



UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA
EM REDE NACIONAL – PROFMAT



Dos Triângulos de Brahmagupta aos Triângulos Aritméticos

Por

Onaldo Gomes Falcão

Sob a orientação do

Prof. DR. Eduardo Gonçalves dos Santos

FEVEREIRO/ 2021
JOÃO PESSOA – PB

Dos Triângulos de Brahmagupta aos Triângulos Aritméticos

Por

Onaldo Gomes Falcão

Sob a orientação do

Prof. DR. Eduardo Gonçalves dos Santos

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do
Mestrado Profissional em Matemática em Rede
nacional – PROFMAT – CCEN – UFPB, como
requisito parcial para a obtenção do título de
Mestre em Matemática.

FEVEREIRO/ 2021
JOÃO PESSOA – PB

FICHA CATALOGRÁFICA

Catálogo na publicação Seção de Catalogação e Classificação

F178t Falcão, Onaldo Gomes.

Dos triângulos de Brahmagupta aos triângulos
aritméticos / Onaldo Gomes Falcão. - João Pessoa, 2021.
72 f. : il.

Orientação: Eduardo Gonçalves dos Santos.
Dissertação (Mestrado) - UFPB/CCEN.

1. Matemática - Triângulos. 2. Triângulos de
Brahmagupta. 3. Triângulos aritméticos. 4. Triângulos
heronianos. I. Santos, Eduardo Gonçalves dos. II.
Título.

UFPB/BC

CDU 51(043)

Dos Triângulos de Brahmagupta aos Triângulos Aritméticos

por

Onaldo Gomes Falcão

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Mestrado Profissional em Matemática em Rede nacional – PROFMAT – CCEN – UFPB, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de concentração: Matemática

Aprovada por:

Eduardo Gonçalves dos Santos

Prof. DR. Eduardo Gonçalves dos Santos UFPB (Orientador)

Lenimar Nunes de Andrade

Prof. DR. Lenimar Nunes de Andrade (Membro externo)

Vinícius Martins Teodósio Rocha

Prof. DR. Vinícius Martins Teodósio Rocha (Membro externo)

FEVEREIRO/2021
JOÃO PESSOA - PB

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais, Laíde Falcão e Ernani Falcão (in memoriam), pelo amor e dedicação com que me prepararam para a jornada de viver.

À minha companheira, Clara, pelo apoio e compreensão, e aos meus filhos pelo valoroso estímulo que me dispensaram.

Aos professores do PROFMAT, em especial ao meu orientador, Prof. DR. Eduardo Gonçalves dos Santos, pela preciosa ajuda que me concedeu, sem a qual não seria possível a realização deste trabalho.

Aos queridos amigos e companheiros de curso: Cristiano, Janeide, Leonardo, Luciano, Manoel, Mário, Osman, Samuel, Thiago Andrade e Thiago Nascimento, pelos inesquecíveis e descontraídos encontros dedicados aos estudos nos feriados e finais de semanas.

DEDICATÓRIA

*À perseverança, companheira amiga
da esperança, sem a qual não haveria
a realização de mais esta etapa em
minha vida.*

RESUMO

Este trabalho, fruto de pesquisas bibliográficas, apresenta um estudo sobre triângulos heronianos com lados em progressão aritmética e propriedades que os relacionam com triângulos pitagóricos, além de mostrar um modo prático e fácil para obtê-los pela parametrização dos seus lados. Trata com especificidade os triângulos heronianos com lados consecutivos em homenagem ao matemático indiano, Brahmagupta, pelo mérito de ter apresentado os oito primeiros triângulos com tal propriedade, doravante chamados de Triângulos de Brahmagupta. O trabalho exhibe o engenhoso método, o *Samasa Bhāvanā*, ou princípio da composição, para o cálculo das infinitas soluções inteiras das equações diofantinas hoje conhecidas como “equações de Pell”, método este desenvolvido por Brahmagupta ainda no século sete da era cristã e que, provavelmente, deve ter sido o meio pelo qual o referido matemático usou para obter os oito primeiros triângulos heronianos com lados consecutivos. É também propósito deste trabalho mostrar o envolvimento entre a álgebra, a teoria dos números e a geometria, ao longo da milenar história da matemática. Este trabalho é destinado aos alunos da educação básica e professores que queiram aprofundar-se nos estudos sobre os triângulos heronianos.

Palavras-chave: Triângulos de Brahmagupta. Triângulos Aritméticos. Triângulos Heronianos

ABSTRACT

This work, the result of bibliographic research, presents a study on heronian triangles with sides in arithmetic progression and properties that relate them to Pythagorean triangles, in addition to showing a practical and easy way to obtain them by parameterizing their sides. It deals specifically with the heronian triangles with consecutive sides in honor of the Indian mathematician, Brahmagupta, on the merit of having presented the first eight triangles with such property, hereinafter called the Brahmagupta Triangles. The work exhibits the ingenious method, the Samasa Bhāvanā, or principle of composition, for calculating the infinite integer solutions of the Diophantine equations today known as "Pell's equations", a method developed by Brahmagupta in the seventh century of the Christian era, which probably must have been the means whereby that mathematician used to obtain the first eight heronian triangles with consecutive sides. It is also the purpose of this work to show the involvement between algebra, number theory and geometry, throughout the millenary history of mathematics. This work is aimed at basic education students and teachers who want to deepen their studies on the heronian triangles.

Keywords: Brahmagupta's Triangles. Arithmetic Triangles. Heronian Triangles.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO AO TEMA DO TRABALHO.....	12
2 UM ESBOÇO DA MATEMÁTICA NA ÍNDIA ATÉ OS DIAS DE BRAHMAGUPTA	15
2.1 A MATEMÁTICA NA ÍNDIA ANTES DE BRAHMAGUPTA.....	15
2.2 A MATEMÁTICA NA ÍNDIA NOS DIAS DE BRAHMAGUPTA.....	17
3 OS TRIÂNGULOS DE BRAHMAGUPTA.....	21
3.1 A EQUAÇÃO DE PELL.....	21
3.2 O SAMASA BHĀVANĀ, OU PRINCÍPIO DA COMPOSIÇÃO.....	23
3.3 APLICAÇÃO DO SAMASA BHĀVANĀ NA RESOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES DIOFANTINAS.....	24
3.4 A MATRIZ DE BRAHMAGUPTA.....	27
3.5 USANDO O MÉTODO MATRICIAL PARA RESOLVER A EQUAÇÃO DE PELL.....	28
3.6 OS TRIÂNGULOS PITAGÓRICOS CONJUGADOS DOS TRIÂNGULOS DE BRAHMAGUPTA.....	30
4 OS TRIÂNGULOS ARITMÉTICOS.....	33
4.1 RELAÇÕES ALGÉBRICAS ENTRE OS TERNOS ARITMÉTICOS E OS SEUS TERNOS PITAGÓRICOS CONJUGADOS.....	33
4.2 GERANDO TERNOS PITAGÓRICOS A PARTIR DE TERNOS ARITMÉTICOS.....	40
4.3 GERANDO TERNOS ARITMÉTICOS A PARTIR DE TERNOS PITAGÓRICOS PRIMITIVOS.....	42

4.4 GERANDO TERNOS ARITMÉTICOS A PARTIR DE TERNOS PITAGÓRICOS NÃO PRIMITIVOS.....	45
4.5 PROPRIEDADES DOS TRIÂNGULOS PITAGÓRICOS CONJUGADOS.....	46
5 REPRESENTAÇÕES PARAMÉTRICAS.....	48
5.1 REPRESENTAÇÃO PARAMÉTRICA PARA OS TERNOS PITAGÓRICOS.....	48
5.2 REPRESENTAÇÃO PARAMÉTRICA PARA OS TERNOS ARITMÉTICOS.....	51
6 PROPRIEDADES DOS LADOS DOS TRIÂNGULOS PITAGÓRICOS E APLICAÇÃO DO TEOREMA 5.1.2.	55
6.1 PARIDADE DAS MEDIDAS DOS LADOS DOS TRIÂNGULOS PITAGÓRICOS.....	55
6.2 DIVISIBILIDADE DAS MEDIDAS DOS LADOS DOS TRIÂNGULOS PITAGÓRICOS PRIMITIVOS.....	57
6.3 APLICAÇÃO DO TEOREMA 5.1.2 (REPRESENTAÇÃO PARAMÉTRICA PARA OS TERNOS PITAGÓRICOS)	60
CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	65
REFERÊNCIAS.....	67
APÊNDICES	69

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1.1.1 – Tabuleta Plimpton 322	12
Figura 3.1.1 – O triângulo de Brahmagupta.....	21
Figura 3.1.2 – Um triângulo de Brahmagupta.....	22
Figura 3.3.1 – O 9º Triângulo de Brahmagupta.....	26
Figura 3.3.2 – O 10º Triângulo de Brahmagupta.....	27
Figura 3.6.1 – Os conjugados pitagóricos nos triângulos de Brahmagupta.....	31
Figura 3.6.2 – Os conjugados pitagóricos do 5º triângulo de Brahmagupta	32
Figura 4.1.1 – Triângulos acutângulos aritméticos.....	34
Figura 4.1.2 – Triângulos obtusângulos aritméticos.....	35
Figura 4.2.1 – Triângulo (11)-aritmético obtusângulo.....	41
Figura 4.2.2 – Triângulo (37)-aritmético acutângulo.....	41
Figura 4.3.1 – Triângulo (13)-aritmético obtusângulo.....	42
Figura 4.3.2 – Triângulo (23)-aritmético obtusângulo.....	44
Figura 4.3.3 – Triângulo (11)-aritmético obtusângulo.....	44
Figura 4.3.4 – Triângulo (11)-aritmético acutângulo.....	45

ÍNDICE DE TABELAS

Tabela 5.2.1 – Triângulos Aritméticos.....	53
Tabela 6.3.1 – Frações irredutíveis para $a = 315$	60
Tabela 6.3.2 – Todos os ternos pitagóricos da forma $(315, b, c)$	61
Tabela 6.3.3 – Todos os ternos pitagóricos da forma $(112, b, c)$	61
Tabela 6.3.4 – Todos os ternos pitagóricos da forma $(210, b, c)$	62
Tabela 6.3.5 – Todos os ternos pitagóricos da forma $(420, b, c)$	62
Tabela 6.3.6 – Todos os ternos pitagóricos da forma $(45, b, c)$	63
Tabela 6.3.7 – Todos os ternos pitagóricos da forma $(105, b, c)$	63

1 INTRODUÇÃO AO TEMA DO TRABALHO

Desde os tempos babilônicos os triângulos com lados inteiros despertaram interesses nos matemáticos. Uma prova disso está em um importante documento histórico da antiga Babilônia (1800 a.c.), a tabuleta Plimpton 322 (Figura 1), que hoje faz parte da Plimpton Collection na Columbia University, onde estão gravados alguns ternos pitagóricos¹.

Figura 1.1.1 – Tabuleta Plimpton 322



https://pt.wikipedia.org/wiki/Plimpton_322

No primeiro século da era cristã Heron de Alexandria ilustrou o seu teorema apresentando o triângulo de lados 13, 14 e 15, com área 84, ou seja, um triângulo com lados e área inteiros, quando demonstrou sua conhecida fórmula para o cálculo da área de um triângulo em função dos lados a, b, c e semiperímetro p :

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

No século VII o astrônomo e matemático Brahmagupta apresentou os oito primeiros triângulos com área e lados inteiros e consecutivos. Em homenagem a Heron os triângulos com lados e área inteiros ficaram conhecidos como *triângulos heronianos*. Os triângulos heronianos com lados consecutivos, um dos objetos do nosso estudo, serão tratados aqui como *triângulos de Brahmagupta*, pelo mérito do referido matemático ter encontrado os oito primeiros. No século XIX, precisamente em 1879, o matemático R. Hoppe descreveu fórmulas para a obtenção de triângulos heronianos com lados em progressão aritmética, também objeto do nosso estudo, aos quais chamaremos de *triângulos aritméticos*. No século XX, 1911, o matemático L. Aubry obteve fórmulas recursivas para os triângulos com lados consecutivos.

¹ Ternos de números inteiros que satisfazem ao Teorema de Pitágoras

Nosso trabalho, versado em pesquisas bibliográficas, foi dividido em 6 capítulos, assim distribuídos: no segundo capítulo discorreremos sobre alguns tópicos da história da matemática Indiana até os dias de Brahmagupta, onde coletamos algumas das suas contribuições para a matemática; no terceiro capítulo detalharemos sobre os triângulos de Brahmagupta, onde faremos a apresentação e aplicação do seu engenhoso método para encontrar soluções inteiras das equações quadráticas, o *Samasa Bhāvanā*, e assim encontrarmos uma sequência de soluções que representarão os lados inteiros dos triângulos com lados consecutivos, como também apresentaremos solução recursiva para encontrarmos o n -ésimo triângulo de Brahmagupta; no quarto capítulo, como os triângulos de Brahmagupta são triângulos com lados em progressão aritmética, julgamos oportuno uma abordagem geral sobre os triângulos heronianos com lados em progressão aritmética, aqui chamados de *triângulos aritméticos*, como já nos referimos acima. Trataremos dos triângulos aritméticos e suas relações com os triângulos pitagóricos, onde apresentaremos fórmulas que geram triângulos aritméticos a partir de triângulos pitagóricos e vice-versa; no quinto capítulo mostraremos um método de fácil execução para encontrarmos todos os triângulos aritméticos: a parametrização a partir de um par de números primos entre si e, finalmente, no sexto capítulo, abordaremos sobre os *ternos pitagóricos*, onde apresentaremos algumas propriedades que nos serão úteis para auxiliar-nos na parametrização dos triângulos aritméticos e também dos triângulos pitagóricos.

Para as demonstrações realizadas no desenvolvimento deste trabalho foram usados conceitos básicos tais como: paridade, divisibilidade, irredutibilidade, fatoração, matrizes, determinantes e equações elementares, todos assuntos constantes nos programas da educação básica. Trata-se, portanto, de um conteúdo possível de se trabalhar com alunos do nível médio.

A história da matemática (HM) amplia o conceito de Matemática como ciência e nos dá a dimensão do entendimento matemático pelos séculos. Um dos nossos propósitos neste trabalho é mostrar um pouco da interação histórica entre a álgebra e a teoria dos números com a geometria, o outro propósito, por assim dizer, é trabalhar a geometria com os estudantes da educação básica de modo um pouco fora dos padrões convencionais, abordando conteúdos paralelos como matrizes,

determinantes, alguns conceitos aritméticos e soluções de equações. Almejamos também que esse trabalho junte-se aos demais trabalhos do banco de dissertações do PROFMAT e torne-se um material de pesquisa para alunos e professores que queiram expandir seus conhecimentos matemáticos sobre assuntos específicos.

A abordagem geométrica aqui proposta tem uma base histórica capaz de estimular a curiosidade do aluno e também do professor, pois com os poucos recursos aritméticos e algébricos da sua época, Brahmagupta apresentou o seu engenhoso princípio da composição, o *Samasa Bhāvanā*, mil anos antes, ou quase isso, do matemático inglês John Pell apresentar a sua brilhante solução para as equações quadráticas do tipo $x^2 - Ny^2 = 1$.

2 UM ESBOÇO DA MATEMÁTICA NA ÍNDIA ATÉ OS DIAS DE BRAHMAGUPTA

Neste capítulo trataremos sobre alguns aspectos do desenvolvimento da matemática indiana até o século seis da era cristã e, na sequência, abordaremos sobre algumas contribuições do astrônomo e matemático Brahmagupta para a teoria dos números, álgebra e geometria, numa época em que a matemática ainda carecia de princípios rudimentares.

2.1 A MATEMÁTICA NA ÍNDIA ANTES DE BRAHMAGUPTA

Sobre a Índia, a fonte histórica mais antiga que se tem são as ruínas de uma cidade de 5000 anos, encontradas em Mohenjo Daro, um sítio arqueológico localizado a nordeste da cidade de Karachi, no Paquistão. Lá foram encontradas evidências de conhecimentos de engenharia e matemática, vestígios de uma civilização que em nada ficava a desejar de qualquer outra civilização do Oriente Médio. Não se tem registros do destino dessa civilização, nem documentos matemáticos dessa época. Aos invasores nômades arianos, há cerca de 4000 anos, deve-se o aprimoramento da língua sânscrita, escrita e falada, e o surgimento do sistema de castas (EVES, 2004, p.247).

Não há uma cronologia confiável a respeito dos trabalhos matemáticos na Índia. Acredita-se que mesmo antes da fundação de Roma, 753 a.c., assim como no Egito, a Índia tinha seus “estiradores” de corda para construção de altares religiosos, o que provavelmente trouxe algumas noções geométricas como as de medidas. A experiência com traçados de templos e construção de altares formou um corpo de conhecimentos que deu origem aos escritos religiosos denominados de *Sulvasutras*, que trazem regras geométricas para alongamento de cordas, onde se percebe conhecimentos sobre os ternos pitagóricos. Alguns historiadores afirmam que por essa época Pitágoras esteve na Índia, sugerindo que aprendeu o seu teorema com os Hindus. Entretanto, estudos recentes revelam a impossibilidade desta afirmação, dado que os babilônios já tinham familiaridade com tal propriedade pelo menos mil anos antes (BOYER, 2003, p.150). Há três versões da obra *Sulvasutras*, sendo a de nome *Apostamba* a mais conhecida (BOYER, 2003, p.151). Nesta obra encontram-se regras para a construção de ângulos retos por meio de tríades de cordas, de comprimentos

que formam ternos pitagóricos, como (3, 4, 5), ou (5, 12, 13), ou (8, 15, 17), ou ainda (12, 35, 37). Mas há de se observar que esses ternos pitagóricos podem ter sido influência mesopotâmica.

Pelo século II se encerra o período dos *Sulvasutras*, seguindo-se a idade dos *Siddhāntas*. Neste período surge a dinastia Gupta, considerada a era de ouro do renascimento sânscrito², a Índia torna-se um centro de saber, de arte e medicina, com ricas cidades. Os *Siddhāntas* parecem ter sido um produto desse renascimento. Daí em diante, a matemática Hindu ligou-se mais à astronomia do que à religião. São conhecidas cinco versões diferentes dos *Siddhāntas*: *Paulisha*, *Surya*, *Vasisishta*, *Paitamaha* e *Remanka*. A única versão que parece ter-se preservado é a *Surya Siddhānta* (Sistema de Sol), escrito por volta de 400 d.c.. O *Paulisha Siddhānta* foi resumido pelo matemático hindu *Varahamihira* que contém um conjunto de tópicos da trigonometria e uma tábua de senos, aparentemente oriunda da tábua de cordas de Ptolomeu. Segundo o matemático árabe Al-Biruni, o *Paulisha Siddhānta* tem influência grega. Ele afirma que grande parte desta obra deriva da obra do astrólogo Paulo que viveu em Alexandria pouco antes do final do quarto século e início do quinto século, época em que se presume o surgimento dos *Siddhāntas*. Entretanto, estudiosos hindus insistem em afirmar a originalidade e independência dos *Siddhāntas*.

Concorda-se em geral, que a trigonometria de Ptolomeu tomou uma nova forma, pois, enquanto que os estudos trigonométricos de Ptolomeu se fundamentavam na relação entre as cordas e os arcos centrais de um círculo, nos *Siddhāntas* esta relação se dá entre a metade da corda e a metade do ângulo subtendido no centro pela corda toda. Nasce assim a precursora da função seno, tornando-se uma grande contribuição dos *Siddhāntas* para a história da matemática (BOYER, 2003, p.153).

