Matheus Victor Leite da Silva

Sobre a Construtibilidade dos Números: Propriedades, a Espiral de Theodorus e atividades propostas para o Ensino Básico de Matemática

João Pessoa

Dezembro - 2021

Matheus Victor Leite da Silva

Sobre a Construtibilidade dos Números: Propriedades, a Espiral de Theodorus e atividades propostas para o Ensino Básico de Matemática

Trabalho de Conclução de Curso apresentado ao curso de Licenciatura em Matemática, do Centro de Ciências Exatas e da Natureza, da Universidade Federal da Paraíba, como requisito parcial para a obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA - UFPB

Orientador: Dr. Flank David Morais Bezerra

João Pessoa

Dezembro - 2021

Catalogação na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

S586s Silva, Matheus Victor Leite da.
Sobre a construtibilidade dos números : propriedades, a
espiral de Theodorus e atividades propostas para o
ensino básico de matemática / Matheus Victor Leite da
Silva. - João Pessoa, 2021.
61 f. : il.

Orientação: Flank David Morais Bezerra.
TCC (Graduação/Licenciatura em Matemática) -
UFPB/CCEN.

1. Números construtíveis. 2. Espiral de Theodorus. 3.
Régua e compasso. 4. Números irracionais. I. Bezerra,
Flank David Morais. II. Título.

UFPB/CCEN CDU 511.14(043.2)

Elaborado por Josélia Maria Oliveira da Silva - CRB-15/113

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA

Trabalho de Conclusão de Curso de Licenciatura Plena em Matemática intitulado ***Sobre a Construtibilidade dos Números: Propriedades, a Espiral de Theodorus e atividades propostas para o Ensino Básico de Matemática*** de autoria de Matheus Victor Leite da Silva, aprovada pela banca examinadora constituída pelos seguintes professores:

Flank DM Bezerra

Prof. Dr. Flank David Morais Bezerra
UFPB

Miriam Silva Pereira

Prof. Dra. Miriam da Silva Pereira.
UFPB

Elisandra F. Gloss de Moraes

Prof. Dra. Elisandra de Fátima Gloss de Moraes
UFPB

Coordenador(a) do Departamento de Matemática
Dra. Miriam da Silva Pereira
DM/CCEN/UFPB

João Pessoa, 08 de dezembro de 2021

AGRADECIMENTOS

- Agradeço a Deus por sempre me guiar de maneira correta e colocar ao meu lado pessoas que me ajudaram na conclusão desse trabalho.

- À minha família por me dar o apaio necessário para eu chegar até aqui, tanto financeiramente quanto emocionalmente.

- Deixo aqui meu agradecimento especial aos professores Vinícius, Rogéria, Elisandra e Miriam por serem pessoas importantes no meu processo de formação, bem como ao professor Everaldo por me orientar nos estudos e na iniciação científica.

- Agradeço ao professor Flank por me orientar neste trabalho e por ajudar no LaTeX e em algumas correções deste trabalho, aos colegas de turma pelo apoio ao longo do curso.

Olhai por vós mesmos. E, se teu irmão pecar contra ti,
repreende-o e, se ele se arrepender, perdoa-lhe.
E, se pecar contra ti sete vezes no dia,
e sete vezes no dia vier ter contigo, dizendo:
Arrependo-me; perdoa-lhe.
(Bíblia Sagrada, Lucas 17: 3, 4.)

RESUMO

Neste trabalho abordaremos os números construtíveis e a famosa espiral de Theodorus, uma figura de desenho em formato de espiral construída com régua e compasso em um plano e constituída por triângulos retângulos sobrepostos, onde a hipotenusa de um triângulos é também um dos catetos de um outro triângulo. Uma das leituras desta figura é ilustrar o fato que os números irracionais do tipo $\sqrt{n}$ são números construtíveis, seja qual for $n \in \mathbb{N}$. Introduzimos a definição do conceito de número construtível, damos exemplos, estudamos os princípios básicos das construções com régua e compasso, e apresentamos um síntese histórica sobre estes assuntos, em particular, a espiral de Theodorus. Aproveitamos a oportunidade para compartilhar conjuntos de comandos LaTeXcapazes de produzir figuras sobre estes assuntos.

Palavras-chave: Números construtíveis. Espiral de Theodorus. Régua e compasso.

ABSTRACT

In this work we will address the constructible numbers and the famous spiral of Theodorus, a drawing figure in the shape of a spiral built with a ruler and compass in one plane and the result of overlapping right triangles, where the hypotenuse of an overlapping triangle, where the hypotenuse of a triangle superimposed is also one of the legs of another triangle, and one of the readings of this figure is to illustrate the fact that irrational numbers of type $\sqrt{n}$ are constructable numbers, whatever $n \in \mathbb{N}$. We introduce the definition of the concept of constructible number, we give examples, we study the basic principles of ruler and compass constructions, we present a historical synt on these subjects, in particular, the Theodorus spiral. We take the opportunity to share LaTeXcommand sets capable of producing figures on these subjects.

Key-words: Constructible numbers. Theodorus spiral. Ruler and bar.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Neste trabalho estudamos os números construtíveis; a saber, um número real positivo é chamado de construtível se conseguirmos,usando apenas um compasso e uma régua não graduada, construir com um número finito de passos um segmento de reta cujo comprimento seja igual a este número, a partir de um segmento cujo comprimento tomamos como a unidade.

Além disso, neste trabalho damos atenção a espiral de Theodorus. Esta é uma figura em formato de espiral construída com um compasso e uma régua não graduada em um plano e constituída por triângulos retângulos justapostos, onde a hipotenusa de um triângulo é também um dos catetos de um outro triângulo. Uma das leituras desta ilustração é que ela ilustra o fato de que raízes quadradas de números naturais são, além de números irracionais, números construtíveis. Aproveitamos também para disponibilizar conjuntos de comandos LaTeXcapazes de construir ilustrações associadas à espiral de Theodorus.

Este trabalho de conclusão de curso está organizado da seguinte forma:

- O Capítulo 1, intitulado " Construtibilidade de Números", é dedicado aos números construtíveis, apresentamos os principais conceitos da teoria e nele estudamos os princípios básicos das construções com régua e compasso.

- O Capítulo 2, intitulado " Números construtíveis e o LaTeX", é dedicado à construção de figuras relacionadas à teoria dos números construtíveis usando comandos LaTeX.

- O Capítulo 3, intitulado " Atividades Propostas", é dedicado a uma proposta de como a teoria dos números construtíveis pode ser levada a sala de aula nos primeiros anos do Ensino Básico de Matemática.

Finalmente, listamos as principais referências bibliográficas consultadas para a elaboração deste trabalho.

2 CONSTRUTIBILIDADE DE NÚMEROS

2.1 Números Construtíveis

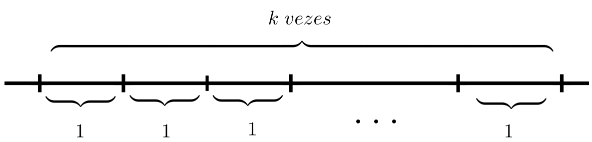
Neste capítulo daremos atenção à definição de um número construtível, e apresentaremos exemplos sobre o tema. Aqui, não temos nenhuma pretenção com a originidade das ideias apresentadas, estamos seguindo de perto a referência [1]. Para facilitar a compreensão dos argumentos apresentados produzimos algumas ilustrações.

Definição 2.1.1. *Um número real positivo a é chamado de construtível se conseguirmos, usando apenas um compasso e uma régua não graduada, construir com um número finito de passos um segmento de reta cujo comprimento seja a, a partir de um segmento cujo comprimento tomamos como a unidade.*

Exemplo 2.1.1. *Todo número inteiro positivo é construtível.*

Demonstração. De fato, se $k \in \mathbb{Z}$ e $k > 0$, então reproduzimos os desenhos fixando um comprimento de unidade igual a 1 (ou unitário), definindo assim um segmento de k unidades.

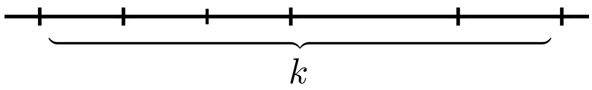
Figura 1 – Segmento de comprimento 1



Fonte: Elaborada pelo autor.

E definimos assim, a abertura do compasso de tamanho igual à k unidades.

Figura 2 – Segmento de comprimento k



Fonte: Elaborada pelo autor.

Logo, um inteiro positivo k qualquer é construtível.

□

2.1.1 Por que a régua e o compasso?

O fato de nos *Elementos de Euclides* as construções serem realizadas por meio da régua e do compasso deu origem à lenda de que essa seria uma restrição da geometria imposta pelos padrões da época. Como já dito, para explicar o motivo dessa restrição é comum apelar para a filosofia platônica. Por valorizar a matemática teórica, Platão (Atenas, $428\,a.C.$ — Atenas, $347\,a.C.$) teria desinteresse pelas construções mecânicas, realizadas com ferramentas de verdade. Para maiores detalhes sobre os contextos históricos consulte a referência [8].

A régua e o compasso, apesar de serem instrumentos de construção, podem ser representados, respectivamente, pela linha reta e pelo círculo, figuras geométricas com alto grau de perfeição. Na realidade, nos Elementos, as construções realizáveis com régua e compasso são executadas por meio de retas e círculos definidos de modo abstrato. Essas explicações são imprecisas, no entanto, por diversos pressupostos implícitos. Para mais informações consulte a referência [8].

Euclides (nasceu por volta de $300\,a.C.$) não afirma explicitamente, em lugar nenhum de sua obra, que as construções tenham de ser efetuadas com retas e círculos. Simplesmente elas são, de fato, realizadas desse modo. No caso de Platão, é coerente dizer que sua filosofia considerava a reta e o círculo como figuras geométricas superiores, mas também não há, em seus escritos, indicações explícitas de imposição dessas figuras como protótipos para toda a geometria, nem de proibição do uso de outras construções. Para mais informações consulte a referência [7].

De acordo com [8], o responsável por creditar a Platão a restrição à régua e ao compasso é o matemático alemão Hermann Hankel (Halle an der Saale, 14 de fevereiro de 1839 — Schramberg, 29 de agosto de 1873), que atuou na segunda metade do século XIX e trabalhou com matemáticos como Weierstrass (Ostenfelde, próximo de Ennigerloh, 31 de outubro de 1815 — Berlim, 19 de fevereiro de 1897) e Kronecker (Legnica, 7 de dezembro de 1823 — Berlim, 29 de dezembro de 1891), conhecidos pela preocupação com os fundamentos da matemática. Em 1874, Hankel publicou um texto histórico sobre a geometria euclidiana – *(Sobre a história da matemática na Idade Média e na Antiguidade)* – contendo exaltações com base em trechos da obra de Platão.

Ao analisarmos as reflexões da autora [8] sobre o porque da tese de Hankel ser falsa, nos é fornecida algumas hipóteses sobre as razões do uso exclusivo desses instrumentos nos Elementos de Euclides. Vamos nos referir especificamente aos Elementos, pois a restrição à régua e ao compasso não parece ser importante nem mesmo em outros escritos de Euclides.

Essas regras de construção são enunciadas nos postulados do livro I dos Elementos — que tratam das construções permitidas — e constituem uma particularidade dessa obra. Em outros escritos importantes da geometria grega, como os de Arquimedes (Siracusa, $287\,a.C.$ — $212\,a.C.$) ou Apolônio (Tiana, $15\,d.C.$ — Éfeso, por volta de $100\,d.C.$), além de serem usados outros meios de construção, a régua e o compasso não são enunciados explicitamente nos preâmbulos. Veremos que, apesar do destaque desses postulados na organização dos Elementos, seu sentido seria de ordem prática, mais do que metafísica ou formalista.

Como já dito, uma das explicações para o uso da régua e do compasso nessa obra pode ter sido de ordem pedagógica. As construções feitas desse modo são mais simples e não exigem nenhuma teoria adicional (como seria o caso das construções por meio de cônicas, por exemplo). Desse ponto de vista, a restrição não seria consequência de uma proibição, mas de uma otimização: deve-se usar a régua e o compasso sempre que possível para simplificar a solução dos problemas de construção.

O papel dos postulados $1, 2$ e 3 do livro I dos Elementos — que consistem na proposição das construções realizadas com régua e compasso — decorreria da praticidade que esses meios permitem obter. Na verdade, essas não são as construções permitidas, mas as realmente utilizadas, ou seja, as que bastam para fazer funcionar as outras construções necessárias. Para mais informações sobre os postulados consulte as referências [7] e [9]

Uma segunda explicação para o uso exclusivo da régua e do compasso seria a necessidade de uma ordenação e de uma sistematização da geometria com vistas a uma melhor arquitetura da matemática. Na época de Euclides, o conjunto dos conhecimentos dos geômetras já estava bastante desenvolvido e era necessário ordená-lo. Essa ordem implicaria num desenvolvimento da matemática, do nível mais elementar em direção ao superior. E Euclides se teria proposto, nos Elementos, a expor a matemática elementar da época, aquela que demanda somente o emprego da régua e do compasso.

Quer optemos pela motivação pedagógica ou por essa segunda razão, parece mais adequado entender a exclusividade da régua e do compasso nos Elementos como uma restrição pragmática cujo objetivo poderia ser apresentar um uso ótimo dos instrumentos mais simples possíveis. Nesse caso, a mensagem implícita nessa obra seria: tudo o que é possível se fazer em geometria com o uso somente da régua e do compasso.

A fim de compreender melhor a definição de números construtíveis, vamos inicialmente apresentar noções gerais sobre construções geométricas.

