,Y}^{p,q}$ é uma norma uniforme.*

Demonstração. Sejam E_i e F_i espaços de Banach e $T_i \in \mathcal{L}(E_i; F_i), i = 1, 2$. Considere o operador linear $T_1 \otimes T_2 : E_1 \otimes_{\gamma_{X,Y}^{p,q}} E_2 \longrightarrow F_1 \otimes_{\gamma_{X,Y}^{p,q}} F_2$ dado por $T_1 \otimes T_2(x \otimes y) = T_1(x) \otimes T_2(y)$. Uma vez que X' e Y' são linearmente estáveis, temos

$$\left\|(T_1'(\varphi_j))_{j=1}^{\infty}\right\|_{X'(E_1')} \leq \|T_1\| \left\|(\varphi_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{X'(F_1')},$$

sempre que $(\varphi_j)_{j=1}^{\infty} \in X'(F_1')$, e

$$\left\|(T_2'(\psi_j))_{j=1}^{\infty}\right\|_{Y'(E_2')} \leq \|T_2\| \left\|(\psi_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{Y'(F_2')},$$

sempre que $(\psi_j)_{j=1}^{\infty} \in Y'(F_2')$. Daí, sendo $u \in E_1 \otimes_{\gamma_{X,Y}^{p,q}} E_2$ e $\sum_{j=1}^{k} x_j \otimes y_j$ uma representação de u, temos

$$\begin{aligned}
&\gamma_{X,Y}^{p,q}\left(T_1 \otimes T_2(u), F_1 \otimes F_2\right) \\
&\quad = \sup\left\{\left|\sum_{j=1}^{k}\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(T_1(x_j))\psi_n(T_2(y_j))\right| ; (\varphi_n)_{n=1}^{\infty} \in B_{X'(F_1')}, (\psi_n)_{n=1}^{\infty} \in B_{Y'(F_2')}\right\} \\
&\quad = \sup\left\{\left|\sum_{j=1}^{k}\sum_{n=1}^{\infty} T_1'(\varphi_n)(x_j)T_2'(\psi_n)(y_j)\right| ; (\varphi_n)_{n=1}^{\infty} \in B_{X'(F_1')}, (\psi_n)_{n=1}^{\infty} \in B_{Y'(F_2')}\right\} \\
&\quad = \|T_1\| \, \|T_2\| \cdot
\end{aligned}$$

$$\sup\left\{\left|\sum_{j=1}^{k}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{T_1'}{\|T_1\|}(\varphi_n)(x_j)\frac{T_2'}{\|T_2\|}(\psi_n)(y_j)\right|;(\varphi_n)_{n=1}^{\infty}\in B_{X'(F_1')},(\psi_n)_{n=1}^{\infty}\in B_{Y'(F_2')}\right\}$$
$$\leq\|T_1\|\,\|T_2\|\sup\left\{\left|\sum_{j=1}^{k}\sum_{n=1}^{\infty}\overline{\varphi}_n(x_j)\overline{\psi}_n(y_j)\right|;(\overline{\varphi}_n)_{n=1}^{\infty}\in B_{X'(E_1')},(\overline{\psi}_n)_{n=1}^{\infty}\in B_{Y'(E_2')}\right\}$$
$$=\|T_1\|\,\|T_2\|\,\gamma_{X,Y}^{p,q}(u,E_1\otimes E_2).$$

Portanto, $T_1\otimes T_2$ é contínuo e $\|T_1\otimes T_2\|\leq\|T_1\|\,\|T_2\|$. ■

Vejamos agora alguns exemplos de normas razoáveis uniformes, consequência das Proposições 3.1.5 e 3.1.8.

Exemplo 3.1.9 Sejam E e F espaços de Banach. As aplicações abaixo definem normas razoáveis uniformes:

- Quando $1<p,q<\infty$ e $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\geq 1$:

(a) $\gamma_{\ell_{p^*},\ell_{q^*}\langle\cdot\rangle}^{p,q}(u)=\sup\left\{\left|\sum_{j=1}^{k}\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n(x_j)\psi_n(y_j)\right|;(\varphi_n)_{n=1}^{\infty}\in B_{\ell_p(E')},(\psi_n)_{n=1}^{\infty}\in B_{\ell_q^w(F')}\right\}.$

Aqui cabe a observação de que, neste caso, é dispensável apresentar os parâmetros p e q na notação da norma, visto que estes são claramente determinados pela notação das classes de sequências. Dessa forma podemos escrever

$$\gamma_{\ell_{p^*},\ell_{q^*}\langle\cdot\rangle}\quad\text{em vez de}\quad\gamma_{\ell_{p^*},\ell_{q^*}\langle\cdot\rangle}^{p,q}.$$

Vamos adotar essa notação abreviada dessa norma sempre que for conveniente, como nos exemplos seguintes.

(b) $\gamma_{\ell_{p^*}\langle\cdot\rangle,\ell_{q^*}\langle\cdot\rangle}(u)=\sup\left\{\left|\sum_{j=1}^{k}\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n(x_j)\psi_n(y_j)\right|;(\varphi_n)_{n=1}^{\infty}\in B_{\ell_p^w(E')},(\psi_n)_{n=1}^{\infty}\in B_{\ell_q^w(F')}\right\}.$

(c) $\gamma_{\ell_{p^*}^u,\ell_{q^*}\langle\cdot\rangle}(u)=\sup\left\{\left|\sum_{j=1}^{k}\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n(x_j)\psi_n(y_j)\right|;(\varphi_n)_{n=1}^{\infty}\in B_{\ell_p\langle E'\rangle},(\psi_n)_{n=1}^{\infty}\in B_{\ell_q^w(F')}\right\}.$

- Quando $1<q<\infty$:

(d) $\gamma_{c_0,\ell_{q^*}\langle\cdot\rangle}(u)=\sup\left\{\left|\sum_{j=1}^{k}\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n(x_j)\psi_n(y_j)\right|;(\varphi_n)_{n=1}^{\infty}\in B_{\ell_1(E')},(\psi_n)_{n=1}^{\infty}\in B_{\ell_q^w(F')}\right\}.$

Nosso objetivo agora será buscar condições suficientes, sobre as classes de sequências envolvidas, para que a norma $\gamma_{X,Y}^{p,q}$ seja uma norma tensorial.

Definição 3.1.10 Dizemos que uma classe de sequências X satisfaz a *propriedade de extensão* se para todo espaço de Banach E e todo M subespaço de E, a seguinte propriedade for verificada: para cada $(\varphi_n)_{n=1}^{\infty} \in X(M')$, existe $(\widetilde{\varphi}_n)_{n=1}^{\infty} \in X(E')$ tal que

$$\|(\varphi_n)_{n=1}^{\infty}\|_{X(M')} = \|(\widetilde{\varphi}_n)_{n=1}^{\infty}\|_{X(E')} \quad \text{e} \quad \varphi_n(x) = \widetilde{\varphi}_n(x) \text{para todos } x \in M, n \in \mathbb{N}.$$

Vejamos alguns exemplos de classes de sequências que possuem a propriedade de extensão.

Exemplo 3.1.11 **(a)** As classes c_0 e ℓ_p, para todo $1 \leq p \leq \infty$, possuem a propriedade de extensão. De fato, se E um espaço de Banach, M um subespaço de E e $(\varphi_n)_{n=1}^{\infty}$ em $c_0(M')$ ou $\ell_p(M')$, tomando, para cada $n \in \mathbb{N}$, a extensão de Hahn-Banach $\widetilde{\varphi}_n$ de φ_n, a sequência $(\widetilde{\varphi}_n)_{n=1}^{\infty}$ satisfaz a propriedade da Definição 3.1.10 em ambos os casos.

(b) A classe $\ell_p\langle\cdot\rangle$ satisfaz a propriedade de extensão para $1 < p < \infty$. A demonstração deste fato está contida no Exemplo 2.1.7 c).

Agora vamos recordar o conceito de norma injetiva (ou que respeita subespaços). Se M e N são subespaços de E e F, respectivamente, sabemos que o produto tensorial $M \otimes N$ é um subespaço algébrico de $E \otimes F$. Se α é uma norma razoável uniforme, com os operadores de inclusão $I_M : M \longrightarrow E$ e $I_N : N \longrightarrow F$, temos

$$\alpha(u; E \otimes F) \leq \alpha(u; M \otimes N),$$

para todo $u \in M \otimes N$.

Dizemos que uma norma razoável uniforme α é *injetiva* (ou *respeita subespaços*) se a norma induzida em $M \otimes N$ pela norma de $E \otimes_\alpha F$ coincide com a norma de $M \otimes_\alpha N$. É bem conhecido que toda norma razoável uniforme injetiva é finitamente gerada.

Proposição 3.1.12 *Sejam X e Y classes de sequências tais que $\gamma_{X,Y}^{p,q}$ seja uma norma razoável uniforme. Se X' e Y' satisfazem a propriedade de extensão, então $\gamma_{X,Y}^{p,q}$ respeita subespaços.*

Demonstração. Sejam E e F espaços de Banach, M um subespaço de E e N um subespaço de F. Como $\gamma_{X,Y}^{p,q}$ é uniforme, temos

$$\gamma_{X,Y}^{p,q}(u; E \otimes F) \leq \gamma_{X,Y}^{p,q}(u; M \otimes N),$$

para todo $u \in M \otimes N$. Por outro lado, sejam $u \in M \otimes N$ e $\sum_{j=1}^{k} x_j \otimes y_j$ uma representação de u. Então, como X' e Y' satisfazem a propriedade de extensão, temos

$$\begin{aligned}
\gamma_{X,Y}^{p,q}(u; M \otimes N) &= \sup\left\{\left|\sum_{j=1}^{k}\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x_j)\psi_n(y_j)\right|; (\varphi_n)_{n=1}^{\infty} \in B_{X'(M')}, (\psi_n)_{n=1}^{\infty} \in B_{Y'(N')}\right\} \\
&= \sup\left\{\left|\sum_{j=1}^{k}\sum_{n=1}^{\infty} \widetilde{\varphi}_n(x_j)\widetilde{\psi}_n(y_j)\right|; (\widetilde{\varphi}_n)_{n=1}^{\infty} \in B_{X'(E')}, (\widetilde{\psi}_n)_{n=1}^{\infty} \in B_{Y'(F')}\right\} \\
&\leq \sup\left\{\left|\sum_{j=1}^{k}\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n(x_j)\zeta_n(y_j)\right|; (\xi_n)_{n=1}^{\infty} \in B_{X'(E')}, (\zeta_n)_{n=1}^{\infty} \in B_{Y'(F')}\right\} \\
&= \gamma_{X,Y}^{p,q}(u; E \otimes F).
\end{aligned}$$

Logo, $\gamma_{X,Y}^{p,q}$ respeita subespaços. ■

A partir dos resultados da seção, vejamos alguns exemplos onde $\gamma_{X,Y}^{p,q}$ define uma norma tensorial.

Exemplo 3.1.13 Sejam E e F espaços de Banach. Definem normas tensoriais as expressões:

(a) $\gamma_{\ell_1,c_0}(u) = \sup\left\{\left|\sum\limits_{j=1}^{k}\sum\limits_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x_j)\psi_n(y_j)\right|; (\varphi_n)_{n=1}^{\infty} \in B_{\ell_\infty(E')}, (\psi_n)_{n=1}^{\infty} \in B_{\ell_1(F')}\right\}$.

(b) $\gamma_{c_0,c_0}(u) = \sup\left\{\left|\sum\limits_{j=1}^{k}\sum\limits_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x_j)\psi_n(y_j)\right|; (\varphi_n)_{n=1}^{\infty} \in B_{\ell_1(E')}, (\psi_n)_{n=1}^{\infty} \in B_{\ell_1(F')}\right\}$.

- Quando $1 < q < \infty$:

(c) $\gamma_{c_0,\ell_{q^*}}(u) = \sup\left\{\left|\sum\limits_{j=1}^{k}\sum\limits_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x_j)\psi_n(y_j)\right|; (\varphi_n)_{n=1}^{\infty} \in B_{\ell_1(E')}, (\psi_n)_{n=1}^{\infty} \in B_{\ell_q(F')}\right\}$.

(d) $\gamma_{c_0,\ell_{q^*}^u}(u) = \sup\left\{\left|\sum\limits_{j=1}^{k}\sum\limits_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x_j)\psi_n(y_j)\right|; (\varphi_n)_{n=1}^{\infty} \in B_{\ell_1(E')}, (\psi_n)_{n=1}^{\infty} \in B_{\ell_q\langle F'\rangle}\right\}$.

- Quando $1 < p, q < \infty$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \geq 1$:

(e) $\gamma_{\ell_{p^*},\ell_{q^*}}(u) = \sup\left\{\left|\sum\limits_{j=1}^{k}\sum\limits_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x_j)\psi_n(y_j)\right|; (\varphi_n)_{n=1}^{\infty} \in B_{\ell_p(E')}, (\psi_n)_{n=1}^{\infty} \in B_{\ell_q(F')}\right\}$.

(f) $\gamma_{\ell_{p^*},\ell_{q^*}^u}(u) = \sup\left\{\left|\sum\limits_{j=1}^{k}\sum\limits_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x_j)\psi_n(y_j)\right|; (\varphi_n)_{n=1}^{\infty} \in B_{\ell_p(E')}, (\psi_n)_{n=1}^{\infty} \in B_{\ell_q\langle F'\rangle}\right\}$.

3.2 O dual do espaço $E\widehat{\otimes}_{\gamma^{p,q}_{X,Y}}F$

O objetivo desta seção é determinar o dual do espaço $E\widehat{\otimes}_{\gamma^{p,q}_{X,Y}}F$ como subespaço de $\mathcal{B}(E,F)$.

Usaremos a notação $\varphi = (\varphi_n)_{n=1}^{\infty} \in X(E)' \overset{1}{=} X'(E')$ para indicar que $\varphi \in X(E)'$, $(\varphi_n)_{n=1}^{\infty} \in X'(E')$ e $(\varphi_n)_{n=1}^{\infty} \longmapsto \varphi$ por meio do isomorfismo isométrico (3.1). Recordemos que no contexto da norma $\gamma^{p,q}_{X,Y}$, sempre existem as classes duais X' e Y' de X e Y, respectivamente.

Em princípio, como $\gamma^{p,q}_{X,Y}$ é uma norma razoável, temos $\gamma^{p,q}_{X,Y} \leq \pi$ e, portanto, a inclusão $(E\widehat{\otimes}_{\gamma^{p,q}_{X,Y}}F)' \subseteq \mathcal{B}(E,F)$ é verificada.

Agora, observando a definição da norma $\gamma^{p,q}_{X,Y}$ de um elemento $u = \sum\limits_{j=1}^{k} x_j \otimes y_j \in E \otimes F$

$$\gamma^{p,q}_{X,Y}(u) = \sup\left\{\left|\sum_{j=1}^{k}\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n(x_j)\psi_n(y_j)\right| ; (\varphi_n)_{n=1}^{\infty} \in B_{X'(E')}, (\psi_n)_{n=1}^{\infty} \in B_{Y'(F')}\right\},$$

encorajamo-nos, como também é feito para a norma ε (veja [45, Section 3.4]), a tentar associar $u \in E\widehat{\otimes}_{\gamma^{p,q}_{X,Y}}F$ a uma função contínua no espaço compacto $B_{X(E)'} \times B_{Y(F)'}$, onde $B_{X(E)'}$ e $B_{Y(F)'}$ estão munidas da topologia fraca-estrela.

O lema abaixo mostra que $E\widehat{\otimes}_{\gamma^{p,q}_{X,Y}}F$ pode, de fato, ser identificado como um subespaço do espaço de Banach $\left(C(B_{X(E)'} \times B_{Y(F)'}), \|\cdot\|_{\infty}\right)$. Nele percebe-se o porquê do uso das classes duais X' e Y' na definição da norma $\gamma^{p,q}_{X,Y}$.

Lema 3.2.1 *Sejam E e F espaços de Banach e X e Y classes de sequências tais que $\gamma^{p,q}_{X,Y}$ é norma razoável. A aplicação*

$$\begin{aligned}\Phi : &E \otimes_{\gamma^{p,q}_{X,Y}} F \longrightarrow C(B_{X(E)'} \times B_{Y(F)'})\\ u = &\sum_{j=1}^{k} x_j \otimes y_j \longmapsto \Phi_u : B_{X(E)'} \times B_{Y(F)'} \longrightarrow \mathbb{K}\\ &\qquad\qquad\qquad (\varphi,\psi) \longmapsto \Phi_u(\varphi,\psi) = \sum_{j=1}^{k}\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n(x_j)\psi_n(y_j)\end{aligned}$$

é uma isometria linear e, portanto, sua extensão $\Phi : E\widehat{\otimes}_{\gamma^{p,q}_{X,Y}}F \longrightarrow C(B_{X(E)'} \times B_{Y(F)'})$ também o é.

