UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

RECURSOS DIDÁTICOS PARA O ENSINO DE ANÁLISE COMBINATÓRIA

JOÉVERTON DE OLIVEIRA MAIA

João Pessoa – Paraíba

Novembro de 2021

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

JOÉVERTON DE OLIVEIRA MAIA

RECURSOS DIDÁTICOS PARA O ENSINO DE ANÁLISE COMBINATÓRIA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal da Paraíba como requisito parcial para obtenção do título de licenciado em Matemática.

Orientadora: Profª Drª Rogéria Gaudencio do Rêgo

João Pessoa – Paraíba

Novembro de 2021

Catalogação na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

M217r Maia, Joéverton de Oliveira.
Recursos didáticos para o ensino de combinatória / Joéverton de Oliveira Maia. - João Pessoa, 2021.
54 p. : il.

Orientação: Rogéria Gaudencio do Rêgo.
TCC (Graduação/Licenciatura em Matemática) - UFPB/CCEN.

1. Ensino de combinatória. 2. Recursos didáticos. 3. Jogos e materiais didáticos. 4. Análise combinatória. I. Rêgo, Rogéria Gaudencio do. II. Título.

UFPB/CCEN CDU 519.1(043.2)

Elaborado por Josélia Maria Oliveira da Silva - CRB-15/113

JOÉVERTON DE OLIVEIRA MAIA

RECURSOS DIDÁTICOS PARA O ENSINO DE ANÁLISE COMBINATÓRIA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal da Paraíba como requisito parcial para a obtenção do título de licenciado em Matemática.

Orientadora: Profª Drª Rogéria Gaudencio do Rêgo

Aprovado(a) em: 16/11/2021.

BANCA EXAMINADORA

Rogéria Gaudencio do Rêgo

Profª Drª Rogéria Gaudencio do Rêgo – DM/CCEN/UFPB
(Orientadora)

Antônio Sales da Silva

Prof. Ms Antônio Sales da SIlva - DM/CCEN/UFPB
(Avaliador)

João Batista Alves Parente

Prof.Ms João Batista Alves Parente - DM/CCEN/UFPB
(Avaliador)

Dedico este trabalho à minha família, pelo papel fundamental em minha formação pessoal, escolar e acadêmica.

AGRADECIMENTOS

A Deus, pelo dom da vida e por ter me dado força e coragem para superar as dificuldades.

Aos meus pais Jorge e Selma e aos meus irmãos Joémerson e Joébert, pelo carinho, pelo apoio e pelo incentivo, sem os quais não seria possível a conclusão deste trabalho.

Aos meus amigos, em especial aos que também são ou foram alunos da Graduação em Matemática da UFPB, pelos momentos de aprendizado conjunto, descontração e companheirismo.

Aos professores do Departamento de Matemática que, mesmo nas dificuldades, contribuíram para minha formação humana e profissional.

À minha orientadora, Profª. Drª. Rogéria Gaudencio, pela dedicação e presteza na orientação deste trabalho.

Aos professores Antonio Sales e João Batista Parente, pelas contribuições realizadas durante a qualificação da dissertação.

RESUMO

O presente trabalho teve como tema central o uso de recursos metodológicos para o ensino de Matemática, com o recorte para o ensino de Combinatória. O objetivo central de nossa pesquisa foi levantar recursos didáticos dirigidos ao ensino de Análise Combinatória na Educação Básica. O estudo foi qualitativo, do tipo exploratório, com levantamento de dados em artigos e livros, bem como na rede de Internet. Nosso levantamento não teve a intenção de dar conta de todos os recursos que podem ser utilizados no ensino de Combinatória e até o final do presente estudo, fizemos o estudo de sete recursos, alguns deles bastante conhecidos no trabalho com conteúdos de Geometria, a exemplo do GeoGebra, mas pouco conhecidos no tratamento de Combinatória em sala de aula. Nosso levantamento destacou as potencialidades e limitações dos recursos que destacamos ao longo da pesquisa, exemplificando seu uso por meio de experiências relatadas em estudos dos mesmos recursos. Concluímos nosso estudo ressaltando a importância de que professores que ensinam Matemática conheçam recursos que possam melhorar o ensino dos conteúdos da Educação Básica e, como consequência, elevar o nível da aprendizagem de nossos estudantes.

Palavras-chave: Ensino de Combinatória; Recursos didáticos; Jogos e materiais didáticos.

ABSTRACT

The present work had as its central theme the use of methodological resources for teaching Mathematics, with the cutout for teaching Combinatorics. The central objective of our research went to get up didactic resources aimed at teaching Combinatorial Analysis on Basic Education. The study was qualitative, exploratory type, with data survey in articles and books, as well as on the Internet network. Our survey was not intended to account for all the resources that can be used in teaching Combinatorics and by the end of this study, we did the study of seven resources some of them well known in working with Geometry content, like Geogebra, but little known in the treatment of Combinatorics in classroom. Our survey highlighted the potentials and limitations of the resources that we highlighted throughout the research, exemplifying its use through experiences reported in studies of the same resources. We concluded our study highlighting the importance that teachers who teach Mathematics know about resources that can improve the teaching of Basic Education contents and, as a consequence, raise the level of learning for our students.

Key-words: Combinatorics teaching; Didactic resources; Games and teaching materials.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1. Material manipulativo com fichas e EVA..... 32

Figura 2. Personagens do enunciado do problema do ENEM..... 35

Figura 3. Problema simplificado e diferentes representações da solução..... 36

Figura 4. Blocos lógicos..... 37

Figura 5. Posição inicial do Jogo do Quadrado e tabuleiro numerado..... 39

Figura 6. Materiais do jogo “Senha”..... 40

Figura 7. Criação de ilustração no Pixton..... 44

Figura 8. Ilustração da solução no Pixton..... 44

Figura 9. Tela inicial do software GeoGebra..... 46

Figura 10. Arranjo de cores para os palitos do interior do hexágono..... 47

Figura 11. Arranjo de cores para os palitos..... 48

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO – BREVE APRESENTAÇÃO 1

1.1 SOBRE O TEMA DA PESQUISA 1

1.2 OBJETIVOS 2

1.3 NATUREZA DO ESTUDO 2

1.4 ESTRUTURA DO PRESENTE TRABALHO 3

2. O REFERENCIAL TEÓRICO DO TRABALHO: BREVE RECORTE 4

2.1 O ENSINO DE MATEMÁTICA NO BRASIL 4

2.2 O PENSAMENTO COMBINATÓRIO E A FORMAÇÃO DOS ESTUDANTES 7

2.2.1 O PENSAMENTO COMBINATÓRIO: SUA IMPORTÂNCIA PARA A FORMAÇÃO DOS ESTUDANTES 7

2.2.2 O PENSAMENTO COMBINATÓRIO NA BASE NACIONAL COMUM CURRICULAR 14

2.3 RECURSOS DIDÁTICOS PARA O ENSINO DE MATEMÁTICA 23

2.3.1 OS MATERIAIS MANIPULATIVOS 23

2.3.2 RECURSOS TECNOLÓGICOS PARA O ENSINO DE MATEMÁTICA 28

3. APRESENTAÇÃO E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS DA PESQUISA 31

3.1 MATERIAIS MANIPULATIVOS PARA O ENSINO DE COMBINATÓRIA 31

3.1.1 FICHAS DE CONTAGEM 31

3.1.2 BLOCOS LÓGICOS 36

3.2 JOGOS PARA O ENSINO DE COMBINATÓRIA 38

3.2.1 JOGO DO QUADRADO 38

3.2.2 JOGO SENHA 40

3.3 APLICATIVOS E SOFTWARES PARA O ENSINO DE COMBINATÓRIA 42

3.3.1 VERSÃO DIGITAL DO JOGO SENHA 42

3.3.2 PIXTON 43

3.3.3 GEOGEBRA 45

1. INTRODUÇÃO – BREVE APRESENTAÇÃO

1.1 SOBRE O TEMA DA PESQUISA

A pandemia de Covid-19, que interrompeu as aulas presenciais na rede pública do país, ensino básico e ensino superior, a partir de março de 2020, levou os professores à necessidade de adaptação à modalidade de ensino remoto, o que representou um desafio para todos.

Nós, estudantes, também sofremos um grande impacto, uma vez que as aulas, que antes ocorriam de forma totalmente presencial, passaram a ocorrer por meio de aulas síncronas e assíncronas, o que chamou nossa atenção para o tema "Recursos Didáticos para o Ensino de Matemática".

Em razão de se tratar de um Trabalho de Conclusão de Curso, em acordo com a orientadora fizemos o recorte do tema para pesquisar sobre o uso de recursos didáticos, decidindo pela área de Análise Combinatória, por nunca termos participado de aulas de Combinatória na Educação Básica com o uso de jogos, materiais manipulativos e softwares. Todas as aulas sobre assuntos desta área foram apenas com fórmulas e resolução de exercícios a partir delas.