Após os *Siddhāntas*, durante o século VI, surge na Índia um matemático de grande importância, *Aryabhata*. Sua obra escrita em versos (499 d.c.), intitulada *Aryabhatiya*, é sobre astronomia e matemática. Por ser um sumário de obras

² O sânscrito ou língua sânscrita é uma língua ancestral do Nepal e da Índia. Embora seja uma língua morta, o sânscrito faz parte do conjunto das 23 línguas oficiais da Índia, porque tem importante uso litúrgico no hinduísmo, budismo e jainismo.

anteriores de vários autores matemáticos hindus, a *Aryabhatiya*, nesse aspecto, se assemelha à *Os Elementos de Euclides* escrito mais ou menos oito séculos antes. A obra apresenta regras de cálculos usadas na astronomia e na matemática de mensuração. A parte da matemática, mais ou menos um terço da obra, se inicia com potências de dez, raízes quadradas e cúbicas de números inteiros, regras de mensuração (cerca de metade delas incorretas), área de triângulos, corretamente dada como o semiproduto da base pela altura, área de círculo, área de trapézio, volumes da pirâmide e da esfera incorretamente dados, progressões aritmética e geométrica.

É na segunda metade do *Aryabhatiya* que trata de trigonometria esférica e medida de tempo, que se observa a numeração decimal posicional, “elemento que iria deixar marca permanente na matemática de gerações posteriores” (Boyer, 2003, p.154).

Um pouco mais de um século após *Aryabhata* surge o talentoso matemático e astrônomo *Brahmagupta*.

2.2 – A MATEMÁTICA NA ÍNDIA NOS DIAS DE BRAHMAGUPTA

Brahmagupta Sphuta Siddhânta (598 a 670 d.c.), foi um dos matemáticos mais importantes da Índia antiga. Nasceu na cidade de Bhinmal, no estado de Rajasthan, no nordeste da Índia. Ele introduziu conceitos extremamente influentes para a matemática básica, incluindo o uso do zero em cálculos matemáticos e o uso de matemática e álgebra na descrição e previsão de eventos astronômicos (ZAINAB AHMED, 2020).

Influenciado pela disseminação das ideias matemáticas gregas para o leste durante a expansão imperial do antigo império romano, as ideias de Brahmagupta, por sua vez, causaram grandes impactos nos desenvolvimentos europeus posteriores. Alves (2019) assinala que:

Brahmagupta Sphuta Siddhânta foi responsável pela introdução de ideias pioneiras envolvendo a composição de equações diofantinas e que, hodiernamente, preserva a atenção e estimula desenvolvimentos de pesquisas. Alves (2019, p. 769).

E ainda acrescenta que:

A teoria dos números por si só, como um grande desafio intelectual, tem uma longa história na Índia, Brahmagupta, já no século VII, fez importantes contribuições para o que agora é conhecido (corretamente) como a equação de Pell (ATIYAH, 1993/apud ALVES, 2019).

E conclui afirmando que:

Por conseguinte, urge uma compreensão científica não restritiva e de natureza epistemológica e evolutiva sobre as ideias e métodos algébricos e geométricos introduzidos por Brahmagupta e que preservam um distinguido valor matemático evolutivo indene até nossos dias atuais (ALVES, 2019, p.769).

Os escritos de Brahmagupta contêm conceitos matemáticos e astronômicos criados ou refinados por ele. Suas estimativas da duração do ano eram impressionantemente precisas para a época. Embora seja difícil identificar um único inventor do conceito de zero, Brahmagupta é um candidato razoável para esse título. (ZAINAB AHMED, 2020). O matemático indiano Bhaksara II deu-lhe um título, chamava-o de "*Ganakachakra Chudamani*", que significa "a estrela mais brilhante da galáxia dos matemáticos" (PRANESACHAR, 2012, p.252).

Na idade adulta, Brahmagupta tornou-se o diretor do observatório astronômico localizado em Ujjain, na Índia (ENCYCLOPEDIA.COM, 2020). A partir daí publicou quatro livros sobre astronomia e matemática. O primeiro foi o *Brahmasphutasiddhanta* e o segundo, *Khandakhadyaka*, escrito em versículos. Os demais foram o *Cadamekela* e o *Durkeamynarda*, também escritos em versículos.

No seu primeiro manuscrito, o *Brahmasphutasiddhanta* (que significa "A doutrina corretamente estabelecida de Brahma", mas frequentemente traduzido como "A abertura do universo"), foi escrito em 628 d.c., quando ele tinha cerca de 30 anos, Brahmagupta calculou a duração do ano solar em 365 dias, 6 horas, 5 minutos e 19 segundos, entre o mais preciso dos acertos iniciais e notavelmente próximo do valor real de 365 dias, 5 horas, 48 minutos e cerca de 45 segundos (ENCYCLOPEDIA.COM, 2020).

Nos 25 capítulos do seu primeiro manuscrito, escreveu coisas comuns aos desenvolvimentos matemáticos e astronômicos da época. Eles tinham tópicos sobre longitudes de planetas, rotação diurna, eclipses lunares, eclipses solares,

nascimentos e ajustes do sol / lua, as fases da lua e as conjunções de planetas com as estrelas e outros planetas. Na segunda metade do manuscrito contém álgebra, observações e cálculos no calendário, medidores, esferas e instrumentos.

Uma explicação bem conhecida da álgebra que Brahmagupta expos no seu *Brahmasphutasiddhanta*, foi a multiplicação usando um sistema *place-vale*. (ZAINAB AHMED, 2020). Por exemplo, consideremos o produto de 354 multiplicado por 593 e configuremos a multiplicação como mostrado a seguir:

$$5 \times 354 = 1770$$

$$9 \times 354 = 3186$$

$$3 \times 354 = 1062$$

Somando-se os resultados conforme mostrado abaixo, chega-se ao resultado da multiplicação.

$$\begin{array}{r} 1 \ 7 \ 7 \ 0 \\ | \\ 3 \ 1 \ 8 \ 6 \\ | \\ 1 \ 0 \ 6 \ 2 \\ \hline 2 \ 0 \ 9 \ 9 \ 2 \ 2 \end{array}$$

Uma das suas contribuições mais famosas é a definição e uso do zero com números negativos (*dívida*) e os números positivos (*fortuna*). Ele criou um conjunto de regras da seguinte maneira:

Uma dívida menos zero é uma dívida

Uma fortuna menos zero é uma fortuna

Zero menos zero é um zero

Uma dívida subtraída de zero é uma fortuna

Uma fortuna subtraída de zero é uma dívida

O produto de zero multiplicado por uma dívida ou fortuna é zero

O produto de zero multiplicado por zero é zero

O produto ou quociente de duas fortunas é uma fortuna

O produto ou quociente de duas dívidas é uma fortuna

O produto ou quociente de uma dívida e uma fortuna é uma dívida

O produto ou quociente de uma fortuna e uma dívida é uma dívida

Brahmagupta errou quando mencionou que o quociente de zero por zero é zero.

Segue uma lista de alguns dos trabalhos atribuídos a Brahmagupta, segundo *Pranesachar* (2012, p.248).

1. Brahmagupta demonstrava interesse por triângulos retângulos com lados racionais e desenvolveu uma solução geral para os chamados ternos pitagóricos (a, b, c) , do tipo $a = 2mn$, $b = m^2 - n^2$ e $c = m^2 + n^2$, onde m e n são números racionais, embora este resultado também seja atribuído aos gregos.

2. Para o caso da construção de um triângulo retângulo, dado um lado a que não seja a hipotenusa, temos a fórmula para o cálculo dos outros lados:

$$a, \frac{1}{2} \left(\frac{a^2}{m} - m \right), \frac{1}{2} \left(\frac{a^2}{m} + m \right)$$

onde m e n são números racionais.

Para o caso em que é dada a hipotenusa c de um triângulo retângulo, os outros lados são dados pela fórmula:

$$c, \frac{2mnc}{m^2 + n^2}, \frac{(m^2 - n^2)c}{m^2 + n^2}$$

3. Temos aqui uma fórmula intrinsecamente ligada à fórmula de Heron para o cálculo da área de um triângulo em função dos lados, a fórmula para calcular a área S de um quadrilátero inscrito de lados a, b, c, d e semiperímetro p , dada por:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$$

Aqui Brahmagupta não mencionou que a fórmula somente se aplica aos quadriláteros inscritos. Sem dúvida uma das suas mais brilhantes contribuições à matemática

4. Para o cálculo das diagonais de um quadrilátero cíclico de lados a, b, c e d , deixou-nos as fórmulas:

$$\sqrt{\frac{(ab+cd)(ac+bd)}{ad+bc}} \quad \text{e} \quad \sqrt{\frac{(ad+bc)(ac+bd)}{ab+cd}}$$

5. Para as equações diofantinas, Brahmagupta desenvolveu o engenhoso e inovador *Samasa Bhāvanā*, ou princípio da composição, processo de geração de infinitas soluções das equações do tipo $x^2 - Ny^2 = \lambda$. Veremos a aplicação deste princípio com maiores detalhes no capítulo 3 a seguir.

3 OS TRIÂNGULOS DE BRAHMAGUPTA

Neste capítulo veremos como a álgebra, a teoria dos números e a geometria, se coadunam no método iterativo *Samasa Bhāvanā*, desenvolvido por Brahmagupta, para solucionar alguns tipos de equações diofantinas e encontrar triângulos de áreas inteiras com lados inteiros e consecutivos, denominados aqui de *Triângulos de Brahmagupta*. Veremos também como esse método se antecipou à multiplicação de matrizes 2x2 e ao produto de determinantes.

3.1 – A EQUAÇÃO DE PELL

Os matemáticos Beauregard e Suryanarayan (1998) comentam que é possível que Brahmagupta tenha usado a conhecida fórmula de Heron para o cálculo da área de um triângulo em função dos lados a, b, c e do semiperímetro $p = \frac{a+b+c}{2}$, dada por $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, para encontrar os oito primeiros triângulos com área e lados inteiros e consecutivos, listados a seguir pelos ternos: (3,4,5); (13,14,15); (51,52,53); (193,194,195); (723,724,725); (2701, 2702, 2703); (10083, 10084, 10085); (37633, 37634, 37635). Pela proeza de ter apresentado, ainda no século VII, os oito primeiros triângulos com estas características, os referidos matemáticos, em homenagem ao astrônomo e matemático Brahmagupta, denominaram tais triângulos de “Triângulos de Brahmagupta”.

Fundamentados nesta misteriosa possibilidade Beauregard e Suryanarayan (1998) desenvolveram cálculos a partir da fórmula de Heron de Alexandria com a finalidade de encontrar os triângulos de Brahmagupta. Para exemplificar, consideremos o triângulo da Figura 3.1.1, de lados inteiros e consecutivos definidos por $t-1, t, t+1, t \geq 4$, e altura a .

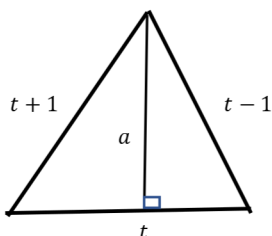


Figura 3.1.1: O triângulo de Brahmagupta

Fonte: elaborada pelo autor

Para o semiperímetro, temos: $p = \frac{t-1+t+t+1}{2} = \frac{3t}{2}$ e para a área, temos: $S = \frac{a \cdot t}{2}$. Note que sendo S e t inteiros, podemos concluir que a é racional. Mostraremos a seguir que t é par e a é inteiro e múltiplo de 3.

Pela fórmula de Heron a área do triângulo de Brahmagupta fica:

$$S = \sqrt{\frac{3t}{2} \left[\frac{3t}{2} - (t-1) \right] \left[\frac{3t}{2} - t \right] \left[\frac{3t}{2} - (t+1) \right]}$$

Donde conclui-se que: $S = \frac{t}{2} \sqrt{3 \left[\left(\frac{t}{2} \right)^2 - 1 \right]}$

Comparando-se o resultado acima com $S = \frac{a \cdot t}{2}$, obtém-se:

$$\frac{a \cdot t}{2} = \frac{t}{2} \sqrt{3 \left[\left(\frac{t}{2} \right)^2 - 1 \right]} \Rightarrow 4a^2 = 3(t^2 - 4) \quad (1)$$

observe que t deve ser par para que a igualdade em (1) seja satisfeita, portanto, podemos escrever: $t = 2x$, onde $x \in \mathbb{Z}$.

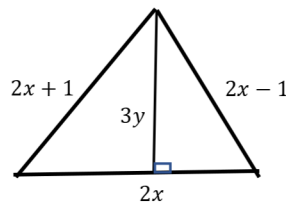
Substituindo $t = 2x$ em (1), vem que: $4a^2 = 3(4x^2 - 4)$, donde se obtém:

$$a^2 = 3(x^2 - 1). \quad (2)$$

Verifica-se, portanto, que a^2 é um número inteiro e múltiplo de 3, o que nos leva a concluir que a também é inteiro, visto que a é racional. Concluimos também, a partir da equação (2), que a é múltiplo de 3, pois supondo que 3 não divida a , afirmamos que 3 não divide a^2 , dado que 3 é primo, o que é uma contradição. Assim a é múltiplo de 3 e daí podemos escrever $a = 3y$, com $y \in \mathbb{Z}$.

Na Figura 3.1.2 temos o triângulo de Brahmagupta com suas medidas em função de x e de y .

Figura 3.1.2: Um Triângulo de Brahmagupta.



Fonte: adaptado de Beauregard e Suryanarayan (1998)

Substituindo $a = 3y$ em (2), ficamos com: $9y^2 = 3(x^2 - 1)$. Dividindo ambos os membros da igualdade por 3, chegamos a uma conhecida forma de equações,

Diofantinas, as equações de Pell do tipo $x^2 - Ny^2 = 1$, onde $\sqrt{N}$ não é um número natural e x, y são inteiros. No nosso caso, $N = 3$. Temos, então:

$$x^2 - 3y^2 = 1$$

John Pell (1610 - 1685), matemático inglês, definiu x_n e y_n de maneira recorrente, tomando o conjugado $x_n + y_n\sqrt{N} = (x_1 + y_1\sqrt{N})^n$. Brahmagupta para solucionar estes tipos de equações, quase mil anos antes, no século VII, desenvolveu um brilhante método anunciado no seu manuscrito *Brahmasphutasiddhanta*, o *Samasa Bhāvanā*, ou *Princípio da Composição*, que consiste em gerar infinitas soluções inteiras para as equações do tipo: $x^2 - Ny^2 = \lambda$, onde N e λ são inteiros, $N > 0$, N livre de quadrados (SWAMY, 1998, p.125).

3.2 O SAMASA BHĀVANĀ, OU PRINCÍPIO DA COMPOSIÇÃO

O *Samasa Bhāvanā*, ou princípio da composição, é um método iterativo onde as infinitas soluções inteiras das equações do tipo $x^2 - Ny^2 = \lambda$, com N e λ inteiros, $N > 0$, N livre de quadrados, são geradas a partir da composição de soluções de outras equações do mesmo tipo.

Teorema 3.2.1(Bhāvanā, ou Princípio da Composição): Se (x_1, y_1) é uma solução da equação $x^2 - Ny^2 = \lambda_1$ e (x_2, y_2) é uma solução da equação $x^2 - Ny^2 = \lambda_2$, então, as composições $(x_1, y_1) * (x_2, y_2) = (x_1x_2 + Ny_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1)$ e $(x_1, y_1) * (x_2, y_2) = (x_1x_2 - Ny_1y_2, x_1y_2 - x_2y_1)$ são soluções da equação $x^2 - Ny^2 = \lambda_1\lambda_2$. (SWAMY, 1998, p.125).

A seguir faremos uma adaptação da prova deste teorema encontrado em (ALVES, 2019, p.762). Provaremos primeiro o resultado $(x_1x_2 + Ny_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1)$, em seguida mostraremos que a expressão $(x_1x_2 - Ny_1y_2, x_1y_2 - x_2y_1)$ também é solução da composição $(x_1, y_1) * (x_2, y_2)$.

Prova: Sejam $(x, y) = (x_1, y_1)$ e $(x, y) = (x_2, y_2)$ soluções respectivas das equações $x^2 - Ny^2 = \lambda_1$ e $x^2 - Ny^2 = \lambda_2$. Aplicando o princípio da composição para estas soluções, temos que a expressão $(x_1, y_1) * (x_2, y_2) = (x_1x_2 + Ny_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1)$ é solução da equação $x^2 - Ny^2 = \lambda_1\lambda_2 = \lambda$.

De fato, substituindo a solução $(x_1x_2 + Ny_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1)$ em $x^2 - Ny^2 = \lambda$, ficamos com:

$$\begin{aligned}
 x^2 - Ny^2 &= (x_1x_2 + Ny_1y_2)^2 - N(x_1y_2 + x_2y_1)^2 = \lambda \Rightarrow \\
 x^2 - Ny^2 &= x_1^2x_2^2 + 2Nx_1x_2y_1y_2 + N^2y_1^2y_2^2 - N(x_1^2y_2^2 + 2x_1y_2x_2y_1 + x_2^2y_1^2) = \\
 x_1^2x_2^2 + 2Nx_1x_2y_1y_2 + N^2y_1^2y_2^2 - Nx_1^2y_2^2 - 2Nx_1x_2y_1y_2 - Nx_2^2y_1^2 &= \\
 x_1^2x_2^2 - Nx_2^2y_1^2 - Nx_1^2y_2^2 + N^2y_1^2y_2^2 &= x_2^2(x_1^2 - Ny_1^2) - Ny_2^2(x_1^2 - Ny_1^2) \Rightarrow \\
 x^2 - Ny^2 &= (x_1^2 - Ny_1^2)(x_2^2 - Ny_2^2) \Rightarrow \\
 x^2 - Ny^2 &= \lambda_1\lambda_2 = \lambda
 \end{aligned}$$

Analogamente, aplicando o princípio da composição para a expressão $(x_1, y_1) * (x_2, y_2) = (x_1x_2 - Ny_1y_2, x_1y_2 - x_2y_1)$ e substituindo a solução na equação $x^2 - Ny^2 = \lambda_1\lambda_2 = \lambda$, ficamos com:

$$\begin{aligned}
 x^2 - Ny^2 &= (x_1x_2 - Ny_1y_2)^2 - N(x_1y_2 - x_2y_1)^2 = \lambda \Rightarrow \\
 x^2 - Ny^2 &= x_1^2x_2^2 - 2Nx_1x_2y_1y_2 + N^2y_1^2y_2^2 - N(x_1^2y_2^2 - 2x_1y_2x_2y_1 + x_2^2y_1^2) = \\
 x_1^2x_2^2 - 2Nx_1x_2y_1y_2 + N^2y_1^2y_2^2 - Nx_1^2y_2^2 + 2Nx_1x_2y_1y_2 - Nx_2^2y_1^2 &= \\
 x_1^2x_2^2 - Nx_2^2y_1^2 - Nx_1^2y_2^2 + N^2y_1^2y_2^2 &= x_2^2(x_1^2 - Ny_1^2) - Ny_2^2(x_1^2 - Ny_1^2) \Rightarrow \\
 x^2 - Ny^2 &= (x_1^2 - Ny_1^2)(x_2^2 - Ny_2^2) \Rightarrow
 \end{aligned}$$

$$x^2 - Ny^2 = \lambda_1\lambda_2 = \lambda. \blacksquare$$

3.3 APLICAÇÃO DO SAMASA BHĀVANĀ NA RESOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES DIOFANTINAS.

Pelo Teorema 3.2.1, temos que, se (x_1, y_1) e (x_2, y_2) são soluções para as equações $x^2 - Ny^2 = \lambda_1$ e $x^2 - Ny^2 = \lambda_2$, respectivamente, então a composição $(x_1, y_1) * (x_2, y_2)$ é solução para a equação $x^2 - Ny^2 = \lambda_1\lambda_2$. Vamos exemplificar isto usando as equações $x^2 - 2y^2 = 2$ e $x^2 - 2y^2 = 7$ para encontrarmos uma solução para a equação $x^2 - 2y^2 = 2 \cdot 7 = 14$

Por tentativa e erro, note que o par $(2, 1)$ é uma solução da equação $x^2 - 2y^2 = 2$ e que o par $(5, 3)$ é uma solução da equação $x^2 - 2y^2 = 7$.

