

José Hugo Alves Mascena

# **Sistemas dinâmicos e caos: do clássico ao quântico**

João Pessoa - PB

2021, Novembro

José Hugo Alves Mascena

## **Sistemas dinâmicos e caos: do clássico ao quântico**

Trabalho de Conclusão de Curso, apresentado à disciplina Trabalho de Conclusão de Curso, do curso de Bacharelado em Física do Departamento de Física, do Centro de Ciências da Natureza, da Universidade Federal da Paraíba.

Universidade Federal da Paraíba - UFPB

Centro de Ciências da Natureza

Departamento de Física

Orientador: Jorge Gabriel Gomes de Souza Ramos

João Pessoa - PB

2021, Novembro

**Catálogo na publicação**  
**Seção de Catalogação e Classificação**

M379s Mascena, Jose Hugo Alves.

Sistemas dinâmicos e caos : do clássico ao quântico  
/ Jose Hugo Alves Mascena. - João Pessoa, 2021.  
90 p. : il.

Orientação: Jorge Gabriel Gomes de Souza Ramos.  
TCC (Graduação/Bacharelado em Física) - UFPB/CCEN.

1. Sistemas dinâmicos. 2. Sistemas não lineares. 3.  
Caos. 4. Teoria das matrizes aleatórias. I. Ramos,  
Jorge Gabriel Gomes de Souza. II. Título.

UFPB/CCEN

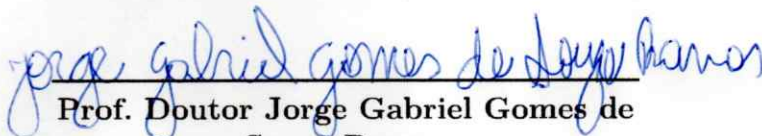
CDU 530.162(043.2)

José Hugo Alves Mascena

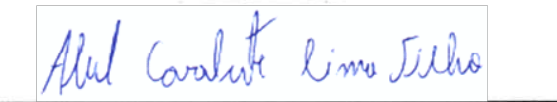
## Sistemas dinâmicos e caos: do clássico ao quântico

Trabalho de Conclusão de Curso, apresentado à disciplina Trabalho de Conclusão de Curso, do curso de Bacharelado em Física do Departamento de Física, do Centro de Ciências da Natureza, da Universidade Federal da Paraíba.

Trabalho aprovado. João Pessoa - PB, 19 de novembro de 2021:

  
Prof. Doutor Jorge Gabriel Gomes de  
Souza Ramos  
Orientador

  
Prof. Doutor Marcio Medeiros Soares  
Examinador

  
Prof. Doutor Abel Cavalcante Lima  
Filho  
Examinador

João Pessoa - PB  
2021, Novembro

# Agradecimentos

Primeiramente agradeço ao Senhor que do nada fez existir tudo que há, e pessoalmente leva em consideração cada um de nós e me permitiu realizar esse curso e tem me sustentado até agora, e pela salvação em Cristo Jesus que dá sentido à todas as coisas.

Agradeço ao meus pais, Maria Selma e Francisco de Assis, por terem me apoiado em cada momento dessa empreitada mesmo que receosos em primeiro momento quanto a minha escolha. Por terem me dado a liberdade e a motivação para seguir meus sonhos, e contribuído em cada instante para que mesmo em meio ao desânimo eu não desistisse.

À Eva Magalhães, minha namorada, que tem me suportado e apoiado em meio às dificuldades da produção desse trabalho, e que tem sido uma companheira valiosa nos momentos difíceis e nos alegres.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Jorge Gabriel Gomes de Souza Ramos, por sua contribuição para o meu desenvolvimento acadêmico, por seu direcionamento nos estudos e por ter me ajudado a encontrar uma área de interesse científico e a contemplar a física com mais paixão.

Aos membros da banca examinadora, Prof. Dr. Marcio Medeiros Soares e Prof. Dr. Abel Cavalcante Lima Filho, por aceitarem o convite de participar de tão importante momento, por suas generosas avaliações e por suas sugestões e contribuições ao trabalho.

Aos meus amigos e colegas da turma 2017.1 do bacharelado de Física, com quem dividi horas valiosas de estudo e trabalho, de valiosas discussões, e certamente de valiosas descontrações. Que dividiram as lutas e tornaram a jornada um pouco mais fácil.

Aos amigos e colegas da Cru UFPB, por também compartilharem a jornada de certa forma, por fornecerem um espaço de descanso dos assuntos acadêmicos em meio a universidade, pela comunhão e pelo partilhar da fé cristã nesse local. Por me permitirem lembrar que muito mais há além do mundo acadêmico

E a todos aqueles, que de alguma forma contribuíram minoritariamente nessa jornada.

Muito Obrigado!

*“Os céus declaram a glória de Deus  
e o firmamento anuncia a obra das suas mãos.”  
(Bíblia Sagrada, Salmo 19.1)*

# Resumo

Na segunda metade do século XX, um conjunto de avanços em diversas áreas da ciência, catalisados pela invenção do computador moderno, resultou no surgimento da Teoria do Caos. O grande marco para esse desenvolvimento foi o trabalho de Edward Lorenz, desenvolvido a partir de seus estudos em modelagem atmosférica, e que tinha com uma das bases o método geométrico de análise desenvolvido por Poincaré.

Pouco tempos depois, ainda no início na década de 1970, Gutzwiller, resolveu a questão da quantização de sistemas caóticos por meio de sua fórmula do traço, e na década seguinte, foi introduzido o formalismo das Matrizes Aleatórias a abordagem do Caos Quântico.

Apesar de hoje compor uma área de estudo interdisciplinar, tanto o Caos quanto o próprio estudo de sistemas dinâmicos e a não linearidade, tem suas origens mais remotas na física.

Por meio desse trabalho iremos discutir como são representados os sistemas dinâmicos na física por meio do formalismo da mecânica clássica, que fornece espaço para a análise geométrica de sistemas dinâmicos em gerais. E verificaremos como surge Caos determinístico a partir de um sistema de pêndulo forçado e amortecido, e introduzir brevemente o Caos Quântico por meio da teoria das Matrizes Aleatórias.

**Palavras Chaves:** Sistema Dinâmicos. Não-Linearidade. Caos Clássico. Caos Quântico.

# Abstract

In the second half of the 20th century, a set of advances in various areas of science, catalyzed by the invention of the modern computer, resulted in the emergence of Chaos Theory. The great milestone for this development was the work of Edward Lorenz, developed from his studies in atmospheric modeling, and which he had with one of the bases the geometric method of analysis developed by Poincaré.

Shortly thereafter, in the early 1970s, Gutzwiller resolved the issue of quantization in chaotic systems through his trace formula, and in the following decade, the Random Matrices formalism was introduced to the Quantum Chaos approach.

Despite being part of an interdisciplinary field of study today, both Chaos and the study of dynamical systems and nonlinearity have their earliest origins in physics.

Through this work, we will discuss how dynamical systems are represented in physics through the formalism of classical mechanics, which provides space for the geometric analysis of dynamical systems in general. And we will see how deterministic Chaos arises from a forced and dampened pendulum system, and briefly introduce Quantum Chaos through the Random Matrix Theory.

**Key-words:** Dynamical Systems. Nonlinearity. Classical Chaos. Quantum Chaos.



# Lista de ilustrações

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |    |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Figura 1 – Retrato de fase de $f(x) = \sin x$ . Fonte: [16]. . . . .                                                                                                                                                                                                                                              | 38 |
| Figura 2 – Retrato de fase do oscilador não linear, $f(x) = \omega - a \sin x$ . Fonte: [16]. . . . .                                                                                                                                                                                                             | 40 |
| Figura 3 – Retrato de Fase e Campo Vetorial do Oscilador Harmônico Simples. Fonte: Autor . . . . .                                                                                                                                                                                                                | 42 |
| Figura 4 – <b>Tipos de ponto fixos para um sistema linear as trajetórias ao redor desses pontos.</b> Podemos identificar o tipo de estabilidade em cada ponto fixo, analisando apenas a direção de cada trajetória. Fonte: Autor . . . . .                                                                        | 43 |
| Figura 5 – Classificação de pontos fixos num sistema dinâmico. Fonte: [16] . . . . .                                                                                                                                                                                                                              | 46 |
| Figura 6 – Bifurcação Sela-nó no espaço de parâmetros. Fonte: [16] . . . . .                                                                                                                                                                                                                                      | 49 |
| Figura 7 – Bifurcação Transcrítica no espaço de parâmetros. Fonte: [16] . . . . .                                                                                                                                                                                                                                 | 50 |
| Figura 8 – Bifurcação Forquilha no espaço de parâmetros. Fonte:[16] . . . . .                                                                                                                                                                                                                                     | 51 |
| Figura 9 – <b>Oscilador de Van der Pol</b> $\mu = 1$ . A partir do campo vetorial, é possível ver que as trajetórias no espaço de fase tendem a ir para o Ciclo Limite, representado no retrato de fase. Fonte: Autor . . . . .                                                                                   | 52 |
| Figura 10 – <b>Diagrama de forças para o pêndulo forçado e amortecido.</b> Nele atuam três forças, a atração gravitacional constante, a força de amortecimento proporcional à velocidade e uma força motriz, com dependência explícita no tempo. . . . .                                                          | 55 |
| Figura 11 – <b>Gráfico da evolução temporal do ângulo <math>\phi</math>.</b> A parte de um transiente quase imperceptível no começo, o gráfico produzido é o mesmo. Fonte: Autor . . . . .                                                                                                                        | 57 |
| Figura 12 – <b>Gráfico da evolução temporal da posição <math>\phi</math> para o parâmetro <math>\gamma = 0.9</math>.</b> A aproximação fornecida pela a equação [5.15] apesar de ajudar a compreender o comportamento do sistema não é suficiente para produzir gráfico semelhante para esse coeficiente. . . . . | 59 |
| Figura 13 – <b>Evolução temporal de <math>\phi(t)</math> para <math>\gamma = 1.06</math>.</b> A fase transiente parecer acabar no décimo ciclo, somente após cerca de 30 ciclos o movimento se torna periódico. Fonte: Autor . . . . .                                                                            | 61 |
| Figura 14 – <b>Evolução temporal de <math>\phi(t)</math> para <math>\gamma = 1.077</math>.</b> Após a fase transiente, o sistema chegará num estado estável, com período duplo. Melhor observado no atrator que evolui ao longo do eixo x. Fonte: Autor . . . . .                                                 | 61 |
| Figura 15 – <b>Evolução temporal de <math>\phi(t)</math> para <math>\gamma = 1.077</math>.</b> Diferentemente dos casos anteriores onde o sistema possuía atratores com o mesmo período, nesse caso temos atratores com diferente quantidade de períodos. Fonte: Autor . . . . .                                  | 62 |

|                                                                                                                                                                                                                                                                                      |    |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Figura 17 – <b>Diagrama de Bifurcação do Mapa Logístico.</b> O mapa logístico é um dos sistemas dinâmicos mais simples a exibir Caos, e cascata de duplicação de períodos. Fonte: Autor . . . . .                                                                                    | 63 |
| Figura 18 – <b>Diagrama de Bifurcação do Pêndulo Forçado e Amortecido no intervalo <math>1.06 &lt; \gamma &lt; 1.90</math></b> Podemos ver claramente a rápida evolução de um sistema de estado estável e periódico, para um sistema caótico. Retirado de [17] . . . . .             | 64 |
| Figura 19 – <b>Duas trajetórias temporais de <math>\phi(t)</math>, com uma diferença de <math>0.00001rad</math></b> Mesmo com uma diferença pífia nos valores das condições iniciais, o sistema rapidamente dá origem a duas trajetórias completamente diferentes. . . . .           | 65 |
| Figura 20 – <b>Evolução temporal da diferença entre dois sistemas com uma diferença de <math>0.00001rad</math> na posição inicial.</b> As trajetórias do sistema rapidamente divergem entre si. . . . .                                                                              | 66 |
| Figura 21 – <b>Diagrama de Bifurcação completo para o Pêndulo Forçado e Amortecido</b> É possível notar que o sistema possui intervalos de Caos e estabilidade distintos daqueles já apresentados no diagrama anterior. . . . .                                                      | 69 |
| Figura 22 – <b>Descrição da evolução temporal do Sistema por meio do espaço de Fase.</b> Apesar do espaço de fase não mostrar explicitamente a variável temporal, a análise nesse espaço é simplificada devido ao surgimento de figuras ordenadas e contidas numa só região. . . . . | 70 |
| Figura 23 – <b>Espaço de Fase do sistema com diferentes tipos de Caos.</b> Uma característica que marcante no Caos é fato de que tende a ocupar todo o espaço de uma região à medida que o sistema evolui. . . . .                                                                   | 70 |
| Figura 24 – <b>Seções de Poincaré para o movimento periódico e caótico no pêndulo forçado e amortecido.</b> Por meio das seções de Poincaré é possível, identificar propriedades globais do sistema que não seria possível de outra forma. . . . .                                   | 71 |
| Figura 25 – Espaço de fase das variáveis $W, U, Z$ das equações de Lorentz. $b=0$ . . .                                                                                                                                                                                              | 73 |
| Figura 26 – Espaço de fase das variáveis $W, U, Z$ das equações de Lorentz. ( $b=10$ ) . .                                                                                                                                                                                           | 74 |
| Figura 27 – Espaço de fase das variáveis $W, U, Z$ das equações de Lorentz. ( $b=15$ ) . .                                                                                                                                                                                           | 74 |
| Figura 28 – Comparação entre o formato previsto por Wigner e a distribuição real de espaçamentos. . . . .                                                                                                                                                                            | 82 |
| Figura 29 – Distribuição de Poisson, a configuração de espaçamentos para variáveis i.i.d. . . . .                                                                                                                                                                                    | 83 |
| Figura 30 – Histograma normalizado do espaçamento médio de vizinho mais próximo para um ensemble de dados nucleares com 1726 espaçamentos. Para comparação estão os resultados obtidos previstos pela distribuição de Poisson e pela TMA. Retirado de [[4]] . . . . .                | 84 |

|                                                                                                                                                                        |    |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Figura 31 – Distribuição de espaçamento do vizinho mais próximo para os modos elastomecânicos num cristal de Quartzo de formato irregular. Retirado de [[8]] . . . . . | 84 |
| Figura 32 – Distribuição estatística do número $n$ de elétrons entrando num Ponto Quântico num intervalo de tempo $t_0$ . Retirado de [[10]]. . . . .                  | 84 |
| Figura 33 – Comparação entre o formato previsto por Wigner na lei do semicírculo com a densidade espectral dos ensembles GOE, GUE e GSE. . . . .                       | 85 |

# Sumário

|          |                                                            |           |
|----------|------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1</b> | <b>INTRODUÇÃO</b>                                          | <b>12</b> |
| <b>2</b> | <b>SISTEMAS DINÂMICOS</b>                                  | <b>16</b> |
| <b>3</b> | <b>FORMALISMOS MECÂNICOS</b>                               | <b>22</b> |
| 3.1      | Formalismo de Newton                                       | 23        |
| 3.2      | Formalismo Lagrangiano                                     | 28        |
| 3.2.1    | Espaço de Fase das Velocidades                             | 31        |
| 3.3      | Formalismo Hamiltoniano                                    | 32        |
| <b>4</b> | <b>ANÁLISE DE SISTEMAS DINÂMICOS</b>                       | <b>36</b> |
| 4.1      | Equações Diferenciais e Pontos Fixos                       | 37        |
| 4.1.1    | Sistemas Bidimensionais                                    | 40        |
| 4.2      | Bifurcações                                                | 48        |
| 4.3      | Ciclos Limites                                             | 51        |
| <b>5</b> | <b>CAOS DETERMINÍSTICO</b>                                 | <b>54</b> |
| 5.1      | Pêndulo Forçado e Amortecido                               | 54        |
| 5.1.1    | Rota para o Caos: Cascada de Duplicação de Período         | 59        |
| 5.1.2    | Expoente de Lyapunov e Sensibilidade às Condições Iniciais | 64        |
| 5.1.3    | Diagrama de Bifurcação                                     | 67        |
| 5.1.4    | Espaço de Fase e Seção de Poincaré                         | 69        |
| 5.2      | Equações de Lorenz                                         | 72        |
| <b>6</b> | <b>CAOLOGIA QUÂNTICA</b>                                   | <b>75</b> |
| 6.1      | Teoria das Matrizes Aleatórias                             | 76        |
| 6.1.1    | Conjectura de Wigner                                       | 77        |
| 6.1.2    | Lei do Semicírculo                                         | 79        |
| 6.2      | Discussões                                                 | 82        |
| <b>7</b> | <b>CONCLUSÃO</b>                                           | <b>87</b> |
|          | <b>REFERÊNCIAS</b>                                         | <b>89</b> |

# 1 Introdução

O ser humano sempre esteve fascinado com a capacidade de se fazer predições, sejam elas através de supostos meios místicos ou seja por meio de sua habilidade nata de reconhecer padrões, e prever fenômenos a partir deles. Essa capacidade esteve no cerne do homem que desenvolveu a sociedade por meio da observação dos céus, e assim construiu, em muitas culturas, a noção de um universo estável, perfeito e regular. E o desejo de se conhecer esse universo no presente, para então se ter acesso ao passado e futuro foi grande motivador do esforço científico de uma grande parte dos cientistas e sábios que contribuíram para o surgimento da ciência moderna, desde suas bases antigas até hoje.

No entanto, hoje as noções de previsibilidade e determinismo já foram atacadas e vencidas por diferentes áreas emergentes da física, das quais se destacam o Caos e a Mecânica Quântica - e a partir de premissas bem distintas. Apesar disso, o determinismo encontrou grande sucesso durante bastante tempo desde sua fundação, ainda que eventualmente também tenha assim lançado fundamento para o seu próprio fim.

A segunda metade do segundo milênio foi marcante por uma série de descobertas e reformas de paradigmas responsáveis por revolucionar e lançar os fundamentos da ciência moderna. Nesse período de intensa produção, diversos o pensamento predominante dos antigos quanto a produção de conhecimento e quanto a natureza do universo foram superados. O racionalismo aristotélico, o modelo heliocêntrico de Copérnico que substituiu o modelo geocêntrico ptolomaico, os trabalhos de Galileu, as precisas observações de Tycho Brahe, e a descrição de leis dos movimentos celestiais são exemplos de marcos desse momento.

Foi esse contexto de florescimento do saber e de rompimento com os padrões e cosmovisões antigos que serviu de base para que, na segunda metade do século XVII, Isaac Newton viesse a realizar inúmeros estudos e publicações que são hoje referência para o todo o estudo da física. Muitas foram as contribuições de Newton: Ótica, Séries Numéricas, Cálculo. Mas, pode-se argumentar, sua contribuição mais importante foi a generalização das leis que regem os movimentos, para limites apropriados, tanto dos corpos terrestres quanto dos celestes, e sua lei da gravitação universal.

Todo seu trabalho, assim como de seus predecessores e de muitos dos que dariam prosseguimento aos seus estudos, ainda carregava o pressuposto determinístico dos sábios do passado. A tentativa de se compreender e organizar o funcionamento do universo a partir de princípios básicos e de simples descrição matemática, teve sucesso em algumas áreas o que motivou ainda mais a persistente base determinística das ciências naturais.

As bem sucedidas leis de Newton lançaram as bases do que seria posteriormente

conhecido como o modelo mecanicista do Universo. Visão comum aos primeiros cientistas de que o universo era uma máquina em perfeito andamento, um relógio bem ajustado em funcionamento, com regras predeterminadas e que, com a capacidade de cálculo e informação sobre a posição e velocidades de cada objeto, seria possível determinar não somente o seu futuro, mas conhecer o passado de todo o cosmos. Concepção que é intrinsecamente determinística.

Esse modelo encontrou bastante sucesso em seus momentos iniciais. A partir dele Newton conseguiu, matematicamente, retomar as leis de movimento planetário que Kepler havia descoberto anteriormente a partir das observações astronômicas de Tycho Brahe, e calcular com relativa precisão a distância da terra até a lua, por meio de estimativas da massa da lua da época. A órbita dos cometas, pelo qual Edmond Halley foi capaz de prever a chegada do cometa que hoje carrega seu nome, e também as órbitas dos demais planetas em torno do sol foram facilmente obtidas a partir da lei da gravitação universal e das leis do movimento de Newton, esse último que veio a ser conhecido como o problema dos dois corpos.

No entanto, não tardou para que limitações fossem encontradas. O próprio Newton, após descrever o movimento do sistema Sol-Terra com sucesso, tentou a mesma aplicação para uma configuração celeste quase idêntica, apenas com a adição da influência de mais um corpo celeste, mas não conseguiu encontrar soluções exatas. Essa mesma configuração também veio a ser alvo da investigação de outros grandes nomes da física da época, como a família Bernoulli, Euler, D'Alembert, Lagrange, e de muitos outros cientistas até hoje. Esse é o conhecido Problema de Três Corpos.

Com o desenvolvimento da mecânica clássica, muitas abordagens foram desenvolvidas para facilitar a análise de sistemas dinâmicos, e em especial muitos foram os métodos para tentar se atacar esse problema. Uma dificuldade que se podia apontar na forma como Newton desenvolveu sua mecânica é que esta possui descrição geométrica, e é expressa em termos de vetores, cujas componentes de direção devem ser consideradas a cada instante de tempo nos cálculos realizados. E assim o principal método de obtenção das equações de movimento, devido a Bernoulli, era por meio de integrais, que não possuem soluções gerais conhecidas. [6]

Para superar essa dificuldade, alguns nomes como Euler, Lagrange e Hamilton se destacaram, em momentos distintos, por suas contribuições para a formulação da mecânica clássica utilizando escalares, variáveis independentes da direção do vetor posição num sistema de coordenadas, desenvolvendo assim na física conceitos como o de potencial e energia, e os utilizando para descrição matemática bem mais simples do que o modelo vetorial anterior.

No entanto, mesmo com essa nova formulação o problema dos três corpos permaneceu sem solução, à parte de alguns casos específicos, um deles o problema de três

corpos restritos, onde um corpo de massa desprezível orbita em torno de outros 2 de massa considerável. Os próprios Euler, através de um modelo onde os corpos permanecem colineares em todos os instantes do tempo, e Lagrange, considerando o caso onde as massas formam um triângulo equilátero, se propuseram à solução desse problema, mas com êxito limitado.

No final do século XIX, o matemático e físico francês Henri Poincaré em uma competição matemática financiada pelo Rei da Suécia, falhou em obter uma solução exata para o sistema de três corpos, na verdade ele provou que ele não possuía solução em forma fechada. Ainda que sem conseguir solucionar o problema proposto, Poincaré recebeu o prêmio por sua imensa contribuição para a mecânica celeste. Nesse trabalho, Poincaré foi capaz desenvolver métodos geométricos de grande importância no estudo de sistemas dinâmicos em geral: a importância do fluxo no espaço de estado, o papel das órbitas periódicas e seção reta, assim como de o uso de pontos homoclínicos. Mais do que isso, demonstrou que para alguns sistemas determinísticos pode não haver previsibilidade, plantando a semente do que mais tarde viria a ser chamado de Caos. [6]

Inúmeras contribuições de áreas distintas da física foram relevantes para o desenvolvimento da teoria do Caos . Se destacam o trabalho de Lord Rayleigh em osciladores não lineares, num projeto de se tentar compreender como instrumentos musicais geram sons, e que foi desenvolvido posteriormente por van der Pol, Duffing e Hayashi, em outro sistemas físicos em que os osciladores não lineares desempenhavam um papel importante.

Semelhantemente importante foi o desenvolvimento da Hipótese Ergódica de Boltzmann, que implica que sistemas dinâmicos acessam todas as partes do espaço de fase, permitidas pelas leis de conservação, com igual frequência. As tentativas de provas desse Teorema foram de grande importância para o estudo de sistema dinâmicos, em especial o trabalho de Koopman ,que ao tentar usar métodos do espaço de Hilbert para reformular o problema da Hipótese Ergódica, foi capaz de demonstrar que um sistema não linear finito pode ser transformado em um sistema linear infinito. E assim introduziu um conjunto de técnicas diferentes para a abordagem desse problema.[6]

Muitos outros avanços no estudo de sistemas não lineares se deram no século XX, com participação memorável da ciência soviética, mas com ênfase principalmente na matemática aplicada. Sua consolidação como um campo de estudos distintos só se deu na segunda metade do século XX, com as publicações de Edward Lorenz na tentativa de modelagem da atmosfera, que encadeou e suscitou uma série de trabalhos posteriores em diversos campos de estudo sobre equações não lineares e Caos. [9]

O trabalho de Lorenz "*Deterministic Nonperiodic Flow*"[13] tem como marca o a exposição clara de uma das principais propriedades do movimento caótico: dependência sensível às condições iniciais, ou Efeito Borboleta. Esse efeito foi visto por Lorenz ao se retomar uma rotina de simulação numérica de previsão de tempo, onde ele, ao introduzir

acidentalmente, numa nova rotina os valores da rotina anterior mas com valores iniciais diferentes em até 6 casas decimais, os resultados na previsão em pouco tempo tiveram efeitos catastróficos previstos. Essa dependência sensível às condições iniciais gera no espaço de fase para as equações que Lorenz utilizou para modelar o sistema, o chamado atrator estranho, que em trabalhos posteriores descobriu-se ter como característica uma geometria fractal.

Cerca de uma década após esse trabalho, houve um florescimento nas pesquisas relacionadas a Teoria do Caos, e uma enorme gama de aplicações principalmente na física e matemática, assim como também na biologia. Dentre esses, destacam-se os trabalhos de Mandelbrot com fractais, e de Fengenbaum ao se estudar propriedades universais do Caos, na rota ao Caos por meio de duplicação de período, e a grande gama de comprovações experimentais. [9]

Grande desenvolvimento também se deu no estudo de sistema quânticos que possuem análogos clássicos caóticos, o Caos Quântico. Ou Caologia Quântica, termo preferido por Michael Berry, um dos fundadores da área. Essa área encontrou sucesso principalmente por meio da abordagem semiclássica, introduzida por Gutzwiller através de sua fórmula do Traço, e do formalismo da Teoria das Matrizes Aleatórias de Wigner, formulada no contexto da física nuclear e introduzida no Caos Quântico por meio da conjectura de Bohigas. [15]

Tendo isso em mente, buscamos com esse trabalho compreender a relação da física, em seu formalismo clássico, com o estudo interdisciplinar moderno de sistemas dinâmicos. Buscaremos compreender como caracterizar um sistema dinâmico, e realizar distinções básicas entre os casos lineares e não lineares, no capítulo 1. No capítulo 2, entenderemos como o surgimento de novos formalismos na mecânica clássica introduzem novas maneiras de estudar um sistema dinâmico na física, por meio de um espaço e conjunto de variáveis distintos, e como o movimento nesses sistemas são representados através de equações de movimento, a maneira em que são obtidas e em especial, como surge o espaço de fase na mecânica analítica. No capítulo 3 introduziremos alguns métodos de análise para sistemas dinâmicos não lineares de primeira e segunda ordem. No capítulo 4 aplicaremos esses métodos, em conjuntos aos tradicionais da física para analisar alguns sistemas não lineares físicos, e então ver como surge o comportamento caótico nesses sistemas, e algumas de suas principais características. No capítulo 5, discutiremos brevemente sobre a relação mecânica quântica e Caos, e introduziremos um dos seus formalismos: a teoria das Matrizes Aleatórias, e obteremos alguns resultados básicos dele.



## 2 Sistemas Dinâmicos

"O livro da Natureza é escrito em linguagem matemática" é uma citação atribuída à Galileu Galilei. Um dos principais esforços da ciência moderna foi a de utilizar a matemática como não somente uma ferramenta capaz de descrever fenômenos naturais, mas sim como uma própria expressão da natureza. E por isso grande parte do esforço dos cientistas da época eram de expressar a ciência através de uma formulação que se assemelhasse a realidade, como por exemplo o próprio trabalho de Galileu, que é marcadamente geométrico, e as contribuições de Renè Descartes para conciliar a álgebra com a geometria euclidiana, o que deu origem a geometria analítica.

É nesse esforço de expressar a natureza em linguagem matemática que Newton, paralelamente a Leibniz, desenvolve o cálculo diferencial e integral, utilizando métodos infinitesimais, como descrição científica para seus trabalhos em ótica, gravitação e de modo mais geral nas leis do movimento. Nesse contexto a área da dinâmica surge como parte da mecânica clássica de Newton, uma parte da física. No entanto, devido ao seu desenvolvimentos em múltiplas áreas, principalmente no século passado, a Dinâmica surge nos dias atuais também como Teoria dos Sistemas Dinâmicos, uma área interdisciplinar que utiliza de equações diferenciais, ou suas versões em tempo discreto, para descrever o movimento de um sistema a partir de taxas de variações, aplicada em múltiplos sistemas que podem ser desde o movimento interplanetário até o o crescimento populacional na biologia. Aplicação que se aproxima mais do sentido geral proposto pelo cálculo de Leibniz.

Por definição, um sistema dinâmico é uma série de estados possíveis em um espaço, caracterizados por uma regra que define os estados presentes em termos dos passados, isto é, a partir de uma condição inicial. De maneira simples, pode-se dizer que é um sistema que se há uma mudanças com o tempo.

Podemos classificar sistemas dinâmicos em 2 tipos principais: equações diferenciais ou mapas iterados. Equações diferenciais são utilizados para descrever a evolução temporal dos estados de um sistema em tempo contínuo. Assim, há um intervalo de tempo desprezível entre cada estado, e essa variáveis são descritas em termos de números reais. Equações diferenciais podem ser parciais, o caso onde a equação apresenta relações entre uma função de múltiplas variáveis independentes e suas derivadas parciais, como o nome sugere. Um exemplo de equação diferencial parcial [EDP] é a equação da continuidade:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = \sigma. \quad (2.1)$$

Onde  $\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right)$  é o operador nabla.  $\rho$  é uma densidade volumétrica de alguma quantidade, e  $\mathbf{j}$  é o fluxo de  $\rho$ . E o  $\sigma$  nos informa quanto a geração da quantidade

$q$  nesse sistema, podendo ser uma fonte no caso de  $\sigma > 0$  ou um "escoadouro" quando  $\sigma < 0$ . Em especial, essa é uma equação de conservação para a quantidade  $q$  quando  $\sigma = 0$ , e está presente em diversas áreas da física: eletromagnetismo ( $q$  é a corrente elétrica), dinâmica dos fluidos ( $q$  é a densidade de fluido, mecânica quântica ( $q$  é a corrente de probabilidade), dentre outros.