No entanto, ao cursar a disciplina de Tratamento da Informação, no curso de Graduação, em período remoto, tivemos a oportunidade de tratar de algumas estratégias metodológicas que podemos adotar quando ensinamos análise combinatória, algumas das quais tratamos no presente texto.

A Análise Combinatória é muito importante, pois através dela podemos contar todas as possíveis tomadas de decisão em diversas situações, ao passo que o uso de recursos didáticos ajuda a entender isso na prática, materializando aquilo que costumamos representar apenas com números e fórmulas.

Nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) do Ensino Fundamental, de Matemática (BRASIL, 1998), a combinatória fazia parte do Bloco denominado de Tratamento da Informação. Naquele documento, destaca-se:

> Relativamente aos problemas de contagem, o objetivo é levar o aluno a lidar com situações que envolvam diferentes tipos de agrupamentos que possibilitem o desenvolvimento do raciocínio combinatório e a compreensão do princípio multiplicativo para sua aplicação no cálculo de probabilidades. (BRASIL, 1998, p. 52).

Ou seja, nos PCN, destacava-se o pensamento combinatório como importante elemento do desenvolvimento dos estudantes da Educação Básica, como veremos em detalhes adiante. Na Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2018), documento que hoje define os conhecimentos mínimos que os estudantes da Educação Básica devem desenvolver ao longo desse período de escolaridade, o pensamento combinatório é tratado na Unidade Temática "Probabilidade e estatística", como conteúdo auxiliar da Probabilidade.

Nos dois documentos há referência ao uso de recursos diversos no ensino de Matemática, na Educação Básica, e considerando nossa experiência pessoal e a relevância do pensamento voltado aos procedimentos de contagem, definimos a seguinte questão orientadora para nossa pesquisa: de quais recursos didáticos o professor de Matemática pode dispor para ensinar Combinatória na Educação Básica? Considerando a questão aqui definida, elaboramos os objetivos de pesquisa que são apresentados em seguida.

1.2. OBJETIVO GERAL:

Levantar recursos didáticos dirigidos ao ensino de Análise Combinatória na Educação Básica.

Para alcançarmos nosso Objetivo Geral, seguimos na direção de realizarmos os Objetivos Específicos listados em seguida.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS:

- Identificar recursos didáticos de tipos diversos (materiais manipulativos, jogos e softwares) que podem ser usados para ensinar Combinatória;
- Apresentar e discutir as características e aplicações dos recursos didáticos selecionados;
- Apresentar exemplos de como os recursos didáticos podem colaborar na aprendizagem de Combinatória pelos alunos.

1.3. NATUREZA DO ESTUDO

O presente trabalho constitui um estudo de natureza qualitativa. Nesse tipo de estudo não há preocupação com o uso de tratamento estatístico de dados, em razão da natureza dos objetivos selecionados buscando-se melhorar

a compreensão da realidade relativa a um determinado fenômeno, por meio de dados de algum modo qualificáveis (GIL, 1999).

Em razão da natureza dos nossos objetivos, trata-se de um estudo do tipo exploratório, caracterizado pelo fato de ajudarem o pesquisador a aumentar sua experiência em relação a um determinado fenômeno, e que se caracteriza por uma menor rigidez no planejamento (GIL, 1999)

Nosso levantamento de recursos se deu com base na literatura específica sobre o tema (artigos e livros), na forma de um levantamento bibliográfico, e de recursos digitais, disponibilizados na rede de Internet.

1.4 ESTRUTURA DO PRESENTE TRABALHO

Nosso texto está organizado em três Capítulos, sendo o primeiro dedicado a uma breve apresentação do tema de nossa investigação; de nossa questão de investigação e objetivos e da indicação da Metodologia adotada.

No segundo Capítulo tratamos, de forma geral, do ensino de Matemática no Brasil; sobre o pensamento combinatório em documentos oficiais; e discutimos sobre recursos didáticos para o ensino de Matemática.

No terceiro e último Capítulo, apresentamos e discutimos sobre os recursos didáticos que levantamos para o ensino de Combinatória, finalizando o texto com nossas Considerações Finais.

2. O REFERENCIAL TEÓRICO DO TRABALHO: BREVE RECORTE

2.1 O ENSINO DE MATEMÁTICA NO BRASIL

Ao realizar um breve histórico sobre o ensino de Matemática no Brasil, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) de Matemática (BRASIL, 1998), destacam a importância que esse conhecimento foi adquirindo ao longo dos séculos, na medida em que passou a fazer parte da maioria das atividades desenvolvidas pelo homem.

O documento destaca que, mesmo tendo sofrido mudanças importantes a partir dos anos 20 do século passado, a educação não conseguiu atingir os níveis de qualidade desejados. Quanto ao ensino de Matemática, o documento afirma que "[E]m nosso país o ensino de Matemática ainda é marcado pelos altos índices de retenção, pela formalização precoce de conceitos, pela excessiva preocupação com o treino de habilidades e mecanização de processos sem compreensão" (BRASIL, 1998, p.19).

Os PCN de Matemática citados tratam, ainda, dos problemas que foram gerados com a adesão do Brasil ao Movimento da Matemática Moderna, na década de 1970, que foi "(...) veiculado principalmente pelos livros didáticos, teve grande influência, durante longo período, só vindo a refluir a partir da constatação de inadequação de alguns de seus princípios básicos e das distorções e dos exageros ocorridos" (BRASIL, 1998, p.19).

Em 1980, discussões sobre a importância da Resolução de Problemas como foco para o ensino de Matemática, nos Estados Unidos da América, influenciariam a publicação de novas orientações para a área. O documento destaca os seguintes pontos de convergência das propostas feitas em diferentes países:

> . direcionamento do ensino fundamental para a aquisição de competências básicas necessárias ao cidadão e não apenas voltadas para a preparação de estudos posteriores;
> . importância do desempenho de um papel ativo do aluno na construção do seu conhecimento;
> . ênfase na resolução de problemas, na exploração da Matemática a partir dos problemas vividos no cotidiano e encontrados nas várias disciplinas;
> . importância de trabalhar com amplo espectro de conteúdos, incluindo já no ensino fundamental, por exemplo, elementos de estatística, probabilidade e combinatória para atender à

> demanda social que indica a necessidade de abordar esses assuntos;
> . necessidade de levar os alunos a compreender a importância do uso da tecnologia e a acompanhar sua permanente renovação. (BRASIL, 1998, p.20).

Apesar dos avanços em termos de propostas, os PCN ressaltavam as dificuldades que ainda estavam presentes no cotidiano das escolas no final da década de 1990, em especial relacionadas à formação docente, ou à forma como os conteúdos eram tratados em sala de aula. Como destaca o documento, "[...] a resolução de problema, que vem sendo apontada como um bom caminho para trabalhar conceitos e procedimentos matemáticos, tem sido objeto de interpretações equivocadas, pois ainda se resume em uma mera atividade de aplicação ao final do estudo de um conteúdo matemático". (BRASIL, 1998, p.23)

Em sala de aula ocorreria quase sempre um movimento na apresentação dos conteúdos, seguindo a sequência: definições – exemplos – exercícios de aplicação, seguindo os modelos apresentados anteriormente, cabendo ao aluno copiar os procedimentos adotados quando esses exercícios foram resolvidos pelo professor.

O mesmo documento chama a atenção para o fato de estarem presentes nas propostas curriculares a indicação de uso de recursos didáticos em sala de aula, algumas vezes citando materiais específicos, porém, "[...] na prática, nem sempre há clareza do papel desses recursos no processo ensino-aprendizagem, bem como da adequação do uso desses materiais, sobre os quais se projetam algumas expectativas indevidas". (BRASIL, 1998, p.23).

O uso de um material didático, por si só, não resolve os problemas relacionados à aprendizagem de um conteúdo matemático, em especial se não houver planejamento adequado, conhecimento das potencialidades e limitações dos recursos e domínio do conteúdo que se ensina. Todos esses elementos precisam ser considerados quando se trata do uso de recursos para o ensino de Matemática (RÊGO e RÊGO, 2016).

Como podemos constatar pelo que era discutido no documento destacado, o ensino de Matemática passou por muitas mudanças ao longo do tempo, mas quase sempre foi feito tendo o professor como sendo um transmissor de conhecimento e o aluno apenas um receptor desse conhecimento. Os recursos didáticos utilizados por muito tempo foram praticamente os mesmos:

quadro, giz, caderno e lápis, além de régua em algumas ocasiões (particularmente no ensino de Geometria).