Demonstração. Vamos primeiro mostrar que Φ está bem definida. Seja $(\varphi^{\lambda},\psi^{\lambda})_{\lambda\in\Lambda}$ uma rede em $B_{X(E)'} \times B_{Y(F)'}$ tal que $(\varphi^{\lambda},\psi^{\lambda}) \xrightarrow{\lambda} (\varphi,\psi) \in B_{X(E)'} \times B_{Y(F)'}$. Como as projeções são contínuas, temos $\varphi^\lambda \xrightarrow{\lambda} \varphi$ e $\psi^\lambda \xrightarrow{\lambda} \psi$ nas respectivas topologias fraca-estrela e assim,

$$\varphi^\lambda((x_j)_{j=1}^\infty) \xrightarrow{\lambda} \varphi((x_j)_{j=1}^\infty) \quad \text{e} \quad \psi^\lambda((y_j)_{j=1}^\infty) \xrightarrow{\lambda} \psi((y_j)_{j=1}^\infty) \tag{3.3}$$

para todo $((x_j)_{j=1}^\infty, (y_j)_{j=1}^\infty) \in X(E) \times Y(F)$.

Como as classes X' e Y' são duais de X e Y, respectivamente, podemos escrever, para cada $\lambda \in \Lambda$, $\varphi^\lambda = (\varphi_n^\lambda)_{n=1}^\infty \in X'(E')$ e $\psi^\lambda = (\psi_n^\lambda)_{n=1}^\infty \in Y'(F')$. Também temos $\varphi = (\varphi_n)_{n=1}^\infty \in X'(E')$ e $\psi = (\psi_n)_{n=1}^\infty \in Y'(F')$. Com isso, do isomorfismo em (3.1) e de (3.3), segue que

$$\varphi_n^\lambda(x) = \varphi^\lambda(x \cdot e_n) \xrightarrow{\lambda} \varphi(x \cdot e_n) = \varphi_n(x) \quad \text{e} \quad \psi_n^\lambda(y) = \psi^\lambda(y \cdot e_n) \xrightarrow{\lambda} \psi(y \cdot e_n) = \psi_n(y)$$

para todos $x \in E$, $y \in F$ e $n \in \mathbb{N}$. Logo,

$$\sum_{j=1}^{k} \sum_{n=1}^{l} \varphi_n^\lambda(x_j)\psi_n^\lambda(y_j) \xrightarrow{\lambda} \sum_{j=1}^{k} \sum_{n=1}^{l} \varphi_n(x_j)\psi_n(y_j) \tag{3.4}$$

para todo $l \in \mathbb{N}$. Por outro lado, pela boa definição da norma $\gamma_{X,Y}^{p,q}$, temos

$$\lim_{l\to\infty} \sum_{j=1}^{k} \sum_{n=1}^{l} \varphi_n^\lambda(x_j)\psi_n^\lambda(y_j) = \sum_{j=1}^{k} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n^\lambda(x_j)\psi_n^\lambda(y_j) \text{ para todo } \lambda \in \Lambda, \tag{3.5}$$

e

$$\lim_{l\to\infty} \sum_{j=1}^{k} \sum_{n=1}^{l} \varphi_n(x_j)\psi_n(y_j) = \sum_{j=1}^{k} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x_j)\psi_n(y_j). \tag{3.6}$$

Vamos agora mostrar que a rede dupla

$$\left(\sum_{j=1}^{k} \sum_{n=1}^{l} \varphi_n^\lambda(x_j)\psi_n^\lambda(y_j) \right)_{(l,\lambda)\in\mathbb{N}\times\Lambda}$$

é convergente. Dado $\eta > 0$, por (3.4), existe $\lambda_0 \in \Lambda$ tal que se $\lambda \geq \lambda_0$, então

$$\left| \sum_{j=1}^{k} \sum_{n=1}^{l} \varphi_n^\lambda(x_j)\psi_n^\lambda(y_j) - \sum_{j=1}^{k} \sum_{n=1}^{l} \varphi_n(x_j)\psi_n(y_j) \right| < \frac{\eta}{2} \text{ para todo } l \in \mathbb{N}.$$

Ainda, de (3.6), existe $l_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $l \geq l_0$, então

$$\left| \sum_{j=1}^{k} \sum_{n=1}^{l} \varphi_n(x_j)\psi_n(y_j) - \sum_{j=1}^{k} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x_j)\psi_n(y_j) \right| < \frac{\eta}{2}.$$

Dessa forma, se $(l, \lambda) \geq (l_0, \lambda_0)$, temos

$$\left| \sum_{j=1}^{k} \sum_{n=1}^{l} \varphi_n^\lambda(x_j)\psi_n^\lambda(y_j) - \sum_{j=1}^{k} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x_j)\psi_n(y_j) \right|$$

$$\leq \left| \sum_{j=1}^{k} \sum_{n=1}^{l} \varphi_n^\lambda(x_j)\psi_n^\lambda(y_j) - \sum_{j=1}^{k} \sum_{n=1}^{l} \varphi_n(x_j)\psi_n(y_j) \right|$$
$$+ \left| \sum_{j=1}^{k} \sum_{n=1}^{l} \varphi_n(x_j)\psi_n(y_j) - \sum_{j=1}^{k} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x_j)\psi_n(y_j) \right| < \eta,$$

e isso nos diz que

$$\sum_{j=1}^{k} \sum_{n=1}^{l} \varphi_n^\lambda(x_j)\psi_n^\lambda(y_j) \xrightarrow{(l,\lambda)} \sum_{j=1}^{k} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x_j)\psi_n(y_j). \tag{3.7}$$

Pelo que temos em (3.4), (3.5) e (3.7), podemos aplicar a Proposição A.6 e obtemos

$$\lim_{l\to\infty} \lim_{\lambda} \sum_{j=1}^{k} \sum_{n=1}^{l} \varphi_n^\lambda(x_j)\psi_n^\lambda(y_j) = \sum_{j=1}^{k} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x_j)\psi_n(y_j) = \lim_{\lambda} \lim_{l\to\infty} \sum_{j=1}^{k} \sum_{n=1}^{l} \varphi_n^\lambda(x_j)\psi_n^\lambda(y_j),$$

donde segue que

$$\lim_{\lambda} \varPhi_u(\varphi^\lambda, \psi^\lambda) = \lim_{\lambda} \sum_{j=1}^{k} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n^\lambda(x_j)\psi_n^\lambda(y_j) = \lim_{\lambda} \lim_{l\to\infty} \sum_{j=1}^{k} \sum_{n=1}^{l} \varphi_n^\lambda(x_j)\psi_n^\lambda(y_j)$$
$$= \sum_{j=1}^{k} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x_j)\psi_n(y_j) = \varPhi_u(\varphi, \psi).$$

Isso nos mostra que $\varPhi_u$ é contínua e, dessa forma, $\varPhi$ está bem definida. Vejamos agora que $\varPhi$ é linear. Se $u, v \in E \otimes F$, $\lambda \in \mathbb{K}$, $\varphi \in B_{X(E)'}$ e $\psi \in B_{Y(F)'}$, então

$$\varPhi_{\lambda u+v}(\varphi, \psi) = \widetilde{A}(\lambda u + v)(\varphi, \psi) = \lambda \widetilde{A}(u)(\varphi, \psi) + \widetilde{A}(v)(\varphi, \psi)$$
$$= \lambda \varPhi_u(\varphi, \psi) + \varPhi_v(\varphi, \psi),$$

em que $\widetilde{A}$ é a linearização da aplicação $A : E \times F \longrightarrow B(X'(E'), Y'(F'))$ dada por $A(x, y) = B_{x,y}$, como no caso particular (Proposição 3.1.5) da Proposição 3.1.3. Logo Φ é linear. É claro que $\varPhi$ é uma isometria, ou seja, $\|\varPhi_u\|_\infty = \gamma_{X,Y}^{p,q}(u)$ para todo $u \in E \otimes F$.

■

Agora, estamos preparados para caracterizar os elementos do espaço $\left(E \widehat{\otimes}_{\gamma_{X,Y}^{p,q}} F\right)'$.

Teorema 3.2.2 *Sejam E e F espaços de Banach, $B : E \times F \longrightarrow \mathbb{K}$ uma forma bilinear e X e Y classes de sequências tais que $\gamma_{X,Y}^{p,q}$ é norma razoável. Então, $\widetilde{B} : E \widehat{\otimes}_{\gamma_{X,Y}^{p,q}} F \longrightarrow \mathbb{K}$ é um funcional linear contínuo se, e somente se, existe uma medida de Borel regular μ sobre o compacto $B_{X(E)'} \times B_{Y(F)'}$ (com a topologia produto das respectivas topologias fraca-estrela) tal que*

$$B(x, y) = \int_{B_{X(E)'} \times B_{Y(F)'}} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x)\psi_n(y) d\mu(\varphi, \psi) \tag{3.8}$$

para todos $x \in E$ e $y \in F$. Além disso, $\left\| \widetilde{B} \right\| = \inf \|\mu\|$, em que μ varia sobre o conjunto de todas medidas que correspondem à forma bilinear B por (3.8). Além disso, o ínfimo é atingido.

Demonstração. Suponhamos que $\widetilde{B} : E \widehat{\otimes}_{\gamma^{p,q}_{X,Y}} F \longrightarrow \mathbb{K}$ seja um funcional linear contínuo. Pelo Lema 3.2.1, podemos identificar $E \widehat{\otimes}_{\gamma^{p,q}_{X,Y}} F$ como um subespaço de $C(B_{X(E)'} \times B_{Y(F)'})$ e, pelo Teorema de Hahn-Banach, existe um funcional linear contínuo $\widehat{B} : C(B_{X(E)'} \times B_{Y(F)'}) \longrightarrow \mathbb{K}$ que estende $\widetilde{B}$ e satisfaz $\left\| \widehat{B} \right\| = \left\| \widetilde{B} \right\|$.

Pelo Teorema da Representação de Riesz (Teorema 1.7.4), o funcional $\widehat{B}$ é dado por uma única medida complexa de Borel regular μ na forma

$$\widehat{B}(f) = \int_{B_{X(E)'} \times B_{Y(F)'}} f(\varphi, \psi)\ d\mu(\varphi, \psi),$$

para cada $f \in C(B_{X(E)'} \times B_{Y(F)'})$ e, além disso, $\left\| \widehat{B} \right\| = \|\mu\|$. Em particular, se $f = x \otimes y$ (identificação do Lema 3.2.1 novamente), então

$$B(x, y) = \widetilde{B}(x \otimes y) = \widehat{B}(x \otimes y) = \int_{B_{X(E)'} \times B_{Y(F)'}} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x) \psi_n(y) d\mu(\varphi, \psi)$$

para todos $x \in E$ e $y \in F$.

Reciprocamente, como $\widetilde{B}$ é a linearização de B, se $u \in E \otimes F$ e $\sum_{j=1}^{k} x_j \otimes y_j$ é uma representação de u, temos

$$\begin{aligned}
\widetilde{B}\left(\sum_{j=1}^{k} x_j \otimes y_j \right) &= \sum_{j=1}^{k} \widetilde{B}(x_j \otimes y_j) = \sum_{j=1}^{k} B(x_j, y_j) \\
&= \sum_{j=1}^{k} \int_{B_{X(E)'} \times B_{Y(F)'}} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x_j) \psi_n(y_j) d\mu(\varphi, \psi) \\
&= \int_{B_{X(E)'} \times B_{Y(F)'}} \sum_{j=1}^{k} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x_j) \psi_n(y_j) d\mu(\varphi, \psi).
\end{aligned}$$

O Lema 3.2.1 nos diz que $u \in C(B_{X(E)'} \times B_{Y(F)'})$ e assim u é uma função Borel-mensurável. Mais ainda, como μ é uma medida complexa, então $|\mu|$ é uma medida positiva finita e com isso $u \in L_1(|\mu|)$. De fato,

$$\begin{aligned}
\int_{B_{X(E)'} \times B_{Y(F)'}} |u|\ \ d|\mu|(\varphi, \psi) &= \int_{B_{X(E)'} \times B_{Y(F)'}} \left| \sum_{j=1}^{k} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x_j) \psi_n(y_j) \right| d|\mu|(\varphi, \psi) \\
&\leq \gamma^{p,q}_{X,Y}(u) \int_{B_{X(E)'} \times B_{Y(F)'}} d|\mu|(\varphi, \psi)
\end{aligned}$$

$$= \gamma^{p,q}_{X,Y}(u)\,|\mu|\left(B_{X(E)'} \times B_{Y(F)'}\right) = \gamma^{p,q}_{X,Y}(u)\,\|\mu\| < \infty.$$

Dessa forma, pelo Teorema de Radon-Nikodym (Teorema 1.7.3) existe uma função $|\mu|$-integrável h em $B_{X(E)'} \times B_{Y(F)'}$ tal que $|h| = 1$ e

$$\int_{B_{X(E)' \times Y(F)'}} u \; d\mu(\varphi, \psi) = \int_{B_{X(E)' \times Y(F)'}} uh \; d|\mu|(\varphi, \psi).$$

Com tudo isso, temos

$$\begin{aligned} \left|\widetilde{B}(u)\right| &= \left|\int_{B_{X(E)'} \times B_{Y(F)'}} \sum_{j=1}^{k} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x_j)\psi_n(y_j) d\mu(\varphi, \psi)\right| \\ &= \left|\int_{B_{X(E)'} \times B_{Y(F)'}} u \; d\mu(\varphi, \psi)\right| = \left|\int_{B_{X(E)'} \times B_{Y(F)'}} uh \; d|\mu|(\varphi, \psi)\right| \\ &\leq \int_{B_{X(E)'} \times B_{Y(F)'}} |u| \;\; d|\mu|(\varphi, \psi) \leq \gamma^{p,q}_{X,Y}(u)\,\|\mu\|\,, \end{aligned}$$

onde na segunda igualdade estamos usando a identificação $u = \Phi(u)$ provida pelo Lema 3.2.1. Logo, $\widetilde{B} : E \otimes_{\gamma^{p,q}_{X,Y}} F \longrightarrow \mathbb{K}$ é contínuo. Por extensão, seque que $\widetilde{B} : E\widehat{\otimes}_{\gamma^{p,q}_{X,Y}} F \longrightarrow \mathbb{K}$ é contínuo com $\left\|\widetilde{B}\right\| \leq \|\mu\|$.

Por fim, pelo o que fizemos agora e na implicação anterior, temos $\left\|\widetilde{B}\right\| = \inf \|\mu\|$ e que esse ínfimo é atingido. ■

Acabamos de caracterizar os elementos de $(E\widehat{\otimes}_{\gamma^{p,q}_{X,Y}} F)'$ em termos de certas formas bilineares. Vamos definir o espaço de Banach formado por essas formas.

Definição 3.2.3 Dizemos que uma forma bilinear $B : E \times F \longrightarrow \mathbb{K}$ é $(\overset{p,q}{X,Y})$-integral se $\widetilde{B} : E\widehat{\otimes}_{\gamma^{p,q}_{X,Y}} F \longrightarrow \mathbb{K}$ é contínuo.

Denotamos o espaço das formas bilineares $(\overset{p,q}{X,Y})$-integrais por $\mathcal{B}I^{p,q}_{X,Y}(E, F)$, o qual está munido com a norma

$$\|B\|_{\mathcal{B}I^{p,q}_{X,Y}} = \inf \|\mu\| = \left\|\widetilde{B}\right\|.$$

Como fizemos antes com a norma $\gamma^{p,q}_{X,Y}$, quando p e q forem facilmente identificáveis, escrevemos esse espaço na forma mais simples $\mathcal{B}I_{X,Y}(E, F)$ e dizemos que este é o espaço das formas bilineares (X, Y)-integrais.

Em síntese, o que fizemos no teorema acima foi mostrar que

$$\left(E\widehat{\otimes}_{\gamma^{p,q}_{X,Y}} F\right)' \overset{1}{=} \mathcal{B}I^{p,q}_{X,Y}(E, F).$$

Note que o espaço $\mathcal{B}I_{X,Y}^{p,q}(E,F)$ é Banach, uma vez que é o dual do espaço $E\widehat{\otimes}_{\gamma_{X,Y}^{p,q}}F$.

O Teorema 3.2.2 assegura a existência de $\mu \in M_b\left(B_{X(E)'} \times B_{Y(F)'}\right)$. Mostraremos agora que esta medida μ pode ser tomada positiva e finita.

