

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Imersões Ótimas para Espaços de Sobolev Reduzidos

Lucas Machado Fernandes

João Pessoa – PB
Julho de 2021

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Imersões Ótimas para Espaços de Sobolev Reduzidos

por

Lucas Machado Fernandes

sob a orientação de

Prof. Dr. Bruno Henrique Carvalho Ribeiro

João Pessoa – PB
Julho de 2021

Catálogo na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

F363i Fernandes, Lucas Machado.

Imersões ótimas para espaços de Sobolev reduzidos /
Lucas Machado Fernandes. - João Pessoa, 2021.
95 f. : il.

Orientação: Bruno Henrique Carvalho Ribeiro.
Dissertação (Mestrado) - UFPB/CCEN.

1. Matemática. 2. Imersões de Sobolev. 3. Espaços de
Sobolev reduzidos. I. Ribeiro, Bruno Henrique Carvalho.
II. Título.

UFPB/BC

CDU 51(043)

Imersões Ótimas para Espaços de Sobolev Reduzidos

por

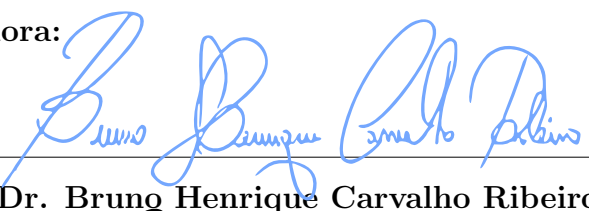
Lucas Machado Fernandes ¹

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Paraíba como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

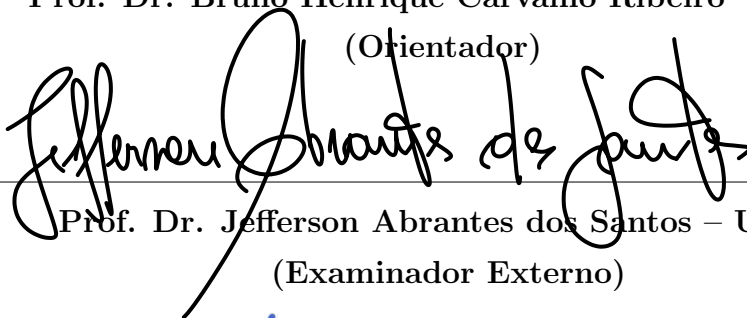
Área de Concentração: Análise

Aprovada em 30 de Julho de 2021.

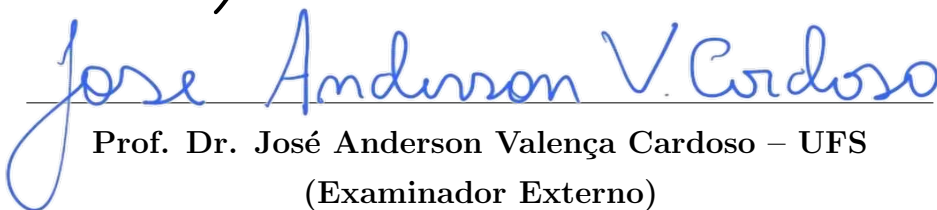
Banca Examinadora:



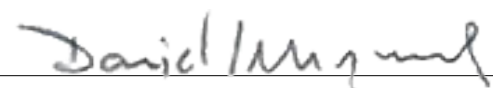
Prof. Dr. Bruno Henrique Carvalho Ribeiro – UFPB
(Orientador)



Prof. Dr. Jefferson Abrantes dos Santos – UFCG
(Examinador Externo)



Prof. Dr. José Anderson Valença Cardoso – UFS
(Examinador Externo)



Prof. Dr. Daniel Marinho Pellegrino – UFPB
(Examinador Interno)

¹O autor foi bolsista do CNPq durante a elaboração desta dissertação.

A minha família...

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço a Deus por tudo que tenho hoje, principalmente a dádiva da existência.

Agradeço à minha família pelo apoio, amor e carinho durante toda a minha vida. Em especial, aos meus pais Cicero Pereira Fernandes e Josefa Dauva Machado Fernandes que deram total suporte para o meu desenvolvimento ético, moral e educacional. Em resumo, eu não seria nada sem eles.

Agradeço também às matemáticas que mudaram minha vida: a minha irmã Andrea Machado Fernandes Aquino por ter me inspirado durante todos esses anos com sua luta e esforço e a minha companheira Núbia Matias do Nascimento pelo carinho, atenção e apoio nos momentos complicados. Também não posso esquecer do meu cunhado Guilherme Aquino pelos momentos de descontração e alegria proporcionados durante todos esses anos.

Agradeço ao meu orientador Dr. Bruno Henrique Carvalho Ribeiro pela atenção, dedicação, paciência e motivação. O mesmo foi fundamental para a formulação do melhor plano de estudos para meu desenvolvimento matemático. Aprendi muito mais sobre essa ciência incrível da qual fazemos parte. Ao coordenador da pós-graduação Fágner Dias Araruna, só tenho elogios ao belíssimo trabalho realizado e pela agilidade em resolver os problemas dos discentes. Sou muito grato por sua preocupação nos momentos complicados que vivi com a falta de bolsa de estudos.

Sou grato aos professores da Universidade Regional do Cariri que fazem parte de toda essa caminhada: Braga, Edinardo, Flávio, Luciana, Mário, Pedro, Tiago Alencar, Valéria e Zélalber. Em particular, também agradeço aos professores Paulo César Cavalcante de Oliveira e Ricardo Rodrigues de Carvalho pelas orientações, pelo incentivo nos momentos de tensão e por toda a preocupação para que adquiríssemos uma aprendizagem de qualidade.

Agradeço também aos meus amigos de URCA que estudaram comigo todo esse tempo e que fizeram parte dessa trajetória como colegas na UFPB: Luiz Felipe, Paulo Vicente, Matheus Evangelista e Alessandro Fernandes. Vocês foram fundamentais nos momentos serenos e apreensivos. Também não posso deixar de citar meus amigos matemáticos cujas aventuras em Juazeiro do Norte guardarei para sempre: Antonio Valdete, Gabriel Barbosa, Gildson Domingos, Henrique Nascimento, Pedro Sales e Sandro Santos.

Por fim, agradeço a todas as pessoas que, de algum modo, contribuíram para que este momento chegasse.

Resumo

Neste trabalho, apresentaremos os espaços de Orlicz, de Zygmund e de Lorentz com o intuito de mostrar que certos espaços de Sobolev reduzidos podem ser imersos, de maneira ótima, nestes espaços. O trabalho passa por uma revisão das imersões clássicas dos espaços de Sobolev tradicionais em espaços de Orlicz exponenciais (imersões devido à famosa desigualdade de Trudinger-Moser) e finaliza com generalizações destas imersões para espaços de Sobolev reduzidos com dados em L^1 .

Palavras-chave: Imersões de Sobolev, Espaços de Sobolev reduzidos.

Abstract

In this work, we will present the spaces of Orlicz, Zygmund and Lorentz in order to show that certain reduced Sobolev spaces can be optimally immersed in these spaces. The work reviews the classical embeddings of traditional Sobolev spaces in exponential Orlicz spaces (embeddings due to the famous Trudinger-Moser inequality) and ends with generalizations of these embeddings to reduced Sobolev spaces with L^1 data.

Keywords: Embeddings for Sobolev Spaces, Reduced Sobolev Spaces.

Sumário

Introdução	1
1 Imersão de Espaços de Sobolev em Espaços de Orlicz	3
1.1 Noções de Análise Funcional	3
1.2 Espaços de Sobolev	5
1.3 Espaços de Orlicz	8
1.4 O Caso Limite de um Teorema de Imersão de Sobolev	12
2 Generalizações dos Espaços de Lebesgue	22
2.1 Distribuições, Rearranjos e Funções Maximais	22
2.2 Espaços Invariantes por Rearranjos	34
2.3 Espaços de Zygmund	36
2.4 Espaços de Lorentz	53
3 Imersões Ótimas do Espaço $W_{\Delta}^{2,1}(\Omega)$	59
3.1 Espaço Reduzido de Sobolev	59
3.2 Um resultado de Imersão para $N = 2$	61
3.3 Um resultado de Imersão para o caso $N > 2$	72
A Noções de Medida e Integração	79
A.1 Funções Mensuráveis	79
A.2 Medidas	80
A.3 Integral de Lebesgue	82
A.4 Espaços de Lebesgue	83
Referências Bibliográficas	85

Notações

A seguir, listamos algumas notações utilizadas neste trabalho.

- $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ denota um conjunto aberto e limitado (domínio);
- $\mathcal{C}$ denota um cone;
- $\mathcal{C}_x$ denota um cone finito com vértice x ;
- $\mathcal{C}_{x,r} = \{y \in \mathcal{C}_x; \|x - y\| \leq r\}$;
- $|\cdot|$ ou m denotam a medida de Lebesgue;
- $\hookrightarrow$ denota uma imersão contínua;
- $(W^{m,p}(\Omega), \|\cdot\|_{m,p})$ denota o espaço normado de Sobolev de ordem m ;
- $L^1_{loc}(\Omega) = \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \text{ mensurável}; |f| \in L^1(K), \forall K \subset \Omega \text{ compacto}\}$;
- $(L_\Phi(\Omega), \|\cdot\|_\Phi)$ denota o espaço normado de Orlicz;
- ω_N denota o volume da esfera de raio unitário em $\mathbb{R}^N$;
- μ_ϕ é conhecida como distribuição da função ϕ ;
- ϕ^* representa o rearranjo da função ϕ ;
- ϕ^{**} denota a função maximal de ϕ^* ;
- $(L_{\exp}(\Omega), \|\cdot\|_Z)$ e $(L \log L(\Omega), \|\cdot\|_{L \log L})$ são os espaços normados de Zygmund;
- $(L_{\exp}(\Omega), \|\cdot\|_{L_{\exp}})$ representa o espaço quase normado de Zygmund;

- $(L^{p,q}(\Omega), \|\cdot\|_{L^{p,q}})$ indica o espaço normado de Lorentz;
- $(L^{p,q}(\Omega), \|\cdot\|_{p,q})$ representa o espaço quase normado de Lorentz;
- $W_{\Delta}^{2,p}(\Omega)$ denota o completamento do subespaço de $C^{\infty}(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$;
- $W_{\Delta,rad}^{2,1}(B_R) = \{u \in W_{\Delta}^{2,1}(B_R); u \text{ é radialmente simétrica}\}$;
- δ_{x_0} denota o delta de Dirac;
- $(L^p, \|\cdot\|_p)$ indica o espaço normado de Lebesgue, com $1 \leq p \leq \infty$.

Introdução

Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, com $N \geq 2$, um domínio limitado e $p \geq 1$. As imersões contínuas

(a) $W^{2,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{Np/(N-2)}(\Omega)$, onde $1 \leq p < N/2$;

(b) $W^{2,p}(\Omega) \hookrightarrow L_\Phi(\Omega)$, onde $p = N/2$, $p > 1$ e $\Phi(t) = e^{t^{\frac{p}{p-1}}} - 1$;

(c) $W^{2,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$, onde $N = 2$ e $p = 1$,

onde $W^{m,p}(\Omega)$ denota o espaço de Sobolev de funções m -diferenciáveis no sentido fraco, com derivadas até ordem m em $L^p(\Omega)$, são de fundamental importância, pois estão extremamente relacionadas com o problema de regularidade de soluções das EDP's de segunda ordem.

Nesta perspectiva, ao estudar o problema de Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta u &= f, \text{ em } \Omega \\ u &= 0, \text{ em } \partial\Omega, \end{cases}$$

com $f \in L^1(\Omega)$, é importante conhecer o trabalho “*Some estimates for solutions of elliptic second-order equations*” (ver [12]) do matemático V. G. Maz'ya em 1961, que para $N \geq 3$, sob as condições acima, mostrou que

$$\sup_{\|\Delta u\|_1=1} \int_{\Omega} |u(x)|^q dx \begin{cases} < \infty, & \text{se } 1 \leq q \leq N/(N-2) \\ = \infty, & \text{se } q = N/(N-2), \end{cases} \quad (1)$$

onde $\|\cdot\|_1$ indica a norma do espaço $L^1(\Omega)$.

Outro resultado, não menos importante, publicado no artigo “*Uniform estimates and blow-up behavior for solutions of $-\Delta u = V(x)e^u$ in two dimensions*” (ver [6]) pelos pesquisadores H. Brezis e F. Merle em 1991, provaram que para $N = 2$ vale

$$\sup_{\|\Delta u\|_1=1} \int_{\Omega} e^{\beta|u(x)|} dx \begin{cases} < \infty, & \text{se } \beta < 4\pi \\ = \infty, & \text{se } \beta = 4\pi, \end{cases} \quad (2)$$

para toda u solução do problema de Dirichlet, com $p = 1$.

Nestas condições, os pesquisadores D. Cassani, B. Ruf e C. Tarsi em 2010, no trabalho “*Best constants in a borderline case of second-order Moser type inequalities*” (ver [8]), adicionaram novas condições sobre as hipóteses dos resultados anteriores para obter estimativas similares a (1) e (2), onde $q = N/(N-2)$ e $\beta = 4\pi$, respectivamente, de tal modo que o supremo seja finito. Este trabalho de dissertação tem como principal foco o estudo das imersões exploradas neste artigo.

Dessa forma, o primeiro capítulo dessa produção tem como objetivo passear pela história e provar a imersão clássica

$$W^{2,p}(\Omega) \hookrightarrow L_{\Phi}(\Omega),$$

onde $p = N/2$, $p > 1$, $\Phi(t) = e^{t^{\frac{p}{p-1}}} - 1$ e $L_{\Phi}(\Omega)$ é o espaço de Orlicz, além de trazer a definição formal e os principais resultados que envolvem estes espaços.

No segundo capítulo, trabalharemos alguns espaços de funções que serão essenciais para o desenvolvimento da teoria. Iniciaremos falando sobre as distribuições, rearranjos e funções Maximais. Nas seções seguintes, definiremos a teoria abstrata dos espaços invariantes por rearranjos e dos espaços de Zygmund e Lorentz, enfatizando suas principais caracterizações e propriedades.

Depois disso, no terceiro e último capítulo, definiremos o espaço reduzido de Sobolev $W_{\Delta}^{2,1}(\Omega)$ e mostraremos que ele está imerso continuamente nos espaços de Zygmund $L_{\exp}(\Omega)$ e de Lorentz $L^{\frac{N}{N-2},\infty}(\Omega)$, quando $N = 2$ e $N > 2$, respectivamente. Além disso, pelas constantes ótimas de imersão encontradas, verifica-se que

- (a) Sendo $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um domínio limitado e $\phi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ uma função contínua tal que $e^{4\pi t}\phi(t) \uparrow +\infty$, então existe uma constante $C = C(\phi) > 0$ tal que

$$\sup_{\substack{u \in W_{\Delta}^{2,1}(\Omega) \\ \|\Delta u\|_1 = 1}} \int_{\Omega} e^{4\pi|u|} \phi(|u|) dx \leq C|\Omega|$$

se, e somente se, $\phi(t)$ é integrável quando t se aproxima do infinito.

- (b) Sendo $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado, com $N \geq 3$ e $\phi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ uma função contínua tal que $t^{N/(N-2)}\phi(t) \uparrow +\infty$, então existe uma constante $C = C(\phi) > 0$ tal que

$$\sup_{\substack{u \in W_{\Delta}^{2,1}(\Omega) \\ \|\Delta u\|_1 = 1}} \int_{\Omega} |u|^{N/(N-2)} \phi(|u|) dx \leq C|\Omega|$$

se, e somente se, $\phi(t)/t$ é integrável quando t se aproxima do infinito.

Por fim, faremos um apêndice que apresentará algumas definições e resultados clássicos ao que se diz respeito à Teoria da Medida.

Capítulo 1

Imersão de Espaços de Sobolev em Espaços de Orlicz

Neste capítulo, iremos abordar alguns conceitos básicos de Análise Funcional para fixar a ideia do que exibiremos mais à frente. Logo depois, estudaremos os espaços de Sobolev e Orlicz, trazendo alguns resultados interessantes que serão de extrema importância para mostrar uma imersão entre tais espaços sobre a N-função $\Phi(t) = e^{t^{\frac{p}{p-1}}} - 1$.

1.1 Noções de Análise Funcional

Definição 1.1.1. Seja X um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. Uma função $\|\cdot\| : X \longrightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz as propriedades

- (a) $\|x\| \geq 0$, para todo $x \in X$;
- (b) $\|x\| = 0$ se, e só se, $x = 0$;
- (c) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ e todo $x \in X$;
- (d) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, para quaisquer $x, y \in X$,

é chamada *norma* de X e, em particular, $(X, \|\cdot\|)$ é um espaço normado. Além disso, se X satisfaz apenas as condições (a), (b) e (c), dizemos que $(X, \|\cdot\|)$ é um espaço quase normado.

Nosso interesse é estudar espaços de funções mensuráveis onde as normas em geral são integrais que envolvem estas funções. Estes espaços possuem estruturas algébricas que cumprem comportamentos similares aos que já conhecemos em ambientes clássicos. Tendo isso em vista, definiremos

Definição 1.1.2. Uma função $T : X \longrightarrow Y$ entre espaços vetoriais normados é dita *operador linear contínuo* se para todo $x, y \in X$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ temos

$$T(x + \lambda y) = T(x) + \lambda T(y),$$

e para todo $z \in X$ e $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que sempre que $x \in X$ e $\|x - z\| < \delta$ temos

$$\|T(x) - T(z)\| < \varepsilon.$$

Nestas condições, tendo tais definições em vista, podemos enunciar um resultado que relaciona os princípios de limitação e continuidade.

Teorema 1.1.3. Sejam $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ espaço vetoriais normados e $T : X \longrightarrow Y$ um operador linear. É equivalente afirmar que:

- (a) T é contínuo;
- (b) Existe $M > 0$ tal que $\|Tx\|_Y \leq M\|x\|_X$, para todo $x \in X$.

Demonstração. Vejamos,

(a) $\Rightarrow$ (b) Suponha que T é um operador contínuo em um ponto $z \in X$. Em símbolos, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que sempre que $x \in X$ e $\|x - z\|_X < \delta$ temos

$$\|T(x) - T(z)\|_Y < \varepsilon.$$

Agora, escrevendo

$$x_y = z + \frac{\delta}{2} \cdot \frac{y}{\|y\|_X},$$

para todo $y \in X \setminus \{0\}$, encontramos

$$\|T(x_y) - T(z)\|_Y = \left\| \frac{\delta}{2\|y\|_X} T(y) \right\| < \varepsilon,$$

pois $\|x_y - z\| < \delta$. Logo, para todo $y \in X$, temos

$$\|T(y)\|_Y \leq \frac{2\varepsilon}{\delta} \|y\|_X = M\|y\|_X,$$

onde $M = 2\varepsilon/\delta$.

(b) $\Rightarrow$ (a) Reciprocamente, se existe $M > 0$ tal que satisfaz o item (b), então

$$\|T(x) - T(y)\|_Y = \|T(x - y)\|_Y \leq M\|x - y\|_X,$$

para todo $x, y \in X$. Logo, para todo $y \in X$ e $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \varepsilon/M > 0$ tal que sempre que $x \in X$ e $\|x - y\| < \delta$ tem-se

$$\|T(x) - T(y)\|_Y \leq M\|x - y\|_X < M \cdot \delta = M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon,$$

o que mostra que T é contínuo. □

Agora, iremos definir um conceito que é de fundamental importância para o que será desenvolvido daqui por diante.

Definição 1.1.4. Sejam X e Y espaços vetoriais normados. Dizemos que X está *imerso continuamente* em Y quando

- (a) X é subespaço vetorial de Y ;
- (b) O operador identidade $I : X \longrightarrow Y$ dado por $I(x) = x$, para todo $x \in X$, é contínuo.

Em símbolos, representaremos esta imersão por $X \hookrightarrow Y$.

É bom ressaltar que o Teorema 1.1.3 permite escrever o segundo item da definição de imersão contínua através da desigualdade

$$\|x\|_Y = \|Ix\|_Y \leq M\|x\|_X,$$

para todo $x \in X$ e algum $M > 0$.

1.2 Espaços de Sobolev

Inicialmente, considere $C_0^\infty(\Omega)$ o espaço das funções $\phi \in C^\infty(\Omega)$ tal que seu suporte

$$\text{supp}(\phi) = \overline{\{x \in \Omega; \phi(x) \neq 0\}}$$

seja compacto, onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é aberto e limitado. Um conceito muito importante para entender os espaços de Sobolev é saber o que é uma derivada fraca. Como motivação para introdução dessa definição, sejam $u \in C^1(\Omega)$ e $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$. Usando integração por partes, temos

$$\int_{\Omega} u \frac{\partial \phi}{\partial x_j} dx = - \int_{\Omega} \phi \frac{\partial u}{\partial x_j} dx, \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, N\}.$$

Isto nos leva a definir:

Definição 1.2.1. Seja $L^1_{loc}(\Omega)$ o espaço das funções reais de domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ localmente integráveis. Se $u, v \in L^1_{loc}(\Omega)$, então dizemos que v é derivada parcial fraca de u na direção x_j , com $j \in \{1, 2, \dots, N\}$, no caso de

$$\int_{\Omega} u \frac{\partial \phi}{\partial x_j} dx = - \int_{\Omega} v \phi dx,$$

para cada $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$. Simbolicamente, costumamos representar por $v = \frac{\partial u}{\partial x_j}$, pois se $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ e $u \in C^1(\Omega)$, então a derivada usual $\partial u / \partial x_j$ coincide com v .

Agora, considere a seguinte notação

$$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N), \quad |\alpha| = \sum_{i=1}^N \alpha_i \quad \text{e} \quad D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_N^{\alpha_N}},$$

onde α_i é inteiro e não negativo, para cada $i \in \{1, \dots, N\}$. De maneira geral, é comum generalizar a definição acima da seguinte maneira:

Definição 1.2.2. Se $u, v \in L^1_{loc}(\Omega)$, então dizemos que v é a α -ésima derivada parcial fraca de u se

$$\int_{\Omega} u D^\alpha \phi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} v \phi dx,$$

para cada $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$. Simbolicamente, costumamos representar por $v = D^\alpha u$.

Definição 1.2.3. O espaço de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$, com $1 \leq m < \infty$, é definido por

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega); \exists D^\alpha u \in L^p(\Omega), \forall |\alpha| \leq m\}.$$

A norma usual do espaço de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ é dada por

$$\|u\|_{m,p} = \begin{cases} \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_p^p \right)^{1/p}, & \text{se } 1 \leq p < \infty \\ \max_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_\infty, & \text{se } p = \infty \end{cases}$$

para cada $u \in W^{m,p}(\Omega)$.

Definição 1.2.4. O conjunto $W_0^{m,p}(\Omega)$ é denotado como sendo o fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ no espaço $W^{m,p}(\Omega)$, isto é, $W_0^{m,p}(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{m,p}}$.

Uma outra descrição deste espaço se dá através do seguinte conjunto

$$W_0^{m,p} = \{u \in W^{m,p}(\Omega); D^\alpha u = 0 \text{ em } \partial\Omega, \forall |\alpha| \leq m-1\},$$

como pode ser visto em [7]. Agora, mostraremos que o espaço de Sobolev é completo com a norma $\|\cdot\|_{m,p}$:

Teorema 1.2.5. O espaço normado $(W^{m,p}(\Omega), \|\cdot\|_{m,p})$ é de Banach.

Demonstração. Seja (u_n) uma sequência de Cauchy em $W^{m,p}(\Omega) \subset L^p(\Omega)$. É nítido que $(D^\alpha u_n)$ é uma sequência de Cauchy em $L^p(\Omega)$, para cada $|\alpha| \leq m$. Uma vez que $L^p(\Omega)$ é completo, existe $u_\alpha \in L^p(\Omega)$ tal que

$$\|D^\alpha u_n - u_\alpha\|_p \rightarrow 0,$$

para cada $|\alpha| \leq m$. Em particular, para $\alpha' = (0, 0, \dots, 0)$, temos

$$\|u_n - u\|_p \rightarrow 0,$$

onde $u_{\alpha'} = u$. Agora, fixando $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ arbitrário, temos

$$\int_{\Omega} u D^\alpha \phi dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} u_n (D^\alpha \phi) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} (D^\alpha u_n) \phi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} u_\alpha \phi dx.$$

Logo, temos $D^\alpha u = u_\alpha$ e, conseqüentemente, sucede-se que $u \in W^{m,p}(\Omega)$. Nestas condições, analisaremos dois casos:

1° caso: Se $1 \leq p < \infty$, então

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - u\|_{m,p} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha (u_n - u)\|_p^p \right)^{1/p} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u_n - u_\alpha\|_p^p \right)^{1/p} \\ &= 0, \end{aligned}$$

garantindo-nos que $W^{m,p}(\Omega)$ é completo.

2° caso: Se $p = \infty$, então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - u\|_{m,p} = \lim_{n \rightarrow \infty} \max_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha (u_n - u)\|_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} \max_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u_n - u_\alpha\|_\infty = 0.$$

que também nos garante que $W^{m,p}(\Omega)$ é completo. □

Os próximos teoremas serão apresentados sem demonstração, mas encontramos suas provas em [2]:

Teorema 1.2.6. Se $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado, $m \in \mathbb{N}$ e $1 \leq p < \infty$, então $\overline{C_0^\infty(\Omega)} = W^{m,p}(\Omega)$.

Demonstração. Ver Teorema 3.22, página 68. □

Teorema 1.2.7. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado. Se $mp = N$ e $1 \leq q < \infty$, então $W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega)$ e $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$.

Demonstração. Ver Teorema 4.12, página 85. □

1.3 Espaços de Orlicz

Para definirmos os espaços de Orlicz, iremos utilizar uma classe de funções específicas que admitem certas propriedades.

Definição 1.3.1. Seja $a : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ uma função não decrescente que satisfaz:

- (a) $a(0) = 0$;
- (b) Se $t > 0$, então $a(t) > 0$;
- (c) $\lim_{t \rightarrow \infty} a(t) = \infty$;
- (d) Se $t \geq 0$, então $\lim_{s \rightarrow t^+} a(s) = a(t)$.

Dizemos que $\Phi : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\Phi(t) = \int_0^t a(\tau) d\tau$$

é uma N-função.

Agora, vejamos alguns exemplos que serão importantes adiante:

Exemplo 1.3.2. A aplicação $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$\Phi(t) = e^{t^p} - 1,$$

com $1 < p < \infty$, é uma N-função. De fato, seja a função

$$\begin{aligned} a : [0, \infty) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto pt^{p-1}e^{t^p}. \end{aligned}$$

Uma vez que a função a é não decrescente e satisfaz as condições (a)-(d) da Definição 1.3.1, temos

$$\Phi(t) = \int_0^t a(s)ds = \int_0^t ps^{p-1}e^{s^p}ds = e^{t^p} - 1$$

uma N-função.