No entanto, apesar de sua notada importância, esse se trata de um caso especial de fácil solução. Em geral sistemas não lineares de EDP'S geram um comportamento bem mais complexos, e por isso para o exercício proposto nesse trabalho nos concentraremos em equações diferenciais ordinárias (EDO's). Isto é, o caso onde as equações diferenciais são em termos de funções de apenas uma variável independente. Esse tipo de equação possui uma forma geral:

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (2.2)$$

Que conforme Strogatz[2.4] aponta, pode ser escrito na forma:

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, \dots, x_n) \quad (2.3)$$

$$\vdots$$

$$\dot{x}_n = f_n(x_1, \dots, x_n) \quad (2.4)$$

Antes de seguirmos a discussão, vale a pena a introduzir as equações de movimento em tempo discreto. Esse é o caso de mapas iterados. Podemos considerar de modo simples mapas como uma relação de recursão, à exemplo da programação computacional onde uma regra é aplicada continuamente a uma variável, ou a um sistema de variáveis. A forma geral para uma mapa é a equação matricial de diferença:

$$\mathbf{x}_{n+1} = A\mathbf{x}_n + \mathbf{b}, \quad (2.5)$$

Onde  $x_n$  e  $x_{n+1}$  são vetores  $m$ -dimensionais, e portanto  $A$  é uma matriz de transformação  $m \times m$ . O caso unidimensional pode ser escrito simplesmente como:

$$x_{n+1} = f(x_n) \quad (2.6)$$

Nesse caso, a sequência iniciando em  $x_0$ , até o número de iterações  $x_i$ :  $x_0, \dots, x_i$  é chamado de órbita.

O estudo dos mapas ainda está em estágio inicial, mas já possui um sucesso relativo em descrever alguns fenômenos onde um tempo discretizado, ou um periódico, é mais natural. Esse é o caso da dinâmicas das populações na biologia, da eletrônica digital e da teoria financeira. Além, disso possui como vantagem o fato de que esses sistemas possuem uma análise facilitada, e de ser possível, a partir de modelos unidimensionais simples, gerar Caos. Devido ao seu comportamento inerentemente discreto, os mapas são os modelos

naturais para se realizar computação numérica. Isso pois como já estão na forma natural utilizadas pelos computadores, seu cálculo é realizado através de expressões simples e de custo computacional bem inferior à resolução de equações diferenciais por meio de integração numérica. E devido a esse fato, podemos utilizar alguns artifícios de modo a representar equações diferenciais por meio de mapas, sejam elas periódicas ou caóticas. Como veremos mais adiante, é possível utilizar o ciclo de um período no espaço de fase ou de configuração, para discretizar o tempo. E é o que dá origem às seções de Poincaré. Um exemplo bem conhecido de mapa é o mapa logístico:

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n/N) \quad (2.7)$$

Onde  $N$  é uma constante positiva e de valor considerável, chamada capacidade de carga, e o parâmetro  $r$  é a taxa de crescimento. Essa função é uma modificação do modelo de crescimento populacional Malthusiano,  $x_n = rx_n$ , de modo que o crescimento, antes irrestrito, possua um valor limite, a capacidade de carga e foi proposta por Verhulst. Essa função simples fornece aos ecologistas um modelo, em que para baixas populações há um alta taxa de crescimento, em níveis populacionais medianos o crescimento tende a zero, e próximo ao valor máximo, devido ao fator  $(1 - x_n/N)$  há um contrabalanceamento da população crescente em termos de  $N$  a capacidade de carga. Esse fator descreve a mortalidade da população de maneira simples, seja devido a escassez de alimento ou predação, que contrabalanceia a taxa de crescimento  $r$ , que pode descrever as condições de crescimento populacional, seja devido a altos níveis de fecundidade ou abundância de alimentos. É importante notar que quando  $x_n \rightarrow N$  a equação naturalmente resulta num zero, e caso aconteça de  $x_n > N$ , então o valor da população será negativo. Então, vemos de maneira simples que  $N$  é um valor limite.

O grande trunfo do mapa logístico, está em apesar de sua simplicidade, ser não somente capaz de descrever a dinâmica regular de inúmeros sistemas de populações biológicas: peixes, bactérias, dentre outros, onde a população após tempo suficiente se estabiliza em um valor fixo, ou oscila entre dois valores. Mas também, apresentar uma rota suficientemente simples para o Caos através de duplicação de períodos, ao se aumentar o valor do parâmetro  $r$ . E que conforme veremos mais adiante, é compartilhado por mais outros diversos sistemas.

Há de se notar também, pela forma apresentada para sistemas dinâmicos anteriormente, que eles são representados por equações diferenciais autônomas. Isto é, a equação ou o sistema de equações composto por  $f_i = (x_1, \dots, x_n)$  não dependem da variável independente  $t$ , somente  $x_i$ . Para o caso considerado, onde  $t$  é o tempo, chamamos o sistema de invariante temporal. Essa condição exige por tanto, que quando  $f(t)$  é a solução para  $x_i(t)$  num tempo  $t$ , então  $f(t + \delta)$  deve ser a solução para  $x_i(t + \delta)$  quando o tempo for  $t + \delta$ . Que em geral, geram sistemas físicos conservativos. Apesar disso, caos não autônomos também são perfeitamente possíveis.

O aspecto mais importante a ser observado em equações diferenciais, e em sistemas dinâmicos em sua totalidade, é a sua linearidade. A condição para que um sistema seja linear é que a função que o descreve deve atender a duas propriedades:

1. aditividade

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \quad (2.8)$$

e,

2. homogeneidade:

$$f(\alpha x) = \alpha f(x) \quad (2.9)$$

Que podem ser resumidas em:

$$f(\alpha(x + y)) = \alpha f(x) + \alpha f(y) \quad (2.10)$$

Ou de, modo simplificado, uma equação diferencial é linear quando os coeficientes dos termos são constantes ou funções apenas das variáveis independentes. Um exemplo é a equação do movimento de um bloco de massa  $m$  numa mola de força resistiva  $k$ :

$$m\ddot{x} + kx = 0 \quad (2.11)$$

que descreve a posição do bloco de massa  $x$ , em relação ao ponto onde a força resistiva é nula. Submetendo o bloco a uma força motriz  $F(t)$ , a equação se torna:

$$m\ddot{x} + kx = F(t) \quad (2.12)$$

A equação para esse movimento ainda é linear, pois  $F(t)$  não depende de  $x$ . No entanto, o primeiro caso é homogêneo, o segundo caso não-homogêneo. Em contraste, a equação do pêndulo

$$mL^2\ddot{\phi} = -mgL \sin \phi, \quad (2.13)$$

uma equação não linear em  $\phi$  uma vez que o termo  $\sin \phi$  é não linear. Da mesma forma, a equação do movimento de um planeta em torno do sol (o problema de 2 corpos/problema de Kepler):

$$m\ddot{\vec{r}} = -GMm \frac{\hat{r}}{r^2} \quad (2.14)$$

é não linear para  $\vec{r} = (x, y, z)$

Em geral, as equações lineares são as mais estudadas em cursos de ciências exatas. Isso se deve ao fato de que, além de produzirem modelos simples que descrevem fenômenos e princípios bastantes gerais, são também mais fáceis de serem resolvidos. De fato, o campo

de estudo de equações diferenciais lineares está bem desenvolvido, e assim é possível obter soluções e realizar análise para casos gerais, enquanto para o caso não linear somente alguns pouquíssimos casos podem ser avaliados com algumas técnicas de aproximação específicas.

Foi essa indefinição no modo de solução das equações não lineares que as levaram a ser consideradas durante um longo período da história como sendo imperfeições, e que com um análise e modelação precisa de sistemas reais, e uma teoria física adequada, seria possível obter um sistema de equações diferenciais com solução analítica exata. No entanto, é justamente a partir delas que surgirão uma gama de fenômenos impossíveis de acontecerem no caso linear.

Essa discrepância entre sistemas lineares e não lineares quanto a obtenção de soluções gerais e exatas, se dá ao fato de que sistemas não-lineares não satisfazem o princípio da superposição:

Consideremos a uma EDO de segunda ordem na forma:

$$p(t)\ddot{x}(t) + q(t)\dot{x}(t) + r(t)x(t) = 0 \quad (2.15)$$

Onde  $p(t), q(t)$ , e  $r(t)$  possuem forma fixas, e  $x(t)$  é desconhecido. Como a equação é linear em termos de  $x(t)$ , considerando que  $x(t)$  é uma solução da equação, podemos multiplicá-lo por uma constante  $a$  de modo que  $ax(t)$ , também uma solução do sistema. E de modo semelhante, se  $x_1(t)$  e  $x_2(t)$  são soluções da equação, então podemos somar:

$$p(t)\ddot{x}_1(t) + q(t)\dot{x}_1(t) + r(t)x_1(t) + p(t)\ddot{x}_2(t) + q(t)\dot{x}_2(t) + r(t)x_2(t) = 0$$

$$p(t)(\ddot{x}_1(t) + \ddot{x}_2(t)) + q(t)(\dot{x}_1(t) + \dot{x}_2(t)) + r(t)(x_1(t) + x_2(t)) = 0$$

E portanto,  $x_1(t) + x_2(t)$  também são uma solução do sistema. Em suma, qualquer combinação linear de duas soluções:

$$x(t) = a_1x_1(t) + a_2x_2(t) \quad (2.16)$$

É também uma solução para a EDO.

Esse é o princípio da superposição, que nos garante que em equações lineares todas as soluções poderão ser expressas em termos de uma combinação linear de duas soluções particulares. Resultado que pode ser generalizado para uma EDO de ordem  $n$ , caso em que é necessário somente encontrar  $n$  soluções independentes para a equação, e todas as demais serão expressas por meio de combinação linear:

$$x(t) = a_1x_1(t) + \dots + a_nx_n(t) \quad (2.17)$$

Princípio que também é válido até mesmo quando a EDO é não homogênea, precisando apenas que as soluções sejam descritas a partir de uma combinação linear da solução para o caso homogêneo e as soluções para o caso particular.

Para as equações não lineares, tal resultado não é possível. É daí que surge a dificuldade de se obter soluções de forma exata que, somada à ausência do princípio da superposição, possibilitarão a existência do Caos. A não linearidade, apesar de não ser suficiente, é condição necessária para que ocorra Caos num sistema. É uma combinação de múltiplas variáveis (graus de liberdade), junto à não-linearidade, que ocasionarão em fenômenos caóticos num sistema dinâmico. Segundo Taylor [17], sistemas dissipativos precisam de um número de variáveis  $N \geq 3$  para que ocorra Caos. Já sistemas não dissipativos precisam  $N \geq 4$  variáveis. Somente alguns raros casos podem ser resolvidos exatamente, como o problema de 2 corpos.

### 3 Formalismos Mecânicos

A descrição da evolução do movimento de um sistema dinâmico é mais comumente realizado por meio do chamado espaço de estado, que pode ser considerado uma generalização para sistemas dinâmicos quaisquer do espaço de fases utilizados na física, desenvolvidos no contexto da mecânica clássica, mas também presente em muitos outros campos, como na mecânica quântica e na termodinâmica.

No entanto, a visualização do movimento de um sistema por meio desse formalismo pode não ser tão intuitivo, em contraste a descrição da mecânica newtoniana de um objeto num espaço euclidiano tridimensional, facilmente assimilável com a compreensão comum da realidade observável.

Assim, ainda que, como pudemos ver rapidamente, sistemas dinâmicos não se restrinjam à física, nem mesmo ao movimento espacial de algum objeto, é válido analisar os modelos matemáticos da realidade observável desenvolvidos na mecânica clássica, em especial providos pelo formalismo Lagrangiano e Hamiltoniano, afim de se compreender as vantagens do espaço de fase como um modelo para descrição de sistemas dinâmicos, em especial quando surgem fenômenos caóticos.

Como vimos, sistemas dinâmicos lidam essencialmente com variáveis/estados do sistema e a maneira como ocorre a evolução dessas variáveis, segundo uma regra determinística. Desejamos extrair informação sobre um sistema real, e expressá-la matematicamente.

Na física, pertence à mecânica o objetivo de descrever sistemas dinâmicos, que são, nesse contexto, essencialmente corpos em movimento. Para fazer isso, a mecânica clássica possui 3 formalismos matemáticos: a mecânica newtoniana, a mecânica lagrangiana e a mecânica hamiltoniana. Cada qual com suas vantagens e desvantagens, e que são equivalentes nos chamados limites clássicos da física em específico, ainda que os formalismos lagrangianos e hamiltonianos possam ser expandidos para o contexto da relatividade e da mecânica quântica.

Essencialmente, esses formalismos possuem 2 formas distintas de descreverem a evolução de um sistema. No formalismo lagrangiano, é utilizado a descrição em um espaço de configuração. Já no hamiltoniano, o espaço de fase. Na mecânica newtoniana, o espaço será o euclidiano, que pode ser considerado um caso específico no espaço de configuração.

Essencialmente, em todos esses formalismos haverão três elementos principais: observáveis, estados e leis, que são abordadas de diferentes maneiras dadas as particularidades de cada um.

Observáveis são quaisquer quantidades que possam ser, a princípio, mensuradas.

O estado de um sistema é determinado pelo resultado obtido através da medição dos observáveis em um dado tempo, e como veremos mais adiante, é representado por um ponto no espaço de fase. Para que o estado de um sistema mude, deverá haver variação no observável. Assim, dependendo do sistema de interesse, uma quantidade que pode ser observável, como por exemplo a partícula de uma massa, pode não variar entre diferentes estados de um sistema, e por isso, no sentido adotado, não é um observável. Nesse exemplo em específico, parâmetro é um nome mais adequado para essa quantidade.

Por fim, há as leis, que para teorias dinâmicas, são a descrição do modo como ocorre uma mudança de estado no sistema. Isto é, no contexto abordado por esse trabalho, as equações de movimento. E cada formalismo possui seu modo próprio de obter equações de movimento. No newtoniano, através das leis de Newton, no lagrangiano, por meio das equações de Euler Lagrange e no hamiltoniano através das equações canônicas.

Uma boa discussão para esse conteúdo é fornecido pelas notas de aula de Charles Torres [18], que foram utilizadas de referência para as discussões de capítulo.

### 3.1 Formalismo de Newton

Como já discutimos extensivamente, a mecânica de Newton é precursora não somente no estudo de sistemas dinâmicos, mas em todo o campo da física e do cálculo. Ela é formulada em termos de força e relação causa e consequência, através das 3 leis de Newton, que podem ser escritas como:

- 1 Todo o corpo permanece em estado de repouso, ou em movimento uniforme em uma linha reta a menos que uma força aja sobre ele.
- 2 Uma força resultante agindo sobre um corpo irá produzir uma variação na quantidade de movimento, na mesma direção da força aplicada, com intensidade:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad (3.1)$$

Onde no contexto da mecânica newtoniana, o momento é simplesmente  $\vec{p} = m\vec{v}$ .

- 3 Todas as forças entre dois objetos existem em igual magnitude e em direção opostas. Se um objeto A exerce uma força  $F_A$  em um objeto B, então B irá ao mesmo tempo exercer uma força  $F_B$  em A.

Em muitos casos, a física desenvolvida por Newton, é descrita a partir de um modelo de partículas pontuais. Esse é um dos modelos dinâmico mais simples, e é capaz de representar uma série de outros sistemas físicos, desde que sejam ignorados algumas estruturas internas.



É a partir desse sistema que conceitos fundamentais da física são apresentados a nível básico. É possível, por exemplo, considerar um carro, ou um bloco de massa, como um ponto localizado em seus respectivos centro de massa, e calcular seus respectivos movimentos com base nas forças atuantes nesse ponto.

Na mecânica newtoniana, o movimento de um sistema é descrito no espaço de configuração euclidiano. Um espaço de configuração é o conjunto de variáveis capaz de descrever o comportamento do sistema em um dado instante de tempo. Normalmente é tratado como o espaço de todas as posições possíveis, mas também pode ser expandindo de modo a englobar as velocidades. Em geral, esse espaço é contínuo (uma variedade diferenciável) e suas dimensões são chamadas de graus de liberdade do sistema.

Podemos definir partícula, portanto, como um sistema cujo espaço de configuração é o conjunto de posições permitidas. Para uma única partícula, se movendo em três dimensões, esse é o espaço euclidiano  $E^3$ , com 3 graus de liberdade. Se fixarmos um ponto de origem em  $E^3$ , então o espaço de configuração pode ser visto como  $R^3$ .

Assim, uma configuração do sistema é uma posição, isto é, um ponto no  $R^3$ , representado por qualquer sistema de coordenadas, cartesianas  $(x, y, z)$ , esféricas  $(r, \theta, \phi)$ , ou qualquer outro. Devemos notar que o número de coordenadas necessárias para caracterizar um sistema, é o mesmo que o número de dimensões do espaço de configuração, e portanto, dos graus de liberdade.

Uma vez que estamos trabalhando no espaço das posições, é conveniente definir um vetor posição  $r \in R^3$ . Em coordenadas cartesianas, temos:

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}, \quad (3.2)$$

onde  $\hat{i}$  é um vetor unitário, na direção da coordenada  $x$ , com  $y$  e  $z$  constantes. E de modo análogo  $\hat{j}$  e  $\hat{k}$ , respectivamente, nas direções de  $y$  e  $z$ .

Assim, a evolução temporal do sistemas será a variação contínua do vetor de posição pelo espaço. Isto é, uma curva  $\vec{r} = \vec{r}(t)$ . Onde adoto um abuso de notação em que no lado esquerdo da igualdade, temos o vetor  $r$  como um ponto, e no direito como uma função que varia no  $R^3$  em função de  $t$ .

Um modo de descrever essa curva no espaço, usando o mesmo abuso de notação, é através das coordenadas:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t) \quad (3.3)$$

E a partir, da trajetória descrita pelo vetor posição no espaço de configuração,  $\vec{r}(t)$ , podemos calcular também um vetor tangente a cada posição  $\vec{r}$  ao longo da curva, por meio

de diferenciação.

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}(t) = \frac{dx(t)}{dt}\hat{i} + \frac{dy(t)}{dt}\hat{j} + \frac{dz(t)}{dt}\hat{k} \quad (3.4)$$

O vetor tangente, como já bem conhecido do cálculo diferencial, representa uma taxa de variação no ponto, e portanto no contexto de movimento espacial, a velocidade. Da mesma forma, podemos continuar derivando de modo a obter a aceleração:

$$\vec{a}(t) = \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} \quad (3.5)$$

Para obter as equações de movimento nesse sistema, tudo o que devemos fazer então é obter o conjunto de forças atuantes numa partícula numa posição  $\vec{r}$  usamos simplesmente a segunda lei de Newton, que estabelece uma relação de causa (atuação de um conjunto de forças sobre o sistema) e consequência (movimento do sistema).

Quando a força resultante sobre a partícula é uma função somente de  $\vec{r}$  e  $t$ , detonado por  $\vec{F}(\vec{r}(t), t)$ , a segunda lei de newton pode ser escrita como:

$$m \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} - \vec{F}(\vec{r}(t), t) = 0 \quad (3.6)$$

$\vec{F}$  representa aqui um campo vetorial com duas dependências em relação ao tempo, uma explícita que indica que o sistema está variando em força ao longo do tempo. É o caso por exemplo de osciladores forçados, onde há uma fonte de energia, imprimindo força no sistema. E há também uma dependência implícita, proveniente da dependência da curva  $\vec{r}$  que descreve o movimento do sistema ao longo do tempo, e assim por meio dessa localização.

Da mesma forma, pode-se considerar um sistema cujas forças possuem uma dependência na velocidade  $\vec{v}$ :

$$\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}(t), \frac{d\vec{r}(t)}{dt}, t) \quad (3.7)$$

De modo que uma partícula, prosseguindo o exemplo, passa a se tornar um sistema cujo campo vetorial da força é definido por sete variáveis - 3 para a posição, 3 para a velocidade e o tempo. E as equações de movimento passarão a ter a forma:

$$m \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} - \vec{F}(\vec{r}(t), \frac{d\vec{r}(t)}{dt}, t) = 0 \quad (3.8)$$

Do qual o exemplo mais significativo é o da força de Lorentz, em unidades gaussianas:

$$\vec{F}(\vec{r}, \vec{r}, t) = \frac{q}{c} \vec{r} \times \vec{B}(\vec{r}, t).$$

Em que  $q$  é a carga elétrica da partícula,  $c$  é a velocidade da luz e  $\vec{B}$  é o campo magnético numa posição  $\vec{r}$  num instante  $t$ .

Essencialmente, é assim que sistemas dinâmicos são descritos na teoria mecânica de Newton. No entanto, ainda que se desconsidere as evidentes limitações newtonianas em sistemas de natureza quântica e/ou relativística, essa formulação é bastante limitada quanto aos problemas capazes de serem solucionados através dela.

Essencialmente, sistemas simples como o pêndulo simples são bem descritos pela mecânica de Newton. No entanto, tomando apenas um passo adiante e considerando um pêndulo duplo, somos capazes de compreender as limitações desse formalismo. No pêndulo duplo atuam 5 forças no total: 2 no pêndulo de baixo, a atração gravitacional e a força de tração com o pêndulo de cima, e no corpo de cima, a atração gravitacional e as forças de tração, com o pêndulo de baixo e com a base do sistema. O problema de se tratar esse sistema em termos de forças é que as forças de tração são forças de interação que variam no tempo e dependem da configuração de ambos os corpos em cada instante.

De modo mais geral, um caso comum de dificuldade para mecânica newtoniana é o de vínculos. Muitos problemas apresentam um conjunto de forças que fazem com que o movimento do sistema fiquem restritos a subconjuntos do espaço de configuração. Do qual faz parte, não somente o pêndulo duplo, mas qualquer pêndulo. Outro exemplo é do pêndulo esférico que é comumente modelada como uma massa pontual presa a ponto fixo através de uma corda incompressível, cujas quantidades físicas não interferem no problema.

Assim, por meio dessa corda a massa pontual que inicialmente realiza um movimento no espaço  $E^3$ , está sujeito ao vínculo de que sua distância em relação ao ponto fixo é constante. Em coordenadas cartesianas:

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 = l^2 \quad (3.9)$$

onde  $l$  é um comprimento do fio. E assim, o espaço de configuração dessa massa pontual não é mais o  $E^3$ , mas está limitado ao de uma superfície esférica bidimensional  $S^2 \subset E^3$ . E o movimento será uma curva contida nesse subconjunto.

Dada essa informação, há duas formas de se analisar o sistema. Podemos tanto trabalhar o movimento em  $E^3$ , levando em conta os efeitos do vínculo. Para esse caso:

$$\frac{d(r^2)}{dt} = \frac{d(x^2 + y^2 + z^2)}{dt} \frac{d(l^2)}{dt} = 0 \quad (3.10)$$

Logo:

$$x\ddot{x} + y\ddot{y} + z\ddot{z} = \vec{r}\ddot{\vec{v}} = 0 \quad (3.11)$$

O que significa portanto, que a velocidade é sempre tangente à esfera.

No entanto uma forma mais fácil de considerar esse problema é o abordando em coordenadas esféricas polares  $(r, \theta, \phi)$ . De modo que, podemos diretamente impor a condição  $r = l$ , e as configurações possíveis do sistema serão determinadas por  $\theta$  e  $\phi$ . Por meio das trajetórias:

$$\theta = \theta(t)$$

$$\phi = \phi(t)$$

E podemos definir um vetor velocidade, como no caso cartesiano, com as componentes em  $\theta$  e  $\phi$ , dadas por  $(\ddot{\theta}, \ddot{\phi})$ , onde:

$$\ddot{\theta} = \frac{d\dot{\theta}(t)}{dt}, \quad \ddot{\phi} = \frac{d\dot{\phi}(t)}{dt}. \quad (3.12)$$

Assim, ainda que o movimento seja realizado em 3 coordenadas espaciais, e ocupe portanto um espaço de dimensão 3. Somos capazes de descrever todo o movimento do sistema utilizando somente 2 coordenadas. No caso de um movimento livre no espaço euclidiano temos 3 graus de liberdades associados ao movimento, mas somente 2 graus de liberdade quando consideramos um vínculo.

Essa conclusão pode ser generalizada, para um sistema com N graus de liberdades. Se temos M partículas, cada qual com 3 graus de liberdade relativos à posição, e possuímos m equações de vínculo. Então teremos  $3M - m$  graus de liberdade no sistema. Dessa forma, somos capazes de representar o movimento do sistema em um espaço de configuração verdadeiro, com uma quantidade reduzida de variáveis, que serão chamadas coordenadas generalizadas.

É importante, notar que no decorrer da discussão, as equações do movimento não foram resolvidas explicitamente. Mas, considerando as leis de Newton, mas podemos ver facilmente as falhas já mencionadas. A primeira é que, a segunda lei de Newton é expressa em coordenadas cartesianas, e portanto é necessário realizar uma mudança de coordenadas para essa equação, que em geral não se mantém invariante, devido a aceleração em coordenadas cartesianas é:

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{x}\hat{x} + \ddot{y}\hat{y} + \ddot{z}\hat{z}$$

e em coordenadas polares, por exemplo, é:

$$\begin{aligned} \ddot{\vec{r}} &= \ddot{r}\hat{r} + \dot{r}\dot{\hat{r}} + \dot{r}\dot{\phi}\hat{\phi} + r\ddot{\phi}\hat{\phi} + r\dot{\phi}\dot{\hat{\phi}} \\ &= (\ddot{r} - r\dot{\phi}^2)\hat{r} + (r\ddot{\phi} + 2\dot{r}\dot{\phi})\hat{\phi} \end{aligned} \quad (3.13)$$

Outro problema, é que é necessário resolver adicionalmente às equações de vínculo para solucionar o problema. No entanto, em muitas situações esses vínculos são desconhecidos. Em conclusão, existe uma gama de situação onde não se é adequado usar formalismo

newtoniano. Diante disso, outras formulações mecânicas surgiram capazes de melhor lidar com esses problemas, e situados para o melhor desenvolvimento da teoria dinâmica.

## 3.2 Formalismo Lagrangiano

Como opção para os problemas enfrentados pela mecânica newtoniana, Joseph-Louis Lagrange desenvolve no *Mécanique Analytique*, publicado em 1788, um formalismo que segundo o próprio autor tinha como objetivo prover um método analítico de solucionar problemas mecânicos sem o uso de diagramas ou qualquer construção geométrica. Tudo isso, ele alcançou a partir de uma única equação.

O formalismo lagrangiano é capaz de escrever, de maneira simples, equações de movimento para a maior parte dos sistemas físicos relevantes, sem necessidade de levar em conta, em sua forma explícita, qualquer vínculo. Para isso, trabalhando somente com o espaço de configuração verdadeiro, cuja dimensão corresponde aos graus de liberdade.

A essa formulação foram essenciais os avanços técnicos e conceituais dos princípios e teoremas de conservação, já discutidos e desenvolvidos anteriormente por inúmeros físicos anteriormente. Dentre esses teoremas, se destaca o Teorema da Conservação de Energia Mecânica. Que informa que as energias cinéticas e potenciais de um sistema mecânica são intercambiáveis.

De maneira direta, esse o teorema que pode ser obtido, por exemplo, considerando o trabalho necessário para levar um sistema de partículas de uma configuração A para uma configuração B, pela força resultante atuando no sistema. Definido para forças newtonianas como:

$$W_{AB} = \sum_i \int_A^B (\vec{F}_i^{(e)} + \vec{F}_{ij}) d\vec{r}_i. \quad (3.14)$$

Considerando que a energia cinética total de um sistema definida por:

$$T = \frac{1}{2} \sum m_i v_i^2, \quad (3.15)$$

e que a segunda lei de Newton para um sistema de partículas, dividindo forças entre externas e internas pode ser escrita como:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{d\vec{r}_j}{dt} \quad (3.16)$$

onde:

$$\vec{p}_i = m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt}, \quad (3.17)$$

então, pode-se mostrar que:

$$W_{AB} = T_B - T_A. \quad (3.18)$$

E que quando as forças são conservativas e, portanto, podem ser escritas a partir de funções potenciais escalares:

$$\vec{F}_i^{(e)} = -\vec{\nabla}V^{(e)}, \quad (3.19)$$

Então, obteremos:

$$(T + V)_A = (T + V)_B. \quad (3.20)$$

A soma das energias cinéticas e mecânicas na configuração A é igual à soma na configuração B. Este é o teorema da conservação de energia mecânica.

Um trabalho contínuo foi realizado em se utilizar esses conceitos na tentativa de se lidar com o problema dos vínculos. Um trabalho intermediário foi de D'Alembert, através de um método que permite escrever as equações do movimento em termos apenas das forças aplicadas, utilizando somente as coordenadas mutuamente independentes. Para isso utiliza-se o princípio de D'Alembert, considerando o trabalho virtual realizado no deslocamento virtual de um sistema de partículas, considerando que o trabalho virtual das forças de vínculo é nulo e o equilíbrio do sistema.

A partir desse método é possível exprimir as condições de equilíbrio de um sistema por meio somente das forças aplicadas, no entanto ainda será necessário o uso de coordenadas redundantes.

Mas o trabalho de Lagrange é mais completo, ao expressar somente as coordenadas necessárias ao movimento do sistema, as coordenadas generalizadas, a partir das equações de Euler-Lagrange.