2.2 Construções Geométricas

Exibiremos o passo-a-passo na construção por régua e compasso, consideramos uma régua não graduada. Afim de tornar a construção mais didática com o auxílio do software Geogebra ilustraremos nosso passo-a-passo. As construções geométricas devem seguir algumas regras básicas:

Regra 1: Conhecendo-se dois pontos distintos, é possível traçar uma reta utilizando a régua.

Regra 2: Com o compasso, é possível traçar uma circunferência com centro em um ponto conhecido e que passa por um outro ponto distinto determinado.

É permitido obtermos pontos que podem ser construídos através de uma sequência finita de operações: intersecções de retas, intersecções de circunferências e intersecções de retas com circunferências. Com esses pontos obtidos, podemos traçar novas retas e novas circunferências e assim sucessivamente.

Os matemáticos da Grécia Antiga já tinham um grande interesse por estas construções, com o uso da régua e compasso, os gregos realizaram uma grande quantidade de construções geométricas e solucionaram diversos problemas geométricos, tais como: construção de retas paralelas conhecida uma das retas, a bissecção de um ângulo, a bissecção de um segmento, a construção de circunferência e arco, a construção de uma reta perpendicular a uma reta dada passando por um ponto dado, entre outras. Veja em [6].

Segundo [1], o traçado de construções era conhecido como um jogo, que tinha suas regras, e era considerado como um dos jogos mais fascinantes e absorventes daquela época.

2.2.1 Construções Elementares

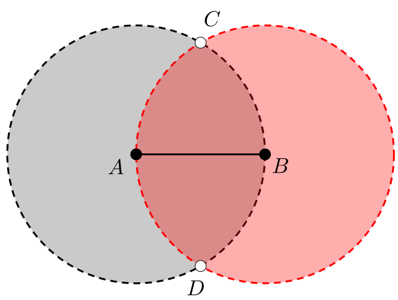
Exibiremos nesta parte, algumas construções elementares utilizando régua e compasso. Estas construções são importantes para compreensão dos números construtíveis.

Construção da Mediatriz de um Segmento de Reta

Consideremos um segmento de reta $\overline{AB}$. Chamamos de mediatriz do segmento $\overline{AB}$ a reta perpendicular a $\overline{AB}$ que passa pelo seu ponto médio. Para construí-la utilizamos os seguintes procedimentos:

(i) Com centros em A e B, traçamos dois círculos de mesmo raio, sendo este raio maior que a medida do comprimento do segmento que vai de A e B até o ponto médio do segmento $\overline{AB}$. Chamaremos de C e D os pontos de intersecção destes os dois círculos.

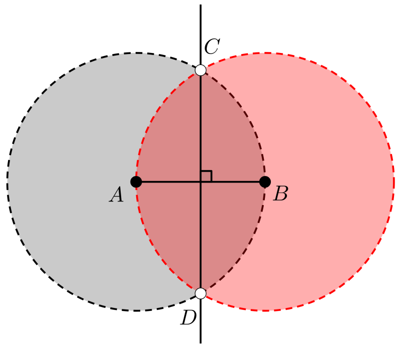
Figura 3 – Círculos centrados em A e B



Fonte: Elaborada pelo autor com base na Referência [1].

(ii) Traçamos a reta que passa pelo ponto C e D. Essa reta é a mediatriz do segmento $\overline{AB}$.

Figura 4 – Mediatriz CD do segmento $\overline{AB}$



Fonte: Elaborada pelo autor com base na Referência [1].

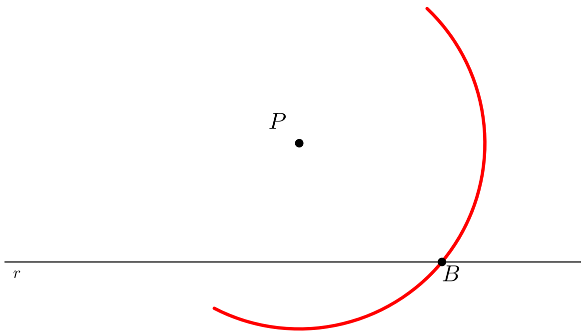
A justificativa é que por construção, ABCD forma um losango, e com isso, suas diagonais são perpendiculares e cortam-se ao meio.

Construção de uma Reta Paralela

Considere uma reta r e um ponto P não pertencente à reta r. Podemos traçar uma reta paralela a r passando por P utilizando os seguintes procedimentos:

(i) Utilizando o compasso centrado em P traçamos um arco de circunferência que intersecte a reta r e obtemos com isso o ponto que chamaremos de B.

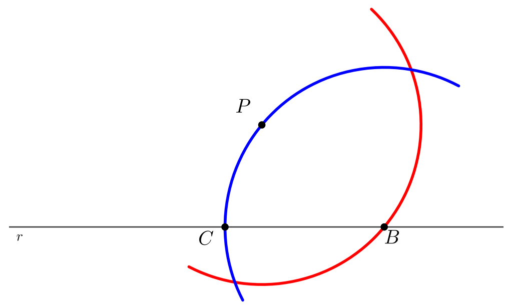
Figura 5 – Arco de circunferência centrado em P e de raio $\overline{PB}$



Fonte: Elaborada pelo autor com base na Referência [1].

(ii) Com centro em B e raio igual ao do arco anterior, traçemos um arco que intersecta r num ponto que chamaremos de C, interior ao arco traçado em (i).

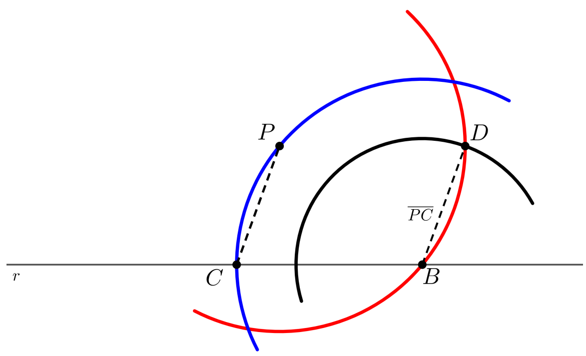
Figura 6 – Arco de circunferência centrado em B e de raio $\overline{BP}$



Fonte: Elaborada pelo autor com base na Referência [1].

(iii) Com centro em B e raio $\overline{PC}$ traçamos um arco que intersecte o arco de circunferência de raio $\overline{PB}$ inicial. Chamaremos de D este ponto.

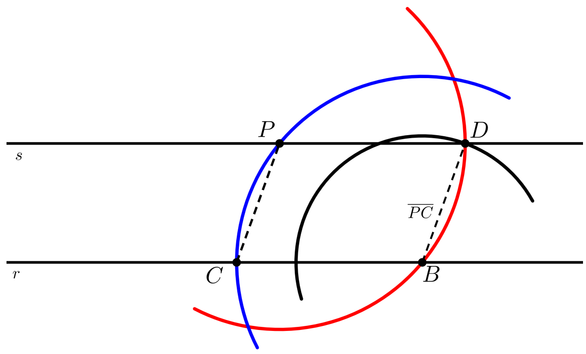
Figura 7 – Arco de circunferência centrado em B e de raio $\overline{PC}$



Fonte: Elaborada pelo autor com base na Referência [1].

(iv) Traçemos a reta s que passa por P e D, ela será a paralela a reta r.

Figura 8 – Reta s paralela à r. ($s \parallel r$)



Fonte: Elaborada pelo autor com base na Referência [1].

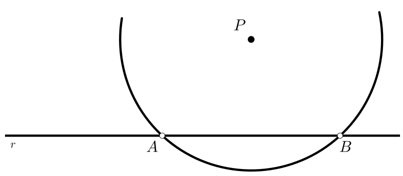
A justificativa é simples, pois da forma como foi feita a construção, pois $\overline{PC} = \overline{BD}$ e $\overline{BC} = \overline{DP}$. Portanto seus lados $\overline{PD}$ e $\overline{CB}$ são paralelos e congruentes.

Construção de uma Reta Perpendicular

Considere uma reta r e um ponto P não pertencente à r. Podemos traçar uma perpendicular a r que passe por P utilizando os seguintes procedimentos:

(i) Com centro em P, traçamos um arco de circunferência que corte a reta r em dois pontos A e B.

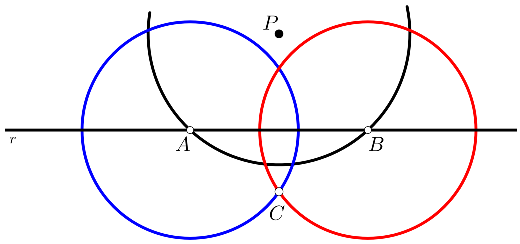
Figura 9 – Arco de circunferência centrado em P



Fonte: Elaborada pelo autor com base na Referência [1].

(ii) Com centros em A e B, traçamos arcos de circunferência que intersectem em um ponto C.

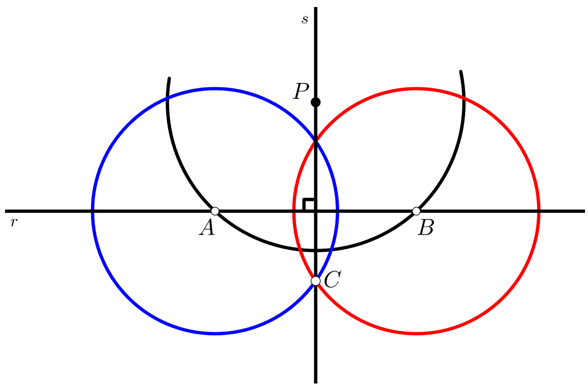
Figura 10 – Arcos de circunferência centrados em A e B



Fonte: Elaborada pelo autor com base na Referência [1].

(iii) Traçamos a reta s, que passa por P e C, que é perpendicular à reta r.

Figura 11 – Reta s perpendicular à r. e que passa por P. $(s \perp r)$



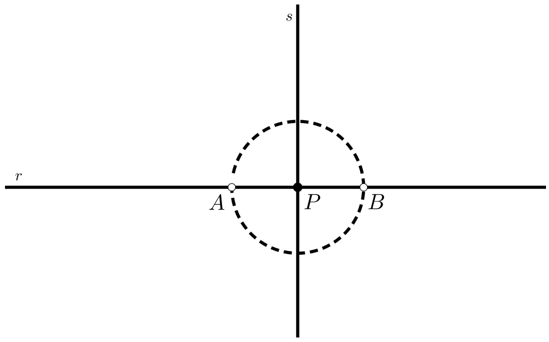
Fonte: Elaborada pelo autor com base na Referência [1].

A justificativa é simples: como $\overline{PA} = \overline{PB}$ e $\overline{CA} = \overline{CB}$, então a reta s é a mediatriz de $\overline{AB}$, e portanto, é perpendicular à r.

Em particular, podemos ter o seguinte caso, um reta perpendicular à uma reta dada tal que o ponto P pertença à reta dada. Neste caso teremos

(i) Com centro em P, traçamos um arco de circunferência que corte a reta r em dois pontos A e B. Note que, neste caso, por construção, o ponto $P \in r$ é ponto médio de $\overline{AB}$.

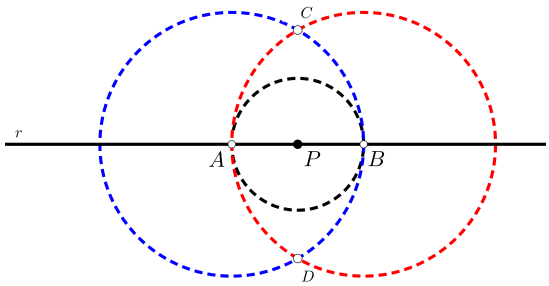
Figura 12 – Arco de circunferência centrado em P



Fonte: Elaborada pelo autor.

(ii) Com centros em A e B, traçamos duas circunferências que se intersectam nos pontos C e D.

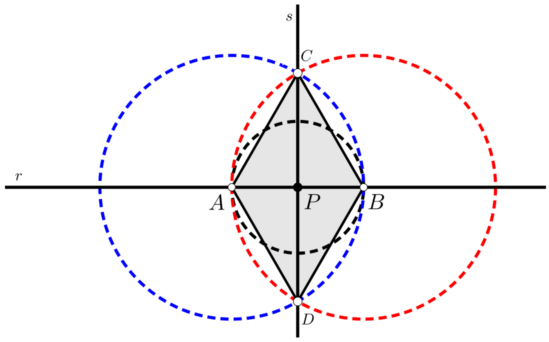
Figura 13 – Arcos de circunferência centrados em A e B



Fonte: Elaborada pelo autor.

(iii) Traçamos a reta s, que passa por C e D, que é perpendicular à reta r e $P \in s$.

Figura 14 – Reta s perpendicular à r. e que passa por P. ($s \perp r$)



Fonte: Elaborada pelo autor.

A justificativa é simples: por construção o quadrilátero $ACBD$ é um losango, logo suas diagonais $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são perpendiculares e intersectando no ponto médio P. Portanto, a reta s é perpendicular à r.

A seguir veremos alguns exemplos de números construtíveis,

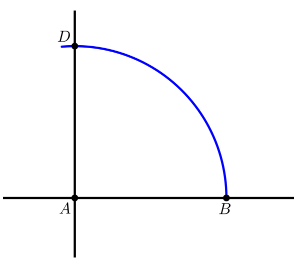
Exemplo 2.2.1. *Vamos começar, construindo a* $\sqrt{2}$.

(i) Queremos mostrar que $\sqrt{2}$ é construtível, para provarmos isso vamos construir um quadrado de lado unitário. Primeiramente desenhamos uma reta e, nela, fixamos o segmento $\overline{AB}$ como sendo a unidade, consequentemente, definimos o primeiro lado do quadrado.

(ii) Agora, pelo ponto A traçamos uma perpendicular à reta AB.

