

João Victor Jordão Nóbrega

Uma introdução à cosmologia inflacionária

João Pessoa - PB

2021

João Victor Jordão Nóbrega

Uma introdução à cosmologia inflacionária

Trabalho de conclusão do curso de graduação em Física do Centro de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade Federal da Paraíba como requisito parcial para a obtenção do título de Bacharel em Física.

Universidade Federal da Paraíba – UFPB

Centro de Ciências Exatas e da Natureza – CCEN

Departamento de Física – DF

Orientador: Prof. Dr. Herondy Francisco Santana Mota

João Pessoa - PB

2021

Catálogo na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

N754i Nóbrega, João Victor Jordão.
Uma introdução à cosmologia inflacionária / João
Victor
Jordão Nóbrega. - João Pessoa, 2021.
60 p. : il.

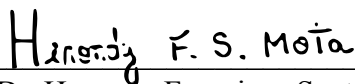
Orientação: Herondy Francisco Santana Mota.
TCC (Graduação/Bacharelado em Física) - UFPB/CCEN.

1. Cosmologia. 2. Inflação cosmológica. 3. Modelo
cosmológico padrão. I. Mota, Herondy Francisco Santana.
II. Título.

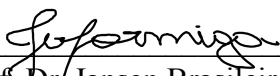
UFPB/CCEN CDU 524.8(043.2)

Ata da Sessão Pública da Defesa do
Trabalho de Conclusão de Curso de
Bacharelado em Física, do discente
João Victor Jordão Nóbrega.

Aos 18 dias do mês de novembro do ano de 2021, às 10h, reuniram-se, remotamente, os membros da Banca Examinadora constituída pelos docentes Prof. Dr. Herondy Francisco Santana Mota (Dep. Física – UFPB), orientador e presidente da banca examinadora, Prof. Dr. Jansen Brasileiro Formiga (Dep. Física – UFPB) e Prof. Dr. Iarley Pereira Lobo (Dep. Física e Química – Campus II – UFPB), para avaliar o discente João Victor Jordão Nóbrega. Dando início aos trabalhos, o professor orientador e presidente da banca examinadora comunicou aos presentes a finalidade da reunião. A seguir, concedeu a palavra ao discente João Victor Jordão Nóbrega para que fizesse a explanação, oralmente, de seu Trabalho de Conclusão de Curso, intitulado “*Uma Introdução à Cosmologia Inflacionária*”. Concluída a exposição, o discente foi arguido pela Banca Examinadora. Após as arguições, a banca examinadora, de comum acordo, declarou que a monografia apresentada foi aprovada com nota 9,5 (nove e meio). Assim sendo, encerrada a reunião, eu, Prof. Dr. Herondy Francisco Santana Mota (Dep. Física – UFPB), orientador e presidente da banca examinadora, lavrei esta ata, que vai assinada pelos demais examinadores, pelo discente e por mim que a subscrevi. João Pessoa, 18 de novembro de 2021.



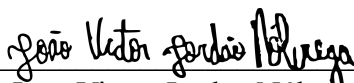
Prof. Dr. Herondy Francisco Santana Mota
UFPB – Orientador



Prof. Dr. Jansen Brasileiro Formiga
UFPB



Prof. Dr. Iarley Pereira Lobo
UFPB



João Victor Jordão Nóbrega
Discente

Dedico esse trabalho à minha irmã, Maria Clara.

Agradecimentos

Sou grato a todos os professores do Departamento de Física da UFPB, em especial ao meu orientador, Prof. Herondy Mota, pelos ensinamentos e por ter me guiado e incentivado durante toda a graduação.

Agradeço aos meus pais, Fátima e Nito, por terem me apoiado em todas as minhas escolhas e me proporcionado condições de realizá-las;

À minha companheira, Andreza, por estar comigo em todos os momentos e me dar apoio nos mais difíceis deles;

Aos meus colegas de curso, por todos os momentos na universidade, todos os almoços e pela companhia durante o desespero;

À todos os meus queridos amigos, pelos importantes momentos de diversão e descontração;

E ao CNPQ pelo suporte financeiro durante toda a graduação.

*Nobody ever figures out what life is all about,
and it doesn't matter. Explore the world.
Nearly everything is really interesting
if you go into it deeply enough.
(Richard P. Feynman)*

Resumo

Estudar o Universo e entender sua origem e evolução sempre foi um interesse da humanidade e a cosmologia se propõe a isso, buscando responder questões relacionadas à sua estrutura, composição e dinâmica. Diversos foram os modelos propostos para tal, mas um que obteve considerável êxito quando comparado com as observações foi o chamado modelo cosmológico padrão, que implica em um Universo em expansão, homogêneo e isotrópico em larga escala, ou seja, não existem pontos ou direções preferenciais no Universo. Entretanto, apesar de seu grande sucesso, o modelo cosmológico padrão apresenta alguns problemas, dentre eles podemos destacar o problema do horizonte e o problema da planicidade. Uma proposta amplamente aceita para solucionar esses problemas é a de que o universo, no seu momento inicial, passou por uma fase de crescimento exponencial. Tal proposta constitui o que conhecemos como modelos inflacionários, os quais além de resolverem os problemas presentes no modelo cosmológico padrão, nos fornecem uma boa explicação a respeito da formação das anisotropias do Universo como consequência da ampliação das flutuações quânticas no campo gerador da inflação, o inflaton. Nesse trabalho buscamos elaborar uma vasta revisão bibliográfica dos principais aspectos do desenvolvimento da proposta inflacionária, ressaltando os conceitos teóricos e destrinchando o aparato matemático. Por fim, analisamos diferentes modelos inflacionários com base nos dados fornecidos a partir das observações cosmológicas e estudamos a validade de alguns dos potenciais que podem ter atuado no período inflacionário.

Palavras-chave: Cosmologia; Inflação cosmológica; Modelo cosmológico padrão.

Abstract

Studying the universe and understanding its origin and evolution has always been an interest of humanity and this is the purpose of cosmology, seeking to answer questions related to its structure, composition and dynamics. The so-called Standard Cosmological Model has had considerable success in explaining cosmological observations which indicates, for instance, that the Universe on large scales is homogeneous and isotropic and has been expanding. However, despite its great success, the standard cosmological model presents some problems, which among them we can highlight the horizon problem and the flatness problem. A widely accepted proposal to resolve these problems is that the universe, in its initial moment, went through a exponential expansion phase. Such a proposal constitutes what is known as inflationary models and besides solving some of the problems in the standard cosmological model, they also provide a good explanation about the formation of anisotropies in the universe through the amplification of quantum fluctuations in the generating field of inflation, the inflaton. In this work, we seek to elaborate a vast bibliographical review of the main aspects of the development of the inflationary proposal, emphasizing the theoretical concepts and elucidating the mathematical apparatus. Finally, we analyze different inflationary models based on data provided from cosmological observations and study the validity of some of the potentials that could generate the inflationary period.

Keywords: Cosmology; Inflationary cosmology; Standard model of cosmology.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Analogia do balão.	14
Figura 2 – Diferença entre o vetor em P' e o vetor paralelamente transportado para P'	18
Figura 3 – Um vetor transportado paralelamente ao redor de um triângulo em um espaço Euclidiano e em espaço curvo (superfície de uma esfera).	19
Figura 4 – Um triângulo de geodésicas em uma esfera.	20
Figura 5 – Experimento mental do elevador de Einstein, com os casos 1, 2, 3 e 4 da esquerda para a direita.	23
Figura 6 – Imagem da RCF produzida pelo satélite COBE indicando as regiões de maior e menor temperatura através da cor.	26
Figura 7 – Imagem da RCF produzida pelo satélite WMAP indicando as regiões de maior e menor temperatura através da cor.	27
Figura 8 – Os três tipos de geometria do universo para diferentes valores do parâmetro de densidade.	31
Figura 9 – Diagrama da energia potencial na analogia newtoniana do modelo estático de Einstein.	33
Figura 10 – A distância comóvel permanece constante em um sistema de coordenadas em expansão, já a distância física é proporcional ao fator de expansão.	35
Figura 11 – Diagrama conforme de um observador recebendo fótons da RCF de dois pontos distintos desconectados causalmente.	36
Figura 12 – Regiões na RCF desconectadas causalmente.	37
Figura 13 – Evolução do raio de Hubble comóvel.	40
Figura 14 – Diagrama conforme para a cosmologia inflacionária.	41
Figura 15 – Exemplo de um potencial <i>slow-roll</i> . A inflação ocorre nas regiões sombreadas.	43
Figura 16 – Evolução da perturbação de curvatura ζ_k para um modelo $V(\phi) = \frac{1}{2}m^2\phi_0^2$, com $k = 10^4$ e $m \sim 2 \times 10^{-6}$. Com quantidades em unidades de Planck.	48
Figura 17 – Restrição de probabilidade em n_s e r baseado no banco de dados do Planck 2018. São exibidos os contornos para o intervalo de confiança 1σ e 2σ	50
Figura 18 – Classificação dos potenciais inflacionários.	52
Figura 19 – Plano (n_s, r) com a classificação dos potenciais inflacionários.	55
Figura 20 – Restrições no plano (n_s, r) para a base de dados do Planck 2018 em verde e para os dados do BICEP/Keck em azul, ambos com os contornos para o intervalo de confiança 1σ e 2σ	57

Lista de abreviaturas e siglas

ASL	Aproximação <i>slow-roll</i>
BICEP	Background Imaging of Cosmic Extragalactic Polarization
COBE	Cosmic Background Explorer
FLRW	Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker
HBB	<i>Hot big bang</i>
HST	Hubble Space Telescope
MCP	Modelo cosmológico padrão
PC	Princípio cosmológico
RCF	Radiação cósmica de fundo
WMAP	Wilkinson Microwave Anisotropy Probe

Sumário

1	INTRODUÇÃO	13
2	A TEORIA DA RELATIVIDADE GERAL	15
2.1	Tensores	15
2.2	Derivada covariante	17
2.3	Transporte paralelo	18
2.4	Geodésicas	19
2.5	Curvatura	21
2.6	Equações de campo	22
3	O MODELO COSMOLÓGICO PADRÃO	25
3.1	A expansão do universo	25
3.2	Radiação cósmica de fundo	26
3.3	Abundância dos elementos leves	27
3.4	Métrica de FLRW	28
3.5	Equações de Friedmann	29
3.6	Parâmetros observacionais	30
3.7	A constante cosmológica	31
3.8	Os problemas no modelo	32
3.8.1	Problema da planicidade	32
3.8.2	Problema do horizonte	34
4	INFLAÇÃO COSMOLÓGICA	38
4.1	Condições para a inflação	38
4.2	Solucionando o problema da planicidade	39
4.3	Solucionando o problema do horizonte	39
4.4	O campo escalar como gerador da inflação	41
4.5	Aproximação slow-roll	43
4.6	Final da inflação	44
4.7	Quantidade de inflação	45
4.8	Potencial quadrático	45
4.9	Perturbações cosmológicas	46
4.10	Modelos inflacionários	51
4.10.1	Modelos de grandes campos	52
4.10.2	Modelos de pequenos campos	53
4.10.3	Modelos híbridos	54

5	CONSIDERAÇÕES FINAIS	56
	REFERÊNCIAS	58

1 Introdução

A grandiosidade do universo à nossa volta e a facilidade com que podemos observá-lo ao apenas apreciar o céu noturno sempre fascinou os estudiosos, desde os filósofos gregos pré-socráticos até os dias de hoje. Esse estudo foi se tornando cada vez mais amplo e complexo conforme se desenvolviam instrumentos de observação de alta precisão, à exemplo do *Hubble Space Telescope* (HST), do *Cosmic Background Explorer* (COBE) e do *Wilkinson Microwave Anisotropy Probe* (WMAP), que são todos satélites artificiais que nos permitiram observar o universo para além do nosso sistema solar e até de nossa galáxia. Essas observações levaram à formulação da área de estudo que denominamos de Cosmologia, a ciência responsável por compreender a composição, a estrutura e a evolução do universo, isto é, através dela chegamos cada vez mais próximos de entender do que é feito o universo, de que forma ele se organiza e como ele se transforma com o passar do tempo.

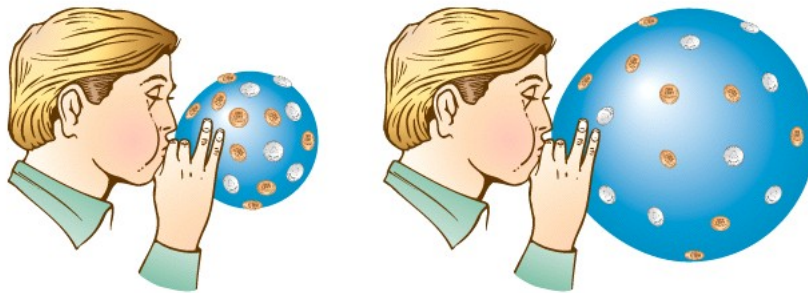
Para analisar a história do universo, os cosmólogos trabalham buscando vestígios de uma época muito distante, tal qual arqueólogos, eles procuram os “fósseis” deixados pelo universo em seus instantes iniciais. Baseado nessas observações, diversos foram os modelos propostos para explicar o funcionamento do cosmos, mas dentre eles um que se destacou e ganhou reconhecimento diante da comunidade científica foi o chamado modelo cosmológico padrão (MCP), ou teoria do *big bang*. Esse modelo tem a sua base teórica assentada em alguns importantes pilares, dentre eles temos o chamado princípio cosmológico, o qual diz que quando observado em larga escala¹ o universo é homogêneo e isotrópico, isto é, não existem pontos ou direções preferenciais no universo. Temos também a hipótese de que a dinâmica do universo em todas as escalas de energia pode ser descrita pela teoria da relatividade geral de Einstein e por fim, assumimos também que o conteúdo do universo pode ser descrito como um fluido perfeito (VAZQUEZ; PADILLA; MATOS, 2020).

Esse modelo apresenta resultados muito satisfatórios quando comparados com as observações experimentais. Dentre os seus sucessos podemos citar a correta predição da temperatura da radiação cósmica de fundo, da abundância dos elementos leves e talvez a sua mais famosa consequência, a evidência de um universo em expansão, isto é, existe uma expansão do próprio espaço e não uma expansão do conteúdo do universo em um espaço que já existe. Vale ressaltar que apesar de os dados astronômicos indicarem que as galáxias estão se afastando de nós com uma velocidade proporcional à distância até elas, isso não significa que a nossa galáxia seja o centro do universo, visto que, o princípio cosmológico assegura que não pode haver nenhum ponto privilegiado do espaço (BAHCALL, 2015). Uma analogia muito comum para exemplificar a expansão do universo

¹ Escalas da ordem de $100Mpc$, ou seja, $3,26 \times 10^8 anos - luz$.

é a de uma criatura limitada à superfície bidimensional de um balão. Ao inflarmos o balão, seus pontos se afastam e o espaço “expande”, conforme ilustra a Figura 1, porém para a criatura bidimensional não existe uma terceira dimensão, portanto, não faz sentido falar de interior, exterior ou centro do balão. Apesar disso, essa criatura pode facilmente concluir que se encontra em um espaço curvo, já que ao se deslocar em linha reta acaba por voltar ao ponto de partida.

Figura 1 – Analogia do balão.



Fonte: Disponível em <<https://www.blogs.unicamp.br/tortaprimordial/2019/06/13/a-expansao-do-universo/>>. Acesso em 28/09/2021.

Apesar desses e de diversos outros sucessos do MCP, ainda existem fenômenos observados que não conseguem ser explicados pelo modelo. É com a motivação de sanar esses problemas encontrados no MCP que surgem os modelos cosmológicos inflacionários (GUTH, 1981). Com uma elegante proposta de que o universo, em seu momento inicial, passou por uma fase de crescimento exponencial, os modelos inflacionários se propõem a complementar o MCP, solucionando os seus problemas e ainda nos fornecendo uma boa explicação a respeito da formação das anisotropias do universo através da ampliação das flutuações quânticas no campo gerador da inflação (inflaton).

Dessa maneira, o nosso objetivo no presente trabalho é realizar uma síntese do cenário em que surge a necessidade de formulação da teoria da inflação cosmológica. Através de uma ampla revisão bibliográfica buscamos esclarecer o desenvolvimento dos modelos inflacionários e elucidar como esses são capazes de sanar alguns dos problemas presentes no MCP. Nossa motivação se deu pela dificuldade deparada ao se buscar trabalhos na literatura que conseguissem, de maneira linear, fornecer ao leitor uma compreensão clara da concepção da cosmologia inflacionária, aliando o desenvolvimento matemático aos elementos teóricos. Acreditamos que um trabalho como esse pode ser de grande utilidade para futuros alunos que apresentem interesse pela área.

