

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Grupo de Galois/Monodromia:
cálculo dos pontos de inflexão de
cúbicas planas e retas em superfícies
cúbicas não singulares

Milena Barbosa Gama

JOÃO PESSOA – PB
JULHO DE 2021

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Grupo de Galois/Monodromia:
cálculo dos pontos de inflexão de
cúbicas planas e retas em superfícies
cúbicas não singulares

por

Milena Barbosa Gama

sob a orientação da

Profa. Dra. Jacqueline Fabiola Rojas Arancibia

João Pessoa – PB
Julho de 2021

Catálogo na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

G185g Gama, Milena Barbosa.

Grupo de Galois/Monodromia : cálculo dos pontos de inflexão de cúbicas planas e retas em superfícies cúbicas não singulares / Milena Barbosa Gama. - João Pessoa, 2021.
130 f. : il.

Orientação: Jacqueline Fabiola Rojas Arancibia.
Dissertação (Mestrado) - UFPB/CCEN.

1. Álgebra. 2. Pontos de inflexão. 3. Superfície cúbica. 4. Teoria de Galois. 5. Monodromia. I. Arancibia, Jacqueline Fabiola Rojas. II. Título.

UFPB/BC

CDU 512(043)

Grupo de Galois/Monodromia: cálculo dos pontos de inflexão de cúbicas planas e retas em superfícies cúbicas não singulares

por

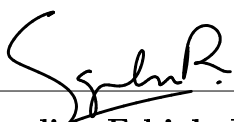
Milena Barbosa Gama ¹

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Paraíba como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Álgebra

Aprovada em 30 de Julho de 2021.

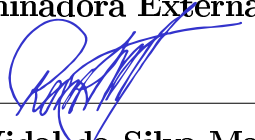
Banca Examinadora:



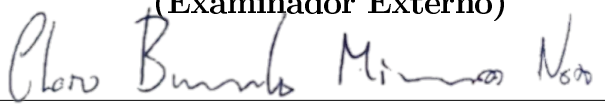
Profa. Dra. Jacqueline Fabiola Rojas Arancibia – UFPB
(Orientadora)



Profa. Dra. Carolina Bhering de Araújo – IMPA
(Examinadora Externa)



Prof. Dr. Renato Vidal da Silva Martins – UFMG
(Examinador Externo)



Prof. Dr. Cleto Brasileiro Miranda Neto – UFPB
(Examinador Interno)

¹A autora foi bolsista da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES).

Agradecimentos

"Cerque-se de pessoas boas. É assim que Deus nos protege", é com essa frase de Pe. Fabio de Melo que inicio os meus agradecimentos. Além de ser uma linda e verdadeira frase, ela nos faz refletir sobre o que construímos ao longo dos anos, dos dias... ao longo das horas que nos permitimos ser conhecidos por alguém, e que nos permitimos conhecer também. Ela também nos diz sobre as pessoas que permanecem, e sobre a energia que nos trazem, ou melhor, sobre o que do outro deixamos entrar em nós. E, posso dizer que Deus me protege muito, pois tenho pessoas boas em minha vida.

Minha base, minha família, agradeço imensamente aos meus pais Elionora e Adriano e as minha irmãs Maria Helena e Isabele pelo cuidado, atenção, incentivo que me deram todos esses dias. Além, dos ensinamentos, que me permitiram ser quem eu sou hoje. Os amo muito.

Agradeço aos meus amigos da graduação, Paulo, João Paulo, Messias, Fábio em especial a Nany que continua a trilhar comigo no caminho do meio acadêmico, juntamente com Claudia e Geovane que são minha inspiração e que tenho um enorme carinho. Agradeço também a Djair e Yuri, que na reta final do mestrado compartilharam comigo leveza e descontração.

Agradeço também aos meus irmãos iupianos, em especial Myla, Junior, Luana, Paulinha, Mara e Rirys pelo apoio e carinho de sempre. E, principalmente pelos exemplos de seres humanos que são.

Agradeço principalmente a minha orientadora, Profa. Jacqueline, que além dos ensinamentos nas disciplinas, me ensinou humanidade, a ter cuidado, atenção, paciência e amor a profissão, o meu muito obrigada. E, aos professores Cleto, Carolina e Renato por terem aceitado participar da banca.

Agradeço a Capes, pelo apoio financeiro

Resumo

Em 1851 o matemático francês Charles Hermite mostrou que o grupo de Galois e monodromia coincidem no contexto de geometria algébrica. Entretanto, foi Joe Harris (em 1979) que apresentou esse resultado e aplicações numa linguagem moderna. Neste trabalho inicialmente introduzimos o grupo de Galois e monodromia no contexto de geometria algébrica seguindo as linhas do artigo "Galois groups of enumerative problems"([10]). A seguir determinamos o grupo de monodromia dos pontos de inflexão de uma cúbica plana não singular. Sendo esse grupo solúvel, determinamos as coordenadas desses pontos a partir da equação de Weierstrass de tal cúbica. Concluímos revisando os resultados de Harris sobre o grupo de monodromia de retas em superfícies cúbicas não singulares, dando ênfase ao cálculo dessas retas a partir da equação que define uma superfície cúbica não singular contendo três retas duas a duas disjuntas prefixadas (conforme Mckean-Minahan-Zhang, 2020 ([16])).

Palavras-chave: Grupo de Galois/monodromia. Pontos de inflexão. Superfície cúbica.

Abstract

In 1851 the french mathematician Charles Hermite showed that the Galois group and monodromy coincide in the context of algebraic geometry. However, it was Joe Harris (in 1979) that presented this result and applications in a modern language. In this work initially we introduce the Galois group and monodromy in the context of algebraic geometry following the lines of the article "Galois groups of enumerative problems"[10]. Next we determine the monodromy group of the inflection points of a non-singular plane cubic. Since this group is soluble, we determine the coordinates of these points from the Weierstrass equation of such cubic. We conclude by reviewing Harris' results about the monodromy group of lines in non-singular cubic surfaces, emphasizing the calculation of these lines from the equation that defines a non-singular cubic surface containing three lines two by two prefixed disjoint (according McKean-Minahan-Zhang, 2020 ([16])).

Keywords: Galois/monodromy group. Inflection points. Cubic surface.

Sumário

Introdução	1
1 Resultados preliminares	3
1.1 Conceitos Básicos de Topologia	3
1.2 Cúbicas não singulares como grupos abelianos	6
2 Grupos de Galois e monodromia em geometria enumerativa	11
2.1 Explorando a relação entre o grupo fundamental e o grupo de Galois. .	11
2.1.1 O grupo de monodromia associado a um recobrimento	13
2.1.2 Grupo de Galois e grupo de monodromia	22
3 Grupo de Galois/monodromia dos pontos de inflexão de cúbicas planas não singulares	25
3.1 A construção do morfismo $\pi : I_d \longrightarrow W_d$	25
3.2 Cúbicas não singulares via reticulados	31
3.2.1 Cálculo do grupo de monodromia	39
4 Retas em uma superfície cúbica não singular em termos de três retas disjuntas	47
4.1 Grupo de monodromia das 27 retas	47
4.2 Retas em superfícies cúbicas não singulares contendo E_1, E_2 e E_3	49
4.3 Caso geral	65
4.4 Retas em S a partir de duas retas concorrentes	68
A Conceitos Básicos de Geometria Algébrica	71
B Retas em superfícies cúbicas	94
Referências Bibliográficas	121

Notações

A seguir, listamos algumas notações utilizadas neste trabalho.

- $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$ denota o n -espaço projetivo sobre o corpo $\mathbb{K}$.
- $\mathbb{P}^n$ denota o n -espaço projetivo complexo.
- $\check{\mathbb{P}}^2 = \{\ell \mid \ell \text{ é uma reta em } \mathbb{P}^2\}$.
- $\ell_{p,q}$ denota a reta passando por p e q .
- $\langle \ell, m \rangle$ denota o plano determinado pelas retas concorrentes ℓ e m .
- $W_d = \mathbb{P}(\mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]_d)$ é a projetivização do subespaço $\mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]_d$ formado pelos polinômios homogêneos de grau d .
- $B_{ij}(\Gamma)$ denota o grupo das bijeções no conjunto Γ .
- $Sing(S)$ denota o conjunto dos pontos singulares da superfície S .
- $\text{Aut}(\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n) = \{f : \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n \longrightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n \mid f \text{ é uma mudança de coordenadas projetivas (MCP)}\}$.
- $K(X)$ ou $\text{Frac}(A(X))$ denota o corpo de funções de uma variedade afim X .

Introdução

Os grupos de Galois (Monodromia) associados a problemas de geometria enumerativa foram inicialmente abordados por volta de 1870 pelo matemático francês Marie Ennemond Camille Jordan (1838 – 1922) [14], que constatou que em vários dos problemas estudados por ele, o grupo de Galois era um subgrupo próprio do grupo das permutações.

Contudo, anteriormente em 1851 o matemático francês Charles Hermite (1822 – 1901), já tinha demonstrado que o grupo de Galois e monodromia coincidem no contexto de geometria algébrica [12]. É importante ressaltar que uma consequência desse resultado é o fato do grupo de monodromia não depender da escolha do aberto no qual a função racional vira um recobrimento.

Podemos dizer que uma abordagem moderna deste tópico foi iniciada por Harris (em 1979) em [10], que determinou o grupo de Galois de vários problemas enumerativos clássicos, entre estes podemos citar: pontos de inflexão de curvas planas de grau $d \geq 3$, sendo que para $d > 3$ mostrou que o grupo de monodromia $\mathcal{M}$ é exatamente $S_{3d(d-2)}$ (sendo $3d(d-2)$ a quantidade de pontos de inflexão) e no caso $d = 3$ um subgrupo de S_9 (que será apresentado no capítulo 2 deste texto). Também tratou do problema das retas contidas numa hipersuperfície em $\mathbb{P}^n$ e retas em superfícies cúbicas (do qual trataremos no capítulo 3 deste texto) entre outros.

Apesar disso, existem poucos problemas enumerativos para os quais os grupos de Galois são conhecidos. Neste sentido, Frank Sottile e colaboradores tem-se proposto estudar os grupos de Galois associados a problemas do cálculo de Schubert (cf. [2], [27] e [28]).

Este trabalho está dividido em quatro capítulos e consta de dois apêndices, sendo assim distribuídos. O *Capítulo 1* reúne alguns resultados sobre recobrimentos e grupos de homotopia, tendo como referência principal o livro "Topology" de James Raymond Munkres [18] e, ainda neste capítulo revisamos a estrutura de grupo abeliano que as cúbicas planas não singulares possuem entre outros resultados afins

No *Capítulo 2* exploramos a relação entre o grupo de monodromia e o grupo de Galois num exemplo concreto. E introduzimos o grupo de Galois e monodromia associados

a uma função racional dominante entre variedades da mesma dimensão.

No *Capítulo 3* determinamos o grupo de Galois/monodromia dos pontos de inflexão de cúbicas planas não singulares. Após mostrar que esse grupo é solúvel, determinamos os pontos de inflexão de uma cúbica não singular a partir da sua forma de Weierstrass, em função dos coeficientes de sua equação.

No *Capítulo 4* descrevemos o grupo de Galois/Monodromia associado ao problema das 27 retas em superfícies cúbicas não singulares seguindo as linhas do artigo de Harris [10]. Entretanto, nosso foco foi determinar as fórmulas para as 24 retas numa superfície cúbica não singular que contém as retas $E_1 = \mathbf{V}(x_0, x_1)$, $E_2 = \mathbf{V}(x_2, x_3)$ e $E_3 = \mathbf{V}(x_0 - x_2, x_1 - x_3)$.

A seguir abordando o caso geral, onde consideramos uma superfície cúbica não singular S_1 e determinamos uma mudança de coordenadas projetivas que leva a reta Λ_i para E_i com $i = 1, 2, 3$, sendo Λ_i 's retas duas a duas disjuntas em S_1 , dessa forma podemos aplicar o processo realizado para determinar as equações das 27 retas numa superfície contendo as retas E_1, E_2, E_3 . Finalizamos o *capítulo 4* dando um esboço do procedimento para determinar as retas no caso em que são prefixadas duas retas concorrentes.

Foram introduzidos dois apêndices para auxiliar ao leitor não familiarizado com esses conceitos. O *Apêndice A* é dedicado aos conceitos básicos de Geometria Algébrica, tendo como principais referências [6], [9], [11] e [20]. E, no *Apêndice B* estabelecemos que toda superfície cúbica não singular em $\mathbb{P}^3$ contém exatamente 27 retas. Conjuntamente são apresentadas suas relações de intersecção.

Capítulo 1

Resultados preliminares

Neste capítulo relatamos os conceitos e resultados básicos de topologia que serão utilizados no desenvolvimento do capítulo 2 e revisamos a estrutura de grupo abeliano que as cúbicas planas não singulares possuem entre outros resultados afins.

1.1 Conceitos Básicos de Topologia

Definição 1.1. Sejam E e B espaços topológicos. Uma função contínua e sobrejetiva $p: E \rightarrow B$ é dita uma aplicação de recobrimento ou apenas um recobrimento, quando para todo b em B , existe um aberto V de B contendo b tal que $p^{-1}(V) = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{I}} U_\alpha$ é uma união de abertos dois a dois disjuntos tal que $p|_{U_\alpha}: U_\alpha \rightarrow V$ é um homeomorfismo para todo α .

Corolário 1.1. Se E e B forem conexos então todas as fibras (isto é $p^{-1}(b)$) tem a mesma cardinalidade.

Demonstração. Considere $b \in B$. Assuma que $\#p^{-1}(b) = k$. Seja $A = \{y \in B \mid \#p^{-1}(y) = k\}$. Note que $B = A \cup (B - A)$. Basta mostrar que A é aberto não vazio e que $B - A$ é aberto em B . Sendo B conexo, segue que $B - A = \emptyset$. Logo $A = B$. ■

Definição 1.2. Caminhos homotópicos

Seja X um espaço topológico e $I = [0, 1]$. Uma função $f: [0, 1] \rightarrow X$ é denominado um caminho em X se f for contínua. Se $f(0) = f(1)$ então f é denominado caminho fechado.

Dois caminhos f e g em X , são considerados caminhos homotópicos se eles têm o mesmo ponto inicial x_0 e o mesmo ponto final x_1 e se existe uma aplicação contínua $F: I \times I \rightarrow X$ tal que

$$\begin{aligned} F(s, 0) &= f(s) & e & & F(s, 1) &= g(s) \\ F(0, t) &= x_0 & e & & F(1, t) &= x_1 \end{aligned}$$

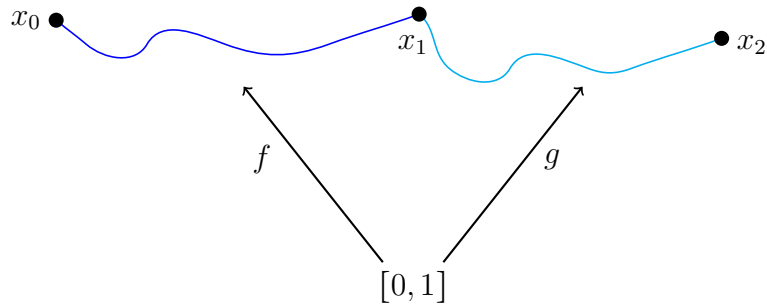
para cada $s \in I$ e para cada $t \in I$. F é denominado caminho homotópico entre f e g .

Teorema 1.2. *Sejam $p: E \rightarrow B$ uma aplicação de recobrimento tal que $p(e_0) = b_0$, f e g dois caminhos em B de b_0 para b_1 , sejam $\tilde{f}$ e $\tilde{g}$ os seus respectivos levantamentos para caminhos em E começando em e_0 . Se f e g são caminhos homotópicos, então $\tilde{f}$ e $\tilde{g}$ terminam no mesmo ponto de E e são caminhos homotópicos.*

Demonstração. Veja teorema 54.3, p. 344 em [18]. ■

Definição 1.3. Se f é um caminho em X de x_0 para x_1 , e se g é um caminho em X de x_1 para x_2 , definimos o produto $f * g$ de f e g sendo o caminho h de x_0 para x_2 dada por:

$$h(s) = \begin{cases} f(2s) & \text{para } s \in [0, \frac{1}{2}] \\ g(2s - 1) & \text{para } s \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$



A função h é bem definida e contínua, pelo lema de "colagem", é um caminho em X de x_0 para x_2 . Pensamos em h como o caminho cuja primeira metade é o caminho f e cuja segunda metade é o caminho g .

Seja X um espaço topológico; seja x_0 um ponto de X . Um caminho em X que começa e termina em x_0 é chamado caminho fechado em x_0 .

Definição 1.4. O grupo fundamental.

O conjunto de classes de caminhos homotópicos fechados em x_0 , é denotado por $\pi_1(X, x_0)$ e seus elementos po $[\gamma]$, se γ é um caminho fechado em x_0 .

A operação do produto em caminhos induz uma operação bem definida nas classes de caminhos homotópicos. Assim, definimos,

$$[f] \otimes [g] = [f * g].$$

O conjunto $\pi_1(X, x_0)$ com a operação $*$, é chamado de grupo fundamental de X em relação ao ponto base x_0 .

Teorema 1.3. *Seja $p : E \longrightarrow B$ uma aplicação de recobrimento; seja $p(e_0) = b_0$.*

(a) *O homomorfismo $p_* : \pi_1(E, e_0) \longrightarrow \pi_1(B, b_0)$ dado por $[\gamma] \longmapsto [p \circ \gamma]$ é um monomorfismo.*

(b) *Seja $H = p_*(\pi_1(E, e_0))$. A função $\Phi : \pi_1(B, b_0) \longrightarrow p^{-1}(b_0)$ dada por $[\gamma] \longmapsto \tilde{\gamma}(1)$ sendo $\tilde{\gamma}$ um levantamento de γ com início em b_0 induz uma aplicação injetora*

$$\Phi : \frac{\pi_1(B, b_0)}{H} \longrightarrow p^{-1}(b_0)$$

do quociente $\frac{\pi_1(B, b_0)}{H}$ em $p^{-1}(b_0)$, que é bijetora se E é conexo por caminhos.

(c) *Se f é um caminho fechado em B tal que $f(0) = x_0$, então $[f] \in H$ se, e somente se f admite um levantamento em E com base em e_0 .*

Demonstração. Ver Teorema 54.6, p. 346 em [18]. ■

Corolário 1.4. *Se $h : (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$ é um homeomorfismo de X com Y , então h_* é um isomorfismo de $\pi_1(X, x_0)$ com $\pi_1(Y, y_0)$.*

Demonstração. Ver Corolário 52.5, p. 334 em [18]. ■

Teorema 1.5. *A aplicação de inclusão $j : S^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ induz um isomorfismo de grupos fundamentais.*

Demonstração. Ver Teorema 58.2, p. 360 em [18]. ■

Teorema 1.6. *O grupo fundamental de S^1 é isomorfo ao grupo aditivo dos inteiros.*

Demonstração. Ver Teorema 54.5, p. 345 em [18]. ■

Lema 1.7. *Seja $p : E \longrightarrow B$ uma aplicação de recobrimento tal que $p(e_0) = b_0$. Qualquer caminho $f : [0, 1] \longrightarrow B$ começando em b_0 tem um único levantamento $\tilde{f} : [0, 1] \longrightarrow E$ começando em e_0 .*

Demonstração. Ver Lema 54.1, p. 342 em [18]. ■

Lema 1.8. $\pi(\mathbb{C} - \{0\}, z_0) \cong \mathbb{Z}$ para todo $z_0 \neq 0$, $z_0 \in \mathbb{C}$.

Demonstração. Note que

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} &\longrightarrow \mathbb{C} - \{0\} \\ (a,b) &\longmapsto a + bi \end{aligned}$$

é um homeomorfismo. Assim, segue do Corolário 1.4 que

$$\pi_1(\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}, (a,b)) \cong \pi_1(\mathbb{C} - \{0\}, a + bi).$$

Segue do Teorema 1.5 para $n = 1$, que $j : S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ induz o isomorfismo

$$\pi_1(\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}, (a,b)) \cong \pi_1\left(S^1, \frac{(a,b)}{\|(a,b)\|}\right).$$

Por outro lado, segue do Teorema 1.6 que $\pi_1\left(S^1, \frac{(a,b)}{\|(a,b)\|}\right) \cong \mathbb{Z}$.

Portanto,

$$\pi_1(\mathbb{C} - \{0\}, a + bi) \cong \pi_1(\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}, (a,b)) \cong \pi_1\left(S^1, \frac{(a,b)}{\|(a,b)\|}\right) \cong \mathbb{Z}$$

e tomando $z_0 = a + bi$, segue que $\pi(\mathbb{C} - \{0\}, z_0) \cong \mathbb{Z}$. ■

1.2 Cúbicas não singulares como grupos abelianos

Considere $\mathcal{U}_d = \{\mathcal{C} \in \mathbb{P}(\mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]_d) \mid \mathcal{C} \text{ é não singular}\}$.

Definição 1.5. Seja $\mathcal{C} = \mathbf{V}(f) \subset \mathbb{P}^2$ uma curva projetiva reduzida de grau d com $f \in \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]$. Seja p um ponto não singular de $\mathcal{C}$. Definimos a reta tangente a $\mathcal{C}$ em p por

$$T_p\mathcal{C} = \mathbf{V}(\partial_0 f(p)x_0 + \partial_1 f(p)x_1 + \partial_2 f(p)x_2)$$

onde $\partial_i f$ denota $\partial f / \partial x_i$.

Lema 1.9. Seja $\mathcal{C} = \mathbf{V}(f) \subset \mathbb{P}^2$ uma curva e ℓ uma reta contida em $\mathcal{C}$. Se $p \in \ell$ é um ponto não singular de $\mathcal{C}$. Então $\ell = T_p\mathcal{C}$.

Demonstração. Ver Lema A.1, p. 51 em [20]. ■

Definição 1.6. A multiplicidade de intersecção da reta ℓ com uma curva $\mathcal{C} = \mathbf{V}(f)$ no ponto $p \in \mathbb{P}^2$ é definida por

$$(\mathcal{C}, \ell)_p = \begin{cases} \infty, & \text{se } p \in \ell \subset \mathcal{C} \\ 0, & \text{se } p \notin \ell \\ m, & \text{se } \ell \not\subset \mathcal{C} \text{ e se } \mathcal{C}|_\ell \text{ possui um zero de ordem } m \text{ em } p. \end{cases}$$

Lema 1.10. Se $\mathcal{C} \in \mathcal{U}_d$ e $(\mathcal{C}, \ell)_p \geq 2$, então $\ell = T_p\mathcal{C}$.

Demonstração. A menos de uma mudança de coordenadas projetivas podemos assumir que $p = [0 : 0 : 1]$ e $\ell = \mathbf{V}(x_0)$.

Se $\mathcal{C} = [f] \in \mathcal{U}_d$ então escreva

$$f = a_d x_2^d + (\alpha x_0 + \beta x_1) x_2^{d-1} + L_2 x_2^{d-2} + \cdots + L_d$$

sendo L_i um polinômio geral em $\mathbb{C}[x_0, x_1]_i$ para cada $i \geq 2$.

Como $(\mathcal{C}, \ell)_p \geq 2$ segue que $p \in \mathcal{C}$. Logo, $f(p) = 0 = a_d$.

Portanto, $f = (\alpha x_0 + \beta x_1) x_2^{d-1} + \cdots + L_d$. Note que:

$$f|_{\ell} = \beta x_1 x_2^{d-1} + L_2(0, 1) x_1^2 x_2^{d-2} + \cdots + L_d(0, 1) x_1^d.$$

Neste caso, $(\mathcal{C}, \ell)_p \geq 2$ se, e somente se $\beta = 0$.

Por outro lado $T_p\mathcal{C} = \mathbf{V}(L)$ sendo $L = \partial_0 f(p) x_0 + \partial_1 f(p) x_1 + \partial_2 f(p) x_2$.

Como $p \in T_p\mathcal{C}$, segue que $L(p) = 0 = \partial_2 f(p)$. Assim,

$$L = \partial_0 f(p) x_0 + \partial_1 f(p) x_1.$$

Entretanto, $\partial_0 f = \alpha x_2^{d-1} + (d-2)x_0 x_2^{d-3} + (d-2)x_1 x_0 x_2^{d-3} + \cdots$, o que implica $\partial_0 f(p) = \alpha$ e $\partial_1 f = \beta x_2^{d-1} + (d-2)x_1 x_2^{d-3} + \cdots$, o que implica $\partial_1 f(p) = \beta$.

Portanto, (como $\beta = 0$) $T_p\mathcal{C} = \mathbf{V}(\alpha x_0) = \mathbf{V}(x_0) = \ell$ ($\alpha \neq 0$, pois $\text{Sing}(\mathcal{C}) = \emptyset$). ■

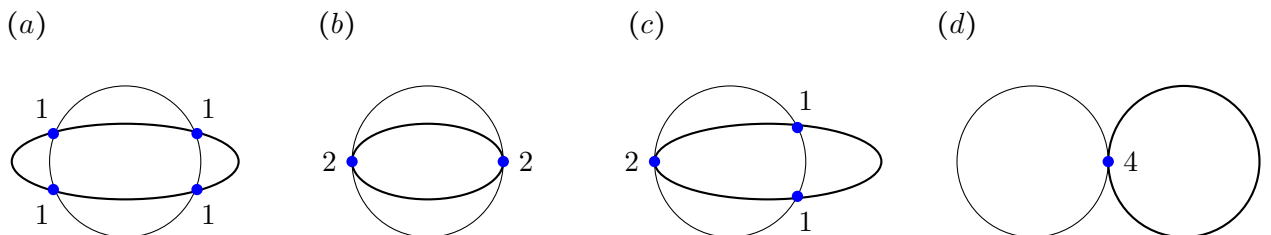
Definição 1.7. Seja $\mathcal{C} = \mathbf{V}(f) \subset \mathbb{P}^2$ com $f \in \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]_d$ ($d \geq 1$) uma curva e $p \in \mathcal{C}$ um ponto não singular. Diremos que o ponto p é um ponto de inflexão de $\mathcal{C}$, se $(T_p\mathcal{C}, \mathcal{C})_p \geq 3$. Caso, $(T_p\mathcal{C}, \mathcal{C})_p = d$, onde $d = \text{grau}(f)$, diremos que p é ponto de inflexão total.

Teorema 1.11. (De Bézout). Duas curvas planas projetivas F, G sem componentes em comum, tem $(\text{grau} F)(\text{grau} G)$ pontos em comum contados com multiplicidade.

Demonstração. Ver Teorema 11, p. 62 em [29]. ■

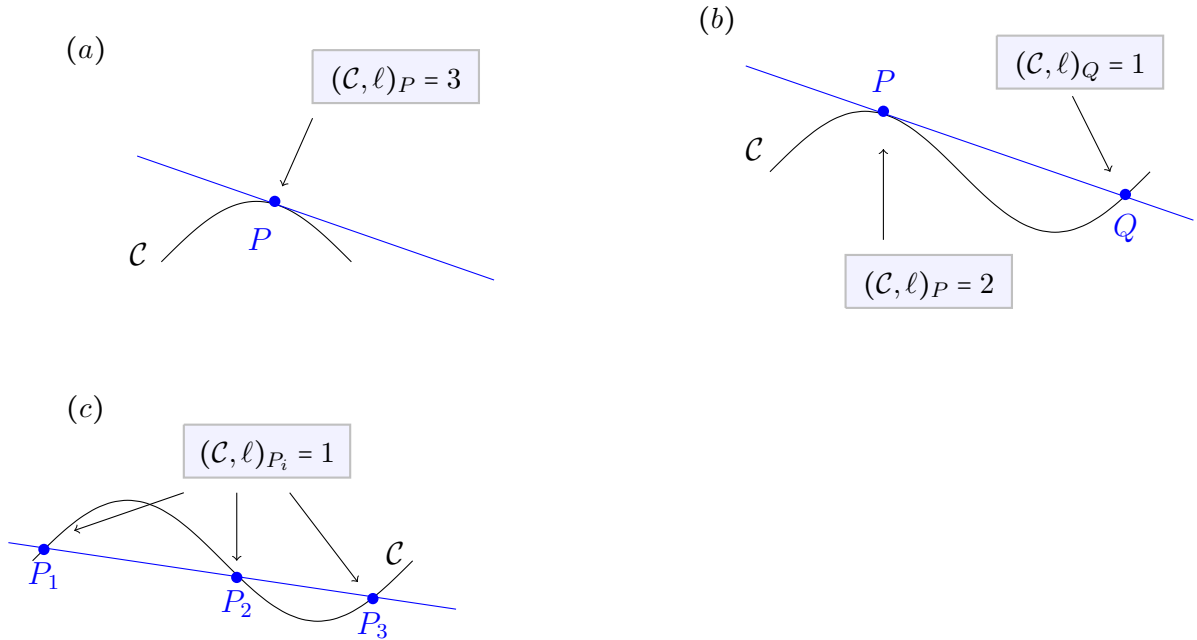
Fato 1.12. (Corolário Bézout). Se $O \in \mathcal{C}$ sendo $\mathcal{C}$ uma cúbica não singular tal que $(\mathcal{C}, T_O\mathcal{C})_O = 3$ (isto é O é ponto de inflexão) então $\mathcal{C} \cap T_O\mathcal{C} = \{O\}$.

Exemplo 1.1. Sejam $\mathcal{C} = \mathbf{V}(F)$ e $\mathcal{C}_1 = \mathbf{V}(F_1)$ com $F, F_1 \in \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]_2$ irredutíveis. Assim, o Teorema de Bézout nos garante que essas curvas tem as seguintes possibilidades de intersecção



Exemplo 1.2. Seja ℓ uma reta e $\mathcal{C} = \mathbf{V}(f)$ com $f \in \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]_3$.

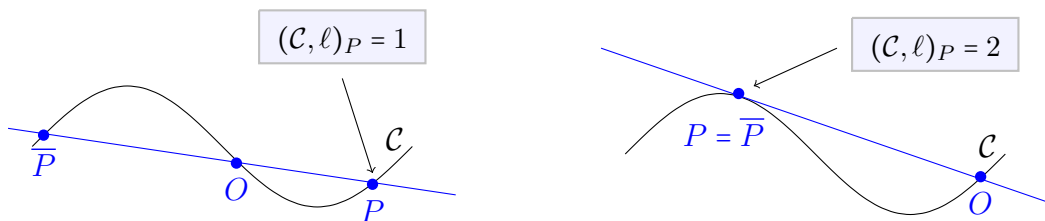
Neste exemplo temos as seguintes possibilidades para a intersecção da reta com a cúbica, segundo o Teorema de Bézout.



A função $P \mapsto \bar{P}$

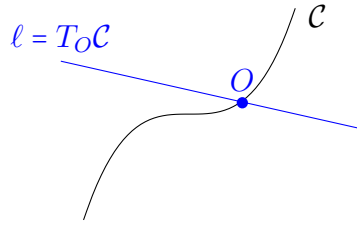
Considere $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{P}^2$ uma curva não singular de grau 3. Fixe $O \in \mathcal{C}$ um ponto de inflexão. Se $P \in \mathcal{C}$ considere $\bar{P} \in \mathcal{C}$ definido da seguinte forma:

Se $P \neq O$, considere a reta $\ell = \ell_{P,O}$ que passa pelos pontos P e O . Observe que temos duas possibilidades $(\mathcal{C}, \ell)_P = 1$ ou $(\mathcal{C}, \ell)_P = 2$, podendo ser representadas geometricamente da seguinte forma



Conforme ilustram as figuras, definimos $\bar{P}$ como o terceiro ponto na intersecção $\ell \cap \mathcal{C}$, caso contrário $\bar{P} = P$.

Agora, se $P = O$, então definimos $\bar{P} = O$.



Cúbicas não singulares como grupos abelianos

Considere $\mathcal{C}$ uma cúbica não singular e fixe $O \in \mathcal{C}$ ponto de inflexão.

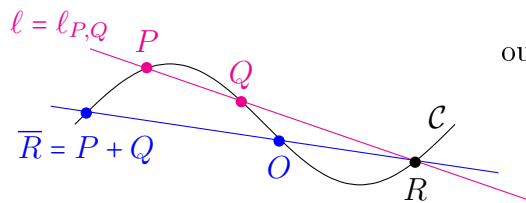
Defina a operação " + " em $\mathcal{C}$ por $P + Q = \overline{R}$, sendo R descrito a seguir

Caso 1: $P \neq Q$.

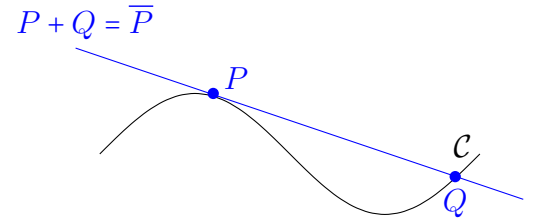
Considere a reta $\ell_{P,Q}$ determinada por P e Q . Neste caso temos duas possibilidades

(i) $\#(\ell_{P,Q} \cap \mathcal{C}) = 3$

(ii) $\#(\ell_{P,Q} \cap \mathcal{C}) = 2$



ou



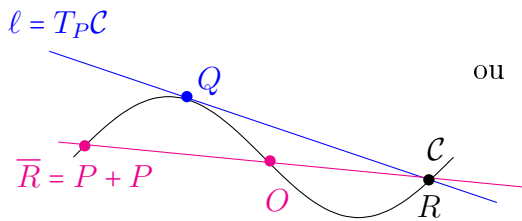
No caso (i) $\{R\} = \ell_{P,Q} \cap \mathcal{C} - \{P, Q\}$ e no caso (ii) $R = P$.

Caso 2: $P = Q$.

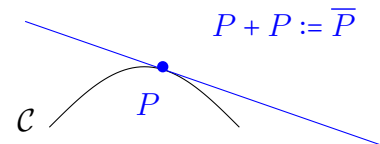
Considere $\ell = T_P \mathcal{C}$. Neste caso temos duas possibilidades

(a) $\#(T_P \mathcal{C} \cap \mathcal{C}) = 2$

(b) $\#(T_P \mathcal{C} \cap \mathcal{C}) = 1$



ou



Neste caso (a) $\{R\} = T_P \mathcal{C} \cap \mathcal{C} - \{P\}$ e no caso (b) $R = P$.

Exemplo 1.3. Temos que $P + O = P$. Agora, observe que se

$$\begin{cases} P = O \implies O + O \stackrel{\text{def}}{=} \overline{O} = O \\ P \neq O \implies P + O = \overline{R} = P \text{ (se } \#(\ell_{P,O} \cap \mathcal{C}) = 3) \text{ ou } P + O = \overline{P} = P \text{ (se } \#(\ell_{P,O} \cap \mathcal{C}) = 2). \end{cases}$$

Teorema 1.13. $(\mathcal{C}, +)$ é um grupo abeliano com elemento neutro O .

Demonstração. Ver Proposição 4, p. 63 em [7].

■

Capítulo 2

Grupos de Galois e monodromia em geometria enumerativa

Neste capítulo vamos introduzir o grupo de Galois e o grupo de monodromia associados a uma função racional dominante entre variedades (afins/projetivas) da mesma dimensão. As referências que norteiam este capítulo são [10] e [19].

Serão utilizados alguns conceitos de topologia geral, tais como: recobrimento, caminhos homotópicos, grupo fundamental entre outros, os quais podem ser encontrados no Capítulo 1 e também no texto Topology de James R. Munkres ([18]).

2.1 Explorando a relação entre o grupo fundamental e o grupo de Galois.

Considere a função $p : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ dada por $w \longmapsto w^2$. A seguir vamos mostrar que embora p não seja um recobrimento podemos escolher um aberto no qual a restrição de p será um recobrimento. Esse fato, como veremos na Subseção 2.1.2 é válido para funções racionais dominantes entre variedades da mesma dimensão.

Proposição 2.1. Seja $p : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ dada por $w \longmapsto w^2$. Então,

1. p não é um recobrimento.
2. A função $p_1 : \mathbb{C} - \{0\} \longrightarrow \mathbb{C} - \{0\}$ induzida por p é um recobrimento.
3. Se $H = p_{1*}(\pi_1(\mathbb{C} - \{0\}, z_0))$, então $[\pi_1(\mathbb{C} - \{0\}, z_0^2) : H] = 2$ e $H \cong 2\mathbb{Z}$, com $p_{1*} : \pi_1(\mathbb{C} - \{0\}, z_0) \longrightarrow \pi_1(\mathbb{C} - \{0\}, z_0^2)$ dada por $[\gamma] \longmapsto [p_1 \circ \gamma]$.

Demonstração. Prova do item 1. Temos $p : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ dada por $w \longmapsto w^2$. Assim,

$$p^{-1}(0) = \{0\} \text{ e } p^{-1}(\{a\}) = \{z \in \mathbb{C} \mid p(z) = z^2 = a\} = \{\sqrt{a}, -\sqrt{a}\}.$$

Como $\#p^{-1}(0) = 1 \neq \#p^{-1}(1) = 2$. Segue que p não é um recobrimento.

Prova do item 2. Considere p restrita ao aberto $\mathbb{C} - \{0\}$, ou seja, $p_1 : \mathbb{C} - \{0\} \rightarrow \mathbb{C} - \{0\}$ dada por $w \mapsto w^2$.

Observe que p_1 é sobrejetora e $p^{-1}(a) = \{\sqrt{a}, -\sqrt{a}\}$.

Considere o conjunto fechado

$$D = \{z \in \mathbb{C} - \{0\} \mid \operatorname{Im}(z) = 0 \text{ e } \operatorname{Re}(z) \leq 0\}.$$

Para cada $z \in \mathbb{C} - D$ considere

$$\sqrt{z} = \sqrt{r} \frac{(z+r)}{\|z+r\|} \text{ com } r = \|z\|. \quad (2.1)$$

Observe que $(\sqrt{z})^2 = z$. Além disso,

$$\text{se } z \in U = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) > 0 \text{ e } \operatorname{Re}(z) > 0\}, \text{ então } \sqrt{z} \in U.$$

Defina $U_1 = \{\sqrt{z} \mid z \in U\}$ e $U_2 = \{-\sqrt{z} \mid z \in U\}$. Considere

$$\begin{array}{ccc} q_+ : U \rightarrow U_1 & \text{e} & q_- : U \rightarrow U_2 \\ z \mapsto \sqrt{z} & & z \mapsto -\sqrt{z} \end{array}$$

Note que $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. Além disso,

$$p_1^{-1}(U) = U_1 \dot{\cup} U_2 \text{ e } p_{1|U_i} : U_i \rightarrow U \text{ é um homeomorfismo.} \quad (2.2)$$

Agora, iremos mostrar que p_1 é um recobrimento. Considere $z \in \mathbb{C} - \{0\}$.

Caso 1: $z \in U$.

Segue de (2.2) que $p_1^{-1}(U) = U_1 \dot{\cup} U_2$ e $p_{1|U_i} : U_i \rightarrow U$ é um homeomorfismo.

Caso 2: $z \notin U$.

Escolha $z_0 \in \mathbb{C}$ tal que $z_0^{-2}z \in U$ ¹.

Observe que a multiplicação por $\xi \in \mathbb{C} - \{0\}$, $m_\xi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $z \mapsto \xi z$ é um homeomorfismo (que leva $0 \mapsto 0$).

Assim, obtemos os abertos $V = m_{z_0^2}(U)$ contendo z e $V_i = m_{z_0^{-1}}(U_i)$ $i = 1, 2$, de modo que $p_i : V_i \rightarrow V$ é um homeomorfismo conforme ilustra o diagrama

¹Se $z_0 \in \mathbb{C} - D$ considere $\sqrt{z_0}$ de acordo com (2.1). Caso contrário, considere $\sqrt{z_0} = \sqrt{r_0}i$ e $r_0 = \|z_0\|$.

$$\begin{array}{ccc}
 V_i & \xrightarrow[m_{z_0^{-1}}]{\text{homeomorfismo}} & U_i \\
 p_{1|V_i} \downarrow & & \downarrow p_{1|U_i} \text{homeomorfismo} \\
 V & \xleftarrow[m_{z_0^2}]{\text{homeomorfismo}} & U
 \end{array}$$

Prova do item 3. Lembre que $\#p_1^{-1}(z) = 2$ para todo $z \in \mathbb{C} - \{0\}$. Além disso, $\mathbb{C} - \{0\} \cong \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ é conexo por caminhos. Assim, o item (b) do Teorema 54.6 em [18] nos garante que

$$\Phi : \frac{\pi_1(\mathbb{C} - \{0\}, z_0^2)}{H} \longrightarrow p_1^{-1}(z_0^2)$$

é uma bijeção, logo $\# \left(\frac{\pi_1(\mathbb{C} - \{0\}, z_0^2)}{H} \right) = \#p_1^{-1}(z_0^2) = 2$. Portanto, $[\pi_1(\mathbb{C} - \{0\}, z_0^2) : H] = 2$.

Segue do Lema 1.8 (no Capítulo 1) que $\pi_1(\mathbb{C} - \{0\}, z_0) \cong \mathbb{Z}$ daí, $[\mathbb{Z} : H] = 2$. Agora sendo $2\mathbb{Z}$ o único subgrupo de $\mathbb{Z}$ de índice 2 segue que $H \cong 2\mathbb{Z}$. ■

2.1.1 O grupo de monodromia associado a um recobrimento

Sejam X, Y e Z espaços topológicos. Considere as funções contínuas $f : X \longrightarrow Y$ e $g : Z \longrightarrow Y$. Uma função contínua $\tilde{g} : Z \longrightarrow X$ é um levantamento de g se $f \circ \tilde{g} = g$.

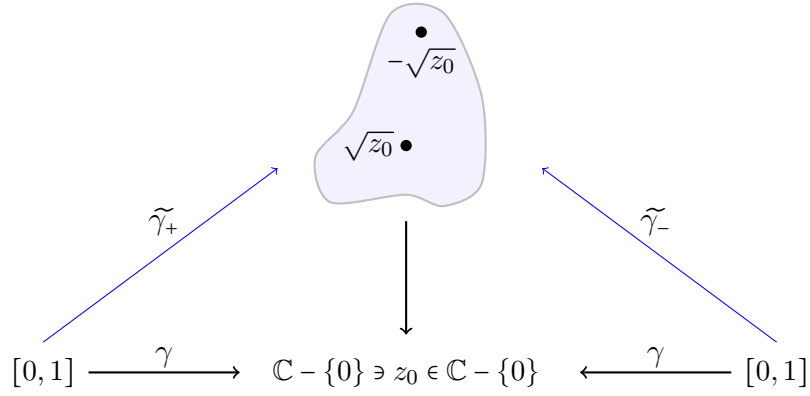
$$\begin{array}{ccc}
 & X & \\
 \tilde{g} \nearrow & \downarrow f & \\
 Z & \xrightarrow{g} & Y
 \end{array}$$

Exemplo 2.1. Sejam $f : \mathbb{R} \longrightarrow S^1$ dada por $x \mapsto (\cos 2\pi x, \sin 2\pi x)$ e $g : [0, 3] \xrightarrow{t} S^1$ dada por $t \mapsto (\cos t, \sin t)$. Observe que $\tilde{g} : [0, 3] \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $t \mapsto \frac{t}{2\pi}$ é um levantamento de g .

De fato, $\tilde{g}$ é contínua e $(f \circ \tilde{g})(t) = f(\tilde{g}(t)) = f\left(\frac{t}{2\pi}\right) = (\cos t, \sin t) = g(t)$.

Exemplo 2.2. Sejam $p_1 : \mathbb{C} - \{0\} \longrightarrow \mathbb{C} - \{0\}$ dada por $z \mapsto z^2$ e $\gamma : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{C} - \{0\}$ dada por $t \mapsto r_0 e^{2\pi(\theta_0 + t)i}$ com $0 \leq \theta_0 < 1$ e $z_0 = r_0 e^{2\pi\theta_0 i} \in \mathbb{C} - \{0\}$.

Considere os caminhos $\tilde{\gamma}_+$ e $\tilde{\gamma}_-$ ilustrados na imagem abaixo



Em que, para todo $t \in [0, 1]$

$$\tilde{\gamma}_+(t) = \sqrt{r_0} e^{\pi(\theta_0+t)i} \quad \text{e} \quad \tilde{\gamma}_-(t) = -\sqrt{r_0} e^{\pi(\theta_0+t)i}.$$

Observe que

$$p_1 \circ \tilde{\gamma}_+(t) = p_1 \left(\sqrt{r_0} e^{\pi(\theta_0+t)i} \right) = \left(\sqrt{r_0} e^{\pi(\theta_0+t)i} \right)^2 = r_0 e^{2\pi(\theta_0+t)i} = \gamma(t) \quad \forall t \in [0, 1].$$

Assim $\tilde{\gamma}_+$ é um levantamento de γ tal que

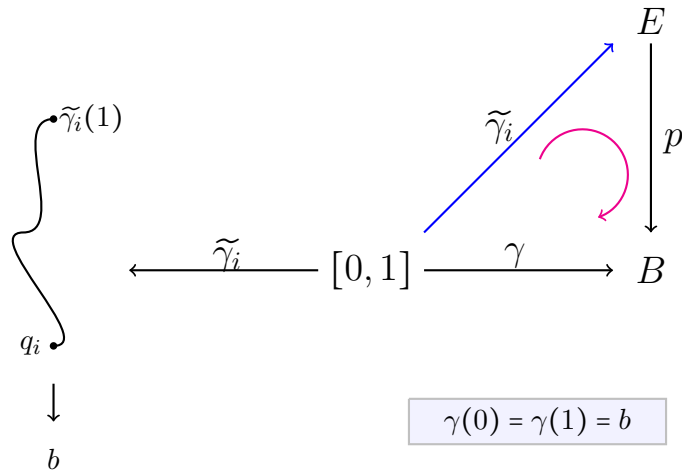
$$\tilde{\gamma}_+(0) = \sqrt{r_0} e^{\pi(\theta_0)i} = \sqrt{z_0} \quad \text{e} \quad \tilde{\gamma}_+(1) = \sqrt{r_0} e^{\pi(\theta_0+1)i} = \sqrt{r_0} e^{\pi\theta_0 i} e^{\pi i} = -\sqrt{z_0}.$$

De maneira análoga, temos que $p_1 \circ \tilde{\gamma}_-(t) = \gamma(t)$, logo $\tilde{\gamma}_-$ também é um levantamento de γ , tal que $\tilde{\gamma}_-(0) = -\sqrt{z_0}$ e $\tilde{\gamma}_-(1) = \sqrt{z_0}$.

Observação 2.1. Considere um recobrimento $p : E \rightarrow B$ cujas fibras são finitas e têm cardinalidade d .

Fixe $b \in B$ e $\Gamma = p^{-1}(b) = \{q_1, \dots, q_d\}$.

Seja $\gamma : [0, 1] \rightarrow B$ um caminho fechado em b (isto é, γ é uma função contínua tal que $\gamma(0) = \gamma(1) = b$). Assim, segue do Lema 1.7 (no Capítulo 1) que ao fixar $q_i \in \Gamma$. Existe um único levantamento $\tilde{\gamma}_i : [0, 1] \rightarrow E$ de γ com início em q_i .



Lema 2.2. Com as notações acima, a função

$$\begin{aligned}\Phi_\gamma : \Gamma &\longrightarrow \Gamma \\ q_i &\longmapsto \tilde{\gamma}_i(1)\end{aligned}$$

é uma bijeção.

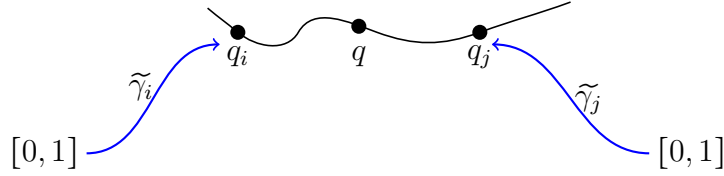
Demonstração. 1. Φ_γ está bem definida.

O Lema 1.7 (no Capítulo 1) nos garante que existe um único levantamento $\tilde{\gamma}_i$ de γ com início em q_i . Assim, $p \circ \tilde{\gamma}_i = \gamma$ o que implica que $p(\tilde{\gamma}_i(t)) = \gamma(t)$ para todo $t \in [0, 1]$. Logo, $p(\tilde{\gamma}_i(1)) = \gamma(1) = b$, portanto $\tilde{\gamma}_i(1) \in p^{-1}(b)$.

2. Φ_γ é uma bijeção.

Como $\Gamma = p^{-1}(b) = \{q_1, \dots, q_d\}$ é finito, basta mostrar que $\Phi_\gamma : \Gamma \longrightarrow \Gamma$ é injetora.

Considere $q_i, q_j \in \Gamma$ com $i \neq j$. Vamos mostrar que $\Phi_\gamma(q_i) \neq \Phi_\gamma(q_j)$, ou seja, $\tilde{\gamma}_i(1) \neq \tilde{\gamma}_j(1)$. Suponha (por absurdo) que $\tilde{\gamma}_i(1) = \tilde{\gamma}_j(1) = q$, como mostra a imagem a seguir



com $p \circ \tilde{\gamma}_i(t) = \gamma(t)$ e $p \circ \tilde{\gamma}_j(t) = \gamma(t)$ para todo $t \in [0, 1]$.

Note que $\tilde{\gamma}_i(1-t)$ é um levantamento de γ com ponto inicial $\tilde{\gamma}_i(1) = q$ ($t = 0$) e ponto final $\tilde{\gamma}_i(0) = q_i$ ($t = 1$). De maneira análoga, temos que $\tilde{\gamma}_j(1-t)$ é um levantamento de γ com ponto inicial $\tilde{\gamma}_j(1) = q$ ($t = 0$) e ponto final $\tilde{\gamma}_j(0) = q_j$ ($t = 1$) (Absurdo!)².

■

Seja $\bullet$ a operação em $B_{ij}(\Gamma)$ dada por $\sigma \bullet \tau = \tau \circ \sigma$ sendo $\circ$ a composta de funções.

Proposição 2.3. Considere

$$\begin{aligned}\Phi : \pi_1(B, b) &\longrightarrow B_{ij}(\Gamma) \\ [\gamma] &\longmapsto \Phi_\gamma,\end{aligned}$$

sendo $\Gamma = p^{-1}(b) = \{q_1, \dots, q_d\}$ e Φ_γ definida no Lema 2.2. Então Φ é um homomorfismo de grupos.

²Pois, existe um único levantamento de γ começando em $q \in \Gamma = p^{-1}(b)$ (cf. Lema 1.7 no Capítulo 1).

Demonstração. i) Φ está bem definida.

Sejam $[f], [g] \in \pi_1(B, b)$, tais que $[f] = [g]$. Se $\tilde{f}_i$ e $\tilde{g}_i$ forem levantamentos de f e g começando em q_i , respectivamente, então segue do Teorema 1.2 (no Capítulo 1) que $\tilde{f}_i(1) = \tilde{g}_i(1)$ visto que $[f] = [g]$. Daí, $\Phi_f(q_i) = \Phi_g(q_i) \forall i$. Portanto, $\Phi([f]) = \Phi([g])$.

ii) Φ é um homomorfismo de grupos.

Observe que se $[f], [g] \in \pi_1(B, b)$, então

$$\Phi([f] \otimes [g]) = \Phi([f * g]) = \Phi_{f * g} \text{ e } \Phi([f]) \bullet \Phi([g]) = \Phi_g \circ \Phi_f.$$

Assim, Φ é homomorfismo de grupos se

$$\Phi_{f * g} = \Phi_g \circ \Phi_f \forall [f], [g] \in \pi_1(B, b).$$

Logo precisamos mostrar que $\underbrace{\Phi_{f * g}(q_i)}_{(I)} = \underbrace{\Phi_g(\Phi_f(q_i))}_{(II)} \forall q_i \in \Gamma$.

$$(I) \Phi_{f * g}(q_i) = (\widetilde{f * g})_i(1).$$

$$(II) \Phi_g(\Phi_f(q_i)) = \Phi_g(q_k) = \tilde{g}_k(1), \text{ se } \Phi_f(q_i) = q_k.$$

Afirmção 1. $\tilde{f}_i * \tilde{g}_k$ é um levantamento de $f * g$ com início em q_i e ponto final em $\Phi_g(q_k)$.

Segue da definição 1.3 (no Capítulo 1) que

$$f * g(s) = \begin{cases} f(2s) & \text{para } s \in [0, \frac{1}{2}] \\ g(2s - 1) & \text{para } s \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Observe que:

1. Para todo $t \in [0, \frac{1}{2}]$,

$$p(\tilde{f}_i * \tilde{g}_k(t)) = p(\tilde{f}_i(2t)) \stackrel{(*)}{=} f(2t).$$

(*) $\tilde{f}_i$ é um levantamento de f , ou seja, para todo $t \in [0, 1]$, $p(\tilde{f}_i(t)) = f(t)$.

2. Para todo $t \in [\frac{1}{2}, 1]$,

$$p(\tilde{f}_i * \tilde{g}_k(t)) = p(\tilde{g}_k(2t - 1)) \stackrel{(**)}{=} g(2t - 1).$$

(**) $\tilde{g}_k$ é um levantamento de g , ou seja, para todo $t \in [0, 1]$, $p(\tilde{g}_k(t)) = f(t)$.

Portanto, $\tilde{f}_i * \tilde{g}_k$ é um levantamento de $f * g$. Além disso, $\tilde{f}_i * \tilde{g}_k(0) = \tilde{f}_i(0) = q_i$. E ainda, segue do Lema 1.7 (no Capítulo 1) que esse levantamento é único. Logo, $\tilde{f}_i * \tilde{g}_k = (\widetilde{f * g})_i$, e sendo $\Phi_g(q_k)$ o ponto final de $\tilde{f}_i * \tilde{g}_k$, segue que $\Phi_{f * g}(q_i) = \Phi_g(\Phi_f(q_i))$. ■

Observação 2.2. Seja $\mathcal{C}$ um conjunto finito com d elementos e S_d o conjunto das permutações de d elementos. Ao considerarmos as operações

$$f \bullet g = g \circ f \text{ em } B_{ij}(\mathcal{C}) \quad \text{e} \quad \sigma \bullet \tau = \tau \circ \sigma \text{ em } S_d,$$

verifica-se que

$$\begin{aligned} (B_{ij}(\mathcal{C}), \bullet) &\xrightarrow{\psi} (S_d, \bullet) \\ f &\longmapsto \psi_f \end{aligned}$$

com $\psi_f(i) = j$ se $f(c_i) = c_j$ é um isomorfismo de grupos.