É possível obtê-las a partir do Princípio de D'Alembert, uma vez considerada as coordenadas generalizadas. No entanto, mais elegante é a dedução de Lagrange a partir do cálculo das variações, considerando o Princípio de Hamilton, também chamado de Princípio da Mínima Ação.

Pierre de Fermat na ótica linear, no século XVII, propôs que a trajetória percorrida pela luz ao se propagar de um ponto para outro é aquela cujo tempo necessário é o mínimo. Ou numa formulação mais geral e moderna, o tempo gasto para percorrer uma trajetória é estacionário a respeito das possíveis variações de trajetória. Inspirado nesse trabalho, Lagrange formulou a ideia de que um sistema dinâmico evoluindo no tempo de um ponto A no espaço de configuração para um ponto B, deveria minimizar outra quantidade física: um número associado a cada caminho que pode levar de A até a B. Essa quantidade física foi chamada ação, e é definida como o funcional:

$$S = \int L dt \quad (3.21)$$

E  $L = L(q(t), \dot{q}(t), t)$  é a função escalar lagrangiana, que resume todo o movimento do sistema, e é escrita para a mecânica clássica como:

$$L = T - V \quad (3.22)$$

Forma que pode variar para alguns sistemas.

O princípio de Hamilton então nos diz que, dentre todos os caminhos possíveis para se realizar um movimento, do instante  $t_1$  ao instante  $t_2$ , que leva o sistema de um ponto A para um ponto B, a trajetória escolhida é aquela em que a ação é minimizada ( Ou de modo mais geral, estacionária). Isto é, a equação Lagrangiana dentro da integral deve obedecer à condição de que o caminho percorrido seja estacionário:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \delta L(q, \dot{q}, t) dt \quad (3.23)$$

Considerando então que ocorre uma variação na curva de modo que:

$$q^i(t) \longrightarrow q^i(t) + \delta q^i(t)$$

e que as variações  $\delta q^i(t)$  são arbitrárias exceto no ponto A, no instante de tempo  $t_1$ , e no ponto B, instante de tempo  $t_2$  :

$$\delta q^i(t_1) = \delta q^i(t_2) = 0$$

Assim, resolvendo a equação[3.23] para as condições acima é possível obter as equações de Euler-Lagrange:

$$\frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) = 0 \quad (3.24)$$

Ou ainda, Equações de Euler-Lagrange do segundo tipo. Sendo as de primeiro tipo aquelas que levam em consideração os vínculos do sistema, obtidas por formulação semelhante também através do Princípio de Hamilton:

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_k} + \sum_{i=1}^C \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial \mathbf{r}_k} = 0 \quad (3.25)$$

em que  $\lambda_i$  são os multiplicadores de Lagrange para cada equação de vínculo  $f_i$ .

Apesar de parecerem a primeira vista, equações diferenciais para L, se trata de uma equação de segunda ordem que permite, a partir de um L conhecido, escrever as equações de movimento para  $q^i$  e  $\dot{q}^i$ . Pode-se facilmente demonstrar que as equações de segundo tipo são equivalentes as leis de Newton, no caso em que não existem vínculos. Mas ressaltando, que as equações de Lagrange são mais gerais, e representam também sistemas com vínculos holônimos, onde as coordenadas generalizadas são reduzidas.

E podem ser utilizadas para o caso em que desejamos expressar as coordenadas no espaço de configuração original e as equações de vínculo explicitamente.

### 3.2.1 Espaço de Fase das Velocidades

A priori, podemos ver que  $L$  é uma função tanto das coordenadas generalizadas  $q^i$ , quanto das velocidades generalizadas  $\dot{q}^i$ , para  $i = 1, \dots, N$ . As equações de Euler Lagrange irão produzir sistemas dinâmicos descritas por  $N$  equações diferenciais de segunda ordem, e portanto, pelo teorema da existência e unicidade, cada trajetória física aceitável é unicamente determinada a partir de duas condições iniciais, uma posição e uma velocidade. Dessa forma, temos um sistema que a princípio pode ser descrito no espaço de configuração a partir de suas  $N$  coordenadas generalizadas  $q^i$ . Que descrevem um trajetória no espaço  $q^i = q^i(t)$ , com  $q^i(t)$  determinado pelas equações de Euler-Lagrange. Em referência ao modelo de partículas no formalismo de Newton, deixamos de ter um sistema descrito pelas trajetórias de  $n$  partículas num espaço de tridimensional, e passamos a ter uma única partícula percorrendo uma trajetória num espaço  $N = 3n$  dimensional.

Alternativamente, podemos dizer que cada estado do sistema é determinado especificando velocidade e posição em um determinado instante, e assim o conjunto de todas as posições, e de todas as velocidades possíveis (vetores tangentes à posição) é chamado espaço de fase da velocidade. Um espaço  $2N$  dimensional, com coordenadas  $q^i, \dot{q}^i$ . Que pode ser visto também como o espaço das condições iniciais possíveis para as equações de movimento.

Aqui, retomamos ao conceito do espaço de fase. É importante destacar que, um espaço de fase é, a princípio, um espaço cujos pontos são determinados por um conjunto qualquer de variáveis  $(q^i, \dot{q}^i)$  com  $i = 1, \dots, N$  onde  $\dot{q}^i$  é apenas um vetor, sem qualquer restrição. Não se trata da derivada de nada. É mais um abuso de notação, ao considerarmos  $q^i = q^i(t)$  e  $\dot{q}^i = \dot{q}^i(t)$  como a curva que descreve a trajetória do movimento. E para o caso específico do espaço das velocidades, os vetores  $\dot{q}^i$  é a curva tangente à  $q^i$ ,  $\dot{q}^i = \frac{dq^i}{dt}$ . De modo que, apesar de haver inúmeras curvas possíveis, somente essa está relacionada com uma curva no espaço de configuração.

Há ainda a possibilidade de se definir o espaço de fase estendido das velocidades, que consiste simplesmente de se adicionar um eixo temporal ao espaço de fase das velocidades. A utilidade ao fazê-lo, é que muitas quantidades físicas de interesse são funções nesse espaço, inclusive a própria Lagrangiana. O uso dos espaços de fase podem variar de acordo com o sistema trabalhado. Na determinação de muitas equações de movimento é útil o emprego de leis de conservação, que diminuem a quantidade de graus de liberdade no sistema e possibilitam, se não a solução, uma melhor análise do sistema.

A partir da formulação analítica da mecânica quântica, tanto a Lagrangiana quanto a hamiltoniana, é possível se escrever leis de conservação em termos de simetrias do sistema. Uma delas é conservação da energia (não necessariamente mecânica), em que temos a simetria de translação no tempo. Ela ocorre quando a lagrangiana não possui dependência



explícita do tempo:

$$L = L(q(t), \dot{q}(t)) \iff \frac{\partial L}{\partial t} = 0$$

De modo que a derivada temporal total da Lagrangiana em relação ao tempo, pela regra da cadeia, é:

$$\frac{dL}{dt} = \frac{\partial L}{\partial q^i} \dot{q}^i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \ddot{q}^i \quad (3.26)$$

E, dado que a curva  $q^i(t)$  satisfazem as equações de Euler-Lagrange, pode se mostrar que a seguinte relação é válida:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \dot{q}^i - L \right) = 0 \quad (3.27)$$

E o termo entre parêntesis é definido como a Energia Canônica:

$$E(q, \dot{q}, t) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \dot{q}^i - L. \quad (3.28)$$

Assim, podemos classificar imediatamente dois tipos de sistemas mecânicos. Um que possui dependência temporal explícita na função Lagrangiana, e por isso é representado com uma função no espaço de fase estendido das velocidades e que não apresenta conservação de energia. E outro, em que não essa dependência temporal, e portanto são melhor representados no espaço de fase das velocidade, denominados sistemas conservativos.

Para esse tipo de sistema existe ainda uma formulação mais adequada da física, e ainda mais poderosa do que a Lagrangiana, o formalismo de Hamilton.

### 3.3 Formalismo Hamiltoniano

Apesar de sua imensa utilidade, e de sua clara superioridade em relação à formulação de Newton. A mecânica Lagrangiana assim como sua antecessora não é adequada em alguns situações, e nesse caso uma formulação posterior é mais poderosa, a Hamiltoniana. Podemos apontar como um problema no formalismo de Lagrange o fato de que, essencialmente é formulado em termos de  $N$  coordenadas, ainda que no espaço de fase das velocidades.

O formalismo de Lagrange fornece um maneira natural de descrever curvas no espaço, que é a partir dos vetores tangentes definidos em cada instante. Como só há uma curva que atende às equações de Euler-Lagrange no espaço de fase das velocidades  $\Omega$ , o conjunto de curvas fisicamente possíveis pode ser caracterizada por um campo vetorial. E uma maneira geometricamente natural de se fazer curvas num espaço é por meio de vetores tangentes, associados aos pontos da curva num instante  $t$ .

Mas como o espaço das lagrangiana é definido pelo conjunto  $(q^i, \dot{q}^i)$ , uma curva  $(q^i(t), \dot{q}^i(t))$  possui vetor tangente  $\vec{V}$  num tempo  $t$  dado pelas componentes  $(\frac{dq^i}{dt}, \frac{d\dot{q}^i}{dt})$ .

Assim, é fácil ver que

$$\frac{dq^i}{dt} = \dot{q}^i$$

mas precisamos determinar  $\frac{dq^i}{dt}$ , que é implicitamente definido pelas equações de Euler Lagrange no espaço de fase das velocidades, a partir da expressão:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j} \ddot{q}^j + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial q^j} \dot{q}^j + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial t} \quad (3.29)$$

Para obter uma expressão para  $\ddot{q}^i$ , o isolamos na equação de Euler Lagrange, assumindo que existe uma matriz inversa para  $\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j}$  e multiplicando nos dois lados da igualdade da equação, e isolando os termos. Assim, obtemos uma expressão do tipo:

$$\ddot{q}^i = f^i(q, \dot{q}, t) \quad (3.30)$$

E então teremos que um campo vetorial que define a dinâmica em  $\Omega$  possui componentes dadas por :

$$\vec{V} = (\dot{q}^i, f^i) \quad (3.31)$$

No entanto, ainda que seja uma forma possível, há uma dificuldade de se lidar com essa campo vetorial devido ao fato de que eles não está explícito. E suas componentes não são simétricas no espaço de fase. Daí surge a ideia de realizar a descrição do movimento em espaço de fase dos momentos, e portanto, a formulação do formalismo Hamiltoniano. Nesse formalismo, as equações de movimento são apenas a especificação do campo vetorial no espaço de fase de momento, e por sua vez a campo vetorial é determinado pela função hamiltoniana.

A princípio essa formulação também pode ser derivada do cálculo variacional partindo do princípio de Hamilton, seguindo um caminho bem parecido que o do Lagrangiano. Mas, uma forma ainda mais simples, partindo de uma função lagrangiana já definida é utilizar uma transformação de Legendre, para partir de um formalismo para o outro.

Para definir o espaço de fase dos momentos  $\Gamma$ , estabelecemos que esse é o espaço das coordenadas e momentos canônicos  $(q^i, p_i)$ . No formalismo lagrangiano é possível identificar por meio da definição do momento na mecânica newtoniana, o momento canônico como função em  $\Omega$ :

$$p_i(q, \dot{q}, t) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}, \quad (3.32)$$

e assim as equações de Euler-Lagrange podem ser reescritas:

$$\frac{dq^i}{dt} = \dot{q}^i, \quad \frac{dp_i}{dt} = \frac{\partial L}{\partial q^i} \quad (3.33)$$

Que são fundamentalmente tangentes à curvas existentes no espaço de fase dos momentos. Mas, no entanto, ainda não pode-se definir dessa forma pois o Lagrangiano

é uma função no espaço de configuração, ou no espaço de fase das velocidades. Assim é necessário portanto, sair de uma função das variáveis  $(q^i, \dot{q}^i, t)$  para uma com variáveis  $(q^i, p^i, t)$ , cujas as curvas no espaço de fase

$$q^i = q^i(t); \quad p_i = p_i(t)$$

são definidas especificando, suas tangentes

$$\frac{dq^i}{dt} = F^i(q, p, t), \quad \frac{dp_i}{dt} = G_i(q, p, t),$$

isto é, suas equações de movimentos. Que assim como no formalismo lagrangiano, são obtidas a partir de uma única função.

Para especificarmos essa nova função com o momento canônico no lugar das velocidades generalizadas, e assim irmos de um espaço de fase para o outro basta, como já foi dito, realizar a transformação de Legendre. Assumindo que  $p_i(q, \dot{q}, t) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}$  pode ser resolvido de modo a expressar as velocidades em termos das variáveis  $(q, p)$ :

$$\dot{q}^i = \dot{q}^i(q, p, t)$$

definimos a partir da Transformada de Legendre o Hamiltoniano:

$$H(q, p, t) = p_i \dot{q}^i(q, p, t) - L(q, \dot{q}(q, p, t), t) \quad (3.34)$$

E considerando a derivada total da função Lagrangiana:

$$dL = \frac{\partial L}{\partial q^i} dq^i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} d\dot{q}^i + \frac{\partial L}{\partial t} dt \quad (3.35)$$

e, a derivada do Hamiltoniano a partir da transformada de Legendre supracitada,

$$\begin{aligned} dH &= \dot{q}^i dp_i + p_i d\dot{q}^i - \left(\frac{\partial L}{\partial q^i}\right)_{\dot{q},t} dq^i - \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right)_{q,t} d\dot{q}^i + \left(\frac{\partial L}{\partial t}\right)_{q,\dot{q}} dt \\ &= \dot{q}^i dp_i - \left(\frac{\partial L}{\partial q^i}\right)_{\dot{q},t} dq^i + \left(\frac{\partial L}{\partial t}\right)_{q,\dot{q}} dt, \end{aligned} \quad (3.36)$$

e identificando com a derivada total, a partir da regra da cadeia

$$dH = \frac{\partial H}{\partial q^i} dq^i + \frac{\partial H}{\partial p^i} dp^i + \frac{\partial H}{\partial t} dt$$

temos

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial H}{\partial q^i}\right)_{p,t} &= - \left(\frac{\partial L}{\partial q^i}\right)_{\dot{q},t}, \\ \left(\frac{\partial H}{\partial p^i}\right)_{q,t} &= \dot{q}^i, \\ \left(\frac{\partial H}{\partial t}\right)_{q,p} &= - \left(\frac{\partial L}{\partial t}\right)_{q,\dot{q}} \end{aligned} \quad (3.37)$$

De modo que as equações de movimento no espaço de fase do momento, são simplesmente:

$$\dot{q}^i(t) = \frac{\partial H}{\partial p^i} \quad (3.38)$$

$$\dot{p}_i(t) = -\frac{\partial H}{\partial q^i} \quad (3.39)$$

E como podemos, ver a menos de um sinal negativo, as coordenadas canônicas e os momentos canônicos são definidos de maneira simétrico. Outra característica das curvas em  $\Gamma$  que satisfazem as equações de Hamilton, é que o valor numérico do Hamiltoniano será equivalente à energia canônica das curvas correspondentes em  $\Omega$ . E as condições de conservação de Energia dadas por  $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$  e  $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$ , são equivalentes.

As equações de Hamilton geram, para um sistemas de  $N$  graus de liberdade,  $2N$  equações diferenciais de primeira ordem, enquanto as Equações de Euler-Lagrange geram  $N$  equações diferenciais de segunda ordem. Isso acontece pois, diferentemente do caso lagrangiano, não há qualquer conexão a priori entre as variáveis canônicas,  $p_i$  e  $q^i$

E portanto, o formalismo Hamiltoniano serve, também de método na física para se escrever equações diferenciais de ordem superior como equações diferenciais de primeira ordem. E assim, podemos utilizar naturalmente da definição para sistemas dinâmicos definidos por equações diferenciais no início do trabalho, e nos beneficiar da facilidade análise geométrica para esse tipo de EDO.

Muitos resultados incríveis surgem do formalismo Hamiltoniano, além dos já citados, como por exemplo a mutabilidade do funcional do Hamiltoniano ao se modificarem as variáveis canônicas, que permitem ampliar a quantidade de transformações possíveis num sistema, inclusive de modo a simplificar a solução de equações de movimento. E também, por servir de base a diferentes áreas da física, como a mecânica quântica e a mecânica estatística.

No entanto, iremos nos limitar nesse trabalho a essa breve discussão, tendo como enfoque as possíveis maneiras de se expressar um sistema dinâmico, algumas de suas diferenças topológicas e ferramentas que nos permitam escrever equações de movimento. Essa análise se dá porque a teoria Caótica é uma teoria fundamentalmente topológica, e se expressa com algumas características e fenômenos próprios dependendo do tipo de sistema em que surge.

## 4 Análise de Sistemas Dinâmicos

Como já abordado brevemente, o Caos surge como uma consequência direta da não linearidade de sistemas dinâmicos, ou de maneira mais específica, da não integrabilidade. Todo o conjunto de métodos de solução analítico são insuficientes para se chegar a uma solução exata nesse tipo de sistemas, de modo que para se obter informações a respeito deles, é preferível o uso de métodos geométricos.

Para isso, o espaço de estados, uma expansão do espaço de fase estudados na mecânica analítica, é o melhor espaço para se descrever esse tipo de sistema. Aqui a estrutura do espaço pode ser visto, sem levar em conta especificidades de definições específicas. Matematicamente, é uma variedade diferenciável dotada de funções suficientemente suaves que descrevem a evolução temporal do sistema em termos de suas variáveis, que podem ser finitas ou não.

No entanto, é suficiente considerar o espaço de fase das velocidades para os problemas que serão apresentados nesse trabalho, com o adendo de que as variáveis não necessitam ser as coordenadas espaciais de um sistema mecânico, nem atender às equações de Euler Lagrange.

A ideia de se definir sistemas a partir do espaço de fase possui uma grande gama de aplicações na física, principalmente na mecânica estatística e na mecânica quântica. É útil, principalmente devido a sua generalidade podendo se aplicar a variáveis dos mais diversos tipos de sistemas, e fornece uma forma mais holística de se abordar um problema.

Em contraste ao caso comum onde se busca soluções fechadas para as equações do sistema e, então, são delimitadas as trajetórias no espaço. É preferível uma abordagem geométrica para o caso de sistemas complexos, para lidar com não linearidade. Nela é realizado a operação reversa à usual: desenhar as trajetória por argumentos geométricos e estudar o comportamento do sistema a partir de seu desenho no espaço de fase. Essa abordagem também é facilitada pro caso onde apesar de não se obter soluções analíticas, é possível uma solução de ordem numérica.

É nesse sentido que é enfatizado o papel do computador moderno para a consolidação da Teoria Caótica. Somente com a capacidade de cálculo - e mais recentemente a capacidade gráfica - que as teorias do início do século XX puderam ser melhor contempladas e aprimoradas. E a solução de equações diferenciais ordinárias através de métodos numéricos fornece um método de análise ainda mais facilitado.

Uma abordagem geral para essa análise de sistemas não lineares, sugerida em [12], é:

1. Encontrar pontos fixos do sistema;
2. Identificar estabilidade do sistema;
3. Usar condições iniciais próximo aos pontos fixos para identificar possíveis trajetórias do sistema;
4. Identificar outras estruturas não lineares como o Atrator Estranho e Ciclos Limites;
5. Identificar bifurcações.

E a partir dessa estrutura, auxiliada pelo cálculo numérico de equações diferenciais e construções de gráfico, é possível traçar uma ideia básica sobre sistemas não lineares, e um vislumbre na origem do Caos pode ser feito.

## 4.1 Equações Diferenciais e Pontos Fixos

O ponto de partida, para se estudar um sistema dinâmico, onde emerge Caos determinístico, é a partir de suas equações de movimento. Considerando o caso das equações diferenciais [2.4], temos:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_1(x_1, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= f_n(x_1, \dots, x_n)\end{aligned}$$

Por propósito de simplicidade, realizaremos essa discussão para sistemas autônomos, em que não há dependência explícita da variável independente. Apesar disso, sistemas não-autônomos podem ser abordados de forma semelhante considerando para uma variável independente temporal  $x_{n+1} = t$ , e:

$$\frac{dx_{n+1}}{dt} = 1, \quad (4.1)$$

de modo que um grau de liberdade a mais é levado em conta no espaço de fase, e uma trajetória estacionária é obtida.

Um exemplo é a equação do pêndulo simples unidimensional:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0 \quad (4.2)$$

Essas equações podem ser melhor visualizadas como um campo vetorial, uma função que varia no espaço de fase em termos das coordenadas, para o caso unidimensional:

$$\dot{x} = f(x).$$

E em uma analogia física, pode ser enxergado também como um fluxo de alguma partícula imaginária.

Nesse sentido, é importante definir pontos onde o fluxo é estacionário,  $\dot{x}^* = f(x^*) = 0$ , em todos os instantes de tempo. Esses pontos, chamados de pontos fixos, representam, em um gráfico, os pontos onde há uma mudança de direção no fluxo. E, assim, representam soluções de equilíbrio para equação de movimento, pois para um sistema que parte da posição inicial  $x = x^*$ , o sistema irá permanecer em  $x(t) = x^*$  todo o tempo, desconsiderando-se eventuais perturbações.

Os pontos fixos são classificados em termos do comportamento do sistema em sua vizinhança. Uma definição inicial é entre estáveis e instáveis. Considerando um ponto de fase, como aquele que caminha ao longo da direção do fluxo. O ponto fixo será estável se em sua vizinhanças, o ponto de fase caminhar em sua direção, e instável, se caminhar na direção oposta.

Outra terminologia adotado para esses pontos é: atratores, ou escoadouros quando são estáveis, e fontes ou repelentes, quando são instáveis. A melhor maneira de visualizar tal configuração é num retrato de fase, um gráfico no espaço de fase contendo informações quanto aos pontos fixos e às direções do fluxo no espaço do sistema

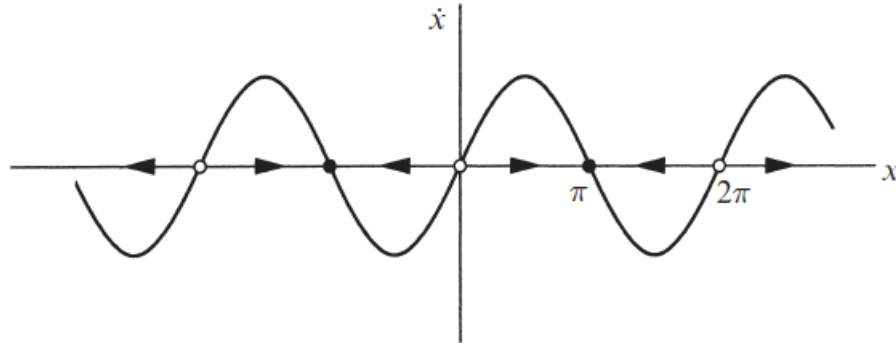


Figura 1 – Retrato de fase de  $f(x) = \sin x$ . Fonte: [16].

Os pontos fixos são um dos elementos mais importante do retrato de fase, e a partir deles propriedades básicas de um sistema podem ser aferidas. E um ponto de partida para classificá-los, é por meio da análise da estabilidade linear que para o caso unidimensional que consiste, como o nome sugere, simplesmente de se linearizar o sistema a partir de expansão em série de potências. Para o caso unidimensional, escrevemos uma perturbação  $a(t)$  em torno de  $x^*$ :

$$a(t) = x(t) - x^*,$$

uma expansão em séries de Taylor, em torno dessa perturbação nos dá:

$$f(x) = f(x^* + a) = f(x^*) + af'(x^*) + O(n^2) \quad (4.3)$$

E ao se desprezar os termos de ordem superior, e levando em conta que o ponto fixo  $f(x^*) = 0$ . Então

$$\dot{\eta} = \eta f'(x^*). \quad (4.4)$$

Que nos diz que se  $f'(x^*) > 0$  então a perturbação cresce com o tempo e o ponto de fixo é instável e se  $f'(x^*) < 0$  a perturbação decresce, e o ponto fixo é estável, o que é equivalente a definir se  $x^*$  é um ponto de mínimo ou máximo. No entanto, vale salientar que a linearização só é válida para quando  $f'(x^*) \neq 0$ , e quando os termos de ordem superior são pequenos. Isto é, a estabilidade de um sistema é, a priori, um conceito local. De maneira quantitativa, a quantidade de tempo necessária para que  $x(t)$  varie significativamente em torno de  $x^*$  é  $1/f'(x^*)$ , o tempo característico de escala.

No entanto, o comportamento num sistema unidimensional é essencialmente monotônico: ou o fluxo seguirá uma trajetória em que o ponto de fase alcance um ponto fixo estável ou dependendo das condições iniciais, irá se afastar e explodir para os infinitos. Por causa disso, há pouco a se introduzir num caso unidimensional.

A exceção é o campo vetorial num círculo, em que ainda surge periodicidade, mas devido a topologia do sistema. Nele a variável é  $\theta$ , e assim seu movimento está restrito a um círculo com equação de movimento:

$$\dot{\theta} = f(\theta) \quad (4.5)$$

Para se definir um campo vetorial num círculo, deve-se limitar ao caso em que a condição de periodicidade  $f(\theta) = f(\theta + 2\pi)$  é satisfeita. Caso contrário, surgirá o problema de que as velocidades não estarão unicamente definidas. Por exemplo para o campo vetorial  $\dot{\theta} = \theta$ , a posição  $\theta = 0$ , tem uma velocidade 0, já em  $\theta = 2\pi$ , a velocidade é  $2\pi$ . No entanto, essas posições são a mesma num círculo, e devido a essa ambiguidade, esse não é um campo vetorial válido.

A importância desse tipo de sistema, está no fato de que osciladores não lineares, um dos alvos de estudos precursores do desenvolvimento em sistemas não lineares, podem ser entendidos como campos vetoriais num círculo.

O sistema mais simples a se pensar nesse caso, é aquele em que a velocidade angular  $\dot{\theta} = \omega$  é constante, com solução  $\theta(t) = \omega t + \theta_0$ . Cujas soluções possuem período  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ . No entanto, um pouco mais interessante é o caso do oscilador não uniforme

$$\dot{\theta} = \omega - a \sin \theta$$

Cujo comportamento é definido em termos do parâmetro  $a$ . Quando  $a = 0$  o oscilador retorna para o caso uniforme, quando  $a \neq 0$  o parâmetro gera uma não uniformidade: a velocidade do fluxo será máximo em  $\theta = -\pi/2$  e mínimo em  $\theta = \pi/2$ . Esse comportamento



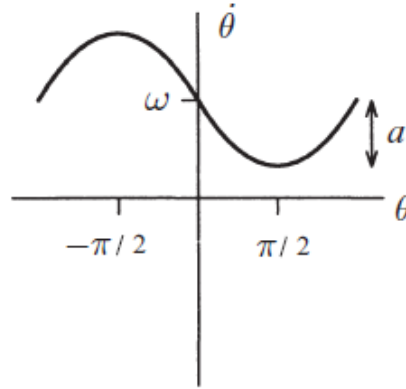


Figura 2 – Retrato de fase do oscilador não linear,  $f(x) = \omega - a \sin x$ . Fonte: [16].

pode ser definido com uma bifurcação sela-nó. Isto pois um ponto fixo é criado ou alterado ao redor desse ponto ao se variar o parâmetro  $a$ .

Quando,  $a < \omega$  não há pontos fixos no sistema, o movimento muito mais rápido ao redor de  $\theta = \pi/2$  do que no resto do sistema  $a = \omega$ , surge um ponto fixo em  $\theta = \pi/2$ , por meio de bifurcação sela-nó, e o sistema deixa de ser oscilatório. Já em  $a > \omega$ , o ponto fixo anterior se divide em 2, e agora temos um ponto fixo instável e um ponto fixo estável, cuja posição depende do valor de  $a$ .

A análise linear desse sistema nos mostra que o ponto fixo é satisfeito quando:  $\sin \theta^* = \omega/a$  e  $\cos \theta^* = \pm \sqrt{1 - (\omega/a)^2}$ , e sua estabilidade linear é determinada por  $f'(\theta^*) = -a \cos \theta^* = \mp \sqrt{1 - (\omega/a)^2}$ . E portanto  $\cos \theta^* = \sqrt{1 - (\omega/a)^2} > 0$  é o ponto fixo estável, e  $\cos \theta^* = -\sqrt{1 - (\omega/a)^2} > 0$  é o ponto fixo instável.

O período desse sistema pode ser obtido simplesmente a partir da integração de  $dt$  no intervalo 0 até  $2\pi$ .

$$T = \int dt = \int_0^{2\pi} = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\omega - a \sin \theta}$$

Cuja solução é

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega^2 - a^2}},$$

e se reduz para o caso uniforme quando  $a = 0$ . A medida que o parâmetro vai diminuindo e o ponto fixo vai diminuindo, e um pouco após desaparecer completo sua presença no sistema pode ser sentida por meio da desaceleração percebida pelo sistema em volta do ponto fixo.

#### 4.1.1 Sistemas Bidimensionais

O caso unidimensional é um bom ponto de partida para o estudo de sistemas dinâmicos, no entanto sistemas bidimensionais são mais apropriados para a apresentação

de conceitos básicos da não linearidade. A equação de movimento pode ser escrita por equações diferenciais ordinárias de segunda ordem, ou duas equações de primeira ordem:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2)\end{aligned}$$

Devido ao aumento de complexidade do sistema, uma abordagem interessante a fim de se desenvolver métodos que nos permitam estudar sistemas não-lineares, é considerar o comportamento de sistemas lineares, em que uma solução analítica é possível.

Sua forma geral é:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= ax + by \\ \dot{y} &= cx + dy\end{aligned}\tag{4.6}$$

onde a,b,c,d são parâmetros. Que pode ser colocado na forma matricial:

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}\tag{4.7}$$

onde

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\tag{4.8}$$

Pelo princípio da superposição, qualquer solução do sistema pode ser escrita em termo de duas soluções particulares  $\mathbf{x}_1$  e  $\mathbf{x}_2$ , por meio de combinação linear  $\mathbf{x}_2 + c_2\mathbf{x}_1$ .