Embora os PCN tenham sido publicados há pouco mais de duas décadas, entendemos que não ocorreram muitos avanços nessa estrutura e ela ainda é predominante em muitas instituições, em todos os níveis de escolaridade. Os PCN apontaram, no entanto, "[...] alguns caminhos para 'fazer matemática' em sala de aula, como o uso da História da Matemática, que poderia "(...) esclarecer ideias matemáticas que estão sendo construídas pelo aluno, especialmente para dar respostas a alguns 'porquês' e, desse modo, contribuir para a constituição de um olhar mais crítico sobre os objetos de conhecimento". (BRASIL, 1998, p.43).

Outra indicação seria o uso de tecnologias de comunicação. "Nesse cenário, insere-se mais um desafio para a escola, ou seja, o de como incorporar ao seu trabalho, tradicionalmente apoiado na oralidade e na escrita, novas formas de comunicar e conhecer" (BRASIL, 1998, p.43). O documento destaca, em especial, o papel que o uso do computador pode ter no ensino, apesar de nem todas as escolas terem acesso a esse equipamento. Em nosso trabalho iremos discutir, em especial, recursos tecnológicos que podem ser utilizados no ensino do conteúdo que destacaremos adiante, como aplicativos e softwares.

De acordo com o documento, "[...] o bom uso que se possa fazer do computador na sala de aula também depende da escolha de softwares, em função dos objetivos que se pretende atingir e da concepção de conhecimento e de aprendizagem que orienta o processo". (BRASIL, 1998, p.44)

Outra estratégia que é destacada nos PCN e que iremos tratar em nosso trabalho é sobre o uso de jogos no ensino de Matemática. De acordo com o documento,

> [O]s jogos constituem uma forma interessante de propor problemas, pois permitem que estes sejam apresentados de modo atrativo e favorecem a criatividade na elaboração de estratégias de resolução e busca de soluções. Propiciam a simulação de situações-problema que exigem soluções vivas e imediatas, o que estimula o planejamento das ações; possibilitam a construção de uma atitude positiva perante os erros, uma vez que as situações sucedem-se rapidamente e podem ser corrigidas de forma natural, no decorrer da ação, sem deixar marcas negativas. (BRASIL, 1998, p.46).

Ao longo das últimas décadas foram criados vários jogos e recursos didáticos manipulativos e digitais para facilitar a compreensão dos alunos a respeito de determinados assuntos da Matemática, a exemplo do Material Dourado, criado pela médica e educadora Maria Montessori, visando ressaltar algumas características do Sistema de Numeração Decimal e, com o advento das novas tecnologias, se abriram novas possibilidades de como ensinar Matemática, com interatividade e em ambientes virtuais que simulam a realidade.

Materiais manipulativos podem ser usados no ensino de diversos conteúdos matemáticos, notoriamente na Geometria, mas também em outras áreas, como a Aritmética e a Álgebra. Softwares podem auxiliar a ampliar a compreensão de ideias matemáticas, possibilitando construir figuras e representações de sólidos geométricos; representar operações aritméticas; traçar gráficos de funções de qualquer grau, em duas e em três dimensões, dentre outras possibilidades.

Os PCN, como destacamos anteriormente, apesar de terem sido divulgados há mais de duas décadas, trazem discussões pertinentes sobre o ensino de Matemática e que continuam atuais e necessárias. Apesar de não termos em nossas escolas o ensino com a qualidade que desejamos para nossos estudantes, ele pode melhorar com as contribuições de pesquisas sobre novas estratégias de abordagem de conteúdos em sala de aula, melhorando a compreensão dos alunos e sua formação matemática.

Como nossa discussão em relação a essas possibilidades precisa ser limitada, pelo fato de nossa pesquisa ser em um Trabalho de Conclusão de Curso, selecionamos como foco o conteúdo relativo ao pensamento combinatório, sobre o qual tratamos no item que segue.

2.2 O PENSAMENTO COMBINATÓRIO E A FORMAÇÃO DOS ESTUDANTES

2.2.1 O PENSAMENTO COMBINATÓRIO: SUA IMPORTÂNCIA PARA A FORMAÇÃO DOS ESTUDANTES

De acordo com Pessoa e Borba (2010), o raciocínio combinatório é uma forma de pensar que permite que se levantem possibilidades e sejam analisadas as combinações destas, auxiliando na compreensão de conteúdos matemáticos

e de outras áreas do conhecimento. Além disso, os problemas de Análise Combinatória podem ser explorados desde cedo, pois expectativas de um acontecimento, regras de um jogo, escolha de vestimentas, combinações de sucos e sanduíches em uma lanchonete ou de sabores de um sorvete, são situações que podem ser exploradas nos primeiros anos de escolarização sobre Combinatória e Probabilidade.

Guirado e Cardoso (2007) apontam que os métodos vinculados ao pensamento combinatório são aplicados em diversas áreas, como no Cálculo de Probabilidades, no planejamento de fluxos de transporte, na organização de planilhas de horários, no planejamento da produção de produtos em uma empresa, além de poder ser relacionado à Estatística, no tratamento de dados.

Segundo Inhelder e Piaget (1955), o raciocínio combinatório facilita o entendimento de tomadas de decisão, na medida em que amplia nossa capacidade de percebermos os elementos que compõem o universo de possíveis resultados relativos a um evento. Pesquisas relacionadas à formação do pensamento combinatório podem facilitar o planejamento do ensino e a compreensão de possíveis dificuldades de aprendizagem desse campo.

Nos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Fundamental I (1ª à 4ª séries), o pensamento combinatório está presente nas finalidades do ensino de Matemática, que indicam como objetivos gerais desse nível de escolaridade, levar o aluno a

> [F]azer observações sistemáticas de aspectos quantitativos e qualitativos do ponto de vista do conhecimento e estabelecer o maior número possível de relações entre eles, utilizando para isso o conhecimento matemático (aritmético, geométrico, métrico, algébrico, estatístico, combinatório, probabilístico); selecionar, organizar e produzir informações relevantes, para interpretá-las e avaliá-las criticamente (BRASIL, 1997, p.33).

Além disso, os PCN também reforçam a importância da combinatória na discussão sobre a seleção dos conteúdos, uma vez que é preciso que nossos estudantes desenvolvam a capacidade de transformar dados com os quais tem contato no cotidiano em informações, “[...] aprendendo a lidar com dados estatísticos, tabelas e gráficos, a raciocinar utilizando ideias relativas à probabilidade e à combinatória” (BRASIL, 1997, p.34).

Um dos blocos de conteúdos a serem abordados em sala de aula, conforme os PCN, é o de Tratamento da Informação, que envolve estatística, probabilidade e combinatória, destacando, em relação a esse último que seu objetivo é "[...] levar o aluno a lidar com situações-problema que envolvam combinações, arranjos, permutações e, especialmente, o princípio multiplicativo da contagem" (BRASIL, 1997, p.36).

Entre os conteúdos conceituais e procedimentais relacionados ao Tratamento da Informação, para serem explorados no segundo ciclo do Ensino Fundamental, o texto destaca, entre outros a "[I]dentificação das possíveis maneiras de combinar elementos de uma coleção e de contabilizá-las usando estratégias pessoais" (BRASIL, 1997, p.58).

Nas orientações didáticas, as situações associadas à ideia de combinatória formam o quarto grupo de ideias relacionadas a multiplicação e divisão. O texto cita dois problemas, mostrando como calcular a quantidade de maneiras de se combinarem peças de roupa (no exemplo, blusa e saia), resolvidos através de desenhos e diagramas de árvore, associando essas representações à operação de multiplicação.

Outro exemplo trata de como calcular a quantidade de rapazes que estavam em uma festa, a partir da quantidade de moças e da quantidade de casais que podem ser formados, o que pode ser resolvido por tentativas apoiadas em procedimentos multiplicativos, ou pela divisão.

Nos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Fundamental II (5ª à 8ª séries), os objetivos gerais são os mesmos dos PCN do Ensino Fundamental I. O pensamento combinatório está presente entre os objetivos de Matemática para o terceiro ciclo (5ª e 6ª séries).

> Neste ciclo, o Ensino de Matemática deve visar o desenvolvimento [...] do raciocínio combinatório, estatístico e probabilístico, por meio da exploração de situações de aprendizagem que levem o aluno a [...] resolver situações-problema que envolvam o raciocínio combinatório e a determinação da probabilidade de sucesso de um determinado evento por meio de uma razão (BRASIL, 1998, p.64-65).

