Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós–Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Espaços com propriedades especiais, lineabilidade e espaçabilidade

Luiz Felipe de Pinho Sousa

João Pessoa – PB
Julho de 2021

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós–Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Espaços com propriedades especiais, lineabilidade e espaçabilidade

por

Luiz Felipe de Pinho Sousa [1]

sob a orientação do

Prof. Dr. Jamilson Ramos Campos

João Pessoa – PB
Julho de 2021

[1] O autor foi bolsista do(a)CNPq durante a elaboração desta dissertação.

Catalogação na publicação
Universidade Federal da Paraíba
Biblioteca Setorial do CCEN

S725e Sousa, Luiz Felipe de Pinho.
Espaços com propriedades especiais, lineabilidade e espaçabilidade / Luiz Felipe de Pinho Sousa. - João Pessoa, 2021.
96 f.

Orientação: Jamilson Ramos Campos.
Dissertação (Mestrado) - UFPB/CCEN.

1. Lineabilidade. 2. Espaçabilidade. 3. Espaços invariantes de sequências. 4. Funções não-contrativas. 5. Funções fortemente não-contrativas. I. Campos, Jamilson Ramos. II. Título.

UFPB/BC CDU: 512.624.5 (043)

Espaços com propriedades especiais, lineabilidade e espaçabilidade

por

Luiz Felipe de Pinho Sousa

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós–Graduação em Matemática da Universidade Federal da Paraíba como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Análise

Aprovada em 26 de Julho de 2021.

Banca Examinadora:

Gustavo da Silva Araújo

Prof. Dr. Gustavo da Silva Araújo – UEPB
(Examinador Externo)

Joedson Silva dos Santos

Prof. Dr. Joedson Silva dos Santos – UFPB
(Examinador Interno)

Jamilson Ramos Campos

Prof. Dr. Jamilson Ramos Campos – UFPB
(Orientador)

À minha família.

Agradecimentos

A Deus, pela realização de um grande sonho.

À minha esposa, Alana Ermília, por todo apoio e compreensão nos momentos em que mais precisei, me ajudando a suportar os inúmeros momentos de pressão e dificuldade com seu amor.

A meus pais, Antonio Pereira de Sousa e Tereza Dias de Pinho Sousa, por toda a educação e por sempre acreditarem em mim e meu irmão, Erico Eduardo de Pinho Sousa, que mesmo à sua maneira sempre me encorajou a seguir em frente.

À minha família, por sempre me incentivar a seguir no caminho da educação, em busca de uma vida melhor.

Ao meu orientador, professor e amigo, Jamilson Ramos Campos, por toda a paciência e ajuda, sempre buscando me passar o máximo de conhecimento e incentivo em todas as etapas deste trabalho.

Aos professores da Universidade Regional do Cariri - URCA, a qual tenho grande orgulho de ter sido aluno da licenciatura em Matemática. Especialmente aos professores Ricardo Rodrigues de Carvalho, por suas excelentes aulas na inesquecível turma de análise na reta, Paulo Cesar Cavalcante de Oliveira (PC), por toda ajuda no nosso primeiro contato com análise e por fornecer tantos materiais de estudo e a Antonio Edinardo de Oliveira, um grande professor que me deu a oportunidade de iniciar a vida acadêmica como seu orientando, sempre nos passando muita confiança e conhecimentos.

A todos os professores do PPGMAT-UFPB que tive a honra de ser aluno, pois deram grandes contribuições técnicas e morais para me tornar um matemático melhor.

Aos professores Gustavo da Silva Araújo e Joedson Silva dos Santos, membros da Banca Examinadora, por terem aceitado nosso convite, dando assim importantes contribuições para o trabalho.

A todos os colegas e amigos do período de graduação, Gabriel, Gildson, Valdete, Sandro, J. Marcos, Daniel, Elias, Pedro Sales, Ricardo, Henrique, e muitos outros que gostaria de citar, que sabem o quão importantes foram na minha caminhada.

Aos colegas e amigos da UFPB. Em especial aos que me acompanham desde a época da graduação, Lucas Machado, Matheus Evangelista, Paulo Vicente e Alessandro Fernandes.

A todos os meus amigos e professores da cidade de Assaré - CE. Em especial meus amigos, Elvis, Germano e Vinícius.

À CAPES e ao CNPq pelo apoio financeiro.

Resumo

Neste trabalho buscamos explorar e estudar a teoria de lineabilidade e espaçabilidade no contexto dos espaços de sequências. Como preliminares, estudamos a teoria básica necessária, com atenção especial aos espaços de sequências envolvidos. Apresentamos o conceito de espaços invariantes de sequências sobre um espaço de Banach X, que abstrai diversos espaços de sequências já conhecidos. Com este conceito e com as técnicas adequadas, apresentamos resultados de lineabilidade e espaçabilidade em conjuntos, quando não-vazios, formados por sequências com propriedades especiais. Ainda neste ambiente de estudo, apresentamos resultados de espaçabilidade envolvendo algumas funções e sequências de funções com propriedades especiais que, sob certas restrições, implicam em espaçabilidade maximal dos conjuntos estudados.

Palavras-chave: Lineabilidade, espaçabilidade, espaços invariantes de sequências, funções não-contrativas, funções fortemente não-contrativas.

Abstract

In this work we study the theory of lineability and spaceability in the context of sequence spaces. As a background, we study the necessary basic theory, with special attention to the involved sequence spaces. We present the concept of invariant sequence spaces over some Banach space X, which abstracts several well known sequence spaces. With this concept and the appropriate techniques, we present lineability and spaceability results in sets, when these are not empty, formed by sequences with special properties. Also in this environment, we present spaceability results involving some functions and sequences of functions with special properties that, under certain restrictions, imply maximal spaceability of the studied sets.

Keywords: Lineability, spaceability, invariant sequence spaces, noncontractive functions, strongly noncontractive functions.

Sumário

Notações

A seguir, listamos algumas notações utilizadas neste trabalho:

- $\mathbb{N}$ denota o conjunto dos números naturais $\{1, 2, 3, \ldots\}$;
- $\mathbb{K}$ denota o corpo dos números reais $\mathbb{R}$ ou o corpo dos números complexos $\mathbb{C}$;
- E, F, G, X e Y denotam espaços vetoriais normados;
- $S(X)$ denota um espaço invariante de sequências sobre o espaço X;
- $\mathcal{L}(E, F)$ denota o conjunto de todos os operadores lineares e contínuos de E em F;
- $B[\delta; a]$ denota a bola fechada de centro a e raio δ;
- B_E e S_E denotam, respectivamente, a bola unitária fechada no espaço E e a esfera unitária no espaço E;
- $\overline{E}$ e E' denotam o fecho e o dual topológico do espaço E, respectivamente;
- $\dim E$ denota a dimensão do espaço E;
- $\mathrm{Im}(T)$ e $\ker(T)$ denotam, respectivamente, a imagem e o núcleo da aplicação T;
- $\mathrm{int}\, A$ denota o interior do conjunto A;
- Id_E denota a aplicação identidade em E;
- e_n denota a sequência $(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$ que, com exceção do n-ésimo termo, todos os outros são iguais a zero;
- $\mathrm{Graf}\,(T)$ denota o gráfico do operador T;
- $J_E : E \to E''$ denota o mergulho canônico de E em E'';
- $\|\cdot\|_1$ denota a norma da soma $\|\cdot\|_1 : E \times F \to [0, \infty)$ dada por $\|(x, y)\|_1 = \|x\|_E + \|y\|_F$;
- $[x]$ denota o espaço vetorial gerado pelo vetor x.

Introdução

A teoria de lineabilidade e espaçabilidade tem se tornado, nas últimas décadas, alvo de estudos de muitos pesquisadores. Falando de modo simples, esta área busca encontrar estruturas lineares em conjuntos que, à primeira vista, não apresentam qualquer indício de linearidade.

A título de exemplo do que estamos falando, descrevemos uma parte importante desse contexto. Uma questão de destaque que remonta aos primórdios da análise era assim enunciada:

Existe alguma função real contínua cuja derivada não exista em nenhum ponto?

Em 1872, K. Weierstrass apresenta um exemplo concreto de uma função com essa propriedade, que logo seria conhecida como "monstro de Weierstrass". Apesar de surpreendente para a época, esse resultado não dimensionava o quão "grande" era o conjunto formado por funções desta natureza. O matemático S. Banach mostrou em seu trabalho [7] de 1931, como consequência do Teorema da Categoria de Baire, que o conjunto das funções contínuas em $[0, 1]$ que não possuem derivada em nenhum ponto do intervalo $[0, 1]$ contém uma interseção enumerável de abertos densos em $\mathcal{C}[0, 1]$ e que também é denso. Em contrapartida, neste sentido da categoria de Baire, ele conseguiu mostrar que o conjunto dessas funções é muito maior que o conjunto das funções que possuem derivada em pelo menos algum ponto de $[0, 1]$. Foi então que V. I. Gurariy, em [20] no ano de 1966, provou que o conjunto das funções reais que são contínuas e não possuem derivada em nenhum ponto, possui, a menos da função identicamente nula, um espaço vetorial de dimensão infinita.

O resultado apresentado por Gurariy foi o primeiro no sentido de definir e estabelecer os conceitos de lineabilidade e espaçabilidade, embora a terminologia só tenha se consolidado a partir de seu trabalho [21], de 2004. Mais precisamente, ele definiu: Sendo X um espaço vetorial e μ um número cardinal, um subconjunto A de X será *μ-lineável*, se $A \cup \{0\}$ contém um espaço vetorial de dimensão μ. Caso X seja munido de uma topologia e, o espaço vetorial de dimensão μ encontrado em $A \cup \{0\}$ for fechado, dizemos que A é μ-espaçável.

Desde então, a teoria passou a ser cada vez mais explorada e passou a ser aplicada em diversos contextos e áreas, sempre na busca de estruturas lineares onde imaginava-se não existir sequer uns poucos elementos. A exemplo desse contexto e dessa busca por lineabilidade e espaçabilidade, podemos citar trabalhos sobre espaços de sequências, espaço de operadores que atingem norma, subconjuntos de funções reais sobrejetivas em todo ponto, curvas de Peano, além de muitas outros. Os trabalhos [1, 3, 8] e [33], e as referências que estes contêm, são alguns ótimos exemplos para os temas citados.

Os conceitos originais de Gurariy, com o passar do tempo, foram sendo trabalhados e novas variações e generalizações, para dar conta de novas estruturas, foram sendo desenvolvidas. Algumas delas, já bem estabelecidas e exploradas, tratam-se de *Lineabilidade maximal (espaçabilidade maximal)* e *Algebrabilidade*, as quais podem ser vistas com mais detalhes em [4, 5] e [9]. Mais recentemente, nos últimos cinco anos, outras vertentes interessantes surgiram, abrindo mais um leque de possibilidades a serem estudadas. É o caso do conceito de (α, β)-*lineabilidade*, apresentado por V. V. Fávaro, D. Pellegrino e D. Tomaz em seu trabalho [18].

O leitor interessado em um texto referência para o estudo da teoria de lineabilidade e espaçabilidade, em diversos contextos, encontrará no livro [6] um verdadeiro compêndio sobre o assunto.

Neste trabalho, nosso foco está voltado para a teoria de lineabilidade e espaçabilidade em ambientes de espaços de sequências, tendo os trabalhos [13] e [15] como referências fundamentais.

Um dos primeiros resultados, nesse contexto da teoria, dá conta de que se $p > q \geq 1$, então o conjunto $\ell_p - \ell_q$ é $\mathfrak{c}$-lineável (ver [27]). Num sentido bem mais abrangente, D. Kitson e R. M. Timoney mostraram, em seu trabalho [23] de 2011, ainda mais: que $\ell_p - \bigcup_{0<q<p} \ell_q$ é espaçável. Na verdade, o resultado Kitson e Timoney é muito generalista e pode ser aplicado em vários contextos. Contudo, por estar restrito apenas a espaços de Fréchet, não contempla o caso não-localmente convexo, $0 < p < 1$.

Estudaremos um resultado que prova o caso de espaçabilidade para o conjunto $\ell_p(X) - \bigcup_{q \in \Gamma} \ell_q(X)$, $p > 0$, sobre um espaço X de Banach, onde Γ é um subconjunto qualquer de $(0, \infty]$. Ou seja, um resultado que contempla agora o caso não-localmente convexo. A essência desse estudo, presente em [13], está na definição de uma classe abstrata de espaços de sequências, chamada espaços invariantes de sequências, que também expande o contexto para outros espaços de sequências além de $\ell_p(X)$. A técnica estudada também pode ser utilizada no contexto dos operadores lineares que atingem norma, o qual também apresentaremos.

Nessa mesma linha, apresentaremos também um estudo que considera situações ainda mais gerais sobre espaços de sequências. Neste ambiente, definido em [15], consideram-se agora dois espaços de Banach X e Y e uma função $f : X \to Y$ pertencente a classes abstratas de funções, chamadas não-contrativas e fortemente não-contrativas. Serão estudados, então, conjuntos formados por sequências $(x_n)_{j=1}^{\infty}$ em espaços invariantes de sequências $S(X)$ sobre X, de modo que $(f(x_j))_{j=1}^{\infty}$ não pertence a um dos espaços

$$\bigcup_{q\in\Gamma} \ell_q(Y), \quad \bigcup_{q\in\Gamma} \ell_q^w(Y) \quad \text{ou} \quad c_0(Y).$$

Será possível perceber o quão mais gerais são esses resultados mediante os exemplos de objetos que são obtidos.

Por fim, serão apresentadas, para um ambiente com hipóteses um pouco mais restritivas, condições de espaçabilidade maximal para conjuntos de sequências, trabalhando agora com uma sequência de funções em vez de apenas uma função. Para este caso, é apresentado um resultado de espaçabilidade maximal nos espaços de sequências de Nakano.

Estrutura dos tópicos apresentados no texto

No Capítulo 1, começaremos apresentando alguns dos resultados que são base para qualquer estudo em Análise Funcional. Daremos ênfase aos espaços de sequências, que são as principais estruturas que buscaremos lineabilidade e espaçabilidade nos capítulos seguintes. Apenas observamos que, apesar dessas preliminares, utilizaremos muitos resultados clássicos e bem conhecidos de Análise e de Análise Funcional sem maiores referências.

No Capítulo 2, vamos apresentar os conceitos formais da teoria de lineabilidade e espaçabilidade, começando com algumas considerações sobre cardinalidade. Apresentaremos a classe dos espaços invariantes de sequências, com a finalidade de generalizar alguns resultados de lineabilidade sobre espaços de sequências. No final do capítulo, iremos aplicar a mesma técnica para explorar um resultado no contexto dos operadores lineares que atingem norma.

O Capítulo 3 começará com a apresentação das funções não-contrativas e fortemente não-contrativas, que serão responsáveis, junto com um refinamento das técnicas do capítulo anterior, por generalizar ainda mais os resultados já vistos no capítulo anterior. Essas técnicas envolvem mais contextos como, por exemplo, aplicações lineares, polinômios homogêneos, aplicações r-regulares e muitos outros. São apresentados resultados de espaçabilidade maximal e uma aplicação para os espaços de Nakano.

Capítulo 1

Preliminares

Vamos apresentar neste capítulo as definições e resultados que serão fundamentais para o entendimento e desenvolvimento do assunto estudado no texto. Uma boa parte desses resultados terão suas demonstrações omitidas para que possamos ter uma melhor fluidez na apresentação do trabalho. Poderemos encontrar a maioria dessas demonstrações nas principais referências usadas na construção deste capítulo, como nos livros [14] e [25], além de trabalhos como [16, 17] e [29]. Sempre que necessário faremos menção à devida referência ao longo do texto.

1.1 Resultados de Análise Funcional

Nesta seção, serão apresentadas algumas definições e resultados clássicos da Análise Funcional, os quais serão utilizados de forma direta ou indireta ao longo do texto.

Definição 1.1.1. Seja E um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$. Se $0 < p \leq 1$, uma *p-norma* em E é uma aplicação $\|\cdot\|_E : E \to [0, \infty)$ que satisfaz as seguintes condições:

N1) $\|x\|_E \geq 0$, para todo $x \in E$, e $\|x\|_E = 0$ se, e somente se, $x = 0$.

N2) $\|\lambda x\|_E = |\lambda| \cdot \|x\|_E$, para todos $\lambda \in \mathbb{K}$ e $x \in E$.

N3) $\|x + y\|_E^p \leq \|x\|_E^p + \|y\|_E^p$, para todos x e y em E.

No caso em que $p = 1$, chamaremos a p-norma simplesmente de *norma*. O par $(E, \|\cdot\|_E)$ é chamado de *espaço vetorial p-normado* (*espaço vetorial normado*, quando $p = 1$), ou simplesmente, *espaço p-normado* (*espaço normado*, quando $p = 1$). Quando não houver risco de ambiguidade, escreveremos $\|\cdot\|$ no lugar de $\|\cdot\|_E$. Assim como no caso do corpo dos escalares, um espaço p-normado é um espaço métrico com a métrica dada por

$$d(x, y) = \|x - y\|^p.$$

Neste caso dizemos que a métrica d é induzida pela p-norma $\|\cdot\|$. Um espaço p-normado pode ou não ser completo com esta métrica e em caso afirmativo obtemos a seguinte definição:

Definição 1.1.2. Sejam $0 < p \leq 1$ e E um espaço p-normado. Dizemos que E é um *espaço p-Banach* (*espaço de Banach*, caso $p = 1$) se for completo com a métrica induzida pela p-norma (*norma*, caso $p = 1$).

Por outro lado, podemos também definir a seguinte função:

Definição 1.1.3. Seja E um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$. Uma *quasi-norma* em E é uma aplicação $\|\cdot\|_E : E \to [0, \infty)$ que satisfaz as seguintes condições:

(i) $\|x\|_E \geq 0$, para todo $x \in E$, e $\|x\|_E = 0$ se, e somente se, $x = 0$.

(ii) $\|\lambda x\|_E = |\lambda| \cdot \|x\|_E$, para todos $\lambda \in \mathbb{K}$ e $x \in E$.

(iii) Existe uma constante $c \geq 1$ tal que $\|x + y\|_E \leq c.(\|x\|_E + \|y\|_E)$, para todos x e y em E.

No caso em que $c = 1$ a quasi-norma é simplesmente uma norma. O par $(E, \|\cdot\|_E)$ é chamado de *espaço vetorial quasi-normado*, ou simplesmente, *espaço quasi-normado*.

Assim como no caso dos espaços p-Banach, os espaços que são completos com a métrica induzida por uma quasi-norma recebem uma denominação especial.

Definição 1.1.4. Seja E um espaço quasi-normado. Dizemos que E é um espaço *quasi-Banach* se for completo com a métrica induzida pela quasi-norma.

O próximo resultado nos dá uma condição suficiente e necessária para que um subespaço de um espaço de Banach também seja um espaço de Banach.

Proposição 1.1.5. *Sejam E um espaço de Banach e F um subespaço vetorial de E. Então F será um espaço de Banach com a norma induzida de E se, e somente se, F for fechado em E.*

Demonstração: Suponhamos inicialmente que F é um espaço de Banach e considere $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência em F tal que $x_n \to x \in E$. Logo, $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência de Cauchy em F e assim existe um elemento $y \in F$ tal que $x_n \to y$. Da unicidade do limite temos $x = y \in F$. Portanto, F é fechado em E.

Reciprocamente, vamos supor agora que F é fechado em E. Seja $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência de Cauchy em F. Logo, $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é de Cauchy em E e, portanto, existe $x \in E$ tal que $x_n \to x$. Como F é fechado em E, segue que $x \in F$, provando que F é completo e, consequentemente, espaço de Banach. ■

Observação 1.1.6. O resultado da Proposição 1.1.5 continua válido considerando E um espaço p-Banach e F um espaço p-normado, uma vez que a convexidade dos espaços não faz parte de sua demonstração.

Vejamos agora a definição de uma classe de espaços normados que são muito úteis em diversos contextos, graças às suas características especiais.

Definição 1.1.7. Seja E um espaço vetorial normado. Dizemos que o espaço E é *separável* se ele contiver um subconjunto denso e enumerável. De modo geral, espaços métricos com essa propriedade também são ditos separáveis.

Apresentamos a partir daqui um pouco sobre um dos principais objetos de estudos na área de Análise Funcional: os operadores lineares.

Definição 1.1.8. Sejam E e F espaços normados. Dizemos que um operador $T : E \to F$ é *linear* se as seguintes propriedades forem satisfeitas:

(i) $T(x + y) = T(x) + T(y)$;

(ii) $T(\lambda x) = \lambda T(x)$.

Se para todos $x_0 \in E$ e $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $\|T(x) - T(x_0)\| < \varepsilon$ sempre que $x \in E$ e $\|x - x_0\| < \delta$, então diremos que T é *contínuo*.

Denotaremos por $\mathcal{L}(E, F)$ o conjunto de todos os operadores lineares contínuos de E e F, que é um espaço vetorial com as operações usuais de funções. Quando $F = \mathbb{K}$, escrevemos E' no lugar de $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$. Esse espaço é chamado de *dual topológico de* E, e seus elementos são *funcionais lineares contínuos*. Além disso,

Definição 1.1.9. Dizemos que dois espaços normados E e F são isomorfos, se existir um operador linear contínuo bijetor $T : E \to F$ tal que seu operador inverso $T^{-1} : F \to E$ também é contínuo. Quando isso ocorre, chamamos T de *isomorfismo*.

A próxima definição fala sobre a classe dos operadores lineares que tem a propriedade de preservar distâncias.

Definição 1.1.10. Um operador linear $T : E \to F$ tal que $\|T(x)\| = \|x\|$, para todo $x \in E$, é chamado de *isometria linear*.

Veremos agora um resultado que caracteriza operadores lineares contínuos.

Teorema 1.1.11. *Sejam E e F espaços normados sobre $\mathbb{K}$ e $T : E \to F$ linear. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(a) *T é lipschitziano.*

(b) *T é uniformemente contínuo.*

(c) *T é contínuo.*

(d) *T é contínuo em algum ponto de E.*

(e) *T é contínuo na origem.*

(f) $\sup\limits_{x \in B_E} \|T(x)\| < \infty$.

(g) *Existe uma constante $C \geq 0$ tal que $\|T(x)\| \leq C\|x\|$, para todo $x \in E$.*

Demonstração: As implicações (a)⇒(b)⇒(c)⇒(d) já são válidas num contexto geral dos espaços métricos, sem depender da linearidade de T.
(d)⇒(e) Suponha que T é contínuo no ponto $x_0 \in E$. Logo, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $\|T(x) - T(x_0)\| < \varepsilon$ sempre que $\|x - x_0\| < \delta$. Tomemos $x \in E$ tal que $\|x - 0\| = \|x\| < \delta$. Então $\|(x + x_0) - x_0\| = \|x\| < \delta$ e portanto,

$$\begin{aligned} \|T(x) - T(0)\| &= \|T(x) - 0\| \\ &= \|T(x)\| \\ &= \|T(x) + T(x_0) - T(x_0)\| \\ &= \|T(x + x_0) - T(x_0)\| < \varepsilon, \end{aligned}$$

provando que T é contínuo na origem.
(e)⇒(f) Por (e), existe $\delta > 0$ tal que $\|T(x)\| < 1$ sempre que $\|x\| < \delta$. Se $\|x\| \leq 1$, teremos $\|\frac{\delta}{2}x\| < \delta$ e então $\frac{\delta}{2}\|T(x)\| = \|T(\frac{\delta}{2}x)\| < 1$. Daí, $\|T(x)\| < \frac{2}{\delta}$ e pela definição de supremo, concluímos que

$$\sup_{x \in B_E} \|T(x)\| \leq \frac{2}{\delta} < \infty.$$

(f)⇒(g) Para cada $0 \neq x \in E$, temos

$$\frac{\|T(x)\|}{\|x\|} = \left\| T\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \right\| \leq \sup\{\|T(y)\| : \|y\| \leq 1\}$$

e portanto

$$\|T(x)\| \leq \sup\{\|T(y)\| : \|y\| \leq 1\} \cdot \|x\|$$

para todo $x \neq 0$. O caso em que $x = 0$ segue trivialmente.
(g)⇒(a) Dados $x_1, x_2 \in E$, tem-se

$$\|T(x_1) - T(x_2)\| = \|T(x_1 - x_2)\| \leq C\|x_1 - x_2\|$$

e portanto T é lipschitziano com constante C. ∎

Com esse teorema anterior, vemos que os operadores lineares contínuos são exatamente os que transformam conjuntos limitados do domínio em conjuntos limitados no contradomínio. Graças a isso, muitas vezes os operadores lineares contínuos são chamados de *operadores lineares limitados*.

Podemos caracterizar uma norma para o espaço $\mathcal{L}(E,F)$ com o próximo resultado.

Proposição 1.1.12. *Sejam E e F espaços normados.*

(a) *A expressão*

$$\|T\| = \sup\{\|T(x)\| : \ x \in E \text{ e } \|x\| \leq 1\}$$

define uma norma em $\mathcal{L}(E,F)$.

(b) *Para todos $T \in \mathcal{L}(E,F)$ e $x \in E$, temos $\|T(x)\| \leq \|T\| \cdot \|x\|$.*

(c) *Se F é um espaço de Banach, então $\mathcal{L}(E,F)$ também o é.*

Demonstração: Veja [14, Proposição 2.1.4]. ■

Apresentaremos agora alguns dos principais teoremas clássicos de Análise Funcional. De início, para a demonstração Teorema de Banach-Steinhaus, também conhecido como Princípio da Limitação Uniforme, precisaremos do chamado Teorema de Baire, cuja demonstração pode ser encontrada em [14, Proposição 2.3.1].

Teorema 1.1.13 (Teorema de Baire)**.** *Sejam (M,d) um espaço métrico completo e $(F_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência de subconjuntos fechados de M tais que $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$. Então, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que F_{n_0} tem interior não-vazio.*

Tendo em vista este importante resultado de Topologia Geral, vejamos o Teorema da Limitação Uniforme:

Teorema 1.1.14 (Teorema de Banach-Steinhaus)**.** *Sejam E um espaço de Banach, F um espaço normado e $(T_i)_{i\in I}$ uma família de operadores em $\mathcal{L}(E,F)$ satisfazendo a condição de que para cada $x \in E$ existe $C_x < \infty$ tal que*

$$\sup_{i\in I} \|T_i(x)\| < C_x. \tag{1.1}$$

Então $\sup_{i\in I} \|T_i\| < \infty$.

Demonstração: Como cada T_i é contínuo, segue que o conjunto

$$\{x \in E : \ \|T_i(x)\| \leq n\} = (\|\cdot\| \circ T_i)^{-1}([0,n])$$

é fechado para cada $n \in \mathbb{N}$ e cada $i \in I$. Sendo $A_n := \{x \in E : \sup_{i\in I} \|T_i(x)\| \leq n\}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, veja que

$$\begin{aligned} x \in A_n &\Leftrightarrow \sup_{i\in I} \|T_i(x)\| \leq n \\ &\Leftrightarrow \|T_i(x)\| \leq n, \forall i \in I \\ &\Leftrightarrow x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in E : \sup_{i\in I} \|T_i(x)\| \leq n\}. \end{aligned}$$

Logo $A_n = \sup_{i\in I} \|T_i(x)\| \leq n\}$, donde segue que, para todo $n \in \mathbb{N}$, o conjunto A_n é fechado por ser a interseção de fechados. Agora note que $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. De fato, por definição, $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subseteq E$. Além disso, dado $x \in E$, de (1.1), existe $C_x < \infty$ tal que $\sup\limits_{i\in I} \|T_i(x)\| < C_x$. Como $C_x \in \mathbb{R}$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_0 > C_x$ e assim

$$\sup_{i\in I} \|T_i(x)\| < n_0,$$

donde concluímos que $x \in A_{n_0} \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Daí, pelo Teorema de Baire, algum A_n possui interior não-vazio. Seja $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\operatorname{Int}(A_{n_0}) \neq \emptyset$ e sejam $a \in \operatorname{Int}(A_{n_0})$ e $r > 0$ tais que $\{x \in E : \|x - a\| \leq r\} \subseteq \operatorname{Int}(A_{n_0})$.

Sendo $y \in E$ com $\|y\| \leq 1$, se $x = a + ry$, então segue que

$$\|x - a\| = \|ry\| = r\|y\| \leq r$$

e portanto $x \in A_{n_0}$. Assim,

$$\|T_i(x - a)\| \leq \|T_i(x)\| + \|T_i(a)\| \leq n_0 + n_0, \ \forall i \in I$$

e temos

$$\begin{aligned} \|T_i(ry)\| = \|T_i(x - a)\| \leq 2n_0, \ \forall i \in I \ &\Rightarrow \ \|T_i(y)\| \leq \frac{2n_0}{r}, \ \forall i \in I \\ &\Rightarrow \ \sup_{x\in B_E} \|T_i(x)\| = \|T_i\| \leq \frac{2n_0}{r}, \ \forall i \in I \\ &\Rightarrow \ \sup_{i\in I} \|T_i\| \leq \frac{2n_0}{r} < \infty. \end{aligned}$$

■

Diferentemente do que estamos habituados a ver em Análise na Reta, a simples presença da linearidade faz com que o limite pontual de operadores lineares contínuos seja também um operador linear e contínuo. É o que diz o

Corolário 1.1.15. *Sejam E um espaço de Banach, F um espaço normado e $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ uma sequência de operadores em $\mathcal{L}(E,F)$ tal que para todo $x \in E$ tem-se $\sup_n \|T_n(x)\| < \infty$. Então, o operador $T : E \to F$ dado por $T(x) = \lim\limits_{n\to\infty} T_n(x)$ é linear e contínuo.*

Demonstração: Veja [14, Corolário 2.3.3]. ■

Lembremos que se $T : E \to F$ é um operador entre espaços de Banach, dizemos que T é aberto se $T(A)$ é aberto em F sempre que A for aberto em E. O próximo teorema nos trará as condições para que um operador entre espaços de Banach seja aberto. Sua demonstração pode ser encontrada em [14, Teorema 2.4.2].

Teorema 1.1.16 (Teorema da Aplicação Aberta)**.** *Sejam E e F espaços de Banach e $T : E \to F$ linear, contínuo e sobrejetor. Então T é uma aplicação aberta. Em particular, todo operador linear contínuo e bijetor entre espaços de Banach é um isomorfismo.*

Sejam E e F espaços normados e $T : E \to F$ um operador linear. O *gráfico* de T é definido como o conjunto

$$\mathrm{Graf}\,(T) = \{(x,y) :\ x \in E \ e \ y = T(x)\} = \{(x, T(x)) :\ x \in E\} \subseteq E \times F.$$

Note que Graf$\,(T)$ é um subespaço vetorial de $E \times F$. O Teorema do Gráfico fechado, o qual estamos prestes a apresentar, nos garante que a continuidade de T é equivalente ao fato de Graf$\,(T)$ ser fechado em $E \times F$.

Teorema 1.1.17 (Teorema do Gráfico Fechado)**.** *Sejam E e F espaços de Banach e $T : E \to F$ um operador linear. Então T é contínuo se, e somente se, Graf(T) é fechado em $E \times F$.*

Demonstração: Supondo T contínuo, a função

$$f : E \times F \to \mathbb{R},\ f(x,y) = \|T(x) - y\|$$

é contínua e portanto Graf$\,(T) = f^{-1}(\{0\})$ é fechado, por ser a imagem inversa do conjunto fechado $\{0\}$ pela função contínua f.

Reciprocamente, suponha Graf$\,(T)$ fechado.

Afirmação: O espaço $E \times F$ é Banach com a norma da soma $\|\cdot\|_1$.

De fato, seja $((x_n, y_n))_{n=1}^{\infty}$ uma sequência de Cauchy em $E \times F$. Logo, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $m, n \geq n_0$ tem-se

$$\|(x_n, y_n) - (x_m, y_m)\|_1 < \varepsilon. \tag{1.2}$$

Como $\|(x_n, y_n) - (x_m, y_m)\|_1 = \|x_n - x_m\| + \|y_n - y_m\|$, segue de (1.2) que

$$n, m \geq n_0 \Longrightarrow \|x_n - x_m\| < \varepsilon \text{ e } \|y_n - y_m\| < \varepsilon$$

e $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ e $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ são sequências de Cauchy em E e F, respectivamente. Como estes são espaços de Banach, existem $x \in E$ e $y \in F$ tais que $x_n \to x$ e $y_n \to y$. Resta-nos mostrar que $(x_n, y_n) \to (x, y)$.