Exemplo 1.3.3. Seja $a : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ uma função não decrescente que satisfaz as condições (a)-(d) da Definição 1.3.1. Note que, a aplicação $\bar{a} : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\bar{a}(s) = \sup_{a(t) \leq s} t$$

é não decrescente. De fato, tomando s e t reais em $[0, \infty)$ tal que $s > t$, temos $\bar{a}(s) \geq \bar{a}(t)$ já que vale a inclusão

$$\{l \in [0, \infty); a(l) \leq s\} \subset \{l \in [0, \infty); a(l) \leq t\}.$$

Além disso, $\bar{a}$ também satisfaz as propriedades (a)-(d) da Definição 1.3.1:

(a) $\bar{a}(0) = 0$, pois a é não decrescente, $a(0) = 0$ e $a(t) > 0$ para $t > 0$.

(b) Se $s > 0$, então $\bar{a}(s) > 0$, pois a é uma função contínua à direita.

(c) Note que

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \bar{a}(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \sup_{a(r) \leq s} r = \infty,$$

pois a é não decrescente, contínua à direita e $\lim_{t \rightarrow \infty} a(t) = \infty$.

(d) Se $s \geq 0$, então

$$\lim_{s \rightarrow t^+} \bar{a}(s) = \lim_{s \rightarrow t^+} \sup_{a(r) \leq s} r = \sup_{a(r) \leq t} r = \bar{a}(t),$$

pois a é não decrescente e contínua à direita.

Proposição 1.3.4. Seja $\Phi : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ uma N-função. Valem as seguintes propriedades:

(a) Φ é contínua, convexa e estritamente crescente;

(b) $\lim_{t \rightarrow 0^+} \Phi(t)/t = 0$ e $\lim_{t \rightarrow \infty} \Phi(t)/t = \infty$;

(c) Se $s > t > 0$, então $\Phi(s)/s > \Phi(t)/t$.

Demonstração. Ver prova na página 262 em [2]. □

Definição 1.3.5. Seja $\Phi : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ uma N-função dada por

$$\Phi(t) = \int_0^t a(\tau) d\tau,$$

onde a satisfaz as condições (a)-(d) da Definição 1.3.1. Tomando $\bar{a}(s) = \sup_{a(t) \leq s} t$, denotamos a função N-função complementar em relação a Φ por

$$\Psi(s) = \int_0^s \bar{a}(\sigma) d\sigma.$$

Em particular, quando isto ocorrer, dizemos que Φ e Ψ são N-funções complementares e, geometricamente, podemos representar como

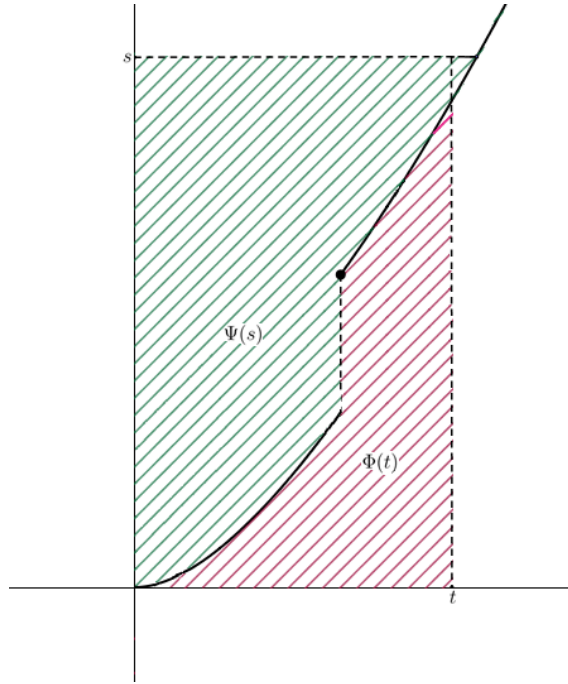


Figura 1.1: N-funções complementares

Exemplo 1.3.6. Seja a função $a : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $a(t) = t^2$. Uma vez que essa função satisfaz as condições (a)-(d) da Definição 1.3.1, temos

$$\Phi(t) = \int_0^t \tau^2 d\tau = \frac{t^3}{3}$$

uma N-função. Nestas condições, perceba que se tomarmos $\bar{a}(s) = \sup_{a(t) \leq s} t$, temos

$$a(t) \leq s \Rightarrow t \leq \sqrt{s} \Rightarrow \sup_{a(t) \leq s} t \leq \sqrt{s},$$

pois o supremo é a menor das cotas superiores. No entanto, tomando $t = \sqrt{s}$, temos $t^2 = s$, o que nos garante que $\bar{a}(s) = \sqrt{s}$. Portanto, a função

$$\Psi(s) = \int_0^s \sqrt{\sigma} d\sigma = \frac{2s^{3/2}}{3}$$

é N-função complementar de Φ .

Definição 1.3.7. Sejam Ω um domínio em $\mathbb{R}^N$ e Φ uma N-função. O conjunto

$$\mathcal{L}_\Phi(\Omega) = \left\{ u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \text{ mensurável; } \int_\Omega \Phi(|u(x)|) dx < \infty \right\}$$

é denominado classe de Orlicz da função Φ .

Definição 1.3.8. Uma N-função Φ satisfaz a condição Δ_2 se existe uma constante $k > 0$ tal que

$$\Phi(2t) \leq k\Phi(t),$$

para cada $t \geq 0$.

A definição acima nos proporciona uma condição interessante dada no próximo teorema:

Teorema 1.3.9. A classe de Orlicz $\mathcal{L}_\Phi(\Omega)$ é um espaço vetorial se, e só se, a N-função Φ satisfaz a condição Δ_2 .

Demonstração. Ver Lema 8.8, página 267 em [2]. □

Nestas condições, iremos generalizar os espaços $L^p(\Omega)$:

Definição 1.3.10. Sejam Φ e Ψ N-funções complementares. O espaço de Orlicz com respeito à Φ é denotado por

$$L_{(\Phi)}(\Omega) = \left\{ u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \text{ mensurável; } \int_\Omega u(x)v(x) dx < \infty, \forall v \in \mathcal{L}_\Psi(\Omega) \right\}.$$

Agora, seja $\|\cdot\|_{(\Phi)} : L_{(\Phi)}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\|u\|_{(\Phi)} = \sup \left\{ \left| \int_\Omega u(x)v(x) dx \right| ; \int_\Omega \Psi(|v(x)|) dx \leq 1 \right\},$$

para cada $u \in L_{(\Phi)}(\Omega)$. Denominaremos tal função como norma de $L_{(\Phi)}(\Omega)$. Além disso, é provado em [2] um resultado de caracterização dos espaços de Orlicz:

Proposição 1.3.11. Seja o conjunto

$$L_{\Phi}(\Omega) = \left\{ u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \text{ mensurável; } \exists \lambda > 0 \text{ com } \int_{\Omega} \Phi \left(\frac{|u(x)|}{\lambda} \right) dx < \infty \right\}.$$

Então, vale a igualdade

$$L_{\Phi}(\Omega) = L_{(\Phi)}(\Omega) = \langle \mathcal{L}_{\Phi}(\Omega) \rangle,$$

onde $\langle \mathcal{L}_{\Phi}(\Omega) \rangle$ indica o espaço vetorial gerado por $\mathcal{L}_{\Phi}(\Omega)$.

O Teorema 1.3.9 e a Proposição 1.3.11 nos levam ao seguinte resultado

Corolário 1.3.12. O espaço de Orlicz $L_{\Phi}(\Omega)$ é igual à classe de Orlicz $\mathcal{L}_{\Phi}(\Omega)$ se, e somente se, $\Phi \in \Delta_2$.

É importante ressaltar que a norma no espaço $L_{\Phi}(\Omega)$ será dada por

$$\|u\|_{\Phi} = \inf \left\{ \lambda > 0; \int_{\Omega} \Phi \left(\frac{|u(x)|}{\lambda} \right) dx \leq 1 \right\},$$

para todo $u \in L_{\Phi}(\Omega)$ (veja mais detalhes em [15]). Além disso, vale enfatizar que

Proposição 1.3.13. As normas $\|\cdot\|_{(\Phi)}$ e $\|\cdot\|_{\Phi}$ são equivalentes. Em particular,

$$\|u\|_{\Phi} \leq \|u\|_{(\Phi)} \leq 2\|u\|_{\Phi}.$$

Demonstração. Ver Lema 2.5, página 33 em [15]. □

Portanto, ao decorrer de nossos estudos, iremos trabalhar com o Espaço de Orlicz com a norma de Luxemburgo $\|\cdot\|_{\Phi}$.

1.4 O Caso Limite de um Teorema de Imersão de Sobolev

Nesta seção, iremos enunciar e provar dois lemas técnicos que são essenciais para a demonstração de uma imersão contínua entre certos espaços de Sobolev e Orlicz sob a N-função $\Phi(t) = e^{t^{\frac{p}{p-1}}} - 1$. A princípio, sabemos que muitas propriedades para espaços mais gerais dependem das condições analíticas ou geométricas do domínio que estão definidos. Vejamos algumas dessas condições.

Definição 1.4.1. Seja v um vetor não nulo de $\mathbb{R}^N$. Para cada $x \neq 0$, considere $\angle(x, v)$ o ângulo entre os vetores x e v . Para quaisquer $\rho > 0$ e $0 < \kappa \leq \pi$, o conjunto

$$\mathcal{C} = \{x \in \mathbb{R}^N; x = 0 \text{ ou } 0 < \|x\| \leq \rho, \angle(x, v) \leq \kappa/2\}$$

é chamado *cone finito* de altura ρ , direção v e ângulo κ , com vértice na origem. Em particular, o conjunto

$$\mathcal{C}_x = x + \mathcal{C} = \{x + y; y \in \mathcal{C}\}$$

é um cone finito com vértice em x .

Levando em consideração a definição anterior,

Definição 1.4.2. Dizemos que um domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ satisfaz a *propriedade do cone* se existe um cone finito $\mathcal{C}$ tal que cada $x \in \Omega$ é o vértice de um cone finito $\mathcal{C}_x$ contido em Ω e congruente a $\mathcal{C}$.

Agora, provaremos dois lemas essenciais para a demonstração do Teorema de Trudinger. O primeiro deles nos contemplará com uma estimativa local de uma função contínua em um domínio sob as condições do cone, enquanto o segundo garante uma desigualdade importante envolvendo a integral de uma certa função.

Lema 1.4.3. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio que satisfaz a condição de um cone $\mathcal{C}$, com dimensões ρ e κ . Então, existe uma constante $K = K(m, N)$ tal que para cada $u \in C^\infty(\Omega)$, $x \in \Omega$ e $r \in (0, \rho]$, tem-se

$$|u(x)| \leq K \left(\sum_{|\alpha| \leq m-1} r^{|\alpha|-N} \int_{\mathcal{C}_{x,r}} |D^\alpha u(y)| dy + \sum_{|\alpha|=m} \int_{\mathcal{C}_{x,r}} |D^\alpha u(y)| |x-y|^{m-N} dy \right),$$

onde $\mathcal{C}_{x,r} = \{y \in \mathcal{C}_x; \|x-y\| \leq r\}$ e $\mathcal{C}_x \subset \Omega$ é um cone congruente a $\mathcal{C}$, com vértice em x .

Demonstração. Primeiramente, usando a Fórmula de Taylor, com resto integral, temos

$$f(1) = \sum_{j=0}^{m-1} \frac{1}{j!} f^{(j)}(0) + \frac{1}{(m-1)!} \int_0^1 (1-t)^{m-1} f^{(m)}(t) dt$$

onde $f(t) = u(tx + (1-t)y)$, com $x \in \Omega$ e $y \in \mathcal{C}_{x,r}$. Tendo em vista que

$$f^{(j)}(t) = \sum_{|\alpha|=j} \frac{j!}{\alpha!} D^\alpha u(tx + (1-t)y) (x-y)^\alpha,$$

com $\alpha! = \alpha_1! \cdot \dots \cdot \alpha_N!$ e $(x-y)^\alpha = (x_1-y_1)^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot (x_N-y_N)^{\alpha_N}$, temos

$$|u(x)| \leq \sum_{|\alpha| \leq m-1} \frac{1}{\alpha!} |D^\alpha u(y)| |x-y|^{|\alpha|} + \sum_{|\alpha|=m} \frac{m}{\alpha!} |x-y|^m \int_0^1 (1-t)^{m-1} |D^\alpha u(tx + (1-t)y)| dt.$$

Dessa forma, integrando sobre $\mathcal{C}_{x,r}$, temos

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}_{x,r}} |u(x)| dy &\leq \sum_{|\alpha| \leq m-1} \frac{r^{|\alpha|}}{\alpha!} \int_{\mathcal{C}_{x,r}} |D^\alpha u(y)| dy \\ &\quad + \sum_{|\alpha|=m} \frac{m}{\alpha!} \int_{\mathcal{C}_{x,r}} |x-y|^m \int_0^1 (1-t)^{m-1} |D^\alpha u(tx + (1-t)y)| dt dy. \end{aligned}$$

Tomando $z = tx + (1-t)(y-x)$, com $0 \leq t \leq 1$, segue-se

$$z - x = tx + (1-t)y - x = (1-t)(-x) + (1-t)y = (1-t)(y-x).$$

Além disso, usando a matriz jacobiana, temos $dz = (1-t)^N dy$. Daí, pelo Teorema da Mudança de Variáveis

$$\begin{aligned} &\int_{\mathcal{C}_{x,r}} |x-y|^m \int_0^1 (1-t)^{m-1} |D^\alpha u(tx + (1-t)y)| dt dy \\ &= \int_0^1 \int_{\mathcal{C}_{x,r}} (1-t)^{m-1} |x-y|^m |D^\alpha u(tx + (1-t)y)| dy dt \\ &= \int_0^1 \int_{\mathcal{C}_{x,(1-t)r}} (1-t)^{m-1} \frac{|z-x|^m}{(1-t)^m} \frac{|D^\alpha u(z)|}{(1-t)^N} dz dt \\ &= \int_0^1 \int_{\mathcal{C}_{x,(1-t)r}} (1-t)^{-N-1} |z-x|^m |D^\alpha u(z)| dz dt \\ &= \int_{\mathcal{C}_{x,r}} \int_0^{1-|z-x|/r} (1-t)^{-N-1} |z-x|^m |D^\alpha u(z)| dt dz. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Agora, note que

$$\int_0^{1-|z-x|/r} (1-t)^{-N-1} dt = \frac{-r^N + |z-x|^N}{N|z-x|^N} \leq \frac{r^N}{N|z-x|^N}. \tag{1.2}$$

Sendo assim, por (1.1) e (1.2), temos

$$\int_{\mathcal{C}_{x,r}} |x-y|^m \int_0^1 (1-t)^{m-1} |D^\alpha u(tx + (1-t)y)| dt dy \leq \frac{r^N}{N} \int_{\mathcal{C}_{x,r}} |z-x|^{m-N} |D^\alpha u(z)| dz.$$

Dessa forma, supondo que $\mathcal{C}$ tem volume $c\rho^N$, então o volume de $\mathcal{C}_{x,r}$ é cr^N . Logo, para $t = 0$, segue

$$cr^N |u(x)| \leq \sum_{|\alpha| \leq m-1} \frac{r^{|\alpha|}}{\alpha!} \int_{\mathcal{C}_{x,r}} |D^\alpha u(y)| |x-y|^{|\alpha|} dy + \sum_{|\alpha|=m} \frac{m}{\alpha!} \frac{r^N}{N} \int_{\mathcal{C}_{x,r}} |D^\alpha u(y)| |x-y|^{m-N} dy.$$

Portanto, concluímos que

$$|u(x)| \leq K \left(\sum_{|\alpha| \leq m-1} r^{|\alpha|-N} \int_{\mathcal{C}_{x,r}} |D^\alpha u(y)| dy + \sum_{|\alpha|=m} \int_{\mathcal{C}_{x,r}} |D^\alpha u(y)| |x-y|^{m-N} dy \right),$$

$$\text{com } K = \max \left\{ \frac{1}{\alpha!c}, \frac{m}{\alpha!cN} \right\}.$$

□

Lema 1.4.4. Sejam $z \in \mathbb{R}^N$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um subconjunto tal que $|\Omega| < \infty$. Se $0 \leq t < N$, então

$$\int_{\Omega} |x-z|^{-t} dx \leq \frac{K}{N-t} |\Omega|^{1-t/N},$$

onde K é uma constante que depende apenas de N e t .

Demonstração. Inicialmente, considere $B_R(z)$ uma bola aberta de centro z e raio R tal que $|\Omega| = |B_R(z)|$. Note que,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |x-z|^{-t} dx &= \int_{\Omega \cap B_R(z)} |x-z|^{-t} dx + \int_{\Omega \cap (\mathbb{R}^n \setminus B_R(z))} |x-z|^{-t} dx \\ &\leq \int_{\Omega \cap B_R(z)} |x-z|^{-t} dx + \int_{\Omega \cap (\mathbb{R}^n \setminus B_R(z))} R^{-t} dx \\ &= \int_{\Omega \cap B_R(z)} |x-z|^{-t} dx + \int_{B_R(z) \cap (\mathbb{R}^n \setminus \Omega)} R^{-t} dx \\ &\leq \int_{B_R(z)} |x-z|^{-t} dx. \end{aligned}$$

Dessa forma, sejam $0 \leq r \leq R$ e $k = \frac{x-z}{r}$. É decorrente dos Teoremas das Cascas Esféricas e da Mudança de Variáveis que

$$\begin{aligned} \int_{B_r(z)} |x-z|^{-t} dx &= \int_0^R \int_{\partial B_r(z)} \frac{1}{|x-z|^t} dS_x dr \\ &= \int_0^R \int_{\partial B_1(0)} \frac{1}{|k|^t r^t} r^{N-1} dS_k dr \\ &= \int_0^R r^{N-1-t} \int_{\partial B_1(0)} \frac{1}{|k|^t} dS_k dr \\ &= \int_0^R N \omega_N r^{N-1-t} dr \\ &= N \omega_N \frac{R^{N-t}}{N-t}. \end{aligned}$$

Portanto, como vale

$$\omega_N^{t/N} |B_R(z)|^{1-t/N} = \omega_N^{t/N} (R^N \omega_N)^{1-t/N} = \omega_N R^{N-t},$$

já que $|B_R(z)| = R^N \omega_N$, onde ω_N é o volume da esfera unitária em $\mathbb{R}^N$, concluimos para $K = N\omega_N^{t/N}$ que

$$\int_{\Omega} |x - z|^{-t} dx \leq \frac{\omega_N^{t/N} N}{N - t} |B_R(z)|^{1-t/N} = \frac{K}{N - t} |\Omega|^{1-t/N}.$$

□

Agora, iremos enunciar e provar o Teorema de Trudinger que garante uma imersão entre os espaços de Sobolev e Orlicz, onde $p = N/2 > 1$ e $\Phi(t) = e^{t^{\frac{p}{p-1}}} - 1$.

Teorema 1.4.5. (Trudinger) Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado que satisfaz a condição de cone, $mp = N$, $p > 1$ e $\Phi(t) = e^{t^{\frac{p}{p-1}}} - 1$. Então, existe uma imersão contínua

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L_{\Phi}(\Omega).$$

Demonstração. Vamos mostrar dois casos:

1º caso: Suponha que $m = 1$. Iremos mostrar que $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L_{\Phi}(\Omega)$, ou seja, para todo $u \in W^{1,p}(\Omega)$, existe $C > 0$ tal que

$$\|u\|_{\Phi} \leq C \|u\|_{1,n}.$$

Nestas condições, seja $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Pelo Lema 1.4.3, vale a estimativa

$$\begin{aligned} |u(x)| &\leq K_1 \left(\|u\|_{L^1(\mathcal{C})} + \sum_{j=1}^N \int_{\mathcal{C}} |D^j u(x)| |x - y|^{1-N} dy \right) \\ &\leq K_1 \left(\|u\|_{L^1(\Omega)} + \sum_{j=1}^N \int_{\Omega} |D^j u(x)| |x - y|^{1-N} dy \right). \end{aligned}$$

Agora, sejam $v \in L^s(\Omega)$ e $\|u\|_{L^1(\Omega)} = \|u\|_1$. Considerando $s > 1$ e

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = 1,$$

podemos multiplicar a desigualdade anterior por $|v(x)|$ e integrar em Ω para obtermos

$$\int_{\Omega} |u(x)v(x)| dx \leq K_1 \left(\|u\|_1 \int_{\Omega} |v(x)| dx + \sum_{j=1}^N \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|D^j u(x)| |v(x)|}{|x - y|^{N-1}} dy dx \right). \quad (1.3)$$

Uma vez que

$$\int_{\Omega} |v(x)| dx = \int_{\Omega} |(\mathcal{X}_{\Omega} v)(x)| dx \leq \|v\|_{s'} \left(\int_{\Omega} \mathcal{X}_{\Omega}(x) dx \right)^{1/s} = \|v\|_{s'} |\Omega|^{1/s}, \quad (1.4)$$

considere também as seguintes igualdades

$$\frac{1}{s} = \frac{N-1}{N} = 1 - \frac{1}{N} \quad \text{e} \quad \frac{1}{s'} = \frac{1}{N}.$$

Daí, temos

$$|v(x)| = |v(x)|^{1/s} \cdot |v(x)|^{1/s'} \quad \text{e} \quad |x-y|^{N-1} = |x-y|^{N/s-1/s^2} |x-y|^{(N-1)/ss'}.$$

e, consequentemente, sucede-se pela desigualdade de Hölder e pelo Teorema de Fubini que

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|D^j u(x)| |v(x)|}{|x-y|^{N-1}} dy dx \\ & \leq \left(\int_{\Omega} \int_{\Omega} \left(\frac{|v(x)|^{1/s}}{|x-y|^{N/s-1/s^2}} \right)^s dy dx \right)^{1/s} \left(\int_{\Omega} \int_{\Omega} \left(\frac{|D^j u(y)| |v(x)|^{1/s'}}{|x-y|^{(N-1)/ss'}} \right)^{s'} dy dx \right)^{1/s'} \\ & = \left(\int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|v(x)|}{|x-y|^{N-1/s}} dy dx \right)^{1/s} \left(\int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|D^j u(y)|^{s'} |v(x)|}{|x-y|^{(N-1)/s}} dy dx \right)^{1/s'} \\ & = \left(\int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|v(x)|}{|x-y|^{N-1/s}} dy dx \right)^{1-1/N} \left(\int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|D^j u(y)|^N |v(x)|}{|x-y|^{(N-1)/s}} dy dx \right)^{1/N}. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Assim, por (1.3), (1.4) e (1.5) tem-se

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |u(x)v(x)| dx & \leq K_1 \|u\|_1 \|v\|_{s'} |\Omega|^{\frac{1}{s}} + \sum_{j=1}^N \left(\int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|v(x)|}{|x-y|^{N-1/s}} dy dx \right)^{\frac{N-1}{N}} \\ & \quad \times \left(\int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|D^j u(y)|^N |v(x)|}{|x-y|^{(N-1)/s}} dy dx \right)^{\frac{1}{N}}. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Afirmção 1: Vale a desigualdade

$$\int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|v(x)|}{|x-y|^{N-(1/s)}} dy dx \leq s K_2 \cdot |\Omega|^{\frac{1}{sN} + \frac{1}{s}} \|v\|_{s'},$$

para algum $K_2 > 0$. De fato, pelo Lema 1.4.4, temos

$$\int_{\Omega} \frac{dy}{|x-y|^{N-(1/s)}} \leq \frac{K_2}{N - [N - (1/s)]} \cdot |\Omega|^{1 - [N - (1/s)]/N} = s K_2 \cdot |\Omega|^{\frac{1}{sN}}$$

já que $N - (1/s) < N$. Desta forma, multiplicando por $|v(x)|$ e integrando em Ω com relação a x em ambos os membros, temos

$$\int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|v(x)|}{|x-y|^{N-(1/s)}} dy dx \leq \int_{\Omega} s K_2 \cdot |\Omega|^{\frac{1}{sN}} |v(x)| dx = s K_2 \cdot |\Omega|^{\frac{1}{sN}} \int_{\Omega} |v(x)| dx.$$

Por fim, como

$$\int_{\Omega} |v(x)| dx \leq \left(\int_{\Omega} |v(x)|^{s'} dx \right)^{1/s'} \cdot \left(\int_{\Omega} [\mathcal{X}_{\Omega}(x)]^s dx \right)^{1/s} = \|v\|_{s'} \cdot |\Omega|^{\frac{1}{s}},$$

constatamos a estimativa proposta.

Afirmção 2: Vale a estimativa

$$\int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|D^j u(y)|^N |v(x)|}{|x - y|^{(N-1)/s}} dy dx \leq K_3 \|v\|_{s'} |\Omega|^{\frac{1}{sN}} \|D^j u\|_N^N,$$

para alguma constante $K_3 > 0$. De fato, note que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|D^j u(y)|^N |v(x)|}{|x - y|^{(N-1)/s}} dy dx &= \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|D^j u(y)|^N |v(x)|}{|x - y|^{(N-1)/s}} dx dy \\ &= \int_{\Omega} |D^j u(y)|^N \left(\int_{\Omega} \frac{|v(x)|}{|x - y|^{(N-1)/s}} dx \right) dy. \end{aligned}$$

Perceba que pelo Lema 1.4.4 e pela desigualdade de Hölder, temos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{|v(x)|}{|x - y|^{(N-1)/s}} dx &\leq \left(\int_{\Omega} |v(x)|^{s'} dx \right)^{1/s'} \cdot \left(\int_{\Omega} \frac{1}{|x - y|^{N-1}} dx \right)^{1/s} \\ &\leq \|v\|_{s'} \cdot \left(\frac{K_2}{N - (N-1)} |\Omega|^{1-(N-1)/N} \right)^{1/s} \\ &\leq K_3 \cdot \|v\|_{s'} \cdot |\Omega|^{1/Ns}. \end{aligned}$$

Logo, segue que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|D^j u(y)|^N |v(x)|}{|x - y|^{(N-1)/s}} dy dx &\leq \int_{\Omega} |D^j u(y)|^N (K_3 \cdot \|v\|_{s'} \cdot |\Omega|^{1/Ns}) dy \\ &= K_3 \cdot \|v\|_{s'} \cdot |\Omega|^{\frac{1}{sN}} \|D^j u\|_N^N. \end{aligned}$$

Nestas condições, temos pelas afirmações 1 e 2 e por (1.6) que

$$\int_{\Omega} |u(x)v(x)| dx \leq K_1 \|u\|_1 \|v\|_{s'} |\Omega|^{\frac{1}{s}} + K_4 s^{\frac{N-1}{N}} \|v\|_{s'} |\Omega|^{\frac{1}{s}} \sum_{j=1}^N \|D^j u\|_N. \quad (1.7)$$

Afirmção 3: Agora, iremos mostrar que

$$\|u\|_s \leq K_5 s^{\frac{N-1}{N}} \|u\|_{1,N} |\Omega|^{\frac{1}{s}}.$$

De fato, pelo Teorema 1.2.7 temos a imersão contínua $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, onde q é conjugado de p . Além disso, sabemos que $L^q(\Omega) \hookrightarrow L^1(\Omega)$, pela desigualdade de

Hölder. Desta maneira, temos

$$\|u\|_1 \leq C_1 \|u\|_{1,N}$$

para algum $C_1 > 0$. Além disso, pelo Lema A.4.3, tem-se

$$\|u\|_s = \sup_{\substack{v \in L^{s'}(\Omega) \\ \|v\|_{s'} \leq 1}} \int_{\Omega} |u(x)v(x)| dx,$$

já que s' é conjugado de s . Logo, concluímos a afirmação por (1.7) pois $s^{N-1/N} > 1$.