2 A teoria da Relatividade Geral

Antes de partirmos para um estudo dos modelos cosmológicos atuais é importante que voltemos um pouco no tempo para compreendermos um dos pilares da cosmologia moderna, a teoria da Relatividade Geral.

Newton, no século XVI, desenvolveu estudos acerca da dinâmica dos corpos celestes com base nas constatações experimentais fornecidas principalmente por Galileu e Kepler. A chamada teoria da gravitação universal descreve a interação entre os corpos como sendo instantânea e a mudança de coordenadas como sendo regida pelas transformações de Galileu, implicando em forças que eram independentes do referencial adotado (NUSSENZVEIG, 1988).

Essa teoria funcionou muito bem, mas com o desenvolvimento do eletromagnetismo no século XIX surgem alguns problemas teóricos, já que as equações de Maxwell não eram invariantes sob transformações de Galileu e a velocidade de propagação das ondas eletromagnéticas no vácuo aparentava ser constante (GRIFFITHS, 1999). Para solucionar esse problema, o físico Hendrik Lorentz desenvolveu uma nova maneira de se realizar a mudança de coordenadas, as chamadas transformações de Lorentz, que por sua vez mantinham as equações de Maxwell invariantes e recuperavam as transformações de Galileu para o caso de baixas velocidades (LORENTZ, 1952).

Com isso, Albert Einstein considera que os conceitos de espaço e de tempo adotados por Newton não deveriam ter um caráter absoluto, formulando a teoria da Relatividade Restrita. Posteriormente, Einstein generaliza a sua teoria quando passa a levar em conta a influência dos campos gravitacionais, ele interpreta a força gravitacional como sendo uma deformação na geometria do próprio espaço-tempo, com essa deformação sendo gerada pela presença de matéria ou energia. Assim surge a teoria da Relatividade Geral, que nos fornece uma maneira de estudar a dinâmica dos corpos a partir da estrutura geométrica do espaço-tempo. Mas para compreender como as equações de campo de Einstein são capazes de explicar fenômenos gravitacionais e realizar previsões com excelente precisão é preciso entender acerca do aparato matemático envolvido e conhecer um dos objetos mais úteis no estudo da cosmologia: os tensores.

2.1 Tensores

Os tensores podem ser entendidos como quantidades matemáticas que generalizam os conhecidos conceitos de escalares e vetores. Eles obedecem determinadas regras quando são submetidos a uma transformação de coordenadas e são de extrema importância para

diversas áreas da física pela fato de as equações tensoriais serem preservadas ao realizarmos uma mudança de coordenadas.

Assim, se consideramos em um espaço n -dimensional dois sistemas de coordenadas distintos:

$$x^a = x^a(x^1, x^2, \dots, x^n) \quad (2.1)$$

e

$$x'^a = x'^a(x'^1, x'^2, \dots, x'^n), \quad (2.2)$$

podemos definir dois tipos de tensores: os contravariantes, que se transformam de acordo com

$$T'^a = \frac{\partial x'^a}{\partial x^b} T^b, \quad (2.3)$$

e os covariantes, que se transformam por

$$T'_a = \frac{\partial x^b}{\partial x'^a} T_b, \quad (2.4)$$

ou de maneira mais geral, podemos denotar a transformação de um tensor misto como sendo

$$T'^a_{b\dots} = \frac{\partial x'^a}{\partial x^c} \dots \frac{\partial x^d}{\partial x'^b} \dots T^c_{d\dots}. \quad (2.5)$$

O número total de índices de um tensor é denominado ordem e de modo geral, o número de componentes de um tensor de ordem n em um espaço com m dimensões é dado por m^n , ou seja, para um espaço tridimensional um tensor de ordem n é uma matriz de 3^n valores.

Ao longo desse trabalho vamos adotar a notação de Einstein, na qual consideramos termos que possuem índices repetidos como sendo um somatório sobre as dimensões. Para a multiplicação de tensores, temos duas possibilidades: o produto externo e o produto interno (ADLER, 2021). O produto externo, ou também chamado de produto tensorial, entre dois tensores tem como resultado um novo tensor com a ordem igual a soma das ordens de cada tensor, como por exemplo:

$$V^a W^b = T^{ab}. \quad (2.6)$$

Já o produto interno, que também é chamado de contração, é uma generalização do produto escalar e fornece um novo tensor de ordem mais baixa:

$$V^a W_{ac} = T^b_c. \quad (2.7)$$

Para o estudo de física é importante que possamos relacionar a distância entre dois pontos de maneira independente do sistema de coordenadas adotado. Para isso definimos que para dois pontos próximos no espaço, separados por uma pequena distância nas coordenadas dada por dx^μ , a distância com significado físico é expressa na forma quadrática por

$$ds^2 = \sum_{\mu, \nu}^n g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (2.8)$$

onde os índices variam de 0 a n em um espaço n -dimensional, $g_{\mu\nu}$ é chamado de tensor métrico, ou apenas métrica, e ds^2 é o elemento de linha, que pode ser visualizado como uma generalização direta do teorema de Pitágoras da geometria Euclidiana para uma escala diferencial. Uma propriedade interessante do tensor métrico é a sua utilização para levantamento ou abaixamento de índices, conectando as componentes contravariantes e covariantes do tensor:

$$g_{\mu\nu}T^\mu = T_\nu. \quad (2.9)$$

2.2 Derivada covariante

Podemos ainda buscar entender como um tensor se comporta ao sair de um ponto para outro, para isso devemos analisar a sua derivada. Para a relatividade geral, que é o nosso objeto de estudo, vamos tomar geometrias riemannianas, em que os tensores obedecem transformações gerais de coordenadas. Nesse caso, a derivada ordinária não se transforma como um tensor e portanto não se caracteriza como tal:

$$\frac{\partial T^\mu}{\partial x^\nu} = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\nu} \frac{\partial}{\partial x'^\alpha} \left(\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\beta} T'^\beta \right), \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial T^\mu}{\partial x^\nu} = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\nu} \left[\frac{\partial^2 x^\mu}{\partial x'^\alpha \partial x'^\beta} T'^\beta + \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\beta} \frac{\partial T'^\beta}{\partial x'^\alpha} \right], \quad (2.11)$$

então para que possamos definir uma diferenciação que possua caráter tensorial introduzimos os chamados símbolos de Christoffel (ou conexão) de segunda espécie:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} \left(\frac{\partial g_{\rho\mu}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\rho\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\rho} \right). \quad (2.12)$$

Para geometrias Riemannianas, o objeto matemático definido acima é simétrico nos índices inferiores, ou seja,

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \Gamma_{\nu\mu}^\lambda, \quad (2.13)$$

e se transformam de acordo com

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda'} = \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\omega} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\nu} \Gamma_{\sigma\rho}^\omega + \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\omega} \frac{\partial^2 x^\omega}{\partial x'^\mu \partial x'^\nu}. \quad (2.14)$$

Então conseguimos, por fim, definir uma operação de derivada que se comporte como um tensor, a chamada derivada covariante:

$$\nabla_\nu T^\mu = \frac{\partial T^\mu}{\partial x^\nu} + \Gamma_{\nu\rho}^\mu T^\rho, \quad (2.15)$$

e para as componentes covariantes do tensor:

$$\nabla_\nu T_\mu = \frac{\partial T_\mu}{\partial x^\nu} - \Gamma_{\mu\nu}^\rho T_\rho. \quad (2.16)$$

2.3 Transporte paralelo

Se tomamos uma certa curva γ em um espaço de coordenadas x^l , podemos parametrizar essa curva por um parâmetro λ de acordo com

$$x^l(\lambda) = x^l(x^1(\lambda), x^2(\lambda), \dots, x^n(\lambda)), \quad (2.17)$$

e o campo vetorial tangente a essa curva será dado por

$$t^l(\lambda) = \frac{dx^l(\lambda)}{d\lambda}. \quad (2.18)$$

Agora se desejamos transportar, ao longo dessa curva, um campo vetorial W^i de um ponto P até um ponto próximo P' , podemos fazer isso denotando a coordenada do ponto P como x^l e obtendo o valor de W^i no ponto P' ($x^l + dx^l$) através de uma expansão em série de Taylor até primeira ordem:

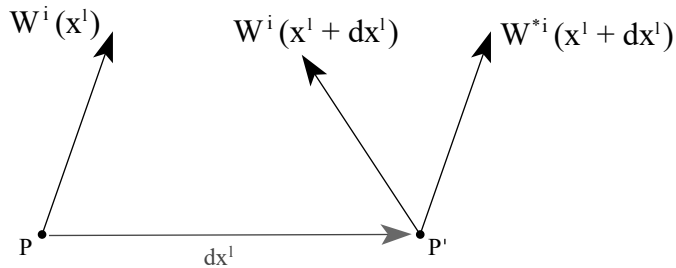
$$W^i(x^l + dx^l) = W^i(x^l) + \frac{\partial W^i}{\partial x^k} dx^k. \quad (2.19)$$

Então a diferença entre o campo nos dois pontos é dada pela própria derivada parcial:

$$\frac{\partial W^i}{\partial x^k} dx^k = W^i(x^l + dx^l) - W^i(x^l). \quad (2.20)$$

Entretanto, como vimos anteriormente essa não é uma operação com caráter tensorial na relatividade geral, então seria de grande interesse encontrar uma forma de transportar esse campo vetorial de maneira com que a mudança no campo fosse dada por uma grandeza tensorial. Para isso, utilizamos a derivada covariante, que através da conexão Γ_{kj}^i transporta o vetor W^i do ponto P para o P' resultando em um vetor paralelo W^{*i} com componentes $W^i + \delta W^i$, conforme ilustra a Figura 2:

Figura 2 – Diferença entre o vetor em P' e o vetor paralelamente transportado para P' .



Fonte: Elaborada pelo autor.

Podemos expressar a diferença entre o valor do campo tensorial avaliado em P' e o valor do campo transportado paralelamente para P' por:

$$W^i(x^l + dx^l) - W^{*i}(x^l + dx^l) = \nabla_k W^i dx^k. \quad (2.21)$$

Usando as equação (2.15) e (2.19) na equação (2.21), temos que

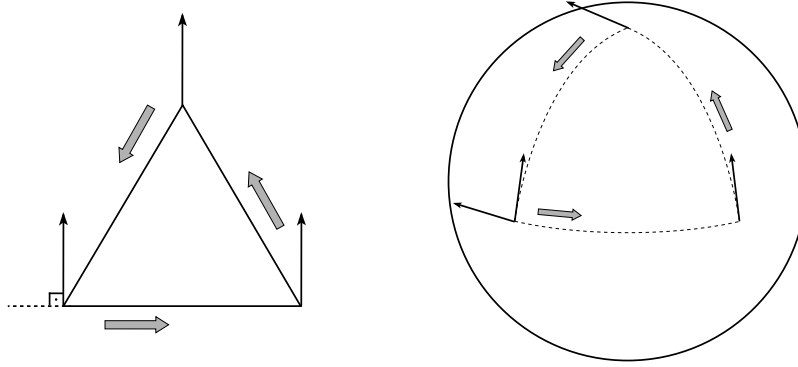
$$\left[W^i(x^l) + \frac{\partial W^i}{\partial x^k} dx^k \right] - \left[W^i(x^l) + \delta W^i \right] = \left[\frac{\partial W^i}{\partial x^k} + \Gamma_{kj}^i W^j \right] dx^k. \quad (2.22)$$

Consequentemente,

$$\delta W^i = -\Gamma_{kj}^i W^j dx^k, \quad (2.23)$$

que é definido como o transporte paralelo de P até P' . Vale ressaltar que o transporte paralelo mantém inalterado o comprimento do vetor, entretanto, sua orientação depende tanto dos pontos quanto do caminho adotado. Isso fica claro quando tratamos de espaços curvos, como ilustrado na Figura 3:

Figura 3 – Um vetor transportado paralelamente ao redor de um triângulo em um espaço Euclidiano e em espaço curvo (superfície de uma esfera).



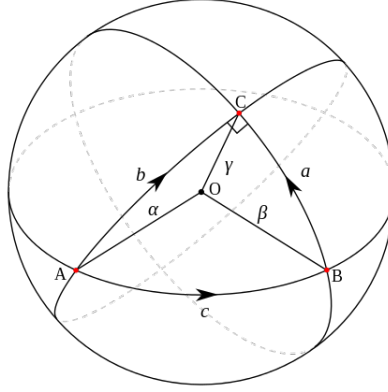
Fonte: Elaborada pelo autor.

Tomando o vetor como partindo do ponto inferior esquerdo do triângulo e formando um ângulo reto com a base do mesmo, no espaço plano, ilustrado na esquerda, o vetor é transportado até os vértices e retorna ao ponto inicial sem nenhuma alteração. Contudo, para o triângulo disposto sob a superfície curva de uma esfera, se realizamos o mesmo transporte paralelo notamos que o vetor sofre um rotação de 90° . Dessa forma, fica claro que a orientação de um vetor paralelamente transportado depende da trajetória tomada.

2.4 Geodésicas

Para a geometria euclidiana, ou seja, espaços planos, conseguimos facilmente visualizar que a menor distância entre dois pontos é uma reta, todavia isso deixa de ser verdade quando passamos a tratar de espaços curvos. Para uma geometria mais geral, denotamos a menor distância que une dois pontos como geodésica. Para o caso de uma geometria esférica, por exemplo, a geodésica seria um arco de circunferência, conforme a Figura 4:

Figura 4 – Um triângulo de geodésicas em uma esfera.



Fonte: Disponível em: <<https://en.wikipedia.org/wiki/Geodesic>>. Acesso em 07/10/2021.

Para encontrarmos a equação que define uma curva geodésica começamos notando que para a curva descrita pela equação (2.17) ser considerada uma geodésica ela deve ser paralela a ela mesma em todos os pontos, isto é, se realizarmos o transporte paralelo do vetor tangente ao longo da curva γ , o mesmo deve permanecer sendo um vetor tangente (ADLER, 2021). Logo, através da equação do transporte paralelo dada por (2.23), podemos transportar o campo vetorial tangente de um ponto P até P' :

$$t^{*l}(P') = t^l(P) - \Gamma_{kj}^l dx^k t^j(P). \quad (2.24)$$

Já o valor do campo tomado no ponto P' podemos obter de maneira analoga à expressão (2.19), realizando uma expansão em $P + \lambda$, ou seja,

$$t^l(P') = t^l(P) + \frac{dt^l}{d\lambda} d\lambda. \quad (2.25)$$

Por definição, para uma curva geodésica, o vetor tangente transportado deve ser igual ao próprio vetor tangente naquele ponto, logo, podemos igualar as duas equações anteriores e obter:

$$\frac{dt^l}{d\lambda} d\lambda = -\Gamma_{kj}^l dx^k t^j. \quad (2.26)$$

Agora se tomamos o parâmetro arbitrário λ como sendo o comprimento da curva, ou seja, $d\lambda = ds$, o campo vetorial tangente dado por (2.18) se torna

$$t^l = \frac{dx^l}{ds}. \quad (2.27)$$

Isto nos permite escrever a equação (2.26) como

$$\frac{d^2 x^l}{ds^2} + \Gamma_{kj}^l \frac{dx^k}{ds} \frac{dx^j}{ds} = 0, \quad (2.28)$$

conhecida como a equação da geodésica.