Fazendo a composição, obtemos: $(2,1) * (5, 3) = (2.5 + 2.1.3, 2.3 + 5.1) = (16, 11)$

Note que o par $(16, 11)$ é uma das infinitas soluções da equação $x^2 - 2y^2 = 2.7 = 14$

Também podemos verificar que fazendo a mesma composição utilizando o resultado $(x_1x_2 - Ny_1y_2, x_1y_2 - x_2y_1)$ vamos obter uma outra solução para a equação $x^2 - 2y^2 = 2.7 = 14$. De fato: $(2,1) * (5, 3) = (2.5 - 2.1.3, 2.3 - 5.1) = (4, 1)$. Note que o par $(4, 1)$ é também solução da equação $x^2 - 2y^2 = 2.7 = 14$

Para o caso específico das equações de Pell, $x^2 - Ny^2 = 1$, sendo (x_1, y_1) e (x_2, y_2) soluções, então a composição $(x_1, y_1) * (x_2, y_2)$ é solução para a equação $x^2 - Ny^2 = 1.1 = 1^2 = 1$. Neste caso, todas as composições de duas soluções quaisquer das equações do tipo $x^2 - Ny^2 = 1$ gerará uma nova solução para a mesma equação.

Observe que o teorema 3.2.1 nos garante que podemos compor uma solução encontrada consigo mesma para gerar uma nova solução, pois, se (x_1, y_1) é solução de $x^2 - Ny^2 = 1$ e (x_2, y_2) é também solução de $x^2 - Ny^2 = 1$, então, a composição $(x_1, y_1) * (x_2, y_2)$, com $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$, é solução para a equação $x^2 - Ny^2 = 1^2$.

Para a nossa equação em questão, $x^2 - 3y^2 = 1$, é fácil encontrarmos uma primeira solução positiva, basta que façamos $x = 2$ para encontrarmos $y = 1$. Temos, portanto, uma solução inicial, $(2, 1)$, para gerarmos as demais soluções pelo *Samasa Bhāvanā*, ou *Princípio da Composição*.

Compondo a solução inicial encontrada, $(2, 1)$, com ela mesma, chegaremos a uma solução subsequente, como mostramos a seguir:

$$(x_2, y_2) = (x_1, y_1) * (x_1, y_1) = (2,1) * (2,1) = (2^2 + 3.1^2, 2.2.1) = (7, 4)$$

Para a terceira solução, temos:

$$(x_3, y_3) = (x_1, y_1) * (x_2, y_2) = (2, 1) * (7, 4) = (2.7 + 3.1.4, 2.4 + 7.1) = (26, 15)$$

Para a quarta solução:

$$(x_4, y_4) = (x_1, y_1) * (x_3, y_3) = (2,1) * (26, 15) = (97, 56)$$

E assim procedendo, temos para a n -ésima solução: $(x_n, y_n) = (2,1) * (x_{n-1}, y_{n-1})$

Desse modo, encontramos as sequências:

$$x_n = 2, 7, 26, 97, \dots, \quad \text{e} \quad y_n = 1, 4, 15, 56, \dots,$$

A equação $x^2 - 3y^2 = 1$ tem infinitas soluções inteiras e cada solução representa um Triângulo de Brahmagupta de lados $2x - 1, 2x, 2x + 1$ e altura $3y$, ver figura 3.1.2. Isto nos leva a concluir que se há infinitas soluções para a equação, então existem infinitos Triângulos de Brahmagupta. Aqui temos uma ligação entre a teoria dos números, a álgebra e a geometria, numa época em que a matemática ainda carecia de conceitos elementares da aritmética e da álgebra.

A seguir faremos a aplicação do *Samasa Bhāvanā* para encontrarmos o 9º e o 10º Triângulos de Brahmagupta.

Exemplo 3.3.1: Encontrar o 9º triângulo de Brahmagupta.

Com a solução inicial $(x_1, y_1) = (2, 1)$ e a oitava solução da equação de Pell podemos encontrar o nono triângulo de Brahmagupta. Como o terno $(37633, 37634, 37635)$ representa o oitavo triângulo, temos que o termo central, $37634 = 2x = t$, logo: $2x = 37634 \Rightarrow x = 18817$. Sendo $x^2 - 3y^2 = 1$, para $x = 18817$, encontramos: $y = \pm\sqrt{118.026.489}$, daí ficamos com $y = 10864$.

Aplicando o *Samasa Bhāvanā*, temos:

$$(x_9, y_9) = (x_1, y_1) * (x_8, y_8) = (x_1x_8 + 3y_1y_8, x_1y_8 + x_8y_1) \Rightarrow$$

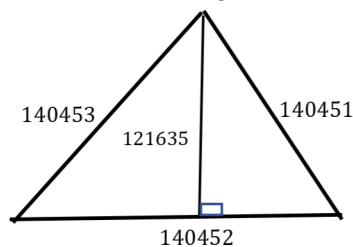
$$(x_9, y_9) = (2 \times 18817 + 3 \times 1 \times 10864, 2 \times 10864 + 18817 \times 1) \Rightarrow$$

$$(x_9, y_9) = (70226, 40545)$$

Portanto: $t = 2x_9 = 2 \times 70226 = 140452$; $t - 1 = 140451$ e $t + 1 = 140453$, são os lados do nono triângulo de Brahmagupta, de altura: $a = 3y_9 = 3 \times 40545 = 121635$.

Ver Figura 3.3.1

Figura 3.3.1: O 9º triângulo de Brahmagupta



Fonte: elaborada pelo autor

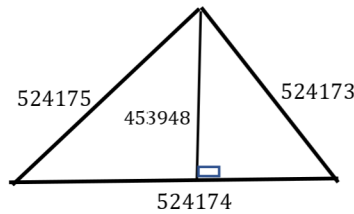
Exemplo 3.3.2: Encontrar o 10º triângulo de Brahmagupta.

Para o 10º triângulo já temos a solução inicial, $(x_1, y_1) = (2, 1)$, e a última solução referente ao 9º triângulo, $(x_9, y_9) = (70226, 40545)$. Aplicando o *Princípio da Composição*, temos:

$$\begin{aligned}(x_{10}, y_{10}) &= (x_1, y_1) * (x_9, y_9) = (x_1 x_9 + N y_1 y_9, x_1 y_9 + x_9 y_1) \Rightarrow \\ (x_{10}, y_{10}) &= (2 \times 70226 + 3 \times 1 \times 40545, 2 \times 40545 + 70226 \times 1) \Rightarrow \\ (x_{10}, y_{10}) &= (262087, 151316) \Rightarrow\end{aligned}$$

Para $t = 2x_{10} = 524174$; $t - 1 = 524173$; $t + 1 = 524175$ e $a = 3y = 453948$, temos o 10º triângulo de Brahmagupta, Figura 3.3.2:

Figura 3.3.2: O 10º triângulo de Brahmagupta



Fonte: elaborada pelo autor

A título de curiosidade, temos para a área do 10º Triângulo de Brahmagupta o numerosíssimo:

$$S = \frac{524174 \times 453948}{2} = 118.973.869.476$$

3.4 A MATRIZ DE BRAHMAGUPTA

Beauregard e Suryanarayan (1998) afirmam que, embora a abordagem matricial possa parecer estranha à abordagem de Brahmagupta, o *Samasa Bhāvanā* é equivalente à identidade:

$$\det [B(x_1, y_1)B(x_2, y_2)] = \det B(x_1, y_1)\det B(x_2, y_2) = \lambda_1 \lambda_2$$

Assim, o princípio da composição de Brahmagupta incorpora a multiplicação de matrizes 2×2 e a propriedade multiplicativa dos determinantes que, segundo Beauregard e Suryanarayan (1998, p.16), foram ideias não formalizadas até o século XIX.

A equação diofantina $x^2 - Ny^2 = \lambda$, pode ser escrita como $B(x, y) = \begin{pmatrix} x & y \\ Ny & x \end{pmatrix}$, com $\det B(x, y) = \lambda$, desde que:

$$B(x_1, y_1)B(x_2, y_2) = B(x_1x_2 + Ny_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1, \lambda_1\lambda_2)$$

Desse modo, o princípio da composição equivale à identidade:

$$\det [B(x_1, y_1)B(x_2, y_2)] = \det B(x_1, y_1)\det B(x_2, y_2) = \lambda_1\lambda_2$$

De fato, consideremos as matrizes de Brahmagupta indicadas por:

$$B(x_1, y_1) = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ Ny_1 & x_1 \end{pmatrix} \text{ e } B(x_2, y_2) = \begin{pmatrix} x_2 & y_2 \\ Ny_2 & x_2 \end{pmatrix}.$$

Fazendo o produto das matrizes, vem que:

$$B(x_1, y_1)B(x_2, y_2) = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ Ny_1 & x_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 & y_2 \\ Ny_2 & x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1x_2 + Ny_1y_2 & x_1y_2 + x_2y_1 \\ Nx_2y_1 + Nx_1y_2 & Ny_1y_2 + x_1x_2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Logo: } \det[B(x_1, y_1)B(x_2, y_2)] = (x_1x_2 + Ny_1y_2)^2 - N(x_1y_2 + x_2y_1)^2$$

Note que o Samasa Bhāvanā afirma que se $x_1^2 - Ny_1^2 = \lambda_1$ e $x_2^2 - Ny_2^2 = \lambda_2$, então o par $(x_1x_2 + Ny_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1)$ satisfaz à equação $x^2 - Ny^2 = \lambda_1\lambda_2$, ou seja, $(x_1x_2 + Ny_1y_2)^2 - (x_1y_2 + x_2y_1)^2 = \lambda_1\lambda_2$. Portanto: $\det[B(x_1, y_1)B(x_2, y_2)] = \lambda_1\lambda_2$

Por outro lado, temos que: $\det B(x_1, y_1) = x_1^2 - Ny_1^2 = \lambda_1$ e $\det B(x_2, y_2) = x_2^2 - Ny_2^2 = \lambda_2$. Assim: $\det B(x_1, y_1)\det B(x_2, y_2) = \lambda_1\lambda_2$.

Portanto, o Samasa Bhāvanā, ou princípio da composição, equivale à identidade: $\det[B(x_1, y_1)B(x_2, y_2)] = \det B(x_1, y_1)\det B(x_2, y_2) = \lambda_1\lambda_2$. ■

3.5 USANDO O MÉTODO MATRICIAL PARA RESOLVER A EQUAÇÃO DE PELL

Vimos na seção anterior que o produto de matrizes 2×2 equivale ao Samasa Bhāvanā, ou princípio da composição. Assim, da equação de Pell, $x^2 - 3y^2 = 1$, temos a matriz de Brahmagupta dada por $B(x, y) = \begin{pmatrix} x & y \\ 3y & x \end{pmatrix}$, com $\det B(x, y) = 1$.

John Pell definiu as soluções inteiras da equação $x^2 - Ny^2 = 1$, com $x, y \in \mathbb{Z}$ e N livre de quadrados, como sendo $(x_n + y_n\sqrt{N}) = (x_1 + y_1\sqrt{N})^n$. Beauregard e Suryanarayan (1998, p.14), fundamentados na solução de Pell, definem x_n e y_n como sendo $B^n = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ 3y_1 & x_1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} x_n & y_n \\ 3y_n & x_n \end{pmatrix}$, para $n = 0, 1, 2, 3, \dots$. Como o par $(2, 1)$ fornece

a primeira solução positiva para $x^2 - 3y^2 = 1$ e também descreve o primeiro triângulo de Brahmagupta, sejam $x_1 = 2$ e $y_1 = 1$, ou seja, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$. Note que a solução trivial $(1, 0)$ da equação $x^2 - 3y^2 = 1$, ou seja, $x_0 = 1$ e $y_0 = 0$, é a nossa matriz identidade $B^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Aplicando a definição, temos que:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}^1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 12 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}^2 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 12 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 & 15 \\ 45 & 26 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}^4 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}^3 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 & 15 \\ 45 & 26 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 97 & 56 \\ 168 & 97 \end{pmatrix}$$

⋮

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}^{n+1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}^n \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n & y_n \\ 3y_n & x_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_n + 3y_n & 2y_n + x_n \\ 6y_n + 3x_n & 2x_n + 3y_n \end{pmatrix}$$

Chegamos assim às seguintes relações de recorrências:

$$x_{n+1} = 2x_n + 3y_n \quad (1) \quad \text{e} \quad y_{n+1} = 2y_n + x_n \quad (2)$$

Somando as equações (1) e (2), membro a membro, eliminando y_n , ficamos com:

$$3y_{n+1} = 2x_{n+1} - x_n \Leftrightarrow 3y_n = 2x_n - x_{n-1} \quad (3)$$

Mais uma vez, somando membro a membro as equações (1) e (2), agora eliminando x_n , obtemos:

$$x_{n+1} = 2y_{n+1} - y_n \Leftrightarrow x_n = 2y_n - y_{n-1} \quad (4)$$

Substituindo o resultado (3) em (1), encontramos

$$x_{n+1} = 2x_n + 3y_n \Rightarrow x_{n+1} = 2x_n + 2x_n - x_{n-1} \Rightarrow x_{n+1} = 4x_n - x_{n-1}$$

Substituindo (4) em (2), encontramos

$$y_{n+1} = x_n + 2y_n \Rightarrow y_{n+1} = 2y_n - y_{n-1} + 2y_n \Rightarrow y_{n+1} = 4y_n - y_{n-1}$$

Com os valores iniciais $x_0 = 1$ e $x_1 = 2$ em $x_{n+1} = 4x_n - x_{n-1}$ vamos encontrar a sequência: $x_n = 2, 7, 26, 97, \dots$,

Para $y_0 = 0$ e $y_1 = 1$ em $y_{n+1} = 4y_n - y_{n-1}$, encontramos: $y_n = 1, 4, 15, 56, \dots$,

Em 1911 L. Aubry já havia encontrado estas fórmulas. Ele havia notado que triângulos com lados $x - 1$, x , $x + 1$ têm área inteira se $\left(\frac{x}{2}\right)^2 - 3y^2 = 1$, isto é, se $x = 2, 4, 14, \dots$, com $x_n = x_{n-1} - x_{n-2}$. (DICKSON, 1920, p.200).

Em virtude da estreita ligação entre as recorrências encontradas a partir da potencialização da matriz de Brahmagupta, podemos encontrar a solução geral de tais recorrências utilizando o método da diagonalização de matrizes. Fazendo, então, a diagonalização³ da matriz de Brahmagupta, $B(x, y) = \begin{pmatrix} x & y \\ 3y & x \end{pmatrix}$, obtemos:

$$\begin{pmatrix} x & y \\ 3y & x \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}[(x + y\sqrt{3})^n + (x - y\sqrt{3})^n] & \sqrt{\frac{1}{12}}[(x + y\sqrt{3})^n - (x - y\sqrt{3})^n] \\ \sqrt{\frac{3}{4}}[(x + y\sqrt{3})^n - (x - y\sqrt{3})^n] & \sqrt{\frac{3}{12}}[(x + y\sqrt{3})^n + (x - y\sqrt{3})^n] \end{pmatrix}$$

Sendo $\begin{pmatrix} x & y \\ 3y & x \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} x_n & y_n \\ 3y_n & x_n \end{pmatrix}$, $x_1 = 2$ e $y_1 = 1$, temos a solução geral para o enésimo triângulo de Brahmagupta, para $n = 0, 1, 2, 3, \dots$, dada por:

$$x_n = \frac{1}{2}[(2 + \sqrt{3})^n + (2 - \sqrt{3})^n] \quad \text{e} \quad y_n = \frac{1}{\sqrt{12}}[(2 + \sqrt{3})^n - (2 - \sqrt{3})^n]$$

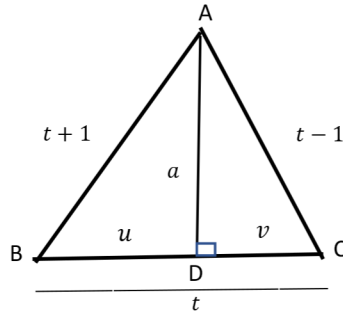
3.6 OS TRIÂNGULOS PITAGÓRICOS CONJUGADOS DOS TRIÂNGULOS DE BRAHMAGUPTA

O terno ou trio de números (a, b, c) é dito terno pitagórico, ou trio pitagórico, se $a^2 + b^2 = c^2$, com a , b e c inteiros. Se a , b e c são primos entre si, então o terno pitagórico (a, b, c) é dito terno pitagórico primitivo. Claramente associamos o terno pitagórico (a, b, c) a um triângulo retângulo de catetos a e b , e hipotenusa c .

Note que o primeiro triângulo de Brahmagupta, o de lados 3, 4 e 5, é um pitagórico primitivo. É o único que é retângulo. Os demais triângulos são acutângulos e a altura relativa à base t , ver figura 3.6.1, gera um par de triângulos pitagóricos, ABD e ACD de catetos a, u e a, v , respectivamente. Já vimos que a é inteiro e múltiplo de 3. A seguir mostraremos que $u, v \in \mathbb{Z}$.

³ O leitor encontrará a diagonalização da matriz de Brahmagupta no Apêndice deste trabalho

Figura 3.6.1: os conjugados pitagóricos nos triângulos de Brahmagupta.



Fonte: elaborada pelo autor

Para $t \in \mathbb{Z}, t \geq 14$, temos que $\overline{AB} = t + 1$, $\overline{AD} = t - 1$ e $\overline{AC} = a$ são naturais. Vamos mostrar que $\overline{BD} = u$ e $\overline{DC} = v$ também são naturais.

Do triângulo retângulo ABC da Figura 3.6.1, temos que:

$$(t + 1)^2 = u^2 + a^2 \Rightarrow (t^2 - a^2) = u^2 - 2t - 1$$

e do triângulo retângulo ACD, obtemos:

$$(t - 1)^2 = a^2 + v^2 \Rightarrow (t^2 - a^2) = v^2 + 2t - 1$$

comparando os dois resultados, segue que: $u^2 - 2t - 1 = v^2 + 2t - 1 \Rightarrow u^2 = v^2 + 4t$

como $t = u + v$, ficamos com: $u^2 = v^2 + 4(u + v) \Rightarrow u^2 - 4u = v^2 + 4v$

completando os quadrados, vem que:

$$(u - 2)^2 - 4 = (v + 2)^2 - 4 \Rightarrow (u - 2)^2 = (v + 2)^2$$

daí obtemos o resultado: $u = v + 4$

somando v a ambos os membros do resultado acima, obtemos: $u + v = 2v + 4$

sendo $u + v = t$, ficamos com: $t = 2v + 4 \Rightarrow v = \frac{t-4}{2}$

como t é par, $t \geq 14$, concluímos afirmando que $v \in \mathbb{N}$. Consequentemente $u \in \mathbb{N}$, pois: $u = v + 4$.

Portanto, os triângulos retângulos ABC e ACD são pitagóricos e, por possuírem um lado comum, chamá-lo-emos de “*conjugados pitagóricos*”, como sinônimo do termo “*companion pythagorean*” dado por Beauregard e Suryanarayan (1997, p.107).

Segue que, se $u = v + 4 = \frac{t-4}{2} + 4$, logo: $u = \frac{t+4}{2}$

Temos, então, os ternos pitagóricos conjugados:

$$A = (a, u, t + 1) = \left(a, \frac{t+4}{2}, t + 1\right) \quad \text{e} \quad A^c = (a, v, t - 1) = \left(a, \frac{t-4}{2}, t - 1\right)$$

Vamos aplicar estes resultados no exemplo a seguir

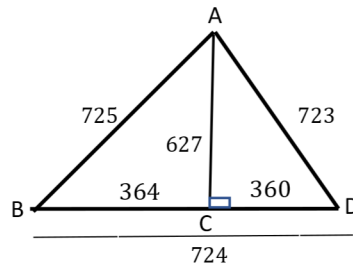
Exemplo 3.6.1: Encontrar os conjugados pitagóricos, A e A^c , que compõem o 5º triângulo de Brahmagupta, o triângulo de lados 723, 724 e 725.

Para $t = 724$, temos: $u = \frac{t+4}{2} = \frac{724+4}{2} = \frac{728}{2} = 364$.

segue, portanto, que: $v = u - 4 = 364 - 4 = 360$

temos então: $A = (a, 364, 725)$ e $A^c = (a, 360, 723)$. Para encontrarmos a basta aplicarmos Pitágoras em um dos pitagóricos conjugados. Assim:

Figura 3.6.2: os conjugados pitagóricos do 5º triângulo de Brahmagupta.