Agora, seja $s = Nk/(N-1)$. Pela afirmação 3, segue-se que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |u(x)|^s dx &\leq K_5^s s^{\frac{s(N-1)}{N}} \|u\|_{1,N}^s |\Omega| \\ &= |\Omega| \left(\frac{Nk}{N-1} \right)^{\frac{N-1}{N} \cdot \frac{Nk}{N-1}} \cdot (K_5 \|u\|_{1,N})^{\frac{Nk}{N-1}} \\ &= |\Omega| \left(\frac{Nk}{N-1} \right)^k \cdot (K_5 \|u\|_{1,N})^{\frac{Nk}{N-1}} \end{aligned}$$

Já que vale a igualdade

$$\left(\frac{Nk}{N-1} \right)^k = \left(\frac{k}{e^{N/(N-1)}} \right)^k \left[\left(\frac{N}{N-1} \right)^{\frac{N-1}{N}} \cdot e \right]^{\frac{Nk}{N-1}},$$

concluímos que

$$\int_{\Omega} |u(x)|^{\frac{Nk}{N-1}} dx \leq |\Omega| \left(\frac{k}{e^{N/(N-1)}} \right)^k \left[K_5 \|u\|_{1,N} \cdot \left(\frac{N}{N-1} \right)^{\frac{N-1}{N}} \cdot e \right]^{\frac{Nk}{N-1}}.$$

Afirmação 4: A série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{1}{k!} \left(\frac{k}{e^{N/(N-1)}} \right)^k \right]$$

é convergente. De fato, perceba que a série tem valores positivos para todo $k \in \mathbb{N}$.

Além disso, seja

$$A = \left[\frac{1}{(k+1)!} \left(\frac{k+1}{e^{N/(N-1)}} \right)^{k+1} \right] \cdot \left[\frac{1}{k!} \left(\frac{k}{e^{N/(N-1)}} \right)^k \right]^{-1}.$$

Daí, temos

$$A = \frac{k!}{(k+1)!} \cdot \frac{(k+1)^{k+1}}{k^k} \cdot \frac{(e^{N/(N-1)})^{k+1}}{(e^{N/(N-1)})^k} = \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k \cdot \frac{1}{e^{N/(N-1)}} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \frac{e}{e^{N/(N-1)}} < 1.$$

Logo, concluímos que a série converge e seu limite será denotado como sendo a constante real K_6 .

Agora, considere $K_7 = \max\{1, K_6|\Omega|\}$ e

$$K_8 = eK_5K_7 \cdot \left(\frac{N}{N-1}\right)^{\frac{N-1}{N}} \|u\|_{1,N} = C\|u\|_{1,N}.$$

Desta forma,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left(\frac{|u(x)|}{K_8}\right)^{\frac{Nk}{N-1}} dx &\leq \frac{|\Omega| \left(\frac{k}{e^{N/(N-1)}}\right)^k \left[eK_5 \left(\frac{N}{N-1}\right)^{\frac{N-1}{N}} \|u\|_{1,N}\right]^{\frac{Nk}{N-1}}}{\left[eK_5K_7 \left(\frac{N}{N-1}\right)^{\frac{N-1}{N}} \|u\|_{1,N}\right]^{\frac{Nk}{N-1}}} \\ &= \frac{|\Omega|}{K_7^{Nk/(N-1)}} \cdot \left(\frac{k}{e^{N/(N-1)}}\right)^k \\ &< \frac{|\Omega|}{K_7} \cdot \left(\frac{k}{e^{N/(N-1)}}\right)^k, \end{aligned}$$

pois $K_7 \geq 1$ e $Nk/(N-1) > 1$. Pela série de MacLaurin, temos

$$\Phi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{Nk/(N-1)}}{k!}$$

e, consequentemente

$$\int_{\Omega} \Phi\left(\frac{|u(x)|}{K_8}\right) dx = \int_{\Omega} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{|u(x)|}{K_8}\right)^{\frac{Nk}{N-1}} (k!)^{-1} dx.$$

Daí, como a função no interior do somatório é mensurável e não negativa para cada $k \in \mathbb{N}$, temos pelo Teorema A.3.3 que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{|u(x)|}{K_8}\right)^{\frac{Nk}{N-1}} (k!)^{-1} dx &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \int_{\Omega} \left(\frac{|u(x)|}{K_8}\right)^{\frac{Nk}{N-1}} dx < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{|\Omega|}{K_7} \cdot \left(\frac{k}{e^{N/(N-1)}}\right)^k \\ &= \frac{|\Omega|}{K_7} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{k}{e^{N/(N-1)}}\right)^k = \frac{|\Omega|}{K_7} \cdot K_6 \leq 1. \end{aligned}$$

Portanto, pelo Exemplo 1.3.2, temos Φ uma N-função e segue da norma de Luxemburgo que

$$\|u\|_{\Phi} \leq K_8 = C \|u\|_{1,N},$$

para todo $u \in L_{\Phi}(\Omega)$, o que prova o primeiro caso.

2° caso: Suponha que $m > 1$ e $mp = N$. Pelo Teorema 1.2.7, temos $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{1,p}(\Omega)$ e, pelo caso anterior, advém $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L_{\Phi}(\Omega)$. Portanto, concluímos que

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L_{\Phi}(\Omega).$$

□

Capítulo 2

Generalizações dos Espaços de Lebesgue

Este capítulo tem como objetivo apresentar o conceito das distribuições, dos rearranjos e das funções maximais que são muito importantes para desenvolver os espaços de Zygmund e Lorentz. Depois, trabalharemos a definição destes espaços e suas principais propriedades.

2.1 Distribuições, Rearranjos e Funções Maximais

Inicialmente, seja $\phi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função mensurável. A aplicação $\mu_\phi : [0, +\infty) \longrightarrow [0, +\infty]$ dada por

$$\mu_\phi(t) = |\{x \in \Omega; |\phi(x)| > t\}|,$$

é denominada *distribuição* de ϕ , onde $|\cdot|$ denota a medida de Lebesgue. Também é importante salientar que neste caso, mesmo possuindo a mesma simbologia, a expressão $|\phi(x)|$ representa o módulo do número real $\phi(x)$.

Exemplo 2.1.1. Seja a função característica $\mathcal{X}_{[a,b]} : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\mathcal{X}_{[a,b]}(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in [a, b] \\ 0, & \text{se } x \notin [a, b]. \end{cases}$$

A função distribuição em relação a $\mathcal{X}_{[a,b]}$ é dada por

$$\mu_{\mathcal{X}_{[a,b]}}(t) = \begin{cases} b - a, & \text{se } t \in [0, 1) \\ 0, & \text{se } t \notin [0, 1), \end{cases}$$

para todo $t \in [0, +\infty)$, ou seja, $\mu_{\mathcal{X}_{[a,b]}} = |[a, b]| \cdot \mathcal{X}_{[0,1]}$.

Agora, definiremos uma função e exibiremos uma aplicação que será importante para nossos propósitos a seguir:

Definição 2.1.2. A função $\phi^* : [0, |\Omega|] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\phi^*(s) = |\{t \in [0, +\infty); \mu_\phi(t) > s\}|$$

é chamada *rearranjo* de ϕ em relação a μ_ϕ .

Observação: É comum escrever o rearranjo da forma

$$\phi^*(s) = \sup\{t > 0; \mu_\phi(t) > s\}, \quad \forall s \in [0, |\Omega|]. \quad (2.1)$$

De fato, tomando $r = \sup\{t > 0; \mu_\phi(t) > s\}$ e sabendo que a distribuição μ_ϕ é decrescente, temos $s < \mu_\phi(r) \leq \mu_\phi(t)$, para todo $0 \leq t < r$. Logo,

$$\phi^*(s) = |\{t \in [0, +\infty); \mu_\phi(t) > s\}| = r = \sup\{t > 0; \mu_\phi(t) > s\},$$

o que garante (2.1).

Exemplo 2.1.3. Seja $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ uma função simples dada por

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{E_i}(x),$$

onde $a_1 > a_2 > \dots > a_n > 0$ e E_i são subconjuntos de Ω mensuráveis e disjuntos. Além disso, considere

$$F_k = \bigcup_{i=1}^k E_i \quad \text{e} \quad |F_k| = |E_1| + \dots + |E_k|.$$

Note que $E_k = \{x \in \Omega; \varphi(x) = a_k\}$, onde $k \in \{1, \dots, n\}$. É fácil ver que

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^n (a_i - a_{i+1}) \chi_{F_i}(x),$$

com $a_{n+1} = 0$, é uma outra forma de representar a mesma função. Agora, iremos exibir a forma da distribuição

$$\mu_\varphi(t) = \left| \left\{ x \in \Omega; \left| \sum_{i=1}^n a_i \chi_{E_i} \right| > t \right\} \right|$$

através de uma construção. Note que se $t \in [a_2, a_1)$, temos

$$\mu_\varphi(t) = |E_1|.$$

Da mesma forma, se tivermos $t \in [a_3, a_2)$, adquirimos

$$\mu_\varphi(t) = |E_1 \cup E_2| = |E_1| + |E_2|.$$

Prosseguindo de maneira análoga, para $t \in [a_{j+1}, a_j)$, segue-se

$$\mu_\varphi(t) = |E_1 \cup \dots \cup E_j| = |E_1| + \dots + |E_j|,$$

onde $j \in \{1, \dots, n\}$. Em símbolos, temos geralmente que

$$\mu_\varphi(t) = \sum_{i=1}^j |E_i| \mathcal{X}_{[a_{i+1}, a_i)}(t),$$

para cada $t \in [a_{j+1}, a_j)$. Para finalizar, pela definição de rearranjo, temos

$$\varphi^*(s) = \sup\{t \geq 0; \mu_\varphi(t) > s\} = a_k, \quad \forall s \in [|F_{k-1}|, |F_k|).$$

Nestas condições, se $s \in [0, |F_1|)$, então

$$\varphi^*(s) = (a_1 - a_2) \mathcal{X}_{[0, |F_1|)} + (a_2 - a_3) \mathcal{X}_{[0, |F_2|)} + \dots + (a_n - a_{n+1}) \mathcal{X}_{[0, |F_n|)} = a_1,$$

pois $[0, |F_1|) \subset \dots \subset [0, |F_n|)$. Da mesma maneira, tomando $s \in [0, |F_2|) \setminus [0, |F_1|)$, segue-se

$$\varphi^*(s) = (a_1 - a_2) \mathcal{X}_{[0, |F_1|)} + (a_2 - a_3) \mathcal{X}_{[0, |F_2|)} + \dots + (a_n - a_{n+1}) \mathcal{X}_{[0, |F_n|)} = a_2,$$

já que $(a_1 - a_2) \mathcal{X}_{[0, |F_1|)} = 0$ e $[0, |F_2|) \subset \dots \subset [0, |F_n|)$. Portanto, prosseguindo de maneira análoga, chegamos a conclusão que

$$\varphi^*(s) = \sum_{i=1}^n (a_{i+1} - a_i) \mathcal{X}_{[0, |F_i|)}(s).$$

Vejamos alguns atributos que tal função possui:

Proposição 2.1.4. Sejam $u^*, v^* : [0, |\Omega|] \longrightarrow \mathbb{R}$ rearranjos decrescentes de funções mensuráveis $u, v : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Valem as seguintes propriedades:

- (a) u^* é não negativa e não crescente;

- (b) u^* é contínua à direita em $[0, +\infty)$;
- (c) $(\alpha u)^*(t) = |\alpha|u^*(t)$;
- (d) $(u + v)^*(t + s) \leq u^*(t) + v^*(s)$;
- (e) Se $|u(x)| \leq |v(x)|$ q.t.p., então $u^*(t) \leq v^*(t)$;
- (f) Se $|f_n| \uparrow |f|$ q.t.p. em Ω , então $f_n^* \uparrow f^*$,

para todo $s, t \in [0, |\Omega|]$.

Demonstração. Provaremos as propriedades:

- (a) Primeiramente, note que u^* é não negativa, pois para todo $s \in [0, |\Omega|]$ temos

$$u^*(s) = \sup\{t > 0; \mu_\phi(t) > s\} \geq t \geq 0.$$

Além disso, é fácil ver que u^* é não crescente, já que tomando $s_1, s_2 \in [0, |\Omega|]$ tal que $s_1 < s_2$, temos

$$\{t > 0; \mu_u(t) > s_2\} \subset \{t > 0; \mu_u(t) > s_1\}.$$

Desse modo, segue

$$|\{t > 0; \mu_u(t) > s_2\}| \leq |\{t > 0; \mu_u(t) > s_1\}| \Rightarrow u^*(s_2) \leq u^*(s_1),$$

o que garante a prova do item.

- (b) De fato, fixe $s \geq 0$ e considere os conjuntos

$$A = \{t \in [0, +\infty); \mu_u(t) > s\} \text{ e } A_n = \{t \in [0, +\infty); \mu_u(t) > s + 1/n\}.$$

Note que são satisfeitas as condições:

$$A_n \subset A_{n+1} \text{ e } A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n,$$

ou seja, $A_n \uparrow A$. Pelo item (a) da Proposição A.2.4, temos

$$\lim u^*(s + 1/n) = \lim |A_n| = |A| = u^*(s),$$

resolvendo o problema.

(c) É fácil ver que, para todo $s \in [0, |\Omega|]$, temos

$$\mu_{\alpha u}(s) = |\{x \in \Omega; |\alpha u(x)| \geq s\}| = |\{x \in \Omega; |u(x)| \geq s/|\alpha|\}| = \mu_u(s/|\alpha|).$$

Logo, sucede-se

$$\{s > 0; \mu_{\alpha u}(s) > t\} = \left\{ \frac{s|\alpha|}{|\alpha|} > 0; \mu_u\left(\frac{s}{|\alpha|}\right) > t \right\}.$$

Daí, para todo $t \in [0, |\Omega|]$, segue-se através de algumas manipulações que

$$\begin{aligned} \{s > 0; \mu_{\alpha u}(s) > t\} &= |\alpha| \left\{ \frac{s}{|\alpha|} > 0; \mu_u\left(\frac{s}{|\alpha|}\right) > t \right\} \\ \Rightarrow \sup\{s > 0; \mu_{\alpha u}(s) > t\} &= |\alpha| \sup\left\{ \frac{s}{|\alpha|} > 0; \mu_u\left(\frac{s}{|\alpha|}\right) > t \right\} \\ \Rightarrow (\alpha u)^*(t) &= |\alpha| u^*(t). \end{aligned}$$

(d) Inicialmente, note que vale a inclusão

$$\{x \in \Omega; |(u+v)(x)| > a+b\} \subset \{x \in \Omega; |u(x)| > a\} \cup \{x \in \Omega; |v(x)| > b\}.$$

Dessa forma, temos pelo item (a) da Proposição A.2.2 que

$$\begin{aligned} \mu_{u+v}(a+b) &= |\{x \in \Omega; |(u+v)(x)| > a+b\}| \\ &\leq |\{x \in \Omega; |u(x)| > a\}| + |\{x \in \Omega; |v(x)| > b\}| \\ &= \mu_u(a) + \mu_v(b). \end{aligned}$$

Agora, sejam os conjuntos

$$A = \{k \in [0, +\infty); \mu_u(k) > t\} \text{ e } B = \{k \in [0, +\infty); \mu_v(k) > s\}.$$

Assim, por um argumento completamente análogo ao da primeira parte deste item, temos

$$\{k \in [0, +\infty); \mu_{u+v}(k) > t+s\} \subset A \cup B.$$

Portanto, ainda pelo item (a) da Proposição A.2.2, concluimos que

$$\begin{aligned} (u+v)^*(t+s) &= |\{k \in [0, +\infty); \mu_{u+v}(k) > t+s\}| \\ &\leq |\{k \in [0, +\infty); \mu_u(k) > t\}| + |\{k \in [0, +\infty); \mu_v(k) > s\}| \\ &= u^*(t) + v^*(s), \end{aligned}$$

para todo $s, t \in [0, +\infty)$.

(e) Se $|u(x)| \leq |v(x)|$ q.t.p., então existe um conjunto $A \subset \Omega$ tal que

$$|A^c| = 0 \text{ e } |u(x)| \leq |v(x)|, \quad \forall x \in A.$$

Nesta perspectiva, perceba que

$$\begin{aligned} \mu_u(t) &= |\{x \in \Omega; |u(x)| \geq t\}| \\ &= |\{x \in A; |u(x)| \geq t\}| + |\{x \in A^c; |u(x)| \geq t\}| \\ &\leq |\{x \in A; |v(x)| \geq t\}| \\ &\leq \mu_v(t), \end{aligned}$$

para cada $t \in [0, +\infty)$, pois $\{x \in A^c; |u(x)| \geq t\}$ é subconjunto de um conjunto com medida nula e

$$\{x \in A; |u(x)| \geq t\} \subset \{x \in A; |v(x)| \geq t\}.$$

Dai, temos

$$\{s \in [0, +\infty); \mu_u(s) > t\} \subset \{s \in [0, +\infty); \mu_v(s) > t\}.$$

Portanto, pelo item (a) da Proposição A.2.2, concluímos que

$$u^*(t) = |\{s \in [0, +\infty); \mu_u(s) > t\}| \leq |\{s \in [0, +\infty); \mu_v(s) > t\}| = v^*(t),$$

para todo $t \in [0, +\infty)$.

(f) Para mostrar que $f_n^* \uparrow f^*$ em $[0, |\Omega|]$, basta verificar que se $|f_n| \uparrow |f|$ q.t.p. em Ω , então $\mu_{f_n} \uparrow \mu_f$. De fato, fixando $\lambda \geq 0$, sejam os conjuntos

$$A = \{x \in \Omega; |f(x)| > \lambda\} \text{ e } A_n = \{x \in \Omega; |f_n(x)| > \lambda\}.$$

Note que temos $A \subset \bigcup_{m=1}^{\infty} \left(\bigcap_{n>m} A_n \right)$. Além disso, perceba que para cada $m \in \mathbb{N}$, segue

$$\left| \bigcap_{n>m} A_n \right| \leq \inf_{n>m} |A_n| \leq \sup_m \inf_{n>m} |A_n| = \liminf |A_n|.$$

Portanto,

$$\mu_f(\lambda) = |A| \leq \left| \bigcup_{m=1}^{\infty} \left(\bigcap_{n>m} A_n \right) \right| = \lim_{m \rightarrow \infty} \left| \bigcap_{n>m} A_n \right| \leq \liminf |A_n| = \liminf \mu_{f_n}(\lambda).$$

Por fim, iremos mostrar que $\liminf \mu_{f_n}(\lambda) \leq \mu_f(\lambda)$. Note que se $|f_n| \leq |f|$ q.t.p. em Ω , então $\mu_{f_n}(\lambda) \leq \mu_f(\lambda)$ para qualquer $\lambda \geq 0$. Assim, segue-se que

$$\liminf \mu_{f_n}(\lambda) = \sup \inf \mu_{f_n}(\lambda) \leq \mu_f(\lambda),$$

para todo $\lambda \geq 0$. Portanto, segue a afirmação. $\square$

Agora, definiremos o conceito de equimensurabilidade. Além disso, faremos uma aplicação que será importante para a demonstração de alguns resultados a seguir.

Definição 2.1.5. Dizemos que duas funções com valores reais são *equimensuráveis* quando elas possuem a mesma função distribuição.

Exemplo 2.1.6. As funções $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ e $u^* : [0, |\Omega|] \longrightarrow \mathbb{R}$ são equimensuráveis. De fato, seja $t \geq 0$ um número real arbitrário. Se $u^*(s) > t$, então

$$\sup\{k > 0; \mu_u(k) > s\} \geq t$$

e, conseqüentemente, segue-se $\mu_u(t) > s$. Dessa maneira, temos

$$\{s > 0; u^*(s) > t\} \subset \{s > 0; \mu_u(t) \geq s\}.$$

Logo, concluímos que

$$\mu_{u^*}(t) = |\{s > 0; u^*(s) > t\}| \leq |\{s > 0; \mu_u(t) \geq s\}| = \mu_u(t).$$

Por outro lado, seja

$$\mu_{u^*}(t) = |\{k > 0; u^*(k) \geq t\}| = s.$$

Uma vez que u^* é contínua à direita e não crescente pelos itens (a) e (b) da Proposição 2.1.4, temos $u^*(s) = t$. Logo, pela definição de rearranjo decrescente, sucede-se

$$\mu_u(t) = |\{x \in \Omega; |u(x)| > t\}| \leq s.$$

Portanto, segue que $\mu_u(t) \leq \mu_{u^*}(t)$ e, conseqüentemente, segue a igualdade.

Sabendo disso, conseguimos então provar a seguinte proposição:

Proposição 2.1.7. Seja $A : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função mensurável e não negativa. Se $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ é mensurável, então

$$\int_{\Omega} A(|u(x)|) dx = \int_0^{|\Omega|} A(u^*(s)) ds.$$

Demonstração. Inicialmente, provaremos o resultado para A sendo uma função simples. Suponha que $E = [t, \infty]$, onde t é um número real arbitrário, e $A = \chi_E$. Note que,

$$\int_{\Omega} A(|u(x)|)dx = \int_{\Omega} \chi_B(x)dx,$$

onde $B = \{x \in \Omega; |u(x)| \geq t\}$. Daí, como

$$\int_{\Omega} \chi_B(x)dx = |\{x \in \Omega; |u(x)| \geq t\}|,$$

além de u e u^* serem equimensuráveis, temos

$$\int_{\Omega} A(|u(x)|)dx = \int_0^{|\Omega|} A(u^*(s))ds,$$

pois

$$\int_0^{|\Omega|} A(u^*(s))ds = |\{s \in [0, |\Omega|]; u^*(s) \geq t\}|.$$

Agora, se E é um intervalo aberto, o resultado também é provado de forma análoga. Dessa maneira, pela definição da σ -álgebra de Borel, vale para qualquer boreliano E em Ω . Por fim, suponha que A é uma função mensurável e não negativa. Pelo Lema A.1.6, existe uma sequência (A_n) de funções mensuráveis, não negativas, simples e crescentes tal que $\lim A_n(x) = A(x)$. Portanto, para cada $n \in \mathbb{N}$, tem-se

$$\int_{\Omega} A_n(|u(x)|)dx = \int_0^{|\Omega|} A_n(u^*(s))ds$$

e, pelo Teorema A.3.3, concluímos o resultado. $\square$

Teorema 2.1.8. (Hardy-Littlewood) Seja (Ω, Σ, m) espaço de medida. Se $u, v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ são funções mensuráveis, então

$$\int_{\Omega} |u(x)v(x)|dx \leq \int_0^{|\Omega|} u^*(s)v^*(s)ds.$$

Demonstração. Inicialmente, provaremos que o resultado é válido para funções simples positivas. Seja φ tal função, dada por

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^n (a_i - a_{i+1}) \chi_{F_i}(x),$$

assim como no Exemplo 2.1.3. Agora, seja f uma função mensurável qualquer.

Afirmção: Vale a desigualdade

$$(f\chi_M)^*(s) \leq f^*\chi_{[0,|M|)}(s),$$

para qualquer $M \subset \Omega$ mensurável. De fato, note que

$$\mu_{f\chi_M}(t) = |\{x \in \Omega; |f\chi_M| > t\}| \leq |\{x \in \Omega; |f| > t\}| = \mu_f(t).$$

Nestas condições, analisaremos dois casos:

1° caso: Se $s < |M|$, então

$$(f\chi_M)^*(s) = |\{t; \mu_{f\chi_M}(t) \geq s\}| \leq |\{t; \mu_f(t) \geq s\}| = (f^*\chi_{[0,|M|)})(s).$$

2° caso: Seja $s \geq |M|$. Primeiramente, note que

$$\mu_{f\chi_M}(t) = |\{x \in \Omega; |(f\chi_M)(x)| > t\}| \leq |M|.$$

Desse modo, temos

$$(f\chi_M)^*(s) = |\{t; \mu_{f\chi_M}(t) \geq s\}| = 0,$$

pois $\{t; \mu_{f\chi_M}(t) \geq s\} = \emptyset$. Além disso, temos também

$$(f^*\chi_{[0,|M|)})(s) = 0,$$

quando $s \geq |M|$. Logo, $(f\chi_M)^*(s) = (f^*\chi_{[0,|M|)})(s)$.

Usando a Afirmção 1 e a Proposição 2.1.7, concluímos que

$$\int_M |f| d\mu = \int_0^{|\Omega|} (f\chi_M)^*(t) dt \leq \int_0^{|\Omega|} (f^*\chi_{[0,|M|)})(t) dt = \int_0^{|M|} f^*(t) dt, \quad (2.2)$$

para todo $M \subset \Omega$ mensurável. Dessa maneira, como a desigualdade em (2.2) vale para os conjuntos $F_1, \dots, F_n$, obtemos:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\varphi(x)f(x)| dx &= \sum_{i=1}^n (a_i - a_{i+1}) \int_{F_i} |f(x)| dx \leq \sum_{i=1}^n (a_i - a_{i+1}) \int_0^{|F_i|} f^*(s) ds \\ &= \int_0^{|\Omega|} \sum_{i=1}^n (a_i - a_{i+1}) \chi_{[0,|F_i|)}(s) f^*(s) ds = \int_0^{|\Omega|} \varphi^*(s) f^*(s) ds. \end{aligned}$$

Para finalizar, provaremos o resultado para funções mensuráveis quaisquer. Seja $|u| \in M^+(\Omega, \Sigma)$. Pelo Lema A.1.6 existe uma sequência de funções mensuráveis (u_n) simples

tais que $0 \leq u_n \leq u_{n+1}$, com $\lim u_n(x) = |u(x)|$, temos pelo Teorema A.3.3 que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |u(x)v(x)|dx &= \lim \int_{\Omega} u_n(x)|f(x)|dx \\ &\leq \lim \int_0^{|\Omega|} u_n^*(t)f^*(t)dt \\ &= \int_0^{|\Omega|} \lim u_n^*(t)f^*(t)dt \\ &= \int_0^{|\Omega|} u^*(t)f^*(t)dt, \end{aligned}$$

o que conclui a demonstração do resultado. $\square$

Agora, considere $A = [0, 1]$ e $B = [1/2, 2]$ intervalos fechados em $\mathbb{R}$. Tomando funções características $\mathcal{X}_A, \mathcal{X}_B : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, note que pelo Exemplo 2.1.1, temos

$$\mu_{\mathcal{X}_A} = |A| \cdot \mathcal{X}_{[0,1)} \text{ e } \mu_{\mathcal{X}_B} = |B| \cdot \mathcal{X}_{[0,1)}$$

e consequentemente

$$\mathcal{X}_A^*(t) + \mathcal{X}_B^*(t) = 0,$$

para todo $t > 3/2$, pois para estas hipóteses temos

$$\{s > 0; \mu_{\mathcal{X}_A}(s) > t\} = \{s > 0; \mu_{\mathcal{X}_B}(s) > t\} = \emptyset.$$

No entanto, temos de maneira similar que

$$(\mathcal{X}_A + \mathcal{X}_B)^*(t) = 1,$$

para todo $t \in (3/2, 2)$. Esta simples aplicação nos motiva a buscar outras formas de buscar a condição

$$(u + v)^*(t) \leq u^*(t) + v^*(t),$$

que não ocorre em geral para rearranjos u^* e v^* , onde $t \in [0, |\Omega|]$. Para isto, iremos propor uma nova definição:

Definição 2.1.9. Seja $\phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ uma função mensurável. A aplicação $\phi^{**} : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\phi^{**}(t) = \frac{1}{t} \int_0^t \phi^*(s)ds,$$

é chamada *função maximal* de ϕ^* .