Com efeito, do que vimos acima, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq n_0 \Longrightarrow \|x_n - x\| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ e } \|y_n - y\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Daí,

$$n \geq n_0 \Longrightarrow \|(x_n, y_n) - (x, y)\|_1 = \|x_n - x\| + \|y_n - y\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

e assim $E \times F$ é um espaço de Banach.

Agora, definamos a função

$$\pi : \mathrm{Graf}\,(T) \to E, \ \pi((x, T(x))) = x.$$

É fácil ver que π é linear, pois dados $(x, T(x)),\ (y, T(y)) \in E \times F$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, temos

$$\begin{aligned}\pi((x, T(x)) + \lambda(y, T(y))) &= \pi((x + \lambda y, T(x) + \lambda T(y))) \\ &= x + \lambda y \\ &= \pi((x, T(x))) + \lambda\pi((y, T(y))).\end{aligned}$$

Além disso, o operador π é bijetor. De fato, a sobrejetividade de π é imediata e considerando pontos $(x, T(x)),\ (y, T(y)) \in \mathrm{Graf}\,(T)$ tais que $\pi((x, T(x))) = \pi((y, T(y)))$, temos $x = y$ e como T é função, segue que $T(x) = T(y)$. Assim $(x, T(x)) = (y, T(y))$, donde concluímos a injetividade de π.

Mais ainda, π é contínua, pois para todo $x \in E$ tem-se

$$\|\pi(x, T(x))\| = \|x\| \leq \|x\| + \|T(x)\| = \|(x, T(x))\|_1.$$

Assim, como π é um operador linear contínuo e bijetor, o Teorema da Aplicação Aberta nos garante que π^{-1} é contínua e, portanto, existe $C > 0$ tal que $\|(x, T(x))\|_1 \leq C\|x\|$ para todo $x \in E$. Assim, para todo $x \in E$, temos

$$\|T(x)\| \leq \|T(x)\| + \|x\| = \|(x, T(x))\|_1 \leq C\|x\|$$

e concluímos que T é contínuo. ■

Observação 1.1.18. Apesar de trabalharmos com espaços de Banach no Teorema do Gráfico Fechado, o resultado também é válido ao trabalharmos com espaços p-Banach quaisquer, já que a demonstração acima da convexidade desses espaços.

O Teorema de Hahn-Banach e seus corolários (também conhecidos como Teoremas de Hahn-Banach) são, sem dúvida, alguns dos mais importantes resultados da Análise Funcional. Eles possuem aplicações tanto na própria Análise Funcional como em outras áreas afins da matemática.

Teorema 1.1.19 (Teorema de Hahn-Banach)**.** *Sejam E um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ e $p : E \to \mathbb{R}$ uma função que satisfaz*

$$p(ax) = |a|\, p(x), \text{ para todo } a \in \mathbb{K} \text{ e todo } x \in E, \text{ e}$$

$$p(x+y) \leq p(x) + p(y), \text{ para quaisquer } x, y \in E.$$

Se $G \subseteq E$ é um subespaço vetorial e $\varphi : G \to \mathbb{K}$ é um funcional linear tal que $|\varphi(x)| \leq p(x)$ para todo $x \in G$, então existe um funcional linear $\widetilde{\varphi} : E \to \mathbb{K}$ que estende φ a E e que satisfaz $|\widetilde{\varphi}(x)| \leq |p(x)|$ para todo $x \in E$.

Demonstração: Veja [14, Proposição 3.1.2]. ■

Vejamos agora algumas das principais consequências deste teorema. Quando estivermos nos referindo ao Teorema de Hahn-Banach, estaremos nos referindo ao próprio ou a algum desses corolários.

Corolário 1.1.20 (Teorema de Hahn-Banach para espaços normados)**.** *Seja G um subespaço de um espaço normado E sobre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ e seja $\varphi : G \to \mathbb{K}$ um funcional linear contínuo. Então existe um funcional linear contínuo $\widetilde{\varphi} : E \to \mathbb{K}$ cuja restrição a G coincide com φ e $\|\widetilde{\varphi}\| = \|\varphi\|$.*

Demonstração: Inicialmente, definamos $p : E \to \mathbb{R}$ pondo $p(x) = \|\varphi\|\|x\|$. Veja que para $a \in \mathbb{K}$ e $x, y \in E$, tem-se

$$p(ax) = \|\varphi\|\|ax\| = \|\varphi\||a|\|x\| = |a|\|\varphi\|\|x\| = |a|p(x)$$

e

$$p(x+y) = \|\varphi\|\|x+y\| \leq \|\varphi\|(\|x\| + \|y\|) = \|\varphi\|\|x\| + \|\varphi\|\|y\| = p(x) + p(y).$$

Como $\varphi : G \to \mathbb{K}$ é um funcional linear, para todo $x \in G$, segue que

$$|\varphi(x)| \leq \|\varphi\|\|x\| = p(x).$$

Do Teorema de Hahn-Banach, existe um funcional linear contínuo $\widetilde{\varphi} : E \to \mathbb{K}$ que estende φ a E, ou seja, $\varphi(x) = \widetilde{\varphi}(x)$ para todo $x \in G$, e que $|\widetilde{\varphi}(x)| \leq p(x) = \|\varphi\|\|x\|$ para todo $x \in E$. Disso, segue que $\|\widetilde{\varphi}\| \geq \|\varphi\|$ e de $|\widetilde{\varphi}(x)| \leq p(x) = \|\varphi\|\|x\|$ e $\|\widetilde{\varphi}\| = \inf\{c : |\widetilde{\varphi}(x)| \leq c\|x\|, \ \forall x \in E\}$ concluímos que $\|\widetilde{\varphi}\| \leq \|\varphi\|$. Portanto, $\|\widetilde{\varphi}\| = \|\varphi\|$. ∎

Corolário 1.1.21. *Seja E um espaço normado. Para todo $x_0 \in E$, $x_0 \neq 0$, existe um funcional linear $\varphi \in E'$ tal que $\|\varphi\| = 1$ e $\varphi(x_0) = \|x_0\|$.*

Demonstração: Considere $G = [x_0] \subseteq E$. Nesse caso, podemos escrever cada elemento de G de maneira única como αx_0, com $\alpha \in \mathbb{R}$, e com isso definimos o funcional linear $\widetilde{\varphi} : G \to \mathbb{R}$, pondo $\widetilde{\varphi}(\alpha x_0) = \alpha\|x_0\|$. Obviamente, $\widetilde{\varphi}(x_0) = \|x_0\|$. Veja que, para todo $x \in G$ tem-se

$$|\widetilde{\varphi}(x)| = |\widetilde{\varphi}(\alpha x_0)| = |\alpha|\|x_0\| = \|\alpha x_0\| = \|x\|,$$

donde

$$|\widetilde{\varphi}(x)| = \|x\|.$$

Desta forma, temos $\|\widetilde{\varphi}\| \leq 1$ e como $\|x\| = |\widetilde{\varphi}(x)| \leq \|\widetilde{\varphi}\|\|x\|$ para todo $x \in G$, segue que $1 \geq \|\widetilde{\varphi}\|$, ou seja $\|\widetilde{\varphi}\| = 1$. Pelo corolário anterior, existe um funcional linear contínuo $\widetilde{\varphi} : E \to \mathbb{R}$ tal que $\widetilde{\varphi}(y) = \varphi(y)$, $\forall y \in [x_0]$ e $\|\widetilde{\varphi}\| = \|\varphi\|$. Portanto, concluímos que $\varphi(x_0) = \widetilde{\varphi}(x_0) = \|x_0\|$ e $\|\widetilde{\varphi}\| = \|\varphi\| = 1$. ∎

Corolário 1.1.22. *Sejam E um espaço normado, $E \neq \{0\}$ e $x \in E$. Então,*

$$\|x\| = \sup\{|\varphi(x)| : \varphi \in B_{E'}\} = \max\{|\varphi(x)| : \varphi \in B_{E'}\}.$$

Demonstração: É óbvio que para todo $\varphi \in E'$ com $\|\varphi\| \leq 1$, tem-se

$$|\varphi(x)| \leq \|\varphi\|\|x\| \leq \|x\|$$

donde segue que

$$\sup\{|\varphi(x)| : \varphi \in B_{E'}\} \leq \|x\|.$$

Por outro lado, assim como no corolário anterior, defina $\varphi_0 : [x] \to \mathbb{R}$ pondo $\varphi_0(\lambda x) = \lambda\|x\|$. Desta forma, existe um funcional linear contínuo $\varphi_1 : E \to \mathbb{R}$ que estende φ_0 e é tal que $\|\varphi_0\| = \|\varphi_1\| = 1$. Daí, fazendo $\lambda = 1$ obtemos

$$\varphi_0(x) = \|x\| = |\varphi_1(x)| \leq \sup\{|\varphi(x)| : \varphi \in B_{E'}\}.$$

Logo, $\|x\| = \sup\{|\varphi(x)| : \varphi \in B_{E'}\}$. Além disso, como $\|\varphi_1\| = 1$ e $|\varphi_1(x)| = \|x\|$

concluímos que

$$\|x\| = \sup\{|\varphi(x)| : \varphi \in B_{E'}\} = \max\{|\varphi(x)| : \varphi \in B_{E'}\}.$$

■

1.2 Espaços de sequências

Nessa seção apresentaremos alguns espaços de sequências que farão parte do estudo realizado por este trabalho. Ao longo desta seção, quando não estiver indicado, estaremos tomando sempre E um espaço normado e $0 < p < \infty$.

1.2.1 Sequências limitadas

O primeiro espaço de sequências a ser estudado será o das sequências limitadas.

Definição 1.2.1. Seja E um espaço normado. Dizemos que uma sequência $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ em E é *limitada* se existe uma constante $M \geq 0$ tal que $\|x_j\| \leq M$, para todo $j \in \mathbb{N}$. Denotamos po $\ell_\infty(E)$ o conjunto de todas as *sequências limitadas* em E. Quando $E = \mathbb{K}$, escrevemos apenas ℓ_∞ ao invés de $\ell_\infty(E)$.

A próxima proposição define uma norma, muito usual, não só para este espaço, mas também para outros espaços de sequências que veremos adiante.

Proposição 1.2.2. *Seja E um espaço normado. Então $\ell_\infty(E)$ é um espaço vetorial normado, onde a função $\|\cdot\|_\infty : \ell_\infty(E) \to \mathbb{R}$ dada por*

$$\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_\infty = \sup_j \|x_j\|$$

define uma norma em $\ell_\infty(E)$.

Demonstração: Obviamente a sequência nula é um elemento de $\ell_\infty(E)$. Dadas duas sequências $(x_j)_{j=1}^{\infty}$, $(y_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_\infty(E)$ e um escalar $\lambda \in \mathbb{K}$, existem constantes K_1 e K_2 positivas tais que $\|x_j\| \leq K_1$ e $\|y_j\| \leq K_2$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Assim, para todo $j \in \mathbb{N}$ temos

$$\|\lambda x_j + y_j\| \leq |\lambda|\|x_j\| + \|y_j\| \leq |\lambda|K_1 + K_2$$

e assim a sequência $\lambda(x_j)_{j=1}^{\infty} + (y_j)_{j=1}^{\infty} = (\lambda x_j + y_j)_{j=1}^{\infty}$ é limitada, ou seja, $\ell_\infty(E)$ é um espaço vetorial. Agora, note que $\|\cdot\|_\infty$ está bem definida pela própria definição de $\ell_\infty(E)$. Resta apenas verificar os axiomas de norma.

N1) Pela definição de norma, sabemos que $\|x_j\| \geq 0$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Logo,

$$\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{\infty} = \sup_j \|x_j\| \geq 0.$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{\infty} = 0 &\Leftrightarrow \sup_j \|x_j\| = 0 \\
&\Leftrightarrow \|x_j\| = 0, \ \forall j \in \mathbb{N} \\
&\Leftrightarrow x_j = 0, \quad \forall j \in \mathbb{N} \\
&\Leftrightarrow (x_j)_{j=1}^{\infty} \text{ é a sequência nula.}
\end{aligned}$$

N2) Dados $\lambda \in \mathbb{K}$ e $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_{\infty}(E)$, temos

$$\begin{aligned}
\|\lambda(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{\infty} &= \|(\lambda x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{\infty} = \sup_j \|\lambda x_j\| \\
&= \sup_j(|\lambda|\|x_j\|) = |\lambda| \sup_j \|x_j\| \\
&= |\lambda|\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{\infty}.
\end{aligned}$$

N3) Dados $(x_j)_{j=1}^{\infty},\ (y_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_{\infty}(E)$, temos

$$\begin{aligned}
\|(x_j)_{j=1}^{\infty} + (y_j)_{j=1}^{\infty}\|_{\infty} &= \|(x_j + y_j)_{j=1}^{\infty}\|_{\infty} = \sup_j \|x_j + y_j\| \\
&\leq \sup_j(\|x_j\| + \|y_j\|) \\
&\leq \sup_j \|x_j\| + \sup_j \|y_j\| \\
&= \|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{\infty} + \|(y_j)_{j=1}^{\infty}\|_{\infty}.
\end{aligned}$$

■

Encontramos em [24, Proposição 2.1] a demonstração do próximo resultado, que nos fornece as condições necessárias e suficientes para que o espaço $\ell_{\infty}(E)$ seja completo com sua norma usual. Embora essa demonstração tenha sido omitida, por sua relativa simplicidade, a completude de alguns outros espaços serão apresentadas mais adiante.

Proposição 1.2.3. *O espaço $(\ell_{\infty}(E),\ \|\cdot\|_{\infty})$ é Banach se, e somente se, E é um espaço de Banach.*

1.2.2 Sequências nulas e eventualmente nulas

Os dois espaços apresentados agora são subespaços de $\ell_\infty(E)$. Veremos que se pode munir ambos com a norma $\|\cdot\|_\infty$, induzida de $\ell_\infty(E)$, e que um deles será completo com essa norma.

A maioria das demonstrações dessa subseção foram omitidas por sua simplicidade.

Definição 1.2.4. Seja E um espaço normado. Definimos o espaço das *sequências nulas em E* pelo conjunto

$$c_0(E) = \{(x_j)_{j=1}^\infty \in E^{\mathbb{N}}; \|x_j\| \xrightarrow{j} 0\}.$$

Definição 1.2.5. Sejam E um espaço normado e $(x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_\infty(E)$. Se existe um índice $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_j = 0$ para todo $j \geq j_0$, então dizemos que a sequência $(x_j)_{j=1}^\infty$ é *eventualmente nula*. Denotamos por $c_{00}(E)$ o *espaço das sequências eventualmente nulas em E*.

Os espaços definidos anteriormente estão relacionados numa cadeia de inclusões. A proposição seguinte, de demonstração imediata (e assim omitida) estabelece esse fato.

Proposição 1.2.6. *Seja E um espaço normado. Então $c_{00}(E)$ é um subespaço vetorial de $c_0(E)$, que por sua vez é um subespaço vetorial de $\ell_\infty(E)$.*

Podemos explorar o espaço das sequências nulas em busca de separabilidade. Algo muito conhecido é que o espaço $c_0(\mathbb{K}) = c_0$ é separável (ver [14, Exemplo 1.6.4.]). Vamos então a um resultado mais geral.

Proposição 1.2.7. *Se E é um espaço normado e separável, então $c_0(E)$ também é separável.*

Demonstração: Sendo E separável, sabemos que E possui um subconjunto A que é denso e enumerável. Assim, dada qualquer sequência $y = (y_n)_{n=1}^\infty \in c_0(E) \subseteq E^{\mathbb{N}}$ e qualquer $\varepsilon > 0$, para todo n existe $x_n \in A$ de tal modo que

$$\|y_n - x_n\| < \varepsilon.$$

Tomando então $x = (x_n)_{n=1}^\infty \in A^{\mathbb{N}}$, é claro que

$$\|y - x\|_\infty = \sup_n \|y_n - x_n\| < \varepsilon.$$

Segue que $y - x \in c_0(E)$ e assim, como $\|y_n - x_n\| \to 0$ e $\|y_n\| \to 0$, vemos que $\|x_n\| \to 0$, pois $x_n = y_n - (y_n - x_n)$, para todo n, ou seja $x \in c_0(A)$. Com isso, mostramos que $c_0(A)$ é denso em $c_0(E)$. Além disso, como todo subconjunto de um conjunto enumerável é também enumerável, segue que $c_0(A)$ é enumerável, já que $c_0(A) \subseteq A^{\mathbb{N}}$. Portanto $c_0(E)$ é um espaço separável. ■

Em $c_{00}(E)$ e $c_0(E)$ podemos considerar a norma induzida de $\ell_\infty(E)$. Porém, como estabelece o próximo resultado, $c_0(E)$ é um espaço de Banach com essa norma, enquanto que $c_{00}(E)$ é um espaço normado incompleto. Uma prova disto pode ser encontrada em [29, Teorema 2.2.4].

Teorema 1.2.8. *Se E é um espaço de Banach, então $(c_0(E), \|\cdot\|_\infty)$ é um espaço de Banach. Contudo, $c_{00}(E)$ não é completo com a norma induzida de $\ell_\infty(E)$.*

1.2.3 Sequências absolutamente p-somáveis

O espaço das sequências absolutamente p-somáveis é um dos espaços mais estudados em Análise Funcional.

Definição 1.2.9. Uma sequência $(x_j)_{j=1}^\infty \in E^{\mathbb{N}}$ é *absolutamente p-somável* (ou apenas p-somável) se

$$\sum_{j=1}^\infty \|x_j\|^p < \infty.$$

Denotamos por $\ell_p(E)$ o espaço das sequências absolutamente p-somáveis com valores em E.

Quando $E = \mathbb{K}$, denotaremos $\ell_p(\mathbb{K})$ apenas por ℓ_p. Além disso, é fácil perceber que $(x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_p(E)$ se, e somente se, $(\|x_j\|)_{j=1}^\infty \in \ell_p$.

Em [14, Proposição 1.4.1 e Proposição 1.4.2] pode-se encontrar a demonstração das clássicas Desigualdades de Hölder e Minkowski para o caso escalar. De forma simples pode-se adaptar as demonstrações para o caso vetorial que veremos abaixo. Estas desigualdade são usadas no contexto do estudo desses espaços, dentre outras coisas, para garantir-lhe uma norma.

Teorema 1.2.10 (Desigualdade de Hölder)**.** *Sejam $1 < p, q < \infty$, com $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Se $(x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_p(E)$ e $(y_j)_{j=1}^\infty \in \ell_q(E)$, então $(x_j y_j)_{j=1}^\infty \in \ell_1(E)$ e*

$$\sum_{j=1}^\infty \|x_j y_j\| \leq \left(\sum_{j=1}^\infty \|x_j\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{j=1}^\infty \|y_j\|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Teorema 1.2.11 (Desigualdade de Minkowski)**.** *Sejam $1 \leq p < \infty$ e $(x_j)_{j=1}^\infty$, $(y_j)_{j=1}^\infty \in \ell_p(E)$. Então $(x_j + y_j)_{j=1}^\infty \in \ell_p(E)$ e*

$$\left(\sum_{j=1}^\infty \|x_j + y_j\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{j=1}^\infty \|x_j\|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{j=1}^\infty \|y_j\|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

A próxima proposição nos oferece uma expressão de uma norma para o espaço $\ell_p(E)$ e sua demonstração pode ser encontrada em [29, Proposição 2.3.2] e [29, Proposição 2.3.3].

Proposição 1.2.12. *Se $1 \leq p < \infty$, então a função $\|\cdot\|_p : \ell_p(E) \to \mathbb{R}$ dada por*

$$\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_p = \left(\sum_{j=1}^{\infty} \|x_j\|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

define uma norma em $\ell_p(E)$. Caso $0 < p < 1$, a expressão acima define uma p-norma em $\ell_p(E)$.

Com demonstração semelhante à da Proposição 1.2.7, também vale o seguinte resultado:

Proposição 1.2.13. *Sejam E um espaço normado e $0 < p < \infty$. Se E é separável, então $\ell_p(E)$ também é separável.*

Como de costume, a completude de E é algo fundamental para a completude dos espaços de sequências, o que não é diferente com $\ell_p(E)$.

Proposição 1.2.14. *Considere $0 < p < \infty$ e E um espaço normado. Então $(\ell_p(E), \|\cdot\|_p)$ é um espaço de Banach (p-Banach, caso $0 < p < 1$) se, e somente se, E for um espaço de Banach.*

Demonstração: Vejamos o caso $1 \leq p < \infty$. Suponhamos inicialmente que E é um espaço de Banach. Considere $(x^n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência de Cauchy em $\ell_p(E)$ e denotaremos $x^n = (x_j^n)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p(E)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Então, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $n, m \geq n_0$, tem-se

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty} \|x_j^n - x_j^m\|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \|x^n - x^m\|_p < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{1.3}$$

Em particular, para todo $j \in \mathbb{N}$ e para todos $n, m \geq n_0$, temos

$$\|x_j^n - x_j^m\|^p < \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p.$$

Logo, para cada $j \in \mathbb{N}$, a sequência $(x_j^n)_{n=1}^{\infty}$ é de Cauchy em E e portanto é convergente. Podemos assim definir $x = (x_j)_{j=1}^{\infty}$ onde $x_j = \lim\limits_{n\to\infty} x_j^n$, para cada $j \in \mathbb{N}$. Resta provar que $x \in \ell_p(E)$ e $x^n \to x$ na norma $\|\cdot\|_p$. De fato, por (1.3), para todo $k \in \mathbb{N}$ e todos $m, n \geq n_0$, temos

$$\sum_{j=1}^{k} \|x_j^n - x_j^m\|^p < \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p$$

e fazendo $m \to \infty$, obtemos

$$\sum_{j=1}^{k} \|x_j^n - x_j\|^p \leq \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p,$$

para todo $k \in \mathbb{N}$ e todo $n \geq n_0$. Daí, podemos fazer $k \to \infty$, donde segue que

$$\sum_{j=1}^{\infty} \|x_j^n - x_j\|^p \leq \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p \tag{1.4}$$

e assim, para todo $n \geq n_0$, tem-se $x^n - x \in \ell_p(E)$. Portanto, $x = x^{n_0} - (x^{n_0} - x) \in \ell_p(E)$. Além disso, segue diretamente de (1.4) que $x^n \to x$ na norma $\| \cdot \|_p$, ou seja $\ell_p(E)$ é um espaço de Banach.

Reciprocamente, suponhamos que $\ell_p(E)$ é espaço de Banach e considere a aplicação $i : E \to \ell_p(E)$, com $i(x) = (x, 0, 0, \dots)$. Notemos que $\|i(x)\|_p = \|(x, 0, 0, \dots)\|_p = \|x\|$, para todo $x \in E$, e facilmente pode-se verificar que $i : E \to \mathrm{Im}\,(i)$ é um isomorfismo isométrico. Para concluirmos a demonstração basta provar que $\mathrm{Im}\,(i)$ é fechado em $\ell_p(E)$. De fato, seja $y = (y_n)_{n=1}^{\infty} \in \overline{\mathrm{Im}\,(i)}$. Logo, existe uma sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ em E tal que $i(x_n) \to y$. Isto é, para todo $\varepsilon > 0$ dado, existe um índice $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|i(x_n) - y\|_p < \varepsilon$$

sempre que $n \geq n_0$. É claro que para todo $k > 1$ tem-se

$$\|y_k\| \leq \left(\sum_{j=2}^{\infty} \|y_j\|^p + \|x_n - y_1\|\right)^{\frac{1}{p}} = \|(x_n - y_1, -y_2, \dots, -y_n, \dots)\|_p = \|i(x_n) - y\|_p.$$

Além disso,

$$\|x_n - y_1\| \leq \|(x_n - y_1, -y_2, \dots, -y_n, \dots)\|_p = \|i(x_n) - y\|_p.$$

Assim, vemos que $y_k = 0$ para todo $k > 1$ e $x_n \to y_1$. Sendo i um operador contínuo, devemos ter $i(x_n) \to i(y_1)$ e da unicidade do limite obtemos $y = i(y_1) \in \mathrm{Im}\,(i)$. Desse modo, o conjunto $\mathrm{Im}\,(i)$ é fechado em $\ell_p(E)$ e portanto completo. Como i é um isomorfismo isométrico, segue que E é um espaço de Banach.

O caso em que $0 < p < 1$, a demonstração segue-se de maneira análoga, trabalhando com a p-norma ao invés de norma, uma vez que a convexidade dos espaços não está envolvida em nenhum dos passos utilizados. ■

A relação entre os espaços $\ell_p(E)$ e $\ell_q(E)$ com $p \neq q$ é estabelecida pela seguinte proposição.

Proposição 1.2.15. *Seja E um espaço normado. Se $0 < q \leq p < \infty$, então $\ell_q(E) \subseteq \ell_p(E)$ e, para todo $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_q(E)$, tem-se*

$$\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_p \leq \|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_q.$$

Demonstração: Dada qualquer sequência $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_q(E)$, se $\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_q = 0$, então o resultado segue de forma trivial, pois $\|x_j\| = 0$, para todo $j \in \mathbb{N}$. Suponha então, que $\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_q = 1$. Logo, para todo $j \in \mathbb{N}$ temos $\|x_j\| \leq 1$ e consequentemente $\|x_j\|^p \leq \|x_j\|^q$. Daí,

$$\sum_{j=1}^{\infty} \|x_j\|^p \leq \sum_{j=1}^{\infty} \|x_j\|^q = 1$$

donde segue que $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p(E)$ e $\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_p \leq 1 = \|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_q$. Agora, se $0 \neq \|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_q \neq 1$, então, tomando $y_j = x_j/\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_q$ para todo $j \in \mathbb{N}$, segue do que provamos anteriormente que $\|(y_j)_{j=1}^{\infty}\|_p \leq 1$, uma vez que $\|(y_j)_{j=1}^{\infty}\|_q = 1$. Assim, $\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_p \leq \|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_q$ e $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p(E)$. ∎

Se refletirmos um pouco a respeito do resultado acima, naturalmente poderíamos pensar que ao retiramos todos os espaços $\ell_q(E)$, com $q < p$, de $\ell_p(E)$ nada restaria em $\ell_p(E)$. Entretanto, isso não acontece como mostra o seguinte resultado que será de grande importância para próximo capítulo:

Proposição 1.2.16. *O conjunto $\ell_p - \bigcup_{0<q<p} \ell_q$ é não vazio, para todo $p > 0$.*

Demonstração: Já sabemos que $(1/\sqrt{n})_{n=1}^{\infty} \notin \ell_2$ (a série harmônica diverge), porém $(1/\sqrt{n})_{n=1}^{\infty} \in \ell_s$ sempre que $s > 2$. Note que dado qualquer $(y_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_q$, com $0 < q < 2$, sendo q' o conjugado de q, segue que $(1/\sqrt{n})_{n=1}^{\infty} \in \ell_{q'}$, uma vez que

$$q' = \frac{q}{1-q} > 2.$$

Dessa forma, da desigualdade de Hölder, temos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{\sqrt{n}} y_n \right| \leq \left\| \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right)_{n=1}^{\infty} \right\|_{q'} . \|(y_n)_{n=1}^{\infty}\|_q < \infty. \tag{1.5}$$

Pela proposição anterior, sabemos que $\ell_2 \supseteq \bigcup_{0<q<2} \ell_q$. Suponha por absurdo que $\ell_2 = \bigcup_{0<q<2} \ell_q$. Então, dada qualquer sequência $y = (y_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_2$, existe $0 < r < 2$ tal que $(y_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_r$. Para cada $k \in \mathbb{N}$, definamos um operador $T_k : \ell_2 \to \mathbb{K}$ dado por

$$T_k((y_n)_{n=1}^{\infty}) = \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{\sqrt{n}} y_n.$$

Claramente, para todo $k \in \mathbb{N}$, temos T_k linear e (1.5) nos garante a continuidade desses operadores, já que

$$|T_k((y_n)_{n=1}^{\infty})| = \left|\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{\sqrt{n}} y_n\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{1}{\sqrt{n}} y_n\right| \leq \left\|\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)_{n=1}^{\infty}\right\|_{r'} . \|(y_n)_{n=1}^{\infty}\|_r < \infty.$$

Além disso, para todo $(y_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_2$ tem-se

$$\sup_k |T_k((y_n)_{n=1}^{\infty})| = \sup_k \left|\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{\sqrt{n}} y_n\right| \leq \sup_k \sum_{n=1}^{k} \left|\frac{1}{\sqrt{n}} y_n\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{1}{\sqrt{n}} y_n\right| < \infty.$$

Logo, pelo Teorema de Banach-Steinhaus (na forma do Corolário 1.1.15) podemos construir um funcional linear contínuo $T : \ell_2 \to \mathbb{K}$ dado por $T(y) = \lim\limits_{k\to\infty} T_k(y)$ e então

$$T((y_n)_{n=1}^{\infty}) = \lim_{k\to\infty} T_k((y_n)_{n=1}^{\infty}) = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{\sqrt{n}} y_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} y_n.$$

Como $(\ell_2)' = \ell_2$ (ver [14, Seção 4.2]), segue da expressão acima que $(1/\sqrt{n})_{n=1}^{\infty} \in \ell_2$, o que é um absurdo! Assim, existe $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_2 - \bigcup_{0<q<2} \ell_q$.

Agora, com este mesmo $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ acima, defina a sequência $\left(|x_n|^{\frac{2}{p}}\right)_{n=1}^{\infty}$.

Afirmação. Tem-se $\left(|x_n|^{\frac{2}{p}}\right)_{n=1}^{\infty} \in \ell_p - \bigcup\limits_{0<q<p} \ell_q$.

De fato, uma vez que $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_2$, temos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left||x_n|^{\frac{2}{p}}\right|^p = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty$$

donde vemos que $\left(|x_n|^{\frac{2}{p}}\right)_{n=1}^{\infty} \in \ell_p$. Agora, perceba que $0 < \frac{2}{p}q < 2$ e assim

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left||x_n|^{\frac{2}{p}}\right|^q = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^{\frac{2}{p}q} = \infty,$$

pois $(x_n)_{n=1}^{\infty} \notin \bigcup_{0<q<2} \ell_q$. Dessa forma, $\left(|x_n|^{\frac{2}{p}}\right)_{n=1}^{\infty} \notin \bigcup_{0<q<p} \ell_q$ e segue o resultado. ∎

Observação 1.2.17. Note que a proposição acima pode ser estendida para $\ell_p(X) - \bigcup_{0<q<p} \ell_q(X) \neq \emptyset$, onde X é um espaço de Banach qualquer. Isso porque dada uma sequência $(a_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p - \bigcup_{0<q<p} \ell_q$ e qualquer $x \in X - \{0\}$, teremos $(xa_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p(X) - \bigcup_{0<q<p} \ell_q(X)$.

Uma boa caracterização para espaços p-Banach, pode ser dada através de convergências de determinadas séries. Este resultado é muito útil para abordar os espaços $\ell_p(E)$ com

$0 < p < 1$.

Teorema 1.2.18. *Sejam $0 < p \leq 1$ e X um espaço p-normado. Então X é um espaço p-Banach se, e somente se, para toda sequência $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ em X tal que $\sum_{j=1}^{\infty} \|x_j\|^p < \infty$, tem-se $\sum_{j=1}^{\infty} x_j$ convergente em X.*

Demonstração: Suponha inicialmente que X é um espaço p-Banach, e consideremos uma sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq X$ tal que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^p < \infty.$$

Do critério de Cauchy, dados $N, M \in \mathbb{N}$, com $N > M$ temos

$$\sum_{n=M+1}^{N} \|x_n\|^p = \left| \sum_{n=1}^{N} \|x_n\|^p - \sum_{n=1}^{M} \|x_n\|^p \right| \to 0$$

quando $N, M \to \infty$. Assim, seja $S_N = \sum_{n=1}^{N} x_n$ a N-ésima soma parcial de $(x_n)_{n=1}^{\infty}$. Desse modo, se $N, M \to \infty$, então

$$\|S_N - S_M\|^p = \left\| \sum_{n=M+1}^{N} x_n \right\|^p \leq \sum_{n=M+1}^{N} \|x_n\|^p \to 0.$$

Logo, $(S_N)_{N=1}^{\infty}$ é uma sequência de Cauchy em X com respeito a métrica induzida pela p-norma. Como X é um espaço p-Banach, $(S_N)_{N=1}^{\infty}$ é convergente em X, e consequentemente $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ também é.