Fonte: elaborada pelo autor

$$725^2 = a^2 + 364^2 \Rightarrow a^2 = 525625 - 132496 \Rightarrow a = 627$$

4 OS TRIÂNGULOS ARITMÉTICOS

Dando continuidade ao estudo dos triângulos de Brahmagupta, abrangeremos neste capítulo todos os triângulos heronianos com lados em progressão aritmética. Beauregard e Suryanarayan (1997) referem-se a tais triângulos como sendo “triângulos aritméticos”. Analisaremos também, como vimos nos triângulos de Brahmagupta, de que modo estes triângulos estão associados a triângulos pitagóricos.

Definição: um triângulo é dito aritmético, ou (d) -*aritmético*, quando a sua área é representada por um número inteiro e os seus lados estão em progressão aritmética de razão $\pm d$, ou seja, os seus lados podem ser escritos como sendo $c, c + d$ e $c + 2d$, com c e d inteiros, $c \geq 3, d \neq 0$.

Temos um único Triângulo Aritmético que é retângulo, o conhecido pitagórico de lados 3, 4 e 5. Os demais triângulos aritméticos ou são acutângulos, ou são obtusângulos.

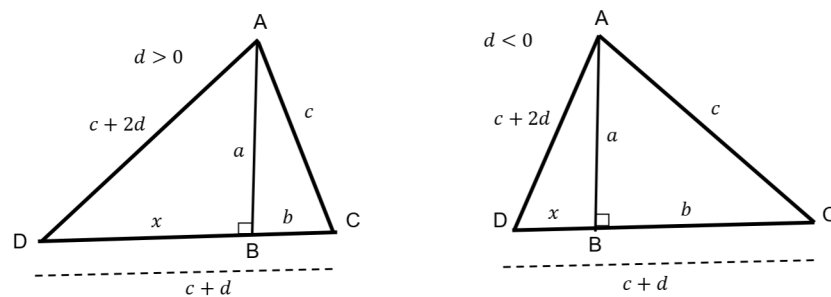
Para os triângulos aritméticos acutângulos e obtusângulos veremos que a altura relativa ao lado $c + d$, em ambos os casos, divide os triângulos aritméticos em dois triângulos pitagóricos (Figuras 4.11 e 4.12) e, por possuírem um lado em comum, chamá-lo-emos de “*pitagóricos conjugados*”, como sinônimo do termo “*companion pythagorean*” dado por Beauregard e Suryanarayan (1997, p.107).

O trio numérico $(c, c + d, c + 2d)$ associado ao triângulo aritmético de lados $c, c + d$ e $c + 2d$, chamaremos de *terno aritmético*.

4.1 – RELAÇÕES ALGÉBRICAS ENTRE OS TERNOS ARITMÉTICOS E OS SEUS TERNOS PITAGÓRICOS CONJUGADOS

Consideremos que os triângulos da figura 4.1.1 são aritméticos e acutângulos: o da esquerda, com $d > 0$, e o da direita, com $d < 0$. Seja a a altura relativa ao lado $c + d$ de ambos os triângulos. Note que a divide os triângulos (d) -*aritmético* em dois triângulos retângulos, ABC e ABD .

Figura 4.1.1-Triângulos acutângulos aritméticos



Fonte - Beauregard e Suryanarayan (1997)

Observando ambos os triângulos da figura 4.1.1, temos um primeiro resultado fundamental:

$$c + d = x + b \quad (1)$$

Encontraremos a seguir outra relação fundamental entre x , b e d , que será importante para auxiliar-nos no nosso objetivo, que é relacionar os ternos aritméticos com os ternos pitagóricos conjugados. Mostraremos que para ambos os triângulos da Figura 4.1.1 vale a relação: $x = b + 4d$

De fato. Aplicando o teorema de Pitágoras nos triângulos retângulos ABD da figura 4.1.1, vem que:

$$(c + 2d)^2 = x^2 + a^2 \Rightarrow x^2 = c^2 + 4cd + 4d^2 - a^2$$

segue daí que:

$$x^2 = (c^2 - a^2) + 4d(c + d) \quad (2)$$

Dos triângulos retângulos ABC , também da figura 4.1.1, temos que:

$$b^2 = c^2 - a^2 \quad (3)$$

substituindo (3) em (2), obtemos:

$$x^2 = b^2 + 4d(c + d) \quad (4)$$

E agora substituindo (1) em (4), vem que:

$$x^2 = b^2 + 4d(b + x) \Rightarrow x^2 = b^2 + 4bd + 4dx.$$

donde encontramos: $x^2 - 4dx = b^2 + 4bd$. Completando os quadrados, obtemos:

$$(x - 2d)^2 - 4d^2 = (b + 2d)^2 - 4d^2 \Rightarrow$$

$$(x - 2d)^2 = (b + 2d)^2$$

logo: $x - 2d = b + 2d$, ou $x - 2d = -(b + 2d)$. Donde concluímos que:

$$x = b + 4d \text{ ou } x = -b$$

Como $x = -b$ não nos serve, ficamos com: $x = b + 4d$.

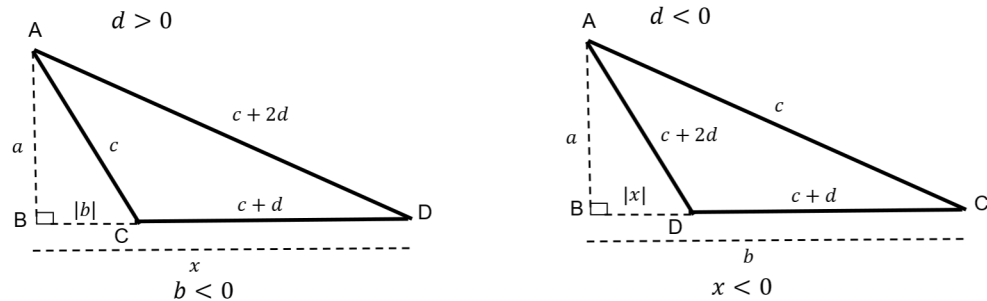
Temos, portanto, para ambos os triângulos da figura 4.1.1, dois resultados fundamentais, as equações:

$$x = b + 4d \quad \text{e} \quad c + d = x + b$$

Mostraremos a seguir que estes mesmos resultados fundamentais encontraremos para os triângulos aritméticos obtusângulos da Figura 4.1.2

Para esta finalidade Beauregard e Suryanarayan (1997, p.106), do mesmo modo como fizeram para os triângulos aritméticos acutângulos, mantiveram a altura dos triângulos obtusângulos relativos à base $c + d$, e definiram os catetos b e x algebricamente, isto é, não estando restritos a serem representados por números positivos:

Figura 4.1.2 - Triângulos obtusângulos aritméticos



Fonte - Beauregard e Suryanarayan (1997)

Para o triângulo ACD à esquerda da Figura 4.1.2, temos que: $c + d = x - |b|$. Como $b < 0$, então $|b| = -b$. Substituindo, vem que: $c + d = x + b$. E assim temos a primeira relação fundamental.

Para encontrarmos a segunda relação fundamental, $x = b + 4d$, vamos começar aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo ABC da figura 4.1.2 à esquerda:

$$c^2 = a^2 + |b|^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow b^2 = c^2 - a^2$$

e para o triângulo ABD , também da figura 4.1.2 à esquerda, tem-se:

$$(c + 2d)^2 = x^2 + a^2 \Rightarrow x^2 = (c^2 - a^2) + 4cd + 4d^2$$

substituindo $c^2 - a^2 = b^2$:

$$x^2 = b^2 + 4cd + 4d^2 \Rightarrow x^2 = b^2 + 4d(c + d)$$

substituindo, $c + d = x - |b|$:

$$x^2 = b^2 + 4d(x - |b|) \Rightarrow x^2 = b^2 + 4d(x + b)$$

Daí concluímos que:

$$x^2 - 4dx = b^2 + 4db$$

completando os quadrados, vem que:

$$(x - 2d)^2 - 4d^2 = (b + 2d)^2 - 4d^2$$

logo: $(x - 2d)^2 = (b + 2d)^2$. Ficamos com: $x - 2d = b + 2d$ e assim chegamos à segunda relação fundamental: $x = b + 4d$

Para o triângulo ACD à direita da Figura 4.1.2, temos que: $c + d = b - |x|$. Como $x < 0$, então $|x| = -x$. Substituindo, vem que: $c + d = x + b$. E assim temos a primeira relação fundamental mais uma vez.

Para encontrarmos a segunda relação fundamental, $x = b + 4d$, do mesmo modo, vamos aplicar o teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo ABC da figura 4.1.2 à direita:

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c^2 - a^2 = b^2$$

Para o triângulo ABD , também da figura 4.1.2 à direita, temos:

$$(c + 2d)^2 = |x|^2 + a^2 \Rightarrow x^2 = (c^2 - a^2) + 4d(c + d)$$

Substituindo $c^2 - a^2 = b^2$, vem que:

$$x^2 = b^2 + 4d(c + d)$$

Como $c + d = b - |x|$, então: $x^2 = b^2 + 4d(b + x) \Rightarrow x^2 - 4dx = b^2 + 4bd$

Completando os quadrados, obtemos: $(x - 2d)^2 - 4d^2 = (b + 2d)^2 - 4d^2$

Logo: $(x - 2d)^2 = (b + 2d)^2$

Ficamos com: $x - 2d = b + 2d$, e mais uma vez concluímos que: $x = b + 4d$.

Assim, para ambos os casos de triângulos aritméticos, acutângulos ou obtusângulos, temos que: $x = b + 4d$ e $c + d = x + b$

Dando sequência ao nosso objetivo, mostraremos a seguir que a, b e x , Figuras 4.1.1 e 4.1.2 são inteiros. Para isso usaremos os dois resultados fundamentais acima:

Em $x = b + 4d$, somando b a ambos os membros da equação, vamos obter:

$$x + b = 2b + 4d$$

como $x + b = c + d$, ficamos com:

$$c + d = 2b + 4d \Rightarrow 2b = c - 3d.$$

Note que $2b \in \mathbb{Z}$, pois $c - 3d \in \mathbb{Z}$.

Sendo $S = \frac{a(c+d)}{2}$ a área dos triângulos aritméticos das Figuras 4.1.1 e 4.1.2 concluímos que $a \in \mathbb{Q}$, ou seja, a é um número racional, pois $S \in \mathbb{Z}$ e $(c + d) \in \mathbb{Z}$.

Para qualquer um dos triângulos ABC das Figuras 4.1.1 e 4.1.2, temos que: $c^2 = a^2 + b^2$. Multiplicando por 4 ambos os membros desta equação, ficamos com:

$$4c^2 = 4a^2 + 4b^2$$

daí, concluímos que:

$$(2c)^2 = (2a)^2 + (2b)^2 \Rightarrow (2a)^2 = (2c)^2 - (2b)^2 \quad (5)$$

Como $2b$ e $2c \in \mathbb{Z}$, então, $(2a)^2 \in \mathbb{Z}$. Mas $a \in \mathbb{Q}$, então $2a \in \mathbb{Q}$. De (5), temos que:

$$2a = \pm \sqrt{(2c)^2 - (2b)^2}$$

Como $(2c)^2 - (2b)^2 \in \mathbb{Z}$, então, $\sqrt{(2c)^2 - (2b)^2}$ pertence aos inteiros, ou pertence aos irracionais. Mas, $2a \in \mathbb{Q}$, portanto, $\sqrt{(2c)^2 - (2b)^2} = 2a \in \mathbb{Z}$. Assim, temos que, $2a$ e $2b \in \mathbb{Z}$.

Fazendo $2a = a_1$, $2b = b_1$, $2c = c_1$ e substituindo em (5), ficamos com: $c_1^2 = a_1^2 + b_1^2$. Note que $c_1^2 = 4c^2$. Logo, $a_1^2 + b_1^2 = 4c^2$. Como $c \in \mathbb{Z}$, então $c^2 \in \mathbb{Z}$. Seja $c^2 = q$, $q \in \mathbb{Z}$, então: $a_1^2 + b_1^2 = 4q$. Isso nos leva a concluir que a_1 e b_1 possuem a mesma paridade, pois a soma dos seus quadrados é um número par, múltiplo de 4.

Mas, em quais condições a soma dos quadrados de dois números de mesma paridade resulta em um número múltiplo de quatro? Veremos que isto só é possível

se ambos forem pares. Para mostrar isto, vamos usar os inteiros nas formas: $4n, 4n + 1, 4n + 2, 4n + 3, n \in \mathbb{Z}$.

Para os números pares, os números da forma $4n$ e $4n + 2$, temos as seguintes possibilidades para a_1 e b_1 : $a_1 = 4k_1$ ou $a_1 = 4k_1 + 2$ e $b_1 = 4k_2$ ou $b_1 = 4k_2 + 2$, com $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$

Combinando todas as possibilidades para $a_1^2 + b_1^2$, com $k \in \mathbb{Z}$, temos:

$$(4k_1)^2 + (4k_2)^2 = 4(4k_1^2 + 4k_2^2) = 4k$$

$$(4k_1)^2 + (4k_2 + 2)^2 = 4(4k_1^2 + 4k_2^2 + 4k_2 + 1) = 4k$$

$$(4k_1 + 2)^2 + (4k_2)^2 = 4(4k_1^2 + 4k_1 + 4k_2^2 + 1) = 4k$$

$$(4k_1 + 2)^2 + (4k_2 + 2)^2 = 4(4k_1^2 + 4k_1 + 4k_2^2 + 4k_2 + 2) = 4k$$

Note que para todas as possibilidades os resultados são sempre múltiplos de 4, isto é, a soma dos quadrados de dois números pares é sempre um múltiplo de 4.

Para os números ímpares, os números da forma $4n + 1$ e $4n + 3$, temos as seguintes possibilidades para a_1 e b_1 :

$$a_1 = 4k_1 \pm 1 \text{ e } b_1 = 4k_2 \pm 1, \text{ com } k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$$

Combinando todas as possibilidades para $a_1^2 + b_1^2$, com $k \in \mathbb{Z}$, temos:

$$(4k_1 \pm 1)^2 + (4k_2 \pm 1)^2 = 4(4k_1^2 + 4k_1 + 4k_2^2 + 4k_2) + 2 = 4k + 2$$

Note que a soma dos quadrados de dois números ímpares, embora sendo um número par, não é um número múltiplo de 4.

Logo, a soma $a_1^2 + b_1^2 = 4q$ só é possível se a_1 e b_1 forem ambos números pares.

Conclusão:

$$a_1 = 2a \Rightarrow a = \frac{a_1}{2}. \text{ Como } a_1 \text{ é par, } a \in \mathbb{Z}$$

$$b_1 = 2b \Rightarrow b = \frac{b_1}{2}. \text{ Como } b_1 \text{ é par, } b \in \mathbb{Z}$$

Portanto, a e b são inteiros. Finalmente, como $x = b + 4d$, com $b, d \in \mathbb{Z}$, então, x também é um número inteiro. Logo, a, b e x pertencem aos inteiros. Assim sendo, são pitagóricos conjugados os triângulos ABC e ABD , das Figuras 4.1.1 e 4.1.2

Buscaremos a seguir as relações algébricas entre os ternos aritméticos e os ternos pitagóricos conjugados. Para isso vamos partir mais uma vez dos dois resultados fundamentais encontrados:

$$x = b + 4d \quad \text{e} \quad c + d = x + b$$

Comparando ambos os resultados, temos:

$$b + 4d = c + d - b \Rightarrow c - 2b = 3d$$

donde tiramos duas conclusões importantes, a saber:

$$d = \frac{c-2b}{3} \quad \text{e} \quad b = \frac{c-3d}{2}$$

Substituindo $d = \frac{c-2b}{3}$ em $x = b + 4d$, vem que: $x = \frac{4c-5b}{3}$

Assim, para os triângulos pitagóricos ABD e ABC das Figuras 4.1.1 e 4.1.2, de lados $a, x, c + 2d$, com $x \neq 0$ e a, b, c , com $b \neq 0$, respectivamente, temos os ternos pitagóricos conjugados:

$$A = (a, b, c) = \left(a, \frac{c-3d}{2}, c\right) \quad \text{e} \quad A^c = (a, x, c + 2d) = \left(a, \frac{4c-5b}{3}, c + 2d\right)$$

relacionados ao o terno aritmético $(c, c + d, c + 2d)$.

Note que nos triângulos aritméticos obtusos um dos valores centrais dos ternos pitagóricos é negativo. Se $d > 0$, temos que $b < 0$, se $d < 0$, temos $x < 0$. Isto nos leva a concluir que em um triângulo aritmético obtusângulo os valores centrais dos ternos pitagóricos têm sinais algébricos diferentes.

Um resultado importante que precisamos mostrar e que nos será útil para a próxima seção, é que os lados sobrepostos dos triângulos pitagóricos conjugados, o cateto a , é múltiplo de 3.

De fato, em $A = \left(a, \frac{c-3d}{2}, c\right)$, aplicando Pitágoras, temos: $a^2 + \left(\frac{c-3d}{2}\right)^2 = c^2$, que desenvolvendo encontraremos: $4a^2 = 3(c^2 + 2cd - 3d^2)$. Segue daí que podemos fazer: $4a^2 = 3(c^2 + 2cd + d^2 - 4d^2) = 3[(c + d)^2 - 4d^2]$.

Das relações fundamentais, $x = b + 4d$ e $c + d = x + b$, temos que:

$$c + d = b + 4d + b \Rightarrow c + d = 2b + 4d$$

Substituindo, ficamos com: $4a^2 = 3[(c + d)^2 - 4d^2] = 3[(2b + 4d)^2 - 4d^2]$. Daí concluímos que: $4a^2 = 12[b^2 + 4bd + 3d^2]$.

Como $b, d \in \mathbb{Z}$, seja $k = [b^2 + 4bd + 3d^2]$, $k \in \mathbb{Z}$, logo: $4a^2 = 12k$. Portanto: $a^2 = 3k$, isto é, a^2 é múltiplo de 3. Sendo $a \in \mathbb{Z}$, então, como já vimos na página 22 da seção 3.1, a é múltiplo de 3.

Em resumo, dado um terno aritmético $(c, c + d, c + 2d)$ é possível encontrarmos seus pitagóricos conjugados, $A = (a, b, c)$ e $A^c = (a, x, c + 2d)$, a partir dos valores de c e de d , onde $b = \frac{c-3d}{2}$ e $x = \frac{4c-5b}{3}$, como veremos na próxima seção.