Por estar intimamente relacionada com os rearranjos decrescentes, muitos resultados são prolongados para as funções maximais. Averiguemos o resultado a seguir.

Proposição 2.1.10. Sejam $u^{**}, v^{**} : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ funções maximais. Valem as seguintes propriedades:

- (a) u^{**} é decrescente e contínua;
- (b) $(\alpha u)^{**}(t) = |\alpha|(u)^{**}(t)$, para todo $t \in (0, +\infty)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$;
- (c) $u^*(t) \leq u^{**}(t)$, para todo $t \in (0, |\Omega|)$;
- (d) Se $|u(x)| \leq |v(x)|$ q.t.p., então $u^{**}(t) \leq v^{**}(t)$, para todo $t \in (0, +\infty)$;
- (e) $u^{**} \equiv 0$ se, somente se, $u = 0$ q.t.p.;
- (f) Se $|f_n| \uparrow |f|$ q.t.p. em Ω , então $f_n^{**} \uparrow f^{**}$.

Demonstração. Vejamos,

- (a) Note que u^{**} é contínua pela continuidade da integral. Por fim, note que tomando $t_1, t_2 \in (0, +\infty)$ tal que $t_1 < t_2$, temos

$$\begin{aligned}
 u^{**}(t_2) &= \frac{1}{t_2} \left(\int_0^{t_1} u^*(s) ds + \int_{t_1}^{t_2} u^*(s) ds \right) \\
 &\leq \frac{1}{t_2} \int_0^{t_1} u^*(s) ds + \frac{1}{t_2} u^*(t_1)(t_2 - t_1) \\
 &= \frac{1}{t_2} \int_0^{t_1} u^*(s) ds + \left(\frac{1}{t_1} - \frac{1}{t_2} \right) u^*(t_1)t_1 \\
 &\leq \frac{1}{t_2} \int_0^{t_1} u^*(s) ds + \left(\frac{1}{t_1} - \frac{1}{t_2} \right) \int_0^{t_1} u^*(s) ds \\
 &= \frac{1}{t_1} \int_0^{t_1} u^*(s) ds \\
 &= u^{**}(t_1),
 \end{aligned}$$

o que mostra que u^{**} é decrescente.

- (b) É trivial, pois pelo item (c) da Proposição 2.1.4 temos

$$(\alpha u)^{**}(t) = \frac{1}{t} \int_0^t (\alpha u)^*(s) ds = \frac{1}{t} \int_0^t |\alpha| u^*(s) ds = \frac{|\alpha|}{t} \int_0^t u^*(s) ds = |\alpha|(u)^{**}(t),$$

para todo $t \in (0, +\infty)$.

- (c) Uma vez que u^* é não crescente pela Proposição 2.1.4, segue que

$$u^*(t) = \frac{1}{t} \int_0^t u^*(t) ds \leq \frac{1}{t} \int_0^t u^*(s) ds = u^{**}(t),$$

para todo $t \in (0, +\infty)$.

(d) Usando os itens (a) e (d) da Proposição 2.1.4, temos pelas propriedades de integral que

$$u^{**}(t) = \frac{1}{t} \int_0^t u^*(s) ds \leq \frac{1}{t} \int_0^t v^*(s) ds = v^{**}(t),$$

para todo $t \in (0, +\infty)$.

(e) É imediato, pois se supormos $u^{**} \equiv 0$, temos $u^* = 0$ em quase toda parte pelo item (c) da Proposição A.3.2. Logo, $u = 0$ q.t.p. em Ω . Reciprocamente, supondo que $u = 0$ q.t.p. o resultado é imediato pelos itens (c) e (e) da Proposição 2.1.4.

(f) É trivial pela definição de função maximal e pelo item (f) da Proposição 2.1.4.

□

Antes de prosseguirmos com um resultado muito importante para o propósito das próximas seções, é necessário utilizar o seguinte lema:

Lema 2.1.11. Seja (Ω, Σ, μ) um espaço de medida. Se μ é não atômica (ver Definição A.2.1) e $0 \leq a \leq \mu(\Omega)$, então

$$\int_0^a f^*(t) dt = \sup_{\mu(A)=a} \int_A |f(x)| d\mu.$$

Demonstração. Ver Teorema 1.10, página 37 em [14].

□

Tendo em vista tais circunstâncias, provaremos a seguinte propriedade:

Proposição 2.1.12. Se $u^{**}, v^{**} : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ são funções maximais, então

$$(u + v)^{**}(t) \leq u^{**}(t) + v^{**}(t),$$

para todo $t \in (0, +\infty)$.

Demonstração. Uma vez que medida de Lebesgue em um espaço euclidiano $\mathbb{R}^N$ é não atômica, para cada $N \in \mathbb{N}$, temos pelo Lema 2.1.11 que

$$(u + v)^{**}(t) = \frac{1}{t} \int_0^t (u + v)^*(s) ds = \frac{1}{t} \sup_{|E|=t} \int_E |(u + v)(s)| dm.$$

Dessa forma, usando a desigualdade triangular, temos

$$\begin{aligned} (u + v)^{**}(t) &= \frac{1}{t} \sup_{|E|=t} \int_E |(u + v)(s)| dm \leq \frac{1}{t} \sup_{|E|=t} \left(\int_E |u(s)| dm + \int_E |v(s)| dm \right) \\ &\leq \frac{1}{t} \sup_{|E|=t} \int_E |u(s)| dm + \frac{1}{t} \sup_{|E|=t} \int_E |v(s)| dm \leq u^{**}(t) + v^{**}(t), \end{aligned}$$

para todo $t \in (0, +\infty)$.

□

2.2 Espaços Invariantes por Rearranjos

Nesta seção, iremos trabalhar com a teoria abstrata dos espaços de Banach de funções. Dessa forma, considere $(\Omega, \Sigma, |\cdot|)$ o espaço de medida de Lebesgue e $M^+(\Omega, \Sigma)$ o espaço das funções mensuráveis e não negativas.

Definição 2.2.1. A aplicação $\rho : M^+(\Omega, \Sigma) \longrightarrow [0, \infty]$ é chamado *função norma de Banach* se para cada $f, g, f_n \in M^+(\Omega, \Sigma)$ vale

- (a) $\rho(f) = 0 \Leftrightarrow f = 0$ q.t.p. em Ω , $\rho(af) = a\rho(f)$ e $\rho(f + g) \leq \rho(f) + \rho(g)$, para todo $a \geq 0$;
- (b) $0 \leq g \leq f$ q.t.p. em $\Omega \Rightarrow \rho(g) \leq \rho(f)$;
- (c) $0 \leq f_n \uparrow f$ q.t.p. $\Rightarrow \rho(g) \leq \rho(f)$;
- (d) Se $E \subset \Omega$ é um conjunto mensurável, com $|E| < \infty$, então $\rho(\chi_E) < \infty$ e $\int_E f dm \leq C\rho(f)$,

Definição 2.2.2. Seja ρ uma função norma de Banach. A coleção $X = X(\rho)$ de todas as funções mensuráveis $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, onde $\rho(|f|) < \infty$, é chamada *espaço das funções de Banach*. Além disso, para todo $f \in X$, denotaremos

$$\|f\|_X = \rho(|f|).$$

Agora, iremos definir um conceito para o estudo dos espaços das funções de Banach. Inicialmente, lembre-se que ao tomar $f \in L^p$ e $g \in L^{p'}$, onde p' é conjugado de p , temos pela desigualdade de Hölder que

$$\int_{\Omega} fg d\mu \leq \|f\|_p \|g\|_{p'}.$$

Utilizando as condições anteriores, é bem conhecido pelo Lema A.4.3 que

$$\|g\|_{p'} = \sup \left\{ \int_{\Omega} |fg| d\mu; f \in L^p, \|f\|_p \leq 1 \right\},$$

para cada $g \in L^{p'}$. Isto nos motiva a estabelecer:

Definição 2.2.3. Seja ρ uma função norma de Banach. Definiremos a *norma associada* ρ' em $M^+(\Omega, \Sigma)$ por

$$\rho'(g) = \sup \left\{ \int_{\Omega} fg d\mu; f \in M^+(\Omega, \Sigma), \rho(f) \leq 1 \right\}.$$

A caracterização de norma associada nos permite definir os espaços associados. Vejamos a definição formal abaixo:

Definição 2.2.4. Sejam ρ uma função norma de Banach, $X = X(\rho)$ um espaço das funções de Banach e ρ' a norma associada de ρ . Denominaremos $X' = X(\rho')$, determinado por ρ' , como *espaço associado* de X .

É importante ressaltar que a norma de uma função $g \in X'$ será dada por:

$$\|g\|_{X'} = \sup \left\{ \int_{\Omega} |fg| d\mu; f \in X, \|f\|_X \leq 1 \right\}.$$

Teorema 2.2.5. Seja X' um espaço associado a X . Se $f \in X$ e $g \in X'$, então fg é integrável e

$$\int_{\Omega} |fg| d\mu \leq \|f\|_X \|g\|_{X'}.$$

Demonstração. Iremos analisar dois casos:

1º caso: Suponha que $\|f\|_X = 0$. Logo, temos $f = 0$ em quase toda parte de Ω . Logo, a desigualdade é trivial.

2º caso: Suponha que $\|f\|_X > 0$. Dessa maneira, tomando a normalização de f , adquirimos

$$\int_{\Omega} \left| \left(\frac{f}{\|f\|_X} \right) g \right| d\mu \leq \|g\|_{X'},$$

uma vez que $f/\|f\|_X = 1$. Portanto, concluímos a desigualdade. $\square$

Os espaços de Lebesgue $L^p(\Omega)$ desempenham um papel muito valioso para o desenvolvimento da Análise. No entanto, existem outros espaços cujas classes de funções mensuráveis admitem normas diferentes, são completos e que são de grande interesse para a pesquisa científica. Assim, buscaremos mostrar de modo mais geral algumas similaridades entre essas classes de funções, iniciando com um conceito que já é bem familiar em um domínio limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, com medida de Lebesgue m , além de uma aplicação bem interessante.

Definição 2.2.6. Dizemos que um espaço $(X, \|\cdot\|_X)$ de funções mensuráveis é chamado *espaço invariante por rearranjo*, se as seguintes propriedades forem satisfeitas:

(a) Se $0 \leq f \leq g$ q.t.p. em Ω e $g \in X$, então $f \in X$ e $\|f\|_X \leq \|g\|_X$;

(b) $0 \leq f_n \uparrow f$ q.t.p. em $\Omega \Rightarrow \|f_n\|_X \uparrow \|f\|_X$;

(c) $|E| < \infty \Rightarrow \|\chi_E\|_X < \infty$ e $\int_E f dm \leq C \|f\|_X$;

(d) Se $u \in X$ e $u^* = v^*$, então $v \in X$ e $\|u\|_X = \|v\|_X$,

para todo $f, g, f_n \in M(\Omega, \Sigma)$, com $n \in \mathbb{N}$, todo $\alpha \geq 0$ e cada E subconjunto mensurável de Ω .

Vejamos agora um resultado interessante sobre espaços invariantes por rearranjo no que diz respeito as imersões:

Proposição 2.2.7. Se $X(\Omega)$ é um espaço invariante por rearranjos, onde $|\Omega| < \infty$, então

$$L^\infty(\Omega) \hookrightarrow X(\Omega) \hookrightarrow L^1(\Omega).$$

Demonstração. Inicialmente, provaremos que $L^\infty(\Omega) \hookrightarrow X(\Omega)$. De fato, uma vez que

$$\|u\|_\infty = \inf\{c \in \mathbb{R}; |u(x)| < c \text{ q.t.p. em } \Omega\},$$

para cada $u \in L^\infty(\Omega)$, então para todo $\varepsilon > 0$, existe $C \in \{c \in \mathbb{R}; |u(x)| < c \text{ q.t.p. em } \Omega\}$ tal que $\|u\|_\infty + \varepsilon > C$. Além disso, pelos itens (a) e (c) da Definição 2.2.6 e pela desigualdade $|u(x)| \leq C$ q.t.p. em Ω , temos

$$u \in X(\Omega) \quad \text{e} \quad \|u\|_X \leq C\|\chi_\Omega\|_X < \infty,$$

já que $|\Omega| < \infty$ e $C\chi_\Omega \in X(\Omega)$, para todo $\varepsilon > 0$. Dessa forma, tomando $\|\chi_\Omega\|_X = K$, segue

$$\|u\|_X \leq K(\|u\|_\infty + \varepsilon) \Rightarrow \|u\|_X \leq K\|u\|_\infty,$$

quando $\varepsilon \rightarrow 0$. Por fim, mostraremos que $X(\Omega) \hookrightarrow L^1(\Omega)$. Seja $v \in X(\Omega)$. Uma vez que o espaço invariante por rearranjos, temos pelo item (c) da definição 2.2.6 que

$$\|v\|_{L^1} = \int_\Omega |v| dm \leq K\|v\|_X < \infty,$$

o que mostra a segunda imersão. □

Exemplo 2.2.8. São exemplos de espaços Invariante por Rearranjos:

- (a) Espaços L^p , com $1 \leq p \leq \infty$; (b) Espaços de Orlicz.

Para outros detalhes importantes, ver [4].

Nas próximas seções, vamos estudar mais dois importantes espaços invariantes por rearranjos: Espaços de Zygmund e Lorentz.

2.3 Espaços de Zygmund

O matemático Antoni Szczepan Zygmund nasceu na Polônia, em 25 de dezembro de 1900. Ele obteve o título de doutor pela Universidade de Varsóvia em 1923 e tornou-se

pesquisador na Academia de Vilnius, na década de 1930. Durante a segunda guerra mundial, o analista emigrou para os Estados Unidos, onde trabalhou e desenvolveu pesquisas nas Universidades de Pensilvânia e Chicago. Dentre suas descobertas, Zygmund desenvolveu um espaço com propriedades interessantes para a obter regularidade de problemas envolvendo equações diferenciais parciais o qual será abordado com mais detalhes nesta seção.

Definição 2.3.1. O espaço de Zygmund $L\log L(\Omega)$ consiste na classe de todas as funções mensuráveis $f : \Omega \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\int_{\Omega} |f(x)| \log^+ |f(x)| dx < \infty,$$

onde $\log^+ |f(x)| = \max\{\log |f(x)|, 0\}$. Além disso, também definimos o espaço $L_{\exp}(\Omega)$ como sendo o conjunto de todas as classes de funções mensuráveis $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ onde $\exists \lambda > 0$ tal que satisfaz

$$\int_{\Omega} \exp(\lambda |g(x)|) dx < \infty.$$

Alguns resultados serão provados com a condição de Ω ter medida finita. Em particular, iremos trabalhar para o caso em que $|\Omega| = 1$ com o qual podemos estender de forma natural para outros valores positivos. Além disso, pela Proposição 2.1.7, temos uma observação muito importante para o decorrer deste capítulo:

Observação: Valem as seguintes igualdades:

$$\int_{\Omega} |f(x)| \log^+ |f(x)| dx = \int_0^1 f^*(t) \log^+ f^*(t) dt \text{ e } \int_{\Omega} \exp(\lambda |f(x)|) dx = \int_0^1 \exp(\lambda f^*(t)) dt.$$

Os dois lemas que veremos a seguir são primordiais para mostrar que as normas, que veremos na próxima seção, implementadas nos espaços denotados anteriormente estão bem definidas.

Lema 2.3.2. Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um subconjunto com medida finita e $f : \Omega \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ uma função mensurável. Então,

- (a) $\int_{\Omega} |f(x)| \log^+ |f(x)| dx < \infty \Leftrightarrow \int_0^1 f^*(t) \log(1/t) dt < \infty$
- (b) $\int_{\Omega} \exp(\lambda |f(x)|) dx < \infty$ para algum $\lambda \in \mathbb{R}$ se, e só se, $f^*(t) \leq c \left(1 + \log \left(\frac{1}{t}\right)\right)$ para algum $c > 0$.

Demonstração. Vejamos,

(a) Pela observação anterior, temos

$$\int_{\Omega} |f(x)| \log^+ |f(x)| dx = \int_0^1 f^*(t) \log^+ f^*(t) dt.$$

Logo, é suficiente mostrar a equivalência para a integral do lado direito.

($\Rightarrow$) Primeiramente, suponha que a função $f^*(t) \log^+ f^*(t)$ é integrável no intervalo $[0, 1]$ e considere os conjuntos $E = \{t \in [0, 1]; f^*(t) > t^{-1/2}\}$ e $F = [0, 1] \setminus E$. Temos facilmente que:

$$\begin{aligned} \int_0^1 f^*(t) \log \left(\frac{1}{t} \right) dt &\leq \int_E f^*(t) \log(f^*(t))^2 dt + \int_F t^{-1/2} \log(1/t) dt \\ &\leq 2 \int_0^1 f^*(t) \log^+ f^*(t) dt + \int_0^1 t^{-1/2} \log(1/t) dt < \infty. \end{aligned}$$

($\Leftarrow$) Suponha que a função $f^*(t) \log \left(\frac{1}{t} \right)$ é integrável no intervalo $[0, 1]$. É evidente que $f \in L^1(\Omega)$, pois pela Proposição 2.1.7 segue que

$$\int_{\Omega} |f(x)| dx = \int_0^1 f^*(t) dt < \infty.$$

Além disso, temos novamente pela Proposição 2.1.7 e pelo item (c) da Proposição 2.1.10 que

$$f^* \leq f^{**} \leq \frac{\|f\|_1}{t}.$$

Dessa forma, como

$$\int_0^1 f^*(t) \log^+ f^*(t) dt \leq \int_0^1 f^*(t) \log^+ \left(\frac{\|f\|_1}{t} \right) dt = \int_0^s f^*(t) \log \left(\frac{\|f\|_1}{t} \right) dt,$$

onde $s = \min\{\|f\|_1, 1\}$, podemos analisar dois casos:

1° caso: Suponha que $\min\{\|f\|_1, 1\} = \|f\|_1$. Daí, temos

$$\begin{aligned} &\int_0^{\min\{\|f\|_1, 1\}} f^*(t) \log \left(\frac{\|f\|_1}{t} \right) dt \\ &\leq \int_0^{\|f\|_1} f^*(t) \log \left(\frac{\|f\|_1}{t} \right) dt + \int_{\|f\|_1}^1 f^*(t) \log \left(\frac{1}{t} \right) dt \\ &\leq \int_0^{\|f\|_1} f^*(t) \log \left(\frac{1}{t} \right) dt + \int_{\|f\|_1}^1 f^*(t) \log \left(\frac{1}{t} \right) dt \\ &= \int_0^1 f^*(t) \log \left(\frac{1}{t} \right) dt < \infty. \end{aligned}$$

2° caso: Suponha que $\min\{\|f\|_1, 1\} = 1$. Daí, temos

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\min\{\|f\|_1, 1\}} f^*(t) \log\left(\frac{\|f\|_1}{t}\right) dt &= \int_0^1 f^*(t) \log\left(\frac{\|f\|_1}{t}\right) dt \\
 &= \int_0^1 f^*(t) \left(\log\left(\frac{1}{t}\right) + \log\|f\|_1 \right) dt \\
 &= \int_0^1 f^*(t) \log\left(\frac{1}{t}\right) dt + |\log\|f\|_1| \int_0^1 f^*(t) dt \\
 &= \int_0^1 f^*(t) \log\left(\frac{1}{t}\right) dt + |\log\|f\|_1| \int_{\Omega} |f(t)| dt \\
 &= \int_0^1 f^*(t) \log\left(\frac{1}{t}\right) dt + \|f\|_1 |\log\|f\|_1| < \infty.
 \end{aligned}$$

(b) Por resultados anteriores, temos

$$\int_{\Omega} \exp(\lambda|f(x)|) dx = \int_0^1 \exp(\lambda f^*(t)) dt.$$

Logo, é suficiente mostrar a equivalência para a integral do lado direito. Vejamos,

($\Rightarrow$) Seja $K = \int_0^1 \exp(\lambda f^*(t)) dt < \infty$. Pela Proposição A.3.4 temos

$$\exp(\lambda f^*(t)) \leq \exp(\lambda f^{**}(t)) = \exp\left(\frac{1}{t} \int_0^t \lambda f^*(s) ds\right) \leq \frac{1}{t} \int_0^t \exp(\lambda f^*(s)) ds \leq \frac{K}{t}.$$

Portanto,

$$f^*(t) \leq \frac{1}{\lambda} \log\left(\frac{K}{t}\right) \leq \frac{1}{\lambda} \left(1 + \log\left(\frac{1}{t}\right)\right) \cdot \max\{\log K, 1\}.$$

($\Leftarrow$) Temos facilmente,

$$\int_0^1 \exp(\lambda f^*(t)) dt \leq \int_0^1 \exp(c\lambda(1 + \log\left(\frac{1}{t}\right))) = e^{t\lambda} \int_0^1 t^{-c\lambda} dt < \infty.$$

□

O lema anterior é muito importante para garantir a linearidade dos espaços $L\log L(\Omega)$ e $L_{\exp}(\Omega)$. De fato, tomando $h, p \in L\log L(\Omega)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, temos

$$\int_{\Omega} |h(x)| \log^+ |h(x)| dx < \infty \quad \text{e} \quad \int_{\Omega} |p(x)| \log^+ |p(x)| dx < \infty$$

e, conseqüentemente, segue que

$$\int_{\Omega} h^*(t) \log(1/t) dt < \infty \quad \text{e} \quad \int_{\Omega} p^*(t) \log(1/t) dt < \infty.$$

Agora, note que

$$\int_{\Omega} (h + \lambda p)^*(t) \log(1/t) dt \leq \int_0^1 h^*(x) \log(1/t) dt + \lambda \int_0^1 p^*(x) \log(1/t) dt < \infty,$$

o que nos garante $h + \lambda p \in L \log L(\Omega)$. Agora, tomando $f, g \in L_{\exp}(\Omega)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, existem λ_1 e λ_2 reais positivos tais que

$$\int_{\Omega} \exp(\lambda_1 |f|) dx < \infty \quad \text{e} \quad \int_{\Omega} \exp(\lambda_1 |\alpha g|) dx < \infty,$$

ou seja, existem C_1 e C_2 que satisfazem

$$f^*(t) \leq C_1 \left(1 + \log \frac{1}{t}\right) \quad \text{e} \quad (\alpha g)^*(t) \leq C_2 \left(1 + \log \frac{1}{t}\right).$$

Dessa forma, como temos

$$(f + \alpha g)^*(t) \leq f^*(t) + \alpha g^*(t) \leq (C_1 + C_2) \left(1 + \log \frac{1}{t}\right),$$

concluimos que $f + \alpha g \in L_{\exp}(\Omega)$.

Lema 2.3.3. A estimativa pontual $f^*(t) \leq c \left(1 + \log \frac{1}{t}\right)$ é válida para algum $c \in \mathbb{R}$ se, e somente se, $f^{**}(t) \leq k \left(1 + \log \left(\frac{1}{t}\right)\right)$ para algum $k > 0$.

Demonstração. Provaremos as implicações:

($\Rightarrow$) Seja $t \in (0, \infty)$. Perceba que,

$$f^{**}(t) = \frac{1}{t} \int_0^t f^*(s) ds \leq \frac{1}{t} \int_0^t c \left(1 + \log \frac{1}{s}\right) ds = \frac{c}{t} \lim_{k \rightarrow 0^+} \int_k^t \left(1 + \log \frac{1}{s}\right) ds,$$

mas note que

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow 0^+} \int_k^t \left(1 + \log \frac{1}{s}\right) ds &= \lim_{k \rightarrow 0^+} (2s - s \log s) \Big|_k^t \\ &= \lim_{k \rightarrow 0^+} [2(t - k) - (t \log t - k \log k)] \\ &= 2t + t \log \frac{1}{t}, \end{aligned}$$

e portanto

$$f^{**}(t) \leq 2c \left(1 + \log \frac{1}{t} \right).$$

($\Leftarrow$) É trivial, pois pelo item (c) da Proposição 2.1.10 temos $f^*(t) \leq f^{**}(t)$, para todo $t \in (0, 1)$. $\square$

Agora, seja a função $\| \cdot \|_{L_{\exp}} : L_{\exp}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\|u\|_{L_{\exp}} = \sup_{t \in (0,1)} \frac{u^*(t)}{1 + \log \left(\frac{1}{t} \right)},$$

para cada $u \in L_{\exp}(\Omega)$. Temos,

Proposição 2.3.4. O espaço $(L_{\exp}(\Omega), \| \cdot \|_{L_{\exp}})$ é quase normado.

Demonstração. Antes de analisarmos todos os itens da definição de norma, exceto a desigualdade triangular, precisamos verificar que

$$\sup_{t \in (0,1)} \frac{u^*(t)}{1 + \log \left(\frac{1}{t} \right)},$$

para todo $u \in L_{\exp}(\Omega)$, está bem definido em $\mathbb{R}$. De fato, pelas equivalências do Lema 2.3.2, existe $c \in \mathbb{R}_*^+$ satisfazendo

$$u^*(t) \leq c \left(1 + \log \left(\frac{1}{t} \right) \right),$$

para todo $t \in (0, 1)$. Uma vez que

$$1 + \log \left(\frac{1}{t} \right) \neq 0,$$

para cada $t \in (0, 1)$, concluímos que

$$\frac{u^*(t)}{1 + \log \left(\frac{1}{t} \right)} \leq c \Rightarrow \sup_{t \in (0,1)} \frac{u^*(t)}{1 + \log \left(\frac{1}{t} \right)} < \infty.$$

Agora, verificaremos as condições (a), (b) e (c) da definição de norma:

(a) Note que para todo $u \in L_{\exp}(\Omega)$, temos $\|u\|_{L_{\exp}} \geq 0$, pois u^* é não negativa e

$$1 + \log \left(\frac{1}{t} \right) > 0,$$

para todo $t \in (0, 1)$.

(b) Vejamos,

($\Rightarrow$) Admita que $\|u\|_{L_{\exp}} = 0$. Logo, segue-se que

$$\sup_{t \in (0,1)} \frac{u^*(t)}{1 + \log \left(\frac{1}{t} \right)} = 0.$$

Nestas condições, $u^*(t) = 0$ para todo $t \in (0, 1)$, pois

$$1 + \log \left(\frac{1}{t} \right) > 0,$$

e, pelo item (a) da Proposição 2.1.4, sabemos que u^* é não negativa. Assim, $u = 0$ trivialmente pelo item (c) da Proposição 2.1.4.