Reciprocamente, suponha que toda sequência $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ em X satisfaz

$$\sum_{j=1}^{\infty} \|x_j\|_X^p < \infty \Rightarrow \sum_{j=1}^{\infty} x_j \text{ converge em } X.$$

Seja $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência de Cauchy em X (com relação a métrica induzida pela p-norma). Como essa sequência é de Cauchy, existe uma subsequência $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ de $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, tal que

$$\|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\| \leq \frac{1}{2^{k+1}}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Defina $y_k := x_{n_{k+1}} - x_{n_k}$, e note que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|y_k\|^p = \sum_{k=1}^{\infty} \|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\|^p \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{k+1}} < \infty.$$

Assim, por hipótese, $\sum_{k=1}^{\infty} y_k$ é convergente(com relação a métrica induzida pela p-norma), isto é, $S_m = y_1 + \cdots + y_m \to y \in X$. Por outro lado, podemos escrever

$$\begin{aligned} S_m &= (x_{n_2} - x_{n_1}) + (x_{n_3} - x_{n_2}) + \cdots + (x_{n_m} - x_{n_{m-1}}) + (x_{n_{m+1}} - x_{n_m}) \\ &= x_{n_{m+1}} - x_{n_1}. \end{aligned}$$

Logo,

$$x_{n_{m+1}} = S_m + x_{n_1} \to y + x_{n_1}.$$

Portanto, $(x_{n_m})_{m=1}^{\infty}$ é convergente (com relação a métrica induzida pela p-norma). Como $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência de Cauchy com uma subsequência convergente, então ela própria converge na métrica induzida pela p-norma, ou seja, X é um espaço p-Banach. ■

Como consequência imediata do resultado anterior, temos o seguinte corolário:

Corolário 1.2.19. *Um espaço normado X é de Banach se, e somente se, toda série absolutamente convergente é convergente.*

Vejamos mais algumas relações dos espaços apresentados com o espaço $\ell_p(E)$.

Proposição 1.2.20. *Sejam E um espaço normado e $0 < p < \infty$. Então:*

(a) $c_{00}(E) \subseteq \ell_p(E)$.

(b) $\ell_p(E) \subseteq c_0(E)$ *e a inclusão* $i : \ell_p(E) \to c_0(E)$ *é contínua com* $\|i\| = 1$.

Demonstração: (a) Se $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in c_{00}(E)$, então existe um índice $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n = 0$ sempre que $n \geq n_0$. Logo,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^p = \sum_{n=1}^{n_0-1} \|x_n\|^p < \infty.$$

donde segue que $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_p(E)$.
(b) Se $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_p(E)$, temos $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^p < \infty$ e assim $\lim_{n\to\infty} \|x_n\| = 0$, ou seja, $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in c_0(E)$. Agora, dada qualquer sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_p(E)$, para todo $n \in \mathbb{N}$ temos $\|x_n\|^p \leq \sup\limits_n \|x_n\|^p$, donde

$$\sup_n \|x_n\| \leq \left(\sup_n \|x_n\|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Daí,

$$\|i((x_n)_{n=1}^{\infty})\|_{\infty} = \|(x_n)_{n=1}^{\infty}\|_{\infty} = \sup_n \|x_n\|$$

$$\begin{aligned}&\leq \left(\sup_n \|x_n\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^p\right)^{\frac{1}{p}}\\ &= \|(x_n)_{n=1}^{\infty}\|_p.\end{aligned}$$

Logo, i é contínua com $\|i\| \leq 1$. Por outro lado, se $x \in E$ e $\|x\| = 1$, temos $(x, 0, 0, \dots) \in B_{\ell_p(E)}$ e

$$\|i((x, 0, 0, \dots))\|_\infty = \|(x, 0, 0, \dots)\|_\infty = \|x\| = 1.$$

Portanto, $\|i\| = \sup\limits_{(x_n)_{n=1}^{\infty} \in B_{\ell_p(E)}} \|i((x_n)_{n=1}^{\infty})\|_\infty \geq 1$, donde segue o resultado. ■

Do item (b) do último resultado, vemos que $\ell_p(E) \subseteq \ell_\infty(E)$ e assim, convergência em $\ell_p(E)$ implica sempre na convergência de cada coordenada.

A relação de $c_{00}(E)$ com os espaços $c_0(E)$ e $\ell_p(E)$ vai além das inclusões que já vimos. Eles também "conversam" no ponto de vista topológico da seguinte forma:

Observação 1.2.21. Não é difícil mostrar que se E é um espaço de Banach e $0 < p < \infty$, então $c_{00}(E)$ é denso nos espaços $c_0(E)$ e $\ell_p(E)$.

1.2.4 Sequências fracamente p-somáveis

Como veremos ao longo do texto, o espaço de sequência do qual falaremos agora contém o espaço das sequências absolutamente p-somáveis. De início poderemos ver, com a presença de funcionais lineares na definição do conjunto, uma das razões para o nome "fracamente" no título da subseção.

Definição 1.2.22. Sejam E um espaço normado e $0 < p < \infty$. Dizemos que uma sequência $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ em E é *fracamente p-somável* se

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\varphi(x_j)|^p < \infty,$$

para todo $\varphi \in E'$. Indicamos por $\ell_p^w(E)$ o espaço de todas as sequências fracamente p-somáveis de E.

Observe que uma sequência $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ em E será dita fracamente p-somável se, e somente se, para todo funcional linear contínuo $\varphi \in E'$ a sequência de escalares $(\varphi(x_j))_{j=1}^{\infty}$ estiver em ℓ_p. Com isso, não é difícil mostrar que $\ell_p^w(E)$ é um espaço vetorial.

Vejamos uma expressão que define uma norma neste espaço.

Proposição 1.2.23. *Sejam E um espaço normado e $0 < p < \infty$. Então, a função*

$\|\cdot\|_{w,p} : \ell_p^w(E) \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$\|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{w,p} = \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\varphi(x_j)|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

exprime uma norma (p-norma, caso $0 < p < 1$) para o espaço $\ell_p^w(E)$.

Demonstração: O passo mais delicado da proposição é mostrar a boa definição da norma.

Dado $x = (x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_p^w(E)$, pela própria definição do espaço, sabemos que a aplicação $T_x : E' \to \ell_p$ dada por

$$T_x(\varphi) = (\varphi(x_j))_{j=1}^\infty,$$

está bem definida. Se T_x for linear e contínua teremos

$$\sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\varphi(x_j)|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \sup_{\varphi \in B_{E'}} \|(\varphi(x_j))_{j=1}^\infty\|_p = \sup_{\varphi \in B_{E'}} \|T_x(\varphi)\|_p = \|T_x\| < \infty,$$

o que provaria a boa definição de $\|\cdot\|_{w,p}$. A linearidade de T_x é dada pelas propriedades de soma e produto por escalar de sequências.

Para provar a continuidade, note inicialmente que E' e ℓ_p são espaços de Banach (p-Banach, caso $0 < p < 1$). Para cada $k \in \mathbb{N}$, considere $(\varphi_k, T_x(\varphi_k)) \in \text{Graf}\,(T_x)$ tal que $(\varphi_k, T_x(\varphi_k)) \to (\varphi, y)$ em $E' \times \ell_p$. Daí, $\varphi_k \to \varphi$ em E' e $T_x(\varphi_k) = (\varphi_k(x_j))_{j=1}^\infty \xrightarrow{k} y := (y_j)_{j=1}^\infty$ em ℓ_p. Como convergência em ℓ_p implica na convergência em cada coordenada (ver Proposição 1.2.20), da ultima convergência segue que, $\varphi_k(x_j) \xrightarrow{k} y_j$ em $\mathbb{K}$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Por outro lado, já que $\varphi_k \to \varphi$ em E', podemos concluir que $\varphi_k(x_j) \xrightarrow{k} \varphi(x_j)$ em $\mathbb{K}$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Assim, a unicidade do limite nos garante que $\varphi(x_j) = y_j$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Ou seja,

$$y = (y_j)_{j=1}^\infty = (\varphi(x_j))_{j=1}^\infty = T_x(\varphi).$$

Logo, $(\varphi, y) \in \text{Graf}\,(T_x)$, donde vemos que $\text{Graf}\,(T_x)$ é fechado em $E' \times \ell_p$ e a continuidade de T_x segue do Teorema do Gráfico Fechado (podemos usá-lo no caso $0 < p < 1$ conforme a Observação 1.1.18).

Por fim, cálculos convencionais e o uso da Desigualdade de Minkowski mostram que os axiomas de norma são todos satisfeitos para o caso em que $1 \leq p < \infty$. Para o caso $0 < p < 1$, os dois primeiros axiomas de p-norma seguem da mesma forma e, para o terceiro, a desigualdade vem de modo direto ao usarmos as propriedades do supremo. ■

A completude de $\ell_p^w(E)$ é demonstrada pela seguinte proposição.

Proposição 1.2.24. *Se E for um espaço de Banach e $0 < p < \infty$, então $(\ell_p^w(E), \|\cdot\|_{w,p})$*

também é espaço de Banach (p-Banach, no caso $0 < p < 1$).

Demonstração: Por simplicidade, iremos abordar apenas a demonstração do caso $1 \leq p < \infty$. Seja $(x^n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência de Cauchy em $\ell_p^w(E)$, onde para cada $n \in \mathbb{N}$ vamos denotar $x^n = (x_j^n)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p^w(E)$. Assim, para todo $\varepsilon > 0$ existe um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $n, m \geq n_0$ tem-se

$$\|x^n - x^m\|_{w,p} = \|(x_j^n - x_j^m)_{j=1}^{\infty}\|_{w,p} = \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\varphi(x_j^n - x_j^m)|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Dessa forma, dado qualquer $\varphi \in B_{E'}$ e qualquer $i \in \mathbb{N}$, sempre que $n, m \geq n_0$ teremos

$$|\varphi(x_i^n - x_i^m)|^p \leq \sum_{j=1}^{\infty} |\varphi(x_j^n - x_j^m)|^p \leq \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\varphi(x_j^n - x_j^m)|^p \right) < \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p$$

e, portanto,

$$|\varphi(x_i^n - x_i^m)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Logo, pelo Teorema de Hahn-Banach, temos

$$n, m \geq n_0 \Rightarrow \|x_i^n - x_i^m\| = \sup_{\varphi \in B_{E'}} |\varphi(x_i^n - x_i^m)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

donde $(x_j^n)_{n=1}^{\infty}$ é de Cauchy em E para todo $n \in \mathbb{N}$, e portanto convergente. Assim, para cada $j \in \mathbb{N}$ considere $y_j \in E$ tal que $(x_j^n) \xrightarrow{n} y_j$ em E. Para concluirmos a demonstração devemos provar que $y = (y_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p^w(E)$ e que $\|x^n - y\|_{w,p} \to 0$. Claramente, para todo $k \in \mathbb{N}$ e todo $\varphi \in B_{E'}$

$$m, n \geq n_0 \Rightarrow \sum_{j=1}^{k} |\varphi(x_j^n - x_j^m)|^p \leq \sum_{j=1}^{\infty} |\varphi(x_j^n - x_j^m)|^p \leq \|(x_j^n - x_j^m)_{j=1}^{\infty}\|_{w,p} < \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p,$$

ou seja,

$$m, n \geq n_0 \Rightarrow \sum_{j=1}^{k} |\varphi(x_j^n - x_j^m)|^p < \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p.$$

Daí, fazendo $m \to \infty$, vem

$$n \geq n_0 \Rightarrow \sum_{j=1}^{k} |\varphi(x_j^n - x_j)|^p \leq \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p.$$

Como isso vale para todo $k \in \mathbb{N}$, fazemos agora $k \to \infty$ e sempre que $n \geq n_0$, teremos

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\varphi(x_j^n - x_j)|^p \leq \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p. \tag{1.6}$$

Note agora que para qualquer $\xi \in E'$, $\frac{\xi}{\|\xi\|} \in B_{E'}$, e assim

$$\begin{aligned} n \geq n_0 &\Rightarrow \sum_{j=1}^{\infty} \left|\frac{\xi}{\|\xi\|}(x_j^n - x_j)\right|^p \leq \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p \\ &\Rightarrow \sum_{j=1}^{\infty} |\xi(x_j^n - x_j)|^p \leq \|\xi\|^p \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p < \infty. \end{aligned}$$

Assim, $(x^n - y)_{n=1}^{\infty} \in \ell_p^w(E)$ sempre que $n \geq n_0$. Logo, $y = x^{n_0} - (x^{n_0} - y) \in \ell_p^w(E)$. Além disso, usando a definição de supremo e (1.6), segue que

$$\|x^n - y\|_{w,p} = \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\varphi(x_j^n - y_j)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

sempre que $n \geq n_0$. Portanto, $\|x^n - y\|_{w,p} \to 0$ e assim $\ell_p^w(E)$ é um espaço de Banach. ■

O próximo resultado, cuja demonstração (muito simples, por sinal) pode ser vista em [24, Proposição 2.10], nos mostra porque não levamos em conta o caso $p = \infty$ na definição do espaço $\ell_p^w(E)$.

Proposição 1.2.25. *Os espaços $\ell_\infty^w(E)$ e $\ell_\infty(E)$ são isometricamente isomorfos.*

No que segue, estamos em busca de relações de inclusão envolvendo os espaços estudados e o espaço $\ell_p^w(E)$.

Definição 1.2.26. Dizemos que um subconjunto $A \subseteq E$ é *fracamente limitado* se $\varphi(A)$ é limitado em $\mathbb{K}$ para todo funcional $\varphi \in E'$.

Acontece que os conceitos de limitação e de limitação fraca, acima definido, coincidem:

Lema 1.2.27. *Seja E um espaço de Banach. Um subconjunto $A \subseteq E$ é limitado se, e somente se, A é fracamente limitado.*

Demonstração: Suponhamos inicialmente que A é limitado. Então, existe $K \geq 0$ tal que $\|x\| \leq K$ para todo $x \in A$. Assim, para todo $\varphi \in E'$, temos

$$|\varphi(x)| \leq \|\varphi\| \cdot \|x\| \leq \|\varphi\| \cdot K$$

para todo $x \in A$, isto é, A é fracamente limitado.

Reciprocamente, suponha que A é fracamente limitado, ou seja, vamos supor agora que $\varphi(A)$ seja limitado para todo funcional $\varphi \in E'$. Para cada $\varphi \in E'$, existe uma constante $K_\varphi > 0$ dependendo de φ tal que $|\varphi(x)| \leq K_\varphi$ para todo $x \in A$. Se considerarmos o mergulho canônico $J_E : E \to E''$, então, para todo $x \in A$, teremos $|J_E(x)(\varphi)| = |\varphi(x)| \leq K_\varphi$. Dessa forma, $(J_E(x))_{x\in A}$ será pontualmente limitada em E'' e segue do Teorema de Banach-Steinhaus que essa família é uniformemente limitada, ou seja,

$$\sup_{x\in A} \|x\| = \sup_{x\in A} \|J_E(x)\| < \infty.$$

Portanto, concluímos que A é limitado. ■

Agora vejamos algumas relações de inclusão.

Proposição 1.2.28. *Sejam E um espaço normado e $0 < p < \infty$. São verdadeiras as sentenças:*

(a) *$\ell_p(E) \subseteq \ell_p^w(E)$ e a inclusão $i : \ell_p(E) \to \ell_p^w(E)$ é contínua com norma 1.*

(b) *$\ell_p^w(E) \subseteq \ell_\infty(E)$ e a inclusão $i : \ell_p^w(E) \to \ell_\infty(E)$ é contínua com norma 1.*

Demonstração: (a) Sabemos que se $(x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_p(E)$, então $\sum_{j=1}^{\infty} \|x_j\|_E^p < \infty$. Assim, sendo $\varphi \in E'$, teremos $|\varphi(x_j)|^p \leq \|x_j\|_E^p \cdot \|\varphi\|^p$ para todo $j \in \mathbb{N}$ e daí

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\varphi(x_j)|^p \leq \sum_{j=1}^{\infty} \|x_j\|_E^p \cdot \|\varphi\|^p = \|\varphi\|^p \cdot \sum_{j=1}^{\infty} \|x_j\|_E^p < \infty,$$

ou seja, $(x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_p^w(E)$. Além disso, o operador inclusão é claramente linear, e como

$$\begin{aligned}
\|i((x_j)_{j=1}^\infty)\|_{w,p} &= \sup_{\varphi\in B_{E'}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\varphi(x_j)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \sup_{\varphi\in B_{E'}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} \|\varphi\|^p \|x_j\|_E^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \sup_{\varphi\in B_{E'}} \left[\|\varphi\| \left(\sum_{j=1}^{\infty} \|x_j\|_E^p \right)^{\frac{1}{p}} \right] \\
&\leq \left(\sum_{j=1}^{\infty} \|x_j\|_E^p \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \sup_{\varphi\in B_{E'}} \|\varphi\| = \|(x_j)_{j=1}^\infty\|_p,
\end{aligned}$$

para qualquer $(x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_p(E)$, i é contínuo com $\|i\| \leq 1$. Agora, se tomarmos $x \in E$ com $\|x\|_E = 1$, o Teorema de Hahn-Banach nos assegura que existe um funcional linear contínuo $\xi \in E'$ tal que $\|\xi\| = 1$ e $\xi(x) = \|x\|_E = 1$. Tomando a sequência $(y_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p(E)$ onde $y_1 = x$ e $y_j = 0$, para todo $j > 1$, temos

$$
\begin{aligned}
\|i\| &= \sup\{\|i((x_j)_{j=1}^{\infty})\|_{w,p} : \ (x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p(E) \ e \ \|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_p \leq 1\} \\
&\geq \|(y_j)_{j=1}^{\infty}\|_{w,p} \\
&= \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\varphi(y_j)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\geq \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\xi(y_j)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\geq |\xi(x)| = 1.
\end{aligned}
$$

donde segue o resultado.

(b) Seja $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p^w(E)$. Então $(\varphi(x_j))_{j=1}^{\infty} \in \ell_p$ para todo $\varphi \in E'$. Obviamente $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ é fracamente limitada e, pelo Lema 1.2.27, $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ é limitada, donde vem que $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_{\infty}(E)$. Agora, para todo $j \in \mathbb{N}$, temos

$$
\|x_j\| = \sup_{\varphi \in B_{E'}} |\varphi(x_j)| = \sup_{\varphi \in B_{E'}} (|\varphi(x_j)|^p)^{\frac{1}{p}} \leq \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\varphi(x_k)|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \|(x_k)_{k=1}^{\infty}\|_{w,p}
$$

e daí

$$
\|i((x_k)_{k=1}^{\infty})\|_{\infty} = \|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{\infty} = \sup_j \|x_j\| \leq \|(x_k)_{k=1}^{\infty}\|_{w,p},
$$

donde concluímos que a inclusão é contínua com $\|i\| \leq 1$. Por outro lado, tomando $x \in E$ tal que $\|x\| = 1$, é claro que $(x, 0, 0, \cdots) \in \ell_p^w(E)$ e então

$$
\|i((x, 0, 0, \cdots))\|_{\infty} = \|(x, 0, 0, \cdots)\|_{\infty} = \|x\| = 1.
$$

■

O próximo resultado, conhecido como Teorema Fraco de Dvoretzky-Rogers, nos diz qual a condição suficiente e necessária para que tenhamos a igualdade no item (a) da proposição anterior. Uma prova completa pode ser encontrada em [32, Teorema 3.3].

Teorema 1.2.29 (Teorema Fraco de Dvoretzky-Rogers). *O espaço E possui dimensão finita se, e somente se $\ell_p^w(E) = \ell_p(E)$.*

1.2.5 Sequências incondicionalmente p-somáveis

Sejam E um espaço normado e $0 < p < \infty$. Sabemos que se $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p(E)$, então $\sum_{j=1}^{\infty} \|x_j\|^p < \infty$. Dessa forma,

$$\lim_{n\to\infty} \|(x_j)_{j=n}^{\infty}\|_p = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{j=n}^{\infty} \|x_j\|^p\right)^{\frac{1}{p}} = 0.$$

Veremos por meio de um exemplo que isso nem sempre ocorre no espaço $\ell_p^w(E)$. Motivados por isso, levaremos em conta as sequências que satisfazem esta propriedade para obtermos o espaço a ser estudado nesta subseção.

Exemplo 1.2.30. Vamos mostrar que $(e_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p^w(c_0)$, para todo $p \geq 1$ e

$$\lim_{n\to\infty} \|(e_j)_{j=n}^{\infty}\|_{w,p} \neq 0.$$

De fato, uma vez que $(c_0)' = \ell_1$, então dado qualquer $\varphi_y \in (c_0)'$, existe uma sequência $y = (y_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_1$ tal que

$$\varphi_y((x_j)_{j=1}^{\infty}) = \sum_{j=1}^{\infty} x_j y_j, \ \forall (x_j)_{j=1}^{\infty} \in c_0.$$

Dessa forma, como $\ell_1 \subseteq \ell_p$, para todo $p \geq 1$, temos

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\varphi_y(e_j)|^p = \sum_{j=1}^{\infty} |y_j|^p < \infty.$$

Assim, concluímos que $(e_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p^w(c_0)$, para $p \geq 1$. Por outro lado, veja que

$$\|(e_j)_{j=n}^{\infty}\|_{w,p} \geq \left(\sum_{j=n}^{\infty} |\psi(e_j)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \geq |\psi(e_n)|$$

para quaisquer $n \in \mathbb{N}$ e $\psi \in B_{(c_0)'}$. Do Teorema de Hahn-Banach, para cada $e_n \in c_0$, existe um funcional $\psi_n \in (c_0)'$ tal que

$$\|\psi_n\| = 1 \text{ e } \psi_n(e_n) = \|e_n\|_{\infty} = 1.$$

Assim, $\|(e_j)_{j=n}^{\infty}\|_{w,p} \geq |\psi_n(e_n)| = 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$, e portanto

$$\lim_{n\to\infty} \|(e_j)_{j=n}^{\infty}\|_{w,p} \neq 0.$$

Vejamos agora, a definição do espaço formado pelas sequências que satisfazem a propriedade citada acima.

Definição 1.2.31. Sejam E um espaço normado e $0 < p < \infty$. O conjunto formado pelas sequências $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p^w(E)$ tais que $\lim_{n\to\infty} \|(x_j)_{j=n}^{\infty}\|_{w,p} = 0$ é chamado espaço das sequências *incondicionalmente p-somáveis de* E e é denotado por $\ell_p^u(E)$. Isto é,

$$\ell_p^u(E) = \big\{(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p^w(E) : \lim_{n\to\infty} \|(x_j)_{j=n}^{\infty}\|_{w,p} = 0\big\}.$$

A proposição seguinte nos diz que podemos considerar em $\ell_p^u(E)$ a norma herdada de $\ell_p^w(E)$.

Proposição 1.2.32. *Se E é um espaço de Banach e $0 < p < \infty$, então $\ell_p^u(E)$ é um espaço de Banach (p-Banach, no caso $0 < p < 1$) com a norma (p-norma, no caso $0 < p < 1$) $\|\cdot\|_{w,p}$.*

Demonstração: Vamos mostrar que $\ell_p^u(E)$ é um subespaço fechado do espaço $\ell_p^w(E)$. Vamos, primeiro, verificar que, de fato, $\ell_p^u(E)$ é um subespaço vetorial de $\ell_p^w(E)$. Dados $(x_j)_{j=1}, (y_j)_{j=1} \in \ell_p^u(E)$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, temos

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \|(x_j + \lambda y_j)_{j=n}^{\infty}\|_{w,p} &= \lim_{n\to\infty} \|(x_j)_{j=n}^{\infty} + \lambda (y_j)_{j=n}^{\infty}\|_{w,p} \\ &\leq \lim_{n\to\infty} \|(x_j)_{j=n}^{\infty}\|_{w,p} + |\lambda| \lim_{n\to\infty} \|(y_j)_{j=n}^{\infty}\|_{w,p} = 0,\end{aligned}$$

ou seja, $(x_j + \lambda y_j)_{j=1}^{\infty} = (x_j)_{j=1}^{\infty} + \lambda (y_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p^u(E)$. Logo, $\ell_p^u(E)$ é um subespaço vetorial de $\ell_p^w(E)$ no caso em que $1 \leq p < \infty$. Analisando agora o caso em que $0 < p < 1$, observe que dados $(x_j)_{j=1}^{\infty}, (y_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p^u(E)$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, temos

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \|(x_j + \lambda y_j)_{j=n}^{\infty}\|_{w,p}^p &= \lim_{n\to\infty} \|(x_j)_{j=n}^{\infty} + \lambda (y_j)_{j=n}^{\infty}\|_{w,p}^p \\ &\leq \lim_{n\to\infty} \|(x_j)_{j=n}^{\infty}\|_{w,p}^p + |\lambda|^p \lim_{n\to\infty} \|(y_j)_{j=n}^{\infty}\|_{w,p}^p = 0,\end{aligned}$$

já que se $\lim_{n\to\infty} \|(x_j)_{j=n}^{\infty}\|_{w,p} = 0$, então $\lim_{n\to\infty} \|(x_j)_{j=n}^{\infty}\|_{w,p}^p = \big(\lim_{n\to\infty} \|(x_j)_{j=n}^{\infty}\|_{w,p}\big)^p = 0$. Pelos mesmos motivos, temos $\lim_{n\to\infty} \|(x_j + \lambda y_j)_{j=n}^{\infty}\|_{w,p} = 0$ e, assim, $(x_j + \lambda y_j)_{j=1}^{\infty} = (x_j)_{j=1}^{\infty} + \lambda (y_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p^u(E)$, mostrando que $\ell_p^u(E)$ é um subespaço vetorial de $\ell_p^w(E)$.

Agora, para provar que $\ell_p^u(E)$ é fechado em $\ell_p^w(E)$ com $0 < p < \infty$, considere uma sequência $(x^i)_{i=1}^{\infty}$ em $\ell_p^u(E)$ tal que $x^i \xrightarrow{i} x = (x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p^w(E)$. Para cada $i \in \mathbb{N}$, temos $x^i = (x_j^i)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p^u(E)$ e assim dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|(x_j^i)_{j=n}^{\infty}\|_{w,p} < \frac{\varepsilon}{2}, \tag{1.7}$$

sempre que $n \neq n_0$. Por outro lado, já que $x^i \xrightarrow{i} x$ em $\ell_p^w(E)$, existe $i_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\begin{aligned}
\|(x_j^i)_{j=n}^\infty - (x_j)_{j=n}^\infty\|_{w,p} &= \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{j=n}^\infty |\varphi(x_j^i - x_j)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{j=1}^\infty |\varphi(x_j^i - x_j)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \|(x_j^i - x_j)_{j=1}^\infty\|_{w,p} \\
&= \|(x_j^i)_{j=1}^\infty - (x_j)_{j=1}^\infty\|_{w,p} = \|x^i - x\|_{w,p} < \frac{\varepsilon}{2},
\end{aligned}$$

sempre que $i \geq i_0$. Dessa forma, quando $n \geq n_0$, segue do cálculo acima e de (1.7) que

$$\|(x_j)_{j=n}^\infty\|_{w,p} \leq \|(x_j)_{j=n}^\infty - (x_j^{i_0})_{j=n}^\infty\|_{w,p} + \|(x_j^{i_0})_{j=n}^\infty\|_{w,p} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Em outras palavras, $\lim\limits_{n\to\infty} \|(x_j)_{j=n}^\infty\|_{w,p} = 0$ e, portanto, $x \in \ell_p^u(E)$. Ou seja, $\ell_p^u(E)$ é fechado em $\ell_p^w(E)$. Logo, o resultado segue da Proposição 1.1.5 para o caso $1 \leq p < \infty$ e da Observação 1.1.6 para o caso $0 < p < 1$. ■

Vejamos agora alguns resultados de inclusão envolvendo os espaços estudados. As demonstrações, que serão omitidas, seguem caminhos análogos às da Proposição 1.2.28, com as devidas adaptações.

Proposição 1.2.33. *Sejam E um espaço normado e $0 < p < \infty$. As seguintes sentenças são verdadeiras:*

(a) *$\ell_p(E) \subseteq \ell_p^u(E)$ e a inclusão $i : \ell_p(E) \to \ell_p^u(E)$ é contínua com norma 1.*

(b) *$\ell_p^u(E) \subseteq c_0(E)$ e a inclusão $i : \ell_p^u(E) \to c_0(E)$ é contínua com norma 1.*

O próximo resultado nos traz uma consequência que nos será útil no próximo capítulo.

Proposição 1.2.34. *Se E é um espaço de dimensão infinita, então as normas $\|\cdot\|_p$ e $\|\cdot\|_{w,p}$ não são equivalentes em $c_{00}(E)$. Como consequência, $\ell_p(E)$ não é fechado em $\ell_p^w(E)$.*

Demonstração: Para a demonstração do resultado, observe que $c_{00}(E)$ é denso em $(\ell_p^u(E), \|\cdot\|_{w,p})$ pela própria definição do espaço $\ell_p^u(E)$.

Vamos supor por absurdo, que as normas $\|\cdot\|_p$ e $\|\cdot\|_{w,p}$ são equivalentes em $c_{00}(E)$. Logo, como $c_{00}(E)$ é denso em $(\ell_p(E), \|\cdot\|_p)$, obtemos

$$\ell_p(E) = \overline{c_{00}(E)}^{\|\cdot\|_p} = \overline{c_{00}(E)}^{\|\cdot\|_{w,p}} = \ell_p^u(E).$$

o que é um absurdo, já que pela Observação 1.3.4, temos $\ell_p^u(E) \neq \ell_p(E)$ quando E possui dimensão infinita. Por fim, se supormos que $\ell_p(E)$ é fechado em $\ell_p^w(E)$, então $\ell_p(E)$ será também completo com a norma $\|\cdot\|_{w,p}$, além de já ser com a norma $\|\cdot\|_p$. Daí, o operador identidade $i : (\ell_p(E), \|\cdot\|_p) \to (\ell_p(E), \|\cdot\|_{w,p})$ é uma bijeção que é linear e contínua, pois como vimos na Proposição 1.2.28, dada qualquer sequência $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p(E)$, temos

$$\|i((x_j)_{j=1}^{\infty})\|_{w,p} = \|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{w,p} \leq \|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_p.$$

Dessa forma, o Teorema da Aplicação Aberta nos garante que o operador i é um isomorfismo, ou seja, para toda sequência $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p(E)$

$$\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_p = \|i^{-1}((x_j)_{j=1}^{\infty})\|_p \leq \|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{w,p}.$$

Assim, temos

$$\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{w,p} \leq \|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_p \leq \|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{w,p},$$

para toda sequência $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p(E)$. Em particular, as desigualdades acima, valem para toda sequência $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ em $c_{00}(E)$, uma vez que $c_{00}(E) \subseteq \ell_p(E)$. Ou seja, $\|\cdot\|_p$ e $\|\cdot\|_{w,p}$ são equivalentes em $c_{00}(E)$, o que é um absurdo. Portanto, concluímos que $\ell_p(E)$ não é fechado em $\ell_p^w(E)$. ■

1.2.6 Sequências mix (s, q)-somáveis

Veremos agora um espaço de sequência que envolve em sua definição outros dois espaços que já foram vistos. A partir de agora, quando tomarmos $0 < q \leq s \leq \infty$, denotaremos por p o número que satisfaz $1/p + 1/s = 1/q$.

Neste contexto, dizemos que s e p são q-conjugados. Se $q = 1$, então teremos o caso em que s e p são conjugados, com a definição que já conhecemos.

Definição 1.2.35. Sejam $0 < q \leq s \leq \infty$ e E um espaço normado. Dizemos que uma sequência $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ de elementos de E é *mix $(s;q)$-somável* se pudermos escrever $x_j = a_j y_j$, para todo $j \in \mathbb{N}$, onde $(a_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p$ e $(y_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_s^w(E)$. O espaço formado por todas as sequências mix $(s;q)$-somáveis em E será denotado por $\ell_{m(s;q)}(E)$.

Considere, para cada $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_{m(s;q)}(E)$, o número

$$\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{m(s;q)} := \inf \|(a_j)_{j=1}^{\infty}\|_p \|(y_j)_{j=1}^{\infty}\|_{w,s},$$

onde o ínfimo está sendo tomado sobre todas as possíveis representações $x_j = a_j y_j$, para todo $j \in \mathbb{N}$, com $(a_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p$ e $(y_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_s^w(E)$.