Essas soluções podem ser enxergadas como trajetórias se movendo num plano  $(x, y)$ , o de plano de fase.

Um dos exemplos mais fundamentais de sistema linear é o Oscilador Harmônico Simples:

$$m\ddot{x} + kx = 0\tag{4.9}$$

que pode ser definido no espaço de fase das variedades como:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= v \\ \dot{v} &= -\omega^2 x\end{aligned}\tag{4.10}$$

Esse sistema leva um vetor  $(\dot{x}, \dot{v}) = (v, -\omega^2 x)$  para cada ponto  $(x, v)$  do plano, e é portanto um campo vetorial nesse plano. É importante notar, como apesar de descrever um sistema em uma dimensão física, já que só existe movimento na direção  $x$  no espaço euclidiano, esse é um sistema bidimensional no espaço de fase.

Para análise bidimensional, se coloca um ponto de fase em algum lugar do sistema e então busca-se a descrição dos campo vetorial ao redor dele. Que será determinado com

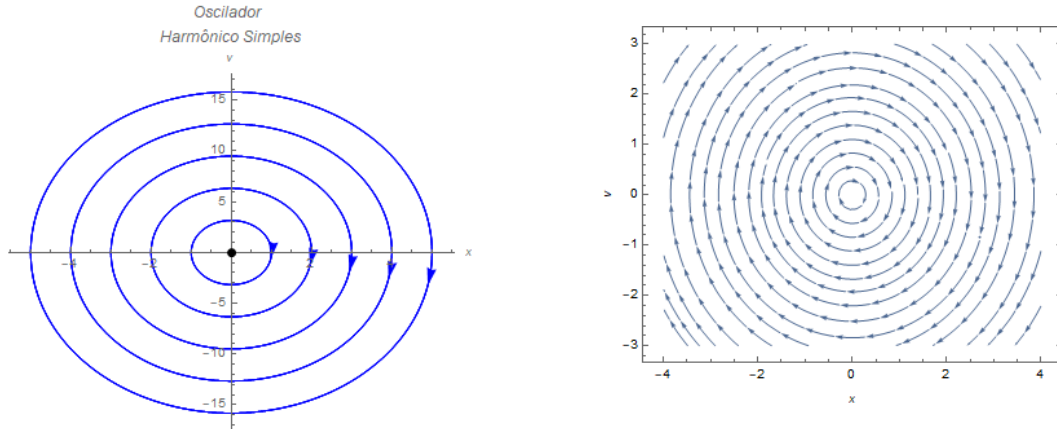


Figura 3 – Retrato de Fase e Campo Vetorial do Oscilador Harmônico Simples. Fonte: Autor

base na posição, e no comportamento da vizinhança dos pontos fixos, assim como no caso unidimensional.

No caso do oscilador harmônico há um ponto fixo na origem, e ao redor dele, órbitas fechadas que podem ser observadas através de um retrato de fase, através da seguinte equação:

$$\omega^2 x^2 + y^2 = C,$$

em que  $C \geq 0$  é uma constante.

O ponto fixo corresponde ao equilíbrio estático do sistema, já as órbitas fechadas correspondem a movimentos periódicos no sistema.

Uma possibilidade que existe em sistemas lineares é a de se escrever equações desacopladas, como o realizado na equação do oscilador, onde cada equação só possui dependência funcional de uma variável, e que está diretamente ligado ao princípio da superposição.

Por exemplo:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= ax \\ \dot{y} &= -y\end{aligned}\tag{4.11}$$

Cujas soluções são

$$\begin{aligned}x(t) &= x_0 e^{at} \\ y(t) &= y_0 e^{-t},\end{aligned}\tag{4.12}$$

dão origem a 5 casos distintos do ponto fixo  $x^*$ . Os gráficos para esses casos estão postos a seguir:

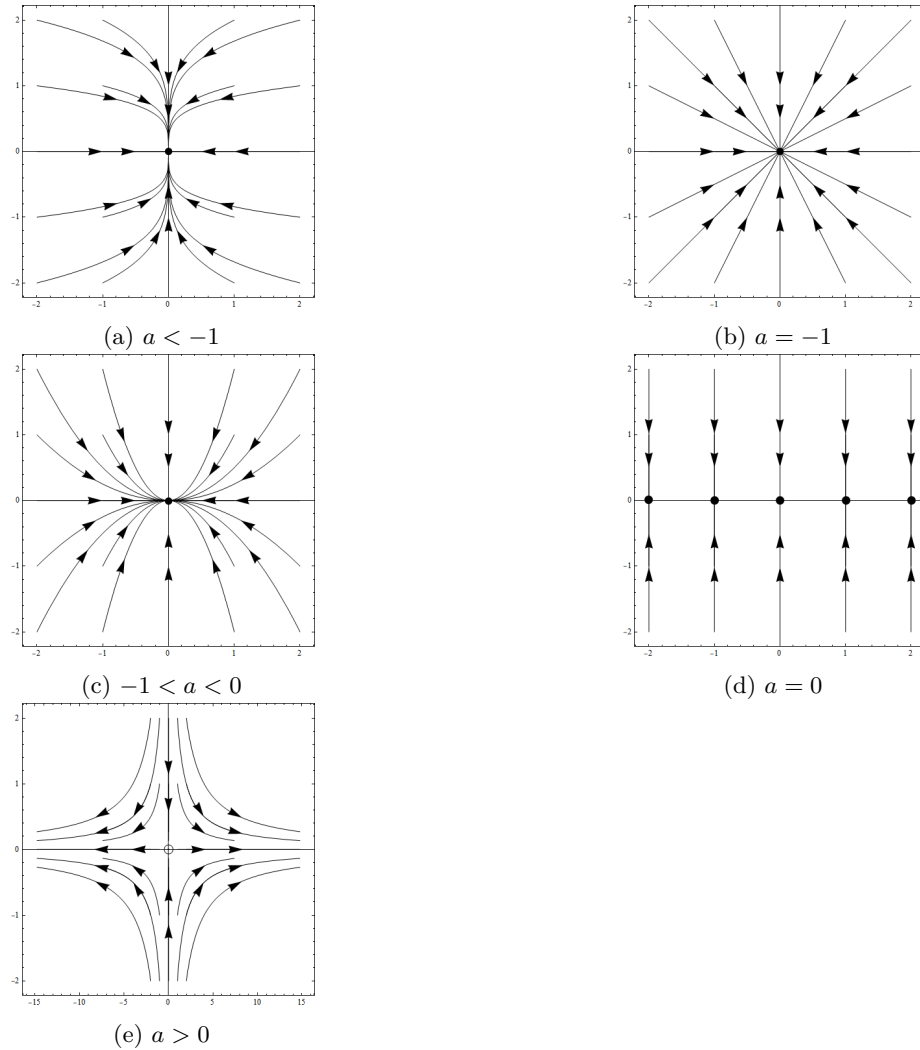


Figura 4 – Tipos de ponto fixos para um sistema linear as trajetórias ao redor desses pontos. Podemos identificar o tipo de estabilidade em cada ponto fixo, analisando apenas a direção de cada trajetória. Fonte: Autor

1. ( $a < -1$ ) :  $x(t)$  decai mais rapidamente do que  $y(t)$ , e todas as trajetórias se aproximam da origem através da direção mais lenta. Nesse caso, o ponto fixo  $x^* = 0$  é chamado de nó estável.
2. ( $a = -1$ ) :  $\frac{y(t)}{x(t)} = \frac{y_0}{x_0} = cte$ . E portanto, todas as trajetórias são linhas retas até a origem. Nesse caso o ponto fixo é um nó simétrico, ou estrela.
3. ( $-1 < a < 0$ ) : As trajetórias vão para a origem, de modo mais aproximado do eixo  $x$  do que do de eixo  $y$ .
4. ( $a = 0$ ) :  $x(t) = x_0$  é constante. Assim, ao longo do eixo- $x$  haverá uma linha de pontos fixos. Todas as trajetórias chegam a esse ponto através de linhas verticais.
5. ( $a > 0$ ) :  $x^*$  é um ponto instável. Todas as trajetórias vão para o infinito, a não ser que o sistema se inicie no eixo  $y$ . Nesse caso,  $x^* = 0$  é chamado ponto de sela. O eixo

y é chamada variedade estável do ponto de sela  $x^*$ . E o conjunto de condições iniciais para o qual  $x(t) \rightarrow x^*$  a medida que  $t \rightarrow \infty$

E assim podemos, enumerar as seguintes terminologias, em termos de estabilidade:

1. Quando todas as trajetórias que começam próximo do ponto  $x^*$  se aproximam dele a medida que  $t \rightarrow \infty$ , então  $x^*$  é chamado ponto fixo atrativo.
2. Se  $x(t) \rightarrow x^*$ , quando  $t \rightarrow \infty$  para todas as trajetórias do plano de fase, ele é chamado de globalmente atrativo.
3. Já levando em consideração todos os tempos, um ponto fixo é chamado de estável de Lyapunov quando todas as trajetórias que se iniciam suficientemente próximas de  $x^*$ , permanecem próximas do sistema em todos os momentos.

Quando o ponto fixo é estável de Lyapunov mas não é atrativo, então é chamado de neutralmente estável. Trajetórias próximas não são atraídas nem repelidas. É encontrado em sistemas físicos sem fricção.

Vale ressaltar que esses conceitos de estabilidade são independentes, entre si, podendo ocorrer ou não intercambiavelmente. Para o caso específico no qual as duas estabilidades ocorrem, o ponto é chamado de assintoticamente estável, ou simplesmente, **estável**. Já para o caso onde não há nenhuma das estabilidades, o ponto é chamado de **instável**.

Uma formulação geral pode ser feita para a análise do comportamento do sistema, tendo como base o caso de sistemas lineares. Para isso devemos levar em consideração que surgem determinadas direções, no caso bidimensional, que podem ser tratadas como referência para o movimento. Em especial, podemos definir trajetória em linha retas, que são trajetória estáveis, isto é uma vez que iniciado o movimento numa dessas trajetória, o sistema não irá abandonar a menos de uma grande perturbação. Essas trajetórias possuem a forma:

$$\mathbf{x}(t) = e^{\lambda t} \mathbf{v} \quad (4.13)$$

onde  $\mathbf{v} \neq 0$  é um vetor fixo a ser determinado, e  $\lambda$  é uma taxa de crescimento a ser determinada.

Se existir uma trajetória nessa forma, ela irá corresponder ao movimento exponencial ao longo da linha gerada por  $\mathbf{v}$

Para encontrar as condições para  $\lambda$  e  $\mathbf{v}$ . Basta substituir  $\mathbf{x}(t) = e^{\lambda t} \mathbf{v}$  em  $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$ . Assim obtemos  $\lambda e^{\lambda t} \mathbf{v} = e^{\lambda t} A\mathbf{v}$ . De modo que temos:

$$A\mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}, \quad (4.14)$$

uma equação de autovalores. Isto é, se existir, a linha que buscamos é um autovetor de  $A$  com autovalores correspondentes  $\lambda$ . Para solucionar essa equação, devemos solucionar a equação característica  $\det(A - \lambda I) = 0$ . Que no nos dá

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

de modo que a equação característica é :

$$\det \begin{pmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{pmatrix} = 0 \quad (4.15)$$

Cuja solução é:

$$\lambda^2 - \tau\lambda + \Delta = 0 \quad (4.16)$$

onde  $\tau = \text{tr}(A) = a + d$  e  $\Delta = \det(A) = ad - bc$ . E assim as soluções são:

$$\lambda_{1,2} = \tau \pm \frac{\sqrt{\tau^2 - 4\Delta}}{2} \quad (4.17)$$

Portanto os autovalores só dependem do traço e do determinante da matriz. Para o caso onde os autovalores são  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  então o teorema da existência e da unicidade da álgebra linear nos garante que  $\mathbf{v}_1$  e  $\mathbf{v}_2$  são linearmente independentes e portanto geram todo o plano. De modo que qualquer condição inicial pode ser escrito em termos dos autovetores, como  $\mathbf{x}_0 = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2$ .

E assim  $\mathbf{x}(t)$  tem solução geral da forma:

$$\mathbf{x}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \mathbf{v}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} \mathbf{v}_2 \quad (4.18)$$

que é única para  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ .

No entanto, estamos mais interessados em classificar o tipo de ponto fixo do sistema, isso é feito por meio dos autovalores do sistema, que pode ser sumarizado através equação de autovalores como:

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(\tau \pm \sqrt{\tau^2 - 4\Delta}), \Delta = \lambda_1 \lambda_2, \quad \tau = \lambda_1 + \lambda_2 \quad (4.19)$$

Dessa equação, temos a equação característica  $(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = \lambda^2 - \tau\lambda + \Delta = 0$

Quando  $\Delta < 0$ , os autovalores são reais e tem sinais opostos. E por isso, o ponto fixo é um ponto de sela. Se  $\Delta > 0$  os autovalores pode ser reais com o mesmo sinal: os pontos fixos são nós, ou conjugados complexos: os pontos fixos serão ou espirais ou centros.

Os nós satisfazem a condição de que  $\tau^2 - 4\Delta > 0$ , e os espirais satisfazem  $\tau^2 - 4\Delta < 0$ . Na fronteira desses dois tipos de pontos fixos  $\tau^2 - 4\Delta = 0$ , estão os nós estrelas e os nós degenerados.

Em termos de estabilidade. Quando  $\tau < 0$ , ambos os autovalores possuem parte real negativa, e o ponto fixo é estável. Espirais instáveis e nós possuem  $\tau > 0$ , e para o caso  $\tau = 0$  estão os centros neutralmente estáveis. Ainda, se  $\delta = 0$  pelo menos um dos autovalores é nulo, e então a origem não é um ponto fixo isolado. Pode haver, nesse caso, uma linha de pontos fixos, ou um plano de pontos fixos. Em geral, centros, estrelas, nós degenerados e pontos fixos não isolados constituem casos limites.

Uma maneira de melhor representar essa classificação, é por meio do seguinte diagrama:

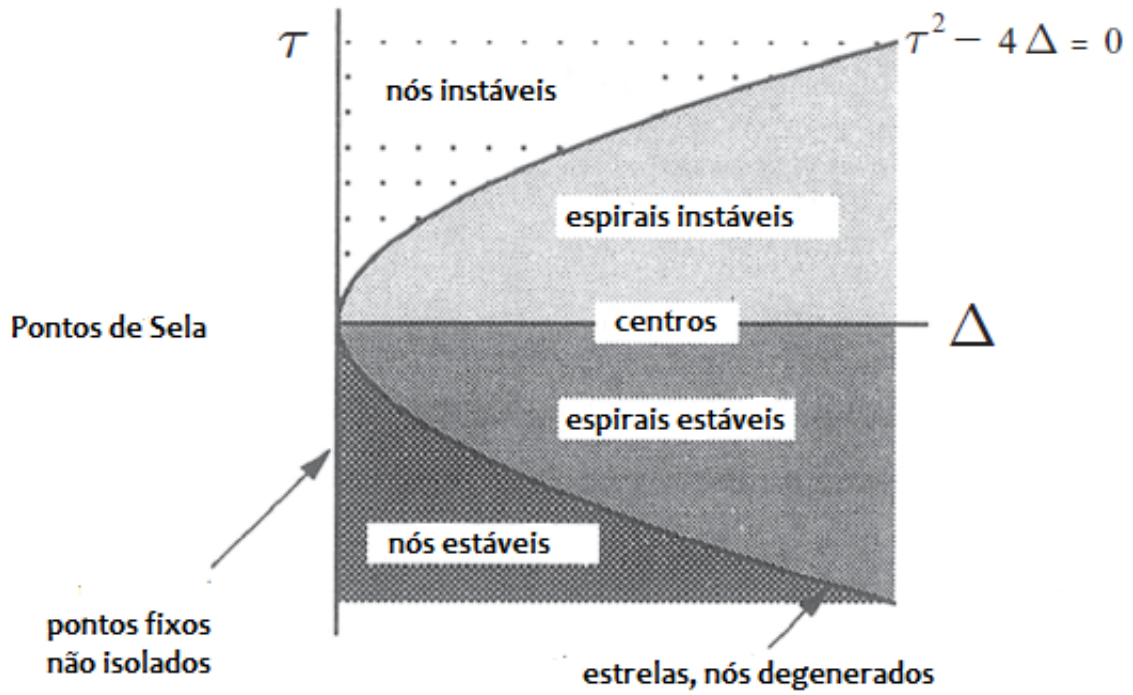


Figura 5 – Classificação de pontos fixos num sistema dinâmico. Fonte: [16]

A importância de se considerar e classificar esse tipo de movimento, está justamente no fato de que uma vez que atendamos certos limites, esse tipo classificação é suficiente e serve de norte para as possíveis evoluções temporais que o sistema pode descrever. E de modo ainda mais geral, a técnica de linearização permite-nos aplicar tais conceitos ao comportamento local dos pontos fixos em sistemas não lineares.

Para isso, vemos que, dado o sistema:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, y) \\ \dot{y} &= g(x, y),\end{aligned}\tag{4.20}$$

E supondo que  $(x^*, y^*)$  é um ponto fixo:

$$f(x^*, y^*) = 0, g(x^*, y^*) = 0$$

e que

$$u = x - x^*, v = y - y^*$$

são perturbações do sistema, pode-se mostrar facilmente, expandindo em séries de potências em torno de  $u$  e  $v$ , que :

$$\dot{u} = u \frac{\partial f}{\partial x}(x^*, y^*) + v \frac{\partial f}{\partial y}(x^*, y^*) + O(u^2, v^2, uv)\tag{4.21}$$

e

$$\dot{v} = u \frac{\partial g}{\partial x}(x^*, y^*) + v \frac{\partial g}{\partial y}(x^*, y^*) + O(u^2, v^2, uv)\tag{4.22}$$

E considerando o caso onde os termos lineares são não nulos, e portanto dominam sobre os termos quadráticos temos:

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix}_{(x^*, y^*)} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\tag{4.23}$$

Onde

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix}_{(x^*, y^*)}\tag{4.24}$$

é a matriz Jacobiana calculada no ponto fixo  $(x^*, y^*)$ .

E assim, podemos usar a equação de autovalores 4.19 para a matriz  $A$ , para a análise do ponto fixo localmente.

No entanto, essa classificação só é válida, em sistemas não lineares, quando o pontos fixo for uma sela, um nó ou um espiral, os casos que não estão na fronteira. Já os outros termos são afetados pelos termos de ordem superior, negligenciados para essa análise.



## 4.2 Bifurcações

Parâmetros, como já discutimos, são constantes de movimentos, invariantes perante toda a dinâmica do sistema. E por isso, mesmo quando são mensuráveis, não são consideradas como observáveis/variáveis do sistema. Apesar disso, a dinâmica global de um sistema pode mudar completamente ao se variar um parâmetro, e fenômenos completamente diferentes podem surgir.

Possivelmente o exemplo mais notável, observado na física, é o do Número de Reynolds  $Re$  na Mecânica dos Fluidos, que define a razão entre forças inerciais e forças viscosas atuando num fluido. Sua importância está em delimitar uma região, ou condições, para o tipo de fluxo no fluido. Para  $Re$  baixos, o fluxo é laminar e suas propriedades básicas podem ser bem delimitadas, mas quando  $Re$  é suficientemente alto, o fluxo passa a ser turbulento e nenhum método exato é suficiente para solucioná-lo.

Apesar da dinâmica em sistemas unidimensionais ser limitada na ótica das suas coordenadas, ele é suficiente para que surjam comportamentos interessantes. E de fato, um dos modelos caóticos mais simples, o já citado mapa logístico, é unidimensional.

Para verificar quando surge esse comportamento, é preciso que olhemos para o espaço dos parâmetros. Onde as equações passarão a descrever curvas de bifurcação.

Quando os parâmetros variam numa equação, mudanças qualitativas podem ser observadas em valores específicos, chamados de pontos de bifurcação. Surgimento ou destruição de pontos fixos são observados, mudanças de estabilidades.

Apesar de não ocorrerem no caso unidimensional, a variação na quantidade de órbitas fechadas também são bifurcações. E assim, uma definição mais específica para bifurcação é a de uma mudança na estrutura topológica no retrato de fase.

Existem vários tipos de bifurcações, de acordo com o tipo de comportamento dos pontos fixos. Essas bifurcações, nos casos unidimensionais, podem ser identificadas por meio de suas formas normais. Mas o tipo de comportamento básico é geral para mais dimensões, ainda que existam mais tipos de bifurcações nessa última hipótese.

Essas equações a priori podem ser colocadas na forma normal para o tipo de bifurcação. Isso pode acontecer através de alguns processos, uma mudança de variáveis adequada e reorganização dos coeficientes, e para algumas circunstâncias, seja para a equação normal ou para alguma aproximação específica,

Uma equação de movimento não linear de expressão simples pode, a priori, ser colocada em forma adimensional e então comparada a forma normal para se obter o tipo de bifurcação e até mesmo informações quantitativas sobre sua dinâmica. No entanto, em geral isso não pode ser feito, a forma exata de uma equação do movimento não é conhecida e por isso, as noções qualitativas podem ser mais relevantes.

Podemos definir 3 tipos de bifurcação no caso unidimensional. A bifurcação de nó-sela, a bifurcação transcritical, e a bifurcação forquilha. Esta última, que é simétrica por definição, e que possui uma forma assimétrica, chamada de bifurcação imperfeita.

O modo como pontos fixos são criados ou destruídos é através de bifurcação de nó-sela, que possui a forma normal, ou, exemplo prototípico:

$$\dot{x} = r + x^2 \quad (4.25)$$

$r$  é um parâmetro que pode ser positivo, negativo ou zero. De acordo com seu valor surgem os pontos fixos.

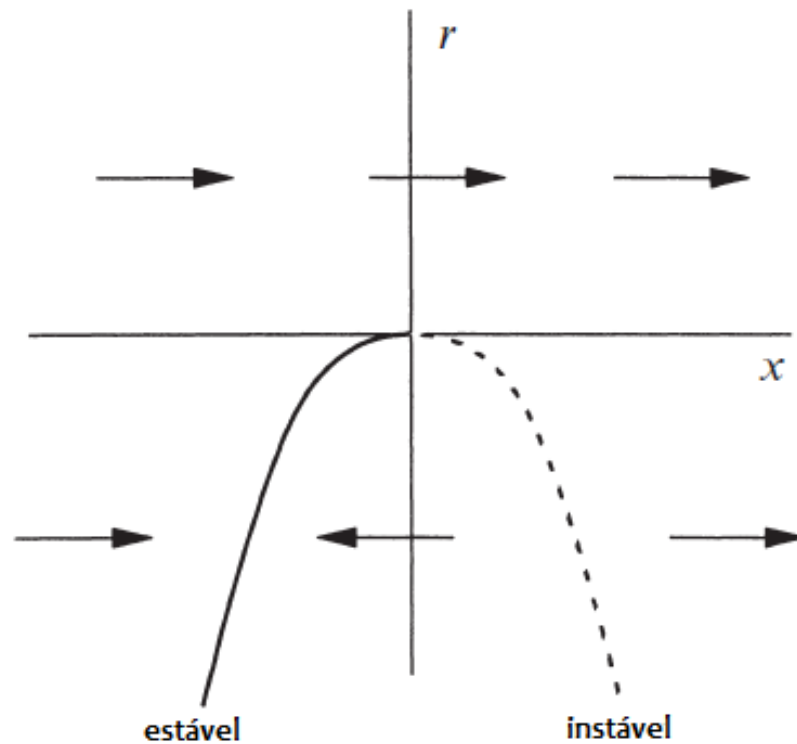


Figura 6 – Bifurcação Sela-nó no espaço de parâmetros. Fonte: [16]

- Os diagramas podem ser visualizados em termos dos pontos fixos e da linearização. Caso  $\dot{x} = f(x) = r - x^2$ , onde  $f'(x^*) = -2x^*$ . Cujos pontos fixos são  $x^* = \pm\sqrt{r}$ . Para  $r > 0$ , dois pontos fixos na linha dos reais. Para  $r < 0$  nenhum. E para  $r = 0$  a indica que  $f'(x^*) = 0$ , que indica que a linearização some quando os pontos fixos se juntam.

Em geral esse tipo de diagrama é útil pois, suficientemente próximo do ponto de bifurcação sela-nó pode se aproximar a forma do sistema por

Bifurcação Transcritical: Ocorre em situações onde não há variação na quantidade de pontos fixos no sistema. Só modifica o tipo de estabilidade dos pontos fixos, chamado troca de estabilidades.

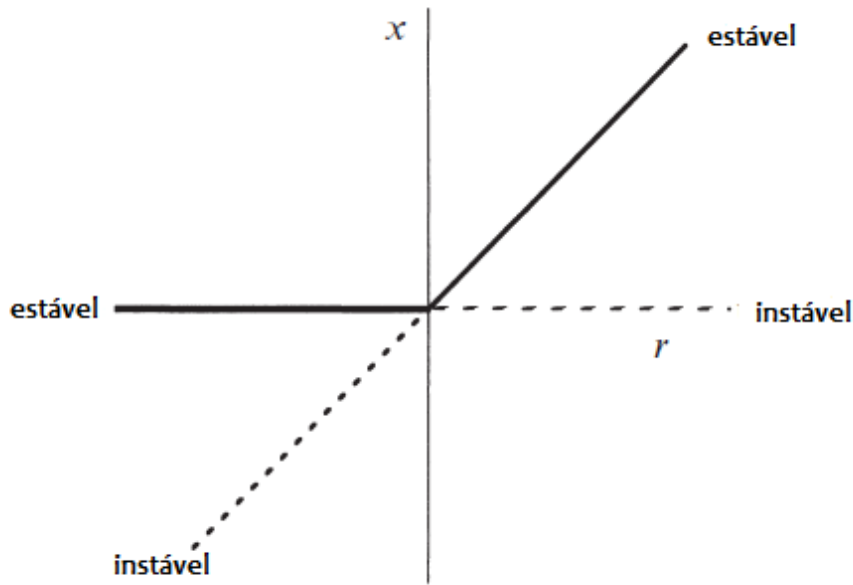


Figura 7 – Bifurcação Transcrítica no espaço de parâmetros. Fonte: [16]

Forma Normal

$$\dot{x} = rx - x^2 \quad (4.26)$$

Bifurcação Forquilha: Dois tipos Supercrítico e Subcrítico Comum em problemas que possuem simetrias. Nesse caso pontos fixos aparecem e desaparecem em pare simétricos. Forma normal :

$$\dot{x} = rx \pm x^3 \quad (4.27)$$

Para o caso, onde o termo cúbico é positivo temos um bifurcação supercrítica, para o termo cúbico negativo, temos uma bifurcação subcrítica. Dizemos que no primeiro caso o termo cúbico é estabilizante e no segundo e desestabilizante . Podemos ver a simetria dessa equação através da invariância sobre mudança de variáveis  $x \rightarrow -x$ .

Supercrítico:  $r < 0$ . Ponto fixo estável somente na origem,  $r = 0$  ponto fixo estável ainda na origem, mas menos estável pois o decaimento é devagar. Para  $r > 0$ , pontos fixos localizados simetricamente em  $x^* = \pm\sqrt{r}$ . O nome forquilha se deve a forma do gráfico.

Subcrítico: Só há pontos fixos em  $r < 0$ , em  $x^* = \pm\sqrt{-r}$ , nesse caso os pontos fixos são instáveis. A origem é estável para  $r < 0$  e instável para  $r > 0$  é instável. Quando  $r > 0$ , o termo cúbico e o termo linear contribuem de modo que o sistema explode rapidamente para o infinito. No entanto, em modelos físicos reais essa instabilidade é suprimida por termos de ordem o maior.

Assim, o exemplo canônico para o caso subcrítico é:

$$\dot{x} = rx + x^3 - x^5 \quad (4.28)$$

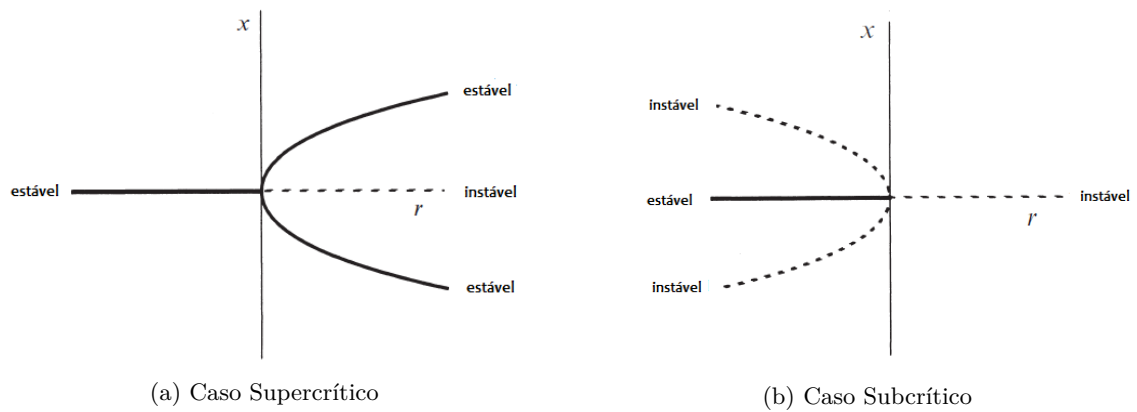


Figura 8 – Bifurcação Forquilha no espaço de parâmetros. Fonte:[16]

A instabilidade devido ao termo cúbico, é suprimida pelo termo quártuplo num ponto  $r = r_s$ , onde surgem ramos de longa amplitude. Assim, para  $r_s < r < 0$  existem dois estados estáveis coexistindo: a origem e os pontos fixos de larga amplitude. Assim, o ponto de estabilidade para o qual o sistema há de evoluir é dado pela condição inicial  $x_0$ .

Podemos perceber duas características dos sistemas devido dessa coexistência de pontos estáveis:

O sistema possui estabilidade local na origem. Mas estabilidade global nos demais pontos fixos. De modo que, a origem só permanece estável sob pequenas perturbações.