O grupo de monodromia associado ao recobrimento $p : E \longrightarrow B$ será denotado por $\mathcal{M}$ e é igual à imagem de $\pi_1(B, b)$ via $\psi \circ \Phi$ em S_d . Ou seja,

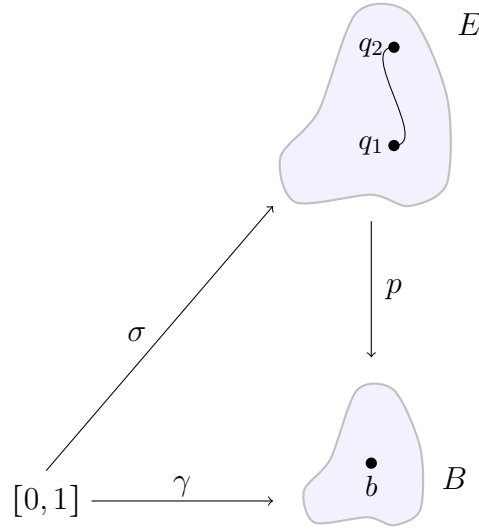
$$\begin{array}{ccccc} \pi_1(B, b) & \xrightarrow{\Phi} & B_{ij}(\Gamma) & \xrightarrow{\psi} & S_d \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & & \psi \circ \Phi & & \end{array}$$

$$\mathcal{M} = \text{Im}(\psi \circ \phi) = \psi(\phi(\pi_1(B, b))) \leq S_d.$$

Lema 2.4. Se E é conexo por caminhos e $p : E \longrightarrow B$ é um recobrimento, então o grupo de monodromia de p age transitivamente nas fibras de todo ponto $b \in B$.

Demonstração. Dados $q_1, q_2 \in p^{-1}(b)$, queremos mostrar que existe $\Phi_\gamma \in \Phi(\pi_1(B, b))$ tal que $\Phi_\gamma(q_1) = q_2$.

Sendo E conexo por caminhos existe $\sigma : [0 : 1] \longrightarrow E$ contínua tal que $\sigma(0) = q_1$ e $\sigma(1) = q_2$.



Considere $\gamma : [0, 1] \rightarrow B$ dada por $t \mapsto p \circ \sigma(t)$. Observe que γ é um caminho fechado em B tal que $\gamma(0) = p(q_1) = b$ e $\gamma(1) = p(q_2) = b$. Assim, $\Phi_\gamma \in \Phi(\pi_1(B, b))$ satisfaz $\Phi_\gamma(q_1) = q_2$. ■

Cálculo do grupo de monodromia de p_1

Consideremos mais uma vez

$$\begin{aligned} p_1 : \mathbb{C} - \{0\} &\longrightarrow \mathbb{C} - \{0\} \\ w &\longmapsto w^2. \end{aligned}$$

Lembre que $\#p_1^{-1}(z) = 2$ para todo $z \in \mathbb{C} - \{0\}$. Assim, $B_{ij}(\Gamma) \cong S_2$, se $\Gamma = p_1^{-1}(z)$.

Afirmção 2.1. A aplicação $\Phi : \pi_1(\mathbb{C} - \{0\}, z) \rightarrow B_{ij}(\Gamma)$ definida na Proposição 2.3 é sobrejetora.

De fato, considere $z = re^{2\pi\theta i}$ com $0 \leq \theta \leq 1$ e $r > 0$. Então,

$$\gamma(t) = re^{2\pi(\theta+t)i} \text{ com } 0 \leq t \leq 1$$

é um caminho fechado em $\mathbb{C} - \{0\}$ tal que $\gamma(0) = re^{2\pi\theta i} = \gamma(1)$.

Agora, observe que segue do Exemplo 2.2 que

i) $\gamma_+(t) = \sqrt{r}e^{\pi(\theta+t)i}$ é um levantamento de γ tal que $\gamma_+(0) = \sqrt{z}$ e $\gamma_+(1) = -\sqrt{z}$.
Assim, $\Phi_\gamma(\sqrt{z}) = \tilde{\gamma}_+(1) = -\sqrt{z}$.

ii) $\gamma_-(t) = -\sqrt{r}e^{\pi(\theta+t)i}$ é um levantamento de γ tal que $\gamma_-(0) = -\sqrt{z}$ e $\gamma_-(1) = \sqrt{z}$.
Assim, $\Phi_\gamma(-\sqrt{z}) = \tilde{\gamma}_-(1) = \sqrt{z}$.

Os itens *i)* e *ii)* nos permitem concluir que

$$\begin{aligned}\Phi_\gamma : \Gamma &\longrightarrow \Gamma \\ \sqrt{z} &\longmapsto -\sqrt{z} \\ -\sqrt{z} &\longmapsto \sqrt{z}\end{aligned}$$

é um elemento de ordem 2 em $B_{ij}(\Gamma)$. Assim, $B_{ij}(\Gamma) = \langle \Phi_\gamma \rangle$, visto que $|B_{ij}(\Gamma)| = 2$.

Portanto, $\Phi : \pi_1(\mathbb{C} - \{0\}, z) \longrightarrow B_{ij}(\Gamma)$ é sobrejetora.

Assim, temos que,

$$\begin{array}{ccccc}\pi_1(\mathbb{C} - \{0\}, z) & \xrightarrow{\Phi} & B_{ij}(\Gamma) & \xrightarrow[\text{Isom.}]{\psi} & S_2 \\ & \searrow & & & \\ & & \text{Im}(\psi \circ \Phi) = S_2 & & \boxed{\mathcal{M} = S_2}\end{array}$$

Grupo de Galois associado a p_1

Vamos começar mostrando que as extensões de corpos determinadas por p^* e p_1^* sendo

$$\begin{array}{ccc} p : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} & \text{e} & p_1 : \mathbb{C} - \{0\} \longrightarrow \mathbb{C} - \{0\} \\ w \longmapsto w^2 & & w \longmapsto w^2 \end{array}$$

são iguais. De fato, tem-se que

Lema 2.5. Com as notações acima p e p_1 induzem a extensão de corpos $\mathbb{C}(t^2) \hookrightarrow \mathbb{C}(t)$.

Demonstração. Observe que $p : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ é um morfismo, visto que é uma função polinomial.

Sendo p uma função sobrejetora, segue que p é uma função racional dominante, dessa forma a Proposição A.17 (no apêndice A) nos permite concluir que p induz o homomorfismo injetivo

$$\begin{aligned}p^* : K(\mathbb{C}) &\longrightarrow K(\mathbb{C}) \\ (\overline{U}, f) &\longmapsto (\overline{p^{-1}(U)}, f \circ p|)\end{aligned}$$

Por outro lado, ao considerarmos $\mathbb{C}$ como uma variedade afim (com a topologia de Zariski), $\mathbb{C} - \{0\}$ é um aberto de $\mathbb{C}$ e segue do Lema A.13 (no apêndice A) que $K(\mathbb{C}) \cong K(\mathbb{C} - \{0\})$. Assim, $p_1^* = p^*$. Além disso, $p^*(\overline{\mathbb{C}}, id) = \overline{(\mathbb{C}, p)}$ e $A(\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}[t]$ de onde concluimos que $K(\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}(t)$. A partir do diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 K(\mathbb{C}) & \xrightarrow{p^*} & K(\mathbb{C}) \\
 \uparrow & & \downarrow \\
 \mathbb{C}(u) & \longrightarrow & \mathbb{C}(t)
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{ccc}
 (\overline{\mathbb{C}}, id) & \xrightarrow{p^*} & (\overline{\mathbb{C}}, p) \\
 \uparrow & & \downarrow \\
 u & \longrightarrow & t^2
 \end{array}$$

concluí-se que as extensões de corpos determinadas por p^* e p_1^* se correspondem com $\mathbb{C}(t) \hookrightarrow \mathbb{C}(t^2)$.

■

O grupo de Galois de uma extensão galoisiana

A seguir vamos lembrar as noções de polinômio separável e corpo de decomposição de um polinômio com o intuito de definir extensão galoisiana.

O polinômio $f \in F[x]$ sendo F um corpo é dito separável se suas raízes na clausura algébrica de F são distintas. Ou seja, se f tem grau $n > 0$ e $f = u(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_n)$ em $\overline{F}[x]$ com $u \in F$ e $\alpha_i \in \overline{F}$ tal que $\alpha_i \neq \alpha_j$ para todo $i \neq j$.

Por exemplo, $f = x^2 - 2 \in \mathbb{Q}[x]$ é separável, pois $f = (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$ em $\overline{\mathbb{Q}}[x]$ com $\sqrt{2} \neq -\sqrt{2}$.

Se $f \in F[x]$ tem grau $n \geq 1$ e L é uma extensão de F tal que

$$f = u(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_n) \text{ com } \alpha_i \in L \text{ para todo } i \text{ e } u \in F.$$

Então dizemos que L é um corpo onde f se decompõe ou fatora.

O corpo de decomposição de $f \in F[x]$ é dado por

$$F(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \bigcap L, \text{ com } L \text{ corpo e } F \hookrightarrow L \ni \alpha_i \ \forall \ i.$$

Assim $F(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ é a menor extensão de F contendo $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ e também é chamada extensão de F gerada por $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$. Assim,

- $F(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ é uma extensão de F onde f se fatora;
- se $F \hookrightarrow L_1$ e f se fatora em L_1 , então $F(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \hookrightarrow L_1$.

Definição 2.1. (Extensão galoisiana.) Considere a extensão de corpos $F \hookrightarrow L$. Dizemos que $F \hookrightarrow L$ é uma extensão galoisiana se existe $f \in F[x]$ tal que f é separável e L é o corpo de decomposição de f .

Exemplo 2.3. $\mathbb{C}(t^2) \hookrightarrow \mathbb{C}(t)$ é uma extensão galoisiana.

Note que $f = x^2 - t^2 \in F[x]$, sendo $F = \mathbb{C}(t^2)$, possui raízes t e $-t$ em $L = \mathbb{C}(t)$. De fato, $f = (x - t)(x + t)$. Assim, concluímos que f é separável em L . Além disso, $F(t, -t) = F(t) = L$. Portanto L é o corpo de decomposição de f .

Seja $F \hookrightarrow L$ uma extensão galoisiana. Neste caso, existe $P(x) \in F[x]$ separável tal que L é o corpo de decomposição de $P(x)$.

Assim, $P(x) = u(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_n)$ com $\alpha_i \in L$ e $\alpha_i \neq \alpha_j$ para todo $i \neq j$. De fato, $L = F(\alpha_1, \dots, \alpha_d)$. Seja $R = \{\alpha_1, \dots, \alpha_d\}$ o conjunto das raízes de $P(x)$ em L .

Defina

$$\text{Aut}_F L = \{\varphi \in \text{Aut}(L) \mid \varphi(a) = a \ \forall \ a \in F\}.$$

Proposição 2.6. Com as notações acima, se $\alpha \in R$ e $\varphi \in \text{Aut}_F L$, então $\varphi(\alpha) \in R$ (ou seja, φ permuta as raízes de $P(x)$).

Demonstração. Assuma que $P(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_dx^d$, $a_0, a_1, \dots, a_d \in F$.

Assim, se $\alpha \in R \subset L$, segue-se que

$$\begin{aligned} P(\alpha) = 0 &\implies \sum_{i=0}^d a_i \alpha^i = 0 \xrightarrow{\varphi} \varphi\left(\sum_{i=0}^d a_i \alpha^i\right) = \varphi(0) \xrightarrow{\varphi \text{ é um isom.}} \sum_{i=0}^d \varphi(a_i) \varphi(\alpha^i) = 0 \\ &\xrightarrow{\varphi(a_i) = a_i} \sum_{i=0}^d a_i \varphi(\alpha^i) = 0 = P(\varphi(\alpha)). \end{aligned}$$

Daí, $\varphi|_R : R \longrightarrow R \in B_{ij}(R)$ para todo $\varphi \in \text{Aut}_F L$. ■

Proposição 2.7. A aplicação

$$\begin{aligned} \text{Aut}_F L &\longrightarrow B_{ij}(R) \\ \varphi &\longmapsto \varphi|_R \end{aligned}$$

é um homomorfismo de grupos.

Demonstração. Sejam $\varphi, \varphi_1 \in \text{Aut}_F L$. Observe que $(\varphi \circ \varphi_1)|_R = \varphi|_R \circ \varphi_1|_R$. A última igualdade segue da Proposição 2.4 uma vez que φ e $\varphi_1 \in \text{Aut}_F L$.

Portanto, $\varphi \longmapsto \varphi|_R$ é um homomorfismo de grupos. ■

A aplicação

$$\begin{aligned} \psi : B_{ij}(R) &\longrightarrow S_d \\ f &\longmapsto \psi_f \end{aligned}$$

com $\psi_f(i) = j$ se $f(\alpha_i) = \alpha_j$ é um isomorfismo de grupos.

Assim, temos

$$\begin{array}{ccccc}
 & & f & \longmapsto & \psi_f \\
 \text{Aut}_F L & \xrightarrow{\Phi} & B_{ij}(R) & \xrightarrow{\psi} & S_d \\
 \varphi & \longmapsto & \varphi|_R & &
 \end{array}$$

O grupo de Galois associado à extensão galoisiana $F \hookrightarrow L = F(\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ é o subgrupo $\text{Gal}(L/F)$ de S_d dado pela imagem de $\psi \circ \Phi$. Ou seja,

$$\text{Gal}(L/F) = \psi(\Phi(\text{Aut}_F L)) \leq S_d.$$

Por exemplo, sabemos que $L = F(t)$ é o corpo de decomposição de $P(x) = x^2 - t^2 \in F[x]$ sendo $F = \mathbb{C}(t^2)$. Assim, $R = \{t, -t\}$. Portanto, $\text{Gal}(L/F) \leq S_2$. Logo, $\text{Gal}(L/F) = \{id\}$ ou $\text{Gal}(L/F) = S_2$.

Note que

$$\begin{array}{ccc}
 \varphi : F(t) & \longrightarrow & F(t) \\
 t & \longmapsto & -t \\
 F \ni a & \longmapsto & a
 \end{array}$$

é um elemento de $\text{Aut}_F L$ que tem ordem 2. Portanto, o grupo de Galois da extensão $F = \mathbb{C}(t^2) \hookrightarrow \mathbb{C}(t) = L = F(t)$ é S_2 , ou seja, $\text{Gal}(\mathbb{C}(t)/\mathbb{C}(t^2)) = S_2$.

2.1.2 Grupo de Galois e grupo de monodromia

Sejam X e Y variedades projetivas da mesma dimensão. Considere $p : X \longrightarrow Y$ uma função racional dominante de grau $d > 0$.

Sabemos que p induz o homomorfismo injetivo $p^* : K(Y) \longrightarrow K(X)$ (cf. Proposição A.22). Assim, p induz a extensão de corpos

$$p^* : K(Y) \longrightarrow K(X) \text{ ou a extensão } p^*(K(Y)) \hookrightarrow K(X). \quad (2.3)$$

Além disso, sendo p genericamente finita, segue da Proposição A.19 (no Apêndice A) que a extensão em (2.3) é finita e como $\text{char}(\mathbb{C}) = 0$, então $\#p^{-1}(y) = d = [K(X) : p^*(K(Y))]$ com $y \in V$, $V \stackrel{ab}{\subseteq} Y$.

Portanto, $\Gamma = p^{-1}(b) = \{q_1, \dots, q_d\}$ se $b \in Y$ é geral (ou seja, b varia num aberto V de Y onde p é genericamente finita).

Sendo $\text{char}(\mathbb{C}) = 0$, temos que $\text{char}(p^*(K(Y))) = 0$ e ainda se $[K(X) : p^*(K(Y))] = d$ finita, segue que existe $\alpha \in K(X)$ tal que $K(X) = F(\alpha)$ com $F = p^*(K(Y))$ (cf. Teorema 5.1, p. 59 em [17]).

Tendo em consideração que a extensão em (2.3) pode não ser galoisiana, considere L o fecho de Galois da extensão (2.3). Ou seja

$$p^*(K(Y)) \hookrightarrow K(X) \hookrightarrow L \quad \text{é galoisiana} \quad (2.4)$$

e se $K(X) \hookrightarrow L_1$ e $p^*(K(Y)) \hookrightarrow L_1$ é galoisiana. Então $L \subseteq L_1$.

Ao considerarmos $P(x) = \text{irr}(\alpha, F) \in F[x]$ o polinômio mônico de menor grau tal que $P(\alpha) = 0$, segue que $[F(\alpha) : F] = d = \text{grau}(P(x))$ (cf. Proposição 3, p. 98 em [8]). Ainda verifica-se que L é o corpo de decomposição de $P(x)$ (cf. p. 688 em [10], p. 4-6 em [19]).

Se $R = \{\alpha = \alpha_1, \dots, \alpha_d\}$ são as raízes de $P(x) \in F[x]$ em L , temos de maneira análoga ao que fizemos na seção anterior

$$\begin{array}{ccccc} & & f & \longmapsto & \psi_f \\ \text{Aut}_F L & \xrightarrow{\Phi} & B_{ij}(R) & \xrightarrow{\psi} & S_d \\ & & F_\varphi & \longmapsto & \varphi|_R \end{array}$$

E definimos o grupo de Galois associado à extensão

$$F = p^*(K(Y)) \hookrightarrow K(X) = F(\alpha) \hookrightarrow L = F(\alpha_1, \dots, \alpha_d)$$

por $\text{Gal}(L/F) = \psi \circ \Phi(\text{Aut}_F L) \subseteq S_d$ sendo L o fecho de Galois da extensão $F \hookrightarrow K(X)$.

Grupo de monodromia associado a uma função racional

Recordemos que o grupo de monodromia definido na Subseção 2.1.1 foi construído meramente a partir de um recobrimento entre espaços topológicos e a ação do grupo fundamental da base na fibra deste recobrimento.

Assim, o que faremos agora é a partir de $p : X \longrightarrow Y$ obter um recobrimento.

Proposição 2.8. Existe $U \subset Y$ aberto não vazio tal que $p|_U : p^{-1}(U) \longrightarrow U$ é um recobrimento.

Demonstração. Ver Teorema 2.5, p. 6 em [19]. ■

Tendo em consideração a Subseção 2.1.1, definimos o grupo de monodromia associado a p por $\mathcal{M} = \psi(\Phi(\pi_1(U, b)))$ com $\pi_1(U, b) \xrightarrow{\Phi} B_{ij}(\Gamma) \xrightarrow{\psi} S_d$ e $\Gamma = p^{-1}(b) = \{q_1, \dots, q_d\}$.

Concluimos o capítulo salientando que o fato do grupo de Galois e o grupo de monodromia de $p_1 : \mathbb{C} - \{0\} \longrightarrow \mathbb{C} - \{0\}$ dado por $w \longmapsto w^2$ serem iguais (a S_2) não é uma mera coincidência, de acordo com o seguinte Teorema.

Teorema 2.9. *O grupo de Galois e grupo de monodromia associados ao mapa racional dominante $p: X \rightarrow Y$ com $\dim X = \dim Y$ são iguais.*

Demonstração. Ver Proposição, p. 689 em [10]. ■

Uma consequência desse teorema é o fato do grupo de monodromia ser independente da escolha do aberto no qual a função racional vira um recobrimento.

Capítulo 3

Grupo de Galois/monodromia dos pontos de inflexão de cúbicas planas não singulares

A proposta deste capítulo é apresentar um morfismo cujas fibras se identifiquem com os pontos de inflexão de uma cúbica plana não singular. Mostrar que o grupo de monodromia associado a tal morfismo é um grupo solúvel e concluir com a determinação dos nove pontos de inflexão de uma cúbica não singular a partir de fórmulas que envolvem seus coeficientes. O roteiro deste capítulo tem como base [10] e [19].

3.1 A construção do morfismo $\pi : I_d \longrightarrow W_d$

Observe que $\check{\mathbb{P}}^2$ pode ser identificado como $\mathbb{P}^2$ via a bijeção

$$\begin{aligned}\mathcal{L} : \mathbb{P}^2 &\longrightarrow \check{\mathbb{P}}^2 \\ [b_0 : b_1 : b_2] &\longmapsto \mathbf{V}(b_0x_0 + b_1x_1 + b_2x_2).\end{aligned}$$

De fato, usaremos $\mathcal{L}$ para induzir a topologia de Zariski em $\check{\mathbb{P}}^2$. A seguir considere $I_0 = \{(p, \ell) \mid p \in \ell\} \subseteq \mathbb{P}^2 \times \check{\mathbb{P}}^2$.

Lema 3.1. Verifica-se que I_0 é um fechado irreduzível de dimensão 3.

Demonstração. Considere $p = [a_0 : a_1 : a_2] \in \mathbb{P}^2$. Defina $\Gamma_p = \{\ell \in \check{\mathbb{P}}^2 \mid p \in \ell\}$.

Afirmção 1. Γ_p é um fechado irreduzível de dimensão 1 para todo $p \in \mathbb{P}^2$.

Considere a reta $\ell = \mathbf{V}(b_0x_0 + b_1x_1 + b_2x_2)$. Note que,

$$\ell \in \Gamma_p \iff \underbrace{b_0a_0 + b_1a_1 + b_2a_2}_{\otimes} = 0 \iff b = [b_0 : b_1 : b_2] \in \mathcal{L}^{-1}(\Gamma_p).$$

3. Grupo de Galois/monodromia dos pontos de inflexão de cúbicas planas não singulares

Portanto, $b \in \mathcal{L}^{-1}(\Gamma_p)$ se, e somente se $b \in \mathbf{V}(a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2) \subseteq \mathbb{P}^2$, ou seja, $\mathcal{L}^{-1}(\Gamma_p) = \mathbf{V}(a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2) \subseteq \mathbb{P}^2$ que é um fechado irreduzível de dimensão 1.

Afirmção 2. I_0 é irreduzível de dimensão 3.

Considere a projeção na 1ª coordenada $\pi_1 : I_0 \longrightarrow \mathbb{P}^2 \ ((p, \ell) \longmapsto p)$.

Tem-se que π_1 é sobrejetiva e as fibras $\pi_1^{-1}(p) = \{(q, \ell) \mid q \in \ell, q = p\} \stackrel{\pi_2}{\cong} \Gamma_p \ ((p, \ell) \xrightarrow{\pi_2} \ell)$ são irreduzíveis da mesma dimensão para todo $p \in \mathbb{P}^2$. Assim, segue do Lema A.13 (no apêndice A) que I_0 é irreduzível. Além disso o teorema da dimensão das fibras (cf. Teorema 1.1, p. 58 em [23]) nos garante que $\dim I_0 = \dim \mathbb{P}^2 + \dim \Gamma_p = 3$. ■

Seja $\mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]_d$ o subespaço vetorial de $\mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]$ gerado pelos monômios de grau d^1 , com $d \geq 1$ inteiro.

Seja $W_d = \mathbb{P}(\mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]_d)$ a projetivização de $\mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]_d$ ². Os elementos de W_d são da forma $[f]$ com $f \in \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]_d$ não nulo, sendo

$$[f] = \{g \in \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]_d \mid f \sim g\} = \{\lambda f \mid \lambda \in \mathbb{C} - \{0\}\}.$$

Note que $[f] \in W_d$ determina a curva plana $\mathbf{V}(f) \subseteq \mathbb{P}^2$.

Ao fixarmos uma base de $\mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]_d$ (por exemplo $x_0^d, x_0^{d-1}x_1, \dots, x_1^d, \dots, x_1^{d-1}x_2, x_2^d$) e considerarmos $N_d + 1 = \dim \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]_d$ obtemos a bijeção

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1 : \mathbb{P}^{N_d} &\longrightarrow W_d \\ [b_0 : \dots : b_{N_d}] &\longmapsto [f] \text{ com } f = b_0x_0^d + \dots + b_{N_d}x_2^d. \end{aligned}$$

Assim, $\mathcal{L}_1$ torna W_d uma variedade projetiva tal que $X \subseteq W_d$ é fechado (irreduzível) de dimensão n se $\mathcal{L}_1^{-1}(X) \subseteq \mathbb{P}^{N_d}$ é fechado (irreduzível) de dimensão n .

Observação 3.1. Considere $p \in \mathbb{P}^2, \ell \in \check{\mathbb{P}}^2$ e $\mathcal{C} = [f] \in W_d$. Assim,

1. $p \in \mathcal{C}$ se, e somente se $f(p) = 0$.
2. se $p \in \ell \cap \mathcal{C}$, então $(\mathcal{C}, \ell)_p$ a multiplicidade de intersecção da reta ℓ com a curva $\mathcal{C}$ no ponto p é dado por

$$(\mathcal{C}, \ell)_p = \begin{cases} \infty, & \text{se } \ell \subseteq \mathcal{C}. \\ m, & \text{se } \mathcal{C}|_\ell \text{ possui um zero de ordem } m \text{ em } p. \end{cases}$$

A seguir considere $I_d = \{(\mathcal{C}, p, \ell) \mid (\mathcal{C}, \ell)_p \geq 3\} \subseteq W_d \times I_0$ e $\pi_2 : I_d \longrightarrow I_0$ dada por $(\mathcal{C}, p, \ell) \longmapsto (p, \ell)$.

¹ $x_0^{i_0} x_1^{i_1} x_2^{i_2}$ tal que $i_0 + i_1 + i_2 = d$.

² W_d é denominado espaço de parâmetros de curvas planas de grau d

Proposição 3.2. Considere a reta $\ell = \mathbf{V}(L_1) \subseteq \mathbb{P}^2$, $\{p\} = \mathbf{V}(L_1, L_2) \subseteq \ell$ e $\mathcal{C} = [f] \in W_d$ com $d \geq 3$. Verifica-se que:

(i) $\Lambda : \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]_{d-1} \times \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]_{d-3} \longrightarrow \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]_d$ dada por $(q, r) \longmapsto qL_1 + rL_2^3$ é uma transformação linear cuja imagem é igual a $\langle L_1, L_2^3 \rangle_d$ e tem dimensão igual a $\frac{d(d+3)}{2} - 2$.

(ii) $(\mathcal{C}, \ell)_p \geq 3 \iff f \in \langle L_1, L_2^3 \rangle_d$.

Demonstração. Prova do item (i). Vamos começar mostrando que Λ é linear.

Sejam (q, r) e (q_1, r_1) pertencentes a $\mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]_{d-1} \times \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]_{d-3}$ e $\alpha \in \mathbb{C}$, daí temos que

$$\begin{aligned} \Lambda((q + \alpha q_1, r + \alpha r_1)) &= L_1(q + \alpha q_1) + L_2^3(r + \alpha r_1) \\ &= L_1q + \alpha L_1q_1 + L_2^3r + \alpha L_2^3r_1 \\ &= \Lambda((q, r)) + \alpha \Lambda((q_1, r_1)). \end{aligned}$$

A seguir vamos determinar o núcleo de Λ .

Note que $(q, r) \in N(\Lambda) \iff qL_1 + rL_2^3 = 0 \iff qL_1 = -rL_2^3 \otimes$. Tendo em consideração que $\{L_1, L_2\}$ é L.I. segue de $\otimes$ que $r = 0 = q$ se $d = 3$. E que $r = r_1L_1$ e $q = -r_1L_2^3$ com $r_1 \in \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]_{d-4}$ se $d \geq 4$. Portanto,

$$\begin{aligned} N(\Lambda) &= \{(0, 0)\} \text{ se } d = 3, \\ N(\Lambda) &= \{(-r_1L_2^3, r_1L_1) \mid r_1 \in \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]_{d-4}\} \text{ se } d \geq 4. \end{aligned}$$

Assim, segue do Teorema do núcleo e da imagem que

$$\dim \text{Im}(\Lambda) = \dim \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]_{d-1} \times \mathbb{C} = 6 + 1 = 7 \text{ se } d = 3.$$

Para $d \geq 4$, $\dim \text{Im}(\Lambda) = \dim \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]_{d-1} \times \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]_{d-3} - \dim N(\Lambda)$. Como $N(\Lambda) \cong \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]_{d-4}$, segue que

$$\begin{aligned} \dim \text{Im}(\Lambda) &= \binom{2+d-1}{2} + \binom{2+d-3}{2} - \binom{2+d-4}{2} \\ &= \frac{d(d+1)}{2} + \frac{(d-2)(d-1)}{2} - \frac{(d-3)(d-2)}{2} \\ &= \frac{d^2 + 3d - 4}{2} = \frac{d(d+3)}{2} - 2. \end{aligned}$$

Prova do item (ii). Assuma que $(\mathcal{C}, \ell)_p \geq 3$.

Se L_1 divide f então $f \in \langle L_1, L_2^3 \rangle_d$. Assuma que L_1 não divide f . Neste caso, $f = qL_1 + rL_2$, sendo que L_1 não divide r , visto que $f(p) = 0$ e $\mathcal{I}(p) = \langle L_1, L_2 \rangle$.

A condição $(\mathcal{C}, \ell)_p \geq 3$ nos leva a concluir que L_2^2 divide r . Logo, $r = r_1L_2^2$. Portanto, $f = qL_1 + r_1L_2^3$ o que implica que $f \in \langle L_1, L_2^3 \rangle_d$.

Por outro lado, se $f \in \langle L_1, L_2^3 \rangle_d$ então $f = qL_1 + rL_2^3$.

3. Grupo de Galois/monodromia dos pontos de inflexão de cúbicas planas não singulares

Se $r = 0$, segue que $(\mathcal{C}, \ell)_p = \infty$. Se $r \neq 0$, segue que $p \in \mathcal{C} \cap \ell$ é tal que $(\mathcal{C}, \ell)_p \geq 3$ (visto que $\mathcal{C} \mid_\ell$ é determinada por rL_2^3).

■

Corolário 3.3. Considere $\pi_2 : I_d \longrightarrow I_0$ dada por $(\mathcal{C}, p, \ell) \longmapsto (p, \ell)$. Verifica-se que todas as fibras de π_2 tem a mesma dimensão e é igual a $\frac{d(d+3)}{2} - 3$.

Demonstração. Note que

$$\begin{aligned}\pi_2^{-1}(p, \ell) &= \{(\mathcal{C}, p, \ell) \mid (\mathcal{C}, \ell)_p \geq d\} \\ &= \{\mathcal{C} \mid (\mathcal{C}, \ell)_p \geq d\} \times \{(p, \ell)\}.\end{aligned}$$

Segue do item (ii) da Proposição 3.2 que $\{\mathcal{C} \mid (\mathcal{C}, \ell)_p \geq 3\} = \mathbb{P}(\langle L_1, L_2^3 \rangle_d)$ se $\mathcal{I}(\ell) = \langle L_1 \rangle$ e $\mathcal{I}(p) = \langle L_1, L_2 \rangle$.

Como $\dim \langle L_1, L_2^3 \rangle_d = \frac{d(d+3)}{2} - 2$, concluímos que as fibras de π_2 tem dimensão $\frac{d(d+3)}{2} - 3$.

■

Proposição 3.4. Com as notações acima e $d \geq 3$, verifica-se que I_d é fechado irredutível de dimensão $N_d = \frac{d(d-3)}{2}$.

Demonstração. Considere $p = [a_0 : a_1 : a_2] \in \mathbb{P}^2$, $\ell = \mathbf{V}(b_0x_0 + b_1x_1 + b_2x_2)$ e $\mathcal{C} = [f] \in W_d$ com $f = c_0x_0^d + c_1x_0^{d-1}x_1 + c_2x_0^{d-1}x_2 + \dots + c_{N_d}x_2^d$.

Afirmção 1. I_d é fechado.

Note que se $(\mathcal{C}, \ell)_p \geq 3$, então $p \in \ell \cap \mathcal{C}$.

Assuma que $b_1 \neq 0$ e $a_0 \neq 0$. Assim, $p = [1 : \alpha_1 : \alpha_2]$, $\alpha_i = \frac{a_i}{a_0}$, $i = 1, 2$.

Observe que $\{p\} = \mathbf{V}(L_1, L_2)$ com $L_1 = x_1 - \alpha_1x_0$ e $L_2 = x_2 - \alpha_2x_0$. Lembremos que, se m é uma reta em $\check{\mathbb{P}}^2$ tem-se que $p \in m$ se, e somente se $m = \mathbf{V}(\beta_1L_1 + \beta_2L_2)$ para algum $[\beta_1 : \beta_2] \in \mathbb{P}^1$.³

Assim, $\ell = \mathbf{V}(\beta_1L_1 + \beta_2L_2)$ com $[\beta_1 : \beta_2] \in \mathbb{P}^1$, vamos supor que $\beta_1 \neq 0$, assim $\ell = \mathbf{V}(L_1 + \beta L_2)$ com $\beta = \frac{\beta_2}{\beta_1}$.

Observe que $\{p\} = \mathbf{V}(L_1 + \beta L_2, L_2)$ e $L = L_1 + \beta L_2 = x_1 - (\alpha_1 + \beta\alpha_2)x_0 + \beta x_2$. Além disso, f pode ser escrito na forma:

$$f = u_0L^d + u_1(x_0, x_2)L^{d-1} + \dots + u_{d-1}(x_0, x_2)L + u_d,$$

com $u_i \in \mathbb{C}[x_0, x_2]_i$.

Analogamente, considere $g(x_0, x_2) = u_d$ e $L_2 = x_2 - \alpha_2x_0$, então

³De fato, se $m = \mathbf{V}(L)$ com $L = b_0x_0 + b_1x_1 + b_2x_2$ e $p \in m$, segue que $L(p) = 0$, o que implica que $b_0 = -(b_1\alpha_1 + b_2\alpha_2)$, daí $L = x_0(-b_1\alpha_1 - b_2\alpha_2) + b_1x_1 + b_2x_2$. Assim, $L = b_1(x_1 - \alpha_1x_0) + b_2(x_2 - \alpha_2x_0)$. Portanto $m = \mathbf{V}(b_1L_1 + b_2L_2)$ para algum $[b_1 : b_2] \in \mathbb{P}^1$. Por outro lado, sendo $m = \mathbf{V}(\beta_1L_1 + \beta_2L_2)$ para algum $[\beta_1 : \beta_2] \in \mathbb{P}^1$, temos que $p \in m$. Visto que $\beta_1\alpha_1 + \beta_2\alpha_2 + (-\alpha_1\beta_1 - \alpha_2\beta_2) = 0$.

3. Grupo de Galois/monodromia dos pontos de inflexão de cúbicas planas não singulares

$$g(x_0, x_2) = v_0 L_2^d + v_1 x_0 L_2^{d-1} + \cdots + v_{d-1} x_0^{d-1} L_2 + v_d x_0^d, \quad v_i \in \mathbb{C}.$$

Lembre que $p = [1 : \alpha_1 : \alpha_2]$ e $L_1(p) = L_2(p) = f(p) = 0$, o que implica que $g(1, \alpha_2) = 0 = v_d$.

Observe que⁴

$$f = \sum_{i=0}^{d-1} u_i(x_0, x_2) L_2^{d-i} + \sum_{i=1}^d v_{d-i} x_0^{d-i} L_2^i.$$

Os pontos da intersecção $\ell \cap \mathcal{C}$ são determinados pelas soluções de $f = 0$, $L = 0$. Ou seja, $L = 0$ e $g = v_0 L_2^d + v_1 x_0 L_2^{d-1} + \cdots + v_{d-1} x_0^{d-1} L_2 = 0$.

Uma vez que $p = [1 : \alpha_1 : \alpha_2]$ se corresponde com $[1 : \alpha_2] \in \mathbf{V}(g) \subseteq \mathbb{P}^1$ e $(\mathcal{C}, \ell)_p \geq 3$, dessa forma temos que $v_{d-1} = v_{d-2} = 0$. Isto é,

$$g(x_0, x_2) = L_2^3 (v_0 L_2^{d-3} + \cdots + v_{d-3} x_0^{d-3}).$$

Observe que $\ell = \mathbf{V}(b_0 x_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2) = \mathbf{V}(L)$ com $L = x_1 + \beta x_2 - (\alpha_1 + \beta \alpha_2) x_0$. Assim, $b_0 = -(\alpha_1 + \beta \alpha_2) b_1$ e $b_2 = \beta b_1$. Portanto,

$$(\mathcal{C}, \ell)_p \geq 3 \iff \begin{cases} b_0 + \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 = 0, \\ v_{d-1} = v_{d-2} = 0. \end{cases}$$

Sendo as equações do lado direito expressões polinomiais em $\beta, \alpha_1, \alpha_2$ e também nos coeficientes de $f = c_0 x_0^d + \cdots + c_{N_d} x_2^d$.

Portanto, definem um fechado em $W_d \times I_0$.

Afirmção 2. Sendo

$$\begin{aligned} \pi_2 : I_d &\longrightarrow I_0 \\ (\mathcal{C}, p, \ell) &\longmapsto (p, \ell) \end{aligned}$$

verifica-se que $\pi_2^{-1}(p, \ell)$ é irredutível e todas as fibras de π_2 tem a mesma dimensão.

Assim, segue do Corolário 3.3 que $\dim \pi_2^{-1}(p, \ell) = \frac{d(d+3)}{2} - 3$.

Logo $\pi_2 : I_d \longrightarrow I_0$ é sobrejetora e todas as suas fibras são irredutíveis e da mesma dimensão. Dessa forma, I_d é irredutível (cf. Lema 12.7 em [6]).

Afirmção 3. $\dim I_d = N_d$.

Aplicando o Teorema da dimensão das fibras ao morfismo sobrejetivo $\pi_2 : I_d \longrightarrow I_0$, temos que

$$\dim I_d - \dim I_0 = \dim \pi_2^{-1}(p, \ell).$$

⁴Basta considerar $A = \mathbb{C}[x_0, x_2]$, $f \in A[x_1]$, e aplicar o algoritmo da divisão em $A[x_1]$. Assim existem $Q \in A[x_1]$, $R \in A$ tais que $f = QL + R$. Daí aplica-se o mesmo procedimento a Q , obtendo $Q_1 \in A[x_1]$ e $R_1 \in A$ tais que $Q = Q_1 L + R_1$. Daí, $f = Q_1 L^2 + R_1 L + R$, sendo $Q_1 = Q_2 L + R_2$, temos que $f = Q_2 L^3 + R_2 L^2 + R_1 L + R$. Repetindo o mesmo procedimento, obtemos

$$f = \sum_{i=0}^{d-1} u_i(x_0, x_2) L_2^{d-i} + \sum_{i=1}^d v_{d-i} x_0^{d-i} L_2^i.$$

Portanto, $\dim I_d = 3 + \frac{d(d+3)}{2} - 3 = \frac{d(d+3)}{2} = N_d$. ■

Teorema 3.5. $\pi : I_d \longrightarrow W_d$ dado por $(\mathcal{C}, p, \ell) \longmapsto \mathcal{C}$ é um morfismo entre variedades projetivas da mesma dimensão.

Demonstração. Visto que $W_d = \mathbb{P}(\mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]_d)$ segue que W_d é uma variedade projetiva de dimensão N_d .

Agora segue do Proposição 23.4 que I_d é uma variedade projetiva de dimensão N_d

Por outro lado, sendo π definido pela projeção na primeira coordenada, segue que π é um morfismo. ■

Curvas não singulares constituem um aberto em W_d

Seja $\mathcal{U}_d = \{\mathcal{C} \in W_d \mid \mathcal{C} \text{ é não singular}\}$.

Proposição 3.6. Considere $\pi : I_d \longrightarrow W_d$ dada por $(\mathcal{C}, \ell, p) \longmapsto \mathcal{C}$.

- (1) $\mathcal{U}_d$ é um aberto não vazio de W_d .
- (2) Para toda $\mathcal{C} \in \mathcal{U}_d$, $\pi^{-1}(\mathcal{C})$ está em bijeção com $\{p \in \mathcal{C} \mid p \text{ é ponto de inflexão}\}$.

Demonstração. Prova do item (1). Lembre que $\mathcal{C} = [f] \in W_d$ é singular se, e somente se $\mathbf{V}(f_0, f_1, f_2) \neq \emptyset$ sendo $f_i = \partial f / \partial x_i$. Assim, se $a = [a_{d00} : \dots : a_{00d}] \in \mathbb{P}^{N_d}$ define a curva $[f] \in W_d$ com

$$f = a_{d00}x_0^d + a_{d-110}x_0^{d-1}x_1 + \dots + a_{00d}x_2^d.$$

Ao considerarmos o sistema

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_0} &= da_{d00}x_0^{d-1} + (d-1)a_{d-110}x_0^{d-2}x_1 + \dots + a_{10d-1}x_2^{d-1} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x_1} &= a_{d-110}x_0^{d-1} + \dots + a_{01d-1}x_2^{d-1} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} &= a_{d-101}x_0^{d-1} + \dots + da_{00d}x_2^{d-1} = 0 \end{aligned}$$

tem-se que $b = [b_0 : b_1 : b_2] \in \text{Sing}(\mathcal{C})$ se, e somente se $\frac{\partial f}{\partial x_i}(b) = 0 \ i = 0, 1, 2$.

Observe que $\frac{\partial f}{\partial x_i}(b) \ i = 0, 1, 2$ são polinômios bi-homogêneos de bi-grau $(1, d-1)$ nas coordenadas (a_{ijk}) e $[b_0 : b_1 : b_2]$ respectivamente.

Assim, $\mathcal{V}_d = \{(\mathcal{C}, b) \mid b \in \text{Sing}(\mathcal{C})\} \subseteq W_d \times \mathbb{P}^2$ é um fechado.

Além disso, $P : \mathcal{V}_d \longrightarrow W_d$ dada por $(\mathcal{C}, b) \longmapsto \mathcal{C}$ é um morfismo com imagem $P(\mathcal{V}_d) = \{\mathcal{C} \mid \mathcal{C} \text{ é singular}\}$. Assim, $P(\mathcal{V}_d)$ é fechado em W_d (cf. Teorema 1.10, p. 57 em [25]).

3. Grupo de Galois/monodromia dos pontos de inflexão de cúbicas planas não singulares

Portanto, $\mathcal{U}_d$ é um aberto em W_d . Visto que $[f] \in \mathcal{U}_d$ com $f = x_0^d + x_1^d + x_2^d$, segue que $\mathcal{U}_d \neq \emptyset$.

Prova do item (2). Considere $\mathcal{C} \in \mathcal{U}_d$.

De fato, como $\mathcal{C}$ é não singular e $(\mathcal{C}, \ell)_p \geq 3$, segue que $\ell = T_p\mathcal{C}$. Logo,

$$\begin{aligned}\pi^{-1}(\mathcal{C}) &= \{(\mathcal{C}, p, \ell) \mid (\mathcal{C}, \ell)_p \geq 3\} \\ &= \{(\mathcal{C}, p, \ell) \mid p \text{ é ponto de inflexão de } \mathcal{C}\}\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}\Lambda : \{\text{pontos de inflexão de } \mathcal{C}\} &\longrightarrow \pi^{-1}(\mathcal{C}) \\ q &\longmapsto (\mathcal{C}, q, T_q\mathcal{C})\end{aligned}$$

é uma bijeção. ■

Assim, se $\mathcal{C} \in \mathcal{U}_d$ então $\pi^{-1}(\mathcal{C})$ se identifica com os pontos de inflexão de $\mathcal{C}$. De fato, tem-se que

Proposição 3.7. Com as notações acima.

- (1) $\pi^{-1}(\mathcal{C}) \neq \emptyset \ \forall \ \mathcal{C} \in \mathcal{U}_d$.
- (2) Uma cúbica não singular tem 9 pontos de inflexão e todos são distintos.

Demonstração. Confira o Corolário, p. 59 em [7]. ■

A partir deste ponto nosso foco serão as cúbicas planas não singulares. Especificamente, iremos determinar o grupo de monodromia associado ao mapa π ($d = 3$). Para depois nos concentrar na prova de que esse grupo é solúvel e conseqüentemente poder exprimir os nove pontos de inflexão de uma cúbica plana não singular a partir de fórmulas envolvendo os coeficientes do polinômio que define uma tal curva.

3.2 Cúbicas não singulares via reticulados

Sejam $g_2, g_3 \in \mathbb{C}$ e $F_{g_2, g_3} \in \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]$ dado por

$$F_{g_2, g_3} = x_0x_2^2 - 4x_1^3 + g_2x_1x_0^2 + g_3x_0^3.$$

O discriminante Δ_{g_2, g_3} associado a F_{g_2, g_3} é dado por $\Delta_{g_2, g_3} = g_2^3 - 27g_3^2$.

Proposição 3.8. Com as notações acima. Considere $\mathcal{C}_{g_2, g_3} = \mathbf{V}(F_{g_2, g_3}) \subseteq \mathbb{P}^2$. Verifica-se que

$$\mathcal{C}_{g_2, g_3} \text{ é não singular se, e somente se } \Delta_{g_2, g_3} \neq 0.$$

Demonstração. Veja Proposição 4.22, p. 129 em [13]. ■

Proposição 3.9. Seja $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{P}^2$ uma cúbica não singular. Existem $g_2, g_3 \in \mathbb{C}$ tais que $\mathcal{C}$ é projetivamente equivalente à curva $\mathcal{C}_{g_2, g_3} = \mathbf{V}(F_{g_2, g_3})$.

Demonstração. Veja Proposição 4.23, p. 131 em [13]. ■

Assim toda cúbica plana não singular $\mathcal{C}$ a menos de uma MCP é definida a partir de um polinômio da forma

$$F_{g_2, g_3} = x_0 x_2^2 - 4x_1^3 + g_2 x_1 x_0^2 + g_3 x_0^3 \text{ com } g_2^3 - 27g_3^2 \neq 0.$$

Temos que $F_{g_2, g_3} = 0$ é denominada equação de Weierstrass de $\mathcal{C}$.

Lema 3.10. Se $\mathcal{C} = \mathbf{V}(F_{g_2, g_3}) \subseteq \mathbb{P}^2$ é não singular, então $[0 : 0 : 1]$ é um ponto de inflexão de $\mathcal{C}$.

Demonstração. Temos $F_{g_2, g_3} = x_0 x_2^2 - 4x_1^3 + g_2 x_1 x_0^2 + g_3 x_0^3$.

Assim, observe que

$$\frac{\partial F_{g_2, g_3}}{\partial x_0} = x_2^2 + 2g_2 x_1 + 3g_3 x_0^2, \quad \frac{\partial F_{g_2, g_3}}{\partial x_1} = -12x_1^2 + g_2 x_0^3 \quad e \quad \frac{\partial F_{g_2, g_3}}{\partial x_2} = 2x_0 x_2.$$

Considere $O = [0 : 0 : 1]$. Daí, $\frac{\partial F_{g_2, g_3}}{\partial x_0}(O) = 1$, $\frac{\partial F_{g_2, g_3}}{\partial x_1}(O) = 0$ e $\frac{\partial F_{g_2, g_3}}{\partial x_2}(O) = 0$.

Dessa forma,

$$T_O \mathcal{C} = \mathbf{V}(L) \text{ com } L = \frac{\partial F_{g_2, g_3}}{\partial x_0}(O)x_0 + \frac{\partial F_{g_2, g_3}}{\partial x_1}(O)x_1 + \frac{\partial F_{g_2, g_3}}{\partial x_2}(O)x_2 = x_0.$$

Os pontos na reta $T_O \mathcal{C} = \mathbf{V}(x_0)$ são da forma $[0 : \alpha : \beta]$ com $[\alpha : \beta] \in \mathbb{P}^1$. Assim

$$[0 : \alpha : \beta] \in \mathcal{C}_{g_2, g_3} \cap T_O \mathcal{C} \iff F_{g_2, g_3}(0, \alpha, \beta) = 0 \iff -4\alpha^3 = 0.$$

De onde concluímos que $[0 : 1] \in \mathbf{V}(G) \subseteq \mathbb{P}^1$ é uma raiz de multiplicidade 3 de $G(u, v) = F_{g_2, g_3}(0, u, v)$.

Portanto, $(\mathcal{C}_{g_2, g_3}, T_O \mathcal{C})_O = 3$, o que implica que O é ponto de inflexão de $\mathcal{C}$. ■

Proposição 3.11. Seja $\mathcal{C}$ uma cúbica não singular e O um ponto de inflexão de $\mathcal{C}$. Ao considerarmos $\mathcal{C}$ como grupo abeliano com elemento neutro O . Verifica-se que

$$P \text{ é ponto de inflexão de } \mathcal{C} \text{ se, e somente se } P + P + P = O.$$

Demonstração. Usaremos as notações e definição da operação em $\mathcal{C}$ dada no Capítulo 1 na seção 1.2.

Seja $P \in \mathcal{C}$ ponto de inflexão.

Se $P = O$, o resultado segue visto que O é o elemento neutro de $\mathcal{C}$.

3. Grupo de Galois/monodromia dos pontos de inflexão de cúbicas planas não singulares

Se $P \neq O$ então segue do Teorema de Bézout que $\mathcal{C} \cap T_P\mathcal{C} = \{P\}$. Assim $P + P = \overline{P}$. Agora, resta mostrar que $P + \overline{P} = O$. Como $P \neq O$, temos que analisar dois casos,

(i) $\ell_{P,O} \neq T_P\mathcal{C}$ e $(\mathcal{C}, \ell_{P,O})_P = 1$.

Neste caso $P \neq \overline{P}$, daí $\#(\ell_{P,\overline{P}} \cap \mathcal{C}) = 3$, o que implica que $P + \overline{P} = \overline{O} = O$.

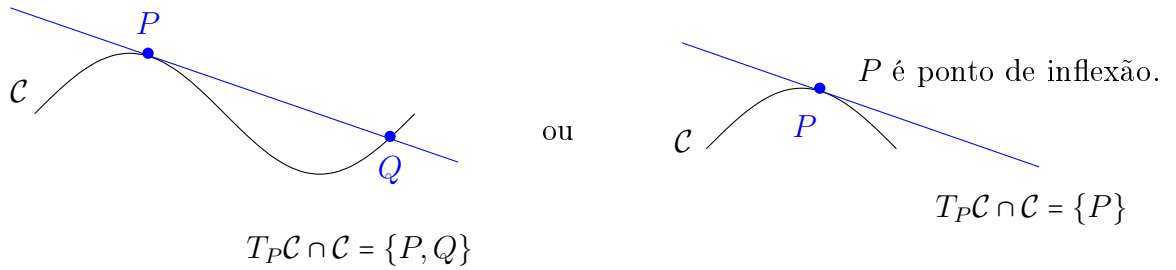
(ii) $\ell_{P,O} = T_P\mathcal{C}$ e $(\mathcal{C}, \ell_{P,O})_P = 2$.

Não ocorre. Pois, P é ponto de inflexão isto é, $(\mathcal{C}, T_P\mathcal{C})_P = 3$.

Portanto se $P \in \mathcal{C}$ é ponto de inflexão verifica-se que $P + P + P = O$.

Agora suponha que $P + P + P = O$. Se $P = O$, então $O + O + O = O$ e O é ponto de inflexão.

Assuma que $P \neq O$. Nosso objetivo é mostrar que $(\mathcal{C}, T_P\mathcal{C})_P = 3$. Ou equivalentemente que $\mathcal{C} \cap T_P\mathcal{C} = \{P\}$. Note que temos duas possibilidades



Suponha que $(\mathcal{C}, T_P\mathcal{C})_P = 2$. Assim, $P + P \stackrel{\text{def.}}{=} \overline{Q}$. Daí, lembre que $P + P + P = O$ que implica $P + \overline{Q} = O = \overline{O}$. Note que $P \neq \overline{Q}$ (visto que $P = \overline{Q} \implies P + P = O \implies O = P$).

i) Se $Q = O \implies \overline{Q} = O \xrightarrow{P+\overline{Q}=O} P + O = O \implies P = O$ (Absurdo!).

ii) Se $Q \neq O$, temos duas possibilidades $\#(\ell_{Q,O} \cap \mathcal{C}) = 3$ ou $\#(\ell_{Q,O} \cap \mathcal{C}) = 2$.

Se $\#(\ell_{Q,O} \cap \mathcal{C}) = 3$, então $\#\{O, Q, \overline{Q}\} = 3$. Por outro lado, temos que $P + \overline{Q} = O = \overline{O}$, o que implica que $O \in \ell_{P,\overline{Q}}$. Assim, $P \in \ell_{O,\overline{Q}}$ (Absurdo!), visto que $P \neq Q$ e $P \neq \overline{Q}$.

Agora se $\#(\ell_{Q,O} \cap \mathcal{C}) = 2$, então $\overline{Q} = Q$. Assim, $P + \overline{Q} = O$ implica em $P + Q = O = \overline{O}$. Logo, $O \in \ell_{P,Q}$ (Absurdo!).

■

Corolário 3.12. Seja $\Gamma = \{\text{pontos de inflexão de } \mathcal{C}\}$. Então $\Gamma \leq \mathcal{C}$ e $\Gamma \cong \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$.

Demonstração. Considere $O \in \mathcal{C}$ ponto de inflexão, como elemento neutro do grupo $(\mathcal{C}, +)$.

i) $O \in \Gamma$.

ii) Sejam $P, Q \in \Gamma$, assim $3P = O$ e $3Q = O$. Logo,

3. Grupo de Galois/monodromia dos pontos de inflexão de cúbicas planas não singulares

$$O = 3P + 3Q = 3(P + Q) \implies P + Q \in \Gamma.$$

iii) Seja $P \in \Gamma$, daí

$$3P = O \implies -3P = 3(-P) = O \implies -P \in \Gamma.$$

Como $|\Gamma| = 3^2$ e todo elemento de Γ tem ordem 3, segue que $\Gamma \cong \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$. ■

Lema 3.13. Sejam P, Q e R pontos de inflexão da cúbica não singular $\mathcal{C}$. Assuma que o ponto de inflexão $O \in \mathcal{C}$ é o elemento neutro do grupo $(\mathcal{C}, +)$. Verifica-se que

$$P + Q + R = O \iff P, Q \text{ e } R \text{ são colineares.}$$

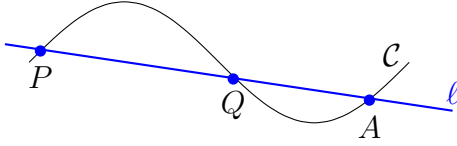
Demonstração. Suponha que $P + Q + R = O$.