(iii) Pegamos um compasso e, com uma abertura igual ao tamanho do lado do quadrado, faça centro no ponto A e desenhe um arco que intersecte a perpendicular, no ponto D.

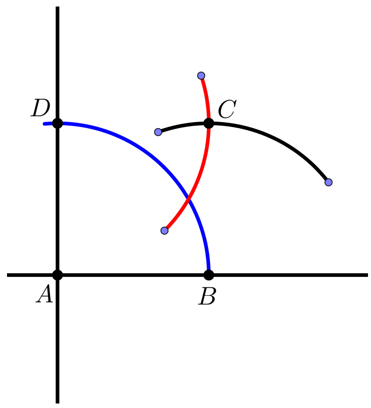
Figura 15 – Arco $\widehat{BD}$ centrada em A



Fonte: Elaborada pelo autor.

(iv) O ponto D já é o terceiro vértice do nosso quadrado, determinando assim o lado $\overline{AD}$. Com o compasso ainda com a abertura igual ao tamanho do lado, e com centro nos pontos D e B, faremos dois arcos que se intersectam no ponto C.

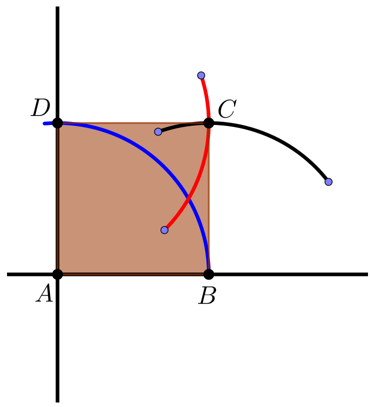
Figura 16 – Arcos centrados em D e B



Fonte: Elaborada pelo autor.

(v) O ponto C é o quarto vértice do quadrado, determinando os outros dois lados, $\overline{DC}$ e $\overline{BC}$.

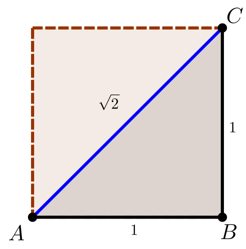
Figura 17 – Quadrado de lado $\overline{AB}$



Fonte: Elaborada pelo autor.

(vi) Por fim, traçamos uma das diagonais, concluímos, por meio do Teorema de Pitágoras, que essa diagonal mede $\sqrt{2}$.

Figura 18 – Triângulo retângulo ABC



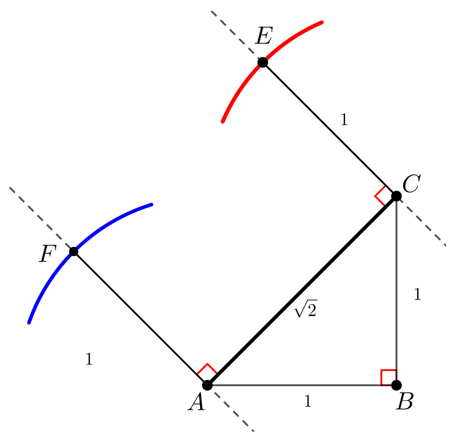
Fonte: Elaborada pelo autor.

Exemplo 2.2.2. *Agora construíremos $\sqrt{3}$, a partir da raiz quadrada de dois $\sqrt{2}$ vista no exemplo anterior.*

(i) A partir do triângulo retângulo obtido no exemplo anterior, construíremos um retângulo sob a hipotenusa, de largura $b = \sqrt{2}$ e altura $h = 1$.

(ii) Pelas extremidades A e C, levantamos retas perpendiculares a $\overline{AC}$. Em seguida, transportamos, com auxílio do compasso, os comprimentos $|\overline{AF}| = |\overline{CE}| = 1$ a partir dos pontos A e C, através de arcos centrados em A e C de aberturas $\overline{AB}$ e $\overline{CB}$, respectivamente, definindo assim, os pontos E e F.

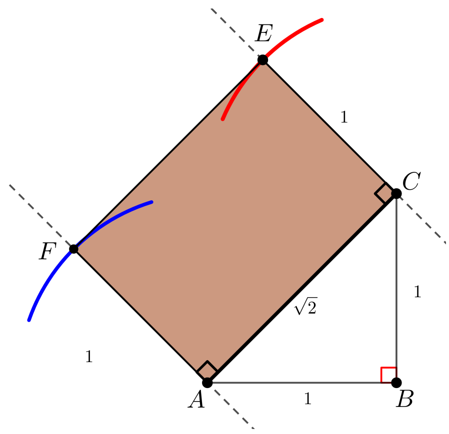
Figura 19 – Arco $\overset{\frown}{BD}$ centrada em A



Fonte: Elaborada pelo autor.

(iii) Teremos a solução unindo os pontos E e F.

Figura 20 – Arcos centrados em D e B



Fonte: Elaborada pelo autor.

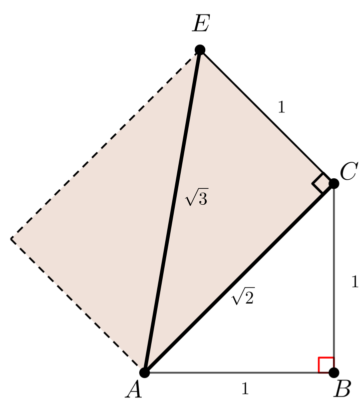
(iv) Por fim, ao obtermos o retângulo, traçamos a diagonal $\overline{AE}$. Novamente usando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo $\triangle ACE$, e consequentemente, nossa diagonal medirá, vejamos a ilustração abaixo:

$$\begin{aligned} |\overline{AE}|^2 &= (\sqrt{2})^2 + (1)^2 \\ &= 2 + 1 = 3 \end{aligned}$$

ou seja,

$$|\overline{AE}|^2 = \sqrt{3}.$$

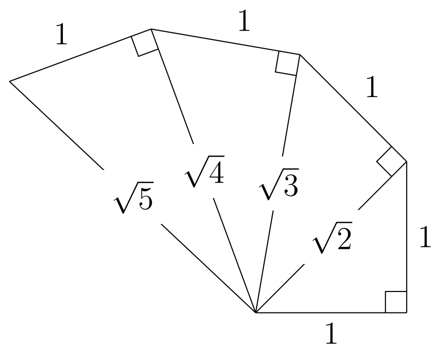
Figura 21 – Triângulo retângulo ACE



Fonte: Elaborada pelo autor.

Exemplo 2.2.3. *Construíremos agora o número irracional* $\sqrt{5}$.

Figura 22 – Construção geométrica da $\sqrt{5}$



Fonte: Elaborada pelo autor com base na Referência [5].

Basta repetimos os passos vistos no exemplo anterior, ao começarmos da $\sqrt{3}$, e com uma sequência finita de passos, obteremos o retângulo, cuja diagonal medirá $\sqrt{5}$.

Entenderemos mais sobre essa construção, e sua história, a partir da próximo capítulo.

3 NÚMEROS CONSTRUTÍVEIS E O LaTeX

3.1 Espiral de Teodoro

Estudaremos neste capítulo, a construção da espiral, de forma manual, e assim, com base em seu contexto histórico do qual falaremos a seguir, observar seus aspectos geométricos principais como triângulos, ângulos. Usaremos como fontes de informação para essa seção, as referências [2], [7], [8], [9].

Definição 3.1.1. *Espirais são curvas planas, geradas por um ponto móvel que gira em torno de um ou dois pontos fixos chamados polos, afastando-se ou aproximando-se deste, de forma regular e progressiva, segundo uma lei determinada.*

3.1.1 Contexto Histórico

O mundo helênico se estruturava em cidades, ou *pólis*, com “status"de pequenos Estados autônomos. Nelas, a partir do final do século VI a.C., surgiu o sistema democrático, no qual o poder se apoiava na comunidade dos cidadães – homens livres, não escravos – que participavam diretamente das decisões. No século V a.C., Atenas consolidou-se como o principal centro econômico e cultural do mundo helênico, transformando-se também no principal exemplo de democracia. O debate público inerente ao sistema democrático estimulou o compartilhamento de conhecimentos e sistemas de pensamento, criando um incentivo para a formação filosófica e cultural de seus cidadãos.

A primeira grande escola filosófica ateniense foi a dos *sofistas*, professores ambulantes que vendiam seus conhecimentos e treinavam cidadãos para os debates que aconteciam nas assembleias públicas. Para maiores informações consulte [7].

Atenas, seria assim, palco da mais decisiva contribuição para estruturação da matemática na Grécia Antiga, dada por Platão. Por volta de $377\,a.C.$, Platão fundou em Atenas uma escola, a *Academia*, que durante um século dominaria a vida filosófica da cidade. A Academia era um espaço destinado ao estudo, pesquisa e ensino da filosofia e da ciência, e talvez tenha sido o primeiro exemplo de instituição de ensino e pesquisa de alto nível.

Segundo [9], Platão atribuía uma importância especial à matemática e a incluiu no rol das disciplinas indispensáveis para a formação intelectual do cidadão. Apesar de não haver evidências de contribuições técnicas de Platão à matemática, no entanto, ele fez de sua Academia o centro de atividade matemática mais importante de seu tempo, contando com matemáticos de destaque entre seus alunos e colaboradores. Platão herdou do filósofo e matemático Pitágoras (por volta de 570 $a.C.$ — por volta de 495 $a.C.$) a ideia de que a matemática estruturava o universo. No entanto, tinha uma concepção mais geométrica, que entrava em contraste com a concepção mais aritmética pitagóricas.

Relata-se que a frase

“ Que não entre aqui aquele que não é geômetra! "

estava incrita sobre o pátio de sua escola, sendo assim, um retrato do lugar de destaque reservado à matemática em seu pensamento.

No tempo de Platão, a reta e o círculo eram figuras geométricas básicas para os geômetras gregos, por isso, criou-se a lenda de que somente eram permitidas soluções que pudessem ser construídas usando exclusivamente a régua e o compasso. O diálogo, que Platão compôs em memória de seu amigo, Theaetetus (em português (Brasil): Teeteto, Cirene, por volta de 500 $a.C.$), contém informações sobre outro matemático a quem Platão admirava e que contribuiu para o desenvolvimento inicial da teoria das grandezas incomensuráveis. Para maiores detalhes sobre a relação de Platão com Teeteto, consulte as referências [7], [8], [9].

Falando da então recente descoberta do que chamamos *irracionalidade de* $\sqrt{2}$, no diálogo Teeteto diz que seu mestre, Theodorus de Cirene (em português (Brasil): Teodoro, Cirene, por volta de 530 $a.C.$) – de quem Teeteto também foi aluno –, tinha sido o primeiro a provar a irracionalidade das raízes quadradas dos inteiros não-quadrados de 3 a 17 inclusive. Não se tem relatos de como ele o fez, nem por que parou na $\sqrt{17}$. Antes de tentarmos responder a tal pergunta vamos formalizar tanto a construção computacional quanto a construção manual, da Espiral de Teodoro, de acordo com o autor e a referência [3].

3.1.2 Construções

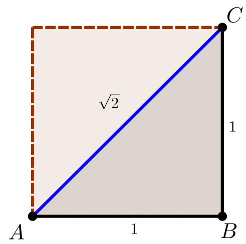
Vamos formalizar agora a construção manual da Espiral de Teodoro.

(i) Sobre uma reta r qualquer, construa o segmento de comprimento 1 (unitário) e marque suas extremidades como os pontos A e B, como sendo uma abertura fixa do compasso.

(ii) Pelo ponto A traçamos uma perpendicular à reta AB.

(iii) Pegamos um compasso e, com uma abertura igual ao tamanho fixado, centrado no ponto B e desenhe um arco que intersecte a perpendicular, no ponto C.

Figura 23 – Espiral de Theodorus com 1 triângulo retângulo

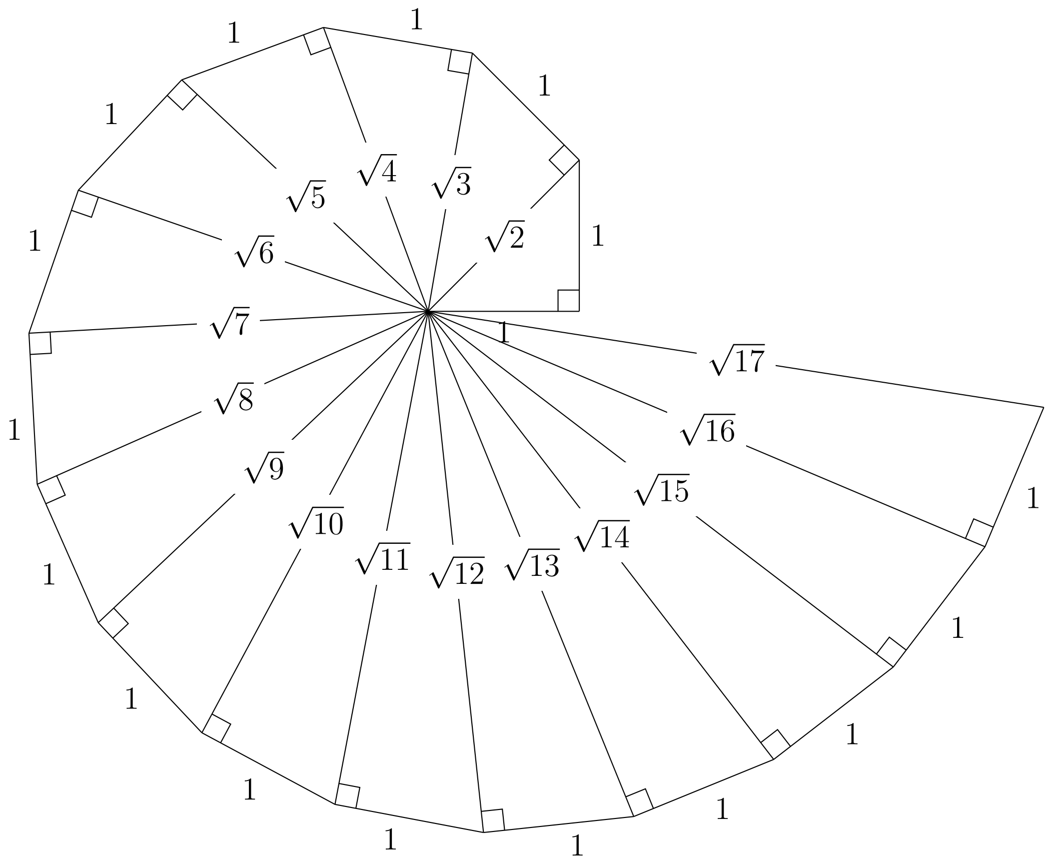


Fonte: Elaborada pelo autor com base na Referência [5].