2.5 Curvatura

Percebemos, portanto, que a curvatura do espaço em que estamos trabalhando pode influenciar de forma significativa nos resultados físicos que buscamos estudar, logo, devemos encontrar uma maneira de descrever o grau de curvatura de um determinado espaço. Para isso, tomemos um conjunto de curvas tal que a junção delas forme uma curva fechada em um espaço curvo. Como foi ilustrado na Figura 3, se um vetor T^μ é transportado paralelamente ao redor dessas curvas, o vetor final não é, obrigatoriamente, paralelo ao vetor inicial, isso significa dizer que a derivada covariante não comuta em espaços curvos:

$$\nabla_\lambda \nabla_\omega T^\mu \neq \nabla_\omega \nabla_\lambda T^\mu. \quad (2.29)$$

Já se estivermos tratando de um espaço plano, o transporte paralelo do vetor T^μ é independente da curva escolhida e nesse caso podemos dizer que a derivada covariante comuta nesse espaço:

$$\nabla_\lambda \nabla_\omega T^\mu - \nabla_\omega \nabla_\lambda T^\mu = 0. \quad (2.30)$$

Dessa maneira, podemos definir um tensor a partir da diferença expressa no lado esquerdo da equação (2.30) que nos permite descrever o grau de curvatura do espaço em que estamos trabalhando:

$$\nabla_\lambda \nabla_\omega T^\mu - \nabla_\omega \nabla_\lambda T^\mu = R^\mu_{\sigma\lambda\omega} T^\sigma, \quad (2.31)$$

onde $R^\mu_{\sigma\lambda\omega}$ é chamado de tensor de curvatura, ou tensor de Riemann, e podemos expressá-lo por

$$R^\mu_{\sigma\lambda\omega} = \frac{\partial \Gamma^\mu_{\sigma\omega}}{\partial x^\lambda} - \frac{\partial \Gamma^\mu_{\sigma\lambda}}{\partial x^\omega} + \Gamma^\rho_{\sigma\omega} \Gamma^\mu_{\rho\lambda} - \Gamma^\rho_{\sigma\lambda} \Gamma^\mu_{\rho\omega}. \quad (2.32)$$

Vale ressaltar que para que um espaço seja plano é condição suficiente e necessária que o seu tensor de Riemann seja nulo:

$$R^\mu_{\sigma\lambda\omega} = 0. \quad (2.33)$$

A utilização do tensor de curvatura será de extrema importância para os estudos em Relatividade Geral e Cosmologia, entretanto ele pode ser um tensor bastante extenso, visto que para um espaço de 4 dimensões ele terá $4^2 = 256$ componentes. Para lidar com isso iremos fazer uso de algumas simetrias e assim reduzir esse número para apenas 20 componentes independentes.

A partir da equação (2.32), podemos notar que o tensor de Riemann é antissimétrico nos dois últimos índices covariantes (λ e ω), isto é,

$$R^\mu_{\sigma\lambda\omega} = -R^\mu_{\sigma\omega\lambda}. \quad (2.34)$$

Além disso, podemos abaixar o primeiro índice com o uso da métrica:

$$R_{\gamma\sigma\lambda\omega} = g_{\gamma\mu} R^\mu_{\sigma\lambda\omega}, \quad (2.35)$$

e assim escrever a seguinte identidade:

$$R_{\gamma\sigma\lambda\omega} + R_{\gamma\omega\sigma\lambda} + R_{\gamma\lambda\omega\sigma} = 0. \quad (2.36)$$

Além disso, temos também que

$$R_{\gamma\sigma\lambda\omega} = R_{\lambda\omega\gamma\sigma}. \quad (2.37)$$

Com isso, chegamos à importante identidade de Bianchi, dada por

$$\nabla_\rho R_{\gamma\sigma\lambda\omega} + \nabla_\lambda R_{\gamma\sigma\rho\omega} + \nabla_\omega R_{\gamma\sigma\rho\lambda} = 0. \quad (2.38)$$

A partir do tensor de Riemann podemos construir outros objetos que serão de grande interesse para o estudo da Relatividade Geral. O primeiro deles é um tensor simétrico chamado de tensor de Ricci, que podemos obter através da contração do índice contravariante com o segundo índice covariante:

$$R_{\sigma\omega} = R^\lambda_{\sigma\lambda\omega} = g^{\mu\lambda} R_{\mu\sigma\lambda\omega}, \quad (2.39)$$

e a partir dele, podemos construir o escalar de Ricci, ou escalar de curvatura:

$$R = g^{\sigma\omega} R_{\sigma\omega}. \quad (2.40)$$

Agora, a partir do tensor de Ricci e do escalar de curvatura, podemos construir um tensor que possua divergência nula, ou seja,

$$\nabla_\mu \left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R \right) = 0, \quad (2.41)$$

onde definimos o termo entre parênteses como tensor de Einstein, dado por

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R, \quad (2.42)$$

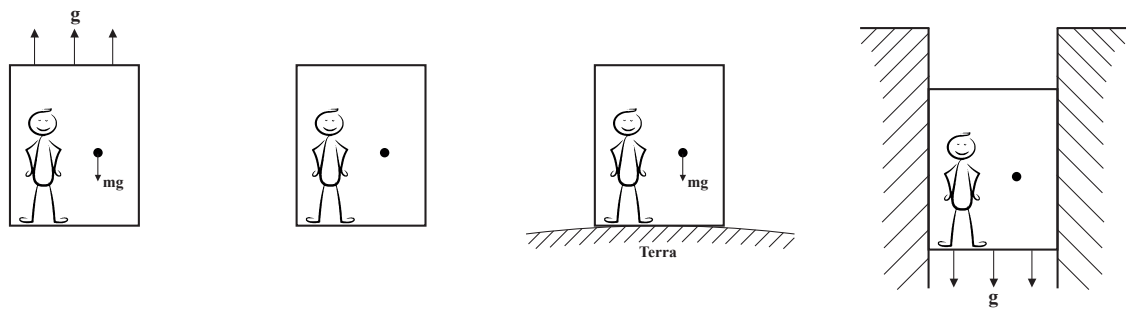
que também é um tensor simétrico. Note que é de grande importância que o tensor de Einstein tenha divergência nula, visto que está relacionado proporcionalmente com a fonte da geometria, ou seja, o tensor energia-momento. Neste sentido, é importante que este tensor obedeça a uma lei de conservação, tendo também divergência nula.

2.6 Equações de campo

Para compreendermos como Einstein desenvolveu as equações de campo que descrevem a dinâmica dos objetos na presença de um campo gravitacional é de suma importância entender um dos princípios mais importantes da Relatividade Geral, o chamado princípio da equivalência. Para isso, vamos fazer uso de um de seus célebres experimentos mentais, o elevador de Einstein.

Iniciamos considerando que um determinado observador está confinado a um elevador sem janelas e sem contato com o mundo exterior. Nesse elevador, o observador possui apenas os equipamentos necessários para realizar experimentos de dinâmica com o propósito de determinar o seu próprio estado de movimento (D'INVERNO, 1992). Podemos, então, considerar quatro diferentes cenários para o movimento do elevador, conforme ilustrado na Figura 5:

Figura 5 – Experimento mental do elevador de Einstein, com os casos 1, 2, 3 e 4 da esquerda para a direita.



Fonte: Elaborada pelo autor.

No primeiro caso o elevador está localizado distante da influência de qualquer campo gravitacional e é acelerado para cima com uma aceleração constante g em relação a um observador inercial. Nesse caso, se o observador solta no interior do elevador um objeto de massa m a partir do repouso ele o vê cair até o chão com aceleração g . No segundo caso, a aceleração do elevador é removida e se o observador solta a partir do repouso o mesmo objeto de massa m , por não existir nenhum campo gravitacional ele vai permanecer em repouso em relação ao observador.

Já para o terceiro caso, vamos considerar que o elevador é posicionado próximo à superfície terrestre e vamos desconsiderar os movimentos rotacionais e orbitais da Terra. Nesse caso, ao soltar o objeto ele cai até o chão com uma aceleração também de g . Por fim, no quarto caso consideramos que o elevador encontra-se em queda livre em direção ao centro da Terra, logo, o objeto ao ser solto permanece em repouso em relação ao observador.

Segundo o princípio da equivalência, é impossível para o observador presente no experimento notar alguma diferença entre o primeiro caso e o terceiro, ou entre o segundo e o quarto, isto é, um referencial que sofre uma aceleração constante é localmente idêntico a um referencial em repouso na presença de um campo gravitacional. Da mesma forma, não podemos realizar nenhum experimento local que consiga distinguir entre a queda livre em um campo gravitacional e o movimento uniforme no espaço, livre de campos gravitacionais (D'INVERNO, 1992).

Portanto, Einstein conclui que a gravidade está intimamente relacionada com a aceleração dos corpos, mas não através de uma força, como se era pensado na gravitação newtoniana, e sim através da própria geometria do espaço-tempo. Os corpos massivos deformam o “tecido” do espaço e determinam a sua geometria, da mesma forma, a geometria do espaço determina as geodésicas e portanto, o movimento dos corpos naquele local. Para expressar essa relação matematicamente, Einstein se inspira na equação de Poisson² da mecânica newtoniana, que determina as equações de campo da teoria através de uma equação diferencial de segunda ordem para o potencial. Para a Relatividade Geral, podemos identificar que o tensor métrico faz o papel do potencial na teoria, logo procuramos uma equação tensorial³ que relacione as derivadas parciais de segunda ordem da métrica com um termo que envolva a densidade de matéria. Essa equação é chamada de equação de Einstein e pode ser expressa por

$$G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}, \quad (2.43)$$

onde $G_{\mu\nu}$ é o tensor de Einstein dado por (2.42), $T_{\mu\nu}$ é o tensor de energia-momento e κ é a constante de acoplamento dada por

$$\kappa = \frac{8\pi G}{c^4}. \quad (2.44)$$

Dessa forma, podemos observar que o lado esquerdo da equação (2.43) está relacionado com a própria geometria do espaço-tempo enquanto o lado direito faz referência ao conteúdo de matéria do universo. Isto é, as equações de campo de Einstein nos dizem que a matéria ($T_{\mu\nu}$) determina a geometria ($G_{\mu\nu}$), como se é esperado na Relatividade Geral. Note que, como antecipado na seção anterior, a divergência nula do tensor de Einstein em (2.43), garante a conservação do tensor energia-momento.

² $\nabla^2 \phi = 4\pi G\rho$, onde ϕ é o potencial, G a constante gravitacional de Newton e ρ a densidade de matéria.

³ A equação deve ser tensorial para que seja covariante com a escolha do sistema de coordenadas. Já que um dos princípios da relatividade especial é o princípio da covariância geral.

3 O modelo cosmológico padrão

Como mencionado anteriormente, na cosmologia vamos buscar entender o funcionamento do universo como um todo, compreendendo a sua história desde os primeiros instantes. Para isso, os físicos tentam modelar o conteúdo do cosmos de maneira a expressar matematicamente a sua evolução. Além disso, as observações astronômicas funcionam como um guia, indicando se a teoria está no caminho certo para explicar a realidade como ela é observada.

Dentre os diversos modelos elaborados, houve um que se destacou por apresentar excelentes previsões teóricas e resultados consideravelmente satisfatórios em relação aos dados observacionais, hoje o chamamos de modelo cosmológico padrão (MCP). Ele se baseia na premissa de que o universo é homogêneo e isotrópico em larga escala, o chamado princípio cosmológico (PC), o qual assegura que o lugar em que nos encontramos no universo não é especial, pois o cosmos apresenta as mesmas propriedades físicas para todos os pontos e para todas as direções. Portanto, se a vida tivesse sido desenvolvida em uma outra região, em uma outra galáxia, as constatações acerca do universo que iríamos obter seriam as mesmas.

3.1 A expansão do universo

Uma das consequências desse modelo é a de que as soluções para as equações de campo de Einstein levavam a um universo em expansão, isto é, o espaço em si se expande e isso pode ser observado através do afastamento das galáxias. Essa observação foi realizada por Edwin Hubble (HUBBLE, 1929) e a partir desses resultados ele conseguiu encontrar uma relação linear entre a velocidade de recessão das galáxias e a distância até elas (HUBBLE; HUMASON, 1931), a chamada lei de Hubble:

$$v(t) = H_0 d(t), \quad (3.1)$$

onde H_0 é a constante de Hubble.

A partir da constatação da expansão do universo podemos realizar o caminho contrário e averiguar como ele se encontrava no passado. Fazendo isso chegamos a um universo extremamente quente e compacto, de onde surge o outro nome para o MCP, a teoria do *hot big bang* (HBB). Aperfeiçoamentos na teoria do HBB levaram à importantes previsões acerca do valor da temperatura da radiação cósmica de fundo e da abundância de elementos leves no universo primordial.

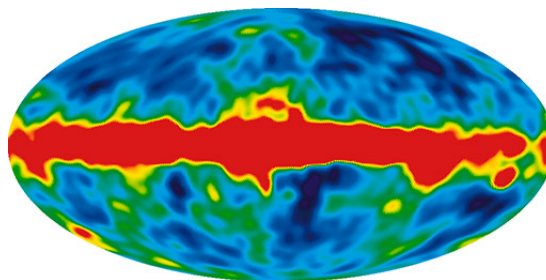
3.2 Radiação cósmica de fundo

Segundo o MCP, o universo primordial era extraordinariamente quente e denso, o suficiente para que os fótons espalhassem os elétrons e impedissem a formação dos átomos. Entretanto, com a expansão do universo sua temperatura diminui de maneira que em um certo ponto os fótons já não tiveram mais a energia necessária para espalhar os elétrons, conduzindo à era da recombinação⁴. Neste momento, os elétrons se uniram aos prótons para formar os átomos primordiais e, com isso, os fótons puderam seguir livremente pelo universo (WEINBERG, 2008). Esse evento marca o que denominamos de superfície de último espalhamento.

Os fótons provenientes da superfície de último espalhamento viajaram pelo universo e chegaram até nós, formando o que chamamos de radiação cósmica de fundo (RCF). A partir do MCP, George Gamow, Ralph Alpher e Robert Herman foram capazes de prever a existência da RCF e estimar a sua temperatura com uma precisão satisfatória (GAMOW, 1948; ALPHER; HERMAN, 1948).

A observação experimental da RCF aconteceu quando Arno Penzias e Robert Wilson construíram um radiômetro para realizar experimentos em radioastronomia e comunicação via satélite, entretanto, havia um ruído no instrumento deles que não conseguia ser eliminado (PENZIAS; WILSON, 1965). Depois de muito tentar extinguir o ruído eles se deram conta de que na verdade ele se tratava da RCF prevista por Gamow, Alpher e Herman. As imagens da RCF só foram capturadas posteriormente, inicialmente pelo satélite COBE, ilustrada na Figura 6:

Figura 6 – Imagem da RCF produzida pelo satélite COBE indicando as regiões de maior e menor temperatura através da cor.



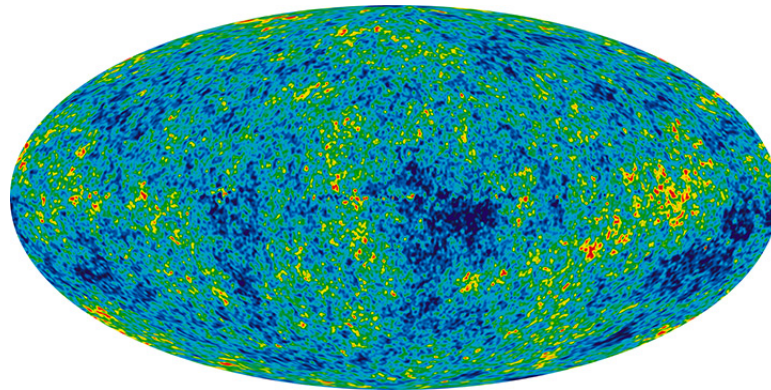
Fonte: Disponível em: <<https://map.gsfc.nasa.gov/media/990166/index.html>>. Acesso em 12/10/2021.

Posteriormente, com o desenvolvimento de instrumentos cada vez mais aprimorados, fomos capazes de observar a homogeneidade da temperatura da RCF com mais clareza,

⁴ Segundo Weinberg, o termo recombinação pode ser enganoso já que os elétrons e prótons nunca estiveram em um estado de combinação antes disso (WEINBERG, 2008).

como na Figura 7 fornecida pelo satélite WMAP. Note também que pequenas variações de temperatura são mostradas, as chamadas anisotropias.

Figura 7 – Imagem da RCF produzida pelo satélite WMAP indicando as regiões de maior e menor temperatura através da cor.



Fonte: Disponível em: <<https://map.gsfc.nasa.gov/media/121238/index.html>>. Acesso em 12/10/2021.

3.3 Abundância dos elementos leves

Um outro sucesso do MCP foi a correta predição da abundância de isótopos de elementos leves como o hidrogênio e hélio, que correspondem à grande maioria da massa de bárions⁵ no universo. George Gamow e Ralph Alpher foram os primeiros a estudar a chamada nucleossíntese primordial, que explica a formação dos núcleos atômicos leves através da sucessiva captura de nêutrons (ALPHER; BETHE; GAMOW, 1948). A formação dos demais átomos mais pesados foi explicada posteriormente pelas reações nucleares nas estrelas e pela nucleossíntese explosiva.

Uma curiosidade interessante acerca do trabalho citado é a de que ele foi elaborado por Alpher durante o seu doutorado em Física sob a orientação de Gamow. Mas o orientador, para realizar uma brincadeira, resolveu incluir no momento da publicação o nome de seu amigo, o físico Hans Bethe, de maneira que a lista de autores (Alpher, Bethe e Gamow) fizesse uma alusão às três primeiras letras do alfabeto grego: *Alpha*, *Beta* e *Gamma*, o que acabou tornando esse trabalho conhecido como $\alpha\beta\gamma$ paper.