Seja $\ell = \ell_{P,Q}$ a reta que passa por P e Q . Note que $\#(\ell \cap \mathcal{C}) = 2$ implica que

- $\ell = T_P\mathcal{C}$ e $(\mathcal{C}, \ell)_P = 2$.

ou

- $\ell = T_Q\mathcal{C}$ e $(\mathcal{C}, \ell)_Q = 2$.



O que é absurdo, visto que P e Q são pontos de inflexão.

Dessa forma $\#(\ell \cap \mathcal{C}) = 3$ e $\ell \cap \mathcal{C} = \{P, Q, A\}$.

Nosso objetivo é mostrar que $A = R$. Suponha por absurdo que $A \neq R$. Temos que $P + Q = \bar{A}$.

Caso 1: $A = O$.

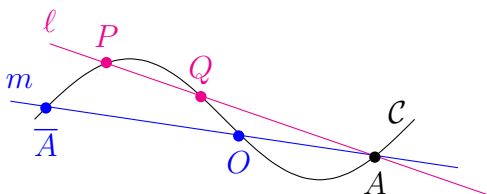
Neste caso $P + Q = \bar{A} = \bar{O} = O$. Logo,

$$P + Q + R = O \implies O + R = O \implies R = O \implies R = A \text{ (Absurdo!)}.$$

Caso 2: $A \neq O$.

Considere a reta $m = \ell_{A,O}$. Temos duas possibilidades $\#(m \cap \mathcal{C}) = 3$ ou $\#(m \cap \mathcal{C}) = 2$.

- $\#(m \cap \mathcal{C}) = 3$



Assim, $P + Q = \bar{A}$. Logo, $P + Q + R = O \implies \bar{A} + R = O = \bar{O} \implies O \in \ell_{R,\bar{A}} = \ell_{O,\bar{A}} = m \implies R \in \ell_{O,\bar{A}} = m \implies R \in m \cap \mathcal{C} = \{A, O, \bar{A}\}$.

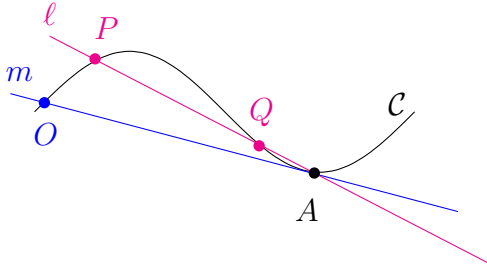
3. Grupo de Galois/monodromia dos pontos de inflexão de cúbicas planas não singulares

Se $R = O$, então $P + Q = O = \bar{A}$ (Absurdo!), pois $\bar{A} \neq O$.

Se $R = \bar{A}$, então $P + Q = R$. Logo,

$$P + Q + R = O \implies R + R = O \implies 3R = O = R = \bar{A} \text{ (Absurdo!).}$$

- $\#(m \cap \mathcal{C}) = 2$



Se $m = \ell_{O,A}$ e O ponto de inflexão então $m = T_A \mathcal{C}$.

Neste caso $\bar{A} = A$. Logo, $P + Q = \bar{A} = A$ (e $P + Q + R = O$) o que implica

$$\begin{aligned} A + R = O = \bar{O} &\implies O \in \ell_{A,R} = \ell_{O,A} \ni R \implies R = O \text{ (visto que } R \neq A) \\ &\implies A + O = O \implies A = O \text{ (Absurdo!).} \end{aligned}$$

Portanto, $P + Q = \bar{R}$, o que implica que P, Q e R são colineares.

Agora, assumamos que P, Q e R são pontos de inflexão (distintos) colineares. Considere $\ell = \ell_{P,Q} \ni R$. Assim, $P + Q = \bar{R}$. Daí,

i) se $R = O$, tem-se que $P + Q = \bar{R} = \bar{O} = O$ o que implica que $P + Q + R = O$.

ii) se $R \neq O$, considere $m = \ell_{R,O}$. Temos duas possibilidades $\#(m \cap \mathcal{C}) = 3$ ou $\#(m \cap \mathcal{C}) = 2$.

Se $\#(m \cap \mathcal{C}) = 3$, então $\#\{R, O, \bar{R}\} = 3$ e $R + \bar{R} = O$. Logo, $P + Q + R = \bar{R} + R = \bar{O} = O$.

Se $\#(m \cap \mathcal{C}) = 2$, então $(\mathcal{C}, T_R \mathcal{C})_R = 2$ ou $(\mathcal{C}, T_O \mathcal{C})_O = 2$, o que não ocorre visto que R e O são pontos de inflexão de $\mathcal{C}$.

Portanto $P + Q + R = O$. ■

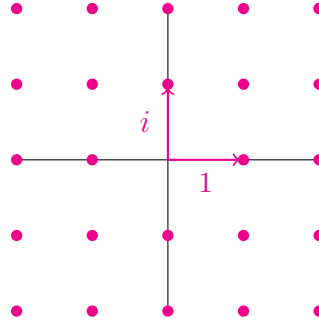
Curvas elípticas e Reticulados

Uma curva cúbica não singular em $\mathbb{P}^2$ é denominada curva elíptica.

Reticulado complexo. Sejam w_1, w_2 números complexos linearmente independentes sobre $\mathbb{R}$.

$$\langle w_1, w_2 \rangle_{\mathbb{Z}} = \{aw_1 + bw_2 \in \mathbb{C} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$$

é denominado Reticulado complexo gerado por w_1 e w_2 . Por exemplo,



Observe que um reticulado complexo $\Lambda = \langle w_1, w_2 \rangle_{\mathbb{Z}}$ é um subgrupo de $(\mathbb{C}, +)$.

De forma mais geral, se $n \geq 1$ é um inteiro, então defina

$$\frac{1}{n}\Lambda = \left\{ \frac{1}{n}w \in \mathbb{C} \mid w \in \Lambda \right\}.$$

Proposição 3.14. Com as notações acima. Verifica-se que

- (i) $\frac{1}{n}\Lambda$ é subgrupo de $\mathbb{C}$.
- (ii) Λ é subgrupo de $\frac{1}{n}\Lambda$.
- (iii) $\text{ord}(\bar{a})$ é finita e divide $n \ \forall \ \bar{a} \in \frac{1}{n}\Lambda$.
- (iv) se n é primo então $\frac{1}{n}\Lambda \cong \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n$.
- (v) se n é primo e $H = \{\bar{a} \mid \text{ord}(\bar{a}) = n\} \cup \{\bar{0}\}$, então $H = \frac{1}{n}\Lambda$.

Demonstração. Os itens (i), (ii) e (iii) deixamos a cargo do leitor.

Para o item (iv) defina $\psi : \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n \longrightarrow \frac{1}{n}\Lambda$ por $(\bar{a}, \bar{b}) \longmapsto \frac{1}{n}(aw_1 + bw_2)$.

- ψ está bem definida.

Sejam $(\bar{a}, \bar{b}), (\bar{c}, \bar{d}) \in \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n$ tal que $(\bar{a}, \bar{b}) = (\bar{c}, \bar{d})$, assim $a - c = n\alpha$ e $b - d = n\beta$ para algum $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$.

De onde concluimos que

$$\frac{1}{n}(a - c)w_1 + \frac{1}{n}(b - d)w_2 = \alpha w_1 + \beta w_2 \in \Lambda.$$

Portanto, $\psi((\bar{a}, \bar{b})) = \psi((\bar{c}, \bar{d}))$.

3. Grupo de Galois/monodromia dos pontos de inflexão de cúbicas planas não singulares

- ψ é homomorfismo de grupos.

Sejam $(\bar{a}, \bar{b}), (\bar{c}, \bar{d}) \in \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n$, assim

$$\begin{aligned} \psi((\bar{a}, \bar{b}) + (\bar{c}, \bar{d})) &= \psi((\overline{a+c}, \overline{b+d})) \\ &= \frac{1}{n}((a+c)w_1 + (b+d)w_2) \\ &= \frac{1}{n}(aw_1 + bw_2 + cw_1 + dw_2) \\ &= \frac{1}{n}(aw_1 + bw_2) + \frac{1}{n}(cw_1 + dw_2) \\ &= \psi((\bar{a}, \bar{b})) + \psi((\bar{c}, \bar{d})). \end{aligned}$$

- ψ é injetora.

Seja $(\bar{a}, \bar{b}) \in N(\psi)$, daí $\frac{1}{n}(aw_1 + bw_2) \in \Lambda$ o que implica que $\frac{1}{n}a \in \mathbb{Z}$ e $\frac{1}{n}b \in \mathbb{Z}$, logo $n|a$ e $n|b$. Dessa forma, $\bar{a} = \bar{b} = \bar{0}$.

- ψ é sobrejetora.

Seja $m \in \frac{1}{n}\Lambda$, então existe $w = aw_1 + bw_2 \in \Lambda$ com $a, b \in \mathbb{Z}$ tal que $m = \overline{\frac{1}{n}w}$. Daí, $(\bar{a}, \bar{b}) \in \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n$ e $\psi((\bar{a}, \bar{1})) = m$.

Para o item (v) basta observar que sendo n primo o item (3) nos garante que $\frac{1}{n}\Lambda \subseteq H$. Para mostrarmos a outra inclusão, considere $\bar{a} \in H - \{\bar{0}\}$. Assim, $\text{ord}(\bar{a}) = n$ o que implica em $\bar{a}^n = \bar{0}$, ou seja, $na \in \Lambda$. Logo, $a = \frac{1}{n}(na) \in \frac{1}{n}\Lambda$.

Portanto, $\bar{a} \in \frac{1}{n}\Lambda$.

■

Reticulados complexos e a função $\mathcal{P}$ de Weierstrass

Dado um reticulado complexo $\Lambda = \langle w_1, w_2 \rangle_{\mathbb{Z}}$, definimos a função $\mathcal{P}$ de Weierstrass, associada ao reticulado Λ $\mathcal{P}_\Lambda : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, por

$$\mathcal{P}_\Lambda(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{w \in \Lambda, w \neq 0} \left(\frac{1}{(z-w)^2} - \frac{1}{w^2} \right) \quad (3.1)$$

com a derivada dada por

$$\mathcal{P}'_\Lambda(z) = \sum_{w \in \Lambda} -2 \left(\frac{1}{(z-w)^3} \right). \quad (3.2)$$

A série de Eisenstein de peso $2k$, $G_{2k}(\Lambda)$ associada ao reticulado Λ , é dada por

$$G_{2k}(\Lambda) = G_{2k} = \sum_{w \in \Lambda, w \neq 0} \frac{1}{w^{2k}}. \quad (3.3)$$

Algumas propriedades da função $\mathcal{P}$ de Weierstrass podem ser encontradas em [15].

Proposição 3.15. Seja $\mathcal{P}'_\Lambda(z)$ a derivada da função $\mathcal{P}_\Lambda(z)$ de Weierstrass associada ao reticulado complexo Λ . Verifica-se que

$$\mathcal{P}'_\Lambda(z)^2 = 4\mathcal{P}_\Lambda(z)^3 - 60G_4\mathcal{P}_\Lambda(z) - 140G_6.$$

Demonstração. Veja Teorema 3.5, p. 169 em [26]. ■

Corolário 3.16. Com as notações supracitadas, se $g_2 = 60G_4(\Lambda)$, $g_3 = 140G_6(\Lambda)$ e $\mathcal{C} = \{[1 : \mathcal{P}_\Lambda(z) : \mathcal{P}'_\Lambda(z)] \in \mathbb{P}^2 \mid z \in \mathbb{C} - \Lambda\} \cup \{[0 : 0 : 1]\}$, então $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{C}_{g_2, g_3} = \mathbf{V}(F)_{g_2, g_3}$ com $F_{g_2, g_3} = x_0x_2^2 - 4x_1^3 + g_2x_1x_0^2 + g_3x_0^3$.

Demonstração. Se $p = [0 : 0 : 1]$, temos que $F_{g_2, g_3}(p) = 0$. Considere $q \in \mathcal{C} - \{p\}$ dado por $q = [1 : \mathcal{P}_\Lambda(z) : \mathcal{P}'_\Lambda(z)]$, segue da Proposição 3.15 que

$$\begin{aligned} F_{g_2, g_3}(q) &= \mathcal{P}'_\Lambda(z)^2 - 4\mathcal{P}_\Lambda(z)^3 + g_2\mathcal{P}_\Lambda(z) + g_3 \\ &= 4\mathcal{P}_\Lambda(z)^3 - 60G_4\mathcal{P}_\Lambda(z) - 140G_6 - 4\mathcal{P}_\Lambda(z) + 60G_4\mathcal{P}_\Lambda(z) + 140G_6 = 0. \end{aligned}$$

Portanto, $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{C}_{g_2, g_3}$. ■

Teorema 3.17. Seja $\mathcal{P}_\Lambda(z)$ é a função de Weierstrass associada ao reticulado complexo Λ . Considere $g_2 = 60G_4(\Lambda)$, $g_3 = 140G_6(\Lambda)$ e

$$\mathcal{C} = \{[1 : \mathcal{P}_\Lambda(z) : \mathcal{P}'_\Lambda(z)] \in \mathbb{P}^2 \mid z \in \mathbb{C} - \Lambda\} \cup \{[0 : 0 : 1]\}.$$

Verifica-se que

$$(1) \quad \mathcal{C} = \mathcal{C}_{g_2, g_3} = \mathbf{V}(F_{g_2, g_3}).$$

$$(2) \quad \text{A função } \Phi : \frac{\mathbb{C}}{\Lambda} \longrightarrow \mathcal{C} \text{ definida por}$$

$$\bar{z} \longmapsto \begin{cases} [1 : \mathcal{P}_\Lambda(z) : \mathcal{P}'_\Lambda(z)] & \text{se } \bar{z} \neq \bar{0}, \\ [0 : 0 : 1] & \text{se } \bar{z} = \bar{0} \end{cases}$$

é um isomorfismo de grupos.

Demonstração. Veja Proposição 3.6, p. 170 em [26]. ■

Observação 3.2. Sejam α e β são números complexos tais que $\alpha^3 - 27\beta^2 \neq 0$. Então existe um reticulado complexo Λ tal que $\alpha = 60G_4(\Lambda)$ e $\beta = 140G_6(\Lambda)$ (veja o Teorema 2.2, p. 42 em [1]).

Observação 3.3. Sabemos que toda curva elíptica $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{P}^2$ é projetivamente equivalente à curva $\mathcal{C}_{g_2, g_3}$ para algum $g_2, g_3 \in \mathbb{C}$ tais que $g_2^3 - 27g_3^2 \neq 0$.

Por outro lado, existe um reticulado Λ tal que $g_2 = 60G_4(\Lambda)$ e $g_3 = 140G_6(\Lambda)$. Logo o Teorema 3.17 nos garante que $\mathcal{C}$ é isomorfa a $\frac{\mathbb{C}}{\Lambda}$.

Lema 3.18. Seja $\Gamma \subset \mathcal{C}$ o conjunto dos pontos de inflexão na cúbica não singular $\mathcal{C}$. Então, $\Phi^{-1}(\Gamma) = \frac{\frac{1}{3}\Lambda}{\Lambda}$, sendo $\Phi : \frac{\mathbb{C}}{\Lambda} \rightarrow \mathcal{C}$ o isomorfismo de grupos em (2) do Teorema 2.17.

Demonstração. Como $\Gamma \leq \mathcal{C}$ de ordem 9 cujos elementos $P \neq O$ tem ordem 3 e Φ é um isomorfismo de grupos, segue que $\Phi^{-1}(\Gamma) \leq \frac{\mathbb{C}}{\Lambda}$ é um subgrupo de ordem 9 contido em $\frac{\frac{1}{3}\Lambda}{\Lambda}$.

Entretanto $\frac{\frac{1}{3}\Lambda}{\Lambda} \cong \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$. Assim, $\Phi^{-1}(\Gamma) = \frac{\frac{1}{3}\Lambda}{\Lambda} = \left\{ \bar{a} \in \frac{\mathbb{C}}{\Lambda} \mid \text{ord}(\bar{a}) = 3 \right\} \cup \{\bar{0}\}$. ■

Observação 3.4. $\Gamma \cong \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$ é um espaço vetorial de dimensão 2 sobre o corpo $\mathbb{Z}_3$.

Observação 3.5. Lembremos que se P, Q e R pertencem a Γ verifica-se que

$$P + Q + R = O \iff P, Q \text{ e } R \text{ são colineares.} \quad \otimes$$

Assim, no espaço vetorial Γ vale $\otimes$.

Observação 3.6. Tendo em consideração que $\Gamma \cong \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$, podemos representar os 9 pontos em Γ da forma (xy) com $x, y \in \{0, 1, 2\}$. Assim, $(xy) \mapsto (\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$.

Além disso, $(xy), (x_1y_1), (x_2y_2)$ são colineares se, e somente se $\bar{x} + \bar{x}_1 + \bar{x}_2 = \bar{0} = \bar{y} + \bar{y}_1 + \bar{y}_2$.

3.2.1 Cálculo do grupo de monodromia

Considere $\pi_3 : I_3 \rightarrow W_3$ dada por $(\mathcal{C}, p, \ell) \rightarrow \mathcal{C}$. Temos

$$\begin{array}{ccc} I_3 \supset V = \pi_3^{-1}(U) \supset \Gamma = \pi_3^{-1}(\mathcal{C}) & & \\ \downarrow & & \downarrow \\ W_3 \supset U = \{\mathcal{C} \text{ não singular}\} \ni \mathcal{C} & & \end{array}$$

Lembremos que o grupo de monodromia associado a π_3 , $\mathcal{M}$ é um subgrupo de $B_{ij}(\Gamma)$.

Lema 3.19. Três pontos colineares em Γ continuam colineares sob a ação do grupo de monodromia $\mathcal{M}$.

Demonstração. Considere $\mathcal{C} \in U$ e $P_1, P_2, P_3 \in \Gamma$ colineares.

Lembremos que $\mathcal{M}$ é o subgrupo de S_9 determinado pela imagem do homomorfismo

$$\begin{aligned} \Phi : \pi_1(U, \mathcal{C}) &\longrightarrow B_{ij}(\Gamma) \\ [\gamma] &\longmapsto \Phi_\gamma \end{aligned}$$

definido na Proposição 2.3 (no capítulo 2).

Considere $\gamma : [0 : 1] \longrightarrow U$ um caminho fechado com ponto base $\mathcal{C}$ (isto é $\gamma(0) = \gamma(1) = \mathcal{C}$).

A seguir vamos mostrar que: $\Phi_\gamma(P_i)$ para $i = 1, 2, 3$ são colineares.

Seja $Q_i = \Phi_\gamma(P_i)$ $i = 1, 2, 3$. Lembremos que $Q_i = \tilde{\gamma}_i(1)$ sendo $\tilde{\gamma}_i : [0, 1] \longrightarrow V$ um levantamento de γ com início em P_i .

Assuma que $\gamma(t) = \mathcal{C}(t) \in U$ e $\tilde{\gamma}_i(t) \equiv P_i(t)$ sendo $P_1(t), P_2(t)$ e $P_3(t)$ pontos de inflexão da cúbica não singular $\mathcal{C}(t)$. De fato, $\tilde{\gamma}_i(t) = (\mathcal{C}(t), P_i(t), T_{P_i(t)}\mathcal{C}(t))$.

Considere a curva $\alpha(t) = (\mathcal{C}(t), P(t), T_{P(t)}\mathcal{C}(t))$ sendo $P(t) \in \mathcal{C}(t)$ tal que

$$\ell_{P_1(t), P_2(t)} \cap \mathcal{C}(t) = \{P_1(t), P_2(t), P(t)\}.$$

Observe que

- $\alpha(0) = (\mathcal{C}, P(0), T_{P(0)}\mathcal{C})$, com $P(0) = P_3$.
- $\alpha(1) = (\mathcal{C}, P(1), T_{P(1)}\mathcal{C})$.
- $\pi_3 \circ \alpha(t) = \mathcal{C}(t) = \gamma(t)$.

Por conta da unicidade dos levantamentos de γ com início em P_3 , segue que $\tilde{\gamma}_3 = \alpha$. Logo, $\tilde{\gamma}_3(1) = Q_3 = P(1)$. Portanto, Q_1, Q_2 e Q_3 são colineares. ■

Estrutura do Grupo de Monodromia

Para cada $[\gamma] \in \pi_1(U, \mathcal{C})$ considere $\Phi_\gamma \in B_{ij}(\Gamma)$ com $\Gamma \subseteq \mathcal{C}$ pontos de inflexão.

Seja $v_o = \Phi_\gamma(O)$, com $O \in \Gamma$ elemento neutro. Considere

$$\begin{aligned} \psi_\gamma : \Gamma &\longrightarrow \Gamma \\ P &\longmapsto \Phi_\gamma(P) - v_o \end{aligned}$$

Lema 3.20. Com as notações acima, verifica-se que ψ_γ é $\mathbb{Z}_3$ -linear.

Demonstração. Lembremos que Γ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{Z}_3$. De fato, a adição de vetores em Γ dar-se-á pela adição no grupo abeliano Γ com elemento neutro O .

E o produto por escalares em $\mathbb{Z}_3$ é dado por: $\bar{0} \cdot P = O$; $\bar{1} \cdot P = P$ e $\bar{2} \cdot P = P + P$. Além disso, observe que $\psi_\gamma(O) = O$ ⁵.

⁵Note que $\psi_\gamma(O) = \Phi_\gamma(O) - v_o = v_o - v_o = O$.

3. Grupo de Galois/monodromia dos pontos de inflexão de cúbicas planas não singulares

- $\psi_\gamma(\lambda P) = \lambda \psi_\gamma(P) \quad \lambda \in \mathbb{Z}_3, \quad \forall P \in \Gamma.$

Se $\lambda = \bar{0}$, temos que $\psi_\gamma(\bar{0} \cdot P) = \psi_\gamma(O) = \bar{0} \cdot \psi_\gamma(P).$

Se $\lambda = \bar{1}$, temos que $\psi_\gamma(\bar{1} \cdot P) = \psi_\gamma(P) = \bar{1} \cdot \psi_\gamma(P).$

Se $\lambda = \bar{2}$, temos que verificar que $\psi_\gamma(\bar{2} \cdot P) = \bar{2} \cdot \psi_\gamma(P).$ Ou seja, $\psi_\gamma(P + P) = \psi_\gamma(P) + \psi_\gamma(P).$

Vamos analisar os casos: $P = O$ e $P \neq O$.

★ $P = O$. O resultado segue visto que $\psi_\gamma(O) = O$.

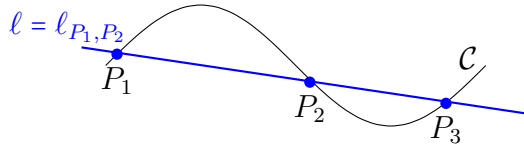
★ $P \neq O$. Note que $P + P \neq P$ e $(P + P) + O + P = O$, o que implica que $P + P, O$ e P são colineares. Assim, $\Phi_\gamma(P + P) + \Phi_\gamma(O) + \Phi_\gamma(P) = O$. O que implica $\Phi_\gamma(P + P) = -\Phi_\gamma(P) - v_o$, assim $\psi_\gamma(P + P) - v_o = \bar{2}\Phi_\gamma(P) - \bar{2}v_o$.

Por outro lado $\psi_\gamma(P) + \psi_\gamma(P) = \Phi_\gamma(P) - v_o + \Phi_\gamma(P) - v_o = \bar{2}\Phi_\gamma(P) - \bar{2}v_o$.

- $\psi_\gamma(P_1 + P_2) = \psi_\gamma(P_1) + \psi_\gamma(P_2) \quad \forall P_1, P_2 \in \Gamma.$

Basta considerar o caso em que $P_1 \neq P_2$.

Caso 1: $P_i \neq O, \quad i = 1, 2.$

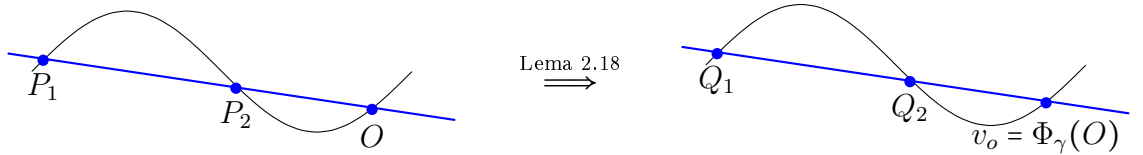


- (1) Existe $\Gamma \ni P_3 \neq P_i \quad i = 1, 2$ tal que $P_1 + P_2 + P_3 = O$, o que implica que $P_3 \in \ell_{P_1, P_2}$.

- (2) $P_1 + P_2 = \bar{P}_3$.

A seguir vamos analisar os casos: $P_3 = O$ e $P_3 \neq O$.

Assuma que $P_3 = O$ e $\Phi_\gamma(P_i) = Q_i, \quad i = 1, 2.$



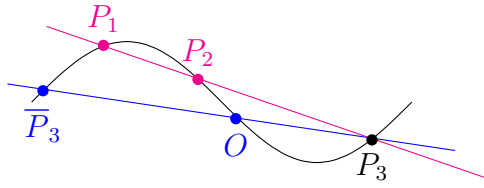
Logo $Q_1 + Q_2 + v_o = O$, o que implica em $Q_1 + Q_2 = -v_o \otimes$. Assim,

$$\psi_\gamma(P_1) + \psi_\gamma(P_2) = Q_1 - v_o + Q_2 - v_o \stackrel{\otimes}{=} -3v_o = O.$$

Por outro lado, $P_1 + P_2 = \bar{O} = O$. Assim, $\psi_\gamma(P_1 + P_2) = \psi_\gamma(O) = O$.

Agora se $P_3 \neq O$, tem-se que

3. Grupo de Galois/monodromia dos pontos de inflexão de cúbicas planas não singulares



$$P_1 + P_2 \neq O.$$

Temos que $P_1 + P_2 + P_3 = O$, o que implica que $Q_1 + Q_2 + Q_3 = O$ (*).

E ainda $(P_1 + P_2) + O + P_3 = O$. Logo, $P_1 + P_2, O$ e P_3 são colineares.

Assim, $\Phi_\gamma(P_1 + P_2), \Phi_\gamma(O) = v_o$ e $\Phi_\gamma(P_3) = Q_3$ são colineares. Daí,

$$\begin{aligned} \Phi_\gamma(P_1 + P_2) + v_o + Q_3 = O &\implies \Phi_\gamma(P_1 + P_2) = -v_o - Q_3 \xrightarrow{-v_o} \\ \psi_\gamma(P_1 + P_2) &= -Q_3 - \bar{2}v_o. \end{aligned}$$

$$\text{Entretanto } \psi_\gamma(P_1) + \psi_\gamma(P_2) = Q_1 - v_o + Q_2 - v_o \stackrel{(*)}{=} -Q_3 - \bar{2}v_o.$$

Caso 2: $P_1 = O$ e $P_2 \neq O$.

Neste caso, $\psi_\gamma(P_1 + P_2) = \psi_\gamma(P_2) = \psi_\gamma(P_1) + \psi_\gamma(P_2)$. Visto que $\psi_\gamma(O) = O$. ■

Observação 3.7. Fixada a base $\alpha = \{(1 \ 0), (0 \ 1)\}$ do $\mathbb{Z}_3$ -espaço vetorial Γ , podemos associar a matriz A_γ ao operador linear ψ_γ (cf. Lema 3.20).

De fato, se $\psi_\gamma((10)) = (ab)$ e $\psi_\gamma((01)) = (cd)$ com $a, b, c, d \in \{0, 1, 2\}$, então

$$A_\gamma = [\psi_\gamma]_\alpha^\alpha = \begin{bmatrix} \bar{a} & \bar{c} \\ \bar{b} & \bar{d} \end{bmatrix} \in GL_2(\mathbb{Z}_3).$$

Considere os grupos $K = GL_2(\mathbb{Z}_3)$ e $H = \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$. Seja

$$\begin{aligned} \sigma : GL_2(\mathbb{Z}_3) &\longrightarrow \text{Aut}(H) \\ A &\longmapsto \sigma(A) \end{aligned}$$

induzido pela ação natural de K em H , isto é, $\sigma(A)(v_1, v_2) = A \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$.

Observe que σ é homomorfismo de grupos.

No próximo Lema considere o grupo $(K \times H, \times_\sigma)$ sendo

$$(A, h) \times_\sigma (A_1, h_1) = (A_1 A, h_1 + \sigma(A_1)(h)).$$

Lema 3.21. Com as notações acima. Verifica-se que

$$\begin{aligned} \Omega : \Phi(\pi_1(U, \mathcal{C})) &\longrightarrow K \times_\sigma H \\ \Phi_\gamma &\longmapsto (A_\gamma, (\bar{x}_0, \bar{y}_0)), \end{aligned}$$

com $\Phi_\gamma(O) = (x_0 \ y_0)$ é um homomorfismo de grupos injetivo.

3. Grupo de Galois/monodromia dos pontos de inflexão de cúbicas planas não singulares

Demonstração. Considere $\Phi_f, \Phi_g \in \Phi(\pi_1(U, \mathcal{C})) \leq B_{ij}(\Gamma)$. Queremos mostrar que $\Omega(\Phi_f \bullet \Phi_g) = \Omega(\Phi_f) \times_\sigma \Omega(\Phi_g)$.

Lembremos que $\Phi_f \bullet \Phi_g = \Phi_{f*g}$. Assim,

$$\Phi_f \bullet \Phi_g = \Phi_{f*g} \xrightarrow{\Omega} (A_{f*g}, (\bar{x}_2, \bar{y}_2)) \text{ com } \Phi_{f*g}(O) = (x_2 \ y_2).$$

$$(i) \ A_{f*g} = A_g A_f.$$

Lembremos que: $A_f = [\psi_f]_\alpha^\alpha$, $A_g[\psi_g]_\alpha^\alpha$ e $A_{f*g} = [\psi_{f*g}]_\alpha^\alpha$. Logo, $A_g A_f = [\psi_g]_\alpha^\alpha [\psi_f]_\alpha^\alpha = [\psi_g \circ \psi_f]_\alpha^\alpha$.

Note que:

$$\begin{aligned} \psi_g \circ \psi_f(P) &= \psi_g(\Phi_f(P) - \Phi_f(O)) \\ \psi_g \text{ é linear} &= \psi_g(\Phi_f(P)) - \psi_g(\Phi_f(O)) \\ &= \Phi_g(\Phi_f(P)) - \Phi_g(O) - (\Phi_g(\Phi_f(O)) - \Phi_g(O)) \\ &= \Phi_g(\Phi_f(P)) - \Phi_g(\Phi_f(O)) \\ &= \Phi_g \circ \Phi_f(P) - \Phi_g \circ \Phi_f(O) \\ &= \Phi_f \bullet \Phi_g(P) - \Phi_f \bullet \Phi_g(O) \\ &= \Phi_{f*g}(P) - \Phi_{f*g}(O) \\ &= \psi_{f*g}(P) \ \forall \ P \in \Gamma. \end{aligned}$$

Assim, $A_{f*g} = [\psi_{f*g}]_\alpha^\alpha = [\psi_g \circ \psi_f]_\alpha^\alpha = A_g A_f$.

(ii) Sejam $h_0 = (\bar{x}_0, \bar{y}_0)$ com $\Phi_f(O) = (x_0 \ y_0)$, $h_1 = (\bar{x}_1, \bar{y}_1)$ com $\Phi_g(O) = (x_1 \ y_1)$ e $h_2 = (\bar{x}_2, \bar{y}_2)$ com $\Phi_{f*g}(O) = (x_2 \ y_2)$.

Afirmação 1. $h_2 = h_1 + \sigma(A_g)(h_0)$, ou seja, $h_2 = h_1 + A_g(h_0)$.

Note que $\Phi_f \bullet \Phi_g = \Phi_{f*g}$. Assim, $\Phi_g \circ \Phi_f(O) = \Phi_{f*g}(O)$. De onde concluímos

$$\begin{aligned} \Phi_g((x_0 \ y_0)) &= (x_2 \ y_2) \xrightarrow{-\Phi_g(O)} \\ \Psi_g((x_0 \ y_0)) &= (x_2 \ y_2) - (x_1 \ y_1) \implies h_2 = h_1 + A_g(h_0). \end{aligned}$$

(iii) Agora vamos verificar a injetividade de Ω . Considere Φ_f tal que $\Omega(\Phi_f) = (A_f, (\bar{x}, \bar{y})) = (I, (\bar{0}, \bar{0}))$ com $\Phi_f(O) = (x \ y)$.

Assim $A_f = I$. Logo, $\psi_f = id_\Gamma$. Além disso, $(\bar{x}, \bar{y}) = (\bar{0}, \bar{0})$, o que implica que $x = y = 0$, pois $x, y \in \{0, 1, 2\}$. Assim, $\Phi_f(O) = (0 \ 0)$. Portanto, $\psi_f = \Phi_f = id_\Gamma$. ■

Considere $SL_2(\mathbb{Z}_3) = \{A \in GL_2(\mathbb{Z}_3) \mid \det A = \bar{1}\}$. Note que $SL_2(\mathbb{Z}_3) \times \mathbb{Z}_3^2$ é um subgrupo de $(GL_2(\mathbb{Z}_3) \times \mathbb{Z}_3^2, \times_\sigma)$ com $(A, h) \times_\sigma (A_1, h_1) = (A_1 A, h_1 + \sigma(A_1)(h))$ e

$$\begin{aligned} \sigma : GL_2(\mathbb{Z}_3) &\longrightarrow \text{Aut}(\mathbb{Z}_3^2) \\ A &\longmapsto \sigma(A) : \mathbb{Z}_3^2 \longrightarrow \mathbb{Z}_3^2 \\ &v \longmapsto Av. \end{aligned}$$

Observação 3.8. (1) Se $A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}_3)$ isto é, α, β, γ e $\delta \in \mathbb{Z}_3$ e $\alpha\delta - \gamma\beta = \bar{1}$.

Então existem a, b, c e $d \in \mathbb{Z}$ tais que $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$ e $\begin{bmatrix} \bar{a} & \bar{b} \\ \bar{c} & \bar{d} \end{bmatrix} = A$.

(2) Verifica-se que a imagem do homomorfismo no Lema 3.21 é um subgrupo de $ASL_2(\mathbb{Z}_3)$ (cf. p. 693-694 em [10]).

Teorema 3.22. *Com as notações acima e do Lema 3.21, verifica-se que $\Omega(\Phi(\pi_1(U, \mathcal{C}))) \cong ASL_2(\mathbb{Z}_3)$.*

Demonstração. Considere $M = \Omega(\Phi(\pi_1(U, \mathcal{C})))$. Segue do item (2) da Observação 3.8 que $M \leq ASL_2(\mathbb{Z}_3)$. A seguir considere $\alpha = (A, v) \in ASL_2(\mathbb{Z}_3)$. Segue do Lema 2.4 (no capítulo 2) que existe $\Phi_\gamma \in \Phi(\pi_1(U, \mathcal{C}))$ tal que $\Phi_\gamma((0 \ 0)) = (v_1 \ v_2)$ se $v = (\bar{v}_1, \bar{v}_2)$, visto que $\pi_3^{-1}(U)$ é conexo por caminhos (cf. Lema 3.64, p. 32 em [19]).

Seja $\beta = (A_\gamma, v) = \Omega(\Phi_\gamma) \in M$, com $v = \Phi_\gamma(O)$.

Assim, $\alpha \times_\sigma \beta^{-1} = (A, v) \times_\sigma (A_\gamma^{-1}, -\sigma(A_\gamma^{-1})v) = (A_\gamma^{-1}A, -\sigma(A_\gamma^{-1})c + \sigma(A_\gamma^{-1})v) = (A_\gamma^{-1}A, (\bar{0}, \bar{0})) \in SL_2(\mathbb{Z}_3) \times \{(\bar{0}, \bar{0})\}$

Logo, $\alpha \times_\sigma \underbrace{\beta^{-1}}_{\in M} \in M$. Como $\beta \in M$ segue que $\alpha \in M$. Portanto $M = ASL_2(\mathbb{Z}_3)$. ■

Proposição 3.23. O grupo $ASL_2(\mathbb{Z}_3)$ é solúvel. Consequentemente, o grupo de monodromia de $\pi_3 : I_3 \longrightarrow W_3$ é solúvel.

Demonstração. Observe que

$$\begin{aligned} f : ASL_2(\mathbb{Z}_3) &\longrightarrow SL_2(\mathbb{Z}_3) \\ (A, v) &\longmapsto A \end{aligned}$$

é um homomorfismo de grupos sobrejetivo, cujo núcleo $N(f) = \{I\} \times \mathbb{Z}_3^2$ é um grupo abeliano (logo solúvel ⁶).

Assim, só precisamos mostrar que $SL_2(\mathbb{Z}_3)$ é solúvel.

Considere

$$\begin{aligned} g : SL_2(\mathbb{Z}_3) &\longrightarrow B_{ij}(\mathbb{P}_{\mathbb{Z}_3}^1) \cong S_4 \\ A &\longmapsto g(A) \end{aligned}$$

com

$$\begin{aligned} g(A) : \mathbb{P}_{\mathbb{Z}_3}^1 &\longrightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{Z}_3}^1 \\ [\bar{a} : \bar{b}] &\longmapsto A \begin{bmatrix} \bar{a} \\ \bar{b} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

⁶Seja G um grupo, tem-se que G é solúvel se, e somente se existem $G_0, G_1, \dots, G_k$ subgrupos de G tais que $G_0 = \{e\} \not\leq G_1 \not\leq \dots \not\leq G_k = G$. De modo que $G_{i-1} \trianglelefteq G_i$ e $\frac{G_i}{G_{i-1}}$ é abeliano para todo $i \in \{1, \dots, k\}$.

3. Grupo de Galois/monodromia dos pontos de inflexão de cúbicas planas não singulares

Observe que $\{I, -I\} \subseteq N(g)$. Por outro lado, seja $A \in N(g)$, assim $g(A) = id_{\mathbb{P}_{\mathbb{Z}_3}^1}$ o que implica $Av = v \ \forall \ v \in \mathbb{P}_{\mathbb{Z}_3}^1$. Daí, se $A = \begin{bmatrix} \bar{\alpha} & \bar{\beta} \\ \bar{\gamma} & \bar{\delta} \end{bmatrix}$ e

$$(i) \ v = [\bar{1} : \bar{0}], \text{ temos } Av = [\bar{\alpha} : \bar{\gamma}] = [\bar{1} : \bar{0}] \implies \bar{\gamma} = \bar{0}.$$

$$(ii) \ v = [\bar{0} : \bar{1}], \text{ temos } Av = [\bar{\beta} : \bar{\delta}] = [\bar{0} : \bar{1}] \implies \bar{\beta} = \bar{0}.$$

$$\text{De (i) e (ii) temos que } A = \begin{bmatrix} \bar{\alpha} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{\delta} \end{bmatrix} \text{ sendo assim}$$

$$(iii) \text{ se } v = [\bar{1} : \bar{1}], \text{ temos } Av = [\bar{\alpha} : \bar{\delta}] = [\bar{1} : \bar{1}] \implies \bar{\alpha} = \bar{\delta}.$$

Como $A \in SL_2(\mathbb{Z}_3)$, temos que $\det A = \bar{1}$ e sendo $A = \begin{bmatrix} \bar{\alpha} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{\alpha} \end{bmatrix}$ tem-se que $\bar{\alpha}^2 = \bar{1}$, assim $\bar{\alpha} = \bar{1}$ ou $\bar{\alpha} = \bar{-1}$. Portanto, $A \in \{I, -I\}$.

Logo, $\frac{SL_2(\mathbb{Z}_3)}{N(g)} \cong Im(g) \leq B_{ij}(\mathbb{P}_{\mathbb{Z}_3}^1) \cong S_4$, o que implica que $|Im(g)| = 12$. Daí, temos $[S_4 : Im(g)] = 2$, portanto $Im(g) \cong A_4$.

Assim, é suficiente mostrar que A_4 é solúvel. Observe que $\{(1)\} \not\leq K \not\leq A_4$ e $K \triangleleft A_4$. Assim, $\left| \frac{A_4}{K} \right| = \frac{12}{4} = 3$ o que implica que $\left| \frac{A_4}{K} \right|$ é abeliano. ■

Observação 3.9. O fato do grupo de Galois associado à extensão de corpos $\pi_3^* : K(W_3) \longrightarrow K(I_3)$ ser solúvel implica em que o polinômio minimal $P(x) = irred(\alpha, F)$ é solúvel por radicais. Entretanto, as raízes de $P(x)$ correspondem-se com os pontos numa fibra geral $\pi_3^{-1}(\mathcal{C})$ que está em bijeção com os pontos de inflexão de $\mathcal{C}$. Assim, cada ponto de inflexão pode ser expresso em função do corpo de funções racionais $K(W_3)$.

Teorema 3.24. *Considere uma cúbica não singular $\mathcal{C}$ na sua forma de Weierstrass. Isto é, $\mathcal{C} = V(F_{g_2, g_3})$ com*

$$F_{g_2, g_3} = x_0 x_2^2 - 4x_1^3 + g_2 x_1 x_0^2 + g_3 x_0^3.$$

Então os pontos de inflexão de $\mathcal{C}$ são $[0 : 0 : 1]$ e $[1 : a_1 : a_2]$ sendo $a_i \in \mathbb{C}$ solução da equação

$$a_1^4 - \frac{g_2}{2} a_1^2 - g_3 a_1 - \frac{g_2^2}{48} = 0 \quad e \quad a_2^2 = 4a_1^3 - g_2 a_1 - g_3.$$

Demonstração. Segue do Lema 3.10 que $[0 : 0 : 1]$ é um ponto de inflexão de $\mathcal{C}$.

Como $[0 : 0 : 1]$ é o único ponto de inflexão na reta no infinito $V(x_0) \subset \mathbb{P}^2$. Os outros pontos de inflexão podem ser representados na forma $[1 : a_1 : a_2]$.

Considere $F = x_0 x_2^2 - 4x_1^3 + g_2 x_1 x_0^2 + g_3 x_0^3$. Por outro lado, sabemos que $Q = [1 : a_1 : a_2]$ é ponto de inflexão de $\mathcal{C}$ se, e somente se, $F(Q) = 0$ e $H_F(Q) = O$ sendo H_F a hessiana associada a F .

3. Grupo de Galois/monodromia dos pontos de inflexão de cúbicas planas não singulares

A seguir vamos calcular H_F . Note que

$$F_{x_0} = x_2^2 + 2g_2x_1x_0 + 3g_3x_0^2 \implies \begin{cases} F_{x_0x_0} = 2g_2x_1 + 6g_3x_0 \\ F_{x_0x_1} = 2g_2x_0 \\ F_{x_0x_2} = 2x_2 \end{cases}.$$

$$F_{x_1} = -12x_1^2 + g_2x_0^2 \implies \begin{cases} F_{x_1x_0} = 2g_2x_0 \\ F_{x_1x_1} = -24x_1 \\ F_{x_1x_2} = 0 \end{cases}.$$

$$F_{x_2} = 2x_0x_2 \implies \begin{cases} F_{x_2x_0} = 2x_2 \\ F_{x_2x_1} = 0 \\ F_{x_2x_2} = 2x_0 \end{cases}.$$

Sendo

$$H_F = \begin{vmatrix} F_{x_0x_0} & F_{x_0x_1} & F_{x_0x_2} \\ F_{x_1x_0} & F_{x_1x_1} & F_{x_1x_2} \\ F_{x_2x_0} & F_{x_2x_1} & F_{x_2x_2} \end{vmatrix}.$$

Verificamos que $H_F = 8(12x_1x_2^2 - 12g_2x_1^2x_0 - g_2^2x_0^3 - 36g_3x_0^2x_1)$.

Portanto $Q = [1 : a_1 : a_2] \in \mathbf{V}(F, H_F)$ se, e somente se

$$a_2^2 = 4a_1^3 - g_2a_1 - g_3 \quad \text{e} \quad a_1^4 - \frac{g_2}{2}a_1^2 - g_3a_1 - \frac{g_2^2}{48} = 0.$$

■

Capítulo 4

Retas em uma superfície cúbica não singular em termos de três retas disjuntas

Em [10] Harris estabeleceu que o grupo de monodromia associado a $\pi : \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{S}_3$ que será introduzido a seguir, é um grupo não solúvel. Entretanto, ao restringir o estudo para famílias de superfícies cúbicas não singulares nos casos em que são fixadas três retas duas a duas disjuntas ou duas retas concorrentes, Harris mostra que ditos grupos são solúveis (p. 719 em [10]).

O foco deste capítulo é determinar as fórmulas para as 24 retas numa superfície cúbica não singular que contém três retas duas a duas disjuntas fixadas em termos dos coeficientes que definem tal superfície e os coeficientes das equações que definem as retas disjuntas previamente fixadas, seguindo as linhas do artigo de McKean-Minahan-Zhang [16].

4.1 Grupo de monodromia das 27 retas

Considere $\mathcal{S}_3 = \mathbb{P}(\mathbb{C}[x_0, x_1, x_2, x_3]_3)$, $G = \{\ell \mid \ell \text{ é uma reta em } \mathbb{P}^3\}$, e $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{S}_3 \times G$ dada por $\mathcal{L} = \{([F], \ell) \mid \ell \subseteq \mathbf{V}(F)\}$.

Seja

$$\begin{aligned} \pi : \mathcal{L} &\longrightarrow \mathcal{S}_3 \\ ([F], \ell) &\longmapsto [F] \end{aligned}$$

a projeção na 1ª coordenada.

Proposição 4.1. Com as notações acima π é uma função racional dominante genericamente finita entre variedades da mesma dimensão.

Demonstração. Tendo em consideração o Mergulho de Plücker $w : G \longrightarrow \mathbb{P}^5$ dado por $\ell \longmapsto [w_{01} : \dots : w_{23}]$ sendo $w_{ij} = u_i v_j - u_j v_i$ para $0 \leq i < j \leq 3$, se $u = (u_0, u_1, u_2, u_3)$ e $v = (v_0, v_1, v_2, v_3)$ são L.I. tais que $\ell = \mathbb{P}([u, v])$ conclui-se que G é uma variedade projetiva de dimensão 4.

Por outro lado, a projeção $q : \mathcal{L} \longrightarrow G$ dada por $([F], \ell) \longmapsto \ell$ é um morfismo sobrejetor tal que

$$\begin{aligned} q^{-1}(\ell) &= \{([F], \ell) \mid \ell \subseteq \mathbf{V}(F)\} \\ &= \{[F] \in \mathcal{S}_3 \mid F \in \mathcal{I}(\ell)\} \times \{\ell\} \\ &= \mathbb{P}(\mathcal{I}(\ell)_3) \times \{\ell\} \\ &\equiv \mathbb{P}(\mathcal{I}(\ell)_3). \end{aligned}$$

Assim, todas as fibras de q são irredutíveis e da mesma dimensão 15 visto que $\dim \mathcal{I}(\ell)_3 = \frac{3(3+1)(3+5)}{6} = 16$.

Portanto, segue do Lema 12.7 (p. 111 em [6]) que $\mathcal{L}$ é irredutível e do Teorema da dimensão das fibras que $\dim \mathcal{L} = \dim G + \dim q^{-1}(\ell) = 4 + 15 = 19$.

Finalmente ao considerarmos o aberto $U = \{[F] \in \mathcal{S}_3 \mid F \text{ é não singular}\}$ tem-se que $\pi^{-1}([F]) = \{([F], \ell) \mid \ell \subseteq \mathbf{V}(F)\}$ é um conjunto finito de cardinalidade 27 se $[F] \in U$ (cf. [3] e [4]). ■

O grupo de monodromia associado a π

Seja $S \subseteq \mathbb{P}^3$ uma superfície cúbica não singular. Escolha $L_1, \dots, L_6$ retas em S duas a duas disjuntas. Em [10] Harris considera o $\mathbb{Z}_2$ -espaço vetorial $V = P^2(S, \mathbb{Z}_2) \leq H^2(S, \mathbb{Z}_2)$ cujas classes tem número de intersecção zero ¹. A seguir mostra que $L_1, \dots, L_6$ formam uma base de V e considera a forma quadrática

$$\begin{aligned} q : V &\longrightarrow \mathbb{Z}_2 \\ \sum_{i=1}^6 x_i L_i &\longmapsto \sum_{i < j} x_i x_j. \end{aligned}$$

A partir da forma quádrlica q , define o grupo

$$O_6^-(\mathbb{Z}_2) = \{\varphi \in \text{Aut}(V) \mid q(v) = q(\varphi(v)) \ \forall \ v \in V\}$$

sendo $\text{Aut}(V) = \{\varphi : V \longrightarrow V \mid \varphi \text{ é isomorfismo } \mathbb{Z}_2\text{-linear}\}$. De fato, Harris estabelece que

Proposição 4.2. Com as notações acima. Verifica-se que:

- (1) O grupo de monodromia M associado a $\pi : \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{S}_3$ é isomorfo a $O_6^-(\mathbb{Z}_2)$.

¹ $H^2(S, \mathbb{Z}_2)$ é o segundo grupo de cohomologia $H^2(S, \mathbb{Z}_2)$ módulo 2.

(2) $O_6^-(\mathbb{Z}_2)$ não é solúvel.

Demonstração. Veja p. 715-718 no artigo de Harris [10]. ■

Vale salientar que o fato do grupo de monodromia M (associado a π) não ser solúvel implica que se $F = \sum a_I x^I \in \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2, x_3]$ define uma superfície cúbica não singular S em $\mathbb{P}^3$. Então não podemos encontrar equações/fórmulas para as 27 retas em S a partir dos coeficientes $a'_I s$ e/ou radicais envolvendo os $a'_I s$.

Entretanto, Harris mostra que o grupo de monodromia associado ao morfismo

$$\mathcal{S}_{3,\text{skew}} \times G \ni \{([F], [L_1, L_2, L_3]; L) \mid L \subseteq \mathbf{V}(F)\} \longrightarrow \mathcal{S}_{3,\text{skew}},$$

determinado pela projeção na primeira coordenada, sendo

$$\mathcal{S}_{3,\text{skew}} = \{([F], [L_1, L_2, L_3]) \mid L_i \subseteq \mathbf{V}(F), L_i \cap L_j = \emptyset \ \forall \ i \neq j\} \subseteq \mathcal{S}_3 \times G_3(S_1)$$

com $G_3(S_1) = \{W \leq S_1 \mid \dim W = 3\}$ e $S_1 = \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2, x_3]_1$ é solúvel (cf. p. 718-719 em [10]).

4.2 Retas em superfícies cúbicas não singulares contendo E_1, E_2 e E_3

No que segue do texto deste capítulo utilizaremos a notação de Harris (que também é utilizada por Mckean-Minahan-Zhang em [16]) para denotar as 27 retas numa superfície cúbica não singular em $\mathbb{P}^3$, a saber:

O duplo-seis

$$\begin{array}{cccccc} E_1 & E_2 & E_3 & E_4 & E_5 & E_6 \\ C_1 & C_2 & C_3 & C_4 & C_5 & C_6 \end{array}$$

e as 15 retas residuais $L_{i,j}$ nos planos $\langle E_i, C_j \rangle$ com $i < j$.

Salientamos que o estudo da intersecção entre estas 27 retas encontra-se no apêndice B (cf. Proposição B.10 e B.12).²

Nesta seção vamos fixar as retas $E_1 = \mathbf{V}(x_0, x_1)$, $E_2 = \mathbf{V}(x_2, x_3)$ e $E_3 = \mathbf{V}(x_0 - x_2, x_1 - x_3)$ e considerar uma superfície cúbica não singular $S = \mathbf{V}(F) \subset \mathbb{P}^3$ contendo as retas E_1, E_2 e E_3 .

Observe que se $F = \sum_{0 \leq i,j,k,l} \alpha_{i,j,k,l} x_0^i x_1^j x_2^k x_3^l$, $i + j + k + l = 3$, então tem-se que

- $E_1 = \mathbf{V}(x_0, x_1) \subseteq S \iff F(0, 0, s, t) = 0 \ \forall \ [s : t] \in \mathbb{P}^1$. Assim $E_1 \subseteq S$ se, e somente se

²Nesse apêndice o leitor deverá considerar $a_i = E_i$ e $b_i = C_i$.

4. Retas em uma superfície cúbica não singular em termos de três retas disjuntas

$$\alpha_{0,0,3,0}s^3 + \alpha_{0,0,2,1}s^2t + \alpha_{0,0,1,2}st^2 + \alpha_{0,0,0,3}t^3 = 0 \quad \forall [s:t] \in \mathbb{P}^1$$

o que implica que $\alpha_{0,0,i,j} = 0 \quad \forall i, j \in \{0, 1, 2, 3\}, i + j = 3$.

- $E_2 = \mathbf{V}(x_2, x_3) \subseteq S \iff F(s, t, 0, 0) = 0 \quad \forall [s:t] \in \mathbb{P}^1$. Assim $E_2 \subseteq S$ se, e somente se

$$\alpha_{3,0,0,0}s^3 + \alpha_{2,1,0,0}s^2t + \alpha_{1,2,0,0}st^2 + \alpha_{0,3,0,0}t^3 = 0 \quad \forall [s:t] \in \mathbb{P}^1$$

o que implica que $\alpha_{3,0,0,0} = \alpha_{2,1,0,0} = \alpha_{1,2,0,0} = \alpha_{0,3,0,0} = 0$.