Além disso, a seleção de conteúdos passa pelos mesmos critérios aplicados no Ensino Fundamental I. Sobre a área de Tratamento da Informação, os PCN do Ensino Fundamental II ampliam o objetivo apontado na etapa anterior

de escolaridade, defendendo que seu objetivo é “[...] levar o aluno a lidar com situações que envolvam diferentes tipos de agrupamentos que possibilitem o desenvolvimento do raciocínio combinatório e a compreensão do princípio multiplicativo para sua aplicação no cálculo de probabilidades (BRASIL, 1998, p.52). Ou seja, o documento já aponta para o trabalho com a relação entre pensamento combinatório e pensamento probabilístico, ao defender que ensino de combinatório trata,

> Do raciocínio combinatório, estatístico e probabilístico, por meio da exploração de situações de aprendizagem que levem o aluno a: * coletar, organizar e analisar informações, construir e interpretar tabelas e gráficos, formular argumentos convincentes, tendo por base a análise de dados organizados em representações matemáticas diversas; * resolver situações-problema que envolvam o raciocínio combinatório e a determinação da probabilidade de sucesso de um determinado evento por meio de uma razão. (BRASIL, 1998, p. 65).

O documento ainda indica, entre os conceitos e procedimentos referentes à área de Tratamento da Informação: representação e contagem dos casos possíveis em situações combinatórias (BRASIL, 1998, p.74). O pensamento combinatório também se faz presente numa explicação mais detalhada com orientações para a abordagem da referida área:

> A resolução de problemas de contagem, no ensino fundamental, coloca o aluno diante de situações em que é necessário agrupar objetos, em diferentes quantidades, caracterizando os agrupamentos feitos. Ao tentar solucionar essas situações, ele poderá aperfeiçoar a maneira de contar os agrupamentos e desenvolver, assim, o raciocínio combinatório. Consequentemente, poderá desenvolver maior segurança e criatividade para enfrentar situações-problema de caráter aleatório, que dependem de uma contagem sistematizada, e dispor de uma ferramenta útil e motivadora para a aprendizagem da probabilidade e da estatística (BRASIL, 1998, p.136-137).

Por fim, o documento também indica que, “para desenvolver uma compreensão mais ampla da multiplicação é necessário trabalhar paralelamente multiplicação e divisão, envolvendo os significados dessas operações que ocorrem em situações [...] associadas à idéia de combinatória” (BRASIL, 1998, p.109,111). O documento traz dois exemplos ilustrando essa relação. No primeiro, envolvendo multiplicação, questiona: “[...] Lancei dois dados: um

vermelho e um azul. Quantos resultados diferentes é possível encontrar?" (BRASIL, 1998, p.111).

No segundo exemplo, relacionado à operação de divisão, a pergunta é: "[...] No decorrer de uma festa, foi possível formar 12 casais diferentes para dançar. Se havia 3 moças e todas elas dançaram com todos os rapazes, quantos eram os rapazes?" (BRASIL, 1998, p.111).

Nesse caso, trata-se de uma situação em que é necessário determinar a quantidade de elementos de uma coleção finita, organizada de uma determinada maneira contagem dos casos possíveis. Questões como as apresentadas como exemplo nos PCN podem ser resolvidas sem que seja necessário fazer nenhum cálculo, uma vez que a solução pode ser obtida pela contagem direta das possibilidades, já que os números de objetos das coleções envolvidas são pequenos. Nesse caso, "[...] o objeto da aprendizagem é a descoberta de um procedimento, como a construção de uma tabela de dupla entrada ou de um diagrama de árvore que assegure a identificação de todos os casos possíveis" (BRASIL, 1998, p.111).

Nos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM/PCN+), um dos temas estruturadores do ensino de Matemática é a análise de dados. Este tema pode ser organizado em três unidades temáticas: Estatística, Contagem e Probabilidade. "Estatística e Probabilidade lidam com dados e informações em conjuntos finitos e utilizam procedimentos que permitem controlar com certa segurança a incerteza e mobilidade desses dados. Por isso, a Contagem ou análise combinatória é apenas parte instrumental desse tema" (BRASIL, 2000, p.123).

Sobre contagem, o texto defende:

> A Contagem, ao mesmo tempo que possibilita uma abordagem mais completa da probabilidade por si só, permite também o desenvolvimento de uma nova forma de pensar em Matemática denominada raciocínio combinatório. Ou seja, decidir sobre a forma mais adequada de organizar números ou informações para poder contar os casos possíveis não deve ser aprendido como uma lista de fórmulas, mas como um processo que exige a construção de um modelo simplificado e explicativo da situação. (BRASIL, 2000, p.123)

O documento chama nossa atenção para o trabalho em sala de aula envolvendo o uso de fórmulas:

> As fórmulas devem ser consequência do raciocínio combinatório desenvolvido frente à resolução de problemas diversos e devem ter a função de simplificar cálculos quando a quantidade de dados é muito grande. Esses conteúdos devem ter maior espaço e empenho de trabalho no ensino médio, mantendo de perto a perspectiva da resolução de problemas aplicados para se evitar a teorização excessiva e estéril. Espera-se que assim o aluno possa se orientar frente a informações de natureza estatística ou probabilística. (BRASIL, 2000, p.123-124)

Sobre a exploração e recursos didáticos, o documento ressalta: "Nesse contexto, as calculadoras e o computador ganham importância como instrumentos que permitem a abordagem de problemas com dados reais ao mesmo tempo que o aluno pode ter a oportunidade de se familiarizar com as máquinas e os softwares". (BRASIL, 2000, p.123-124)

Os conteúdos e habilidades propostos para a unidade temática de Contagem envolvem a tomada de decisão relativa à organização de dados, visando simplificar o estudo de eventos mais complexos; ampliar a capacidade de identificação de padrões e o estabelecimento de regras gerais e "[...] Identificar dados e relações envolvidas numa situação-problema que envolva o raciocínio combinatório, utilizando os processos de contagem. (BRASIL, 2000, p.124).

Nas Orientações Curriculares para o Ensino Médio (OCEM), a Matemática é dividida em quatro blocos de conteúdos, sendo um deles, *Análise de dados e probabilidade*. O pensamento combinatório é destacado em sua apresentação, ao afirmar que "[...] O estudo desse bloco de conteúdo possibilita aos alunos ampliarem e formalizarem seus conhecimentos sobre o raciocínio combinatório, probabilístico e estatístico". (BRASIL, 2006, p.78).

Além disso, o documento defende que:

> . O estudo da combinatória e da probabilidade é essencial nesse bloco de conteúdo, pois os alunos precisam adquirir conhecimentos sobre o levantamento de possibilidades e a medida da chance de cada uma delas. A combinatória não tem apenas a função de auxiliar o cálculo das probabilidades, mas tem inter-relação estreita entre as ideias de experimento composto a partir de um espaço amostral discreto e as operações combinatórias. Por exemplo, ao extrair aleatoriamente três bolas de uma urna com quatro possibilidades, esse experimento aleatório tem três fases, que podem ser interpretadas significativamente no espaço amostral das variações. (BRASIL, 2006, p.79)

> . A utilização do diagrama de árvores é importante para clarear a conexão entre os experimentos compostos e a combinatória, pois permite que visualizemos a estrutura dos múltiplos passos do experimento. (BRASIL, 2006, p.79).

O Capítulo 5 do documento citado, que trata de Temas complementares, discute a natureza contínua à qual estão vinculados a maioria dos conteúdos de Matemática explorados no Ensino Médio, como o conjunto dos números reais e a geometria, que refletem a importância do Cálculo Diferencial, estudado no Ensino Superior, no desenvolvimento das ciências. O documento destaca que, "[N]o entanto, no decorrer do século XX, novas necessidades tecnológicas advindas da introdução dos computadores – que têm uma Matemática Discreta no seu funcionamento – provocaram um grande desenvolvimento dos modelos matemáticos discretos" (BRASIL, 2006, p.94).

Em razão dessa mudança de foco, o pensamento combinatório, associado à Matemática discreta, teve um desenvolvimento bastante expressivo. O documento alerta, porém, que

> [N]o ensino médio, o termo "combinatória" está usualmente restrito ao estudo de problemas de contagem, mas esse é apenas um de seus aspectos. Outros tipos de problemas poderiam ser trabalhados na escola – são aqueles relativos a conjuntos finitos e com enunciados de simples entendimento relativo, mas não necessariamente fáceis de resolver (BRASIL, 2006, p.94).

Na mesma página da última citação destacada, o documento cita o problema das pontes de Könisberg: "Partindo-se de uma das ilhas, é possível passar pelas demais ilhas e voltar ao ponto de partida, nisso cruzando-se cada uma das pontes uma única vez?" (BRASIL, 2006, p.94). O problema foi solucionado por Euler por meio de um procedimento que daria origem a um novo campo da Matemática, a Teoria dos Grafos.

O documento defende que por meio da exploração desse problema e de problemas de mesma natureza os estudantes podem desenvolver diversas habilidades, como: modelar o problema, via estrutura de grafo – no exemplo, um diagrama em que cada ilha é representada por um ponto e cada ponte é um segmento conectando dois pontos; explorar o problema, identificando situações em que há ou não solução; convergir para a descoberta da condição geral de

existência de uma tal solução (ainda no exemplo, o caso em que cada ilha tem um número par de pontes), mostrando algumas aplicações da combinatória.