Como vemos em [30, Corolário 2.4.11], a expressão acima exprime uma norma (q-norma caso $0 < q < 1$) em $\ell_{m(s;q)}(E)$ e o torna um espaço métrico completo. Além disso, com condições sobre os parâmetros, podemos estabelecer relações de inclusão e coincidência envolvendo outros espaços já apresentados.

Proposição 1.2.36. *Sejam E um espaço normado e $0 < q \leq s \leq \infty$. Então:*

(a) $(\ell_{m(q;q)}(E), \|\cdot\|_{m(q;q)}) = (\ell_q^w(E), \|\cdot\|_{w,q})$.

(b) $(\ell_{m(\infty;q)}(E), \|\cdot\|_{m(\infty;q)}) = (\ell_q(E), \|\cdot\|_q)$.

Demonstração: (a) Nesse caso, como $s = q$, temos $p = \infty$. Assim, se $(x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_{m(q;q)}(E)$ existem sequências $(a_j)_{j=1}^\infty \in \ell_\infty$ e $(y_j)_{j=1}^\infty \in \ell_q^w(E)$ tais que $x_j = a_j y_j$, para todo $j \in \mathbb{N}$. Note que para todo $\varphi \in E'$ tem-se

$$\sum_{j=1}^\infty |\varphi(x_j)|^q = \sum_{j=1}^\infty |\varphi(a_j y_j)|^q = \sum_{j=1}^\infty |a_j \varphi(y_j)|^q \leq \|(a_j)_{j=1}^\infty\|_\infty^q \sum_{j=1}^\infty |\varphi(y_j)|^q < \infty.$$

Dessa forma, $(x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_q^w(E)$.

Por outro lado, considere $(x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_q^w(E)$. Note que ao tomarmos a sequência $(a_j)_{j=1}^\infty = (1, 1, \ldots) \in \ell_\infty$ podemos escrever $x_j = a_j x_j$, $\forall j \in \mathbb{N}$, ou seja, $(x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_{m(q;q)}(E)$.

(b) Nesse caso, como $s = \infty$, temos $p = q$. Assim, se $(x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_{m(\infty;q)}(E)$ existem sequências $(a_j)_{j=1}^\infty \in \ell_q$ e $(y_j)_{j=1}^\infty \in \ell_\infty^w(E)$ tais que $x_j = a_j y_j$, para todo $j \in \mathbb{N}$, e sabendo que $\ell_\infty^w(E)$ e $\ell_\infty(E)$ são iguais a menos de um isomorfismo, temos $(y_j)_{j=1}^\infty \in \ell_\infty(E)$. Daí,

$$\sum_{j=1}^\infty \|x_j\|^q = \sum_{j=1}^\infty \|a_j y_j\|^q \leq \|(y_j)_{j=1}^\infty\|_\infty^q \sum_{j=1}^\infty |a_j|^q < \infty.$$

Portanto, $(x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_q(E)$.

Para provarmos a inclusão contrária, note que se considerarmos $(x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_q(E)$, então $\left(\frac{x_j}{\|x_j\|}\right)_{j=1}^\infty \in \ell_\infty(E) = \ell_\infty^w(E)$, uma vez que $\sup_j \left\|\frac{x_j}{\|x_j\|}\right\| = 1$. Além disso, temos $(\|x_j\|)_{j=1}^\infty \in \ell_q$ e podemos escrever

$$x_j = \frac{x_j}{\|x_j\|} \cdot \|x_j\|, \ \forall j \in \mathbb{N},$$

com $\left(\frac{x_j}{\|x_j\|}\right)_{j=1}^\infty \in \ell_\infty^w(E)$ e $(\|x_j\|)_{j=1}^\infty \in \ell_q$. Segue que $(x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_{m(\infty;q)}(E)$. ■

Proposição 1.2.37. *Sejam E um espaço normado e p o q-conjugado de s.*

(a) *Se $0 < q \leq s_2 \leq s_1 \leq \infty$, então $\ell_{m(s_1;q)}(E) \subseteq \ell_{m(s_2;q)}(E)$ e, além disso,*

$$\|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{m(s_2;q)} \leq \|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{m(s_1;q)},$$

para todo $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_{m(s_1;q)}(E)$.

(b) *Se* $0 < q \leq s \leq \infty$, *então* $\ell_{m(s;q)}(E) \subseteq \ell_p(E)$ *e, além disso,*

$$\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_p \leq \|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{m(s;q)},$$

para todo $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_{m(s;q)}(E)$.

Demonstração: Veja [30, Proposição 2.4.15]. ■

Observação 1.2.38. Note que através da Proposição 1.2.36 e do item (a) da Proposição 1.2.37, obtemos $\ell_q(E) \subseteq \ell_{m(s;q)}(E)$. De fato, já que $s \leq \infty$, temos $\ell_q(E) = \ell_{m(\infty;q)}(E) \subseteq \ell_{m(s;q)}(E)$.

O próximo resultado funciona, de certa forma, como uma versão do Teorema de Dvoretzky-Rogers para o espaço $\ell_{m(s;q)}(E)$.

Proposição 1.2.39. *Sejam* E *um espaço de Banach e* $0 < q \leq s < \infty$. *Então* E *possui dimensão finita se, e somente se,* $\ell_{m(s;q)}(E) = \ell_q(E)$.

Demonstração: Suponha inicialmente que E possui dimensão finita. Pelo Teorema de Dvoretzky-Rogers e das duas proposições anteriores, temos

$$\ell_q(E) \subseteq \ell_{m(s;q)}(E) \subseteq \ell_{m(q;q)}(E) = \ell_q^w(E) = \ell_q(E).$$

Ou seja, $\ell_{m(s;q)}(E) = \ell_q(E)$.

Reciprocamente, se supormos que E tem dimensão infinita, então devemos provar que $\ell_{m(s;q)}(E) \neq \ell_q(E)$. No caso em que $q = s$ o resultado vale, uma vez que $\ell_{m(q;q)}(E) = \ell_q^w(E)$ e $\ell_q^w(E) \neq \ell_q(E)$ em dimensão infinita, por Dvoretzky-Rogers. Resta agora o caso em que $q < s$.

Note que sendo p o q-conjugado de s, temos

$$\frac{1}{p/q} + \frac{1}{s/q} = \frac{q}{p} + \frac{q}{s} = q\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{s}\right) = q \cdot \frac{1}{q} = 1$$

e assim p/q é o conjugado de s/q. Como E tem dimensão infinita, existe uma sequência $(y_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_s^w(E) - \ell_s(E)$. Suponha que toda sequência $(b_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_{\frac{p}{q}}$ satisfaz

$$\sum_{j=1}^{\infty} |b_j| \|y_j\|^q < \infty.$$

Assim, como o dual de $\ell_{\frac{p}{q}}$ é $\ell_{\frac{s}{q}}$, segue que $(\|y_j\|^q)_{j=1}^{\infty} \in \ell_{\frac{s}{q}}$. Daí, temos $(\|y_j\|)_{j=1}^{\infty} \in \ell_s$ e então $(y_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_s(E)$, o que é uma contradição. Ou seja, existe uma sequência $(a_j)_{j=1}^{\infty} \in$

$\ell_{\frac{p}{q}}$ tal que

$$\sum_{j=1}^{\infty} |a_j| \|y_j\|^q = \infty.$$

Agora, para todo $j \in \mathbb{N}$, considere $\alpha_j = |a_j|^{\frac{1}{q}}$ e $x_j = \alpha_j y_j$. Com isso, temos $(\alpha_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p$ e como $(y_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_s^w(E)$, segue que $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_{m(s;q)}(E)$.

Afirmação: Temos $(x_j)_{j=1}^{\infty} \notin \ell_q(E)$.

De fato,

$$\sum_{j=1}^{\infty} \|x_j\|^q = \sum_{j=1}^{\infty} \||a_j|^{\frac{1}{q}} y_j\|^q \sum_{j=1}^{\infty} |a_j| \|y_j\|^q = \infty.$$

Logo, fica provada a afirmação e segue o resultado, pois exibimos uma sequência $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_{m(s;q)}(E) - \ell_q(E)$. ■

1.2.7 Sequências de Orlicz

Apresentaremos agora o espaço de sequências de Orlicz. Seu estudo foi inicialmente inspirado pelo papel que a função $t \to t^p$ desempenha na definição dos espaços ℓ_p. Um passo natural a partir daí seria estudar o que acontece ao considerarmos uma função M mais geral que esta e sequências de escalares $(a_j)_{j=1}^{\infty}$ para os quais a série

$$\sum_{j=1}^{\infty} M(|a_j|)$$

é convergente. Com os estudos de W. Orlicz foram determinadas quais as condições necessárias para esse tipo de convergência e a definição de um espaço de sequências associado.

O conceito central dessa construção, as chamadas funções de Orlicz, será apresentado na seguinte definição:

Definição 1.2.40. Chamaremos de *função de Orlicz*, uma função $M : [0, \infty) \to [0, \infty)$ que é convexa, não-decrescente, onde $M(0) = 0$ e tal que $\lim_{t\to\infty} M(t) = \infty$. Além disso, se existir $t \neq 0$ tal que $M(t) = 0$, então a chamaremos de *função de Orlicz degenerada*.

Iremos associar a cada função de Orlicz M, um conjunto ℓ_M formado por todas as sequências de escalares $(a_j)_{j=1}^{\infty}$ tais que $\sum_{j=1}^{\infty} M\left(\frac{|a_j|}{\eta}\right) < \infty$, para algum $\eta > 0$.

Observação 1.2.41. Dada uma função de Orlicz M e uma constante $K > 0$, o espaço de sequências de Orlicz ℓ_M associado a M é exatamente o mesmo associado à função

$M' = KM$, uma vez que

$$\sum_{j=1}^{\infty} M\left(\frac{|a_j|}{\eta}\right) < \infty \Leftrightarrow K\sum_{j=1}^{\infty} M\left(\frac{|a_j|}{\eta}\right) < \infty.$$

Proposição 1.2.42. *Seja M uma função de Orlicz. O conjunto ℓ_M é um espaço vetorial.*

Demonstração: Com efeito, consideremos $(a_j)_{j=1}^{\infty}$, $(b_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_M$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. Vamos mostrar que $(a_j)_{j=1}^{\infty} + \lambda(b_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_M$. Obviamente, se $\lambda = 0$ não há nada o que mostrar. Logo, consideraremos $\lambda \neq 0$. Uma vez que $(a_j)_{j=1}^{\infty}$, $(b_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_M$, existem $\eta_1, \eta_2 > 0$ tais que

$$\sum_{j=1}^{\infty} M\left(\frac{|a_j|}{\eta_1}\right) < \infty \text{ e } \sum_{j=1}^{\infty} M\left(\frac{|b_j|}{\eta_2}\right) < \infty.$$

Pelas propriedades de soma e produto por escalar de sequências, temos $(a_j)_{j=1}^{\infty}+\lambda(b_j)_{j=1}^{\infty} = (a_j + \lambda b_j)_{j=1}^{\infty}$ e fazendo $\eta_3 = \max\{2\eta_1, 2|\lambda|\eta_2\}$, segue que

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{\infty} M\left(\frac{|a_j + \lambda b_j|}{\eta_3}\right) &\leq \sum_{j=1}^{\infty} M\left(\frac{|a_j|}{\eta_3} + \frac{|\lambda||b_j|}{\eta_3}\right) \\
&\leq \sum_{j=1}^{\infty} M\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{|a_j|}{\eta_1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{|b_j|}{\eta_2}\right) \\
&\leq \sum_{j=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2}M\left(\frac{|a_j|}{\eta_1}\right) + \frac{1}{2}M\left(\frac{|b_j|}{\eta_2}\right)\right] \\
&\leq \sum_{j=1}^{\infty} M\left(\frac{|a_j|}{\eta_1}\right) + \sum_{j=1}^{\infty} M\left(\frac{|b_j|}{\eta_2}\right) < \infty,
\end{aligned}$$

pois M é uma função não-decrescente e convexa. Em outras palavras $(a_j)_{j=1}^{\infty} + \lambda(b_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_M$, ou seja, ℓ_M é um espaço vetorial. ■

Podemos atribuir aos espaços de sequências de Orlicz uma norma dada pela expressão apresentada no próximo resultado.

Proposição 1.2.43. *Dada uma função de Orlicz M, a expressão*

$$\|(a_j)_{j=1}^{\infty}\|_{\ell_M} = \inf\left\{\eta > 0 : \sum_{j=1}^{\infty} M\left(\frac{|a_j|}{\eta}\right) \leq 1\right\} \tag{1.8}$$

exprime uma norma para o espaço ℓ_M.

Demonstração: Observe que essa expressão de norma está sempre bem definida para qualquer sequência $(a_j)_{j=1}^{\infty}$ em ℓ_M. De fato, existe $\eta > 0$ para o qual $\sum_{j=1}^{\infty} M\left(\frac{|a_j|}{\eta}\right) \leq$

$K < \infty$ e tomando, sem perda de generalidade, a função $M' = M/K$, que gera o mesmo espaço de sequências ℓ_M (ver Observação 1.2.41) vemos que

$$\sum_{j=1}^{\infty} M'\left(\frac{|a_j|}{\eta}\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{M}{K}\left(\frac{|a_j|}{\eta}\right) = \frac{1}{K}\sum_{j=1}^{\infty} M\left(\frac{|a_j|}{\eta}\right) \leq 1.$$

Logo, o conjunto definido em (1.8), para o espaço ℓ_M, é não-vazio e limitado inferiormente pelo zero.

Vejamos então as propriedades de norma. Se $(a_j)_{j=1}^{\infty},\ (b_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_M$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, temos:

N1) Pela própria definição da expressão acima, é óbvio que $\|(a_j)_{j=1}^{\infty}\|_{\ell_M} \geq 0$, para todo $(a_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_M$. Se $(a_j)_{j=1}^{\infty} = 0$, temos

$$\|(a_j)_{j=1}^{\infty}\|_{\ell_M} = \|0\|_{\ell_M} = \inf\left\{\eta > 0 : \sum_{j=1}^{\infty} M\left(\frac{|a_j|}{\eta}\right) \leq 1\right\} = \inf\{\eta > 0 : 0 \leq 1\} = 0,$$

já que $M(0) = 0$. Por outro lado, suponha que $\|(a_j)_{j=1}^{\infty}\|_{\ell_M} = 0$, mas que $(a_j)_{j=1}^{\infty} \neq 0$, isto é, existe um conjunto de índices $I \subseteq \mathbb{N}$ tal que $a_i \neq 0$, para todo $i \in I$. Além disso, já que estamos supondo que $0 = \inf\left\{\eta > 0; \sum_{j=1}^{\infty} M\left(\frac{|a_j|}{\eta}\right) \leq 1\right\}$, existe uma sequência $(\eta_k)_{k=1}^{\infty}$, onde $\sum_{j=1}^{\infty} M\left(\frac{|a_j|}{\eta_k}\right) \leq 1$, para todo $k \in \mathbb{N}$, e $\eta_k \to 0$, quando $k \to \infty$. Assim, $\dfrac{|a_i|}{\eta_k} \xrightarrow{k} \infty$, para todo $i \in I$, e já que M é não-decrescente, tem-se

$$M\left(\frac{|a_i|}{\eta_k}\right) \to \infty$$

quando $k \to \infty$ e para todo $i \in I$. Por outro lado, pelo fato de que $\eta_k \to 0$, e por M ser uma função de Orlicz, segue que (pensando no truncamento da série, caso necessário)

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{\infty} M\left(\frac{|a_j|}{\eta_k}\right) = \lim_{k\to\infty} \sum_{i\in I} M\left(\frac{|a_i|}{\eta_k}\right) = \sum_{i\in I} \lim_{k\to\infty} M\left(\frac{|a_i|}{\eta_k}\right) = \infty,$$

e isto significa que partir de um η_{k_0} suficientemente pequeno,

$$\sum_{j=1}^{\infty} M\left(\frac{|a_j|}{\eta_{k_0}}\right) > 1,$$

o que é uma contradição! Portanto, devemos ter obrigatoriamente $(a_j)_{j=1}^{\infty} = 0$.

N2) O caso $\lambda = 0$ é imediato. Tomando $\lambda \neq 0$, temos

$$\begin{aligned}
\|\lambda(a_j)_{j=1}^{\infty}\|_{\ell_M} &= \inf\left\{\eta > 0; \sum_{j=1}^{\infty} M\left(\frac{|\lambda a_j|}{\eta}\right) \leq 1\right\} \\
&= \inf\left\{|\lambda|\frac{\eta}{|\lambda|} > 0; \sum_{j=1}^{\infty} M\left(\frac{|a_j|}{\eta/|\lambda|}\right) \leq 1\right\} \\
&= |\lambda| \inf\left\{\frac{\eta}{|\lambda|} > 0; \sum_{j=1}^{\infty} M\left(\frac{|a_j|}{\eta/|\lambda|}\right) \leq 1\right\} = |\lambda| \|(a_j)_{j=1}^{\infty}\|_{\ell_M}.
\end{aligned}$$

N3) Dados $(a_j)_{j=1}^{\infty}, (b_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_M$, vamos denotar

$$A := \left\{\eta > 0; \sum_{j=1}^{\infty} M\left(\frac{|a_j|}{\eta}\right) \leq 1\right\} \text{ e } B := \left\{\eta > 0; \sum_{j=1}^{\infty} M\left(\frac{|b_j|}{\eta}\right) \leq 1\right\}.$$

Considerando $\eta_1 \in A$ e $\eta_2 \in B$, uma vez que M é uma função não-decrescente, temos

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{\infty} M\left(\frac{|a_j + b_j|}{\eta_1 + \eta_2}\right) &\leq \sum_{j=1}^{\infty} M\left(\frac{|a_j|}{\eta_1 + \eta_2} + \frac{|b_j|}{\eta_1 + \eta_2}\right) \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} M\left(\frac{\eta_1}{\eta_1 + \eta_2} \cdot \frac{|a_j|}{\eta_1} + \frac{\eta_2}{\eta_1 + \eta_2} \cdot \frac{|b_j|}{\eta_2}\right).
\end{aligned}$$

Agora, por M ser uma função convexa e por termos

$$\frac{\eta_1}{\eta_1 + \eta_2} < 1 \text{ e } 1 - \frac{\eta_1}{\eta_1 + \eta_2} = \frac{\eta_2}{\eta_1 + \eta_2}$$

segue que

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{\infty} M\left(\frac{|a_j + b_j|}{\eta_1 + \eta_2}\right) &\leq \sum_{j=1}^{\infty} M\left(\frac{\eta_1}{\eta_1 + \eta_2} \cdot \frac{|a_j|}{\eta_1} + \frac{\eta_2}{\eta_1 + \eta_2} \cdot \frac{|b_j|}{\eta_2}\right). \\
&\leq \frac{\eta_1}{\eta_1 + \eta_2} \cdot \sum_{j=1}^{\infty} M\left(\frac{|a_j|}{\eta_1}\right) + \frac{\eta_2}{\eta_1 + \eta_2} \cdot \sum_{j=1}^{\infty} M\left(\frac{|b_j|}{\eta_2}\right) \\
&\leq \frac{\eta_1}{\eta_1 + \eta_2} + \frac{\eta_2}{\eta_1 + \eta_2} = 1.
\end{aligned}$$

Assim, já que $\|(a_j)_{j=1}^{\infty} + (b_j)_{j=1}^{\infty}\|_{\ell_M} = \inf\left\{\eta > 0; \sum_{j=1}^{\infty} M\left(\frac{|a_j+b_j|}{\eta}\right) \leq 1\right\}$, vemos da expressão acima que $\|(a_j)_{j=1}^{\infty} + (b_j)_{j=1}^{\infty}\|_{\ell_M} \leq \eta_1 + \eta_2$, para quaisquer $\eta_1 \in A$ e $\eta_2 \in B$. Em outras palavras, $\|(a_j)_{j=1}^{\infty} + (b_j)_{j=1}^{\infty}\|_{\ell_M}$ é uma cota inferior para o conjunto $A + B = \{\eta_1 + \eta_2; \eta_1 \in A \text{ e } \eta_2 \in B\}$. Além disso, como estamos falando de números reais, $\inf(A+B) = \inf(A) + \inf(B) = \|(a_j)_{j=1}^{\infty}\|_{\ell_M} + \|(b_j)_{j=1}^{\infty}\|_{\ell_M}$.

Portanto, como $\inf(A+B)$ é a maior das cotas inferiores de $A+B$, concluímos que $\|(a_j)_{j=1}^{\infty}+(b_j)_{j=1}^{\infty}\|_{\ell_M} \leq \|(a_j)_{j=1}^{\infty}\|_{\ell_M} + \|(b_j)_{j=1}^{\infty}\|_{\ell_M}$.

Portanto, como as condições foram satisfeitas, segue o resultado. ■

Utilizaremos alguns fatos conhecidos de Análise Real para provar que a norma definida acima, torna completo o espaço de sequências de Orlicz.

Proposição 1.2.44. *Se M é uma função de Orlicz, então ℓ_M é um espaço de Banach.*

Demonstração: Vamos primeiro mostrar o seguinte fato: se $(a_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_M$, então $|a_j| \leq \|(a_j)_{j=1}^{\infty}\|_{\ell_M}$, para todo $j \in \mathbb{N}$.

Com efeito, podemos supor, sem perda de generalidade, que $M(1) = 1$. Isto porque caso $M(1) \neq 1$, poderíamos tomar a função $\frac{M}{M(1)}$, que gera exatamente o mesmo espaço de sequências que M (ver Observação 1.2.41). Daí, se $\eta > 0$ é tal que

$$\sum_{j=1}^{\infty} M\left(\frac{|a_j|}{\eta}\right) \leq 1$$

temos

$$M\left(\frac{|a_j|}{\eta}\right) \leq 1 = M(1), \ \forall j \in \mathbb{N},$$

e já que M é uma função não-decrescente, segue que $|a_j| \leq \eta, \ \forall j \in \mathbb{N}$. Assim, para todo $j \in \mathbb{N}$, $|a_j|$ é uma cota inferior para o conjunto

$$\left\{\eta > 0; \sum_{j=1}^{\infty} M\left(\frac{|a_j|}{\eta}\right) \leq 1\right\}$$

e então $|a_j| \leq \|(a_j)_{j=1}^{\infty}\|_{\ell_M}$, para todo $j \in \mathbb{N}$.

Voltemos agora à completude de ℓ_M. Considere uma sequência de Cauchy $(x^k)_{k=1}^{\infty}$ em ℓ_M, onde $x^k = (x_j^k)_{j=1}^{\infty}$, para cada $k \in \mathbb{N}$. Dessa forma, pelo fato acima, dado $\varepsilon > 0$ existe um índice $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para cada $j \in \mathbb{N}$, temos

$$|x_j^k - x_j^r| \leq \|x^k - x^r\|_{\ell_M} < \varepsilon$$

sempre que $k, r \geq k_0$. Ou seja, $(x_j^k)_{k=1}^{\infty}$ é uma sequência de Cauchy em $\mathbb{K}$, para cada $j \in \mathbb{K}$, e portanto convergente. Sendo $\lim_{k\to\infty} x_j^k = x_j$, $j \in \mathbb{N}$, considere $x = (x_j)_{j=1}^{\infty}$ a sequência formada por esses limites. Devemos provar que $x \in \ell_M$ e que $\|x^k - x\|_{\ell_M} \xrightarrow{k} 0$.

Consideremos para todo $k \in \mathbb{N}$ os conjuntos

$$A_k := \left\{\eta > 0; \sum_{j=1}^{\infty} M\left(\frac{|x_j^k - x_j^r|}{\eta}\right) \leq 1\right\} \ \text{ e } \ B_k := \left\{\eta > 0; \sum_{j=1}^{\infty} M\left(\frac{|x_j^k - x_j|}{\eta}\right) \leq 1\right\}.$$

Veja que, dado $\eta > 0$ tal que

$$\sum_{j=1}^{\infty} M\left(\frac{|x_j^k - x_j^r|}{\eta}\right) \leq 1,$$

temos, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{j=1}^{n} M\left(\frac{|x_j^k - x_j^r|}{\eta}\right) \leq 1.$$

Fazendo $r \to \infty$ obtemos

$$\sum_{j=1}^{n} M\left(\frac{|x_j^k - x_j|}{\eta}\right) \leq 1$$

e como isso vale para todo $n \in \mathbb{N}$, temos

$$\sum_{j=1}^{\infty} M\left(\frac{|x_j^k - x_j|}{\eta}\right) \leq 1. \tag{1.9}$$

Logo, para todo $k \in \mathbb{N}$, temos $x^k - x \in \ell_M$ e, como ℓ_M é um espaço vetorial, segue que $x = x^k - (x^k - x) \in \ell_M$. Por outro lado, de (1.9), vemos que $A_k \subseteq B_k$ e como estamos tratando de números reais, temos $\inf(B_k) \leq \inf(A_k)$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Daí temos

$$\|x_j^k - x\|_{\ell_M} \leq \|x_j^k - x_j^r\|_{\ell_M} < \varepsilon,$$

quando $k, r \geq k_0$, e segue que $\|x^k - x\|_{\ell_M} \xrightarrow{k} 0$. Portanto, ℓ_M é um espaço de Banach. ■

Um subespaço de ℓ_M de muito interesse é o espaço formado por todas as sequências de escalares $x = (a_j)_{j=1}^{\infty}$ tais que

$$\sum_{j=1}^{\infty} M\left(\frac{|a_j|}{\eta}\right) < \infty$$

para todo $\eta > 0$. Denotaremos esse subespaço por h_M e uma prova de que este espaço também é completo com a norma induzida de ℓ_M, pode ser encontrado em [25, Proposition 4.a.2]. Mais especificamente, o resultado diz que:

Proposição 1.2.45. *O espaço h_M é fechado em ℓ_M e, consequentemente, h_M é um espaço de Banach com a norma induzida de ℓ_M.*

1.2.8 Sequências mid p-somáveis

Apresentamos agora um pouco sobre o espaço das sequências mid p-somáveis, definido inicialmente por A. K. Karn e D. P. Sinha em [22]. Veremos uma norma, definida por G.

Botelho, J. R. Campos e J. Santos em [16], que torna este um espaço de Banach, além de algumas de suas principais propriedades.

Definição 1.2.46. Seja E um espaço normado e $1 \leq p < \infty$. Dizemos que uma sequência $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ em E é *mid p-somável* se

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |\varphi_n(x_j)|^p < \infty$$

para qualquer $(\varphi_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_p^w(E')$, isto é, se $((\varphi_n(x_j))_{j=1}^{\infty})_{n=1}^{\infty} \in \ell_p(\ell_p)$ sempre que $(\varphi_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_p^w(E')$. O espaço de todas as sequências mid p-somáveis de E será denotado por $\ell_p^{\mathrm{mid}}(E)$.

Teorema 1.2.47. *A função $\|\cdot\|_{p,\mathrm{mid}} : \ell_p^{\mathrm{mid}}(E) \to \mathbb{R}$ dada por*

$$\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{p,\mathrm{mid}} = \sup_{(\varphi_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_p^w(E')} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |\varphi_n(x_j)|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

caracteriza uma norma em $\ell_p^{\mathrm{mid}}(E)$. Além disso, se E é um espaço de Banach, então $\ell_p^{\mathrm{mid}}(E)$ é um espaço de Banach com a norma apresentada acima.

Demonstração: Veja [16, Proposition 1.4]. ■

Veremos agora alguns resultados que associam o espaço em questão com outros espaços já vistos nas subseções anteriores. O espaço $\Pi_p(E, F)$ da próxima proposição será explorado na próxima seção.

Teorema 1.2.48. *Se E é um espaço de Banach e $1 \leq p < \infty$, então as seguintes sentenças são verdadeiras:*

(a) $\ell_p^{\mathrm{mid}}(E) = \ell_p^w(E)$ *se, e somente se,* $\Pi_p(E, \ell_p) = \mathcal{L}(E, \ell_p)$.

(b) $\ell_p^{\mathrm{mid}}(E) = \ell_p(E)$ *se, e somente se, E é um subespaço de $L_p(\mu)$, onde μ é uma medida de Borel qualquer.*

Demonstração: Veja [22, Proposition 3.1 e Theorem 4.5]. ■

As igualdades do teorema anterior não são verdadeiras em geral. Contudo, o seguinte resultado nos fornece inclusões que sempre acontecem. A demonstração desses fatos podem ser vistas em [16, Proposition 1.4].

Proposição 1.2.49. *Se E é um espaço de Banach e $1 \leq p < \infty$, então:*

(a) $\ell_p(E) \subseteq \ell_p^{\mathrm{mid}}(E)$ *e* $\|\cdot\|_{p,\mathrm{mid}} \leq \|\cdot\|_p$.

(b) $\ell_p^{\mathrm{mid}}(E) \subseteq \ell_p^w(E)$ *e* $\|\cdot\|_{p,w} \leq \|\cdot\|_{p,\mathrm{mid}}$.

1.3 Os operadores absolutamente $(p;q)$-somantes

Apresentamos uma classe muito especial de operadores lineares contínuos, no contexto de operadores que melhoram convergência de séries em espaços de Banach: os operadores $(p;q)$-somantes.

Definição 1.3.1. Sejam E e F espaços de Banach, $T \in \mathcal{L}(E,F)$ e $0 < q \leq p < \infty$. Um operador T é dito *absolutamente* $(p;q)$*-somante*, ou apenas $(p;q)$-somante, se o operador induzido $\widehat{T} : \ell_q^w(E) \to \ell_p(F)$, dado por $\widehat{T}((x_j)_{j=1}^{\infty}) = (T(x_j))_{j=1}^{\infty}$ estiver bem definido.

O conjunto formado por todos os operadores absolutamente $(p;q)$-somantes de E e F será denotado por $\Pi_{p,q}(E,F)$ e, no caso em que $p = q$, escreveremos $\Pi_p(E,F)$. Na definição acima, a boa definição desses operadores é o que garante a melhora na convergência que citamos antes, visto que $\ell_p(F)$ é um subespaço de $\ell_q^w(E)$, diferentes quando a dimensão de E é infinita. De modo geral, isso torna o estudo dessa classe de operadores tão interessante.

Exemplo 1.3.2. Sejam E um espaço de Banach e $0 < p < \infty$. Se E possui dimensão infinita, então o operador identidade i não é p-somante.

De fato, para o caso $1 \leq p < \infty$, seja $\widehat{i} : \ell_p^w(E) \to \ell_p(E)$ o operador induzido da identidade i. Do Teorema de Dvoretzky-Rogers, existe uma sequência $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p^w(E) - \ell_p(E)$. Assim,

$$\widehat{i}((x_j)_{j=1}^{\infty}) = (i(x_j))_{j=1}^{\infty} = (x_j)_{j=1}^{\infty} \notin \ell_p(E).$$

Consequentemente, i não é p-somante, uma vez que seu operador induzido $\widehat{i}$ não está bem definido. O caso em que $0 < p < 1$, segue do caso anterior e do fato de que sendo $0 < p \leq q < \infty$, todo operador que é p-somante será também q-somante (ver [35, Teorema 2.3.23]).

A seguir apresentaremos uma caracterização para os operadores (p,q)-somantes, importante para entender um pouco da relação entre os espaços $\ell_p^u(E)$ e $\ell_p(E)$.

Proposição 1.3.3. *Sejam E e F espaços de Banach, $T \in \mathcal{L}(E,F)$ e $0 < q \leq p < \infty$. Então, $T \in \Pi_{p,q}(E,F)$ se, e somente se, para toda sequência $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_q^u(E)$ tivermos $(T(x_j))_{j=1}^{\infty} \in \ell_p(E)$.*

Demonstração: Veja [19, Proposição 2.2.13]. ■

Observação 1.3.4. Do exemplo anterior sabemos que se E for um espaço de Banach de dimensão infinita, então o operador identidade falha em ser absolutamente p-somante, com $0 < p < \infty$. Assim, de acordo com a proposição anterior, segue que $\ell_p^u(E) \neq \ell_p(E)$, sempre que $0 < p < \infty$ e E for um espaço de Banach com dimensão infinita.

A função

$$\pi_{p,q} \colon \Pi_{p,q}(E,F) \to [0,\infty), \text{ com } \pi_{p,q}(T) = \left\| \widehat{T} \right\|.$$

define uma norma completa em $\Pi_{p,q}(E,F)$, $1 \leq q \leq p < \infty$.