- $E_3 = \mathbf{V}(x_0 - x_2, x_1 - x_3) \subseteq S \iff F(s, t, s, t) = 0 \quad \forall [s:t] \in \mathbb{P}^1$. Assim $E_3 \subseteq S$ se, e somente se

$$s^3(\alpha_{2,0,1,0} + \alpha_{1,0,2,0}) + s^2t(\alpha_{2,0,0,1} + \alpha_{1,0,1,1} + \alpha_{1,1,1,0} + \alpha_{0,1,2,0}) + \\ st^2(\alpha_{1,1,0,1} + \alpha_{1,0,0,2} + \alpha_{0,2,1,0} + \alpha_{0,1,1,1}) + t^3(\alpha_{0,2,0,1} + \alpha_{0,1,0,2}) = 0 \quad \forall [s:t] \in \mathbb{P}^1.$$

Daí,

$$\begin{aligned} \alpha_{2,0,1,0} + \alpha_{1,0,2,0} &= 0, & \alpha_{2,0,0,1} + \alpha_{1,0,1,1} + \alpha_{1,1,1,0} + \alpha_{0,1,2,0} &= 0, \\ \alpha_{0,2,0,1} + \alpha_{0,1,0,2} &= 0, & \alpha_{1,1,0,1} + \alpha_{1,0,0,2} + \alpha_{0,2,1,0} + \alpha_{0,1,1,1} &= 0 \end{aligned}$$

Por simplicidade, no que segue do texto vamos usar a seguinte notação.

$$\begin{aligned} a_1 &= \alpha_{2,0,1,0}, a_2 = \alpha_{1,1,1,0}, a_3 = \alpha_{0,2,1,0}, a_4 = \alpha_{1,0,2,0}, a_5 = \alpha_{0,1,2,0}, a_6 = \alpha_{0,1,1,1}, \\ a_7 &= \alpha_{1,0,1,1}, a_8 = \alpha_{1,0,0,2}, a_9 = \alpha_{0,1,0,2}, a_{10} = \alpha_{2,0,0,1}, a_{11} = \alpha_{1,1,0,1}, a_{12} = \alpha_{0,2,0,1}. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} F &= x_0x_2(a_1x_0 + a_4x_2) + x_0x_3(a_{10}x_0 + a_8x_3 + a_{11}x_1 + a_7x_2) + \\ &\quad x_1x_2(a_3x_1 + a_9x_2 + a_6x_3 + a_2x_0) + x_1x_3(a_{12}x_1 + a_9x_3) \end{aligned} \tag{4.1}$$

e seus coeficientes satisfazem (4.2)

$$\begin{cases} a_1 + a_4 = 0 \\ a_2 + a_5 + a_7 + a_{10} = 0 \\ a_3 + a_6 + a_8 + a_{11} = 0 \\ a_9 + a_{12} = 0 \end{cases} \tag{4.2}$$

A superfície quádrlica não singular $Q = \mathbf{V}(x_0x_3 - x_1x_2)$ determinada pelas retas E_1, E_2 e E_3 será uma peça chave para determinarmos as 24 retas restantes na superfície S . De fato, tais retas farão parte de uma das famílias de retas da quádrlica Q . Por esse motivo, vamos introduzir essas famílias de retas a seguir.

Considere as famílias de retas $\mathcal{L} = \{L_p\}_p$ e $\mathcal{N} = \{N_p\}_p$ da superfície $Q = \mathbf{V}(x_0x_2 - x_1x_3)$ dadas por

$$\begin{aligned} L_p &= \{[au : bu : av : bv] \in \mathbb{P}^3 \mid [u : v] \in \mathbb{P}^1\} = \mathbf{V}(bx_0 - ax_1, bx_2 - ax_3) \\ N_p &= \{[au : av : bu : bv] \in \mathbb{P}^3 \mid [u : v] \in \mathbb{P}^1\} = \mathbf{V}(bx_0 - ax_2, bx_1 - ax_3) \end{aligned}$$

se $p = [a : b] \in \mathbb{P}^1$.

Observe que E_1, E_2 e E_3 pertencem à família $\mathcal{N}$. Além disso, se $p = [t : 1]$ então

$$L_p = \underbrace{\{[t : 1 : tb : b] \in \mathbb{P}^3 \mid b \in \mathbb{C}\}}_{L_t} \cup \{[0 : 0 : t : 1]\}.$$

E verifica-se que

$$L_p \subseteq S \iff L_t \subseteq S \iff F(t, 1, tb, b) = 0 \quad \forall b \in \mathbb{C}.$$

De forma análoga tem-se que

$$N_p = \underbrace{\{[t : tb : 1 : b] \in \mathbb{P}^3 \mid b \in \mathbb{C}\}}_{N_t} \cup \{[0 : t : 0 : 1]\}.$$

$$\text{e } N_p \subseteq S \iff N_t \subseteq S \iff F(t, tb, 1, b) = 0 \quad \forall b \in \mathbb{C}.$$

Proposição 4.3. Sejam t_4, t_5, t_6 as raízes de

$$\begin{aligned} g(t) &= a_1t^3 + (a_2 + a_{10})t^2 + (a_3 + a_{11})t + a_{12} \\ &= -(a_4t^3 + (a_5 + a_7)t^2 + (a_6 + a_8)t + a_9). \end{aligned} \tag{4.3}$$

Então $C_4 = \mathbf{V}(x_0 - t_4x_1, x_2 - t_4x_3)$, $C_5 = \mathbf{V}(x_0 - t_5x_1, x_2 - t_5x_3)$ e $C_6 = \mathbf{V}(x_0 - t_6x_1, x_2 - t_6x_3)$ são retas da família $\mathcal{L}$ contidas em S .

Demonstração. A seguir determinaremos as retas da família $\mathcal{L}$ que estão contidas em S . Note que, $L_t = \{[t : 1 : tb : b] \in \mathbb{P}^3 \mid b \in \mathbb{C}\} \subseteq S$ se, e somente se $F(t, 1, tb, b) = 0 \quad \forall b \in \mathbb{C}$. Assim, segue de (4.1) que

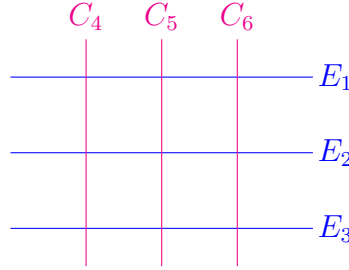
$$\begin{aligned} F(t, 1, tb, b) &= bt^2(a_1t + a_4bt) + tb(a_{10}t + a_8b + a_{11} + a_7bt) \\ &+ tb(a_3 + a_5bt + a_6b + a_2t) + b(a_{12} + a_9b) \\ &= b^2(a_4t^3 + a_8t + a_7t^2 + a_6t + a_5t^2 + a_9) \\ &+ b(a_1t^3 + a_{10}t^2 + a_{11}t + a_3ta_2t^2 + a_{12}). \end{aligned}$$

4. Retas em uma superfície cúbica não singular em termos de três retas disjuntas

Entretanto, verifica-se que $F(t, 1, tb, b) = (b - b^2)g(t)$ com $g(t)$ descrito em (4.3).

Logo, $L_t \subseteq S$ se, e somente se $g(t) = 0$. Como $\text{grau}(g(t)) = 3$ obtemos as raízes t_4, t_5 e $t_6 \in \mathbb{C}$. De modo que cada uma dessas raízes determina a reta $L_{p_i} \in \mathcal{L}$ com $p_i = [t_i : 1]$, $L_{p_i} = \{[t_i u : u : t_i v : v] \mid [u : v] \in \mathbb{P}^1\} = \mathbf{V}(x_0 - t_i x_1, x_2 - t_i x_3)$ com $i = 4, 5, 6$. Daí, vamos chamar L_{p_4} , L_{p_5} e L_{p_6} por C_4, C_5 e C_6 , respectivamente. Observe que $t_i \neq t_j$ para $i \neq j$, caso contrário, teríamos que $C_i = C_j$. ■

Observação 4.1. As raízes t_4, t_5 e t_6 podem ser determinadas a partir de fórmulas que envolvem os coeficientes de $g(t)$ e seus radicais. Portanto, t_4, t_5 e t_6 admitem fórmulas que envolvem os coeficientes e radicais dos coeficientes de F . Assim, já temos as equações para as retas C_4, C_5 e C_6 na superfície $S = \mathbf{V}(F)$, cujos coeficientes são obtidos a partir dos coeficientes de F e seus radicais.

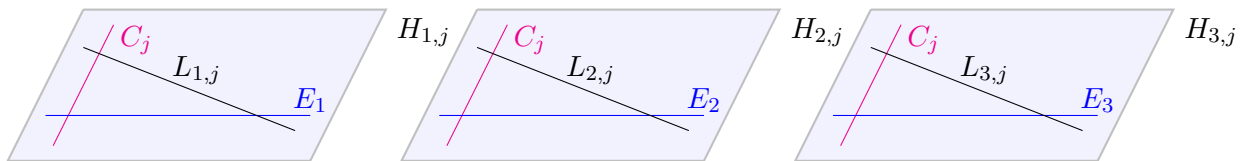


Falta determinar 21 retas em S .

A seguir considere os planos $H_{i,j} = \langle E_i, C_j \rangle$ com $1 \leq i \leq 3$ e $4 \leq j \leq 6$.



A intersecção $H_{i,j} \cap S$ determina uma nova reta em S , que denotaremos por $L_{i,j}$. Isto é, $H_{i,j} \cap S = E_i \cup C_j \cup L_{i,j}$. Assim, obtemos 9 retas, a saber $L_{1,j}, L_{2,j}$ e $L_{3,j}$ com $j = 4, 5, 6$.



A seguir vamos determinar as equações dos planos $H_{1,j}, H_{2,j}$ e $H_{3,j}$ com $j = 4, 5, 6$.

Seja $H_{1,j} = \mathbf{V}(L)$. Temos que $E_1 \subset H_{1,j}$ se, e somente se $L \in \langle x_0, x_1 \rangle$ se, e somente se existem $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ tais que $L = \alpha x_0 + \beta x_1$. Por outro lado temos que $C_j \subset H_{1,j}$ se, e

somente se $L = a(x_0 - t_j x_1) + b(x_2 - t_j x_3)$. Igualando as últimas duas equações, obtemos que $H_{1,j} = \mathbf{V}(x_0 - t_j x_1)$.

De maneira análoga, encontramos que $H_{2,j} = \mathbf{V}(x_2 - t_j x_3)$ e $H_{3,j} = \mathbf{V}((x_0 - x_2) - t_j(x_1 - x_3))$.

Proposição 4.4. Verifica-se que $L_{1,j} = \mathbf{V}(x_0 - t_j x_1, \ell_{1,j})$, $L_{2,j} = \mathbf{V}(x_2 - t_j x_3, \ell_{2,j})$ e $L_{3,j} = \mathbf{V}((x_0 - x_2) - t_j(x_1 - x_3), \ell_{3,j})$, sendo

$$\begin{aligned}\ell_{1,j} &= x_1(t_j^2 a_1 + t_j a_2 + a_3) + x_2(a_4 + a_5) + x_3(t_j^2 a_4 + t_j(a_5 + a_6 + a_7)), \\ \ell_{2,j} &= x_0(t_j a_1 + a_{10}) + x_1(t_j^2 a_1 + t_j(a_2 + a_{10} + a_{11})) + x_3(t_j^2 a_4 + t_j a_7 + a_8), \\ \ell_{3,j} &= x_1(t_j^2 a_1 + t_j a_2 + a_3) + x_2(t_j a_1 + a_2 + a_5) + x_3(t_j a_{10} - a_8).\end{aligned}$$

Demonstração. Note que $H_{1,j} = \mathbf{V}(x_0 - t_j x_1)$, $H_{2,j} = \mathbf{V}(x_2 - t_j x_3)$ e $H_{3,j} = \mathbf{V}((x_0 - x_2) - t_j(x_1 - x_3))$. Observe que a intersecção $S \cap H_{1,j}$ é dada pelos zeros do polinômio $F(t_j x_1, x_1, x_2, x_3)$. Assim, de (4.1) tem-se que

$$\begin{aligned}F(t_j x_1, x_1, x_2, x_3) &= x_1 x_2 (x_1(a_1 t_j^2 + a_2 t_j + a_3) + x_2(a_4 t_j + a_5) + a_6 x_3) \\ &\quad - x_1 x_3 (x_1((a_7 + a_2 + a_5)t_j^2 + (a_8 + a_6 + a_3)t_j + a_9) \\ &\quad + x_2((a_{10} + a_2 + a_5)t_j) + x_3((a_{11} + a_3 + a_6) + a_{12})).\end{aligned}$$

Adicionando $-x_1^2 x_3 a_1 t_j^3 + x_1^2 x_3 a_1 t_j^3 - x_1 x_2 x_3 a_4 t_j^2 + x_1 x_2 x_3 a_4 t_j^2 - x_1 x_3^2 + a_4 t_j^3 + x_1 x_3^2 + a_4 t_j^3 - x_1 x_3^2 t_j^2(a_5 + a_7) + x_1 x_3^2 t_j^2(a_5 + a_7)$ na equação acima, obtemos que

$$\begin{aligned}F(t_j x_1, x_1, x_2, x_3) &= x_1 x_2 \ell_{1,j} - t_j x_1 x_3 \ell_{1,j} \\ &\quad - x_1 x_3 (x_1(-a_1 t_j^3 + a_7 t_j^2 + a_5 t_j^2 + a_8 t_j + a_6 t_j + a_9) \\ &\quad + x_2(a_{10} t_j + a_2 t_j + a_5 t_j + a_7 t_j) + x_3(a_4 t_j^3 - t_j^2(a_5 + a_7) + a_{11} t_j \\ &\quad + a_3 t_j + a_{12})).\end{aligned}$$

Sendo assim, de (4.2) temos que $a_{10} t_j + a_2 t_j + a_5 t_j + a_7 t_j = 0$ e de (4.3) segue que $a_1 t_j^3 + (a_{10} + a_2) t_j^2 + (a_3 + a_{11}) t + a_{12} = 0$. Portanto, obtemos que $F(t_j x_1, x_1, x_2, x_3) = x_1(x_2 - t_j x_3) \ell_{1,j}$.

Assim, $L_{1,j}$ é dada pelos zeros de $x_0 - t_j x_1$ e $\ell_{1,j}$. Logo, $L_{1,j} = \mathbf{V}(x_0 - t_j x_1, \ell_{1,j})$.

Analogamente a intersecção $S \cap H_{2,j}$ é dada pelos zeros do polinômio $F(x_0, x_1, t_j x_3, x_3)$. Assim, de (4.1) tem-se que

$$\begin{aligned}F(x_0, x_1, t_j x_3, x_3) &= x_0 x_3 (x_0(t_j a_1 + a_{10}) + x_1 a_{11} + x_3(t_j^2 a_4 + t_j a_7 + a_8)) \\ &\quad + x_1 x_3 (x_0(t_j a_2) + x_1(t_j a_3 + a_9) + x_3(t_j^2 a_5 + t_j a_6 + a_9)) \\ &= x_0 x_3 (x_0(t_j a_1 + a_{10}) + x_1 a_{11} + x_3(t_j^2 a_4 + t_j a_7 + a_8)) \\ &\quad - x_1 x_3 (x_0 t_j(a_5 + a_{10} + a_7) + x_1(t_j(a_6 + a_8 + a_{11}) + a_{12}) \\ &\quad + x_3(t_j^2(a_{10} + a_7 + a_2) + t_j(a_{11} + a_8 + a_3) + a_{12})).\end{aligned}$$

4. Retas em uma superfície cúbica não singular em termos de três retas disjuntas

Adicionando $x_0x_1x_3(t_j^2a_1 + t_j(a_{10} + a_2)) - x_0x_1x_3(t_j^2a_1 + t_j(a_{10} + a_2)) - x_0x_1x_3t_j^2a_1 + x_0x_1x_3t_j^2a_1 - x_1^2x_3(t_j^3a_1 + t_j^2(a_{10} + a_2)) + x_1^2x_3(t_j^3a_1 + t_j^2(a_{10} + a_2)) - x_1x_3^2t_j^3a_4 + x_1x_3^2t_j^3a_4$ na equação $F(x_0, x_1, t_jx_3, x_3)$, obtemos que

$$\begin{aligned} F(x_0, x_1, t_jx_3, x_3) &= (x_0x_3 + t_jx_1x_3)\ell_{2,j} \\ &- x_1x_3(x_0t_j(a_7 + a_{10} + a_2 + a_5) + x_1(-t_j^3a_1 - t_j^2(a_{10} + a_2) \\ &+ t_j(a_6 + a_8) + a_{12}) + x_3(-t_j^3a_4 + t_j^2(a_{10} + a_2) + t_j(a_{11} + a_3) + a_{12})). \end{aligned}$$

Sendo assim, de (4.2) e (4.3), segue que $F(x_0, x_1, t_jx_3, x_3) = x_3(x_0 + t_jx_1)\ell_{2,j}$.

Assim, $L_{2,j} = \mathbf{V}(x_2 - t_jx_3, \ell_{2,j})$.

Agora temos que a intersecção $S \cap H_{3,j}$ é dada pelos zeros do polinômio $F(x_2 + t_j(x_1 - x_3), x_1, x_2, x_3)$. Assim, de (4.1) tem-se que

$$\begin{aligned} F(x_2 + t_j(x_1 - x_3), x_1, x_2, x_3) &= (x_2 + t_j(x_1 - x_3))x_2(a_1(x_2 + t_j(x_1 - x_3) + a_4x_2)) \\ &+ (x_2 + t_j(x_1 - x_3))x_3(a_{10}(x_2 + t_j(x_1 - x_3) + a_8x_3 \\ &+ a_{11}x_1 + a_7x_2)) + x_1x_2(a_3x_1 + a_5x_2 + a_6x_3 + a_2(x_2 \\ &+ t_j(x_1 - x_3))) + x_1x_3(a_{12}x_1 + a_9x_3) \\ &= x_1x_2(x_1(t_j^2 + t_ja_2 + a_3) + x_2(t_ja_1 + a_2 + a_5)) \\ &+ x_3(t_j^2a_4 + t_j(a_2 + a_5 + a_{10}) + a_6)) - x_2x_3(x_1(t_j^2a_1 \\ &+ t_j(a_2 + a_5 + a_7) + a_3 + a_6 + a_8) + x_2(t_ja_1 + a_2 + a_5)) \\ &+ x_3(t_j^2a_4 + t_ja_{10} + a_3 + a_6 + a_{11})) - x_1x_3(x_1(t_j^2(a_2 + a_5 \\ &+ a_7) + t_j(a_3 + a_6 + a_8) + a_9) + x_2t_j(a_2 + a_5) + x_3(t_j^2a_{10} \\ &+ t_j(a_3 + a_6 + a_{11}) + a_{12})) + x_3^2(x_1(t_j^2(a_2 + a_5 + a_7) \\ &+ t_j(a_3 + a_6 + a_8)) + x_2t_j(a_2 + a_5) + x_3(t_j^2a_{10} \\ &+ t_j(a_3 + a_6 + a_{11}))). \end{aligned}$$

Adicionando $-x_1x_2x_3(a_3 + a_{11}) + x_1x_2x_3(a_3 + a_{11}) - x_1^2x_3t_j^3a_1 + x_1^2x_3t_j^3a_1 - x_1x_2x_3t_j^2a_1 + x_1x_2x_3t_j^2a_1 + x_3^2x_1t_j^3a_1 - x_3^2x_1t_j^3a_1 + x_3^2x_2t_j^2a_1 - x_3^2x_2t_j^2a_1$ na equação $F(x_2 + t_j(x_1 - x_3), x_1, x_2, x_3)$, obtemos que

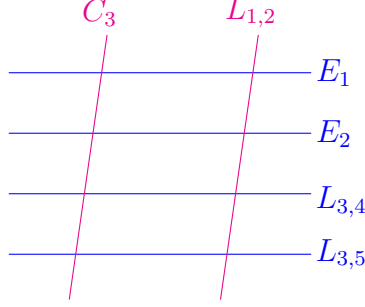
$$\begin{aligned} F(x_2 + t_j(x_1 - x_3), x_1, x_2, x_3) &= (x_1x_2 - t_jx_1x_3 - x_2x_3 + t_jx_3^2)\ell_{3,j} \\ &+ x_1x_2x_3(t_j^2a_4 + t_j(a_7 + a_5) - t_j(a_5 + a_7) + t_j^2a_1 - a_3 - a_6 \\ &- a_8 - a_{11}) - x_1^2x_3(-t_j^3a_1 + t_j^2(a_2 + a_5) + t_j(a_6 + a_8) + a_9) \\ &- x_1x_3^2(a_1t_j^3 - t_j^2(a_5 + a_7) - t_j(a_6 + a_8) + a_{12}) \\ &- x_2x_3^2(t_j^2a_4 + t_j^2a_1). \end{aligned}$$

Sendo assim, de (4.2) e (4.3), segue que $F(x_2 + t_j(x_1 - x_3), x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_3)(x_2 - t_jx_3)\ell_{3,j}$.

Assim, $L_{3,j} = \mathbf{V}((x_0 - x_2) - t_j(x_1 - x_3), \ell_{3,j})$. ■

Mais duas retas na superfície cúbica S

A seguir vamos determinar mais duas retas em S que denominaremos de C_3 e $L_{1,2}$ tais que $C_3 \cap L_{1,2} = \emptyset$ e C_3 e $L_{1,2}$ encontram³ as quatro retas $E_1, E_2, L_{3,4}$ e $L_{3,5}$.



Para isto, vamos estabelecer as seguintes notações: $\ell_{3,4} = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3$ sendo

$$\begin{aligned} c_1 &= t_4^2a_1 + t_4a_2 + a_3 \\ c_2 &= t_4a_1 + a_5 + a_2 \\ c_3 &= t_4a_{10} - a_8 \end{aligned}$$

Analogamente, $\ell_{3,5} = d_1x_1 + d_2x_2 + d_3x_3$ com

$$\begin{aligned} d_1 &= t_5^2a_1 + t_5a_2 + a_3 \\ d_2 &= t_5a_1 + a_5 + a_2 \\ d_3 &= t_5a_{10} - a_8 \end{aligned}$$

conforme a descrição de $\ell_{3,4}$ e $\ell_{3,5}$ na Proposição 3.4.

Proposição 4.5. Com as notações acima, tem-se que $c_1 \neq 0$, $d_1 \neq 0$ e $c_3 + t_4c_2 \neq 0$.

Demonstração. Suponha que $c_3 + t_4c_2 = 0$. Então $\ell_{3,4} = c_1x_1 + c_2(x_2 - t_4x_3)$. Logo, $L_{3,4} = \mathbf{V}(x_2 - t_4x_1 - (x_2 - t_4x_3, \ell_{3,4}))$ contém o ponto $[0 : 0 : t_4 : 1]$ que também está contido em E_1 . O que é uma contradição, visto que $E_1 \cap L_{3,4} = \emptyset$. Portanto, $c_3 + t_4c_2 \neq 0$. De maneira análoga prova-se que $c_1 \neq 0$ e $d_1 \neq 0$ ⁴. ■

Determinação das retas C_3 e $L_{1,2}$

Vale salientar que C_3 e $L_{1,2}$ são as únicas retas na superfície S que encontram as retas disjuntas $E_1, E_2, L_{3,4}$ e $L_{3,5}$ (cf. Proposição B.10 no Apêndice B).

³De fato, C_3 e $L_{1,2}$ são as únicas retas em S que encontram $E_1, E_2, L_{3,4}$ e $L_{3,5}$ conforme a Proposição B.10 no Apêndice B.

⁴Se $c_1 \neq 0$ então $[t_4 : 1 : 0 : 0] \in E_2 \cap L_{3,4}$. E se $d_1 \neq 0$ segue que $[t_5 : 1 : 0 : 0] \in E_2 \cap L_{3,5}$.

4. Retas em uma superfície cúbica não singular em termos de três retas disjuntas

Segue do Lema A.8 que existe $A : \mathbb{P}^3 \longrightarrow \mathbb{P}^3$ MCP tal que $A(E_1) = E_1$, $A(E_2) = E_2$ e $A(L_{3,4}) = E_3$ sendo $E_1 = \mathbf{V}(x_0, x_1)$, $E_2 = \mathbf{V}(x_2, x_3)$ e $E_3 = \mathbf{V}(x_0 - x_2, x_1 - x_3)$.

De fato, se

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -t_4 & 0 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -t_4 \\ 0 & 0 & -c_2 & -c_3 \end{bmatrix}$$

então $\det A = -c_1(c_3 + c_2t_4) \neq 0$. Logo A determina uma MCP $A : \mathbb{P}^3 \longrightarrow \mathbb{P}^3$ tal que

- $(A^{-1})E_1 = \mathbf{V}(A_{\bullet}x_0, A_{\bullet}x_1) = \mathbf{V}(x_0 - t_4x_1, c_1x_1) \stackrel{c_1 \neq 0}{=} \mathbf{V}(x_0, x_1) = E_1.$
- $(A^{-1})E_2 = \mathbf{V}(A_{\bullet}x_2, A_{\bullet}x_3) = \mathbf{V}(x_2 - t_4x_3, c_2x_2 + c_3x_3) \stackrel{c_3 + c_2t_4 \neq 0}{=} \mathbf{V}(x_2, x_3) = E_2.$
- $(A^{-1})E_3 = \mathbf{V}(x_0 - t_4x_1 - x_2 + x_3t_4, x_1c_1 + x_2c_2 + x_3c_3)$
 $= \mathbf{V}((x_0 - x_2) - t_4(x_1 - x_3), x_1c_1 + x_2c_2 + x_3c_3) = L_{3,4}.$

A seguir mostraremos que $AL_{3,5} = \mathbf{V}(x_0 + u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3, x_1 + v_2x_2 + v_3x_3)$ sendo

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{t_4 - t_5}{c_1 + c_2t_5} \\ u_2 &= -\frac{c_3 + c_2t_4}{t_4 - t_5} \\ u_3 &= \frac{c_3 + c_2t_4}{c_1} \cdot \frac{d_2c_3 - d_3c_2}{d_1} \\ v_2 &= -\frac{c_1}{d_1} \cdot \frac{c_3 + c_2t_4}{d_2t_4 + d_3} \\ v_3 &= -\frac{c_1}{d_1} \cdot \frac{d_2t_4 + d_3}{c_3 + c_2t_4} \end{aligned}$$

De fato, observe que se $T = \mathbf{V}(x_0 + u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3, x_1 + v_2x_2 + v_3x_3)$ então

$$\begin{aligned} (A^{-1})T &= \mathbf{V}(x_0 - t_4x_1 + u_1x_1c_1 + u_2x_2 - u_2x_3t_4 - u_3x_2c_2 - u_3x_3c_3, \\ &\quad x_1c_1 - v_2x_2 - t_4x_3v_2 - v_3x_2c_2 - v_3x_3c_3). \end{aligned}$$

Dáí, substituindo os valores de u_1, u_2, u_3, v_2 e v_3 nas equações do sistema abaixo

$$\begin{cases} x_0 - t_4x_1 + u_1x_1c_1 + u_2x_2 - u_2x_3t_4 - u_3x_2c_2 - u_3x_3c_3 = 0 \\ x_1c_1 - v_2x_2 - t_4x_3v_2 - v_3x_2c_2 - v_3x_3c_3 = 0 \end{cases}$$

obtemos que $(A^{-1})T = \mathbf{V}((x_0 - x_2) - t_5(x_1 - x_3), d_1x_1 + d_2x_2 + d_3x_3) = L_{3,5}$.

Agora, intersectando a superfície $Q = \mathbf{V}(x_0x_3 - x_1x_2)$ em $\mathbb{P}^3$ com a reta $AL_{3,5}$, obtemos que

$$\begin{aligned} Q \cap AL_{3,5} &= \mathbf{V}(x_0x_3 - x_1x_2) \cap \mathbf{V}(x_0 + u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3, x_1 + v_2x_2 + v_3x_3) \\ &\equiv \mathbf{V}(v_2x_2^2 + x_2x_3(u_1v_2 + v_3 - u_3) + x_3^2(u_1v_3 - u_3)) \text{ na reta } AL_{3,5}. \end{aligned}$$

Dessa forma, obtemos a equação $v_2x_2^2 + x_2x_3(u_1v_2 + v_3 - u_3) + x_3^2(u_1v_3 - u_3) = 0$. Note que as soluções dessa equação, cuja coordenada $x_3 \neq 0$, são determinadas pelas raízes da equação

$$v_2x^2 + (u_1v_2 + v_3 - u_2)x + (u_1v_3 - u_3) = 0. \quad (4.4)$$

Pelo Teorema de Bézout $Q \cap AL_{3,5}$ consiste de dois pontos, que são distintos e são soluções da equação (4.4). Em particular, $4v_2(u_1v_3 - u_3) \neq (u_1v_2 + v_3 - u_2)^2$. Se $v_2 \neq 0$, então ⁵

$$s_1 = \frac{-(u_1v_2 + v_3 - u_2) + \sqrt{(u_1v_2 + v_3 - u_2)^2 - 4v_2(u_1v_3 - u_3)}}{2v_2}$$

e

$$s_2 = \frac{-(u_1v_2 + v_3 - u_2) - \sqrt{(u_1v_2 + v_3 - u_2)^2 - 4v_2(u_1v_3 - u_3)}}{2v_2}$$

são as soluções da equação (4.4).

Se $v_2 = 0$, então a equação (4.4) nos fornece a solução $[u_3 - u_1v_3 : v_3 - u_2]$. Entretanto neste caso também temos a solução $[1 : 0]$.

Proposição 4.6. Sejam $(A^{-1})C_3$ e $(A^{-1})L_{1,2}$ as retas da família $\mathcal{L}$ determinadas pelos pontos na intersecção $Q \cap AL_{3,5}$. Verifica-se que

$$\begin{aligned} C_3 &= \mathbf{V}(x_0 + (-s_1c_1 - t_4)x_1, (1 + s_1c_2)x_2 + (s_1c_3 - t_4)x_3) \\ L_{1,2} &= \mathbf{V}(x_0 + (-s_2c_1 - t_4)x_1, (1 + s_2c_2)x_2 + (s_2c_3 - t_4)x_3). \end{aligned}$$

Demonstração. Observe que a reta $\{[t : 1 : bt : b] \mid b \in \mathbb{C}\}$ da família L_t é determinada pelo raio $\frac{x_2}{x_3} = \frac{bt}{b} = t$. Assim, $L_{s_i} = \{[s_i : 1 : s_ib : b] \mid b \in \mathbb{C}\} = \mathbf{V}(x_0 - s_ix_1, x_2 - s_ix_3)$ contém pontos de $Q \cap AL_{3,5}$. Daí, temos que

$$\begin{aligned} (A^{-1})\mathbf{V}(x_0 - s_ix_1, x_2 - s_ix_3) &= \mathbf{V}(x_0 - t_4x_1 - s_ix_1c_1, x_2 - t_4x_3 + s_ix_2c_2 + s_ix_3c_3) \\ &= \mathbf{V}(x_0 + (-s_ic_1 - t_4)x_1, (1 + c_2s_i)x_2 + (s_ic_3 - t_4)x_3). \end{aligned}$$

Dessa forma, para $i = 1$ obtemos a reta C_3 e para $i = 2$ obtemos a reta $L_{1,2}$. ■

Determinação das retas C_2 e $L_{1,3}$

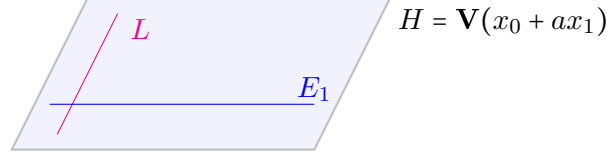
Lembre que C_2 é residual ao plano $\langle E_1, L_{1,2} \rangle$ e $L_{1,3}$ é residual ao plano $\langle E_1, C_3 \rangle$.

A seguir dentre os planos contendo a reta $E_1 = \mathbf{V}(x_0, x_1)$, vamos considerar os que contém uma reta L da superfície S . De fato, ao considerarmos $L = C_3$ vamos obter a reta residual $L_{1,3}$ em S e ao considerarmos $L = L_{1,2}$ vamos obter a reta residual C_2 em S .

⁵Se $(u_1v_2 + v_3 - u_2)^2 - 4v_2(u_1v_3 - u_3) = re^{i\theta}$ com $r \geq 0$ e $0 \leq \theta \leq 2\pi$ é um número complexo, então denotamos $\sqrt{re^{i\theta}} = \sqrt{r}e^{\frac{i\theta}{2}}$ e $-\sqrt{re^{i\theta}} = -\sqrt{r}e^{\frac{i\theta}{2}}$.

4. Retas em uma superfície cúbica não singular em termos de três retas disjuntas

Considere o plano $H = \mathbf{V}(x_0 + ax_1)$ com $a \in \mathbb{C}$ e $L = \mathbf{V}(x_0 + ax_1, bx_2 + cx_3)$ com $[b : c] \in \mathbb{P}^1$ uma reta na superfície $S = \mathbf{V}(F)$ diferente da reta $E_1 = \mathbf{V}(x_0, x_1)$.



Assim $S \cap H = E_1 \cup L \cup \ell$ sendo ℓ uma reta residual distinta de E_1 e L . Note que, $p = [x : y : z : w] \in S \cap H$ se, e somente se $F(-ay, y, z, w) = 0$.

Dessa forma, de (4.1), tem-se que

$$F(-ay, y, z, w) = -ayz(-a_1ay + a_4z) - ayw(-a_{10}ay + a_8w + a_{11}y + a_7z) + yz(a_3y + a_5z + a_6w - a_2ay) + yw(a_{12}y + a_9w) = 0 \quad (4.5)$$

Por outro lado tem-se que, $F(-ay, y, z, w) = y(bz + cw)(my + nz + pw)$.

Assim a partir de (4.5) concluímos que

$$\begin{aligned} bm &= a^2a_1 - aa_2 + a_3 \\ cm &= a^2a_{10} - aa_{11} + a_{12} \\ bn &= -aa_4 + a_5 \\ cp &= -aa_8 + a_9 \\ bp + cn &= -aa_7 + a_6. \end{aligned}$$

Desde que L é uma reta, tem-se que $(b, c) \neq (0, 0)$, assim $|b|^2 + |c|^2 > 0$. Então, multiplicando a 1ª equação por $\bar{b}$ e a 2ª equação por $\bar{c}$, obtemos que

$$|b|^2m = \bar{b}(a^2a_1 - aa_2 + a_3) \text{ e } |c|^2m = \bar{c}(a^2a_{10} - aa_{11} + a_{12}).$$

Assim,

$$m = \frac{\bar{b}(a^2a_1 - aa_2 + a_3) + \bar{c}(a^2a_{10} - aa_{11} + a_{12})}{|b|^2 + |c|^2}. \quad (4.6)$$

Por outro lado, observe que

$$c^2n = (cbp + cn) - b(cp) = c(-aa_7 + a_6) - b(-aa_8 + a_9). \quad (4.7)$$

e

$$b^2p = b(pb + cn) - c(bn) = b(-aa_7 + a_6) - c(-aa_4 + a_5). \quad (4.8)$$

Multiplicando (4.8) por $\bar{b}^2$ e $cp = -aa_8 + a_9$ por $\bar{c}$, obtemos

$$|b|^4p = \bar{b}^2(b(-aa_7 + a_6) - c(-aa_4 + a_5)) \text{ e } |c|^2p = \bar{c}(-aa_8 + a_9).$$

Visto que $|b|^4 + |c|^2 > 0$, obtemos

$$p = \frac{\bar{b}^2(b(-aa_7 + a_6) - c(-aa_4 + a_5)) + \bar{c}(-aa_8 + a_9)}{|b|^4 + |c|^2}. \quad (4.9)$$

Agora vamos determinar n , para isto multipliquemos (4.7) por $\bar{c}^2$ e $bn = -aa_4 + a_5$ por $\bar{b}$, e tendo em consideração que $|b|^2 + |c|^4 > 0$, obtemos

$$n = \frac{\bar{c}^2(c(-aa_7 + a_6) - b(-aa_8 + a_9)) + \bar{b}(-aa_4 + a_5)}{|b|^2 + |c|^4}. \quad (4.10)$$

Como $F(-ay, y, z, w) = y(bz + cw)(my + nz + pw)$, segue que a reta residual ℓ no plano $H = \mathbf{V}(x_0 + ax_1)$ é dada por $\mathbf{V}(x_0 + ax_1, mx_1 + nx_2 + px_3)$ com m, p e n determinados em (4.6), (4.9) e (4.10).

Notação 4.1. Sendo m, n e p funções de a, b, c . Considere $(m_1, n_1, p_1) = (m, n, p)(-s_1c_1 - t_4, 1 + s_1c_2, s_1c_3 - t_4)$ e $(m_2, n_2, p_2) = (m, n, p)(-s_2c_1 - t_4, 1 + s_2c_2, s_2c_3 - t_4)$.

Proposição 4.7. Considere o plano $H = \mathbf{V}(x_0 + ax_1)$. Verifica-se que

$$H \cap S = \begin{cases} E_1 \cup C_3 \cup L_{1,3}, & \text{se } a = -s_1c_1 - t_4 \\ E_1 \cup C_2 \cup L_{1,2}, & \text{se } a = -s_2c_1 - t_4 \end{cases}$$

sendo $L_{1,3} = \mathbf{V}(x_0 + (-s_1c_1 - t_4)x_1, m_1x_1 + n_1x_2 + p_1x_3)$ e $C_2 = \mathbf{V}(x_0 + (-s_2c_1 - t_4)x_1, m_2x_2 + n_2x_2 + p_2x_3)$.

Demonstração. Se $a = -s_1c_1 - t_4$ então as retas $E_1 = \mathbf{V}(x_0, x_1)$ e $C_3 = \mathbf{V}(x_0 + (-s_1c_1 - t_4)x_1, (1 + s_1c_2)x_2 + (s_1c_3 - t_4)x_3)$ estão contidas no plano H . Assim, podemos considerar $(a, b, c) = (-s_1c_1 - t_4, 1 + s_1c_2, s_1c_3 - t_4)$ consequentemente obtemos a reta residual $\ell = L_{1,3}$. Analogamente se $a = -s_2c_1 - t_4$ então as retas $E_1 = \mathbf{V}(x_0, x_1)$ e $L_{1,2} = \mathbf{V}(x_0 + (-s_2c_1 - t_4)x_1, (1 + s_2c_2)x_2 + (s_2c_3 - t_4)x_3)$ estão contidas no plano H . Assim, ao considerarmos $(a, b, c) = (-s_2c_1 - t_4, 1 + s_2c_2, s_2c_3 - t_4)$ obtemos a reta residual $\ell = C_2$. ■

Determinação das retas C_1 e $L_{2,3}$

Neste caso C_1 é residual ao plano $\langle E_2, L_{1,2} \rangle$ e $L_{2,3}$ é residual ao plano $\langle E_2, C_3 \rangle$.

Para determinar as equações de mais duas retas na superfície S que chamaremos de C_1 e $L_{2,3}$. Considere $(b, c) \neq (0, 0)$ e $L = \mathbf{V}(x_0 + ax_1, bx_2 + cx_3)$ uma reta contida no plano $\mathbf{V}(x_0 + ax_1)$. Assim,

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\bar{b}}{|b|^2 + |c|^2} & c \\ 0 & 0 & \frac{\bar{c}}{|b|^2 + |c|^2} & -b \end{bmatrix}.$$

define uma MCP tal que $BL = \mathbf{V}(x_0 + ax_1, x_2)$ e $BE_2 = E_2$.

Considere o plano $H = \mathbf{V}(x_2)$ contendo as retas E_2 e BL , temos que a intersecção da superfície cúbica $BS = \mathbf{V}(F \circ B^{-1})$ com o plano H , é dada pelos zeros de $F \circ B^{-1}|_{x_2=0} = F(x_0, x_1, cx_2, -bx_3)$. Assim, segue de (4.1) que

$$\begin{aligned} F(x_0, x_1, x_2c, -bx_3) &= x_0x_3c(a_1x_0 + a_4x_3c) - bx_3x_0(a_{10}x_0 + a_8(-bx_3) + a_{11}x_1 + \\ &\quad a_7cx_3) + x_1x_3c(a_3x_1 + a_5x_3c - a_6bx_3 + a_2x_0) - x_1x_3b(a_{12}x_1 - a_9bx_3). \end{aligned} \quad (4.11)$$

Entretanto, $F(x_0, x_1, x_2c, -bx_3) = x_3(x_0 + ax_1)(hx_0 + jx_1 + kx_3)$, logo (4.11) nos permite concluir que

$$\begin{aligned} h &= a_1c - a_{10}b, \\ j + ah &= a_2c - a_{11}b, \\ k &= a_4c^2 - a_7bc + a_8b^2, \\ aj &= a_3c - a_{12}b, \\ ak &= a_5c^2 - a_6cb + a_9b^2. \end{aligned}$$

Subtraindo ah de $j + ah$, nós temos que $j = a_2c - a_{11}b - a(a_1c - a_{10}b)$.

Agora observe que $BS \cap H$ contém as retas E_2, BL e $\Lambda = \mathbf{V}(hx_0 + jx_1 + kx_3, x_2)$. Assim, aplicando B^{-1} nós temos que

$$B^{-1}(\Lambda) = \mathbf{V}(hx_0 + jx_1 + \frac{\bar{c}k}{|b|^2 + |c|^2}x_2 - \frac{\bar{b}k}{|b|^2 + |c|^2}x_3, bx_2 + cx_3).$$

Notação 4.2. Considere h, j e k como funções de a, b, c . Sejam $(h_1, j_1, k_1) = (h, j, k)(-s_1c_1 - t_4, 1 + s_1c_2, s_1c_3 - t_4)$ e $(h_2, j_2, k_2) = (h, j, k)(-s_2c_1 - t_4, 1 + s_2c_2, s_2c_3 - t_4)$.

Proposição 4.8. Sejam $\alpha_i = 1 + s_i c_2$ e $\beta_i = s_i c_3 - t_4$ para $i = 1, 2$. Considere o plano $H_i = \mathbf{V}(\alpha_i x_2 + \beta_i x_3)$, $i = 1, 2$. Verifica-se que

$$H_i \cap S = \begin{cases} E_2 \cup C_3 \cup L_{2,3}, & \text{se } i = 1 \\ E_2 \cup C_1 \cup L_{1,2}, & \text{se } i = 2 \end{cases}$$

sendo $L_{2,3} = \mathbf{V}\left(h_1x_0 + j_1x_1 + x_2\frac{\bar{\beta}_1k_1}{|\alpha_1|^2 + |\beta_1|^2} - x_3\frac{\bar{\alpha}_1k_1}{|\alpha_1|^2 + |\beta_1|^2}, \alpha_1x_2 + \beta_1x_3\right)$ e $C_1 = \mathbf{V}\left(h_2x_0 + j_2x_1 + x_2\frac{\bar{\beta}_2k_2}{|\alpha_2|^2 + |\beta_2|^2} - x_3\frac{\bar{\alpha}_2k_2}{|\alpha_2|^2 + |\beta_2|^2}, \alpha_2x_2 + \beta_2x_3\right)$.

Demonstração. Ao considerarmos o plano $H_1 = \mathbf{V}(\alpha_1x_2 + \beta_1x_3)$ tem-se que $E_2 \subset H_1$ e $C_3 \subset H_1$. Assim, $H_1 \cap S = E_2 \cup C_3 \cup \ell$ e verifica-se que $\ell = L_{2,3}$.

De forma análoga, checamos que se $H_2 = \mathbf{V}(\alpha_2 x_2 + \beta_2 x_3)$ as retas E_2 e $L_{1,2}$ estão contidas em H_2 . De fato, $H_2 \cap S = E_2 \cup L_{1,2} \cup \ell$ com $\ell = C_1$. ■

As seis retas finais

Agora iremos determinar as equações das últimas seis retas $E_4, E_5, E_6, L_{4,5}, L_{4,6}$ e $L_{5,6}$.

De fato, as retas $L_{i,j}$ e E_k com $i < j$, $\{i, j, k\} = \{4, 5, 6\}$ são as únicas retas na superfície S que encontram as retas $C_i, C_j, L_{1,k}$ e $L_{2,k}$ (cf. Proposição B.10 no Apêndice B).

Para determinar essas retas consideremos a mudança de coordenadas projetiva ⁶,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} t_j & t_i & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t_j & t_i \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

O fato de C_i, C_j e $AL_{1,k}$ serem disjuntas implica que AC_i, AC_j e $L_{1,k}$ com i, j, k tais que $\{i, j, k\} = \{4, 5, 6\}$ são disjuntas. Além disso, nós temos que

$$\begin{aligned} AC_i &= A\mathbf{V}(x_0 - t_i x_1, x_2 - t_i x_3) \\ &= \mathbf{V}(t_j x_0 + t_i x_1 - t_i x_0 - t_i x_1, t_j x_2 + t_i x_3 - t_i x_2 - t_i x_3) \\ &= \mathbf{V}((t_j - t_i)x_0, (t_j - t_i)x_2) = \mathbf{V}(x_0, x_2). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} AC_j &= A\mathbf{V}(x_0 - t_j x_1, x_2 - t_j x_3) \\ &= \mathbf{V}((t_i - t_j)x_1, (t_i - t_j)x_3) = \mathbf{V}(x_1, x_3). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} AL_{1,k} &= A\mathbf{V}(x_0 - t_k x_1, \ell_{1,k}) \\ &= \mathbf{V}(t_j x_0 + t_i x_1 - t_k x_1 - t_k x_0, (t_k^2 a_1 + t_k a_2 + a_3)(x_0 + x_1) + (t_k a_4 + a_5)(x_2 t_j \\ &\quad + x_3 t_i) + (t_k^2 a_4 + t_k(a_5 + a_7) + a_6)(x_2 + x_3)) \\ &= \mathbf{V}(x_0 + \frac{t_i - t_k}{t_j - t_k} x_1, (t_k^2 a_1 + t_k a_2 + a_3)x_1(1 - \frac{t_i - t_k}{t_j - t_k}) + x_2(t_k t_j a_4 + t_j a_5 + t_k^2 a_4 \\ &\quad + t_k(a_5 + a_7)) + x_3(t_k t_i a_4 + t_i a_5 + t_k^2 a_4 + t_k(a_5 + a_7))). \end{aligned}$$

Ao considerarmos as notações

$$\begin{aligned} \gamma &= \left(1 - \frac{t_i - t_k}{t_j - t_k}\right)(t_k^2 a_1 + a_2 + a_3). \\ \delta &= t_k^2 a_4 + t_k(t_j a_4 + a_5 + a_7) + (t_j a_5 + a_6). \\ \epsilon &= t_k^2 a_4 + t_k(t_i a_4 + a_5 + a_7) + (t_i a_5 + a_6). \end{aligned}$$

⁶Desde que $t_i \neq t_j$ (cf. Proposição 4.1), nós temos que A é não singular.

4. Retas em uma superfície cúbica não singular em termos de três retas disjuntas

segue-se que $AL_{1,k} = \mathbf{V}(x_0 + \frac{t_i - t_k}{t_j - t_k}x_1, \gamma x_1 + \delta x_2 + \epsilon x_3)$.

Como mencionado na prova da Proposição 4.3, tem-se que $t_i \neq t_j \neq t_k$, assim $\frac{t_i - t_k}{t_j - t_k}$ é um número complexo diferente de 0 e 1. Observe que se $\delta = 0$, então AC_j e $AL_{1,k}$ se intersectam em $[0 : 0 : 1 : 0]$, contradizendo o fato dessas duas retas serem disjuntas, assim $\delta \neq 0$. De maneira análoga, se $\epsilon = 0$, AC_i e $AL_{1,k}$ se intersectam no ponto $[0 : 0 : 0 : 1]$, o que é um absurdo, logo $\epsilon \neq 0$.

Tendo em vista que $AC_i = \mathbf{V}(x_0, x_2)$, $AC_j = \mathbf{V}(x_1, x_2)$ e $AL_{1,k} = \mathbf{V}(x_0 + \frac{t_i - t_k}{t_j - t_k}x_1, \gamma x_1 + \delta x_2 + \epsilon x_3)$, ao considerarmos a MCP

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{t_j - t_k}{t_i - t_k} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\delta} & 0 \\ 0 & \frac{\gamma(t_j - t_k)}{\epsilon(t_i - t_k)} & 0 & -\frac{1}{\epsilon} \end{bmatrix}$$

tem-se que

$$BAC_i = \mathbf{V}(x_0, \frac{x_2}{\delta}) = \mathbf{V}(x_0, x_2)$$

$$BAC_j = \mathbf{V}\left(-x_1\left(\frac{t_j - t_k}{t_i - t_k}\right), \frac{x_1\delta}{\epsilon}\left(\frac{t_j - t_k}{t_i - t_k}\right) - \frac{x_3}{\epsilon}\right) = \mathbf{V}(x_1, x_3).$$

$$\begin{aligned} BAL_{1,k} &= \mathbf{V}\left(x_0 - \left(\frac{t_j - t_k}{t_i - t_k}\right)\left(\frac{t_i - t_k}{t_j - t_k}\right)x_1, -\delta x_1\left(\frac{t_j - t_k}{t_i - t_k}\right) + x_2 + \delta x_1\left(\frac{t_j - t_k}{t_i - t_k}\right) - x_3\right) \\ &= \mathbf{V}(x_0 - x_1, x_2 - x_3). \end{aligned}$$

Observe que essas três retas disjuntas (BAC_i , BAC_j e $BAL_{1,k}$) estão na família de retas $\mathcal{L}$ da superfície quádrlica $Q = \mathbf{V}(x_0x_3 - x_1x_2)$.

O próximo passo será intersectar $BAL_{2,k}$ com Q . Pelo Teorema de Bézout está intersecção consiste de dois pontos, que irão determinar duas retas na família $\mathcal{N}$. Ditas retas serão denotadas por $BAL_{i,j}$ e BAE_k . Observe que

$$\begin{aligned} AL_{2,k} &= A\mathbf{V}(x_2 - t_kx_3, (t_ka_1 + a_{10})x_0 + (t_k^2a_1 + t_k(a_{10} + a_2) + a_{11})x_1 + (t_k^2a_4 + t_ka_7 + a_8)x_3) \\ &= \mathbf{V}(t_jx_2 + t_ix_3 - t_k(x_2 + x_3), (x_0t_j + x_1t_i)(t_ka_1 + a_{10}) + (t_k^2a_1 + t_k(a_{10} + a_2) + a_{11})(x_0 + x_1) + (t_k^2a_4 + t_ka_7 + a_8)(x_2 + x_3)) \\ &= \mathbf{V}(x_2(t_j - t_k) + x_3(t_i - t_k), x_0(t_k^2a_1 + t_k(t_ja_1 + a_{10} + a_2) + t_ja_{10} + a_{11}) + x_1(t_k^2a_1 + t_k(t_ia_1 + a_{10} + a_2) + t_ia_{10} + a_{11})) + (x_2 + x_3)(t_k^2a_4 + t_ka_7 + a_8)). \end{aligned}$$

4. Retas em uma superfície cúbica não singular em termos de três retas disjuntas

Considerando as notações

$$\begin{aligned}\pi &= t_k^2 a_1 + t_k(t_j a_1 + a_{10} + a_2) + t_j a_{10} + a_{11} \\ \rho &= t_k^2 a_1 + t_k(t_i a_1 + a_{10} + a_2) + t_i a_{10} + a_{11} \\ \sigma &= t_k^2 a_4 + t_k a_7 + a_8\end{aligned}$$

concluimos que $AL_{2,k} = \mathbf{V}((t_j - t_k)x_2 + (t_i - t_k)x_3, \pi x_0 + \rho x_1 + \sigma(x_2 + x_3))$. Agora vamos calcular $BAL_{2,k}$, assim

$$\begin{aligned}BAL_{2,k} &= \mathbf{V}\left((t_j - t_k)\frac{x_2}{\delta} + (t_i - t_k)\left(\frac{x_1\gamma}{\epsilon}\left(\frac{t_j - t_k}{t_i - t_k}\right) - \frac{x_3}{\epsilon}\right), \pi x_0 + \rho\left(-x_1\left(\frac{t_j - t_k}{t_i - t_k}\right)\right)\right) \\ &+ \sigma\left(\frac{x_2}{\delta} + \frac{x_1\gamma}{\epsilon}\left(\frac{t_j - t_k}{t_i - t_k}\right) - \frac{x_3}{\epsilon}\right) \\ &= \mathbf{V}\left(\frac{\gamma\delta}{\epsilon}x_1 + x_2 - \frac{\delta}{\epsilon}\left(\frac{t_i - t_k}{t_j - t_k}\right)x_3, \pi x_0 + \frac{\sigma\gamma(t_j - t_k) - \epsilon\rho(t_j - t_k)}{\epsilon(t_i - t_k)}x_1\right) \\ &+ \frac{\sigma}{\delta}\left(-\frac{\gamma\delta}{\epsilon}x_1 + \frac{\delta}{\epsilon}\left(\frac{t_i - t_k}{t_j - t_k}\right)x_3\right) - \frac{\sigma}{\epsilon}x_3 \\ &= \mathbf{V}\left(\frac{\gamma\delta}{\epsilon}x_1 + x_2 - \frac{\delta}{\epsilon}\left(\frac{t_i - t_k}{t_j - t_k}\right)x_3, \pi x_0 + x_1\left(\frac{\sigma\gamma(t_j - t_k - t_i + t_k) - \epsilon\rho(t_j - t_k)}{\epsilon(t_i - t_k)}\right)\right) \\ &+ \frac{\sigma}{\epsilon}\left(\frac{t_i - t_k - t_j + t_k}{t_j - t_k}\right)x_3 \\ &= \mathbf{V}\left(\frac{\gamma\delta}{\epsilon}x_1 + x_2 - \frac{\delta}{\epsilon}\left(\frac{t_i - t_k}{t_j - t_k}\right)x_3, \pi x_0 + x_1\left(\frac{\sigma\gamma(t_j - t_i) - \epsilon\rho(t_j - t_k)}{\epsilon(t_i - t_k)}\right) + \frac{\sigma}{\epsilon}\left(\frac{t_i - t_j}{t_j - t_k}\right)x_3\right).\end{aligned}$$

Proposição 4.9. Tem-se que $\pi \neq 0$.