2.2.2 O PENSAMENTO COMBINATÓRIO NA BASE NACIONAL COMUM CURRICULAR

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (BRASIL, 2017) é um documento normativo que define o conjunto de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica. A Base deverá nortear a formulação dos currículos dos sistemas públicos e privados de Educação Básica das redes escolares de todo o Brasil, indicando as competências e habilidades que se espera que todos os estudantes desenvolvam ao longo da Educação Infantil, Ensino Fundamental e Ensino Médio.

Os fundamentos da BNCC já estavam previstos na Constituição da República Federativa do Brasil, de 1988, mais precisamente no artigo 210:

> Art. 210. Serão fixados conteúdos mínimos para o ensino fundamental, de maneira a assegurar formação básica comum e respeito aos valores culturais e artísticos, nacionais e regionais.
> § 1º O ensino religioso, de matrícula facultativa, constituirá disciplina dos horários normais das escolas públicas de ensino fundamental.
> § 2º O ensino fundamental regular será ministrado em língua portuguesa, assegurada às comunidades indígenas também a utilização de suas línguas maternas e processos próprios de aprendizagem. (BRASIL, 1988).

A Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDBEN), Lei 9.394, de 20 de dezembro de 1996, em seu Artigo 26, regulamenta uma base nacional comum para a Educação Básica.

> Art. 26 - Os currículos do ensino fundamental e médio devem ter uma base nacional comum, a ser complementada, em cada sistema de ensino e estabelecimento escolar, por uma parte diversificada, exigida pelas características regionais e locais da sociedade, da cultura, da economia e da clientela.
> § 4º - O ensino da História do Brasil levará em conta as contribuições das diferentes culturas e etnias para a formação do povo brasileiro, especialmente das matrizes indígenas, africana e européia. (BRASIL, 1996).

A Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDBEN), Lei 9.394, de 20 de dezembro de 1996, em seu Artigo 26, regulamenta uma base nacional comum para a Educação Básica.

> Tendo em vista a necessidade de efetivação e/ou consolidação de políticas educacionais direcionadas à garantia de padrões de qualidade social e de gestão democrática, destacam-se as seguintes diretrizes a serem consideradas, com vistas a um novo PNE como política de Estado (BRASIL, 2010, p.37). [...] g) indicação das bases epistemológicas que garantam a configuração de um currículo que contemple, ao mesmo tempo, uma base nacional demandada pelo sistema nacional de educação e as especificidades regionais e locais (BRASIL, 2010, p.39).

A Resolução nº 4, de 13 de julho de 2010, define as Diretrizes Curriculares Nacionais Gerais para a Educação Básica (DCN) com o objetivo de orientar o planejamento curricular das escolas e dos sistemas de ensino. A Resolução n.7, de 14 de dezembro de 2010, fixa a Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Fundamental de 9 (nove) anos. A Resolução nº 2, de 30 de janeiro de 2012, define as Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio. Os PCN e as DCN foram fundamentais para a elaboração do que viria a ser a BNCC.

A Portaria n. 867, de 04 de julho de 2012, institui o Pacto Nacional pela Alfabetização na Idade Certa (PNAIC) e as ações do Pacto e define suas Diretrizes Gerais. A Portaria n. 1.140, de 22 de novembro de 2013, institui o Pacto Nacional de Fortalecimento do Ensino Médio (PNFEM).

Entre 19 e 23 de novembro foi realizada a 2ª Conferência Nacional pela Educação (CONAE), organizada pelo Fórum Nacional de Educação (FNE) que resultou em um documento sobre as propostas e reflexões para a Educação brasileira e serviu de referencial para o processo de mobilização para a elaboração de uma Base Nacional Comum Curricular.

Entre 17 e 19 de junho de 2015 aconteceu o I Seminário Interinstitucional para elaboração da BNCC, que reuniu assessores e especialistas envolvidos na elaboração da Base, por serem membros de uma comissão de especialistas instituída pela Portaria n. 592, de 17 de junho de 2015. Em dezembro daquele ano a primeira versão do documento se tornou pública, propondo-se sua discussão pela sociedade.

Em 3 de maio de 2016 a 2ª versão da BNCC foi disponibilizada para apreciação pela comunidade, sendo a versão final homologada no dia 20 de dezembro de 2017, da Educação Infantil e o Ensino Fundamental. A partir desta data, começou o processo de formação e capacitação dos professores e o apoio aos sistemas de Educação estaduais e municipais para a elaboração e adequação dos currículos escolares.

Na BNCC (BRASIL, 2017), a área de Matemática foi estruturada em cinco Unidades Temáticas: Números; Álgebra; Geometria; Grandezas e Medidas e Probabilidade e estatística. Para cada ano de escolaridade, são definidos Objetivos de aprendizagem relacionados às Unidades temáticas e, associadas a esses Objetivos, são definidas Habilidades específicas a serem desenvolvidas pelos estudantes.

A BNCC aborda a Análise Combinatória entre as habilidades a serem exploradas no 4º, 5º e 8º Anos do Ensino Fundamental. No 4º ano, um dos objetos de conhecimento da Unidade temática “Números” envolve problemas de contagem, através dos quais deve ser desenvolvida a seguinte habilidade:

> (EF04MA08) Resolver, com o suporte de imagem e/ou material manipulável, problemas simples de contagem, como a determinação do número de agrupamentos possíveis ao se combinar cada elemento de uma coleção com todos os elementos de outra, utilizando estratégias e formas de registro pessoais.

Neste caso, o trabalho com o pensamento combinatório estaria associado aos diferentes significados da multiplicação. Um exemplo de problema desse tipo é o que citamos quando fizemos referência aos PCN (1998), que envolvia o número de combinações de saias e blusas.

No 5º Ano, devem ser abordados problemas de contagem do tipo: “Se cada objeto de uma coleção A for combinado com todos os elementos de uma coleção B, quantos agrupamentos desse tipo podem ser formados?” (BRASIL, 2017, p.296), visando o desenvolvimento da habilidade, na Unidade Temática “Números”:

> (EF05MA09): Resolver e elaborar problemas simples de contagem envolvendo o princípio multiplicativo, como a determinação do número de agrupamentos possíveis ao se combinar cada elemento de uma coleção com todos os

> elementos de outra coleção, por meio de diagramas de árvore ou por tabelas. (BRASIL, 2017, p.297).

A Habilidade citada amplia o trabalho com representações, que no ano anterior poderiam ser mais pessoais e informais, usando-se de elementos de duas ou mais coleções de objetos por meio de tabelas e de diagramas de árvore, que facilitam a generalização de procedimentos de contagem.

No 8º Ano o documento não faz menção direta ao termo combinatória, mas faz referência ao princípio multiplicativo da contagem nos Objetos de Conhecimento da Unidade Temática “Números” (BRASIL, 2017, p.314), através do qual os professores devem desenvolver, juntamente com os alunos, a seguinte habilidade: “(EF08MA03) Resolver e elaborar problemas de contagem cuja resolução envolva a aplicação do princípio multiplicativo”. (BRASIL, 2017, p.315).

O princípio multiplicativo da contagem é essencial para a elaboração e a resolução de problemas de Análise Combinatória. Este também é mencionado nos Objetos de Conhecimento da Unidade Temática “Probabilidade e Estatística” (BRASIL, 2017, p.316-317), com ênfase apenas em probabilidade.

No Ensino Médio, a BNCC organiza o trabalho com Matemática em torno do desenvolvimento de cinco Competências Específicas e para cada Competência são definidas Habilidades que visam seu desenvolvimento. Ou seja, diferentemente do que ocorre na parte do documento dirigida ao Ensino Fundamental, no Ensino Médio o documento tão está organizando em campos clássicos da Matemática, embora seja possível identificar elementos desses campos nas diversas Habilidades, em diferentes Competências Específicas.

Nas Habilidades definidas para o Ensino Médio, como no caso do texto para o Ensino Fundamental, o documento não menciona o termo “combinatória(o)”, mas faz referência a problemas de contagem e aos princípios multiplicativo e aditivo, como na Habilidade (EM13MAT310), relacionada à Competência Específica 3: “Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo agrupamentos ordenáveis ou não de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas, como o diagrama de árvore” (BRASIL, 2017, p.539, p.548).

A BNCC, diferentemente dos PCN, não traz discussões gerais detalhadas sobre estratégias metodológicas ou faz indicação de orientações para a prática

de sala de aula no ensino de Matemática, mas cita, na apresentação da área, recursos gerais que podem ser explorados em sala de aula:

> Além dos diferentes recursos didáticos e materiais, como malhas quadriculadas, ábacos, jogos, calculadoras, planilhas eletrônicas e *softwares* de geometria dinâmica, é importante incluir a história da Matemática como recurso que pode despertar interesse e representar um contexto significativo para aprender e ensinar Matemática. Entretanto, esses recursos e materiais precisam estar integrados a situações que propiciem a reflexão, contribuindo para a sistematização e a formalização dos conceitos matemáticos (BRASIL, 2017, p.298).