O segmento $\overline{AC}$ tem comprimento $\sqrt{2}$, como vimos no Exemplo 2.2.1. Podemos continuar a construção e encontrar outros triângulos da sequência a partir do anterior.

(iv) Basta repetirmos os mesmos passos vistos no Exemplo 2.2.2., de forma que, ao generalizarmos, como Teodoro o fazera, obtendo assim: (devido a grande extensão do desenho, exibiremos a espiral na próxima página,)

Figura 24 – Espiral de Theodorus com 16 triângulos retângulos



Fonte: Elaborada pelo autor com base na Referência [1].

Para compartilhamento de informações, divulgaremos na próxima seção desse trabalho os comandos LATEXnecessários para a construção de espirais, como a que vemos acima. Reforçamos ainda, que nosso intuito não está em criar um manual, mas apenas repartir esses comandos para auxiliar outros trabalhos futuros.

3.1.3 Códigos TikZ

Pergunta: Como criar uma ilustração da espiral usando Tikz no LATEX?

A pergunta acima motiva a existência desta seção. Para responder a pergunta em questão consultamos a referência [5].

Para produzir as figuras que vemos acima o leitor deverá inserir os comandos no preâmbulo do seu arquivo LATEX.

```
\usepackage{tikz,ifthen}
\usetikzlibrary{calc}
```

```
\newcommand*{\sqrtspiral}[2][scale=3]{
    \begin{tikzpicture}[#1]
        \def\sqrtlast{#2}
        \coordinate (A) at (0,0);
        \coordinate (B) at (1cm,0);
        \draw (A) edge node[auto, swap] {1} (B);
        \foreach \n in {1,...,\sqrtlast}{
            \ifthenelse{\equal{\n}{\sqrtlast - 1}}
            {
                \def\currentcolor{black}
                \def\currentsqrt{\n}
            }
            {
                \def\currentcolor{black}
                \pgfmathtruncatemacro{\currentsqrt}{\n+1}
            }
            \coordinate (C) at ($(B)!1cm!-90:(A)$);
            \draw[\currentcolor] (A) edge node[fill=white] {$\sqrt{\currentsqrt}$}
            \draw[\currentcolor] (C) edge node[auto] {1} (B);
            \coordinate (w) at ($(B)!4pt!-90:(A)$);
            \coordinate (z) at ($(B)!4pt!0:(A)$);
            \coordinate (t) at ($(w)!4pt!-90:(B)$);
            \draw (w) -- (t) -- (z);
            \coordinate (B) at (C);
        }
    \end{tikzpicture}
}
```

Em seguida, o leitor deve inserir os comandos abaixo, ao longo do documento:

```
\sqrtspiral{1}
\sqrtspiral{2}
\sqrtspiral{3}

\sqrtspiral[scale=2]{9}
```

Perceba que neste conjunto de comandos acima, o comando

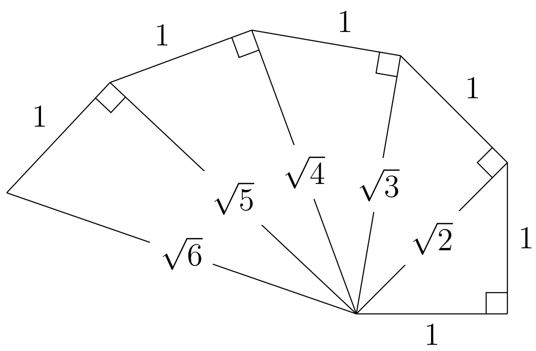
```
\sqrtspiral[scale=2]{9}
```

é o responsável por gerar a espiral de Teodoro até a $\sqrt{10}$. Bem como, o comando entre colchetes

```
[scale=2]
```

será o responsável por gerar a espiral em uma escala 2 vezes maior que a original, proporcionando assim, uma efeito estético mais didático. Isso significa que variações deste comando podem gerar a espiral que diferentes números de triângulos retangulares. Veja alguns exemplos abaixo:

Figura 25 – Espiral de Theodorus com 5 triângulos retângulos



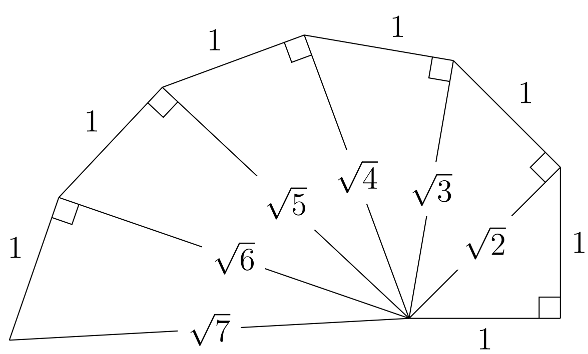
Fonte: Elaborada pelo autor com base na Referência [5].

A figura acima foi gerada usando o comando:

```
\sqrtspiral[scale=2]{5}
```

Ou ainda,

Figura 26 – Espiral de Theodorus com 6 triângulos retângulos



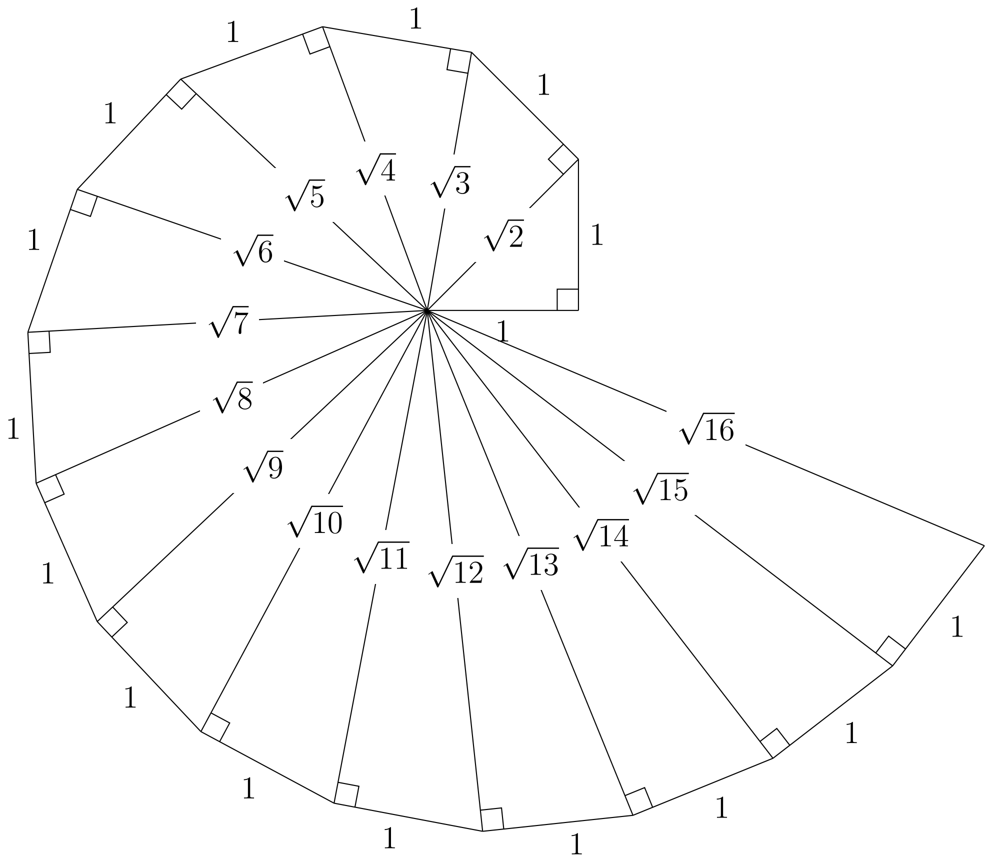
Fonte: Elaborada pelo autor com base na Referência [5].

Esta figura acima foi gerada usando o comando:

```
\sqrtspiral[scale=2]{6}
```

Seguindo esse comportamento podemos obter ótimas ilutrações relacionadas a espiral de Teodoro. Vejamos mais um exemplo: (novamente devido a extensão da ilustração, a mesma se encontrará na próxima página.)

Figura 27 – Espiral de Theodorus com 15 triângulos retângulos



Fonte: Elaborada pelo autor com base na Referência [5].

Por fim, vemos que a figura acima foi gerada usando o comando:

```
\sqrtspiral[scale=2]{15}
```

É importante ressaltar que devido ao algoritmo utilizado para tal construção sempre que quisermos construir uma espiral com n triangulos, deveremos colocar como argumento no comando *sqrtspiral(n-1)*, ou seja, construirmos a espiral com 16 triângulos, é necessário colocarmos como argumento o seu antecessor, ou seja, o número 15.

Agora que revisarmos a sua construção mais afundo, retornemos a pergunta, " Por que Teodoro parou na $\sqrt{17}$?"

Na tentativa de responder a tal pergunta, iniciamos um estudo sobre essa espiral, que nos permite obter algumas conclusões muito interessantes.

(i) A primeira, de Paul Nahim (Berkeley, Califórnia, 26 de novembro de 1940 —), que defendia a ideia de que não havia necessidade, porque, haveria apenas mais voltas obedecendo a mesma estrutura com elementos bem definidos.

(ii) A segunda ideia defendida por Van Der Waerden (Amsterdã, 2 de fevereiro de 1903 — Zurique, 12 de janeiro de 1996), afirma que Teodoro haveria demonstrado de forma geométrica, cada caso separadamente, o primeiro caso até a $\sqrt{17}$, e o segundo caso da raiz de $\sqrt{18}$, onde percebemos pelo Teorema de Pitagóras que

$$(\sqrt{18})^2 = (\sqrt{17})^2 + (\sqrt{1})^2.$$

Assim, não saberemos ao certo qual seria a real intenção de Teodoro. Mas uma curiosidade dessa " lenda", é a sua inspiração, que deu a um filósofo grego Próclus (Constantinopla, 8 de fevereiro de 412 — Constantinopla, 17 de abril de 485):

" ... tudo que é irracional será privado de forma e deve ser mantido escondido."

Ou seja, uma vez que Theodorus parou na $\sqrt{17}$, criou uma espécie de senso comum, de que certos irracionais não poderiam ser construtíveis, e portanto não valeria o esforço de um estudo mais aprofundado, a respeito da construtibilidade dos irracionais.

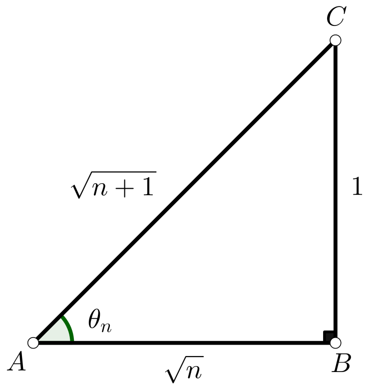
(iii) De acordo com [2], quatro pesquisadores encontraram uma terceira resposta, de que Teodoro não teria condições de encontrar uma espiral perfeita, ou seja, a espiral não fecharia na primeira volta.

Demonstração. Para tal conclusão, vejamos que, de fato, as tangentes dos ângulos internos (θ_n), referentes aos vértices comum ao polo da espiral, para cada triângulo, podem ser obtidas como [1]

$$\theta_n = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

[1] $\arctan(\frac{1}{\sqrt{n}})$ – é a funcão inversa da tangente, ou seja, $\arctan(\frac{1}{\sqrt{n}})$ é o *arco cuja tangente igual a* $\frac{1}{\sqrt{n}}$.

Figura 28 – Triângulo Retângulo qualquer pertencente à espiral



Fonte: Elaborada pelo autor com base na Referência [2].

Agora perceba que ao somarmos os ângulos internos dos primeiros 16 triângulos da espiral, obtermos

$$\begin{aligned} \theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_{16} &= \frac{1}{4} + \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \cdots + \arctan\left(\frac{1}{4}\right) \\ &\approx 6,13\, rad. \end{aligned}$$

Por outro lado, sabemos que uma volta completa possui exatamente $2\pi\, rad$, que é aproximadamente $6,28\, rad$. Assim, a diferença entre uma volta completa e a soma dos ângulos internos será de aproximadamente $0,15\ rad$ ou $27°$.

Portanto, o próximo triângulo terá a unidade como cateto oposto ao ângulo θ_{18}, e $\sqrt{17}$ como cateto adjacente, que resultará em,

$$\theta_{18} = \arctan\left(\frac{1}{3\sqrt{2}}\right) \approx 0,23\ rad\ > 0,15\ rad.$$

Deste fato, vemos que a hipotenusa do triângulo 18, não coincide com o cateto unitário do primeiro triângulo. $\square$

De certo modo, é razoável, os gregos da daquela época, não demonstrassem interesse por estudo mais geral a respeito da construtibilidade dos irracionais, pois adoravam usar a geometria em demonstrções matemáticas, por que possuíam uma atração pelo belo, pela perfeição, assim, reforça a ideia de Próclus, que de fato o irracional é privado de forma, ou seja, os irracionais deveriam ser números puramente abstratos.