Demonstração. Suponha que $\pi = 0$, então

$$AL_{2,k} = \mathbf{V}((t_j - t_k)x_2 + (t_i - t_k)x_3, \rho x_1 + \sigma(x_2 + x_3)).$$

Tendo em vista que $AC_j = \mathbf{V}(x_1, x_3)$, segue que as retas AC_j e $AL_{2,k}$ tem como ponto em comum $[1 : 0 : 0 : 0]$, assim essas retas não são disjuntas, o que é uma contradição, visto que $L_{2,k}$ e C_j são disjuntas. Portanto, $\pi \neq 0$. ■

Tendo em vista que já determinamos geradores para o ideal da reta $BAL_{2,k}$, vamos determinar a intersecção $Q \cap BAL_{2,k}$. Assim, substituindo $x_2 = -\frac{\gamma\delta}{\epsilon}x_1 + \frac{\delta}{\epsilon}\left(\frac{t_i - t_k}{t_j - t_k}\right)x_3$ e $x_0 = -x_1\left(\frac{\sigma\gamma(t_j - t_i) - \epsilon\rho(t_j - t_k)}{\pi\epsilon(t_i - t_k)}\right) - \frac{\sigma}{\epsilon\pi}\left(\frac{t_i - t_j}{t_j - t_k}\right)x_3$ em Q , obtemos que

$$\begin{aligned}Q \cap BAL_{2,k} &\equiv \mathbf{V}\left(\frac{\gamma\delta}{\epsilon}x_1^2 - \frac{\delta}{\epsilon}\left(\frac{t_i - t_k}{t_j - t_k}\right)x_1x_3 + \left(\frac{\sigma\gamma(t_j - t_i) - \epsilon\rho(t_j - t_k)}{\pi\epsilon(t_i - t_k)}\right)x_1x_3 - \frac{\sigma}{\epsilon\pi}\left(\frac{t_i - t_j}{t_j - t_k}\right)x_3^2\right) \\ &\equiv \mathbf{V}\left(\gamma\delta x_1^2 + \left(\frac{\sigma\gamma(t_j - t_i) - \epsilon\rho(t_j - t_k)}{\pi(t_i - t_k)} - \frac{\delta(t_i - t_k)}{t_j - t_k}\right)x_1x_3 - \left(\frac{\sigma(t_i - t_j)}{\pi(t_j - t_k)}\right)x_3^2\right).\end{aligned}$$

Note que os pontos na intersecção $Q \cap BAL_{2,k}$ cuja coordenada $x_3 \neq 0$ são determinadas pelas soluções da equação

$$\gamma\delta x^2 + \left(\frac{\sigma\gamma(t_j - t_i) - \epsilon\rho(t_j - t_k)}{\pi(t_i - t_k)} - \frac{\delta(t_i - t_k)}{t_j - t_k}\right)x - \left(\frac{\sigma(t_i - t_j)}{\pi(t_j - t_k)}\right) = 0. \quad (4.12)$$

Pelo Teorema de Bézout $Q \cap BAL_{2,k}$ consiste de dois pontos, que são distintos e são soluções da equação (4.12). Em particular $-4\gamma\delta\left(\frac{\sigma(t_i - t_j)}{\pi(t_j - t_k)}\right) \neq \left(\frac{\sigma\gamma(t_j - t_i) - \epsilon\rho(t_j - t_k)}{\pi(t_i - t_k)} - \frac{\delta(t_i - t_k)}{t_j - t_k}\right)^2$.

Se $\gamma\delta \neq 0$ então

$$x = \frac{1}{2\gamma\delta} (w \pm \sqrt{w_1})$$

são soluções de (4.12) com

$$\begin{aligned} w &= -\frac{\sigma\gamma(t_i - t_j)(t_j - t_k) + \rho\epsilon(t_j - t_k)^2 - \delta\pi(t_i - t_k)^2}{\pi(t_i - t_k)(t_j - t_k)} \\ w_1 &= \left(-\frac{\sigma\gamma(t_i - t_j)(t_j - t_k) + \rho\epsilon(t_j - t_k)^2 - \delta\pi(t_i - t_k)^2}{\pi(t_i - t_k)(t_j - t_k)} \right)^2 + \frac{4\gamma\delta\sigma(t_i - t_j)}{\pi(t_j - t_k)}. \end{aligned}$$

Se $\gamma\delta = 0$ obtemos as soluções $[1 : 0]$ ($x_3 = 0$) e a única solução da equação linear em (4.12).

Notação 4.3. Note que γ, δ, ϵ e π, ρ, σ dependem de i, j, k (ou seja, de t_i, t_j e t_k). Sejam $\gamma_{i,j,k}, \delta_{i,j,k}, \epsilon_{i,j,k}$ e $\pi_{i,j,k}, \rho_{i,j,k}, \sigma_{i,j,k}$ os valores de γ, δ, ϵ e π, ρ, σ como funções de i, j, k . Além disso $q_{i,j,k}^+ = \frac{1}{2\gamma\delta}(w + \sqrt{w_1})$ e $q_{i,j,k}^- = \frac{1}{2\gamma\delta}(w - \sqrt{w_1})$. Assim, obtemos as retas $M_{q_{i,j,k}} = \mathbf{V}(x_0 - q_{i,j,k}^\pm x_2, x_1 - q_{i,j,k}^\pm x_3)$ em $\mathcal{N}$.

Proposição 4.10. Se Q_1 é a quádrlica não singular contendo C_i, C_j e $L_{1,k}$ com $\{i, j, k\} = \{4, 5, 6\}$. Então os pontos na intersecção $Q_1 \cap L_{2,k}$ determinam as retas disjuntas

$$\begin{aligned} E_k &= \mathbf{V}(x_0 - t_i x_1 - \delta_{i,j,k} q_{i,j,k}^+(x_2 - t_i x_3), \\ &\quad \left(\frac{t_i - t_k}{t_j - t_k} - \gamma_{i,j,k} q_{i,j,k}^+ \right) (x_0 - t_j x_1) - \epsilon_{i,j,k} q_{i,j,k}^+(x_2 - t_j x_3)) \\ &\quad e \\ L_{i,j} &= \mathbf{V}(x_0 - t_i x_1 - \delta_{i,j,k} q_{i,j,k}^-(x_2 - t_i x_3), \\ &\quad \left(\frac{t_i - t_k}{t_j - t_k} - \gamma_{i,j,k} q_{i,j,k}^- \right) (x_0 - t_j x_1) - \epsilon_{i,j,k} q_{i,j,k}^-(x_2 - t_j x_3)) \end{aligned}$$

que interceptam as retas C_i, C_j e $L_{i,k}$.

Demonstração. Sem perda de generalidade podemos assumir que $BAE_k = \mathbf{V}(x_0 - q_{i,j,k}^+ x_2, x_1 - q_{i,j,k}^+ x_3)$ e $BAL_{i,j} = \mathbf{V}(x_0 - q_{i,j,k}^- x_2, x_1 - q_{i,j,k}^- x_3)$. Assim, tem-se que $E_k = (BA)^{-1} \mathbf{V}(x_0 - q_{i,j,k}^+ x_2, x_1 - q_{i,j,k}^+ x_3)$ e $L_{i,j} = (BA)^{-1} \mathbf{V}(x_0 - q_{i,j,k}^- x_2, x_1 - q_{i,j,k}^- x_3)$.

Agora, observe que

$$A^{-1} = \frac{1}{t_j - t_i} \begin{bmatrix} 1 & -t_i & 0 & 0 \\ -1 & t_j & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -t_i \\ 0 & 0 & -1 & t_j \end{bmatrix} \text{ e } B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{t_i - t_k}{t_j - t_k} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta_{i,j,k} & 0 \\ 0 & -\gamma_{i,j,k} & 0 & -\epsilon_{i,j,k} \end{bmatrix}.$$

Daí,

$$\begin{aligned}
 E_k &= A^{-1}B^{-1}\mathbf{V}(x_0 - q_{i,j,k}^+x_2, x_1 - q_{i,j,k}^+x_3) \\
 &= A^{-1}\mathbf{V}\left(x_0 - q_{i,j,k}^+\delta_{i,j,k}x_2, -\frac{t_i-t_k}{t_j-t_k}x_1 - q_{i,j,k}^+(-\gamma_{i,j,k}x_1 - \epsilon_{i,j,k}x_3)\right) \\
 &= \mathbf{V}\left(x_0 - x_1t_i - x_2q_{i,j,k}^+\delta_{i,j,k} + x_3t_iq_{i,j,k}^+\delta_{i,j,k}, x_0\left(\frac{t_i-t_k}{t_j-t_k} - q_{i,j,k}^+\gamma_{i,j,k}\right) \right. \\
 &\quad \left. + x_1\left(-\frac{t_j(t_i-t_k)}{t_j-t_k} + q_{i,j,k}^+\gamma_{i,j,k}t_j\right) - x_2q_{i,j,k}^+\epsilon_{i,j,k} + x_3t_jq_{i,j,k}^+\epsilon_{i,j,k}\right) \\
 &= \mathbf{V}\left(x_0 - x_1t_i - (x_2 - t_ix_3)q_{i,j,k}^+\delta_{i,j,k}, (x_0 - t_jx_1)\left(-\frac{t_i-t_k}{t_j-t_k} + q_{i,j,k}^+\gamma_{i,j,k}\right) \right. \\
 &\quad \left. - (x_2 - t_jx_3)q_{i,j,k}^+\epsilon_{i,j,k}\right) \\
 e \\
 L_{i,j} &= A^{-1}B^{-1}\mathbf{V}(x_0 - q_{i,j,k}^-x_2, x_1 - q_{i,j,k}^-x_3) \\
 &= A^{-1}\mathbf{V}\left(x_0 - q_{i,j,k}^-\delta_{i,j,k}x_2, -\frac{t_i-t_k}{t_j-t_k}x_1 - q_{i,j,k}^-(-\gamma_{i,j,k}x_1 - \epsilon_{i,j,k}x_3)\right) \\
 &= \mathbf{V}\left(x_0 - x_1t_i - x_2q_{i,j,k}^-\delta_{i,j,k} + x_3t_iq_{i,j,k}^-\delta_{i,j,k}, x_0\left(\frac{t_i-t_k}{t_j-t_k} - q_{i,j,k}^-\gamma_{i,j,k}\right) \right. \\
 &\quad \left. + x_1\left(-\frac{t_j(t_i-t_k)}{t_j-t_k} + q_{i,j,k}^-\gamma_{i,j,k}t_j\right) - x_2q_{i,j,k}^-\epsilon_{i,j,k} + x_3t_jq_{i,j,k}^-\epsilon_{i,j,k}\right) \\
 &= \mathbf{V}\left(x_0 - x_1t_i - (x_2 - t_ix_3)q_{i,j,k}^-\delta_{i,j,k}, (x_0 - t_jx_1)\left(-\frac{t_i-t_k}{t_j-t_k} + q_{i,j,k}^-\gamma_{i,j,k}\right) \right. \\
 &\quad \left. - (x_2 - t_jx_3)q_{i,j,k}^-\epsilon_{i,j,k}\right).
 \end{aligned}$$

■

4.3 Caso geral

Seja $S_1 = \mathbf{V}(F_1)$ uma superfície cúbica não singular, sendo

$$F_1(x_0, x_1, x_2, x_3) = \sum_{i+j+k+l=3} \beta_{i,j,k,l} x_0^i x_1^j x_2^k x_3^l.$$

Considere Λ_1, Λ_2 e Λ_3 retas na superfície S_1 duas a duas disjuntas. Nosso objetivo é mostrar que as 27 retas na superfície S_1 admitem geradores cujos coeficientes são determinados por fórmulas que envolvem os coeficientes de F_1 e das equações que definem as retas Λ_1, Λ_2 e Λ_3 e seus radicais.

Com esse objetivo em mente vamos exibir uma MCP que leva as retas Λ_i em E_i determinada a partir dos coeficientes das retas Λ_1, Λ_2 e Λ_3 .

Assuma que

$$\Lambda_1 = \mathbf{V}\left(\sum_{i=0}^3 a_i x_i, \sum_{i=0}^3 a'_i x_i\right) \text{ e } \Lambda_2 = \mathbf{V}\left(\sum_{i=0}^3 b_i x_i, \sum_{i=0}^3 b'_i x_i\right).$$

Observe que

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ a'_0 & a'_1 & a'_2 & a'_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ b'_0 & b'_1 & b'_2 & b'_3 \end{bmatrix}$$

4. Retas em uma superfície cúbica não singular em termos de três retas disjuntas

define uma MCP⁷ tal que $BE_1 = B\mathbf{V}(x_0, x_1) = \mathbf{V}\left(\sum_{i=0}^3 a_i x_i, \sum_{i=0}^3 a'_i x_i\right) = \Lambda_1$ e $BE_2 = B\mathbf{V}(x_2, x_3) = \mathbf{V}\left(\sum_{i=0}^3 b_i x_i, \sum_{i=0}^3 b'_i x_i\right) = \Lambda_2$.

A seguir, daremos uma mudança de coordenadas projetiva C que fixa E_1 e E_2 e leva $B^{-1}\Lambda_3$ para E_3 . A composta CB^{-1} será então a mudança de coordenadas desejada A .

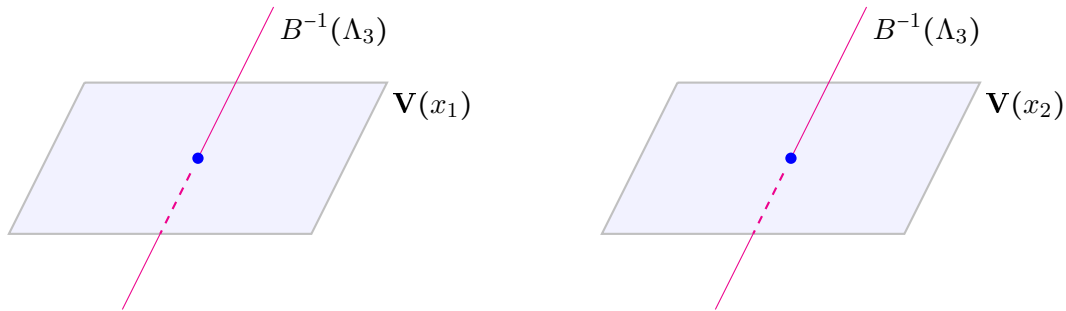
Assuma que $B^{-1}\Lambda_3 = \mathbf{V}\left(\sum_{i=0}^3 c_i x_i, \sum_{i=0}^3 c'_i x_i\right)$. Sendo B uma MCP, as retas E_1, E_2 e $B^{-1}\Lambda_3$ são disjuntas. Desse modo $B^{-1}\Lambda_3$ não está contida nos planos $\{x_0 = 0\}$ ou $\{x_3 = 0\}$, assim $B^{-1}\Lambda_3$ é determinada pelos pontos na intersecção $B^{-1}\Lambda_3 \cap \{x_0 = 0\} = \{[0 : a : b : c]\}$ e $B^{-1}\Lambda_3 \cap \{x_3 = 0\} = \{[d : e : f : 0]\}$.

Como também podemos assumir que $B^{-1}\Lambda_3 \cap \{x_0 = 0\} = \{[0 : 1 : b : c]\}$ e $B^{-1}\Lambda_3 \cap \{x_3 = 0\} = \{[d : e : 1 : 0]\}$. Em termos das equações definidas para $B^{-1}\Lambda_3$, nós temos

$$\begin{aligned} b &= \frac{c'_1 c_3 - c'_3 c_1}{c'_3 c_2 - c_3 c'_2}, & c &= \frac{c'_2 c_1 - c_2 c'_1}{c'_3 c_2 - c_3 c'_2}, \\ d &= \frac{c'_2 c_1 - c_2 c'_1}{c'_1 c_0 - c_1 c'_0}, & e &= \frac{c'_0 c_2 - c_0 c'_2}{c'_1 c_0 - c_1 c'_0}. \end{aligned}$$

Observe que as igualdades acima nos permitem concluir que: $d = b = 0$ ou $db \neq 0$. A seguir vamos analisar essas possibilidades.

Se $c = d = 0$, então $c_1 c'_2 - c'_1 c_2 = 0$. Note que $B^{-1}(\Lambda_3) \cap \mathbf{V}(x_i)$ para $i = 1, 2$ também consiste de um único ponto.



De fato, podemos assumir que $B^{-1}\Lambda_3 \cap \mathbf{V}(x_1) = \{[1 : 0 : \alpha : \beta]\}$ e $B^{-1}\Lambda_3 \cap \mathbf{V}(x_2) = \{[\gamma : \delta : 0 : 1]\}$.

Assim,

$$\begin{cases} c_0 + \alpha c_2 + \beta c_3 = 0 \\ c'_0 + \alpha c'_2 + \beta c'_3 = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \gamma c_0 + \delta c_1 + c_3 = 0 \\ \gamma c'_0 + \delta c'_1 + c'_3 = 0 \end{cases}$$

o que nos permite concluir que $\alpha = -\frac{c_0 c'_3 - c'_0 c_3}{c_2 c'_3 - c'_2 c_3}$, $\beta = \frac{c_0 c'_2 - c'_0 c_2}{c_2 c'_3 - c'_2 c_3}$, $\gamma = \frac{c_1 c'_3 - c'_1 c_3}{c_0 c'_1 - c'_0 c_1}$ e $\delta = -\frac{c_0 c'_3 - c'_0 c_3}{c_0 c'_1 - c'_0 c_1}$.

Se $\alpha \neq 0$ e $\delta \neq 0$, então a mudança de coordenadas projetiva

⁷ B é não singular visto que Λ_1 e Λ_2 são disjuntas.

$$E = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{\gamma}{\delta} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\beta}{\alpha} & 1 \end{bmatrix}.$$

satisfaz $E([1:0:\alpha:\beta]) = [1:0:1:0]$ e $E([\gamma:\delta:0:1]) = [0:1:0:1]$.

Agora, se $\alpha = \delta = 0$, tem-se que $c_0c'_3 - c'_0c_3 = 0$. Lembre que $d = c = 0$ implica em $c_1c'_2 - c'_1c_2 = 0$. Assim, existem $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ não nulos tais que $(c_1, c'_1) = \mu(c_2, c'_2)$ e $(c_3, c'_3) = \lambda(c_0, c'_0)$. Neste caso as equações de $B^{-1}(\Lambda_3)$ são dadas por

$$\begin{cases} c_0(x_0 + \lambda x_3) + c_2(x_2 + \mu x_1) = 0 \\ c'_0(x_0 + \lambda x_3) + c'_2(x_2 + \mu x_1) = 0 \end{cases}$$

Portanto $B^{-1}(\Lambda_3) = \mathbf{V}(x_0 + \lambda x_3, x_2 + \mu x_1)$ com $\lambda\mu \neq 0$, visto que $B^{-1}(\Lambda_3) \cap E_1 = \emptyset$ (se $x_0 = x_1 = x_2 = 0 = \lambda x_3$, logo $\lambda \neq 0$) e $B^{-1}(\Lambda_3) \cap E_2 = \emptyset$ (se $x_2 = x_3 = x_0 = 0 = \mu x_1$, logo $\mu \neq 0$).

Assim podemos considerar a MCP

$$D = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\lambda} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\mu} & 1 \end{bmatrix}$$

que satisfaz $D([- \lambda : 0 : 0 : 1]) = [1 : 0 : 1 : 0]$ e $D([0 : 1 : -\mu : 0]) = [0 : 1 : 0 : 1]$. Daí, $D(B^{-1}(\Lambda_3)) = E_3$ e, ainda tem-se que

$$DB^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{a_0}{\lambda} & -\frac{a_1}{\lambda} & -\frac{a_2}{\lambda} & -\frac{a_3}{\lambda} \\ a'_0 & a'_1 & a'_2 & a'_3 \\ b'_0 & b'_1 & b'_2 & b'_3 \\ -\frac{b_0}{\mu} & -\frac{b_1}{\mu} & -\frac{b_2}{\mu} & -\frac{b_3}{\mu} \end{bmatrix}$$

o que nos leva a concluir que $(DB^{-1})^{-1}E_3 = \Lambda_3$. De fato, observe- que

$$\begin{aligned} (DB^{-1})^{-1}E_3 &= \mathbf{V}(DB_{\bullet}^{-1}(x_0 - x_2), DB_{\bullet}^{-1}(x_1 - x_3)) = \\ &= \mathbf{V}\left(\sum_{i=0}^3 (\lambda b_i + a'_i)x_i, \sum_{i=0}^3 (\mu a'_i + b_i)x_i\right) = \Lambda_3, \end{aligned}$$

sendo $c_i = \lambda b_i + a'_i$ e $c'_i = \mu a'_i + b_i$.

Agora, se c, d são ambos não nulos, então a mudança de coordenadas projetiva determinada por

$$C = \begin{bmatrix} \frac{1}{d} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{d} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{b}{c} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{c} \end{bmatrix}$$

satisfaz $C([0 : 1 : b : c]) = [0 : 1 : 0 : 1]$ e $C([d : e : 1 : 0]) = [1 : 0 : 1 : 0]$. E ainda, temos que

$$CB^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{a_0}{d} & \frac{a_1}{d} & \frac{a_2}{d} & \frac{a_3}{d} \\ a'_0 - \frac{a_0 e}{d} & a'_1 - \frac{a_1 e}{d} & a'_2 - \frac{a_2 e}{d} & a'_3 - \frac{a_3 e}{d} \\ b_0 - \frac{b'_0 b}{c} & b_1 - \frac{b'_1 b}{c} & b_2 - \frac{b'_2 b}{c} & b_3 - \frac{b'_3 b}{c} \\ \frac{b'_0}{c} & \frac{b'_1}{c} & \frac{b'_2}{c} & \frac{b'_3}{c} \end{bmatrix}$$

Dessa forma, temos que

$$(CB^{-1})^{-1}E_3 = \mathbf{V}(CB_{\bullet}^{-1}(x_0 - x_2), CB_{\bullet}^{-1}(x_1 - x_3)) = \mathbf{V}\left(\sum_{i=0}^3 \left(\frac{a_i}{d} - b_i + \frac{b'_i b}{c}\right)x_i, \sum_{i=0}^3 \left(a'_i - \frac{a_i e}{d} - \frac{b'_i}{c}\right)x_i\right) = \Lambda_3,$$

sendo $c_i = \frac{a_i}{d} - b_i + \frac{b'_i b}{c}$ e $c'_i = a'_i - \frac{a_i e}{d} - \frac{b'_i}{c}$. Além disso, $CE_1 = E_1$ e $CE_2 = E_2$, então a mudança de coordenadas projetiva $A = CB^{-1}$ leva as retas $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3$ nas retas E_1, E_2, E_3 respectivamente. Assim, podemos aplicar o processo de determinação das retas feito na seção anterior à superfície $CB^{-1}S_1$.

4.4 Retas em S a partir de duas retas concorrentes

Observe que toda superfície cúbica não singular $S \subset \mathbb{P}^3$ contendo as retas $E_1 = V(x_0, x_1)$ e $C_6 = V(x_0, x_2)$ é determinada pelos zeros de um polinômio $F \in \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2, x_3]_3$ da forma

$$\begin{aligned} F &= x_0 G + x_1 x_2 L \quad \text{com } G \text{ e } L \text{ representados por:} \\ G &= \sum_{i=0}^3 a_i x_0 x_i + a_4 x_1^2 + a_5 x_1 x_2 + a_6 x_1 x_3 + a_7 x_2^2 + a_8 x_2 x_3 + a_9 x_3^2, \\ L &= b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3. \end{aligned} \tag{4.13}$$

A seguir considere a família de planos $H_a = V(x_1 - ax_0)$ com $a \in \mathbb{C}$ e $H_\infty = V(x_0)$ contendo a reta E_1 . Observe que

$$H_\infty \cap S = E_1 \cup \mathcal{C}_\infty \quad \text{sendo } \mathcal{C}_\infty = C_6 \cup L_{1,6} \quad \text{com } L_{1,6} = V(x_0, L).$$

Assim, no plano $H_\infty = V(x_0)$ a cônica residual é união das retas C_6 e $L_{1,6}$. A seguir, vamos determinar a cônica residual nos planos H_a com $a \in \mathbb{C}$.

Proposição 4.11. Com as notações acima. Verifica-se que $H_a \cap S = E_1 \cup \mathcal{C}_a$ sendo $\mathcal{C}_a$ a cônica residual à reta E_1 determinada pela matriz

$$M_a = \begin{bmatrix} a_4 a^2 + a_1 a + a_0 & b_1 a^2 + a_5 a + a_2 & a_6 a + a_3 \\ b_1 a^2 + a_5 a + a_2 & b_2 a + a_7 & b_3 a + a_8 \\ a_6 a + a_3 & b_3 a + a_8 & a_9 \end{bmatrix}. \tag{4.14}$$

Demonstração: De fato, a partir de (4.13) segue que $H_a \cap S$ é determinado por

$$V(x_1 - ax_0, F) = V(x_1 - ax_0, x_0(G(x_0, ax_0, x_2, x_3) + ax_2(ab_1x_0 + b_2x_2 + b_3x_3))).$$

Portanto, $\mathcal{C}_a = V(x_1 - ax_0, G_a)$ com

$$G_a = G(x_0, ax_0, x_2, x_3) + ax_2(ab_1x_0 + b_2x_2 + b_3x_3). \quad (4.15)$$

Além disso, utilizando a definição de G em (4.13), após alguns cálculos, apuramos que M_a é a matriz associada à cônica $\mathcal{C}_a$ no plano H_a . ■

Corolário 4.12. Com as notações acima. Se $g(t) = \det(M_t) \in \mathbb{C}[t]$ então

- (i) $g(t)$ é um polinômio de grau 4 cujas raízes são duas a duas distintas.
- (ii) se $t_2, \dots, t_5$ são as raízes de $g(t)$ então a cônica residual $\mathcal{C}_i$ no plano $H_i = V(x_1 - t_i x_0)$ é união de retas (necessariamente distintas). De fato, considere $\mathcal{C}_i = C_i \cup L_{1,j}$ de modo que

$$H_i \cap S = E_1 \cup C_i \cup L_{1,j} \quad i = 2, 3, 4, 5.$$

Demonstração: (i) Segue de (4.14) que $g(t) = \det(M_t) \in \mathbb{C}[t]$ é um polinômio de grau 4. Além disso essas raízes são distintas (cf. a demonstração da Proposição 7.3, p. 112 em [21]).

(ii) Sendo S uma superfície não singular de grau 3 a Proposição 1.7 (p. 25 em [20]) nos permite concluir que $\mathcal{C}_i$ é reduzida. Ou seja, uma união de retas distintas no plano $H_i = V(x_1 - t_i x_0)$. ■

Sobre o procedimento para obter as retas em S

Para cada raiz t_i de $g(t)$ com $i = 2, 3, 4, 5$, vale que a cônica residual $\mathcal{C}_i = V(G_{t_i})$ no plano $H_i = V(x_1 - t_i x_0)$ é união de retas. Assim,

$$G_{t_i} = (\alpha x_0 + \beta x_2 + \gamma x_3)(\alpha_1 x_0 + \beta_1 x_2 + \gamma_1 x_3).$$

De onde concluímos que

$$\begin{aligned} \alpha\alpha_1 &= a_4 t_i^2 + a_1 t_i + a_0 \\ \beta\beta_1 &= b_2 t_i + a_7 \\ \gamma\gamma_1 &= a_9 \\ \alpha\beta_1 + \alpha_1\beta &= b_1 t_i^2 + a_5 t_i + a_2 \\ \alpha\gamma_1 + \alpha_1\gamma &= a_6 t_i + a_3 \\ \beta\gamma_1 + \beta_1\gamma &= b_3 t_i + a_8 \end{aligned} \quad (4.16)$$

Após a resolução do sistema em (4.16) (para cada i) obtemos as retas

$$C_2, L_{1,2}, C_3, L_{1,3}, C_4, L_{1,4}, C_5, L_{1,5}.$$

Lembre que $E_1 = V(x_0, x_1)$ e $C_6 = V(x_0, x_2)$ (já foram prefixadas). Além disso, no plano $H_\infty = V(x_0)$ obtivemos a reta residual $L_{1,6} = V(x_0, L)$ com L definido em (4.13).

Determinação de C_1

Note que E_1 e C_1 são as únicas retas na superfície S que encontram as retas (disjuntas) $L_{1,2}, L_{1,3}, L_{1,4}$ e $L_{1,5}$ (cf. Proposição B.10 no Apêndice B). Assim, ao considerarmos a quádrlica não singular Q contendo $L_{1,2}, L_{1,3}$ e $L_{1,4}$. A interseção $Q \cap L_{1,5}$ irá determinar as retas E_1 e C_1 .

Determinação de E_6

Note que E_1 e E_6 são as únicas retas na superfície S que encontram as retas (disjuntas) C_2, C_3, C_4 e C_5 (cf. Proposição B.10 no Apêndice B). Assim, ao considerarmos a quádrlica não singular Q contendo C_2, C_3 e C_4 . A interseção $Q \cap C_5$ irá determinar as retas E_1 e E_6 .

Determinação de E_i para $i = 2, 3, 4, 5$

Basta observar que a reta E_i é residual à cônica $C_1 \cup L_{1,i}$ no plano $\langle C_1 \cup L_{1,i} \rangle$.

Determinação de $L_{i,j}$ para $i = 2, 3, 4, 5$ e $i < j$

Basta observar que a reta $L_{i,j}$ é residual à cônica $E_i \cup C_j$ no plano $\langle E_i \cup C_j \rangle$.

Apêndice A

Conceitos Básicos de Geometria Algébrica

Nesta parte do trabalho relataremos os conceitos e resultados básicos, que proporcionarão uma base para o desenvolvimento do texto, assim como uma melhor compreensão da dissertação para o leitor que ainda não teve contato com a área de geometria algébrica.

Espaço Afim

Sejam $\mathbb{K}$ um corpo e n um inteiro positivo.

O n -espaço afim $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$ como conjunto é igual a $\mathbb{K}^n$. Entretanto o que torna este conjunto numa variedade afim, será o conceito de *conjunto algébrico* que por sua vez determina a *topologia de Zariski* em $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$.

Definição A.1. Considere $f \in \mathbb{K}[\underline{x}] = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$. Definimos o conjunto dos zeros de f em $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$ por

$$\mathcal{Z}(f) = \{a \in \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n \mid f(a) = 0\}.$$

Definição A.2. Considere $S \subseteq \mathbb{K}[\underline{x}]$ não vazio. O conjunto dos zeros de S em $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$ é dado por

$$\mathcal{Z}(S) = \{a \in \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n \mid f(a) = 0 \ \forall \ f \in S\}.$$

Definição A.3. Conjunto algébrico afim.

Um subconjunto Y de $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$ é denominado conjunto algébrico afim (ou simplesmente conjunto algébrico em $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$) se, existe um ideal I do anel $\mathbb{K}[\underline{x}]$ tal que $\mathcal{Z}(I) = Y$.

Proposição A.1. Seja $I \subseteq \mathbb{K}[\underline{x}]$ um ideal gerado por $f_1, \dots, f_k$. Então $\mathcal{Z}(I) = \bigcap_{i=1}^k \mathcal{Z}(f_i)$.

Demonstração. Lembremos que: $\mathcal{Z}(I) = \{a \in \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n \mid f(a) = 0, \forall f \in I\}$. Queremos mostrar que $\mathcal{Z}(I) = \bigcap_{n=1}^k \mathcal{Z}(f_i)$, sendo $f_1, \dots, f_k$ um conjunto de geradores de I .

- $\mathcal{Z}(I) \subseteq \bigcap_{n=1}^k \mathcal{Z}(f_i)$

Seja $a \in \mathcal{Z}(I)$, temos que

$$f(a) = 0 \quad \forall f \in I \xRightarrow{f_i \in I} f_i(a) = 0 \quad \forall i \implies a \in \mathcal{Z}(f_i), \forall i \implies a \in \bigcap_{n=1}^k \mathcal{Z}(f_i).$$

- $\mathcal{Z}(I) \supseteq \bigcap_{n=1}^k \mathcal{Z}(f_i)$

Seja $a \in \bigcap_{n=1}^k \mathcal{Z}(f_i)$ então $a \in \mathcal{Z}(f_i) \quad \forall i \in \{1, \dots, k\}$. Logo, $f_i(a) = 0, \forall i \in \{1, \dots, k\}$.

Considere $h \in I$, neste caso, existem $p_1, \dots, p_k \in \mathbb{K}[\underline{x}]$ tal que $h = \sum_{n=1}^k f_i p_i$. Logo

$$h(a) = \sum_{n=1}^k f_i(a) p_i(a) \xRightarrow{f_i(a)=0} h(a) = 0 \implies a \in \mathcal{Z}(I).$$

■

Observação A.1. Sendo $\mathbb{K}[\underline{x}]$ um anel noetheriano, todo ideal admite um conjunto finito de geradores. Assim,

$$Y \text{ é um conjunto algébrico em } \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n \iff \exists f_1, \dots, f_k \in \mathbb{K}[\underline{x}] \text{ tais que } Y = \mathcal{Z}(f_1, \dots, f_k) \\ \text{sendo } \mathcal{Z}(f_1, \dots, f_k) = \mathcal{Z}(f_1) \cap \dots \cap \mathcal{Z}(f_k).$$

Definição A.4. Seja $\mathcal{C}_{alg} = \{Y \mid Y \text{ é um conjunto algébrico em } \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n\}$, tem-se que $\mathcal{C}_{alg}$ induz uma topologia em $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$, ao considerarmos os complementares dos conjuntos algébricos em $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$. Essa topologia é denominada de Topologia de Zariski em $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$.

Observação A.2. Sejam X um espaço topológico e Y um subconjunto de X . A topologia induzida por X em Y é definida da seguinte forma:

$$U \subseteq Y \text{ é aberto} \iff \exists U_1 \subseteq X \text{ aberto tal que } U = U_1 \cap Y.$$

De fato, se Σ define a topologia de X então

$$\Sigma_Y = \{V \cap Y \mid V \in \Sigma\}$$

define a topologia induzida por X em Y .

Definição A.5. Conjunto irredutível.

Sejam X um espaço topológico e Y um subconjunto de X . Considere a topologia induzida por X em Y .

Y é dito irredutível $\iff \forall F_1, F_2$ fechados em Y tais que $Y = F_1 \cup F_2$ tem-se que $F_1 = Y$ ou $F_2 = Y$.

Ou seja, Y é irredutível se não pode ser escrito como uma união de dois subconjuntos fechados próprios de Y . Do contrário, Y é denominado redutível.

Definição A.6. Variedade Afim.

Seja $Y \subseteq \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$ um conjunto algébrico afim. Y será denominada variedade afim se, Y for irredutível com a topologia induzida da topologia de Zariski em $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$.

Definição A.7. Considere $Y \subseteq \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$. O ideal associado a Y em $\mathbb{K}[\underline{x}]$ é dado por

$$\mathcal{I}(Y) = \{f \in \mathbb{K}[\underline{x}] \mid f(a) = 0 \ \forall \ a \in Y\}.$$

Proposição A.2. Sejam Y_1, Y_2 subconjunto de $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$ e T_1, T_2 subconjuntos de $\mathbb{K}[\underline{x}]$. Verifica-se que

- i) Se $T_1 \subseteq T_2$, então $\mathcal{Z}(T_2) \subseteq \mathcal{Z}(T_1)$.
- ii) Se $Y_1 \subseteq Y_2$, então $\mathcal{I}(Y_2) \subseteq \mathcal{I}(Y_1)$.
- iii) $\mathcal{I}(Y_1 \cup Y_2) = \mathcal{I}(Y_1) \cap \mathcal{I}(Y_2)$.
- iv) $\mathcal{Z}(\mathcal{I}(Y_1)) = \overline{Y_1}$.

Demonstração. Veja Proposição 1.2. p. 3 em [11]. ■

Espaço Projetivo

Sejam V um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$ de dimensão finita. Em $V - \{0_V\}$ define a seguinte relação de equivalência

$$u \sim v \iff u = \lambda v \text{ para algum } \lambda \neq 0 \text{ em } \mathbb{K}.$$

A projetivização de V , $\mathbb{P}(V)$ é definida pelo conjunto quociente $V - \{0_V\} / \sim$, ou seja, $\mathbb{P}(V) = V - \{0_V\} / \sim$. Se $v \in V$ for um vetor não nulo, a classe de equivalência associada ao vetor v é dada por

$$\bar{v} = \{u \in V - \{0_V\} \mid u \sim v\} = \{\lambda v \mid \lambda \in \mathbb{K}, \lambda \neq 0\} = [v] - \{0_V\}$$

sendo $[v]$ o subespaço 1-dimensional de V gerado por v . Tendo em consideração que $\bar{v} \longrightarrow [v]$ define uma bijeção de $\mathbb{P}(V)$ em $\{\text{subespaços de dimensão 1 de } V\}$, usaremos a notação $\bar{v}$ ou $[v]$ para indicar os pontos de $\mathbb{P}(V)$.

Observação A.3. Seja $v = (v_0, \dots, v_n)$ em $\mathbb{K}^{n+1}$ não nulo. As coordenadas $v_0, \dots, v_n$ do vetor v são denominadas coordenadas homogêneas do ponto $[v] \in \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n := \mathbb{P}(\mathbb{K}^{n+1})$. Neste caso, também usaremos a notação $[v_0 : v_1 : \dots : v_n] = [v]$. Como também a notação $\mathbb{P}^n$ se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Observação A.4. Sendo $[u]$ e $[v]$ pontos no espaço projetivo, temos que $[u] = [v]$ se, e somente se u e v são linearmente dependentes.

Definição A.8. Um subconjunto Y de $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$ é denominado conjunto algébrico projetivo se, e somente se existe $I \subseteq \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$ ideal homogêneo tal que $Y = \mathbf{V}(I)$, sendo $\mathbf{V}(I) = \{[v] \in \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n \mid F(v) = 0 \ \forall \ F \in I\}$.

De fato, defini-se o conjunto dos zeros de um polinômio homogêneo ¹ $f \in \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$ em $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$ por

$$\mathbf{V}(f) = \{[u] \in \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n \mid f(u) = 0\}.$$

Definição A.9. Seja $\mathcal{C}_{alg} = \{Y \mid Y \text{ é um conjunto algébrico em } \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n\}$, tem-se que $\mathcal{C}_{alg}$ induz uma topologia em $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$, ao considerarmos os complementares dos conjuntos algébricos em $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$. Essa topologia é denominada de Topologia de Zariski em $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$.

Definição A.10. Uma variedade algébrica projetiva é um conjunto algébrico projetivo irredutível.

Definição A.11. Um subconjunto Y de $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$ é denominado conjunto algébrico quase projetivo (respectivamente variedade quase projetiva) se for um subconjunto aberto de um conjunto algébrico projetivo (respectivamente, se for um subconjunto aberto de uma variedade projetiva) com a topologia induzida da topologia de Zariski em $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$.

Definição A.12. Considere $Y \subseteq \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$. O ideal associado a Y em $\mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$ é dado por

$$\mathcal{I}(Y) = \{f \in \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n] \mid f(a) = 0 \ \forall \ a \in Y\}.$$

Definição A.13. Seja $S = \mathbb{K}[x_0, x_1, \dots, x_n]$ o anel dos polinômios nas variáveis $x_0, x_1, \dots, x_n$ com coeficientes em $\mathbb{K}$, sendo $\mathbb{K}$ um corpo.

Se $J = (j_0, j_1, \dots, j_n)$ sendo $j_0, j_1, \dots, j_n$ inteiros não negativos, então $x^J = x_0^{j_0} x_1^{j_1} \dots x_n^{j_n}$ será denominado monômio de grau $j_0 + j_1 + \dots + j_n$.

Para cada d inteiro $d \geq 0$ denotaremos por S_d o subespaço vetorial de S gerado pelos monômios de grau d .

¹ Considere $f \in \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$ não nulo e $d \geq 0$ inteiro, dizemos que f é homogêneo de grau d se, e somente se, $f(\lambda x_0, \dots, \lambda x_n) = \lambda^d f(x_0, \dots, x_n)$ para todo $\lambda \in \mathbb{C}$.

Assim,

$$\begin{aligned} S_0 &= [1] = \mathbb{K} \text{ consiste dos polinômios constantes,} \\ S_1 &= [x_0, x_1, \dots, x_n] = \{a_0x_0 + \dots + a_nx_n \mid a_0, \dots, a_n \in \mathbb{K}\} \\ &\vdots \\ S_d &= [\{x_0^{j_0}x_1^{j_1}\dots x_n^{j_n} \mid j_0 + j_1 + \dots + j_n = d\}]. \end{aligned}$$

Verifica-se que $\dim S_d = \binom{d+n}{n} = \binom{d+n}{d}$.

Definição A.14. Sendo $Y \subset \mathbb{P}^n$ um conjunto algébrico, temos que Y é denominado **hipersuperfície** se, existe $F \in S_d$ não nulo de grau $d \geq 1$ tal que $Y = \mathbf{V}(F)$.

Utilizamos as seguintes nomenclaturas conforme seja o grau d da hipersuperfície reduzida ² $\mathbf{V}(F)$:

- Em $\mathbb{P}^n$

$$\begin{cases} d = 1 \text{ Hiperplano} \\ d = 2, 3, 4, 5, \dots \text{ Hipersuperfície quádrlica, cúbica, quártica, quántica, ...} \end{cases}$$
- Em $\mathbb{P}^2$ é denominada **curva** de grau d .
$$\begin{cases} d = 1 \text{ Reta} \\ d = 2, 3, 4, 5, \dots \text{ cônica, cúbica, quártica, quántica, ...} \end{cases}$$
- Em $\mathbb{P}^3$ é denominada **superfície** de grau d .
$$\begin{cases} d = 1 \text{ Plano} \\ d = 2, 3, 4, 5, \dots \text{ Superfície quádrlica, cúbica, quártica, quántica, ...} \end{cases}$$

Exemplo A.1. $Y = \{[w_0 : w_1 : w_2] \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2 \mid w_0w_1 = 0\}$ é uma curva de grau 2, visto que $Y = \mathbf{V}(x_0x_1)$ e $\langle x_0x_1 \rangle$ é um ideal homogêneo radical do anel $\mathbb{R}[x_0, x_1, x_2]$.

Sejam $F \in \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$ homogêneo de grau $d \geq 1$ e $[v]$ um ponto em $\mathbb{P}^n$. Dizemos que $[v]$ é ponto singular de $\mathbf{V}(F)$ se, $\partial_i F(v) = 0$ com $i \in \{0, \dots, n\}$, sendo ∂_i a derivada parcial de F com relação à variável x_i .

Observação A.5. Se $\mathbf{V}(F)$ não possui pontos singulares, dizemos que $\mathbf{V}(F)$ é não singular.

Exemplo A.2. Considere $F \in \mathbb{C}[y_0, y_1, \dots, y_n]$ dado por $F = y_0y_5 - y_1y_4 + y_2y_3$.

- $\mathbf{V}(F)$ é uma hipersuperfície não singular em $\mathbb{P}^5$.

Note que, para qualquer $p = (y_0, y_1, y_2, y_3, y_4, y_5) \in \mathbb{C}^6$ temos:

$$\frac{\partial F}{\partial y_0}(p) = y_5 ; \frac{\partial F}{\partial y_1}(p) = -y_4 ; \frac{\partial F}{\partial y_2}(p) = y_3 ; \frac{\partial F}{\partial y_3}(p) = y_2 ; \frac{\partial F}{\partial y_4}(p) = -y_1 ; \frac{\partial F}{\partial y_5}(p) = y_0$$

² $\mathbf{V}(F)$ é reduzida se F for livre de quadrados.

e vemos que $\frac{\partial F}{\partial y_i}(p) = 0$ se $p = (0, 0, 0, 0, 0, 0)$ que por sua vez, não determina ponto em $\mathbb{P}^5$. Portanto, $Sing(\mathbf{V}(F)) = \emptyset$ em $\mathbb{P}^5$. Donde concluímos que $\mathbf{V}(F)$ é uma hipersuperfície não singular em $\mathbb{P}^5$.

Teorema A.3. *Sejam X e $Y \subset \mathbb{P}^n$ subvariedades de dimensões k e k_1 com $k + k_1 \geq n$, e suponha que elas se intersectam transversalmente. Então*

$$grau(X \cap Y) = grau(X) \cdot grau(Y).$$

Em particular, se $k + k_1 = n$ então dizemos que $X \cap Y$ consiste de $grau(X) \cdot grau(Y)$ pontos.

Demonstração. Veja Teorema 18.3 , p. 227 em [9]. ■

Retas e planos

Retas e planos são variedades que podemos definir tanto pelas suas equações quanto pela projetivização dos anuladores de um conjunto minimal de geradores (cf. p. 58-59 em [24]).

Se V é um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$, então para cada $d \geq 1$ inteiro, considere

$$G_d(V) = \{W \mid W \text{ é um subespaço vetorial de } V \text{ de dimensão } d\}$$

denominada d -grassmanniana de V .

O conjunto algébrico $\ell \subset \mathbb{P}^n$ é uma reta, se $\ell = \mathbb{P}(W)$ para algum $W \in G_2(\mathbb{C}^{n+1})$. Analogamente, um conjunto algébrico $h \subseteq \mathbb{P}^n$ é um plano, se $h = \mathbb{P}(W)$ para algum $W \in G_3(\mathbb{C}^{n+1})$.

De fato, se $\Lambda \subseteq \mathbb{P}^3$, então verifica-se que:

- i)* $\Lambda = \{p\}$ é um ponto $\iff \Lambda = \mathbf{V}(L_1, L_2, L_3)$ com $L_1, L_2, L_3 \in S_1$ L.I.
- ii)* Λ é uma reta $\iff \mathcal{J}(\Lambda) = \langle L_1, L_2 \rangle$, L_1, L_2 L.I em S_1 .
- iii)* Λ é um plano $\iff \mathcal{J}(\Lambda) = \langle L \rangle$, com $L \neq 0 \in S_1$.

Proposição A.4. Sejam p e q pontos distintos em $\mathbb{P}^n$. Então existe uma única reta passando por p e q . A qual será denotada por $\ell_{p,q}$.

Demonstração. Existência. Sejam $p = \bar{u}$ e $q = \bar{v}$ pontos em $\mathbb{P}^n$ tal que $p \neq q$, então u e v são L.I.. Assim, obtemos $W = [u, v] \in G_2(\mathbb{C}^{n+1})$, ou sejam W é um subespaço vetorial de $\mathbb{C}^{n+1}$ de dimensão 2. Portanto, $\mathbb{P}(W) = \ell_{p,q}$ é uma reta em $\mathbb{P}^n$ contendo os pontos p e q .

Unicidade. Considere $\mathbb{P}(W_1)$ com $W_1 \in G_2(\mathbb{C}^{n+1})$ passando pelos pontos p e q . Como $p \in \mathbb{P}(W_1)$ segue que $\bar{u} = \overline{w_1}$ para algum $w_1 \in W_1$. Assim, $u = \lambda w_1$ para algum $\lambda \in \mathbb{C}$ não nulo. Logo, $u \in W_1$. De maneira análoga, mostra-se que $v \in W_1$. Portanto,

$$W = [u, v] \subset W_1 \implies W = W_1 \text{ (visto que } \dim W = 2 = \dim[u, v]\text{)}.$$

Assim, $\mathbb{P}(W) = \mathbb{P}(W_1)$. Portanto, existe uma única reta passando por p e q . Sendo $u = (u_0, \dots, u_n)$ e $v = (v_0, \dots, v_n)$ e como $[u, v] = \{[\alpha u + \beta v] \mid \alpha, \beta \in \mathbb{C}\}$, segue que

$$\ell_{p,q} = \{[\alpha u_0 + \beta v_0 : \dots : \alpha u_n + \beta v_n] \mid [\alpha : \beta] \in \mathbb{P}^1\}.$$

■

Lema A.5. Se H_1 e H_2 são planos distintos em $\mathbb{P}^3$, então $H_1 \cap H_2$ é uma reta em $\mathbb{P}^3$.

Demonstração. Sejam H_1 e H_2 , planos distintos de $\mathbb{P}^3$. Então $H_1 = \mathbb{P}(W_1)$ e $H_2 = \mathbb{P}(W_2)$, para algum $W_1, W_2 \in G_3(\mathbb{C}^4)$.

Como $W_1 \cap W_2 \subset W_i, i = 1, 2$, temos $\dim(W_1 \cap W_2) \leq 3$. (I)

Além disso, $\dim(W_1 + W_2) \leq \dim \mathbb{C}^4 = 4$. Assim,

$$\dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2) \leq 4 \implies 2 \leq \dim(W_1 \cap W_2) \leq 3. \quad (II)$$

De (I) e (II) obtemos $2 \leq \dim(W_1 \cap W_2) \leq 3$.

Se $\dim(W_1 \cap W_2) = 3 \implies W_1 = W_2 \implies H_1 = \mathbb{P}(W_1) = \mathbb{P}(W_2) = H_2$ (Absurdo!).

Logo, $\dim(W_1 \cap W_2) = 2$. Seja $W = W_1 \cap W_2$, logo $W \in G_2(\mathbb{C}^4)$. Portanto, a reta $\ell = \mathbb{P}(W) \subseteq H_1 \cap H_2$. Agora, seja $P \in H_1 \cap H_2$. Daí $P \in H_1$ e $P \in H_2$. Assim, $P = [w_1]$, $w_1 \in W_1$ e $P = [w_2]$, com $w_2 \in W_2$. Então $[w_1] = P = [w_2]$.

Logo, existe $\lambda \in \mathbb{C} - \{0\}$ tal que

$$w_1 = \lambda w_2 \implies w_1 \in w_2 \implies w_1 \in W_1 \cap W_2 = W.$$

Portanto, $P \in \ell = \mathbb{P}(W)$ e consequentemente $H_1 \cap H_2 = \ell$.

■

Proposição A.6. Sejam $\ell \subset \mathbb{P}^3$ uma reta e $H \subset \mathbb{P}^3$ um plano. Então,

$$\ell \subset H \text{ ou } \ell \cap H \text{ consiste de um único ponto.}$$

Demonstração. Suponha $\ell \not\subset H$. Assim, existe $[w] \in \ell - H$. E podemos assumir que $\ell = \mathbb{P}(W)$ com $w \in W \in G_2(\mathbb{C}^4)$ e $H = \mathbb{P}(U)$ com $U \in G_3(\mathbb{C}^4)$ tal que $w \notin U$. Note que $\ell \cap H = \mathbb{P}(W \cap U)$ e

$$\dim W + U = \dim W + \dim U - \dim W \cap U. \quad (A.1)$$

Com $w \notin U$ e $w \in W$, segue que $\dim W + U = 4$. Portanto segue de (A.1) que $\dim W \cap U = 1$. De onde concluímos que $\ell \cap H$ consiste de um único ponto.

■

Lema A.7. Seja $\ell_1 = \mathbb{P}(W_1)$ e $\ell_2 = \mathbb{P}(W_2)$ ($W_i \in G_2(\mathbb{C}^4)$) retas distintas em $\mathbb{P}^3$. Então, ℓ_1 e ℓ_2 são retas disjuntas se, e somente se $W_1 \oplus W_2 = \mathbb{C}^4$.

Demonstração. Suponha que $\ell_1 \cap \ell_2 = \emptyset$.

Afirmção: $W_1 \cap W_2 = \{0\}$.

Suponha que não. Então existe $p \neq 0$, $p \in W_1 \cap W_2$. Dai $[p] \in \mathbb{P}(W_1) = \ell_1$ e $[p] \in \mathbb{P}(W_2) = \ell_2$. Logo $[p] \in \ell_1 \cap \ell_2$. (*Absurdo*)

Como $W_1 \cap W_2 = \{0\} \Rightarrow W_1 \oplus W_2 = W_1 + W_2$, e portanto,

$$\begin{aligned} \dim(W_1 \oplus W_2) &= \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2) \\ &= 2 + 2 - 0 \\ &= 4. \end{aligned}$$

Logo $W_1 \oplus W_2$ é um subespaço de $\mathbb{C}^4$ de dimensão 4. Portanto, $W_1 \oplus W_2 = \mathbb{C}^4$. Reciprocamente, se $\mathbb{C}^4 = W_1 \oplus W_2$, então $\mathbb{C}^4 = W_1 + W_2$ e $W_1 \cap W_2 = \{0\}$, daí $\mathbb{P}(W_1) \cap \mathbb{P}(W_2) = \emptyset$, e portanto, ℓ_1 e ℓ_2 são disjuntas. ■

Sobre a curva residual

Seja $\ell \subseteq \mathbb{P}^3$ uma reta. Defina $\Omega(\ell) = \{H \mid H \text{ é plano em } \mathbb{P}^3 \text{ contendo } \ell\}$.

Lema A.8. Suponhamos que a reta ℓ está contida na superfície irredutível $V(F)$ onde grau $F \geq 2$, e $H \in \Omega(\ell)$ um plano contendo ℓ . Então $H \cap S = \ell \cup C_H$, sendo C_H uma curva plana de grau $d - 1$.

Demonstração. Veja Lema 1.2, p. 23 em [20]. ■

Teorema A.9. Seja $V(F)$ uma superfície não singular de grau $d \geq 2$ e ℓ uma reta contida em $V(F)$. Então ℓ não é componente irredutível de C_H , onde $H \cap V(F) = \ell \cup C_H$, para todo $H \in \Omega(\ell)$.

Demonstração. Veja Teorema 1.5, p. 24 em [20]. ■

Proposição A.10. Seja $S = V(F) \subset \mathbb{P}^3$ uma superfície, onde $F \in \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$ é irredutível de grau $d \geq 3$. Seja ℓ uma reta coontida em S . Suponhamos que m é outra reta distinta de ℓ contida em S tal que $\ell \cap m = \{p\}$. Nessas condições temos que

1. Existe um único plano contendo ℓ e m . Denotaremos tal plano por $\langle \ell, m \rangle$.
2. Se $\pi = \langle \ell, m \rangle$, então $\pi \cap S = \ell \cup C_\pi = \ell \cup m \cup C'_\pi$. Ou seja, C_π possui a reta m como uma de suas componentes.

Demonstração. Veja Proposição 1.6, p. 25 em [20]. ■

Mudanças de Coordenadas Projetivas (MCP)

Seja V um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{K}$, denotamos por

$$\text{Aut}(V) = \{T : V \longrightarrow V \mid T \text{ é um isomorfismo } \mathbb{K}\text{-linear}\}$$

o conjunto dos automorfismos de V .

A função $f : \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n \longrightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$ é denominada de mudança de coordenadas projetivas (MCP) se, existe $T \in \text{Aut}(\mathbb{K}^{n+1})$ tal que $f([v]) = \overline{T([v])}$ para todo $[v] \in \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$.

Exemplo A.3. A função $f : \mathbb{P}^3 \longrightarrow \mathbb{P}^3$ dada por

$$[a_0 : a_1 : a_2 : a_3] \longmapsto [a_0 + a_1 + a_2 - 3a_3 : a_0 + a_2 - 2a_1 : a_0 - a_1 : a_3]$$

é uma MCP, pois existe $T \in \text{Aut}(\mathbb{C}^4)$ dada por

$$T(x, y, z, w) = (x + y + z - 3w, x + y - 2y, x - y, w)$$

tal que $f([v]) = \overline{T([v])}$ para todo $[v] \in \mathbb{P}^3$.