Proposição 3.2.4 *Sejam E e F espaços de Banach. Se $B \in \mathcal{B}I_{X,Y}^{p,q}(E,F)$, então existe uma medida de Borel regular positiva (finita) μ em $B_{X(E)'} \times B_{Y(F)'}$ (com a topologia produto das respectivas topologias fraca-estrela) tal que*

$$B(x,y) = \int_{B_{X(E)'} \times B_{Y(F)'}} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x)\psi_n(y)d\mu(\varphi,\psi),$$

para todos $x \in E$ e $y \in F$. Além disso, $\|B\|_{\mathcal{B}I_{X,Y}^{p,q}} = \|\mu\| = \mu\left(B_{X(E)'} \times B_{Y(F)'}\right)$.

Demonstração. Pelo Lema 3.2.1, segue que

$$\Phi : E \otimes_{\gamma_{X,Y}^{p,q}} F \longrightarrow C(B_{X(E)'} \times B_{Y(F)'})$$

é uma isometria linear e, pelos Teoremas 3.2.2 e 1.7.4, tem-se que o operador adjunto

$$\Phi' : M_b\left(B_{X(E)'} \times B_{Y(F)'}\right) \longrightarrow \left(E \otimes_{\gamma_{X,Y}^{p,q}} F\right)' \overset{1}{=} \left(E\widehat{\otimes}_{\gamma_{X,Y}^{p,q}}F\right)'$$

é sobrejetivo. Para não sobrecarregar a demonstração com notações extensas, escrevemos $\Omega = B_{X(E)'} \times B_{Y(F)'}$. Como Ω é um espaço Haudorff compacto, segue que $\mathrm{Prob}(\Omega)$ é convexo e compacto na topologia fraca-estrela. Mais ainda, $\mathrm{D}\left(\Omega\right) \subset \mathrm{Prob}\left(\Omega\right) \subset M_b\left(\Omega\right)$.

Considerando o sistema dual de separação $\left\langle (E \otimes_{\gamma_{X,Y}^{p,q}} F)', (E \otimes_{\gamma_{X,Y}^{p,q}} F)\right\rangle$ com a forma bilinear

$$\begin{aligned} \langle \cdot,\cdot\rangle : \left(E \otimes_{\gamma_{X,Y}^{p,q}} F\right)' \times \left(E \otimes_{\gamma_{X,Y}^{p,q}} F\right) &\longrightarrow \mathbb{K} \\ \langle \varphi, u\rangle &= \varphi(u), \end{aligned}$$

vamos determinar o polar absoluto de $\Phi'(\mathrm{D}(\Omega)) \subset (E \otimes_{\gamma_{X,Y}^{p,q}} F)'$. Denotamos por $\delta_{(\varphi,\psi)}$, com $\varphi \in B_{X(E)'}$ e $\psi \in B_{Y(F)'}$, as medidas de Dirac em Ω. Assim,

$$\begin{aligned} &\Phi'(\mathrm{D}(\Omega))^0 = \\ &= \left\{ \begin{array}{c} u \in E \otimes_{\gamma_{X,Y}^{p,q}} F; \left|\Phi'(\delta_{(\varphi,\psi)})(u)\right| \leq 1 \text{ para todos } \varphi = (\varphi_n)_{n=1}^{\infty} \in B_{X'(E')}, \\ \psi = (\psi_n)_{n=1}^{\infty} \in B_{Y'(F')} \end{array} \right\} \\ &= \left\{ \begin{array}{c} u \in E \otimes_{\gamma_{X,Y}^{p,q}} F; \left|\delta_{(\varphi,\psi)}(\Phi(u))\right| \leq 1 \text{ para todos } \varphi = (\varphi_n)_{n=1}^{\infty} \in B_{X'(E')}, \\ \psi = (\psi_n)_{n=1}^{\infty} \in B_{Y'(F')} \end{array} \right\} \end{aligned}$$

$$= \left\{ \begin{array}{c} u \in E \otimes_{\gamma^{p,q}_{X,Y}} F; \left|\int_\Omega \Phi(u)\ d\delta_{(\varphi,\psi)}\right| \leq 1 \text{ para todos } \varphi = (\varphi_n)_{n=1}^\infty \in \\ B_{X'(E')}, \psi = (\psi_n)_{n=1}^\infty \in B_{Y'(F')} \end{array} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{array}{c} u \in E \otimes_{\gamma^{p,q}_{X,Y}} F; \left|\sum\limits_{j=1}^{k}\sum\limits_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x_j)\psi_n(y_j)\right| \leq 1 \text{ para todos } \varphi = (\varphi_n)_{n=1}^\infty \in \\ B_{X'(E')}, \psi = (\psi_n)_{n=1}^\infty \in B_{Y'(F')} \ \text{ e } \ u = \sum\limits_{j=1}^{k} x_j \otimes y_j \end{array} \right\}$$

$$= B_{E\otimes_{\gamma^{p,q}_{X,Y}} F}.$$

Determinando agora o polar absoluto de $\Phi'(\mathrm{D}(\Omega))^0 \subset E \otimes_{\gamma^{p,q}_{X,Y}} F$, temos

$$\begin{aligned} \Phi'(\mathrm{D}(\Omega))^{00} &= \left\{\varphi \in \left(E \otimes_{\gamma^{p,q}_{X,Y}} F\right)'; |\langle \varphi, u\rangle| \leq 1 \ \text{ para todo } \ u \in \Phi'(\mathrm{D}(\Omega))^0\right\} \\ &= \left\{\varphi \in \left(E \otimes_{\gamma^{p,q}_{X,Y}} F\right)'; |\langle \varphi, u\rangle| \leq 1 \ \text{ para todo } \ u \in B_{E\otimes_{\gamma^{p,q}_{X,Y}} F}\right\} \\ &= B_{(E\otimes_{\gamma^{p,q}_{X,Y}} F)'}. \end{aligned}$$

O Teorema 1.6.2 garante que

$$\Phi'(\mathrm{D}(\Omega))^{00} = \overline{\Gamma(\Phi'(\mathrm{D}(\Omega)))}^{\sigma((E\otimes_{\gamma^{p,q}_{X,Y}} F)', E\otimes_{\gamma^{p,q}_{X,Y}} F)}.$$

Vejamos que $\Phi'(\mathrm{D}(\Omega))$ é balanceado. Sejam $\delta_{(\varphi,\psi)} \in \mathrm{D}(\Omega)$ e $\lambda \in \mathbb{K}$ com $|\lambda| \leq 1$. Se $u = \sum_{j=1}^k x_j \otimes y_j$, então

$$\lambda\Phi'(\delta_{(\varphi,\psi)})(u) = \lambda\delta_{(\varphi,\psi)}(\Phi(u)) = \lambda\sum_{j=1}^{k}\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x_j)\psi_n(y_j).$$

Como $|\lambda| \leq 1$, temos que $\delta_{(\lambda\varphi,\psi)} \in \mathrm{D}(\Omega)$. Mais ainda,

$$\Phi'(\delta_{(\lambda\varphi,\psi)})(u) = \lambda\sum_{j=1}^{k}\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x_j)\psi_n(y_j).$$

Assim, $\lambda\Phi'(\delta_{(\varphi,\psi)}) = \Phi'(\delta_{(\lambda\varphi,\psi)})$. Acabamos de mostrar que $\lambda\Phi'(\mathrm{D}(\Omega)) \subset \Phi'(\mathrm{D}(\Omega))$ e portanto $\Phi'(\mathrm{D}(\Omega))$ é balanceado. Pelo Teorema 1.6.1, segue que $\mathrm{conv}(\Phi'(\mathrm{D}(\Omega))) = \Gamma(\Phi'(\mathrm{D}(\Omega)))$ e assim

$$\overline{\Gamma(\Phi'(\mathrm{D}(\Omega)))}^{\sigma((E\otimes_{\gamma^{p,q}_{X,Y}} F)', E\otimes_{\gamma^{p,q}_{X,Y}} F)} = \overline{\mathrm{conv}(\Phi'(\mathrm{D}(\Omega)))}^{\sigma((E\otimes_{\gamma^{p,q}_{X,Y}} F)', E\otimes_{\gamma^{p,q}_{X,Y}} F)}.$$

Sabendo que $\mathrm{Prob}(\Omega)$ é convexo e compacto na topologia fraca-estrela, a linearidade de Φ' garante que $\Phi'(\mathrm{Prob}(\Omega))$ é convexo e, usando o fato que aplicações contínuas levam conjuntos compactos em conjuntos compactos, a Proposição 1.6.3 garante que

$\Phi'(\mathrm{Prob}(\Omega))$ é compacto na topologia fraca-estrela. Dessa forma, com os fechos tomados na topologia fraca-estrela, temos

$$B_{(E\otimes_{\gamma^{p,q}_{X,Y}}F)'} = \Phi'(\mathrm{D}(\Omega))^{00} = \overline{\Gamma(\Phi'(\mathrm{D}(\Omega)))} = \overline{\mathrm{conv}(\Phi'(\mathrm{D}(\Omega)))} \subset \Phi'(\mathrm{Prob}(\Omega)).$$

Se $B \in \mathcal{B}I^{p,q}_{X,Y}(E,F)$, segue que $\widetilde{B} \in (E\widehat{\otimes}_{\gamma^{p,q}_{X,Y}}F)' \stackrel{1}{=} (E\otimes_{\gamma^{p,q}_{X,Y}}F)'$, onde $\widetilde{B}$ é a linearização de B. Assim, pelo que acabamos de mostrar, existe $\nu \in \mathrm{Prob}(\Omega)$ tal que $\widetilde{B} = \left\|\widetilde{B}\right\| \Phi'(\nu)$. Tomando $\mu = \left\|\widetilde{B}\right\| \cdot \nu$, segue que $\widetilde{B} = \Phi'(\mu)$ e

$$\begin{aligned} B(x,y) = \widetilde{B}(x\otimes y) = \Phi'(\mu)(x\otimes y) = \mu(\Phi(x\otimes y)) &= \int_\Omega \Phi(x\otimes y)d\mu(\varphi,\psi) \\ &= \int_\Omega \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x)\psi_n(y)d\mu(\varphi,\psi). \end{aligned}$$

Além disso, $\|B\|_{\mathcal{B}I^{p,q}_{X,Y}} = \left\|\widetilde{B}\right\| = \|\mu\|$. ■

Observação 3.2.5 a) Um fato digno de nota: como $\varepsilon \leq \gamma^{p,q}_{X,Y}$, tem-se

$$\mathcal{B}_I(E,F) \subseteq \mathcal{B}I^{p,q}_{X,Y}(E,F),$$

para todos E e F Banach, ou seja, toda forma bilinear integral (veja (1.4)) é $(\overset{p,q}{X,Y})$-integral.
b) Na Proposição 3.1.12 vimos que, sob algumas hipóteses, a norma $\gamma^{p,q}_{X,Y}$ respeita subespaços. Então, nas condições dessa proposição, se M e N são subespaços de E e F, respectivamente, segue do Teorema de Hahn-Banach que cada forma $(\overset{p,q}{X,Y})$-integral definida em $M\times N$ pode ser estendida para uma forma $(\overset{p,q}{X,Y})$-integral definida em $E\times F$, com a mesma norma.

Como a exigência do Teorema 3.2.2 é apenas de que a norma $\gamma^{p,q}_{X,Y}$ seja razoável, tomando algumas das normas que apresentamos no Exemplo 3.1.13, temos o seguinte exemplo.

Exemplo 3.2.6 Se E e F espaços de Banach, então:

(a) $\left(E\widehat{\otimes}_{\gamma_{\ell_1,c_0}}F\right)' \stackrel{1}{=} \mathcal{B}I_{\ell_1,c_0}(E,F)$.

(b) $\left(E\widehat{\otimes}_{\gamma_{c_0,c_0}}F\right)' \stackrel{1}{=} \mathcal{B}I_{c_0,c_0}(E,F)$.

(c) $\left(E\widehat{\otimes}_{\gamma_{c_0,\ell^u_{p^*}}}F\right)' \stackrel{1}{=} \mathcal{B}I_{c_0,\ell^u_{p^*}}(E,F)$, quando $1<p<\infty$.

(d) $\left(E\widehat{\otimes}_{\gamma_{\ell_{p^*}\langle\cdot\rangle,\ell^u_{q^*}}}F\right)' \stackrel{1}{=} \mathcal{B}I_{\ell_{p^*}\langle\cdot\rangle,\ell^u_{q^*}}(E,F)$, quando $1<p,q<\infty$ e $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\geq 1$.

As formas $(\overset{p,q}{X,Y})$-integrais satisfazem uma propriedade característica de multi-ideais. A demonstração desse fato, por sua simplicidade, será omitida.

Proposição 3.2.7 *Sejam E, F, G e H espaços de Banach, $T \in \mathcal{L}(G; E)$, $S \in \mathcal{L}(H; F)$ e X e Y classes de sequencias tais que $\gamma_{X,Y}^{p,q}$ é uma norma razoável uniforme. Se $B \in \mathcal{B}I_{X,Y}^{p,q}(E, F)$, então a forma bilinear $B' = B \circ (T, S)$ é $(\overset{p,q}{X,Y})$-integral e*

$$\|B'\|_{\mathcal{B}I_{X,Y}^{p,q}} \leq \|B\|_{\mathcal{B}I_{X,Y}^{p,q}} \|T\| \, \|S\| \, .$$

Vejamos agora dois exemplos de formas bilineares $(\ell_{p^*}\langle\cdot\rangle, \ell_{q^*}\langle\cdot\rangle)$-integrais. A norma que gera essa classe foi exibida no Exemplo 3.1.9 b).

Exemplo 3.2.8 Seja (Ω, Σ, μ) um espaço de medida finita. Sejam $1 < p, q < \infty$ satisfazendo $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \geq 1$, Z e W classes de sequências norma monótonas tais que $Z \overset{1}{\hookrightarrow} \ell_p^w$ e $W \overset{1}{\hookrightarrow} \ell_q^w$. A forma bilinear $B : Z(L_\infty(\mu)) \times W(L_\infty(\mu)) \longrightarrow \mathbb{K}$ dada por

$$B((f_n)_{n=1}^\infty, (g_n)_{n=1}^\infty) = \int_\Omega \sum_{n=1}^\infty f_n g_n \; d\mu$$

é $(\ell_{p^*}\langle\cdot\rangle, \ell_{q^*}\langle\cdot\rangle)$-integral.

Vamos primeiro mostrar que B está bem definida. Pelo Teorema de Maharam (Teorema 1.7.1), podemos tomar um levantamento $\rho : L_\infty(\mu) \longrightarrow \mathcal{L}_\infty(\mu)$ e

$$\delta_\omega([f]) := \rho([f])(\omega) = f(\omega)$$

define um elemento em $L_\infty(\mu)'$ de norma menor ou igual a 1, para cada $\omega \in \Omega$. De fato, se $[f] \in L_\infty(\mu)$, então

$$|\delta_\omega([f])| = |\rho([f])(\omega)| = |f(\omega)| \leq \|f\|_\infty = \|[f]\|_\infty \, .$$

Tendo em mente que os elementos de $L_\infty(\mu)$ são classes de equivalência, escrevemos f no lugar de $[f]$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ e cada $\omega \in \Omega$, definimos o funcional linear $\Phi_{n,\omega} : Z(L_\infty(\mu)) \longrightarrow \mathbb{K}$ dado por

$$\Phi_{n,\omega}((f_i)_{i=1}^\infty) = f_n(\omega).$$

Note que $\Phi_{n,\omega}$ é contínuo, pois

$$\begin{aligned} \|\Phi_{n,\omega}\| &= \sup_{(f_i)_{i=1}^\infty \in B_{Z(L_\infty(\mu))}} |f_n(\omega)| = \sup_{(0,\ldots,0,f_n,0,\ldots) \in B_{Z(L_\infty(\mu))}} |f_n(\omega)| \\ &= \sup_{f_n \in B_{L_\infty(\mu)}} |f_n(\omega)| = \sup_{f_n \in B_{L_\infty(\mu)}} |\delta_\omega(f_n)| = \|\delta_\omega\| \leq 1, \end{aligned}$$

onde na segunda igualdade usamos o fato de Z ser norma monótona. Vejamos agora que $(\Phi_{n,\omega})_{n=1}^{\infty} \in B_{\ell_p^w(Z(L_\infty(\mu))')}$, para cada $\omega \in \Omega$. Com efeito,

$$\begin{aligned}
\|(\Phi_{n,\omega})_{n=1}^{\infty}\|_{\ell_p^w(Z(L_\infty(\mu))')} &= \sup_{(f_i)_{i=1}^{\infty} \in B_{Z(L_\infty(\mu))}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\Phi_{n,\omega}\left((f_i)_{i=1}^{\infty}\right)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \sup_{(f_n)_{n=1}^{\infty} \in B_{\ell_p^w(L_\infty(\mu))}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(\omega)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \sup_{(f_n)_{n=1}^{\infty} \in B_{\ell_p^w(L_\infty(\mu))}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\delta_\omega(f_n)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \sup_{(f_n)_{n=1}^{\infty} \in B_{\ell_p^w(L_\infty(\mu))}} \sup_{\varphi \in B_{L_\infty(\mu)'}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi(f_n)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \sup_{(f_n)_{n=1}^{\infty} \in B_{\ell_p^w(L_\infty(\mu))}} \|(f_n)_{n=1}^{\infty}\|_{\ell_p^w(L_\infty(\mu))} \leq 1.
\end{aligned}$$

De maneira análoga ao que fizemos acima, podemos definir o funcional linear e contínuo $\Psi_{n,\omega} : W(L_\infty(\mu)) \longrightarrow \mathbb{K}$, de norma menor ou igual a 1, dado por

$$\Psi_{n,\omega}((g_i)_{i=1}^{\infty}) = g_n(\omega)$$

e temos $(\Psi_{n,\omega})_{n=1}^{\infty} \in B_{\ell_q^w(W(L_\infty(\mu))')}$, para cada $\omega \in \Omega$.