Proposição 1.3.5. *Sejam E e F espaços de Banach e $1 \leq q \leq p < \infty$. Então $(\Pi_{p,q}(E,F), \pi_{p,q}(\cdot))$ é um espaço de Banach.*

Demonstração: Veja [17, Proposição 2.18]. ■

1.4 Aplicações multilineares e Polinômios homogêneos

Nesta seção, apresentamos as aplicações multilineares, alguns resultados clássicos ligados a elas e um pouco da teoria de polinômios homogêneos, necessária no decorrer do Capítulo 3. Aqui, em geral, as definições serão o suficiente para darmos sentido ao texto do terceiro capítulo. Contudo, as demonstrações dos resultados dessa seção poderão ser consultadas no trabalho [11].

Comecemos, então, com a definição de operador multilinear.

Definição 1.4.1. Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $F,\ E_1,\ E_2, \ldots,\ E_n$ espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$. Se uma aplicação $A : E_1 \times \cdots \times E_n \to F$ é linear em cada coordenada, então dizemos que ela é *n-linear* (multilinear). Em outras palavras, um operador A será n-linear se os operadores

$$A_{(x_1,\ldots,x_{i-1},\cdot,x_{i+1},\ldots,x_n)} : E_i \to F,\ A_{(x_1,\ldots,x_{i-1},\cdot,x_{i+1},\ldots,x_n)}(y) = A(x_1,\ldots,x_{i-1},y,x_{i+1},\ldots,x_n)$$

são lineares para todos $x_1 \in E_1, \ldots, x_n \in E_n$ e $i = 1, \ldots, n$.

O conjunto formado por todas as aplicações multilineares de $E_1 \times \cdots \times E_n$ em F será denotado por $L(E_1, \ldots, E_n; F)$ (caso $F = \mathbb{K}$, escreveremos $L(E_1, \ldots, E_n)$). Se tivermos $E_1 = \cdots E_n = E$, então este conjunto será denotado por $L(^nE; F)$. O caso $n = 1$ será denotado $L(^1E; F) = L(E; F)$ e, além disso, $L(^0E; F) = F$. Se considerarmos as operações usuais de funções, então o conjunto $L(E_1, \ldots, E_n; F)$ é um espaço espaço vetorial.

Assim como no caso das aplicações lineares, podemos obter caracterizações e uma norma para um operador multilinear contínuo. A demonstração dos dois resultados, análogas ao caso $n = 1$, podem ser encontrada em [11, Teorema 1.2.2 e Proposição 1.2.4].

Teorema 1.4.2. *Sejam $n \in \mathbb{N}$, $E_1, \ldots, E_n, F$ espaços normados sobre $\mathbb{K}$ e $A : E_1 \times \cdots \times E_n \to F$ uma aplicação multilinear. Os seguintes itens são equivalentes:*

(a) *A aplicação A é contínua;*

(b) *Existe uma constante $K > 0$ tal que*

$$\|A(x_1, \ldots, x_n)\| \leq K\|x_1\| \cdots \|x_n\|$$

para todo $(x_1, \ldots, x_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, o conjunto das aplicações multilineares contínuas de $E_1 \times \cdots \times E_n$ em F será denotado por $\mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$. Caso $E_1 = \cdots = E_n = E$, denotaremos por $\mathcal{L}(^nE; F)$. Além disso, se $F = \mathbb{K}$, denotaremos $\mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; \mathbb{K})$ e $\mathcal{L}(^nE; \mathbb{K})$ simplesmente por $\mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n)$ e $\mathcal{L}(^nE)$, respectivamente. Por fim, iremos representar $\mathcal{L}(^1E; F)$ por $\mathcal{L}(E; F)$.

Proposição 1.4.3. *Sejam $n \in \mathbb{N}$, $E_1, \ldots, E_n$ e F espaços normados sobre o corpo $\mathbb{K}$. A função $\|\cdot\| : \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F) \to \mathbb{R}$ dada por*

$$\|A\| = \sup\{\|A(x)\|; x \in E_1 \times \cdots \times E_n, \|x\|_\infty \leq 1\}$$

é uma norma para o espaço $\mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$.

Vejamos um tipo importante de operadores multilineares. Considere, para cada $n \in \mathbb{N}$, o conjunto S_n de todas as permutações de $\{1, \ldots, n\}$. Ou seja, o conjunto de todas as bijeções $\sigma : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$.

Definição 1.4.4. Sejam $n \in \mathbb{N}$, E e F espaços normados sobre $\mathbb{K}$. Uma aplicação multilinear $A : E \times \cdots \times E \to F$ é dita *simétrica* se tivermos para todo $\sigma \in S_n$,

$$A(x_1, \ldots, x_n) = A(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)})$$

para quaisquer $x_1, \ldots, x_n \in E$.

Vamos denotar, para cada $n \in \mathbb{N}$, o subespaço de $L(^nE; F)$ formado por todos os operadores n-lineares de E^n em F que são simétricos por $L_s(^nE; F)$ e os que são simétricos e contínuos por $\mathcal{L}_s(^nE; F)$.

Vejamos agora a definição de polinômio homogêneo.

Definição 1.4.5. Sejam E e F espaços vetoriais sobre o corpo $\mathbb{K}$. Dizemos que uma aplicação $P : E \to F$ é um *polinômio homogêneo de grau n* (polinômio n-homogêneo) se existir $A \in L(^nE; F)$ tal que $P(x) = Ax^n = A(x, x, \ldots, x)$, para todo $x \in E$. Neste caso, diz-se que P é o polinômio n-homogêneo associado a A.

Vamos denotar por $P(^nE; F)$ o espaço de todos os polinômios n-homogêneos de E em F (caso $F = \mathbb{K}$, escrevemos apenas $P(^nE)$). O conjunto de todos os polinômios constantes de E em F será denotado por $P(^0E; F)$.

Observação 1.4.6. Uma vez que a definição de polinômio homogêneo é dada em função de uma aplicação multilinear, dados E e F espaços normados sobre $\mathbb{K}$, $\lambda \in \mathbb{K}$, $P \in P(^nE;F)$ e sendo $A \in L(^nE;F)$ a aplicação associada a P, temos

$$P(\lambda x) = A(\lambda x)^n = \lambda^n A x^n = \lambda^n P(x),$$

para todo $x \in E$.

Podemos definir um polinômio a partir de polinômios homogêneos como veremos a seguir.

Definição 1.4.7. Considere E e F espaços normados sobre $\mathbb{K}$. A função $P : E \to F$ é dito um polinômio se puder ser escrito como uma soma $P = P_0 + P_1 + \cdots + P_n$, com $P_j \in P(^jE;F)$ para cada $j = 1, \ldots, n$. Se $P_n \neq 0$, então dizemos que o polinômio P tem grau n. Por $P(E;F)$ denotamos o espaço de todos os polinômios de E em F.

O próximo resultado associa a definição de polinômios n-homogêneos com aplicações multilineares simétricas.

Proposição 1.4.8. *Sejam E e F espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$ e $n \in \mathbb{N}$. Se $P \in P(^nE;F)$, então existe uma única aplicação n-linear simétrica $T \in L_s(^nE;F)$ tal que $P(x) = Tx^n$ para todo $x \in E$.*

Demonstração: Veja [11, Proposição 1.3.4]. ■

Vamos denotar por $\hat{A}$ o polinômio homogêneo associado a A e $\check{P}$ a aplicação multilinear associada ao polinômio P.

O espaço formado por todos os polinômios n-homogêneos de E em F que são contínuos será denotado por $\mathcal{P}(^nE;F)$ (caso $F = \mathbb{K}$, escrevemos apenas $\mathcal{P}(^nE)$). O espaço dos polinômios contínuos de E em F é denotado por $\mathcal{P}(E;F)$.

Assim, como a definição de polinômios homogêneos está diretamente atrelada com aplicações multilineares, é natural o estudo da continuidade e a definição de uma norma neste contexto. As demonstrações desses resultados encontram-se em [11, Teorema 1.3.7 e Proposição 1.3.8].

Teorema 1.4.9. *Sejam $n \in \mathbb{N}$, E e F espaços normados sobre $\mathbb{K}$, $P \in P(^nE;F)$ e $A \in L_s(^nE;F)$, com $\hat{A} = P$. São equivalentes:*

(a) $A \in \mathcal{L}_s(^nE;F)$;

(b) $P \in \mathcal{P}(^nE;F)$;

(c) Existe uma constante $K > 0$ tal que

$$\|P(x)\| \leq K\|x\|^n$$

para todo $x \in E$.

Após vermos algumas equivalências envolvendo a continuidade de polinômios n-homogêneos, vamos agora a uma caracterização para norma desses polinômios.

Proposição 1.4.10. *Seja $P \in \mathcal{P}(^nE; F)$. Então, a aplicação $\|\cdot\| : \mathcal{P}(^nE; F) \to [0, \infty)$ dada por*

$$\|P\| = \sup_{\|x\|=1} \|P(x)\|$$

define uma norma em $\mathcal{P}(^nE; F)$.

Capítulo 2

Lineabilidade e espaçabilidade sobre espaços invariantes de sequências

Neste capítulo, além de apresentar a teoria de lineabilidade e espaçabilidade, apresentaremos a definição dos espaços invariantes de sequências, abordando diversos exemplos. Logo após veremos uma técnica, através de um resultado, que nos possibilitará explorar o estudo de espaçabilidade em conjuntos envolvendo espaços de sequências. Por fim, aplicaremos a técnica estudada para o contexto de espaçabilidade no espaço dos operadores que atingem norma em determinado vetor. O trabalho [13] foi a principal referência para este capítulo.

2.1 Lineabilidade e espaçabilidade

Veremos aqui as principais definições que nortearão nosso trabalho, que são as de lineabilidade e espaçabilidade. Antes disso, alguns conceitos envolvendo cardinalidade, que nos possibilitarão entender com mais clareza os conceitos que veremos, serão expostos.

Dado um conjunto A, denotaremos por $\operatorname{card}(A)$, a cardinalidade de A. Considerando A e B dois conjuntos não-vazios quaisquer, dizemos que:

- Se existir uma aplicação injetora de A em B, então $\operatorname{card}(A) \leq \operatorname{card}(B)$;
- Se existir uma aplicação sobrejetora de A em B, então $\operatorname{card}(A) \geq \operatorname{card}(B)$;
- Se existir uma aplicação bijetora de A em B, então $\operatorname{card}(A) = \operatorname{card}(B)$;
- Se $\operatorname{card}(A) \leq \operatorname{card}(B)$ e não existir uma bijeção entre A e B, então $\operatorname{card}(A) < \operatorname{card}(B)$;

- Se card $(A) \geq$ card (B) e não existir uma bijeção entre A e B, então card $(A) >$ card (B).

Apesar de não termos definido de maneira direta o que é card (A), este "número" se comporta como uma extensão da noção de número natural (contegem) e assim os símbolos $\leq$, $\geq$, $<$, $>$ e $=$ fazem sentido neste caso. Pode-se pensar em um número cardinal como sendo uma classe de equivalência de conjuntos. Além disso, dizemos que card (A) é

- *finito*, se A for um conjunto finito;
- *infinito*, se A for um conjunto infinito;
- *enumerável*, se card $(A) =$ card $(\mathbb{N})$.

Em um conjunto finito A, consideramos card (A) como a quantidade de elementos deste conjunto. Também denotamos

$$\text{card } (\mathbb{N}) = \aleph_0 \text{ e card } (\mathbb{R}) = \mathfrak{c},$$

onde costumeiramente chamamos de "aleph-zero" a cardinalidade de $\mathbb{N}$ e cardinalidade do "continuum", para a cardinalidade de $\mathbb{R}$. Por outro lado, como é de se esperar, considera-se por convenção a cardinalidade de um conjunto vazio como sendo zero.

Em certo sentido, podemos sempre "comparar" a cardinalidade dos naturais com qualquer outro cardinal infinito, como veremos no próximo resultado.

Proposição 2.1.1. *Se α é um número cardinal infinito, então $\alpha \geq \aleph_0$.*

Demonstração: Considere um conjunto M tal que card $(M) = \alpha$ e tome $x_1 \in M$. Sendo M infinito, podemos tomar agora $x_2 \in M - \{x_1\}$ e ir repetindo este processo sucessivas vezes. Conseguimos assim uma sequência $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ em M tal que $x_m \neq x_n$ sempre que $m \neq n$. Assim, a função $f : \mathbb{N} \to M$ que associa cada n a um valor x_n é injetora, e portanto, segue que $\alpha \geq \aleph_0$, uma vez que $f(\mathbb{N}) \subseteq M$ e card $(f(\mathbb{N})) = \aleph_0$. ■

A definição de lineabilidade, que veremos agora, nos possibilita "medir o tamanho linear" de um determinado subconjunto de um espaço vetorial topológico, onde as operações de soma e produto por escalar são contínuas.

Definição 2.1.2. Sejam X um espaço vetorial topológico, M um subconjunto de X e μ um número cardinal.

(1) Dizemos que M é *μ-lineável* se $M \cup \{0\}$ contém um espaço vetorial de dimensão μ.

(2) Dizemos que M é *μ-espaçável* se $M \cup \{0\}$ contém um espaço vetorial fechado de dimensão μ.

(3) Dizemos que M é *μ-denso-lineável* se $M \cup \{0\}$ contém um espaço vetorial denso de dimensão μ.

Por conveniência, sempre que μ for um cardinal infinito, isto é, sempre que $\mu \geq \aleph_0$, vamos nos referir a M apenas como *lineável*, *espaçável* ou *denso-lineável*. É claro que se considerarmos um espaço vetorial, sem a presença de topologia, a definição de lineabilidade ainda é preservada.

Um subconjunto M de um espaço vetorial topológico X é dito *maximal lineável* ou *maximal espaçável* se o espaço vetorial encontrado em $M \cup \{0\}$ possui dimensão igual a de X.

2.2 Espaços invariantes de sequências

Vamos apresentar a definição de uma classe de espaços de sequências determinadas por certas propriedades, que vão nos auxiliar no estudo de lineabilidade e espaçabilidade em espaços de sequências com um certo grau de generalidade.

Definição 2.2.1. Seja $X \neq \{0\}$ um espaço de Banach.

(a) Sendo $x \in X^{\mathbb{N}}$, por x^0 denotaremos a *versão "zero-livre"* de x, ou seja: se x possuir apenas uma quantidade finita de coordenadas não-nulas, então $x^0 = 0$; caso contrário, $x^0 = (x_j)_{j=1}^{\infty}$, onde cada x_j é a j-ésima coordenada não nula de x.

(b) Vamos definir como *espaço invariante de sequências* sobre X, um espaço de Banach ou quasi-Banach $S(X)$ de sequências a valores em X, de dimensão infinita, que satisfaz as seguintes condições:

(b_1) Para $x \in X^{\mathbb{N}}$ tal que $x^0 \neq 0$, teremos $x \in S(X)$ se, e somente se, $x^0 \in S(X)$, e neste caso

$$\|x\|_{S(X)} \leq K\|x^0\|_{S(X)},$$

onde K é uma constante dependendo apenas de $S(X)$.

(b_2) Dado $x = (x_j)_{j=1}^{\infty} \in S(X)$, tem-se $\|x_j\|_X \leq \|x\|_{S(X)}$, para todo $j \in \mathbb{N}$.

Por simplicidade, diremos que um espaço invariante de sequências é um espaço invariante de sequências sobre algum espaço de Banach X.

Como veremos agora por meio de alguns exemplos, vários espaços de sequências clássicos são espaços invariantes de sequências:

Exemplo 2.2.2.

(a) Se X é um espaço de Banach e $0 < p \leq \infty$, então, os espaços de sequências $\ell_p(X)$, $\ell_p^u(X)$, $c_0(X)$ e $\ell_p^w(X)$ são espaços invariantes de sequências sobre X, com suas respectivas normas (p-normas, caso $0 < p < 1$). Como as verificações desses fatos são feitas de maneira análoga, faremos apenas as verificações para os espaços $\ell_p(X)$ e $\ell_p^w(X)$. Começando com o espaço $\ell_p(X)$, analisaremos dois casos. Para o caso $0 < p < \infty$, considere $x = (x_j)_{j=1}^{\infty} \in X^{\mathbb{N}}$ tal que $x^0 = (y_i) \neq 0$, e y_i é a i-ésima coordenada não nula de x. Assim, como os termos não nulos de x são exatamente os de x^0, para todo $\varphi \in X'$ temos

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|y_i\|_X^p = \sum_{j=1}^{\infty} \|x_j\|_X^p,$$

donde vemos que $x \in \ell_p(X)$ se, e somente se, $x^0 \in \ell_p(X)$ e, além disso,

$$\|x\|_p = \left(\sum_{j=1}^{\infty} \|x_j\|_X^p \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \|y_i\|_X^p \right)^{\frac{1}{p}} = \|x^0\|_p.$$

Também temos, para qualquer $i \in \mathbb{N}$,

$$\|y_i\|_X \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} \|y_i\|_X^p \right)^{\frac{1}{p}} = \|x^0\|_p = \|x\|_p.$$

No caso em que $p = \infty$, considere novamente $x = (x_j)_{j=1}^{\infty} \in X^{\mathbb{N}}$, tal que $x^0 = (y_i) \neq 0$. pelos mesmos motivos expostos acima, segue que

$$\|x\|_\infty = \|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_\infty = \|(y_i)_{i=1}^{\infty}\|_\infty = \|x^0\|_\infty,$$

ou seja, $x \in \ell_\infty(X)$ se, e somente se, $x^0 \in \ell_\infty(X)$, com $\|x\|_\infty = \|x^0\|_\infty$. Além disso, para todo $i \in \mathbb{N}$, tem-se

$$\|y_i\|_X \leq \|(y_i)_{i=1}^{\infty}\|_\infty = \|x^0\|_\infty = \|x\|_\infty.$$

Para o espaço $\ell_p^w(X)$, suponha primeiro que $0 < p < \infty$, e considere $x = (x_j)_{j=1}^{\infty} \in X^{\mathbb{N}}$, tal que $x^0 = (y_i) \neq 0$, e y_i é a i-ésima coordenada não nula de x. Assim, como os termos não nulos de x são exatamente os de x^0, para todo $\varphi \in X'$ temos

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\varphi(y_i)|^p = \sum_{j=1}^{\infty} |\varphi(x_j)|^p,$$

donde vemos que $x \in \ell_p^w(X)$ se, e somente se, $x^0 \in \ell_p^w(X)$ e, além disso

$$\begin{aligned}\|x\|_{w,p} &= \sup_{\varphi \in B_{X'}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\varphi(x_j)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \sup_{\varphi \in B_{X'}} \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\varphi(y_i)|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \|x^0\|_{w,p}.\end{aligned}$$

Como, para cada $i \in \mathbb{N}$, temos $y_i \neq 0$ segue do Teorema de Hahn-Banach, na forma do Corolário 1.1.22, que para todo $\varphi \in B_{X'}$ e todo $i \in \mathbb{N}$

$$\|y_i\|_X = \sup_{\varphi \in B_{X'}} |\varphi(y_i)| \leq \sup_{\varphi \in B_{X'}} \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\varphi(y_i)|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \|x^0\|_{w,p} = \|x\|_{w,p}.$$

O caso em que $p = \infty$ já foi mostrado já que $\ell_\infty(X)$ é um espaço invariante de sequências sobre X e sabemos que $\ell_\infty^w(X) = \ell_\infty(X)$.

(b) Sejam $0 < q \leq s \leq \infty$ e X um espaço de Banach. O espaço das sequências mix $(s;q)$-somáveis é um espaço invariante sequências em X. De fato, considere $x = (x_j)_{j=1}^{\infty} \in X^{\mathbb{N}}$ tal que $x^0 = (x_i^0)_{i=1}^{\infty} \neq 0$. Se $x \in \ell_{m(s;q)}(X)$, então existem sequências $(a_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p$ e $(y_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_s^w(X)$ tais que $x_j = a_j y_j$ para todo $j \in \mathbb{N}$ e assim x^0 pode ser escrita por $x_i^0 = a_i^0 y_i^0$, onde $(a_i^0)_{i=1}^{\infty}$ e $(y_i^0)_{i=1}^{\infty}$ são as versões "zero-livres" de $(a_i)_{i=1}^{\infty}$ e $(y_i)_{i=1}^{\infty}$, respectivamente. Logo, como ℓ_p e $\ell_s^w(X)$ são espaços invariantes de sequências, segue que $x^0 \in \ell_{m(s;q)}(X)$.

Reciprocamente, se $x^0 = (x_i^0)_{i=1}^{\infty} \in \ell_{m(s;q)}(X)$, então existem sequências $(a_i)_{i=1}^{\infty} \in \ell_p$ e $(y_i)_{i=1}^{\infty} \in \ell_s^w(X)$ tais que $x_i^0 = a_i b_i$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Obviamente, $a_i \neq 0$ e $y_i \neq 0$, para todo $i \in \mathbb{N}$. Agora, basta reparar que se tomarmos sequências $(b_j)_{j=1}^{\infty}$, $(w_j)_{j=1}^{\infty} \in X^{\mathbb{N}}$ tais que $(a_i)_{i=1}^{\infty}$ e $(y_i)_{i=1}^{\infty}$ sejam as versões "zero-livres" de $(b_j)_{j=1}^{\infty}$ e $(w_j)_{j=1}^{\infty}$, respectivamente, então podemos escrever $x_j = b_j y_j$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Além disso, como ℓ_p e $\ell_s^w(X)$ são espaços invariantes de sequências, temos $(b_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p$ e $(w_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_s^w(X)$ e portanto $x \in \ell_{m(s;q)}(X)$.

Agora, considere as decomposições $x_j = a_j y_j$ e $x_i^0 = a_i^0 y_i^0$ para todos $j, i \in \mathbb{N}$, sendo $(a_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p$, $(y_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_s^w(X)$ e $(a_i^0)_{i=1}^{\infty}$ e $(y_i^0)_{i=1}^{\infty}$ suas respectivas versões "zero-livres". Como ℓ_p e $\ell_s^w(X)$ são espaços invariantes de sequências, do que obtivemos no item (a), temos

$$\|(a_j)_{j=1}^{\infty}\|_p \|(y_j)_{j=1}^{\infty}\|_{w,s} = \|(a_i^0)_{i=1}^{\infty}\|_p \|(y_i^0)_{i=1}^{\infty}\|_{w,s}$$

e tomando o ínfimo sobre as decomposições de x obtemos

$$\|x\|_{m(s;q)} = \inf \|(a_j)_{j=1}^{\infty}\|_p \|(y_j)_{j=1}^{\infty}\|_{w,s} \leq \|(a_i^0)_{i=1}^{\infty}\|_p \|(y_i^0)_{i=1}^{\infty}\|_{w,s}.$$

Logo, $\|x\|_{m(s;q)}$ é uma cota inferior para o conjunto formado por todas as decomposições de x^0 e sendo $\|x^0\|_{m(s;q)}$ o ínfimo desse conjunto, obtemos a desigualdade

$$\|x\|_{m(s;q)} \leq \|x^0\|_{m(s;q)}.$$

Por fim, novamente utilizando o fato de ℓ_p e $\ell_s^w(X)$ serem espaços invariantes de sequências, dada qualquer decomposição $x_j = a_j y_j$, com $(a_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p$ e $(y_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_s^w(X)$, para todo $i \in \mathbb{N}$, temos

$$\|x_i^0\|_X = |a_i^0| \|y_i^0\|_X \leq \|(a_i^0)_{i=1}^{\infty}\|_p \|(y_i^0)_{i=1}^{\infty}\|_{w,s} = \|(a_j)_{j=1}^{\infty}\|_p \|(y_j)_{j=1}^{\infty}\|_{w,s}.$$

Como a desigualdade acima independe da decomposição, segue que

$$\|x_i^0\|_X \leq \inf \|(a_j)_{j=1}^{\infty}\|_p \|(y_j)_{j=1}^{\infty}\|_{w,s} = \|x\|_{m(s;q)},$$

para todo $i \in \mathbb{N}$. Portanto, $\ell_{m(s;q)}(X)$ é um espaço invariante sequências em X.

(c) Sendo M uma função de Orlicz, o espaço de sequências de Orlicz ℓ_M é um espaço invariante de sequências. De fato, considere $x = (a_j)_{j=1}^{\infty} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ tal que $x^0 = (b_i)_{i=1}^{\infty} \neq 0$. Uma vez que $M(0) = 0$ e os termos de x^0 são exatamente os termos não nulos de x, tem-se

$$\sum_{i=1}^{\infty} M\left(\frac{|b_i|}{\eta}\right) = \sum_{j=1}^{\infty} M\left(\frac{|a_j|}{\eta}\right),$$

para algum $\eta > 0$, donde vemos que $x \in \ell_M$ se, e somente se, $x^0 \in \ell_M$ e, além disso,

$$\|x^0\|_{\ell_M} = \inf\left\{\eta > 0; \sum_{i=1}^{\infty} M\left(\frac{|b_i|}{\eta}\right) \leq 1\right\} = \inf\left\{\eta > 0; \sum_{j=1}^{\infty} M\left(\frac{|a_j|}{\eta}\right) \leq 1\right\} = \|x\|_{\ell_M}.$$

Por outro lado, vimos na demonstração da Proposição 1.2.44 que, se $(a_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_M$, tem-se $|a_j| \leq \|(a_j)_{j=1}^{\infty}\|_{\ell_M} = \|x\|_{\ell_M}$, para todo $j \in \mathbb{N}$. Com tudo isso, mostramos que ℓ_M é um espaço invariante de sequências.

De maneira semelhante, mostra-se que seu subespaço h_M também é um espaço invariante de sequências.

(d) O espaço das sequências mid p-somantes, $1 \leq p < \infty$, é um espaço invariante de sequências sobre X. De fato, considere $x = (x_j)_{j=1}^{\infty} \in X^{\mathbb{N}}$, tal que $x^0 = (y_i) \neq 0$. Uma vez que os termos de x^0 são justamente os termos não nulos de x, para todo $(\varphi_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_p^w(E')$

temos,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}|\varphi_n(x_j)|^p = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}|\varphi_n(y_i)|^p$$

donde $x \in \ell_p^{\mathrm{mid}}(X)$ se, e somente se $x^0 \in \ell_p^{\mathrm{mid}}(X)$ e, além disso,

$$\begin{aligned}\|x\|_{p,\mathrm{mid}} &= \sup_{(\varphi_n)_{n=1}^{\infty}\in\ell_p^w(E')}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}|\varphi_n(x_j)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \sup_{(\varphi_n)_{n=1}^{\infty}\in\ell_p^w(E')}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}|\varphi_n(y_i)|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \|x^0\|_{p,\mathrm{mid}}.\end{aligned}$$

Por fim, lembremos que $\ell_p^{\mathrm{mid}}(X) \subseteq \ell_p^w(X)$, com $\|\cdot\|_{p,w} \leq \|\cdot\|_{p,\mathrm{mid}}$, e assim, sendo $\ell_p^w(X)$ um espaço invariante de sequências, temos

$$\|x_j\| \leq \|x\|_{p,w} \leq \|x\|_{p,\mathrm{mid}}$$

para todo $j \in \mathbb{N}$. Portanto, $\ell_p^{\mathrm{mid}}(X)$ é um espaço invariante de sequências.

2.3 Espaçabilidade em espaços invariantes de sequências

Tendo em vista a definição e todos os exemplos apresentados na seção anterior, iniciaremos esta seção, apresentando o principal resultado do capítulo.

Teorema 2.3.1. *Seja $S(X)$ um espaço invariante de sequências sobre o espaço de Banach X. As seguintes sentenças são verdadeiras:*

(a) $S(X) - \bigcup_{q\in\Gamma}\ell_q(X)$ *é vazio ou espaçável, para todo* $\Gamma \subseteq (0,\infty]$.

(b) $S(X) - c_0(X)$ *é vazio ou espaçável.*

Demonstração: Consideremos $A = \bigcup_{q\in\Gamma}\ell_q(X)$ em (a) e $A = c_0(X)$ em (b). Suponha que $S(X) - A$ é não-vazio e tome $x \in S(X) - A$. Por $S(X)$ ser um espaço invariante de sequências, é claro que $x^0 \in S(X)$.

Afirmação 1. Temos $x^0 \in S(X) - A$.

De fato, no caso (a), se tivéssemos $x^0 \in A = \bigcup_{q\in\Gamma}\ell_q(X)$, então teríamos $x^0 \in \ell_q(X)$, para algum $q \in \Gamma$. Assim, já que $\ell_q(X)$ é um espaço invariante de sequências, deveríamos ter $x \in \ell_q(X) \subseteq \bigcup_{q\in\Gamma}\ell_q(X) = A$, o que é absurdo pela escolha de x. No caso (b), ocorre o mesmo: se tivéssemos $x^0 \in A = c_0(X)$, então deveríamos ter $x \in c_0(X) = A$, já que $c_0(X)$ é um espaço invariante de sequências. Absurdo.

Vamos tomar $\mathbb{N} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathbb{N}_i$ como união infinita de subconjuntos infinitos de $\mathbb{N}$ dois a dois disjuntos, com $\mathbb{N}_i = \{i_n;\ n \in \mathbb{N}\ e\ i_n < i_{n+1}\}$, e definamos

$$y_i = \sum_{j=1}^{\infty} x_j e_{i_j} \in X^{\mathbb{N}}$$

para cada $i \in \mathbb{N}$.

Note que para todo $i \in \mathbb{N}$, os termos não nulos de y_i são exatamente os termos de $x^0 = (x_j)_{j=1}^{\infty}$ e sempre temos $i_n < i_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo, para todo $i \in \mathbb{N}$, $y_i^0 = x^0 \neq 0$ e $y_i^0 \in S(X)$. Daí, como $S(X)$ é um espaço invariante de sequências, $y_i \in S(X)$, para todo $i \in \mathbb{N}$.

Afirmação 2. Para todo $i \in \mathbb{N}$, tem-se $y_i \notin A$.

Com efeito, no caso (a), se tivéssemos $y_i \in A = \bigcup_{q \in \Gamma} \ell_q(X)$, então teríamos $y_i \in \ell_q(X)$, para algum $q \in \Gamma$ e, assim, já que $\ell_q(X)$ é um espaço invariante de sequências, $x^0 = y_i^0 \in \ell_q(X) \subseteq \bigcup_{q \in \Gamma} \ell_q(X) = A$, o que não ocorre. Para o caso (b) o raciocínio é análogo.

Definamos agora $\tilde{s} = 1$, se $S(X)$ for um espaço de Banach e $\tilde{s} = s$, se $S(X)$ for um espaço s-Banach, $0 < s < 1$. Assim, dada qualquer sequência $(a_i)_{i=1}^{\infty} \in \ell_{\tilde{s}}$ tem-se

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{\infty} \|a_i y_i\|_{S(X)}^{\tilde{s}} &= \sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^{\tilde{s}} \|y_i\|_{S(X)}^{\tilde{s}} \\ &\leq K^{\tilde{s}} \sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^{\tilde{s}} \|y_i^0\|_{S(X)}^{\tilde{s}} \\ &= K^{\tilde{s}} \|x^0\|_{S(X)}^{\tilde{s}} \sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^{\tilde{s}} = K^{\tilde{s}} \|x^0\|_{S(X)}^{\tilde{s}} \|(a_i)_{i=1}^{\infty}\|_{\tilde{s}}^{\tilde{s}} < \infty,\end{aligned}$$

onde K é a constante no item (b_1) da Definição 2.2.1. Com isso, no caso em que $S(X)$ é um espaço de Banach, teremos $\tilde{s} = 1$, donde $\sum_{i=1}^{\infty} \|a_i y_i\|_{S(X)} < \infty$, e assim, do Corolário 1.2.19, a série $\sum_{i=1}^{\infty} a_i y_i$ converge. No caso quem que $S(X)$ é um espaço s-Banach, com $0 < s < 1$, temos $\sum_{i=1}^{\infty} \|a_i y_i\|_{S(X)}^{\tilde{s}} < \infty$, donde segue que $\sum_{i=1}^{\infty} a_i y_i$ converge pelo Teorema 1.2.18. Daí, a aplicação

$$T : \ell_{\tilde{s}} \to S(X),\ T((a_i)_{i=1}^{\infty}) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i y_i$$

está bem definida e é linear pois, dados $(a_i)_{i=1}^{\infty}, (b_i)_{i=1}^{\infty} \in \ell_{\tilde{s}}$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, tem-se

$$T((a_i)_{i=1}^{\infty} + \lambda (b_i)_{i=1}^{\infty}) = T((a_i + \lambda b_i)_{i=1}^{\infty})$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{\infty}(a_i + \lambda b_i)y_i \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} a_i y_i + \lambda \sum_{i=1}^{\infty} b_i y_i \\
&= T((a_i)_{i=1}^{\infty}) + \lambda T((b_i)_{i=1}^{\infty}).
\end{aligned}
$$

Além disso, T é injetor: dada $(a_i)_{i=1}^{\infty} \in \ell_{\tilde{s}}$, temos

$$
\begin{aligned}
T((a_i)_{i=1}^{\infty}) \equiv 0 &\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{\infty} a_i y_i = (0, 0, \ldots) \\
&\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_i x_j e_{i_j} = (0, 0, \ldots) \\
&\Leftrightarrow a_i x_j = 0, \ \forall i, j \in \mathbb{N}
\end{aligned}
$$

pois, $\mathbb{N}_i \cap \mathbb{N}_k = \emptyset$ se $i \neq k$. Como $x_j \neq 0$ para todo $j \in \mathbb{N}$, segue que $a_i = 0$ para todo $i \in \mathbb{N}$, ou seja $(a_i)_{i=1}^{\infty} = 0$.