Por outro lado, poderíamos interessar-nos em saber, se no desenvolvimento da espiral, há a chance de fecha-se em alguma volta completa, exceto a primeira, ou seja, já que na primeira volta as hipotenusas não se coincidem, será que este fato continua válido para mais voltas?

Essa pergunta, foi então conjecturada, e em 1958, o também matemático Erich Teuffel, provou que por mais voltas que se dê na Espiral de Teodoro, as hipotenusas jamais irão se intersectar.

Assim, percebemos que essa espiral nos permite construir todas as raízes quadradas de inteiros positivo ($\sqrt{n}$). Veremos na próxima seção quais conjuntos númericos, além dos naturais, possuem todos os seus elementos construtíveis.

3.2 Construtibilidade de Números e Pontos no Plano

Nesta seção daremos atenção às quatro operações fundamentais e veremos que, desde que ambos sejam construtíveis então, a soma, subtração, produto e a razão entre números construtíveis são, de fato, construtíveis. Além disso, introduziremos o conceito de ponto construtível no plano.

3.2.1 Operações com Números Construtíveis

Ampliaremos o conceito de número construtível para o plano e mostraremos critérios de construtibilidade e de não-construtibilidade.

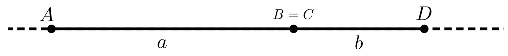
Números construtíveis utilizando régua não graduada e compasso nada mais são do que números que podem ser obtidos apenas com as quatro operações fundamentais e a extração da raiz quadrada. Para isto temos o seguinte resultado:

Teorema 3.2.1. *Se a e b são números reais e positivos construtíveis, então $a+b$, $a-b$ $(a>b)$, $a \cdot b$, $\frac{a}{b}$ são construtíveis.*

Demonstração. Tomemos um segmento de reta cujo comprimento é considerado a unidade e considere dois segmentos de reta de comprimentos construtíveis a e b.

Considere agora um segmento $\overline{AB}$ tal que $|\overline{AB}| = a$ e tracemos sobre a reta AB, um segmento $\overline{CD}$ tal que $|\overline{CD}| = b$ de modo que C coincida com B e esteja entre A e D.

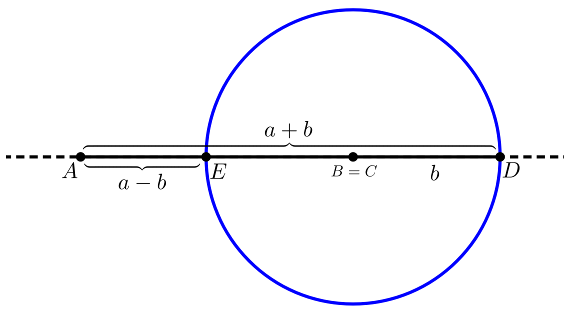
Figura 29 – Segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ da reta AB



Fonte: Elaborada pelo autor com base na Referência [1].

Construimos agora uma circunferência com centro no ponto B e raio b. Chamamos o ponto diferente de D, da intersecção da reta com a circunferência de E. Então, $|\overline{AD}| = a+b$ e $|\overline{AE}| = a - b$, o que mostra que $a + b$ e $a - b$ são números construtíveis.

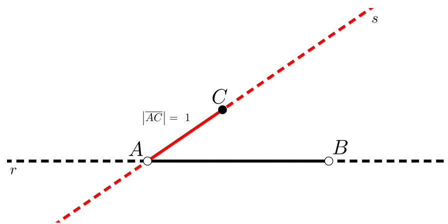
Figura 30 – Circunferência centrada em B de raio b



Fonte: Elaborada pelo autor com base na Referência [1].

Agora, sobre uma reta r tracemos um segmento $\overline{AB}$, de comprimento $|\overline{AB}| = a$. Por A tracemos uma outra reta s concorrente em A com r onde marcaremos o segmento unitário $|\overline{AC}| = 1$.

Figura 31 – Retas concorrentes r e s

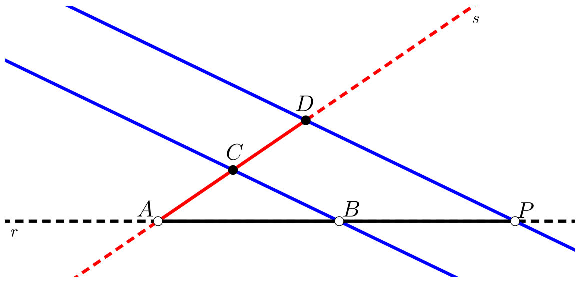


Fonte: Elaborada pelo autor com base na Referência [1].

Em seguida, sob a reta s, marcaremos o segmento $\overline{AD}$, de comprimento $|\overline{AD}| = b$, com c entre A e B. Supomos $b > 1$ (se $b < 1$ a construção será análoga).

Tracemos agora a reta que passa por C e B e tracemos uma paralela a essa reta passando por D e que intersecta r num ponto P.

Figura 32 – Reta paralela a CB



Fonte: Elaborada pelo autor com base na Referência [1].

Usando a semelhança entre os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle APD$ teremos que:

$$\frac{\left|\overline{AC}\right|}{\left|\overline{AD}\right|} = \frac{\left|\overline{AB}\right|}{\left|\overline{AP}\right|},$$

ou seja,

$$\frac{1}{b} = \frac{a}{\left|\overline{AP}\right|}.$$

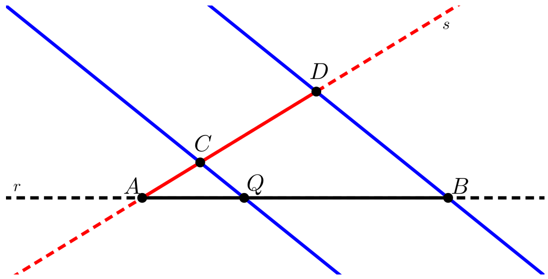
Logo,

$$\left|\overline{AP}\right| = a \cdot b,$$

o que mostra que $a \cdot b$ é construtível.

Agora, utilizando as mesmas condições do caso anterior, construimos uma reta que passa por D e B e construimos uma paralela a reta DB passando por C e intersectando a reta r. A esse ponto de intersecção chamaremos de Q.

Figura 33 – Reta paralela a DB



Fonte: Elaborada pelo autor com base na Referência [1].

Usando a semelhança entre os triângulos $\triangle ACQ$ e $\triangle ADB$ teremos que:

$$\frac{\left|\overline{AC}\right|}{\left|\overline{AD}\right|} = \frac{\left|\overline{AQ}\right|}{\left|\overline{AB}\right|},$$

ou seja,

$$\frac{1}{b} = \frac{\left|\overline{AQ}\right|}{a}.$$

Logo,

$$\left|\overline{AQ}\right| = \frac{a}{b}, \quad \text{com } b > 1,$$

(para $a \leq b$, a demonstração é análoga) o que mostra que $\dfrac{a}{b}$ é construtível. $\square$

Definição 3.2.1. *Um número real é construtível se for zero ou se seu módulo for um número real construtível, isto é $a \in \mathbb{R}$ é construtível quando $|a|$ é construtível.*

Exemplo 3.2.1. *Seja $x \in \mathbb{Z}$ um inteiro positivo construtível, então o seu oposto $(-x) \in \mathbb{Z}$ é construtível. Portanto, todos os números inteiros são construtíveis.*

De fato, por hipótese, x é um inteiro positivo $(x > 0)$ construtível logo,

$$|-x| = x, \; x > 0 \; \text{ é construtível.}$$

Assim, o seu oposto $(-x)$ é construtível.

Exemplo 3.2.2. *Seja $x \in \mathbb{Q}$ um racional positivo. Então, x e seu oposto $(-x) \in \mathbb{Q}$ são construtíveis. Portanto, todos os números racionais são construtíveis.*

De fato, por definição, $-x = -\frac{p}{q}$, com p, q inteiros positivos e $q \neq 0$. Portanto,

$$|-x| = \left|-\frac{p}{q}\right| = \frac{p}{q}.$$

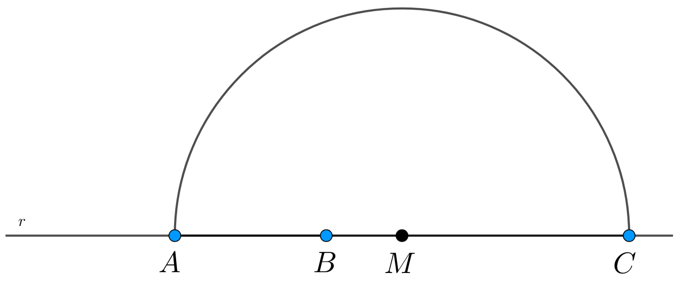
Pelo Teorema 3.2.1, p/q é construtível. Assim, pela Definição 3.2.1, $-p/q$ é construtível.

Teorema 3.2.2. *Se a um número real positivo construtível, então $\sqrt{a}$ é construtível.*

Demonstração. Consideremos uma reta r e um segmento $\overline{AB}$ unitário, sobre esta reta. Consideremos também o ponto C, tal que a medida do segmento $\left|\overline{AC}\right| = a$.

Traçamos agora a semicircunferência com centro no ponto médio M de $\overline{AC}$.

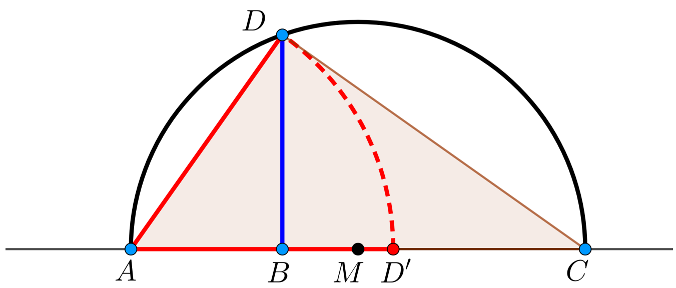
Figura 34 – Semicircunferência centrada em M



Fonte: Elaborada pelo autor com base na Referência [1].

Passando por B, tracemos um segmento de reta $\overline{AD}$, sobre a reta perpendicular s intersectando a semicircunferência no ponto D e construímos o triângulo $\triangle ADC$.

Figura 35 – Triângulo Retângulo ADC



Fonte: Elaborada pelo autor com base na Referência [1].

Considerando que o ângulo determinado pelo vértice D do triângulo $\triangle ADC$ é reto, pois está inscrito numa semicircunferência, e utilizando a semelhança entre o triângulo retângulo $\triangle ADC$ e $\triangle ABD$ temos que:

$$\frac{\left|\overline{AD}\right|}{\left|\overline{AC}\right|} = \frac{\left|\overline{AB}\right|}{\left|\overline{AD}\right|},$$

ou seja,

$$\left|\overline{AD}\right|^2 = a \cdot 1.$$

Logo,

$$\left|\overline{AD}\right| = \sqrt{a},$$

o que mostra que $\sqrt{a}$ é construtível, e com o auxílio do compasso podemos transportar o segmento $\overline{AD}$ para um novo segmento $\overline{AD'} = \sqrt{a}$ de mesmo tamanho, agora sobre a reta r. □

Percebemos que a construção, para obtemos $\sqrt{n}$, feita anteriormente é uma alternativa à construção da espiral de Theodorus, uma vez que nesta construção torna-se mais didática a construção de $\sqrt{n}$.

Exemplo 3.2.3. *Então podemos dizer também que os números irracionais do tipo*

$$5+\sqrt{15},\ 8+\sqrt{\frac{7}{9}+\sqrt{11}},\ \sqrt{5-\frac{2}{7}+\sqrt{13}},\cdots$$

também são construtíveis.

3.2.2 Pontos Construtíveis no Plano

Podemos estender a noção de números construtíveis para o sistema de coordenadas cartesianas, expressando a construtibilidade de um ponto P em termos de suas coordenadas $(a,\, b)$, onde a e b são construtíveis.

Definição 3.2.2. *Um ponto $P = (a,\, b)$ será construtível se, os números a e b forem construtíveis.*

Uma vez que sabemos quando um ponto é construtível, é natural nos perguntarmos se as curvas elementares, como retas e circunferências, são construtíveis. Disso, segue as seguintes definições:

Definição 3.2.3. *Seja r uma reta cuja equação geral é dada por $ax + by + c = 0$, diremos que r é construtível quando os coeficientes a, b e c forem construtíveis.*

Definição 3.2.4. *Seja c uma circunferência centrada no ponto (a, b), e de raio r, ambos construtíveis, cuja equação geral é dada por $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$, diremos que c é construtível quando todos os pontos (x, y), que satisfazem sua equação geral, forem construtíveis.*

Reta que passa por Dois Pontos

Teorema 3.2.3. *Dados dois pontos construtíveis, então a reta que passa por eles é construtíveis.*

Demonstração. De fato que uma reta r que passe por dois pontos $P = (\alpha, \beta)$ e $Q = (\gamma, \delta)$ de coordenadas racionais, pois como vimos no Exemplo 3.2.2 todo número racional é construtível, assim sempre que tomarmos coordenadas com números racionais estaremos lidando com pontos construtíveis do plano. Sabemos que a equação da reta é dada por:

$$a\,x + b\,y + c = 0,$$

onde a, b, c também são construtíveis. O coeficiente angular de reta qualquer que passa por dois pontos $P_1 = (x_1,\, y_1)$ e $P_2 = (x_2,\, y_2)$ é dado por:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1},$$

então o coeficiente angular da reta r será,

$$m = \frac{\delta - \beta}{\gamma - \alpha}.$$

Substituindo na equação geral da reta $y - y_P = m\,(x - x_P)$ obteremos,

$$\begin{aligned}
y - \beta &= \frac{\delta - \beta}{\gamma - \alpha} \cdot (x - \alpha) \\
(\gamma - \alpha) \cdot (y - \beta) &= (\delta - \beta) \cdot (x - \alpha) \\
(\gamma - \alpha)\, y - (\gamma - \alpha)\, \beta &= (\delta - \beta)\, x - (\delta - \beta)\, \alpha \\
-(\delta - \beta)\, x + (\gamma - \alpha)\, y - (\gamma - \alpha)\, \beta + (\delta - \beta)\, \alpha &= 0 \\
(\delta - \beta)\, x - (\gamma - \alpha)\, y + (\gamma - \alpha)\, \beta - (\delta - \beta)\, \alpha &= 0.
\end{aligned}$$

Ao desenvolvermos obtemos,

$$(\delta - \beta)\; x + (\alpha - \gamma)\; y + (\beta\,\gamma - \alpha\,\delta) = 0.$$

Tomando $a = (\delta - \beta)$, $b = (\alpha - \gamma)$ e $c = (\beta\,\gamma - \alpha\,\delta)$, concluímos que a, b e c são resultados de operações elementares dos números construtíveis α, β, γ e δ. Portanto, a, b e c são construtíveis. O que torna a reta r construtível.