Dos fatos acima, temos

$$\begin{aligned}
|B((f_n)_{n=1}^{\infty}, (g_n)_{n=1}^{\infty})| &\leq \int_\Omega \left| \sum_{n=1}^{\infty} f_n g_n \right| d\mu \\
&= \int_\Omega \left| \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_{n,\omega}\left((f_i)_{i=1}^{\infty}\right) \Psi_{n,\omega}((g_i)_{i=1}^{\infty}) \right| d\mu \qquad (3.9) \\
&\leq \gamma_{\ell_{p^*}\langle\cdot\rangle, \ell_{q^*}\langle\cdot\rangle}\left((f_i)_{i=1}^{\infty} \otimes (g_i)_{i=1}^{\infty}; Z(L_\infty(\mu)) \otimes W(L_\infty(\mu))\right) \cdot \mu(\Omega) \\
&= \|(f_i)_{i=1}^{\infty}\|_{Z(L_\infty(\mu))} \|(g_i)_{i=1}^{\infty}\|_{W(L_\infty(\mu))} \mu(\Omega) < \infty.
\end{aligned}$$

Assim, B está bem definida e a sua bilinearidade é de fácil verificação.

Sendo $\widetilde{B} : Z(L_\infty(\mu)) \otimes W(L_\infty(\mu)) \longrightarrow \mathbb{K}$ a linearização de B e seguindo de maneira análoga ao que fizemos em (3.9), mostra-se que

$$\widetilde{B} \in \left(Z(L_\infty(\mu)) \widehat{\otimes}_{\gamma_{\ell_{p^*}\langle\cdot\rangle, \ell_{q^*}\langle\cdot\rangle}} W(L_\infty(\mu)) \right)' \quad \text{e} \quad \left\| \widetilde{B} \right\| \leq \mu(\Omega).$$

Por outro lado, se $f = g = 1$, então o tensor elementar $u = f \cdot e_1 \otimes g \cdot e_1 \in Z(L_\infty(\mu)) \otimes W(L_\infty(\mu))$ tem norma $(\ell_{p^*}\langle\cdot\rangle, \ell_{q^*}\langle\cdot\rangle)$-integral menor igual a 1, pois

$$\gamma_{\ell_{p^*}\langle\cdot\rangle, \ell_{q^*}\langle\cdot\rangle}(u) \leq \|f \cdot e_1\|_{Z(L_\infty(\mu))} \|g \cdot e_1\|_{W(L_\infty(\mu))} \leq \|f\|_\infty \|g\|_\infty = 1.$$

Consequentemente, $\mu(\Omega) = \widetilde{B}(u) \leq \left\| \widetilde{B} \right\|$.

Portanto, $B \in \mathcal{B}I_{\ell_{p^*}\langle\cdot\rangle, \ell_{q^*}\langle\cdot\rangle}(Z(L_\infty(\mu)), W(L_\infty(\mu)))$ e $\|B\|_{\mathcal{BI}_{\ell_{p^*}\langle\cdot\rangle, \ell_{q^*}\langle\cdot\rangle}} = \mu(\Omega)$.

Exemplo 3.2.9 Seja (Ω, Σ, μ) um espaço de medida finita tal que Ω é um espaço Hausdorff compacto, Σ σ-álgebra de Borel e μ uma medida positiva e finita de Borel. Sejam $1 < p, q < \infty$ satisfazendo $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \geq 1$, Z e W classes de sequências linearmente estáveis e norma monótonas tais que $Z \overset{1}{\hookrightarrow} \ell_p^w$ e $W \overset{1}{\hookrightarrow} \ell_q^w$. A forma bilinear $A : Z(C(\Omega)) \times W(C(\Omega)) \longrightarrow \mathbb{K}$ dada por

$$A((f_n)_{n=1}^{\infty}, (g_n)_{n=1}^{\infty}) = \int_{\Omega} \sum_{n=1}^{\infty} f_n g_n \, d\mu$$

é $(\ell_{p^*} \langle \cdot \rangle, \ell_{q^*} \langle \cdot \rangle)$-integral.

De fato, nessas condições podemos considerar o operador inclusão $I_{C(\Omega)} : C(\Omega) \longrightarrow L_{\infty}(\mu)$, com $\left\| I_{C(\Omega)} \right\| = 1$, e como as classes de sequências Z e W são linearmente estáveis, segue que os operadores induzidos $I_{Z(C(\Omega))} : Z(C(\Omega)) \longrightarrow Z(L_{\infty}(\mu))$ e $I_{W(C(\Omega))} : W(C(\Omega)) \longrightarrow W(L_{\infty}(\mu))$ são lineares e contínuos com $\left\| I_{Z(C(\Omega))} \right\| = \left\| I_{W(C(\Omega))} \right\| = 1$. Considerando a forma bilinear B definida no exemplo anterior, segue que $A = B \circ \left(I_{Z(C(\Omega))}, I_{W(C(\Omega))} \right)$. Como $\gamma_{\ell_{p^*} \langle \cdot \rangle, \ell_{q^*} \langle \cdot \rangle}$ é uma norma razoável uniforme, a Proposição 3.2.7 garante que A é $(\ell_{p^*} \langle \cdot \rangle, \ell_{q^*} \langle \cdot \rangle)$-integral e ainda que

$$\|A\|_{\mathcal{BI}_{\ell_{p^*} \langle \cdot \rangle, \ell_{q^*} \langle \cdot \rangle}} \leq \|B\|_{\mathcal{BI}_{\ell_{p^*} \langle \cdot \rangle, \ell_{q^*} \langle \cdot \rangle}} \left\| I_{Z(C(\Omega))} \right\| \left\| I_{W(C(\Omega))} \right\| = \mu(\Omega).$$

Embora estes exemplos acima sejam um caso concreto e particular de formas bilineares $(X \overset{p,q}{,} Y)$-integrais, vamos explorá-las na subseção seguinte como base para a definição de operadores lineares dessa natureza, isto é, neste caso particular. A inspiração dessa classe reside na construção dos operadores integrais, como apresentado em [45, Section 3.5] para a norma ε.

3.2.1 Operadores lineares $(\ell_{p^*} \langle \cdot \rangle, \ell_{q^*} \langle \cdot \rangle)$-integrais.

Nesta subseção, definiremos os operadores lineares $(\ell_{p^*} \langle \cdot \rangle, \ell_{q^*} \langle \cdot \rangle)$-integrais a partir das formas bilineares $(\ell_{p^*} \langle \cdot \rangle, \ell_{q^*} \langle \cdot \rangle)$-integrais, vistas anteriormente.

Vamos fixar algumas notações. Consideramos $1 < p, q < \infty$ satisfazendo $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \geq 1$ e denotamos por (K, Σ, μ) um espaço de medida finita tal que K é um espaço Hausdorff compacto, Σ a σ-álgebra de Borel e μ uma medida positiva e finita de Borel.

Dois fatos úteis que usamos mais à frente são apresentados na observação abaixo:

Observação 3.2.10 a) Sejam E um espaço de Banach e $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência em $\mathcal{L}(E; C(K))$ tais que $(S_n(x))_{n=1}^{\infty} \in \ell_p^w(C(K))$ para todo $x \in E$. Então, está bem definida e é linear a aplicação $\Theta_{(S_n)_{n=1}^{\infty}} : E \longrightarrow \ell_p^w(C(K))$ dada por

$$\Theta_{(S_n)_{n=1}^{\infty}}(x) = (S_n(x))_{n=1}^{\infty}.$$

b) Uma forma alternativa de calcular a norma do espaço $\ell_p^w(C(K))$: se $(f_n)_{n=1}^\infty \in \ell_p^w(C(K))$, então

$$\|(f_n)_{n=1}^\infty\|_{\ell_p^w(C(K))} = \sup_{x \in K} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Para mais detalhes sobre essa expressão, veja [37, Seção 2.5].

Antes de definirmos os operadores $(\ell_{p^*}\langle\cdot\rangle, \ell_{q^*}\langle\cdot\rangle)$-integrais, vamos apresentar uma caracterização das formas bilineares que são $(\ell_{p^*}\langle\cdot\rangle, \ell_{q^*}\langle\cdot\rangle)$-integrais.

Teorema 3.2.11 *Sejam E e F espaços de Banach e $B \in \mathcal{B}(E,F)$. Então $B \in \mathcal{BI}_{\ell_{p^*}\langle\cdot\rangle,\ell_{q^*}\langle\cdot\rangle}(E,F)$ se, e somente se, existem um espaço de medida finita (K,Σ,μ), sequências $(S_n)_{n=1}^\infty$ em $\mathcal{L}(E;C(K))$ e $(R_n)_{n=1}^\infty$ em $\mathcal{L}(F;C(K))$ tais que $\Theta_{(S_n)_{n=1}^\infty} \in \mathcal{L}(E;\ell_p^w(C(K)))$, $\Theta_{(R_n)_{n=1}^\infty} \in \mathcal{L}(F;\ell_q^w(C(K)))$ e*

$$B(x,y) = \int_K \sum_{n=1}^{\infty} S_n(x)R_n(y)\ d\mu, \tag{3.10}$$

para todos $x \in E$ e $y \in F$. Além disso,

$$\|B\|_{\mathcal{B}I_{\ell_{p^*}\langle\cdot\rangle,\ell_{q^*}\langle\cdot\rangle}} = \inf \left\|\Theta_{(S_n)_{n=1}^\infty}\right\| \left\|\Theta_{(R_n)_{n=1}^\infty}\right\| \mu(K),$$

sendo o ínfimo tomado sobre todas as escolhas possíveis, sobre os objetos envolvidos, que tornem (3.10) verdadeira. Mais ainda, esse ínfimo é atingido.

Demonstração. Suponhamos que B seja $(\ell_{p^*}\langle\cdot\rangle, \ell_{q^*}\langle\cdot\rangle)$-integral. Pela Proposição 3.2.4, existe uma medida de Borel regular positiva e finita μ sobre o espaço Hausdorff compacto $B_{\ell_{p^*}\langle E\rangle'} \times B_{\ell_{q^*}\langle F\rangle'}$ tal que

$$B(x,y) = \int_{B_{\ell_{p^*}\langle E\rangle'} \times B_{\ell_{q^*}\langle F\rangle'}} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x)\psi_n(y)\ d\mu,$$

para todos $x \in E$, $y \in F$ e $\|B\|_{\mathcal{B}I_{\ell_{p^*}\langle\cdot\rangle,\ell_{q^*}\langle\cdot\rangle}} = \|\mu\|$. Denotamos $K = B_{\ell_{p^*}\langle E\rangle'} \times B_{\ell_{q^*}\langle F\rangle'}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos as aplicações

$$\begin{array}{ccc} S_n : E \longrightarrow C(K) & e & R_n : F \longrightarrow C(K) \\ S_n(x)(\varphi,\psi) = \varphi_n(x) & & R_n(y)(\varphi,\psi) = \psi_n(y). \end{array}$$

Note que estamos identificando $\varphi = (\varphi_n)_{n=1}^\infty \in \ell_p^w(E')$ e $\psi = (\psi_n)_{n=1}^\infty \in \ell_q^w(F')$. De forma análoga ao que foi feito na demonstração do Lema 3.2.1, verifica-se que S_n e R_n

estão bem definidas, são lineares e é imediato verificar que são contínuas, para cada $n \in \mathbb{N}$. Para cada $x \in E$, temos

$$\begin{aligned}
\|(S_n(x))_{n=1}^{\infty}\|_{\ell_p^w(C(K))} &= \sup_{(\varphi,\psi)\in K} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |S_n(x)(\varphi,\psi)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \sup_{(\varphi,\psi)\in K} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi_n(x)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \|x\| \sup_{(\varphi,\psi)\in K} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left|\varphi_n\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \|x\| \sup_{(\varphi,\psi)\in K} \sup_{z\in B_E} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi_n(z)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \|x\| \sup_{(\varphi,\psi)\in K} \|(\varphi_n)_{n=1}^{\infty}\|_{\ell_p^w(E')} = \|x\|,
\end{aligned}$$

e segue que $\Theta_{(S_n)_{n=1}^{\infty}} \in \mathcal{L}(E; \ell_p^w(C(K)))$ com $\left\|\Theta_{(S_n)_{n=1}^{\infty}}\right\| \leq 1$. De forma análoga, mostra-se que $\Theta_{(R_n)_{n=1}^{\infty}} \in \mathcal{L}(F; \ell_q^w(C(K)))$ com $\left\|\Theta_{(R_n)_{n=1}^{\infty}}\right\| \leq 1$.

Dessa forma,

$$B(x,y) = \int_K \sum_{n=1}^{\infty} S_n(x)R_n(y)\ d\mu,$$

para todos $x \in E$ e $y \in F$. Além disso,

$$\|B\|_{\mathcal{BI}_{\ell_{p^*}\langle\cdot\rangle,\ell_{q^*}\langle\cdot\rangle}} = \|\mu\| \geq \left\|\Theta_{(S_n)_{n=1}^{\infty}}\right\| \left\|\Theta_{(R_n)_{n=1}^{\infty}}\right\| \mu(K).$$

Reciprocamente, considerando a forma bilinear A definida no Exemplo 3.2.9, segue que $B = A \circ \left(\Theta_{(S_n)_{n=1}^{\infty}}, \Theta_{(R_n)_{n=1}^{\infty}}\right)$. Como $\gamma_{\ell_{p^*}\langle\cdot\rangle,\ell_{q^*}\langle\cdot\rangle}$ é uma norma razoável uniforme, a Proposição 3.2.7 garante que B é $(\ell_{p^*}\langle\cdot\rangle, \ell_{q^*}\langle\cdot\rangle)$-integral e

$$\begin{aligned}
\|B\|_{\mathcal{BI}_{\ell_{p^*}\langle\cdot\rangle,\ell_{q^*}\langle\cdot\rangle}} &\leq \|B_1\|_{\mathcal{BI}_{\ell_{p^*}\langle\cdot\rangle,\ell_{q^*}\langle\cdot\rangle}} \left\|\Theta_{(S_n)_{n=1}^{\infty}}\right\| \left\|\Theta_{(R_n)_{n=1}^{\infty}}\right\| \\
&\leq \left\|\Theta_{(S_n)_{n=1}^{\infty}}\right\| \left\|\Theta_{(R_n)_{n=1}^{\infty}}\right\| \mu(K).
\end{aligned}$$

■

Convém observar que multiplicando $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ ou $(R_n)_{n=1}^{\infty}$ por uma constante e readaptando a demonstração acima, é possível assumir que μ é uma medida de probabilidade.

Vamos agora definir os operadores lineares $(\ell_{p^*}\langle\cdot\rangle, \ell_{q^*}\langle\cdot\rangle)$-integrais.

A aplicação $\Gamma : \mathcal{L}(E;F) \longrightarrow \mathcal{B}(E,F')$ dada por $\Gamma(T)(x,\psi) = \psi(T(x))$ é uma isometria (linear). Daí a definição:

Definição 3.2.12 Dizemos que um operador $T \in \mathcal{L}(E;F)$ é $(\ell_{p^*}\langle\cdot\rangle, \ell_{q^*}\langle\cdot\rangle)$-integral se a forma bilinear $\Gamma(T)$ é $(\ell_{p^*}\langle\cdot\rangle, \ell_{q^*}\langle\cdot\rangle)$-integral.