4.2 GERANDO TERNOS PITAGÓRICOS A PARTIR DE TERNOS ARITMÉTICOS

Usando os resultados da seção 4.1 é possível encontrar os ternos pitagóricos conjugados A e A^c relacionados a um terno aritmético $(c, c + d, c + 2d)$ qualquer, a partir dos valores de c e de d . Veremos isso nos dois exemplos a seguir:

Exemplo 4.2.1: Encontrar os ternos pitagóricos conjugados, A e A^c , associados ao terno aritmético $(15, 26, 37)$

Note que é um (11)-*aritmético*, ou seja, um triângulo aritmético de lados em progressão aritmética de razão 11. Temos então: $d = 11$, $c = 15$, $c + d = 26$ e $c + 2d = 37$. Usando os valores de d e de c , encontraremos os valores centrais b e x dos pitagóricos conjugados, como segue:

$$b = \frac{c-3d}{2}, \text{ então: } b = \frac{15-3 \times 11}{2} = \frac{15-33}{2} = -9$$

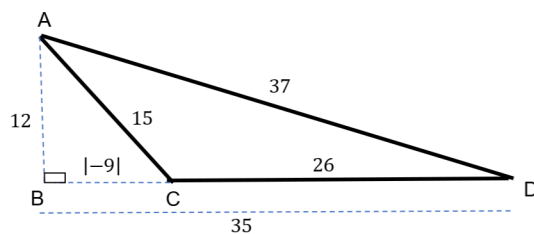
$$x = \frac{4c-5b}{3}, \text{ logo: } x = \frac{4 \times 15 - 5 \times (-9)}{3} = \frac{60+45}{3} = 35.$$

Ficamos, portanto, com: $A = (a, -9, 15)$ e $A^c = (a, 35, 37)$

Para encontrarmos a usaremos o teorema de Pitágoras em A ou A^c . Usando Pitágoras em A , vem que: $c^2 = a^2 + b^2$, substituindo $c = 15$ e $b = -9$, temos: $a^2 = 15^2 - (-9)^2 = 144 \Rightarrow a = 12$. Portanto, o (11)-*aritmético* de lados 15, 26 e 37 está associado aos ternos pitagóricos conjugados $A = (12, -9, 15)$ e $A^c = (12, 35, 37)$

Note que os termos centrais dos pares pitagóricos têm sinais algébricos contrários, $b < 0$ e $x > 0$. Portanto, o triângulo (11)-*aritmético* de lados 15, 26 e 37 é obtuso. Veja figura 4.2.1:

Figura 4.2.1: triângulo (11)-aritmético



Fonte: elaborada pelo autor

Exemplo 4.2.2: Encontrar os ternos pitagóricos conjugados, A e A^c , associados ao terno aritmético (145, 182, 291)

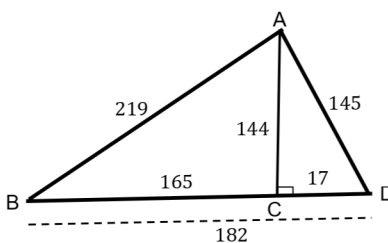
Temos um (37)-aritmético com $c = 145$; $c + d = 182$; $c + 2d = 219$ e $d = 37$. Para os valores centrais dos ternos pitagóricos conjugados, vamos encontrar:

$$b = \frac{c - 3d}{2} = \frac{145 - 3 \times 37}{2} = \frac{145 - 111}{2} = 17$$

$$x = \frac{4c - 5b}{3} = \frac{4 \times 145 - 5 \times 17}{3} = \frac{580 - 85}{3} = 165$$

Temos, então: $A = (a, 17, 145)$ e $A^c = (a, 165, 219)$. Usando o teorema de Pitágoras em $A = (a, 17, 145)$, encontramos: $145^2 = a^2 + (17)^2 \Rightarrow a = 144$. Como os valores centrais dos pitagóricos conjugados são positivos, temos um triângulo aritmético acutângulo.

Figura 4.2.2: triângulo (37)-aritmético acutângulo



Fonte: elaborada pelo autor

4.3 GERANDO TERNOS ARITMÉTICOS A PARTIR DE TERNOS PITAGÓRICOS PRIMITIVOS

Na seção anterior, vimos que a partir de um terno aritmético $(c, c + d, c + 2d)$ podemos gerar os seus pitagóricos conjugados. Nesta seção veremos em quais condições um terno pitagórico primitivo gera triângulos aritméticos e o seu pitagórico conjugado.

Se um terno pitagórico primitivo (a, b, c) , com $b \neq 0$, tal que $a^2 + b^2 = c^2$, gerar um terno aritmético $(c, c + d, c + 2d)$, diremos que ele é um (d) -*aritmético* e atende a duas condições a saber: a é múltiplo de 3 e $\frac{c-2b}{3} = d \in \mathbb{Z}$, isto é, a e $c - 2b$ são múltiplos de 3. Vejamos os exemplos a seguir.

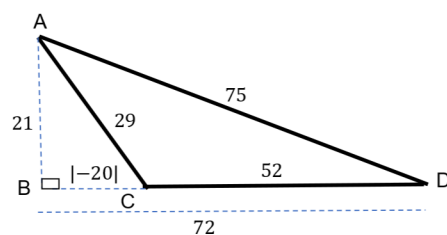
Exemplo 4.3.1: Verificar se o terno pitagórico primitivo $(21, 20, 29)$ é um (d) -*aritmético*.

Note que temos a primeira condição atendida, ou seja, 21 é múltiplo de 3, porém, para a segunda condição, temos que: $\frac{c-2b}{3} = \frac{29-2 \times 20}{3} = \frac{-11}{3} = d \notin \mathbb{Z}$. Portanto, o terno pitagórico primitivo $(21, 20, 29)$ não é um (d) -*aritmético*. Entretanto, podemos notar que para $b < 0$, isto é, o terno pitagórico primitivo $(21, -20, 29)$ é aritmético e gera um terno aritmético obtuso, pois tem o termo central do terno pitagórico negativo. De fato, com $\frac{c-2b}{3} = \frac{29-2 \times (-20)}{3} = \frac{69}{3} = 23 = d \in \mathbb{Z}$ e $a = 21$, múltiplo de 3, temos que o terno pitagórico primitivo $(21, -20, 29)$ gera o (23) -*aritmético* $(c, c + d, c + 2d) = (29, 29 + 23, 29 + 2 \times 23) = (29, 52, 75)$. Para o seu pitagórico conjugado, temos: $(a, x, c + 2d) = (21, x, 75)$, onde $x = \frac{4c-5b}{3}$. Com $c = 29$ e $b = -20$, encontramos:

$$x = \frac{4c - 5b}{3} = \frac{4 \times 29 - 5 \times (-20)}{3} = \frac{116 + 100}{3} = 72$$

Assim, para $A = (21, -20, 29)$ e $A^c = (21, 72, 75)$, temos o (23) -*aritmético* obtuso da Figura 4.3.1:

Figura 4.3.1: triângulo (23) -*aritmético* obtusângulo



Fonte: elaborada pelo autor

Para entender melhor o que foi feito no exemplo 4.3.1, vamos ao Teorema 4.3.1:

Teorema 4.3.1: Se um terno pitagórico primitivo (a, b, c) , com $b \neq 0$ e a múltiplo de 3, tal que $a^2 + b^2 = c^2$, é um (d) -aritmético, então, ou $b > 0$ e $d = \frac{c-2b}{3} \in \mathbb{Z}$, ou $b < 0$ e $d = \frac{c+2b}{3} \in \mathbb{Z}$.

De fato, sendo (a, b, c) primitivo, então a, b e c são relativamente primos. Como 3 divide a , 3 não divide b , nem divide c . Supondo que 3 não divida $(c - 2b)$ e fazendo o produto $(c - 2b)(c + 2b)$, temos que: $(c - 2b)(c + 2b) = c^2 - 4b^2$. Como $c^2 = a^2 + b^2$, substituindo, vem que: $(c - 2b)(c + 2b) = a^2 + b^2 - 4b^2 = a^2 - 3b^2$. Como a é múltiplo de 3, então, $a^2 - 3b^2$ é múltiplo de 3, ou seja, 3 divide um dos fatores do produto. Mas, por hipótese, 3 não divide $(c - 2b)$, logo 3 divide $(c + 2b)$. Analogamente se supuséssemos que 3 não dividisse $(c + 2b)$. ■

No Capítulo 6 veremos que todo terno pitagórico primitivo (a, b, c) , com $a^2 + b^2 = c^2$, tem um dos seus valores, a ou b , múltiplo de 3, por isto e pelo que foi exposto acima, dado um terno pitagórico primitivo não aritmético, podemos adaptá-lo para que se torne um (d) -aritmético. Senão vejamos:

Exemplo 4.3.2: Adaptar o terno pitagórico primitivo $(8, 15, 17)$ para que seja um (d) -aritmético.

Temos que para $a = 8$ a primeira condição não é atendida, pois 3 não divide 8. Isto é o suficiente para que um terno pitagórico primitivo não gere um triângulo aritmético. Mas, permutando os dois primeiros valores, escrevendo $(15, 8, 17)$, o terno continua pitagórico e primitivo, e temos então a primeira condição atendida, 3 divide 15, porém para $b = 8$ e $c = 17$ não temos a segunda condição atendida, pois:

$$d = \frac{c - 2b}{3} = \frac{17 - 2 \times 8}{3} = \frac{17 - 16}{3} = \frac{1}{3} \notin \mathbb{Z}$$

Entretanto, podemos escrever o termo central com valor algébrico negativo e assim o terno pitagórico primitivo $(15, -8, 17)$ gera um (11) -aritmético obtuso. De fato, para $c = 17$ e $b = -8$, temos:

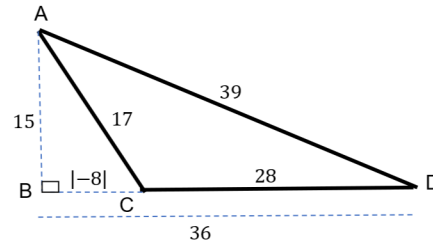
$$d = \frac{17 - 2 \times (-8)}{3} = \frac{17 + 16}{3} = \frac{33}{3} = 11 \in \mathbb{Z}$$

Para o seu conjugado pitagórico, temos o termo central dado por:

$$x = \frac{4c - 5b}{3} = \frac{4 \times 17 - 5 \times (-8)}{3} = \frac{68 + 40}{3} = 36$$

Assim, temos os conjugados pitagóricos $A = (15, -8, 17)$ e $A^c = (15, 36, 39)$, e o (11)-*aritmético* de lados 17, 28 e 39 da figura 4.3.2:

Figura 4.3.2: triângulo (11)-*aritmético* obtusângulo



Fonte: elaborada pelo autor

Exemplo 4.3.3: Consideremos agora o terno pitagórico primitivo (16, 63, 65). Vamos analisá-lo e, se for o caso, adaptá-lo para ser um (d)-*aritmético*.

Como 3 não divide 16, o terno pitagórico primitivo (16, 63, 65) não é aritmético, mas permutando os dois primeiros termos ficamos com (63, 16, 65). Note que 3 divide 63 e para $c = 65$ e $b = 16$ temos que:

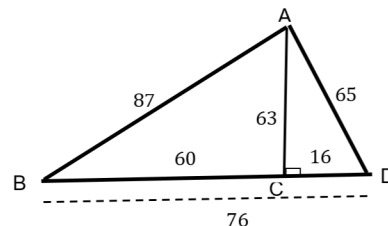
$$d = \frac{c - 2b}{3} = \frac{65 - 2 \times 16}{3} = \frac{65 - 32}{3} = \frac{33}{3} = 11$$

Portanto, o terno pitagórico primitivo (63, 16, 65) é um (11)-*aritmético*. Ainda não podemos afirmar se acutângulo ou obtusângulo. Para isto vamos calcular o termo central do seu pitagórico conjugado, com $c = 65$ e $b = 16$:

$$x = \frac{4c - 5b}{3} = \frac{4 \times 65 - 5 \times 16}{3} = \frac{260 - 80}{3} = 60$$

Como os termos centrais dos conjugados pitagóricos têm o mesmo sinal algébrico, o triângulo (11)-*aritmético* de lados 65, 76 e 87 é acutângulo. Ver Figura 4.3.3:

Figura 4.3.3: triângulo (11)-*aritmético* acutângulo



Fonte: elaborada pelo autor

4.4 GERANDO TERNOS ARITMÉTICOS A PARTIR DE TERNOS PITAGÓRICOS NÃO PRIMITIVOS

Todo terno pitagórico não primitivo é da forma (ka, kb, kc) , onde $k \in \mathbf{N}$, $k \geq 2$, e a , b e c são primos entre si. Há dois casos a considerar com relação a não primitividade de um terno pitagórico, a saber: se k é múltiplo de 3 ou se k não é múltiplo de 3.

Para o primeiro caso, se k é múltiplo de 3, para cada um dos ternos pitagóricos não primitivos $(ka, \pm kb, kc)$, temos que:

$$kc - 2(\pm kb) = kc \pm 2kb = k(c \pm 2b) = 3d \Rightarrow d = \frac{k(c \pm 2b)}{3}$$

Como 3 divide k , então $d = \frac{k(c \pm 2b)}{3} \in \mathbb{Z}$.

Do mesmo modo, se permutarmos os dois primeiros valores do terno pitagórico, fazendo $(kb, \pm ka, kc)$, temos que:

$$kc - 2(\pm ka) = kc \pm 2ka = k(c \pm 2a) = 3d \Rightarrow d = \frac{k(c \pm 2a)}{3} \in \mathbb{Z}$$

Portanto, todos os ternos pitagóricos não primitivos que têm seus valores múltiplos de três são aritméticos. Veremos isto no exemplo a seguir.

Exemplo 4.4.1: Encontrar os ternos aritméticos gerados pelos ternos pitagóricos não primitivos $(24, \pm 45, 51)$ e $(45, \pm 24, 51)$.

Note que 24 e 45 são múltiplos de 3. Portanto, cada um dos ternos pitagóricos não primitivos acima está associado a um terno aritmético. Vejamos cada caso:

Para o terno pitagórico $(24, 45, 51)$, temos: $3d = 51 - 2 \cdot 45 = -39 \Rightarrow d = -13$. Com $c = 51$ e $d = -13$, temos o terno (-13) -*aritmético* $(51, 38, 25)$.

Para o terno pitagórico $(24, -45, 51)$, temos: $3d = 51 - 2 \cdot (-45) = 141 \Rightarrow d = 47$. Com $c = 51$, $d = 47$, temos o terno (47) -*aritmético* $(51, 98, 145)$.

Para o terno pitagórico $(45, 24, 51)$, temos: $3d = 51 - 2 \cdot 24 = 3 \Rightarrow d = 1$. Com $c = 51$ e $d = 1$, temos o terno (1) -*aritmético* $(51, 52, 53)$.

Para o terno $(45, -24, 51)$, temos: $3d = 51 - 2 \cdot (-24) = 99 \Rightarrow d = 33$. Com $c = 51$, $d = 33$, temos um (33) -*aritmético* $(51, 84, 117)$.

Os casos em que k não é múltiplo de 3 é análogo aos casos dos pitagóricos primitivos. Mostraremos isso no próximo exemplo.

Exemplo 4.4.2: Encontrar os ternos aritméticos gerados pelos ternos pitagóricos não primitivos $(20, \pm 48, 51)$ e $(48, \pm 20, 51)$.

Os ternos pitagóricos não primitivos $(20, 48, 52)$ e $(20, -48, 52)$ não são aritméticos. Note que a primeira condição não é atendida, pois 3 não divide 20.

Para o terno pitagórico não primitivo $(48, 20, 52)$, temos a primeira condição atendida, pois 3 divide 48. Aplicando a outra condição para $c = 52$ e $b = 20$, obtemos: $3d = c - 2b = 52 - 2 \cdot 20 = 52 - 40 = 12 \Rightarrow d = 4 \in \mathbb{Z}$, temos, portanto, um terno (4)-aritmético $(52, 56, 60)$

Para o terno pitagórico $(48, -20, 52)$, a condição $c - 2b = 3d, d \in \mathbb{Z}$ não é atendida, pois: $c - 2b = 52 - 2 \cdot (-20) = 52 + 40 = 92 = 3d \Rightarrow d \notin \mathbb{Z}$. Portanto, o terno pitagórico não primitivo $(48, -20, 52)$, não é aritmético.

Analogamente aos ternos pitagóricos primitivos, os ternos pitagóricos não primitivos $(kb, \pm ka, kc)$, $k \geq 2$, $k \neq 3n$, com $k, n \in \mathbb{N}$ gera apenas um terno aritmético.

4.5 – PROPRIEDADES DOS TERNOS PITAGÓRICOS CONJUGADOS

Nesta seção vamos mostrar algumas propriedades dos pitagóricos conjugados $A = (a, b, c)$, $b \neq 0$ e $A^c = (a, x, c + 2d)$, $x \neq 0$.

Propriedade 4.5.1: Se $A = (a, b, c)$ é um terno pitagórico primitivo com a e $c - 2b$ múltiplos de 3, então, o seu conjugado pitagórico, $A^c = (a, x, c + 2d) = \left(a, \frac{c-3d}{2}, \frac{5c-4b}{3}\right)$ tem todos os seus elementos múltiplos de 3.

De fato, sendo $A = (a, b, c)$, $b \neq 0$, um terno pitagórico, então $c^2 = a^2 + b^2$. Logo:

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow a^2 = (c - b)(c + b)$$

Como 3 divide a , então 9 divide a^2 , ou seja, 9 divide $(c - b)(c + b)$. Por outro lado, 3 divide $c - 2b$, mas não divide a soma $c - 2b + (c - b) = 2c - 3b$, pois 3 divide $3b$ e não divide $2c$, então, 3 não divide $c - b$, portanto, 9 divide $c + b$. Note que se 3 divide

$c - 2b$, então 9 divide $3c - 6b$, logo, se 9 divide $c + b$ e divide $3c - 6b$, então, 9 divide a soma $(c + b) + (3c - 6b) = 4c - 5b$, temos, então:

$$\frac{4c - 5b}{9} = \frac{\frac{4c - 5b}{3}}{3} = \frac{x}{3} \in \mathbb{Z}$$

Note que $4c - 5b + c + b = 5c - 4b$. Portanto, 9 também divide $5c - 4b$. Logo:

$$\frac{5c - 4b}{9} = \frac{\frac{5c - 4b}{3}}{3} = \frac{c + 2b}{3} \in \mathbb{Z}$$

Assim, se $A = (a, b, c)$ é pitagórico primitivo com a e $c - 2b$ múltiplos de 3, então, o seu conjugado pitagórico não é primitivo e pode ser escrito como:

$$A^c = \left(a, \frac{4c - 5b}{3}, \frac{5c - 4b}{3} \right) = 3 \left(\frac{a}{3}, \frac{4c - 5b}{9}, \frac{5c - 4b}{9} \right)$$

isto é, tem todos os seus elementos múltiplos de 3.

Propriedade 4.5.2: Se A e A^c são pitagóricos conjugados, então $A^{cc} = A$

Seja o terno pitagórico $A^c = \left(a, \frac{4c - 5b}{3}, \frac{5c - 4b}{3} \right) = (a', b', c')$, então o seu conjugado é $A^{cc} = \left(a', \frac{4c' - 5b'}{3}, \frac{5c' - 4b'}{3} \right)$. Temos, então: $a' = a$; $b' = \frac{4c - 5b}{3}$ e $c' = \frac{5c - 4b}{3}$. Logo:

$$\begin{aligned} \frac{4c' - 5b'}{3} &= \frac{4 \left(\frac{5c - 4b}{3} \right) - 5 \left(\frac{4c - 5b}{3} \right)}{3} = \frac{9b}{9} = b \\ \frac{5c' - 4b'}{3} &= \frac{5 \left(\frac{5c - 4b}{3} \right) - 4 \left(\frac{4c - 5b}{3} \right)}{3} = \frac{9c}{3} = c \end{aligned}$$

Portanto: $A^{cc} = \left(a', \frac{4c' - 5b'}{3}, \frac{5c' - 4b'}{3} \right) = (a, b, c) = A$

Propriedade 4.5.3: Se o terno pitagórico $A = (a, b, c)$ gera um (d) -aritmético, então o seu companheiro pitagórico, $A^c = \left(a, \frac{4c - 5b}{3}, \frac{5c - 4b}{3} \right)$, gera um $(-d)$ -aritmético.

De fato, supondo que o terno pitagórico $A = (a, b, c)$ gera um triângulo aritmético, então a é múltiplo de 3 e $d = \frac{c - 2b}{3}$, $d \in \mathbb{Z}$. Para o seu pitagórico conjugado, $A^c =$

$$\left(a, \frac{4c - 5b}{3}, \frac{5c - 4b}{3} \right), \text{ temos que: } d' = \frac{\frac{5c - 4b}{3} - 2 \left(\frac{4c - 5b}{3} \right)}{3} = \frac{-3c + 6b}{3} = \frac{-(c - 2b)}{3} = -d$$

5 REPRESENTAÇÕES PARAMÉTRICAS

Nosso objetivo neste capítulo é fornecer uma técnica simples que nos permita determinar todos os ternos aritméticos $(c, c + d, c + 2d)$ em função de números naturais primos entre si, m e n . Para este fim, inicialmente precisamos da representação paramétrica dos ternos pitagóricos.

5.1 - REPRESENTAÇÃO PARAMÉTRICA PARA OS TERNOS PITAGÓRICOS

Sem dúvida os antigos babilônios (1880 a.c.) foram os primeiros a trabalharem com os ternos pitagóricos, como demonstra a conhecida tabuleta Plimpton 322. Entre os séculos III e II a.c., no período Helenístico, já se usava as fórmulas $a = 2mn$, $b = n^2 - m^2$ e $c = n^2 + m^2$ para dois inteiros positivos n e m .