⁵ Bárions são partículas subatômicas formadas a partir de um estado ligado de três quarks, que por sua vez, são partículas elementares. Os Bárions mais conhecidos são os prótons e os nêutrons. (GRIFFITHS, 2008)

3.4 Métrica de FLRW

Vamos agora estudar a geometria de um universo com as propriedades que procuramos, isto é, um universo homogêneo, isotrópico e em expansão, em concordância com o PC e a lei de Hubble. A métrica para esse tipo de universo foi desenvolvida em 1930 por Howard Robertson e Arthur Walker. Eles tomaram como base os resultados para um universo em expansão obtidos pelos físicos Alexander Friedmann e Georges Lemaître, sendo esta a razão pela qual o elemento de linha desse modelo é comumente chamado de ‘métrica’ de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW) e pode ser expressa por⁶

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right], \quad (3.2)$$

onde $a(t)$ é o fator de escala responsável pela dinâmica do universo e k define sua curvatura espacial, podendo assumir os valores -1 , 0 ou 1 , como veremos posteriormente.

Para estudar a dinâmica desse modelo devemos solucionar as equações de Einstein. Para isso, iniciamos notando que para o elemento de linha disposto em (3.2) as componentes do tensor métrico são dadas por:

$$g_{00} = 1; \quad g_{11} = -\frac{a^2(t)}{(1 - kr^2)}; \quad (3.3)$$

$$g_{22} = -a^2(t)r^2; \quad g_{33} = -a^2(t)r^2\sin^2\theta. \quad (3.4)$$

Agora se calculamos os símbolos de Christoffel de segunda ordem dados pela equação (2.12), obtemos os termos não nulos:

$$\Gamma_{11}^0 = \frac{a\dot{a}}{1 - kr^2}; \quad \Gamma_{22}^0 = a\dot{a}r^2; \quad \Gamma_{33}^0 = a\dot{a}r^2\sin^2\theta; \quad (3.5)$$

$$\Gamma_{01}^1 = \frac{\dot{a}}{a}; \quad \Gamma_{11}^1 = \frac{kr}{1 - kr^2}; \quad \Gamma_{22}^1 = -r(1 - kr^2); \quad \Gamma_{33}^1 = -r(1 - kr^2)\sin^2\theta; \quad (3.6)$$

$$\Gamma_{02}^2 = \frac{\dot{a}}{a}; \quad \Gamma_{12}^2 = \frac{1}{r}; \quad \Gamma_{33}^2 = -\sin\theta\cos\theta; \quad (3.7)$$

$$\Gamma_{03}^3 = \frac{\dot{a}}{a}; \quad \Gamma_{13}^3 = \frac{1}{r}; \quad \Gamma_{23}^3 = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}. \quad (3.8)$$

Já para o tensor de Ricci, utilizamos a equação (2.39) e notamos que apenas os termos da diagonal principal serão diferente de zero, ou seja,

$$R_{00} = -3\frac{\ddot{a}}{a}; \quad (3.9)$$

⁶ Aqui e no restante do trabalho vamos convencionar a velocidade da luz como $c = 1$.

$$R_{11} = \frac{1}{(1 - kr^2)}(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k); \quad (3.10)$$

$$R_{22} = r^2(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k); \quad (3.11)$$

$$R_{33} = r^2 \sin^2 \theta (a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k). \quad (3.12)$$

Consequentemente, o escalar de Ricci, dado pela equação (2.40), terá a forma:

$$R = -\frac{6}{a^2}(a\ddot{a} + \dot{a}^2 + k). \quad (3.13)$$

Vale ressaltar aqui um outro ponto importante presente no MCP, o de que podemos modelar o conteúdo de matéria do universo por um fluido perfeito⁷ de densidade de energia ρ e pressão p . Dessa maneira o tensor energia-momento assume a forma:

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)u_\mu u_\nu - g_{\mu\nu}p, \quad (3.14)$$

onde u_μ é a 4-velocidade. Para um referencial comóvel, isto é, um referencial no qual a distância entre dois pontos não muda com a expansão do universo⁸, a 4-velocidade é dada por

$$u_\mu = (1, 0, 0, 0), \quad (3.15)$$

de forma que para a métrica de FLRW podemos escrever as componentes do tensor energia-momento como:

$$T_{00} = \rho; \quad T_{11} = \frac{pa^2}{(1 - kr^2)}; \quad (3.16)$$

$$T_{22} = pr^2 a^2; \quad T_{33} = pr^2 \sin^2 \theta a^2. \quad (3.17)$$

3.5 Equações de Friedmann

Agora estamos em condições de resolver as equações de Einstein (2.43). Como ambos os tensores envolvidos são diagonais vamos ter apenas quatro equações. Contudo, as três equações para as componentes espaciais são equivalentes, refletindo o caráter de homogeneidade e isotropia da métrica, portanto, teremos apenas duas equações independentes, uma para a parte temporal:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2}, \quad (3.18)$$

e uma para a parte espacial:

$$2a\ddot{a} + \dot{a}^2 + k = -8\pi Gpa^2, \quad (3.19)$$

⁷ Esta propriedade é decorrente do Princípio Cosmológico.

⁸ O sistema de coordenadas comóvel se expande junto com o universo.

que isolando $\dot{a}^2$ em (3.18) podemos reescrever como

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p). \quad (3.20)$$

As equações (3.18) e (3.20) são chamadas de equações de Friedmann⁹ (FRIEDMANN, 1922).

Além disso, temos ainda a equação proveniente da conservação de energia, isto é, $\nabla_\nu T^{\mu\nu} = 0$, de onde podemos concluir que

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p) = 0. \quad (3.21)$$

Agora podemos definir uma equação de estado, ou seja, uma relação entre ρ e p . Para um fluido perfeito, como o considerado em cosmologia, temos que:

$$p = \omega\rho, \quad (3.22)$$

que substituindo na equação de continuidade (3.21) fornece:

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho} = -3(1 + \omega)\frac{\dot{a}}{a}. \quad (3.23)$$

Integrando a equação acima obtemos uma relação entre a densidade de energia e o fator de escala, ou seja,

$$\rho \propto a^{-3(1+\omega)}. \quad (3.24)$$

Aqui o parâmetro ω determina as fases do universo e pode assumir valores $\omega = 0$, para um universo dominado por matéria, e $\omega = 1/3$ para um universo dominado por radiação.

3.6 Parâmetros observacionais

Para estudarmos alguns parâmetros observacionais vamos primeiro começar reescrevendo a primeira equação de Friedmann (3.18) em termos do parâmetro de Hubble $H = \frac{\dot{a}}{a}$:

$$\rho = \frac{3}{8\pi G}\left(H^2 + \frac{k}{a^2}\right), \quad (3.25)$$

então notamos que para que o universo seja plano, isto é, $k = 0$, a densidade deve assumir um valor crítico de

$$\rho_c \equiv \frac{3}{8\pi G}H^2. \quad (3.26)$$

Isto nos permite definir um outro parâmetro extremamente importante para a cosmologia, o parâmetro de densidade Ω , que é dado pela razão entre a densidade de energia do universo e a densidade crítica:

$$\Omega \equiv \frac{\rho}{\rho_c}. \quad (3.27)$$

⁹ Em algumas literaturas a equação (3.18) é chamada de equação de Friedmann e a equação (3.20) é chamada de equação da aceleração.

Reescrevendo a equação (3.25) como

$$\frac{k}{a^2 H^2} = \frac{8\pi G}{3H^2} \rho - 1, \quad (3.28)$$

podemos identificar o parâmetro de densidade Ω e escrever:

$$\Omega - 1 = \frac{k}{a^2 H^2}. \quad (3.29)$$

Logo, teremos três possibilidades para a geometria do universo (VAZQUEZ; PADILLA; MATOS, 2020):

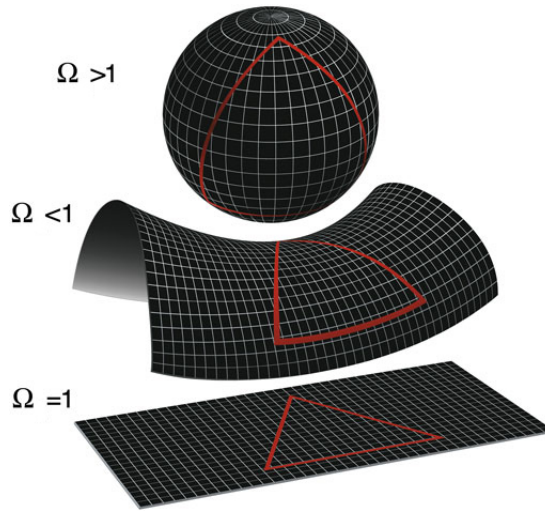
$$\text{Universo aberto: } 0 < \Omega < 1 : k < 0 : \rho < \rho_c; \quad (3.30)$$

$$\text{Universo plano: } \Omega = 1 : k = 0 : \rho = \rho_c; \quad (3.31)$$

$$\text{Universo fechado: } \Omega > 1 : k > 0 : \rho > \rho_c. \quad (3.32)$$

Essas três possibilidades estão ilustradas na Figura 8.

Figura 8 – Os três tipos de geometria do universo para diferentes valores do parâmetro de densidade.



Fonte: Adaptado de: <<https://map.gsfc.nasa.gov/media/990006/index.html>>. Acesso em 13/10/2021.

3.7 A constante cosmológica

Na época em que Einstein desenvolveu suas equações de campo não havia ainda nenhuma confirmação acerca da expansão do universo, na verdade, era consenso entre a

comunidade científica a ideia de um universo estático. Entretanto, as equações de Einstein na forma (2.43) não fornecem esse tipo de universo de maneira física, isso levou Einstein a introduzir um termo repulsivo na formulação das equações de campo de maneira a impedir o colapso provocado pela matéria e resultar em uma solução estática. As equações de Einstein com esse novo termo tomam a forma (ISLAM, 2002):

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R - g_{\mu\nu}\Lambda = 8\pi GT_{\mu\nu}, \quad (3.33)$$

onde Λ é chamada de constante cosmológica e possui unidade de $[\Lambda] = L^{-2}$. As equações de Friedmann com a adição da constante cosmológica se tornam:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2} + \frac{\Lambda}{3}; \quad (3.34)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) + \frac{\Lambda}{3}. \quad (3.35)$$

Posteriormente, quando se foi constatada por Edwin Hubble a expansão do universo, Einstein chegou a declarar que a adição da constante cosmológica foi “o maior erro de sua carreira”. Contudo, estudos posteriores acerca da aceleração na taxa de expansão do universo renovaram o interesse na constante cosmológica.

O universo estático de Einstein corresponde a um universo finito, fechado e estático (SOARES, 2012), porém esse é um sistema extremamente instável, ou seja, qualquer mínima perturbação levaria o universo ao colapso ou à expansão desintegrativa para o infinito, conforme ilustrado na Figura 9 para uma analogia newtoniana.

Na Figura 9 fica claro que o ponto de equilíbrio do fator de escala é um ponto de equilíbrio instável, qualquer perturbação resultará em um colapso ou na divergência $a(t) \rightarrow \infty$. Em 1930 o astrofísico A. Eddington mostrou de maneira decisiva que o modelo estático de Einstein era instável (EDDINGTON, 1930).

3.8 Os problemas no modelo

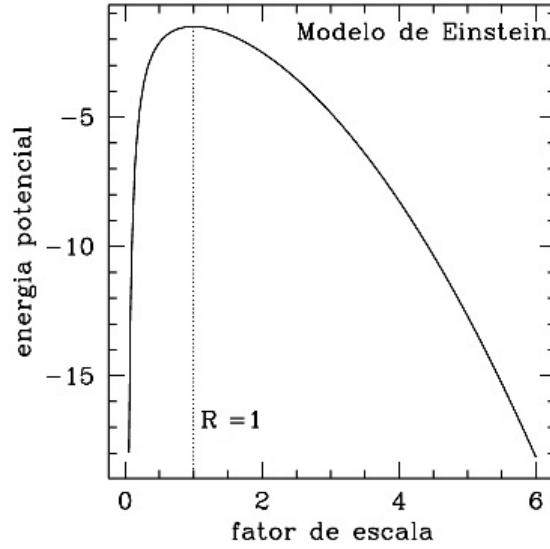
Apesar de todos os sucessos do MCP em explicar alguns dos fenômenos observados no universo, quando analisamos mais atentamente certas observações começamos a notar alguns problemas no modelo. São esses problemas que levaram os cosmólogos a buscarem a formulação de novos modelos, que fossem capazes de incluir os sucessos do MCP mas também de sanar os problemas encontrados.

3.8.1 Problema da planicidade

De acordo com as observações cosmológicas mais atuais, o valor para o parâmetro de densidade Ω nos dias de hoje é de (COLLABORATION et al., 2020):

$$\Omega_0 = 1.0007 \pm 0.0037, \quad (3.36)$$

Figura 9 – Diagrama da energia potencial na analogia newtoniana do modelo estático de Einstein.



Fonte: Adaptado de (SOARES, 2012).

indicando, com uma precisão muito boa, que o universo atual possui, em larga escala, uma geometria plana. Entretanto, $\Omega = 1$ é uma situação muito instável em (3.29), isto é, se houvesse qualquer perturbação no valor do parâmetro de densidade para o universo primordial essa perturbação seria ampliada, fazendo com que Ω desviasse do valor para um universo plano observado atualmente.

Para analisar esse problema, iniciamos notando que para um universo dominado por radiação, ou seja, $\omega = \frac{1}{3}$, a equação (3.24) nos indica que

$$\rho \propto a^{-4}, \quad (3.37)$$

que substituindo na equação de Friedmann fornece:

$$a(t) \propto t^{1/2}. \quad (3.38)$$

Consequentemente,

$$H(t) \propto t^{-1}. \quad (3.39)$$

Utilizando esses resultados no lado direito da equação (3.29) notamos que

$$|\Omega - 1| \propto t, \quad \text{universo dominado por radiação.} \quad (3.40)$$

Já para um universo dominado por matéria, isto é, $\omega = 0$, podemos realizar a mesma análise e concluir:

$$\rho \propto a^{-3}; \quad a(t) \propto t^{2/3}; \quad H(t) \propto t^{-1}, \quad (3.41)$$

portanto:

$$|\Omega - 1| \propto t^{2/3}, \quad \text{universo dominado por matéria.} \quad (3.42)$$

Ou seja, pelo fato de a função $\frac{1}{aH}$ ser crescente no tempo, o parâmetro de densidade se afasta de 1, levando a um universo curvo com o passar do tempo.

Sabendo que a idade do universo é estimada como (COLLABORATION et al., 2020):

$$t_0 \simeq 13.787 \pm 0.020 \text{ bilhões de anos,} \quad (3.43)$$

podemos estipular limites para o valor de Ω em diferentes épocas do universo para que ele evoluísse para o valor observado hoje (VAZQUEZ; PADILLA; MATOS, 2020):

$$|\Omega - 1| \leq 10^{-3}, \quad \text{na era do desacoplamento } (t \simeq 10^{13} s), \quad (3.44)$$

$$|\Omega - 1| \leq 10^{-16}, \quad \text{na era da nucleossíntese } (t \simeq 1 s), \quad (3.45)$$

$$|\Omega - 1| \leq 10^{-64}, \quad \text{na era de Planck } (t \simeq 10^{-43} s). \quad (3.46)$$

Concluimos, portanto, que para que o universo seja tão plano quanto se é observado (3.36) precisaríamos que o valor de Ω fosse incrivelmente próximo de 1 no universo primordial. Esse fato levou os cosmólogos a se questionarem como essa densidade inicial foi tão finamente ajustada a esse valor especial e isso constitui o chamado problema da planicidade.