Denotamos o espaço dos operadores lineares $(\ell_{p^*}\langle\cdot\rangle, \ell_{q^*}\langle\cdot\rangle)$-integrais de E em F por $\mathcal{L}I_{\ell_{p^*}\langle\cdot\rangle,\ell_{q^*}\langle\cdot\rangle}(E;F)$, o qual é um espaço normado com a expressão

$$\|T\|_{\mathcal{L}I_{\ell_{p^*}\langle\cdot\rangle,\ell_{q^*}\langle\cdot\rangle}} = \|\Gamma(T)\|_{\mathcal{B}I_{\ell_{p^*}\langle\cdot\rangle,\ell_{q^*}\langle\cdot\rangle}}. \tag{3.11}$$

Por meio da correspondência $T \longmapsto \Gamma(T)$, podemos identificar, é claro, o espaço $\mathcal{L}I_{\ell_{p^*}\langle\cdot\rangle,\ell_{q^*}\langle\cdot\rangle}(E;F)$ com um subespaço de $\mathcal{B}I_{\ell_{p^*}\langle\cdot\rangle,\ell_{q^*}\langle\cdot\rangle}(E;F')$. Vejamos que ele é um subespaço fechado em $\mathcal{B}I_{\ell_{p^*}\langle\cdot\rangle,\ell_{q^*}\langle\cdot\rangle}(E;F')$ e portanto um espaço de Banach. De fato, se $(T_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência em $\mathcal{L}I_{\ell_{p^*}\langle\cdot\rangle,\ell_{q^*}\langle\cdot\rangle}(E;F)$ tal que $T_n \longrightarrow T \in \mathcal{L}(E;F)$, da expressão (3.11) e da linearidade de Γ, temos

$$\|\Gamma(T_n) - \Gamma(T)\|_{\mathcal{B}I_{\ell_{p^*}\langle\cdot\rangle,\ell_{q^*}\langle\cdot\rangle}} = \|T_n - T\|_{\mathcal{L}I_{\ell_{p^*}\langle\cdot\rangle,\ell_{q^*}\langle\cdot\rangle}} \longrightarrow 0.$$

Como $\mathcal{B}I_{\ell_{p^*}\langle\cdot\rangle,\ell_{q^*}\langle\cdot\rangle}(E,F')$ é um espaço de Banach, segue que $\Gamma(T) \in \mathcal{B}I_{\ell_{p^*}\langle\cdot\rangle,\ell_{q^*}\langle\cdot\rangle}(E,F')$ e, portanto, $T \in \mathcal{L}I_{\ell_{p^*}\langle\cdot\rangle,\ell_{q^*}\langle\cdot\rangle}(E;F)$.

Vamos agora caracterizar os operadores lineares $(\ell_{p^*}\langle\cdot\rangle, \ell_{q^*}\langle\cdot\rangle)$-integrais. Mas, antes disso, mostraremos um resultado que será importante para obtermos essa caracterização. A notação $\Theta_{(R_n)_{n=1}^{\infty}}$ abaixo tem o mesmo significado que o na Observação 3.2.10.

Proposição 3.2.13 *Sejam F um espaço de Banach, (K,Σ,μ) um espaço de medida finita e $(R_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência em $\mathcal{L}(F';C(K))$ tal que $\Theta_{(R_n)_{n=1}^{\infty}} \in \mathcal{L}(F';\ell_q^w(C(K)))$. A aplicação $\Psi_{(R_n)_{n=1}^{\infty}} : \ell_p^w(C(K)) \longrightarrow F''$ dada por*

$$\Psi_{(R_n)_{n=1}^{\infty}}\left((f_n)_{n=1}^{\infty}\right)(\psi) = \int_K \sum_{n=1}^{\infty} f_n R_n(\psi)\, d\mu$$

está bem definida, é linear e contínua.

Demonstração. Para cada $n \in \mathbb{N}$ e cada $\omega \in K$, definimos o funcional linear $\Phi_{n,\omega} : \ell_p^w(C(K)) \longrightarrow \mathbb{K}$ dado por

$$\Phi_{n,\omega}((f_i)_{i=1}^{\infty}) = f_n(\omega).$$

Note que $\Phi_{n,\omega}$ é contínuo, pois

$$\|\Phi_{n,\omega}\| = \sup_{(f_i)_{i=1}^{\infty} \in B_{\ell_p^w(C(K))}} |f_n(\omega)| = \sup_{f_n \in B_{C(K)}} |f_n(\omega)| \leq 1.$$

Agora, para cada $\omega \in K$, definimos o funcional linear $\delta_\omega : C(K) \longrightarrow \mathbb{K}$ dado por $\delta_\omega(f) = f(\omega)$. É imediato verificar que δ_ω é contínuo com $\|\delta_\omega\| \leq 1$. De forma análoga ao que foi feito no Exemplo 3.2.8, mostra-se que $(\Phi_{n,\omega})_{n=1}^{\infty} \in B_{\ell_p^w\left(\ell_p^w(C(K))'\right)}$ para cada $\omega \in K$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ e cada $\omega \in K$, definimos o funcional linear $\Upsilon_{\omega,R_n} : F' \longrightarrow \mathbb{K}$ dado por

$$\Upsilon_{\omega,R_n}(\psi) = R_n(\psi)(\omega).$$

Note que Υ_{ω,R_n} é contínuo, pois

$$\|\Upsilon_{\omega,R_n}\| = \sup_{\psi \in B_{F'}} |R_n(\psi)(\omega)| \leq \sup_{\psi \in B_{F'}} \|R_n(\psi)\|_\infty \leq \|R_n\| < \infty.$$

Vejamos agora que $(\Upsilon_{\omega,R_n})_{n=1}^{\infty} \in \ell_q^w(F'')$ para cada $\omega \in K$. Com efeito,

$$\begin{aligned}
\|(\Upsilon_{\omega,R_n})_{n=1}^{\infty}\|_{\ell_q^w(F'')} &= \sup_{\psi \in B_{F'}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\Upsilon_{\omega,R_n}(\psi)|^q\right)^{\frac{1}{q}} = \sup_{\psi \in B_{F'}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |R_n(\psi)(\omega)|^q\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq \sup_{\psi \in B_{F'}} \sup_{\omega \in K} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |R_n(\psi)(\omega)|^q\right)^{\frac{1}{q}} = \sup_{\psi \in F'} \|(R_n(\psi))_{n=1}^{\infty}\|_{\ell_q^w(C(K))} \\
&= \left\|\Theta_{(R_n)_{n=1}^{\infty}}\right\| < \infty.
\end{aligned}$$

Assim, temos

$$\begin{aligned}
\left|\Psi_{(R_n)_{n=1}^{\infty}}((f_n)_{n=1}^{\infty})(\psi)\right| &= \left|\int_K \sum_{n=1}^{\infty} f_n R_n(\psi)\ d\mu\right| = \left|\int_K \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_{n,\omega}((f_i)_{i=1}^{\infty}) \Upsilon_{\omega,R_n}(\psi)\ d\mu\right| \\
&\leq \left\|\Theta_{(R_n)_{n=1}^{\infty}}\right\| \int_K \left|\sum_{n=1}^{\infty} \Phi_{n,\omega}((f_i)_{i=1}^{\infty}) \frac{\Upsilon_{\omega,R_n}}{\left\|\Theta_{(R_n)_{n=1}^{\infty}}\right\|}(\psi)\right|\ d\mu \\
&\leq \left\|\Theta_{(R_n)_{n=1}^{\infty}}\right\| \gamma_{\ell_{p^*}\langle\cdot\rangle,\ell_{q^*}\langle\cdot\rangle}\left((f_i)_{i=1}^{\infty} \otimes \psi; \ell_p^w(C(K)) \otimes F'\right) \mu(K) \\
&= \left\|\Theta_{(R_n)_{n=1}^{\infty}}\right\| \|(f_n)_{n=1}^{\infty}\|_{\ell_p^w(C(K))} \|\psi\| \mu(K) < \infty.
\end{aligned}$$

Assim, é fácil verificar que a aplicação $\Psi_{(R_n)_{n=1}^{\infty}}$ está bem definida, é linear e contínua com $\left\|\Psi_{(R_n)_{n=1}^{\infty}}\right\| \leq \left\|\Theta_{(R_n)_{n=1}^{\infty}}\right\| \mu(K)$. ■

No próximo resultado, mostramos uma caracterização dos operadores lineares $(\ell_{p^*}\langle\cdot\rangle, \ell_{q^*}\langle\cdot\rangle)$-integrais.

Proposição 3.2.14 *Sejam E, F espaços de Banach e $T \in \mathcal{L}(E;F)$. Um operador $T \in \mathcal{L}I_{\ell_{p^*}\langle\cdot\rangle,\ell_{q^*}\langle\cdot\rangle}(E;F)$ se, e somente se, existem um espaço de medida finita (K, Σ, μ), sequências $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ em $\mathcal{L}(E;C(K))$ e $(R_n)_{n=1}^{\infty}$ em $\mathcal{L}(F';C(K))$ tais que $\Theta_{(S_n)_{n=1}^{\infty}} \in$*

$\mathcal{L}(E;\ell_p^w(C(K)))$, $\Theta_{(R_n)_{n=1}^\infty} \in \mathcal{L}(F';\ell_q^w(C(K)))$ *e* $J_F \circ T = \Psi_{(R_n)_{n=1}^\infty} \circ \Theta_{(S_n)_{n=1}^\infty}$. *Além disso,*

$$\|T\|_{\mathcal{L}I_{\ell_{p^*}\langle\cdot\rangle,\ell_{q^*}\langle\cdot\rangle}} = \inf \left\|\Theta_{(S_n)_{n=1}^\infty}\right\| \left\|\Theta_{(R_n)_{n=1}^\infty}\right\| \mu(K).$$

Esse ínfimo é atingido.

Demonstração. Suponhamos que $T \in \mathcal{L}I_{\ell_{p^*}\langle\cdot\rangle,\ell_{q^*}\langle\cdot\rangle}(E;F)$. Então, por definição, $\Gamma(T) \in \mathcal{B}I_{\ell_{p^*}\langle\cdot\rangle,\ell_{q^*}\langle\cdot\rangle}(E,F')$. O Teorema 3.2.11 garante que existem um espaço de medida finita (K,Σ,μ), sequências $(S_n)_{n=1}^\infty$ em $\mathcal{L}(E;C(K))$ e $(R_n)_{n=1}^\infty$ em $\mathcal{L}(F';C(K))$ tais que $\Theta_{(S_n)_{n=1}^\infty} \in \mathcal{L}(E;\ell_p^w(C(K)))$, $\Theta_{(R_n)_{n=1}^\infty} \in \mathcal{L}(F';\ell_q^w(C(K)))$,

$$\psi(T(x)) = \Gamma(T)(x,\psi) = \int_K \sum_{n=1}^\infty S_n(x)R_n(\psi)\ d\mu,$$

para todos $x \in E$ e $\psi \in F'$, e

$$\|T\|_{\mathcal{L}I_{\ell_{p^*}\langle\cdot\rangle,\ell_{q^*}\langle\cdot\rangle}} = \|\Gamma(T)\|_{\mathcal{B}I_{\ell_{p^*}\langle\cdot\rangle,\ell_{q^*}\langle\cdot\rangle}} = \left\|\Theta_{(S_n)_{n=1}^\infty}\right\| \left\|\Theta_{(R_n)_{n=1}^\infty}\right\| \mu(K).$$

Falta mostrar que $J_F \circ T = \Psi_{(R_n)_{n=1}^\infty} \circ \Theta_{(S_n)_{n=1}^\infty}$. Para todos $x \in E$ e $\psi \in F'$

$$\begin{aligned}\Psi_{(R_n)_{n=1}^\infty} \circ \Theta_{(S_n)_{n=1}^\infty}(x)(\psi) =& \Psi_{(R_n)_{n=1}^\infty}\left((S_n(x))_{n=1}^\infty\right)(\psi) = \int_K \sum_{n=1}^\infty S_n(x)R_n(\psi)\ d\mu \\ =& \psi(T(x)) = J_F \circ T(x)(\psi).\end{aligned}$$

Logo, $J_F \circ T = \Psi_{(R_n)_{n=1}^\infty} \circ \Theta_{(S_n)_{n=1}^\infty}$.

Reciprocamente, note que

$$\begin{aligned}\Gamma(T)(x,\psi) = \psi(T(x)) = J_F(T(x))(\psi) &= \Psi_{(R_n)_{n=1}^\infty} \circ \Theta_{(S_n)_{n=1}^\infty}(x)(\psi) \\ &= \int_K \sum_{n=1}^\infty S_n(x)R_n(\psi)\ d\mu,\end{aligned}$$

para todos $x \in E$ e $\psi \in F'$. Pelo Teorema 3.2.11, $\Gamma(T) \in \mathcal{B}I_{\ell_{p^*}\langle\cdot\rangle,\ell_{q^*}\langle\cdot\rangle}(E,F')$, ou seja, $T \in \mathcal{L}I_{\ell_{p^*}\langle\cdot\rangle,\ell_{q^*}\langle\cdot\rangle}(E;F)$ e

$$\|T\|_{\mathcal{L}I_{\ell_{p^*}\langle\cdot\rangle,\ell_{q^*}\langle\cdot\rangle}} = \|\Gamma(T)\|_{\mathcal{B}I_{\ell_{p^*}\langle\cdot\rangle,\ell_{q^*}\langle\cdot\rangle}} \leq \left\|\Theta_{(S_n)_{n=1}^\infty}\right\| \left\|\Theta_{(R_n)_{n=1}^\infty}\right\| \mu(K).$$

■

De modo semelhante ao caso das formas bilineares, multiplicando $(S_n)_{n=1}^\infty$ ou $(R_n)_{n=1}^\infty$ por uma constante e readaptando a demonstração acima, é possível assumir que μ é uma medida de probabilidade.

Sabemos que $\mathcal{B}(E,F)$, para quaisquer espaços de Banach E e F, é isometricamente isomorfo a $\mathcal{L}(E;F')$ por meio da aplicação que associa a cada $B \in \mathcal{B}(E,F)$ o operador $T \in \mathcal{L}(E;F')$ dado por $T(x)(y) = B(x,y)$, como vimos em (1.2). Disso e de caracterizações de formas bilineares e de operadores lineares integrais segue que

$$\mathcal{B}_I(E,F) \stackrel{1}{=} \mathcal{L}_I(E;F')$$

(veja o Apêndice B).

Com isso, surge o questionamento:

Pergunta 3.2.15 É verdade que

$$\mathcal{B}I_{\ell_{p^*}\langle\cdot\rangle,\ell_{q^*}\langle\cdot\rangle}(E,F) \stackrel{1}{=} \mathcal{L}I_{\ell_{p^*}\langle\cdot\rangle,\ell_{q^*}\langle\cdot\rangle}(E;F'),$$

para quaisquer espaços de Banach E e F?

Para dar uma resposta parcial a essa pergunta, precisamos recordar certos fatos da teoria de produto tensorial e apresentar alguns resultados.

Proposição 3.2.16 *([45], Proposition 6.4) Sejam α uma norma tensorial e E e F espaços de Banach. Então, $E \otimes_\alpha F$ é um subespaço (com igualdade de normas) de $E'' \otimes_\alpha F''$.*

Do resultado anterior, inferimos que $E\widehat{\otimes}_\alpha F$ é um subespaço (com igualdade de normas) de $E''\widehat{\otimes}_\alpha F''$.

Não é difícil mostrar que se α é uma norma tensorial, então

$$\begin{aligned} \alpha(u; E \otimes F) &= \inf \{\alpha(u; E \otimes N); u \in E \otimes N, \dim N < \infty\} \\ &= \inf \{\alpha(u; M \otimes F); u \in M \otimes F, \dim M < \infty\}, \end{aligned} \tag{3.12}$$

e fazendo algumas adaptações na demonstração da Proposição 3.2.16, usando as equações (3.12), chegamos no seguinte resultado:

Proposição 3.2.17 *Sejam α uma norma tensorial e E e F espaços de Banach. Então, $E\widehat{\otimes}_\alpha F$ é um subespaço (com igualdade de normas) de $E\widehat{\otimes}_\alpha F''$ e $E\widehat{\otimes}_\alpha F''$ é um subespaço (com igualdade de normas) de $E''\widehat{\otimes}_\alpha F''$.*

É fato que toda forma bilinear contínua sobre $E \times F$ pode ser estendida a uma forma bilinear contínua sobre $E'' \times F''$ com a mesma norma (veja [45, Theorem 2.13]).