Lema A.11. Sejam ℓ_1, ℓ_2 e ℓ_3 retas em $\mathbb{P}^3$ duas a duas disjuntas. Então existe uma única superfície quádrlica não singular contendo ℓ_1, ℓ_2 e ℓ_3 .

Demonstração. Escolha $T : \mathbb{P}^3 \longrightarrow \mathbb{P}^3$ uma MCP tal que $T(\ell_1) = \mathbf{V}(x_0, x_1)$ e $T(\ell_2) = \mathbf{V}(x_2, x_3)$. Considere $m_i = T(\ell_i), i = 1, 2, 3$.

$$\text{Afirmação 1. } m_3 = \mathbf{V}(x_0 + \alpha x_2 + \beta x_3, x_1 + \gamma x_2 + \delta x_3) \text{ com } \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \neq 0.$$

De fato, assumamos que $m_3 = \mathbf{V}(L, M)$, sendo $L = a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3$ e $M = b_0x_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3$.

Note que $m_1 \cap m_3 = \mathbf{V}(x_0, x_1, a_2x_2 + a_3x_3, b_2x_2 + b_3x_3)$ e $m_2 \cap m_3 = \mathbf{V}(x_2, x_3, a_0x_0 + a_1x_1, b_0x_0 + b_1x_1)$.

Observe que $p = [\alpha_0 : \alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3] \in m_1 \cap m_3$ se, e somente se $\alpha_0 = \alpha_1 = 0, a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3 = 0$ e $b_2\alpha_2 + b_3\alpha_3 = 0$. Assim, $m_1 \cap m_3 \neq \emptyset$ se, e somente se $a_2b_3 - a_3b_2 \neq 0$. Como as MCP preservam intersecções, segue que $m_i \cap m_3 = \emptyset$ para $i = 1, 2$.

Agora a condição $m_i \cap m_3 = \emptyset, i = 1, 2$ nos permite concluir que

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ b_0 & b_1 \end{vmatrix} \neq 0 \text{ e } \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Assim, a partir da matriz $\begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix}$ obtemos via operações elementais, a matriz equivalente

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 1 & \gamma & \delta \end{bmatrix} \text{ com } \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0.$$

Logo, $m_3 = \mathbf{V}(x_0 + \alpha x_2 + \beta x_3, x_1 + \gamma x_2 + \delta x_3)$.

Afirmção 2. Existe uma quádrlica não singular contendo $m_i, i = 1, 2, 3$.

Seja $Q = \mathbf{V}(G)$ quádrlica em $\mathbb{P}^3$.

- $m_1 \subseteq Q \implies G = x_0(\alpha_0 x_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3) + x_1(\alpha_4 x_1 + \alpha_5 x_2 + \alpha_6 x_3)$.
- $m_2 \subseteq Q \implies G(s, t, 0, 0) = 0 \ \forall \ (s, t) \in \mathbb{C}^2$, daí $s(\alpha_0 s + \alpha_1 t) + t(\alpha_4 t) = 0$, o que implica $\alpha_0 s^2 + \alpha_1 s t + \alpha_4 t^2 = 0$, assim $\alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_4 = 0$. Logo, $Q = \mathbf{V}(G)$ com $G = x_0(\alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3) + x_1(\alpha_5 x_2 + \alpha_6 x_3)$.
- $m_3 \subseteq Q \implies -(\alpha x_2 + \beta x_3)(\alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3) - (\gamma x_2 + \delta x_3)(\alpha_5 x_2 + \alpha_6 x_3) = 0 \ \forall \ [x_2 : x_3] \implies -(\alpha \alpha_2 - \gamma \alpha_5) = 0 = -(\beta \alpha_3 - \delta \alpha_6)$.

Assim podemos considerar $G = x_0(\gamma x_2 + \delta x_3) - \alpha_1(\alpha x_2 + \beta x_3)$.

A seguir verificaremos que Q é não singular. De fato, temos que

$$(i) \frac{\partial G}{\partial x_0} = \gamma x_2 + \delta x_3 = 0, \quad (ii) \frac{\partial G}{\partial x_1} = -(\alpha x_2 + \beta x_3) = 0, \quad (iii) \frac{\partial G}{\partial x_2} = x_0 \gamma - x_1 \alpha,$$

$$(iv) \frac{\partial G}{\partial x_3} = x_0 \delta - x_1 \beta = 0.$$

Assim de (i) e (ii), temos que $\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, o que implica que $x_2 = x_3 = 0$ e de

(iii) e (iv) segue que $\begin{bmatrix} \gamma & -\alpha \\ \delta & -\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, o que implica que $x_0 = x_1 = 0$. (Absurdo!).

Logo, Q não possui pontos singulares.

Afirmção 3. Existe uma única quádrlica não singular contendo 3 retas duas a duas disjuntas.

Como MCP preservam variedades não singulares e seu grau, segue-se que $T^{-1}(Q)$ é um superfície quádrlica não singular em $\mathbb{P}^3$ contendo as retas ℓ_1, ℓ_2 e ℓ_3

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}^3 & \xrightarrow{T} & \mathbb{P}^3 \\ \ell_1 & \longmapsto & m_1 \\ \ell_2 & \longmapsto & m_2 \\ \ell_3 & \longmapsto & m_3. \end{array}$$

■

Por exemplo as retas $E_1 = \mathbf{V}(x_0, x_1), E_2 = \mathbf{V}(x_2, x_3)$ e $E_3 = \mathbf{V}(x_0 - x_2, x_1 - x_3)$ estão contidas na superfície quádrlica $Q = \mathbf{V}(x_0 x_3 - x_1 x_2)$. De fato, $E_1 \subseteq Q$, pois $x_0 x_3 - x_1 x_2 \in \mathcal{I}(E_1) = \langle x_2, x_3 \rangle$, $E_2 \subseteq Q$, pois $x_0 x_3 - x_1 x_2 \in \mathcal{I}(E_2) = \langle x_0, x_1 \rangle$ e $E_3 \subseteq Q$, pois $x_0 x_3 - x_1 x_2 \in \mathcal{I}(E_3) = \langle x_0 - x_2, -(x_1 - x_3) \rangle$.

Lema A.12. Sejam ℓ_1, ℓ_2 e ℓ_3 retas duas a duas disjuntas em $\mathbb{P}^3$. Então existe uma MCP $T : \mathbb{P}^3 \rightarrow \mathbb{P}^3$ tal que $T(\ell_i) = E_i$ sendo $E_1 = \mathbf{V}(x_0, x_1)$, $E_2 = \mathbf{V}(x_2, x_3)$ e $E_3 = \mathbf{V}(x_0 - x_2, x_1 - x_3)$.

Demonstração. Se $\ell_1 = \mathbf{V}(f_1, f_2)$ e $\ell_2 = \mathbf{V}(g_1, g_2)$ sendo $f_1, f_2, g_1, g_2 \in S_1$, segue que

$$\ell_1 \cap \ell_2 = \emptyset \iff \{f_1, f_2, g_1, g_2\} \text{ é base de } S_1.$$

Sabemos que existe $T_1 : \mathbb{P}^3 \rightarrow \mathbb{P}^3$ MCP tal que $T_1(\ell_i) = E_i$ $i = 1, 2$ e $T_1(\ell_3) = \mathbf{V}(x_0 + \alpha x_2 + \beta x_3, x_1 + \gamma x_2 + \delta x_3)$ com $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \neq 0$.

Observe que $\mathbf{V}(\alpha x_2 + \beta x_3, \gamma x_2 + \delta x_3) = \mathbf{V}(x_2, x_3) = E_2$.

Além disso $\{x_0, x_1, \alpha x_2 + \beta x_3, \gamma x_2 + \delta x_3\}$ é base de S_1 . Logo, existe $T_2 : \mathbb{P}^3 \rightarrow \mathbb{P}^3$ MCP tal que $(T_2)_\bullet(x_0) = x_0$, $(T_2)_\bullet(x_1) = x_1$, $(T_2)_\bullet(\alpha x_2 + \beta x_3) = -x_2$, $(T_2)_\bullet(\gamma x_2 + \delta x_3) = -x_3$.

Assim, $T_2(E_1) = E_1$, $T_2(E_2) = \mathbf{V}((T_2)_\bullet(x_2), (T_2)_\bullet(x_3)) = \mathbf{V}(x_2, x_3) = E_2$ e $T_2(\mathbf{V}(x_0 + \alpha x_2 + \beta x_3, x_1 + \gamma x_2 + \delta x_3)) = \mathbf{V}((T_2)_\bullet(x_0 + \alpha x_2 + \beta x_3), (T_2)_\bullet(x_1 + \gamma x_2 + \delta x_3)) = \mathbf{V}(x_0 - x_2, x_1 - x_3) = E_3$. Portanto, basta considerar $T = T_2 \circ T_1$. ■

Observação A.6. As mudanças de coordenadas projetivas são isomorfismos.

Observação A.7. As mudanças de coordenadas projetivas preservam variedades projetivas lineares.

Quádricas não singulares

Segue do Teorema de classificação das hipersuperfícies quádricas em $\mathbb{P}^n$ (Teorema 4, p. 411 em [5]) que toda superfície quádrica não singular em $\mathbb{P}^3$ é projetivamente equivalente à superfície $\mathbf{V}(x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$. Entretanto, $\mathbf{V}(x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$ é projetivamente equivalente à superfície $\mathbf{V}(x_0 x_3 - x_1 x_2)^3$

Lembremos que Q possui as famílias de retas $\mathcal{L} = \{L_p\}_{p \in \mathbb{P}^1}$ e $\mathcal{N} = \{N_p\}_{p \in \mathbb{P}^1}$ com $p = [a : b]$ dadas por

$$L_p = \{[au : bu : av : bv] \in \mathbb{P}^3 \mid [u : v] \in \mathbb{P}^1\} \text{ e } N_p = \{[au : av : bu : bv] \in \mathbb{P}^3 \mid [u : v] \in \mathbb{P}^1\}.$$

Observe que $E_1 = \mathbf{V}(x_0, x_1) = N_{[0:1]}$, $E_2 = \mathbf{V}(x_2, x_3) = N_{[1:0]}$ e $E_3 = \mathbf{V}(x_0 - x_2, x_1 - x_3) = N_{[1:1]}$.

Vamos agora determinar equações para as retas L_p e N_p , $p = [a : b] \in \mathbb{P}^1$.

³Basta considerar $\varphi \in \text{Aut}(\mathbb{P}^3)$ dada por $[a_0 : a_1 : a_2 : a_3] \mapsto [a_0 + ia_1 : -a_2 - ia_3 : a_2 - ia_3 : a_0 - ia_1]$. Note que $\varphi(\mathbf{V}(x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)) = \mathbf{V}(x_0 x_3 - x_1 x_2)$.

Seja $[au : bu : av : bv] \in L_p$. Observe que $x_0 = au$, $x_1 = bu$, $x_2 = av$ e $x_3 = bv$, daí $bx_0 = abu = ax_1$ o que implica que $bx_0 - ax_1 = 0$ e $bx_2 = abv = ax_3$ o que implica $bx_2 - ax_3 = 0$.

Afirmção. $L_p = \mathbf{V}(bx_0 - ax_1, bx_2 - ax_3)$ com $p = [a : b]$.

Note que $bx_0 - ax_1$ e $bx_2 - ax_3$ são L.I.. Logo $\mathbf{V}(bx_0 - ax_1, bx_2 - ax_3)$ é uma reta em $\mathbb{P}^3$. Agora observe que

$$L_p \ni [au : bu : av : bv] \implies \begin{cases} b(au) - a(bu) = 0 \\ b(av) - a(bv) = 0 \end{cases}.$$

Logo, $L_p \subseteq \mathbf{V}(bx_0 - ax_1, bx_2 - ax_3)$. Portanto, $L_p = \mathbf{V}(bx_0 - ax_1, bx_2 - ax_3)$.

Agora seja $[au : av : bu : bv] \in N_p$. Observe que $x_0 = au$, $x_1 = av$, $x_2 = bu$ e $x_3 = bv$, daí $bx_0 = abu = ax_2$ e $bx_1 = abv = ax_3$, o que implica que $bx_0 - ax_2 = 0$ e $bx_1 - ax_3 = 0$.

Afirmção. $N_p = \mathbf{V}(bx_0 - ax_2, bx_1 - ax_3)$ com $p = [a : b]$.

Note que $bx_0 - ax_2$ e $bx_1 - ax_3$ são L.I.. Logo $\mathbf{V}(bx_0 - ax_2, bx_1 - ax_3)$ é uma reta em $\mathbb{P}^3$. Agora observe que

$$N_p \ni [au : av : bu : bv] \implies \begin{cases} b(au) - a(bu) = 0 \\ b(av) - a(bv) = 0 \end{cases}.$$

Logo, $N_p \subseteq \mathbf{V}(bx_0 - ax_2, bx_1 - ax_3)$. Portanto, $N_p = \mathbf{V}(bx_0 - ax_2, bx_1 - ax_3)$.

Corpo de funções de uma variedade

Definição A.15. Funções regulares (caso afim).

Seja $Y \subseteq \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$ um conjunto algébrico quase afim e $p \in Y$. Uma função $\varphi : Y \rightarrow \mathbb{K}$ é dita regular em p , se existe $U_p \subseteq Y$ vizinhança aberta de p , $f, g \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ tais que

$$\mathcal{Z}(g) \cap U_p = \emptyset \text{ e } \varphi(u) = \frac{f(u)}{g(u)} \quad \forall u \in U_p.$$

Neste caso, usamos a notação $\varphi|_{U_p} = \frac{f}{g}$.

A função $\varphi : Y \rightarrow \mathbb{K}$ é dita regular se for regular em todos os pontos de seu domínio.

Definição A.16. Funções regulares (caso projetivo).

Seja $Y \subseteq \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$ um conjunto algébrico quase projetivo e $p \in Y$. Uma função $\varphi : Y \rightarrow \mathbb{K}$ é dita regular em p , se existe $U_p \subseteq Y$ vizinhança aberta de p , $F, G \in \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$ homogêneos do mesmo grau tais que

$$\mathbf{V}(G) \cap U_p = \emptyset \text{ e } \varphi(u) = \frac{F(u)}{G(u)} \quad \forall u \in U_p.$$

Neste caso, usamos a notação $\varphi|_{U_p} = \frac{F}{G}$. Em essência as funções regulares são localmente definidas por um quociente polinomial homogêneo do mesmo grau.

A função $\varphi : Y \longrightarrow \mathbb{K}$ é dita regular se for regular em todos os pontos de seu domínio.

Lema A.13. Seja $f : X \longrightarrow Y$ uma aplicação regular sobrejetiva entre conjuntos algébricos. Assuma que Y é irredutível e todas as fibras de f são irredutíveis e da mesma dimensão n . Então X é irredutível.

Demonstração. Ver Lema 12.7, p. 111 em [6]. ■

Lema A.14. Sejam $Y \subseteq \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$ um conjunto algébrico quase projetivo e $\varphi : Y \longrightarrow \mathbb{K}$ uma função regular. Então φ é uma função contínua (ao considerarmos a topologia de Zariski em Y e em $\mathbb{K} = \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^1$).

Demonstração. Veja Lema 3.1, p. 15 em [11]. ■

Seja X uma variedade (afim/projetiva). Para todo $U \subseteq X$ aberto, considere

$$\mathcal{O}(U) = \{f : U \longrightarrow \mathbb{K} \mid f \text{ é regular}\}.$$

Proposição A.15. Se X é uma variedade e U é um aberto não vazio em X , então $\mathcal{O}(U)$ é um anel comutativo com unidade.

Demonstração. Basta observar que $\frac{f}{g} + \frac{f_1}{g_1} = \frac{fg_1 + f_1g}{gg_1}$ e $\frac{f}{g} \cdot \frac{f_1}{g_1} = \frac{ff_1}{gg_1}$ determinam funções regulares em $X - \mathcal{Z}(gg_1)$ no caso afim (respectivamente em $X - \mathbf{V}(gg_1)$, no caso projetivo). Deixamos a cargo do leitor as verificações. ■

Definição A.17. Sejam X e Y conjuntos algébricos quase afins ou quase projetivos. Uma função $f : X \longrightarrow Y$ é denominada morfismo se as seguintes condições forem satisfeitas:

- 1) f é contínua.
- 2) Para todo $V \subseteq Y$, $\varphi \in \mathcal{O}(V)$ verifica-se que $(\varphi \circ f)|_V \in \mathcal{O}(f^{-1}(V))$.

Se f for uma bijeção tal que $f^{-1} : Y \longrightarrow X$ também é um morfismo, então f será denominada isomorfismo. Neste caso, X e Y são ditas isomorfas e usamos a notação $X \cong Y$.

Definição A.18. Seja X uma variedade quase (afim ou projetiva). Considere

$$\Sigma = \{(U, \varphi) \mid U \subset X \text{ aberto não vazio e } \varphi \in \mathcal{O}(U)\}.$$

Defina a seguinte relação em Σ

$$(U, \varphi) \sim (V, \psi) \iff \varphi|_{U \cap V} = \psi|_{U \cap V}.$$

Observe que:

- $\sim$ define uma relação de equivalência em Σ ;
- Denotamos a classe de equivalência de (U, φ) por $\overline{(U, \varphi)}$;
- O conjunto quociente é denotado por $K(X)$, ou seja,

$$K(X) = \{\overline{(U, \varphi)} \mid (U, \varphi) \in \Sigma\}.$$

Lema A.16. Se X é uma variedade quase (projetiva ou afim) então $K(X)$ é um corpo com as seguintes operações:

$$\begin{aligned}\overline{(U, f)} + \overline{(V, g)} &:= \overline{(U \cap V, f|_{U \cap V} + g|_{U \cap V})} \\ \overline{(U, f)} \cdot \overline{(V, g)} &:= \overline{(U \cap V, f|_{U \cap V} \cdot g|_{U \cap V})}\end{aligned}$$

Demonstração. Sendo X uma variedade quase (projetiva ou afim), para mostrar que $K(X)$ é um corpo com as operações acima, basta verificar que $K(X)$ é um anel comutativo com unidade e que todo elemento não nulo é invertível.

Deixamos a cargo do leitor a verificação de que essas operações estão bem definidas.

- $(K(X), +)$ é um grupo abeliano.

Sejam $\alpha = \overline{(U, f)}$, $\beta = \overline{(V, g)}$ e $\gamma = \overline{(W, h)} \in K(X)$ e $\widehat{0}$ a função constante igual a 0. Temos que,

i)

$$\begin{aligned}[\alpha + \beta] + \gamma &= \overline{(U \cap V, f|_{U \cap V} + g|_{U \cap V})} + \overline{(W, h)} \\ &= \overline{(U \cap V \cap W, f|_{U \cap V \cap W} + g|_{U \cap V \cap W} + h|_{U \cap V \cap W})} \\ &= \overline{(U, f)} + \overline{(V \cap W, g|_{V \cap W} + h|_{V \cap W})} \\ &= \alpha + [\beta + \gamma]\end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned}\overline{(U, f)} + \overline{(X, \widehat{0})} &= \overline{(U \cap X, f|_{U \cap X} + \widehat{0}|_{U \cap X})} \\ &= \overline{(U, f|_U + \widehat{0}|_U)} \\ &= \overline{(U, f|_U)} \\ &= \overline{(X \cap U, \widehat{0}|_{X \cap U} + f|_{X \cap U})} \\ &= \overline{(X, \widehat{0})} + \overline{(U, f)}\end{aligned}$$

- iii) Se $\alpha = \overline{(U, f)} \in K(X)$ então $\alpha_1 = \overline{(U, -f)} \in K(X)$ e satisfaz $\alpha + \alpha_1 = \alpha_1 + \alpha = \overline{(X, \widehat{0})}$

- $(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$.

$$\begin{aligned} \overline{[(U, f) \cdot (V, g)] \cdot (W, h)} &= \overline{(U \cap V, f|_{U \cap V} \cdot g|_{U \cap V}) \cdot (W, h)} \\ &= \overline{(U \cap V \cap W, f|_{U \cap V \cap W} \cdot g|_{U \cap V \cap W} \cdot h|_{U \cap V \cap W})} \\ &= \overline{(U, f) \cdot (V \cap W, g|_{V \cap W} \cdot h|_{V \cap W})} \\ &= \overline{(U, f) \cdot [(V, g) \cdot (W, h)]} \end{aligned}$$

- $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$ e $(\alpha + \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot \gamma + \beta \cdot \gamma$.

$$\begin{aligned} \overline{[(U, f) \cdot (V, g)] + (W, h)} &= \overline{(U, f) \cdot [(V \cap W, g|_{V \cap W} \cdot h|_{V \cap W})]} \\ &= \overline{(U \cap V \cap W, f|_{U \cap V \cap W} \cdot [g|_{U \cap V \cap W} + h|_{U \cap V \cap W}])} \\ &= \overline{(U \cap V \cap W, f|_{U \cap V \cap W} \cdot g|_{U \cap V \cap W} + f|_{U \cap V \cap W} \cdot h|_{U \cap V \cap W})} \\ &= \overline{(U \cap V \cap U \cap W, f|_{U \cap V \cap W} \cdot g|_{U \cap V \cap W} + f|_{U \cap V \cap W} \cdot h|_{U \cap V \cap W})} \\ &= \overline{(U \cap V, f|_{U \cap V} \cdot g|_{U \cap V} + (U \cap W, f|_{U \cap W} \cdot h|_{U \cap W}))} \\ &= \overline{(U, f) \cdot (V, g) + (U, f) \cdot (W, h)} \end{aligned}$$

- $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$.

$$\begin{aligned} \overline{(U, f) \cdot (V, g)} &= \overline{(U \cap V, f|_{U \cap V} \cdot g|_{U \cap V})} \\ &= \overline{(V \cap U, g|_{V \cap U} \cdot f|_{V \cap U})} \\ &= \overline{(V, g) \cdot (U, f)} \end{aligned}$$

visto que $f(a)g(a) = g(a)f(a) \forall a \in U \cap V$.

- Existe $w = (X, \widehat{1}) \in K(X)$ tal que $w \cdot \alpha = \alpha \cdot w = \alpha$, para todo $\alpha \in K(X)$.

$$\overline{(U, f) \cdot (X, \widehat{1})} = \overline{(U \cap X, f|_{U \cap X} \cdot \widehat{1}|_{U \cap X})} = \overline{(U, f \cdot \widehat{1}|_U)} = \overline{(U, f)} = \overline{(X, \widehat{1}) \cdot (U, f)}.$$

- Para todo $\alpha = \overline{(U, f)} \in K(X) - \{\overline{(X, \widehat{0})}\}$, existe $\beta \in K(X)$ tal que $\alpha \cdot \beta = \overline{(X, \widehat{1})}$.

Observe que $\overline{(U, f)} = \overline{(X, \widehat{0})}$ se, e somente se $(U, f) \sim (X, \widehat{0})$. Como $U \cap X = U$, segue que $f|_U = \widehat{0}|_U$, o que implica que $f(a) = 0$ para todo $a \in U$.

Agora, temos que $\overline{(U, f)} \neq \overline{(X, \widehat{0})}$ se, e somente se existe $a \in U$, tal que $f(a) \neq 0$.

Note que f é regular o que implica que f é contínua. Assim, $M = \{u \in U \mid f(u) \neq 0\} \stackrel{ab}{\subseteq} U$ é um aberto de X contendo a e

$$\frac{1}{f} : M \longrightarrow \mathbb{K} \text{ dada por } a \longmapsto \frac{1}{f(a)} \text{ está bem definida.}$$

Afirmção A.1. $\frac{1}{f}$ é uma função regular.

f é regular em cada ponto de M , ou seja, $f \in \mathcal{O}(M)$, então para cada $a \in M$, existe $U_a \stackrel{ab}{\subseteq} M$, $p_1, q_1 \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ tais que

$$f|_{U_a} = \frac{p_1}{q_1} \text{ e } \mathcal{Z}(q_1) \cap U_a = \emptyset \quad (\text{A.2})$$

Observe que $p_1(a) \neq 0 \ \forall \ a \in U_a$. Assim, segue de (A.2)

$$\left(\frac{1}{f}\right)|_{U_a} = \frac{q_1}{p_1} \text{ e } \mathcal{Z}(p_1) \cap U_a = \emptyset.$$

Sendo assim, temos que

$$\overline{(U, f)} \cdot \overline{\left(M, \frac{1}{f}\right)} = \overline{\left(U \cap M, f|_{U \cap M} \cdot \left(\frac{1}{f}\right)|_{U \cap M}\right)} = \overline{(M, \widehat{1})} = \overline{(X, \widehat{1})}.$$

■

Lema A.17. Se X é uma variedade quase (projetiva ou afim) e U um aberto não vazio de X , então $K(U) \simeq K(X)$.

Demonstração. Defina $\psi : K(U) \longrightarrow K(X)$ por $\overline{(W, g)}^U \longmapsto \overline{(W, g)}$.

- ψ está bem definida.

Se $\overline{(W, g)}^U = \overline{(W_1, g_1)}^U$ então $W = U \cap A$, $W_1 = U \cap A_1$ sendo A, A_1 abertos de X e $g|_{W \cap W_1} = g_1|_{W \cap W_1}$. Assim, W e W_1 são abertos de X tais que $g|_{W \cap W_1} = g_1|_{W \cap W_1}$. Portanto, $\overline{(W, g)} = \overline{(W_1, g_1)}$.

- ψ é homomorfismo de anéis.

Sejam $\overline{(W, g)}^U, \overline{(W_1, g_1)}^U \in K(U)$, temos que

$$\begin{aligned} \psi(\overline{(W, g)}^U + \overline{(W_1, g_1)}^U) &= \psi(\overline{(W \cap W_1, g|_{W \cap W_1} + g_1|_{W \cap W_1})}^U) \\ &= \overline{(W \cap W_1, g|_{W \cap W_1} + g_1|_{W \cap W_1})} \\ &= \overline{(W, g)} + \overline{(W_1, g_1)} \\ &= \psi(\overline{(W, g)}^U) + \psi(\overline{(W_1, g_1)}^U) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi(\overline{(W, g)}^U \cdot \overline{(W_1, g_1)}^U) &= \psi(\overline{(W \cap W_1, g|_{W \cap W_1} \cdot g_1|_{W \cap W_1})}^U) \\ &= \overline{(W \cap W_1, g|_{W \cap W_1} \cdot g_1|_{W \cap W_1})} \\ &= \overline{(W, g)} \cdot \overline{(W_1, g_1)} \\ &= \psi(\overline{(W, g)}^U) \cdot \psi(\overline{(W_1, g_1)}^U) \end{aligned}$$

Observe que $\psi(\overline{(U, \widehat{1})}^U) = \overline{(U, \widehat{1})}^4$.

⁴Note que, $\overline{(U, \widehat{1})} = \overline{(X, \widehat{1})}$ se, e somente se $(U, \widehat{1}) \sim (X, \widehat{1})$ se, e somente se $\widehat{1}|_{U \cap X} = \widehat{1}|_{U \cap X}$.

- ψ é injetora.

$$\begin{aligned}
 N(\psi) &= \{ \overline{(W, g)}^U \in K(U) \mid \psi(\overline{(W, g)}^U) = \overline{(X, \widehat{0})} \} \\
 &= \{ \overline{(W, g)}^U \in K(U) \mid (\overline{(W, g)}) = \overline{(X, \widehat{0})} \} \\
 &= \{ \overline{(W, g)}^U \in K(U) \mid (W, g) \sim (X, \widehat{0}) \} \\
 &= \{ \overline{(U, g)}^U \in K(U) \mid g|_{W \cap X} = \widehat{0}|_{W \cap X} \} \\
 &= \{ \overline{(W, g)}^U \in K(U) \mid g(u) = 0 \ \forall \ u \in W \subset U \} \\
 &= \{ \overline{(X, \widehat{0})}^U \}
 \end{aligned}$$

- ψ é sobrejetora.

Seja $\overline{(W, g)} \in K(X)$, então $W \subseteq X$ é um aberto não vazio e $g : W \rightarrow \mathbb{K}$ é uma função regular. Como $W \stackrel{ab}{\subseteq} X$, $U \stackrel{ab}{\subseteq} X$, e X é irredutível, segue que $W \cap U \neq \emptyset$, assim

$$\psi(\overline{(U \cap W, g)}^U) = \overline{(U \cap W, g)} = \overline{(W, g)}.$$

■

Proposição A.18. Seja X uma variedade quase (projetiva ou afim) e $\mathbb{K}$ corpo algebricamente fechado. Então,

1) se X é afim, então $K(X)$ é isomorfo ao corpo de frações de $A(X) = \frac{\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]}{\mathcal{I}(X)}$.

2) se X é projetiva, então $K(X)$ é isomorfo a $S(X)_{(<0>)}$, sendo

$$\begin{aligned}
 S(X)_{(<0>)} &= \left\{ \frac{\alpha}{\beta} \in \text{Frac}(S(X)) \mid \alpha, \beta \text{ homogêneos } \text{grau}(\alpha) = \text{grau}(\beta) \right\} \text{ sendo } S(X) = \\
 &= \frac{\mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]}{\mathcal{J}(X)} \text{ o anel de coordenas homogêneo de } X.
 \end{aligned}$$

Demonstração. Prova de 1)

Defina $\psi : \text{Frac}(A(X)) \rightarrow K(X)$ por $\frac{\overline{f}}{\overline{g}} \mapsto \overline{(U, \varphi)}$ com $\overline{f}, \overline{g} \in A(X)$, sendo $U = X - \mathcal{Z}(g)$ e $\varphi : U \rightarrow \mathbb{K}$ dada por $a \mapsto \frac{f(a)}{g(a)}$.

- ψ está bem definida.

i) $U \neq \emptyset$ e $\varphi \in \mathcal{O}(U) = \{h : U \rightarrow \mathbb{K} \mid h \text{ é regular} \}$.

Suponha que $U = \emptyset$, assim $X \subseteq \mathcal{Z}(g)$, daí $\mathcal{I}(\mathcal{Z}(g)) \subseteq \mathcal{I}(X)$, o que implica que $g \in \sqrt{\langle g \rangle} \subseteq \mathcal{I}(X)$, logo $\overline{g} = \overline{0}$ em $A(X) = \frac{\mathbb{K}[x]}{\mathcal{I}(X)}$ (Absurdo!). Portanto, $U \neq \emptyset$.

ii) Considere $\frac{f}{g}, \frac{f_1}{g_1} \in \text{Frac}(A(X))$ e $U = X - \mathcal{Z}(g), U_1 = X - \mathcal{Z}(g_1)$. Note que

$$\frac{\bar{f}}{\bar{g}} = \frac{\bar{f}_1}{\bar{g}_1} \iff \bar{f} \cdot \bar{g}_1 = \bar{f}_1 \cdot \bar{g} \iff \overline{fg_1} = \overline{gf_1} \text{ em } A(X). \text{ Daí,}$$

$$\begin{aligned} fg_1 - f_1g \in \mathcal{I}(X) &\iff (fg_1 - f_1g)(a) = 0 \ \forall \ a \in X \\ &\iff f(a)g_1(a) - f_1(a)g(a) = 0 \ \forall \ a \in X \\ &\iff \frac{f(a)}{g(a)} = \frac{f_1(a)}{g_1(a)} \ \forall \ a \in U \cap U_1 \\ &\iff \varphi|_{U \cap U_1} = \varphi_1|_{U \cap U_1} \text{ com } \varphi = \left(\frac{f}{g}\right)|_U \text{ e } \varphi_1 = \left(\frac{f_1}{g_1}\right)|_{U_1} \\ &\iff \overline{(U, \varphi)} = \overline{(U_1, \varphi_1)} \\ &\iff \psi\left(\frac{\bar{f}}{\bar{g}}\right) = \psi\left(\frac{\bar{f}_1}{\bar{g}_1}\right) \end{aligned}$$

- ψ é homomorfismo de anéis.

Sejam $\alpha = \frac{\bar{f}}{\bar{g}}, \beta = \frac{\bar{f}_1}{\bar{g}_1} \in \text{Frac}(A(X))$. Considere as funções regulares $\varphi = \left(\frac{f}{g}\right)|_V$

com $V = X - \mathcal{Z}(g)$ e $\varphi_1 = \left(\frac{f_1}{g_1}\right)|_{V_1}$ com $V_1 = X - \mathcal{Z}(g_1)$.

i) Sejam $\alpha = \frac{\bar{f}}{\bar{g}}, \beta = \frac{\bar{f}_1}{\bar{g}_1} \in \text{Frac}(A(X))$. Temos que,

$$\psi\left(\frac{\bar{f}}{\bar{g}} + \frac{\bar{f}_1}{\bar{g}_1}\right) = \psi\left(\frac{\overline{fg_1 + f_1g}}{\overline{gg_1}}\right) = \overline{(X - \mathcal{Z}(gg_1), \psi_1)} = \overline{(V_2, \varphi_3)}$$

onde

$$\varphi_3 = \left(\frac{fg(a) + f_1g(a)}{gg_1(a)}\right)|_{V_2}, \quad V_2 = X - \mathcal{Z}(gg_1).$$

Temos que $\varphi(\alpha) + \varphi(\beta) = \overline{(V, \varphi_1)} + \overline{(V_1, \varphi_2)} = \overline{(V \cap V_1, \varphi|_{V \cap V_1} + \varphi_1|_{V \cap V_1})}$.

Observe agora que para todo $a \in V \cap V_1 \cap V_2$, temos que $\varphi_3(a) = \varphi_1(a) + \varphi_2(a)$.

Logo, $\varphi_3|_{V \cap V_1 \cap V_2} = (\varphi_1 + \varphi_2)|_{V \cap V_1 \cap V_2}$. Daí, $(V_2, \varphi_3) \sim (V \cap V_1, \varphi|_{V \cap V_1} + \varphi_1|_{V \cap V_1})$, o que implica que $\overline{(V_2, \varphi_3)} = \overline{(V \cap V_1, \varphi|_{V \cap V_1} + \varphi_1|_{V \cap V_1})}$. Portanto, $\psi(\alpha + \beta) = \psi(\alpha) + \psi(\beta)$.

ii) Sejam $\alpha = \frac{\bar{f}}{\bar{g}}, \beta = \frac{\bar{f}_1}{\bar{g}_1} \in \text{Frac}(A(X))$. Temos que,

$$\psi\left(\frac{\bar{f}}{\bar{g}} \cdot \frac{\bar{f}_1}{\bar{g}_1}\right) = \psi\left(\frac{\overline{f \cdot f_1}}{\overline{g \cdot g_1}}\right) = \overline{(X - \mathcal{Z}(gg_1), \varphi_3)}$$

onde

$$\varphi_3 = \left(\frac{f \cdot f_1}{g \cdot g_1}\right)|_V \text{ com } V = X - \mathcal{Z}(gg_1).$$

Temos que $\varphi(\alpha) \cdot \varphi(\beta) = \overline{(V, \varphi_1)} \cdot \overline{(V_1, \varphi_2)} = \overline{(V \cap V_1, \varphi|_{V \cap V_1} \cdot \varphi_1|_{V \cap V_1})}$ e $\varphi_3|_{V \cap V_1 \cap V_2} = (\varphi_1 \cdot \varphi_2)|_{V \cap V_1 \cap V_2}$. Daí, $(V_2, \varphi_3) \sim (V \cap V_1, \varphi|_{V \cap V_1} \cdot \varphi_1|_{V \cap V_1})$, o que implica que $\overline{(V_2, \varphi_3)} = \overline{(V \cap V_1, \varphi|_{V \cap V_1} \cdot \varphi_1|_{V \cap V_1})}$. Portanto, $\psi(\alpha \cdot \beta) = \psi(\alpha) \cdot \psi(\beta)$.

iii) Note que $\psi\left(\frac{\overline{1}}{\overline{1}}\right) = \overline{(X, \widehat{1})}$, visto que $\mathcal{Z}(1) = \emptyset$.

- ψ é injetora.

Considere $\alpha = \frac{\overline{f}}{\overline{g}} \in \text{Frac}(A(X))$. Note que:

$$\begin{aligned} \alpha \in N(\psi) &\iff \psi(\alpha) = \overline{(X, \widehat{0})} \\ &\iff \left(X - \mathcal{Z}(g), \frac{f}{g}\right) = \overline{(X, \widehat{0})} \\ &\iff \left(\frac{f}{g}\right)|_{X - \mathcal{Z}(g)} = \widehat{0}|_{X - \mathcal{Z}(g)} \\ &\iff f(a) = 0 \ \forall \ a \in X - \mathcal{Z}(g) \\ &\iff (X - \mathcal{Z}(g)) \subseteq \mathcal{Z}(f) \\ &\iff X = \overline{(X - \mathcal{Z}(g))} \subseteq \mathcal{Z}(f) \\ &\iff f \in \mathcal{I}(X) \\ &\iff \overline{f} = \overline{0} \\ &\iff \alpha = \frac{\overline{0}}{\overline{1}}. \end{aligned}$$

Portanto, $N(\psi) = \left\{\frac{\overline{0}}{\overline{1}}\right\}$.

- ψ é sobrejetora.

Dado $\overline{(V, \varphi)} \in K(X)$ sendo φ regular existem $W \stackrel{ab}{\subseteq} V, f, g$ polinômios tais que $\varphi|_W = \frac{f}{g}$. Assim,

$$\overline{(V, \varphi)} = \overline{\left(W, \frac{f}{g}\right)} = \overline{\left(X - \mathcal{Z}(g), \frac{f}{g}\right)} = \psi\left(\frac{\overline{f}}{\overline{g}}\right).$$

Prova do item 2). Segue de maneira análoga ao item 1), considerando no caso projetivo e quocientes determinados por polinômios homogêneos de mesmo grau. ■

Fato A.19. Sejam A e B anéis comutativos com unidade isomorfos. Se A e B forem domínios de integridade D.I., então seus corpos de frações são isomorfos.

Fato A.20. Se X, Y são variedades quase (afins ou projetivas) isomorfas. Então $K(X) \simeq K(Y)$.

Definição A.19. Sejam X e Y conjuntos algébricos (afins ou projetivos). Considere $\Sigma_{X,Y} = \{(U, \varphi) \mid U \subset X \text{ aberto não vazio e } \varphi : U \longrightarrow Y \text{ é um morfismo}\}$.

Defina a seguinte relação

$$(U, \varphi) \sim (V, \psi) \iff \varphi|_{U \cap V} = \psi|_{U \cap V}.$$

Observe que:

- $\sim$ define uma relação de equivalência em $\Sigma_{X,Y}$;
- Se $(U, \varphi) \in \Sigma_{X,Y}$, então a classe de equivalência do par (U, φ) será denotada por $\varphi : X \dashrightarrow Y$ e denominada função racional sobre U .

Exemplo A.4. Sendo $X = \mathbb{A}^2$, $Y = \mathbb{P}^1$ e $\varphi : \mathbb{A}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^1$ dada por $(a, b) \mapsto [a : b]$ é a classe de equivalência de $(\mathbb{A}^2 - \{(0, 0)\}, \varphi)$.

Observação A.8. Se $\varphi : X \longrightarrow Y$ for um morfismo entre variedades (afins ou projetivas) então φ determina a função racional associada ao par (X, φ) .

Exemplo A.5. Seja X uma variedade quase-projetiva em $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^m$. Então, $\varphi : X \dashrightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$ é uma função racional definida em U se, e somente se existem $V \subset X$ aberto não vazio e $G_0, \dots, G_n \in \mathbb{K}[x_0, \dots, x_m]$ homogêneos do mesmo grau tais que

$$V \cap \mathbf{V}(G_0, \dots, G_n) = \emptyset \text{ e } \varphi(a) = [G_0(a) : \dots : G_n(a)] \quad \forall a \in V.$$

Demonstração. $\implies$ Temos que $\varphi : X \dashrightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$ é uma função racional definida em U , ou seja, $\varphi : U \longrightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$ é um morfismo com $U \stackrel{ab}{\subset} X$ não vazio.

Como $U \neq \emptyset$, então considere $p \in U$. Daí existe $U_p \stackrel{ab}{\subseteq} U$ não vazio e $G_0, \dots, G_n$ homogêneos do mesmo grau em $\mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$ tais que

$$U_p \cap \mathbf{V}(G_0, \dots, G_n) = \emptyset \text{ e } \varphi(a) = [G_0(a) : \dots : G_n(a)] \quad \forall a \in U_p.$$

Assim, obtemos $V = U_p \subset U \subset X$ tal que $\varphi(a) = [G_0(a) : \dots : G_n(a)] \quad \forall a \in V$.

$\impliedby$ Seja $V \subset X$ aberto não vazio e $G_0, \dots, G_n \in \mathbb{K}[x_0, \dots, x_m]$ homogêneos do mesmo grau tais que

$$V \cap \mathbf{V}(G_0, \dots, G_n) = \emptyset \text{ e } \varphi(a) = [G_0(a) : \dots : G_n(a)] \quad \forall a \in V.$$

Segue que $\varphi : X \dashrightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$ é um morfismo, em particular temos $\varphi : U \longrightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$ é um morfismo. Portanto, $\varphi : X \dashrightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$ é uma função racional definida em U . ■

Definição A.20. Funções racionais dominantes

Sejam X e Y variedades quase (afins ou projetivas). Considere $\varphi : X \dashrightarrow Y$ uma função racional definida em U . Dizemos que φ é dominante se $\overline{\varphi(U)} = Y$.

Lema A.21. Se $(V, \psi) \in [(U, \varphi)]$ e $\overline{\varphi(U)} = Y$ então $\overline{\psi(V)} = Y$.

Demonstração. Sejam $\varphi : U \rightarrow Y$ uma função regular e $\overline{\psi(U)} = Y$. Sendo $V \stackrel{ab}{\subset} X$ não vazio, temos que $U \cap V \neq \emptyset$ e $U \cap V \stackrel{ab}{\subset} U$, o que implica que $\overline{U \cap V}^U = U$. Assim,

$$Y = \overline{\varphi(U)} = \overline{\varphi(\overline{U \cap V}^U)} \stackrel{(*)}{=} \overline{\psi(U \cap V)} = \overline{\psi(\overline{U \cap V}^V)} = \overline{\psi(V)}.$$

$$(*) \quad \overline{\varphi(U)} = \overline{\varphi(\overline{U})}^5.$$

■

Proposição A.22. Sejam X e Y variedades quase (afins ou projetivas). Se $\varphi : X \dashrightarrow Y$ for uma função racional dominante definida em U . Então φ induz um homomorfismo injetivo $\varphi^* : K(Y) \rightarrow K(X)$.

Demonstração. Defina $\varphi^* : K(Y) \rightarrow K(X)$ dada por $\overline{(V, g)} \mapsto \overline{(\varphi^{-1}(V), g \circ \varphi|_{\varphi^{-1}(V)})}$.

- φ^* está bem definida.

Deixamos a cargo do leitor.

- φ^* é homomorfismo de anéis.

Sejam $\overline{(V, g)}, \overline{(V_1, g_1)} \in K(Y)$, ou seja, V e V_1 são abertos não vazios de Y tais que $V \cap V_1 \neq \emptyset$ e $g, g_1 : V \rightarrow \mathbb{K}$ funções regulares. Considere os abertos não vazios em U , tais que $W = \varphi^{-1}(V)$ e $W_1 = \varphi^{-1}(V_1)$. Assim,

$$\begin{aligned} \varphi^*(\overline{(V, g)} + \overline{(V_1, g_1)}) &= \overline{\varphi^*((V \cap V_1, g|_{V \cap V_1} + g_1|_{V \cap V_1}))} \\ &= \overline{(\varphi^{-1}(V \cap V_1), (g + g_1) \circ \varphi|_{\varphi^{-1}(V \cap V_1)})} \\ &= \overline{(W \cap W_1, (g + g_1) \circ \varphi|_{W \cap W_1})} \\ &= \overline{(W \cap W_1, g \circ \varphi|_{W \cap W_1} + g_1 \circ \varphi|_{W \cap W_1})} \\ &= \overline{(W, g \circ \varphi|_W)} + \overline{(W_1, g_1 \circ \varphi|_{W_1})} \\ &= \overline{(\varphi^{-1}(V), g \circ \varphi|_{\varphi^{-1}(V)})} + \overline{(\varphi^{-1}(V_1), g_1 \circ \varphi|_{\varphi^{-1}(V_1)})} \\ &= \overline{(V, g)} + \overline{(V_1, g_1)}. \end{aligned}$$

⁵Temos que $U \stackrel{ab}{\subset} X$ não vazio e $\varphi : U \rightarrow Y$ é uma função regular, logo contínua. Daí, segue que para todo subconjunto U de X $\varphi(\overline{U}) \subset \overline{\varphi(U)}$ (ver Teorema 2.1, p. 45 em [30]).

Por outro lado, temos que $U \subseteq \overline{U}$, o que implica que $\varphi(U) \subseteq \varphi(\overline{U})$, assim $\overline{\varphi(U)} \subseteq \overline{\varphi(\overline{U})}$. Portanto, $\overline{\varphi(U)} = \overline{\varphi(\overline{U})}$.

$$\begin{aligned}
\varphi^*((V, g) \cdot (V_1, g_1)) &= \varphi^*((V \cap V_1, g|_{V \cap V_1} \cdot g_1|_{V \cap V_1})) \\
&= \overline{(\varphi^{-1}(V \cap V_1), (g \cdot g_1) \circ \varphi|_{\varphi^{-1}(V \cap V_1)})} \\
&= \overline{(W \cap W_1, (g \cdot g_1) \circ \varphi|_{W \cap W_1})} \\
&= \overline{(W \cap W_1, g \circ \varphi|_{W \cap W_1} \cdot g_1 \circ \varphi|_{W \cap W_1})} \\
&= \overline{(W, g \circ \varphi|_W) \cdot (W_1, g_1 \circ \varphi|_{W_1})} \\
&= \overline{(\varphi^{-1}(V), g \circ \varphi|_{\varphi^{-1}(V)}) + (\varphi^{-1}(V_1), g_1 \circ \varphi|_{\varphi^{-1}(V_1)})} \\
&= \overline{(V, g) \cdot (V_1, g_1)}.
\end{aligned}$$

$$\varphi^*((X, \widehat{1})) = \overline{(\varphi^{-1}(X), \widehat{1} \circ \varphi|_{\varphi^{-1}(X)})} = \overline{(\varphi^{-1}(X), \widehat{1})} \stackrel{ab}{\subseteq} Y \overline{(W, \widehat{1})}.$$

- φ^* é injetora.

Seja $\overline{(V, g)} \in K(Y)$, com $V \stackrel{ab}{\subseteq} Y$ não vazio e $g : V \rightarrow \mathbb{K}$ função regular. Suponha que $\overline{(V, g)} \in N(\varphi^*)$, assim $\varphi^*((V, g)) = \overline{(X, \widehat{0})}$, com $\widehat{0} : X \rightarrow \mathbb{K}$ dada por $x \mapsto 0$. Logo, $(\varphi^{-1}(V), g \circ \varphi|_{\varphi^{-1}(V)}) = \overline{(X, \widehat{0})}$. De onde concluímos que $(\varphi^{-1}(V), g \circ \varphi|_{\varphi^{-1}(V)}) \sim (X, \widehat{0})$ assim, $g \circ \varphi|_{\varphi^{-1}(V)} = \widehat{0}|_{\varphi^{-1}(V)}$ o que implica que $g(\varphi(a)) = 0 \ \forall \ a \in \varphi^{-1}(V)$.

Assim, note que

- i) $g \in \mathcal{O}(V)$, o que implica que existem $W \stackrel{ab}{\subseteq} V$ não vazio e F, G homogêneos de mesmo grau tais que

$$W \cap \mathbf{V}(G) = \emptyset \text{ e } g(b) = \frac{F(b)}{G(b)} \ \forall \ b \in W.$$

- ii) Assim, $\varphi^{-1}(W) \subseteq \varphi^{-1}(V)$, o que implica que

$$\begin{aligned}
g(\varphi(a)) = 0 \ \forall \ a \in \varphi^{-1}(W) &\implies \frac{F(\varphi(a))}{G(\varphi(a))} = 0 \ \forall \ a \in \varphi^{-1}(W) \\
&\implies F(\varphi(a)) = 0 \ \forall \ a \in \varphi^{-1}(W) \\
&\implies \varphi(\varphi^{-1}(W)) \subseteq \mathbf{V}(F) \\
&\implies \overline{\varphi(\varphi^{-1}(W))} \subseteq \mathbf{V}(F) \\
&\implies \overline{\varphi(\varphi^{-1}(W))^U} \subseteq \mathbf{V}(F) \\
&\implies \overline{\varphi(U)} \subseteq \mathbf{V}(F) \\
&\stackrel{\varphi \text{ é dom.}}{\implies} Y \subseteq \mathbf{V}(F) \\
&\implies F(b) = 0 \ \forall \ b \in Y \\
&\implies F(b) = 0 \ \forall \ b \in W \\
&\implies g(b) = 0 \ \forall \ b \in W \\
&\implies \overline{(W, g)} = \overline{(X, \widehat{0})} \in K(Y)
\end{aligned}$$

■

Teorema A.23. *Sejam X e Y variedades. Então*

$$\begin{aligned} \{\varphi : X \cdots \longrightarrow Y \mid \varphi \text{ é racional dominante} \} &\longrightarrow \text{Hom}_{\mathbb{K}\text{-alg}}(K(Y), K(X)) \\ \varphi &\longmapsto \varphi^* \end{aligned}$$

Demonstração. Veja Teorema 4.4, p. 25 em [11]. ■

O grau de uma função racional dominante

Sejam X e Y variedades quase (afins ou projetivas) e $\varphi : X \cdots \longrightarrow Y$ uma função racional definida em U . Segue da Proposição A.15 que $\varphi^* : K(Y) \longrightarrow K(X)$ é um homomorfismo injetivo.

Note que

$$K(Y) \simeq \frac{K(Y)}{\{(Y, \widehat{0})\}} = \frac{K(Y)}{N(\varphi^*)} \simeq \text{Im}(\varphi^*) = \varphi^*(K(Y)).$$

Assim, temos a extensão de corpos $\varphi^*(K(Y)) \hookrightarrow K(X)$.

Definição A.21. Definimos o grau da função racional dominante $\varphi : X \cdots \longrightarrow Y$ por $\text{grau}(\varphi) = [K(X) : \varphi^*(K(Y))]$.

Função racional genericamente finita

Sejam X e Y variedades quase (afins ou projetivas) e $\varphi : X \cdots \longrightarrow Y$ uma função racional dominante definida em U .

Um morfismo $f : X \longrightarrow Y$ entre variedades (afins ou projetivas) é denominado genericamente finito (ou que a fibra geral de f é finita) se existe V aberto não vazio em Y tal que $\#f^{-1}(y)$ é finita e igual a d para todo y em V .

Proposição A.24. A função racional $f : X \longrightarrow Y$ definida em U é genericamente finita se, e somente se, a extensão de corpos $\varphi^*(K(Y)) \hookrightarrow K(X)$ é finita. Se a característica do corpo $\mathbb{K}$ é nula, então $\#\varphi^{-1}(y) = d = [K(X) : \varphi^*(K(Y))]$ com $y \in V$.

Demonstração. Veja Proposição 7.16, p. 80 em [9]. ■

Apêndice B

Retas em superfícies cúbicas

Neste apêndice vamos estabelecer que toda superfície cúbica não singular em $\mathbb{P}^3$ contém exatamente 27 retas. Além disso é estudada a incidência entre tais retas. Este apêndice foi extraído das aulas dedicadas a contagem de retas em superfícies durante o curso de Tópicos Especiais de Álgebra 2020.1 lecionado pela Profa. Jacqueline Rojas.

_____ Contando retas em superfícies cúbicas não singulares _____

Toda superfície cúbica não singular contém pelo menos uma reta (cf. Proposição 7.2, p. 110 em [21]).

Teorema B.1. *Seja $S \subset \mathbb{P}^3$ uma superfície cúbica não singular contendo a reta ℓ . Então existem exatamente cinco planos $H_1, \dots, H_5$ contendo a reta ℓ tais que a curva residual C_i à reta ℓ no plano H_i é uma cônica singular, isto é,*

$$H_i \cap S = \ell \cup C_i \quad \text{com} \quad C_i = \ell_i \cup \ell'_i \quad (\ell_i \neq \ell'_i).$$

Demonstração: A menos de uma MCP podemos assumir que $\ell = \mathbf{V}(x_2, x_3)$. Como $\ell \in \Phi(S)$, podemos escrever F na forma

$$F = A_1 \cdot x_0^2 + B_1 \cdot x_0 x_1 + C_1 \cdot x_1^2 + A_2 \cdot x_0 + B_2 \cdot x_1 + A_3$$

com A_i, B_i e $C_i \in \mathbb{C}[x_2, x_3]$ homogêneos de grau i .

Agora, como o plano H contém a reta ℓ , então existe $[\alpha : \beta] \in \mathbb{P}^1$ tal que $H = \mathbf{V}(\alpha x_2 + \beta x_3)$. Assim,

$$H = \mathbf{V}(x_3 - \mu x_2) \quad \text{ou} \quad H = \mathbf{V}(x_2),$$

sendo $\mu = -\frac{\alpha}{\beta}$ se $\beta \neq 0$.

- $\beta \neq 0$. Neste caso, $H = \mathbf{V}(x_3 - \mu x_2)$ com $\mu = -\frac{\alpha}{\beta}$.

Observe que

$$A_i(x_2, \mu x_2) = x_2^i A_i(1, \mu), \quad B_i(x_2, \mu x_2) = x_2^i B_i(1, \mu) \text{ e } C_1(x_2, \mu x_2) = x_2 C_1(1, \mu).$$

Assim,

$$H \cap S = \mathbf{V}(x_3 - \mu x_2, x_2 \cdot F_\mu) \implies C_H = \mathbf{V}(x_3 - \mu x_2, F_\mu)$$

sendo

$$F_\mu = a_1 \cdot x_0^2 + b_1 \cdot x_0 x_1 + c_1 \cdot x_1^2 + a_2 \cdot x_0 x_2 + b_2 \cdot x_1 x_2 + a_3 x_2^3$$

com $a_i = A_i(1, \mu)$ para $i = 1, 2, 3$; $b_i = B_i(1, \mu)$ para $i = 1, 2$ e $c_1 = C_1(1, \mu)$.