3.8.2 Problema do horizonte

Para estudarmos um outro problema importante encontrado no MCP, devemos antes nos atentar a alguns conceitos. O primeiro deles é o de coordenadas conformes, nas quais podemos fatorar a expansão do universo, fornecendo distâncias comóveis (r) que não se alteram com a expansão do universo. Sua relação com a distância física (r_{fis}) é dada por

$$r_{fis} = a(t)r. \quad (3.47)$$

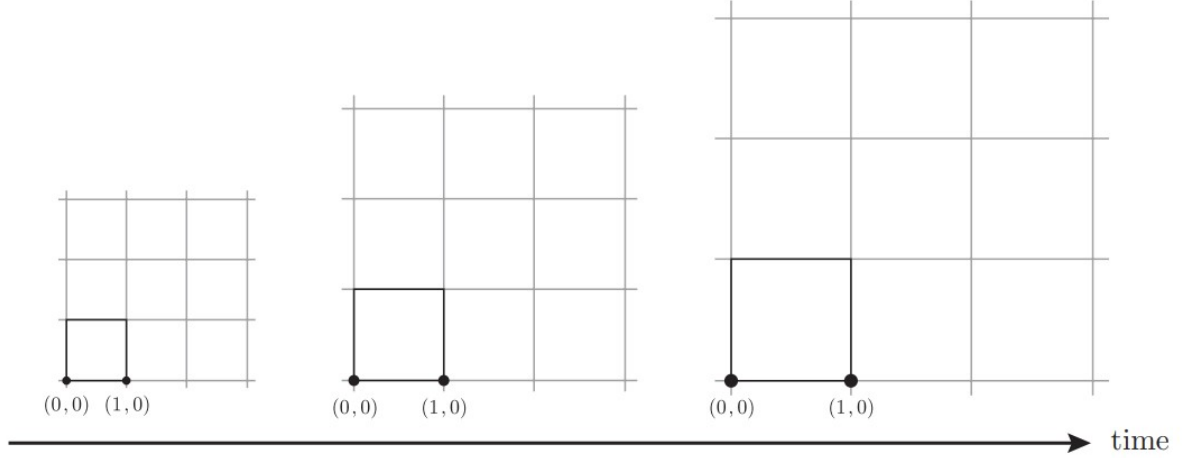
A evolução das duas distâncias em um universo em expansão fica clara na Figura 10.

Agora podemos definir o tempo conforme (η) que será particularmente útil para o estudo da propagação da luz. A sua relação com o tempo físico é dada por

$$d\eta = \frac{dt}{a(t)}. \quad (3.48)$$

No modelo do *big bang* a idade do universo é uma grandeza finita, logo a luz, que possui uma velocidade também finita, só teve tempo de viajar uma certa distância desde o início do universo. Se tomamos o intervalo de tempo de η_1 até η_2 , a maior distância comóvel

Figura 10 – A distância comóvel permanece constante em um sistema de coordenadas em expansão, já a distância física é proporcional ao fator de expansão.



Fonte: (BAUMANN, 2012), p. 7.

percorrida pela luz será $\Delta\eta = \eta_2 - \eta_1$ ¹⁰. Assumindo que o universo teve início em uma singularidade em t_i , a maior distância comóvel que um observador em um tempo t pode receber sinais viajando na velocidade da luz é dada por

$$\chi_p(\eta) = \eta - \eta_i = \int_{t_i}^t \frac{dt}{a(t)}. \quad (3.49)$$

Essa distância é chamada de horizonte comóvel de partícula e define o limite para o qual eventos além desse horizonte não podem estar causalmente conectados. Podemos ainda reescrever a equação (3.49) da seguinte forma:

$$\chi_p(\eta) = \int_{t_i}^t \frac{dt}{a(t)} = \int_{a_i}^a \frac{da}{a^2 H} = \int_{\ln(a_i)}^{\ln(a)} (aH)^{-1} d \ln(a), \quad (3.50)$$

de onde definimos o raio de Hubble comóvel $(aH)^{-1}$, que como vimos anteriormente cresce monotonicamente com o tempo. Logo, eventos que estão fora do horizonte no universo atual não podem ter estado em contato causal no universo primordial e isso gera um grande problema no modelo do *big bang*.

Como mencionado na seção 3.2, observamos os fótons provenientes da época da recombinação através da RCF e as observações mais recentes indicam que esses fótons tem todos uma temperatura muito homogênea de aproximadamente (FIXSEN, 2009)

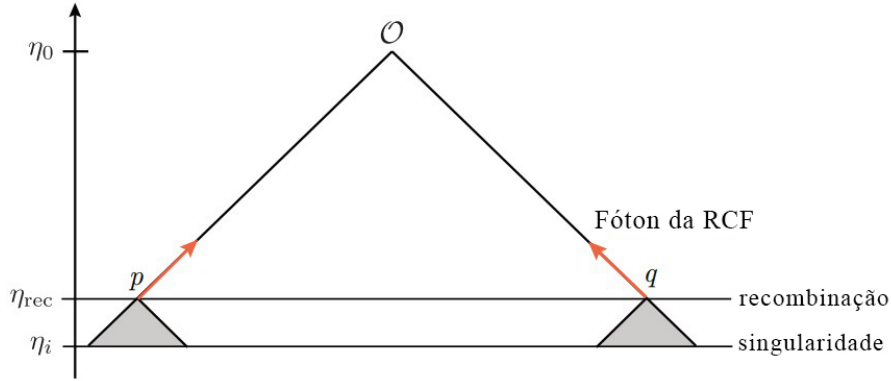
$$T_0 = 2.72548 \pm 0.00057 K. \quad (3.51)$$

Portanto, podemos concluir que essas diferentes regiões estiveram em contato em algum momento da história do universo e entraram em equilíbrio térmico. Entretanto, o tempo

¹⁰ Lembrando que estamos tomando $c = 1$, então podemos expressar a distância em unidades de tempo.

passado desde o início do universo (t_i) até a formação da RCF (t_{rec}) não foi suficiente para que todos os pontos da RCF estivessem em contato, isto é, se tomamos dois pontos p e q diametralmente opostos no céu, o ponto q encontrava-se, na era da recombinação, fora do horizonte do ponto p e vice-versa, como ilustrado na Figura 11.

Figura 11 – Diagrama conforme de um observador recebendo fótons da RCF de dois pontos distintos desconectados causalmente.

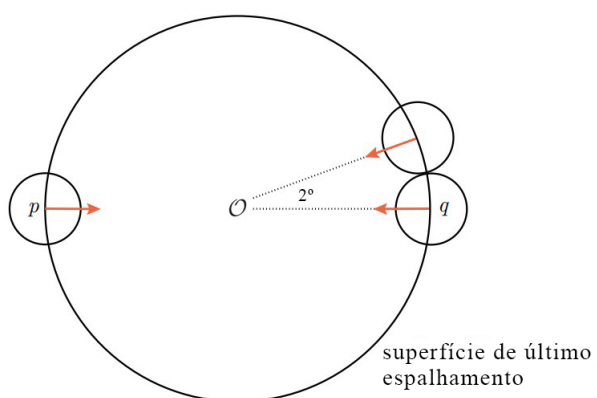


Fonte: Adaptado de (BAUMANN, 2012), p. 28.

Ainda, se realizarmos um cálculo do horizonte comóvel na época da recombinação e nos dias atuais podemos notar, analisando a razão entre os volumes, que a RCF deveria consistir de aproximadamente 10^5 regiões causalmente desconectadas (MCCOY, 2015). Dessa forma, fótons provenientes de regiões no céu separadas por mais do que 2° , aproximadamente, não tiveram tempo de se comunicar e estabelecer um equilíbrio térmico antes do desacoplamento, conforme ilustra a Figura 12. Portanto, o MCP não consegue explicar a homogeneidade observada na RCF e a esse problema damos o nome de problema do horizonte.

Os problemas citados aqui certamente não são os únicos encontrados no modelo do *big bang*, mas são suficientes para o nosso propósito que é motivar a proposta inflacionária. Existem ainda problemas como a previsão de surgimento de monopolos magnéticos, que são previstos ao combinarmos o MCP com alguns tipos de Teorias da Grande Unificação, mas até hoje não foram observados e também a carência de explicação para a formação das estruturas em larga escala presentes no universo (VAZQUEZ; PADILLA; MATOS, 2020).

Figura 12 – Regiões na RCF desconectadas causalmente.



Fonte: Adaptado de (BAUMANN, 2012), p. 28.

4 Inflação cosmológica

Notamos, portanto, o papel fundamental que o raio de Hubble comóvel $(aH)^{-1}$ exerce nos problemas da planicidade e do horizonte, visto que, ambos os problemas surgem do fato que no modelo do *big bang* o raio de Hubble comóvel é monotonicamente crescente com o tempo. Dessa maneira, surge a ideia de que para solucionar esses problemas poderíamos assumir um comportamento decrescente para $(aH)^{-1}$ no universo primordial (BAUMANN, 2009). Nesse capítulo vamos entender como essa hipótese soluciona os problemas do MCP, quais as suas consequências e como podemos observá-las nos dias atuais.

4.1 Condições para a inflação

Primeiramente, vamos analisar quais as condições necessárias para um universo com raio de Hubble comóvel decrescente e entender o motivo pelo qual modelos com esse tipo de restrição são chamados de modelos inflacionários. Assim, o que buscamos é:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{aH} \right) < 0. \quad (4.1)$$

Como $H = \frac{\dot{a}}{a}$, podemos reescrever essa condição como

$$-\frac{\ddot{a}}{(aH)^2} < 0, \quad (4.2)$$

e portanto:

$$\ddot{a} > 0, \quad (4.3)$$

que é a razão pela qual a inflação cosmológica é comumente definida como um período de expansão acelerada. Ainda, podemos reescrever o lado esquerdo da equação (4.1) como

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{aH} \right) = -\frac{\dot{a}H + a\dot{H}}{(aH)^2} = -\frac{1}{a}(1 - \epsilon), \quad \text{onde} \quad \epsilon \equiv -\frac{\dot{H}}{H^2}. \quad (4.4)$$

Consequentemente, a condição para o raio de Hubble decrescente corresponde a:

$$\epsilon = -\frac{\dot{H}}{H^2} < 1. \quad (4.5)$$

A partir da equação de Friedmann (3.20) podemos observar que $\ddot{a} > 0$ implica que

$$p < -\frac{\rho}{3}. \quad (4.6)$$

Entretanto, nem a radiação nem a matéria satisfazem essa condição. Uma forte candidata para fornecer soluções desse tipo é a constante cosmológica comentada na seção 3.7, já que

um universo dominado por Λ pode ser interpretado como um fluido perfeito com equação de estado $p = -\rho$. Substituindo essa condição na equação de Friedmann teríamos um universo expandindo exponencialmente (VAZQUEZ; PADILLA; MATOS, 2020):

$$a(t) \propto \exp\left(\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}t\right), \quad (4.7)$$

e um parâmetro de Hubble (H) constante, logo a condição (4.1) seria naturalmente satisfeita.

4.2 Solucionando o problema da planicidade

O problema da planicidade é quase que trivialmente solucionado pela inflação, visto que, segundo a equação (3.29) temos:

$$|\Omega - 1| \propto (aH)^{-2}, \quad (4.8)$$

então um raio de Hubble comóvel decrescente faria com que Ω tendesse a 1, isto é, durante o período inflacionário o universo tenderia à planicidade ao invés de se afastar dela. Uma analogia útil para entendermos como os modelos inflacionários sanam o problema da planicidade é imaginar que a ampliação do raio de curvatura do universo primordial leva a um universo plano, assim como se vivêssemos na superfície de uma pequena esfera facilmente notaríamos a sua curvatura, contudo se ampliamos essa superfície para o tamanho da Terra, ou até para tamanhos astronômicos, passaríamos a perceber sua superfície como plana.

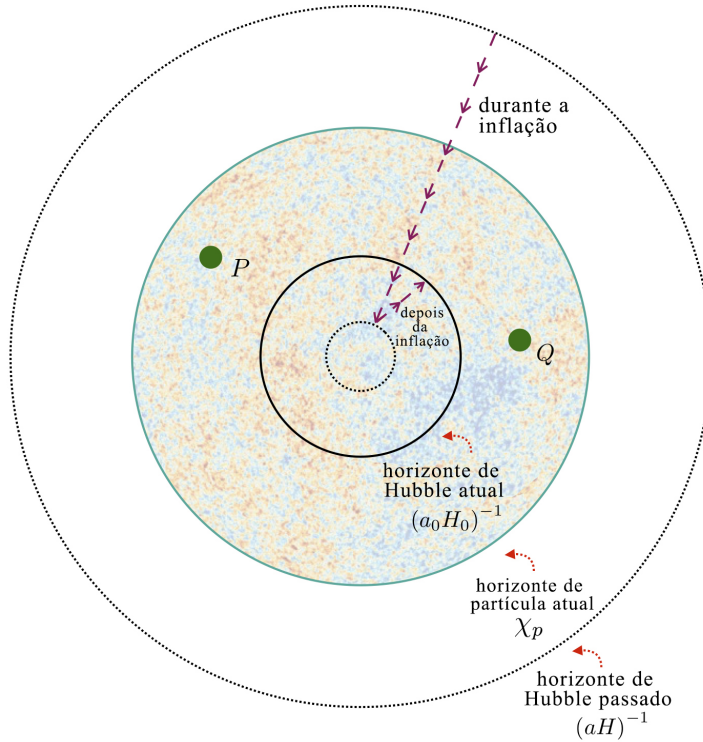
4.3 Solucionando o problema do horizonte

Para entendermos como a inflação soluciona o problema do horizonte é importante entendermos claramente a distinção entre os conceitos de horizonte de partícula (χ_p) e horizonte de Hubble ($\frac{1}{aH}$). Se os eventos estão separados por uma distância maior do que χ_p eles não podem nunca ter estado em contato, já se a distância que os separa é maior do que $(aH)^{-1}$ eles não podem estar em contato *agora*, ou seja, é possível que o horizonte de partículas seja muito maior do que o horizonte de Hubble, de forma que partículas não podem se comunicar no universo atual porém estavam em contato causal no universo primordial.

É exatamente isso que acontece nos modelos inflacionários. Se consideramos novamente dois pontos p e q na RCF, antes do período inflacionário o horizonte de Hubble era maior que o horizonte de partículas e portanto os pontos podiam se comunicar de forma a entrar em equilíbrio térmico. Durante a inflação o horizonte de Hubble decresce até um ponto que os eventos em p e q deixam de estar em contato causal, isto é, encontram-se

fora do horizonte de Hubble comóvel. Com o fim da inflação o horizonte volta a crescer e o universo segue sua evolução conforme descrita pelo modelo do *big bang*. Para um observador analisando o universo apenas nos dias atuais ele iria observar os pontos fora de contato e constatar o problema do horizonte, entretanto o raio de Hubble comóvel decrescente no período inflacionário assegura que esses pontos possam ter entrado em equilíbrio térmico no passado. Essa situação é ilustrada na Figura 13:

Figura 13 – Evolução do raio de Hubble comóvel.



Fonte: (RAMÍREZ, 2019).

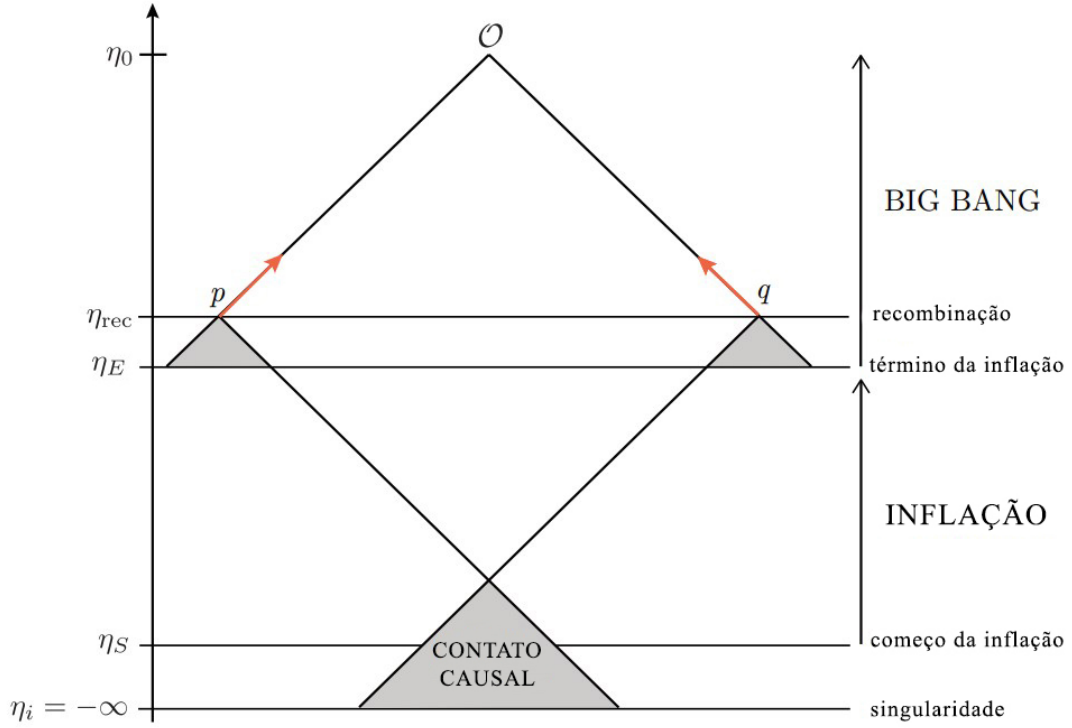
Podemos ainda analisar o diagrama conforme da cosmologia inflacionária. Sabemos que para o modelo do *big bang* esse diagrama é ilustrado na Figura 11 e de acordo com o que analisamos na subseção 3.8.1 a dependência do fator de escala com o tempo, para um universo dominado por radiação e matéria o MCP prevê a singularidade do *big bang* em $\eta_i = 0$:

$$a(\eta_i \equiv 0) = 0, \quad (4.9)$$

mas para os modelos inflacionários com um fator de escala evoluindo exponencialmente com o tempo essa singularidade é afastada pra $-\infty$, como ilustrado na Figura 14.