($\Leftarrow$) Agora, suponha que $u = 0$. Dessa forma, temos para todo $t \in (0, +\infty)$ que $\mu_u(t) = |\emptyset| = 0$. Logo, para todo $t \in (0, 1)$, tem-se $u^*(t) = 0$. Portanto, $\|u\|_{L_{\exp}} = 0$.

(c) Também é trivial, pois pelo item da Proposição 2.1.4, temos

$$\|\alpha u\|_{L_{\exp}} = \sup_{t \in (0,1)} \frac{|\alpha| u^*(t)}{1 + \log \left(\frac{1}{t} \right)} = |\alpha| \sup_{t \in (0,1)} \frac{u^*(t)}{1 + \log \left(\frac{1}{t} \right)} = |\alpha| \|u\|_{L_{\exp}},$$

para todo $u \in L_{\exp}(\Omega)$.

□

Agora, podemos mostrar que

$$\|u\|_Z = \sup_{t \in (0,1)} \frac{u^{**}(t)}{1 + \log \left(\frac{1}{t} \right)},$$

para todo $u \in L_{\exp}(\Omega)$, é uma norma para o Espaço de Zygmund. Vejamos o resultado abaixo:

Proposição 2.3.5. O espaço $(L_{\exp}, \|\cdot\|_Z)$ é normado.

Demonstração. Antes de analisarmos todos os itens da definição de norma, note que

$$\sup_{t \in (0,1)} \frac{u^{**}(t)}{1 + \log \left(\frac{1}{t} \right)},$$

está bem definido em $\mathbb{R}$, para todo $u \in L_{\text{exp}}(\Omega)$, pois usando as equivalências dos Lemas 2.3.2 e 2.3.3, além de um argumento análogo ao da Proposição 2.3.4, concluimos imediatamente. Agora, verificaremos as condições da definição norma:

(a) Note que para todo $u \in L_{\text{exp}}(\Omega)$, temos $\|u\|_Z \geq 0$, pois u^{**} é não negativa e

$$1 + \log\left(\frac{1}{t}\right) > 0,$$

para todo $t \in (0, 1)$.

(b) Vejamos,

($\Rightarrow$) Admita que $\|u\|_Z = 0$. Logo, temos

$$\sup_{t \in (0,1)} \frac{u^{**}(t)}{1 + \log\left(\frac{1}{t}\right)} = 0.$$

Uma vez que vale o item (a) da Proposição 2.1.4 e o item (c) da Proposição 2.1.10, temos $u^{**}(t) = 0$ para todo $t \in [0, 1]$. Dessa forma, pelo item (e) da Proposição 2.1.10, temos $u = 0$ q.t.p.

($\Leftarrow$) Supondo que $u = 0$ q.t.p., temos pelo item (e) da Proposição 2.1.10 que $u^{**} \equiv 0$. Portanto, é imediato que $\|u\|_Z = 0$.

(c) Também é trivial, pois pelo item da Proposição 2.1.10, temos

$$\|\alpha u\|_Z = \sup_{t \in (0,1)} \frac{|\alpha| u^{**}(t)}{1 + \log\left(\frac{1}{t}\right)} = |\alpha| \sup_{t \in (0,1)} \frac{u^{**}(t)}{1 + \log\left(\frac{1}{t}\right)} = |\alpha| \|u\|_Z,$$

para todo $u \in L_{\text{exp}}(\Omega)$.

(d) Usando a Proposição 2.1.12, temos

$$(u + v)^{**}(t) \leq u^{**}(t) + v^{**}(t),$$

para todo $t \in (0, 1)$. Dessa forma, temos facilmente que

$$\frac{(u + v)^{**}(t)}{1 + \log\left(\frac{1}{t}\right)} \leq \frac{u^{**}(t)}{1 + \log\left(\frac{1}{t}\right)} + \frac{v^{**}(t)}{1 + \log\left(\frac{1}{t}\right)}.$$

Aplicando o supremo, temos

$$\begin{aligned}
 \|u + v\|_Z &= \sup_{t \in (0,1)} \frac{(u + v)^{**}(t)}{1 + \log \left(\frac{1}{t} \right)} \\
 &\leq \sup_{t \in (0,1)} \frac{u^{**}(t)}{1 + \log \left(\frac{1}{t} \right)} + \sup_{t \in (0,1)} \frac{v^{**}(t)}{1 + \log \left(\frac{1}{t} \right)} \\
 &= \|u\|_Z + \|v\|_Z.
 \end{aligned}$$

□

Corolário 2.3.6. Se $u \in L_{\text{exp}}(\Omega)$, então $\|u\|_{L_{\text{exp}}} \leq \|u\|_Z$.

Demonstração. É imediato pelas definições de quase norma e norma do espaço de Zygmund. □

Observação: Desconsiderando o fato de que $|\Omega| = 1$, podemos também considerar a norma do espaço de Zygmund como sendo

$$\|u\|_Z = \sup_{t \in (0, |\Omega|)} \frac{u^{**}(t)}{1 + \log \frac{|\Omega|}{t}},$$

para todo $u \in L_{\text{exp}}$.

Agora, seja a função $\|\cdot\|_{L \log L} : L \log L \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\|u\|_{L \log L} = \int_0^1 f^*(t) \log \left(\frac{1}{t} \right) dt,$$

para cada $u \in L \log L$. Perceba que usando integração por partes, temos

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 f^*(t) \log \left(\frac{1}{t} \right) dt &= \left[\log \left(\frac{1}{t} \right) \int_0^t f^*(s) ds \right]_0^1 + \int_0^1 \frac{1}{t} \int_0^t f^*(s) ds dt \\
 &= \int_0^1 f^{**}(t) dt,
 \end{aligned}$$

pois tomando $F(k) - F(0) = \int_0^k f^*(s) ds$, onde $F' = f^*$, segue-se

$$\lim_{k \rightarrow 0^+} \log(k) \int_0^k f^*(s) ds = \lim_{k \rightarrow 0^+} \frac{F(k) - F(0)}{[\log(k)]^{-1}} = \lim_{k \rightarrow 0^+} \frac{f^*(k)k}{-\log(k)}.$$

Uma vez que f^* é não crescente, podemos limitar tal função superiormente por uma

constante positiva C^{te} . Daí, temos

$$0 < \lim_{k \rightarrow 0^+} \frac{f^*(k)k}{-\log(k)} \leq C^{te} \lim_{k \rightarrow 0^+} \frac{k}{-\log(k)} = C^{te} \lim_{k \rightarrow 0^+} -k = 0,$$

o que conclui nosso problema. Esta caracterização torna simples a demonstração do fato a seguir:

Proposição 2.3.7. O espaço $(LlogL(\Omega), \|\cdot\|_{LlogL})$ é normado.

Demonstração. É imediato pelas propriedades básicas de funções maximais. $\square$

Observação: Desconsiderando o fato de que $|\Omega| = 1$, podemos também considerar a norma do espaço de Zygmund como sendo

$$\|u\|_{LlogL} = \int_0^{|\Omega|} u^*(t) \log\left(\frac{|\Omega|}{t}\right) dt = \int_0^{|\Omega|} u^{**}(t) dt,$$

para todo $u \in LlogL$.

Agora, buscaremos a verificação de que os espaços de Zygmund, sob certas condições do conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, são invariantes por rearranjos. Desse fato, ao tomar duas funções quaisquer que pertençam a este espaço tal que possuem o mesmo rearranjo, conseguiremos garantir que as suas respectivas normas são iguais.

Teorema 2.3.8. Se $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um conjunto com medida finita, então os espaços

$$(LlogL(\Omega), \|\cdot\|_{LlogL}) \text{ e } (L_{\exp}(\Omega), \|\cdot\|_Z)$$

são invariantes por rearranjo.

Demonstração. Sem perda de generalidade, suponha que $|\Omega| = 1$. Provaremos o resultado através das afirmações abaixo:

Afirmação 1: O espaço $(L_{\exp}(\Omega), \|\cdot\|_Z)$ é invariante por rearranjo;

(a) Seja $u \in L_{\exp}$, onde $0 \leq v \leq u$ q.t.p. em Ω . Daí, existe $\lambda > 0$ tal que

$$\int_{\Omega} \exp(\lambda|u(x)|) dx = \int_0^1 \exp(\lambda u^*(t)) dt < \infty.$$

Dessa forma, pelo item (e) da Proposição 2.1.4 e pelo Lema 2.3.2, temos

$$v^* \leq u^* \leq c \left(1 + \log\left(\frac{1}{t}\right) \right).$$

Logo, sucede-se que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \exp(\lambda|v(x)|)dx &= \int_0^1 \exp(\lambda v^*(t))dt \\ &\leq \int_0^1 \exp\left(c\lambda + c\lambda \log\left(\frac{1}{t}\right)\right) dt \\ &= e^{c\lambda} \int_0^1 t^{-c\lambda} dt < \infty, \end{aligned}$$

Assim, concluímos que $v \in L_{\exp}(\Omega)$. Além disso, pelo item (d) Proposição 2.1.10, temos $u^{**} \leq v^{**}$, o que faz garantir

$$\|v\|_{L_{\exp}} \leq \|u\|_{L_{\exp}},$$

pela definição de norma.

- (b) Suponha que $0 \leq u_n \uparrow u \in L_{\exp}(\Omega)$ q.t.p.. Daí, pelo item (f) da Proposição 2.1.10, temos

$$u_n^{**} \uparrow u^{**}.$$

Logo, pela definição de norma, é imediato que $\|u_n\|_Z \uparrow \|u\|_Z$.

- (c) Sejam $A \subset \Omega$ e $u = \mathcal{X}_A$. Logo, $|A| \leq 1$, além de

$$u = \mathcal{X}_A \Rightarrow u^* = \mathcal{X}_{[0,|A|]} \Rightarrow u^{**}(t) = \begin{cases} 1, & t \leq |A|; \\ \frac{|A|}{t}, & t > |A|. \end{cases}$$

Vamos analisar os casos:

1° caso: Suponha que $|A| = 1$. Daí, temos para todo $t \in (0, 1)$ que

$$\frac{1}{1 + \log \frac{1}{t}} = \frac{1}{1 - \log t} < 1.$$

Uma vez que o supremo é a menor das cotas superiores, concluímos que

$$\|u\|_Z = \sup_{0 < t < 1} \frac{u^{**}(t)}{1 + \log \frac{1}{t}} = \sup_{0 < t < 1} \frac{1}{1 + \log \frac{1}{t}} \leq 1 < \infty.$$

2° caso: Suponha que $|A| < 1$. Dessa forma, como temos

$$t \in (0, 1) = (0, |A|] \cup (|A|, 1),$$

é fácil ver que

$$\frac{1}{1 + \log \frac{1}{t}} = \frac{1}{1 - \log t} \leq 1,$$

para todo $t \in (0, |A|]$, e também que

$$\frac{|A|}{t + t \log \frac{1}{t}} = \frac{|A|}{t - t \log t} \leq 1,$$

para todo $t \in (|A|, 1)$. Logo, por ser limitada, temos

$$\|u\|_Z = \sup_{0 < t < 1} \frac{u^{**}(t)}{1 + \log \frac{1}{t}} < \infty.$$

Logo, pelos casos 1 e 2, concluímos que $\|\mathcal{X}_A\|_Z < \infty$.

Agora, para finalizar, seja $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ uma função mensurável e não integrável arbitrária em $L_{\exp}(\Omega)$. A função $\lambda|v|$ também não é integrável para toda constante real λ . Uma vez que $\lambda|v(x)| \leq \exp(\lambda|v(x)|)$, para todo $x \in \Omega$, temos

$$\int_{\Omega} \exp(\lambda|v(x)|) dx = \infty,$$

para cada $\lambda > 0$, o que é um absurdo, pois $v \in L_{\exp}(\Omega)$. Logo, para todo subconjunto $A \subset \Omega$, temos

$$\int_A u dm < \infty.$$

Portanto, podemos tomar C suficientemente grande tal que

$$\int_A u dm \leq C\|u\|_Z.$$

(d) Seja $u \in L_{\exp}(\Omega)$, com $u^* = v^*$. Pela Proposição 2.1.7, temos

$$\int_{\Omega} \exp(\lambda|u(x)|) dx = \int_0^1 \exp(\lambda u^*(t)) dt = \int_0^1 \exp(\lambda v^*(t)) dt = \int_{\Omega} \exp(\lambda|v(x)|) dx.$$

Para algum $\lambda > 0$, temos

$$\int_{\Omega} \exp(\lambda|u(x)|) dx < \infty.$$

Logo, concluímos que $v \in L_{\exp}(\Omega)$. Além disso,

$$u^{**}(t) = \frac{1}{t} \int_0^t u^*(s) ds = \frac{1}{t} \int_0^t v^*(s) ds = v^{**}(t),$$

para todo $t \in (0, \infty)$. Portanto, pela definição da norma $\|\cdot\|_Z$, concluímos que

$$\|u\|_Z = \|v\|_Z.$$

Afirmção 2: O espaço $(LlogL(\Omega), \|\cdot\|_{LlogL})$ é invariante por rearranjo;

- (a) Seja $v \in LlogL(\Omega)$ tal que $0 \leq u \leq v$ q.t.p.. Lembre-se que pelo item (d) da Proposição 2.1.10, temos $f^{**} \leq g^{**}$. Dessa forma, temos

$$\int_{\Omega} |u(x)| \log^+ |u(x)| dx \leq \int_{\Omega} |v(x)| \log^+ |v(x)| dx < \infty,$$

ou seja, $u \in LlogL(\Omega)$. Por fim, concluímos também que

$$\|u\|_{LlogL} = \int_0^1 u^{**}(t) dt \leq \int_0^1 v^{**}(t) dt = \|v\|_{LlogL}.$$

- (b) Suponha que $0 \leq u_n \uparrow u \in L_{\exp}(\Omega)$ q.t.p.. Daí, pelo item (f) da Proposição 2.1.10 temos

$$u_n^{**} \uparrow u^{**}.$$

Logo, pela definição de norma, é imediato que $\|u_n\|_{LlogL} \uparrow \|u\|_{LlogL}$.

- (c) Sejam $A \subset \Omega$ e $u = \mathcal{X}_A$. Nestas condições,

$$\|\mathcal{X}_A\|_{LlogL} = \int_0^1 (\mathcal{X}_A)^{**}(t) dt = \int_0^1 \frac{1}{t} \int_0^t (\mathcal{X}_A)^*(s) ds dt.$$

Uma vez que,

$$(\mathcal{X}_A)^*(s) = \begin{cases} 1, & \text{se } 0 \leq t < |A| \\ 0, & \text{se } t \geq |A| \end{cases}$$

é evidente que temos $\|\mathcal{X}_A\|_{LlogL} < \infty$. Por fim, combinando o item (c) da Proposição 2.1.10 com a Proposição 2.1.7, temos

$$\int_A u dm \leq \int_0^{|A|} u^*(t) dt \leq \int_0^{|A|} u^{**}(t) dt \leq \int_0^1 u^{**}(t) dt = \|u\|_{LlogL},$$

pois $|\Omega| = 1$.

- (d) Seja $u \in LlogL(\Omega)$, com $u^* = v^*$. Temos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |v(x)| \log^+ |v(x)| dx &= \int_0^1 v^*(t) \log^+ v^*(t) dt = \int_0^1 u^*(t) \log^+ u^*(t) dt \\ &= \int_{\Omega} |u(x)| \log^+ |u(x)| dx < \infty, \end{aligned}$$

o que nos garante que $v \in LlogL(\Omega)$. Por fim, é imediato que

$$\|u\|_{LlogL} = \int_0^1 u^{**}(t)dt = \int_0^1 v^{**}(t)dt = \|v\|_{LlogL}. \quad \square$$

Agora, mostraremos um encadeamento de imersões pelos quais os espaços de Zygmund fazem parte. O resultado anterior é fundamental para garantir parte dessas inclusões contínuas. Vejamos,

Teorema 2.3.9. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um conjunto de medida finita. Valem as imersões:

$$L^\infty(\Omega) \hookrightarrow L_{\exp}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega) \hookrightarrow LlogL(\Omega) \hookrightarrow L^1(\Omega),$$

para todo $p \in (1, \infty)$.

Demonstração. Sem perda de generalidade, assim como nos resultados anteriores, iremos supor que $|\Omega| = 1$. Desse modo, note que pela Proposição 2.2.7 e pelo Teorema 2.3.8, temos imediatamente que:

$$L^\infty(\Omega) \hookrightarrow L_{\exp}(\Omega) \text{ e } LlogL(\Omega) \hookrightarrow L^1(\Omega).$$

Agora, resta mostrar que

$$L^p(\Omega) \hookrightarrow LlogL(\Omega) \text{ e } L_{\exp}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega).$$

Afirmção 1: $L^p(\Omega) \hookrightarrow LlogL(\Omega)$;

Seja $u \in L^p(\Omega)$. Devido ao item (a) do Lema 2.3.2, é suficiente verificar que

$$\int_0^1 [\log(1/t)]^{p'} dt < \infty$$

para concluir que $u \in LlogL(\Omega)$, pois sabendo que p' é o conjugado de p , temos pela desigualdade de Hölder e pelo Teorema 2.1.7 que

$$\begin{aligned} \int_0^1 u^*(t) \log(1/t) dt &\leq \left(\int_0^1 [u^*(t)]^p dt \right)^{1/p} \left(\int_0^1 [\log(1/t)]^{p'} dt \right)^{1/p'} \\ &= \left(\int_\Omega |u(x)|^p dx \right)^{1/p} \left(\int_0^1 [\log(1/t)]^{p'} dt \right)^{1/p'} < \infty. \end{aligned}$$

Dessa forma, note que a função auxiliar $g : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(t) = -t^{1/(p')^2} \log(t)$

admite valor máximo para $t = e^{-(p')^2}$, com $p' > 1$ qualquer. Portanto,

$$\int_0^1 [\log(1/t)]^{p'} dt \leq \left(\max_{t \in (0,1]} [\log(1/t)] \right)^{p'} \int_0^1 \frac{1}{t^{1/p'}} dt = \left(\max_{t \in (0,1]} [\log(1/t)] \right)^{p'} \cdot \frac{1}{1 - (p')^{-1}} < \infty.$$

Agora, mostraremos que $L^p(\Omega)$ está imerso em $LlogL(\Omega)$. De fato, observe que pela desigualdade de Hölder tem-se

$$\|u\|_{LlogL(\Omega)} = \int_0^1 u^{**}(t) dt \leq \left(\int_0^1 u^{**}(t)^p dt \right)^{1/p} = \left(\int_0^1 \left(\frac{1}{t} \int_0^t u^*(s) ds \right)^p dt \right)^{1/p},$$

para cada $u \in LlogL(\Omega)$. Escrevendo $u^*(s) = s^{-\lambda/p'} s^{\lambda/p'} u^*(s)$, com $\lambda^{-1} = -p$, temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{t} \int_0^t u^*(s) ds &\leq \left(\frac{1}{t} \int_0^t s^{-\lambda} ds \right)^{1/p'} \left(\frac{1}{t} \int_0^t s^{\lambda p/p'} u^*(s)^p ds \right)^{1/p} \\ &= \left(\frac{1}{t} \left[\frac{s^{1-\lambda}}{1-\lambda} \right]_0^t \right)^{1/p'} \left(\frac{1}{t} \int_0^t s^{\lambda p/p'} u^*(s)^p ds \right)^{1/p} \\ &= (1-\lambda)^{-1/p'} t^{\lambda/p' - 1/p} \left(\int_0^t s^{\lambda p/p'} u^*(s)^p ds \right)^{1/p}. \end{aligned}$$

Nestas condições, temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{t} \int_0^t u^*(s) ds &\leq \left(\frac{1}{t} \int_0^t s^{-\lambda} ds \right)^{1/p'} \left(\frac{1}{t} \int_0^t s^{\lambda p/p'} u^*(s)^p ds \right)^{1/p} \\ &= \left(\frac{1}{t} \left[\frac{s^{1-\lambda}}{1-\lambda} \right]_0^t \right)^{1/p'} \left(\frac{1}{t} \int_0^t s^{\lambda p/p'} u^*(s)^p ds \right)^{1/p} \\ &= (1-\lambda)^{-1/p'} t^{\lambda/p' - 1/p} \left(\int_0^t s^{\lambda p/p'} u^*(s)^p ds \right)^{1/p}. \end{aligned}$$

Desta maneira,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(\frac{1}{t} \int_0^t u^*(s) ds \right)^p dt &= \int_0^1 \left(t^{\lambda} \frac{1}{t} \int_0^t u^*(s) ds \right)^p \frac{dt}{t} \\ &\leq \int_0^1 \left((1-\lambda)^{-1/p'} t^{\lambda/p' - 1/p} \left(\int_0^t s^{\lambda p/p'} u^*(s)^p ds \right)^{1/p} \right)^p \frac{dt}{t} \\ &= \int_0^1 (1-\lambda)^{-p/p'} (t^{\lambda/p' - 1/p})^p \left(\int_0^t s^{\lambda p/p'} u^*(s)^p ds \right) \frac{dt}{t} \\ &= (1-\lambda)^{1-p} \int_0^1 t^{\lambda-2} \left(\int_0^t s^{\lambda(p-1)} u^*(s)^p ds \right) dt \\ &= (1-\lambda)^{1-p} \int_0^1 s^{\lambda(p-1)} u^*(s)^p \left(\int_s^1 t^{\lambda-2} dt \right) ds. \end{aligned}$$

Uma vez que $\int_s^1 t^{\lambda-2} dt = \frac{s^{\lambda-1} - 1}{1 - \lambda}$, segue

$$(1 - \lambda)^{1-p} \int_0^1 s^{\lambda(p-1)} u^*(s)^p \left(\int_s^1 t^{\lambda-2} dt \right) ds = (1 - \lambda)^{-p} \int_0^1 (s^{\lambda p}) (s^{-1} - s^{-\lambda}) u^*(s)^p ds.$$

Portanto, como $p > 1$ e $s^{-1} - s^{-\lambda} \leq s^{-1}$, concluímos que

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(\frac{1}{t} \int_0^t u^*(s) ds \right)^p dt &\leq (1 - \lambda)^{-1} \int_0^1 (s^{\lambda p}) u^*(s)^p \frac{ds}{s} \\ &= \frac{p}{p-1} \int_0^1 u^*(s)^p ds \end{aligned}$$

e, consequentemente,

$$\|u\|_{LlogL} \leq p' \|u\|_p.$$

Afirmção 2: $L_{\exp}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$;

Inicialmente, seja $u \in L_{\exp}(\Omega)$. Logo, existe $\lambda > 0$ tal que

$$\int_{\Omega} \exp(\lambda |u(x)|) dx < \infty.$$

Logo, pela Proposição 2.1.7 e pelo Lema 2.3.2, segue-se que

$$\int_{\Omega} |u(x)|^p dx = \int_0^1 [u^*(t)]^p dt \leq C^p \int_0^1 \left(1 + \log \frac{1}{t} \right) dt < \infty,$$

nos garantindo que $L_{\exp}(\Omega) \subset L^p(\Omega)$. Ainda considere $u \in L_{\exp}(\Omega)$ e tome $v \in LlogL(\Omega)$, com $\|v\|_{LlogL} \leq 1$. Fazendo

$$\begin{aligned} \int_0^1 u^*(t) v^*(t) dt &\leq \int_0^1 v^*(t) \left(1 + \log \frac{1}{t} \right) \frac{u^{**}(t)}{\left(1 + \log \frac{1}{t} \right)} dt \\ &\leq \|u\|_Z \int_0^1 v^*(t) \left(1 + \log \frac{1}{t} \right) dt, \end{aligned}$$

onde

$$\int_0^1 v^{**}(t) dt + \int_0^1 v^*(t) \log \left(\frac{1}{t} \right) dt = 2 \int_0^1 v^{**}(t) dt = 2 \|v\|_{LlogL},$$

segue que

$$\int_0^1 u^*(t) v^*(t) dt \leq 2 \|u\|_Z \|v\|_{LlogL}.$$

Logo, pela desigualdade de Hardy-Littlewood, temos

$$\int_{\Omega} u(x)v(x) \, dm \leq \int_0^1 u^*(s)v^*(s)ds.$$

Assim, segue-se facilmente que

$$\|u\|_{(LlogL)'} = \sup_{\substack{v \in LlogL(\Omega) \\ \|v\|_{LlogL} \leq 1}} \int_{\Omega} u(x)v(x)dm \leq 2\|u\|_Z.$$

Note também que tomando p' o expoente conjugado de p , temos

$$\begin{aligned} \|u\|_p &= \sup \left\{ \int_{\Omega} |u(x)v(x)|dx; \|v\|_{p'} \leq 1 \right\} \\ &\leq C \sup \left\{ \int_{\Omega} |u(x)v(x)|dx; \|v\|_{LlogL} \leq 1 \right\} \\ &= C\|u\|_{(LlogL)'} \end{aligned}$$

já que $L^{p'}(\Omega) \hookrightarrow LlogL(\Omega)$ pela afirmação anterior e $(L^p)' = L^{p'}$. Portanto,

$$\|u\|_p \leq C\|u\|_{(LlogL)'} \leq 2C\|u\|_Z.$$

□

Observação: É importante destacar que em [4] encontramos outras informações interessantes sobre estes espaços. Como por exemplo, é possível verificar que

$$LlogL'(\Omega) = L_{\exp}(\Omega),$$

onde $|\Omega| < \infty$ (veja Teorema 6.5). Além disso, também podemos generalizar os espaços de Zygmund para um espaço de medida (Ω, Σ, μ) , com $\mu(\Omega) < \infty$. Nesta abordagem, o espaço $[L^p(logL)^{\alpha}](\Omega)$ consiste de todas funções mensuráveis $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ onde

$$\int_{\Omega} [|f(x)| \log^{\alpha}(2 + |f(x)|)]^p d\mu < \infty$$

e o espaço $L_{\exp}^{\alpha}(\Omega)$ consiste em todas as funções mensuráveis $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ para o qual existe $\lambda(f) > 0$ tal que

$$\int_{\Omega} (\exp[\lambda|f(x)|])^{1/\alpha} d\mu < \infty.$$

2.4 Espaços de Lorentz

Nesta seção, iremos abordar uma outra generalização dos espaços de medida, que são os espaços de Lorentz. Para o desenvolvimento desta teoria, utilizaremos as definições e propriedades abordadas nas duas primeiras seções deste capítulo. Vejamos sua definição formal:

Definição 2.4.1. O espaço de Lorentz $L^{p,q}(\Omega)$ é determinado pelo conjunto de todas as funções $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ mensuráveis tal que a quantidade

$$\|f\|_{p,q} = \begin{cases} \left(\int_0^\infty (t^{1/p} f^*(t))^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q}, & \text{se } 1 \leq p \leq \infty \text{ e } 1 \leq q < \infty \\ \sup_{t>0} t^{1/p} f^*(t), & \text{se } 1 \leq p \leq \infty \text{ e } q = \infty \end{cases}$$

é finita. Observe que estamos convencionando $1/p = 0$, caso $p = \infty$.