□

Retas Concorrentes

Teorema 3.2.4. *Dadas duas retas concorrentes construtíveis, então o ponto de interseção entre elas é construtível.*

Demonstração. De fato, dadas duas retas r e s concorrentes, o ponto de interseção P será a solução do sistema:

$$\begin{cases} r:\ a\,x + b\,y + c = 0 & (I) \\ s:\ a'\,x + b'\,y + c' = 0. & (II) \end{cases}$$

Isolando o termo $a\,x$ em na equação (I) temos:

$$ax = -(b\,y + c).$$

Multiplicando a equação (II) por a e substituindo nessa expressão o termo ax, obtemos

$$\begin{aligned} a'\,(ax) + ab'\,y + ac' &= 0 \\ a'\,[-(b\,y + c)] + ab'\,y + ac' &= 0 \\ -a'b\,y - a'c + ab'\,y + ac' &= 0 \\ (ab' - a'b)\,y + (ac' - a'c) &= 0 \\ y &= -\left(\frac{ac' - a'c}{ab' - a'b}\right) \end{aligned}$$

Substituindo o valor de y em $ax = -(b\,y + c)$, vem:

$$\begin{aligned} ax &= -(b\,y + c) = b\,\left(\frac{ac' - a'c}{ab' - a'b}\right) - c \\ &= \left[\frac{a(c'b) - a'(cb) - a(cb') + a'(cb)}{ab' - a'b}\right] \\ ax &= \frac{a\,(bc' - b'c)}{ab' - a'b} \implies x = \frac{(bc' - b'c)}{ab' - a'b}. \end{aligned}$$

Logo, x e y são construtíveis, já que a, a', b, b', c e c' são construtíveis. Assim o ponto de interseção $P = (x,\, y)$ é construtível. □

Circunferências

Teorema 3.2.5. *Dados dois pontos construtíveis, então a circunferência, centrada em um dos pontos e que passa pelo outro, será construtível.*

Demonstração. De fato, dados os pontos $C = (\alpha, \beta)$ e $P = (\gamma, \delta)$, a circunferência de centro C e raio $r = |\overline{CP}|$, terá equação da forma:

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2.$$

Como $r = |\overline{CP}|$ temos,

$$r = \sqrt{(\gamma - \alpha)^2 + (\delta - \beta)^2} \Longrightarrow r^2 = (\gamma - \alpha)^2 + (\delta - \beta)^2.$$

Então, desenvolvendo a equação da circunferência obteremos:

$$x^2 + y^2 + (-2\alpha)x + (-2\beta)y + (2\alpha\gamma + 2\delta\beta - \gamma^2 - \delta^2) = 0.$$

Tomando $-2\alpha = a$, $-2\beta = b$ e $(2\alpha\gamma + 2\delta\beta - \gamma^2 - \delta^2) = c$, obteremos:

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0,$$

onde a, b e c são construtíveis. Logo, a circunferência é construtível. □

Interseções entre Circunferência e Reta

Teorema 3.2.6. *Dada uma circunferência e uma reta intersectando essa circunferência, ambas construtíveis, então as possíveis interseções serão construtíveis.*

Demonstração. De fato, determinando a intersecção entre uma reta e uma circunferência destes tipos apresentados, devemos obter a solução de um sistema do tipo:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + a\,x + b\,y + c = 0 \\ a'\,x + b'\,y + c' = 0. \end{cases}$$

Se este sistema possuir solução, então esta poderá ser *um ou dois pontos*, com ambas as coordenadas da forma

$$p + q\sqrt{t},$$

onde p, q e t são construtíveis e $t \geq 0$. De fato, pois, se isolarmos y na segunda equação do sistema auferimos que:

$$y = -\frac{a'}{b'}x - \frac{c'}{b'}, \qquad \text{se} b' \neq 0.$$

Substituindo y na primeira equação temos para a abscissa x uma equação da forma:

$$A^2 + B^2 + C = 0,$$

$$\text{onde} \begin{cases} A = (a')^2 + (b')^2, \\ \\ B = 2\,a'\,c' + a\,(b')^2 - b\,b'\,a', \\ \\ C = (c')^2 - b\,b'\,c' + c \end{cases}$$

e cuja solução é:

$$x = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4\,A\,C}}{2\,A}.$$

Analogamente, a coordenada y terá uma fórmula semelhante, onde foram utilizadas apenas adição, subtração, multiplicação, divisão e extração de raízes quadradas dos números construtíveis a, a', b, b', c e c'.
Portanto x e y são construtíveis, ou seja, os possíveis pontos de interseção serão construtíveis.

□

Interseções entre Duas Circunferências

Para obtermos um ponto de interseção de duas circunferências cujas equações possuem coeficientes racionais recaímos em um sistema do tipo,

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + a\,x + b\,y + c = 0 \\ x^2 + y^2 + a'\,x + b'\,y + c' = 0, \end{cases}$$

equivalente ao seguinte sistema,

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + a\,x + b\,y + c = 0 \\ (a - a')\,x + (b - b')\,y + (c - c') = 0. \end{cases}$$

Notando que este sistema é da mesma forma que o anterior, chegamos à conclusão de que se existir solução, então esta também será *um ou dois pontos*, com ambas as coordenadas na forma $p + q\,\sqrt{t}$ onde p, q e t são construtíveis e $t \geq 0$.

Se construirmos novas retas e novas circuferências com os pontos obtidos das interseções e procurarmos novos pontos de interseções estes serão construtíveis ou da forma $a' + b'\,\sqrt{c'}$, onde a', b' e c' são da forma $a + b\,\sqrt{c}$ dos pontos de interseção anteriores.

Exemplo 3.2.4. *Ao realizarmos a primeira etapa obtivemos, por exemplo,* $1 + \sqrt{2}$, *na segunda etapa iremos construir, por exemplo,*

$$4(1 + \sqrt{2}) + 5\sqrt{3(1 + \sqrt{2})}.$$

3.3 Números Não Construtíveis e os Problemas Clássicos da Geometria

Para o leitor que queira se aprofundar no conteúdo, indicamos as referências [1] para as demonstrações dos resultados a seuir e a [11] para a teoria de extensão dos corpos, na qual iremos definir apenas o conceito de número algébrico.

Definição 3.3.1 (**Número Algébrico**). *Em matemática, um número algébrico é qualquer número real ou complexo que é solução de alguma equação polinomial com coeficientes inteiros.*

Em um sentido mais amplo, dizemos que um número é algébrico sobre um corpo quando ele é raiz de um polinômio com coeficientes neste corpo.

Agora, ao observamos que um número construtível será sempre da forma $a + b\sqrt{c}$, concluímos então que todo número construtível é um número algébrico sobre os racionais. Enunciaremos um teorema, cuja a demonstração se encontra em [1], que reforça a afirmação acima.

Teorema 3.3.1. *Se um número real a é construtível, então a é algébrico e o polinômio mônico* [2] *p cujo menor grau que satisfaz $p(a) = 0$ é igual a 2.*

Pelo Teorema acima, podemos dizer que $\sqrt{2}$ é construtível, pois

a) $\sqrt{2}$ é algébrico, ou seja, pois satisfaz a Definição 3.3.1.

b) E o menor grau do polinômio mônico p que satisfaz $p(\sqrt{2}) = 0$ é igual 2.

Já o número $\sqrt[3]{2}$, que também é algébrico, não é construtível, pois o menor grau do polinômio mônico p que satisfaz $p(\sqrt[3]{2}) = 0$ é igual a 3, ou seja, não existe um polinômio mônico de grau igual a 2 tal que $p(\sqrt[3]{2}) = 0$.

Como por este caminho usamos uma Matemática muito avançada e fugiria do objetivo deste trabalho, mostraremos de maneira mais simples a inconstrutibilidade de alguns números. Para dar idéia de que $\sqrt[3]{2}$ não é construtível, vamos mostrar que ela não pode ser da forma $a + b\sqrt{c}$, com a, b e c construtíveis.

Inicialmente vamos supor que $r = \sqrt[3]{2}$ seja construtível. Então $r = \sqrt[3]{2}$ é da forma $a + b\sqrt{c}$, com a, b e c construtíveis. Sendo r irracional, devemos ter $\sqrt{c}$ irracional.

[2] Polinômio mônico - é o polinômio $p = c_n x^n + \cdots + c_0$ cujo coeficiente do termo dominante é igual a 1, ou seja, $c_n = 1$.

Se $r = a + b\sqrt{c}$, com a, b e c construtíveis, então elevando-se ambos os lados ao cubo obteremos:

$$r^3 = a^3 + 3\,a^2\,b\sqrt{c} + 3\,b^2\,c + b^3\,c\sqrt{c}.$$

Como $r^3 = 2$, temos:

$$\begin{aligned} 2 &= a^3 + 3\,a^2\,b\sqrt{c} + 3\,b^2\,c + b^3\,c\sqrt{c}, \\ 2 &= (a^3 + 3\,b^2\,c) + (3\,a^2\,b + b^3\,c)\sqrt{c}, \qquad (1) \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{cases} a^3 + 3\,b^2\,c = 2 \\ 3\,a^2\,b + b^3\,c = 0. \end{cases} \qquad (2)$$

Se $r = a + b\sqrt{c}$ é raiz da equação $r^3 - 2 = 0$, então $r_1 = a - b\sqrt{c}$ também é raiz pois:

$$\begin{aligned} {r_1}^3 &= (a - b\sqrt{c})^3 \\ &= a^3 - 3\,a^2\,b\sqrt{c} + 3\,b^2\,c - b^3\,c\sqrt{c}, \\ &= (a^3 + 3\,b^2\,c) - (3\,a^2\,b + b^3\,c)\sqrt{c} = 2, \end{aligned}$$

já que (2) é satisfeita.

Logo ${r_1}^3 = r^3$ e consequentemente $r_1 = r$, ocorrendo assim, que $b = 0$ e $r = a$, o que é um absurdo, pois $a \in \mathbb{Q}$ e $r \in (\mathbb{R} - \mathbb{Q})$.

Portanto $\sqrt[3]{2}$ não é construtível, e o *problema da duplicação do cubo* é impossível de ser resolvido com régua e compasso, pois o problema da duplicação do cubo consiste em construímos, apenas com régua e compasso, a aresta b de um cubo cujo o volume seja o dobro de um cubo de aresta a dado inicialmente. Em outras palavras,

$$b^3 = 2\,a3$$

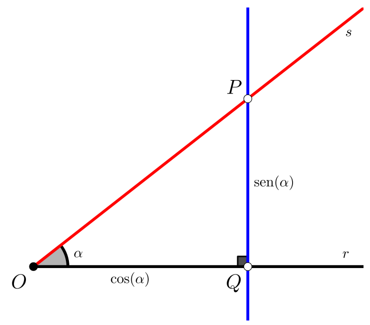
ou seja, $b = \sqrt[3]{2}\,a$, como $\sqrt[3]{2}$ não é construtível, logo a aresta b não é construtível.

Verificaremos agora que é impossível solucionar o problema de triseccionar um ângulo genérico com régua e compasso.

Definiremos um *ângulo construtível* como um ângulo que pode ser construído por régua e compasso. Mostraremos que um ângulo é construtível se, e somente se, seu *cosseno* (ou seu *seno*) for construtível.

Considere um ângulo α e o ponto P, onde $\overline{OP}$ é o segmento unitário. Traçando uma reta perpendicular à r que passa por P obtemos o ponto Q que intersecta r. O segmento $\overline{OQ}$ representa o $\cos(\alpha)$ e o segmento $\overline{PQ}$ representa o $\operatorname{sen}(\alpha)$, conforme a Figura 36 :

Figura 36 – Ângulo construtível



Fonte: Elaborada pelo autor com base na Referência [1].

Tomando por exemplo o ângulo de $60°$. Temos que $\cos(60°) = \frac{1}{2}$, que é racional, e portanto é construtível.

Alguns ângulos podem ser trisseccionados por régua e compasso, ou seja, dado um ângulo qualquer, construímos um outro com um terço de sua amplitude. Mas, se fosse possível a trissecção de qualquer ângulo, então poderíamos construir um ângulo de $20°$, e consequentemente o $\cos(20°)$.