Brahmagupta, séculos depois, com o seu método inovador o Samasa-Bhāvanā, como já vimos no Capítulo 3, encontrou soluções inteiras para as equações da forma $a^2 - Nb^2 = c$, soluções do tipo:

$$(a_1, b_1, c_1) * (a_2, b_2, c_2) = (a_1a_2 \pm Nb_1b_2, a_1b_2 \pm a_2b_1, c_1c_2)$$

Beauregard e Suryanarayan (1996, p.170) afirmam que uma simples variação do Samasa-Bhāvanā poderia ter permitido Brahmagupta gerar muitos triângulos pitagóricos, uma vez que:

$$(a_1a_2 - b_1b_2)^2 + (a_1b_2 + a_2b_1)^2 = (c_1c_2)^2$$

Passaremos agora a desenvolver uma técnica simples de parametrização dos ternos pitagóricos que nos possibilitará encontrá-los. Para o nosso intento será útil o teorema a seguir:

Teorema 5.1.1 (Primitividade dos ternos pitagóricos): Se (a, b, c) é um terno pitagórico com a e b primos entre si, então, $\text{mdc}(a, c) = \text{mdc}(b, c) = 1$.

De fato, suponha que (a, b, c) seja um terno pitagórico com $\text{mdc}(a, b) = 1$ e que exista um número primo p , tal que p divida a^2 e p divida c^2 . Sendo assim, p divide $c^2 - a^2$. Como $b^2 = c^2 - a^2$, então, p divide b^2 e, por ser primo, p também divide b , o que é uma contradição, pois temos por hipótese que $\text{mdc}(a, b) = 1$. Logo, $\text{mdc}(a, c) = 1$. Analogamente prova-se para $\text{mdc}(b, c) = 1$.

Portanto, se $\text{mdc}(a, b) = 1$, então, $\text{mdc}(a, c) = \text{mdc}(b, c) = 1$ e (a, b, c) é um terno pitagórico primitivo. ■

Alguns ternos pitagóricos primitivos: $(3, 4, 5)$, $(5, 12, 13)$, $(7, 24, 25)$, $(8, 15, 17)$, $(9, 40, 41)$, $(11, 60, 61)$, $(12, 35, 37)$, $(13, 84, 85)$, $(16, 63, 65)$, $(20, 21, 29)$

É fato que para cada terno pitagórico primitivo (a, b, c) , o quociente $\frac{c+b}{a}$ nos fornece uma correspondência individual entre o conjunto de todos os triângulos pitagóricos primitivos e o conjunto de números racionais maiores do que 1. Beauregard e Suryanarayan (1996, p.170) nos apresentam o Teorema a seguir:

Teorema 5.1.2 (Representação paramétrica para os ternos pitagóricos): Para cada terno pitagórico primitivo (a, b, c) existem inteiros positivos, únicos, $n > m$, primos entre si, tais que

$$(a, b, c) = \begin{cases} (2mn, n^2 - m^2, n^2 + m^2), & \text{se } a \text{ for par} \\ \left(nm, \frac{n^2 - m^2}{2}, \frac{n^2 + m^2}{2}\right), & \text{se } a \text{ for ímpar} \end{cases}$$

onde n e m são dados por $\frac{(c+b)}{a} = \frac{n}{m}$, com $\frac{(c+b)}{a}$ irredutível.

De fato, temos, pelo teorema de Pitágoras, que, $c^2 = a^2 + b^2$, donde resulta que: $a^2 = c^2 - b^2 \Rightarrow a^2 = (c + b)(c - b)$. Dividindo ambos os membros por a^2 , ficamos com: $1 = \frac{(c+b)}{a} \times \frac{(c-b)}{a}$. Substituindo $\frac{(c+b)}{a} = \frac{n}{m}$, obtemos: $\frac{n}{m} \times \frac{(c-b)}{a} = 1$, donde concluímos que: $b = c - \frac{am}{n}$ (1)

De $\frac{(c+b)}{a} = \frac{n}{m}$, concluímos que: $b = \frac{an}{m} - c$. (2)

Comparando (1) e (2), temos: $\frac{an}{m} - c = c - \frac{am}{n}$. Disto resulta que $\frac{c}{a} = \frac{n^2 + m^2}{2nm}$, onde c e a são primos entre si.

Como n e m também são relativamente primos, ambos não podem ser pares. Há, portanto, duas possibilidades para ambos: ou são ímpares, ou possuem paridades distintas.

Considerando que n e m tenham paridades distintas, então $n^2 + m^2$ é ímpar e $2nm$ é par. Suponha que exista um número p , primo, $p \neq 2$, tal que p divida $n^2 + m^2$ e também

divida $2nm$. Como $n^2 + m^2 = (m + n)^2 - 2nm$, então p divide $(m + n)^2 - 2nm$, portanto p divide $(m + n)^2$. Como p é primo, então p também divide $(m + n)$, ou seja, p divide n e divide m , o que contradiz a primalidade relativa entre n e m . Note que se p não divide n e divide m , ou vice-versa, então p não divide $n + m$. Se p não divide n e não divide m , então p não divide $2nm$. Assim para p primo, $p \neq 2$, o quociente $\frac{n^2+m^2}{2nm}$ é irredutível. Se $p = 2$, p divide $n + m$, o que é uma contradição, pois n e m possuem paridades distintas. Portanto, o quociente $\frac{n^2+m^2}{2nm}$ é irredutível. Logo, para $\frac{c}{a} = \frac{n^2+m^2}{2nm}$, temos que:

$$c = n^2 + m^2 \quad \text{e} \quad a = 2nm$$

Substituindo $c = n^2 + m^2$ e $a = 2nm$ em $b = \frac{an}{m} - c$, vem que:

$$b = \frac{2nmn}{m} - (n^2 + m^2) = 2n^2 - (n^2 + m^2) = n^2 - m^2$$

Assim: $(a, b, c) = (2mn, n^2 - m^2, n^2 + m^2)$. Note que a é par.

Supondo n e m ímpares, então, $n^2 + m^2$ é par e nm é ímpar. Assim, o quociente $\frac{c}{a} = \frac{n^2+m^2}{2nm}$ é também irredutível. De fato, supondo que seja redutível, deve haver um número primo p , $p \neq 2$, que divida $2nm$ e que também divida $n^2 + m^2$, o que nos leva a concluir que p divide $(m + n)^2$, portanto p divide n e divide m , o que é contraditório pois, por hipótese, n e m são primos entre si. Note que se p não divide n ou m , então p não divide $n^2 + m^2$ ou p não divide $2nm$. Segue, então, que é irredutível o quociente

$$\frac{c}{a} = \frac{n^2+m^2}{2nm} = \frac{\frac{n^2+m^2}{2}}{nm}, \text{ e assim temos que: } c = \frac{n^2+m^2}{2} \quad \text{e} \quad a = nm.$$

Fazendo $c = \frac{n^2+m^2}{2}$ e $a = nm$ em $b = \frac{an}{m} - c$, obtemos:

$$b = \frac{nmn}{m} - \frac{n^2 + m^2}{2} = n^2 - \frac{n^2 + m^2}{2} = \frac{n^2 - m^2}{2}$$

Assim: $(a, b, c) = \left(nm, \frac{n^2-m^2}{2}, \frac{n^2+m^2}{2}\right)$. Note que a é ímpar

Portanto, para cada triângulo pitagórico primitivo de lados (a, b, c) , existem inteiros positivos, únicos, $n > m$, primos entre si, tais que: $(a, b, c) = (2mn, n^2 - m^2, n^2 + m^2)$,

se a for par, e $(a, b, c) = \left(nm, \frac{n^2-m^2}{2}, \frac{n^2+m^2}{2}\right)$, se a for ímpar. ■

Faremos a aplicação desta técnica de parametrização para os ternos pitagóricos em alguns exercícios no próximo capítulo. Usaremos o Teorema 5.1.2 para desenvolvermos a parametrização dos ternos aritméticos a seguir.

5.2 - REPRESENTAÇÃO PARAMÉTRICA PARA OS TERNOS ARITMÉTICOS

Teorema 5.2.1: Seja (n, m) o par paramétrico para o terno pitagórico primitivo (a, b, c) com a múltiplo de 3 e $d = \frac{c-2b}{3}$, $d \in \mathbb{Z}$, então:

$$d = \begin{cases} m^2 - \frac{n^2}{3}, & \text{se } a \text{ for par} \\ \frac{1}{2}\left(m^2 - \frac{n^2}{3}\right), & \text{se } a \text{ for ímpar} \end{cases}$$

De fato, supondo que a seja par, pelo Teorema 5.1.2, temos que: $(a, b, c) = (2nm, n^2 - m^2, n^2 + m^2)$. Substituindo $c = n^2 + m^2$ e $b = n^2 - m^2$ em $d = \frac{c-2b}{3}$, ficamos com: $d = \frac{n^2+m^2-2(n^2-m^2)}{3} = \frac{3m^2-n^2}{3} = m^2 - \frac{n^2}{3}$

Se a é ímpar, também pelo Teorema 5.1.2, temos que $(a, b, c) = \left(nm, \frac{n^2-m^2}{2}, \frac{n^2+m^2}{2}\right)$.

Substituindo $c = \frac{(n^2+m^2)}{2}$ e $b = \frac{(n^2-m^2)}{2}$, em $d = \frac{c-2b}{3}$, vem que:

$$d = \frac{\frac{(n^2+m^2)}{2} - \frac{2(n^2-m^2)}{2}}{3} = \frac{\frac{3m^2-n^2}{2}}{3} = \frac{1}{2}\left(m^2 - \frac{n^2}{3}\right)$$

$$\text{Logo: } d = \begin{cases} m^2 - \frac{n^2}{3}, & \text{se } a \text{ for par} \\ \frac{1}{2}\left(m^2 - \frac{n^2}{3}\right), & \text{se } a \text{ for ímpar} \end{cases}$$

Note que, se $d \in \mathbb{Z}$, n^2 deve ser múltiplo de 3. Como $n \in \mathbb{Z}$, então n também é múltiplo de 3.

Vimos que se n e m possuem paridades distintas, a é par e $c = n^2 + m^2$. Com $d = m^2 - \frac{n^2}{3}$, o nosso terno aritmético $(c, c+d, c+2d)$, em função dos parâmetros n e m , com n múltiplo de 3, n e m primos entre si, com paridades distintas, se escreve:

$$(c, c+d, c+2d) = \left(n^2 + m^2, \frac{2n^2}{3} + 2m^2, \frac{n^2}{3} + 3m^2\right)$$

Para o caso de a ser ímpar, temos n e m ímpares e $c = \frac{(n^2+m^2)}{2}$. Com $d = \frac{1}{2}\left(m^2 - \frac{n^2}{3}\right)$, o nosso terço aritmético em função dos parâmetros n e m , com n múltiplo de 3, n e m ímpares e primos entre si, se escreve:

$$(c, c + d, c + 2d) = \left(\frac{n^2+m^2}{2}, \frac{n^2}{3} + m^2, \frac{n^2+9m^2}{6}\right)$$

Assim, temos o terço aritmético $(c, c + d, c + 2d)$ escrito em função do par paramétrico (n, m) dado por:

$$(c, c + d, c + 2d) = \begin{cases} \left(n^2 + m^2, \frac{2n^2}{3} + 2m^2, \frac{n^2}{3} + 3m^2\right), & n \text{ e } m \text{ com paridades distintas, } n \text{ múltiplo de } 3 \\ \left(\frac{n^2 + m^2}{2}, \frac{n^2}{3} + m^2, \frac{n^2 + 9m^2}{6}\right), & n \text{ e } m \text{ ímpares, primos entre si, } n \text{ múltiplo de } 3 \end{cases}$$

Entretanto, além das condições impostas acima: n múltiplo de 3, n e m primos entre si, com n e m ímpares, ou com paridades distintas, deve-se levar em conta as desigualdades triangulares para os triângulos aritméticos de lados c , $c + d$ e $c + 2d$. Se $d > 0$, então, $c + 2d > c$. Aplicando a desigualdade triangular, temos que: $c + 2d < c + (c + d) \Rightarrow d < c$. Se $d < 0$, temos $c > c + 2d$. Aplicando a desigualdade triangular, temos que: $c < (c + d) + (c + 2d) \Rightarrow c > -3d$. Portanto, se $d > 0$, então $c > d$ e, se $d < 0$, $c > -3d$.

Vamos aplicar estes resultados nos exemplos a seguir, lembrando que n deve ser múltiplo de 3 e relativamente primo com m .

Exemplo 5.2.1: Encontrar o terço aritmético $(c, c + d, c + 2d)$ para $n = 9$ e $m = 5$. Note que ambos são ímpares, então, usaremos $c = \frac{(n^2+m^2)}{2}$ e $d = \frac{1}{2}\left(m^2 - \frac{n^2}{3}\right)$. Substituindo $n = 9$ e $m = 5$, ficamos com:

$$c = \frac{(n^2 + m^2)}{2} = \frac{9^2 + 5^2}{2} = \frac{81 + 25}{2} = \frac{106}{2} = 53$$

$$d = \frac{1}{2}\left(m^2 - \frac{n^2}{3}\right) = \frac{1}{2}\left(5^2 - \frac{9^2}{3}\right) = \frac{1}{2}(25 - 27) = -1$$

Note que para $d = -1 < 0$ e $c > -3d$, pois, $53 > -3(-1) = 3$, a desigualdade triangular é atendida.

Portanto, o nosso terço aritmético $(c, c + d, c + 2d) = (53, 52, 51)$ representa o 3º triângulo de Brahmagupta que, com seus lados consecutivos, é um triângulo acutângulo.

Exemplo 5.2.2: Tomemos agora n e m com paridades distintas, $n = 3$ e $m = 8$. Neste caso usaremos $c = n^2 + m^2$ e $d = m^2 - \frac{n^2}{3}$. Substituindo ambos os valores, vem que:

$$c = n^2 + m^2 = 3^2 + 8^2 = 9 + 64 = 73$$

$$d = m^2 - \frac{n^2}{3} = 8^2 - \frac{3^2}{3} = 64 - 3 = 61$$

Note que para $d = 61 > 0$ e $c > d$, pois, $73 > 61$, a desigualdade triangular é atendida. Portanto, $(c, c + d, c + 2d) = (73, 134, 195)$ é o nosso terno aritmético para $n = 3$ e $m = 8$.

Para decidirmos se o nosso terno aritmético representa os lados de um triângulo obtusângulo ou acutângulo, precisamos encontrar os valores centrais dos conjugados pitagóricos que nos são dados por: $b = \frac{c-3d}{2}$ e $x = \frac{4c-5b}{3}$.

Com $c = 73$ e $d = 61$, temos: $b = \frac{c-3d}{2} = \frac{73-3 \times 61}{2} = \frac{73-183}{2} = \frac{-110}{2} = -55$

Como $b < 0$ já podemos concluir que o (61)-*aritmético* de lados 73, 134 e 195 é obtusângulo.

A tabela 5.2.1 mostra alguns resultados para valores de n e m .

Tabela 5.2.1 - Triângulos aritméticos

m	n	d	c	$c + d$	$c + 2d$	$S(\text{área})$
2	3	1	13	14	15	84
7	3	23	29	52	75	546
1	6	-11	37	26	15	156
5	6	13	61	74	87	2220
1	9	-13	41	28	15	126
8	9	37	145	182	219	13104
11	12	73	265	338	411	44616
13	12	121	313	434	555	67704
5	15	-25	125	100	75	3750
19	15	143	293	436	579	62130
5	18	-83	349	266	183	23940
19	18	253	685	938	1191	320796

Fonte: produzida pelo autor

Exemplo 5.2.3: Encontrar o terno aritmético e seus conjugados pitagóricos para $n = 21$ e $m = 10$.

Note que n e m têm paridades distintas, então:

$$c = n^2 + m^2 = 21^2 + 10^2 = 441 + 100 = 541$$

$$d = m^2 - \frac{n^2}{3} = 10^2 - \frac{21^2}{3} = 100 - 147 = -47$$

Temos, então, um (-47) -aritmético dado por: $(c, c + d, c + 2d) = (541, 494, 447)$

Para os seus pitagóricos conjugados $A = (a, b, c)$ e $A^c = (a, x, c + 2d)$, temos:

$$b = \frac{c - 3d}{2} = \frac{541 - 3 \cdot (-47)}{2} = \frac{541 + 141}{2} = \frac{682}{2} = 341$$

$$x = \frac{4c - 5b}{3} = \frac{4 \cdot 541 - 5 \cdot 341}{3} = \frac{2164 - 1705}{3} = \frac{459}{3} = 153$$

Aplicando Pitágoras em $A = (a, 341, 541)$ encontramos:

$$a^2 + 341^2 = 541^2 \Rightarrow a^2 = 541^2 - 341^2 \Rightarrow a = 420$$

Portanto:

$$A = (a, b, c) = (420, 341, 541)$$

e

$$A^c = (a, x, c + 2d) = (420, 153, 447)$$

Como os termos centrais dos ternos pitagóricos conjugados têm o mesmo sinal algébrico, ambos são positivos, o (-47) -aritmético $(541, 494, 447)$ é acutângulo.

6 PROPRIEDADES RELATIVAS AOS LADOS DOS TRIÂNGULOS PITAGÓRICOS E APLICAÇÃO DO TEOREMA 5.1.2

Neste capítulo vamos fazer a aplicação do teorema 5.1.2. Antes, porém, vamos apresentar algumas propriedades relativas aos lados dos triângulos pitagóricos.

6.1 - PARIDADE DAS MEDIDAS DOS LADOS DOS TRIÂNGULOS PITAGÓRICOS

É fácil ver que se p é par, então p^2 também é par. Basta que tomemos $p = 2n$, $n \in \mathbf{N}$, e façamos: $p^2 = 4n^2 = 2(2n^2) = 2k$, $k \in \mathbf{N}$.

Do mesmo modo, se p é ímpar, então p^2 é ímpar, pois tomando $p = 2n + 1$, temos que: $p^2 = (2n + 1)^2 = 2(2n^2 + 2n) + 1 = 2k + 1$, $k \in \mathbf{N}$

Analisaremos a paridade dos lados de um triângulo pitagórico em 6 possíveis situações:

1ª situação: os três lados ímpares.

Situação impossível para um triângulo retângulo. A soma de dois números ímpares é um número par.

2ª situação: os catetos ímpares e a hipotenusa par:

Parece-nos uma situação óbvia, mas não caracteriza um triângulo pitagórico. Senão vejamos:

Sejam os catetos ímpares representados por $2k_1 + 1$ e $2k_2 + 1$, com $k_1, k_2 \in \mathbf{N}$. Aplicando o teorema de Pitágoras, vem que:

$$(2k_1 + 1)^2 + (2k_2 + 1)^2 = 4(k_1^2 + k_2^2 + k_1 + k_2) + 2 = 4q + 2, q \in \mathbf{N}$$

O número $4q + 2$, $q \in \mathbf{N}$, é par, mas não é um quadrado perfeito. Note que escrevendo os inteiros nas formas: $4n, 4n + 1, 4n + 2, 4n + 3$, $n \in \mathbb{Z}$, e elevando cada uma das formas ao quadrado, para $q \in \mathbb{Z}$, temos:

$$(4n)^2 = 16n^2 = 4q$$

$$(4n + 1)^2 = 4(4n^2 + 2n) + 1 = 4q + 1$$

$$(4n + 2)^2 = 4(4n^2 + 4n + 1) = 4q$$

$$(4n + 3)^2 = 4(4n^2 + 6n + 2) + 1 = 4q + 1$$

Veja que os quadrados perfeitos são da forma $4q$ ou $4q + 1$, ou seja, se for par é múltiplo de 4, se for ímpar é um número consecutivo a um múltiplo de 4. Portanto, não há um triângulo pitagórico de catetos ímpares e hipotenusa par.