Uma vez que $\ell_{\tilde{s}}$ é um espaço de dimensão infinita e T é injetora, segue que $T(\ell_{\tilde{s}})$ e, consequentemente, $\overline{T(\ell_{\tilde{s}})}$ são subespaços vetoriais de dimensão infinita do espaço $S(X)$. Logo, se mostrarmos que $\overline{T(\ell_{\tilde{s}})} - \{0\} \subseteq S(X) - A$, estaremos provando que $\overline{T(\ell_{\tilde{s}})} \subseteq (S(X) - A) \cup \{0\}$ e, nesse caso, que $S(X) - A$ é espaçável.

Considere uma sequência $z = (z_n)_{n=1}^{\infty} \in \overline{T(\ell_{\tilde{s}})} - \{0\}$. Assim, existe uma sequência $(a^{(k)})_{k=1}^{\infty}$ em $\ell_{\tilde{s}}$, com $k \in \mathbb{N}$, tal que $z = \lim\limits_{k\to\infty} T((a_i^{(k)})_{i=1}^{\infty})$ em $S(X)$. Veja também, que para todo $k \in \mathbb{N}$, ocorre

$$
T((a_i^{(k)})_{i=1}^{\infty}) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i^{(k)} y_i = \sum_{i=1}^{\infty} a_i^{(k)} \sum_{j=1}^{\infty} x_j e_{i_j} = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_i^{(k)} x_j e_{i_j}.
$$

Fixemos $r \in \mathbb{N}$ tal que $z_r \neq 0$. Como $\mathbb{N} = \bigcup_{j=1}^{\infty} \mathbb{N}_j$ é uma união disjunta, existem únicos $m,\ t \in \mathbb{N}$ tais que $e_{m_t} = e_r$ e assim, para todo $k \in \mathbb{N}$, a r-ésima coordenada de $T((a_i^{(k)})_{i=1}^{\infty})$ é o elemento $a_m^{(k)} x_t$. Pela desigualdade $\|x_j\|_X \leq \|x\|_{S(X)}$ apresentada da condição (b_2) da Definição 2.2.1, vemos que convergência em $S(X)$ implica na convergência coordenada a coordenada. Assim, podemos obter a r-ésima coordenada de z fazendo

$$
z_r = \lim_{k\to\infty} a_m^{(k)} x_t = x_t \lim_{k\to\infty} a_m^{(k)}
$$

e como $z_r \neq 0$ e $x_t \neq 0$ para todo $t \in \mathbb{N}$, sucede-se que

$$
\|z_r\|_X = \|x_t \lim_{k\to\infty} a_m^{(k)}\|_X \Rightarrow \lim_{k\to\infty} |a_m^{(k)}| = \frac{\|z_r\|_X}{\|x_t\|_X} \neq 0.
$$

Para $j,\ k \in \mathbb{N}$, sabemos que a m_j-ésima coordenada de $T((a_i^{(k)})_{i=1}^{\infty})$ é $a_m^{(k)} x_j$. Definindo então $\alpha_m = \lim_{k\to\infty} |a_m^{(k)}| = \dfrac{\|z_r\|_X}{\|x_t\|_X} \neq 0$, temos

$$\lim_{k\to\infty} \|a_m^{(k)} x_j\|_X = \lim_{k\to\infty} |a_m^{(k)}| \|x_j\|_X = \|x_j\|_X \lim_{k\to\infty} |a_m^{(k)}| = \alpha_m \|x_j\|_X$$

para todo $j \in \mathbb{N}$. Por outro lado, da convergência coordenada a coordenada, já que $a_m^{(k)} x_j$ é a m_j-ésima coordenada de $T((a_i^{(k)})_{i=1}^{\infty})$, vemos que

$$\lim_{k\to\infty} \|a_m^{(k)} x_j\|_X = \|z_{m_j}\|_X,$$

ou seja,

$$\|z_{m_j}\|_X = \alpha_m \|x_j\|_X$$

para todo $j \in \mathbb{N}$. Observe que m, que depende de r, está fixado, então os números $(m_j)_{j=1}^{\infty}$ são dois a dois distintos, já que $\mathbb{N}_m = \{m_1 < m_2 < \cdots\}$. Vejamos separadamente os casos em (a) e (b):

(a) Sendo $x^0 \notin A = \bigcup_{q\in\Gamma} \ell_q(X)$, temos $\|x^0\|_q = \infty$ para todo $q \in \Gamma$. Disso, se $q \neq \infty$, temos

$$\|z\|_q^q = \sum_{n=1}^{\infty} \|z_n\|_X^q \geq \sum_{j=1}^{\infty} \|z_{m_j}\|_X^q = \sum_{j=1}^{\infty} (\alpha_m \|x_j\|_X)^q = \alpha_m^q \sum_{j=1}^{\infty} \|x_j\|_X^q = \alpha_m^q \|x^0\|_q^q = \infty.$$

Se $q = \infty$, como $\alpha_m \neq 0$, temos

$$\|z\|_\infty = \sup_n \|z_n\|_X \geq \sup_j \|z_{m_j}\|_X = \alpha_m \sup_j \|x_j\|_X = \alpha_m \|x^0\|_\infty = \infty.$$

De qualquer forma $\|z\|_q = \infty$, para todo $q \in \Gamma$, ou seja, $z \notin A = \bigcup\limits_{q\in\Gamma} \ell_q(X)$.

(b) Como $x^0 \notin A = c_0(X)$, então $\|x_j\|_X \not\to 0$ e como $(\|z_{m_j}\|_X)_{j=1}^{\infty}$ é uma subsequência de $(\|z_n\|_X)_{n=1}^{\infty}$ e $\alpha_m \neq 0$, segue de $\|z_{m_j}\|_X = \alpha_m \|x_j\|_X$, que $\|z_{m_j}\|_X \not\to 0$. Assim, $\|z_n\|_X \not\to 0$ e isso implica em $z \notin A = c_0(X)$.

Portanto, mostramos em ambos os casos que $z \in S(X) - A$, donde concluímos que $\overline{T(\ell_{\tilde{s}})} - \{0\} \subseteq S(X) - A$, ou seja, $S(X) - A$ é espaçável. ■

Observação 2.3.2. Um argumento que utilizamos na demonstração acima e que usaremos outras vezes, é escrever $\mathbb{N} = \mathbb{N}_1 \cup \mathbb{N}_2 \cup \cdots \mathbb{N}_n \cup \cdots$ como uma união infinita de subconjuntos infinitos, dois a dois disjuntos. Isso pode ser facilmente justificado.

De fato, podemos, por exemplo, construir os subconjuntos da seguinte maneira: $\mathbb{N}_1$ será formado pelo conjunto de todos os números primos unido com $\{1\}$; $\mathbb{N}_2$ será formado por todos os números que são formados pelo produto de dois números primos; $\mathbb{N}_3$ será formado por todos os números que são formados pelo produto de três números primos, e assim sucessivamente para todos os outros subconjuntos. Uma vez que existem infinitos números primos, cada subconjunto construído é infinito. Por outro lado, do Teorema Fundamental da Álgebra, já sabemos que todo número natural diferente de um, pode ser decomposto de maneira única como produto de números primos. Portanto, tais subconjuntos, tomados deste modo, serão dois a dois disjuntos.

Com o resultado visto acima, obtemos de forma direta o seguinte corolário:

Corolário 2.3.3. *Seja $S(\mathbb{K})$ um espaço invariante de sequências sobre o corpo $\mathbb{K}$. São verdadeiras as sentenças:*

(a) *Se $0 < p \leq \infty$ e $\ell_p \subsetneq S(\mathbb{K})$, então $S(\mathbb{K}) - \ell_p$ é espaçável.*

(b) *Se $c_0 \subsetneq S(\mathbb{K})$, então $S(\mathbb{K}) - c_0$ é espaçável.*

No ano de 2010, Kitson e Timoney (ver [23]) apresentaram um resultado generalista que é muito útil em diversos contextos envolvendo espaçabilidade em complementos de espaços de Fréchet (em particular, de Banach), não necessariamente de sequências.

Teorema 2.3.4 (Kitson-Timoney)**.** *Sejam $\{Z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ espaços de Banach e X um espaço de Fréchet. Considere para cada $n \in \mathbb{N}$, operadores lineares contínuos $T_n : Z_n \to X$ e o espaço $Y = Span\left\{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} T_n(Z_n)\right\}$. Se Y não é fechado em X, então o complemento $X - Y$ é espaçável.*

Este importante resultado determina a espaçabilidade nos conjuntos

$$\ell_p - \bigcup_{0<q<p} \ell_q, \text{ com } p > 1 \text{ e } \ell_p^u(X) - \ell_p(X), \text{ com } p \geq 1.$$

Vamos ao primeiro caso. Tome uma sequência não-decrescente $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$, tal que $q_n \to p$. Dessa forma, da Proposição 1.2.15 segue que $\ell_{q_n} \subseteq \ell_{q_{n+1}}$, $\ell_{q_n} \subseteq \ell_p$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e também

$$\bigcup_{0<q<p} \ell_q = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \ell_{q_n}.$$

Além disso, ainda da Proposição 1.2.15, vemos que para cada $n \in \mathbb{N}$ o operador inclusão $i_n : \ell_{q_n} \to \ell_p$ está bem definido, é linear, contínuo e ocorre

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \ell_{q_n} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} i_n(\ell_{q_n}).$$

Por outro lado, sabemos que se V é um espaço vetorial, então $\text{Span}\{V\} = V$. Como

$\ell_{q_n} \subseteq \ell_{q_{n+1}}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ sucede-se que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \ell_{q_n}$ é um espaço vetorial e daí

$$\operatorname{Span}\left\{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \ell_{q_n}\right\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \ell_{q_n}.$$

Também sabemos que $(e_j)_{j\in\mathbb{N}}$ é uma base de Schauder em ℓ_p e é também de ℓ_{q_n}, para todo $n \in \mathbb{N}$. Dessa forma,

$$\overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \ell_{q_n}}^{\|\cdot\|_p} = \ell_p.$$

Assim, se $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \ell_{q_n}$ fosse fechado com $\|\cdot\|_p$, deveríamos ter

$$\bigcup_{0<q<p} \ell_q = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \ell_{q_n} = \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \ell_{q_n}}^{\|\cdot\|_p} = \ell_p$$

o que não pode acontecer, uma vez que $\ell_p - \bigcup_{0<q<p} \ell_q \neq \emptyset$ (ver Proposição 1.2.16). Portanto, como ℓ_{q_n} é espaço de Banach ($n \in \mathbb{N}$), ℓ_p é um espaço de Fréchet ($p > 1$), os operadores lineares $i_n : \ell_{q_n} \to \ell_p$ são contínuos, para todo n e

$$\operatorname{Span}\left\{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} i_n(\ell_{q_n})\right\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \ell_{q_n}$$

não é fechado em ℓ_p, concluímos do Teorema de Kitson e Timoney que o conjunto

$$\ell_p - \operatorname{Span}\left\{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} i_n(\ell_{q_n})\right\} = \ell_p - \bigcup_{0<q<p} \ell_q$$

é espaçável.

O segundo caso é demonstrado com o mesmo raciocínio e a parte mais, digamos, diferente é aquela em que se deve mostrar que $\ell_p(X)$ não é fechado em $\ell_p^u(X)$: a Proposição 1.2.34 nos diz que $\ell_p(X)$ não é fechado em $\ell_p^w(X)$ e assim, se $\ell_p(X)$ fosse fechado em $\ell_p^u(X)$, então deveria ser fechado também em $\ell_p^w(X)$, já que ambos espaços são completos com a norma $\|\cdot\|_{w,p}$, o que não pode ocorrer, como vimos.

As possibilidades de aplicações do Teorema 2.3.4, apesar de muitas, estão restritas ao caso em que X é um espaço de Fréchet (espaços cuja topologia é induzida por uma métrica completa e que são localmente convexos). O Teorema 2.3.1 estende esse tipo de resultado apresentado acima para o caso não localmente convexo, isto é, o caso $0 < p < 1$. Dois resultados desse tipo são apresentados nos corolários abaixo.

Corolário 2.3.5 (do Teorema 2.3.1)**.** *Sejam X um espaço de Banach de dimensão infinita e $0 < p \leq s < \infty$. Os conjuntos $\ell_{m(s;p)}(X) - \ell_p(X)$ e $\ell_p^u(X) - \ell_p(X)$ são espaçáveis. Em* *particular, o mesmo ocorre com $\ell_p^w(X) - \ell_p(X)$.*

Demonstração: Pelo que vimos na Observação 1.2.38, temos $\ell_p(X) \subseteq \ell_{m(s;p)}(X)$ e, já que estamos supondo que X é um espaço de Banach de dimensão infinita, temos $\ell_p(X) \neq \ell_{m(s;p)}(X)$ (Proposição 1.2.39). Usando novamente o fato de X possuir dimensão infinita, do que vimos na Observação 1.3.4 (operador identidade não ser absolutamente p-somante), temos $\ell_p(X) \neq \ell_p^u(X)$. Dessa forma, como os conjuntos $\ell_p^u(X) - \ell_p(X)$ e $\ell_{m(s;p)}(X) - \ell_p(X)$ são não vazios e sendo $\ell_{m(s;p)}(X)$ e $\ell_p^u(X)$ espaços invariantes de sequências, do Teorema 2.3.1 segue o resultado. Em particular, sendo $\ell_p^u(X) \subseteq \ell_p^w(X)$ e $\ell_p^u(X) - \ell_p(X)$ espaçável, concluímos que $\ell_p^w(X) - \ell_p(X)$ também será espaçável. ■

Corolário 2.3.6 (do Teorema 2.3.1)**.** *Para todo $p > 0$ e todo espaço de Banach X, o conjunto $\ell_p(X) - \displaystyle\bigcup_{0<q<p} \ell_q(X)$ é espaçável.*

Demonstração: Como já visto na Observação 1.2.17, o conjunto $\ell_p(X) - \bigcup_{0<q<p} \ell_q(X)$ é não vazio. Assim, sendo $\ell_p(X)$ um espaço invariante sequências, do Teorema 2.3.1 conclui-se o resultado. ■

O Teorema 2.3.1 pode ser aplicado em vários exemplos, dada a quantidade de espaços invariantes que já fomos apresentados. Para sermos econômicos, vejamos apenas mais um exemplo de aplicação do resultado.

Exemplo 2.3.7. Dado X um espaço de Banach, o conjunto $\ell_p^{\mathrm{mid}}(X) - \ell_p(X)$, com $1 \leq p < \infty$, é espaçável. De fato, $\ell_p^{\mathrm{mid}}(X)$ é um espaço invariante de sequências e além disso temos $\ell_p(E) \subsetneq \ell_p^{\mathrm{mid}}(E)$ em geral. Dessa forma, sendo o conjunto $\ell_p^{\mathrm{mid}}(X) - \ell_p(X)$ não vazio, concluímos que ele é espaçável.

Até o momento, estivemos provando espaçabilidade para complementos de subespaços vetoriais envolvendo espaços de sequências. Porém, reescrevendo partes da demonstração do Teorema 2.3.1, podemos encontrar espaçabilidade em complementos de conjuntos que não são necessariamente subespaços vetoriais.

Proposição 2.3.8. *Sejam $S(X)$ um espaço invariante de sequências sobre um espaço de Banach X e A um subconjunto qualquer de $S(X)$ tal que*

(i) *Sendo $x \in S(X)$, então $x \in A$ se, e somente se, $x^0 \in A$;*

(ii) *Se $x = (x_j)_{j=1}^\infty \in A$ e $y = (y_j)_{j=1}^\infty \in S(X)$ é tal que $(\|y_j\|)_{j=1}^\infty$ é um múltiplo de uma subsequência de $(\|x_j\|)_{j=1}^\infty$, então $y \in A$;*

(iii) *Existe uma sequência $x \in S(X) - A$ tal que $x^0 \neq 0$.*

Então $S(X) - A$ é espaçável.

Demonstração: Inicialmente, considere $x \in S(X) - A$ tal que $x^0 \neq 0$, cuja existência é garantida pelo item (iii). Veja que $x^0 \in S(X) - A$ pois, como $x \notin A$, temos também $x^0 \notin A$, pelo item (i). Por outro lado, como x pertence a $S(X)$, que por sua vez é um espaço invariante de sequências, então temos obrigatoriamente $x^0 \in S(X)$. Escrevamos $x^0 = (x_j)_{j=1}^{\infty}$ e vamos exprimir o conjunto dos números naturais $\mathbb{N} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathbb{N}_i$ como sendo a união infinita de subconjuntos infinitos e disjuntos dois a dois. Para cada $i \in \mathbb{N}$, vamos considerar $\mathbb{N}_i = \{i_1 < i_2 < \cdots\}$ e definir

$$y_i = \sum_{j=1}^{\infty} x_j e_{i_j} \in X^{\mathbb{N}}.$$

A partir de agora, repetindo os mesmos argumentos da demonstração do Teorema 2.3.1 são obtidos os seguintes fatos:

- Para todo $i \in \mathbb{N}$, temos $y_i^0 = x^0 \in S(X) - A$. Assim, como $S(X)$ é um espaço invariante de sequência e da condição (i), segue que $y_i \in S(X) - A$, para todo $i \in \mathbb{N}$;
- Definindo $\tilde{s}$ como no Teorema 2.3.1, o operador $T : \ell_{\tilde{s}} \to S(X)$, dado por $T((a_i)_{i=1}^{\infty}) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i y_i$ está bem definido, é linear e injetivo;
- $\overline{T(\ell_{\tilde{s}})}$ é um subespaço vetorial de dimensão infinita do espaço $S(X)$.
- Dado $z = (z_n)_{n=1}^{\infty} \in \overline{T(\ell_{\tilde{s}})} - \{0\}$, existe um $r \in \mathbb{N}$ para o qual a coordenada z_r é diferente de zero e assim, como $\mathbb{N} = \bigcup_{j=1}^{\infty} \mathbb{N}_j$ é uma união disjunta, existem únicos $m,\ t \in \mathbb{N}$ tais que $e_{m_t} = e_r$. Daí, sendo este m associado ao conjunto $\mathbb{N}_m = \{m_1 < m_2 < \cdots\}$, com os mesmos argumentos da demonstração do Teorema 2.3.1, obtemos uma subsequência $(z_{m_j})_{j=1}^{\infty}$ de z e garantimos a existência de uma sequência de termos $\alpha_m \neq 0$ de tal modo que

$$\frac{1}{\alpha_m}\|z_{m_j}\|_X = \|x_j\|_X, \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

Com todos estes fatos vistos acima, resta provar que temos $z \in S(X) - A$.

Da expressão acima, $(\|x_j\|_X)_{j=1}^{\infty}$ é um múltiplo de uma subsequência de $(\|z_n\|_X)_{n=1}^{\infty}$. Agora veja que a contrapositiva do item (ii) é a seguinte sentença:

(ii)(Contrapositiva) Se $y = (y_j)_{j=1}^{\infty} \notin A$ e $(\|y_j\|)_{j=1}^{\infty}$ é um múltiplo de uma subsequência de $(\|x_j\|)_{j=1}^{\infty}$, então $x = (x_j)_{j=1}^{\infty} \notin A$ ou $y = (y_j)_{j=1}^{\infty} \notin S(X)$.

Uma vez que $x^0 \notin A$, aplicando essa contrapositiva com $z = x$ e $y = x^0$, segue que $z \notin A$. ■

2.4 Lineabilidade num conjunto de operadores que atingem norma

Nesta seção, veremos a definição de operadores que atingem norma em determinado ponto e em seguida, utilizando técnicas e resultados da seção anterior, apresentaremos um estudo de lineabilidade relacionado a conjuntos desses tipos de operadores. O resultado que será apresentado generaliza um outro de D. Pellegrino e E. Teixeira, em [31].

Definição 2.4.1. Sejam X e Y espaços de Banach e $x_0 \in S_X$, isto é, $\|x_0\|_X = 1$. Dizemos que um operador linear e contínuo $u : X \to Y$ *atinge norma* em x_0 se $\|u(x_0)\|_Y = \|u\|$. O conjunto formado por todos os operadores lineares e contínuos de X em Y que atingem norma em x_0 é denotado por $\mathcal{NA}^{x_0}(X; Y)$.

Exemplo 2.4.2. Um exemplo simples de operador que atinge norma: seja X um espaço de Banach e o operador inclusão $i : \ell_p(X) \to c_0(X)$, o qual já vimos ser linear, contínuo e tal que $\|i\| = 1$ (Proposição 1.2.20). Assim, se considerarmos $x \in S_X$, então $(x, 0, 0, \ldots) \in B_{\ell_p(X)}$ e

$$\|i((x, 0, 0, \ldots))\|_\infty = \|(x, 0, 0, \ldots)\|_\infty = \|x\|_X = 1 = \|i\|.$$

Portanto, o operador identidade $i : \ell_p(X) \to c_0(X)$ atinge norma em $(x, 0, 0, \ldots)$.

Em 2009, Pellegrino e Teixeira provaram em [31] que se Y contém um cópia isométrica de ℓ_p para algum $1 \leq p < \infty$, então o conjunto $\mathcal{NA}^{x_0}(X; Y)$ é $\aleph_0$-lineável. O resultado que apresentaremos irá melhorar o que foi obtido em [31], provando que na realidade, $\mathcal{NA}^{x_0}(X; Y)$ é $\mathfrak{c}$-lineável. Para isto, precisaremos primeiro apresentar o seguinte lema.

Lema 2.4.3. *Se X é um espaço de Banach e $x_0 \in S_X$, então $\mathcal{NA}^{x_0}(X; \ell_p) \neq \emptyset$, com $1 \leq p < \infty$.*

Demonstração: Como $x_0 \neq 0$, do Teorema de Hahn-Banach, na forma do Corolário 1.1.21, existe um funcional linear $\varphi \in X'$ tal que $\|\varphi\| = 1 = \|x_0\| = |\varphi(x_0)|$. Assim, defina o operador $u : X \to \ell_p$ por $u(x) = (\varphi(x), 0, 0, \ldots)$, que claramente está bem definido e é linear, e temos

$$\begin{aligned}
\|u(x_0)\|_p = |\varphi(x_0)| = \|\varphi\| &= \sup_{\|x\| \leq 1} |\varphi(x)| \\
&= \sup_{\|x\| \leq 1} \|(\varphi(x), 0, 0, \ldots)\|_p \\
&= \sup_{\|x\| \leq 1} \|u(x)\|_p = \|u\|,
\end{aligned}$$

donde $u \in \mathcal{NA}^{x_0}(X; \ell_p)$. ■

Proposição 2.4.4. *Sejam X e Y espaços de Banach tais que Y possui uma cópia isométrica de ℓ_p, para algum $1 \leq p < \infty$, e $x_0 \in S_X$. Então, $\mathcal{NA}^{x_0}(X;Y)$ é $\mathfrak{c}$-lineável.*

Demonstração: Uma vez que Y possui uma cópia isométrica de ℓ_p, para algum $1 \leq p < \infty$, será suficiente mostrar o caso em que $Y = \ell_p$. Assim, como na demonstração do Teorema 2.3.1, vamos escrever $\mathbb{N} = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ como uma união infinita de subconjuntos infinitos, disjuntos dois a dois, com

$$A_k = \{a_1^k < a_2^k < \cdots\}$$

para cada $k \in \mathbb{N}$. Além disso, vamos definir

$$\ell_p^k = \{(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p : x_j = 0, \text{ se } j \notin A_k\}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Agora, considere um operador $u \in \mathcal{NA}^{x_0}(X;\ell_p)$, com sua existência assegurada pelo lema anterior, e para cada $k \in \mathbb{N}$ tome $u_k : X \to \ell_p^k$ dado por $(u_k(x))_{a_j^k} = (u(x))_j$ e $(u_k(x))_i = 0$, se $i \notin A_k$, isto é, a a_j^k-ésima coordenada de $u_k(x)$ é igual a j-ésima coordenada de $u(x)$, para todo $j \in \mathbb{N}$, e todas as outras coordenadas são iguais a zero. Além disso, considere para todo $k \in \mathbb{N}$ os operadores $v_k : X \to \ell_p$ dados por $v_k = i_k \circ u_k$, onde $i_k : \ell_p^k \to \ell_p$ é inclusão canônica. Disso, segue que $\|u_k(x)\|_p = \|u(x)\|_p$, para todo $k \in \mathbb{N}$ e todo $x \in X$, pois

$$\begin{aligned}
\|u_k(x)\|_p &= \left(\sum_{n=1}^{\infty} |(u_k(x))_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{i,j=1}^{\infty} |(u_k(x))_{a_i^j}|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\sum_{i=1}^{\infty} |(u_k(x))_{a_i^k}|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |(u(x))_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \|u(x)\|_p.
\end{aligned}$$

Além disso, também temos

$$\|v_k(x)\|_p = \|i_k(u_k(x))\|_p = \|u_k(x)\|_p$$

para todo $k \in \mathbb{N}$ e para todo $x \in \mathbb{N}$ e, dessa forma,

$$\|v_k(x_0)\|_p = \|u_k(x_0)\|_p = \|u(x_0)\|_p = \|u\| = \|u_k\| = \|v_k\|$$

para todo $k \in \mathbb{N}$, isto é, v_k atinge norma em x_0 para todo $k \in \mathbb{N}$. Por outro lado, considere $x \in X - \{0\}$ tal que $v_i(x) \neq 0$, para algum $i \in \mathbb{N}$. Logo, existe algum índice $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$(v_i(x))_n \neq 0$$

o que significa que $n \in A_i$. Assim , como os conjuntos são todos disjuntos dois a dois, temos $n \notin A_j$, para todo $j \neq i$. Dessa forma, $(v_j(x))_n = 0$ para todo $j \neq i$ e isto significa que se a n-ésima coordenada de algum $v_i(x)$ é diferente de zero, as n-ésimas coordenadas de todos os outros operadores aplicados a este ponto x serão iguais a zero, para qualquer $i \in \mathbb{N}$. Logo, o conjunto $\{v_1, v_2, \ldots\}$ é formado por operadores linearmente independentes.

Considere o operador $T : \ell_1 \to \mathcal{L}(X, \ell_p)$ dado por $T((a_k)_{k=1}^{\infty}) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k v_k$, que está bem definido já que,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} \|a_k v_k\| &= \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \|v_k\| \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \|v_k(x_0)\|_p \\ &= \|u(x_0)\|_p \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| < \infty.\end{aligned}$$

Pela própria definição T é linear e, como $\{v_1, v_2, \ldots\}$ é L.I., segue que T também é injetivo. Dado $(a_k)_{k=1}^{\infty} \in \ell_1$, chamemos $v = \sum_{k=1}^{\infty} a_k v_k$ e como $\sum_{k=1}^{\infty} a_k v_k(x)$ é uma sequência, continuaremos usando a notação $\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k v_k(x)\right)_j$ para indicar o seu j-ésimo termo. Daí,

$$\begin{aligned}\|v\|^p &= \sup_{x \in B_X} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_k v_k(x) \right\|_p^p = \sup_{x \in B_X} \left[\sum_{j=1}^{\infty} \left| \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k v_k(x) \right)_j \right|^p \right] \\ &= \sup_{x \in B_X} \left[\sum_{j=1}^{\infty} \left| \sum_{k=1}^{\infty} (a_k v_k(x))_j \right|^p \right] \overset{(*)}{=} \sup_{x \in B_X} \left[\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |(a_k v_k(x))_j|^p \right] \\ &= \sup_{x \in B_X} \left[\sum_{k=1}^{\infty} \left(|a_k|^p \sum_{j=1}^{\infty} |(v_k(x))_j|^p \right) \right] \overset{(**)}{\leq} \sum_{k=1}^{\infty} \left[|a_k|^p \sup_{x \in B_X} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |(v_k(x))_j|^p \right) \right] \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^p \|v_k\|^p,\end{aligned}$$

onde em $(**)$ estamos utilizando o fato que $\sup(f+g) \leq \sup(f) + \sup(g)$ e em $(*)$ estamos utilizando o mesmo argumento que serviu para provarmos que $\{v_1, v_2, \ldots\}$ é L.I.: se a j-ésima coordenada de $v_k(x)$ é não nula, então todas as outras j-ésimas coordenadas dos outros operadores em x serão iguais a zero e assim, para todo $k \in \mathbb{N}$, tem-se

$$\begin{aligned}\left| \sum_{k=1}^{\infty} (a_k v_k(x))_j \right|^p &= |0 + \cdots + (a_k v_k(x))_j + 0 + \cdots|^p \\ &= 0 + \cdots + |(a_k v_k(x))_j|^p + 0 + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} |(a_k v_k(x))_j|^p.\end{aligned}$$

Uma vez que v_k atinge norma em x_0 para cada $k \in \mathbb{N}$, retomando a conta anterior, temos

$$\begin{aligned}\|v\|^p &\leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^p \|v_k(x_0)\|_p^p = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} |(a_k v_k(x_0))_j|^p = \sum_{j=1}^{\infty} \left| \sum_{k=1}^{\infty} (a_k v_k(x_0))_j \right|^p \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \left| \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k v_k(x_0) \right)_j \right|^p = \left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_k v_k(x_0) \right\|_p^p = \|v(x_0)\|_p^p\end{aligned}$$

e segue que $\|v\| \leq \|v(x_0)\|_p$. A desigualdade contrária segue imediatamente da continuidade de v e por x_0 ser unitário e assim $\|v\| = \|v(x_0)\|_p$, ou seja, v atinge norma em x_0. Portanto, $T(\ell_1) \subseteq \mathcal{NA}^{x_0}(X;Y)$, donde segue o resultado, uma vez que $\dim(\ell_1) = \mathfrak{c}$ e T é injetivo. $\blacksquare$

Capítulo 3

Obtendo espaços de Banach sobre certos espaços de sequências

Iremos apresentar as definições das classes das funções não-contrativas e fortemente não-contrativas e com estas se obtêm resultados mais gerais de espaçabilidade sobre espaços de sequências, onde permaneceremos fazendo uso dos espaços invariantes de sequências.

Na ultima seção, exploraremos alguns espaços de sequências com um olhar voltado à espaçabilidade maximal e encerraremos com uma aplicação aos espaços de sequência de Nakano.

Temos como referência base para o capítulo o artigo [15], de 2015.

3.1 Funções não-contrativas e fortemente não-contrativas

Nesta seção, veremos a definição e alguns exemplos relacionados as funções não-contrativas e fortemente não-contrativos, algumas das ferramentas fundamentais para o desenvolvimento de restante do texto.

Definição 3.1.1. Sejam Y e X espaços de Banach, $S(X)$ um espaço invariante de sequências sobre X, $\Gamma \subseteq (0,\infty]$ e $f : X \to Y$ uma função. Definimos os seguintes conjuntos:

- $C(S(X), f, \Gamma) = \left\{ (x_j)_{j=1}^{\infty} \in S(X) : \ (f(x_j))_{j=1}^{\infty} \notin \bigcup_{q \in \Gamma} \ell_q(Y) \right\};$

- $C^w(S(X), f, \Gamma) = \left\{ (x_j)_{j=1}^{\infty} \in S(X) : \ (f(x_j))_{j=1}^{\infty} \notin \bigcup_{q \in \Gamma} \ell_q^w(Y) \right\};$

- $C(S(X), f, 0) = \{(x_j)_{j=1}^{\infty} \in S(X) : \ (f(x_j))_{j=1}^{\infty} \notin c_0(Y)\}$.