Para mostrar que é impossível construir o ângulo de $20°$ façamos o seguinte. Tome $\alpha = 20°$ na fórmula trigonométrica,

$$\cos(3\,\alpha) = 4\,\cos^3(\alpha) - 3\,\cos(\alpha).$$

Como $\cos(60°) = \frac{1}{2}$ e $3\,\alpha = 60°$ obtemos:

$$\begin{array}{rcl} \cos(60°) & = & 4\,\cos^3(20°) - 3\,\cos(20°), \\ \dfrac{1}{2} & = & 4\,\cos^3(20°) - 3\,\cos(20°), \end{array}$$

Multiplicando por 2 e fazendo $y = \cos(20°)$ obtemos:

$$1 = 8\,y^3 - 6\,y.$$

Substituindo $2y = x$ obtemos:

$$x^3 - 3x - 1 = 0.$$

A referência [1] nos auxilia, com o seguinte fato:

Fato 3.3.1. *Uma equação do terceiro grau com coeficientes racionais só tem raízes construtíveis se ao menos uma delas for racional.*

Se apenas uma delas for racional, as duas outras serão raízes de uma equação do segundo grau também construtíveis. Em outras palavras, ou as três raízes são construtíveis e, nesse caso, pelo menos uma é racional, ou nenhuma é construtível.

De acordo com o resultado acima, as raízes da equação $x^3 - 3x - 1 = 0$ somente serão construtíveis se pelo menos uma delas for racional. Suponhamos então que $x = a/b$, com $b \neq 0$, racional, seja uma raiz. Então,

$$\begin{aligned} \left(\frac{a}{b}\right)^3 - 3\left(\frac{a}{b}\right) - 1 &= 0 \qquad \cdot \left(\frac{b^3}{a}\right) \\ a^2 - 3\,b^2 - \frac{b^3}{a} &= 0 \\ \frac{b^3}{a} &= a^2 - 3\,b^2 \end{aligned}$$

Por esta última expressão, a divide b, já que divide o seu cubo. Como a e b não possuem fatores em comum as únicas alternativas para a são 1 ou -1.

Reescrevendo a expressão obtemos

$$\begin{aligned} \left(\frac{a}{b}\right)^3 - 3\left(\frac{a}{b}\right) - 1 &= 0 \qquad (\cdot\, b^3) \\ a^3 - 3\,b^2\,a - b^3 &= 0 \\ a^3 &= b^3 + 3\,b^2\,a \\ a^3 &= b^2\,(b + 3\,a), \\ \frac{a^3}{b^2} &= b + 3\,a \end{aligned}$$

ou seja, o quadrado de b divide o cubo de a, logo b divide a. Da mesma forma, como a e b não possuem fatores em comum as únicas alternativas para b são 1 ou -1. Uma simples verificação mostra que 1 ou -1. não são raízes.

Portanto não é possível construir o $\cos(20°)$, e com isso, impossível de construir o ângulo de $20°$.

Além disso, a quadratura do círculo é um problema que consiste em construir um quadrado com a mesma área de um dado círculo servindo-se somente de uma régua não graduada e um compasso em um número finito de etapas. Em outras palavras, devemos construir o lado do quadrado tal que

$$l^2 = \pi\, r^2$$

ou seja, $l = \sqrt{\pi}\, r$

Por volta do século XIX provou que π é um número transcendente, isto é, não existe um polinômio com coeficientes racionais não todos nulos dos quais π seja uma raiz. Como resultado disso, π não é construtível.

A transcendência de π estabelece a impossibilidade de se resolver o problema da quadratura do círculo, ou seja, é impossível construir, somente com uma régua não graduada e um compasso, um quadrado cuja área seja rigorosamente igual à área de um determinado círculo.

4 ATIVIDADES PROPOSTAS

Este capítulo propõe atividades para que os professores possam realizar com alunos. Estas atividades têm o intuito de contribuir para a aprendizagem de Geometria e apresentar as construções básicas com o uso do compasso e régua sem escala. É de grande importância no processo de construção geométrica que o professor deixe claro aos alunos que a régua será utilizada somente para traçar retas e que não poderá ser utilizada como instrumento de medição de comprimento, o que desenvolverá nos alunos as habilidades para as quais este capítulo é proposto.

Espera-se que antes da aplicação das atividades aos alunos, todas as construções sejam devidamente exemplificadas e realizadas com o acompanhamento do professor e, se necessário, que os alunos tenham em mãos as descrições do Capítulo 2.

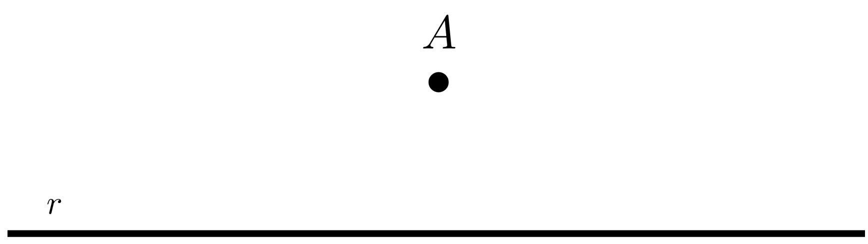
São propostas algumas atividades a respeito de cada construção, sendo que os alunos já tenham noção dos conceitos introdutórios de geometria plana e das construções elementares usando régua e compasso, onde o professor já deve ter separado no mínimo 2 aulas de 45 minutos para esta introdução.

4.1 Atividades para o 6º ano do Ensino Fundamental

No 6° ano do Ensino Fundamental introduzimos as noções básicas de contagem apenas com números naturais. Ainda não podemos fazer demonstrações porque eles não possuem base matemática adequada. Trabalharemos apenas com a noção de que os números naturais são construtíveis. Mostraremos atividades relacionadas a construção de retas paralelas e perpendiculares e também sobre frações. Ilustraremos os exercícios na próxima página.

Exercício 1: Desenhe a reta r e o ponto A nas posições indicadas. Depois, usando régua e compasso, trace a reta s, paralela à reta r, passando pelo ponto A.

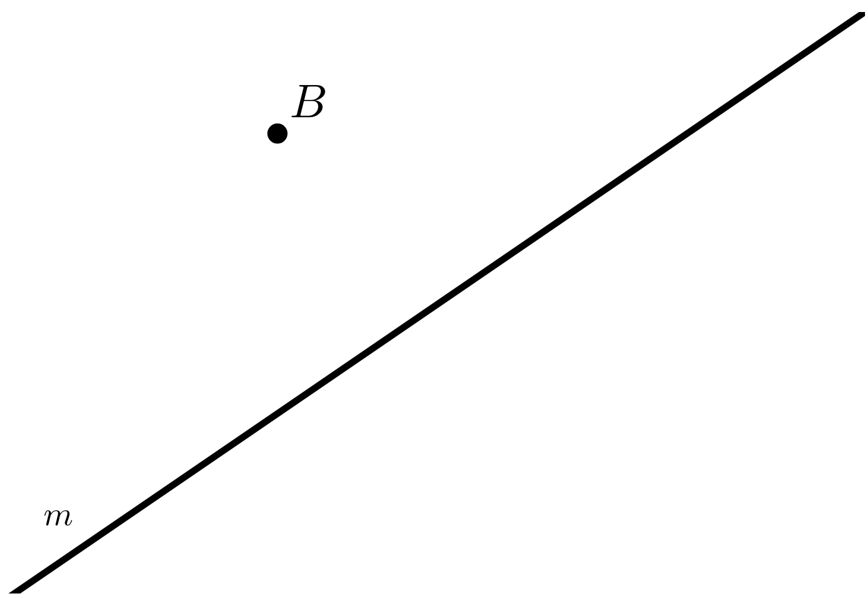
Figura 37 – Exercício sobre retas paralelas



Fonte: Elaborada pelo autor.

Exercício 2: Trace a reta m e marque o ponto B exterior a ela, como na figura abaixo. Depois, usando régua e compasso, trace a reta n, que passa por B e é perpendicular a m.

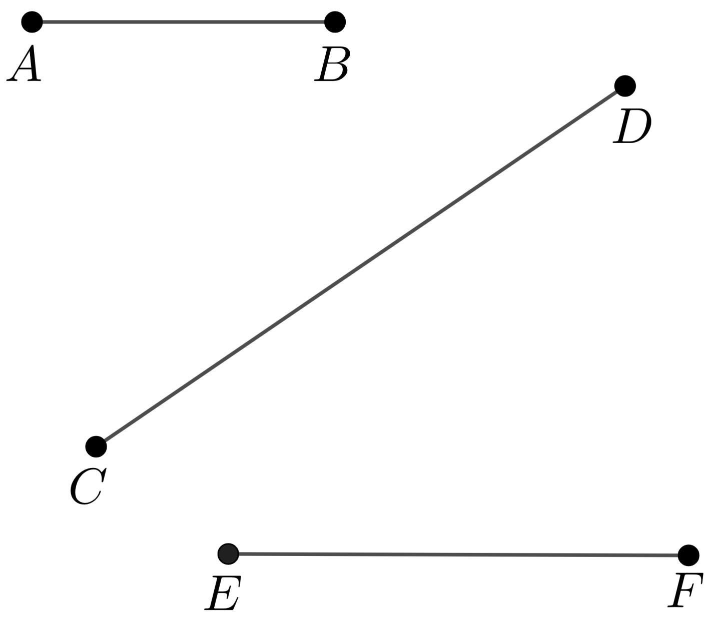
Figura 38 – Exercício sobre retas perpendiculares



Fonte: Elaborada pelo autor.

Exercício 3: Trace as mediatrizes dos segmentos abaixo.

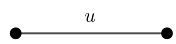
Figura 39 – Exercício sobre mediatrizes



Fonte: Elaborada pelo autor.

Exercício 4: Considere um segmento u. Trace uma reta r e sobre ela trace um segmento $\overline{AB}$ com medida de comprimento $3\,u$, usando agora régua e compasso, obtenha um retângulo $ABCD$ de base $3u$ e altura u.

Figura 40 – Exercício sobre construção de retângulos



Fonte: Elaborada pelo autor.

Comentário: Na atividade, o aluno usará as construções geométricas para determinar as retas perpendiculares e a reta paralela à reta r que formarão o retângulo $ABCD$, e a noção de números construtíveis para determinar os segmentos de comprimentos $3u$ e u formadores da figura. Esta atividade poderia ser estendida para obtenção de quadrados.

Exercício 5: Construa geometricamente a localização do número misto $4\frac{1}{3}$ na reta r dada utilizando apenas régua e compasso. Indique o ponto com sua fração correspondente.

Comentário: Para realizar esta atividade o aluno deve ter conhecimentos prévios sobre frações, números mistos e as construções elementares. Ele deve verificar que:

$$4\frac{1}{3} = 4 + \frac{1}{3} = \frac{13}{3}.$$

Como o segmento unitário foi dado na reta r, é fácil verificar que para localizar o número na reta basta construímos, apenas com o auxílio da régua e do compasso, um segmento de reta $\overline{AB}$ cujo comprimento seja $1/3$, em seguida, adicionamos à $\overline{AB}$ o segmento $\overline{BC}$ de comprimento igual à 4 unidades. Portanto, o novo segmento $\overline{AC}$ medirá exatamente $\frac{13}{3}$. O professor poderá ampliar o nível da questão, onde o aluno terá dificuldades em dividir o segmento unitário em mais de duas ou três partes.

4.2 Atividades para o 7º ano do Ensino Fundamental

Os alunos do 7° ano do Ensino Fundamental devem conhecem os números inteiros, por isso, podemos considerar pontos à esquerda do zero a partir de agora. A reta dos naturais será ampliada para o lado esquerdo. Exibiremos a seguir atividades relacionadas com números inteiros e construções geométricas.

4.2.1 Números Inteiros

Quando se explora a definição dos números inteiros, a grande maioria dos livros didáticos apresentam atividades simples, como por exemplo:

Exercício 6: Copie em ordem decrescente os números que aperecem abaixo.

$$-3,\ -4,\ 9,\ 0,\ -10,\ 15.$$

Exercício 7: Construa uma reta de números inteiros contendo os números abaixo.

a) 0 e -10.

b) 10 e -5.

c) -12 e -18.

d) 23 e -17.

e) 14 e 0.

f) -5 e 5.

g) 3 e -7.

h) -9 e -8.

Agora, use os sinais de $>$, $<$ ou $=$ para fazer a comparação entre os números indicados.

Comentário: Tomando um segmento de reta como unidade padrão, o aluno construirá uma reta de números inteiros e sabendo que essa reta r é ordenada, assim facilmente irá comparar cada ítem. Para tal ele já deve ter a noção prévia do conteúdo, e a construção da reta é para fixar o melhor entendimento.

4.2.2 Construções Geométricas

Como o aluno já tem estudado as construções utilizando régua e compasso, vamos repetir as construções com uso destes materiais. Sugerimos então que as atividades sejam da seguinte maneira:

Exercício 8:

a) Construa duas retas perpendiculares utilizando régua e compasso.

b) Trace uma reta r e marque um ponto P sobre ela. Agora, usando régua e compasso, traçamos a reta s passando por P e perpendicular à r.

c) Trace uma reta r e marque um ponto A fora dela. Use régua e compasso para traçar uma reta s que passe por A e é paralela à r.

Comentário: As atividades sugeridas iram reforçar o aprendizado de paralelismo e de perpendicularismo entre retas e dará mais prática nas construções elementares, que servirão para atividades mais avançadas.

4.3 Atividades para o 8º ano do Ensino Fundamental

Nesta atividade, daremos ênfase aos números racionais e reais que não são inteiros, uma vez que os inteiros já foram revisados. Em seguida, podemos também sugerir outra atividade com áreas de figuras planas. Ainda deixamos como sugestão, que seja construída a reta dos reais através da construção geométrica por régua e compasso, onde teremos com exatidão um ponto para $\sqrt{2}$, e outro ponto $\sqrt{7}$.