E devido a isso, há a possibilidade de histerese quando o  $r$  é variado. Se o sistema inicia no estado  $x^*=0$ , e não o parâmetro  $r$  é acrescentado aos poucos. Nesse caso o sistema permanecerá na origem até  $r=0$ , onde o sistema se tornará instável e qualquer perturbação fará o sistema ir para uma dos ramos. No entanto, se agora decrescermos  $r$  até  $r=0$ , o sistema não retornará para a origem, é necessário decrescer até que  $r < r_s$ . Essa inconsistência na reversibilidade é chamada de histerese.

### 4.3 Ciclos Limites

Como é possível perceber pelo retrato de fase do Oscilador Harmônico Simples, alguns sistemas possuem solução com órbita fechada, o que implica movimento periódico. Se é realizada uma alteração nas condições iniciais, ou nos parâmetros do sistema, então a trajetória descrita será outras órbitas fechadas, com um período diferente. Para esse caso uma solução periódica  $\mathbf{x}(t)$  está rodeada por uma família de orbitas fechadas de um parâmetro,

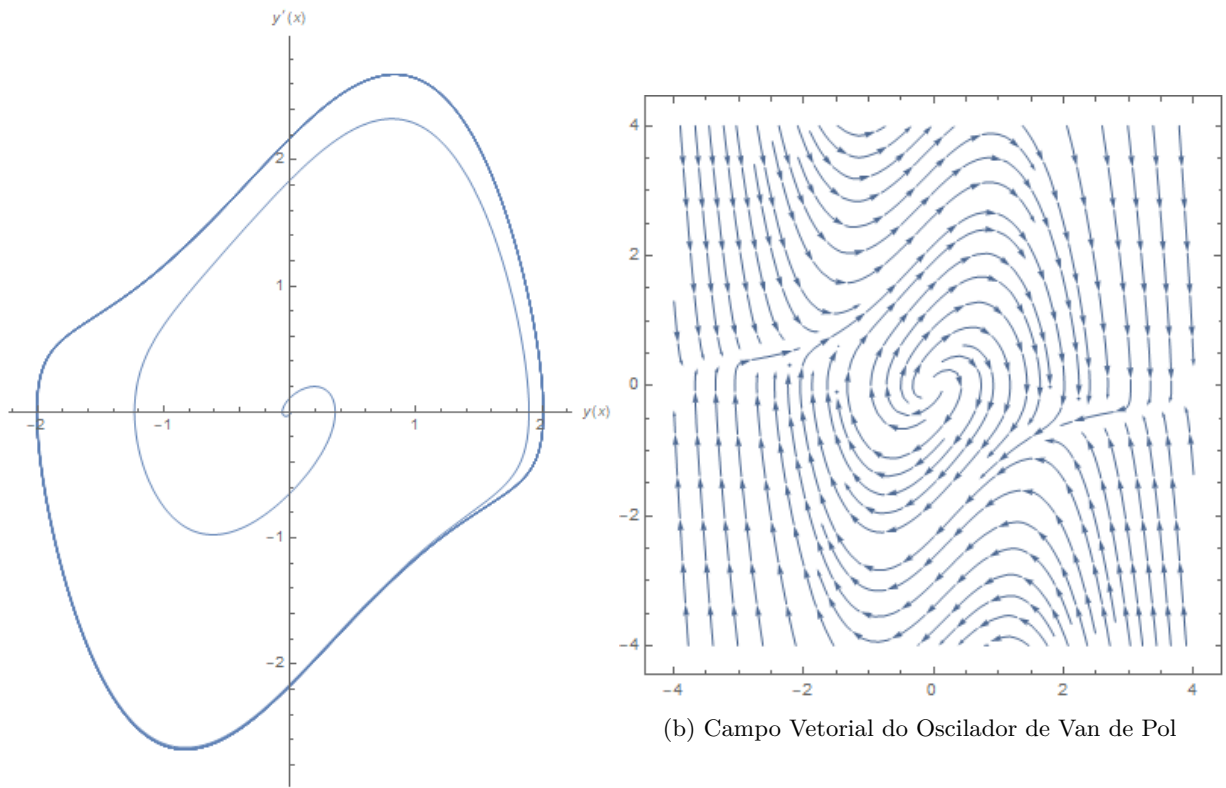
Já para de sistemas não lineares, surgem ciclos limites: órbitas fechadas isoladas, no sentido de que nenhuma outra trajetória ao redor dela será fechada. As trajetórias vizinhas descrevem espirais se distanciando, ou afastando do ciclo limite. A importância dos ciclos limites está em delimitar uma amplitude preferível ao sistema, que ao sofrer

perturbações retorna à trajetória padrão. De modo que só há uma oscilação determinada pela estrutura do sistema. Diferente do caso linear, onde uma perturbação irá cair em outra trajetória fechada, e assim, persistir pra sempre.

Um exemplo clássico de ciclo limite é apresentado pelo oscilador de Van der Pol:

$$\ddot{x} + \mu(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0 \quad (4.29)$$

um circuito não linear, onde o amortecimento  $\mu(x^2 - 1)$  atua de modo que quando  $|x| > 1$  o amortecimento é positivo, e quando  $|x| < 1$  o amortecimento é negativo, e o movimento do sistema é restrito a uma única oscilação estável, determinada pelo parâmetro  $\mu \geq 0$ . Um método geral para se encontrar ciclos limites ainda é objeto de pesquisa. No



(a) Retrato de Fase do Oscilador de Van der Pol

Figura 9 – **Oscilador de Van der Pol**  $\mu = 1$ . A partir do campo vetorial, é possível ver que as trajetórias no espaço de fase tendem a ir para o Ciclo Limite, representado no retrato de fase. Fonte: Autor

entanto, alguns métodos e teoremas podem ser utilizados de modo a definir se existe ou não um ciclo limite para uma equação diferencial. Um caso específico, que pode ser utilizado para a equação de Van der Pol é o do Teorema de Lienard, que define às condições de existência para uma equação na forma:

$$\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = 0 \quad (4.30)$$

No entanto, a principal ferramenta para definir se há um ciclo limite em um sistema é o teorema de Poincaré-Bendixson, que diz que dado uma região finita  $R$  do plano entre

duas curvas simples fechadas  $D_1$  e  $D_2$ , em que  $\vec{F}$  é o campo vetorial do sistema, então o sistema possuirá um órbita fechada em  $R$ , se:

1. Em cada ponto de  $D_1$  e  $D_2$ , o campo  $\vec{F}$  aponta em direção ao interior de  $R$ , e
2.  $R$  não possui pontos críticos

Outro teorema existente para sistemas  $n$ -dimensionais não lineares que daremos sem prova é o Teorema da Unicidade e Existência que determina que para uma função contínua e continuamente diferenciável é garantido haver uma solução única num período em torno do tempo inicial.

Esse teorema possui a consequência direta de que não pode haver trajetórias que se intersectam no plano de fase, pois assim poderia ser possível construir duas soluções distintas partindo do mesmo ponto, e assim a solução não seria mais única. [Deve se ter cuidado para não se confundir uma solução de um sistema que evolui a partir de um mesmo estado do sistema em diferentes momentos, com diferentes soluções que se intersectam.]

Assim para o espaço de duas dimensões surge uma consequência topológica direta: Se há uma órbita fechada no espaço de fase, qualquer trajetória que se inicie dentro dessa órbita estará confinada lá para sempre. Nesse caso o teorema de Poincaré-Bendixson, em adição ao teorema da existência e da unicidade, nos diz que a trajetória poderá, ou se aproximar de um ponto fixo se houver algum dentro da órbita, ou se aproximar eventualmente da órbita fechada.

Do teorema de Poincaré-Bendixson não somente surgem formas de se definir a existência de ciclos limites num plano bidimensional. Mas de modo ainda mais importante, estabelece que numa região fechada todas as trajetórias se aproximarão de periodicidade, e portanto, não há possibilidade de movimento mais complicado em sistemas bidimensionais. Assim, para que exista Caos num sistema é necessário que ele possua uma dimensão  $n \geq 3$ , onde o teorema não mais se aplica. Nesse caso, as trajetórias podem se mover livremente dentro de uma região confinada do espaço e dão origem ao chamado atrator estranho.

Uma definição de um sistema de técnicas para lidar com a dinâmica não linear, e o fenômeno caótico seria um processo exaustivo. De modo que as propriedades apresentadas, têm mais função de construir intuição do que permitir uma análise completa, de modo que podemos utilizar o método de Runge-Kutta implementado em softwares como Matlab, Wolfram Mathematica, e também em bibliotecas livres de linguagem de programação, como o *Scipy* do *Python*.

## 5 Caos Determinístico

Não há um consenso quanto a definição de Caos, e suas classificações. Uma quantidade de propriedades diferentes podem caracterizar o movimento caótico, quando são consideradas equações diferenciais ordinárias, ou equações diferenciais parciais. O mesmo entre sistemas hamiltonianos e sistemas dissipativos. Strogatz [16] nos dá a definição simples de que Caos é um comportamento aperiódico de longo termo em um sistema determinístico, que exibe dependência sensível às condições iniciais. E esse fenômeno, segundo Gutzwiller [11], pode ser classificado de modo simples em 2 tipos: *Soft Chaos* ou Caos leve, quando há um conjunto de condições no sistema que levam o sistema de um movimento regular para um estado de Caos, e , *Hard Chaos* ou Caos duro, onde cada trajetória é isolada e aperiódica desde o para qualquer conjunto de parâmetros.

Historicamente, osciladores sempre foram os objetos mais básicos no estudo físico e de múltiplas finalidades. E o estudo de osciladores não-lineares foi de grande importância para o desenvolvimento da Teoria Caótica. Principalmente por serem os pêndulos alguns dos casos mais básicos de surgimento de fenômeno caótico: Em especial, destacam-se o pêndulo duplo, um sistema conservativo e o pêndulo forçado e amortecido, um sistema dissipativo.

Iremos abordar o pêndulo forçado, que apresenta Soft Chaos, e verificar como ocorre a evolução desse sistema, e enxergar o surgimento do estado de caos em abordagem semelhante à de Taylor [17], assim como verificar o surgimento dos atratores estranhos conforme um dos primeiros sistemas dinâmicos publicados a respeito, nas equações de Lorenz [13].

### 5.1 Pêndulo Forçado e Amortecido

A partir do pêndulo forçado e amortecido, é possível a partir de uma escolha de parâmetros apropriada, observar características fundamentais de sistemas não lineares discutidos no capítulo passado. Além de uma rota simples para o Caos.

Para o pêndulo normal, as equações de movimento são dadas por  $I\ddot{\phi} = \Gamma$ , onde  $I$  é o momento de inércia e  $\Gamma$  é o torque resultante atuando pra girar o sistema. No caso do pêndulo  $I = mL^2$ , e o torque é resultado de três forças que atuam no sistema. Uma força resistiva  $\beta v$  que exerce o torque  $-Lbv = -bL^2\dot{\phi}$ . E o torque devido a atração gravitacional,  $-mgL \sin \phi$

É possível se construir a equação de movimento para o pêndulo forçado e amortecido a partir do diagrama de forças newtoniano. Nele atuam três forças sobre o sistema: uma

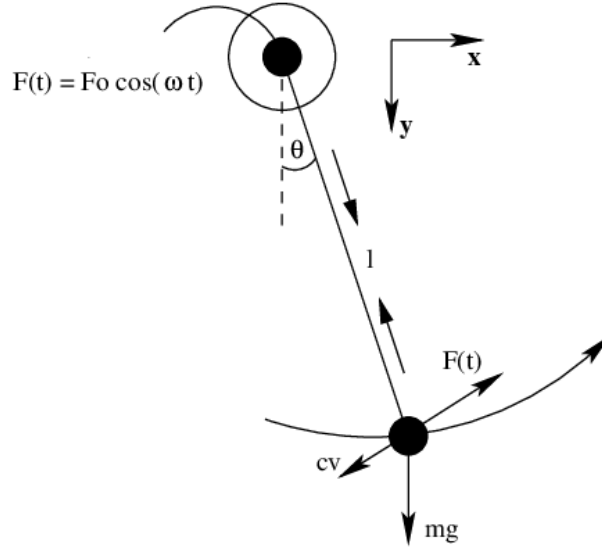


Figura 10 – **Diagrama de forças para o pêndulo forçado e amortecido.** Nele atuam três forças, a atração gravitacional constante, a força de amortecimento proporcional à velocidade e uma força motriz, com dependência explícita no tempo.

força resistiva de amortecimento que se opõe ao movimento, uma força motriz a princípio desconhecida, impulsionando-o, e a atração gravitacional, na direção negativa do eixo  $y$ . Considerando que o corpo do pêndulo é incompressível de comprimento invariante, podemos escrever a equação para esse movimento em coordenadas polares somente em termos do ângulo  $\phi$ .

$$mL^2\ddot{\phi} = -mgL \sin \phi - bL^2\dot{\phi} + F(t) \quad (5.1)$$

Essa equação é não autônoma uma vez que há um termo  $F(t) \neq 0$ . Muitas forças motrizes se aproximam de uma forma sinusoidal, e em experimentos com Caos já foram reproduzidos forças sinusoidais com precisão suficientemente boa, de modo que um caso interessante é o da forma:

$$F(t) = F_0 \cos(\omega t) \quad (5.2)$$

Onde  $F_0$  é chamado de amplitude de movimento ou amplitude da força motriz, e  $\omega$  é a frequência de condução.

A forma típica para essa equação é:

$$\ddot{\phi} + \frac{b}{m}\dot{\phi} + \frac{g}{L} \sin \phi = \frac{F_0}{mL} \cos \omega t \quad (5.3)$$

Onde os coeficientes são,  $\frac{b}{m} = 2\beta$  a constante de amortecimento,  $\frac{g}{L} = \omega_0^2$  onde  $\omega_0$  é a frequência natural do sistema. E a partir dela podemos introduzir parâmetros adimensionais, de modo a facilitar a análise do sistema, assim como sua manipulação numérica.



Assim, vemos que  $\frac{F_0}{mL}$  possui dimensão de  $[tempo]^{-2}$ , isto é, as mesmas unidades que  $\omega_0^2$ . Portanto é conveniente escrever  $F_0/mL = \gamma\omega_0^2$ . De modo que o parâmetro adimensional, que chamaremos de parâmetro de forçamento, é definido como:

$$\gamma = \frac{F_0}{mL\omega_0^2} = \frac{F_0}{mg}. \quad (5.4)$$

É o parâmetro  $\gamma$  que atuará como parâmetro de controle desse sistema, e irá determinar seu comportamento em termos de bifurcação. Quando  $\gamma < 1$  a força motriz é menor do que a força peso, e é esperado que o movimento seja relativamente pequeno, e bem comportado. Já para  $\gamma \geq 1$  a força motriz irá superar o peso do pêndulo, de modo que é esperado que hajam movimentos em maior escala.

Introduzindo esse parâmetro, temos que a equação diferencial para o pendulo amortecido e forçado é:

$$\ddot{\phi} + 2\beta\dot{\phi} + \omega_0^2 \sin \phi = \gamma\omega_0^2 \cos \omega t. \quad (5.5)$$

Para algumas condições, somos capazes de recuperar osciladores lineares a partir dessa equação.

Um primeira caso, é o de quando  $\phi$  é suficientemente pequeno, lançado próximo da posição de equilíbrio a baixa velocidade e o parâmetro de forçamento é baixo,  $\gamma \ll 1$ , de modo que  $\sin \phi = \phi$ .

Nesse caso, a equação se torna:

$$\ddot{\phi} + 2\beta\dot{\phi} + \omega_0^2 \phi = \gamma\omega_0^2 \cos \omega t \quad (5.6)$$

Que é uma EDO linear de segunda ordem não autônoma, cuja solução  $\phi = \phi_h + \phi_p$  é a combinação linear entre uma solução homogênea  $\phi_h$ , e uma solução particular  $\phi_p$ , onde :

$$x_h = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t} \quad (5.7)$$

A solução particular pode ser obtida, considerando que a equação [5.6] também deve possuir uma solução para  $\sin \omega t$ , já que esse pode ser considerado como  $\cos$  como uma diferença de fase na origem. Logo, temos

$$\ddot{\psi} + 2\beta\dot{\psi} + \omega_0^2 \psi = \gamma\omega_0^2 \sin \omega t \quad (5.8)$$

E assim, podemos escrever a partir dessas duas equações, para  $z(t) = \phi(t) + i\psi(t)$ :

$$\ddot{z} + 2\beta\dot{z} + \omega_0^2 z = \gamma\omega_0^2 e^{i\omega t}. \quad (5.9)$$

que possui solução  $z(t) = C e^{i\omega t} = A e^{i\omega t - \delta}$

Onde temos uma amplitude  $A$

$$A = \sqrt{\frac{f_o^2}{(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}, \quad (5.10)$$

e uma fase

$$\delta = \arctan\left(\frac{2\beta\omega}{\omega_o^2 - \omega^2}\right)$$

E a partir dessa solução podemos escrever a solução para a EDO original:

$$\phi(t) = A \cos(\omega t - \delta) + \quad (5.11)$$

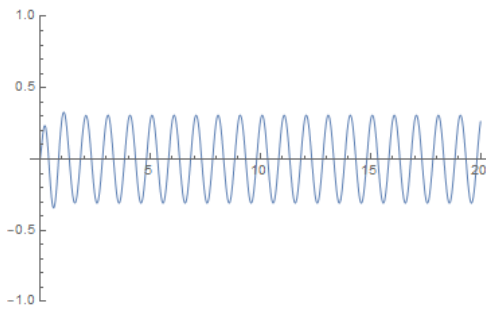
Assim, para pequenas oscilações o comportamento do sistema é de que o pêndulo depende das condições iniciais, mas as diferenças devido a elas rapidamente somem e o movimento do sistema pode ser dito como o de um atrator, em que o pêndulo oscila sinusoidalmente com uma frequência igual a da força motriz:

$$\phi(t) = A \cos(\omega t - \delta) + C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t} \quad (5.12)$$

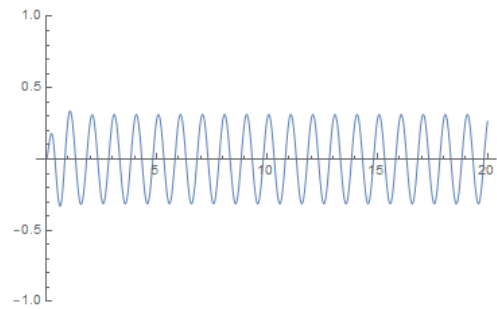
Essa equação irá dar origem a fatores transientes. Que diferenciam o tipo de sistema, devido às condições iniciais antes de entrarem no fase periódica. De modo que pode ser escrita também na forma:

$$\phi(t) = A \cos(\omega t - \delta) + A_{tr} e^{-\beta t} \cos(\omega_1 t - \delta_{tr}) \quad (5.13)$$

Onde  $A_{tr}$  e  $\delta_{tr}$  são constantes arbitrárias determinadas pelas condições iniciais.



(a) Solução para a aproximação linear [eq.5.6]



(b) Solução para a equação não linear [5.5]

Figura 11 – **Gráfico da evolução temporal do ângulo  $\phi$ .** A parte de um transiente quase imperceptível no começo, o gráfico produzido é o mesmo. Fonte: Autor

Podemos ver que para  $\gamma \approx 0.2$  essa aproximação é válida.

Afim de analisar o movimento do pêndulo em termos discretos, podemos escolher a frequência da força motriz para ser igual a  $\omega = 2\pi$ , e assim temos então que o período de chute será  $\tau = \frac{2\pi}{\omega} = 1$  e assim conseguimos plotar num gráfico o tempo como unidades do período da força motriz.

De igual modo, afim de se observar melhor o comportamento desse pêndulo, podemos escolher uma frequência natural próximo a ressonância, por exemplo  $\omega_0 = 1.5\omega$  de modo que a amplitude pela equação 5.10, e assim também é mais fácil de encontrar, para  $\gamma$  maiores, Caos.

Assim, vemos que o pêndulo amortecido e forçado em baixas amplitudes possui um comportamento de um oscilador linear amortecido, com forçamento sinusoidal: independentemente das condições iniciais, o movimento do sistema irá se aproximar, após de um atrator periódico com frequência igual à da força motriz.

A medida que a força motriz do sistema aumenta, e consequentemente o fator  $\gamma$  também, essa aproximação deixa de ser válida. E termos maiores da série de potências do cosseno começam a afetar a solução. Quando a força motriz é suficientemente alta de modo que a amplitude de oscilação não mais pode ser aproximada por  $\sin \phi = \phi$ . Mas, baixa o suficiente para que possamos corrigir utilizando o segundo termo da série expandida do seno, isto é:

$$\sin \phi \approx \phi - \frac{\phi^3}{6}$$

Obtermos uma equação de movimento descrita por:

$$\ddot{\phi} + 2\beta\dot{\phi} + \omega_0^2 \left( \phi - \frac{1}{6}\phi^3 \right) = \gamma\omega_0^2 \cos \omega t \quad (5.14)$$

A solução dessa equação pode ainda ser aproximada, quando  $\phi^3$  é pequeno, para uma equação semelhante à obtida no caso linear:

$$\phi(t) = A \cos(\omega t - \delta)$$

Que ao ser colocado na equação de movimento implicará que o termo  $\phi^3$  irá contribuir com um termo proporcional a  $\cos^3(\omega t - \delta)$ . E usando a propriedade :

$$\cos^3 x = \frac{1}{4}(\cos 3x + 3 \cos x)$$

Surgirá na equação de movimento um termo proporcional a  $\cos 3(\omega t - \delta)$ . Como não há um termo semelhante no membro direito da equação, no da força motriz, deverá haver portanto em algum dos termos da esquerda essa dependência temporal. Podemos expressar portanto, que a solução geral deve ter forma:

$$\phi(t) = A \cos(\omega t - \delta) + B \cos 3(\omega t - \delta) \quad (5.15)$$

onde  $B \ll A$

Esse argumento pode ser repetido de modo a produzir soluções melhoradas. E assim ao se introduzir a solução repetidamente nas equações de movimento, o termo cúbico irá gerar termos cada vez menores da forma  $\cos(n\omega t)$ , com  $n$  inteiro maior que 3.

Da mesma forma surgirão correções na solução  $\phi(t)$  com termos cada vez menores de  $n\omega$ . Esses termos que oscilam numa frequência igual a um múltiplo inteiro de  $\omega$  são chamadas de harmônicos da frequência de chute.

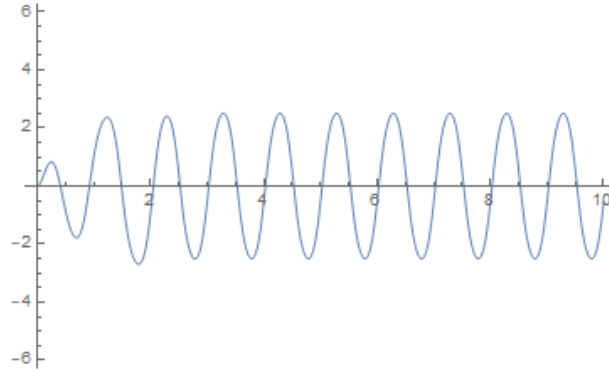


Figura 12 – **Gráfico da evolução temporal da posição  $\phi$  para o parâmetro  $\gamma = 0.9$ .** A aproximação fornecida pela equação [5.15] apesar de ajudar a compreender o comportamento do sistema não é suficiente para produzir gráfico semelhante para esse coeficiente.

Assim uma característica da não linearidade desse sistema é gerar oscilações de período menor, a medida que a força motriz cresce, sendo o de  $n = 3$  o mais relevante. Para o  $n$ -ésimo harmônico vemos que seu período é:

$$\tau_n = \frac{2\pi}{n\omega} = \frac{\tau}{n}$$

De modo que para cada oscilação da força motriz com período  $\tau$  ocorrem  $n$  oscilações dos harmônicos.

Esses harmônicos contribuem de modo a alterar a forma do movimento do sistema, e afastá-lo de um movimento puramente sinusoidal, apesar de que no caso considerado os coeficientes dos harmônicos são pequenos.

No entanto, ainda que haja alteração do movimento para o caso linear, o movimento do pêndulo continua sendo periódico, e ainda irá produzir um atrator periódico após a fase transiente, com o único porém de que agora o movimento é afetado pelo surgimento dos harmônicos.

### 5.1.1 Rota para o Caos: Cascada de Duplicação de Período

Uma coisa notável da diferença entre os casos lineares e aproximadamente lineares, é que no segundo a fase transiente do sistema é bem mais prolongada. Isso é característico de sistemas não lineares. Para muitos conjuntos de valores paramétricos em especial aqueles que se aproximam da ressonância, essas fases transientes são de longa duração e remetem pouco a periodicidade. Um problema simétrico que também pode ocorrer é o do sistema demonstrar haver uma dinâmica aperiódica, mas que em estágios iniciais a evolução temporal se assemelhe a um período. E assim, um intervalo inadequado de análise

| $t$ | $\phi(t)$ |
|-----|-----------|
| 33  | 6.03656   |
| 34  | 6.03667   |
| 35  | 6.03659   |
| 36  | 6.03665   |
| 37  | 6.03660   |

Tabela 1 – **Valores numéricos para os ciclos do pêndulo com  $\gamma = 1.06$ .** É perceptível a convergência dos valores, a parte de algumas casas decimais.

pode gerar conclusões equivocadas. Nesses casos um gráfico contendo toda a evolução temporal do sistema poderia ser insuficiente para contemplar toda a dinâmica do sistema. Ou mesmo a sequência numérica poderia exaustiva de igual forma. E assim, incorreríamos num problema, de um intervalo mais curto não ser capaz de delinear o comportamento global de um sistema, e de um intervalo muito longo conter um excesso de informações não relacionadas, que de igual modo dificultam sua análise.

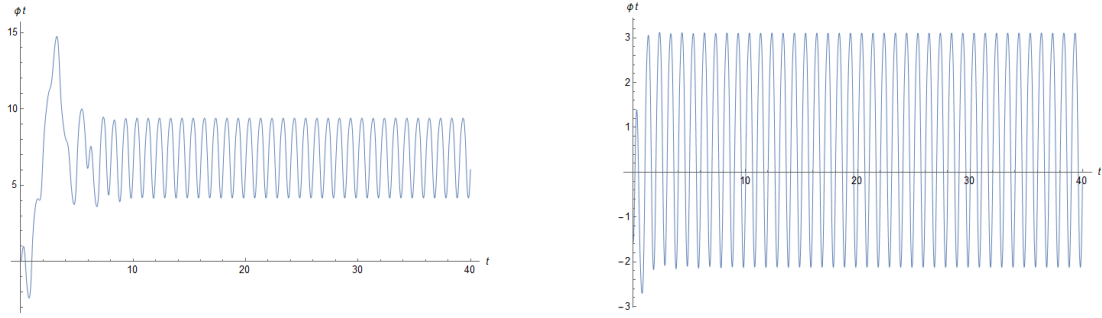
Em especial, ao se lidar com periodicidade, é mais conveniente resumir a comparação de termos não a segmentos completos de um ciclo, mas apenas um ponto, em geral os vales ou as cristas. Podemos usar esse método a nossa favor de modo a discretizar a variável tempo no sistemas. Para isso, ao invés de verificar as soluções da EDO para todos os instantes de tempo, basta selecionar um tempo inicial  $t_0$ , de preferência suficientemente longo para que as fases transientes tenha desvanecido, e a partir de então contar cada instante de tempo discreto com um ciclo a mais desse tempo inicial. No caso, considerando que os parâmetros estão determinados de modo que o ciclo possui valor  $\tau = 1$ . Então  $\phi(t)$  estará plota num gráfico em intervalos de um ciclo  $t = t_0, t_0 + 1, t_0 + 2, \dots$

Esse procedimento em especial, é especialmente importante quando se deseja montar diagramas de bifurcação, onde os valores da variável a serem inseridos do gráfico é somente aqueles dos ponto de estabilidade.

Considerando essa análise podemos ver que para o caso de  $\gamma = 1.06$  o pêndulo evolui para uma dinâmica periódica, figura [13a], e nesse sentido não é muito diferente da dinâmica para  $\gamma = 0.9$ . São necessários 33 ciclos para que o movimento do pêndulo para  $\gamma = 1.06$  se torne periódico, para até 4 dígitos significativos, iniciando a contagem a partir de  $\phi(0) = 0$ . Que pode ser visto na tabela [1]:

No entanto, a partir daqui a dinâmica do pêndulo evolui bem mais rapidamente, com a variação do parâmetro  $\gamma$ , do que anteriormente. De já também, pode-se notar o surgimento de outro atrator. Considerando o caso das condições iniciais alteradas de  $\phi(0) = 0$  para  $\phi(0) = -\frac{\pi}{2}$ , temos:

Quando se considera o parâmetro  $\gamma 1.073$ , novamente se encontra uma fase transiente que rapidamente dá lugar a uma dinâmica periódica. As diferentes condições iniciais variam além da fase transiente, os valores em que ocorre a periodicidade. No entanto, é visível



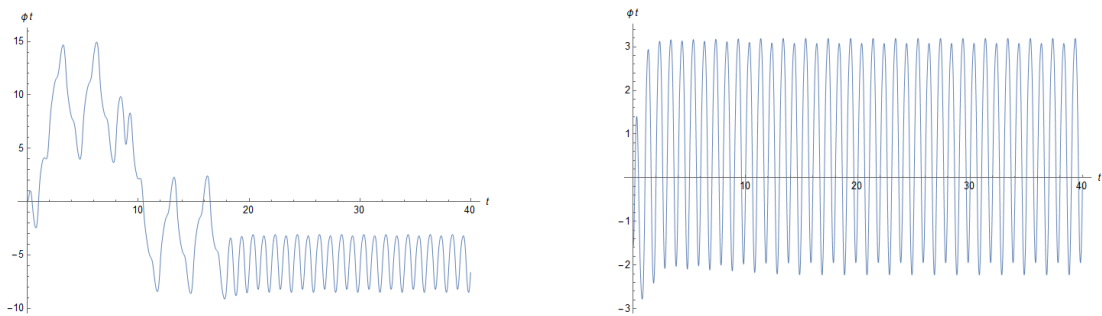
(a) Solução para  $\gamma = 1.06$ , e condições iniciais  $\phi(0) = 0$  e  $\dot{\phi}(0) = 0$  (b) Solução para  $\gamma = 1.06$ , e condições iniciais  $\phi(0) = -\frac{\pi}{2}$  e  $\dot{\phi}(0) = 0$

Figura 13 – **Evolução temporal de  $\phi(t)$  para  $\gamma = 1.06$ .** A fase transiente parecer acabar no décimo ciclo, somente após cerca de 30 ciclos o movimento se torna periódico. Fonte: Autor

pelos gráficos, mais notadamente para  $\phi(t) = -\frac{\pi}{2}$  que há uma alternância entre diferentes picos e vales. E pela análise de ciclos é possível perceber que há uma alternância entre dois máximos e mínimos distintos nesse caso.