Logo, concluimos que existe muito mais tempo entre a singularidade e o período de desacoplamento do que havíamos pensado. Mais especificamente, para que os pontos

Figura 14 – Diagrama conforme para a cosmologia inflacionária.



Fonte: Adaptado de (BAUMANN, 2012), p. 29.

observados hoje na RCF tenham tido tempo suficiente para entrar em equilíbrio térmico devemos ter que (BAUMANN, 2012):

$$|\eta_s| > e^{60} |\eta_E|, \quad (4.10)$$

ou seja, a inflação deve ter durado por pelo menos 60 *e-folds*¹¹. Analisaremos como expressar a quantidade de inflação com mais detalhes posteriormente.

4.4 O campo escalar como gerador da inflação

Na literatura existem diversas propostas de modelos que levariam a um período de inflação do universo, mas aqui vamos nos ater apenas à análise de um único campo escalar como o responsável por essa rápida expansão acelerada. Chamaremos esse campo de *inflaton* e inicialmente vamos considerar que ele pode depender tanto do tempo t quanto da posição espacial $\vec{x}$:

$$\phi(t, \vec{x}). \quad (4.11)$$

¹¹ A quantidade de *e-folds* corresponde a quantidade de vezes que uma grandeza que cresce exponencialmente aumentou por um fator de e .

Associado a cada valor do campo ϕ teremos então uma densidade de energia potencial $V(\phi)$. Queremos, portanto, determinar as condições para que esse campo escalar possa gerar o período inflacionário.

Não vamos ainda nos preocupar com a origem do campo ϕ , vamos apenas utilizá-lo como um parâmetro para medir a evolução da inflação. Para estudarmos essa dinâmica vamos começar escrevendo a lagrangeana de um campo escalar:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - V(\phi), \quad (4.12)$$

e portanto, teremos a seguinte forma para o tensor energia-momento (CARROLL, 2019):

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - g_{\mu\nu}\left(\frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\partial_\alpha\phi\partial_\beta\phi - V(\phi)\right). \quad (4.13)$$

Agora podemos considerar a homogeneidade espacial do campo, em acordo com a simetria do modelo FLRW, de maneira que o *inflaton* passa a depender somente do tempo $\phi(t)$. Analisando o tensor energia-momento expresso em (4.13) da mesma forma que fizemos para o fluido perfeito, obtemos a relação para a densidade de energia a partir da componente temporal de (4.13):

$$T_{00} = \rho_\phi = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi), \quad (4.14)$$

ou seja, a densidade total de energia do campo é a soma das densidades de energia cinética e potencial. Já para a componente espacial, obtemos uma expressão que relaciona a pressão com a diferença entre as densidades de energia:

$$T_{ii} = p_\phi = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi). \quad (4.15)$$

Usando as equações (4.14) e (4.15), equação de estado $p = \omega\rho$ fornece

$$\omega = \frac{\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi)}{\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi)}. \quad (4.16)$$

Assim, para que a condição para a inflação expressa em (4.6) seja válida, o termo de energia potencial $V(\phi)$ deve dominar sobre o termo de energia cinética $\frac{1}{2}\dot{\phi}^2$.

Se substituirmos a expressão encontrada para a densidade de energia (4.14) na primeira equação de Friedmann (3.18) para um espaço plano, obtemos que

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\left(\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi)\right), \quad (4.17)$$

que derivando em relação ao tempo de ambos os lados toma a forma:

$$2H\dot{H} = \frac{8\pi G}{3}\left(\dot{\phi}\ddot{\phi} + V'\dot{\phi}\right), \quad (4.18)$$

onde a linha representa uma derivada em relação ao campo ϕ :

$$V'(\phi) \equiv \frac{dV}{d\phi}. \quad (4.19)$$

Além disso, podemos ainda reescrever a segunda equação de Friedmann (3.20) como

$$\dot{H} + H^2 = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p), \quad (4.20)$$

que combinando com a equação (3.18) fica:

$$\dot{H} = -4\pi G(\rho + p). \quad (4.21)$$

Logo, substituindo as relações encontradas para a pressão (4.15) e a densidade de energia (4.14) ficamos com

$$\dot{H} = -4\pi G\dot{\phi}^2. \quad (4.22)$$

Se substituirmos esse resultado em (4.18) obtemos a equação de movimento para o campo:

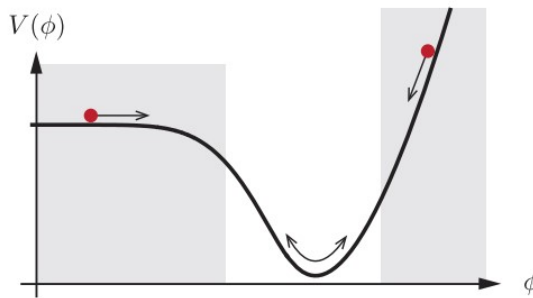
$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V' = 0, \quad (4.23)$$

onde o potencial V' age como uma força e o termo proporcional à velocidade $3H\dot{\phi}$ funciona como um termo de atrito.

4.5 Aproximação slow-roll

Para que a inflação tenha persistido por tempo suficiente para que os problemas do horizonte e da planicidade tenham sido solucionados algumas condições devem ser satisfeitas. Para o campo escalar, podemos fazer algumas aproximações que garantem essa propriedade, a primeira delas é a de que o modelo se inicia com um potencial quase plano, isto é, $\dot{\phi}^2 \ll V(\phi)$, que está de acordo com o que se foi analisado de (4.16). No entanto, para garantir que essa condição dure por tempo suficiente podemos fazer uma segunda aproximação $|\ddot{\phi}| \ll V'(\phi)$. Essas condições são chamadas de aproximação *slow-roll* (ASL), pois para esses modelos a inflação ocorre quando o campo escalar está “rolando lentamente” sobre o seu potencial, como ilustrado na Figura 15:

Figura 15 – Exemplo de um potencial *slow-roll*. A inflação ocorre nas regiões sombreadas.



Fonte: (BAUMANN, 2012), p. 32.

Tomando a primeira condição para a ASL, a equação (4.17) toma a forma:

$$H^2 \simeq \frac{8\pi G}{3} V(\phi). \quad (4.24)$$

Já com a segunda condição da ASL, podemos reescrever a equação (4.23) como

$$3H\dot{\phi} \simeq -V'(\phi), \quad (4.25)$$

logo, podemos encontrar uma relação para o parâmetro de *slow-roll* ϵ substituindo as equações (4.22), (4.24) e (4.25) na equação (4.5):

$$\epsilon_V(\phi) = \frac{1}{16\pi G} \left(\frac{V'}{V} \right)^2, \quad (4.26)$$

que para a inflação ocorrer e a primeira condição da ASL ser assegurada, deve ser pequeno, como já havíamos analisado:

$$|\epsilon_V(\phi)| \ll 1. \quad (4.27)$$

Já para analisar a mudança fracional de ϵ_V por *e-fold*, podemos introduzir um outro parâmetro (LIDDLE; LYTH, 2000):

$$\eta_V(\phi) = \frac{1}{8\pi G} \frac{V''}{V}. \quad (4.28)$$

Então para que a segunda condição da ASL seja assegurada e o parâmetro ϵ_V seja pequeno por tempo suficiente devemos ter que

$$|\eta_V(\phi)| \ll 1. \quad (4.29)$$

4.6 Final da inflação

Conforme o campo ϕ “rola” em direção ao mínimo potencial $V(\phi)$, as condições (4.27) e (4.29) começam a perder sua validade e a inflação acaba, logo, é natural assumir o fim da inflação como sendo quando $\epsilon_V = 1$ (LIDDLE; LYTH, 2000). Esse período pode ser visualizado na Figura 15 como a região não sombreada, onde o *inflaton* começa a ganhar energia cinética e o termo de energia potencial $V(\phi)$ deixa de dominar sobre o termo de $\dot{\phi}^2$. Se o potencial possuir um mínimo local, como na Figura 15, o campo deixará de rolar e passará a oscilar ao redor desse mínimo, com essa oscilação sendo gradualmente cessada pelo termo de fricção $3H\dot{\phi}$ na equação de movimento (4.23) (HOBSON; EFSTATHIOU; LASENBY, 2006). Eventualmente, esse campo ficará estacionário no mínimo do potencial, mas se esse valor mínimo for $V_{min} > 0$ então o potencial volta a dominar sobre a energia cinética e a inflação ocorre indefinidamente. Entretanto, se $V_{min} = 0$ não existirá mais a inflação cosmológica e a dinâmica do universo será ditada pelos outros campos presentes.

Essa situação só seria válida se o campo escalar ϕ não estivesse acoplado a nenhum outro campo, o que provavelmente não é o caso. O acoplamento do campo escalar iria

fazer com que o *inflaton* decaísse em pares de partículas elementares durante a fase oscilatória. Dessa forma, a energia do campo escalar seria transferida para as partículas e essas partículas interagindo entre si eventualmente iriam decair, dando origem à matéria ordinária e radiação em equilíbrio térmico, provendo as condições iniciais necessárias para a evolução do universo de acordo com o MCP. Esse processo de decaimento do campo escalar em outras partículas é denominado de *reheating* (KOFMAN; LINDE; STAROBINSKY, 1997) e não será abordado com profundidade aqui, pois foge do escopo desse trabalho.

4.7 Quantidade de inflação

Como o tamanho da expansão durante o período inflacionário foi enorme, é comum tratarmos da quantidade de inflação no período de t a t_{end} em termos da quantidade de *e-folds* N :

$$N \equiv \ln \frac{a(t_{end})}{a(t)} = \int_t^{t_e} H dt = \int_{\phi}^{\phi_e} \frac{H}{\dot{\phi}} d\phi, \quad (4.30)$$

que para a ASL podemos escrever como:

$$N = 8\pi G \int_{\phi_e}^{\phi} \frac{V}{V'} d\phi, \quad (4.31)$$

onde invertemos os limites de integração para manter o sinal e ϕ_{end} é obtido a partir de $\epsilon(\phi_{end}) = 1$. Como vimos anteriormente, a quantidade de *e-folds* necessária para que a inflação tenha ocorrido por tempo suficiente para que os problemas do horizonte e da planicidade tenham sido solucionados é de aproximadamente $N \approx 60$ (LYTH; RIOTTO, 1999).

4.8 Potencial quadrático

Como vimos, os parâmetros que descrevem a inflação podem ser escritos em termos do potencial do campo escalar, dessa forma, para especificar um determinado modelo inflacionário podemos apenas selecionar um potencial $V(\phi)$. Como exemplo, podemos fazer uma análise da ASL para um dos modelos mais simples da inflação de campo único, o potencial que descreve um campo escalar massivo e livre:

$$V(\phi) = \frac{1}{2} m^2 \phi^2. \quad (4.32)$$

Tomando as condições discutidas para a ASL, teremos que para esse potencial quadrático as equações (4.24) e (4.25) tomam a forma:

$$H^2 = \frac{4\pi G m^2}{3} \phi^2, \quad (4.33)$$

e

$$3H\dot{\phi} = -m^2\phi. \quad (4.34)$$

Então substituindo (4.33) em (4.34) e resolvendo para ϕ obtemos que

$$\phi(t) = \phi_i - \frac{m}{\sqrt{12\pi G}}t, \quad (4.35)$$

já se substituirmos esse resultado em (4.33) temos que

$$a(t) = a_i \exp \left[\sqrt{\frac{4\pi G}{3}} m \left(\phi_i t - \frac{m}{\sqrt{48\pi G}} t^2 \right) \right], \quad (4.36)$$

onde ϕ_i e a_i representam as condições iniciais para um tempo $t = t_i$ e as equações (4.35) e (4.36) determinam a dinâmica desse tipo de modelo (VAZQUEZ; PADILLA; MATOS, 2020).

Agora se calcularmos os parâmetros de *slow-roll* dados por (4.26) e (4.28) vamos ter que

$$\epsilon_V = \eta_V = \frac{1}{4\pi G} \frac{1}{\phi^2}, \quad (4.37)$$

ou seja, a inflação vai ocorrer enquanto esses parâmetros forem pequenos:

$$|\phi| > \frac{1}{\sqrt{4\pi G}} \equiv \phi_{end}, \quad (4.38)$$

assim, podemos calcular o número de *e-folds* a partir da equação (4.31):

$$N = 2\pi G \left(\phi_i^2 - \phi_{end}^2 \right), \quad (4.39)$$

portanto,

$$N = 2\pi G \phi_i^2 - \frac{1}{2}. \quad (4.40)$$

Então percebemos que as informações necessárias para caracterizar a inflação cosmológica são fornecidas especificando o potencial do campo escalar responsável pelo mecanismo da inflação.

4.9 Perturbações cosmológicas

Um outro aspecto extremamente importante dos modelos cosmológicos inflacionários é que além de solucionarem os problemas observados no modelo do *big bang* eles também fornecem um mecanismo para explicar as estruturas em larga escala presentes no universo atual através da amplificação das flutuações quânticas do *inflaton*. Nesse trabalho não vamos entrar a fundo no estudo dessas flutuações, contudo, vamos tentar esclarecer os principais parâmetros que envolvem a teoria das perturbações cosmológicas, pois são eles que nos fornecem uma maneira de se comparar os resultados de um determinado modelo inflacionário com as observações experimentais.

Até agora, por conta do PC consideramos que o campo escalar dependia apenas do tempo, no entanto, vamos agora considerar uma perturbação nesse campo que pode depender tanto do tempo quanto do espaço:

$$\phi(t) = \phi_0(t) + \delta\phi(t, \vec{x}), \quad (4.41)$$

onde $\phi_0(t)$ é o valor de referência do campo, para um dado instante de tempo, sobre o qual consideraremos as flutuações $\delta\phi(t, \vec{x})$. Esse valor de referência é tomado como a média do valor do campo em uma região esférica de raio R e esse processo é chamado de suavização. Em termos das componentes de Fourier, suavizar em uma região de raio R corresponde a deixar de lado componentes com número de onda menor do que $k = 1/R$ (LYTH; LIDDLE, 2009). Dessa forma, quando tratarmos da escala da perturbação normalmente vamos denotá-la por $1/k$ e não R .