3ª situação: os catetos com paridades distintas e a hipotenusa ímpar

Quanto a paridade dos lados de um triângulo pitagórico, esta é a situação correta. Vamos representar o cateto ímpar por $2k_1 + 1$ e o cateto par por $2k_2$, com $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$. Aplicando o teorema de Pitágoras, ficamos com:

$$(2k_1 + 1)^2 + (2k_2)^2 = 4(k_1^2 + k_2^2 + k_1) + 1 = 4q + 1, q \in \mathbb{N}$$

Note que o quadrado da hipotenusa, $4q + 1$, é um quadrado perfeito ímpar. Portanto, esta é a paridade correta para os lados dos triângulos pitagóricos: a hipotenusa ímpar e os catetos com paridades distintas.

4ª situação: os catetos pares e a hipotenusa ímpar

Situação impossível para um triângulo retângulo. É uma contradição óbvia ao teorema de Pitágoras, pois a soma dos quadrados de dois números pares é um número par, jamais um número ímpar.

5ª situação: a hipotenusa par e catetos com paridades distintas

Claramente é uma situação contraditória, pois, a soma de um número par com o um número ímpar é um número ímpar. Jamais teríamos uma hipotenusa par.

6ª situação: os três lados pares

Neste caso, simplificando as medidas dos lados do triângulo, vamos recair em uma das 5 situações anteriores. Um triângulo retângulo de catetos e hipotenusa pares, só será pitagórico se a simplificação das medidas dos seus respectivos lados recair na situação 3 acima.

Portanto, para que um triângulo retângulo seja pitagórico, quanto a paridade das medidas dos seus lados, é necessário que a hipotenusa seja ímpar e os seus catetos tenham paridades distintas.

6.2 - DIVISIBILIDADE DAS MEDIDAS DOS LADOS DOS TRIÂNGULOS PITAGÓRICOS PRIMITIVOS

As proposições a seguir caracterizam os lados de um triângulo pitagórico primitivo quanto à divisibilidade

Proposição 6.2.1: *Todo triângulo pitagórico primitivo tem o cateto par divisível por 4:*

De fato, escrevendo o cateto ímpar como $2k_1 + 1$ e a hipotenusa, que também é ímpar, como $2k_2 + 1$, $k_1, k_2 \in \mathbf{N}$, temos que:

$$(2k_1 + 1)^2 + a^2 = (2k_2 + 1)^2 \Rightarrow a^2 = (2k_2 + 1)^2 - (2k_1 + 1)^2$$

Donde concluímos que: $a^2 = 4(k_2^2 + k_2 - k_1^2 - k_1) = 4k, k \in \mathbf{N}$

Note que $2k_2 + 1$, a hipotenusa, é maior do que $2k_1 + 1$, o cateto ímpar, ou seja, $k_2 > k_1$, portanto $k \in \mathbf{N}$

Note, também, que $4k$ é um quadrado perfeito par, logo, a é um número natural. Vamos mostrar que a é divisível por 4.

Observe que k_2^2 e k_2 têm a mesma paridade, então $k_2^2 + k_2$ é par. Analogamente para k_1^2 e k_1 , ou seja, $-k_1^2 - k_1$ é também par. Logo $(k_2^2 + k_2 - k_1^2 - k_1) = k$ é um número par e pode ser escrito como $(k_2^2 + k_2 - k_1^2 - k_1) = k = 2n$, com $n \in \mathbf{N}, n > 0$. Assim: $a^2 = 4(k_2^2 + k_2 - k_1^2 - k_1) = 4k = 4(2n) \Rightarrow a = \pm 2\sqrt{2n}$. Como $a > 0$, ficamos com $a = 2\sqrt{2n}$. Sendo a um número natural, então, $\sqrt{2n} \in \mathbf{N}$. Note que $\sqrt{2n}$ é par, então, podemos fazer $\sqrt{2n} = 2p, p \in \mathbf{N}, p > 0$. Daí, segue que: $a = 2\sqrt{2n} = 2 \cdot 2p = 4p$, portanto, a é divisível por 4.

Proposição 6.2.2: *Todo triângulo pitagórico primitivo tem um dos seus catetos divisível por 3*

De fato, supondo que nenhum dos catetos de um triângulo pitagórico primitivo seja múltiplo de 3, vamos escrevê-los nas formas $3k + 1$ e $3k + 2$, $k \in \mathbf{N}$. Observe que a forma $3k + 2$ pode ser substituída por $3k - 1$.

Escrevendo os catetos nas formas $3k_1 \pm 1$ e $3k_2 \pm 1$, com $k_1, k_2 \in \mathbf{N}$ e aplicando a soma dos quadrados dos catetos, vem que:

$$(3k_1 \pm 1)^2 + (3k_2 \pm 1)^2 = 3(3k_1^2 \pm 2k_1 + 3k_2^2 \pm 2k_2) + 2 = 3q + 2, q \in \mathbf{N}.$$

Note que $3q + 2, q \in \mathbf{N}$, não é a forma de um quadrado perfeito, pois elevando ao quadrado os inteiros escritos nas formas $3n, 3n + 1$ e $3n + 2$, com $n \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbf{N}$, temos que:

$$(3n)^2 = 9n^2 = 3(3n^2) = 3q$$

$$(3n + 1)^2 = 3(3n^2 + 2n) + 1 = 3q + 1$$

$$(3n + 2)^2 = 3(3n^2 + 4n + 1) + 1 = 3q + 1$$

Veja que os quadrados perfeitos dos números nas formas $3n, 3n + 1$ e $3n + 2$, com $n \in \mathbb{Z}$, não têm resto 2. Logo, $3q + 2$ não é um quadrado perfeito.

Portanto, não há possibilidade para um triângulo ser pitagórico e primitivo se um dos seus catetos não for divisível por 3.

Proposição 6.2.3: *Todo triângulo pitagórico primitivo tem um dos seus lados divisível por 5*

De fato, como se sabe, todo número inteiro pode ser escrito em uma, e somente uma, das seguintes formas: $5n, 5n + 1, 5n + 2, 5n + 3$, ou $5n + 4$, $n \in \mathbb{Z}$. Elevando ao quadrado cada uma das formas, temos:

$$(5n)^2 = 5k, k \in \mathbb{Z}$$

$$(5n + 1)^2 = 5k + 1, k \in \mathbb{Z}$$

$$(5n + 2)^2 = 5k + 4, k \in \mathbb{Z}$$

$$(5n + 3)^2 = 5k + 4, k \in \mathbb{Z}$$

$$(5n + 4)^2 = 5k + 1, k \in \mathbb{Z}$$

Assim, somente são quadrados perfeitos os números das formas $5k, 5k + 1$ ou $5k + 4, k \in \mathbf{N}$.

Temos as seguintes possibilidades para catetos não múltiplos de 5: $a = 5k_1 \pm 1$, ou $a = 5k_1 \pm 2$ e $b = 5k_2 \pm 1$, ou $b = 5k_2 \pm 2$, com $k_1, k_2 \in \mathbf{N}$. Combinando as possibilidades e aplicando pitágoras para:

$a = 5k_1 \pm 1$ e $b = 5k_2 \pm 2$, temos:

$$(5k_1 \pm 1)^2 + (5k_2 \pm 2)^2 = 5(5k_1^2 \pm 2k_1 + 5k_2^2 \pm 4k_2 + 1) = 5k, k \in \mathbf{N}.$$

$a = 5k_1 \pm 1$ e $b = 5k_2 \pm 1$, temos:

$$(5k_1 \pm 1)^2 + (5k_2 \pm 1)^2 = 5(5k_1^2 \pm 2k_1 + 5k_2^2 \pm 2k_2) + 2 = 5k + 2, k \in \mathbf{N}.$$

$a = 5k_1 \pm 2$ e $b = 5k_2 \pm 2$, temos:

$$(5k_1 \pm 2)^2 + (5k_2 \pm 2)^2 = 5(5k_1^2 \pm 4k_1 + 5k_2^2 \pm 4k_2 + 1) + 3 = 5k + 3, k \in \mathbf{N}.$$

Note que $5k$ é o único resultado para a soma dos quadrados dos catetos que é um quadrado perfeito. Como $5k, k \in \mathbf{N}$, é múltiplo de 5, então podemos concluir que só é possível um triângulo pitagórico de catetos não múltiplos de 5, se a hipotenusa for múltipla de 5.

Analisemos agora o caso em que um dos catetos e a hipotenusa não são múltiplos de 5. Temos as seguintes possibilidades para ambos: $a = 5k_1 \pm 1$, ou $a = 5k_1 \pm 2$ e $c = 5k_2 \pm 1$, ou $c = 5k_2 \pm 2$, com $k_1, k_2 \in \mathbf{N}$. Aplicando Pitágoras para:

$a = 5k_1 \pm 1$ e $c = 5k_2 \pm 1$, temos:

$$b^2 = (5k_2 \pm 1)^2 - (5k_1 \pm 1)^2 = 5(5k_2^2 \pm 2k_2 - 5k_1^2 \pm 2k_1) = 5k, k \in \mathbf{N}$$

$a = 5k_1 \pm 2$ e $c = 5k_2 \pm 2$, temos:

$$b^2 = (5k_2 \pm 2)^2 - (5k_1 \pm 2)^2 = 5(5k_2^2 \pm 4k_2 - 5k_1^2 \pm 4k_1) = 5k, k \in \mathbf{N}$$

$a = 5k_1 \pm 1$ e $5k_2 \pm 2$, temos:

$$b^2 = (5k_2 \pm 2)^2 - (5k_1 \pm 1)^2 = 5(5k_2^2 \pm 4k_2 - 5k_1^2 \pm 2k_1) = 5k + 3, k \in \mathbf{N}$$

Para esta situação, hipotenusa e um dos catetos não múltiplos de 5, $5k$ é o único resultado que é quadrado perfeito. Como $5k, k \in \mathbf{N}$, também é múltiplo de 5, então podemos concluir que só é possível um triângulo pitagórico nestas condições, se um dos catetos for divisível por 5.

Concluimos, portanto, que todo triângulo pitagórico primitivo tem, não necessariamente distintos, o cateto par múltiplo de 4, um dos catetos múltiplo de 3 e um dos lados, múltiplo de 5.

Aplicaremos a seguir a representação paramétrica para os triângulos pitagóricos.

6.3 – APLICAÇÃO DO TEOREMA 5.1.2 (REPRESENTAÇÃO PARAMÉTRICA PARA OS TERNOS PITAGÓRICOS)

Como aplicação, podemos a partir de um valor de $a \in \mathbb{Z}$, $a \geq 3$, determinar facilmente todos os ternos pitagóricos primitivos (a, b, c) aplicando o Teorema 5.1.2.

Teorema 5.1.2 (Representação paramétrica para os ternos pitagóricos): Para cada terno pitagórico primitivo (a, b, c) existem inteiros positivos, únicos, $n > m$, primos entre si, com $a \geq 3$, tais que

$$(a, b, c) = \begin{cases} (2mn, n^2 - m^2, n^2 + m^2), & \text{se } a \text{ for par} \\ \left(nm, \frac{n^2 - m^2}{2}, \frac{n^2 + m^2}{2}\right), & \text{se } a \text{ for ímpar} \end{cases}$$

Pelo Teorema 5.1.2, temos que $a = nm$ (se a for ímpar) e $a = 2nm$ (se a for par). Note que o número racional reduzido n/m envolve os mesmos fatores primos que o número a . Se o número a , na sua forma fatorada, contém k distintos fatores primos, então, existem 2^k frações irredutíveis, diferentes, que podem ser escritas com tais fatores primos. Vejamos o exemplo 6.3.1.

Exemplo 6.3.1: Consideremos $a = 315$, temos que: $a = 3^2 \cdot 5 \cdot 7 = n \cdot m$ (a é ímpar). Logo, a possui 3 fatores primos, 3, 5 e 7, portanto $k = 3$. Temos assim $2^3 = 8$ frações irredutíveis, diferentes, do tipo n/m , ou m/n , que estão mostrados na tabela 6.3.1:

Tabela 6.3.1 - Frações irredutíveis para $a = 315$

n/m	m/n
$\frac{3^2 \cdot 5 \cdot 7}{1} = \frac{315}{1}$	$\frac{1}{3^2 \cdot 5 \cdot 7} = \frac{1}{315}$
$\frac{3^2 \cdot 5}{7} = \frac{45}{7}$	$\frac{7}{3^2 \cdot 5} = \frac{7}{45}$
$\frac{3^2 \cdot 7}{5} = \frac{63}{5}$	$\frac{5}{3^2 \cdot 7} = \frac{5}{63}$
$\frac{5 \cdot 7}{3^2} = \frac{35}{9}$	$\frac{3^2}{5 \cdot 7} = \frac{9}{35}$

Fonte: Produzida pelo autor

Mas, o nosso número racional irredutível é da forma n/m , com $n > m$. Portanto a quantidade de frações irredutíveis se reduz à metade, ou seja, temos exatamente 2^{k-1} frações irredutíveis para o número a .

Para o número em questão temos: $2^{3-1} = 2^2 = 4$ frações da forma n/m .

$$\frac{n}{m} = \frac{315}{1}, \quad \frac{n}{m} = \frac{45}{7}, \quad \frac{n}{m} = \frac{63}{5} \quad \text{e} \quad \frac{n}{m} = \frac{35}{9}$$

Logo, para $a = 315 = 3^2 \cdot 5 \cdot 7$, há 4 ternos pitagóricos primitivos. Como a é ímpar vamos usar a representação paramétrica dada por: $(a, b, c) = \left(nm, \frac{n^2 - m^2}{2}, \frac{n^2 + m^2}{2}\right)$.

A tabela 6.3.2 nos mostra todos os ternos pitagóricos com $a = 315$.

Tabela 6.3.2 – Todos os ternos pitagóricos primitivos da forma $(315, b, c)$

n/m	n	m	$a = nm$	$b = \frac{n^2 - m^2}{2}$	$c = \frac{n^2 + m^2}{2}$	(a, b, c)
$315/1$	315	1	315	49612	49613	(315, 49612, 49613)
$45/7$	45	7	315	988	1037	(315, 988, 1037)
$63/5$	63	5	315	1972	1997	(315, 1972, 1997)
$35/9$	35	9	315	572	653	(315, 572, 653)

Fonte: Produzida pelo autor

Exemplo 6.3.2: Vejamos o caso de a ser par e múltiplo de 4, digamos: $a = 112$

Como 112 é par, ficamos com: $(a, b, c) = (2mn, n^2 - m^2, n^2 + m^2)$. Assim:

$$2nm = 112 \Rightarrow nm = 56 = 2^3 \cdot 7$$

para $k = 2$, temos $2^{k-1} = 2^{2-1} = 2$. Duas frações irredutíveis;

$$\frac{n}{m} = \frac{2^3 \cdot 7}{1} = \frac{56}{1} \quad \text{e} \quad \frac{n}{m} = \frac{2^3}{7} = \frac{8}{7}$$

Temos, portanto, com $a = 112$, dois ternos pitagóricos primitivos, conforme nos mostra a tabela 6.3.3

Tabela 6.3.3 – todos os ternos pitagóricos primitivos da forma $(112, b, c)$

n/m	n	m	$a = 2nm$	$b = n^2 - m^2$	$c = n^2 + m^2$	(a, b, c)
$56/1$	56	1	112	3135	3137	(112, 3135, 3137)
$8/7$	8	7	112	15	113	(112, 15, 113)

Fonte: Produzida pelo autor

Exemplo 6.3.3: Vejamos agora o caso em que a é par, mas não é múltiplo de 4. Consideremos $a = 210$.

Como a é par, ficamos com: $(a, b, c) = (2mn, n^2 - m^2, n^2 + m^2)$. Assim:

$$a = 2nm = 210 \Rightarrow nm = 105 = 3.5.7$$

para $k = 3$, temos $2^{k-1} = 2^{3-1} = 4$. Quatro frações irredutíveis, como mostra a tabela 6.3.4. Note que os ternos pitagóricos não são primitivos:

Tabela 6.3.4 – todos os ternos pitagóricos da forma $(210, b, c)$

n/m	n	m	$a = 2nm$	$b = n^2 - m^2$	$c = n^2 + m^2$	(a, b, c)
$3.5.7/1$	105	1	210	11024	11026	$(210, 11024, 11026)$
$15/7$	15	7	210	176	274	$(210, 176, 274)$
$21/5$	21	5	210	416	466	$(210, 416, 466)$
$35/3$	35	3	210	1216	1234	$(210, 1216, 1234)$

Fonte: Produzida pelo autor

Exemplo 6.3.4: Vejamos para $a = 45$. Nesse caso, como a é ímpar, devemos usar a representação paramétrica dada por: $(a, b, c) = \left(nm, \frac{n^2 - m^2}{2}, \frac{n^2 + m^2}{2}\right)$

Logo: $nm = 45 = 3^2.5$. Com dois fatores primos, ou seja, $k = 2$, temos, portanto, $2^{k-1} = 2^{2-1} = 2$. O que nos fornece dois ternos pitagóricos primitivos, como nos mostra a tabela 6.3.5 a seguir.

Tabela 6.3.5 – Todos os ternos pitagóricos primitivos da forma $(45, b, c)$

n/m	n	m	a	b	c	(a, b, c)
$3^2.5/1$	45	1	45	1012	1013	$(45, 1012, 1013)$
$3^2/5$	9	5	45	28	53	$(45, 28, 53)$

Fonte – Produzida pelo autor

Exemplo 6.3.5: Vamos a mais um exemplo para o caso de a ser múltiplo de 4. Seja $a = 420$, como a é par, ficamos com: $(a, b, c) = (2mn, n^2 - m^2, n^2 + m^2)$. Assim:

$$2nm = 420 \Rightarrow nm = 210 = 2.3.5.7$$

para $k = 4$, temos $2^{k-1} = 2^{4-1} = 8$.

São 8 frações irredutíveis, são 8 ternos pitagóricos primitivos. A tabela 6.3.6 nos mostra essas possibilidades.

Tabela 6.3.6 – Todos os ternos pitagóricos primitivos da forma $(420, b, c)$

n/m	n	m	$a = 2nm$	$b = n^2 - m^2$	$c = n^2 + m^2$	(a, b, c)
2.3.5.7/1	210	1	420	44099	44101	(420, 44099, 44101)
3.5.7/2	105	2	420	11021	11029	(420, 11021, 11029)
2.5.7/3	70	3	420	4891	4909	(420, 4891, 4909)
2.3.7/5	42	5	420	1739	1789	(420, 1739, 1789)
2.3.5/7	30	7	420	851	949	(420, 851, 949)
3.7/2.5	21	10	420	341	541	(420, 341, 541)
5.7/2.3	35	6	420	1189	1261	(420, 1189, 1261)
3.5/2.7	15	14	420	29	421	(420, 29, 421)

Fonte – Produzida pelo autor

Exemplo 6.3.6: Para $a = 105$. Sendo a um número ímpar vamos usar a representação paramétrica dada por: $(a, b, c) = \left(nm, \frac{n^2 - m^2}{2}, \frac{n^2 + m^2}{2}\right)$. Assim: $nm = 105 = 3.5.7$. Nesse caso, $2^{k-1} = 2^{3-1} = 4$, fornecendo assim 4 ternos pitagóricos primitivos. Na tabela 6.3.7 estão listadas as possibilidades.