Para verificar que esse não é apenas mais um comportamento transiente, pode-se facilmente solucionar numericamente  $\phi(t)$  para intervalos distintos, e para uma quantidade suficiente de ciclos, e notar que não é o caso, como podemos ver na tabela[].

Vemos aqui que o movimento possui período dois, e que o período desse movimento é o dobro do período do caso linear. É importante notar que esse caso difere dos harmônicos, no sentido que os harmônicos possuem frequência igual a um múltiplo da frequência da força motriz. Já nesse caso, temos sub harmônicos onde a frequência é  $\omega/n$ , um submúltiplo das frequências de chutes. Nesse caso, no entanto, a contribuição do sub harmônico não é significativa para o sistema.



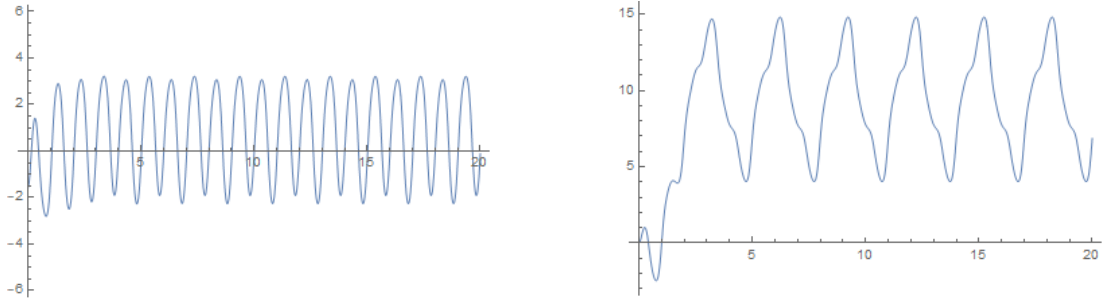
(a) Solução para  $\gamma = 1.073$ , e condições iniciais  $\phi(0) = 0$  e  $\dot{\phi}(0) = 0$  (b) Solução para  $\gamma = 1.073$ , e condições iniciais  $\phi(0) = -\frac{\pi}{2}$  e  $\dot{\phi}(0) = 0$

Figura 14 – **Evolução temporal de  $\phi(t)$  para  $\gamma = 1.077$ .** Após a fase transiente, o sistema chegará num estado estável, com período duplo. Melhor observado no atrator que evolui ao longo do eixo x. Fonte: Autor

Podemos mais uma vez variar o parâmetro para  $\gamma = 1.077$ , e encontraremos agora um sistema de período três, mas dessa vez com sub harmônicos que contribuem significativamente, de fato é o termo dominante.

Outro caso interessante que surge aqui. Para  $\gamma = 1.077$ , e as condições iniciais

$\phi(0) = \dot{\phi}(0) = 0$  a curva gerada possui período três. Já aquelas com  $\dot{\phi} = 0, \phi(0) = -\pi/2$  o movimento é completamente diferente, nesse caso possui um período dois. Diferentemente dos atratores anteriores, que apesar de oscilarem entre valores diferentes, possuíam a mesma quantidade de períodos.

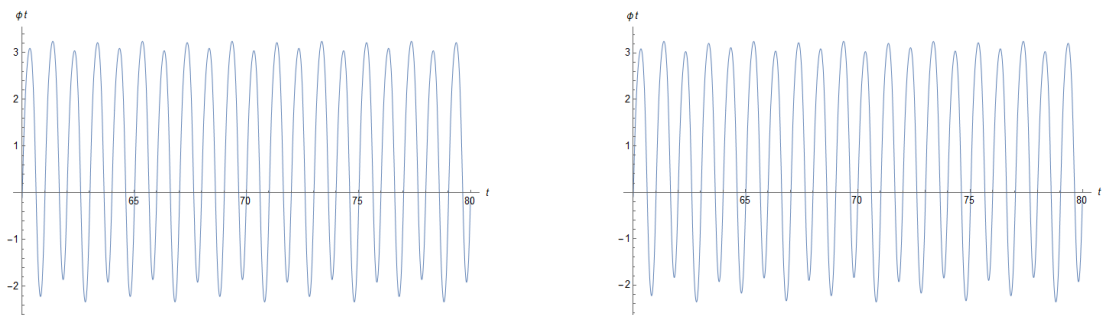


(a) Solução para  $\gamma = 1.077$ , e condições iniciais  $\phi(0) = 0$  e  $\dot{\phi}(0) = 0$  (b) Solução para  $\gamma = 1.077$ , e condições iniciais  $\phi(0) = -\frac{\pi}{2}$  e  $\dot{\phi}(0) = 0$

Figura 15 – **Evolução temporal de  $\phi(t)$  para  $\gamma = 1.077$ .** Diferentemente dos casos anteriores onde o sistema possuía atratores com o mesmo período, nesse caso temos atratores com diferente quantidade de períodos. Fonte: Autor

Vemos aqui atuando duas características já citadas. Os ciclos limites, que garantem a permanência de órbitas em atratores próprios desde que não hajam perturbações muito grandes, e as bifurcações, que nesse caso geraram 2 ciclos limites. Que mais uma vez diferem sistemas não lineares dos sistemas lineares, que possuem atratores únicos.

O comportamento que se segue ao se aumentar progressivamente o parâmetro de forçamento  $\gamma$ , agora a partir do segundo conjunto de condições iniciais,  $\dot{\phi} = 0, \phi(0) = -\pi/2$ , é que o sistema evolui de modo a dar origem ao que é chamado cascata de duplicação de período.



(a) Solução para a aproximação linear

(b) Solução para a  $\gamma =$

A diferença quantitativa entre cada novo conjunto de período que surge, para o sistema de pêndulo forçado, é relativamente pequeno, e por isso para se verificar experimentalmente/empiricamente esse fenômeno é necessário um arranjo bem arrojado do experimento, no entanto isso já foi feito. [3]

No entanto, o mais relevante quanto à cascata de duplicação de períodos é que inúmeros sistemas, de inúmeras naturezas, possuem um parâmetro de controle que ao ser

variado permite se observar o surgimento de períodos. Um dos casos mais simples é o mapa logístico. Cujas cascatas de duplicação de períodos está representada por meio de um diagrama de bifurcação na figura [17]. Da mesma forma, pode ser obtido o diagrama de bifurcação para o pêndulo forçado e amortecido, figura [18]

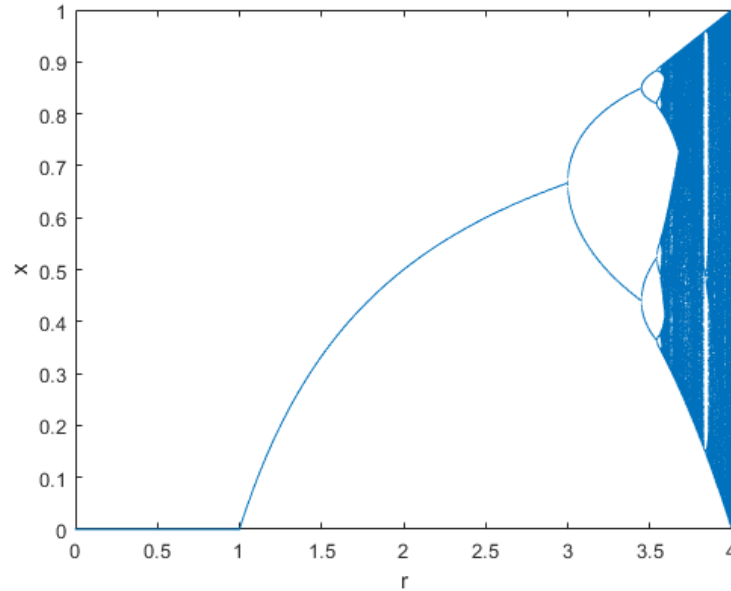


Figura 17 – **Diagrama de Bifurcação do Mapa Logístico.** O mapa logístico é um dos sistemas dinâmicos mais simples a exibir Caos, e cascata de duplicação de períodos. Fonte: Autor

A característica mais marcante desse fenômeno, além de sua enorme gama de naturezas/aplicações é que em todos os sistemas ele ocorre da mesma maneira, ou seja, é uma propriedade universal. As duplicações dos períodos ocorrem em valores específicos do parâmetro de controle do sistema, que são chamados de valores de limiar, os pontos de bifurcação já discutidos. Denotando  $\gamma_n$  o valor em que haverá uma duplicação de  $2^{n-1}$  para  $2^n$  períodos, e considerarmos as distâncias  $\gamma_n - \gamma_{n-1}$  é possível mostrar que ocorre um decaimento geométrico, isto é:

$$(\gamma_{n+1} - \gamma_n) \approx \frac{1}{\delta}(\gamma_n - \gamma_{n-1}) \quad (5.16)$$

No entanto, mais surpreendente é o fato de que essa progressão possui uma "aceleração geométrica" igual para inúmeros sistemas isto é, o mesmo valor de  $\delta$ :

$$\delta = 4.669201 \quad (5.17)$$

chamado de número de Feigenbaum, o responsável por demonstrar que muitos sistemas não lineares possuem casca de duplicação de período semelhante, e responsável por achar essa constante.

Estritamente falando, somente alguns sistemas apresentam essa relação para todos os valores  $n$  e em geral ela é válida para o limite  $n \rightarrow \infty$ , mas ainda assim é devido a essa



propriedade e sua generalidade, que a duplicação de períodos é tido como um fenômeno universal.

A relação de Feigenbaum, devido ao seu decaimento geométrico, implica que o intervalo entre pontos de bifurcação sucessivos vai rapidamente para 0, e portanto  $\gamma_n$  deve convergir para um valor limite finito:  $\gamma_n \rightarrow \gamma_c$ , a medida que  $n \rightarrow \infty$ .

Para o pêndulo amortecido e forçado, o valor limite é

$$\gamma_c = 1.0829, \quad (5.18)$$

e uma vez que esse valor é alcançado, o sistema alcança o Caos. E assim, podemos enxergar um sistema alcançar desde seus limites lineares passar por uma duplicações de período sucessivas até chegar ao Caos.

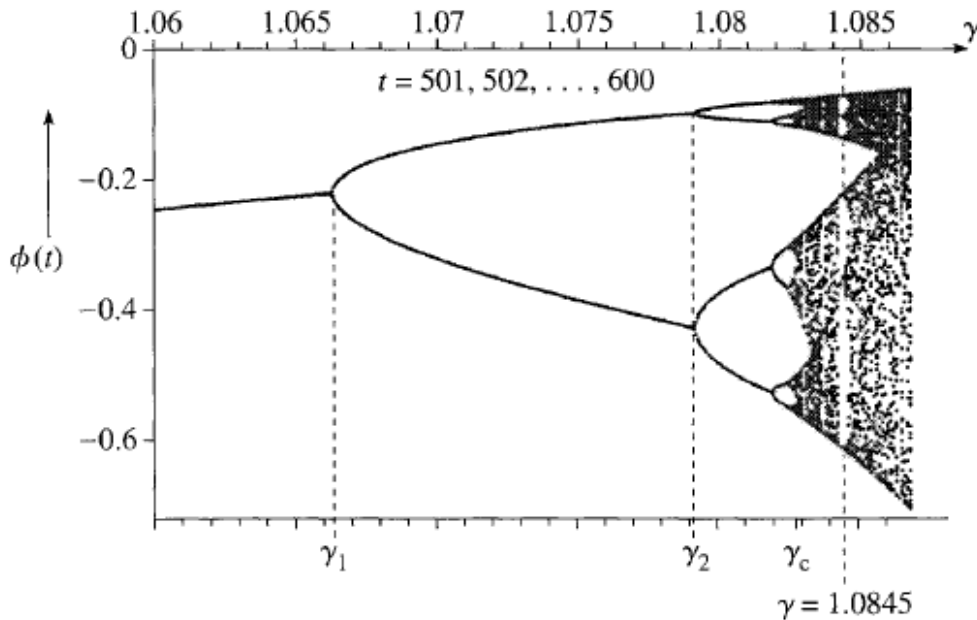


Figura 18 – **Diagrama de Bifurcação do Pêndulo Forçado e Amortecido no intervalo  $1.06 < \gamma < 1.90$**  Podemos ver claramente a rápida evolução de um sistema de estado estável e periódico, para um sistema caótico. Retirado de [17]

### 5.1.2 Expoente de Lyapunov e Sensibilidade às Condições Iniciais

Existem duas marcas principais que definem o Caos, além de que é claro é um fenômeno que surge de não linearidade. São elas a aperiodicidade, uma vez que o sistema alcance um estado ele nunca se repetirá exatamente, e a outra é a dependência sensível às condições iniciais.

A dependência sensível implica que se o sistema é lançado a partir das mesmas configurações de parâmetro, alternando apenas as condições iniciais  $\phi(0)e\dot{\phi}(0)$ , ainda que seja uma diferença mínima irá gerar um movimento completamente distinto.

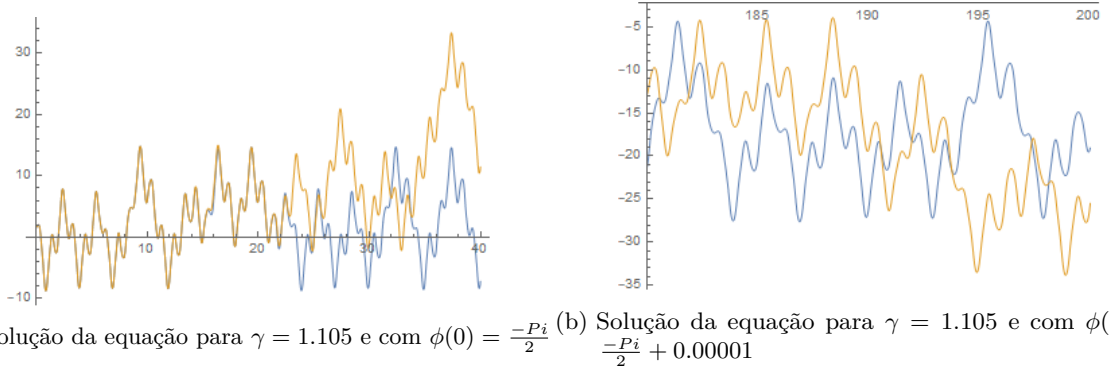


Figura 19 – **Duas trajetórias temporais de  $\phi(t)$ , com uma diferença de 0.00001rad** Mesmo com uma diferença pífia nos valores das condições iniciais, o sistema rapidamente dá origem a duas trajetórias completamente diferentes.

Uma maneira de se analisar isso é verificando a evolução da diferença entre a posição de dois pêndulos que satisfazem às mesmas equações de movimento:

$$\Delta\phi(t) = \phi_2(t) - \phi_1(t). \quad (5.19)$$

Para sistemas lineares essa diferença irá se aproximar de zero exponencialmente, isso pois em  $t \rightarrow \infty$  os sistemas se aproximam do mesmo atrator. Por exemplo, o sistema em baixas oscilações, que atua como um oscilador linear possui soluções na forma:

$$\phi(t) = A \cos(\omega t - \delta) + C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t} \quad (5.20)$$

O coeficiente  $A$  é o mesmo para todas as soluções, já  $C_1$  e  $C_2$  dependem das condições iniciais. Portanto, ao se realizar a diferença entre as duas soluções, o termo cosseno se anulará e teremos:

$$\Delta\phi(t) = B_1 e^{r_1 t} + B_2 e^{r_2 t} \quad (5.21)$$

Onde  $B_1$  e  $B_2$  dependem das condições iniciais, e a evolução total irá depender do coeficiente de amortecimento  $\beta$  e da frequência natural  $\omega_0$ . Para o caso onde  $\beta < \omega_0$ , os termos  $r_1$  e  $r_2$  serão complexos da forma  $-\beta \pm i\omega_1$ :

$$\Delta(t) = D e^{-\beta t} \cos(\omega_1 t - \delta) \quad (5.22)$$

E portanto,  $\Delta\phi(t)$  que irá possuir decaimento exponencial multiplicado por um termo oscilatório. No entanto, o decaimento é bem mais rápido que a oscilação. Exemplo: Para  $\beta = 0.25\omega_0 = 0.75\pi = 2.356$  resultar após um ciclo  $t=1$  haverá um decaimento de  $e^{-\beta t} = e^{-2.356} \approx 0.09$ , e a diferença entre posições reduziu numa ordem de magnitude.

Devido a esse rápido decaimento é necessário portanto um *plot* logarítmico de  $|\Delta\phi(t)|$ , para expressar adequadamente o crescimento exponencial de  $\Delta\phi(t)$ , mas que também pode ser negativo, contra  $t$ . Assim, temos:

$$\ln |\Delta\phi(t)| = \ln D = \beta t + \ln |\cos(\omega_1 t - \delta)|. \quad (5.23)$$

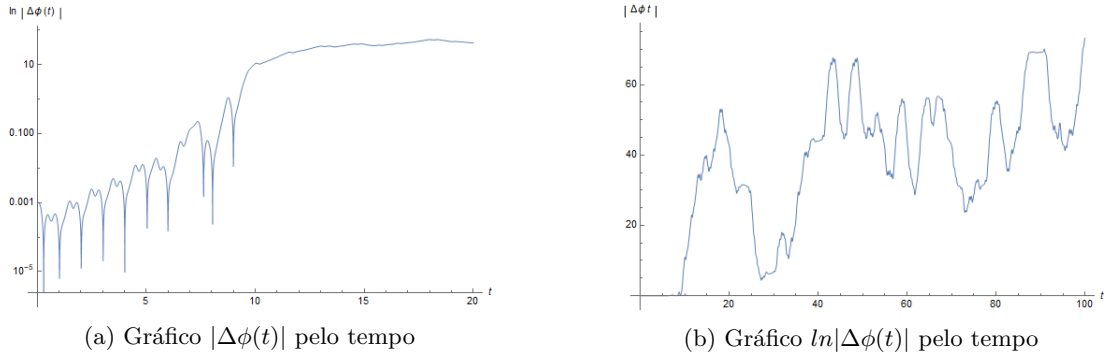


Figura 20 – **Evolução temporal da diferença entre dois sistemas com uma diferença de  $0.00001\text{rad}$  na posição inicial.** As trajetórias do sistema rapidamente divergem entre si.

A importância de que a diferença  $\Delta\phi(t)$  decaia para zero, é que do ponto de vista experimental, é impossível obter condições iniciais exatas de um sistema. Um decaimento nessa diferença, nos garante que ainda que haja imprecisão ao serem realizadas medidas de um sistema, essas imprecisões não serão significantes para a determinação do movimento, uma vez que irão desaparecer a medida que o movimento se desenrola. E assim, é possível apesar das imprecisões, prever o futuro de um sistema. Nesse sentido, podemos dizer que sistemas lineares são insensíveis às condições iniciais.

Já para o caso de osciladores não-lineares, e qualquer outro linear que exiba comportamento caótico, não é possível se fazer essa afirmação. No caso específico do pêndulo forçado e amortecido, verificamos que há decaimento exponencial para todos os valores de  $\gamma$  menores que  $\gamma_c$ . Isto é até que o sistema demonstre Caos.

No entanto, uma vez que o sistema entre no regime caótico,  $\Delta\phi(t)$  não irá diminuir, mas pelo contrário, irá crescer exponencialmente.

Incerteza de  $\pm 10^{-4}$  radianos cresce para  $\pm\pi$ , isto é, para o pêndulo não há certeza alguma da predição nesse caso. Esse comportamento não é limitado a esse caso em específico. A chamada dependência sensível às condições iniciais, é marca de todo sistema caótico.

Aqui, portanto é válido ressaltar que a dependência às condições iniciais é uma característica específica do Caos, não de todos os sistemas não lineares. Afinal, existem regimes em sistemas não lineares onde o comportamento gera uma órbita periódica, e o pêndulo

A partir dessa noção, é possível construir uma noção quantitativa capaz de determinar o grau de estabilidade de um sistema. E determinar, até certa medida, se surgirá ou não Caos. O Expoente de Lyapunov, que possui muitas diferentes definições. Aqui, consideraremos simplesmente que há um comportamento exponencial na diferença entre as soluções de sistemas lançados em diferentes condições iniciais:

$$\Delta\phi(t) \sim Ke^{\lambda t} \quad (5.24)$$

e ainda que não seja uma descrição exata, pois não leva em consideração termos oscilatórios ou outros quaisquer, é suficiente para dizer se a diferença entre condições iniciais cresce ou decresce.

O coeficiente  $\lambda$ , que determina o crescimento do sistema, é chamado de expoente de Lyapunov. Para um movimento de longo termo não caótico  $\lambda$  deve ser negativo, e para um movimento errático  $\lambda$  é positivo.

Outra coisa a se ressaltar no entanto, é que se o parâmetro de controle de um sistema supera o termo crítico determinado pela constante de Feigenbaum, isso não é condição suficiente para que nesse estado o comportamento do sistema seja caótico.

Ainda que isso seja verdade para a maior parte do sistema um vez que essa condição seja atendida, surgem após o termo crítico intervalos de caos e de movimento periódicos, alternando entre si.

### 5.1.3 Diagrama de Bifurcação

A medida que os valores do parâmetro de controle  $\gamma$  vai aumentando, o sistema pode se comportar de maneira diferentes. Isso, pois o termo da força matriz passa a superar o termo do amortecimento, de modo que um movimento possível será o de rotação completa em torno do eixo do pêndulo. E assim, podem surgir diferentes tipos de Caos no sistema.

Para se analisar a cascata de duplicação de período anteriormente utilizamos um diagrama de bifurcação, que consiste basicamente do gráfico do parâmetro do sistemas por uma das variáveis. Esse mesmo diagrama também pode ser traçado de modo a se observar que surgem diferentes intervalos de periodicidade, e de Caos, com a variação do parâmetro de controle do sistema.

Para se fazer um diagrama de bifurcação, é necessário primeiro estabelecer um intervalo para o parâmetro de controle, em que se deseja analisar o comportamento do sistema. Como o comportamento de sistemas podem variar drasticamente para pequenas variações, em consequência do decaimento geométrico do intervalo de valores para períodos é necessário selecionar também um grande quantidade de valores igualmente espaçados nesse intervalo desejado.

Além disso, não desejamos colocar no gráfico informação sobre a fase transiente do sistema, somente a informação a longo termo, para isso então devemos solucionar numericamente a equação diferencial para  $\phi(t)$  e então deixar que o sistema evolua de um  $t = 0$  até um  $t$  suficientemente grande para que os termos transientes sumam. A partir

desse instante de tempo então, calculamos uma quantidade de pontos solucionando a equação diferencial.

Inicialmente, cada valor de parâmetro irá corresponder a um só valor da posição, isto é, serão gerados 100 pontos, todos com o mesmo valor, e assim será gerado somente um ponto no gráfico, são os valores correspondentes a período um no sistema. Assim, cada duplicação de período irá dobrar a quantidade de pontos com valor diferentes no gráfico, de modo que é muito mais fácil visualizar tanto a cascata de duplicação de período, quanto sua "aceleração geométrica". Devido a esta última, somente os primeiros períodos duplicados são distinguíveis, os demais evoluem rapidamente para o Caos.

No entanto, deve-se atentar que a escolha do intervalo de parâmetros a ser plotado é uma mera limitação a capacidade computacional. Para cada valor de parâmetro no diagrama de bifurcação, é necessário solucionar uma quantidade de equações diferenciais não-lineares proporcional à quantidade de pontos a se colocar no gráfico. Assim, gerar um diagrama com alta resolução pode demandar bastante tempo devido ao custo computacional dessas operações.

Devido a essas limitações, deve-se escolher intervalos que apresentem um comportamento de interesse para ser estudado. Para o pêndulo amortecido e forçado, por exemplo, ao se alcançar um  $\gamma$  suficientemente alto, o pêndulo começará a rotacionar e realizar muitas revoluções completas, além dos movimentos usuais.

Outra coisa a se levar em conta com esse nova possibilidade de movimento é a ambiguidade das posições  $\phi(t)$ . O sistema poderá por meio dessas rotações descrever movimentos periódicos para valores altos de  $\gamma$ , no entanto o valor de  $\phi$  não está limitado, a priori, ao intervalo  $-\pi < \phi < \pi$ .

Assim, ocorre de que o sistema para um evolução temporal é completamente periódico, e a cada ciclo ocupa a mesma posição do que o ciclo anterior, no entanto em termos das posições  $\phi(t_0), \phi(t_0 + 1), \phi(t_0 + 2), \dots$ , nunca se repetirem pois múltiplos de  $2\pi$  ocupam posições diferentes no diagrama.

Para resolver esse problema, dois caminhos são possíveis. Redefinir o sistema para  $-\pi < \phi < \pi$ , o que implicaria que para cada solução  $\phi(t)$ , uma translação deveria ser realizada por meio de uma subtração de um termo  $2k\pi$ , onde  $k$  é um número inteiro.

Uma alternativa mais simples, no entanto, é simplesmente considerar e plotar o valor para a velocidade angular  $\dot{\phi}$  e assim considerar no diagrama os pontos

$$\dot{\phi}(t_0), \dot{\phi}(t_0 + 1), \dot{\phi}(t_0 + 2), \dots \quad (5.25)$$

Essa abordagem possui a vantagem de que para a velocidade angular, não há ambiguidade nos valores, e assim a periodicidade devido a rotação do pendulo pode ser contemplada no diagrama de bifurcação:

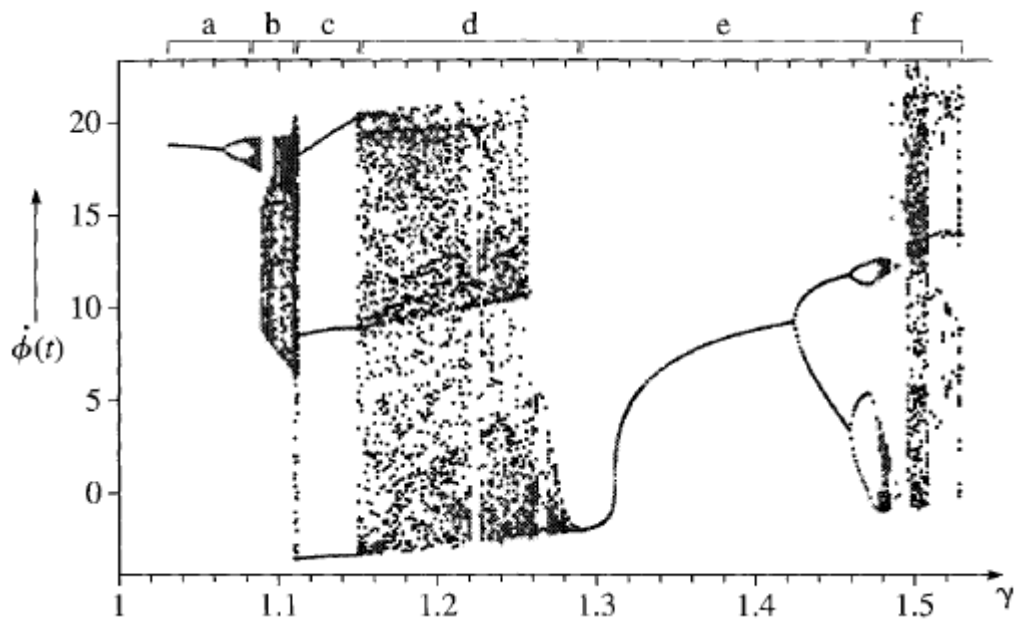


Figura 21 – **Diagrama de Bifurcação completo para o Pêndulo Forçado e Amortecido** É possível notar que o sistema possui intervalos de Caos e estabilidade distintos daqueles já apresentados no diagrama anterior.

#### 5.1.4 Espaço de Fase e Seção de Poincaré

Um método de análise bastante útil para análise de sistemas dinâmicos em geral, e que encontra sucesso quando Caos é visualizado é das seções de Poincaré, e como sugere o nome, foi introduzido por Poincaré, em seu trabalho sobre o problema dos Três Corpos. Esse método consiste basicamente de uma simplificação de uma órbita no espaço de estado, ou do espaço de fase. E possui aplicação principal para o estudo de sistemas multidimensionais.

Consiste como já vimos antes nos formalismos da mecânica analítica, do plot de ambas as posições e velocidades num gráfico. Uma alternativa, seria a de considerar o espaço de fase das velocidades estendido. Mas, necessariamente esse sistema irá possuir 3 dimensões. Assim, um procedimento usual é o de simplesmente se considerar o espaço de fase das velocidades, isto é traçar os pontos determinado pelo conjunto  $\phi(t), \dot{\phi}(t)$ , tendo o tempo como variável implícita. Isto é, uma órbita no espaço de fase, conforme vimos anteriormente, que possui como vantagem definir para cada estado do sistema apenas uma órbita, devido às condições de unicidade discutidas anteriormente. já que cada conjunto de condições iniciais são suficiente para definir uma solução única.