Algumas indicações específicas são feitas nas habilidades e aqui destacaremos aquelas que fazem referência direta a recursos didáticos para o ensino de Matemática (jogos, materiais manipulativos, calculadoras, aplicativos ou softwares, ou outros).

Em diversas Habilidades, a partir do 1º Ano, a BNCC faz referência ao uso de materiais manipulativos, de maneira genérica, como na Habilidade (EF01MA04): “Contar a quantidade de objetos de coleções até 100 unidades e apresentar o resultado por registros verbais e simbólicos, em situações de seu interesse, como jogos, brincadeiras, materiais da sala de aula, entre outros”. (BRASIL, 2017, p.279).

Como podemos ver pelo exemplo, o texto não usa o termo material manipulativo, mas “materiais da sala de aula”, neste caso, e a Habilidade citada é a única que faz referência ao uso de jogos na área de Matemática, embora essa indicação tenha sido trazida na apresentação geral da área.

A seguir, veremos as outras Habilidades, referentes ao 1º e ao 2º Anos do Ensino Fundamental, que mencionam materiais manipuláveis:

> (EF01MA07) Compor e decompor número de até duas ordens, por meio de diferentes adições, com o suporte de material manipulável, contribuindo para a compreensão de características do sistema de numeração decimal e o desenvolvimento de estratégias de cálculo. (BRASIL, 2017, p.279);
>
> (EF01MA08) Resolver e elaborar problemas de adição e de subtração, envolvendo números de até dois algarismos, com os significados de juntar, acrescentar, separar e retirar, com o suporte de imagens e/ou material manipulável, utilizando estratégias e formas de registro pessoais. (BRASIL, 2017, p.279);

> (EF02MA04) Compor e decompor números naturais de até três ordens, com suporte de material manipulável, por meio de diferentes adições. (BRASIL, 2017, p.283);
> (EF02MA07) Resolver e elaborar problemas de multiplicação (por 2, 3, 4 e 5) com a ideia de adição de parcelas iguais por meio de estratégias e formas de registro pessoais, utilizando ou não suporte de imagens e/ou material manipulável. (BRASIL, 2017, p.283);
> (EF02MA08) Resolver e elaborar problemas envolvendo dobro, metade, triplo e terça parte, com o suporte de imagens ou material manipulável, utilizando estratégias pessoais. (BRASIL, 2017, p.283);

Já a indicação de uso de tecnologias digitais, calculadoras e softwares estão presentes em várias Habilidades do 3º, 4º e 5º Anos do Ensino Fundamental. As do 3º Ano são:

> (EF03MA16) Reconhecer figuras congruentes, usando sobreposição e desenhos em malhas quadriculadas ou triangulares, incluindo o uso de tecnologias digitais. (BRASIL, 2017, p.289);
> (EF03MA28) Realizar pesquisa envolvendo variáveis categóricas em um universo de até 50 elementos, organizar os dados coletados utilizando listas, tabelas simples ou de dupla entrada e representá-los em gráficos de colunas simples, com e sem uso de tecnologias digitais. (BRASIL, 2017, p.289).

No 4º Ano do Ensino Fundamental, também é sugerido o uso de tecnologias digitais, softwares e aplicativos, como planilhas eletrônicas, para o trabalho com conteúdos de Matemática nas Unidades Temáticas de Geometria (as duas primeiras, do destaque); Grandezas e Medidas (a penúltima Habilidade do destaque) e Probabilidade e estatística (a última, do destaque) :

> (EF04MA18) Reconhecer ângulos retos e não retos em figuras poligonais com o uso de dobraduras, esquadros ou *softwares* de geometria. (BRASIL, 2017, p.293).
> (EF04MA19) Reconhecer simetria de reflexão em figuras e em pares de figuras geométricas planas e utilizá-la na construção de figuras congruentes, com o uso de malhas quadriculadas e de *softwares* de geometria. (BRASIL, 2017, p.293).
> (EF04MA24) Registrar as temperaturas máxima e mínima diárias, em locais do seu cotidiano, e elaborar gráficos de colunas com as variações diárias da temperatura, utilizando, inclusive, planilhas eletrônicas. (BRASIL, 2017, p.293).
> (EF04MA28) Realizar pesquisa envolvendo variáveis categóricas e numéricas e organizar dados coletados por meio

> de tabelas e gráficos de colunas simples ou agrupadas, com e sem uso de tecnologias digitais. (BRASIL, 2017, p.293).

Os materiais manipulativos também são citados na Habilidade EF04MA08, referente ao 4º Ano: “Resolver, com o suporte de imagem e/ou material manipulável, problemas simples de contagem, como a determinação do número de agrupamentos possíveis ao se combinar cada elemento de uma coleção com todos os elementos de outra, utilizando estratégias e formas de registro pessoais”. (BRASIL, 2017, p.291).

Indicação semelhante é feita nas Habilidades definidas para o 5º Ano do Ensino Fundamental, nas Unidades Temáticas de Geometria – as três primeiras Habilidades do destaque - e Probabilidade e estatística (a última Habilidade do destaque):

> (EF05MA14) Utilizar e compreender diferentes representações para a localização de objetos no plano, como mapas, células em planilhas eletrônicas e coordenadas geográficas, a fim de desenvolver as primeiras noções de coordenadas cartesianas. (BRASIL, 2017, p.297).
> (EF05MA17) Reconhecer, nomear e comparar polígonos, considerando lados, vértices e ângulos, e desenhá-los, utilizando material de desenho ou tecnologias digitais. (BRASIL, 2017, p.297).
> (EF05MA18) Reconhecer a congruência dos ângulos e a proporcionalidade entre os lados correspondentes de figuras poligonais em situações de ampliação e de redução em malhas quadriculadas e usando tecnologias digitais. (BRASIL, 2017, p.297).
> (EF05MA25) Realizar pesquisa envolvendo variáveis categóricas e numéricas, organizar dados coletados por meio de tabelas, gráficos de colunas, pictóricos e de linhas, com e sem uso de tecnologias digitais, e apresentar texto escrito sobre a finalidade da pesquisa e a síntese dos resultados. (BRASIL, 2017, p.297).

A partir do 6º Ano, a indicação de uso de recursos tecnológicos se amplia, como podemos observar nas várias Habilidades destacadas em seguida, para o 6º Ano, nas Unidades Temáticas de Geometria – as três primeiras Habilidades do destaque - e Probabilidade e estatística (a última Habilidade do destaque):

:

> (EF06MA21) Construir figuras planas semelhantes em situações de ampliação e de redução, com o uso de malhas quadriculadas, plano cartesiano ou tecnologias digitais. (BRASIL, 2017, p.303)
> (EF06MA22) Utilizar instrumentos, como réguas e esquadros, ou softwares para representações de retas paralelas e

> perpendiculares e construção de quadriláteros, entre outros. (BRASIL, 2017, p.303)
> (EF06MA27) Determinar medidas da abertura de ângulos, por meio de transferidor e/ou tecnologias digitais. (BRASIL, 2017, p.303)
> (EF06MA33) Planejar e coletar dados de pesquisa referente a práticas sociais escolhidas pelos alunos e fazer uso de planilhas eletrônicas para registro, representação e interpretação das informações, em tabelas, vários tipos de gráficos e texto. (BRASIL, 2017, p.305)

A mesma indicação ocorre nas Habilidades definidas para diferentes Objetivos nas Unidades Temáticas de Geometria (duas primeiras do destaque) e Estatística e probabilidade (a última habilidade do destaque), do 7º Ano do Ensino Fundamental:

> (EF07MA21) Reconhecer e construir figuras obtidas por simetrias de translação, rotação e reflexão, usando instrumentos de desenho ou softwares de geometria dinâmica e vincular esse estudo a representações planas de obras de arte, elementos arquitetônicos, entre outros. (BRASIL, 2017, p.309)
> (EF07MA23) Verificar relações entre os ângulos formados por retas paralelas cortadas por uma transversal, com e sem uso de softwares de geometria dinâmica. (BRASIL, 2017, p.309)
> (EF07MA36) Planejar e realizar pesquisa envolvendo tema da realidade social, identificando a necessidade de ser censitária ou de usar amostra, e interpretar os dados para comunicá-los por meio de relatório escrito, tabelas e gráficos, com o apoio de planilhas eletrônicas. (BRASIL, 2017, p.311)

No 8º Ano do Ensino Fundamental, a recomendação de uso de recursos digitais, aplicativos e softwares abrange os conteúdos de porcentagem e funções, da Unidade Temática de Números (as duas primeiras do destaque), e Habilidades da Unidade Temática de Geometria (as duas últimas Habilidades do destaque):