Um caminho para construir essa extensão: como cada forma bilinear $B \in \mathcal{B}(E,F)$ corresponde a um operador linear e contínuo $T : E \longrightarrow F'$, dado por $T(x)(y) = B(x,y)$, está bem definida a forma bilinear ${}^*B : E'' \times F'' \longrightarrow \mathbb{K}$ dada por

$$ {}^*B(x'', y'') = x''(T'(y'')), $$

e note que

$$ \begin{aligned} {}^*B(x,y) = \ & {}^*B(J_E(x), J_F(y)) = J_E(x)(T'(J_F(y))) = T'(J_F(y))(x) \\ = \ & J_F(y)(T(x)) = T(x)(y) = B(x,y), \end{aligned} $$

para todos $x \in E$ e $y \in F$. A forma bilinear ${}^*B$ é chamada de extensão canônica de B à esquerda.

Teorema 3.2.18 *([45], Theorem 6.5.) Sejam α uma norma tensorial, E e F espaços de Banach e $B \in (E\widehat{\otimes}_\alpha F)'$. Então, a extensão canônica de B à esquerda é um funcional linear e contínuo sobre $E''\widehat{\otimes}_\alpha F''$ com a mesma norma de B.*

Dos dois resultados anteriores, se $B \in (E\widehat{\otimes}_\alpha F)'$ segue que:

a) A aplicação bilinear $\overline{B}$, obtida pela restrição de ${}^*B$ a $E \times F''$, é um funcional linear contínuo sobre $E\widehat{\otimes}_\alpha F''$, isto é,

$$ \overline{B} := \ {}^*B|_{E\widehat{\otimes}_\alpha F''} \in \left(E\widehat{\otimes}_\alpha F''\right)'. $$

b) A aplicação $\overline{B}$ estende B ao espaço $E \times F''$.

c) Tem-se $\|B\| = \left\|\overline{B}\right\|$.

Sabemos que $\gamma_{\ell_{p^*}\langle\cdot\rangle, \ell_{q^*}\langle\cdot\rangle}$ é uma norma razoável uniforme, mas não sabemos se ela é finitamente gerada (em geral). No entanto, em alguns casos a norma $\gamma_{\ell_{p^*}\langle\cdot\rangle, \ell_{q^*}\langle\cdot\rangle}$ é finitamente gerada e assim uma norma tensorial, como no caso em que os espaços envolvidos têm a chamada propriedade da aproximação métrica.

Dizemos que um espaço de Banach E tem a *propriedade da aproximação limitada* se existe uma constante $\lambda > 0$ tal que, para cada subconjunto compacto Ω de E e cada $\eta > 0$, existe um operador de posto finito $S : E \longrightarrow E$ tal que $\|S\| \leq \lambda$ e $\|x - S(x)\| \leq \eta$ para cada $x \in \Omega$. Se isso é verdade para $\lambda = 1$, então dizemos que E tem a *propriedade da aproximação métrica*.

Os espaços ℓ_p e $L_p(\mu)$, para $1 \leq p < \infty$, e os espaços $C(K)$ e c_0 têm a propriedade da aproximação métrica. Os duais desses espaços também têm essa propriedade.

Proposição 3.2.19 *([45], Proposition 6.2.) Sejam E e F espaços de Banach com a propriedade da aproximação métrica. Então, toda norma razoável uniforme é finitamente gerada em $E \otimes F$.*

Agora estamos aptos a dar uma resposta parcial à Pergunta 3.2.15.

Teorema 3.2.20 *Sejam E e F espaços de Banach tais que $\gamma_{\ell_{p^*}\langle\cdot\rangle,\ell_{q^*}\langle\cdot\rangle}$ seja uma norma tensorial em $E \otimes F$. Então, tem-se*

$$\mathcal{B}I_{\ell_{p^*}\langle\cdot\rangle,\ell_{q^*}\langle\cdot\rangle}(E,F) \stackrel{1}{=} \mathcal{L}I_{\ell_{p^*}\langle\cdot\rangle,\ell_{q^*}\langle\cdot\rangle}(E;F'),$$

de modo que cada $B \in \mathcal{B}I_{\ell_{p^*}\langle\cdot\rangle,\ell_{q^*}\langle\cdot\rangle}(E,F)$ corresponde ao único operador $T : E \longrightarrow F'$ dado por $T(x)(y) = B(x,y)$ para todos $x \in E$ e $y \in F$.

Demonstração. Suponhamos que $B \in \mathcal{B}I_{\ell_{p^*}\langle\cdot\rangle,\ell_{q^*}\langle\cdot\rangle}(E,F) \stackrel{1}{=} (E\widehat{\otimes}_{\gamma_{\ell_{p^*}\langle\cdot\rangle,\ell_{q^*}\langle\cdot\rangle}}F)'$. Como $\gamma_{\ell_{p^*}\langle\cdot\rangle,\ell_{q^*}\langle\cdot\rangle}$ é uma norma tensorial em $E\otimes F$, podemos estender a aplicação B para $\overline{B} \in \mathcal{B}I_{\ell_{p^*}\langle\cdot\rangle,\ell_{q^*}\langle\cdot\rangle}(E,F'')$ com $\|B\|_{\mathcal{B}I_{\ell_{p^*}\langle\cdot\rangle,\ell_{q^*}\langle\cdot\rangle}} = \left\|\overline{B}\right\|_{\mathcal{B}I_{\ell_{p^*}\langle\cdot\rangle,\ell_{q^*}\langle\cdot\rangle}}$. Pelo Teorema 3.2.11, existe um espaço de probabilidade (K,Σ,μ), sequências $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ em $\mathcal{L}(E;C(K))$ e $(R_n)_{n=1}^{\infty}$ em $\mathcal{L}(F'';C(K))$ tais que $\Phi_{(S_n)_{n=1}^{\infty}} \in \mathcal{L}(E;\ell_p^w(C(K)))$, $\Phi_{(R_n)_{n=1}^{\infty}} \in \mathcal{L}(F'';\ell_q^w(C(K)))$ e

$$\overline{B}(x,\psi) = \int_K \sum_{n=1}^{\infty} S_n(x)R_n(\psi)\ d\mu,$$

para todos $x \in E$ e $\psi \in F''$. Mais ainda,

$$\|B\|_{\mathcal{B}I_{\ell_{p^*}\langle\cdot\rangle,\ell_{q^*}\langle\cdot\rangle}} = \left\|\overline{B}\right\|_{\mathcal{B}I_{\ell_{p^*}\langle\cdot\rangle,\ell_{q^*}\langle\cdot\rangle}} = \left\|\Theta_{(S_n)_{n=1}^{\infty}}\right\| \left\|\Theta_{(R_n)_{n=1}^{\infty}}\right\|.$$

Dados $x \in E$ e $\psi \in F''$, temos

$$\begin{aligned} J_{F'} \circ T(x)(\psi) &= \psi(T(x)) = T'(\psi)(x) = \overline{B}(x,\psi) \\ &= \int_K \sum_{n=1}^{\infty} S_n(x)R_n(\psi)\ d\mu = \Psi_{(R_n)_{n=1}^{\infty}} \circ \Theta_{(S_n)_{n=1}^{\infty}}(x)(\psi), \end{aligned}$$

e assim mostramos que $J_{F'} \circ T = \Psi_{(R_n)_{n=1}^{\infty}} \circ \Theta_{(S_n)_{n=1}^{\infty}}$. Pela Proposição 3.2.14 segue que $T \in \mathcal{L}I_{\ell_{p^*}\langle\cdot\rangle,\ell_{q^*}\langle\cdot\rangle}(E;F')$ e

$$\|T\|_{\mathcal{L}I_{\ell_{p^*}\langle\cdot\rangle,\ell_{q^*}\langle\cdot\rangle}} \leq \left\|\Theta_{(S_n)_{n=1}^{\infty}}\right\| \left\|\Theta_{(R_n)_{n=1}^{\infty}}\right\| = \|B\|_{\mathcal{B}I_{\ell_{p^*}\langle\cdot\rangle,\ell_{q^*}\langle\cdot\rangle}}.$$

Reciprocamente, suponhamos que $T \in \mathcal{L}I_{\ell_{p^*}\langle\cdot\rangle,\ell_{q^*}\langle\cdot\rangle}(E;F')$. A Proposição 3.2.14 garante que existem um espaço de probabilidade (K,Σ,μ), sequências $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ em

$\mathcal{L}(E; C(K))$ e $(R_n)_{n=1}^\infty$ em $\mathcal{L}(F''; C(K))$ tais que $\Theta_{(S_n)_{n=1}^\infty} \in \mathcal{L}(E; \ell_p^w(C(K)))$, $\Theta_{(R_n)_{n=1}^\infty} \in \mathcal{L}(F''; \ell_q^w(C(K)))$ e $J_{F'} \circ T = \Psi_{(R_n)_{n=1}^\infty} \circ \Theta_{(S_n)_{n=1}^\infty}$, onde, além disso, tem-se

$$\|T\|_{\mathcal{L}I_{\ell_{p^*}\langle\cdot\rangle,\ell_{q^*}\langle\cdot\rangle}} = \left\|\Theta_{(S_n)_{n=1}^\infty}\right\| \left\|\Theta_{(R_n)_{n=1}^\infty}\right\|.$$

Note que, para cada $n \in \mathbb{N}$, o operador $R_n|_F \in \mathcal{L}(F; C(K))$ e, mais ainda, $\Theta_{(R_n|_F)_{n=1}^\infty} \in \mathcal{L}(F; \ell_q^w(C(K)))$.

Agora, para todos $x \in E$ e $y \in F$, temos

$$\begin{aligned} B(x,y) &= T(x)(y) = J_F(y)(T(x)) = J_{F'} \circ T(x)(J_F(y)) \\ &= \Psi_{(R_n)_{n=1}^\infty} \circ \Theta_{(S_n)_{n=1}^\infty}(x)(J_F(y)) \\ &= \int_K \sum_{n=1}^\infty S_n(x) R_n(J_F(y))\, d\mu = \int_K \sum_{n=1}^\infty S_n(x) R_n|_F(y)\, d\mu, \end{aligned}$$

e então, do Teorema 3.2.11, segue que $B \in \mathcal{B}I_{\ell_{p^*}\langle\cdot\rangle,\ell_{q^*}\langle\cdot\rangle}(E,F)$ e

$$\begin{aligned} \|B\|_{\mathcal{B}I_{\ell_{p^*}\langle\cdot\rangle,\ell_{q^*}\langle\cdot\rangle}} &\leq \left\|\Theta_{(S_n)_{n=1}^\infty}\right\| \left\|\Theta_{(R_n|_F)_{n=1}^\infty}\right\| \\ &\leq \left\|\Theta_{(S_n)_{n=1}^\infty}\right\| \left\|\Theta_{(R_n)_{n=1}^\infty}\right\| = \|T\|_{\mathcal{L}I_{\ell_{p^*}\langle\cdot\rangle,\ell_{q^*}\langle\cdot\rangle}}. \end{aligned}$$

■

Segue do resultado acima que

$$\mathcal{B}I_{\ell_{p^*}\langle\cdot\rangle,\ell_{q^*}\langle\cdot\rangle}(E,F) \overset{1}{=} (E \widehat{\otimes}_{\ell_{p^*}\langle\cdot\rangle,\ell_{q^*}\langle\cdot\rangle} F)' \overset{1}{=} \mathcal{L}I_{\ell_{p^*}\langle\cdot\rangle,\ell_{q^*}\langle\cdot\rangle}(E; F')$$

sempre que $\gamma_{\ell_{p^*}\langle\cdot\rangle,\ell_{q^*}\langle\cdot\rangle}$ é finitamente gerada em $E \otimes F$ (norma tensorial), como no caso em que E e F têm a propriedade da aproximação métrica.

Problema em aberto: Sem hipóteses adicionais sobre os espaços de Banach E e F, ainda é verdade que

$$\mathcal{B}I_{\ell_{p^*}\langle\cdot\rangle,\ell_{q^*}\langle\cdot\rangle}(E,F) \overset{1}{=} \mathcal{L}I_{\ell_{p^*}\langle\cdot\rangle,\ell_{q^*}\langle\cdot\rangle}(E; F')?$$

A título de curiosidade e também para a informação do leitor, pontuamos que a técnica usada no Teorema 3.2.20 exige a hipótese de $\gamma_{\ell_{p^*}\langle\cdot\rangle,\ell_{q^*}\langle\cdot\rangle}$ ser norma tensorial, em uma de suas implicações, enquanto que a técnica aplicada para demonstrar o isomorfismo $\mathcal{B}_I(E,F) \overset{1}{=} \mathcal{L}_I(E; F')$ em [45] não faz uso dessa hipótese, mesmo sendo a norma ε uma norma tensorial. Para os leitores interessados, apresentamos no Apêndice B a demonstração dessa implicação no resultado de [45] com a técnica usada no Teorema 3.2.20.

3.3 Uma caracterização para o espaço $(\ell_1^{\mathrm{mid}})^u(E)$

É fato que certos espaços de sequências podem ser caracterizados por um produto tensorial normado. Como exemplos bem conhecidos, temos $c_0(E) \overset{1}{=} E\widehat{\otimes}_\varepsilon c_0$ e $\ell_1^u(E) \overset{1}{=} E\widehat{\otimes}_\varepsilon \ell_1$ (veja [45, Examples 3.3 e 3.4], respectivamente). Consequência disso e da dualidade do produto tensorial injetivo (ver (1.4)), temos

$$\ell_1^u(E)' \overset{1}{=} \mathcal{B}_I(E, \ell_1) \quad \text{e} \quad c_0(E)' \overset{1}{=} \mathcal{B}_I(E, c_0).$$

Um outro exemplo notável é a caracterização do espaço $\ell_p \langle E \rangle$. Em [17], Cohen define o espaço e mostra que $E\widehat{\otimes}_\pi \ell_p \overset{1}{\hookrightarrow} \ell_p \langle E \rangle$, enquanto que em [38] Bu e Diestel mostram, definitivamente, que $\ell_p \langle E \rangle \overset{1}{=} E\widehat{\otimes}_\pi \ell_p$ para $1 < p < \infty$.

Nesta seção, vamos caracterizar o espaço $(\ell_1^{\mathrm{mid}})^u(E)$ e também o seu dual em termos do produto tensorial munido de uma norma do tipo $\gamma_{X,Y}^{p,q}$ conveniente. Para isso, utilizaremos uma classe de sequências que possui uma relação importante com a classe ℓ_1^w. Essa relação será suficiente para podermos aplicar os resultados da Seção 3.2 e atingirmos o nosso objetivo.

Seja E um espaço de Banach. É fato que $E\widehat{\otimes}_\varepsilon c_0 \overset{1}{=} c_0(E)$ por meio da aplicação $\widetilde{J} : E\widehat{\otimes}_\varepsilon c_0 \longrightarrow c_0(E)$, a qual é a única extensão da aplicação $J : E \otimes_\varepsilon c_0 \longrightarrow c_0(E)$ dada por

$$J(u) = \left(\sum_{i=1}^{m} a_{i,k} x_i \right)_{k=1}^{\infty},$$

para cada $u = \sum_{i=1}^m x_i \otimes a_i \in E \otimes c_0$, com $a_i = (a_{i,k})_{k=1}^\infty \in c_0$ (veja [45, Example 3.3]).

É uma tarefa simples mostrar que $E\widehat{\otimes}_\pi c_0 \overset{1}{\hookrightarrow} E\widehat{\otimes}_\varepsilon c_0$, usando a definição do completamento, o fato de que $\varepsilon \leq \pi$ e a continuidade dessas normas. Deste modo, podemos usar a mesma aplicação $\widetilde{J}$ acima para identificar $E\widehat{\otimes}_\pi c_0$ com o subespaço vetorial (de sequências) $\widetilde{J}(E\widehat{\otimes}_\pi c_0)$ de $c_0(E)$. Por simplicidade e para trabalharmos no ambiente de classes de sequências, denotamos o subespaço $\widetilde{J}(E\widehat{\otimes}_\pi c_0)$ por $c_0^\pi(E)$. Equipando $c_0^\pi(E)$ com a norma de $E\widehat{\otimes}_\pi c_0$, temos a identificação isométrica

$$E\widehat{\otimes}_\pi c_0 \overset{1}{=} c_0^\pi(E)$$

pela aplicação $\widetilde{J}$.