- $\beta = 0$. Neste caso, $H = \mathbf{V}(x_2)$. Assim, $C_H = \mathbf{V}(x_2, F_\infty)$ sendo

$$F_\infty = a_1 \cdot x_0^2 + b_1 \cdot x_0 x_1 + c_1 \cdot x_1^2 + a_2 \cdot x_0 x_2 + b_2 \cdot x_1 x_2 + a_3 x_2^3$$

com $a_i = A_i(0, 1)$ para $i = 1, 2, 3$; $b_i = B_i(0, 1)$ para $i = 1, 2$ e $c_1 = C_1(0, 1)$.

Agora, segue da questão 3 da lista 11¹ (em ambos dos casos: $\beta \neq 0$ ou $\beta = 0$) que:

$$C_H \text{ é singular} \iff \begin{vmatrix} 2a_1 & b_1 & a_2 \\ b_1 & 2c_1 & b_2 \\ a_2 & b_2 & 2a_3 \end{vmatrix} = 0 = 4a_1 c_1 a_3 - b_1^2 a_3 - a_1 b_2^2 + b_1 a_2 b_2 - a_2^2 c_1. \quad (\text{B.1})$$

Afirmção 1: Considere o polinômio

$$P = 4A_1 C_1 A_3 - B_1^2 A_3 - A_1 B_2^2 + B_1 A_2 B_2 - A_2^2 C_1 \in \mathbb{C}[x_2, x_3].$$

Verifica-se que P é um polinômio não nulo, homogêneo de grau 5 tal que C_H é singular sendo $H = \mathbf{V}(\alpha x_2 + \beta x_3)$ se, $P(\beta, -\alpha) = 0$.

De fato, observe que:

- (i) Se $\beta \neq 0$ verifica-se que $A_i(\beta, -\alpha) = \beta^i a_i(1, \mu)$ para $i = 1, 2, 3$; $B_i(\beta, -\alpha) = \beta^i b_i(1, \mu)$ para $i = 1, 2$ e $C_1(\beta, -\alpha) = \beta c_1(1, \mu)$. Portanto.

$$P(\beta, -\alpha) = \beta^5 \cdot (4a_1 c_1 a_3 - b_1^2 a_3 - a_1 b_2^2 + b_1 a_2 b_2 - a_2^2 c_1).$$

¹Nessa questão considera-se a matriz Hessiana H_f associada à cônica $\mathcal{C} = \mathbf{V}(f)$ em $\mathbb{P}^2$ e pede-se para mostrar que: (I) $\mathcal{C}$ é singular se, e somente se $\det H_f = 0$ (ii) $\mathcal{C}$ é um cone se, e somente se posto $H_f = 2$.

Assim, no caso $\beta \neq 0$ segue de (B.1) que

$$P(\beta, -\alpha) = 0 \iff C_H \text{ é singular} .$$

(ii) Se $\beta = 0$ verifica-se que $[\beta : -\alpha] = [0 : 1]$. Assim, neste caso

$$P(\beta, -\alpha) = P(0, 1) = 4a_1c_1a_3 - b_1^2a_3 - a_1b_2^2 + b_1a_2b_2 - a_2^2c_1.$$

E também segue de (B.1) que

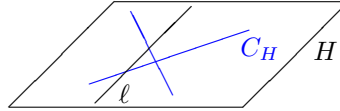
$$P(0, 1) = 0 \iff C_H \text{ é singular} .$$

Suponha, por absurdo que $P = 0$, então o conjunto Σ formado pelas curvas residuais C_H singulares seria infinito (**Absurdo!**²).

Assim, P é um polinômio não nulo, homogêneo de grau 5 em $\mathbb{C}[x_2, x_3]$, visto que A_i, B_i são homogêneos de grau i e C_1 é homogêneo de grau 1.

[Fim da prova da Afirmação 1]

Assim, segue da afirmação 1 que cada zero de P (em $\mathbb{P}^1$), determina um plano contendo a reta ℓ cuja curva residual é singular. Como tal curva é uma cônica reduzida singular, então tal curva é uma união de retas.



Afirmação 2: O polinômio P da afirmação 1 só possui raízes simples.

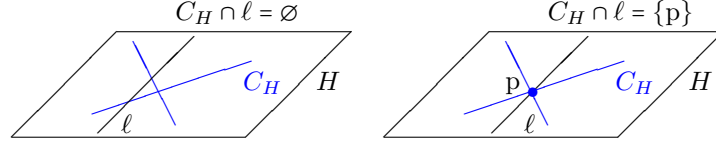
Suponha que $[0 : 1] \in \mathbb{P}^1$ é um zero de P , ou seja $x_2 \mid P$. Observe que, $[0 : 1]$ é uma raiz simples de P se, e somente se, $x_2^2 \nmid P$.

Sendo $[0 : 1]$ uma raiz de P , segue que no plano $H = \mathbf{V}(x_2)$ a curva residual C_H é singular. De fato, $C_H = \mathbf{V}(x_2, L_1L_2)$ sendo $L_1, L_2 \in \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2, x_3]$ formas lineares LI. Deste modo, sendo $\ell = \mathbf{V}(x_2, x_3) \subset S = \mathbf{V}(F)$, podemos representar F da seguinte forma:

$$F = L_1 \cdot L_2 \cdot x_3 + B \cdot x_2 \quad \text{com } L_i \in \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2, x_3] \text{ e } B \in \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]$$

²Visto que numa família de planos contendo uma reta dada, a quantidade de curvas residuais na interseção de um desses planos com a superfície S que são singulares é finita (cf. Proposição 1.4 p. 29 em [20])

Temos duas possibilidades para analisar: $C_H \cap \ell = \emptyset$ ou $C_H \cap \ell = \{p\}$.



♥ Caso 1: $C_H \cap \ell = \emptyset$.

Neste caso, $\{L_1, L_2, x_2, x_3\}$ é LI. Assim, podemos escolher $T \in \text{Aut}(\mathbb{C}^4)$ tal que $T_\bullet L_1 = x_0$, $T_\bullet L_2 = x_1$ e $T_\bullet x_i = x_i$ para $i = 2, 3$. Logo,

$$T_\bullet F = x_0 x_1 x_3 + \tilde{B} \cdot x_2 \quad \text{com} \quad \tilde{B} = T_\bullet B,$$

dado por $\tilde{B} = \gamma_0 x_0^2 + \gamma_1 x_0 x_1 + \gamma_2 x_1^2 + x_0(\gamma_3 x_2 + \gamma_4 x_3) + x_1(\gamma_5 x_2 + \gamma_6 x_3) + R(x_2, x_3)$. Portanto,

$$G = T_\bullet F = A_1 \cdot x_0^2 + B_1 \cdot x_0 x_1 + C_1 \cdot x_1^2 + A_2 \cdot x_0 + B_2 \cdot x_1 + A_3 \quad (\text{B.2})$$

com $A_1 = \gamma_0 x_2$, $B_1 = x_3 + \gamma_1 x_2$, $C_1 = \gamma_2 x_2$, $A_2 = (\gamma_3 x_2 + \gamma_4 x_3)x_2$, $B_2 = (\gamma_5 x_2 + \gamma_6 x_3)x_2$ e $A_3 = x_2 \cdot R(x_2, x_3)$. Observe que:

$$x_2^3 \mid A_1 C_1 A_3, \quad x_2^3 \mid A_1 B_2^2, \quad x_2^3 \mid A_2^2 C_1 \quad \text{e} \quad x_2^2 \mid B_1 A_2 B_2.$$

Logo,

$$P = 4A_1 C_1 A_3 - B_1^2 A_3 - A_1 B_2^2 + B_1 A_2 B_2 - A_2^2 C_1 = x_2^2 \cdot P_1 - x_2 \cdot R \cdot (x_3 + \gamma_1 x_2)^2.$$

Suponha, por absurdo que $x_2^2 \mid P$. Como $x_2 \nmid (x_3 + \gamma_1 x_2)$, segue da última igualdade acima que $x_2 \mid R(x_2, x_3)$. Logo $R(x_2, x_3) = x_2 \cdot R_1(x_2, x_3)$. De onde concluímos que $A_3 = x_2^2 R_1(x_2, x_3)$.

Entretanto a partir de (B.2) temos que:

$$\partial_0 G = 2A_1 \cdot x_0 + B_1 \cdot x_1 + A_2$$

$$\partial_1 G = 2C_1 \cdot x_1 + B_1 \cdot x_0 + B_2$$

$$\partial_2 G = \partial_2 A_1 \cdot x_0^2 + \partial_2 B_1 \cdot x_0 x_1 + \partial_2 C_1 \cdot x_1^2 + \partial_2 A_2 \cdot x_0 + \partial_2 B_2 \cdot x_1 + \partial_2 A_3$$

$$\partial_3 G = \partial_3 A_1 \cdot x_0^2 + \partial_3 B_1 \cdot x_0 x_1 + \partial_3 C_1 \cdot x_1^2 + \partial_3 A_2 \cdot x_0 + \partial_3 B_2 \cdot x_1 + \partial_3 A_3.$$

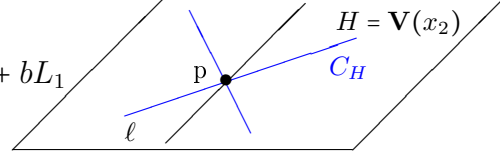
Note que x_2 divide $A_2 = (\gamma_3 x_2 + \gamma_4 x_3)x_2$, $B_2 = (\gamma_5 x_2 + \gamma_6 x_3)x_2$ e $\partial_3 A_3$ (visto que $A_3 = x_2^2 R_1(x_2, x_3)$). Logo, $[0 : 0 : 0 : 1] \in \text{Sing}(G)$, o que implica S singular (Absurdo!).³

Portanto, $[0 : 1]$ é uma raiz simples de P , se $C_H \cap \ell = \emptyset$.

³Lembre que MCP preservam pontos singulares.

♡ Caso 2: $C_H \cap \ell = \{p\}$ sendo $C_H = \mathbf{V}(x_2, L_1 \cdot L_2)$.

Neste caso, $p = \mathbf{V}(x_3, x_2, L_1)$ e $L_2 = ax_3 + bL_1$ com $a \neq 0$ e $b \neq 0$.



Assim, ao trocar L_1 por $M_1 = \frac{b}{a}L_1$ e L_2 por $M_2 = \frac{1}{a}L_2$. Tem-se que

$$C_H = \mathbf{V}(x_2, M_1 \cdot M_2), \quad p = \mathbf{V}(x_3, x_2, M_1) \quad \text{e} \quad M_2 = x_3 + M_1.$$

Sabemos que existe $T \in \text{Aut}(\mathbb{C}^4)$ tal que $T_\bullet M_1 = x_1$ e $T_\bullet x_i = x_i$ para $i = 2, 3$. Logo, $T_\bullet M_2 = x_3 + x_1$ e

$$T_\bullet F = x_1(x_3 + x_1)x_3 + \tilde{B} \cdot x_2 \quad \text{com} \quad \tilde{B} = T_\bullet B$$

dado por $\tilde{B} = \gamma_0 x_0^2 + \gamma_1 x_0 x_1 + \gamma_2 x_1^2 + x_0(\gamma_3 x_2 + \gamma_4 x_3) + x_1(\gamma_5 x_2 + \gamma_6 x_3) + R(x_2, x_3)$. Portanto,

$$G = T_\bullet F = A_1 \cdot x_0^2 + B_1 \cdot x_0 x_1 + C_1 \cdot x_1^2 + A_2 \cdot x_0 + B_2 \cdot x_1 + A_3 \quad (\text{B.3})$$

com $A_1 = \gamma_0 x_2$, $B_1 = \gamma_1 x_2$, $C_1 = x_3 + \gamma_2 x_2$, $A_2 = (\gamma_3 x_2 + \gamma_4 x_3)x_2$, $B_2 = x_3^2 + (\gamma_5 x_2 + \gamma_6 x_3)x_2$ e $A_3 = x_2 \cdot R(x_2, x_3)$. Observe que:

$$x_2^2 \mid A_1 C_1 A_3, \quad x_2^3 \mid B_1^2 A_3, \quad x_2^2 \mid B_1 A_2 B_2 \quad \text{e} \quad x_2^2 \mid A_2^2 C_1.$$

Logo,

$$P = 4A_1 C_1 A_3 - B_1^2 A_3 - A_1 B_2^2 + B_1 A_2 B_2 - A_2^2 C_1 = x_2^2 \cdot Q_1 - \gamma_0 x_2 \cdot (x_3^2 + (\gamma_5 x_2 + \gamma_6 x_3)x_2)^2.$$

Suponha, por absurdo que $x_2^2 \nmid P$. Como $x_2 \nmid B_2$, segue da última igualdade acima que $\gamma_0 = 0$. Logo $A_1 = 0$ e de (B.3) temos que:

$$\partial_0 G = B_1 \cdot x_1 + A_2$$

$$\partial_1 G = 2C_1 \cdot x_1 + B_1 \cdot x_0 + B_2$$

$$\partial_2 G = \gamma_1 x_0 x_1 + \gamma_2 x_1^2 + \partial_2 A_2 \cdot x_0 + \partial_2 B_2 \cdot x_1 + \partial_2 A_3$$

$$\partial_3 G = x_1^2 + \partial_3 A_2 \cdot x_0 + \partial_3 B_2 \cdot x_1 + \partial_3 A_3.$$

Note que x_2 divide $A_2 = (\gamma_3 x_2 + \gamma_4 x_3)x_2$, $B_1 = \gamma_1 x_2$. Além disso, A_2 , B_2 e $A_3 \in \mathbb{C}[x_2, x_3]$ são homogêneos de grau maior ou igual que 2, logo suas derivadas parciais pertencem ao anel $\mathbb{C}[x_2, x_3]$. Logo, $[1 : 0 : 0 : 0] \in \text{Sing}(G)$, o que implica S singular (Absurdo!).

Portanto, $[0 : 1]$ é uma raiz simples de P , se $C_H \cap \ell = \{p\}$.

[Fim da prova da Afirmação 2]

Para concluir, observe que a afirmação 1 nos garante que cada raiz $[\beta : -\alpha]$ de P determina exatamente um plano contendo a reta ℓ (a saber, $V(\alpha x_2 + \beta x_3)$), cuja curva residual é união de duas retas distintas. Por outro lado, a afirmação 2 estabelece que $P \in \mathbb{C}[x_2, x_3]$ só possui raízes simples. Assim, concluímos que existem exatamente cinco planos $H_1, \dots, H_5$ contendo a reta ℓ e cuja curva residual C_i (à reta ℓ no plano H_i) é uma cônica singular, isto é,

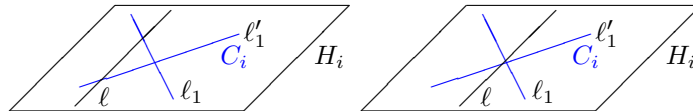
$$H_i \cap S = \ell \cup C_i \quad \text{com} \quad C_i = \ell_i \cup \ell'_i \quad (\ell_i \neq \ell'_i).$$

■

Observações: Seja $S \subset \mathbb{P}^3$ uma superfície cúbica não singular contendo a reta ℓ . Sejam $H_1, \dots, H_5$ os cinco planos contendo a reta ℓ tais que a curva residual C_i à reta ℓ no plano H_i é uma cônica singular. Assim,

$$H_i \cap S = \ell \cup C_i \quad \text{com} \quad C_i = \ell_i \cup \ell'_i \quad (\ell_i \neq \ell'_i) \quad i = 1, 2, 3, 4, 5.$$

- (i) Segue que ℓ não é componente irredutível de C_i ⁴, ou seja, $\ell \neq \ell_i$ e $\ell \neq \ell'_i$ para todo $i \in \{1, \dots, 5\}$. Assim, para cada i temos as seguintes possibilidades:



- (ii) $H_i = \langle \ell, \ell_i \rangle = \langle \ell, \ell'_i \rangle = \langle \ell_i, \ell'_i \rangle$ para todo $i = 1, 2, 3, 4, 5$.

Lema B.2. Com as notações do Teorema B.1. Verifica-se que:

1. As retas $\ell, \ell_1, \ell'_1, \ell_2, \ell'_2, \ell_3, \ell'_3, \ell_4, \ell'_4, \ell_5, \ell'_5$ são duas a duas distintas.
2. $\Phi_\ell(S) - \{\ell\} = \{\ell_1, \ell'_1, \ell_2, \ell'_2, \ell_3, \ell'_3, \ell_4, \ell'_4, \ell_5, \ell'_5\}$.

Demonstração: [1.] Basta observar que as retas ℓ, ℓ_i, ℓ'_i são duas a duas distintas e estão contidas no plano H_i , para cada i . Agora, como $H_i = \langle \ell_i, \ell'_i \rangle \neq H_j = \langle \ell_j, \ell'_j \rangle$ e $H_i \cap H_j = \ell$ se, $i \neq j$ (sendo $\ell \neq \ell_i$ e $\ell \neq \ell'_i$ para todo i), segue que $\ell_i \neq \ell_j$ e $\ell_i \neq \ell'_j$ para todo $i \neq j$.⁵

[2.] Se $m \in \Phi_\ell(S)$ e $m \neq \ell$ então existe um único plano contendo ℓ e m . Assim, $\langle m, \ell \rangle = H_i$

⁴Visto que numa família de planos contendo uma reta L , a curva residual na interseção de um desses planos com a superfície S não contém a reta L como componente irredutível. (cf. Proposição 1.6 p. 25 em [20])

⁵Suponha que $\ell_i = \ell_j$ com $i \neq j$, então $\ell_i \subset H_i \cap H_j = \ell$. Logo, $\ell_i = \ell$ (Absurdo!).

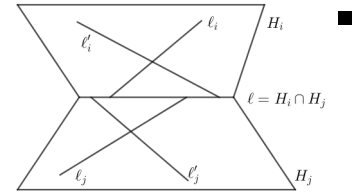
para algum i . Logo, $m \subset H_i \cap S = \ell \cup \ell_i \cup \ell'_i$, sendo $m \neq \ell$ segue (por conta da irreduzibilidade de m) que $m = \ell_i$ ou $m = \ell'_i$. ■

Lema B.3. Com as notações supracitadas. Verifica-se que $\ell_i \cap \ell_j = \ell'_i \cap \ell'_j = \ell_i \cap \ell'_j = \emptyset$ para todo $i \neq j$ com $i, j \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Demonstração: Suponha, pelo absurdo que, $i \neq j$ e $\ell_i \cap \ell_j \neq \emptyset$. Como as retas ℓ_i e ℓ_j são distintas, segue que $\ell_i \cap \ell_j = \{p\}$. Agora, como $\ell_k \subset H_k$ para todo k , segue que $\{p\} = \ell_i \cap \ell_j \subset H_i \cap H_j = \ell$. Assim, as retas ℓ , ℓ_i e ℓ_j estão contidas na superfície S e passam pelo ponto p . Neste caso, segue que as retas ℓ , ℓ_i e ℓ_j são coplanares⁶, isto é, elas estão contidas no mesmo plano. Se tal plano é H , então $H = \langle \ell, \ell_i \rangle = \langle \ell, \ell_j \rangle$. Logo, $H = H_i = H_j$ (Absurdo!).

Analogamente, prova-se que $\ell'_i \cap \ell'_j = \ell_i \cap \ell'_j = \emptyset$ se, $i \neq j$. Fica como Exercício.

Assim, em geral as retas em nos planos H_i e H_j estão distribuídas conforme a figura ao lado. Salientamos que pode acontecer que $\ell \cap \ell_i \cap \ell'_i \neq \emptyset$ e/ou $\ell \cap \ell_j \cap \ell'_j \neq \emptyset$.



Proposição B.4. Seja $S \subset \mathbb{P}^3$ é uma superfície cúbica não singular. S contém pelo menos 27 retas distintas.

Demonstração: Observe que a superfície cúbica S contém pelo menos uma reta (cf. Proposição 7.2, p. 110 em [21]). Assim, ao considerar a reta ℓ contida em S , a partir do Teorema B.1 obtemos 5 planos H_i tais que $H_i \cap S = \ell \cup \ell_i \cup \ell'_i$. Assim, segundo o Lema B.2, obtemos as 11 retas distintas (listadas na tabela a seguir).

Plano	Retas no plano e S
H_1	ℓ, ℓ_1 e ℓ'_1
H_2	ℓ, ℓ_2 e ℓ'_2
H_3	ℓ, ℓ_3 e ℓ'_3
H_4	ℓ, ℓ_4 e ℓ'_4
H_5	ℓ, ℓ_5 e ℓ'_5

O próximo passo será aplicar o Teorema B.1 para determinar os 5 planos que contêm retas ℓ_1 e ℓ'_1 , respectivamente, cuja curva residual é uma união de retas distintas (ou seja, uma cônica singular reduzida).

⁶Visto que retas concorrentes contidas numa superfície não singular são coplanares (cf. Lema 2.1, p. 83 em [22]).

Lembre que H_1 é um dos planos que contém a reta ℓ_1 . Logo o Teorema B.1 garante a existência dos 5 planos H_1, H'_1, H'_2, H'_3 e H'_4 tais que $H_1 \cap S = \ell \cup \ell_1 \cup \ell'_1$ e $H'_i \cap S = \ell \cup m_i \cup m'_i$. Assim, obtemos as 11 retas incidentes à reta ℓ_1 , listadas na tabela ao lado.

Plano	Retas no plano e S
H_1	ℓ, ℓ_1 e ℓ'_1
H'_1	m_1, ℓ_1 e m'_1
H'_2	m_2, ℓ_1 e m'_2
H'_3	m_3, ℓ_1 e m'_3
H'_4	m_4, ℓ_1 e m'_4

Novamente, segue-se do lema B.2 que as retas $\ell, \ell_1, \ell'_1, m_1, m'_1, m_2, m'_2, m_3, m'_3, m_4, m'_4$ são distintas.

Considere

$$\Sigma = \{\ell, \ell_1, \ell'_1, \ell_2, \ell'_2, \ell_3, \ell'_3, \ell_4, \ell'_4, \ell_5, \ell'_5\} \text{ e } \Sigma_1 = \{m_1, m'_1, m_2, m'_2, m_3, m'_3, m_4, m'_4\}.$$

Afirmção 1: $\Sigma \cap \Sigma_1 = \emptyset$. Logo, $\#\Phi(S) \geq 11 + 8 = 19$.

Sabemos que $\Sigma_1 \cap \{\ell, \ell_1, \ell'_1\} = \emptyset$. Assim, basta mostrar que: m_i e m'_i não pertencem ao conjunto $\{\ell_2, \ell'_2, \ell_3, \ell'_3, \ell_4, \ell'_4, \ell_5, \ell'_5\}$ para cada $i \in \{1, 2, 3, 4\}$.

Suponha, por absurdo, que existe i tal que $m_i = \ell_j$ para algum $j \in \{2, 3, 4, 5\}$. Logo,

$$\ell_j \subset H'_i = \langle m_i, \ell_1 \rangle \implies \ell_j \cap \ell_1 \neq \emptyset \xrightarrow{\text{Lema 1}} j = 1 \implies m_i = \ell_1 \quad (\text{Absurdo!})$$

De forma análoga, suponha que existe i tal que $m_i = \ell'_j$ para algum $j \in \{2, 3, 4, 5\}$. Logo,

$$\ell'_j \subset H'_i = \langle m_i, \ell_1 \rangle \implies \ell'_j \cap \ell_1 \neq \emptyset \xrightarrow{\text{Lema 1}} j = 1 \implies m_i = \ell'_1 \quad (\text{Absurdo!})$$

O mesmo raciocínio pode ser usado para concluir que $m'_i \notin \{\ell_2, \ell'_2, \ell_3, \ell'_3, \ell_4, \ell'_4, \ell_5, \ell'_5\}$ para cada $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, lembrando que $H'_i = \langle m'_i, \ell_1 \rangle$.

[Fim da prova da Afirmção 1]

Lembre que H_1 também é um dos planos que contém a reta ℓ'_1 . Assim, a partir do Teorema B.1 obtemos os 5 planos H_1, H''_1, H''_2, H''_3 e H''_4 tais que $H_1 \cap S = \ell \cup \ell_1 \cup \ell'_1$ e $H''_i \cap S = \ell \cup n_i \cup n'_i$. Assim, obtemos as 11 retas incidentes à reta ℓ'_1 , listadas na tabela ao lado.

Plano	Retas no plano e S
H_1	ℓ, ℓ_1 e ℓ'_1
H''_1	n_1, ℓ_1 e n'_1
H''_2	n_2, ℓ_1 e n'_2
H''_3	n_3, ℓ_1 e n'_3
H''_4	n_4, ℓ_1 e n'_4

Observe que as retas $\ell, \ell_1, \ell'_1, m_1, m'_1, m_2, m'_2, m_3, m'_3, m_4, m'_4$ são distintas (cf. Lema B.2).

Considere $\Sigma_2 = \{n_1, n'_1, n_2, n'_2, n_3, n'_3, n_4, n'_4\}$.

Afirmção 2: $(\Sigma \cup \Sigma_1) \cap \Sigma_2 = \emptyset$. Logo, $\#\Phi(S) \geq 11 + 8 + 8 = 27$.

De fato,

- $\Sigma \cap \Sigma_2 = \emptyset$.

Sabemos que $\Sigma_2 \cap \{\ell, \ell_1, \ell'_1\} = \emptyset$. Assim, basta mostrar que: n_i e n'_i não pertencem ao conjunto $\{\ell_2, \ell'_2, \ell_3, \ell'_3, \ell_4, \ell'_4, \ell_5, \ell'_5\}$ para cada $i \in \{1, 2, 3, 4\}$.⁷

- $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \emptyset$.

Suponha que $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 \neq \emptyset$. Logo, existem $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$ tais que $m_i = n_j$ (ou $m_i = n'_j$, $m'_i = n_j$, $m'_i = n'_j$).

Vamos analisar o caso em que $m_i = n_j$, os outros casos ficam como Exercício para o leitor interessado.

$m_i = n_j$. Neste caso, $m_i \subset H''_j = \langle n_j, \ell'_1 \rangle$ e $n_j \subset H'_i = \langle m_i, \ell_1 \rangle$. Assim,

$$m_i \cap \ell'_1 \neq \emptyset, m_i \cap \ell_1 \neq \emptyset \quad \text{e} \quad n_j \cap \ell'_1 \neq \emptyset, n_j \cap \ell_1 \neq \emptyset.$$

Nestas condições concluímos que $m_i \subset H_1$ e $n_j \subset H_1$.⁸ O que implica em $m_i, n_j \in \{\ell, \ell_1, \ell'_1\}$, visto que $m_i \cup n_j \subset H_1 \cap S = \ell \cup \ell_1 \cup \ell'_1$ (Absurdo!).

[Fim da prova da Afirmção 2]

Assim, $\Sigma \cup \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \subset \Phi(S)$ com $\#(\Sigma \cup \Sigma_1 \cup \Sigma_2) = 27$. Portanto, S contém pelo menos 27 retas distintas. ■

Teorema B.5. *Seja $S \subset \mathbb{P}^3$ uma superfície cúbica não singular. Então S contém exatamente 27 retas.*

Demonstração. Segue do Lema B.2 aplicado às retas ℓ , ℓ_1 e ℓ'_1 , e das tabelas na demonstração da Proposição B.4 que:

$$\Phi_\ell(S) = \{\ell, \ell_1, \ell'_1, \ell_2, \ell'_2, \ell_3, \ell'_3, \ell_4, \ell'_4, \ell_5, \ell'_5\},$$

$$\Phi_{\ell_1}(S) = \{\ell, \ell_1, \ell'_1, m_2, m'_2, m_3, m'_3, m_4, m'_4, m_5, m'_5\},$$

$$\Phi_{\ell'_1}(S) = \{\ell, \ell_1, \ell'_1, n_2, n'_2, n_3, n'_3, n_4, n'_4, n_5, n'_5\}.$$

⁷Suponha que existe i tal que $n_i = \ell_j$ para algum $j \in \{2, 3, 4, 5\}$. Logo,

$$\ell_j \subset H''_i = \langle n_i, \ell'_1 \rangle \implies \ell_j \cap \ell'_1 \neq \emptyset \xrightarrow{\text{Lema 1}} j = 1 \implies n_i = \ell'_1 \quad (\text{Absurdo!})$$

De forma análoga, suponha que existe i tal que $n_i = \ell'_j$ para algum $j \in \{2, 3, 4, 5\}$. Logo, $\ell'_j \subset H''_i = \langle n_i, \ell'_1 \rangle \implies \ell'_j \cap \ell'_1 \neq \emptyset \xrightarrow{\text{Lema 1}} j = 1 \implies n_i = \ell'_1 \quad (\text{Absurdo!})$

O mesmo raciocínio pode ser usado para concluir que $n'_i \notin \{\ell_2, \ell'_2, \ell_3, \ell'_3, \ell_4, \ell'_4, \ell_5, \ell'_5\}$ para cada $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, lembrando que $H''_i = \langle n'_i, \ell'_1 \rangle$.

⁸Note que a hipótese $m_i \cap \ell'_1 \neq \emptyset$, $m_i \cap \ell_1 \neq \emptyset$ implica em $m_i \cap \ell_1 = \{p_1\}$ e $m_i \cap \ell'_1 = \{p_2\}$. Se $p_1 \neq p_2$ então a reta m_i tem dois pontos distintos em comum com o plano $H_1 = \langle \ell_1, \ell'_1 \rangle$, logo $m_i \subset H_1$. Caso, contrário, ou seja, se $p_1 = p_2$ então $m_i \cap \ell_1 \cap \ell'_1 = \{p_1\}$ então essas 3 retas são coplanares(cf. Lema 2.1, p. 83 em [22]), logo $m_i \subset H_1$.

Por outro lado, temos que

$$\Phi(S) = \Phi_\ell(S) \cup \Phi_{\ell_1}(S) \cup \Phi_{\ell'_1}(S).^9$$

Assim,

$$\Phi(S) = \Sigma \cup \Sigma_1 \cup \Sigma_2,$$

visto que $\Sigma = \Phi_\ell(S)$, $\Sigma_1 = \Phi_{\ell_1}(S) - \{\ell, \ell_1, \ell'_1\}$ e $\Sigma_2 = \Phi_{\ell'_1}(S) - \{\ell, \ell_1, \ell'_1\}$. Portanto, $\#\Phi(S) = \#(\Sigma \cup \Sigma_1 \cup \Sigma_2) = 27$. ■

Uma das questões que vamos abordar é a seguinte:

Qual é a quantidade máxima de retas duas a duas disjuntas que uma superfície cúbica não singular em $\mathbb{P}^3$ contém?

Denotemos tal número por r_3 .

Uma cota inferior para r_3 . Ao fixar a reta ℓ na superfície cúbica não singular S , o Teorema B.1 nos garante que existem exatamente 5 planos $H_1, \dots, H_5$ contendo ℓ tais que $H_i \cap S = \ell \cup C_i$ com $C_i = \ell_i \cup \ell'_i$ para $i = 1, \dots, 5$. Além disso, $\ell_i \cap \ell_j = \ell'_i \cap \ell'_j = \ell_i \cap \ell'_j = \emptyset$ para todo $i \neq j$ com $i, j \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ (cf Lema B.3). Assim, as retas $\ell_1, \dots, \ell_5$ são duas a duas disjuntas.¹⁰ Portanto, $r_3 \geq 5$.

Determinação das retas em superfícies cúbicas não singulares a partir de duas retas disjuntas

Denotamos o conjunto $\Phi(S)$ como o conjunto de todas as retas contidas na superfície $S \subset \mathbb{P}^3$.

Para cada reta l em $\mathbb{P}^3$,

$$\Phi_l(S) = \{m \in \Phi(S) \mid l \cap m \neq \emptyset \text{ e } m \neq l\}.$$

Em reiteradas oportunidades iremos apelar para o seguinte resultado.

Lema B.6. Seja $S \subset \mathbb{P}^3$ é uma superfície cúbica não singular. Considere $\ell, m \in \Phi(S)$ distintas e concorrentes. Se $l \in \Phi_\ell(S) \cap \Phi_m(S)$ então $l \subset \langle \ell, m \rangle$.

Demonstração. Como ℓ e m são retas concorrentes, segue que $\ell \cap m = \{p\}$ e, sendo retas distintas existe um único plano que as contém, a saber, $\langle \ell, m \rangle$.

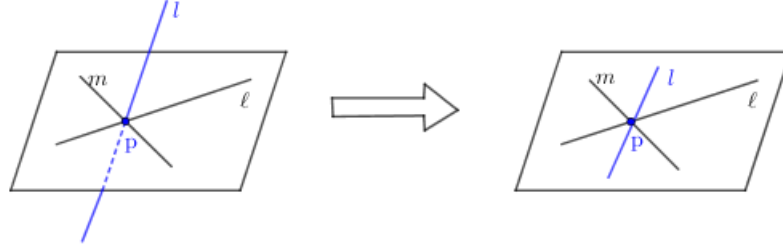
⁹Visto que se uma superfície não singular de grau $n \geq 2$ contém retas concorrentes, então toda reta na superfície S deve interceptar pelo menos uma dessas retas (cf. Lema 2.2, p. 83 em [22]).

¹⁰Como também as retas $\ell'_1, \dots, \ell'_5$ são duas a duas disjuntas.

Observe que, temos duas possibilidades: $p \in l$ ou $p \notin l$.

- $p \in l \implies l, \ell$ e m são concorrentes.

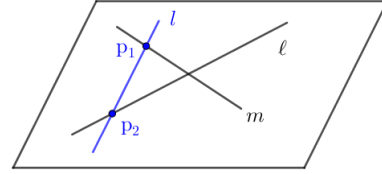
Neste caso, como as retas l, ℓ e $m \in \Phi(S)$, segue que as mesmas são coplanares (cf. Lema 2.1, p. 83 em [22]). Assim, $l \subset \langle \ell, m \rangle$ (visto que $\langle \ell, m \rangle$ é o único plano contendo as retas ℓ e m).



- $p \notin l \implies l \cap \ell = \{p_1\}$ e $l \cap m = \{p_2\}$ com $p_1 \neq p_2$, visto que $l \in \Phi_\ell(S) \cap \Phi_m(S)$.

Agora, como as retas ℓ e m estão contidas no plano $\langle \ell, m \rangle$, segue que

$$p_1, p_2 \in l \cap \langle \ell, m \rangle \xRightarrow{p_1 \neq p_2} l \subset \langle \ell, m \rangle.$$



■

Proposição B.7. Se $S \subset \mathbb{P}^3$ é uma superfície cúbica não singular. Então

1. $\#\Phi_\ell(S) = 10$ para toda reta $\ell \in \Phi(S)$.
2. $\#(\Phi_\ell(S) \cap \Phi_m(S)) = \begin{cases} 1 & \ell \cap m \neq \emptyset \\ 5 & \ell \cap m = \emptyset \end{cases}$, se $\ell, m \in \Phi(S)$ são distintas.

Demonstração. [1.] Segue do Lema B.2 que

$$\Phi_\ell(S) = \{\ell_1, \ell'_1, \ell_2, \ell'_2, \ell_3, \ell'_3, \ell_4, \ell'_4, \ell_5, \ell'_5\} \quad (\text{B.4})$$

e que essas retas são duas a duas distintas. Portanto, $\#\Phi_\ell(S) = 10 \quad \forall \ell \in \Phi(S)$.

[2.] Sendo ℓ e m retas distintas temos duas possibilidades: $\ell \cap m = \{p\}$ ou $\ell \cap m = \emptyset$.

• Se $\ell \cap m = \{p\}$ e $l \in \Phi_\ell(S) \cap \Phi_m(S)$, segue do Lema B.6 que $l \subset \langle \ell, m \rangle$. Assim, se $H = \langle \ell, m \rangle$ tem-se que H é um dos planos que contém a reta ℓ e m é uma das componentes irredutíveis da curva residual C_H à reta ℓ no plano H , ou seja,

$$H \cap S = \ell \cup C_H \quad \text{com} \quad C_H = m \cup n.$$

Agora, como a reta $l \subset H \cap S$ e $l \neq \ell$, segue que l também é componente irredutível da curva residual $C_H = m \cup n$. Entretanto, $l \neq m$. Logo $l = n$. Portanto,

$$\Phi_\ell(S) \cap \Phi_m(S) = \{n\} \text{ e } \#(\Phi_\ell(S) \cap \Phi_m(S)) = 1.$$

- Se $\ell \cap m = \emptyset$ então considere $H_i = \langle \ell_i, \ell'_i \rangle$ com $i = 1, 2, 3, 4, 5$ os cinco planos contendo a reta ℓ tais que $H_i \cap S = \ell \cup C_i$ com $C_i = \ell_i \cup \ell'_i$.

Daí temos que

$$\Phi(S) = \Phi_\ell(S) \cup \Phi_{\ell_i}(S) \cup \Phi_{\ell'_i}(S) \quad i = 1, 2, 3, 4, 5.^{11}$$

Assim, $m \cap \ell_i \neq \emptyset$ ou $m \cap \ell'_i \neq \emptyset$, visto que $\ell \cap m = \emptyset$. Observe que, só uma dessas possibilidades ($m \cap \ell_i \neq \emptyset$ ou $m \cap \ell'_i \neq \emptyset$) acontece¹² para cada i . Assim, $\ell_i \in \Phi_\ell(S) \cap \Phi_m(S)$ ou $\ell'_i \in \Phi_\ell(S) \cap \Phi_m(S)$ para cada $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Portanto, $\#(\Phi_\ell(S) \cap \Phi_m(S)) \geq 5$.

Agora, considere $l \in \Phi_\ell(S) \cap \Phi_m(S)$. Como $l \in \Phi_\ell(S)$ e $l \neq \ell$ então $\pi = \langle l, \ell \rangle$ é um plano contendo a reta ℓ tal que $l \subset \pi \cap S = \ell \cup C_\pi$ sendo l componente irredutível da cônica residual C_π . Assim, π é um dos planos que contém a reta ℓ tal que a cônica residual é singular. Assim, $\pi = \langle l, \ell \rangle = H_i = \langle \ell_i, \ell'_i \rangle$ para algum $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$. De onde concluimos que $l = \ell_i$ ou $l = \ell'_i$.¹³ Portanto, $\#(\Phi_\ell(S) \cap \Phi_m(S)) = 5$. ■

A seguir considere as retas disjuntas $L_1, L_2 \in \Phi(S)$. Segue da Proposição B.7 que $\#(\Phi_{L_1}(S) \cap \Phi_{L_2}(S)) = 5$ e $\#(\Phi_{L_i}(S)) = 10$ para $i = 1, 2$. Assim, vamos assumir que

$$\begin{aligned} \Phi_{L_1}(S) \cap \Phi_{L_2}(S) &= \{c_1, c_2, c_3, c_4, c_5\}, \\ \Phi_{L_1}(S) &= \{a_1, c_1, a_2, c_2, a_3, c_3, a_4, c_4, a_5, c_5\} \text{ e } H_i = \langle a_i, c_i \rangle, \\ \Phi_{L_2}(S) &= \{b_1, c_1, b_2, c_2, b_3, c_3, b_4, c_4, b_5, c_5\} \text{ e } \tilde{H}_i = \langle b_i, c_i \rangle, \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

para $i = 1, 2, 3, 4, 5$.

Proposição B.8. Com as notações em (B.5). Se $i, j \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ tem-se que

1. $a_i \cap a_j = \emptyset$, $c_i \cap c_j = \emptyset$ e $a_i \cap c_j = \emptyset$ para todo $i \neq j$.
2. $b_i \cap b_j = \emptyset$ e $b_i \cap c_j = \emptyset$ para todo $i \neq j$.
3. $L_1 \cap b_i = \emptyset$ e $L_2 \cap a_i = \emptyset$ para todo i .

¹¹(cf. Lema 2.2, p. 83 em [22]).

¹²Suponha que $m \cap \ell_i \neq \emptyset$ e $m \cap \ell'_i \neq \emptyset$ então $m \subset \langle \ell_i, \ell'_i \rangle = \langle \ell, \ell_i \rangle = H_i$, logo ℓ e m seriam coplanares. O que implica em $\ell \cap m \neq \emptyset$ (Absurdo!).

¹³Visto que, $l \subset \langle l, \ell \rangle = H_i$. Logo, $l \subset H_i \cap S = \ell \cup \ell_i \cup \ell'_i$, $l \neq \ell$ e l é irredutível.

Demonstração. Lembre que se $\ell \in \Phi(S)$ então

$$\Phi_\ell(S) = \{\ell_1, \ell'_1, \ell_2, \ell'_2, \ell_3, \ell'_3, \ell_4, \ell'_4, \ell_5, \ell'_5\} \quad \text{com } H_i = \langle \ell_i, \ell'_i \rangle \in \Omega(\ell)$$

satisfazendo $H_i \cap S = \ell \cup \ell_i \cup \ell'_i$ e $\ell_i \cap \ell_j = \ell'_i \cap \ell'_j = \ell_i \cap \ell'_j = \emptyset$ para todo $i \neq j$ (cf Lema B.3).

Assim, os itens 1. e 2. seguem ao considerar $\ell = L_i$ para $i = 1, 2$.

Para a afirmação no item 3., suponhamos que $L_1 \cap b_i \neq \emptyset$ para algum $i \in \{1, 2, \dots, 5\}$. Tendo em consideração que $c_j \in \Phi_{L_1}(S) \cap \Phi_{L_2}(S)$ para todo j , segue que $L_1 \cap b_i \neq \emptyset$ e $L_1 \cap c_i \neq \emptyset$. Assim, $L_1 \subset \langle b_i, c_i \rangle = \tilde{H}_i$. Entretanto, $c_i \in \Phi_{L_2}(S)$ e $\tilde{H}_i = \langle L_2, c_i \rangle$. De onde concluímos que $L_1 \subset \tilde{H}_i = \langle L_2, c_i \rangle$. Assim, L_1 e L_2 são coplanares, logo concorrentes (Absurdo!). Analogamente verifica-se que $L_2 \cap a_i = \emptyset$, para todo i . ■

Corolário B.9. Com as notações acima. Considere as retas

$$\begin{aligned} a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 &= L_2, \\ b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6 &= L_1. \end{aligned}$$

Verifica-se que:

1. $\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\} \subset \Phi(S)$ são duas a duas disjuntas.
2. $\{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6\} \subset \Phi(S)$ são duas a duas disjuntas.
3. $r_3 \geq 6$
4. $a_i \cap b_i = \emptyset$ para todo $i \in \{1, 2, \dots, 6\}$.
5. $a_i \cap b_j \neq \emptyset$ para todo $i \neq j$, $i, j \in \{1, 2, \dots, 6\}$.

Demonstração. As afirmações 1. e 2. seguem da Proposição 2.

[3.] Sendo r_3 a quantidade máxima de retas em S que são duas a duas disjuntas, segue de 1. (com também de 2.) que $r_3 \geq 6$.

[4.] Observe que o item 4. é satisfeito para $i = 6$ (visto que L_1 e L_2 são disjuntas). Agora de (B.5) temos que

$$\tilde{H}_i = \langle b_i, c_i \rangle \implies b_i \cap c_i \neq \emptyset \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, 5\}.$$

Suponha que $a_i \cap b_i \neq \emptyset$ para algum $i \in \{1, 2, \dots, 5\}$. Neste caso, sendo a_i e c_i retas distintas e concorrentes (pois são coplanares), segue do Lema B.6 que $b_i \subset H_i = \langle a_i, c_i \rangle$. Entretanto, $H_i = \langle a_i, c_i \rangle = \langle L_1, a_i \rangle \supset L_1$. Portanto, L_1 e b_i são coplanares, o que implica em $L_1 \cap b_i \neq \emptyset$ (Absurdo! segundo o item 3. da proposição B.8).

[5.] Observe que se $i = 6$ então $a_6 = L_2$ e $j \neq 6$. Neste caso, $b_j \in \Phi_{L_2}(S)$ para todo $j \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, logo $a_6 \cap b_j \neq \emptyset$ para todo $j \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Analogamente, se $j = 6$ prova-se que $a_i \cap b_6 \neq \emptyset$ para todo $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Assim, a seguir vamos considerar $i \neq j$ com $i, j \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Segue de (B.5) que $H_i \cap S = L_1 \cup a_i \cup c_i$ para cada $i \in \{1, \dots, 5\}$. Por outro lado, temos que

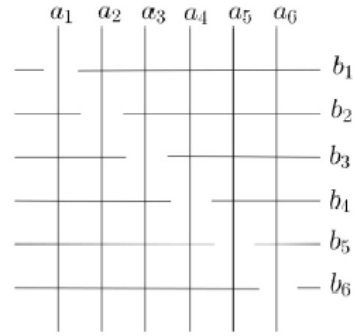
$$\Phi(S) = \Phi_{L_1}(S) \cup \Phi_{a_i}(S) \cup \Phi_{c_i}(S) \quad \text{para cada } i \in \{1, \dots, 5\}^{14}$$

Ou seja, a reta b_j deve encontrar pelo menos uma dentre as retas L_1, a_i, c_i . Como $b_j \cap L_1 = \emptyset$ e $b_j \cap c_i = \emptyset$ se $i \neq j$, segue que $a_i \cap b_j \neq \emptyset$ se $i \neq j$. ■

Double - six

Um duplo-seis é um par de subconjuntos $A = \{a_1, \dots, a_6\}$ e $B = \{b_1, \dots, b_6\}$ de $\Phi(S)$ formados por 6 retas duas a duas disjuntas, satisfazendo as relações de incidência:

$$\begin{aligned} a_i \cap b_i &= \emptyset \quad \text{para todo } i \in \{1, 2, \dots, 6\} \text{ e} \\ a_i \cap b_j &\neq \emptyset \quad \text{para todo } i \neq j, i, j \in \{1, 2, \dots, 6\}. \end{aligned}$$



Exemplo 1: Vamos encontrar um duplo-seis na cúbica de Fermat

$$\mathcal{F} = \mathbf{V}(x_0^3 + x_1^3 + x_2^3 + x_3^3) \subset \mathbb{P}^3.$$

As 27 retas na superfície são dadas por:

$$\begin{aligned} \ell_{i,j} &= \mathbf{V}(x_0 + \xi^i x_1, x_2 + \xi^j x_3) \subset S \quad \forall i, j \in \{1, 2, 3\} \quad (9 \text{ retas ao todo}), \\ m_{i,j} &= \mathbf{V}(x_0 + \xi^i x_2, x_1 + \xi^j x_3) \subset S \quad \forall i, j \in \{1, 2, 3\} \quad (9 \text{ retas ao todo}), \\ n_{i,j} &= \mathbf{V}(x_0 + \xi^i x_3, x_1 + \xi^j x_2) \subset S \quad \forall i, j \in \{1, 2, 3\} \quad (9 \text{ retas ao todo}). \end{aligned} \tag{B.6}$$

sendo $\xi \in \mathbb{C}$ uma raiz primitiva cúbica da unidade (ou seja, $\xi^3 = 1$ e $\xi \neq 1$).

Observe que as retas $\ell_{3,3}$ e $\ell_{2,2}$ são disjuntas.¹⁵ A seguir vamos descrever os conjuntos $\Phi_\ell(\mathcal{F})$ para $\ell = \ell_{i,i}$ se, $i = 2, 3$.

¹⁴(cf. Lema 2.2, p. 83 em [22]).

¹⁵Considere $a = [a_0 : a_1 : a_2 : a_3] \in \mathbb{P}^3$. Note que $a \in \ell_{3,3} \cap \ell_{2,2}$ se, e só se, $a_0 + a_1 = 0, a_2 + a_3 = 0, a_0 + \xi^2 a_1 = 0$ e $a_2 + \xi^2 a_3 = 0$. O que implica em $a_1(1 - \xi^2) = 0$ e $a_3(1 - \xi^2) = 0$. Como $\xi \neq 1$ e $\xi^3 = 1$, segue que $a_i = 0$ para todo i . Portanto, $\ell_{3,3} \cap \ell_{2,2} = \emptyset$.

No que segue do exemplo, vamos escolher $\xi = -\frac{1 + \sqrt{3}i}{2}$.

- Determinação de $\Phi_\ell(\mathcal{F})$ para $\ell = \ell_{3,3} = \mathbf{V}(x_0 + x_1, x_2 + x_3)$.

Os planos que contêm a reta $\ell_{3,3}$ são

$$H_\infty = \mathbf{V}(x_0 + x_1) \text{ e } H_\lambda = \mathbf{V}(x_2 + x_3 - \lambda(x_0 + x_1)) \text{ com } \lambda \in \mathbb{C}.$$

Temos que os cinco planos onde a cônica residual à reta $\ell_{3,3}$ é união de retas (ou seja, singular) são:

$$H_\infty = \mathbf{V}(x_0 + x_1) \text{ e } H_\lambda = \mathbf{V}(x_2 + x_3 - \lambda(x_0 + x_1)) \text{ com } \lambda \in \{0, -1, -\xi, -\xi^2\}$$

Verifica-se que as retas em cada plano são dadas por:

Plano H_λ	retas em $H_\lambda \cap \mathcal{F}$
$\lambda = \infty$	$\ell_{3,3}, \ell_{3,2}, \ell_{3,1}$
$\lambda = 0$	$\ell_{3,3}, \ell_{2,3}, \ell_{1,3}$
$\lambda = -1$	$\ell_{3,3}, m_{3,3}, n_{3,3}$
$\lambda = -\xi$	$\ell_{3,3}, m_{2,2}, n_{2,2}$
$\lambda = -\xi^2$	$\ell_{3,3}, m_{1,1}, n_{1,1}$

$$\xRightarrow{\ell=\ell_{3,3}} \Phi_\ell(\mathcal{F}) = \left\{ \ell_{3,2}, \ell_{3,1}, \ell_{2,3}, \ell_{1,3}, m_{i,i}, n_{i,i} \right\}_{i=1}^3$$

- Determinação de $\Phi_\ell(\mathcal{F})$ para $\ell = \ell_{2,2} = \mathbf{V}(x_0 + \xi^2 x_1, x_2 + \xi^2 x_3)$.

Os planos que contêm a reta $\ell_{2,2}$ são

$$H'_\infty = \mathbf{V}(x_0 + \xi^2 x_1) \text{ e } H'_\lambda = \mathbf{V}(x_2 + \xi^2 x_3 - \lambda(x_0 + \xi^2 x_1)) \text{ com } \lambda \in \mathbb{C}.$$

Neste caso, os cinco planos onde a cônica residual à reta $\ell_{2,2}$ é união de retas são dados por:

$$H'_\infty = \mathbf{V}(x_0 + \xi^2 x_1) \text{ e } H'_\lambda = \mathbf{V}(x_2 + \xi^2 x_3 - \lambda(x_0 + \xi^2 x_1)) \text{ com } \lambda \in \{0, -1, -\xi, -\xi^2\}$$

Verifica-se, as retas em cada plano são dadas por:

Plano H'_λ	retas em $H'_\lambda \cap \mathcal{F}$
$\lambda = \infty$	$\ell_{2,2}, \ell_{2,3}, \ell_{2,1}$
$\lambda = 0$	$\ell_{2,2}, \ell_{3,2}, \ell_{1,2}$
$\lambda = -1$	$\ell_{2,2}, m_{3,3}, n_{2,1}$
$\lambda = -\xi$	$\ell_{2,2}, m_{2,2}, n_{1,3}$
$\lambda = -\xi^2$	$\ell_{2,2}, m_{1,1}, n_{3,2}$

$$\xRightarrow{\ell=\ell_{2,2}} \Phi_\ell(\mathcal{F}) = \left\{ \ell_{2,3}, \ell_{2,1}, \ell_{3,2}, \ell_{1,2}, n_{2,1}, n_{1,3}, n_{3,2}, m_{i,i} \right\}_{i=1}^3$$

- Retas que encontram $\ell_{3,3}$ e $\ell_{2,2}$ são dadas por $\{\ell_{3,2}, \ell_{2,3}, m_{1,1}, m_{2,2}, m_{3,3}\}$.
- Duplo-seis

O Corolário B.9 nos garante que as retas

$$\begin{aligned} a_1 = \ell_{2,1}, \quad a_2 = \ell_{1,2}, \quad a_3 = n_{2,1}, \quad a_4 = n_{1,3}, \quad a_5 = n_{3,2}, \quad a_6 = \ell_{3,3}, \\ b_1 = \ell_{3,1}, \quad b_2 = \ell_{1,3}, \quad b_3 = n_{1,1}, \quad b_4 = n_{2,2}, \quad b_5 = n_{3,3}, \quad b_6 = \ell_{2,2}. \end{aligned}$$

formam um Double-six.

_____ Retas residuais às cônicas $a_i \cup b_j$ _____

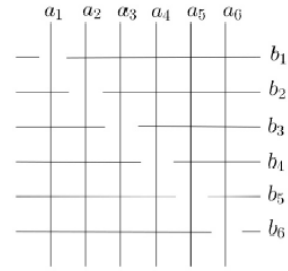
Recapitulando. A partir de duas retas disjuntas (quaisquer) numa superfície cúbica não singular S somos capazes de determinar um duplo-seis (como acabamos de fazer no exemplo 1). Ou seja, temos retas em S

$$\begin{aligned} a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, \\ b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, \end{aligned}$$

tais que: $a_i \cap a_j = \emptyset$, $b_i \cap b_j = \emptyset$ para todo $i \neq j$. Além disso,

$$a_i \cap b_i = \emptyset \text{ para todo } i \text{ e}$$

$$a_i \cap b_j \neq \emptyset \text{ para todo } i \neq j.$$



Como as retas a_i e b_j são concorrentes para todo $i \neq j$, podemos considerar o plano $H_{ij} = \langle a_i, b_j \rangle$. Neste caso,

$$H_{ij} \cap S = a_i \cup b_j \cup \ell_{ij}$$

sendo a curva residual à reta a_i no plano H_{ij} dada por $C_{ij} = b_j \cup \ell_{ij}$.

A seguir considere

$$\Delta = \{\ell_{ij} \mid i \neq j, 1 \leq i, j \leq 6\}. \quad (\text{B.7})$$

Assim, $H_{ij} = \langle a_i, b_j \rangle = \langle a_i, \ell_{ij} \rangle = \langle b_j, \ell_{ij} \rangle$.