> (EF08MA04) Resolver e elaborar problemas, envolvendo cálculo de porcentagens, incluindo o uso de tecnologias digitais. (BRASIL, 2017, p.313)
> (EF08MA09) Resolver e elaborar, com e sem uso de tecnologias, problemas que possam ser representados por equações polinomiais de 2º grau do tipo $ax^2 = b$. (BRASIL, 2017, p.313
> (EF08MA15) Construir, utilizando instrumentos de desenho ou softwares de geometria dinâmica, mediatriz, bissetriz, ângulos de 90°, 60°, 45° e 30° e polígonos regulares. (BRASIL, 2017, p.315)
> (EF08MA18) Reconhecer e construir figuras obtidas por composições de transformações geométricas (translação,

> reflexão e rotação), com o uso de instrumentos de desenho ou de softwares de geometria dinâmica. (BRASIL, 2017, p.315)

No 9º Ano do Ensino Fundamental, a recomendação de uso de recursos digitais, aplicativos e softwares também abrange os conteúdos de porcentagem e funções, da Unidade Temática de Números (primeira Habilidade do destaque); habilidades da Unidade Temática de Geometria (segunda e terceira Habilidades do destaque); e Habilidades de Estatística e probabilidade (duas últimas Habilidades citadas):

> (EF09MA05) Resolver e elaborar problemas que envolvam porcentagens, com a ideia de aplicação de percentuais sucessivos e a determinação das taxas percentuais, preferencialmente com o uso de tecnologias digitais, no contexto da educação financeira. (BRASIL, 2017, p.317)
> (EF09MA11) Resolver problemas por meio do estabelecimento de relações entre arcos, ângulos centrais e ângulos inscritos na circunferência, fazendo uso, inclusive, de softwares de geometria dinâmica. (BRASIL, 2017, p.317)
> (EF09MA15) Descrever, por escrito e por meio de um fluxograma, um algoritmo para a construção de um polígono regular cuja medida do lado é conhecida, utilizando régua e compasso, como também softwares. (BRASIL, 2017, p.319)
> (EF09MA22) Escolher e construir o gráfico mais adequado (colunas, setores, linhas), com ou sem uso de planilhas eletrônicas, para apresentar um determinado conjunto de dados, destacando aspectos como as medidas de tendência central. (BRASIL, 2017, p.319)
> (EF09MA23) Planejar e executar pesquisa amostral envolvendo tema da realidade social e comunicar os resultados por meio de relatório contendo avaliação de medidas de tendência central e da amplitude, tabelas e gráficos adequados, construídos com o apoio de planilhas eletrônicas. (BRASIL, 2017, p.319)

Fazendo uma análise ampla dos documentos que destacamos de modo mais detalhado nas discussões que fizemos sobre o pensamento combinatório na educação Básica, a saber, os Parâmetros Curriculares Nacionais e a Base Nacional Comum Curricular, constatamos que havia uma referência mais direta e destacada ao pensamento combinatório nos PCN e uma referência indireta e mais sintética na BNCC. Em muitos casos, a presença do trabalho com o pensamento combinatório está associado à Unidade temática Números.

Quanto às recomendações de uso de recursos didáticos para o ensino de Matemática, nos PCN, além de haver uma discussão mais detalhada sobre as diferentes metodologias que poderiam ser adotadas, como o uso da História da

Matemática, da Resolução de Problemas, de Jogos e materiais manipulativos e de novas tecnologias, o documento trazia, ainda, orientações metodológicas para o trabalho com vários conteúdos, o que poderia ajudar o professor a refletir de forma mais aprofundada sobre o planejamento de suas ações em sala de aula.

No caso da BNCC, as referências à utilização de recursos, como materiais manipulativos, jogos, planilhas eletrônicas e outros, estão diluídas em Habilidades diversas ao longo do Ensino Fundamental e Médio e não há recomendações específicas relativas aos cuidados na escolha e uso desses recursos em sala de aula.

Embora entendendo que um documento como a BNCC não poderia contemplar esses elementos relacionados a todas as áreas de conhecimento que compõem o documento, entendemos ser importante e necessária a organização de documentos complementares que contemplem esses elementos, evitando que a definição de uso dessas estratégias de ensino fique nas mãos dos autores de livros didáticos de Matemática.

É fundamental que os cursos de formação inicial e continuada de professores que ensinam Matemática na Educação Básica contemplem as potencialidades e limitações de diferentes metodologias e recursos que podem ser utilizados em sala de aula, visando a melhoria da qualidade da aprendizagem de nossos estudantes e, portanto, de sua formação específica e geral.

2.3 RECURSOS DIDÁTICOS PARA O ENSINO DE MATEMÁTICA

2.3.1 OS MATERIAIS MANIPULATIVOS

Por diversos motivos, os alunos e professores enfrentam muitas dificuldades no processo de ensino-aprendizagem de Matemática ao longo da Educação Básica. Segundo Fiorentini e Miorim (1990, p.1),

> [...] o aluno não consegue entender a matemática que a escola lhe ensina, muitas vezes é reprovado nesta disciplina, ou então, mesmo que aprovado, sente dificuldades em utilizar o conhecimento "adquirido", em síntese, não consegue efetivamente ter acesso a esse saber de fundamental importância".

Por outro lado, o professor, por não conseguir bons resultados em relação ao aprendizado de seus alunos, e por não encontrar uma maneira que entende como adequada de ensinar os conteúdos, procura novos elementos que, muitas vezes são, também de acordo com Fiorentini e Miorim (1990, p.1), “[...] meras receitas de como ensinar determinados conteúdos”.

Para superar os problemas que identifica em sala de aula, os professores participam de encontros, cursos e conferências, nos quais eles procuram aprender novas maneiras de fazer com que os alunos compreendam o que se propõe que estudem. As ações que envolvem materiais didáticos e jogos tornam-se sedutoras para os docentes, que acreditam que esses recursos vão ajudá-los a resolver os problemas que enfrentam em sala de aula.

Embora exista um senso comum de que o material concreto e/ou os jogos pedagógicos são indispensáveis no ensino de ideias básicas da Matemática, em parte por tornar o estudo da disciplina mais lúdico para os estudantes, o que ajudaria para que gostassem da disciplina, existem posições divergentes a respeito disso.

Carraher, Carraher e Schilemann (1988, p.179) afirmaram, com base em suas pesquisas, que "[...] não precisamos de objetos na sala de aula, mas de objetivos na sala de aula, mas de situações em que a resolução de um problema implique a utilização dos princípios lógico-matemáticos a serem ensinados".

Para esses autores, mais importante que qualquer recurso que se utilize em sala de aula para o desenvolvimento de um conteúdo matemático é a clareza em relação aos objetivos de ensino que se deseja alcançar e a seleção dos problemas que serão propostos aos estudantes e que ajudarão o estudante a entender a utilidade e importância daquilo que está aprendendo, para sua formação.

Para Carraher, Carraher e Schilemann (1988), os objetos que são utilizados em sala de aula, para dar materialidade aos conteúdos matemáticos, às vezes são tão abstratos quanto os próprios conceitos da disciplina, uma vez que sua estrutura é artificial e dirigida para objetivos que não têm relação com o universo de interesses da criança. Assim, tão importante quanto pensar na adequação de um material para o trabalho com um conteúdo, é pensar se os problemas propostos para uso desse material estão próximos daqueles que a criança encontraria fora da escola.

Para Fiorentini e Miorim, “[...] por trás de cada material, se esconde uma visão de educação, de matemática, do homem e de mundo; ou seja, existe, subjacente ao material, uma proposta pedagógica que o justifica” (FIORENTINI; MIORIM, 1990, p. 2). Assim, não podemos pensar em neutralidade de recursos didáticos, da mesma maneira que não podemos pensar em neutralidade de qualquer área de conhecimento.

Assim, se o professor acredita que a criança aprende jogando, simplesmente pelo apelo ao aspecto lúdico da atividade, é possível que não haja um cuidado com os objetivos da proposta de uso do jogo ou mesmo o que se denomina de uso do “jogo pelo jogo”, ou seja, para poder afirmar que usa recursos diversificados no ensino de Matemática, embora este não seja, necessariamente, adequado e termine apenas preenchendo um tempo da aula, sem proporcionar desenvolvimento da formação matemática do estudante.