Iremos nos concentrar em abordar o caso em que o espaço de Lorentz possui os parâmetros $1 < p < \infty$ e $q = \infty$, além de $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado. Para os casos mais gerais, veja [14].

Teorema 2.4.2. O espaço de Lorentz $L^{p,\infty}(\Omega)$ é linear e a quantidade $\|\cdot\|_{p,\infty}$ é uma quase norma deste espaço, com $1 < p < \infty$.

Demonstração. Vejamos,

Afirmção 1: O espaço de Lorentz $L^{p,\infty}(\Omega)$ é linear;

De fato, sejam $u, v \in L^{p,\infty}(\Omega)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, temos pelo item (d) da Proposição 2.1.4 que

$$\|u + \alpha v\|_{p,\infty} = \sup_{t>0} t^{1/p} (u + \alpha v)^*(t) \leq \sup_{t>0} t^{1/p} [u^*(t/2) + (\alpha v)^*(t/2)].$$

Tomando $k = t/2$, temos

$$\begin{aligned} \sup_{t>0} t^{1/p} [u^*(t/2) + (\alpha v)^*(t/2)] &= \sup_{k>0} (2k)^{1/p} (u^*(k) + |\alpha| v^*(k)) \\ &\leq 2^{1/p} \sup_{k>0} k^{1/p} u^*(k) + |\alpha| 2^{1/p} \sup_{k>0} k^{1/p} v^*(k) \\ &= 2^{1/p} (\|u\|_{p,\infty} + |\alpha| \|v\|_{p,\infty}) < \infty. \end{aligned}$$

Logo, $u + \alpha v \in L^{p,\infty}(\Omega)$.

Afirmção 2: O espaço $(L^{p,\infty}(\Omega), \|\cdot\|_{p,\infty})$ é quase normado;

Antes de analisarmos todos os itens da definição de norma, exceto a desigualdade

triangular, é fácil ver que

$$\sup_{t>0} t^{1/p} u^*(t),$$

para todo $u \in L^{p,\infty}(\Omega)$, está bem definido em $\mathbb{R}$ pela definição dos espaços de Lorentz. Agora, verificaremos as condições (a), (b) e (c) da definição de norma:

(a) Note que, para todo $u \in L^{p,\infty}(\Omega)$, temos $\|u\|_{p,\infty} \geq 0$, pois u^* é não negativa e $t^{1/p} > 0$, para todo $t > 0$.

(b) Vejamos,

($\Rightarrow$) Admita que $\|u\|_{p,\infty} = 0$. Logo, segue-se que

$$\sup_{t>0} t^{1/p} u^*(t) = 0.$$

Assim, $u^*(t) = 0$ para todo $t > 0$, pois $t^{1/p} > 0$ e, pelo item (a) da Proposição 2.1.4, sabemos que u^* é não negativa. Logo, $u = 0$ trivialmente pelo item (c) da Proposição 2.1.4.

($\Leftarrow$) Agora, suponha que $u = 0$. Dessa forma, temos para todo $t \in (0, +\infty)$ que $\mu_u(t) = |\emptyset| = 0$. Logo, para todo $t \in (0, 1)$, tem-se $u^*(t) = 0$. Portanto, $\|u\|_{p,\infty} = 0$.

(c) Também é trivial, pois pelo item da Proposição 2.1.4, temos

$$\|\alpha u\|_{p,\infty} = \sup_{t>0} t^{1/p} |\alpha| u^*(t) = |\alpha| \sup_{t>0} t^{1/p} u^*(t) = |\alpha| \|u\|_{p,\infty},$$

para todo $u \in L^{p,\infty}(\Omega)$.

□

Assim como nos espaços de Zygmund, não valer a subaditividade do rearranjo é o grande problema para não conseguir a desigualdade triangular. Desse modo, para contornar o problema, verificaremos que a função $\|\cdot\|_{L^{p,\infty}} : L^{p,\infty}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\|u\|_{L^{p,\infty}} = \sup_{t>0} t^{1/p} u^{**}(t),$$

com $u \in L^{p,\infty}(\Omega)$, é uma norma. Vejamos o resultado abaixo:

Teorema 2.4.3. O espaço $(L^{p,\infty}(\Omega), \|\cdot\|_{L^{p,\infty}})$ é normado, com $1 < p < \infty$. Além disso, vale a estimativa

$$\|u\|_{p,\infty} \leq \|u\|_{L^{p,\infty}} \leq \frac{p}{p-1} \|u\|_{p,\infty}, \quad \forall u \in L^{p,\infty}(\Omega).$$

Demonstração. Vejamos,

Afirmção 1: Valem as estimativas

$$\|u\|_{p,\infty} \leq \|u\|_{L^{p,\infty}} \leq \frac{p}{p-1} \|u\|_{p,\infty},$$

para cada $u \in L^{p,\infty}(\Omega)$. De fato, note que a desigualdade

$$\|u\|_{p,\infty} \leq \|u\|_{L^{p,\infty}}$$

é claramente válida para cada $u \in L^{p,\infty}(\Omega)$ o item (c) da Proposição 2.1.10 e pela definição das quantidades $\|\cdot\|_{p,\infty}$ e $\|\cdot\|_{L^{p,\infty}}$. Por fim, note que

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^{p,\infty}} &= \sup_{t>0} t^{1/p} u^{**}(t) \\ &= \sup_{t>0} t^{1/p-1} \int_0^t u^*(s) ds \\ &\leq \|u\|_{p,\infty} \sup_{t>0} t^{1/p-1} \int_0^t s^{-1/p} ds \\ &= \frac{p}{p-1} \|u\|_{p,\infty}, \end{aligned}$$

para cada $u \in L^{p,\infty}(\Omega)$, o que nos garante a conclusão da afirmação.

Afirmção 2: O espaço $(L^{p,\infty}(\Omega), \|\cdot\|_{L^{p,\infty}})$ é normado. De fato, antes de analisarmos todos os itens da definição de norma, note que

$$\sup_{t>0} t^{1/p} u^{**}(t),$$

está bem definido em $\mathbb{R}$, para todo $u \in L^{p,\infty}(\Omega)$, pois pela afirmação anterior, temos

$$\frac{p-1}{p} \|u\|_{L^{p,\infty}} \leq \|u\|_{p,\infty} < \infty.$$

Agora, verificaremos as condições da definição norma:

- (a) Note que para todo $u \in L^{p,\infty}(\Omega)$, temos $\|u\|_{L^{p,\infty}} \geq 0$, pois u^{**} é não negativa e $t^{1/p} > 0$, para todo $t > 0$.
- (b) Vejamos, $(\Rightarrow)$ Admita que $\|u\|_{L^{p,\infty}} = 0$. Logo, temos

$$\sup_{t>0} t^{1/p} u^{**}(t) = 0.$$

Uma vez que vale o item (a) da Proposição 2.1.4 e o item (c) da Proposição 2.1.10,

temos $u^{**}(t) = 0$ para todo $t > 0$. Dessa forma, pelo item (e) da Proposição 2.1.10, temos $u = 0$ q.t.p.

($\Leftarrow$) Supondo que $u = 0$ q.t.p., temos pelo item (e) da Proposição 2.1.10 que $u^{**} \equiv 0$. Portanto, é imediato que $\|u\|_{L^{p,\infty}} = 0$.

(c) Também é trivial, pois pelo item (b) da Proposição 2.1.10, temos

$$\|\alpha u\|_{L^{p,\infty}} = \sup_{t>0} t^{1/p} (\alpha u)^{**}(t) = \sup_{t>0} t^{1/p} |\alpha| u^{**}(t) = |\alpha| \sup_{t>0} t^{1/p} u^{**}(t) = |\alpha| \|u\|_{L^{p,\infty}}.$$

para todo $u \in L^{p,\infty}(\Omega)$.

(d) Usando a Proposição 2.1.12, temos

$$(u + v)^{**}(t) \leq u^{**}(t) + v^{**}(t),$$

para todo $t > 0$. Dessa forma, temos facilmente que

$$\begin{aligned} \|u + v\|_{L^{p,\infty}} &= \sup_{t>0} t^{1/p} (u + v)^{**}(t) \\ &\leq \sup_{t>0} t^{1/p} [u^{**}(t) + v^{**}(t)] \\ &\leq \sup_{t>0} t^{1/p} u^{**}(t) + \sup_{t>0} t^{1/p} v^{**}(t) \\ &= \|u\|_{L^{p,\infty}} + \|v\|_{L^{p,\infty}}. \end{aligned}$$

□

Teorema 2.4.4. Se $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um conjunto com medida finita, com $1 < p < \infty$, então o espaço $(L^{p,\infty}(\Omega), \|\cdot\|_{L^{p,\infty}})$ é invariante por rearranjo. Em particular, vale as imersões

$$L^p(\Omega) \hookrightarrow L^{p,\infty}(\Omega) \hookrightarrow L^1(\Omega).$$

Demonstração. Sem perda de generalidade, suponha que $|\Omega| = 1$. Provaremos o resultado através das afirmações abaixo:

Afirmção 1: O espaço $(L^{p,\infty}(\Omega), \|\cdot\|_{L^{p,\infty}})$ é invariante por rearranjo;

(a) Seja $u \in L^{p,\infty}(\Omega)$, onde $0 \leq v \leq u$ q.t.p. em Ω . Nestas condições,

$$\|u\|_{p,\infty} < \infty.$$

Utilizando o item (e) da Proposição 2.1.4, temos $\|v\|_{p,\infty} \leq \|u\|_{p,\infty} < \infty$. Logo, concluímos que $v \in L^{p,\infty}(\Omega)$. Além disso, pelo item (d) Proposição 2.1.10, temos $u^{**} \leq v^{**}$, o que faz garantir

$$\|v\|_{L^{p,\infty}} \leq \|u\|_{L^{p,\infty}},$$

pela definição de norma.

- (b) Suponha que $0 \leq u_n \uparrow u \in L^{p,\infty}(\Omega)$ q.t.p.. Daí, pelo item (f) da Proposição 2.1.10, temos

$$u_n^{**} \uparrow u^{**}.$$

Logo, pela definição de norma, é imediato que $\|u_n\|_{L^{p,\infty}} \uparrow \|u\|_{L^{p,\infty}}$.

- (c) Sejam $A \subset \Omega$ e $u = \chi_A$. Logo, sucede-se que $|A| \leq 1$, além de

$$u = \chi_A \Rightarrow u^* = \chi_{[0,|A|]} \Rightarrow u^{**}(t) = \begin{cases} 1, & t \leq |A|; \\ \frac{|A|}{t}, & t > |A|. \end{cases}$$

Dessa forma, note que para todo $t > 0$, temos

$$t^{1/p} u^{**}(t) = \begin{cases} t^{1/p}, & t \leq |A|; \\ \frac{|A|}{t^{1-1/p}}, & t > |A|. \end{cases}$$

Uma vez que $t^{1/p}$ cresce para todo $p > 1$, temos pela igualdade anterior que

$$t^{1/p} u^{**}(t) \leq |A|^{1/p},$$

para todo $t > 0$. Logo,

$$\|u\|_{L^{p,\infty}} = \sup_{t>0} t^{1/p} u^{**}(t) \leq |A|^{1/p} < \infty.$$

- (d) Seja $u \in L^{p,\infty}(\Omega)$, com $u^* = v^*$. Por definição, temos

$$\|v\|_{p,\infty} = \sup_{t>0} t^{1/p} v^*(t) = \sup_{t>0} t^{1/p} u^*(t) = \|u\|_{p,\infty} < \infty,$$

o que nos garante que $v \in L^{p,\infty}(\Omega)$. Além disso,

$$u^{**}(t) = \frac{1}{t} \int_0^t u^*(s) ds = \frac{1}{t} \int_0^t v^*(s) ds = v^{**}(t),$$

para todo $t \in (0, \infty)$. Portanto, pela definição da norma $\|\cdot\|_{L^{p,\infty}}$, concluímos que

$$\|u\|_{L^{p,\infty}} = \|v\|_{L^{p,\infty}}.$$

Afirmção 2: Valem as imersões $L^p(\Omega) \hookrightarrow L^{p,\infty}(\Omega) \hookrightarrow L^1(\Omega)$;

Primeiramente, note que para todo $v \in L^{p,\infty}(\Omega)$ tem-se $\|v\|_{p,\infty} \leq \|v\|_{L^{p,\infty}}$. Dessa

forma, tomando $u \in L^p(\Omega)$, basta provar que existe $C > 0$ tal que

$$\|u\|_{p,\infty} \leq c\|u\|_p,$$

para mostrar que $L^p(\Omega) \hookrightarrow L^{p,\infty}(\Omega)$, para cada $1 < p < \infty$. De fato, observe que

$$\begin{aligned} t^{1/p}u^*(t) &= \left\{ \int_0^t (s^{1/p}u^*(s))^p \frac{ds}{s} \right\}^{1/p} \\ &\leq \left(\int_0^t |u^*(s)|^p ds \right)^{1/p} \\ &= \left(\int_0^t |u(s)|^p ds \right)^{1/p} \\ &= \|u\|_p. \end{aligned}$$

Assim, aplicando o supremo, garantimos tal imersão. Por fim, pela Proposição 2.2.7, temos $L^{p,\infty}(\Omega) \hookrightarrow L^1(\Omega)$, já que tal espaço é invariante por rearranjo. $\square$

Capítulo 3

Imersões Ótimas do Espaço $W_{\Delta}^{2,1}(\Omega)$

Neste capítulo, trataremos da definição e de algumas propriedades no que diz respeito aos espaços reduzidos de Sobolev. Em sequência, mostraremos duas imersões, com constantes de imersão ótimas, que envolvem este espaço e suas principais consequências para a regularidade de funções.

3.1 Espaço Reduzido de Sobolev

Nesta seção estudaremos a respeito de um espaço que vai ser importante para todo a sequência desta produção. Vejamos a seguinte definição:

$$W_{\Delta}^{2,p}(\Omega) = cl\{u \in C^{\infty}(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega}), u|_{\partial\Omega} = 0; \|\Delta u\|_p < \infty\},$$

ou seja, $W_{\Delta}^{2,p}(\Omega)$ é o completamento do subespaço de $C^{\infty}(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ das funções que se anulam na fronteira de Ω tal que seu laplaciano possuem norma em $L^p(\Omega)$.

Proposição 3.1.1. Sejam Ω um domínio limitado, com $1 \leq p < \infty$. Valem as seguintes propriedades:

- (a) $W^{2,1}(\Omega) \cap W_0^{1,1}(\Omega) \subsetneq W_{\Delta}^{2,1}(\Omega)$;
- (b) $W_{\Delta}^{2,p}(\Omega) = W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$, desde que $p > 1$.

Demonstração. Vejamos,

- (a) Seja $u \in W^{2,1}(\Omega) \cap W_0^{1,1}(\Omega)$. Dessa forma, existe $(u_n) \subset C^{\infty}(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$, com $\|u_n - u\|_{2,1} \rightarrow 0$. Logo, temos

$$\|\Delta u_n - \Delta u\|_1 \rightarrow 0,$$

concluindo que $u \in W_{\Delta}^{2,1}(\Omega)$. No entanto, esta continência não é estrita devido ao trabalho de Ornstein (ver [13]) que mostra que é impossível, neste caso, controlar a norma L^1 das derivadas mistas a partir das derivadas não mistas que ocorrem no operador Δ .

(b) Iremos mostrar as inclusões:

($\subseteq$) Sendo $u \in W_{\Delta}^{2,p}(\Omega)$, temos $\|\Delta u\|_p < \infty$. Usando o Lema 9.17 do Gilbarg-Trudinger (ver [10]), segue que $\|u\|_{2,p} \leq C\|\Delta u\|_p$, para algum $C > 0$. Além disso, como u se anula na fronteira de Ω , concluímos que $u \in W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{2,p}(\Omega)$.

($\supseteq$) Seja $u \in W^{2,p}(\Omega) \cap W^{1,p}(\Omega)$, com $p > 1$. Dessa forma, existe $(u_n) \subset C^{\infty}(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$, com $\|u_n - u\|_{2,p} \rightarrow 0$. Logo, temos

$$\|\Delta u_n - \Delta u\|_p \rightarrow 0.$$

Portanto, concluímos que $u \in W_{\Delta}^{2,p}(\Omega)$. □

Observação: Um conjunto muito importante que será trabalhado na próxima seção é

$$W_{\Delta,rad}^{2,1}(B_R) = \{u \in W_{\Delta}^{2,1}(B_R); u \text{ é radialmente simétrica}\},$$

onde $B_R \subset \mathbb{R}^N$ é uma bola aberta de raio R e centro na origem.

Antes de prosseguirmos, buscaremos mostrar uma nova caracterização de $W_{\Delta}^{2,1}(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado. Nestas condições, seja o conjunto

$$E^{2,1}(\Omega) = \{u \in W_0^{1,1}(\Omega); \Delta u \in L^1(\Omega)\}.$$

Vale o seguinte resultado:

Proposição 3.1.2. O espaço $(E^{2,1}(\Omega), \|\Delta \cdot\|_1)$ é Banach, além de $E^{2,1}(\Omega) = W_{\Delta}^{2,1}(\Omega)$.

Demonstração. Primeiramente, mostraremos que $E^{2,1}(\Omega)$ é um espaço de Banach. De fato, tomando $(u_n) \subset E^{2,1}(\Omega)$ uma sequência de Cauchy, existe $g \in L^1(\Omega)$ tal que

$$\|\Delta u_n - g\|_1 \rightarrow 0.$$

Através dos artigos [8] e [5], sabemos que o problema

$$\begin{cases} -\Delta u &= g, \text{ em } \Omega \\ u &= 0, \text{ em } \partial\Omega \end{cases}$$

possui solução fraca $u \in W_0^{1,1}(\Omega)$, onde $g \in L^1(\Omega)$, além de $\Delta u \in L^1(\Omega)$. Portanto, concluímos que $E^{2,1}(\Omega)$ é Banach.

Agora, vamos mostrar que $W_{\Delta}^{2,1}(\Omega) \subset E^{2,1}(\Omega)$. Ao considerar $u \in W_{\Delta}^{2,1}(\Omega)$, existe $(u_n) \subset C^\infty(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ tal que

$$\|\Delta u_n\|_1 < \infty \quad \text{e} \quad \|\Delta u_n - \Delta u\|_1 \rightarrow 0,$$

onde $\Delta u \in L^1(\Omega)$. Considerando $g_n = -\Delta u_n \in L^1(\Omega)$, temos

$$\begin{cases} -\Delta u_n &= g_n, \text{ em } \Omega \\ u_n &= 0, \text{ em } \partial\Omega, \end{cases}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. Por fim, supondo $g = -\Delta u$, temos pela teoria de regularidade elíptica que

$$\|u_n - u\|_{W_0^{1,1}(\Omega)} \leq C \|g_n - g\|_1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

o que nos garante $u \in W_0^{1,1}(\Omega)$ e, conseqüentemente, a inclusão.

Por fim, provaremos que $E^{2,1}(\Omega) \subset W_{\Delta}^{2,1}(\Omega)$. Supondo que $v \in E^{2,1}(\Omega)$, temos por definição que

$$v \in W_0^{1,1}(\Omega) \quad \text{e} \quad h = \Delta v \in L^1(\Omega).$$

Uma vez que $L^1(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{|\cdot|_1}$, existe $(h_n) \subset C_0^\infty(\Omega)$ tal que $h_n \rightarrow h$ em $L^1(\Omega)$. Além disso, para cada $n \in \mathbb{N}$, considere o problema de Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta v_n &= h_n, \text{ em } \Omega \\ v_n &= 0, \text{ em } \partial\Omega. \end{cases}$$

Pela teoria de regularidade elíptica, concluímos que $v_n \in C^\infty(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$. Portanto, $\|\Delta(v_n - v)\|_1 \rightarrow 0$, concluindo que $v \in W_{\Delta}^{2,1}(\Omega)$. $\square$

3.2 Um resultado de Imersão para $N = 2$

Antes de provarmos o resultado principal desta seção e seu respectivo corolário, iremos abordar três lemas que serão de extrema importância para solucionarmos as problemáticas. No primeiro lema, iremos considerar $B_R \subset \mathbb{R}^2$ a bola aberta de raio R e centro na origem, além de $W_{\Delta, rad}^{2,1}(B_R)$ subespaço de $W_{\Delta}^{2,1}(B_R)$ de funções radiais, no qual a imersão que buscamos é válida. O segundo lema, presente na produção [6], é importante para garantir a inclusão entre os espaços $W^{2,1}(\Omega)$ e $L_{\exp}(\Omega)$. Já no terceiro lema, resultado presente no artigo [16] do matemático G. Talenti, conseguimos certa estimativa pontual sob às condições do problema de Dirichlet. Sequencialmente,

provaremos a imersão entre os espaços $W_{\Delta}^{2,1}(\Omega)$ e $L_{\exp}(\Omega)$, onde a constante $1/4\pi$ ligada à esta estimativa é *sharp*. Por fim, exibiremos um corolário que busca atribuir novas condições para responder um problema similar ao que foi proposto por H. Brezis e F. Merle em [6]. Sendo assim, começaremos com o primeiro lema:

Lema 3.2.1. Se $v \in W_{\Delta,rad}^{2,1}(B_R)$ tal que $\Delta v \leq 0$ e $v \geq 0$, então

$$\|v\|_{L_{\exp}(B_R)} \leq \frac{1}{4\pi} \|v\|_{W_{\Delta,rad}^{2,1}(B_R)}.$$

Demonstração. Seja $v \in W_{\Delta,rad}^{2,1}(B_R)$. Tome a função auxiliar

$$w(t) = 4\pi v(r) \in C^2(0, \infty),$$

com $r = |x| = Re^{-t/2} \in (0, R]$. Uma vez que $v(x) = v(|x|)$, temos

$$w(0) = 4\pi v(R) = 0.$$

Além disso, perceba que

$$w'(t) = 4\pi v_r(Re^{-t/2}) \cdot (-R/2)e^{-t/2} = -2\pi v_r(Re^{-t/2})Re^{-t/2},$$

onde

$$\lim_{k \rightarrow \infty} w'(k) = \lim_{k \rightarrow \infty} -2\pi v_r(Re^{-k/2})Re^{-k/2} = 0,$$

já que v_r pode ser estendida continuamente até o fecho da bola, nos garantido que tal função garante máximo e mínimo. Note também que

$$\begin{aligned} w''(t) &= -2\pi v_{rr}(Re^{-t/2}) \cdot (-R/2)e^{-t/2} \cdot (Re^{-t/2}) - 2\pi v_r(Re^{-t/2}) \cdot (-R/2)e^{-t/2} \\ &= \pi v_{rr}(Re^{-t/2})R^2e^{-t} + \pi v_r(Re^{-t/2})Re^{-t/2}. \end{aligned}$$

Afirmção: $\Delta v = v_{rr}(Re^{-t/2}) + \frac{v_r(Re^{-t/2})}{Re^{-t/2}}$, onde $r = Re^{-t/2}$;

Primeiramente, sejam $x = (x_1, x_2)$ e $|x| = r$. Temos,

$$v_{x_i}(|x|) = v_r(|x|) \cdot \frac{x_i}{|x|},$$

onde $i \in 1, 2$. Daí, segue-se também que

$$v_{x_i x_i}(|x|) = v_{rr}(|x|) \cdot \frac{x_i^2}{|x|^2} + v_r(|x|) \cdot \frac{|x| - x_i^2/|x|}{|x|^2} = v_{rr}(|x|) \cdot \frac{x_i^2}{|x|^2} + v_r(|x|) \cdot \left(\frac{1}{|x|} - \frac{x_i^2}{|x|^3} \right).$$

Logo, temos

$$\Delta v = v_{x_1 x_1}(|x|) + v_{x_2 x_2}(|x|) = v_{rr}(|x|) + v_r(|x|) \frac{1}{|x|} = v_{rr}(Re^{-t/2}) + \frac{v_r(Re^{-t/2})}{Re^{-t/2}}.$$

Dessa forma, temos pela afirmação 1 e por hipótese que

$$w''(t) = \pi R^2 e^{-t} \left[v_{rr}(Re^{-t/2}) + \frac{v_r(Re^{-t/2})}{Re^{-t/2}} \right] = \pi R^2 e^{-t} \cdot \Delta v|_{|x|=r} \leq 0.$$

Agora, perceba que

$$\|\Delta v\|_1 = \int_{B_R} -\Delta v \, dx = \int_0^R \int_{\partial B_R} -\Delta v \, dS_x dr = 2\pi \int_0^R - \left(v_{rr}(r) + \frac{v_r(r)}{r} \right) r dr.$$

Uma vez que $r = Re^{-t/2}$, temos $dr = -\frac{R}{2}e^{-t/2}dt$. Daí, fazendo uma mudança de variável, sucede-se que:

$$\begin{aligned} 2\pi \int_0^R - \left(v_{rr}(r) + \frac{v_r(r)}{r} \right) dr &= \pi \int_0^\infty -[R^2 e^{-t} v_{rr}(Re^{-t/2}) + Re^{-t/2} v_r(Re^{-t/2})] dt \\ &= \int_0^\infty -w''(t) dt. \end{aligned}$$

Além disso, perceba também que

$$\begin{aligned} w(t) &= \int_0^t w'(s) ds \\ &= \int_0^t \left(- \int_s^\infty w''(z) dz \right) ds \\ &= -t \int_t^\infty w''(z) dz - \int_0^t z w''(z) dz \\ &= t \int_0^\infty -w''(z) dz + \int_0^t (t-z) w''(z) dz \leq t \|\Delta v\|_1, \end{aligned}$$

já que $0 < z < t$ e $w''(z) \leq 0$. Daí, como $v(r) = \frac{1}{4\pi} w(t)$ e

$$r = Re^{-t/2} \Rightarrow \frac{r}{R} = e^{-t/2} \Rightarrow \log \frac{r}{R} = -t/2 \Rightarrow t = -2 \log \frac{r}{R} \Rightarrow t = 2 \log \frac{R}{r},$$

é imediato que

$$v(r) = \frac{1}{4\pi} w \left(2 \log \frac{R}{r} \right) \leq \frac{1}{4\pi} \cdot 2 \log \left(\frac{R}{r} \right) \|\Delta v\|_1 = \frac{1}{2\pi} \log \left(\frac{R}{r} \right) \|\Delta v\|_1.$$

Por fim, usando o item (e) da Proposição 2.1.4, sucede-se que

$$\begin{aligned} v^*(s) &\leq \frac{\|\Delta v\|_1}{2\pi} \left[\log \left(\frac{R}{r} \right) \right]^* (s) \\ &= \frac{\|\Delta v\|_1}{4\pi} \log \left(\frac{\pi R^2}{s} \right), \end{aligned}$$

o que nos garante pelo item (a) do Lema 2.3.2 que $u \in L_{\exp}(B_R)$. Portanto, dividindo ambos os membros por $1 + \log \left(\frac{\pi r^2}{t} \right)$ e depois aplicando o supremo, temos

$$\|v\|_{L_{\exp}(B_R)} \leq \frac{1}{4\pi} \|v\|_{W_{\Delta, rad}^{2,1}(B_R)},$$

o que conclui a demonstração. $\square$

Lema 3.2.2. (Brezis-Merle) Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um domínio limitado e u solução da equação

$$\begin{cases} -\Delta u &= f, & \text{em } \Omega \\ u &= 0, & \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

com $f \in L^1(\Omega)$. Se $\delta \in (0, 4\pi)$, então

$$\int_{\Omega} \exp \left[\frac{4\pi - \delta}{\|f\|_1} |u(x)| \right] dx < \infty.$$