Por exemplo podemos considerar o espaço de fase das soluções periódicas obtidas anteriormente:

Cada órbita corresponde à um ciclo do sistema. Normalmente, a fase transiente seria mais visível do que no caso do gráfico da posição pelo tempo, por isso foi omitido em cada um dos gráficos. E assim, podemos ver que cada período possui uma órbita distinta

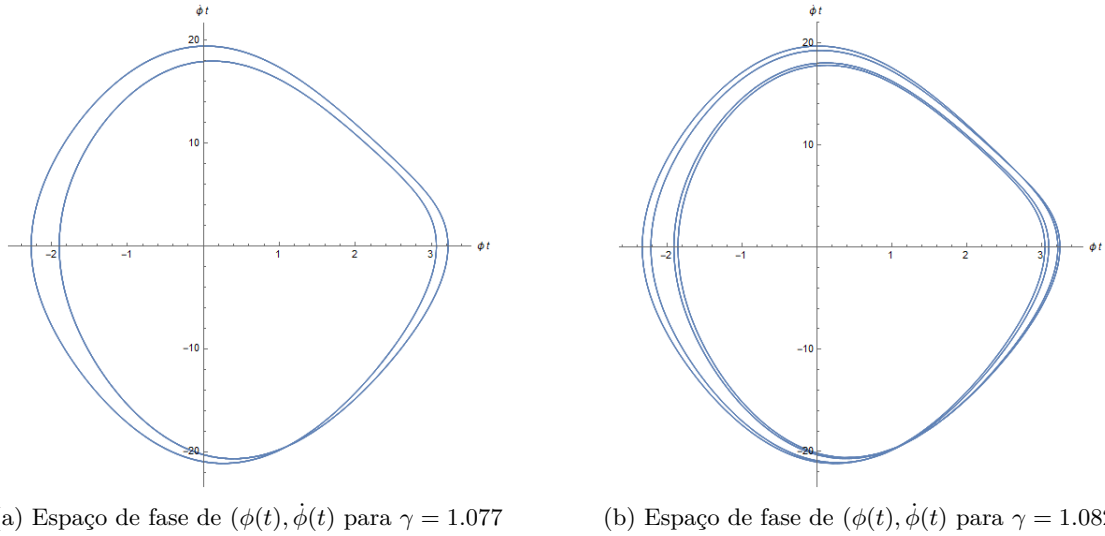


Figura 22 – **Descrição da evolução temporal do Sistema por meio do espaço de Fase.** Apesar do espaço de fase não mostrar explicitamente a variável temporal, a análise nesse espaço é simplificado devido ao surgimento de figuras ordenadas e contidas numa só região.

no espaço de fase. Os diferentes tipos de Caos, também produzem diferentes órbitas no espaço de fase.

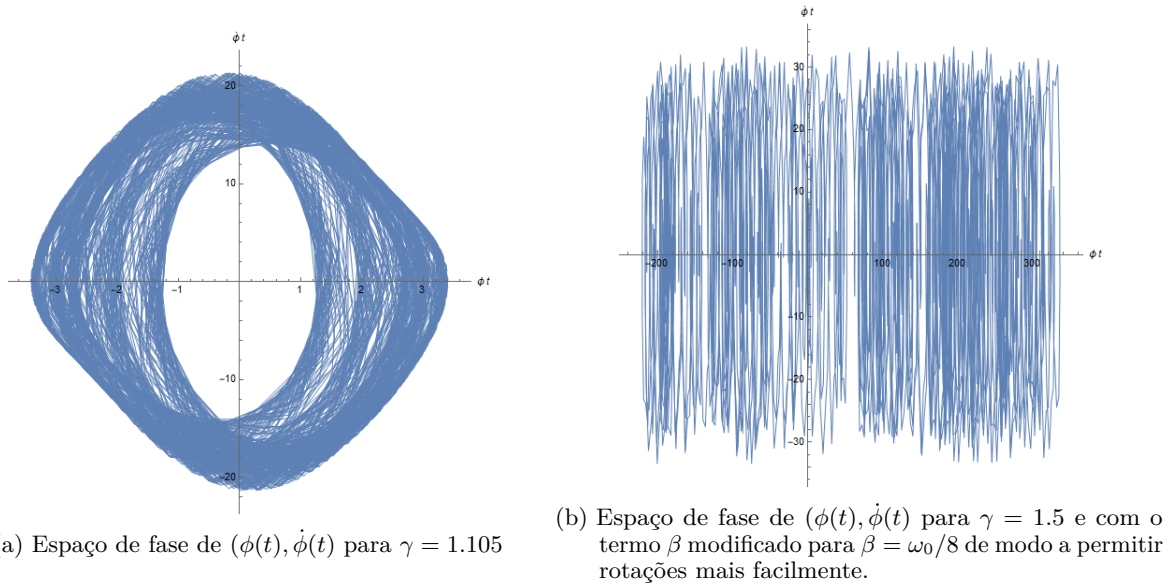


Figura 23 – **Espaço de Fase do sistema com diferentes tipos de Caos.** Uma característica que marcante no Caos é fato de que tende a ocupar todo o espaço de uma região à medida que o sistema evolui.

Outro fato a ser levado em consideração é que para o caso de rotação conforme visto anteriormente o problema da ambiguidade para as posições  $\phi(t)$  retornará no sistema de fase. E assim, duas possibilidades surgem: de se considerar todos os valores possíveis dentre os reais para  $\phi(t)$  e assim obter um gráfico semelhante à um obtido no espaço de configuração. Ou, novamente, limitar os valores possíveis para  $-\pi < \phi(t) < \pi$  e assim obter um gráfico com uma descontinuidade, mas que exibe o comportamento periódico e

de análise mais simples. Cada gráfico possui vantagens, o entanto, a descontinuidade ao se pular de  $-\pi$  pra  $\pi$  continua.

É possível ver também a partir da órbita no espaço de estados, que a o Caos produzido para valores grande de  $\gamma$  é consideravelmente diferente daqueles obtido anteriormente. No entanto, além disso, pouco informação pode ser adicionada.

É visível as vantagens de se visualizar a evolução do sistema em um espaço de configuração para um espaço de fase, e as vantagens que esse último traz. Mas ainda assim, o movimento caótico permanece poluído de informação de modo que vale então utilizarmos a técnica chamada de Seção de Poincaré, que consiste simplesmente de se realizar um gráfico no espaço de fase considerando os estados em intervalos de um ciclo:

$$t = t_0, t_0 + 1, t_0 + 2, \dots \quad (5.26)$$

Da mesma forma que realizamos anteriormente, mas agora considerando um outro espaço.

Na seção de Poincaré, a fim de se condensar as informações, não mais plotamos a órbita completa para um movimento, mas sim, representamos esse movimento por um ponto dessa órbita no espaço de fase. De modo que assim obtemos: A seção de Poincaré

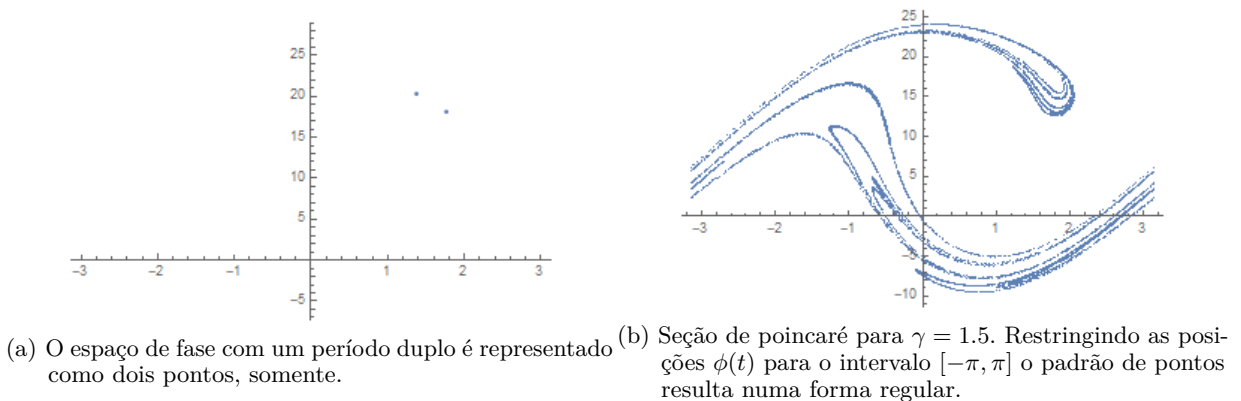


Figura 24 – **Seções de Poincaré para o movimento periódico e caótico no pêndulo forçado e amortecido.** Por meio das seções de Poincaré é possível, identificar propriedades globais do sistema que não seria possível de outra forma.

revela figura completamente diferentes para sistemas caóticos. Como o movimento do sistema é completamente aperiódico, é natural dizer que o conjunto de pontos gerados para a seção de Poincaré será infinito, e irá compor um subconjunto do espaço de estado.

De primeira vista, somos capazes de identificar uma padrão para o sistema caótico na seção de Poincaré. A figura representa um fractal, que possui como principal característica o fato de que ao se realizar uma mudança de escala, em alguma parte da figura, surgem novas estruturas que são semelhantes a figura original. Essa propriedade dos fractais é chamada de auto similaridade. E o surgimento de uma estrutura fractal da seção de Poincaré esta diretamente ligada a outra característica do Caos. Um atrator estranho como movimento de longo termo do sistema.



## 5.2 Equações de Lorenz

Em 1963, o matemático meteorologista Edward Lorenz publicou o artigo "*Deterministic Non Periodic Flow*"[13], que veio a ser reconhecido posteriormente como marco na Teoria do Caos. Nele ele apresentou as suas observações do trabalho com um modelo matemático pra predição meteorológica da atmosfera baseado em um sistema termodinâmico de células de convecção em um fluido, e discutiu pela primeira vez algumas características do Caos discutidas na sessão passada: a sensibilidade às condições iniciais e o atrator estranho.

O sistema que Lorenz se baseou consiste de um fluido entre duas placas: a placa inferior mantida a uma temperatura fixa e a placa superior sendo progressivamente aquecida. De modo que são observados 3 estágios para esse sistema.

Inicialmente, quando a diferença de temperatura é baixa, há transporte de calor somente devido à condução térmica. Quando há um aumento suficiente, acontece o movimento de convecção. Ou seja, além do efeito anterior há transporte de calor devido ao movimento do fluido que segue na direção da placa de menor temperatura, gerando um movimento circular em torno de um cilindro com eixo de rotação paralelo ao eixo de profundidade das placas. Por fim, quando essa diferença de temperatura se torna muito elevada, o movimento perde sua estabilidade deixando de ser circular e evoluindo para um estado de turbulência, isto é, Caos.

A princípio, para descrever esse sistema dinâmico matematicamente Lorenz tomou como base as equações de Navier-Stokes que descrevem de modo geral as condições de contorno. No entanto, esse primeiro sistema de equações continha cerca de 12 equações e não era muito convidativo para a análise de dados de uma simulação numérica em computador, ainda que já fosse impressionante a modelagem da atmosfera em tão poucas equações.

De modo a simplificar o sistema sem perda de suas características principais, Lorenz realizou uma expansão em série de Fourier das equações originais e manteve os três primeiros modos, e assim obteve a forma mais conhecida das três equações de Lorenz, presentes em [12] conseguindo assim com satisfação tanto manter o caráter não linear inicial, quanto prever com satisfação condições atmosféricas:

$$\begin{aligned}\frac{dW}{dt} &= -aW + aU \\ \frac{dU}{dt} &= -WZ + bW - U \\ \frac{dZ}{dt} &= -cZ + WU\end{aligned}\tag{5.27}$$

Onde  $W$  é a amplitude do movimento de convecção,  $U$  é a diferença de temperatura entre as correntes descendentes e ascendentes e  $Z$  é o gradiente de variação da temperatura.

linearmente no eixo normal às placas. Já os parâmetros que se mantêm fixos no sistemas e que dependem da viscosidade do fluido, do coeficiente de expansão térmica, diferenças de temperatura entre as placas. Em suma, da montagem e composição do sistema:  $a$  é o número de Prandtl, a razão da difusão de momento pela difusão térmica do sistema,  $c$  é o número de Rayleigh e determina o tipo de fluxo do fluido, para valores baixos será laminar, para valores altos será turbulento. Já o  $b$  é um parâmetro de controle do sistema.

Foi estudando essas equações que Lorenz obteve os 2 resultados que vieram a dar início a uma revolução conceitual na física. O primeiro desses resultados foi obtido quase que acidentalmente, se trata do Efeito Borboleta, ou a dependência sensível às condições iniciais que Poincaré vislumbrou cerca de meio século antes.

Essa propriedade do Caos foi observado quando entre um intervalo entre sessões da simulação do modelo atmosférico, para poupar tempo Lorenz utilizou os números obtidos na sessão anterior como entrada para a nova sessão. No entanto, devido à um arredondamento os cálculos eram realizados utilizando números com 6 casas decimais, enquanto os números impressos possuíam somente 3 casas decimais. Ao serem introduzidos no modelo, essa diferença de poucas casas decimais geraram diferenças climáticas catastróficas, altas históricas na temperatura de alguns estado americanos, frio nunca antes visto em outras, ainda que o clima real não correspondesse nenhum pouco com o previsto. A conclusão obtida foi que mesmo mudanças infinitesimais nas condições iniciais se desenvolvem de modo que num futuro não muito distante, o sistema evolui para estados completamente diferentes.

Ainda mais importante, foi a análise do espaço de fase desse sistema. Mantendo-se constantes as condições iniciais do sistemas e os parâmetros  $a$  e  $c$ , Lorenz observou 3 tipos de trajetória:

Quando  $0 < b < 1$ , a origem é um ponto fixo e estável. Um atrator simples:

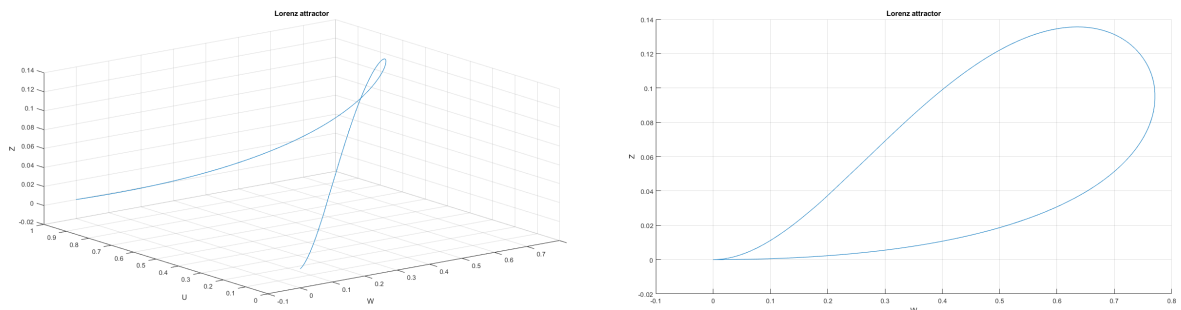


Figura 25 – Espaço de fase das variáveis  $W, U, Z$  das equações de Lorentz.  $b=0$

Quando  $1 < b < 24.7$ , a origem é um ponto fixo instável, pois existem dois pontos fixos estáveis:

Quando  $b > 24.7$ : Os dois pontos fixos se tornam instáveis, e surge um atrator mais

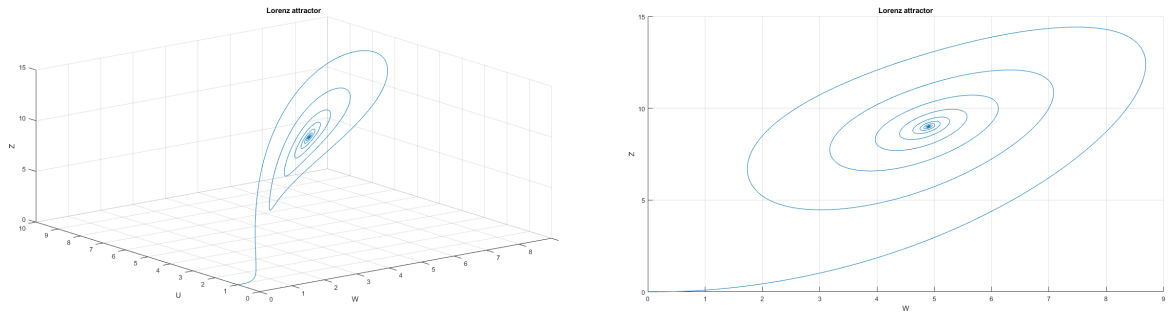


Figura 26 – Espaço de fase das variáveis  $W, U, Z$  das equações de Lorenz. ( $b=10$ )

complicado, o atrator estranho.

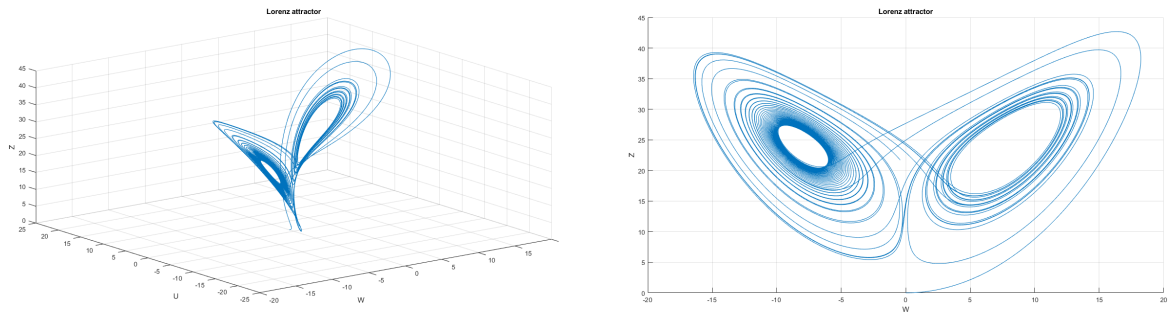


Figura 27 – Espaço de fase das variáveis  $W, U, Z$  das equações de Lorenz. ( $b=15$ )

E assim, como o caso do pêndulo, esse atrator possui propriedades que se mostraram característicos dentre os sistemas caóticos [7]:

- 1 Dimensão Fracionária: A trajetória do espaço de fase não pode ser contida num plano, mas é incapaz de preencher o volume. É a dimensão fracionária que dá origem a geometria fractal.
- 2 Movimento aperiódico: As linhas de trajetória não formam um círculo, descrevendo um movimento periódico, nem colapsam em um ponto. Todos os estados desse sistema estão contidos nessa região do atrator, que não se cruza nem se repete em nenhum momento.
- 3 Sensibilidade às condições iniciais: O efeito borboleta, já mencionado anteriormente.

## 6 Caologia Quântica

Na década de 1970, a teoria do Caos explodiu nos grupos de pesquisa de diversas áreas ao redor do mundo. Intensos desenvolvimentos foram feitos, principalmente devido a sua multidisciplinaridade, e ao teor geométrico novo que figuras como os atratores estranhos e os fractais traziam.

No entanto, uma questão surge. Qual a relação entre a Teoria do Caos e a Mecânica Quântica? A priori pode uma propriedade conciliatória entre essas duas disciplinas poder ser levantada no sentido de que lançam fora mão do conceito de Determinismo. A mecânica quântica de maneira inerente, através da não-localidade e de sistemas verdadeiramente aleatórios. O princípio da incerteza de Heisenberg institui que dois observáveis canonicamente conjugados não podem ser observados ao mesmo tempo. Já a teoria do Caos, ainda que determinística em seu cerne, lança fora a possibilidade de previsão em decorrência de sua dependência sensível às condições iniciais.

Esses pontos de convergência, no entanto levantam mais margem para questionamento do que .... Deve-se notar que o desenvolvimento da física quântica ocorre principalmente através de analogias e formulações ad hoc, através das regras de quantização. No entanto, podemos enxergar que, por exemplo, uma condição necessária à existência de Caos é a de sistemas não lineares, enquanto que a formulação de Schrodinger da Mecânica Quântica, propõe uma equação necessariamente linear. De maneira ainda mais contundente, observou Einstein que a abordagem semiclássica para a física quântica não é válida para sistemas não-integráveis, que são necessariamente caóticos.[1].

Esse problema já havia sido apontado por Einstein em 1917, nos primórdios de ambas as Teorias E ainda que com uma regra de quantização para sistemas integráveis no limite semiclássico, a solução para sistemas não integráveis só veio em meados da década de 70 com a fórmula do Traço de Gutzwiller, que mostrou que a densidade de energia, no limite semiclássico desse tipo de sistema, está relacionada com o conjunto das órbitas periódicas do sistema clássico análogo. [1, 11].

Aplicações empíricas a teoria da Caologia Quântica têm sido implementadas principalmente em estudos de transporte eletrônicos. São pioneiros os estudos sobre o comportamento de elétrons em pontos quânticos, partículas de semicondutores nanométricos, que estão no chamado regime mesoscópico: grande o suficiente para apresentar propriedades clássicas, e pequeno para preservar propriedades quânticas. Um sistema de grande relevância tecnológica devido a suas aplicações na indústria da computação. Dado que os transistores presentes nas unidades básicas de processamentos, são semicondutores que já estão alcançando as unidades nanométricas. E se destaca no estudo desses sistemas,

a abordagem das Matrizes Aleatórias.

Na década de 80 foi proposto por alguns trabalhos a abordagem do formalismo da Teoria das Matrizes Aleatórias de Wigner para a física atômica, na abordagem do problema do Caos Quântico. Isso pois a dinâmica Caótica permitia utilizar o argumento da imprevisibilidade usada por Wigner para o tratamento de sistemas de muitos corpos. Essa ficou conhecida como conjectura de Bohigas, Giannoni e Schimnt, de modo que os operadores físicos utilizados no contexto da mecânica quântica são substituídos por operadores representados por matrizes aleatórias, para o problema do Caos Quântico. [15]

## 6.1 Teoria das Matrizes Aleatórias

A Teoria de Matrizes Aleatórias foi desenvolvida por Eugene Wigner e proposta inicialmente para descrever algumas propriedades de estados excitados do núcleo atômico em sistemas de múltiplos corpos, em 1951. Para isso, ele considerou o problema do espalhamento de nêutrons em núcleos, descrito em um artigo escrito por N. Bohr em 1936, onde são observadas algumas ressonâncias, que correspondem a estados compostos de sistemas de nêutrons e prótons que interagem fortemente, e cuja formação e decaimento acreditava-se se tratar de processos quase independentes [4].

Na falta de uma teoria dinâmica nuclear, e uma vez que os hamiltonianos que descrevem esses sistemas são muito complicados, Wigner recorreu ao estudo do espectro nuclear, revelado pelos dados do espalhamento de nêutrons, através de uma abordagem estatística. Nela, diferentemente do modo clássico, ele considera um ensemble com hamiltonianos diferentes, mas com algumas propriedades de simetria em comum.

Esses hamiltonianos são definidos de modo que para cada matriz que faz parte do ensemble sistema, todas as matrizes geradas através de uma transformação unitária adequada do espaço de Hilbert também são parte do ensemble, o que garante que não haja uma base preferencial no espaço de Hilbert. No contexto da teoria de Schrödinger existem 3 ensembles genéricos definidos nesses termos, conformes descritos por Dyson:

- 1 Ensemble Gaussiano Ortogonal(GOE) : Para sistemas invariantes sobre reversão temporal com simetria rotacional. Suas matrizes são reais e simétricas:

$$H_{mn} = H_{nm} = H_{mn}^*. \quad (6.1)$$

- 2 Ensemble Gaussiano Unitário(GUE): Para sistemas cuja invariância sobre reversão temporal é violada. Suas matrizes são hermitianas:

$$H_{mn} = [H^\dagger]_{nm} \quad (6.2)$$

- 3 Ensemble Gaussiano Simplético(GSE): Para sistemas invariantes a reversão temporal com spin meio inteiro e simetria rotacional quebrada. Suas matrizes podem ser escritas em termos de quatérnions.

Onde  $H$  é a matriz hamiltoniana que descreve o sistema. Uma característica importante de todas essas matrizes é que seus autovalores são reais, e portanto são medidas mensuráveis.

A probabilidade de se encontrar um elemento da matriz nos 3 casos é encontrada ao se multiplicar uma função peso  $P_N\beta$  pelos infinitesimais dos elementos independentes da matriz. Um ansatz, sugerido pelo Wigner, para a forma de  $P_N\beta$ , para os ensembles gaussianos, de um modo que as integrais realizadas a partir dele não divirjam, também possui a forma gaussiana:

$$P_N\beta(H) \propto \exp\left(\frac{\beta N}{\lambda^2} \text{tr} H^2\right), \quad (6.3)$$

onde  $\lambda$  é um parâmetro que depende do nível de espaçamento médio do sistema em estudo.  $\beta$  é o índice de Dyson e identifica o tipo de ensemble, dentre os que vimos acima:  $\beta = 1$  se refere ao GOE,  $\beta = 2$  ao GUE, e  $\beta = 4$  ao GSE. O fator  $N$  na exponencial, garante que a probabilidade seja um valor finito, e que, portanto, pode ser normalizado.

Um problema central para a TMA, é derivar a distribuição para autovalores e autovetores, devido a grande quantidade de teorias que fazem o uso dessas variáveis. Para isso consideramos que os autovalores e autovetores da matriz considerada também sejam variáveis aleatórias independentes.

Nos momentos iniciais da TMA, devido à complexidade matemática dos cálculos necessários para se obter uma informação a partir do espectro de autovalores, Wigner propôs uma caso simples capaz de sumarizar algumas propriedades de sistema estocásticos. Utilizando o caso onde  $N=2$  no ensemble GOE, ele apresenta a distribuição  $p(s)$  do espaçamento de autovalores, conhecido como conjectura de Wigner. No mesmo artigo, ele também apresenta a chamada lei do semicírculo, que prediz o formato da distribuição espectral.

### 6.1.1 Conjectura de Wigner

Uma etapa inicial é produzir matrizes que se adequem às propriedades descritas por Dyson. Partindo de uma matriz cujos elementos são partes de uma distribuição gaussiana, de média  $\mu$  e variância  $\sigma^2$  ( Também denotada  $N(\mu, \sigma)$  ) :

$$\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \quad (6.4)$$

A fim de garantir que matrizes produzidas a partir dessas façam parte dos ensembles supracitados devemos torná-las: simétricas, hermitiana ou auto-duais, respectivamente.

Para isso, dado que suas variáveis são reais, complexas ou quaterniônicas, podemos aplicar um simples processo de simetrização:

$$H_s = (H + H^T)/2 \quad (6.5)$$

O modo mais simples de se obter a conjectura de Wigner é através de uma matriz GOE 2x2, e que terá N=2 autovalores. Seja H uma matriz:

$$H = \begin{pmatrix} x_1 & x_3 \\ x_3 & x_2 \end{pmatrix} \quad (6.6)$$

Onde  $x_1, x_2 \sim N(0, 1)$  e  $x_3 \sim N(0, 1/2)$ .

Seus autovalores  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  são:

$$\lambda_{1,2} = (x_1 + x_2 \pm \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + 4x_3^2})/2 \quad (6.7)$$

Seja  $s = \lambda_1 - \lambda_2$  o espaçamento entre os dois autovalores, com  $\lambda_1 > \lambda_2$ . Através de 6.7, temos que

$$s = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + 4x_3^2} \quad (6.8)$$

A função densidade de probabilidade(f.d.p) do espaçamento,  $p(s)$ , é por definição

$$p(s) = \int dx_1 dx_2 dx_3 \frac{e^{-\frac{1}{2}x_1^2}}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-\frac{1}{2}x_2^2}}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-x_3^2}}{\sqrt{\pi}} \delta\left(s - \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + 4x_3^2}\right) \quad (6.9)$$

Usando a mudança de variáveis:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = r \cos \theta \\ 2x_3 = r \sin \theta \\ x_1 + x_2 = \psi \end{cases}$$

De modo que a equação se torna:

$$p(s) = \frac{1}{8\pi^{\frac{3}{2}}} \int_0^\infty dr r \delta(s - r) \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-\infty}^\infty d\psi e^{-\frac{1}{2}(\frac{r \cos \theta + \psi}{2})^2 + (-\frac{r \cos \theta + \psi}{2})^2 + (\frac{r^2 \sin^2 \theta}{2})} \quad (6.10)$$

E, seu resultado é portanto:

$$p(s) = \frac{s}{2} e^{-\frac{s^2}{4}} \quad (6.11)$$

É conveniente realizar uma mudança de escala nesse resultado, definido  $\bar{p}(s) = \langle s \rangle p(\langle s \rangle s)$ , onde  $\langle s \rangle$  é o valor esperado da variável  $s$  :

$$\langle s \rangle = \int_0^\infty s p(s) ds = \int_0^\infty \frac{s^2}{2} e^{-s^2/4} ds = \sqrt{\pi} \quad (6.12)$$

Dessa forma, obtemos:

$$\bar{p}(s) = \frac{\pi s}{2} e^{-\frac{\pi s}{4}} \quad (6.13)$$

Essa é a conjectura de Wigner.

### 6.1.2 Lei do Semicírculo

Já uma ótima maneira de se obter a lei do semicírculo é utilizando a técnica do Gás de Coulumb, atribuída a Dyson.