Trabalhar com essas perturbações pode ser delicado, já que se tomarmos, por exemplo, uma nova coordenada temporal de forma que as superfícies de tempo constante tenham um valor constante para a perturbação do campo, teríamos então que a flutuação aparente seria zero, visto que em todos os pontos essa perturbação seria a mesma. Logo, é importante trabalharmos apenas com grandezas que não sentem essa mudança de coordenadas, isto é, descrevem um fenômeno físico. A primeira, e talvez a mais importante delas, é a chamada perturbação de curvatura primordial (ζ), que vai nos indicar justamente a perturbação do campo escalar, definida por (LYTH; LIDDLE, 2009):

$$\zeta \equiv -H \frac{\delta\phi}{\dot{\phi}_0}. \quad (4.42)$$

Para analisar a evolução da perturbação de curvatura vamos considerar sua transformada de Fourier e fazer uma mudança de variável $\xi_k = \alpha\zeta_k$, com $\alpha = a\dot{\phi}_0/H$, assim podemos escrever para a ASL (HOBSON; EFSTATHIOU; LASENBY, 2006):

$$\xi_k'' + (k^2 - 2a^2H^2)\xi_k = 0, \quad (4.43)$$

onde a linha representa uma derivada em relação ao tempo conforme η . Sabemos que para que essa perturbação de escala $1/k$ possa colapsar em um objeto ligado gravitacionalmente, todas as partes dessa região devem estar conectadas causalmente, isto é, a escala da perturbação deve ser menor que o horizonte de Hubble $1/aH$, chamamos esse evento de entrada no horizonte. A partir da equação (4.43), podemos observar que quando a escala da perturbação encontra-se dentro do horizonte, ou seja, $\frac{1}{k} \ll \frac{1}{aH}$, nós teremos a equação de um oscilador harmônico:

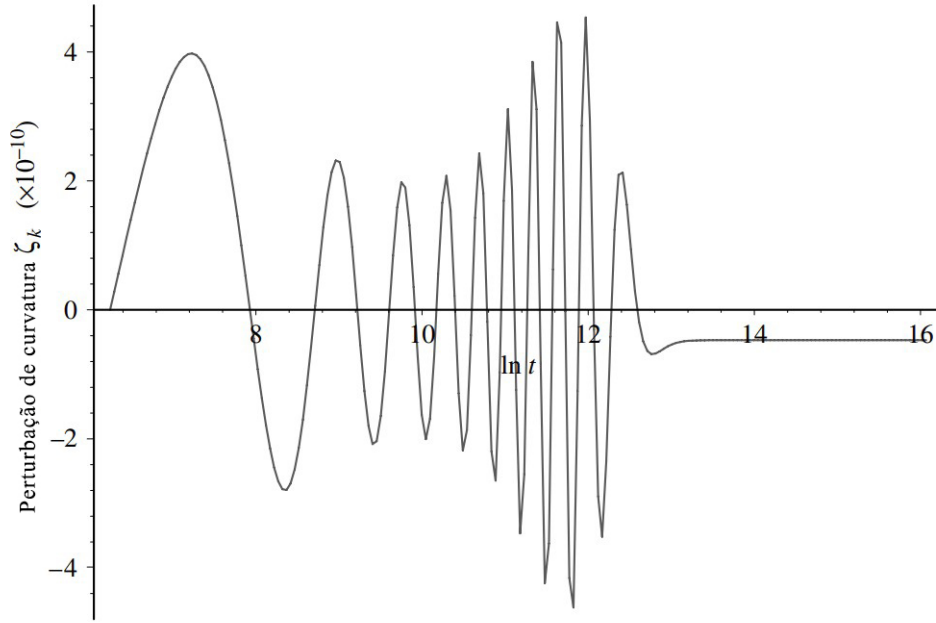
$$\xi_k'' + k^2\xi_k = 0, \quad \text{para} \quad k \gg aH, \quad (4.44)$$

já quando ocorre a saída do horizonte, $\frac{1}{k} \gg \frac{1}{aH}$, teremos que

$$\xi_k \propto \alpha, \quad \text{para} \quad k \ll aH, \quad (4.45)$$

e como $\xi_k = \alpha\zeta_k$, isso significa que a perturbação de curvatura ζ_k será constante. Essas situações estão ilustradas na Figura 16:

Figura 16 – Evolução da perturbação de curvatura ζ_k para um modelo $V(\phi) = \frac{1}{2}m^2\phi_0^2$, com $k = 10^4$ e $m \sim 2 \times 10^{-6}$. Com quantidades em unidades de Planck.



Fonte: Adaptado de (HOBSON; EFSTATHIOU; LASENBY, 2006), p. 450.

Dessa maneira, notamos que quando a escala da perturbação encontra-se dentro do horizonte a perturbação oscila e a partir do momento em que a escala se torna maior que o horizonte a perturbação congela no valor que estava, já que, para além desse ponto ela não consegue mais sentir a sua própria gravidade, pois se torna maior que o horizonte de causalidade. Quando a inflação se encerra e o comportamento do universo volta a ser ditado pela cosmologia padrão, o horizonte de Hubble volta a crescer. Assim, a perturbação permanece congelada até o ponto em que finalmente o horizonte de Hubble alcança novamente a escala da perturbação e ocorre a reentrada no horizonte fazendo com que a perturbação volte a oscilar. Vale notar que nesse estágio não será mais o campo escalar que estará oscilando, visto que ele terá decaído em outras partículas através do processo de *reheating*. Essas flutuações vão providenciar as condições iniciais para a formação de galáxias e das estruturas em larga escala que observamos no universo hoje em dia. Estudando a distribuição de galáxias e a flutuação presente na RCF, podemos obter uma idéia do espectro da perturbação que as produziram. Sendo assim, podemos a partir das observações atuais realizar testes dos modelos inflacionários que geraram essas perturbações e essa é uma área de grande interesse para a cosmologia moderna (HOBSON; EFSTATHIOU; LASENBY, 2006).

Para medirmos a perturbação de curvatura primordial devemos primeiro estudar o seu espectro de potência, que é definido para um campo variando como a contribuição

para a variância total do campo por unidade de intervalo logarítmico em k :

$$\langle \zeta_{\vec{k}} \zeta_{\vec{k}'}^* \rangle = \frac{2\pi^2}{k^3} \mathcal{P}_\zeta(k) \delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{k}'). \quad (4.46)$$

Então se calcularmos o valor constante de ζ_k para o instante de saída do horizonte ($k = aH$) podemos escrever seu espectro de potência como:

$$\mathcal{P}_\zeta(k) = \left(\frac{H^2}{2\pi\dot{\phi}_0} \right)_{k=aH}^2. \quad (4.47)$$

De acordo com as observações, o valor do espectro de potência da perturbação de curvatura é aproximadamente independente da escala k . A pequena dependência do espectro com a escala é chamada de *tilt* do índice espectral:

$$n_s - 1 \equiv \frac{d \ln \mathcal{P}_\zeta(k)}{d \ln k}. \quad (4.48)$$

Desta forma, para um universo *flat*, isto é, completamente independente da escala, teremos que o índice espectral será $n_s = 1$. Ainda, se considerarmos a ASL, podemos reescrever a equação (4.42) como

$$\zeta \simeq 8\pi G \frac{V}{V'} \delta\phi, \quad (4.49)$$

e a equação do espectro de potência (4.47) como

$$\mathcal{P}_\zeta(k) \simeq \frac{8G^2}{3} \frac{V}{\epsilon_V} \Big|_{k=aH}. \quad (4.50)$$

Com isso, podemos escrever o *tilt* do índice espectral em termos dos parâmetros de *slow-roll*:

$$n_s - 1 \simeq -6\epsilon_V + 2\eta_V. \quad (4.51)$$

Além disso, existe ainda o caso da perturbação para um campo vetorial, que é estudado como uma possibilidade para a criação do campo magnético primordial (DIMOPOULOS et al., 2009). Não vamos aqui estudar as perturbações vetoriais, mas sim as perturbações tensoriais primordiais, que são responsáveis pela criação das ondas gravitacionais primordiais, uma consequência esperada da inflação com a gravitação de Einstein. O espectro de potência para esse tipo de perturbação tensorial pode ser escrito como

$$\mathcal{P}_T(k) = 8G \left(\frac{H}{2\pi} \right)_{k=aH}^2, \quad (4.52)$$

e o índice espectral definido por

$$n_T \equiv \frac{d \ln \mathcal{P}_T(k)}{d \ln k}, \quad (4.53)$$

que em termos do parâmetro de *slow-roll* pode ser expresso por

$$n_T \simeq -2\epsilon_V. \quad (4.54)$$

Dessa maneira, podemos relacionar as perturbações escalares e tensoriais através da razão tensor-escalar (LYTH, 2005):

$$r \equiv \frac{\mathcal{P}_T}{\mathcal{P}_\zeta} = 16\epsilon_V, \quad (4.55)$$

que combinando com a equação (4.54) pode ser escrita em termos do índice espectral tensorial:

$$r = -8n_T. \quad (4.56)$$

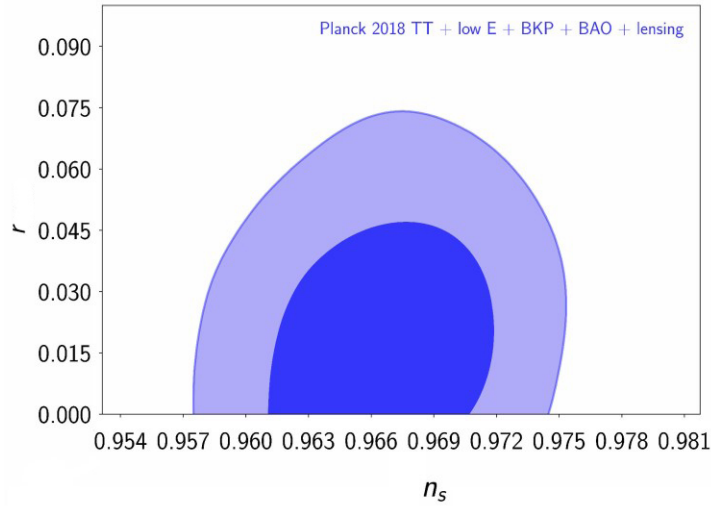
Assim, para analisar os resultados de um modelo inflacionário basta estudarmos os parâmetros independentes n_s e r . A partir das observações astronômicas podemos impor limites para os valores desses parâmetros e assim discernir acerca da validade de um determinado modelo inflacionário. Os resultados obtidos pelo *Planck Collaboration* (COLLABORATION et al., 2020) determinam os seguintes limites para o índice espectral e a razão tensor-escalar:

$$n_s = 0.9661 \pm 0.0037; \quad (4.57)$$

$$r < 0.065, \quad (4.58)$$

ilustrados na Figura 17:

Figura 17 – Restrição de probabilidade em n_s e r baseado no banco de dados do Planck 2018. São exibidos os contornos para o intervalo de confiança 1σ e 2σ .



Fonte: Adaptado de (VAZQUEZ; PADILLA; MATOS, 2020).

Voltando para o exemplo discutido na seção 4.8 do potencial quadrático de um campo escalar massivo e livre, vimos que estamos interessados em modelos que possuam um número de *e-folds* de aproximadamente $N = 60$. Logo, da equação (4.40) temos que

$$\phi_i^2 = \frac{121}{4\pi G}, \quad (4.59)$$

então o *tilt* do índice espectral (4.51) será dado por

$$n_s - 1 = -\frac{4}{121}, \quad (4.60)$$

e a razão tensor-escalar (4.55) será:

$$r = \frac{16}{121}. \quad (4.61)$$

Então teríamos para esse modelo que $n_s \approx 0.967$ e $r \approx 0.132$, que por muito tempo foram considerados valores plausíveis, entretanto com os resultados mais recentes, como o ilustrado na Figura 17, esse modelo acaba sendo desfavorecido em razão do valor obtido para r .

4.10 Modelos inflacionários

Fica claro, portanto, a importância de definirmos um potencial específico para descrevermos um determinado modelo inflacionário. Já para compararmos os resultados desse modelo com os dados observacionais, devemos seguir os seguintes passos (VAZQUEZ; PADILLA; MATOS, 2020):

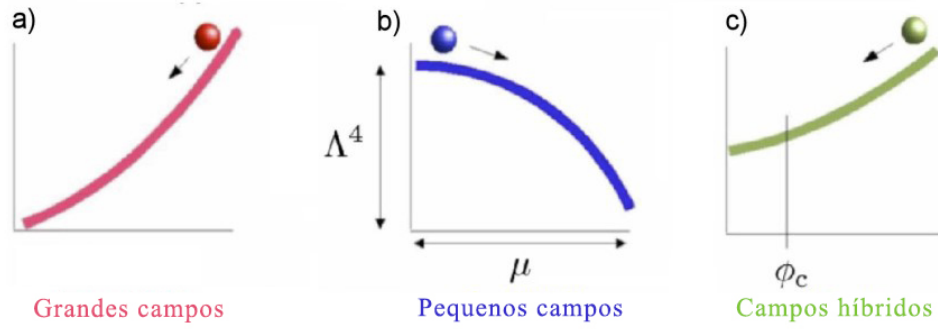
- Calcular os parâmetros de *slow-roll* ϵ_V e η_V ;
- Encontrar o valor do campo para o qual a inflação se encerra dado por $\epsilon_V(\phi_{end}) = 1$;
- Encontrar o valor do campo para que a inflação dure 60 *e-folds* ϕ_{60} ;
- Calcular o índice espectral n_s e a razão tensor-escalar r em função de ϕ_{60} para comparar com as observações.

A quantidade de potenciais que se adequam às condições impostas é vasta (LINDE, 2005; LYTH; RIOTTO, 1999), logo, será útil formularmos uma maneira de se classificar esses potenciais de acordo com o seu comportamento durante o período inflacionário. Existem basicamente três tipos de modelos, ilustrados na Figura 18; os de grandes campos, em que o campo se inicia deslocado de um mínimo estável e evolui em sua direção, os de pequenos campos, em que o campo se afasta de um máximo instável e os de campos híbridos, em que o campo evolui na direção de um mínimo com energia de vácuo diferente de zero. Podemos descrever o potencial geral de cada um deles em termos da altura Λ e largura μ , de forma que:

$$V(\phi) = \Lambda^4 f\left(\frac{\phi}{\mu}\right), \quad (4.62)$$

em que as diferentes classificações para os modelos terão diferentes formas para a função $f(\phi/\mu)$.

Figura 18 – Classificação dos potenciais inflacionários.



Fonte: Adaptado de (KINNEY, 2003).

4.10.1 Modelos de grandes campos

Os modelos de grandes campos representam os cenários de inflação caótica (LINDE, 1983), na qual o valor inicial do *inflaton* é tomado como caótico, isto é, assume valores aleatórios para diferentes regiões do universo. Se esse valor inicial estiver suficientemente afastado do mínimo do potencial o campo irá “rolar” em direção ao mínimo por um período de tempo longo o suficiente para que a inflação ocorra. Esse tipo de modelo é caracterizado por possuir $V''(\phi) > 0$, $-\epsilon_V < \eta_V < \epsilon_V$ e podemos descrevê-los de forma geral como:

$$V(\phi) = \Lambda^4 \left(\frac{\phi}{\mu} \right)^p, \quad (4.63)$$

onde $p > 1$ e p é o parâmetro que distingue um modelo de outro. Se calcularmos os parâmetros de *slow-roll* para esse potencial vamos obter:

$$\epsilon_V = \frac{p^2}{16\pi G} \frac{1}{\phi^2}; \quad \eta_V = \frac{p(p-1)}{8\pi G} \frac{1}{\phi^2}. \quad (4.64)$$

Logo, o valor do campo no fim da inflação ($\epsilon_V = 1$) é:

$$|\phi_{end}| = \frac{p}{4\sqrt{\pi G}}, \quad (4.65)$$

e então o valor do campo para que a inflação dure por N *e-folds* é dado por

$$\phi_N^2 = \frac{p}{4\pi G} \left(N + \frac{p}{4} \right). \quad (4.66)$$

Com isso podemos calcular o índice espectral do campo escalar e a razão tensor-escalar:

$$n_s - 1 = -\frac{2(p+2)}{4N + p}; \quad r = \frac{4p}{N + \frac{p}{4}}. \quad (4.67)$$

Para o caso em que $p = 2$ e $N = 60$ recuperamos o potencial quadrático e os resultados obtidos anteriormente.

Para o limite de potências muito altas, as previsões desse tipo de potencial são as mesmas do potencial exponencial (STEINHARDT; WANG; ZLATEV, 1999):

$$V(\phi) = \Lambda^4 e^{\phi/\mu}, \quad (4.68)$$

então essa pode ser considerada uma variante dos potenciais de grandes campos. Os parâmetros de *slow-roll* para o potencial exponencial são independentes do número de *e-folds* N :

$$\epsilon_V = \frac{1}{16\pi G\mu^2}; \quad \eta_V = \frac{1}{8\pi G\mu^2}, \quad (4.69)$$

então temos que o índice espectral e a razão tensor-escalar serão dados por

$$n_s - 1 = -\frac{1}{8\pi G\mu^2}; \quad r = \frac{1}{\pi G\mu^2}, \quad (4.70)$$

e portanto, podemos relacionar um parâmetro com o outro através de

$$r = 8(1 - n_s). \quad (4.71)$$

4.10.2 Modelos de pequenos campos

Nos modelos de pequenos campos a inflação ocorre quando o campo escalar está situado em um estado de falso vácuo, isto é, em um máximo instável do potencial, e “rola” em direção a um mínimo estável. Como a inflação ocorre somente na região próxima ao máximo do potencial, não precisamos nos preocupar com a forma do potencial longe do máximo. Esse tipo de potencial é típico de modelos com quebra de simetria espontânea e é também chamado de nova inflação (PARSONS; BARROW, 1995). Podemos descrever essa categoria de modelos por um potencial com $V''(\phi) < 0$, $\eta_V < -\epsilon_V$ e de forma geral:

$$V(\phi) = \Lambda^4 \left[1 - \left(\frac{\phi}{\mu} \right)^p \right], \quad (4.72)$$

com $p \geq 2$ e para o caso mais simples em que ocorre a quebra espontânea de simetria sem nenhuma outra simetria especial, o termo dominante será o termo de massa, $p = 2$ (KINNEY, 2003). Então teremos que (VAZQUEZ; PADILLA; MATOS, 2020)

$$n_s - 1 \simeq -\frac{1}{G\mu^2}; \quad r = 8(1 - n_s)e^{-1-N(1-n_s)}. \quad (4.73)$$

Já para o caso em que $p > 2$ temos um comportamento diferente, já que o índice espectral não depende de $G\mu^2$:

$$n_s - 1 = -\frac{2}{N} \left(\frac{p-1}{p-2} \right), \quad (4.74)$$

e a razão tensor-escalar:

$$r = 8(\sqrt{8\pi G\mu})^{2p/(p-2)} \left(\frac{p}{2N(p-2)} \right)^{2(p-1)/(p-2)}. \quad (4.75)$$

Podemos comparar esses resultados com os dados observacionais expressos em (4.57) e (4.58) para estimar limites para o parâmetro μ e assim eliminar certos modelos.