Pode-se notar que ao considerarmos $X = Y$ e f como sendo a função identidade em X, estaremos retornando ao caso do Teorema 2.3.1 apresentado no capítulo anterior, pois, neste caso,

$$C(S(X), \mathrm{id}_X, \Gamma) = S(X) - \bigcup_{q \in \Gamma} \ell_q(X) \ \text{ e } \ C(S(X), \mathrm{id}_X, 0) = S(X) - c_0(X).$$

Apresentaremos agora os objetos de interesse para os resultados do capítulo.

Definição 3.1.2. Seja $f : X \to Y$ uma função entre os espaços normados X e Y. Dizemos que f é

(a) *Não-contrativa* se $f(0) = 0$ e, para todo escalar $\alpha \neq 0$, existe uma constante $K(\alpha) > 0$ tal que

$$\|f(\alpha x)\|_Y \geq K(\alpha)\|f(x)\|_Y \tag{3.1}$$

para todo $x \in X$.

(b) *Fortemente não-contrativa* se $f(0) = 0$ e, para todo escalar $\alpha \neq 0$, existe uma constante $K(\alpha) > 0$ tal que

$$|\varphi(f(\alpha x))| \geq K(\alpha)|\varphi(f(x))| \tag{3.2}$$

para todo $x \in X$ e todo $\varphi \in Y'$.

Aqui vemos um fato curioso: geralmente quando estudamos objetos que de algum modo envolvem em sua lei de formação funcionais lineares contínuos, utiliza-se o pré-fixo "fracamente", como por exemplo o espaço das sequências fracamente p-somáveis. Ao contrário disso, o item (b) da definição anterior apresenta a palavra "fortemente" e isso se deve ao fato de que toda função que é fortemente não-contrativa é também não-contrativa. De fato, se $f : X \to Y$ é fortemente não-contrativa, dado qualquer $x \in X$, se $f(x) = 0$ então a desigualdade em (3.1) é satisfeita. Vamos supor então que $f(x) \neq 0$. Para todo $\alpha \neq 0$, temos

$$|\varphi(f(\alpha x))| \geq K(\alpha)|\varphi(f(x))|$$

e assim devemos ter $f(\alpha x) \neq 0$ pois do contrário teríamos $\varphi(f(x)) = 0$, para todo $\varphi \in Y'$, o que implicaria $f(x) = 0$ e seria uma contradição! Pelo Teorema de Hahn-Banach, existe

$\widetilde{\varphi} \in B_{Y'}$ tal que $|\varphi(f(x))| = \|f(x)\|_Y$ e novamente pelo Teorema de Hahn-Banach segue que, para todo $\alpha \neq 0$,

$$\begin{aligned}\|f(\alpha x)\|_Y &= \sup\{|\varphi(f(\alpha x))| : \varphi \in B_{Y'}\}\\ &\geq |\widetilde{\varphi}(f(\alpha x))|\\ &\geq K(\alpha)|\widetilde{\varphi}(f(\alpha x))|\\ &= K(\alpha)\|f(x)\|_Y.\end{aligned}$$

Como x é qualquer, concluímos que f é não-contrativa.

Com respeito a Definição 3.1.2, apenas para que fique registrado: uma função que não é não-contrativa não necessariamente é contrativa. Vejamos um exemplo disso:

Exemplo 3.1.3. A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{ se } x \in \mathbb{Q}; \\ x^2, \text{ se } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

não é não-contrativa. De fato, supondo o contrário, tome $x = \sqrt{2}$ e $\alpha = \sqrt{2}$. Logo, existe uma constante $K(\sqrt{2}) > 0$ tal que

$$|f(\sqrt{2}\sqrt{2})| \geq K(\sqrt{2})\cdot f(\sqrt{2})$$

e daí, como $f(\sqrt{2}\sqrt{2}) = f(2) = 0$ e $f(\sqrt{2}) = 2$, devemos ter $0 \geq 2K(\sqrt{2}) > 0$, o que é um absurdo.

Por outro lado, lembremos que uma função $g : X \to Y$ é uma contração se existe uma constante $0 < c < 1$ tal que

$$d(g(x), g(y)) \leq c \cdot d(x, y)$$

para quaisquer $x,\ y \in X$. A função f não é uma contração já que para qualquer constante $0 < c < 1$, tem-se

$$c\cdot \sqrt{2} \leq 2 = f(\sqrt{2}).$$

Vejamos alguns exemplos de funções contempladas pela Definição 3.1.2.

Exemplo 3.1.4. a) As funções subhomogêneas, pela própria definição, são não-contrativas: uma função $f : X \to Y$ é dita *subhomogênea* se $f(0) = 0$ e, para todo escalar $\alpha \neq 0$, existe uma constante $\lambda_\alpha > 0$ tal que

$$\|f(\alpha x)\| \geq |\alpha|^{\lambda_\alpha}\cdot \|f(x)\|, \text{ para todo } x \in X.$$

b) Uma função $f : X \to Y$ tal que $f(0) = 0$ e, para todo escalar $\alpha \neq 0$, existe uma constante $\lambda_\alpha > 0$ tal que

$$|\varphi(f(\alpha x))| \geq |\alpha|^{\lambda_\alpha} \cdot |\varphi(f(x))|, \text{ para todos } x \in X \text{ e } \varphi \in Y'$$

é fortemente não-contrativa.
c) Qualquer operador linear, $f : X \to Y$ entre espaços de Banach, contínuo ou não, é fortemente não-contrativo, pois dado $\alpha \neq 0$, temos

$$|\varphi(f(\alpha x))| = |\alpha||\varphi(f(x))|, \text{ para todos } x \in X \text{ e } \varphi \in Y'.$$

d) Dado $n \in \mathbb{N}$, qualquer polinômio n-homogêneo $P : X \to Y$ entre espaços de Banach, contínuo ou não, é fortemente não-contrativo, pois dado $\alpha \neq 0$, da Observação 1.4.6 temos

$$|\varphi(P(\alpha x))| = |\alpha|^n |\varphi(P(x))|, \text{ para todos } x \in X \text{ e } \varphi \in Y'.$$

3.2 Espaçabilidade em espaços invariantes envolvendo funções não-contrativas

Com todas as definições e exemplos vistos, temos ferramentas suficientes para apresentar agora um resultado mais geral em relação ao Teorema 2.3.1 e que nos possibilita um número maior de aplicações.

Teorema 3.2.1. *Sejam X e Y espaços de Banach, $S(X)$ um espaço invariante de sequências sobre X, $f : X \to Y$ uma função, e $\Gamma \subseteq (0, \infty]$.*

(a) *Se f é não-contrativa, então $C(S(X), f, \Gamma)$ e $C(S(X), f, 0)$ são vazios ou espaçáveis.*

(b) *Se f é fortemente não-contrativa, então $C^w(S(X), f, \Gamma)$ é vazio ou espaçável.*

Demonstração: Antes de iniciarmos a demonstração, fixemos uma notação que também será utilizada em outra ocasião na próxima seção. Para $\alpha = (\alpha_j)_{j=1}^\infty \in \mathbb{K}^\mathbb{N}$ e $w \in X$, vamos denotar

$$w \otimes \alpha = \alpha \otimes w := (\alpha_j w)_{j=1}^\infty \in X^\mathbb{N}.$$

Como veremos, muitas das etapas e argumentos que serão utilizados aqui serão os mesmos que utilizamos na demonstração do Teorema 2.3.1 e assim omitiremos alguns deles.
(a) Primeiramente, suponha que $C(S(X), f, \Gamma)$ é não-vazio e considere $x = (x_n')_{n=1}^\infty \in C(S(X), f, \Gamma)$.

Afirmação 1. Temos $x^0 = (x_j)_{j=1}^\infty \in C(S(X), f, \Gamma)$.

De fato, sendo $S(X)$ um espaço invariante de sequências, temos $x^0 \in S(X)$. Por outro lado, já que $f(0) = 0$, a versão zero-livre de $(f(x'_n))_{n=1}^\infty$ é igual a $(f(x_j))_{j=1}^\infty$ e assim, se tivéssemos $(f(x_j))_{j=1}^\infty \in \bigcup_{q\in\Gamma} \ell_q(Y)$, existiria $r \in \Gamma$ tal que $(f(x_j))_{j=1}^\infty \in \ell_r(Y)$. Contudo, já que $\ell_r(Y)$ é um espaço invariante de sequências, temos $(f(x'_n))_{n=1}^\infty \in \ell_r(Y) \subseteq \bigcup_{q\in\Gamma} \ell_q(Y)$, o que é uma contradição, pois $x \in C(S(X), f, \Gamma)$. A afirmação está demonstrada.

A afirmação acima também nos diz que o caso $x^0 = 0$ não pode ocorrer, pois caso contrário, como $f(0) = 0$, teríamos $(f(x_j))_{j=1}^\infty \in \bigcup_{q\in\Gamma} \ell_q(Y)$, o que já provamos não acontecer. Vamos agora exprimir $\mathbb{N} = \bigcup_{i=1}^\infty \mathbb{N}_i$ como união infinita de subconjuntos infinitos de $\mathbb{N}$ dois a dois disjuntos. Para cada $i \in \mathbb{N}$, vamos considerar $\mathbb{N}_i = \{i_1 < i_2 < \cdots\}$ e definir

$$y_i = \sum_{j=1}^\infty x_j \otimes e_{i_j} \in X^{\mathbb{N}}.$$

Note que para todo $i \in \mathbb{N}$, os termos não nulos de y_i são exatamente os de x^0. Daí, segue que $y_i^0 = x^0 \in S(X)$ para todo $i \in \mathbb{N}$.

Afirmação 2. Para todo $i \in \mathbb{N}$, tem-se $y_i \in C(S(X), f, \Gamma)$.

Com efeito, sendo $S(X)$ um espaço invariante de sequências, temos $y_i \in S(X)$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Lembre que $f(0) = 0$ e que, para todo $i \in \mathbb{N}$, os termos não nulos de y_i são exatamente os de x^0. Como $x^0 \in C(S(X), f, \Gamma)$, para $q \in \Gamma$, com $q < \infty$, temos

$$\sum_{k=1}^\infty \|f((y^i)_k)\|^q = \sum_{j=1}^\infty \|f(x_j)\|^q = \infty, \ \forall i \in \mathbb{N}$$

e se $q = \infty$, temos

$$\sup_k \|f((y_i)_k)\| = \sup_j \|f(x_j)\| = \infty, \ \forall i \in \mathbb{N},$$

donde segue a afirmação.

Seja K a constante no item (b_1) da Definição 2.2.1, e defina $\tilde{s} = 1$ se $S(X)$ é um espaço de Banach e $\tilde{s} = s$ se $S(X)$ é um espaço s-Banach, $0 < s < 1$. Assim, dada qualquer sequência $(a_i)_{i=1}^\infty \in \ell_{\tilde{s}}$ tem-se

$$\sum_{i=1}^\infty \|a_i y_i\|_{S(X)}^{\tilde{s}} \leq K^{\tilde{s}} \|x^0\|_{S(X)}^{\tilde{s}} \|(a_i)_{i=1}^\infty\|_{\tilde{s}}^{\tilde{s}} < \infty$$

e em ambos os casos $\sum_{i=1}^\infty a_i y_i$ é convergente e a aplicação

$$T : \ell_{\tilde{s}} \to S(X), \ T((a_i)_{i=1}^\infty) = \sum_{i=1}^\infty a_i y_i$$

está bem definida. Da mesma forma que vimos no Teorema 2.3.1, resta provar que se $z = (z_n)_{n=1}^{\infty} \in \overline{T(\ell_{\tilde{s}})} - \{0\}$, então $(f(z_n))_{n=1}^{\infty} \notin \bigcup_{q\in\Gamma} \ell_q(Y)$.

Sabemos que existem sequências $(a_i^{(k)})_{i=1}^{\infty} \in \ell_{\tilde{s}},\ k \in \mathbb{N}$, tais que $z = \lim\limits_{k\to\infty} T((a_i^{(k)})_{i=1}^{\infty})$ em $S(X)$ e também que, para todo $k \in \mathbb{N}$,

$$T((a_i^{(k)})_{i=1}^{\infty}) = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} a_i^{(k)} x_j e_{i_j}.$$

Fixemos $r \in \mathbb{N}$ tal que $z_r \neq 0$. Como $\mathbb{N} = \bigcup_{j=1}^{\infty} \mathbb{N}_j$ é uma união disjunta, existem únicos $m,\ t \in \mathbb{N}$ tais que $e_{m_t} = e_r$ e, assim, para todo $k \in \mathbb{N}$, a r-ésima coordenada de $T((a_i^{(k)})_{i=1}^{\infty})$ é o elemento $a_m^{(k)} x_t$. Pela desigualdade $\|x_j\|_X \leq \|x\|_{S(X)}$ apresentada da condição (b_2) da Definição 2.2.1, vemos que convergência em $S(X)$ implica na convergência coordenada a coordenada e assim podemos obter a r-ésima coordenada de z fazendo

$$z_r = \lim_{k\to\infty} a_m^{(k)} x_t = x_t \lim_{k\to\infty} a_m^{(k)}.$$

Uma vez que $z_r \neq 0$ e $x_t \neq 0$ para todo $t \in \mathbb{N}$, é claro que

$$\alpha_m := \lim_{k\to\infty} a_m^{(k)} \neq 0.$$

Por outro lado,

$$\alpha_m x_j = \lim_{k\to\infty} a_m^{(k)} x_j,\ \forall j \in \mathbb{N}$$

e, além disso, para $j, k \in \mathbb{N}$, a m_j-ésima coordenada de $T((a_i^{(k)})_{i=1}^{\infty})$ é $a_m^{(k)} x_j$. Assim da convergência coordenada a coordenada e da unicidade do limite temos $\lim_{k\to\infty} a_m^{(k)} x_j = z_{m_j}$ e então

$$z_{m_j} = \alpha_m x_j,\ \forall j \in \mathbb{N}.$$

Observe que m, que depende de r, está fixado e então os números $(m_j)_{j=1}^{\infty}$ são dois a dois distintos, pois $\mathbb{N}_m = \{m_1 < m_2 < \cdots\}$.

Já que $\sum_{j=1}^{\infty} \|x_j\|^q = \infty$ para todo $q \in \Gamma$, com $q < \infty$, da definição de função fortemente não-contrativa, temos

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \|f(z_n)\|_Y^q \geq \sum_{j=1}^{\infty} \|f(z_{m_j})\|_Y^q &= \sum_{j=1}^{\infty} \|f(\alpha_m x_j)\|_Y^q \\ &\geq [K(\alpha_m)]^q \cdot \sum_{j=1}^{\infty} \|f(x_j)\|_Y^q = \infty.\end{aligned}$$

Se $\infty \in \Gamma$, então temos $(f(x_j))_{j=1}^{\infty} \notin \ell_\infty(Y)$, pois $x^0 \in C(S(X), f, \Gamma)$ e assim

$$\begin{aligned}\sup_n \|f(z_n)\|_Y \geq \sup_j \|f(z_{m_j})\|_Y &= \sup_j \|f(\alpha_m x_j)\|_Y \\ &\geq K(\alpha_m)\cdot \sup_j \|f(x_j)\|_Y = \infty.\end{aligned}$$

Em ambos os casos mostramos que $(f(z_n))_{n=1}^{\infty} \notin \bigcup_{q\in\Gamma} \ell_q(Y)$ o que garante que $z \in C(S(X), f, \Gamma)$, ou seja $\overline{T(\ell_{\tilde{s}})} \subseteq C(S(X), f, \Gamma) \cup \{0\}$.

Suponha agora que $C(S(X), f, 0)$ é não-vazio e considere $x = (x'_n)_{n=1}^{\infty} \in C(S(X), f, 0)$ e, sendo $S(X)$ um espaço invariante de sequências, temos $x^0 = (x_j)_{j=1}^{\infty} \in S(X)$. Usando o mesmo argumento do caso anterior, temos $x^0 = (x_j)_{j=1}^{\infty} \in C(S(X), f, 0)$, onde $x_j \neq 0$ para todo $j \in \mathbb{N}$.

Ainda seguindo os mesmos passos do caso anterior, defina da mesma forma os vetores $y_i \in S(X)$ e temos $y_i^0 = x^0$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Sabemos que $\|f(x_j)\|_Y \not\to 0$, já que $x^0 \in C(S(X), f, 0)$, e daí, como os termos não nulos de y_i são exatamente os de x^0 e $f(0) = 0$, temos $y_i \in C(S(X), f, 0)$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Defina o mesmo operador (que será bem definido, linear e injetivo)

$$T : \ell_{\tilde{s}} \to S(X),\ T((a_i)_{i=1}^{\infty}) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i y_i$$

e resta provar que se $z = (z_n)_{n=1}^{\infty} \in \overline{T(\ell_{\tilde{s}})} - \{0\}$, então $(f(z_n))_{n=1}^{\infty} \notin c_0(Y)$. Da mesma maneira que no caso anterior, construímos uma subsequência $(z_{m_j})_{j=1}^{\infty}$, onde $z_{m_j} = \alpha_m x_j$ para todo $j \in \mathbb{N}$ e $\alpha_m \neq 0$. Como $\|f(x_j)\|_Y \not\to 0$ e f é não-contrativa, temos

$$\begin{aligned}\limsup_n \|f(z_n)\|_Y \geq \limsup_j \|f(z_{m_j})\|_Y &= \limsup_j \|f(\alpha_m x_j)\|_Y \\ &\geq K(\alpha_m)\cdot \limsup_j \|f(x_j)\|_Y > 0,\end{aligned}$$

o que prova que $\|f(z_n)\|_Y \not\to 0$, ou seja, $(f(z_n))_{n=1}^{\infty} \notin c_0(Y)$ e segue o resultado.

(b) Inicialmente, lembremos que $\ell_q(Y) \subseteq \ell_\infty(Y)$, $\ell_q^w(Y) \subseteq \ell_\infty^w(Y) = \ell_\infty(Y)$, para todo $0 < p < \infty$. Assim, se $\infty \in \Gamma$, temos

$$\bigcup_{q\in\Gamma} \ell_q(Y) = \ell_\infty(Y) = \ell_\infty^w(Y) = \bigcup_{q\in\Gamma} \ell_q^w(Y)$$

e daí $C^w(S(X), f, \Gamma) = C(S(X), f, \Gamma)$, caso que já foi provado em (a) com uma hipótese mais fraca sobre f. Logo, vamos considerar, sem perda de generalidade, que $\infty \notin \Gamma$.

Suponha que $C^w(S(X), f, \Gamma)$ é não-vazio e tome $x = (x'_n)_{n=1}^{\infty} \in C^w(S(X), f, \Gamma)$. Temos $x^0 = (x_j)_{j=1}^{\infty} \in S(X)$, pois $S(X)$ é espaço invariante de sequências, e usando as hipóteses e os mesmos argumentos usados em (a), segue que $x^0 \in C^w(S(X), f, \Gamma)$, com $x_j \neq 0$ para todo $j \in \mathbb{N}$.

Ainda do mesmo modo que em (a), defina os vetores $y_i \in S(X)$ e temos $y_i^0 = x^0$, para todo $i \in \mathbb{N}$. Para $q \in \Gamma$, existe $\varphi_q \in Y'$ tal que $\sum_{j=1}^{\infty} |\varphi_q(f(x_j))|^q = \infty$, pois $x^0 \in C^w(S(X), f, \Gamma)$. Logo, como $\varphi_q(f(0)) = 0$ e $y_i^0 = x^0$ para todo $i \in \mathbb{N}$, segue que $y_i \in C^w(S(X), f, \Gamma)$ para todo $i \in \mathbb{N}$.

Novamente prosseguindo como no item anterior, definamos o operador linear injetivo

$$T : \ell_{\tilde{s}} \to S(X),\ T((a_i)_{i=1}^{\infty}) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i y_i$$

e novamente devemos provar que se $z = (z_n)_{n=1}^{\infty} \in \overline{T(\ell_{\tilde{s}})} - \{0\}$, então $(f(z_n))_{n=1}^{\infty} \notin \ell_q^w(Y)$ para todo $q \in \Gamma$. Da mesma maneira que no caso anterior, construímos uma subsequência $(z_{m_j})_{j=1}^{\infty}$, onde $z_{m_j} = \alpha_m x_j$ para todo $j \in \mathbb{N}$ e $\alpha_m \neq 0$. Logo, dado qualquer $q \in \Gamma$, como f é fortemente não-contrativa, temos

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \|\varphi_q(f(z_n))\|_Y^q \geq \sum_{j=1}^{\infty} \|\varphi_q(f(z_{m_j}))\|_Y^q &= \sum_{j=1}^{\infty} \|\varphi_q(f(\alpha_m x_j))\|_Y^q \\ &\geq [K(\alpha_m)]^q \cdot \sum_{j=1}^{\infty} \|\varphi_q(f(x_j))\|_Y^q = \infty \end{aligned}$$

provando que $(f(z_n))_{n=1}^{\infty} \notin \ell_q^w(Y)$. Portanto, $z \in C^w(S(X), f, \Gamma)$, ou seja, $\overline{T(\ell_{\tilde{s}})} \subseteq C^w(S(X), f, \Gamma) \cup \{0\}$. ■

O Teorema 3.2.1 generaliza o Teorema 2.3.1, isto é, este é obtido daquele tomando-se f como sendo a identidade $\mathrm{Id}_X : X \to X$. Assim, todas as consequências do primeiro teorema, são também do segundo. Vejamos agora algumas consequências do Teorema 3.2.1 que não decorrem do primeiro.

Antes, vejamos a seguinte definição envolvendo os polinômios n-homogêneos:

Definição 3.2.2. Dizemos que um polinômio n-homogêneo $P : X \to Y$ é *p-dominado* se $(P(x_j))_{j=1}^{\infty} \in \ell_{p/n}(Y)$ para cada $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p^w(X)$.

O espaço formado por todos os polinômios n-homogêneos de X em Y que são contínuos e p-dominados será denotado por $\mathcal{P}_{d,p}(^n X; Y)$(caso $Y = \mathbb{K}$, escrevemos apenas $\mathcal{P}_{d,p}(^n X)$). Com esta definição, vejamos uma primeira aplicação para o Teorema anterior.

Corolário 3.2.3. *Sejam X e Y espaços de Banach.*

(a) *Se $1 \leq p \leq q < \infty$ e $u : X \to Y$ é um operador linear que não é absolutamente*

$(q;p)$-somante, então o conjunto

$$\left\{(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p^w(X); (u(x_j))_{j=1}^{\infty} \notin \ell_q(Y)\right\} \tag{3.3}$$

é espaçável.

(b) *Se $0 < p < \infty$ e $P : X \to Y$ é um polinômio n-homogêneo que não é p-dominado, então o conjunto*

$$\left\{(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p^w(X); (P(x_j))_{j=1}^{\infty} \notin \ell_{p/n}(Y)\right\} \tag{3.4}$$

é espaçável.

Demonstração: Pelo que já vimos, operadores lineares e polinômios homogêneos são funções fortemente não-contrativos. Além disso, já sabemos que $\ell_p^w(X)$ é um espaço invariante de sequências. Assim, basta aplicar o Teorema 3.2.1 nos conjuntos

$$C(\ell_p^w(X), u, \{q\}) \text{ e } C\left(\ell_p^w(X), P, \{p/n\}\right)$$

que representam os conjuntos em (3.3) e (3.4), respectivamente. Ambos são não-vazios, pois u não é absolutamente $(q;p)$-somante e P não é p-dominado. ∎

Em seu trabalho [12] de 2010, Botelho, Pellegrino e P. Rueda, apresentaram diversos resultados envolvendo existência de polinômios homogêneos p-dominados. Um deles, que nos será útil, é o seguinte:

Teorema 3.2.4 (Botelho-Pellegrino-Rueda)**.** *Sejam $n \geq 3$, $p \geq 1$ e X um espaço de Banach de dimensão infinita. Então*

$$\mathcal{P}_{d,p}(^n X) \neq \mathcal{P}(^n X.)$$

Disso, temos o corolário a seguir.

Corolário 3.2.5 (do Teorema 3.2.1)**.** *Sejam X um espaço de Banach de dimensão infinita, $n \geq 3$ e $p \geq 1$. O conjunto*

$$\left\{(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p^w(X); (P(x_j))_{j=1}^{\infty} \notin \ell_{p/n}\right\}$$

é espaçável para algum polinômio n-homogêneo contínuo com valores escalares em X.

Demonstração: Do Teorema 3.2.4 vemos que existe algum polinômio n-homogêneo contínuo P, com valores escalares em X, que não é p-dominado. Logo, o resultado segue imediatamente do item (b) do Corolário 3.2.3. ∎

Vejamos a próxima definição, que nos levará a mais aplicações do Teorema 3.2.1.

Definição 3.2.6. Sejam X e Y espaços de Banach. Dizemos que

(a) Um operador linear $u : X \to Y$ é *completamente contínuo* se $u(x_j) \to u(x)$ em Y sempre que $x_j \xrightarrow{w} x$ em X.

(b) Um polinômio n-homogêneo $P : X \to Y$ é *fracamente sequencialmente contínuo na origem* se $P(x_j) \to 0$ em Y sempre que $x_j \xrightarrow{w} 0$ em X.

Vamos denotar por $c_0^w(X)$ o espaço formado por todas as sequências fracamente nulas, isto é,

$$\begin{aligned} c_0^w(X) &:= \{(x_j)_{j=1}^\infty \in X^{\mathbb{N}};\ \varphi(x_j) \to 0,\ \forall \varphi \in X'\} \\ &= \{(x_j)_{j=1}^\infty \in X^{\mathbb{N}};\ x_j \xrightarrow{w} 0\}. \end{aligned}$$

Em [29, Proposição 2.8.2] é mostrado que o espaço $c_0^w(X)$ é fechado em $\ell_\infty(X)$ e assim é um espaço de Banach, com a norma $\|\cdot\|_\infty$, sempre que X é um espaço de Banach. Além disso, com os mesmos procedimentos já utilizados no Capítulo 1, não é difícil provar que $c_0^w(X)$ é um espaço invariante de sequências.

Segue então, da definição acima, que u é completamente contínuo se, e somente se, tivermos $(u(x_j))_{j=1}^\infty \in c_0(Y)$ sempre que $(x_j)_{j=1}^\infty \in c_0^w(X)$. De fato, se u é completamente contínuo e $(x_j)_{j=1}^\infty \in c_0^w(X)$, segue que

$$u(x_j) \to u(0) \ \Rightarrow\ u(x_j - 0) = u(x_j) \to 0 \ \Rightarrow (u(x_j))_{j=1}^\infty \in c_0(Y).$$

Reciprocamente, se tomarmos $(x_j)_{j=1}^\infty \in X^{\mathbb{N}}$ tal que $x_j \xrightarrow{w} x$, então $(x_j - x) \xrightarrow{w} 0$, isto é, $(x_j - x)_{j=1}^\infty \in c_0^w(X)$. Daí temos $(u(x_j - x))_{j=1}^\infty \in c_0(Y)$ e assim $(u(x_j) - u(x)) = u(x_j - x) \to 0$, ou seja, $u(x_j) \to u(x)$ e portanto u é completamente contínuo.

Também da definição acima, mas neste caso de forma imediata, se P é fracamente sequencialmente contínuo na origem, então $(P(x_j))_{j=1}^\infty \in c_0(Y)$ sempre que $(x_j)_{j=1}^\infty \in c_0^w(X)$.

Vamos então a mais uma aplicação.

Corolário 3.2.7. *Sejam X e Y espaços de Banach.*

(a) *Seja $u : X \to Y$ um operador linear que não é completamente contínuo na origem. Então, o conjunto*

$$\left\{(x_j)_{j=1}^\infty \in c_0^w(X); (u(x_j))_{j=1}^\infty \notin c_0(Y)\right\} \tag{3.5}$$

é espaçável. Em particular, se X não possui a propriedade de Schur ($x_j \xrightarrow{w} x \Rightarrow x_j \to x$), então existe um espaço de Banach de dimensão infinita formado, a menos da origem, por sequências em X que são fracamente nulas, mas que não são nulas em norma.

(b) *Seja $P : X \to Y$ um polinômio n-homogêneo que falha em ser fracamente sequencialmente contínuo na origem. Então o conjunto*

$$\left\{(x_j)_{j=1}^{\infty} \in c_0^w(X); (P(x_j))_{j=1}^{\infty} \notin c_0(Y)\right\} \tag{3.6}$$

é espaçável.

Demonstração: (a) Como o operador u não é completamente contínuo, o conjunto $C(c_0^w(X), u, 0)$ (representado em (3.5)) é não-vazio e, como $c_0^w(X)$ é um espaço invariante de sequências e u é não-contrativo, concluímos que $C(c_0^w(X), u, 0)$ é espaçável pelo Teorema 3.2.1.

Em particular, se X não possui a propriedade de Schur, neste espaço a convergência fraca não implica na convergência em norma e, dessa forma, o operador identidade $\mathrm{Id}_X : X \to X$ falha em ser completamente contínuo. Assim, o conjunto

$$C(c_0^w(X), u, 0) = \left\{(x_j)_{j=1}^{\infty} \in c_0^w(X); (x_j)_{j=1}^{\infty} \notin c_0(X)\right\} = c_0^w(X) - c_0(X)$$

é espaçável. Dessa forma, $(c_0^w(X) - c_0(X)) \cup \{0\}$ contém um subespaço vetorial $A(X)$ fechado. Como $c_0^w(X)$ é um espaço de Banach, então $A(X)$ será um espaço de Banach com a norma induzida $\|\cdot\|_\infty$, formado por sequências dessa natureza, a menos da orígem.

(b) Sabendo que P falha em ser fracamente sequencialmente contínuo na origem, existe uma sequência $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in X^{\mathbb{N}}$ tal que $x_j \xrightarrow{w} 0$, mas $P(x_j) \not\to 0$. Assim, o conjunto $C(c_0^w(X), P, 0)$ (representado em (3.6)) é não-vazio. Como $c_0^w(X)$ é um espaço invariante de sequências e P é não-contrativo, concluímos que $C(c_0^w(X), P, 0)$ é espaçável pelo Teorema 3.2.1. ■

O Teorema 3.2.1 pode ser usado até em contextos não lineares, como veremos a seguir.

Definição 3.2.8. Uma função $f : X \to Y$ entre espaços de Banach é dita:

(a) *limitada* se f leva subconjuntos limitados de X em subconjuntos limitados de Y.

(b) *linearmente fortemente não-contrativa próximo à origem* se é fortemente não-contrativa e se existem $0 < \varepsilon \leq 1$ e $t > 0$ tais que no item (b) da Definição 3.1.2 podemos escolher $K(\alpha) = t|\alpha|$, sempre que $0 < |\alpha| < \varepsilon$.

Proposição 3.2.9. *Sejam X e Y espaços de Banach e $f : X \to Y$ uma função.*

(a) *Se f é descontínua na origem e não-contrativa, então o conjunto*

$$\{(x_j)_{j=1}^{\infty} \in c_0(X); (f(x_j))_{j=1}^{\infty} \notin c_0(Y)\} \tag{3.7}$$

é espaçável.

(b) *Se f é ilimitada e fortemente não-contrativa próximo à origem, então o conjunto*

$$\{(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p(X); (f(x_j))_{j=1}^{\infty} \notin \ell_p^w(Y)\} \tag{3.8}$$

é espaçável para cada $p > 0$.

Demonstração: (a) Se $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in c_0(X)$, para todo $\delta > 0$ existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que $j \geq j_0 \Rightarrow \|x_j\|_X < \delta$. Por outro lado, como f é descontínua na origem, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ de tal modo que, para $x \in X$,

$$\|x\|_X < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(0)\|_Y = \|f(x)\|_Y \geq \varepsilon.$$

Daí, segue que

$$j \geq j_0 \Rightarrow \|x_j\|_X < \delta \Rightarrow \|f(x_j)\|_Y \geq \varepsilon,$$

ou seja $(f(x_j))_{j=1}^{\infty} \notin c_0(Y)$. Mostramos assim, que $C(c_0(X), f, 0)$, que (representado em (3.7)), é não-vazio e como f é não-contrativo e $c_0(X)$ é um espaço invariante de sequências sobre X, podemos utilizar o Teorema 3.2.1 para concluir o resultado.