Pelo que foi exposto acima, é claro que $(c_0^\pi(E), \pi(\cdot))$ é um espaço de Banach e que $c_0^\pi(E) \overset{1}{\hookrightarrow} c_0(E) \overset{1}{\hookrightarrow} \ell_\infty(E)$. Note que para todo $u = \sum_{i=1}^m x_i \otimes e_i \in E \otimes_\pi c_0$, temos

$\widetilde{J}(u) = (x_i)_{i=1}^m \in c_0^\pi(E)$ e isso significa que $c_{00}(E) \subseteq c_0^\pi(E)$. Mais ainda, para todo $i \in \mathbb{N}$,

$$\|x \cdot e_i\|_{c_0^\pi(E)} = \left\| \widetilde{J}(x \otimes e_i) \right\|_{c_0^\pi(E)} = \pi(x \otimes e_i) = \|x\|.$$

Acabamos de mostrar que a regra $c_0^\pi(\cdot)$, que a cada espaço espaço de Banach E faz corresponder o espaço de Banach $c_0^\pi(E)$, é uma classe de sequências.

Além disso, temos

$$c_0^\pi(E)' \stackrel{1}{=} (E \widehat{\otimes}_\pi c_0)' \stackrel{1}{=} \mathcal{L}(c_0; E') \stackrel{1}{=} \ell_1^w(E'), \tag{3.13}$$

onde $\ell_1^w(E') \stackrel{1}{=} \mathcal{L}(c_0; E')$ pela aplicação $(\varphi_i)_{i=1}^\infty \in \ell_1^w(E') \longmapsto T_{(\varphi_i)_{i=1}^\infty} \in \mathcal{L}(c_0; E')$ dada por

$$T_{(\varphi_i)_{i=1}^\infty}\left((\lambda_i)_{i=1}^\infty\right) = \sum_{i=1}^\infty \lambda_i \varphi_i,$$

para toda $(\lambda_i)_{i=1}^\infty \in c_0$. Assim, dados $(\varphi_i)_{i=1}^\infty \in \ell_1^w(E')$, $n \in \mathbb{N}$ e $x \cdot e_n \in c_0^\pi(E)$, usando as identificações em (3.13), obtemos

$$(\varphi_i)_{i=1}^\infty (x \cdot e_n) = T_{(\varphi_i)_{i=1}^\infty}(e_n)(x) = \varphi_n(x),$$

e acabamos de mostrar o seguinte resultado:

Proposição 3.3.1 *Seja E um espaço de Banach. Então $\ell_1^w(E') \stackrel{1}{=} c_0^\pi(E)'$ por meio de uma aplicação $\Psi : \ell_1^w(E') \longrightarrow c_0^\pi(E)'$ que satisfaz*

$$\Psi\left((\varphi_i)_{i=1}^\infty\right)(x \cdot e_n) = \varphi_n(x), \tag{3.14}$$

para todos $(\varphi_i)_{i=1}^\infty \in \ell_1^w(E'), x \in E$ e $n \in \mathbb{N}$.

Observando atentamente os resultados dados pelas Proposições 3.1.3, 3.1.6 e 3.1.7, percebe-se que a dualidade entre Y e Y' (caso particular da Proposição 3.1.7) não é o ponto chave das demonstrações. Apenas o fato de Y ou Y' estar imerso em algum ℓ_q^w é usado. Assim, está bem definida a norma razoável

$$\gamma_{c_0^\pi, \ell_1}(u) = \sup\left\{ \left| \sum_{j=1}^k \sum_{n=1}^\infty \varphi_n(x_j)\psi_n(y_j) \right| ; (\varphi_n)_{n=1}^\infty \in B_{\ell_1^w(E')}, (\psi_n)_{n=1}^\infty \in B_{\ell_\infty(F')} \right\}$$

em $E \otimes F$.

Agora, vamos nos ater à dualidade do produto tensorial $E \widehat{\otimes}_{\gamma_{c_0^\pi, \ell_1}} F$. Convém, antes, observar que não sabemos se ℓ_1^w é dual à classe c_0^π no sentido exato da Definição 3.1.1

(e isso provavelmente é verdade). No entanto, com uma observação atenta das demonstrações do Lema 3.2.1 e do Teorema 3.2.2 (que depende desse lema), percebe-se que estes resultados continuam válidos (com demonstrações idênticas) se $X(E)' \overset{1}{=} X'(E')$ e $Y(F)' \overset{1}{=} Y'(F')$ por meio de aplicações Ψ_1 e Ψ_2, respectivamente, que satisfaçam apenas

$$\begin{aligned} \Psi_1 :& X'(E') \longrightarrow X(E)' \\ & \Psi_1\left((\varphi_j)_{j=1}^{\infty}\right)(x \cdot e_n) = \varphi_n(x) \end{aligned} \qquad \text{e} \qquad \begin{aligned} \Psi_2 :& Y'(F') \longrightarrow Y(F)' \\ & \Psi_2\left((\psi_j)_{j=1}^{\infty}\right)(y \cdot e_n) = \psi_n(y), \end{aligned}$$

para todos $(\varphi_j)_{j=1}^{\infty} \in X'(E'), (\psi_j)_{j=1}^{\infty} \in Y'(E')$, $x \in E$, $y \in F$ e $n \in \mathbb{N}$.

Dessa forma, como a aplicação Ψ da Proposição 3.3.1 satisfaz (3.14), o Teorema 3.2.2 garante que

$$\left(E \widehat{\otimes}_{\gamma_{c_0^\pi,\ell_1}} F\right)' \overset{1}{=} \mathcal{B}I_{c_0^\pi,\ell_1}(E,F). \tag{3.15}$$

Vamos mostrar agora que o espaço $(\ell_1^{\mathrm{mid}})^u(E)$ é isometricamente isomorfo ao espaço $E \widehat{\otimes}_{\gamma_{c_0^\pi,\ell_1}} \ell_1$.

Antes, para que um cálculo usado na proposição seguinte fique mais claro, apresentamos o fato:

• Se um elemento $a = (a_n)_{n=1}^{\infty} = ((a_{n,k})_{k=1}^{\infty})_{n=1}^{\infty}$ pertence a $\ell_1(\ell_1)$, então, por um lado, temos

$$\|a\|_{\ell_1(\ell_1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |a_{n,k}|.$$

Por outro, da dualidade $\ell_1(\ell_1)' = \ell_\infty(\ell_\infty)$ e escrevendo $b = (b_n)_{n=1}^{\infty} = ((b_{n,k})_{k=1}^{\infty})_{n=1}^{\infty}$ para elementos de $\ell_\infty(\ell_\infty)$, temos

$$\begin{aligned} \|a\|_{\ell_1(\ell_1)} = \sup_{b \in B_{\ell_\infty(\ell_\infty)}} |b(a)| &= \sup_{(b_n)_{n=1}^{\infty} \in B_{\ell_\infty(\ell_\infty)}} \left| \sum_{n=1}^{\infty} b_n(a_n) \right| \\ &= \sup_{(b_n)_{n=1}^{\infty} \in B_{\ell_\infty(\ell_\infty)}} \left| \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} b_{n,k} a_{n,k} \right|. \end{aligned}$$

Daí, segue a igualdade

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |a_{n,k}| = \sup_{(b_n)_{n=1}^{\infty} \in B_{\ell_\infty(\ell_\infty)}} \left| \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} b_{n,k} a_{n,k} \right|. \tag{3.16}$$

Teorema 3.3.2 *Seja E um espaço de Banach. Então,* $(\ell_1^{\mathrm{mid}})^u(E) \overset{1}{=} E \widehat{\otimes}_{\gamma_{c_0^\pi,\ell_1}} \ell_1$.

Demonstração. Considere a aplicação $J : E \times \ell_1 \longrightarrow (\ell_1^{\mathrm{mid}})^u(E)$ dada por

$$J(x,a) = (a_k x)_{k=1}^{\infty},$$

para todos $x \in E$ e $a = (a_k)_{k=1}^{\infty} \in \ell_1$. Observe que

$$\begin{aligned}
\|J(x,a)\|_{\ell_1^{\mathrm{mid}}(E)} = \|(a_k x)_{k=1}^{\infty}\|_{\ell_1^{\mathrm{mid}}(E)} &= \sup_{(\varphi_n)_{n=1}^{\infty} \in B_{\ell_1^w(E')}} \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi_n(a_k x)| \\
&= \sup_{(\varphi_n)_{n=1}^{\infty} \in B_{\ell_1^w(E')}} \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi_n(x)|\right) \\
&= \left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|\right) \sup_{(\varphi_n)_{n=1}^{\infty} \in B_{\ell_1^w(E')}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi_n(x)|\right) \\
&= \|(a_k)_{k=1}^{\infty}\|_1 \, \|(x,0,\ldots)\|_{\ell_1^{\mathrm{mid}}(E)} \\
&= \|(a_k)_{k=1}^{\infty}\|_1 \, \|x\| < \infty,
\end{aligned}$$

e esse cálculo também nos dá

$$\lim_{n\to\infty} \|(a_k x)_{k=n}^{\infty}\|_{\ell_1^{\mathrm{mid}}(E)} = \lim_{n\to\infty} \|(a_k)_{k=n}^{\infty}\|_1 \, \|x\| = 0.$$

Portanto, J está bem definida e é imediato mostrar que ela é uma aplicação bilinear. Vamos agora mostrar que $\widetilde{J} : E \otimes_{\gamma_{c_0^\pi,\ell_1}} \ell_1 \longrightarrow (\ell_1^{\mathrm{mid}})^u(E)$, a linearização de J, é uma isometria. Sendo $u = \sum_{i=1}^m x_i \otimes a_i$, como $\widetilde{J}$ está bem definida, temos

$$\widetilde{J}(u) = \left(\sum_{i=1}^m a_{i,k} x_i\right)_{k=1}^{\infty} \in (\ell_1^{\mathrm{mid}})^u(E),$$

isto é, para cada $(\varphi_n)_{n=1}^{\infty} \in B_{\ell_1^w(E')}$,

$$\left(\left(\varphi_n\left(\sum_{i=1}^m a_{i,k} x_i\right)\right)_{n=1}^{\infty}\right)_{k=1}^{\infty} = \left(\left(\sum_{i=1}^m a_{i,k} \varphi_n(x_i)\right)_{n=1}^{\infty}\right)_{k=1}^{\infty} \in \ell_1(\ell_1).$$

Portanto, usando o fato em (3.16), segue que

$$\begin{aligned}
\left\|\widetilde{J}(u)\right\|_{\ell_1^{\mathrm{mid}}(E)} &= \sup_{(\varphi_n)_{n=1}^{\infty} \in B_{\ell_1^w(E')}} \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} \left|\varphi_n\left(\sum_{i=1}^m a_{i,k} x_i\right)\right| \\
&= \sup_{(\varphi_n)_{n=1}^{\infty} \in B_{\ell_1^w(E')}} \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} \left|\left(\sum_{i=1}^m a_{i,k} \varphi_n(x_i)\right)\right| \\
&= \sup_{(\varphi_n)_{n=1}^{\infty} \in B_{\ell_1^w(E')}} \sup_{(b_n)_{n=1}^{\infty} \in B_{\ell_\infty(\ell_\infty)}} \left|\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} b_{n,k} \left(\sum_{i=1}^m a_{i,k} \varphi_n(x_i)\right)\right|
\end{aligned}$$

$$= \sup_{(\varphi_n)_{n=1}^\infty \in B_{\ell_1^w(E')}} \sup_{(b_n)_{n=1}^\infty \in B_{\ell_\infty(\ell_\infty)}} \left| \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{m} \varphi_n(x_i) b_n(a_i) \right| = \gamma_{c_0^\pi, \ell_1}(u),$$

e acabamos de mostrar que $\widetilde{J}$ é uma isometria. Como $(\ell_1^{\mathrm{mid}})^u(E)$ é um espaço de Banach, segue que $\widetilde{J}$ se estende de modo único a uma isometria $\widetilde{J} : E\widehat{\otimes}_{\gamma_{c_0^\pi,\ell_1}} \ell_1 \longrightarrow (\ell_1^{\mathrm{mid}})^u(E)$. Mais ainda, é fácil observar que $\widetilde{J}(E \otimes \ell_1)$ é denso em $(\ell_1^{\mathrm{mid}})^u(E)$, e portanto $\widetilde{J}$ é um isomorfismo isométrico. ■

Com o que acabamos de fazer e com (3.15), caracterizamos o dual do espaço $(\ell_1^{\mathrm{mid}})^u(E)$ pelo

Corolário 3.3.3 *Seja E um espaço de Banach. Então,* $\left((\ell_1^{\mathrm{mid}})^u(E)\right)' \overset{1}{=} \mathcal{B}I_{c_0^\pi, \ell_1}(E, \ell_1)$.

Apêndices

Apêndice A

Redes duplas em $\mathbb{K}$

O estudo de sequências duplas em $\mathbb{K}$ (sendo $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) está bem estabelecido na literatura. Por exemplo, os trabalhos [22] e [24] abordam o tema de forma bem completa.

Estamos interessados no conceito de redes duplas em $\mathbb{K}$. Acreditamos que esse conceito seja bem conhecido, entretanto não encontramos referências que trabalhem essa teoria explicitamente. Por isso, neste apêndice, vamos definir esse conceito e explorar um resultado que usamos no nosso trabalho. Vamos começar relembrando algumas definições já conhecidas.

Definição A.1 Um *conjunto dirigido* é um par $(\Lambda, \leq)$ em que $\leq$ é uma direção no conjunto Λ, isto é, é uma relação em Λ tal que:

(a) $\lambda \leq \lambda$ para todo $\lambda \in \Lambda$.

(b) Se $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \Lambda$, $\lambda_1 \leq \lambda_2$ e $\lambda_2 \leq \lambda_3$, então $\lambda_1 \leq \lambda_3$.

(c) Para todos $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$, existe $\lambda_3 \in \Lambda$ tal que $\lambda_1 \leq \lambda_3$ e $\lambda_2 \leq \lambda_3$.

Definição A.2 Uma *rede* em um conjunto Ω é uma função $P : \Lambda \longrightarrow \Omega$, onde Λ é um conjunto dirigido. Usualmente se denota $P(\lambda)$ por x_λ e, neste caso, nos referimos à rede $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$.

Definição A.3 Dizemos que a rede $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ no espaço topológico Ω *converge* para $x \in \Omega$ se para cada vizinhança U de x, existe $\lambda_0 \in \Lambda$ tal que $x_\lambda \in U$ para todo $\lambda \geq \lambda_0$. Neste caso, escrevemos $x_\lambda \xrightarrow{\lambda} x$ ou $\lim\limits_{\lambda} x_\lambda = x$.

Vamos agora definir uma rede dupla em $\mathbb{K}$.

Definição A.4 Uma *rede dupla* em $\mathbb{K}$ é uma função $Q : \Lambda \times \Delta \longrightarrow \mathbb{K}$, onde Λ e Δ são conjuntos dirigidos. Denotamos $Q(\lambda, \delta)$ por $x_{(\lambda,\delta)}$ e, neste caso, nos referimos à rede dupla $(x_{(\lambda,\delta)})_{(\lambda,\delta)\in\Lambda\times\Delta}$.

Vamos usar a direção em $\Lambda \times \Delta$ dada coordenada a coordenada:

$$(\lambda_1, \delta_1) \leq (\lambda_2, \delta_2) \Longleftrightarrow \lambda_1 \leq \lambda_2 \text{ e } \delta_1 \leq \delta_2,$$

para $(\lambda_1, \delta_1), (\lambda_2, \delta_2) \in \Lambda \times \Delta$.

Definição A.5 Dizemos que uma rede dupla $(x_{(\lambda,\delta)})_{(\lambda,\delta)\in\Lambda\times\Delta}$ em $\mathbb{K}$ *é convergente* se existe $x \in \mathbb{K}$ satisfazendo a seguinte condição: para cada $\eta > 0$, existe $(\lambda_0, \delta_0) \in \Lambda \times \Delta$ tal que

$$|x_{(\lambda,\delta)} - x| < \eta \text{ para todo } (\lambda, \delta) \geq (\lambda_0, \delta_0).$$

Neste caso, dizemos que $(x_{(\lambda,\delta)})_{(\lambda,\delta)}$ *converge* para x e escrevemos

$$x_{(\lambda,\delta)} \xrightarrow{(\lambda,\delta)} x \quad \text{ou} \quad \lim_{(\lambda,\delta)} x_{(\lambda,\delta)} = x.$$

É fácil mostrar que o número x é único e o chamamos de *limite* (ou limite duplo) da rede $(x_{(\lambda,\delta)})_{(\lambda,\delta)}$.