4.3.1 Números Reais

Seria bom comentar que nunca conseguiremos obter um segmento de medida π, por isso o número π é marcado na reta com um valor aproximado. Vejamos agora algumas atividades que podem ser incluidas construções com régua e compasso para o 8° ano do Ensino Fundamental:

Exercício 9: Escolhendo um segmento unitário, vamos construir a reta numérica localizando os seguintes números: $-7,\ -3,\ -1,\ 0,\ 1,\ \sqrt{2},\ 2,\ \sqrt{5}$ e 5 usando construções geométricas por régua e compasso.

Comentário: Com o auxílio das construções geométricas por régua e compasso o aluno vai fixar mais a idéia sobre números irracionais e vai aprender a localizar com exatidão o número $\sqrt{n}$, com $n \in \mathbb{N}$, verificando que nem sempre será um número racional, mas que podemos construir um segmento com sua medida.

Seria bom fazer comentários de que existem números que não são marcáveis na reta numérica, dando a definição de números construtíveis e dando exemplos, sem demonstrações, de números não construtíveis.

O professor pode optar também em mostrar a espiral pitagórica, que é um processo prático para localizar irracionais na forma $\sqrt{n}$, com $n \in \mathbb{N}$. Alguns livros já mostram de maneira bem mais simples esse processo.

4.3.2 Área de Regiões Planas

Muitas atividades sobre áreas de regiões planas são apresentadas nos livros de 8° ano do Ensino Fundamental. A maioria são de forma simples e necessita apenas do cálculo algébrico. Vejamos a próxima atividade:

Exercício 10: Determine a medida e desenhe:

a) do lado de uma região quadrada com 90 cm^2 de área.

b) da altura de uma região triangular com 5 cm de base e área $9,5$ cm^2 de área.

c) da altura de uma região determinada por um trápezio na qual a área é de 55 dm^2, a base maior maior mede 15 e a base menor é 5 dm a menos do que a base maior.

Comentário: Para resolver esta atividade o aluno deverá resolver algebricamente usando a fórmula que calcula a área quadrangular e achará como resposta que a medida do lado é um número irracional.

Para desenhar então, no item **(a)** o quadrado cujo lado mede $3\sqrt{10}$, ele deve tomar como segmento unitário um segmento cuja medida seja 1 cm e através da construção geométrica por régua e compasso determinar um segmento de medida $3\sqrt{10}$ cm. Por fim, usando as construções elementares, deverá traçar retas perpendiculares e paralelas até desenhar um quadrado de lado $3\sqrt{10}$ cm.

4.4 Atividades para o 9º ano do Ensino Fundamental

Ao chegar no último ano do Ensino Fundamental o aluno já tem muita base em construções geométricas, isso considerando que ele veio trabalhando com elas desde o 6° ano.

O professor tem um amplo leque de conteúdos que permitem aplicar as construções geométricas. Exibiremos atividades de localização de números irracionais na reta.

Exercício 11: Construa os seguintes números:

a) $\sqrt{2}$.

b) $\sqrt{3}$.

c) $\sqrt[4]{2}$.

Vamos agora construir números da forma $a + b\sqrt{c}$, com $a, b, c \in \mathbb{Q}$. Já sabemos como construir a soma, o produto, o quociente e também raízes quadradas, quartas, oitavas e assim por diante, de números construtíveis. Vamos agora usar essas operações para construir números da forma $a + b\sqrt{c}$, com $a, b, c \in \mathbb{Q}$ (Consequentemente, $\sqrt{c}$ também é costrutível).

Tais construções nos levam a entender a construção de números dessa forma, onde a, b, c são também da forma $p + q\sqrt{t}$, com $p, q, t \in \mathbb{Q}$. Note que se continuarmos, esse processo se repete indefinidamente. Como as construções desses números envolvem construções anteriormente realizadas, ou seja, os procedimentos são praticamente os mesmos, vamos apenas apresentar a atividade resolvendo um deles e sugerindo outros como atividades.

Porém, lembremos que para construir $2\sqrt{5}$, por exemplo, basta construir os dois números, 2 e $\sqrt{5}$, separadamente e depois multiplicá-los ou simplesmente, somar $\sqrt{5}$ duas vezes.

Exercício 12: Construa os seguintes números:

a) $\sqrt{2 + \sqrt{5}}$

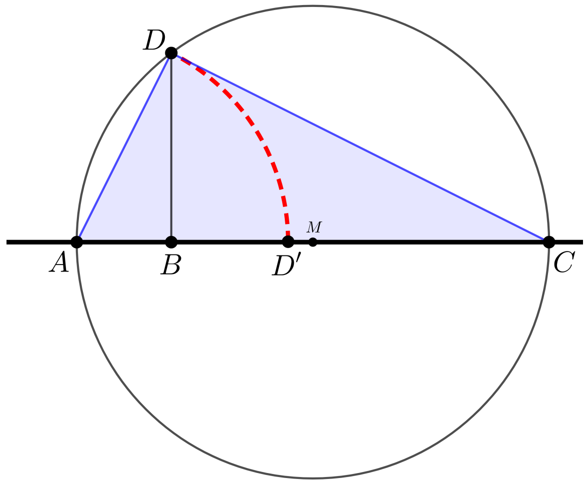
Inicialmente vamos construir a $\sqrt{5}$, com o auxílio do software GeoGebra.
Descrição:

- Fixando o segmento de comprimento $|\overline{AB}| = 1$ unitário, através desse segmento traçamos a reta AB.
- Sobre a reta AB, traçamos o segmento $\overline{BC}$ tal que $|\overline{BC}| = 5$.
- Fixando o segmento $\overline{AM}$, como ponto do médio do segmento $\overline{AC}$, com o compasso traçamos uma semi-circunferência centrada em M de abertura igual ao comprimento do segmento $\overline{MC}$.
- Agora, construímos uma reta perpendicular à reta AB, em seguida, considere o ponto D, como sendo a interseção entre a reta perpendicular e a semi-circunferência. Perceba que, o triângulo $\triangle ADC$ é retângulo no vértice D, por outro lado, o triângulo $\triangle ABD$ também é retângulo no vértice B, decorre da semelhança entre os triângulos $\triangle ADC$ e $\triangle ABD$ que

$$\begin{aligned} \frac{\overline{AD}}{\overline{BC}} &= \frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} \\ \left(\overline{AD}\right)^2 &= 1 \cdot 5 \\ \overline{AD} &= \sqrt{5}. \end{aligned}$$

- Por fim, com o auxílio do compasso, transferimos para a reta AB um segmento AD' cujo o comprimento é o mesmo de AD. Observe a ilustração abaixo:

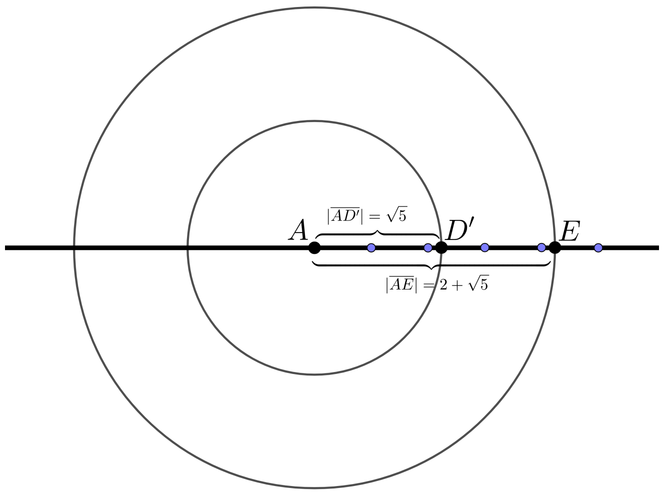
Figura 41 – Exercício sobre a construção de $\sqrt{5}$



Fonte: Elaborada pelo autor com base na Referência [3].

Notamos que uma vez o comprimento do segmento $\overline{AD'}$ medindo $\sqrt{5}$, podemos facilmente construir $2+\sqrt{5}$, basta fixamos o compasso no ponto D' e com uma abertura de comprimento igual a 2 unidades, determinamos o ponto E tal que $|\overline{D'E}| = 2$, portanto o segmento $\overline{AE}$ mede $2+\sqrt{5}$, vejamos a ilustração abaixo:

Figura 42 – Exercício sobre a construção de $2+\sqrt{5}$



Fonte: Elaborada pelo autor com base na Referência [3].

Finalmente, vamos construir a $\sqrt{2+\sqrt{5}}$.

Descrição:

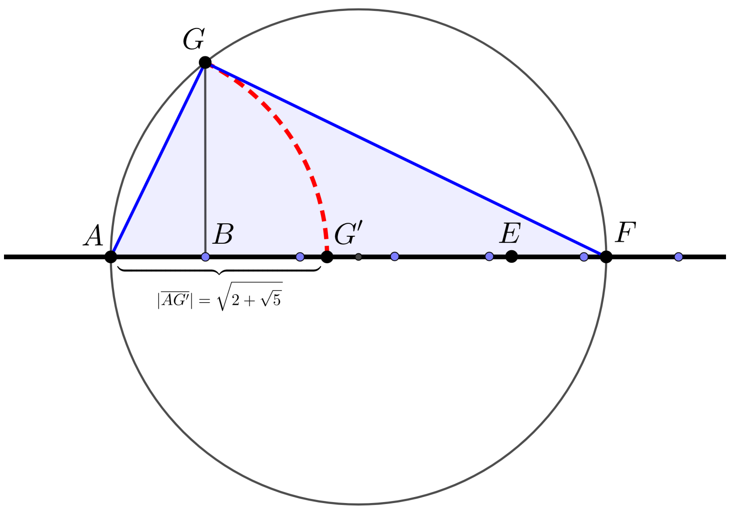
- Sobre a reta AB, traçamos o segmento $\overline{BF}$ tal que $|\overline{BF}| = 2+\sqrt{5}$.

- Fixando o segmento $\overline{AM'}$, como ponto do médio do segmento $\overline{AF}$, com o compasso traçamos uma semi-circunferência centrada em M' de abertura igual ao comprimento do segmento $\overline{MF}$.
- Agora, construímos uma reta perpendicular à reta AB, em seguida, considere o ponto G, como sendo a interseção entre a reta perpendicular e a semi-circunferência. Perceba que, o triângulo $\triangle AGF$ é retângulo no vértice G, por outro lado, o triângulo $\triangle ABG$ também é retângulo no vértice B, decorre da semelhança entre os triângulos $\triangle AGF$ e $\triangle ABG$ que

$$\begin{aligned}\frac{\overline{AG}}{\overline{BF}} &= \frac{\overline{AB}}{\overline{AG}}\\ \left(\overline{AG}\right)^2 &= 1\cdot(2+\sqrt{5})\\ \overline{AG} &= \sqrt{2+\sqrt{5}}.\end{aligned}$$

- Por fim, com o auxílio do compasso, transferimos para a reta AB um segmento AG' cujo o comprimento é o mesmo de AG. Observe a ilustração abaixo:

Figura 43 – Exercício sobre a construção de $\sqrt{2+\sqrt{5}}$



Fonte: Elaborada pelo autor com base na Referência [3].

Com base no exemplo acima, construa os números irracionais abaixo:

b) $1+\sqrt{2}$.

c) $5+\sqrt{3+\sqrt{7}}$.

REFERÊNCIAS

JÚNIOR, L. P. S. **Construções Geométricas Por Régua e Compasso e Números Construtíveis**. Trabalho de Conclusão de Curso – Departamento de Matemática, UFCG, Campina Grande, 2013.

JÚNIOR, E. M. G. **Aspectos Computacionais na Geometria da Espiral de Teodoro**. Dissertação de Mestrado - Departamento de Matemática, UFPB, João Pessoa, 2015.

ALVES, J. D. **Números Construtíveis e Construções Geométricas**. Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT)- Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2020.

GUERRA, V. **Impossibilidades em Construções Geométricas: Aspectos Históricos e Matemáticos.** Disponível em: < http://www.dm.ufscar.br/dm/attachments/article/5vanessaguerraTcc2011.pdf >. Acesso em 18 de agosto de 2021.

The spiral of roots in tik. Disponível em: < https://tex.stackexchange.com/questions/155087/the-spiral-of-roots-in-tikz >. Acesso em 20 de agosto de 2021.

ROONEY, A. **A História da Matemática Desde a Criação da Pirâmides até a Exploração do Infinito.** Editora M. Books, São Paulo, 2012.

EVES, H. **Introdução a História da Matemática.** Tradução de Higino H. Domingues. Campinas, São Paulo: Unicamp, 1994.

ROQUE, T. **História da Matemática: Uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas.**

BOYER, C. B. **História da Matemática** Tradução de Elsa F. Gomide. São Paulo: Universidade de São Paulo (USP), 1974.

WAGNER, E. **Construções Geométricas.** Com a colaboração de João Paulo Carneiro. Coleção do Professor de Matemática. SBM, 1993.

GONÇALVES, A. **Introdução à Álgebra.** 5ª Edição. IMPA, Rio de Janeiro, 2008.

HAHN, H. K. **A distribuição ordenada de números naturais na espiral de raiz quadrada.** arXiv : 0712.2184 .

NAHIN, P. J. (1998), **An Imaginary Tale: The Story of the Square Root of Minus One.** Princeton University Press, p. 33, ISBN 0-691-02795-1.

DYDE, S. W. (1899), **The Theaetetus of Plato.** Princeton University Press, p. 86-87.

DANTE, L.R. **Tudo é Matemática.** 2ª Edição. Editora Ática, São Paulo, 7ª Série, 2007.