Tabela 6.3.7 – Todos os ternos pitagóricos primitivos da forma $(105, b, c)$

n/m	n	m	$a = nm$	$b = \frac{n^2 - m^2}{2}$	$c = \frac{n^2 + m^2}{2}$	(a, b, c)
3.5.7/1	105	1	105	5512	5513	(105, 5512, 5513)
3.5/7	15	7	105	88	137	(105, 88, 137)
3.7/5	21	5	105	208	233	(105, 208, 233)
5.7/3	35	3	105	608	617	(105, 608, 617)

Fonte – Produzida pelo autor

Exemplo 6.3.7: Encontrar os ternos aritméticos gerados pelos ternos pitagóricos primitivos para $a = 12$

Como a é par, temos que: $a = 2nm$, $b = n^2 - m^2$ e $c = n^2 + m^2$

Para $a = 12$ vem que: $a = 2nm = 12 \Rightarrow nm = 6 = 2.3$,

Temos dois fatores primos, ou seja, $k = 2$

Para $k = 2$, temos: $2^{k-1} = 2^{2-1} = 2$. Isto é, temos duas frações irredutíveis n/m , com

$n > m$, que são: $\frac{2.3}{1} = \frac{n}{m}$ e $\frac{3}{2} = \frac{n}{m}$

Para $\frac{n}{m} = \frac{2.3}{1}$, temos $n = 6$ e $m = 1$. Logo:

$$b = n^2 - m^2 = 6^2 - 1^2 = 35$$

e

$$c = n^2 + m^2 = 6^2 + 1^2 = 37$$

Para $\frac{n}{m} = \frac{3}{2}$, temos $n = 3$ e $m = 2$. Logo:

$$b = n^2 - m^2 = 3^2 - 2^2 = 5$$

e

$$c = n^2 + m^2 = 3^2 + 2^2 = 13$$

Portanto, para $a = 12$, temos dois ternos pitagóricos primitivos:

$$(12, 35, 37) \text{ e } (12, 5, 13)$$

O $(12, 35, 37)$ gera o terno aritmético: $(37, 37 + d, 37 + 2d)$. Para $d = \frac{c-2b}{3}$, vem que:

$$d = \frac{37 - 2.35}{3} = \frac{37 - 70}{3} = \frac{33}{3} = 11$$

Temos o (11) -aritmético: $(c, c + d, c + 2d) = (37, 48, 59)$

O $(12, 5, 13)$ gera o terno aritmético: $(13, 13 + d, 13 + 2d)$. Para $d = \frac{c-2b}{3}$, vem que:

$$d = \frac{13 - 2.5}{3} = \frac{13 - 10}{3} = \frac{3}{3} = 1$$

Temos o (1) -aritmético: $(c, c + d, c + 2d) = (13, 14, 15)$, o 2º triângulo de Brahmagupta.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Mostramos no capítulo 3 deste trabalho o engenhoso método apresentado por Brahmagupta no século VII, o Samasa Bhāvanā, para soluções inteiras das equações quadráticas, equivalente hoje ao moderno princípio da composição das formas quadráticas, segundo Alves (2019). O Samasa Bhāvanā antecedeu em mais ou menos mil anos à emblemática solução de Pell para as equações do tipo $x^2 - Ny^2 = 1$, entretanto aplicamos o método de Brahmagupta apenas para a solução específica da equação $x^2 - 3y^2 = 1$, obtida a partir da conhecida fórmula de Heron para um triângulo de lados inteiros e consecutivos. Segundo Beauregard e Suryanarayan (1998), é possível que tenha sido desse modo que Brahmagupta obteve os oito primeiros triângulos heronianos de lados consecutivos. Para maior aprofundamento na aplicação do Samasa Bhāvanā, sugiro (ALVES, 2019) e (VARADARAJAN, 1998), onde se pode encontrar soluções para outras equações de Pell, tais como: $x^2 - 92y^2 = 1$; $x^2 - 13y^2 = 1$ e $x^2 - 61y^2 = 1$. Ainda neste capítulo, mostramos a relação que há entre o Samasa Bhāvanā e os triângulos de Brahmagupta. Vimos também que a multiplicação de matrizes 2×2 e a propriedade multiplicativa dos determinantes estão em consonância com o Princípio da Composição.

Para os triângulos aritméticos, capítulo 4, nas demonstrações simples das fórmulas que relacionam os lados dos triângulos aritméticos e os lados dos triângulos pitagóricos que os compõem, usamos conceitos básicos da teoria dos números de fácil entendimento para os alunos do nível médio. Conceitos como paridade, divisibilidade, primalidade e etc., foram amplamente aplicados. “Não é de surpreender que os triângulos aritméticos tenham fascinado ao longo dos séculos; problemas geométricos simples como estes muitas vezes deram origem a considerações interessantes para a teoria dos números”, afirmam Beauregard e Suryanarayan (1997).

Por fim, nos capítulos 5 e 6, fizemos as representações paramétricas para os triângulos aritméticos e triângulos pitagóricos, respectivamente. De modo simples, a partir de um par de números previamente conceituados, pode-se obter inúmeros triângulos aritméticos ou pitagóricos. Para os alunos do nível médio a parametrização é um conceito trabalhado apenas na Geometria Analítica, quando se refere à

parametrização de retas. No caso dos triângulos pitagóricos constitui-se ainda uma novidade no nível médio conhecer outros triângulos pitagóricos que não sejam os de lados 3, 4, 5 e seus múltiplos, ou quando muito o de lados 5, 12, 14.

REFERÊNCIAS

ALVES, F. R. V. *Brahmagupta e alguns elementos históricos da matemática hindu*. Revista Thema, v.16, n.4, p.755-773, 2019.

BEAUREGARD, R. A. and SURYANARAYAN, E. R. *Pythagorean Triples: The Hyperbolic View*. The College Mathematics Journal, v.27, n.3, p.170-181, May, 1996.

BEAUREGARD, R. A. and SURYANARAYAN, E. R. *Arithmetic Triangles*. Mathematics Magazine, v.70, n.2, p.105-115, Apr. 1997..

BEAUREGARD, R. A. and SURYANARAYAN, E. R. *The Brahmagupta Triangles*, v.29, n.1, jan.1998.

BOYER, C. B. *História da matemática*. Tradução de Elza F. Gomide. São Paulo, SP: Edgard Blucher, 2003.

DICKSON, Leonard E. *History of the theory of numbers*. Washington Carnegie Institution. Washington, n.256, v.2, p. 200, 1920.

ENCYCLOPEDIA.COM/ Brahmagupta. Disponível em:

<<https://www.encyclopedia.com/people/science-and-technology/astronomy-biographies/Brahmagupta>>. Acesso em 29 dez 2020

EVES, Howard, *Introdução à História da Matemática*, Editora Unicamp, Campinas, 2004.

JUNOD, A. *An Algorithm to Solve a Pell Equation*. Gen. Math. Notes, v.28, n.2, jun.2015

PRANESACHAR, C. R. *Brahmagupta, Mathematician Par Excellence*. Resonance, mar. 2012.

SWAMY, M. N. S. *Brahmagupta's Theorems and Recurrence Relation*. The Fibonacci Quarterly, v.36, n.2, p.125, 1998.

ZAINAB AHMED, Brahmagupta. Disponível em:

<<https://pt.scribd.com/document/435017200/Brahmagupta-pdf>>. Acesso em 29 Dez 2020

VARADARAJAN, V. S. *Algebra in ancient and modern times*. New York: American Mathematical Society, 1998.

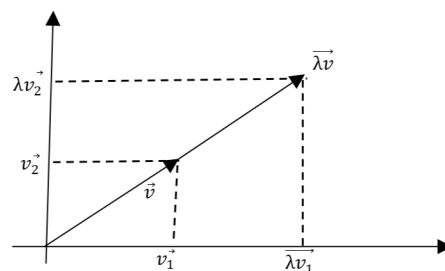
APÊNDICE

AUTOVALORES, AUTOVETORES E A DIAGONALIZAÇÃO DA MATRIZ DE BRAHMAGUPTA

Definição: Um vetor $\vec{v} \neq \vec{0}$ é dito ser autovetor da matriz $A_{n \times n}$ se a transformação linear deste vetor é colinear a este vetor, ou seja, se $A_{n \times n} \vec{v} = \lambda \vec{v}$, onde o escalar λ é chamado de autovalor da matriz $A_{n \times n}$ correspondente ao autovetor $\lambda \vec{v}$.

Graficamente, temos:

Figura 9.1.1 - Transformação Linear



Fonte - criada pelo autor

Sendo $I_{n \times n}$ a matriz identidade de ordem n , note que $A_{n \times n} \vec{v} = \lambda \vec{v} = \lambda \vec{v} I_{n \times n}$. Logo podemos fazer: $A_{n \times n} \vec{v} - \lambda \vec{v} I_{n \times n} = \vec{0}$. Segue que: $(A_{n \times n} - \lambda I_{n \times n}) \vec{v} = \vec{0}$. Como desejamos vetores não nulos, isto é, $\vec{v} \neq \vec{0}$, então: $\det(A_{n \times n} - \lambda I_{n \times n}) = 0$. Temos, portanto, o polinômio característico:

$$P(\lambda) = \det(A_{n \times n} - \lambda I_{n \times n}) = 0$$

Vamos exemplificar determinando os autovalores e os autovetores correspondentes à matriz de Brahmagupta $B(x, y) = \begin{pmatrix} x & y \\ 3y & x \end{pmatrix}$, com x, y naturais e positivos.

Substituindo $A = B(x, y) = \begin{pmatrix} x & y \\ 3y & x \end{pmatrix}$ e $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ no polinômio característico, vem que:

$$P(\lambda) = \det\left(\begin{pmatrix} x & y \\ 3y & x \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \det\begin{pmatrix} x - \lambda & y \\ 3y & x - \lambda \end{pmatrix} = (x - \lambda)^2 - 3y^2 = 0$$

Temos então a equação: $\lambda^2 - 2x\lambda + x^2 - 3y^2 = 0$

Resolvendo a equação obtemos os autovalores: $\lambda_1 = x - y\sqrt{3}$ e $\lambda_2 = x + y\sqrt{3}$

Aplicando a transformação linear $A\vec{w} = \lambda\vec{w}$ para cada um dos autovalores encontrados, temos que:

Para $\lambda_1 = x - y\sqrt{3}$ e $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$, vem que: $\begin{pmatrix} x & y \\ 3y & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = (x - y\sqrt{3}) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$. Efetuando os produtos, ficamos com: $\begin{pmatrix} xv_1 + yv_2 \\ 3yv_1 + xv_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x - y\sqrt{3})v_1 \\ (x - y\sqrt{3})v_2 \end{pmatrix}$

segue o sistema: $\begin{cases} xv_1 + yv_2 = xv_1 - y\sqrt{3}v_1 \\ 3yv_1 + xv_2 = xv_2 - y\sqrt{3}v_2 \end{cases}$

donde concluímos que: $v_2 = -\sqrt{3}v_1$. Para $v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, ficamos com: $v_2 = -\sqrt{\frac{3}{2}}$

Portanto: $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\sqrt{\frac{3}{2}} \end{pmatrix}$

Para $\lambda_2 = x + y\sqrt{3}$ e $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$, vem que: $\begin{pmatrix} x & y \\ 3y & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = (x + y\sqrt{3}) \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$. Efetuando os produtos, ficamos com: $\begin{pmatrix} xu_1 + yu_2 \\ 3yu_1 + xu_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x + y\sqrt{3})u_1 \\ (x + y\sqrt{3})u_2 \end{pmatrix}$

segue o sistema: $\begin{cases} xu_1 + yu_2 = xu_1 + y\sqrt{3}u_1 \\ 3yu_1 + xu_2 = xu_2 + y\sqrt{3}u_2 \end{cases}$

donde concluímos que: $u_2 = \sqrt{3}u_1$. Para $u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, ficamos com: $u_2 = \sqrt{\frac{3}{2}}$

logo: $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sqrt{\frac{3}{2}} \end{pmatrix}$

Segue, portanto que $\vec{u} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sqrt{\frac{3}{2}} \end{pmatrix}$ e $\vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\sqrt{\frac{3}{2}} \end{pmatrix}$ são os autovetores correspondentes à

matriz de Brahmagupta $B(x, y) = \begin{pmatrix} x & y \\ 3y & x \end{pmatrix}$

Note que os autovetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ encontrados são linearmente independentes, pois fazendo a combinação linear: $a\vec{u} + b\vec{v} = \vec{0}$, vem que:

$$a \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sqrt{\frac{3}{2}} \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\sqrt{\frac{3}{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ donde obtemos o sistema } \begin{cases} a + b = 0 \\ a - b = 0 \end{cases}, \text{ cuja solução é a trivial, isto é: } a = b = 0.$$

Portanto, os autovetores $\vec{u} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sqrt{\frac{3}{2}} \end{pmatrix}$ e $\vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\sqrt{\frac{3}{2}} \end{pmatrix}$ formam uma base no espaço vetorial bidimensional.

A partir de autovetores linearmente independentes (LI) pode-se obter uma matriz diagonalizada relacionada a uma determinada matriz, usando a decomposição espectral dada por: $(A_{n \times n}) = (P_{n \times n}) \cdot (D_{n \times n}) \cdot (P_{n \times n}^{-1})$, onde $P_{n \times n}$ é a matriz formada pelos autovetores LI, $P_{n \times n}^{-1}$ a sua inversa e $D_{n \times n}$ a matriz diagonalizada relacionada à matriz $(A_{n \times n})$. Como $(P_{n \times n}) \cdot (P_{n \times n}^{-1}) = (P_{n \times n}^{-1}) \cdot (P_{n \times n}) = I_{n \times n}$, temos que:

$$(D_{n \times n}) = (P_{n \times n}^{-1}) \cdot (A_{n \times n}) \cdot (P_{n \times n})$$

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sqrt{\frac{3}{2}} & -\sqrt{\frac{3}{2}} \end{pmatrix} \text{ matriz dos autovetores, } P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \sqrt{\frac{1}{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\sqrt{\frac{1}{6}} \end{pmatrix} \text{ a inversa de } P \text{ e } A =$$

$$B(x, y) = \begin{pmatrix} x & y \\ 3y & x \end{pmatrix}. \text{ Substituindo, vem que:}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \sqrt{\frac{1}{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\sqrt{\frac{1}{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ 3y & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sqrt{\frac{3}{2}} & -\sqrt{\frac{3}{2}} \end{pmatrix}.$$

$$\text{Fazendo os produtos, obtemos: } D = \begin{pmatrix} x + y\sqrt{3} & 0 \\ 0 & x - y\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

$$\text{Ficamos portanto, com: } \begin{pmatrix} x & y \\ 3y & x \end{pmatrix} = P \cdot \begin{pmatrix} x + y\sqrt{3} & 0 \\ 0 & x - y\sqrt{3} \end{pmatrix} \cdot P^{-1}$$

A matriz diagonalizada desperta bastante interesse por ser de fácil manuseio com relação à operação de potenciação de matrizes.

Note que elevando ao quadrado ambos os membros da decomposição, temos:

$$\begin{pmatrix} x & y \\ 3y & x \end{pmatrix}^2 = \left[P \cdot \begin{pmatrix} x + y\sqrt{3} & 0 \\ 0 & x - y\sqrt{3} \end{pmatrix} \cdot P^{-1} \right]^2 \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} x & y \\ 3y & x \end{pmatrix}^2 = P \cdot \begin{pmatrix} x + y\sqrt{3} & 0 \\ 0 & x - y\sqrt{3} \end{pmatrix} \cdot P^{-1} P \cdot \begin{pmatrix} x + y\sqrt{3} & 0 \\ 0 & x - y\sqrt{3} \end{pmatrix} \cdot P^{-1}$$

Como $P^{-1}P = I_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Então:

$$\begin{pmatrix} x & y \\ 3y & x \end{pmatrix}^2 = P \cdot \begin{pmatrix} x + y\sqrt{3} & 0 \\ 0 & x - y\sqrt{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x + y\sqrt{3} & 0 \\ 0 & x - y\sqrt{3} \end{pmatrix} \cdot P^{-1} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} x & y \\ 3y & x \end{pmatrix}^2 = P \cdot \begin{pmatrix} (x + y\sqrt{3})^2 & 0 \\ 0 & (x - y\sqrt{3})^2 \end{pmatrix} \cdot P^{-1}$$

A partir do resultado acima e usando a definição dada, $\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ 3y_1 & x_1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} x_n & y_n \\ 3y_n & x_n \end{pmatrix}$, podemos verificar por indução, que, para $n \in \mathbf{N}$, temos:

$$\begin{pmatrix} x & y \\ 3y & x \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} x_n & y_n \\ 3y_n & x_n \end{pmatrix} = P \cdot \begin{pmatrix} (x + y\sqrt{3})^n & 0 \\ 0 & (x - y\sqrt{3})^n \end{pmatrix} \cdot P^{-1}, \text{ pois:}$$

$$\begin{pmatrix} x & y \\ 3y & x \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} x & y \\ 3y & x \end{pmatrix} = P \cdot \begin{pmatrix} (x + y\sqrt{3})^n & 0 \\ 0 & (x - y\sqrt{3})^n \end{pmatrix} \cdot P^{-1} \begin{pmatrix} x & y \\ 3y & x \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} x & y \\ 3y & x \end{pmatrix}^{n+1} = P \cdot \begin{pmatrix} (x + y\sqrt{3})^n & 0 \\ 0 & (x - y\sqrt{3})^n \end{pmatrix} \cdot P^{-1} P \cdot \begin{pmatrix} x + y\sqrt{3} & 0 \\ 0 & x - y\sqrt{3} \end{pmatrix} \cdot P^{-1} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} x & y \\ 3y & x \end{pmatrix}^{n+1} = P \cdot \begin{pmatrix} (x + y\sqrt{3})^n & 0 \\ 0 & (x - y\sqrt{3})^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x + y\sqrt{3} & 0 \\ 0 & x - y\sqrt{3} \end{pmatrix} \cdot P^{-1} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} x & y \\ 3y & x \end{pmatrix}^{n+1} = \begin{pmatrix} x_{n+1} & y_{n+1} \\ 3y_{n+1} & x_{n+1} \end{pmatrix} = P \cdot \begin{pmatrix} (x + y\sqrt{3})^{n+1} & 0 \\ 0 & (x - y\sqrt{3})^{n+1} \end{pmatrix} \cdot P^{-1}$$

Desenvolvendo a decomposição $\begin{pmatrix} x & y \\ 3y & x \end{pmatrix}^n = P \cdot \begin{pmatrix} (x+y\sqrt{3})^n & 0 \\ 0 & (x-y\sqrt{3})^n \end{pmatrix} \cdot P^{-1}$, temos que:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x & y \\ 3y & x \end{pmatrix}^n &= \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{1}{2}} & \sqrt{\frac{1}{2}} \\ \sqrt{\frac{3}{2}} & -\sqrt{\frac{3}{2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (x+y\sqrt{3})^n & 0 \\ 0 & (x-y\sqrt{3})^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{1}{2}} & \sqrt{\frac{1}{6}} \\ \sqrt{\frac{1}{2}} & -\sqrt{\frac{1}{6}} \end{pmatrix} \Rightarrow \\ \begin{pmatrix} x & y \\ 3y & x \end{pmatrix}^n &= \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{1}{2}}(x+y\sqrt{3})^n & \sqrt{\frac{1}{2}}(x-y\sqrt{3})^n \\ \sqrt{\frac{3}{2}}(x+y\sqrt{3})^n & -\sqrt{\frac{3}{2}}(x-y\sqrt{3})^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{1}{2}} & \sqrt{\frac{1}{6}} \\ \sqrt{\frac{1}{2}} & -\sqrt{\frac{1}{6}} \end{pmatrix} \Rightarrow \\ \begin{pmatrix} x & y \\ 3y & x \end{pmatrix}^n &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}[(x+y\sqrt{3})^n + (x-y\sqrt{3})^n] & \sqrt{\frac{1}{12}}[(x+y\sqrt{3})^n - (x-y\sqrt{3})^n] \\ \sqrt{\frac{3}{4}}[(x+y\sqrt{3})^n - (x-y\sqrt{3})^n] & \sqrt{\frac{3}{12}}[(x+y\sqrt{3})^n + (x-y\sqrt{3})^n] \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Sendo $\begin{pmatrix} x & y \\ 3y & x \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} x_n & y_n \\ 3y_n & x_n \end{pmatrix}$, temos:

$$x_n = \frac{1}{2}[(x+y\sqrt{3})^n + (x-y\sqrt{3})^n] \quad \text{e} \quad y_n = \sqrt{\frac{1}{12}}[(x+y\sqrt{3})^n - (x-y\sqrt{3})^n]$$

Para $x_1 = 2$ e $y_1 = 1$, obtemos a solução geral para o enésimo triângulo de Brahmagupta, para $n = 0, 1, 2, 3, \dots$, dada por:

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{1}{2}[(2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n] \\ &\text{e} \\ y_n &= \frac{1}{\sqrt{12}}[(2+\sqrt{3})^n - (2-\sqrt{3})^n] \end{aligned}$$