Embora muitos resultados envolvendo redes duplas possam ser formulados e demonstrados, vamos apresentar apenas o resultado que usamos em nosso trabalho.

Proposição A.6 (Limites iterados de redes duplas) *Suponha que* $(x_{(\lambda,\delta)})_{(\lambda,\delta)\in\Lambda\times\Delta}$ *seja uma rede convergente e que* $x_{(\lambda,\delta)} \xrightarrow{(\lambda,\delta)} x$.

(i) *Se* $\lim_{\lambda} x_{(\lambda,\delta)}$ *existe para cada* $\delta \in \Delta$*, então o limite iterado*

$$\lim_{\delta} \left(\lim_{\lambda} x_{(\lambda,\delta)} \right)$$

existe e é igual a x.

(ii) *Se* $\lim_{\delta} x_{(\lambda,\delta)}$ *existe para cada* $\lambda \in \Lambda$*, então o limite iterado*

$$\lim_{\lambda} \left(\lim_{\delta} x_{(\lambda,\delta)} \right)$$

existe e é igual a x.

(iii) *Se as hipóteses em (i) e (ii) são verdadeiras, então*

$$\lim_{\delta} \left(\lim_{\lambda} x_{(\lambda,\delta)} \right) = x = \lim_{\lambda} \left(\lim_{\delta} x_{(\lambda,\delta)} \right).$$

Demonstração. Seja $\eta > 0$. Uma vez que $x_{(\lambda,\delta)} \xrightarrow{(\lambda,\delta)} x$, existe $(\lambda_0, \delta_0) \in \Lambda \times \Delta$ tal que

$$|x_{(\lambda,\delta)} - x| < \frac{\eta}{2} \text{ para todo } (\lambda, \delta) \geq (\lambda_0, \delta_0).$$

Para cada $\delta \in \Delta$, tomando $\lim_{\lambda} x_{(\lambda,\delta)} = y_\delta$, existe $k_\delta \in \Lambda$ tal que

$$|x_{(\lambda,\delta)} - y_\delta| < \frac{\eta}{2} \text{ para todo } \lambda \geq k_\delta.$$

Assim, para todo $\delta \geq \delta_0$, tomando-se $\lambda_1 \in \Lambda$ tal que $\lambda_1 \geq \lambda_0$ e $\lambda_1 \geq k_\delta$, temos

$$|y_\delta - x| \leq |y_\delta - x_{(\lambda_1,\delta)}| + |x_{(\lambda_1,\delta)} - x| < \eta,$$

isto é, o limite $\lim_{\delta} y_\delta$ existe e é igual a x. Isto prova (i). A demonstração de (ii) é similar e a de (iii) é imediata. ■

Apêndice B

Sobre a demonstração do isomorfismo $\mathcal{B}_I(E, F) \stackrel{1}{=} \mathcal{L}_I(E; F')$

O objetivo deste apêndice é mostrar que a técnica usada na demonstração do Teorema 3.2.20 serve, e de certo modo é semelhante, a uma das implicações do Theorem 3.22 em [45] (enunciado abaixo como Teorema B.3), cujo resultado nos dá o isomorfismo

$$\mathcal{B}_I(E, F) \stackrel{1}{=} \mathcal{L}_I(E; F').$$

Para isso, vamos recordar algumas caracterizações e apresentar o teorema e a implicação que será redemonstrada.

Teorema B.1 ([45, Theorem 3.18.]) *Sejam E e F espaços de Banach. Uma forma bilinear $B : E \times F \longrightarrow \mathbb{K}$ é integral se, e somente se, existem um espaço de medida finita (Ω, Σ, μ) e operadores $S : E \longrightarrow L_\infty(\mu)$, $R : F \longrightarrow L_\infty(\mu)$ tais que*

$$B(x, y) = \int_\Omega (Sx)(Ry)\ d\mu,$$

para cada $x \in E$, $y \in F$. Além disso,

$$\|B\|_I = \inf \|S\|\, \|R\|\, \mu(\Omega),$$

onde o ínfimo é tomado sobre todas fatorações de B e esse ínfimo é atingido.

No resultado acima, multiplicando R ou S por uma constante, é possível assumir que a medida μ nessa fatoração é uma medida de probabilidade.

Teorema B.2 ([45, Theorem 3.19.]) *Um operador $T : E \longrightarrow F$ é integral se, e somente se, existem um espaço de medida finita (Ω, Σ, μ) e um par de operadores $S : E \longrightarrow L_\infty(\mu)$, $U : L_1(\mu) \longrightarrow F''$ tais que $J_F T = UIS$, onde I é a aplicação canônica de $L_\infty(\mu)$ em $L_1(\mu)$. Além disso,*

$$\|T\|_I = \inf \|S\| \|U\| \mu(\Omega),$$

onde o ínfimo é tomado sobre todas fatorações de T (e esse ínfimo é atingido).

Para fins de comparação, vamos exibir ambas as demonstrações da implicação de nosso interesse, no teorema abaixo, como itens: a) para a que consta na referência [45] e b) para a que usa a técnica do Teorema 3.2.20.

Recordemos que $\mathcal{B}(E, F) \stackrel{1}{=} \mathcal{L}(E; F')$ pela seguinte identificação: uma forma bilinear B é associada ao operador T definido por $T(x)(y) = B(x, y)$. São fatos conhecidos que se (Ω, Σ, μ) é um espaço de medida finita, então $B_{L_1(\mu)}$ é normante para $L_\infty(\mu)$ (veja [45, pág. 60]) e que $(L_1(\mu))' = L_\infty(\mu)$.

Teorema B.3 ([45, Theorem 3.22.] *Uma forma bilinear $B : E \times F \longrightarrow \mathbb{K}$ é integral se, e somente se, o operador associado $T : E \longrightarrow F'$ é integral. A aplicação $B \longmapsto T$ é um isomorfismo isométrico de $\mathcal{B}_I(E, F)$ com $\mathcal{L}_I(E; F')$.*

Demonstração. Vamos apenas mostrar que $\mathcal{B}_I(E, F) \stackrel{1}{\hookrightarrow} \mathcal{L}_I(E; F')$.

a) (da referência [45]) Suponha que $B \in \mathcal{B}_I(E, F)$. Pelo Teorema B.1, existe um espaço de probabilidade (Ω, Σ, μ) e operadores $S : E \longrightarrow L_\infty(\mu)$, $R : F \longrightarrow L_\infty(\mu)$ tais que

$$B(x, y) = \int_\Omega S(x)R(y)\, d\mu,$$

para cada $x \in E$ e $y \in F$. Além disso, $\|B\|_I = \|S\| \|R\|$. Tomando $V = R'|_{L_1(\mu)}$ e considerando a aplicação canônica $I : L_\infty(\mu) \longrightarrow L_1(\mu)$, segue que

$$T(x)(y) = B(x, y) = \int_\Omega S(x)R(y)\, d\mu = R(y)IS(x) = IS(x)R(y) = VIS(x)(y),$$

para quaisquer $x \in E$, $y \in F$. Logo, $T = VIS$ e assim $J_{F'}T = J_{F'}VIS$. Tomando $U = J_{F'}V$, segue que $J_{F'}T = UIS$ e pelo Teorema B.2, $T \in \mathcal{L}_I(E; F')$. Além disso, como $B_{L_1(\mu)}$ é normante para $L_\infty(\mu)$, temos

$$\|T\|_I \leq \|S\| \|U\| = \|S\| \|V\| = \|S\| \|R'\| = \|S\| \|R\| = \|B\|_I .$$

b) (usando a técnica do Teorema 3.2.20) Suponha que $B \in \mathcal{B}_I(E,F) = (E\hat{\otimes}_\varepsilon F)'$. Como a norma injetiva ε é uma norma tensorial, podemos estender B para $\overline{B} \in \mathcal{B}_I(E,F'')$ com $\|B\|_I = \left\|\overline{B}\right\|_I$. Pelo Teorema B.1, existe um espaço de probabilidade (Ω,Σ,μ) e operadores $S : E \longrightarrow L_\infty(\mu)$, $R : F'' \longrightarrow L_\infty(\mu)$ tais que

$$\overline{B}(x,\psi) = \int_\Omega S(x)R(\psi)\ d\mu,$$

para todos $x \in E$ e $\psi \in F''$. Além disso, $\|B\|_I = \left\|\overline{B}\right\|_I = \|S\|\,\|R\|$. Tomando $U = R'|_{L_1(\mu)}$ e considerando a aplicação canônica $I : L_\infty(\mu) \longrightarrow L_1(\mu)$, segue que

$$\begin{aligned} J_{F'}T(x)(\psi) =& \psi(T(x)) = T'(\psi)(x) = \overline{B}(x,\psi) = \int_\Omega S(x)R(\psi)\ d\mu \\ =& R(\psi)IS(x) = IS(x)R(\psi) = UIS(x)(\psi), \end{aligned}$$

para todos $x \in E$ e $\psi \in F''$. Logo, $J_{F'}T = UIS$ e assim, pelo Teorema B.2, $T \in \mathcal{L}_I(E;F')$. Além disso, como $B_{L_1(\mu)}$ é normante para $L_\infty(\mu)$, temos

$$\|T\|_I \leq \|S\|\,\|U\| = \|S\|\,\|R'\| = \|S\|\,\|R\| = \|B\|_I\,.$$

■

Referências Bibliográficas

[1] D. Achour e M. T. Belaib, *Tensor norms related to the space of Cohen p-nuclear multilinear mappings*, Ann. Funct. Anal. **2** (2011), no. 1, 128–138.

[2] N. Albuquerque, F. Bayart, D. Pellegrino e J. B. Seoane-Sepúlveda, *Sharp generalizations of the multilinear Bohnenblust-Hille inequality*, J. Funct. Anal., **266** (2011), 3726–3740.

[3] C. D. Aliprantis e K. C. Border, *Infinite Dimensional Analysis - A Hitchhiker's Guide*, Springer-Verlag, Berlin, 3° Ed., 2006.

[4] J. Angulo, *Operadores multilineales p-sumantes*, Ph.D. thesis, Centro de Investigación en Matemáticas, 2010.

[5] A. Apiola, *Duality between spaces of p-summable sequences, (p,q)-summing operators and characterizations of nuclearity*, Math. Ann. **219** (1976), 53–64.

[6] F. Bayart, *Multiple summing maps: coordinatewise summability, inclusion theorems and p-Sidon sets*, J. Funct. Anal. **274** (4) (2018), 1129–1154.

[7] F. Bayart, D. Pellegrino e P. Rueda, *On coincidence results for summing multilinear operators: interpolation, ℓ_1-spaces and cotype*, Collect. Math. **71** (2020), no. 2, 301–318.

[8] J. J. Benedetto e W. Czaja, *Integration and Modern Analysis*, Birkhäuser, 2009.

[9] G. Botelho, D. Pellegrino e E. Teixeira, *Fundamentos de Análise Funcional*, Coleção Textos Universitários, Sociedade Brasileira de Matemática, 2° Ed., 2015.

[10] G. Botelho e J. R. Campos, *On the transformation of vector-valued sequences by linear and multilinear operators*, Monatsh. Math. **183** (3) (2017), 415–435.

[11] G. Botelho, J. R. Campos e J. Santos, *Operator ideals related to absolutely summing and Cohen strongly summing operators*, Pacific J. Math. **287** (1) (2017), 1–17.

[12] G. Botelho e J. R. Campos, *Duality theory for generalized summing linear operators*, arXiv: 2010.01350v1 [math.FA], 03 Oct. 2020.

[13] G. Botelho e J. L. P. Luiz, *Complete latticeability in vector-valued sequence spaces*, Math. Nachr., to appear.

[14] G. Botelho e D. Freitas, *Summing multilinear operators by blocks: The isotropic and anisotropic cases*, J. Math. Anal. Appl. **490** (2020), no. 1, 124203, 21pp.

[15] J. R. Campos, *Contribuições à teoria dos operadores Cohen fortemente somantes*, Tese de Doutorado, UFPB, 2013.

[16] J. R. Campos e J. Santos, *An anisotropic approach to mid summable sequences*, Colloq. Math., **161** (2020), 35–49.

[17] J. S. Cohen, *Absolutely p-summing, p-nuclear operators and their conjugates,* Math. Ann., **201** (1973), 177–200.

[18] M. M. Day, *The space L_p for* $0 < p < 1$, Bull. Amer. Math. Soc., vol **46** (1940), 816–823.

[19] A. Defant e K. Floret, *Tensor norms and operator ideals*, Vol. **176**, North-Holland Mathematics Studies, 1993.

[20] J. Diestel, H. Jarchow e A. Tonge, *Absolutely Summing Operators*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol **43**, Cambridge University Press, 1995.

[21] K. Floret e S. Hunfeld, *Ultrastability of ideals of homogeneous polynomials and multilinear mappings on Banach spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **130** (2002), no. 5, 1425–1435.

[22] S. R. Ghorpade e B. V. Limaye, *A course in multivariable calculus and analysis*, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer New York, 2010.

[23] A. Grothendieck, *Résumé de la théorie métrique des produits tensoriels topologiques*, Bol. Soc. Mat. São Paulo **8** (1956), 1–79.

[24] E. D. Habil, *Double sequences and double series*, IUG Journal of Natural Studies **14** (1) (2016), 219–233.

[25] N. J. Kalton, N. T. Peck e J. W. Roberts, *An F-space sampler*, vol **89**, Cambridge University Press, 1984.

[26] N. J. Kalton, *Quasi-Banach spaces*, Handbook of the geometry of Banach spaces, North-Holland, Amsterdam, 2003.

[27] A. Karn e D. Sinha, *An operator summability of sequences in Banach spaces*, Glasg. Math. J. **56** (2014), no. 2, 427–437.

[28] P. K. Lin, *Köthe-Bochner function spaces*, Birkhäuser Boston Inc, Boston, 2004.

[29] J. Lindenstrauss e A. Pełczyński, *Absolutely summing operators in L_p spaces and their applications*, Studia Math. **29** (1968), 276–326.

[30] J. A. López Molina, $(n+1)$-*Tensor norms of Lapresté's type*, Glasgow Math. J., **54** (2012), 665–692.

[31] J. A. López Molina, *Multilinear operator ideals associated to Saphar type* $(n+1)$-*tensor norms*, Positivity, **11** (2007), 95–117.

[32] J. A. López Molina, *The minimal and maximal operator ideals associated to* $(n+1)$-*tensor norms of Michor's type*, Positivity, **22** (2018), 1109–1142.

[33] M. C. Matos, *Fully absolutely summing and Hilbert-Schmidt multilinear mappings*, Collect. Math., **54** (2003), 111–136.

[34] L. Narici e E. Beckenstein, *Topological Vector Spaces* , Pure Appl. Math. (Boca Raton), 2° Ed., CRC Press, 2011.

[35] E. Oja, *Grothendieck's nuclear operator theorem revisited with an application to p-null sequences*, J. Funct. Anal., **263** (2012), 2876–2892.

[36] C. P. Niculescu e L. E. Persson, *Convex Functions and Their Applications - A Contemporary Approach*, CMS Books in Mathematics, Springer, 2016.

[37] D. F. Nogueira, *Espaços de sequências vetoriais e ideias de operadores*, Dissertação de mestrado, UFU, 2006.

[38] Q. Bu e J. Diestel, *Observations about the projective tensor product of Banach spaces, I - $\ell_p\widehat{\otimes}X, 1 < p < \infty$*, Quaest. Math., **24** (2001), 519–533.

[39] A. Pietsch, *Absolut p-summierende Abbildungen in normiertn Räumen*, Studia Math., **28** (1967), 333–353.

[40] A. Pietsch, *Operator Ideals,* North-Holland, 1980.

[41] D. Popa, *Characterizations of new Cohen summing bilinear operators*, Quaest. Math., **41** (2018), no. 5, 683–692.

[42] J. Ribeiro e F. Santos, *Generalized multiple summing multilinear operators on Banach spaces*, Mediterr. J. Math., **16** (2019), no. 108, 1–20.

[43] J. Ribeiro e F. Santos, *Absolutely γ-summing polynomials and the notion of coherence and compatibility*, Methods Funct. Anal. Topology, to appear.

[44] W. Rudin, *Real and complex analysis*, McGraw-Hill International, 3° Ed., 1987.

[45] R. Ryan, *Introduction to tensor product of Banach spaces*, Springer-Verlag London, 2002.

[46] R. Schatten, *A theory of cross-spaces*, Annals of Mathematis Studies, **26**, Princeton University Press, 1950.

[47] D.M. Serrano-Rodríguez, *Absolutely γ-summing multilinear operators*, Linear Algebra appl., **439** (2013), 4110–4118.