Demonstração. Sejam $2R = \text{diam}(\Omega)$ tal que $\Omega \subset B_R$, onde B_R é uma bola aberta em $\mathbb{R}^2$ e f uma função que se anula fora de Ω . Tomando a solução da equação de Laplace

$$\Gamma(|x - y|) = \frac{1}{2\pi} \log \left(\frac{2R}{|x - y|} \right),$$

temos que o potencial Newtoniano

$$\bar{u}(x) = (\Gamma * |f|)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{B_R} \log \left(\frac{2R}{|x - y|} \right) |f(y)| dy$$

satisfaz $-\Delta \bar{u} = |f|$ em $\mathbb{R}^2$. Pelo princípio de máximo, sucede-se que $|u| \leq \bar{u}$ em Ω . Nestas condições,

$$\int_{\Omega} \exp \left(\frac{(4\pi - \delta)|u(x)|}{\|f\|_1} \right) dx \leq \int_{B_R} \exp \left(\frac{(4\pi - \delta)\bar{u}(x)}{\|f\|_1} \right) dx$$

e, conseqüentemente, sucede-se pela desigualdade de Jensen que

$$\begin{aligned}
 \int_{B_R} \exp\left(\frac{(4\pi - \delta)\bar{u}(x)}{\|f\|_1}\right) dx &\leq \int_{B_R} \int_{B_R} \frac{|f(y)|}{\|f\|_1} \left(\frac{2R}{|x-y|}\right)^{2-\delta/2\pi} dy dx \\
 &= \frac{1}{\|f\|_1} \int_{B_R} |f(y)| \left[\int_{B_R} \left(\frac{2R}{|x-y|}\right)^{2-\delta/2\pi} dx \right] dy \\
 &= \int_{B_R} \left(\frac{2R}{|x-y|}\right)^{2-\delta/2\pi} dx \\
 &= (2R)^{2-\delta/2\pi} \int_{B_R} \left(\frac{1}{|x-y|}\right)^{2-\delta/2\pi} dx,
 \end{aligned}$$

já que $f \equiv 0$ em Ω^c . Portanto, usando o Lema 1.4.4, concluímos o resultado. $\square$

Antes de apresentarmos o próximo lema, sejam o conjunto

$$\Omega^\# = \left\{ x \in \mathbb{R}^N; \frac{\omega_{N-1}}{N} |x|^N \in [0, |\Omega|] \right\}.$$

e o rearranjo decrescente $\phi^* : [0, |\Omega|] \rightarrow \mathbb{R}$. A função $\phi^\# : \Omega^\# \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\phi^\#(x) = \phi^*\left(\frac{\omega_{N-1}}{N} |x|^N\right),$$

é chamada *rearranjo esfericamente simétrico*. É importante notar que $\Omega^\#$ é exatamente a bola aberta $B_R(0)$, com $R = \left(\frac{|\Omega|N}{\omega_{N-1}}\right)^{1/N}$, pois

$$\frac{\omega_{N-1}}{N} |x|^N \leq |\Omega| \Leftrightarrow |x| \leq \left(\frac{|\Omega|N}{\omega_{N-1}}\right)^{1/N}.$$

Além disso, é importante destacar que $|\Omega| = |\Omega^\#|$, já que

$$|\Omega^\#| = |B_R(0)| = \int_{\Omega} \chi_{B_R(0)}(x) dx = |\Omega|.$$

Lema 3.2.3. (Critério de Comparação de Talenti) Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um domínio limitado. Se u, v são soluções fracas dos respectivos problemas

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & \text{em } \Omega \\ u = 0, & \text{em } \partial\Omega \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} -\Delta v = f^\#, & \text{em } \Omega^\# \\ v = 0, & \text{em } \partial\Omega^\# \end{cases}$$

onde $f \in L^p(\Omega)$, com $p > 1$, então $v(x) \geq u^\#(x)$, para todo $x \in \Omega^\#$.

Demonstração. Ver Teorema 1, página 702 em [16]. $\square$

Agora, buscaremos mostrar o caso geral do Lema 3.2.1.

Teorema 3.2.4. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um domínio limitado. Então, para cada $u \in W_{\Delta}^{2,1}(\Omega)$, temos

$$\|u\|_{L_{\exp}} \leq \frac{1}{4\pi} \|\Delta u\|_1.$$

Em particular, vale a imersão

$$W_{\Delta}^{2,1}(\Omega) \hookrightarrow L_{\exp}(\Omega).$$

Demonstração. Inicialmente, seja $u \in W_{\Delta}^{2,1}(\Omega)$. Pela Proposição 3.1.2, temos $u \in W_0^{1,1}(\Omega)$ tal que $\Delta u \in L^1(\Omega)$. Nestas condições, pelo Lema 3.2.2, concluimos que $u \in L_{\exp}(\Omega)$ e, conseqüentemente, $W_{\Delta}^{2,1}(\Omega) \subset L_{\exp}(\Omega)$.

Agora, considere u e v soluções fracas dos problemas

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & \text{em } \Omega \\ u = 0, & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} -\Delta v = f^{\#}, & \text{em } \Omega^{\#} \\ v = 0, & \text{em } \partial\Omega^{\#}, \end{cases}$$

com $f \in L^p(\Omega)$, para $p > 1$. Dessa forma, temos pelo Lema 3.2.3 que

$$v(x) \geq u^{\#}(x) \geq 0$$

para cada $x \in \Omega^{\#}$ e, pelo item (e) da Proposição 2.1.4, sucede-se

$$v^*(t) \geq u^*(t), \quad \forall t \in [0, |\Omega|],$$

já que $|\Omega^{\#}| = |\Omega|$. Agora, seja $u \in C^{\infty}(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ tal que $u|_{\partial\Omega} = 0$ e $f := -\Delta u$. Uma vez que $L^1(\Omega)$ é um espaço invariante por rearranjo, segue-se

$$\|\Delta u\|_1 = \|f\|_1 = \|f^{\#}\|_1 = \|\Delta v\|_1.$$

Portanto, como $v \in W_{\Delta, rad}^{2,1}(\Omega^{\#})$ e $\Delta v \leq 0$, já que $f^{\#}$ é uma função não negativa, temos pelo Lema 3.2.1 que

$$\|u\|_{L_{\exp}} \leq \|v\|_{L_{\exp}} \leq \frac{1}{4\pi} \|\Delta v\|_1 = \frac{1}{4\pi} \|\Delta u\|_1,$$

o que conclui a prova do teorema. $\square$

A constante $1/4\pi$ do teorema anterior é a menor que satisfaz tal estimativa acima. De fato, se supormos o contrário, então existe $0 < \varepsilon < 1$ tal que

$$\|v\|_{L_{\exp}} \leq \frac{1-\varepsilon}{4\pi} \|\Delta v\|_1, \tag{3.1}$$

para cada $v \in W_{\Delta,rad}^{2,1}(\Omega)$. Agora, fixe $\alpha \in \left(4\pi, \frac{4\pi}{1-\varepsilon}\right)$ e tome $u \in W_{\Delta}^{2,1}$, com $\|\Delta u\| \leq$

1. Pela Proposição 2.1.7, temos

$$\int_{\Omega} e^{\alpha|u|} dx = \int_0^{|\Omega|} e^{\alpha u^*} dt$$

e, por (3.1), segue que

$$u^*(t) \leq \frac{1-\varepsilon}{4\pi} \left(1 + \log \left(\frac{|\Omega|}{t}\right)\right).$$

Dessa maneira,

$$\begin{aligned} \int_0^{|\Omega|} e^{\alpha u^*} dt &\leq \int_0^{|\Omega|} \exp \left(\alpha \frac{1-\varepsilon}{4\pi} \left(1 + \log \left(\frac{|\Omega|}{t}\right)\right) \right) dt \\ &= \int_0^{|\Omega|} \exp \left(\alpha \frac{1-\varepsilon}{4\pi} + \log \left(\frac{|\Omega|}{t}\right)^{\alpha(1-\varepsilon)/4\pi} \right) dt \\ &= \int_0^{|\Omega|} \exp \left(\alpha \frac{1-\varepsilon}{4\pi} \right) \cdot \exp \left(\log \left(\frac{|\Omega|}{t}\right)^{\alpha(1-\varepsilon)/4\pi} \right) dt \\ &= (|\Omega|e)^{\alpha(1-\varepsilon)/4\pi} \int_0^{|\Omega|} t^{-\alpha(1-\varepsilon)/4\pi} dt < C, \end{aligned}$$

onde C é uma constante que não depende da função u . No entanto, isso é uma contradição, pois

$$\sup_{\substack{u \in W_{\Delta,rad}^{2,1}(\Omega) \\ \|\Delta u\|_1 \leq 1}} \int_{\Omega} (e^{4\pi\beta|u|} - 1) dx = +\infty$$

para $\beta \geq 1$ qualquer. Vejamos, através de um exemplo, que de fato isto ocorre:

Exemplo 3.2.5. Seja $\Omega = B_R$ uma bola aberta de raio R e centro na origem. Além disso, considere a sequência

$$w_n(t) = \begin{cases} t, & \text{se } 0 \leq t \leq 2n \\ -2e^{2n-t} + 2e^{n-t/2} + 2n, & \text{se } 2n \leq t \leq 2\log 2 \\ 2n + 1/2, & \text{se } t \geq 2n + 2\log 2. \end{cases}$$

Note que a primeira derivada de w_n é dada por

$$w'_n(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } 0 \leq t \leq 2n \\ 2e^{2n-t} - e^{n-t/2}, & \text{se } 2n \leq t \leq 2\log 2 \\ 0, & \text{se } t \geq 2n + 2\log 2 \end{cases}$$

e a segunda derivada de w_n é dada por

$$w_n''(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 \leq t \leq 2n \\ -2e^{2n-t} + \frac{1}{2}e^{n-t/2}, & \text{se } 2n \leq t \leq 2\log 2 \\ 0, & \text{se } t \geq 2n + 2\log 2. \end{cases}$$

Agora, seja $r = |x|$ e tome a sequência de funções

$$u_n(r) = \frac{1}{4\pi} w_n \left(2 \log \frac{R}{r} \right).$$

Nestas condições, temos

$$u_n'(r) = -\frac{1}{2\pi r} w_n' \left(2 \log \frac{R}{r} \right) \quad \text{e} \quad \Delta u_n(r) = \frac{1}{\pi r^2} w_n'' \left(2 \log \frac{R}{r} \right).$$

Dessa forma, percebe-se que

$$\int_{B_R} |\Delta u_n| dx = \int_0^R \int_{\partial B_R} |\Delta u_n| dS_x dr = 2\pi \int_0^R |\Delta u_n| r dr.$$

Agora, tomando $t = 2 \log \frac{R}{r}$, temos $r = Re^{-t/2}$ e $dr = -\frac{R}{2} e^{-t/2} dt$. Logo,

$$\begin{aligned} \int_{B_R} |\Delta u_n| dx &= 2\pi \int_0^R |\Delta u_n| r dr \\ &= \int_0^R \frac{2}{r} \left| w_n'' \left(2 \log \frac{R}{r} \right) \right| dr \\ &= \int_0^\infty |w_n''(t)| dt \\ &= \int_{2n}^{2n+\log 2} \left| -2e^{2n-t} + \frac{1}{2}e^{n-t/2} \right| dt. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Fazendo $u = 2n - t$, temos

$$\begin{aligned} \int_{2n}^{2n+\log 2} \left| -2e^{2n-t} + \frac{1}{2}e^{n-t/2} \right| dt &= \int_{-2\log 2}^0 \left| -2e^u + \frac{1}{2}e^{u/2} \right| du \\ &= \int_{-2\log 2}^0 \left(-2e^u + \frac{1}{2}e^{u/2} \right) du \\ &= -2 \int_{-2\log 2}^0 e^u du + \frac{1}{2} \int_{-2\log 2}^0 e^{u/2} du \\ &= 1 \end{aligned} \tag{3.3}$$

o que nos garante por (3.2) e (3.3) que $\|\Delta u_n\|_1 = 1$.

Por outro lado, note que

$$\int_{B_R} e^{4\pi\beta|u_n|} dx = 2\pi \int_0^R e^{4\pi\beta|u_n|} r dr.$$

Além disso, tomando novamente $t = 2 \log \frac{R}{r}$, temos como anteriormente que

$$r = Re^{-t/2} \text{ e } dr = -\frac{R}{2} e^{-t/2} dt.$$

Desse modo,

$$\int_{B_R} e^{4\pi\beta|u_n|} dx = \pi R^2 \int_0^{+\infty} e^{\beta w_n - t} dt.$$

Portanto, para concluirmos, iremos analisar dois casos:

1° caso: Se $\beta > 1$, então

$$\int_{B_R} e^{4\pi\beta|u_n|} dx \geq \pi R^2 \int_0^{2n} e^{(\beta-1)t} dt = \frac{\pi}{\beta-1} (e^{2(\beta-1)n} - 1) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty.$$

2° caso: Se $\beta = 1$, então

$$\int_{B_R} e^{4\pi|u_n|} dx \geq \pi R^2 \int_0^{2n} dt = 2n\pi \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty.$$

Observação: Por fim, para estabelecer

$$\sup_{\substack{u \in W_{\Delta, rad}^{2,1}(\Omega) \\ \|\Delta u\|_1 \leq 1}} \int_{\Omega} (e^{4\pi\beta|u|} - 1) dx = +\infty$$

para qualquer domínio limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, pode-se proceder por aproximação, como em [6], considerando os seguintes problemas,

$$\begin{cases} \Delta u_n &= f_n, \text{ em } \Omega \\ u_n &= 0, \text{ em } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $\|f_n\| \leq 1$ tal que $\lim f_n = \delta_{x_0}$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Dessa forma, $\lim u_n = u$, onde

$$u = \frac{1}{2\pi} \log \left(\frac{1}{|x - x_0|} \right),$$

para $x \rightarrow x_0$.

Agora, provaremos o seguinte corolário:

Corolário 3.2.6. Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ e $\phi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ uma função contínua tal que

$e^{4\pi t}\phi(t) \uparrow +\infty$. Então, existe uma constante $C = C(\phi) > 0$ tal que

$$\sup_{\substack{u \in W_{\Delta}^{2,1}(\Omega) \\ \|\Delta u\|_1 = 1}} \int_{\Omega} e^{4\pi|u|}\phi(|u|)dx \leq C|\Omega|$$

se, e somente se, $\phi(t)$ é integrável quando t se aproxima do infinito.

Demonstração. Vejamos,

($\Rightarrow$) Inicialmente, suponha que $\phi(t)$ não é integrável quando se aproxima do infinito. Assim como no Exemplo 3.2.5, sejam $\Omega = B_R$ e (u_n) uma sequência de funções definida por

$$u_n(r) = \frac{1}{4\pi} w_n \left(2 \log \frac{R}{r} \right),$$

para cada $n \in \mathbb{N}$, onde $r = |x|$ e

$$w_n(t) = \begin{cases} t, & \text{se } 0 \leq t \leq 2n \\ -2e^{2n-t} + 2e^{n-t/2} + 2n, & \text{se } 2n \leq t \leq 2 \log 2 \\ 2n + 1/2, & \text{se } t \geq 2n + 2 \log 2. \end{cases}$$

Seja $t = 2 \log \frac{R}{r}$. Logo, temos

$$r = Re^{-t/2} \quad \text{e} \quad dr = -\frac{R}{2}e^{-t/2}dt$$

e, consequentemente, sucede-se

$$\begin{aligned} \int_{B_R} e^{4\pi|u_n|}\phi(|u_n|)dx &= \int_{B_R} e^{w_n(2 \log R/r)}\phi\left(\frac{1}{4\pi}w_n\left(2 \log \frac{R}{r}\right)\right)dx \\ &= \int_0^R \int_{\partial B_R} e^{w_n(2 \log R/r)}\phi\left(\frac{1}{4\pi}w_n\left(2 \log \frac{R}{r}\right)\right)dS_x dr \\ &= 2\pi \int_0^R e^{w_n(2 \log R/r)}\phi\left(\frac{1}{4\pi}w_n\left(2 \log \frac{R}{r}\right)\right)r dr \\ &= \pi R^2 \int_0^{+\infty} e^{w_n(t)-t}\phi\left(\frac{1}{4\pi}w_n(t)\right)dt \\ &\geq \pi R^2 \int_0^{2n} \phi\left(\frac{t}{4\pi}\right)dt. \end{aligned}$$

Fazendo outra mudança de variáveis, tomando $u = t/4\pi$, temos $4\pi du = dt$ e também

$$\int_{B_R} e^{4\pi|u_n|}\phi(|u_n|)dx \geq \pi R^2 \int_0^{2n} \phi\left(\frac{t}{4\pi}\right)dt = 4\pi^2 R^2 \int_0^{n/2\pi} \phi(u)du \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty.$$

Para o caso em que Ω não é uma bola, basta utilizar a técnica de aproximação como

no Exemplo 3.2.5.

($\Leftarrow$) Agora, sejam $u \in W_{\Delta}^{2,1}(\Omega)$, $\|\Delta u\|_1 = 1$ e $\phi(s) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ uma função contínua quando t se aproxima do infinito tal que $e^{4\pi s}\phi(s)$ é monótona crescente para cada $s \geq s_0$. Pela Proposição 2.1.7, temos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} e^{4\pi|u|}\phi(|u|)dx &= \int_0^{|\Omega|} e^{4\pi u^*(t)}\phi(u^*(t))dt \\ &\leq |\Omega|e^{4\pi s_0} \max_{s \in [0, s_0]} \phi(s) + \int_0^{t_0} e^{4\pi u^*(t)}\phi(u^*(t))dt, \end{aligned}$$

onde $t_0 = \inf\{t; u^*(t) \leq s_0\}$, pois pelo Teorema do Valor Médio podemos supor, sem perda de generalidade, que existe $s_0 \in [t_0, |\Omega|]$ tal que

$$\int_{t_0}^{|\Omega|} e^{4\pi u^*(t)}\phi(u^*(t))dt \leq e^{4\pi u^*(s_0)}\phi(u^*(s_0))|\Omega|.$$

Agora, observe que no intervalo $[0, t_0]$ tem-se $u^*(t) > s_0$, onde o mapa $t \mapsto e^{4\pi u^*(t)}\phi(u^*(t))$ é crescente. Dessa forma, como

$$u^*(t) \leq \frac{1}{4\pi}[1 + \log(|\Omega|/t)], \quad \forall t \in [0, |\Omega|]$$

devido a definição da quase norma de Zygmund, sucede-se que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} e^{4\pi|u|}\phi(|u|)dx &\leq C_0|\Omega| + \int_0^{t_0} e^{1+\log(|\Omega|)-\log t}\phi\left(\frac{1}{4\pi}\log\left(\frac{|\Omega|}{t}\right) + \frac{1}{4\pi}\right)dt \\ &= C_0|\Omega| + e|\Omega| \int_0^{t_0} \frac{1}{t}\phi\left(\frac{1}{4\pi}\log\left(\frac{|\Omega|}{t}\right) + \frac{1}{4\pi}\right)dt. \end{aligned}$$

Agora, tomando $s = \frac{1}{4\pi}\log\left(\frac{|\Omega|}{t}\right) + \frac{1}{4\pi}$, temos $ds = -\frac{1}{4\pi t}dt$. Daí, segue-se que

$$\int_0^{t_0} \frac{1}{t}\phi\left(\frac{1}{4\pi}\log\left(\frac{|\Omega|}{t}\right) + \frac{1}{4\pi}\right)dt = \int_{\frac{1}{4\pi}\log\left(\frac{|\Omega|}{t_0}\right) + \frac{1}{4\pi}}^{+\infty} \phi(s)ds.$$

Uma vez que $\phi(s) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ é uma função contínua tal que $e^{4\pi t}\phi(t) \uparrow +\infty$, concluímos que

$$\int_{\frac{1}{4\pi}\log\left(\frac{|\Omega|}{t_0}\right) + \frac{1}{4\pi}}^{+\infty} \phi(s)ds \leq K,$$

para algum $K \in \mathbb{R}$. Portanto, concluímos que

$$\int_{\Omega} e^{4\pi|u|}\phi(|u|)dx \leq (C_0 + Ke)|\Omega| = C(\phi)|\Omega|,$$

onde $C(\phi) = C_0 + Ke$, nos garantindo que

$$\sup_{\substack{u \in W_{\Delta}^{2,1}(\Omega) \\ \|\Delta u\|_1=1}} \int_{\Omega} e^{4\pi|u|} \phi(|u|) dx \leq C|\Omega|.$$

□

3.3 Um resultado de Imersão para o caso $N > 2$

Antes de provarmos o resultado principal e seu respectivo corolário, iremos seguir os passos semelhantes da seção anterior. Inicialmente, mostraremos que o resultado é válido para o caso particular das funções serem radialmente simétricas, onde o conjunto base é uma bola aberta. Logo depois, provaremos a imersão entre os espaços $W_{\Delta}^{2,1}(\Omega)$ e $L^{\frac{N}{N-2},\infty}(\Omega)$, onde a constante $(\omega_{N-1}^{2/N}(N-2)N^{\frac{N-2}{N}})^{-1}$ ligada à esta estimativa é *sharp* utilizando o critério de comparação de Talenti. Por fim, exibiremos um corolário que busca atribuir novas condições para responder um problema similar ao que foi proposto por V. G. Maz'ya em [12].

Lema 3.3.1. Se $v \in W_{\Delta,rad}^{2,1}(B_R)$ tal que $\Delta v \leq 0$ e $v \geq 0$, então

$$\|v\|_{\frac{N}{N-2},\infty} \leq \frac{1}{2\omega_{N-1}^{2/N}(N-2)N^{\frac{N-2}{N}}} \|v\|_{W_{\Delta,rad}^{2,1}(B_R)}.$$

Demonstração. Seja $v \in W_{\Delta,rad}^{2,1}(B_R)$. Tomaremos a função auxiliar

$$w(t) = \omega_{N-1}(N-2)R^{N-2}v(r),$$

com $r = |x| = Rt^{\frac{-1}{N-2}}$ e $t \geq 1$. Uma vez que $v(x) = v(|x|)$, temos

$$w(1) = \omega_{N-1}(N-2)R^{N-2}v(R) = 0.$$

Além disso, percebe-se que

$$\begin{aligned} w'(t) &= \omega_{N-1}(N-2)R^{N-2}v_r(Rt^{\frac{-1}{N-2}}) \cdot \left(\frac{-R}{N-2}\right) t^{(1-n)/(n-2)} \\ &= \omega_{N-1}R^{N-1}v_r(Rt^{\frac{-1}{N-2}}) \cdot (-1)t^{(1-n)/(n-2)}, \end{aligned}$$

onde

$$\lim_{k \rightarrow \infty} w'(k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \omega_{N-1}R^{N-1}v_r(Rk^{\frac{-1}{N-2}}) \cdot (-1)k^{(1-n)/(n-2)} = 0,$$

já que v_r pode ser estendida continuamente até o fecho da bola, nos garantido que tal

função garante máximo e mínimo. Note também que

$$\begin{aligned} w''(t) &= \omega_{N-1} R^{N-1} v_{rr}(Rt^{-\frac{1}{N-2}}) \cdot \left(\frac{-R}{N-2} \right) t^{\frac{1-N}{N-2}} \cdot (-1) t^{\frac{1-N}{N-2}} \\ &\quad + \omega_{N-1} R^{N-1} v_r(Rt^{-\frac{1}{N-2}}) \cdot \left(\frac{N-1}{N-2} \right) t^{\frac{1-N}{N-2}-1} \\ &= \omega_{N-1} \cdot \frac{R^N}{(N-2)t^{\frac{N-1}{N-2}}} \left[v_{rr}(Rt^{\frac{-1}{N-2}}) + \frac{v_r(Rt^{\frac{-1}{N-2}})}{Rt^{\frac{-1}{N-2}}}(N-1) \right]. \end{aligned}$$

Afirmção: $\Delta v = v_{rr}(Rt^{\frac{-1}{N-2}}) + \frac{v_r(Rt^{\frac{-1}{N-2}})}{Rt^{\frac{-1}{N-2}}}(N-1)$, onde $r = Rt^{\frac{-1}{N-2}}$;

Primeiramente, sejam $x = (x_1, x_2, \dots, x_N)$ e $|x| = r$. Temos,

$$v_{x_i}(|x|) = v_r(|x|) \cdot \frac{x_i}{|x|},$$

onde $i \in \{1, 2, \dots, N\}$. Daí, segue-se também que

$$v_{x_i x_i}(|x|) = v_{rr}(|x|) \cdot \frac{x_i^2}{|x|^2} + v_r(|x|) \cdot \frac{|x| - x_i^2/|x|}{|x|^2} = v_{rr}(|x|) \cdot \frac{x_i^2}{|x|^2} + v_r(|x|) \cdot \left(\frac{1}{|x|} - \frac{x_i^2}{|x|^3} \right).$$

Logo, temos

$$\begin{aligned} \Delta v &= \sum_{i=1}^N \left[v_{rr}(|x|) \cdot \frac{x_i^2}{|x|^2} + v_r(|x|) \cdot \left(\frac{1}{|x|} - \frac{x_i^2}{|x|^3} \right) \right] \\ &= v_{rr}(|x|) + \frac{v_r(|x|)}{|x|}(N-1) \\ &= v_{rr}(Rt^{\frac{-1}{N-2}}) + \frac{v_r(Rt^{\frac{-1}{N-2}})}{Rt^{\frac{-1}{N-2}}}(N-1). \end{aligned}$$

Dessa forma, temos pela afirmação e por hipótese que

$$\begin{aligned} w''(t) &= \frac{\omega_{N-1} \cdot R^N}{(N-2)t^{\frac{N-1}{N-2}}} \left[v_{rr}(Rt^{\frac{-1}{N-2}}) + \frac{v_r(Rt^{\frac{-1}{N-2}})}{Rt^{\frac{-1}{N-2}}}(N-1) \right] \\ &= \frac{\omega_{N-1} \cdot R^N}{(N-2)t^{\frac{N-1}{N-2}}} \cdot \Delta v|_{|x|=r} \leq 0. \end{aligned}$$

Agora, perceba que

$$\|\Delta v\|_1 = \int_{B_R} -\Delta v \, dx = - \int_0^R \left(v_{rr}(r) + \frac{v_r(r)}{r}(N-1) \right) \omega_{N-1} r^{N-1} dr.$$

Uma vez que $r = Rt^{\frac{-1}{N-2}}$, temos $t = R^{N-2}/r^{N-2}$ e, consequentemente, sucede-se $dt =$