Proposição B.10. Com as notações acima. Verifica-se que:

1. $\Delta \cap \{a_1, \dots, a_6, b_1, \dots, b_6\} = \emptyset$.
2. $\ell_{ij} \cap a_k \neq \emptyset$ se, e somente se, $k \in \{i, j\}$.
3. $\ell_{ij} \cap b_k \neq \emptyset$ se, e somente se, $k \in \{i, j\}$.
4. $\ell_{ij} = \ell_{ji}$ para todo $i \neq j$.
5. $\ell_{ij} = \ell_{rs}$ se, e somente se, $i = r$ e $j = s$, sendo $i < j$ e $r < s$.

6. Se $\ell_{ij} \neq \ell_{rs}$ então $\ell_{ij} \cap \ell_{rs} \neq \emptyset$ se, e somente se, $\{i, j\} \cap \{r, s\} = \emptyset$.

Demonstração. [1.] Considere $\ell_{ij} \in \Delta$. Assim, $H_{ij} \cap S = a_i \cup b_j \cup \ell_{ij}$. Logo, $\ell_{ij} \neq a_i$ e $\ell_{ij} \neq b_j$. Suponha, por absurdo que $\ell_{ij} = a_k$ sendo $k \neq i$. Neste caso,

$$a_k \subset H_{ij} = \langle \ell_{ij}, a_i \rangle \implies a_k \cap a_i \neq \emptyset \text{ com } k \neq i \quad (\text{Absurdo!})$$

Analogamente, ao supormos que $\ell_{ij} = b_k$ sendo $k \neq j$, chegamos no absurdo $b_k \cap b_j \neq \emptyset$ com $k \neq j$.

[2. $\implies$] Considere a_k tal que $a_k \cap \ell_{ij} \neq \emptyset$. Suponha, por absurdo, que $k \notin \{i, j\}$. Neste caso, $a_k \cap b_j \neq \emptyset$ pois $k \neq j$ e $a_k \cap \ell_{ij} \neq \emptyset$. Assim, segue do Lema B.6 que

$$a_k \subset H_{ij} = \langle \ell_{ij}, b_j \rangle = \langle \ell_{ij}, a_i \rangle \implies a_k \cap a_i \neq \emptyset \text{ com } k \neq i \quad (\text{Absurdo!})$$

[2. $\Leftarrow$] Se $k = i$ então $a_k \cap \ell_{ij} \neq \emptyset$, visto que $a_i \subset H_{ij} \supset \ell_{ij}$. No caso, $k = j$, lembre que a reta a_j encontra alguma das retas do conjunto $\{a_i, b_j, \ell_{ij}\}$ (cf. Lema 2,1, p. 83 em [22]). Entretanto, $a_j \cap a_i = \emptyset$ para $j \neq i$ e $a_j \cap b_j = \emptyset$. Portanto, $a_j \cap \ell_{ij} \neq \emptyset$.

[3.] Exercício.

[4.] Observe que $H_{ji} \cap S = a_j \cup b_i \cup \ell_{ji}$. De fato, $H_{ji} = \langle a_j, b_i \rangle = \langle a_j, \ell_{ji} \rangle = \langle b_i, \ell_{ji} \rangle$. Além disso, segue dos itens 2. e 3. que $\ell_{ij} \cap a_j \neq \emptyset$ e $\ell_{ij} \cap b_i \neq \emptyset$. Assim, o Lema B.6 nos garante que $\ell_{ij} \subset H_{ji}$. Agora, como ℓ_{ij} é irredutível, e $\ell_{ij} \subset H_{ji} \cap S = a_j \cup b_i \cup \ell_{ji}$ com $\ell_{ij} \neq a_j$ e $\ell_{ij} \neq b_i$ por conta do item 1., segue que $\ell_{ij} = \ell_{ji}$.

[5. $\implies$] Considere $i < j$ e $r < s$ tais que $\ell_{ij} = \ell_{rs}$. Assim,

$$\ell_{rs} \cap a_i \neq \emptyset \text{ e } \ell_{rs} \cap b_j \neq \emptyset \implies i \in \{r, s\} \text{ e } j \in \{r, s\} \implies i = r \text{ e } j = s.$$

[6. $\implies$] Considere $\ell_{ij} \neq \ell_{rs}$.

Suponha, pelo absurdo, que $\{i, j\} \cap \{r, s\} \neq \emptyset$. Desse modo temos as seguintes possibilidades:

- $i \in \{r, s\}$ e $j \in \{r, s\}$. Logo, $\ell_{ij} = \ell_{rs}$ (Absurdo!).
- $i \in \{r, s\}$ ou $j \notin \{r, s\}$. Neste caso, $\ell_{r,s} \cap a_i \neq \emptyset$ e $\ell_{r,s} \cap b_j = \emptyset$. De onde concluímos que $\ell_{ij} \cap \ell_{rs} = \emptyset$ (Absurdo!).¹⁶
- $i \notin \{r, s\}$ ou $j \in \{r, s\}$. Neste caso, $\ell_{r,s} \cap a_i = \emptyset$ e $\ell_{r,s} \cap b_j \neq \emptyset$. De onde concluímos que $\ell_{ij} \cap \ell_{rs} = \emptyset$ (Absurdo!).

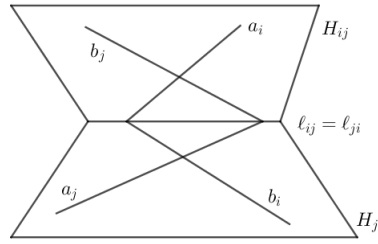
[6. $\Leftarrow$] Suponha, pelo absurdo, que $\ell_{ij} \cap \ell_{rs} = \emptyset$. Observe que a reta ℓ_{rs} encontra pelo menos uma das retas do conjunto $\{a_i, b_j, \ell_{ij}\}$ (cf. Lema 2,1, p. 83 em [22]). Como

¹⁶Se $\ell_{ij} \cap \ell_{rs} \neq \emptyset$, tendo em consideração que $\ell_{r,s} \cap a_i \neq \emptyset$, segue do Lema 1 que $\ell_{rs} \subset H_{ij} = \langle a_i, \ell_{ij} \rangle = \langle a_i, b_j \rangle$, o que implica em $\ell_{r,s} \cap b_j \neq \emptyset$.

estamos supondo que $\ell_{ij} \cap \ell_{rs} = \emptyset$, então necessariamente $\ell_{rs} \cap a_i \neq \emptyset$ ou $\ell_{rs} \cap b_j \neq \emptyset$. Logo, $i \in \{r, s\}$ ou $j \in \{r, s\}$. De onde concluímos que $\{i, j\} \cap \{r, s\} \neq \emptyset$ (Absurdo!).

■

Observação: Para todo $i, j \in \{1, \dots, 6\}$ tais que $i \neq j$ tem-se que os planos $H_{ij} = \langle a_i, b_j \rangle$ e $H_{ji} = \langle a_j, b_i \rangle$ são distintos (visto que $a_i \cap a_j = \emptyset$ se $i \neq j$) e sua reta de interseção é $\ell_{ij} = \ell_{ji}$.



Corolário B.11. Com as notações acima. Verifica-se que $\#\Delta = 15$ e

$$\Phi(S) = \{a_1, \dots, a_6\} \cup \{b_1, \dots, b_6\} \cup \Delta.$$

Demonstração. Segue do item 4. na Proposição B.10 que $\Delta = \{\ell_{ij} \mid 1 \leq i < j \leq 6\}$. Além disso, o item 5. na Proposição B.10 nos garante que cada par (i, j) com $i < j$, $i, j \in \{1, \dots, 6\}$ determina uma única reta $\ell_{ij} \in \Delta$. Portanto, $\#\Delta = 15$.

Sejam $\mathcal{A} = \{a_1, \dots, a_6\}$ e $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_6\}$. Sabemos que $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \emptyset$ e $\#\mathcal{A} = 6 = \#\mathcal{B}$. Assim, o item 1. na Proposição B.10 nos garante que $\mathcal{A} \cup \mathcal{B} \cup \Delta$ é um subconjunto de $\Phi(S)$ constituído de $6 + 6 + 15 = 27$ retas (distintas). Por outro lado, o Teorema B.5 nos garante que $\#(\Phi(S)) = 27$. Portanto, $\Phi(S) = \mathcal{A} \cup \mathcal{B} \cup \Delta$.

■

Agora vamos estudar a incidência entre as 15 retas na família Δ da superfície cúbica não singular S em $\mathbb{P}^3$.

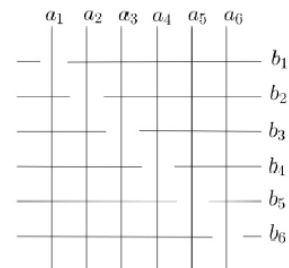
Lembremos que. A partir de duas retas disjuntas (quaisquer) numa superfície cúbica não singular S somos capazes de determinar um duplo-seis. Ou seja, obtivemos as famílias de retas $\mathcal{A} = \{a_1, \dots, a_6\}$ e $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_6\}$ em S .

$$\begin{aligned} &a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, \\ &b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, \end{aligned}$$

tais que: $a_i \cap a_j = \emptyset$, $b_i \cap b_j = \emptyset$ para todo $i \neq j$. Além disso,

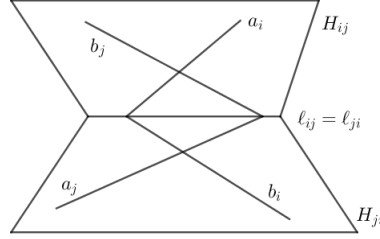
$a_i \cap b_i = \emptyset$ para todo i e

$a_i \cap b_j \neq \emptyset$ para todo $i \neq j$.



Sendo as retas a_i e b_j concorrentes para todo $i \neq j$, obtemos os planos $H_{ij} = \langle a_i, b_j \rangle$ tais que $H_{ij} \cap S = a_i \cup b_j \cup \ell_{ij}$, sendo a curva residual à reta a_i no plano H_{ij} dada por $C_{ij} = b_j \cup \ell_{ij}$.

Além disso, para todo $i, j \in \{1, \dots, 6\}$ tais que $i \neq j$, os planos $H_{ij} = \langle a_i, b_j \rangle$ e $H_{ji} = \langle a_j, b_i \rangle$ são distintos e sua reta de interseção é $\ell_{ij} = \ell_{ji}$.



De fato, no Corolário B.11 provamos que

$$\Phi(S) = \{a_1, \dots, a_6\} \cup \{b_1, \dots, b_6\} \cup \Delta \quad \text{sendo } \Delta = \{\ell_{ij} \mid 1 \leq i < j \leq 6\}.$$

Incidência das retas na família Δ

Proposição B.12. Com as notações acima. Considere as retas $m_1, \dots, m_k$ em Δ e $I_6 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

- (i) $m_1 \cap m_2 = \emptyset \iff \exists \{\alpha, \beta_1, \beta_2\} \subset I_6$ tal que $\#\{\alpha, \beta_1, \beta_2\} = 3$ e $m_i = \ell_{\alpha\beta_i}$ $i = 1, 2$.
- (ii) m_1, m_2 e m_3 são duas a duas disjuntas $\iff \begin{cases} \exists \{\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3\} \subset I_6 \text{ tal que } \#\{\alpha, \beta_i\}_{i=1}^3 = 4 \text{ e } \\ m_i = \ell_{\alpha\beta_i} \forall i. \\ \text{ou} \\ \exists \{\alpha, \beta_1, \beta_2\} \subset I_6 \text{ tal que } \#\{\alpha, \beta_1, \beta_2\} = 3 \text{ e } \\ m_1 = \ell_{\alpha\beta_1}, m_2 = \ell_{\alpha\beta_2}, m_3 = \ell_{\beta_1\beta_2}. \end{cases}$
- (iii) m_1, m_2, m_3 e m_4 são duas a duas disjuntas $\iff \begin{cases} \exists \{\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4\} \subset I_6 \text{ tal que } \#\{\alpha, \beta_i\}_{i=1}^4 = 5 \\ \text{e } m_i = \ell_{\alpha\beta_i} \forall i. \end{cases}$
- (iv) m_1, m_2, m_3, m_4 e m_5 são duas a duas disjuntas $\iff \begin{cases} \exists \{\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5\} \subset I_6 \text{ tal que } \\ \{\alpha, \beta_i\}_{i=1}^5 = I_6 \text{ e } m_i = \ell_{\alpha\beta_i} \forall i. \end{cases}$
- (v) Não existem 6 retas duas a duas disjuntas em Δ .

Demonstração. A recíproca das implicações nos itens (i), (ii), (iii) e (iv), segue do item 6. da Proposição B.10.

(i) $\implies$ Considere $m_1 = \ell_{ij}$ e $m_2 = \ell_{rs}$ em Δ tais que $m_1 \cap m_2 = \emptyset$. Segue do item 6. da Proposição B.10 que: $\ell_{ij} \cap \ell_{rs} = \emptyset \iff \{i, j\} \cap \{r, s\} \neq \emptyset$. Visto que, $m_1 \cap m_2 = \emptyset$ segue que as retas são distintas, logo $\#\{i, j\} \cap \{r, s\} = 1$. Assim, podemos escrever $\{i, j\} \cap \{r, s\} = \{\alpha\}$, $\{i, j\} = \{\alpha, \beta_1\}$ e $\{r, s\} = \{\alpha, \beta_2\}$ com $\beta_1 \neq \beta_2$. Ou seja, $m_1 = \ell_{\alpha\beta_1}$ e

$$m_2 = \ell_{\alpha\beta_2}.$$

(ii) $\implies$ Considere as retas m_1, m_2 e $m_3 \in \Delta$. Assuma que $m_i \cap m_j = \emptyset \ \forall i \neq j$.

Como $m_1 \cap m_2 = \emptyset$, segue do item (i) que existem $\alpha, \beta_1, \beta_2 \in I_6$ distintos e tais que $m_1 = \ell_{\alpha\beta_1}$ e $m_2 = \ell_{\alpha\beta_2}$. Agora, assumamos que $m_3 = \ell_{ij}$. Como $m_1 \cap m_3 = \emptyset$ e $m_2 \cap m_3 = \emptyset$, segue que $\{\alpha, \beta_1\} \cap \{i, j\} \neq \emptyset$ e $\{\alpha, \beta_2\} \cap \{i, j\} \neq \emptyset$. Lembre que tais interseções tem cardinalidade 1, pois as retas são distintas. Assim, temos as seguintes duas possibilidades:

- $\{\alpha, \beta_1\} \cap \{i, j\} = \{\alpha\} = \{\alpha, \beta_2\} \cap \{i, j\}$.

Neste caso, $m_3 = \ell_{\alpha\beta_3}$ com $\beta_3 \neq \beta_i$ para $i = 1, 2$. De fato, $\#\{\alpha, \beta_i\}_{i=1}^3 = 4$.

- $\{\alpha, \beta_1\} \cap \{i, j\} = \{\beta_1\}$ e $\{\alpha, \beta_2\} \cap \{i, j\} = \{\beta_2\}$.

Neste caso, $\{i, j\} = \{\beta_1, \beta_2\}$. Logo, $m_3 = \ell_{\beta_1\beta_2}$ e $\#\{\alpha, \beta_1, \beta_2\} = 3$.

(iii) $\implies$ Considere as retas duas a duas disjuntas $m_1, \dots, m_4$ em Δ . Como $m_i \cap m_j = \emptyset$ para todo $i \neq j$, $i, j \in \{1, 2, 3\}$, segue de (ii) que existem duas possibilidades para os índices dessas retas:

- $m_1 = \ell_{\alpha\beta_1}$, $m_2 = \ell_{\alpha\beta_2}$ e $m_3 = \ell_{\alpha\beta_3}$ com $\#\{\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3\} = 4$.

Agora, se $m_4 = \ell_{ij}$ então a condição $m_k \cap m_4 = \emptyset$ para todo $k \in \{1, 2, 3\}$, implica em $\{\alpha, \beta_k\} \cap \{i, j\} \neq \emptyset$ para todo $k \in \{1, 2, 3\}$.

Afirmção 1: $\{\alpha, \beta_k\} \cap \{i, j\} = \{\alpha\}$ para todo $k \in \{1, 2, 3\}$.

Suponha, por absurdo, que existe $k \in \{1, 2, 3\}$ tal que $\{\alpha, \beta_k\} \cap \{i, j\} \neq \{\alpha\}$. Neste caso, $\{\alpha, \beta_k\} \cap \{i, j\} = \{\beta_k\}$.

Observe que, se $\{\alpha, \beta_r\} \cap \{i, j\} = \{\alpha\}$ para algum $r \in \{1, 2, 3\}$, $r \neq k$ então necessariamente $\{i, j\} = \{\alpha, \beta_k\}$. Logo $m_4 = m_k$ para algum $k \in \{1, 2, 3\}$ (Absurdo!). Do contrário, isto é, $\{\alpha, \beta_r\} \cap \{i, j\} \neq \{\alpha\}$ para todo $r \in \{1, 2, 3\}$, $r \neq k$ então $\{i, j\} = \{\beta_1, \beta_2\} = \{\beta_1, \beta_3\} = \{\beta_2, \beta_3\}$ (Absurdo!).

[Fim da prova da Afirmção 1]

Assim, segue da afirmação 1 que $m_4 = \ell_{\alpha\beta_4}$ com $\beta_4 \neq \beta_k$ para todo $k \in \{1, 2, 3\}$.

- $m_1 = \ell_{\alpha\beta_1}$, $m_2 = \ell_{\alpha\beta_2}$ e $m_3 = \ell_{\beta_1\beta_2}$ com $\#\{\alpha, \beta_1, \beta_2\} = 3$.

Se $m_4 = \ell_{ij}$ então a condição $m_k \cap m_4 = \emptyset$ para todo $k \in \{1, 2, 3\}$, implica em $\{\alpha, \beta_k\} \cap \{i, j\} \neq \emptyset$ para $k = 1, 2$ e $\{\beta_1, \beta_2\} \cap \{i, j\} \neq \emptyset$.

Observe que, se $\{\beta_1, \beta_2\} \cap \{i, j\} = \{\beta_1\}$ então $\{\alpha, \beta_1\} \cap \{i, j\} = \{\beta_1\}$ e

$$\underbrace{\{\alpha, \beta_2\} \cap \{i, j\} = \{\beta_2\}}_{\implies m_4=m_3 \text{ Absurdo!}} \quad \text{ou} \quad \underbrace{\{\alpha, \beta_2\} \cap \{i, j\} = \{\alpha\}}_{\implies m_4=m_1 \text{ Absurdo!}}$$

Analogamente, ao supormos que $\{\beta_1, \beta_2\} \cap \{i, j\} = \{\beta_2\}$, chegamos na conclusão que $m_4 = m_3$ ou $m_4 = m_2$ (o que é um Absurdo!).

(iv) $\implies$ Considere as retas duas a duas disjuntas $m_1, \dots, m_5$ em Δ . Como $m_i \cap m_j = \emptyset$ para todo $i \neq j$, $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$, segue de (iii) que $m_i = \ell_{\alpha, \beta_i}$ para $i = 1, \dots, 4$ com $\#\{\alpha, \beta_1, \dots, \beta_4\} = 5$.

Se $m_5 = \ell_{ij}$ então a condição $m_5 \cap m_i = \emptyset$ para todo $k \in \{1, 2, 3, 4\}$, implica em $\{\alpha, \beta_k\} \cap \{i, j\} \neq \emptyset$ para todo $k \in \{1, 2, 3, 4\}$. Observe que por conta de $\#\{i, j\} = 2$ existe $k \in \{1, 2, 3, 4\}$ tal que $\{\alpha, \beta_k\} \cap \{i, j\} = \{\alpha\}$. Entretanto, se existir $r \in \{1, 2, 3, 4\}$ tal que $\{\alpha, \beta_r\} \cap \{i, j\} = \{\beta_r\}$ então $m_5 = m_r$ (Absurdo!). Assim, $\{\alpha, \beta_k\} \cap \{i, j\} = \{\alpha\}$ para todo $k \in \{1, 2, 3, 4\}$. Logo, $m_5 = \ell_{\alpha, \beta_5}$ com $\beta_5 \neq \beta_k$ para todo $k \in \{1, 2, 3, 4\}$. Assim, $m_i = \ell_{\alpha, \beta_i}$ para todo i , com $\{\alpha, \beta_1, \dots, \beta_5\} = I_6$.

(v) Do item (iv) segue que, se $m_1, \dots, m_5$ são 5 retas duas a duas disjuntas em Δ , então $m_i = \ell_{\alpha, \beta_i}$ para todo i , com $\{\alpha, \beta_1, \dots, \beta_5\} = I_6$. Portanto, para qualquer reta $m_6 = \ell_{ij} \in \Delta$ segue que $\alpha \in \{i, j\}$ ou $\alpha \notin \{i, j\}$.

- Se $\alpha \in \{i, j\}$ então $m_6 = m_i$ para algum $i \in \{1, \dots, 5\}$, visto que $I_6 - \{\alpha\} = \{\beta_1, \dots, \beta_5\}$.
- Se $\alpha \notin \{i, j\}$ então $m_6 = \ell_{\beta_i \beta_j}$ para algum $i \neq j$, $i, j \in \{1, \dots, 5\}$. Neste caso, $\{\alpha, \beta_k\} \cap \{\beta_i, \beta_j\} = \emptyset$ se, $k \notin \{i, j\}$. Assim, segue do item 6. da proposição B.10, que $m_k \cap m_6 \neq \emptyset$.

Portanto, não existem 6 retas duas a duas disjuntas em Δ . $\blacksquare$

No que segue do texto, considere o duplo-seis $\mathcal{A} = \{a_1, \dots, a_6\}$, $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_6\}$.

Lema B.13. Seja $C \subset \Phi(S)$ não vazio formado por retas duas a duas disjuntas tal que $C \subseteq \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$. Então exatamente uma das seguintes possibilidades acontece: $C \subseteq \mathcal{A}$ ou $C \subseteq \mathcal{B}$ ou $C = \{a_i, b_i\}$ para algum $i \in \{1, \dots, 6\}$.

Demonstração. Como $C \subseteq \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ segue que $C = (C \cap \mathcal{A}) \cup (C \cap \mathcal{B})$. Temos exatamente três possibilidades, a saber:

- $C \cap \mathcal{A} = \emptyset \implies C \subseteq \mathcal{B}$.
- $C \cap \mathcal{B} = \emptyset \implies C \subseteq \mathcal{A}$.
- $C \cap \mathcal{A} \neq \emptyset$ e $C \cap \mathcal{B} \neq \emptyset$.

Neste caso. existe $a_i \in C$ e $b_j \in C$. Como $a_i \cap b_j = \emptyset$ segue que $i = j$. Logo, $\{a_i, b_i\} \subseteq C$. Suponha que $\{a_i, b_i\} \neq C$. Neste caso existe $\ell \in C - \{a_i, b_i\}$. Como as retas em C são duas a duas disjuntas, segue que $\ell \cap a_i = \emptyset$ e $\ell \cap b_i = \emptyset$. Se $\ell = a_k$ para alguma $k \in I_6 = \{1, \dots, 6\}$ então $k \neq i$ (visto que $a_k \cap a_i = \emptyset$) e $k = i$ (visto que $a_k \cap b_i = \emptyset$) o que é um absurdo. Analogamente, se $\ell = b_k$ para alguma $k \in I_6$ chegamos num absurdo. $\blacksquare$

Teorema B.14. Se

$$\Gamma = \left\{ C \subset \Phi(S) \mid C \text{ é formado por retas duas a duas disjuntas e } \#C = 6 \right\},$$

então $\#\Gamma = 72$.

Demonstração. Segue do Corolário B.11 que $\Phi(S) = \mathcal{A} \cup \mathcal{B} \cup \Delta$, sendo $\mathcal{A} = \{a_1, \dots, a_6\}$, $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_6\}$ e $\Delta = \{\ell_{ij} \mid 1 \leq i < j \leq 6\}$.

Observe que $\Gamma \neq \emptyset$ visto que $\mathcal{A}$ (como também $\mathcal{B}$) pertence a Γ . Para determinar a cardinalidade de Γ , faremos uso da seguinte partição: Se $C \in \Gamma$ então, verifica-se que

$$C = (C \cap \mathcal{A}) \cup (C \cap \mathcal{B}) \cup (C \cap \Delta).$$

De fato, $\#C = 6$ implica em $0 \leq \#(C \cap \Delta) \leq 6$. A seguir analisaremos cada uma das possibilidades para $\#(C \cap \Delta)$.¹⁷ Ou equivalentemente, para $\#(\Gamma_i)$ sendo

$$\Gamma_i = \{C \in \Gamma \mid \#(C \cap \Delta) = i\} \quad \text{com } i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Assuma que $C = \{m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, m_6\}$.

1º) $\#(C \cap \Delta) = 6$.

Neste caso, $C \cap \Delta$ é um subconjunto de Δ constituído por 6 retas duas a duas disjuntos. Entretanto, não existem tais subconjuntos em Δ (conforme o item (v) da Proposição B.12). Assim, $\Gamma_6 = \emptyset$.

2º) $\#(C \cap \Delta) = 5$.

Neste caso, assuma que $C \cap \Delta = \{m_1, \dots, m_5\}$. Assim, segue do item (iv) da Proposição B.12 que $m_i = \ell_{\alpha\beta_i}$ para $i \in \{1, \dots, 5\}$ com $\{\alpha, \beta_1, \dots, \beta_5\} = I_6 = \{1, \dots, 6\}$. Além disso, $m_6 \in \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$. Logo $m_6 = a_i$ ou $m_6 = b_i$ para algum $i \in I_6 = \{\alpha, \beta_1, \dots, \beta_5\}$. Assim, existe $j \in \{1, \dots, 5\}$ tal que $m_6 \cap m_j \neq \emptyset$, visto que: $\ell_{rs} \cap a_k \neq \emptyset \iff k \in \{r, s\} \iff \ell_{rs} \cap b_k \neq \emptyset$.¹⁸ Portanto, $\Gamma_5 = \emptyset$.

3º) $\#(C \cap \Delta) = 4$.

Neste caso, assuma que $C \cap \Delta = \{m_1, \dots, m_4\}$. Assim, segue do item (iii) da Proposição B.12 que $m_i = \ell_{\alpha\beta_i}$ para $i \in \{1, \dots, 4\}$ com $\#\{\alpha, \beta_1, \dots, \beta_4\} = 5$. Além disso, m_5 e $m_6 \in \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$. Agora, segue do Lema B.13 que

$$\{m_5, m_6\} \subset \mathcal{A} \text{ ou } \{m_5, m_6\} \subset \mathcal{B} \text{ ou } \{m_5, m_6\} = \{a_\gamma, b_\gamma\} \text{ para algum } \gamma \in I_6.$$

Observe que:

- Se $m_i \in \mathcal{A}$ então $m_i = a_\gamma$ com $\gamma \in I_6 - \{\alpha, \beta_1, \dots, \beta_4\}$ visto que $m_5 \cap m_k = \emptyset$ para todo $k \in \{1, \dots, 4\}$. Assim, $I_6 = \{\alpha, \beta_1, \dots, \beta_4, \gamma\}$. Logo, $\{m_5, m_6\} \subset \mathcal{A}$ nos leva a

¹⁷Ou seja, estamos particionando o conjunto Γ da seguinte forma: $\Gamma = \bigcup_{i=0}^6 \Gamma_i$ sendo $\Gamma_i = \{C \in \Gamma \mid \#(C \cap \Delta) = i\}$.

¹⁸Conforme o item 2. e 3. da Proposição B.10.

concluir que $m_5 = a_\gamma = a_6$ (**Absurdo!**).

- Analogamente, se $\{m_5, m_6\} \subset \mathcal{B}$ chegamos no absurdo $m_5 = b_\gamma = a_6$ com $\gamma \in I_6 - \{\alpha, \beta_1, \dots, \beta_4\}$.

Assim, $\{m_5, m_6\} = \{a_\gamma, b_\gamma\}$ com $\gamma \in I_6 - \{\alpha, \beta_1, \dots, \beta_4\}$.

Portanto, $C = \{\ell_{\alpha\beta_1}, \ell_{\alpha\beta_2}, \ell_{\alpha\beta_3}, \ell_{\alpha\beta_4}, a_\gamma, b_\gamma\}$ com $I_6 = \{\alpha, \beta_1, \dots, \beta_4, \gamma\}$. Logo, os índices das retas em C são determinados pelas $6 \cdot 5 = 30$ possibilidades para escolher $\alpha \in I_6$ e $\{\beta_1, \dots, \beta_4\} \subset I_6 - \{\alpha\}$. Portanto, $\#(\Gamma_4) = 30$.

4º) $\#(C \cap \Delta) = 3$.

Neste caso, assuma que $C \cap \Delta = \{m_1, m_2, m_3\}$. Assim, segue do item (ii) da Proposição 1 que:

$$\underbrace{m_i = \ell_{\alpha\beta_i} \text{ para } i = 1, 2, 3}_{(i)} \quad \text{ou} \quad \underbrace{m_1 = \ell_{\alpha\beta_1}, m_2 = \ell_{\alpha\beta_2} \text{ e } m_3 = \ell_{\beta_1\beta_2}}_{(ii)}$$

com $\#\{\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3\} = 4$.

Além disso, m_4, m_5 e $m_6 \in \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$.

(i) Se $m_i \in \mathcal{A}$ para algum $i \in \{4, 5, 6\}$ então $m_i = a_\gamma$ com $\gamma \in I_6 - \{\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3\}$. Como $\#(I_6 - \{\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3\}) = 2$, segue que $\#(\mathcal{A} \cap \{m_4, m_5, m_6\}) \leq 2$ (visto que $a_i \cap a_j = \emptyset$ se e só se, $i \neq j$). Analogamente, mostra-se que $\#(\mathcal{B} \cap \{m_4, m_5, m_6\}) \leq 2$. Assim, concluímos que

$$\{m_4, m_5, m_6\} \notin \mathcal{A} \quad \text{e} \quad \{m_4, m_5, m_6\} \notin \mathcal{B}$$

Assim, segue do Lema B.13 que $\{m_4, m_5, m_6\} = \{a_i, b_i\}$ para algum $i \in I_6$ (**Absurdo!**). Portanto, não existe $C \in \Gamma$ tal que $C \cap \Delta = \{m_1, m_2, m_3\}$ satisfazendo a condição (i).

(ii) Se $m_i \in \mathcal{A}$ para algum $i \in \{4, 5, 6\}$ então $m_i = a_\gamma$ com $\gamma \in I_6 - \{\alpha, \beta_1, \beta_2\}$. Como $\#(I_6 - \{\alpha, \beta_1, \beta_2\}) = 3$, segue que $\#(\mathcal{A} \cap \{m_4, m_5, m_6\}) \leq 3$ (visto que $a_i \cap a_j = \emptyset$ se e só se, $i \neq j$). Analogamente, mostra-se que $\#(\mathcal{B} \cap \{m_4, m_5, m_6\}) \leq 3$. Do Lema B.13, ao considerar $C_1 = \{m_4, m_5, m_6\}$, segue que:

$$C_1 \subset \mathcal{A} \text{ ou } C_1 \subset \mathcal{B} \text{ ou } C_1 = \{a_i, b_i\} \text{ para algum } i.$$

Observe que a ultima possibilidade não acontece, pois $\#C_1 = 3$. Assim, só vamos analisar as primeiras duas possibilidades:

- Se $\mathcal{A} \cap \{m_4, m_5, m_6\} = \{m_4, m_5, m_6\}$ então $m_{3+i} = a_{\gamma_i}$ para $i = 1, 2, 3$ sendo $I_6 = \{\alpha, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\}$.

Neste caso, $C = \{\ell_{\alpha\beta_1}, \ell_{\alpha\beta_2}, \ell_{\beta_1\beta_2}, a_{\gamma_1}, a_{\gamma_2}, a_{\gamma_3}\}$ com $I_6 = \{\alpha, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\}$. Logo, os índices das retas em C são determinados pelas 20 possibilidades que temos para escolher um subconjunto de três elementos $\{\alpha, \beta_1, \beta_2\}$ em I_6 .¹⁹

- Analogamente, se $\mathcal{B} \cap \{m_4, m_5, m_6\} = \{m_4, m_5, m_6\}$ então $m_{3+i} = b_{\gamma_i}$ para $i = 1, 2, 3$ sendo $I_6 = \{\alpha, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\}$.

Neste caso, $C = \{\ell_{\alpha\beta_1}, \ell_{\alpha\beta_2}, \ell_{\beta_1\beta_2}, b_{\gamma_1}, b_{\gamma_2}, b_{\gamma_3}\}$ com $I_6 = \{\alpha, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\}$. Novamente, os índices das retas em C são determinados pelas 20 possibilidades que temos para escolher um subconjunto de três elementos $\{\alpha, \beta_1, \beta_2\}$ em I_6 .

Portanto, $\#(\Gamma_3) = 20 + 20 = 40$.

5º) $\#(C \cap \Delta) = 2$.

Neste caso, assumamos que $C \cap \Delta = \{m_1, m_2\}$. Assim, segue do item (i) da Proposição B.12 que $m_i = \ell_{\alpha\beta_i}$ para $i = 1, 2$ com $\#\{\alpha, \beta_1, \beta_2\} = 3$. Além disso, $C_1 = \{m_3, m_4, m_5, m_6\} \subset \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$. Observe que:

$$\#(\mathcal{A} \cap C_1) \leq 3 \quad \text{e} \quad \#(\mathcal{B} \cap C_1) \leq 3.²⁰$$

Logo, $C_1 \not\subset \mathcal{A}$ e $C_1 \not\subset \mathcal{B}$, por conseguinte o Lema 1 nos leva a concluir que $C_1 = \{a_i, b_i\}$ para algum $i \in I_6$ (**Absurdo!**).

Assim, não existe $C \in \Gamma$ tal que $\#(C \cap \Delta) = 2$. Portanto, $\Gamma_2 = \emptyset$.

6º) $\#(C \cap \Delta) = 1$.

De forma análoga ao caso anterior, mostra-se que não existe $C \in \Gamma$ tal que $\#(C \cap \Delta) = 1$. Portanto, $\Gamma_1 = \emptyset$. **Exercício**

7º) $\#(C \cap \Delta) = 0$.

Neste caso, $C \subset \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ com $\#C = 6$. Assum, segue do lema 1 que $C \subseteq \mathcal{A}$ ou $C \subseteq \mathcal{B}$. Como $\#\mathcal{A} = \#\mathcal{B} = 6$, segue que $C = \mathcal{A}$ ou $C = \mathcal{B}$. Portanto, $\#\Gamma_0 = 2$.

Resumo: $\#\Gamma = \sum_{i=0}^6 \#\Gamma_i = 2 + 0 + 0 + 40 + 30 + 0 + 0 = 72$. ■

Teorema B.15. *Superfícies cúbicas não singulares em $\mathbb{P}^3$ possuem no máximo 6 retas duas a duas disjuntas. Ou seja, $r_3 = 6$.*

¹⁹Observe que se $\{i, j, k\} \subset I_6$ com $i < j < k$, então ao escolher $\alpha = i$ obtemos as retas ℓ_{ij}, ℓ_{ik} e ℓ_{jk} . Entretanto, ao escolher $\alpha = j$ obtemos as retas $\ell_{ji} = \ell_{ij}, \ell_{jk}$ e ℓ_{ik} . Para $\alpha = k$ obtemos as retas $\ell_{ki} = \ell_{ik}, \ell_{kj} = \ell_{jk}$ e ℓ_{ij} . Portanto, uma escolha de três índices em I_6 determina um único subconjunto de três retas duas a duas disjuntas em Δ .

²⁰Visto que, $a_k \cap m_i = \emptyset$ para $i = 1, 2$ se, $k \in I_6 - \{\alpha, \beta_1, \beta_2\}$. Como também, $b_k \cap m_i = \emptyset$ para $i = 1, 2$ se, $k \in I_6 - \{\alpha, \beta_1, \beta_2\}$

Demonstração. Sabemos que existem 6 retas duas a duas disjuntas em S , por exemplo as retas em $\mathcal{A}$. Suponha, por absurdo, que $r_3 \geq 7$, assim existem $m_1, \dots, m_7$ retas em S duas a duas disjuntas. Seja $C = \{m_1, \dots, m_6\}$. Desse modo, $C \in \Gamma$ (Γ definido no Teorema B.14). Além disso, a partir da demonstração do Teorema B.14, temos que: $C \in \Gamma_i$ para algum $i \in \{0, 3, 4\}$. De fato,

(i) Se $C \in \Gamma_0$ então $C = \mathcal{A}$ ou $C = \mathcal{B}$.

Vamos supor que $C = \mathcal{A}$. Neste caso, $m_7 \in \mathcal{B} \cup \Delta$. Agora, se $m_7 \in \mathcal{B}$ então $m_7 = b_i$ para algum $i \in I_6 = \{1, \dots, 6\}$ e $m_7 \cap a_j \neq \emptyset$ para todo $j \neq i$ (Absurdo! visto que $m_1, \dots, m_7$ são duas a duas disjuntas). Entretanto, se $m_7 \in \Delta$ então $m_7 = \ell_{ij}$ para algum $i \neq j$ em I_6 , e neste caso, $m_7 \cap a_i \neq \emptyset$ (Absurdo!).

De forma análoga, se $C = \mathcal{B}$ chegamos num absurdo.

(ii) Se $C \in \Gamma_3$ então

$$C = \{\ell_{\alpha\beta_1}, \ell_{\alpha\beta_2}, \ell_{\beta_1\beta_2}, a_{\gamma_1}, a_{\gamma_2}, a_{\gamma_3}\} \text{ ou } C = \{\ell_{\alpha\beta_1}, \ell_{\alpha\beta_2}, \ell_{\beta_1\beta_2}, b_{\gamma_1}, b_{\gamma_2}, b_{\gamma_3}\}$$

com $I_6 = \{\alpha, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\}$

Vamos supor que $C = \{\ell_{\alpha\beta_1}, \ell_{\alpha\beta_2}, \ell_{\beta_1\beta_2}, a_{\gamma_1}, a_{\gamma_2}, a_{\gamma_3}\}$. A seguir vamos analisar as possibilidades para a escolha de m_7 .

- Se $m_7 = a_i \in \mathcal{A}$ então $i \notin \{\alpha, \beta_1, \beta_2\}$ pois $m_7 \cap \ell_{ij} = \emptyset$ se, $i, j \in \{\alpha, \beta_1, \beta_2\}$. Logo $i \in \{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\}$. Neste caso, $m_7 = a_{\gamma_j}$ e $m_7 \cap b_{\gamma_k} \neq \emptyset$ para todo $k \in \{1, 2, 3\}$ tal que $k \neq j$ (Absurdo! visto que $m_1, \dots, m_7$ são duas a duas disjuntas).
- Se $m_7 = b_i \in \mathcal{B}$ então $i \notin \{\alpha, \beta_1, \beta_2\}$ pois $m_7 \cap \ell_{ij} = \emptyset$ se, $i, j \in \{\alpha, \beta_1, \beta_2\}$. Logo $i \in \{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\}$. Neste caso, $m_7 = b_{\gamma_j}$ e $m_7 \cap a_{\gamma_k} \neq \emptyset$ para todo $k \in \{1, 2, 3\}$ tal que $k \neq j$ (Absurdo! visto que $m_1, \dots, m_7$ são duas a duas disjuntas).
- Se $m_7 = \ell_{ij} \in \Delta$ então $i, j \notin \{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\}$ pois $m_7 \cap a_{\gamma_k} = \emptyset$ se, $k \in \{1, 2, 3\}$. Logo $i, j \in \{\alpha, \beta_1, \beta_2\}$. Portanto, $\ell_{ij} = \ell$ com $\ell \in \{\ell_{\alpha\beta_1}, \ell_{\alpha\beta_2}, \ell_{\beta_1\beta_2}\}$ (Absurdo! visto que $m_1, \dots, m_7$ são duas a duas disjuntas)

Uma análise semelhante segue no caso em que $C = \{\ell_{\alpha\beta_1}, \ell_{\alpha\beta_2}, \ell_{\beta_1\beta_2}, b_{\gamma_1}, b_{\gamma_2}, b_{\gamma_3}\}$. Deixamos como Exercício.

(iii) Se $C \in \Gamma_4$ então $C = \{\ell_{\alpha\beta_1}, \ell_{\alpha\beta_2}, \ell_{\alpha\beta_3}, \ell_{\alpha\beta_4}, a_\gamma, b_\gamma\}$ com $I_6 = \{\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \gamma\}$.

A seguir vamos analisar as possibilidades para a escolha de m_7 , neste caso.

- Se $m_7 = a_i \in \mathcal{A}$ então $i \notin \{\alpha, \beta_1, \dots, \beta_4\}$ pois $m_7 \cap \ell_{ij} = \emptyset$ se, $i, j \in \{\alpha, \beta_1, \dots, \beta_4\}$. Logo $m_7 = a_\gamma$ (Absurdo! visto que $m_1, \dots, m_7$ são duas a duas disjuntas).
- Se $m_7 \in \mathcal{B}$ então de forma análoga ao caso anterior, concluímos que $m_7 = b_\gamma$ (Absurdo! visto que $m_1, \dots, m_7$ são duas a duas disjuntas).
- Se $m_7 = \ell_{ij} \in \Delta$ então $i, j \in \{\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4\}$ pois $m_7 \cap a_\gamma = \emptyset$. Assim, podemos escolher $\{r, s\} \subset \{\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4\} - \{i, j\}$ com $r \neq s$. Logo, $\{r, s\} \cap \{i, j\} = \emptyset$ o que implica em $m_7 \cap \ell_{rs} \neq \emptyset$ (Absurdo! visto que $m_1, \dots, m_7$ são duas a duas disjuntas).

Portanto, toda superfície cúbica não singular em $\mathbb{P}^3$ possui no máximo 6 retas duas a duas disjuntas. ■

Vamos concluir mostrando que existem 45 planos em $\mathbb{P}^3$, cuja interseção com uma superfície cúbica não singular em $\mathbb{P}^3$ consiste de exatamente 3 retas (duas a duas distintas).

Teorema B.16. *Sejam S uma superfície cúbica não singular em $\mathbb{P}^3$ e*

$$\Omega = \left\{ H \stackrel{\text{plano}}{\subset} \mathbb{P}^3 \mid H \cap S \text{ consiste de três retas distintas} \right\},$$

então $\#\Omega = 45$.

Demonstração. lembremos que o Corolário B.11 nos garante que

$$\Phi(S) = \mathcal{A} \cup \mathcal{B} \cup \Delta \quad \text{sendo } \Delta = \{\ell_{ij} \mid 1 \leq i < j \leq 6\}.$$

sendo $\mathcal{A} = \{a_1, \dots, a_6\}$, $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_6\}$ um duplo seis, e $\ell_{i,j} \in \Delta$ a reta residual à cônica $a_i \cup b_j$ no plano $H_{ij} = \langle a_i, b_j \rangle$, isto é,

$$H_{ij} \cap S = a_i \cup b_j \cup \ell_{ij} \quad \forall 1 \leq i, j \leq 6 \text{ com } i \neq j. \quad (\text{B.8})$$

Lembre que $\ell_{ij} = \ell_{ji}$ e $H_{ij} \neq H_{ji}$ para todo $i \neq j$, $i, j \in \{1, \dots, 6\}$ (veja figura na página 1).

Afirmção 1: $\#\Omega \geq 45$.

Segue de (B.8) que $H_{ij} \in \Omega$ para todo $i \neq j$, $i, j \in \{1, \dots, 6\}$. Assim, obtemos 30 planos que pertencem a Ω .

Por outro lado, se escolhermos um subconjunto com 4 elementos $\{\alpha, \beta, \gamma, \delta\} \subset I_6 = \{1, 2, \dots, 6\}$, obteremos as retas concorrentes $\ell_{\alpha\beta}$ e $\ell_{\gamma\delta} \in \Delta$. De fato, tais retas determinam o plano $H_{\alpha\beta\gamma\delta} = \langle \ell_{\alpha\beta}, \ell_{\gamma\delta} \rangle$. Observe que:

- Se $\ell \in \Phi(S)$ é tal que $\ell \cap \ell_{\alpha\beta} \neq \emptyset$ e $\ell \cap \ell_{\gamma\delta} \neq \emptyset$, então $\ell = \ell_{rs}$ sendo $I_6 = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, r, s\}$.

Basta observar que tal reta $\ell \notin \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$, visto que

$$\begin{aligned} a_i \cap \ell_{\alpha\beta} \neq \emptyset \quad \text{e} \quad a_i \cap \ell_{\gamma\delta} \neq \emptyset &\iff i \in \{\alpha, \beta\} \quad \text{e} \quad i \in \{\gamma, \delta\}, \\ b_i \cap \ell_{\alpha\beta} \neq \emptyset \quad \text{e} \quad b_i \cap \ell_{\gamma\delta} \neq \emptyset &\iff i \in \{\alpha, \beta\} \quad \text{e} \quad i \in \{\gamma, \delta\}. \end{aligned}$$

Logo, $\ell = \ell_{ij} \in \Delta$ e neste caso,

$$\ell_{ij} \cap \ell_{\alpha\beta} \neq \emptyset \quad \text{e} \quad \ell_{ij} \cap \ell_{\gamma\delta} \neq \emptyset \iff \{i, j\} \cap \{\alpha, \beta\} = \emptyset \quad \text{e} \quad \{i, j\} \cap \{\gamma, \delta\} = \emptyset.$$

O que determina tal reta ℓ de forma única.

- $H_{\alpha\beta\gamma\delta} \cap S = \ell_{\alpha\beta} \cup \ell_{\gamma\delta} \cup \ell_{rs}$ de modo que $I_6 = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, r, s\}$.

Note que $\ell_{\alpha\beta} \cup \ell_{\gamma\delta} \subset H_{\alpha\beta\gamma\delta} \cap S$. Assim, a curva residual à reta $\ell_{\alpha\beta}$ no plano $H_{\alpha\beta\gamma\delta}$ é da forma $\ell_{\gamma\delta} \cup \ell$, sendo ℓ uma reta contida em S tal que $H_{\alpha\beta\gamma\delta} \cap S = \ell_{\alpha\beta} \cup \ell_{\gamma\delta} \cup \ell$. Como ℓ está contida no plano $H_{\alpha\beta\gamma\delta} = \langle \ell_{\alpha\beta}, \ell_{\gamma\delta} \rangle$, segue que ℓ encontra as retas $\ell_{\alpha\beta}$ e $\ell_{\gamma\delta}$. Assim, segue do item anterior que $\ell = \ell_{rs}$ com r, s tais que $I_6 = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, r, s\}$.

Assim obtemos 15 planos da forma $H_{\alpha\beta\gamma\delta} \in \Omega$, pois temos $15 = \binom{6}{4}$ escolhas para $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in I_6$.

Portanto, temos $30 + 15 = 45$ planos distintos em Ω .

[Fim da prova da Afirmação 1]

Afirmação 2: Se $H \in \Omega$ então $H = \langle a_i, b_j \rangle$ com $i \neq j$, $i, j \in I_6$ ou $H = \langle \ell_{\alpha\beta}, \ell_{\gamma\delta} \rangle$ com $\{\alpha, \beta, \gamma, \delta\} \subset I_6$ de cardinalidade 4.

Considere $H \in \Omega$ e suponha que $H \neq \langle a_i, b_j \rangle$ para todo $i, j \in I_6$ com $i \neq j$. Assuma que

$$H \cap S = m_1 \cup m_2 \cup m_3.$$

Note que:

- Se $m_3 = a_i \in \mathcal{A}$ (a menos de uma reordenação nos índices 1, 2 e 3) então $m_1, m_2 \in \Delta$ e são concorrentes. Assim, $m_1 = \ell_{\alpha\beta}$ e $m_2 = \ell_{\gamma\delta}$ com $\{\alpha, \beta\} \cap \{\gamma, \delta\} = \emptyset$. Entretanto, $a_i \cap \ell_{\alpha\beta} \neq \emptyset$ e $a_i \cap \ell_{\gamma\delta} \neq \emptyset \iff i \in \{\alpha, \beta\}$ e $i \in \{\gamma, \delta\}$. (Absurdo!)
- Se $m_3 = b_i \in \mathcal{A}$ (a menos de uma reordenação nos índices 1, 2 e 3) então $m_1, m_2 \in \Delta$ e são concorrentes. Assim, $m_1 = \ell_{\alpha\beta}$ e $m_2 = \ell_{\gamma\delta}$ com $\{\alpha, \beta\} \cap \{\gamma, \delta\} = \emptyset$. Entretanto, $b_i \cap \ell_{\alpha\beta} \neq \emptyset$ e $b_i \cap \ell_{\gamma\delta} \neq \emptyset \iff i \in \{\alpha, \beta\}$ e $i \in \{\gamma, \delta\}$. (Absurdo!)

Portanto, m_1, m_2 e $m_3 \in \Delta$. Como $m_i \cap m_j$ para todo $i \neq j$ (pois são retas coplanares), segue que $m_1 = \ell_{\alpha\beta}$, $m_2 = \ell_{\gamma\delta}$ e $m_3 = \ell_{rs}$ sendo seus índices tais que $I_6 = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, r, s\}$. Assim, $H = \langle \ell_{\alpha\beta}, \ell_{\gamma\delta} \rangle$ com $\{\alpha, \beta, \gamma, \delta\} \subset I_6$ de cardinalidade 4. ■

Referências Bibliográficas

- [1] APOSTOL, T. M., *Modular functions and Dirichlet series in number theory*, Graduate texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, vol. 41, 2^a Ed., 1990.
- [2] CAMPO, A. M., SOTTILE, F. & WILLIAMS, R. L., *Classification of Schubert Galois groups in $Gr(4, 9)$* , arXiv preprint arXiv:1902.06809, 2020.
- [3] CAYLEY, A., *A memoir on cubic surfaces*, Philosophical Transactions of the Royal Society of London, The Royal Society, n. 159: p. 231-326, 1869.
- [4] CAYLEY, A., *On the triple tangent planes of surfaces of the third order*, Cambridge and Dublin Math. J., vol. 4: p. 118-138, 1849.
- [5] COX, D. A., LITTLE, J. & O'SHEA, D., *Ideals, Varieties and Algorithms*, Springer, New York, 3^a Ed., 2006.
- [6] DOLGACHEV, I. V., *Introduction to Algebraic Geometry*, April 30, 2010. Disponível em: <<http://www.math.lsa.umich.edu/~idolga/631.pdf>>. Acessando em: Junho/2021.
- [7] FULTON, W., *Algebraic Curves: An Introduction to Algebraic Geometry*, ISBN 10:0201510103; January 28, 3^a Ed., 2008.
- [8] GONÇALVES, A., *Introdução à Álgebra*. Rio de Janeiro, IMPA, 5^a Ed., 2008.
- [9] HARRIS, J., *Algebraic Geometry: a first course*. Graduate Texts in Mathematics, New York: Springer-Verlag, vol. 133, 1992.
- [10] HARRIS, J., *Galois groups of enumerative problems*. Duke Mathematical Journal, vol. 46, n. 4, p. 685-724 (1979).
- [11] HARTSHORNE, R., *Algebraic Geometry*, New York: Springer-Verlag. 1977.
- [12] HERMITE, C., *Sur les fonctions algébriques*, CR Acad. Sci. (Paris) 32, p. 458-461 (1851).

- [13] HULIK, K., *Elementary algebraic geometry*, First Edition, American Mathematical Society, 2003.
- [14] JORDAN, C., *Traité des substitutions et des équations algébriques*, Gauthier-Villars, Paris, vol. 1, 1870.
- [15] KIRWAN, F. C., *Complex algebraic curves*, Cambridge University Press, 1992.
- [16] MCKEAN, S., MINAHAN, D. & ZHANG, T., *All lines on a cubic surface in terms of three skew lines*, arXiv preprint arXiv: 2002.10367, Julho 2020.
- [17] MILNE, J. S., *Fields and Galois Theory*, v3.01 Augustu 31, 2021. Disponível em: <<https://www.jmilne.org/math/CourseNotes/FT.pdf>>. Acesssando em: Junho/2021.
- [18] MUNKRES, J. R., *Topology; Second Edition*, Princiton Hall, Upper Saddle River, New Delhi, 2000.
- [19] ÖNER, B. C., *Galois theory, monodromy groups and flexes of plane cubic curves*, July 2012. Disponível em: <<http://www.math.uni-bonn.de/people/huybrech/Oenerfinal.pdf>>. Acesssando em: Junho/2021.
- [20] RÊGO, T. L. O., *Sobre o número máximo de retas em superfícies não singular de grau 4 em $\mathbb{P}^3$* , João Pessoa, UFPB, 2016.
- [21] REID, M., *Undergraduate algebraic geometry*, London Mathematical Society Texts 12, Cambridge University Press, Cambridge, 1988.
- [22] ROJAS, J. & LIRA, D., *The maximal number of skew lines on Schur's quartic*, Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, vol. 142, p. 81-91, 2019.
- [23] ROJAS, J. & R. MENDOZA, R., *A note the Fiber Dimension Theorem*, Chile, vol. 28, n. 1, p. 57-73, May 2009.
- [24] ROJAS, J. & MENDOZA, R., *Álgebra Linear e o problema das quatro retas do cálculo de Schubert*, Revista Matemática Universitária, n. 45, p. 55-69, 2009.
- [25] SHAFAREVICH, I. R., *Basic Algebraic Geometry 1: Varieties in Projective Space*, 3ª Ed., Springer, 2013.
- [26] SILVERMAN, J. H., *The Arithmetic of Elliptic Curves*, 2ª Ed., Springer, 2009.

- [27] SOTTILE, F., ET AL. *Galois group in Enumerative Geometry and Applications*. NASO seminar, 30 April 2020. Disponível em:<<https://www.math.tamu.edu/frank.sottile/talks/20/NASO.pdf>>. Acessado em: Julho/2021.
- [28] SOTTILE, F. & WHITE, J., *Double transitivity of Galois groups in Schubert calculus of Grassmannians*,. *Algebr. Geom.* 2, n. 4, p. 422-445, arXiv preprint arXiv:1312.5987, 2015.
- [29] VAINSENER, I., *Introdução às Curvas Algébricas*, Rio de Janeiro, IMPA, 2005.
- [30] VILCHES, M. A., *Topologia geral*, Departamento de Análise-IME-UFRJ, 2012. Disponível em:<https://www.academia.edu/20311655/TOPOLOGIA_GERAL_Mauricio_A_Vilches>, Acessado em: Julho/2021.