Considerando a f.d.p dos autovalores de uma matriz gaussiana  $N \times N$ :

$$p(x_1, \dots, x_N) = \frac{1}{Z_{N,\beta}} e^{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N x_i^2} \prod_{j < k} |x_j - x_k|^\beta \quad (6.14)$$

onde :

$$Z_{N,\beta} = (2\pi)^{N/2} \prod_{j=1}^N \frac{\Gamma(1 + j\beta/2)}{\Gamma(1 + \beta/2)} \quad (6.15)$$

Fazemos a reescala,  $x_i \rightarrow x_i \sqrt{\beta N}$  Com isso, temos que a constante de normalização será:

$$Z_{N,\beta} = C_{N,\beta} \int_{\mathbb{R}^N} \prod_{j=1}^N dx_j e^{-\beta N^2 V[\mathbf{x}]} \quad (6.16)$$

Onde os novos termos escritos são:

$$V[\mathbf{x}] = \frac{1}{2N} \sum_i x_i^2 - \frac{1}{2N^2} \sum_{i \neq j} \ln|x_i - x_j|. \quad (6.17)$$

Através dessa mudança de escala, podemos identificar  $Z_{\beta,N}$  como a função de partição canônica da mecânica estatística, e podemos interpretar essa equação como a de um fluido termodinâmico bidimensional contido numa linha. Para se obter informações termodinâmicas desse sistema então, devemos encontrar a energia livre  $F = -\frac{1}{\beta} \ln Z_{N,\beta}$ , considerando o limite  $N \rightarrow \infty$ . Normalmente o passo adequado seria somar a função de partição sobre todos os microestados. Mas, podemos usar uma técnica de modo a modelar as configurações de autovalores utilizando uma função  $n(x)$ , que também nos permitirá transformar os somatórios da eq.6.17 em integrais:

$$n(x) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta(x - x_i) \quad (6.18)$$

Uma função aleatória, normalizada e não negativa sobre toda sua extensão, que nos permite contar os picos correspondentes ao autovalores, e que no limite de  $N \rightarrow \infty$  nos dá a forma do histograma. Utilizando essa função para representar a unidade, através de uma integral funcional:

$$1 = \int D[n(x)] \delta \left[ n(x) - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta(x - x_i) \right]. \quad (6.19)$$

Ao inserir essa definição em  $Z_{N,\beta}$ , temos:



$$Z_{N,\beta} = C_{N,\beta} \int D[n(x)] \int_R \prod_{j=1}^N dx_j e^{-\beta N^2 V[x]} \delta \left[ n(x) - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta(x - x_i) \right] \quad (6.20)$$

Que pode ser reescrita, utilizando a definição de  $n(x)$  e da função delta:

$$Z_{N,\beta} = C_{N,\beta} \int D[n(x)] e^{-\beta N^2 V[n(x)]} I_N[n(x)] \quad (6.21)$$

Onde  $V[n(x)]$  é :

$$V[n(x)] = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} dx x^2 n(x) - \frac{1}{2} \int \int_{\mathbb{R}^2} dx dx' n(x) n(x') \ln|x - x'| + \frac{1}{2N} \int_{\mathbb{R}} dx n(x) \ln \Delta(x) \quad (6.22)$$

E:

$$I_N[n(x)] = \int_{\mathbb{R}^N} \prod_{j=1}^N dx_j \delta \left[ n(x) - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta(x - x_i) \right] \quad (6.23)$$

O fator  $\Delta(x)$  surge naturalmente, e impede que a integral seja divergente. Utilizando uma integral análoga a eq. 6.19, é fácil calcular, utilizando aproximação de Laplace, o termo  $I_N(n(x))$  para  $N$  grande:

$$I_N[n(x)] \sim e^{[-N \int dx n(x) \ln n(x)]} \quad (6.24)$$

E considerando o nível de espaçamento médio sobre uma distância de  $\sim O(1)$ , temos:

$$\Delta(x) \approx \frac{c}{N n(x)} \quad (6.25)$$

E a equação de partição pode ser escrita, portanto, como:

$$Z_{N,\beta} \simeq C_{N,\beta} \int D[n(x)] e^{[-\beta N^2 F_0[n(x)] + \frac{\beta}{2} N \ln N + (\frac{\beta}{2} - 1) N F_1[n(x)] - \frac{\beta}{2} N \ln c + O(N)]} \quad (6.26)$$

Onde:

$$F_0[n(x)] = \frac{1}{2} \int dx x^2 n(x) - \frac{1}{2} \int \int dx dx' n(x) n(x') \ln|x - x'| \quad (6.27)$$

e

$$F_1[n(x)] = \int dx n(x) \ln n(x) \quad (6.28)$$

Utilizaremos outra função delta de modo a limitar os resultados a funções  $n(x)$  normalizadas, novamente:

$$\delta \left[ \int dx n(x) - 1 \right] = \int \frac{dk}{2\pi} e^{ik} \left( \int_{\mathbb{R}} dx n(x) - 1 \right) \quad (6.29)$$

Fazendo a reescala  $ik \rightarrow \beta N^2 k$ , ficamos com:

$$Z_{N,\beta} \approx C_{N,\beta} \int D[n(x)] \int_{\mathbb{R}} dk \exp[-\beta N^2 A[n(x), k] + O(N)] \quad (6.30)$$

Onde a ação é:

$$A[n(x), k] = F_0[n(x) - k(\int dx n(x) - 1)] \quad (6.31)$$

Utilizando a técnica de ponto de sela, temos:

$$Z_{N,\beta} \approx \exp(-\beta N^2 A[n^*, k^*(x)]) \quad (6.32)$$

Podemos ver que a energia livre intensiva para o gás de coulomb é:

$$f = \frac{-1}{\beta N^2} \ln Z_{N,\beta} = A[n^*(x), k] \equiv F_0[n^*(x)] \quad (6.33)$$

Portanto, afim de calcular a ação, devemos achar os pontos que minimizam a eq [6.31]. Para  $\frac{\partial A}{\partial n(x)} = 0$  temos:

$$\frac{x^2}{2} - \int_{\mathbb{R}} dx' n^*(x') \ln|x - x'| - k^* = 0 \quad (6.34)$$

e de  $\frac{\partial A}{\partial k}$ :

$$\int_{\mathbb{R}} n^*(x) = 1 \quad (6.35)$$

A equação integral em [6.34] pode ser resolvida através de uma derivada fraca e um teorema por Tricomi [19], uma solução com parâmetros a e b:

$$n^* = \frac{1}{\pi \sqrt{(x-a)(b-x)}} \left[ 1 - x^2 + \frac{1}{2}(a+b)x + \frac{1}{8}(b-a)^2 \right] \quad (6.36)$$

Para calcular o valor de  $n^*(x)$  devemos definir os valores ótimos para a e b. Para isso calculamos a energia livre, de modo a obter:

$$f \equiv F_0[n^*(x)] = \frac{1}{4} \int_a^b dx n^*(x) x^2 + \frac{a^2}{4} - \frac{1}{2} \int_a^b dx n^*(x) \ln(x-a) \quad (6.37)$$

Inserindo [6.36] em [6.37] e calculando a integral, obtemos:

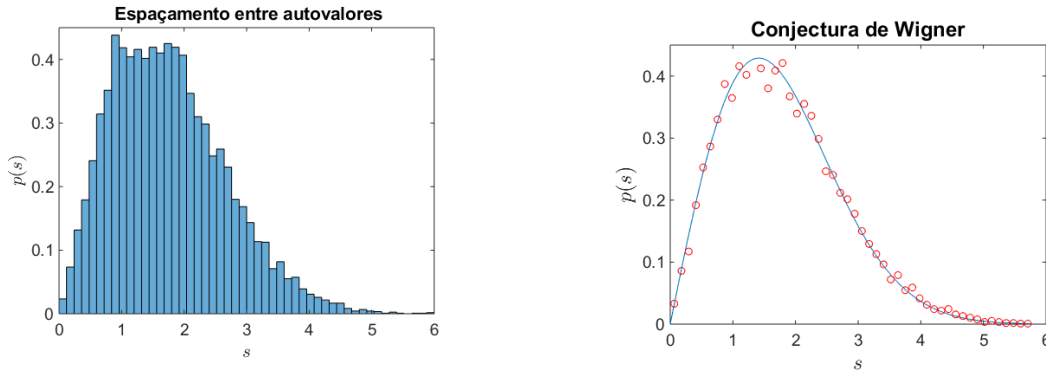
$$f \equiv f(a, b) = \frac{1}{512} \left( -9a^4 + 4a^3b + 2a^2(5b^2 + 48) + 5ab(b^2 + 16 - 256\ln(b-a)) - 9b^4 + 96b^2 + 512\ln(2) \right) \quad (6.38)$$

Minimizando com a relação aos parâmetros  $a$  e  $b$ , obtemos  $a = -\sqrt{2}$  e  $b = \sqrt{2}$ . Assim para a eq. 6.36, temos:

$$n^*(x) \equiv \rho_{sc} = \frac{1}{\pi} \sqrt{2 - x^2} \quad (6.39)$$

Que é a conhecida lei do semicírculo de Wigner.

## 6.2 Discussões



(a) Plot em linha do formato previsto na conjectura de Wigner considerando um ensemble de  $N=10000$  matrizes. (b) Histograma do espaçamento entre autovalores em ensemble de  $N=10000$  matrizes.

Figura 28 – Comparação entre o formato previsto por Wigner e a distribuição real de espaçamentos.

Apesar de um resultado simples, ele é bastante profundo. Através do gráfico apresentado podemos ver que a  $\bar{p}(s) \rightarrow 0$  quando  $s \rightarrow 0$ . O que nos diz que a probabilidade de que 2 autovalores estejam muito próximos, quando estas são variáveis aleatórias e seguem uma distribuição gaussiana, é muito pequena. Como se houvesse uma repulsão entre eles. De modo a melhor apreciar a relevância desse resultado, nós podemos compará-lo com o obtido para o caso de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas (i.i.d) que fazem parte de um conjunto  $X_1, \dots, X_N$ , descritas por uma f.d.p  $p_x(x)$ , organizadas de um modo qualquer num espaço *sigma* e que possui como função densidade acumulada  $F(x)$ . Podemos calcular a probabilidade de haver um espaçamento  $s$  através da probabilidade condicional de que, dado que uma variável qualquer  $X_j$  assuma um valor  $x$ , uma outra variável  $X_k (k \neq j)$  assuma um valor  $s$ .

$$P_N(s | X_j = x) = P_x(x + s) [1 + F(x) - F(x + s)]^{N-2} \quad (6.40)$$

Onde,  $F(x)$  corresponde à probabilidade da variável estar antes do valor  $x$ , enquanto  $1-F(x)$  corresponde a probabilidade de estar após o valor  $x+s$ . A soma equivale a probabilidade das variáveis não estarem entre  $x$  e  $x+s$ , e a a potência avalia essa probabilidade para todas as outras  $N-2$  não fixas. Pode-se mostrar que ao se ampliar essa probabilidade, de modo a levar em conta todas as variáveis do conjunto, utilizando a propriedades de fatoração

de probabilidades independentes e considerando um limite, onde a quantidade de variáveis  $N \rightarrow \infty$ , obteremos que a probabilidade de que exista um espaçamento  $s$  é:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \hat{p}_N(\hat{s}) := \lim_{N \rightarrow \infty} \hat{p}_N(s) = \frac{\hat{s}}{N p_X(x)} \frac{ds}{ds} = e^{-\hat{s}} \quad (6.41)$$

Que é a distribuição de Poisson. Esse resultado é o exato oposto do obtido para variáveis aleatórias pertencentes ao ensemble de Wigner. Aqui, conforme podemos ver na figura[29], em oposição ao caso anterior  $p(s)$  possui um valor bem significativo quando  $s \rightarrow 0$ , de modo que o comportamento dos autovalores é se atrair.

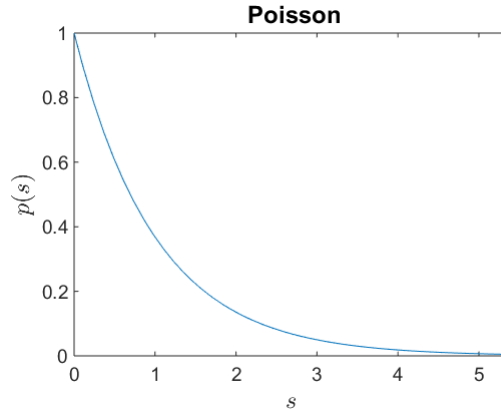


Figura 29 – Distribuição de Poisson, a configuração de espaçamentos para variáveis i.i.d.

Por meio dessa comparação, podemos ver que no caso onde as variáveis aleatórias podem ser descritas através de uma distribuição gaussiana, elas apresentam um comportamento oposto ao de variáveis aleatórias, e, em fato, estão fortemente correlacionadas umas com as outras. Essa característica é bastante visível, por exemplo, no termo  $\prod_{j < k} |x_j - x_k|$  da função densidade de probabilidade conjunta dos elementos do ensemble gaussiano descritos na equação [6.14], que enfatiza o fato de que essa função não pode ser fatorada, em contraste às variáveis aleatórias. Isso pode ser explicado pelo fato de que Ensembles Gaussianos, apesar de terem valores de entrada independentes, também possuem invariância rotacional.

De fato, esse comportamento previsto pode ser comprovado em diversos sistemas físicos como é o caso do espectro de espaçamento de níveis de energia estudado por Bohigas[[4]], do espectro de auto-frequências elastomecânicas de blocos de quartzo com formato irregular[ [8]] e da taxa de tunelamento em pontos quânticos[[10]]:

E que demonstram a validade da Teoria das Matrizes Aleatórias no estudo de sistemas complexos na física. Outra característica importante na equação [6.14] é descrito pelo termo  $e^{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N x_i^2}$ . Esse fator gaussiano faz com que as configurações de autovalores no ensemble de Wigner estejam situados majoritariamente em torno da origem. Assim a função densidade de probabilidade para os elementos do ensemble gaussiano demonstra um

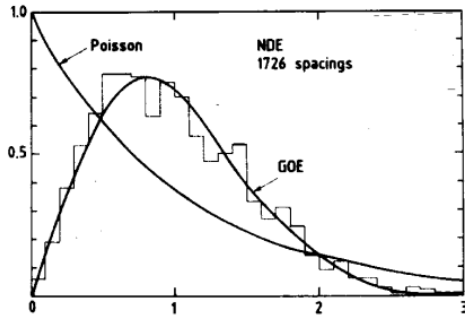


Figura 30 – Histograma normalizado do espaçamento médio de vizinho mais próximo para um ensemble de dados nucleares com 1726 espaçamentos. Para comparação estão os resultados obtidos previstos pela distribuição de Poisson e pela TMA. Retirado de [[4]]

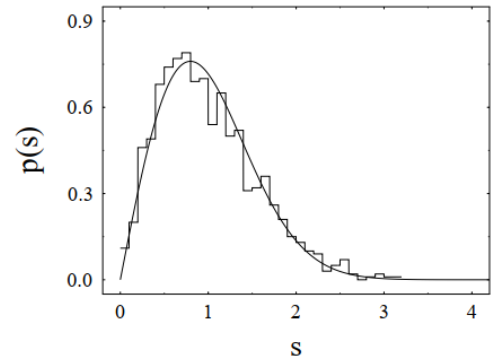


Figura 31 – Distribuição de espaçamento do vizinho mais próximo para os modos elastomecânicos num cristal de Quartzo de formato irregular. Retirado de [[8]]

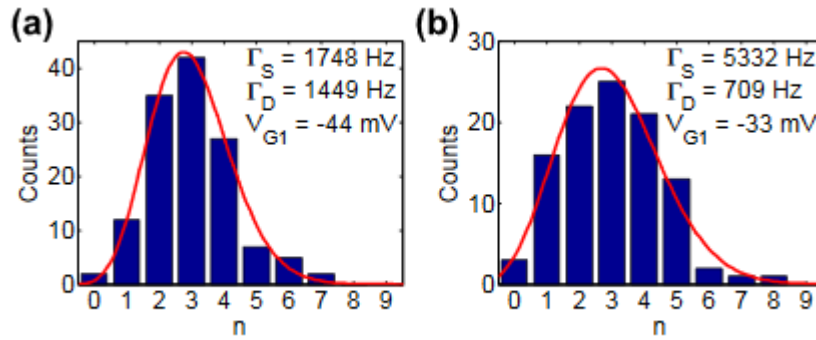


Figura 32 – Distribuição estatística do número  $n$  de elétrons entrando num Ponto Quântico num intervalo de tempo  $t_0$ . Retirado de [[10]].

caráter de repulsão e de confinamento, que está no cerne de muitos resultados da Teoria de Matrizes Aleatórias.

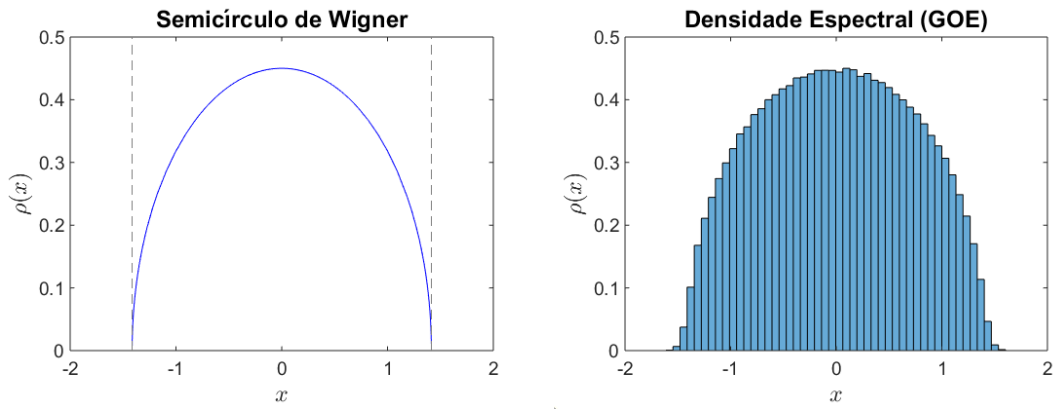
Através da mudança de escalas dessa função, fomos capazes de interpretar essa função densidade de probabilidade, com a que descreve a distribuição de partículas de um fluido termodinâmico, o gás de Coulomb, ao longo de uma linha em duas dimensões, isso devido ao termo logarítmico. Dessa forma a constante de normalização pôde ser interpretada com a função de partição canônica, e ao se introduzir a função de contagem  $n(x)$  e utilizar o princípio da minimização da energia para calcular a lei do fomos capazes de calcular a densidade espectral para o ensemble de matrizes aleatória gaussiana, a lei do semicírculo de Wigner.

Isso foi possível, pois devido as propriedades da função delta contida em  $n(x)$ , pode-se facilmente mostrar que

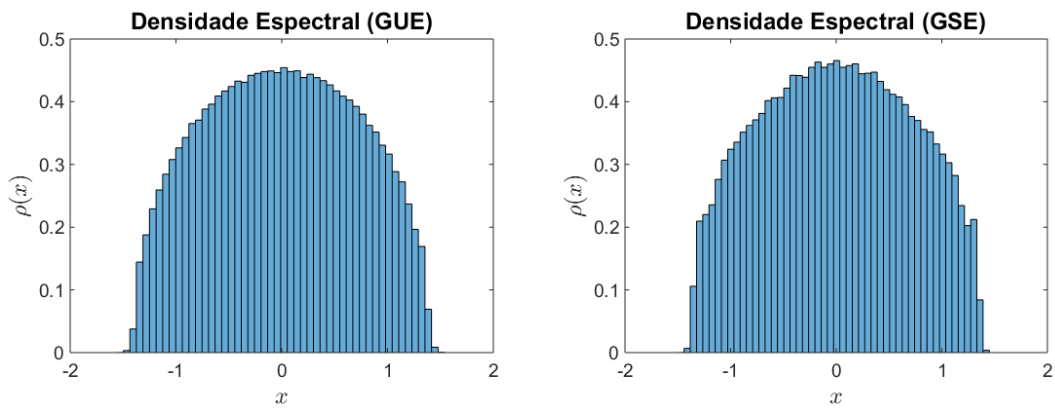
$$\langle n(x) \rangle = \rho(x) = \int \cdots \int \rho(X_1, \dots, X_N) dx_1 \cdots dx_N \quad (6.42)$$

Onde  $\rho(x)$  é a função densidade de probabilidade marginal de um f.d.p  $\rho(x_1, \dots, x_N)$  simétrica sobre a troca  $x_i \rightarrow x_j$  (esse é o caso da distribuição gaussiana), e  $\langle n(x) \rangle$  é a média da função contagem sobre um conjunto de autovalores aleatórios  $\{X_1, \dots, X_N\}$ , mais conhecida como densidade espectral (média). É através da relação contida na equação 6.42 que podemos afirmar que, o resultado obtido em 6.39 reproduz o formato da distribuição de autovalores, equação 6.14.

Utilizando a o software *Matlab* de modo a gerar matrizes aleatórias a partir de uma distribuição gaussiana, e executar o processo de simetrização, equação 6.5, e gerar o histograma dos autovalores dessas matrizes pudemos verificar que a o formato previsto é recuperado, conforme a figura:



(a) Densidade espectral dos ensemble gaussianos de Wigner, conforme previsto pela lei do semicírculo (b) Histograma normalizado da distribuição de autovalores de um conjunto de  $N=10000$  matrizes aleatórias simétricas  $50 \times 50$  gerados a partir de uma distribuição gaussiana



(c) Histograma normalizado da distribuição de autovalores de um conjunto de  $N=10000$  matrizes aleatórias hermitianas  $50 \times 50$  gerados a partir de uma distribuição gaussiana. (d) Histograma normalizado da distribuição de autovalores de um conjunto de  $N=10000$  matrizes aleatórias quartenionicas  $50 \times 50$  gerados a partir de uma distribuição gaussiana.

Figura 33 – Comparação entre o formato previsto por Wigner na lei do semicírculo com a densidade espectral dos ensembles GOE, GUE e GSE.

Esse resultado ainda que obtido de uma maneira específica para o perfil termodinâmico de um gás bidimensional, é de validade geral e é essencial pra demonstrar a universalidade local do espectro, i.e, que a distribuição dos espaços entre autovalores

dependem de propriedades de simetrias das matrizes, mas não dos detalhes das entradas matrizes específicas.

O formato de semicírculo corresponde naturalmente à distribuição de muitos sistemas físicos, como é o caso do estudo de redes complexas (a internet, rotas de entregas postais, etc), e muitos outros poderem ser acoplados a matrizes aleatórias de modo a resultar nesse formato. Entretanto, um aspecto mais importante e geral desse resultado está nas singularidades nos extremos da distribuição, que possuem o formato de raiz.

Esse é o caso da densidade espectral das ressonâncias em reações nucleares, a primeira aplicação do método por Wigner, e também em sistemas físicos que possuem um gap de banda (semicondutores, supercondutores, etc), onde apesar da forma geral não ser obtida, a densidade de estados possui comportamento do semicírculo nos limites espectrais. Isso permite estudar propriedades de flutuações no sistema, como funções de correlação, que irão possuir a mesma distribuição universal do ensemble gaussiano de Wigner. Isso é possível porque o nível médio de espaçamento que é de ordem  $1/N$  vai a zero, quando  $N \rightarrow \infty$ , de modo que nesse limite as propriedades de flutuações se tornam independentes da forma do espectro global do sistema e até mesmo do fator gaussiano definido, conforme mostra Balian [[5]].

No entanto, os ensembles de matrizes de espalhamentos utilizados em sistemas mesoscópicos compreendem também as utilizadas por Wigner [[14]], uma vez que as propriedades de espalhamento quântico caótico que configuram o sistema são dependentes em sua vasta maioria de simetrias fundamentais da natureza, a progressão dos resultados aqui encontrados para o estudo desses sistemas se dá de maneira direta.

## 7 Conclusão

A partir desse trabalho pudemos abordar de maneira breve a área emergente e crescente de sistemas dinâmicos não lineares, parte de suas origens clássicas, estruturas e propriedades, o surgimento de Caos e sua relação com a Mecânica Quântica.

Apesar de sua enorme gama de aplicações na atualidade, tal como grande número de influências em seu surgimento, é possível traçar a origem comum para o estudo de sistemas não lineares até a Mecânica Clássica, formulada majoritariamente por Newton e rebuscada por Hamilton e Lagrange, que fornecem diferentes formas de se descrever um sistema dinâmico e que também tiveram suas aplicações expandidas para outros ramos da física. Particularmente, pode-se destacar o surgimento de espaços diferentes do Euclidiano em três dimensões, o que facilitou a análise de sistemas de muito corpos e que abriu espaço geométrico

No entanto, a insolubilidade de sistemas não lineares pelos formalismos supracitados, em especial do problema dos três corpos, que data os primeiros séculos da ciência moderna, levou ao trabalho de Henri Poincaré que introduziu métodos geométricos mais sofisticados para a análise de sistemas físicos, e que é uma das primeiras menções ao que viria ser conhecida como teoria do Caos.

Pudemos, compreender de modo parcial algumas técnicas e estruturas da análise geométrica para sistemas unidimensionais e bidimensionais: o comportamento de pontos fixos e o surgimento de bifurcações, com a variação de parâmetros de controle no sistema e a existência de ciclos limite.

Para compreendermos o surgimento do Caos determinístico, o sistema utilizado foi do Pêndulo Forçado e Amortecido, que é descrito por uma equação de segunda ordem não autônoma, e que, portanto, possui a quantidade mínima de coordenadas para o surgimento de Caos: a posição  $\phi(t)$ , a velocidade  $\dot{\phi}(t)$ , e o próprio tempo  $t$ .

Esse sistema dá origem a um fenômeno comum a muitos sistemas caóticos: a cascata de duplicação de períodos, também chamada de rota para o Caos. Além disso, pudemos identificar, por meio do espaço de fase, o surgimento de um atrator caótico e por meio das seções de Poincaré, o surgimento da geometria do Caos, os fractais, que possui a importante propriedade de simetria sob mudança de escala. Pudemos também ver o surgimento do atrator estranho nas equações de Lorenz, cuja relevância está em ter sido o primeiro trabalho a apresentar tal estrutura.

Em especial, a dependência sensível às condições iniciais presente em sistemas caóticos emerge, assim como a mecânica quântica, como outro impossibilitador do determinismo,



devido a impossibilidade de se realizar experimentos com medições exatas. Isso, pois não é possível serem realizados experimentos com precisão perfeito. Sempre haverá incertezas, decorrentes do instrumentos ou de possíveis falhas do experimentador, que em sistemas não lineares irão dominar o sistema, devido ao efeito borboleta.

Assim, de modo a tentar responder duas questões que surgem naturalmente: "Qual a aplicação de tais sistemas? E qual a relação entre Caos e Mecânica Quântica?". Abordamos a caologia quântica, e introduzimos a Teoria das Matrizes Aleatórias, obtemos as conjectura de Wigner e a Lei do Semicírculo e vimos alguns trabalhos recentes que apresentavam essas estruturas.

Desse modo, pudemos entender que apesar da natureza dos sistemas físicos, ser em sua maior parte imprevisível e aleatória, ainda surgem propriedades regulares, e ordem, até mesmo nos sistemas mais complexos.

E o estudo dessas propriedades está na área de fronteira da pesquisa científica e tecnológica, sendo o transporte eletrônico em nanoestruturas um exemplo disso. [17] [2]

# Referências

- [1] Marcus A. M. de Aguiar. Einstein e a teoria de caos quântico. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 27, 03 2005. [75](#)
- [2] Kathleen T. Alligood, Tim D. Sauer, and James A. Yorke. *Chaos: An Introduction to Dynamical Systems*. Springer, 1996. [88](#)
- [3] J.A. Blackburn and G.L Baker. A comparison of commercial chaotic pendulums. *Amercia Journal of Physics*, 66, 1998. [62](#)
- [4] O. Bohigas, R. U. Haq, and A. Pandey. Fluctuation properties of nuclear energy levels and widths : Comparison of theory with experiment. In K. H. Böckhoff, editor, *Nuclear Data for Science and Technology*, pages 809–813, Dordrecht, 1983. Springer Netherlands. [9](#), [76](#), [83](#), [84](#)
- [5] Benoît Collins and Ion Nechita. Random matrix techniques in quantum information theory. *Journal of Mathematical Physics*, 57(1):015215, Jan 2016. [86](#)
- [6] P. Cvitanović, R. Artuso, R. Mainieri, G. Tanner, and G. Vattay. *Chaos: Classical and Quantum*. Niels Bohr Inst., Copenhagen, 2016. [13](#), [14](#)
- [7] Ildeu de Castro Moreira. Sistemas caóticos em física - uma introdução. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 15:163–181, 1993. [74](#)
- [8] C. Ellegaard, T. Guhr, K. Lindemann, J. Nygård, and M. Oxborrow. Symmetry breaking and spectral statistics of acoustic resonances in quartz blocks. *Phys. Rev. Lett.*, 77:4918–4921, Dec 1996. [10](#), [83](#), [84](#)
- [9] James Gleick. *Chaos: Making a New Science*. Penguin Books, USA, 1987. [14](#), [15](#)
- [10] S. Gustavsson and Leturcq et al. Counting statistics of single electron transport in a quantum dot. *Phys. Rev. Lett.*, 96:076605, Feb 2006. [10](#), [83](#), [84](#)
- [11] Martin C. Gutzwiller. *Chaos in Classical and Quantum Mechanics*. Springer, New York, 1990. [54](#), [75](#)
- [12] C.W. Kulp and V. Pagonis. *Classical Mechanics: A Computational Approach with Examples Using Mathematica and Python*. Taylor & Francis Group, 2020. [36](#)
- [13] Edward N. Lorenz. Deterministic nonperiodic flow. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 20:130–141, 1963. [14](#), [54](#), [72](#)

- 
- [14] Madan Lal Mehta. *Random Matrices*, volume 142 of *Pure and Applied Mathematics*. Elsevier/Academic Press, California, 3 edition. 86
  - [15] Marcel Novaes. O gato e a borboleta: propriedades quânticas de sistemas caóticos. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 43, 2021. 15, 76
  - [16] Steven H. Strogatz. *Nonlinear Dynamics and Chaos: With Applications to Physics, Biology, Chemistry and Engineering*. CRC Press, Florida, 2 edition, 2018. 8, 38, 40, 46, 49, 50, 51, 54
  - [17] John R. Taylor. *Classical Mechanics*. University Science Books, Sausalito, California, 2005. 9, 21, 54, 64, 88
  - [18] Charles Torres. Lecture notes in classical mechanics, 2016. 23
  - [19] F.G. Tricomi. *Integral Equations*. (Pure and applied mathematics, v. 5). Dover Publications, 1985. 81