$R^{N-2}(2-N)r^{1-N}dr$. Daí, fazendo uma mudança de variável, temos:

$$\|\Delta v\|_1 = - \int_0^R \left(v_{rr}(r) + \frac{v_r(r)}{r}(N-1) \right) \omega_{N-1} r^{N-1} dr = \int_1^\infty -w''(t) dt.$$

Além disso, perceba também que

$$\begin{aligned} w(t) &= \int_1^t w'(s) ds \\ &= \int_1^t \left(- \int_s^\infty w''(z) dz \right) ds \\ &= (1-t) \int_t^\infty w''(z) dz - \int_1^t z w''(z) dz \\ &= (t-1) \int_1^\infty -w''(z) dz + \int_1^t (t-z) w''(z) dz \leq (t-1) \|\Delta v\|_1, \end{aligned}$$

já que $1 < z < t$ e $w''(z) \leq 0$. Daí, como $v(r) = \frac{w(t)}{\omega_{N-1}(N-2)R^{N-2}}$, é imediato que

$$v(r) = \frac{w(t)}{\omega_{N-1}(N-2)R^{N-2}} \leq \frac{\|\Delta v\|_1}{\omega_{N-1}(N-2)R^{N-2}} \left(\frac{R^{N-2}}{r^{N-2}} - 1 \right).$$

Por fim, usando o item (e) da Proposição 2.1.4, vejamos que

$$\begin{aligned} v^*(s) &\leq \frac{\|\Delta v\|_1}{\omega_{N-1}(N-2)R^{N-2}} \left(\frac{R^{N-2}}{r^{N-2}} - 1 \right)^* (s) \\ &= \frac{\|\Delta v\|_1}{\omega_{N-1}(N-2)R^{N-2}} \left[\left(\frac{\omega_{N-1}}{N} \right)^{\frac{N-2}{N}} \frac{R^{N-2}}{s^{\frac{N-2}{N}}} - 1 \right], \end{aligned}$$

com $s \in \left(0, \frac{\omega_{N-1}}{N} R^N\right)$. Portanto, concluímos que

$$\|v\|_{\frac{N}{N-2}, \infty} = \sup_{s \in (0, |\Omega|)} v^*(s) s^{\frac{N-2}{N}} \leq \frac{1}{\omega_{N-1}^{2/N} (N-2) N^{\frac{N-2}{N}}} \|\Delta v\|_1.$$

□

Agora, buscaremos mostrar o caso geral:

Teorema 3.3.2. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado, com $N > 2$. Então, para cada $u \in W_{\Delta}^{2,1}(\Omega)$, temos

$$\|u\|_{\frac{N}{N-2}, \infty} \leq \frac{1}{\omega_{N-1}^{2/N} (N-2) N^{\frac{N-2}{N}}} \|\Delta u\|_1.$$

Em particular, vale a imersão

$$W_{\Delta}^{2,1}(\Omega) \hookrightarrow L^{\frac{N}{N-2},\infty}(\Omega).$$

Demonstração. Analogamente ao Teorema 3.2.4, para provarmos a estimativa proposta neste resultado, basta utilizar o critério de comparação de Talenti (ver Lema 3.2.3) e o Lema 3.3.1 que prova o resultado para o caso particular desta desigualdade para bolas, com funções radialmente simétricas. Por fim, pela definição dos espaços de Lorentz, é imediato que $W_{\Delta}^{2,1}(\Omega) \hookrightarrow L^{\frac{N}{N-2},\infty}(\Omega)$. $\square$

A constante $(\omega_{N-1}^{2/N}(N-2)N^{\frac{N-2}{N}})^{-1}$ do teorema anterior é a menor que satisfaz tal estimativa acima. De fato, tomando a sequência de funções em $\Omega = B_R$, temos

$$u_n(r) = \frac{1}{\omega_{N-1}(N-2)R^{N-2}} w_n \left(\left(\frac{R}{r} \right)^{N-2} - 1 \right), \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

onde w_n está definida no Exemplo 3.2.5. Note que,

$$u'_n(r) = \frac{1}{\omega_{N-1}r^{N-1}} w'_n \left(\left(\frac{R}{r} \right)^{N-2} - 1 \right) \text{ e } \Delta u_n(r) = \frac{(N-2)R^{N-2}}{\omega_{N-1}r^{2N-2}} w''_n \left(\left(\frac{R}{r} \right)^{N-2} - 1 \right),$$

onde $u_n \in W_{\Delta}^{2,1}(B_R)$. Fazendo mais alguns cálculos análogos ao do Exemplo 3.2.5, tem-se

$$\|\Delta u_n\|_1 = \int_0^\infty |w''(t)| dt = 1.$$

Uma vez que a sequência u_n é um rearranjo esfericamente simétrico, temos

$$u_n^*(s) = u_n \left(\left(\frac{sN}{\omega_{N-1}} \right)^{1/N} \right) = \frac{1}{\omega_{N-1}(N-2)R^{N-2}} w_n \left(\left(\frac{\omega_{N-1}R^N}{Ns} \right)^{\frac{N-2}{N}} - 1 \right).$$

Nestas condições, sucede-se que

$$\begin{aligned} \|u_n\|_{\frac{N}{N-2},\infty} &= \sup_{s \in (0, \frac{\omega_{N-1}}{N}R^N)} u_n^*(s) s^{\frac{N-2}{N}} \\ &= \frac{1}{\omega_{N-1}(N-2)R^{N-2}} \sup_{s \in (0, \frac{\omega_{N-1}}{N}R^N)} w_n \left(\left(\frac{\omega_{N-1}R^N}{Ns} \right)^{\frac{N-2}{N}} - 1 \right) s^{\frac{N-2}{N}} \\ &= \frac{1}{\omega_{N-1}^{2/N}(N-2)N^{\frac{N-2}{N}}} \sup_{t \in (0,\infty)} \frac{w_n(t)}{t+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\omega_{N-1}^{2/N}(N-2)N^{\frac{N-2}{N}}}. \end{aligned}$$

Corolário 3.3.3. Sendo $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado, com $N > 2$ e $\phi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ uma função contínua tal que $t^{\frac{N}{N-2}}\phi(t) \uparrow +\infty$, então existe uma constante $C = C(\phi) > 0$

tal que

$$\sup_{\substack{u \in W_{\Delta}^{2,1}(\Omega) \\ \|\Delta u\|_1=1}} \int_{\Omega} |u|^{\frac{N}{N-2}} \phi(|u|) dx \leq C|\Omega|$$

se, e somente se, $\phi(t)/t$ é integrável quando t se aproxima do infinito.

Demonstração. Vejamos,

($\Rightarrow$) Inicialmente, suponha que $\phi(t)/t$ não é integrável quando se aproxima do infinito. Assim como no Exemplo 3.2.5, sejam $\Omega = B_R$ e (u_n) uma sequência de funções definida por

$$u_n(r) = \frac{1}{\omega_{N-1}(N-2)R^{N-2}} w_n \left(\left(\frac{R}{r} \right)^{N-2} - 1 \right),$$

para cada $n \in \mathbb{N}$, onde $r = |x|$. Sendo $t = \left(\frac{R}{r} - 1 \right)^{N-2} - 1$, temos

$$r = R/(t+1)^{1/(N-2)} \quad \text{e} \quad dt = R^{N-2}(2-N)r^{1-N}dr$$

e, conseqüentemente, sucede-se

$$\begin{aligned} \int_{B_R} |u_n|^{\frac{N}{N-2}} \phi(|u_n|) dx &= \int_{B_R} \frac{k_N}{\omega_{N-1}} \left[w_n \left(\left(\frac{R}{r} \right)^{N-2} - 1 \right) \right]^{\frac{N}{N-2}} \phi(|u_n|) dx \\ &= \int_0^R \int_{\partial B_R} \frac{k_N}{\omega_{N-1}} \left[w_n \left(\left(\frac{R}{r} \right)^{N-2} - 1 \right) \right]^{\frac{N}{N-2}} \phi(|u_n|) dS_x dr \\ &= k_N \int_0^R r^{N-1} \left[w_n \left(\left(\frac{R}{r} \right)^{N-2} - 1 \right) \right]^{\frac{N}{N-2}} \phi(|u_n|) dr \\ &= \frac{k_N R^N}{N-2} \int_0^{+\infty} \frac{[w_n(t)]^{\frac{N}{N-2}} \phi(Aw_n(t))}{(t+1)^{2\frac{N-1}{N-2}}} dt \\ &\geq \frac{k_N R^N}{N-2} \int_1^{2n} \left(\frac{t}{t+1} \right)^{2\frac{N-1}{N-2}} \frac{\phi(At)}{t} dt \\ &\geq \frac{k_N R^N}{N-2} \cdot C_1 \int_1^{2n} \frac{\phi(At)}{t} dt, \end{aligned}$$

onde $A = \frac{1}{\omega_{N-1}(N-2)R^{N-2}}$, $k_N = A^{\frac{N}{N-2}} \omega_{N-1}$ e $C_1 = C_1(n, N)$. Fazendo outra mudança de variáveis, tomando $u = At$, temos $du = A dt$ e também

$$\int_{B_R} |u_n|^{\frac{N}{N-2}} \phi(|u_n|) dx \geq \frac{k_N R^N}{N-2} \cdot C_1 \int_1^{2n} \frac{\phi(At)}{t} dt = C \int_A^{2An} \frac{\phi(u)}{u} du \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty,$$

onde C é uma constante que depende de C_1 e do quociente $\frac{k_N R^N}{N-2}$.

($\Leftarrow$) Agora, sejam $u \in W_{\Delta}^{2,1}(\Omega)$, $\|\Delta u\|_1 = 1$ e $\phi(s) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ uma função contínua quando t se aproxima do infinito tal que $s^{\frac{N}{N-2}}\phi(s)$ é monótona crescente para cada $s \geq s_0$. Pela Proposição 2.1.7, temos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |u|^{\frac{N}{N-2}} \phi(|u|) dx &= \int_0^{|\Omega|} (u^*(t))^{\frac{N}{N-2}} \phi(u^*(t)) dt \\ &\leq |\Omega| (s_0)^{\frac{N}{N-2}} \max_{s \in [0, s_0]} \phi(s) + \int_0^{t_0} (u^*(t))^{\frac{N}{N-2}} \phi(u^*(t)) dt, \end{aligned}$$

onde $t_0 = \inf\{t; u^*(t) \leq s_0\}$, pois pelo Teorema do Valor Médio podemos supor, sem perda de generalidade, que existe $m \in [t_0, |\Omega|]$ tal que

$$\int_{t_0}^{|\Omega|} (u^*(t))^{\frac{N}{N-2}} \phi(u^*(t)) dt \leq (u^*(m))^{\frac{N}{N-2}} \phi(u^*(m)) |\Omega|,$$

com $u^*(m) = s_0$. Agora, observe que no intervalo $[0, t_0]$ tem-se $u^*(t) > s_0$, onde o mapa $t \mapsto t^{\frac{N}{N-2}}\phi(t)$ é crescente. Dessa forma, como

$$u^*(t) \leq \frac{1}{At^{\frac{N}{N-2}}}, \quad \forall t \in [0, |\Omega|]$$

devido a definição da quase norma de Lorentz, sucede-se que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |u|^{\frac{N}{N-2}} \phi(|u|) dx &\leq C_0 |\Omega| + \int_0^{t_0} \left(\frac{1}{Bt^{\frac{N}{N-2}}} \right)^{\frac{N}{N-2}} \phi \left(\frac{1}{Bt^{\frac{N}{N-2}}} \right) dt \\ &= C_0 |\Omega| + \left(\frac{1}{B} \right)^{\frac{N}{N-2}} \int_0^{t_0} t^{-\frac{N^2}{(N-2)^2}} \phi \left(\frac{1}{Bt^{\frac{N}{N-2}}} \right) dt, \end{aligned}$$

onde $B = \frac{1}{\omega_{N-1}^{2/N} (N-2) N^{\frac{N-2}{N}}}$. Agora, tomando $s = 1/Bt^{\frac{N}{N-2}}$, temos

$$ds = -\frac{BN}{N-2} t^{\frac{2(1-N)}{N-2}} dt.$$

Daí, segue-se que

$$\int_0^{t_0} t^{-\frac{N^2}{(N-2)^2}} \phi \left(\frac{1}{Bt^{\frac{N}{N-2}}} \right) dt = \frac{N-2}{BN} \int_L^{+\infty} \frac{1}{s} \phi(s) ds,$$

onde $L = 1/Bt_0^{\frac{N}{N-2}}$. Uma vez que $\phi(s) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ é uma função contínua tal que $t^{\frac{N}{N-2}}\phi(t) \uparrow +\infty$, concluímos que

$$\int_L^{+\infty} \frac{1}{s} \phi(s) ds \leq K,$$

3. Imersões Ótimas do Espaço $W_{\Delta}^{2,1}(\Omega)$

para algum $K \in \mathbb{R}$. Portanto, concluímos que

$$\sup_{\substack{u \in W_{\Delta}^{2,1}(\Omega) \\ \|\Delta u\|_1 = 1}} \int_{\Omega} |u|^{\frac{N}{N-2}} \phi(|u|) dx \leq C|\Omega|.$$

□

Apêndice A

Noções de Medida e Integração

Os espaços de Lebesgue é um conjunto de classes de funções que são muito importantes para a resolução de problemas mais gerais no contexto da Análise. Um exemplo que enaltece este fato é que através dos espaços de medida podemos obter subespaços vetoriais, com certas propriedades, para obtermos soluções fracas de equações diferenciais.

A.1 Funções Mensuráveis

Definição A.1.1. Uma σ -álgebra no conjunto Ω é uma família Σ de subconjuntos de Ω que satisfaz:

- (a) $\emptyset, \Omega \in \Sigma$;
- (b) Se $A \in \Sigma$, então $\Omega \setminus A \in \Sigma$;
- (c) Se $A_n \in \Sigma$, para todo $n \in \mathbb{N}$, então $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \Sigma$.

Em particular, denotaremos (Ω, Σ) de *espaço mensurável*, onde cada elemento de Σ é um conjunto mensurável.

Definição A.1.2. Seja $\mathcal{C}$ uma coleção de subconjuntos de Ω . A interseção de todas as σ -álgebras que contêm $\mathcal{C}$ também é uma σ -álgebra e é chamada σ -álgebra gerada por $\mathcal{C}$. Simbolicamente, representamos por $\Sigma(\mathcal{C})$.

Observação: Ainda nas condições da definição anterior, $\Sigma(\mathcal{C})$ é a menor σ -álgebra em Ω que contém $\mathcal{C}$.

Exemplo A.1.3. Seja (X, τ) um espaço topológico. A σ -álgebra no conjunto X gerada por τ é denotada por $\Sigma(\tau) = \mathcal{B}(X)$ e chamada como σ -álgebra de Borel.

A reta estendida é o conjunto

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\} = [-\infty, +\infty]$$

que possui uma topologia induzida pela topologia usual de $\mathbb{R}$, onde seus respectivos abertos admitem uma (ou até mais de uma) das seguintes formas:

- (a) $A \subset \mathbb{R}$ é aberto em $\mathbb{R}$;
- (b) $A = [-\infty, a)$, com $a \in \mathbb{R}$;
- (c) $A = (a, +\infty]$, com $a \in \mathbb{R}$;
- (d) A é uma união de conjuntos como os de (a), (b) ou (c).

Observação: Iremos considerar a reta estendida $\overline{\mathbb{R}}$ como sendo um espaço mensurável com a σ -álgebra de Borel relativa a topologia citada anteriormente.

Definição A.1.4. Seja (Ω, Σ) um espaço mensurável. Dizemos que uma função $f : \Omega \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ é *mensurável* se $f^{-1}(A) \in \Sigma$ para cada $A \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$. Além disso, definimos o conjunto

$$M(\Omega, \Sigma) = \{f : \Omega \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}; f \text{ é mensurável}\}.$$

Exemplo A.1.5. Seja (Ω, Σ) um espaço mensurável. A função $\mathcal{X}_A : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\mathcal{X}_A = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in A \\ 0, & \text{se } x \notin A \end{cases}$$

é mensurável. Em particular, chamamos $\mathcal{X}_A$ como sendo a função característica de A .

Lema A.1.6. Se $f \in M(\Omega, \Sigma)$ é não negativa, então existe uma sequência (f_n) em $M(\Omega, \Sigma)$ tais que

- (a) $0 \leq f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$, para todo $x \in \Omega$ e todo $n \in \mathbb{N}$;
- (b) $f(x) = \lim f_n(x)$, para todo $x \in \Omega$;
- (c) f_n é uma função que admite um número finito de valores, para cada $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração. Ver Lema 2.11, página 13 em [3]. □

A.2 Medidas

Nesta seção, estudaremos funções definidas numa σ -álgebra que assumem valores reais estendidos. Estas aplicações são sugeridas intuitivamente pelos princípios de comprimento, área e volume.

Definição A.2.1. Uma *medida* no espaço mensurável (Ω, Σ) é uma função $\mu : \Sigma \rightarrow [0, \infty]$ que satisfaz:

- (a) $\mu(\emptyset) = 0$;
- (b) Se $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de conjuntos em Σ , disjuntos 2-a-2, então

$$\mu \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n).$$

Em particular, dizemos que μ é uma *medida não atômica* quando para cada $A \in \Sigma$ tal que $\mu(A) > 0$, existe um conjunto mensurável $B \subset A$ que satisfaz

$$0 < \mu(B) < \mu(A).$$

O terno (Ω, Σ, μ) será comumente denotado para descrever um espaço de medida. Vejamos a seguir algumas propriedades gerais:

Proposição A.2.2. Seja o espaço de medida (Ω, Σ, μ) . Então:

- (a) Se $A, B \in \Sigma$ e $A \subset B$, então $\mu(A) \leq \mu(B)$.
- (b) Se $A, B \in \Sigma$, $A \subset B$ e $\mu(A) < \infty$, então $\mu(B - A) = \mu(B) - \mu(A)$.

Demonstração. Ver Lema 3.3, página 21 em [3]. □

Definição A.2.3. Sejam $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sequências de conjuntos que satisfazem

$$A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \text{ e } B = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n,$$

com $A_n \subseteq A_{n+1}$ e $B_n \supseteq B_{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Dizemos que $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *cresce* para A e $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *decrece* para B . Em símbolos, representamos por $A_n \uparrow A$ e $B_n \downarrow B$.

Proposição A.2.4. Seja (Ω, Σ, μ) um espaço de medida. Valem as seguintes propriedades:

- (a) Se $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de conjuntos em Σ tal que $A_n \uparrow A$, então $\mu(A) = \lim_n \mu(A_n)$.
- (b) Se $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de conjuntos em Σ tal que $B_n \downarrow B$ e $\mu(B) < \infty$, então $\mu(B) = \lim_n \mu(B_n)$.

Demonstração. Ver Lema 3.4, página em [3]. □

Definição A.2.5. Seja (Ω, Σ, μ) um espaço de medida. Uma propriedade vale q.t.p. em Ω (ou seja, *quase toda parte* em Ω) se existe um subconjunto $A \subset \Omega$ que satisfaz $\mu(A) = 0$ tal que a propriedade vale para todo $x \in \Omega \setminus A$.

A.3 Integral de Lebesgue

Inicialmente, considere o espaço de medida (Ω, Σ, μ) e o conjunto

$$M^+(\Omega, \Sigma) = \{f \in M(\Omega, \Sigma); f \text{ é não negativa}\}.$$

Sendo $\varphi \in M^+(\Omega, \Sigma)$ uma função simples, i.e., que admite um número finito de valores, temos que sua representação canônica é da forma

$$\varphi = \sum_{j=1}^m a_j \chi_{A_j}.$$

Além disso, definiremos sua integral em relação a μ como sendo

$$\int_{\Omega} \varphi d\mu = \sum_{j=1}^m a_j \mu(A_j).$$

Definição A.3.1. Sejam (Ω, Σ, μ) um espaço de medida e $f \in M^+(\Omega, \Sigma)$ qualquer. Indicaremos

$$\int_{\Omega} f d\mu = \sup \left\{ \int_{\Omega} \varphi d\mu; \varphi \in M^+(\Omega, \Sigma) \text{ é simples e } 0 \leq \varphi \leq f \right\}$$

como sendo a *integral de Lebesgue* de f com respeito à μ . Em particular, denota-se

$$\int_A f d\mu = \int_{\Omega} f \chi_A d\mu,$$

para todo $f \in M^+(\Omega, \Sigma)$ e todo $A \in \Sigma$.

Proposição A.3.2. Sejam $f, g \in M^+(\Omega, \Sigma)$ e $A, B \in \Sigma$. Valem as seguintes propriedades:

- (a) Se $f \leq g$, então $\int_{\Omega} f d\mu \leq \int_{\Omega} g d\mu$;
- (b) Se $A \subset B$, então $\int_A f d\mu \leq \int_B f d\mu$;
- (c) $f = 0$ q.t.p. em Ω se, e só se, $\int_{\Omega} f d\mu = 0$.

Demonstração. Ver Lema 4.5 e Corolário 4.10 em [3]. □

Teorema A.3.3. (Convergência Monótona) Seja (f_n) uma sequência de funções em $M^+(\Omega, \Sigma)$ tal que

$$0 \leq f_n(x) \leq f_{n+1}(x), \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{ e } \forall x \in \Omega.$$

Se $f_n(x) \rightarrow f(x)$ para cada $x \in \Omega$, então $f \in M^+(\Omega, \Sigma)$ e

$$\int f d\mu = \lim \int f_n d\mu.$$

Demonstração. Ver Teorema 4.6, página 31 em [3]. □

Teorema A.3.4. (Desigualdade de Jensen) Seja (Ω, μ, Σ) um espaço de medida. Se a função $g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ é convexa e $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é mensurável, com $f(x) \in (a, b)$, para todo $x \in \Omega$, então

$$g\left(\frac{1}{b-a} \int_a^b f d\mu\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b (g \circ f) d\mu.$$

Demonstração. Ver Teorema 2, página 621 em [9]. □

A.4 Espaços de Lebesgue

Seja (Ω, Σ, μ) um espaço de medida e considere a seguinte relação de equivalência

$$f = g \text{ q.t.p.} \Leftrightarrow f \sim g,$$

para toda função f e g bem definida neste espaço. Tendo em vista as operações

$$[f] + [g] = [f + g] \text{ e } \lambda[f] = [\lambda f],$$

onde $[f] = \{g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; f = g \text{ q.t.p. em } \Omega\}$, além de considerar o conjunto

$$\mathcal{L}_p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ é mensurável e } \left(\int_{\Omega} |f|^p d\mu \right)^{1/p} < \infty \right\},$$

para $1 \leq p < \infty$, sucede-se que o espaço

$$L^p(\Omega) = \mathcal{L}_p(\Omega) / \sim = \{[f]; f \in \mathcal{L}_p(\Omega)\}.$$

é vetorial. Analogamente, tomando o conjunto

$$\mathcal{L}_{\infty}(\Omega) = \{g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; g \text{ é mensurável e limitada q.t.p}\}$$

teremos o espaço vetorial quociente

$$L_{\infty}(\Omega) = \mathcal{L}_{\infty}(\Omega) / \sim = \{[g]; g \in \mathcal{L}_{\infty}(\Omega)\}.$$

Proposição A.4.1. Os espaços $(L_p, \|\cdot\|_p)$ e $(L_\infty, \|\cdot\|_\infty)$, onde

$$\|[f]\|_p = \left(\int_{\Omega} |f|^p d\mu \right)^{1/p} \quad \text{e} \quad \|[g]\|_\infty = \inf\{c \in \mathbb{R}; |g(x)| < c \text{ q.t.p. em } \Omega\}$$

para todo $[f] \in L_p$ e todo $[g] \in L_\infty$, são normados.

Demonstração. Ver Teoremas 6.7 e 6.16 em [3]. □

Para facilitar a notação é comum denotar os elementos de L_p , com $p \in [1, \infty]$, apenas como f ao invés de escrever a classe de equivalência $[f]$. No entanto, é bom lembrar que estes espaços constitui de elementos que são *classes de funções*.

Agora, iremos enunciar uma desigualdade proposta por Hölder:

Teorema A.4.2. (Desigualdade de Hölder) Sejam $f \in L_p$ e $g \in L_q$, onde $p > 1$. Se $1/p + 1/q = 1$, então $fg \in L_1$ e

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Demonstração. Ver Teorema 6.9, página 56 em [3]. □

Lema A.4.3. Seja p' o expoente conjugado de p . Então, uma função mensurável $u \in L^p(\Omega)$ se, e somente se,

$$\sup \left\{ \int_{\Omega} |u(x)v(x)| dx; \|v\|_{p'} \leq 1 \right\}.$$

Em particular, este supremo é igual a $\|u\|_p$.

Demonstração. Ver Lema 2.7, página 25 em [2]. □

Referências Bibliográficas

- [1] R. A. ADAMS, *Reduced Sobolev Inequalities*, Canad. Math. Bull. 31, 1988.
- [2] R. A. ADAMS & J. F. F. S. FOURNIER, *Sobolev Spaces*, Elsevier, 2003.
- [3] R. G. BARTLE, *The Elements of Integration and Lebesgue Measure*, Wiley Classics Library, 1995.
- [4] C. BENNETT & R. SHARPLEY, *Interpolation of Operators*, Academic Press, 1988.
- [5] L. BOCCARDO & T. GALLOUËT, *Non-linear elliptic and parabolic equations involving measure data*, Département de Mathématiques, Université de Chambéry, 1998.
- [6] H. BREZIS & F. MERLE, *Uniform estimates and blow-up behavior for solutions of $-\Delta u = V(x)e^u$ in two dimensions*, Comm. Partial Differential Equations 16, 1223-1253, 1991.
- [7] H. BREZIS, *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*, Springer, 2011.
- [8] D. CASSANI, B. RUF & C. TARSI, *Best constants in a borderline case of second-order moser type inequalities*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire 27, 73-93, 2010.
- [9] L. C. EVANS, *Partial Differential Equations, Graduate Studies in Mathematics*, American Mathematical Society, 19, 1998.
- [10] D. GILBARG & N. S. TRUDINGER, *Elliptic Partial Equations of Second Order*, Springer-Verlag, 1998.
- [11] E. L. LIMA *Curso de Análise vol. 2*, Impa, 2018.
- [12] V. G. MAZ'YA, *Some Solutions os Elliptic Second-Order Equations*, Sovier Math. Dokl. 2, 143-415, 1961.

- [13] D. ORNSTEIN *A non-inequality for differential operators in the L_1 -norm*, Arch. Ration. Mech. Anal. 11, 40-49, 1962.
- [14] H. A. S. PEREIRA, *Introdução aos Espaços de Lorentz e Sobolev-Lorentz e Aplicações*, Dissertação, Universidade Federal da Paraíba, 2019.
- [15] B. H. C. RIBEIRO, *Espaços de Orlicz e uma aplicação a sistemas hamiltonianos*, Dissertação, Universidade Federal da Paraíba, 2006.
- [16] G. TALENTI, *Elliptic equations and rearrangements*, Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. 3, 697-718, 1976.