(b) Como $\ell_p(X)$, com $p > 0$, é um espaço invariante de sequências sobre X, devemos mostrar que $C^w(\ell_p(X), f, \{p\})$ (representado em (3.8)), é não-vazio e assim, podemos concluir a espaçabilidade desejada através do Teorema 3.2.1.

Sabendo que f é ilimitada, existe uma sequência limitada $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ em X tal que $(f(x_j))_{j=1}^{\infty} \notin \ell_\infty(Y)$. Vimos no Lema 1.2.27 que subconjuntos fracamente limitados em espaços de Banach são limitados em norma. Daí, o conjunto $\{f(x_j);\ j \in \mathbb{N}\}$ não é fracamente limitado em Y e existe um funcional $\varphi \in Y'$ tal que $((|\varphi(f(x_j))|^p)_{j=1}^{\infty} \notin \ell_\infty$. Disso, como o dual do espaço ℓ_1 é ℓ_∞, existe uma sequência $(\alpha_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_1$ tal que

$$\left| \left((|\varphi(f(x_j))|^p)_{j=1}^{\infty} \right) \left((\alpha_j)_{j=1}^{\infty} \right) \right| = \left| \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j |\varphi(f(x_j))|^p \right| = \infty,$$

isto é, a série $\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j |\varphi(f(x_j))|^p$ diverge. Em particular,

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\alpha_j| |\varphi(f(x_j))|^p = \infty.$$

Sejam $0 < \varepsilon \leq 1$ e $t > 0$ assim como na Definição 3.2.8 e $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|\alpha_j|^{1/p} < \varepsilon$, sempre que $j \geq j_0$. Tomando $K(|\alpha_j|^{1/p}) = t|\alpha_j|^{1/p}$, para $j \geq j_0$ temos

$$\begin{aligned}\sum_{j=j_0}^{\infty} |\varphi(f(|\alpha_j|^{1/p} x_j))|^p &\geq \sum_{j=j_0}^{\infty} \left[K(|\alpha_j|^{1/p})\right]^p |\varphi(f(x_j))|^p \\ &= t^p \sum_{j=j_0}^{\infty} |\alpha_j||\varphi(f(x_j))|^p = \infty\end{aligned}$$

e se considerarmos $z_j = |\alpha_j|^{1/p} x_j$, então $(z_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p(X)$, pois $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ é limitado e $(\alpha_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_1$. Além disso, como vimos acima $(f(z_j))_{j=1}^{\infty} \notin \ell_p^w(Y)$. Portanto, concluímos que $C^w(\ell_p(X), f, \{p\}) \neq \emptyset$, donde segue o resultado do item (b) do Teorema 3.2.1. ■

O próximo resultado nos trará, como caso particular, uma condição para que certos conjuntos que já são espaçáveis, sejam também denso-lineáveis maximais. Para tanto, faremos uso do seguinte resultado apresentado por L. Bernal-González e M. O. Cabrera em [10] no ano de 2014, que usaremos na demonstração do resultado desejado.

Teorema 3.2.10 (Bernal-González-Cabrera)**.** *Sejam Y um espaço vetorial topológico e $A \subseteq Y$. Suponha que existe $B \subseteq Y$ tal que $A + B \subseteq A$ e B é denso-lineável. Se Y é metrizável e separável e α é um número cardinal infinito onde A é α-lineável e $A \cap B = \emptyset$, então $A \cup \{0\}$ contém um espaço vetorial denso D com $\dim(D) = \alpha$.*

Tendo este resultado em vista, vamos à seguinte proposição.

Proposição 3.2.11. *Sejam X e Y espaços de Banach, e $p > 0$. Então os conjuntos*

$$\{(x_j)_{j=1}^{\infty} \in c_0(X); (u(x_j))_{j=1}^{\infty} \notin c_0(Y)\} \tag{3.9}$$

e

$$\{(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p(X); (u(x_j))_{j=1}^{\infty} \notin \ell_p^w(Y)\} \tag{3.10}$$

são espaçáveis para todo operador linear ilimitado $u : X \to Y$. Além disso, se X é separável e $p < \infty$, então estes são denso-lineáveis maximais.

Demonstração: Veja que a primeira afirmação segue diretamente da Proposição 3.2.9, pois como u é ilimitado, o Teorema 1.1.11 nos garante que u é descontínuo na origem. Além disso u é fortemente não-contrativo pois é linear e dados $0 < \varepsilon \leq 1$, $t > 0$ e $\alpha \neq 0$ tais que $0 < |\alpha| < \varepsilon$, tem-se

$$|u(\varphi(\alpha x))| = |\alpha||u(\varphi(x))| \geq t|\alpha||u(\varphi(x))|,$$

ou seja, u é linearmente fortemente não-contrativo próximo à origem.

Para a segunda parte, assuma que X é separável. Assim, temos os seguintes fatos:

- Os espaços $c_0(X)$ e $\ell_p(X)$ são separáveis (Proposição 1.2.7 e Proposição 1.2.13).
- O espaços $c_0(X)$ e $\ell_p(X)$ são metrizáveis, uma vez que admitem a métrica induzida por suas respectivas normas (p-norma caso $0 < p < 1$).
- O espaço $c_{00}(X)$ é denso em $c_0(X)$ e $\ell_p(X)$, com $0 < p < \infty$ (Observação 1.2.21).
- O espaço $c_{00}(X)$, enquanto conjunto, é denso-lineável. Com efeito, a lineabilidade é imediata pois ele próprio já é um espaço vetorial de dimensão infinita. A densidade segue do fato anterior.

Com isto, considere $A = C(c_0(X), u, 0)$ ou $A = C(\ell_p(X), u, \{p\})$, que representam os conjuntos em (3.9) e (3.10), respectivamente. Da espaçabilidade destes conjuntos, sabemos que $A \cup \{0\}$ contém um subespaço de dimensão $\mathfrak{c}$. Também temos $A + c_{00}(X) \subseteq A$ e $A \cap c_{00}(X) = \emptyset$ e assim, como $c_{00}(X)$ é denso-lineável, pelo Teorema 3.2.10 segue que $A \cup \{0\}$ contém um subespaço denso de dimensão $\mathfrak{c}$. O resultado segue uma vez que $c_0(X)$ e $\ell_p(X)$ possuem dimensão $\mathfrak{c}$. ■

Para a nossa próxima aplicação, vamos nos atentar ao fato de que dado um espaço normado X, podem existir diversas normas não-equivalentes que tornam este espaço completo, conforme podemos ver no trabalho [2] de W. Arendt e R. Nittka. Com isto em vista, considerando $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ duas normas não-equivalentes que tornam X completo, o próximo resultado estabelece a espaçabilidade de conjuntos sob este contexto.

Corolário 3.2.12. *Sejam $p > 0$ e $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ duas normas não-equivalentes que tornam completo o espaço de dimensão infinita X. Então os conjuntos*

$$c_0(X, \|\cdot\|_1) - c_0(X, \|\cdot\|_2) \text{ e } \ell_p(X, \|\cdot\|_1) - \ell_p^w(X, \|\cdot\|_2)$$

são espaçáveis. Além disso, se X é separável e $p < \infty$, então estes conjuntos serão denso-lineáveis maximais.

Demonstração: Como a demonstrações para ambos os conjuntos são semelhantes, faremos apenas o primeiro caso. Suponha que $c_0(X, \|\cdot\|_1) - c_0(X, \|\cdot\|_2)$ seja vazio, isto é, para toda sequência $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ em X tal que $\|x_j\|_1 \to 0$ tem-se também $\|x_j\|_2 \to 0$. Assim, a inclusão $i : (X, \|\cdot\|_1) \to (X, \|\cdot\|_2)$, que já sabemos ser linear e bijetora, é também contínua na origem, pois

$$\|x_j\|_1 \to 0 \Rightarrow \|i(x_j)\|_2 = \|x_j\|_2 \to 0.$$

Do Teorema 1.1.11, segue que i é contínuo e, do Teorema da Aplicação Aberta, que i é um isomorfismo. Assim, as normas $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ são equivalentes, o que é um absurdo. Dessa forma, temos $c_0(X, \|\cdot\|_1) - c_0(X, \|\cdot\|_2) \neq \emptyset$.

Desta forma, o operador i é ilimitado e o resultado segue diretamente da Proposição 3.2.11, pois

$$c_0(X, \|\cdot\|_1) - c_0(X, \|\cdot\|_2) = \{(x_j)_{j=1}^{\infty} \in c_0(X, \|\cdot\|_1); (i(x_j))_{j=1}^{\infty} \notin c_0(X, \|\cdot\|_2)\}.$$

■

Pode-se adaptar o corolário acima, mudando o que for necessário, para o caso em que tivermos quaisquer dois espaços de Banach com dimensão infinita separáveis, por exemplo.

Ao contrário do que se pode imaginar pelo que vimos até o momento, o Teorema 3.2.1 pode ser aplicado em outros contextos que não envolvem polinômios homogêneos ou operadores lineares. M. Matos em seu trabalho [26] de 2003, definiu uma classe de funções que podem ser aplicadas em nosso contexto. Para nos auxiliar, vejamos duas definições, seguidas de um teorema, que foram apresentados por Matos.

Em ambas as definições denotaremos por A, um subconjunto aberto qualquer de X.

Definição 3.2.13. Sejam $p, q \in (0, \infty)$ e $f : A \to Y$ uma função. Dizemos que f é *regularmente* (p, q)*-somante* no ponto $a \in A$, se para toda sequência $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_q(X)$, com $a + x_j \in A$ para todo $j \in \mathbb{N}$, tivermos $(f(a + x_j) - f(a))_{j=1}^{\infty} \in \ell_p(Y)$.

Definição 3.2.14. Sejam $r > 0$ um número real e $f : A \to Y$ uma função. Dizemos que f é r*-regular* no ponto $a \in A$ se existem $M > 0$ e $\delta > 0$ tais que a bola fechada de raio δ e centro a contém A e $\|f(a + x) - f(a)\|^r \leq M\|x\|$, para todo $x \in B[\delta; a]$. Dizemos que f é apenas r-regular se for r-regular em todo ponto de A.

Teorema 3.2.15 (Theorem 2.5, [26])**.** *Para* $p, q \in (0, \infty)$*, uma função* $f : A \to Y$ *é regularmente* (p, q)*-somante em* $a \in A$ *se, e somente se,* f *é* $\left(\frac{p}{q}\right)$*-regular em* a*.*

Vamos agora a aplicação envolvendo as funções apresentadas nessas definições.

Proposição 3.2.16. *Sejam* $p, q > 0$*,* X *e* Y *espaços de Banach e* $f : X \to Y$ *uma função não-contrativa que falha em ser* $\left(\frac{p}{q}\right)$*-regular na origem. Então o conjunto*

$$\{(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_q(X); (f(x_j))_{j=1}^{\infty} \in \ell_p(Y)\} \tag{3.11}$$

é espaçável.

Demonstração: Uma vez que f não é $\left(\frac{p}{q}\right)$-regular na origem, o Teorema 3.2.15 nos garante que f também não pode ser regularmente (p, q)-somante na origem. Isto é, o conjunto $C(\ell_q(X), f, \{p\})$ (representado em (3.11)) é não-vazio. Portanto, como f é não-contrativa e $\ell_q(X)$ é um espaço invariante de sequências, a espaçabilidade desejada segue do item (a) do Teorema 3.2.1. ■

3.3 Espaçabilidade maximal sobre espaços de sequências

Nesta seção estaremos apresentando alguns resultados de espaçabilidade maximal em certos espaços de sequências com valores vetoriais. É claro que para obtermos algo mais forte, as restrições também são maiores. Os autores de [15], trabalho base para essa seção (na verdade, para todo o capítulo), atribuem um pouco mais de generalidade ao trabalhar, neste novo contexto, com sequências de funções ao invés de apenas uma função.

Definição 3.3.1. Uma sequência de funções $(f_j : \mathbb{K} \to \mathbb{K})_{j=1}^{\infty}$ é dita ser

(a) *Não-contrativa* se $f_j(0) = 0$, para todo $j \in \mathbb{N}$, e para todo escalar $\alpha \neq 0$ existe uma constante $K(\alpha) > 0$ tal que $|f_j(\alpha\xi)| \geq K(\alpha)|f_j(\xi)|$, $\forall \xi \in \mathbb{K}$ *e* $j \in \mathbb{N}$ com $\inf\{K(\alpha); |\alpha| = 1\} > 0$.

(b) *Não-decrescente próximo à origem* se existem $C > 0$ e $\varepsilon > 0$ tais que $|f_n(\xi)| \geq C|f_m(\xi)|$ sempre que $n \geq m$ e $|\xi| < \varepsilon$.

Vamos também definir, para $p > 0$ e $\Gamma \subseteq (0, \infty]$, o conjunto

$$C(\ell_p, (f_j)_{j=1}^{\infty}, \Gamma) := \left\{ (\xi_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p; (f_j(\xi_j))_{j=1}^{\infty} \notin \bigcup_{q \in \Gamma} \ell_q \right\}.$$

Vejamos então um teorema que nos trará as condições de espaçável maximalidade para um conjunto associado ao conjunto acima definido.

Teorema 3.3.2. *Sejam $(f_j : \mathbb{K} \to \mathbb{K})_{j=1}^{\infty}$ uma sequência, de funções não-contrativas, não-decrescente próximo à origem, $p > 0$ e $\Gamma \subseteq (0, \infty]$. Se $C(\ell_p, (f_j)_{j=1}^{\infty}, \Gamma)$ é não-vazio, então o conjunto*

$$C(\ell_p(X), (f_j \circ \|\cdot\|)_{j=1}^{\infty}, \Gamma) := \left\{ (x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p(X); (f_j(\|x_j\|))_{j=1}^{\infty} \notin \bigcup_{q \in \Gamma} \ell_q \right\}$$

é maximal espaçável, para qualquer espaço de Banach com dimensão infinita X.

Demonstração: Seja $\xi = (\xi_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p$ tal que $(f_j(\xi_j))_{j=1}^{\infty} \notin \bigcup_{q \in \Gamma} \ell_q$. Como já fizemos outras vezes, vamos tomar $\mathbb{N} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathbb{N}_i$ como união infinita de subconjuntos infinitos de

$\mathbb{N}$ dois a dois disjuntos, com $\mathbb{N}_i = \{i_1 < i_2 < \cdots\}$ e definir

$$y_i = \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j e_{i_j} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}.$$

Note que $\|y_i\|_r = \|\xi\|_r$ para todo $i \in \mathbb{N}$ e todo $r > 0$ e, além disso, como $f_j(0) = 0$ para todo $j \in \mathbb{N}$, temos $\|(f_j(\xi_j))_{j=1}^{\infty}\|_q = \|(f_j((y_i)_j))_{j=1}^{\infty}\|_q$ para todo $q \in \Gamma$. Assim, temos $y_i \in C(\ell_p, (f_j)_{j=1}^{\infty}, \Gamma)$ para todo $i \in \mathbb{N}$, uma vez que $\xi \in C(\ell_p, (f_j)_{j=1}^{\infty}, \Gamma)$. Como na prova do Teorema 3.2.1, para $\lambda = (\lambda_j)_{j=1}^{\infty} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ e $w \in X$, denotaremos

$$w \otimes \lambda = \lambda \otimes w := (\lambda_j w)_{j=1}^{\infty} \in X^{\mathbb{N}}$$

e tomaremos $\tilde{s} = 1$ se $p \geq 1$ e $s = p$ se $0 < p < 1$. Para $(w_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_{\tilde{s}}(X)$, temos

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{\infty} \|y_j \otimes w_j\|_p^{\tilde{s}} &= \sum_{j=1}^{\infty} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k w_j e_{j_k} \right\|_p^{\tilde{s}} = \sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \|\xi_k w_j\|_X^p \right)^{\frac{\tilde{s}}{p}} \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p \cdot \|w_j\|_X^p \right)^{\frac{\tilde{s}}{p}} = \sum_{j=1}^{\infty} \|w_j\|_X^{\tilde{s}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p \right)^{\frac{\tilde{s}}{p}} \\
&= \|(w_j)_{j=1}^{\infty}\|_{\tilde{s}}^{\tilde{s}} \cdot \|\xi\|_p^{\tilde{s}} < \infty
\end{aligned}$$

donde segue que a série $\sum_{j=1}^{\infty} y_j \otimes w_j$ converge. Daí, o operador

$$T : \ell_{\tilde{s}}(X) \to \ell_p(X),\ T((w_j)_{j=1}^{\infty}) = \sum_{j=1}^{\infty} y_j \otimes w_j,$$

está bem definido e não é difícil mostrar que ele é linear e injetivo (este último, usando técnica semelhante à na demonstração do Teorema 3.2.1).

Uma vez que $\ell_{\tilde{s}}(X)$ é um espaço de dimensão infinita e T é injetor, então $T(\ell_{\tilde{s}}(X))$ e, consequentemente, $\overline{T(\ell_{\tilde{s}}(X))}$ é um subespaço fechado de dimensão infinita de $\ell_p(X)$, com

$$\dim \ell_p(X) \geq \dim \overline{T(\ell_{\tilde{s}}(X))} \geq \dim T(\ell_{\tilde{s}}(X)) = \dim \ell_{\tilde{s}}(X) = \dim \ell_p(X),$$

isto é, $\dim \ell_p(X) = \dim \overline{T(\ell_{\tilde{s}}(X))}$. Devemos provar que se $z = (z_n)_{n=1}^{\infty} \in \overline{T(\ell_{\tilde{s}}(X))} - \{0\}$, então $(f_n(\|z_n\|))_{j=1}^{\infty} \notin \bigcup_{q \in \Gamma} \ell_q$. Tomando tal z, existe uma sequência $(w_i^{(k)})_{i=1}^{\infty} \in \ell_{\tilde{s}}(X)$, tal que $z = \lim_{k \to \infty} T((w_i^{(k)})_{i=1}^{\infty})$ em $\ell_p(X)$ e que, para cada $k \in \mathbb{N}$,

$$T((w_i^{(k)})_{i=1}^{\infty}) = \sum_{i=1}^{\infty} y_i \otimes w_i^{(k)} = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j w_i^{(k)} e_{i_j}.$$

Como $z \neq 0$, fixemos $r \in \mathbb{N}$ tal que $z_r \neq 0$ e, como $\mathbb{N} = \bigcup_{j=1}^{\infty} \mathbb{N}_j$ é uma união disjunta, existem únicos $m,\ t \in \mathbb{N}$ tais que $e_{m_t} = e_r$. Assim, para todo $k \in \mathbb{N}$, a r-ésima coordenada de $T((w_i^{(k)})_{i=1}^{\infty})$ é o elemento $\xi_t w_m^{(k)}$ e como a convergência em $\ell_p(X)$ implica em convergência coordenada a coordenada, temos

$$z_r = \lim_{k\to\infty} w_m^{(k)}\xi_t = \xi_t \lim_{k\to\infty} w_m^{(k)}$$

e

$$\lim_{k\to\infty} w_m^{(k)} = \frac{z_r}{\xi_t} \neq 0.$$

Para $j, k \in \mathbb{N}$, a m_j-ésima coordenada de $T((w_i^{(k)})_{i=1}^{\infty})$ é $w_m^{(k)}\xi_j$ e definindo $u_m = z_r/\xi_t \neq 0$, temos

$$\lim_{k\to\infty} w_m^{(k)}\xi_j = \xi_j \lim_{k\to\infty} w_m^{(k)} = \xi_j u_m$$

para cada $j \in \mathbb{N}$. Por outro lado, a convergência em cada coordenada nos fornece

$$\lim_{k\to\infty} w_m^{(k)}\xi_j = z_{m_j},\ \forall j \in \mathbb{N}$$

e então, pela unicidade do limite, temos

$$z_{m_j} = \xi_j u_m,\ \forall j \in \mathbb{N}.$$

Sejam $C > 0$ e $\varepsilon > 0$ como vistos na Definição 3.3.1 item (b). Como $\xi \in \ell_p$, sabemos que existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|\xi_n| < \varepsilon$ sempre que $j \geq j_0$. Disso e do fato de que, por construção, temos $m_j \geq j$ para cada $j \in \mathbb{N}$, segue que

$$\begin{aligned}
\sum_{j=j_0}^{\infty} |f_{m_j}(\|z_{m_j}\|)|^q &\geq \sum_{j=j_0}^{\infty} [K(\|u_m\|)]^q |f_{m_j}(|\xi_j|)|^q \\
&\geq C\cdot [K(\|u_m\|)]^q \sum_{j=j_0}^{\infty} |f_j(|\xi_j|)|^q \\
&= C\cdot [K(\|u_m\|)]^q \sum_{j=j_0}^{\infty} \left| f_j\left(\frac{|\xi_j|}{\xi_j}\xi_j\right)\right|^q \\
&\geq C\cdot [K(\|u_m\|)]^q \sum_{j=j_0}^{\infty} [K(|\xi_j|/\xi_j)]^q |f_j(\xi_j)|^q \\
&\geq C\cdot [K(\|u_m\|)]^q [\inf_{|\alpha=1|} K(\alpha)]^q \sum_{j=j_0}^{\infty} |f_j(\xi_j)|^q \\
&= C\cdot [K(\|u_m\|)]^q [\inf_{|\alpha=1|} K(\alpha)]^q \|(f_j(\xi_j))_{j=j_0}^{\infty}\|_q^q = \infty,
\end{aligned}$$

para todo $q \in \Gamma$, provando que $(f_n(\|z_n\|))_{j=1}^{\infty} \notin \bigcup_{q\in\Gamma} \ell_q$. ■

Vejamos agora, uma aplicação para o Teorema 3.3.2.

Iremos considerar Λ como sendo $[1,\infty)$ ou $(0,1]$ e para uma sequência $(p_j)_{j=1}^{\infty} \subseteq \Lambda$ e um espaço de Banach X, denotaremos por $\ell\left((p_j)_{j=1}^{\infty}, X\right)$ o *espaço de sequências de Nakano* com valores em X, definido por

$$\ell\left((p_j)_{j=1}^{\infty}, X\right) = \left\{(x_j)_{j=1}^{\infty} \in X^{\mathbb{N}}; \sum_{j=1}^{\infty} \|x_j\|^{p_j} < \infty\right\}.$$

No caso em que $X = \mathbb{K}$ escrevemos apenas $\ell\left((p_j)_{j=1}^{\infty}\right)$.

O espaço de sequências de Nakano, foi apresentado pela primeira vez em 1951 pelo próprio H. Nakano em seu trabalho [28], considerando $\Lambda = [1,\infty)$ e no caso escalar. A partir daí, estes espaços passaram a ser trabalhados em outros contextos, como no caso $\Lambda = (0,1]$ ou o caso a valores vetoriais. Em 2014, C. Ruiz e V. M. Sánchez em seu trabalho [34] exploraram os espaços de sequências de Nakano em busca de espaçabilidade.

O próximo corolário, que provém de Teorema 3.3.2, envolve a busca da espaçabilidade (maximal) nos espaços de sequências de Nakano com valores vetoriais. Os autores de [15] afirmam que, até então, não haviam trabalhos sobre a espaçabilidade em espaços de sequências de Nakano a valores vetoriais.

Corolário 3.3.3. *Seja $(p_j)_{j=1}^{\infty} \subseteq \Lambda$ uma sequência limitada não-crescente e $p > 0$. Se $\ell_p - \ell\left((p_j)_{j=1}^{\infty}\right)$ é não-vazio, então este conjunto é espaçável maximal, para qualquer espaço de Banach de dimensão infinita X.*

Demonstração: Para cada $j \in \mathbb{N}$, considere a função

$$f_j : \mathbb{K} \to \mathbb{K},\ \ f_j(\xi) = |\xi|^{p_j}$$

que satisfaz $f_j(0) = 0$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Seja $L \leq 1$ tal que $p_j \geq L$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Para $\alpha \in \mathbb{K} - \{0\}$, tomemos

$$K(\alpha) = \begin{cases} \min\{|\alpha|, |\alpha|^{p_1}\} \text{ se } \Lambda = [1,\infty) \\ \min\{|\alpha|, |\alpha|^{L}\} \text{ se } \Lambda = (0,1] \end{cases}$$

e a condição (a) na Definição 3.3.1 é satisfeita para f, pois

$$f_j(\alpha\xi) = |\alpha\xi|^{p_j} = |\alpha|^{p_j}|\xi|^{p_j} = |\alpha|^{p_j} f(\xi) \geq K(\alpha) f(\xi).$$

Por outro lado, da monotonicidade da sequência $(p_j)_{j=1}^{\infty}$, a condição (b) da Definição 3.3.1 é satisfeita para $C = \varepsilon = 1$, pois se $n \geq m$, então $p_n \leq p_m$ e assim,

$$|f_n(\xi)| = |\xi|^{p_n} \geq |\xi|^{p_m} = |f_m(\xi)|,$$

para $|\xi| < 1 = \varepsilon$. Ao fazermos $\Gamma = \{1\}$, temos

$$C(\ell_p, (f_j)_{j=1}^{\infty}, \Gamma) = \ell_p - \ell\left((p_j)_{j=1}^{\infty}\right)$$

e

$$C(\ell_p(X), (f_j \circ \|\cdot\|)_{j=1}^{\infty}, \Gamma) = \ell_p(X) - \ell\left((p_j)_{j=1}^{\infty}, X\right).$$

Portanto, como a sequência $(f_j : \mathbb{K} \to \mathbb{K})_{j=1}^{\infty}$ é não-contrativa e não-decrescente próximo à origem, o resultado segue-se imediatamente do Teorema 3.3.2. ■

Por fim, faremos algumas observações sobre os dois últimos resultados dessa seção:

Observação 3.3.4. Foi necessário realizarmos algumas alterações em relação ao trabalho original [15], para que os resultados se apresentassem corretamente redigidos. Acontece que detectamos alguns pequenos erros que não comprometem os resultados, mas que demandaram essas alterações. Modificamos o primeiro item da Definição 3.3.1, alterando-o de "não-crescente" para "não-decrescente" e ao final da demonstração do Teorema 3.3.2 alteramos "$j \geq m_j$" para "$m_j \geq j$" e "$0 < q < p$" para "$q \in \Gamma$". Por fim, de modo esperado, precisamos substituir nesse último corolário a monotonicidade da sequência $(p_j)_{j=1}^{\infty}$ de "não-decrescente" para "não-crescente" e, é claro, fazer os devidos ajustes no restante da demonstração.

Referências Bibliográficas

[1] N. Albuquerque, L. Bernal-González, D. Pellegrino, e J. B. Seoane-Sepúlveda, *Peano curves on topological vector spaces*, Linear Algebra Appl., **460**(1) (2014), 81–96.

[2] W. Arendt, e R. Nittka, *Equivalent complete norms and positivity*, Arch. Math. (Basel), **92**(5) (2009), 414–427

[3] R. Aron, V. I. Gurariy, e J. B. Seoane-Sepúlveda, *Lineability and spaceability of sets of functions on* $\mathbb{R}$, Proc. Amer. Math. Soc., **133**(3) (2005), 795–803.

[4] R. Aron, D. Pérez García, e J. B. Seoane-Sepúlveda, *Algebrability of the set of non-convergent Fourier series*, Studia Math., **175**(1) (2006), 83–90.

[5] R. Aron, e J. B. Seoane -Sepúlveda, *Algebrability of the set of everywhere surjective functions on* $\mathbb{C}$, Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin, **14**(1) (2007), 25–31.

[6] R. Aron, L. Bernal-Gonzalez, D. Pellegrino, e J. B. Sepúlveda, *Lineability: the search for linearity in mathematics*, CRC Press, 2015.

[7] S. Banach, *Über die Baire'sche Kategorie gewisser Funktionenmengen*, Studia Math., **1**(3) (1931), 174–179

[8] P. Bandyopadhyay, e G. Godefroy, *Linear structures in the set of norm-attaining functionals on a Banach space*, J. Convex Anal., **13**(3/4) (2006), 489–497.

[9] L. Bernal-González, *Algebraic genericity of strict-order integrability*, Studia Math., **199**(3) (2010), 279–293.

[10] L. Bernal-González, e M. O. Cabrera, *Lineability criteria, with applications*, J. Funct. Anal., **266**(6) (2014), 3997–4025.

[11] A. T. L. Bernardino, *Ideais de Aplicações Multilineares e Polinômios entre Espaços de Banach*, Dissertação de mestrado, UFPB, 2008.

[12] G. Botelho, D. Pellegrino, e P. Rueda, *Dominated polynomials on infinite dimensional spaces*, Proc. Amer. Math. Soc., **138**(1) (2010), 209–216.

[13] G. Botelho, D. Diniz, V. V. Fávaro, e D. Pellegrino, *Spaceability in Banach and quasi-Banach sequence spaces*, Linear Algebra Appl., **434**(5) (2011), 1255–1260.

[14] G. Botelho, D. Pellegrino, e E. Teixeira, *Fundamentos de Análise Funcional*, Sociedade Brasileira de Matemática, 2012.

[15] G. Botelho, e V. V. Fávaro, *Constructing Banach spaces of vector-valued sequences with special properties*, Michigan Math. J., **64**(3) (2015), 539–554.

[16] G. Botelho, J. R. Campos, e J. S. Santos, *Operator ideals related to absolutely summing and Cohen strongly summing operators*, Pacific J. Math., **287**(1) (2017), 1–17.

[17] R. F. Dias, *O espaço das sequências mid somáveis e operadores mid somantes*, Dissertação de mestrado, UFPB, 2017.

[18] V. V. Fávaro, D. Pellegrino, e D. Tomaz, *Lineability and spaceability: a new approach*, Bull. Braz. Math. Soc. (N.S.), **51**(1) (2020), 27–46.

[19] M. S. Ferreira, *Lineabilidade do conjunto dos operadores lineares limitados não absolutamente somantes*, Dissertação de mestrado, UFPB, 2010.

[20] V. I. Gurariy, *Subspaces and bases in spaces of continuous functions*, Dokl. Akad. Nauk SSSR, **167**(5) (1966), 971–973.

[21] V. I. Gurariy, e L. Quarta, *On lineability of sets of continuous functions*, J. Math. Anal. Appl., **294**(1) (2004), 62–72.

[22] A. K. Karn, e D. P. Sinha, *An operator summability of sequences in Banach spaces*, Glasgow Math. J., **56**(2) (2014), 427–437.

[23] D. Kitson, e R. M. Timoney, *Operator ranges and spaceability*, J. Math. Anal. Appl., **378**(2) (2011), 680–686.

[24] F. D. S. D. S. Leite, *Operadores lineares Cohen fortemente somantes*, Dissertação de mestrado, UFPB, 2017.

[25] J. Lindenstrauss, e L. Tzafriri, *Classical Banach Spaces I and II*, Springer, 1996.

[26] M. C. Matos, *Nonlinear absolutely summing mappings*, Math. Nachr., **258**(1) (2003), 71–89.

[27] G. A. Muñoz-Fernández, N. Palmberg, D. Puglisi, e J. B. Seoane-Sepúlveda, *Lineability in subsets of measure and function spaces*, Dokl. Akad. Nauk SSSR, **428**(11-12) (2008), 2805–2812.

[28] H. Nakano, *Modulared sequence spaces*, Proc. Japan Acad., **27**(9) (1951), 508–514.

[29] D. F. Nogueira, *Espaços de Sequências Vetoriais e Ideais de Operadores*, Dissertação de mestrado, UFU, 2016.

[30] F. R. D. Oliveira, *O Teorema do tipo Dvoretzky-Rogers para sequências misto somáveis e resultados de espaçabilidade*, Dissertação de mestrado, UFU, 2012.

[31] D. Pellegrino, e E. Teixeira, *Norm optimization problem for linear operators in classical Banach spaces*, Bull. Braz. Math. Soc. (N.S.), New Series, **40**(3) (2009), 417–431.

[32] A. F. Pereira, *O Teorema de Dvoretzky-Rogers*, Dissertação de mestrado, UFRJ, 2005.

[33] H. P. Rosenthal, *On quasi-complemented subspaces of Banach spaces*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., **59**(2) (168), 361–364.

[34] C. Ruiz, e V. M. Sánchez, *Nonlinear subsets of function spaces and spaceability*, Linear Algebra Appl., **463**(1) (2014), 56–67.

[35] J. S. Santos, *Resultados de coincidência para aplicações absolutamente somantes*, Dissertação de mestrado, UFPB, 2008.

[36] K. D. A. Silva, *Lineabilidade em conjuntos de sequências e de funções*, Dissertação de mestrado, UFU, 2019.