4.10.3 Modelos híbridos

A terceira classe de modelos são os chamados modelos híbridos, onde o campo escalar evolui na direção de um mínimo do potencial, entretanto o mínimo possui energia de vácuo $V(\phi_{min}) = \Lambda^4$ diferente de zero. Esse tipo de modelo foi primeiramente proposto por Linde (LINDE, 1994) e neles a inflação continuaria acontecendo para sempre, a menos que um campo auxiliar seja adicionado fazendo com que a inflação acabe em um ponto $\phi = \phi_c$. Vamos considerar os efeitos desse campo auxiliar como sendo um parâmetro livre adicional. Caracterizamos esses tipos de modelos por potenciais que possuem $V''(\phi) > 0$, $0 < \epsilon_V < \eta_V$ e a forma geral dada por:

$$V(\phi) = \Lambda^4 \left[1 + \left(\frac{\phi}{\mu} \right)^p \right], \quad (4.76)$$

com $p \geq 2$ e notamos que quando $\left(\frac{\phi}{\mu} \right) \gg 1$ recuperamos o comportamento dos modelos de grandes campos e já quando $\left(\frac{\phi}{\mu} \right) \ll 1$ recuperamos a dinâmica dos modelos de pequenos campos, com a diferença de que agora o campo evolui na direção de um ponto fixo no lugar de se afastar dele.

O índice espectral para esse tipo de modelo pode é dado por (VAZQUEZ; PADILLA; MATOS, 2020):

$$n_s - 1 \simeq 2 \left(\frac{p+1}{p+2} \right) \frac{1}{N_{max} - N}, \quad (4.77)$$

onde

$$N(\phi) \simeq \left(\frac{p+1}{p+2} \right) \left[\frac{1}{\eta(\phi_c)} - \frac{1}{\eta(\phi)} \right], \quad (4.78)$$

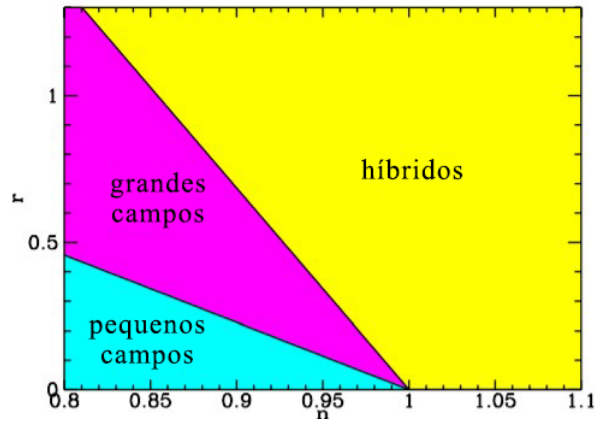
e N_{max} corresponde ao valor que $N(\phi)$ tende ao tomarmos $\phi \gg \phi_c$:

$$N_{max} \equiv \left(\frac{p+1}{p+2} \right) \frac{1}{\eta(\phi_c)}. \quad (4.79)$$

Notamos então da equação (4.77) que o espectro de potência é azul, isto é, $n_s > 1$, que é uma característica dos modelos híbridos.

Embora essa classificação dos modelos inflacionários possa parecer arbitrária, ela é muito útil, pois diferentes tipos de modelos cobrem diferentes áreas do plano (n_s, r) sem se sobrepor, conforme ilustrado na Figura 19:

Figura 19 – Plano (n_s, r) com a classificação dos potenciais inflacionários.



Fonte: Adaptado de (KINNEY, 2003).

Existem ainda outros tipos de potenciais inflacionários que não se encaixam nessa classificação, como os potenciais logarítmicos (BARROW; PARSONS, 1995), os potenciais que possuem potências negativas $V(\phi) \propto \phi^{-p}$ (BARROW; LIDDLE, 1993), os modelos de inflação dinâmica super-simétrica (KINNEY; RIOTTO, 1999) ou até mesmo os modelos lineares, onde $V(\phi) \propto \phi$ e $V''(\phi) = 0$, que no plano da Figura 19 se encontram na fronteira entre os modelos de pequenos e grandes campos (DODELSON; KINNEY; KOLB, 1997).

5 Considerações finais

Dessa forma, fica claro nesse trabalho a importância de se estudar a proposta do universo inflacionário, que de maneira elegante soluciona diversos dos problemas presentes na cosmologia padrão e que com o avanço dos instrumentos de observação cada vez mais se encaminha para se tornar uma teoria sólida e consolidada, sendo objeto de pesquisa nos mais variados centros ao redor do mundo.

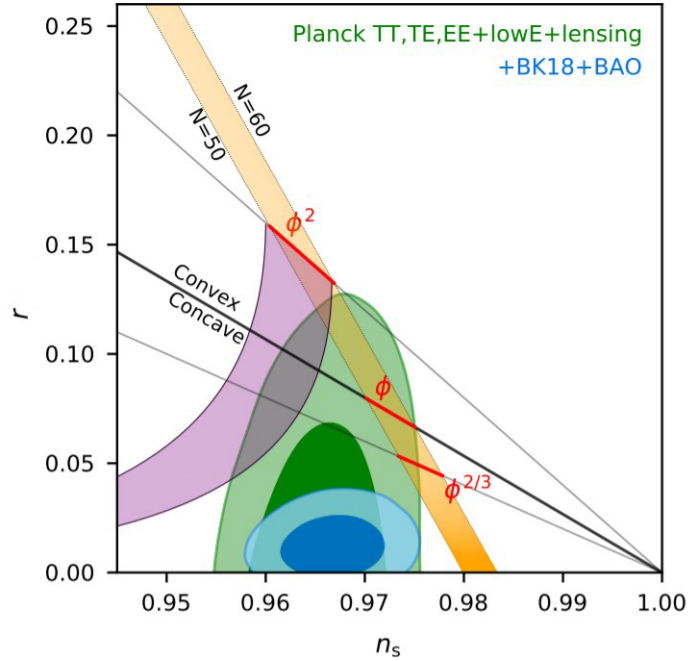
Esse trabalho pode ser de grande utilidade para novos alunos que tenham interesse em se iniciar nos estudos da cosmologia, funcionando como um guia, pois descreve os principais aspectos da formulação da proposta inflacionária, destrinchando os conceitos teóricos, o aparato matemático e indicando as principais referências de materiais para estudos futuros. A partir de uma breve revisão acerca do cálculo tensorial e da teoria da relatividade geral, formulamos a base da cosmologia padrão, destacando seus sucessos, sua dinâmica e também as suas falhas, a principal motivação para o desenvolvimento dos modelos inflacionários. Abordamos, então, a maneira com que a inflação resolve os problemas do MCP, detalhando as condições para que a inflação ocorra e os parâmetros que a descreve. Por fim, exploramos também alguns exemplos de potenciais que podem gerar a inflação, como o potencial quadrático, potenciais de grandes e pequenos campos e potenciais híbridos, sempre se utilizando dos parâmetros provenientes da teoria das perturbações cosmológicas, que além de nos fornecer uma explicação para a formação das anisotropias do universo, nos proporciona também uma forma de se estudar os variados modelos inflacionários a partir dos dados observacionais.

Acompanhar as novas limitações nos parâmetros observacionais impostas pelas mais recentes observações é imprescindível para todo cosmólogo, visto que, novos resultados como os obtidos pelos experimentos *Background Imaging of Cosmic Extragalactic Polarization* (BICEP) e o *Keck Array* podem aumentar mais ainda as restrições nos parâmetros de perturbação, limitando a razão tensor-escalar, antes expressa por (4.58) e agora restringida a (KALLOSH; LINDE, 2021)

$$r < 0.036. \quad (5.1)$$

Resultados como esse impõem novas condições de validade para os modelos inflacionários, ilustradas na Figura 20:

Figura 20 – Restrições no plano (n_s, r) para a base de dados do Planck 2018 em verde e para os dados do BICEP/Keck em azul, ambos com os contornos para o intervalo de confiança 1σ e 2σ .



Fonte: Adaptado de (ADE et al., 2021).

Portanto, notamos que é complicado atualmente se provar que um determinado modelo inflacionário está correto, já que esse modelo poderia ser apenas um caso particular de um cenário mais geral, entretanto, podemos eliminar certos modelos com base nas observações ou pelo menos impor restrições no seu comportamento. O estudo de novos modelos que se adequem aos dados experimentais é um de nossos interesses para trabalhos futuros.

Referências

- ADE, P. et al. Improved constraints on primordial gravitational waves using planck, wmap, and bicep/keck observations through the 2018 observing season. *Physical Review Letters*, APS, v. 127, n. 15, p. 151301, 2021.
- ADLER, R. J. *General Relativity and Cosmology: A first encounter*. Cham: Springer Nature, 2021.
- ALPHER, R. A.; BETHE, H.; GAMOW, G. The origin of chemical elements. *Physical Review*, APS, v. 73, n. 7, p. 803, 1948.
- ALPHER, R. A.; HERMAN, R. C. On the relative abundance of the elements. *Physical Review*, APS, v. 74, n. 12, p. 1737, 1948.
- BAHCALL, N. A. Hubble's law and the expanding universe. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, v. 112, 2015.
- BARROW, J. D.; LIDDLE, A. R. Perturbation spectra from intermediate inflation. *Physical Review D*, APS, v. 47, n. 12, p. R5219, 1993.
- BARROW, J. D.; PARSONS, P. Inflationary models with logarithmic potentials. *Physical Review D*, APS, v. 52, n. 10, p. 5576, 1995.
- BAUMANN, D. Tasi lectures on inflation. *Notas de aula*, 2009.
- BAUMANN, D. Cosmology. *Notas de aula*, 2012.
- CARROLL, S. M. *Spacetime and geometry*. Cambridge: Cambridge University Press, 2019.
- COLLABORATION, P. et al. Planck 2018 results. vi. cosmological parameters. EDP Sciences, 2020.
- DIMOPOULOS, K. et al. Statistical anisotropy of the curvature perturbation from vector field perturbations. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, IOP Publishing, v. 2009, n. 05, p. 013, 2009.
- D'INVERNO, R. *Introducing Einstein's Relativity*. New York: Oxford University Press, 1992.
- DODELSON, S.; KINNEY, W. H.; KOLB, E. W. Cosmic microwave background measurements can discriminate among inflation models. *Physical Review D*, APS, v. 56, n. 6, p. 3207, 1997.
- EDDINGTON, A. S. On the instability of einstein's spherical world. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, v. 90, p. 668–678, 1930.
- FIXSEN, D. The temperature of the cosmic microwave background. *The Astrophysical Journal*, v. 707, n. 2, p. 916, 2009.
- FRIEDMANN, A. "on the curvature of space". *Zeitschrift für Physik*, v. 10, p. 377–386, 1922.

- GAMOW, G. The evolution of the universe. *Nature*, Nature Publishing Group, v. 162, n. 4122, p. 680–682, 1948.
- GRIFFITHS, D. *Introduction to Elementary Particles*. [S.l.]: VCH Verlag GmbH & Co. KgaA, Weinheim, 2008.
- GRIFFITHS, D. J. *Introduction to Electrodynamics*. New Jersey: Prentice Hall, 1999. v. 3. 628 p.
- GUTH, A. H. Inflationary universe: A possible solution to the horizon and flatness problems. *Physical Review D*, v. 23, 1981.
- HOBSON, M. P.; EFSTATHIOU, G. P.; LASENBY, A. N. *General relativity: an introduction for physicists*. Cambridge: Cambridge University Press, 2006.
- HUBBLE, E. A relation between distance and radial velocity among extra-galactic nebulae. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, v. 15, 1929.
- HUBBLE, E.; HUMASON, M. L. The velocity-distance relation among extra-galactic nebulae. *The Astrophysical Journal*, v. 74, 1931.
- ISLAM, J. N. *An introduction to mathematical cosmology*. Cambridge: Cambridge University Press, 2002.
- KALLOSH, R.; LINDE, A. Bicep/keck and cosmological attractors. *arXiv preprint arXiv:2110.10902*, 2021.
- KINNEY, W. H. Cosmology, inflation and the physics of nothing. *Techniques and Concepts of High-Energy Physics XII*, Springer, 2003.
- KINNEY, W. H.; RIOTTO, A. Dynamical supersymmetric inflation. *Astroparticle Physics*, Elsevier, v. 10, n. 4, p. 387–395, 1999.
- KOFMAN, L.; LINDE, A.; STAROBINSKY, A. A. Towards the theory of reheating after inflation. *Physical Review D*, APS, v. 56, n. 6, p. 3258, 1997.
- LIDDLE, A. R.; LYTH, D. H. *Cosmological inflation and large-scale structure*. Cambridge: Cambridge university press, 2000.
- LINDE, A. Hybrid inflation. *Physical Review D*, APS, v. 49, n. 2, p. 748, 1994.
- LINDE, A. Towards inflation in string theory. *Journal of Physics: Conference Series*, IOP Publishing, v. 24, n. 1, 2005.
- LINDE, A. D. Chaotic inflation. *Physics Letters B*, Elsevier, v. 129, n. 3-4, p. 177–181, 1983.
- LORENTZ, H. A. *Electromagnetic phenomena in a system moving with any velocity smaller than that of light*. In: *The Principle of Relativity*. EUA: Dover Publications, 1952. 9-34 p.
- LYTH, D. H. Generating the curvature perturbation at the end of inflation. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, IOP Publishing, v. 2005, n. 11, p. 006, 2005.

- LYTH, D. H.; LIDDLE, A. R. *The primordial density perturbation: Cosmology, inflation and the origin of structure*. Cambridge: Cambridge University Press, 2009.
- LYTH, D. H.; RIOTTO, A. Particle physics models of inflation and the cosmological density perturbation. *Physics Reports*, Elsevier, v. 314, n. 1-2, p. 1–146, 1999.
- MCCOY, C. D. Does inflation solve the hot big bang models fine-tuning problems? *Studies in History and Philosophy of Science Part B: Studies in History and Philosophy of Modern Physics*, Elsevier, v. 51, p. 23–36, 2015.
- NUSSENZVEIG, H. M. *Curso de Física Básica: Vol. 4: Ótica, relatividade e física quântica*. São Paulo: Editora Blucher, 1988. I. 437 p.
- PARSONS, P.; BARROW, J. D. New inflation from old. *Classical and Quantum Gravity*, IOP Publishing, v. 12, n. 7, p. 1715, 1995.
- PENZIAS, A. A.; WILSON, R. W. A measurement of excess antenna temperature at 4080 mc/s. *The Astrophysical Journal*, v. 142, p. 419–421, 1965.
- RAMÍREZ, H. Noncanonical approaches to inflation. *arXiv preprint arXiv:1906.09299*, 2019.
- SOARES, D. O universo estático de einstein. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, SciELO Brasil, v. 34, 2012.
- STEINHARDT, P. J.; WANG, L.; ZLATEV, I. Cosmological tracking solutions. *Physical Review D*, APS, v. 59, n. 12, p. 123504, 1999.
- VAZQUEZ, J. A.; PADILLA, L. E.; MATOS, T. Inflationary cosmology: From theory to observations. *Revista Mexicana de Física E*, v. 17, 2020.
- WEINBERG, S. *Cosmology*. New York: Oxford university press, 2008.