A discussão sobre o uso de recursos próprios para o ensino de conteúdos escolares não é recente. Pensadores como Comenius (1592-1671), Rousseau (1727-1778), Pestalozzi (1746-1827) e Froebel (1782-1852) deram importantes contribuições para a educação, ao ressaltarem a importância de serem considerados no processo educacional o desenvolvimento biológico e psicológico do aluno, bem como valorizar as atividades atrativas para os jovens, como o canto, desenho, modelagem, jogos e atividades ao ar livre. (FIORENTINI; MIORIM, 1990, p. 2)

Posteriormente, a médica italiana Maria Montessori (1870 - 1952) e o médico belga Jean-Ovide Decroly (1871 - 1932) ampliariam as discussões sobre didáticas especiais e que estimulavam a participação ativa do estudante na aprendizagem matemática. Montessori desenvolveu vários materiais manipulativos com tal finalidade, inicialmente tendo como objetivo a formação de estudantes com limitações intelectuais. (FIORENTINI; MIORIM, 1990, p. 2)

As potencialidades desses materiais, a exemplo do Material dourado, dos Triângulos construtores e dos Cubos para composição e decomposição de binômios e trinômios, fizeram com que seu uso fosse ampliado para todos os estudantes, e esses recursos didáticos são produzidos comercialmente e são facilmente encontrados no comércio. O uso de recursos como os aqui citados, em sala de aula, como o de qualquer recurso didático, porém, precisa

ser planejado, organizado segundo objetivos bem delimitados e associado à resolução de problemas selecionados criteriosamente (RÊGO e RÊGO, 2016)

Já Decroly defendia que no lugar de dar materiais para a criança manipular, deveríamos propor que ela fizesse a observação geral do fenômeno em questão e, analisando esse fenômeno, fizesse sua decomposição em partes menores e mais fáceis de serem compreendidas. Como exemplo, ele aponta a observação de fenômenos naturais, como o acompanhamento do crescimento de uma planta ou a quantidade de chuva recolhida em um vasilhame em um determinado período de tempo para introduzir atividades de medição e de contagem. (FIORENTINI; MIORIM, 1990, p. 2)

Castelnuovo (1970) defendia que o interesse da criança deveria ser atraído pelas ações que ela realizasse com o material concreto e as relações com os elementos matemáticos a eles associados. O “concreto”, para ele, envolveria o exercício das capacidades de o estudante analisar e fazer generalizações mentais, permitindo-lhe construir conceitos a partir da referência concreta. Esse material deveria ser artificial, ou seja, estruturado com um fim objetivo, e tambémpoder sofrer modificações, na medida em que o estudante se familiariza com seu uso. (FIORENTINI; MIORIM, 1990, p. 3)

Vamos exemplificar a proposta de Castelnuovo usando como referência para atividades o Material dourado, elaborado por Maria Montessori, para o trabalho com o Sistema de Numeração Decimal. O Material dourado é composto por cubinhos soltos; de barras formadas por dez cubinhos agregados em uma coluna; de placas quadrangulares formadas por dez barras; e por um cubo formado por dez placas.

Inicialmente os estudantes poderiam trabalhar com o material dourado associando os cubos soltos à unidade; as placas à dezena; as placas à centena e o cubo grande à unidade de milhar. A ideia é que a criança entenda as relações de composição e decomposição entre as ordens no Sistema de Numeração Decimal, o que irá facilitar a compreensão posterior de, por exemplo, algoritmos tradicionais associados às operações aritméticas.

Em um segundo momento o mesmo material poderia ser utilizado para flexibilizar o conceito de unidade, trabalhando-se em um momento com a barra como sendo a unidade, o que implicaria que os cubos menores seriam décimos (a décima parte da barra); as placas seriam dezenas e o cubo grande a centena.

No trabalho com números decimais o cubo grande poderia ser tomado como unidade e, neste caso, as placas seriam décimos da unidade; as barras seriam centésimos da unidade e os cubos menores seriam centésimos da unidade. Ou seja, o material, ao mesmo tempo que é definido para um fim específico, também permite flexibilidade conceitual, na medida em que seu uso é diversificado, considerando-se objetivos educacionais específicos.

Fiorentini e Miorim afirmam que existe uma tendência de os jogos serem mais valorizados que o material manipulável e orientam que os jogos "[...] podem vir no início de um novo conteúdo com a finalidade de despertar o interesse da criança ou no final com o intuito de fixar a aprendizagem e reforçar o desenvolvimento de atitudes e habilidades". (FIORENTINI; MIORIM, 1990, p.3)

De acordo com Rêgo e Rêgo (2016), quando se faz uso de jogos e materiais manipulativos, com fins didáticos, devem ser observados sempre alguns aspectos. O primeiro deles se refere ao tempo que o estudante deverá ter, para conhecer o material, manipulando-o livremente, e apenas depois desse contato inicial e informal, ser apresentado às regras e características gerais, dirigidas aos objetivos de aprendizagem planejados pelo professor.

O segundo aspecto está relacionado à valorização da comunicação de ideias pelos estudantes, em sala de aula. Ou seja, em uma atividade com um jogo ou material manipulável é fundamental que o professor proponha discussões relativas às observações e conclusões dos estudantes, com base nas ações que realizaram com os recursos utilizados.

Nesse processo o estudante aprende a refletir sobre como ele pensa e em que sua maneira de pensar é diferente da de seus colegas, o que possibilita que aprendam uns com os outros e conheçam diferentes estratégias para lidar com uma mesma situação problema.

Em terceiro lugar, Rêgo e Rêgo (2016) ressaltam a importância de haver um planejamento e objetivos claros por trás de cada atividade, mas, ao mesmo tempo, esse planejamento dar espaço para o surgimento de elementos não planejados, como os questionamentos que levam a outros conteúdos matemáticos ou a conhecimentos de outros campos de conhecimento.

Por exemplo, no trabalho com o Material dourado, um aluno poderia questionar se só é possível usar o cubo pequeno como unidade e isso propiciar uma discussão rica sobre a ideia de unidade, ainda que o professor tivesse como

proposta inicial fazer uso convencional do recurso, nas relações entre as ordens, sem ter foco na discussão sobre o conceito de unidade.

Os autores citados destacam a importância da análise criteriosa e responsável do material, considerando os objetivos de ensino que se deseja alcançar e, finalmente, ao fazer o planejamento da aula com o uso de recursos manipuláveis, digitais, jogos, ou outros, procurar conhecê-los, avaliando suas potencialidades e limitações, o que pode, inclusive, antecipar prováveis questionamentos que poderão ser feitos pelos estudantes, ou propostos pelo professor, enriquecendo a utilização de recursos didáticos em sala de aula.

2.3.2 RECURSOS TECNOLÓGICOS PARA O ENSINO DE MATEMÁTICA

A adesão ao uso de recursos tecnológicos, em especial digitais, tem ocorrido em praticamente todos os campos de atuação humana. Embora em um ritmo mais lento e em ações mais pontuais, as escolas têm, aos poucos, aderido ao uso de tecnologias de informação e comunicação, através do qual alunos e professores podem ampliar conhecimentos; interagir uns com os outros e resolver problemas de maneira mais rápida.

Como o uso de novas tecnologias na escola não pode ocorrer do mesmo modo como é feito em espaços de produção, como fábricas e empresas, ou no comércio ou outros setores de atuação humana, diversos pesquisadores têm se dedicado a pesquisar esse fenômeno, focando nas particularidades do processo educativo. Almeida (2016) destaca, como exemplo de pesquisadores que têm se dedicado a pesquisas dessa natureza, nomes como o de Moran, Demo, Tajra e Paiva (MORAN, 2007; DEMO, 1993; TAJRA, 2001 e PAIVA, 2008, apud ALMEIDA, 2016). Ao citar esses autores, ressalta uma discussão que emergiu quando o tema começou a ser debatido, relativa ao papel do professor nesse espaço reconfigurado pelas novas tecnologias. Ele continuaria sendo necessário?

A resposta para esta questão seria: Sim! O professor não pode ser dispensado em uma estrutura em que as tecnologias estejam presentes, ainda que ele necessite reconfigurar algumas de suas ações, a exemplo do foco na interpretação dos enunciados dos problemas, quando o uso de calculadora é estimulado em um determinado momento do processo de ensino.

A seleção dos recursos ou a mediação de seu uso, no caso de os recursos não terem sido selecionados pelo professor, continuam sendo indispensáveis para que a aprendizagem escolar ocorra. Vale destacar, ainda, que um mesmo recurso tecnológico pode levar a resultados distintos, mesmo quando aplicados pelo mesmo professor, em razão da diversidade de estudantes que se tem em uma sala de aula.

A diversidade de recursos que o professor poderá incluir em suas atividades de ensino é grande, a exemplo de vídeos; softwares educativos; aplicativos de celular; redes sociais (como WhatsApp); plataformas como o Youtube; dentre outras. O uso adequado desses recursos, porém, demanda que as formações inicial e continuada do professor sejam repensadas, uma vez que não é possível utilizar bem um recurso sobre os quais nunca se pensou, do ponto de vista da sala de aula.

Embora boa parte dos estudantes, assim como muitos professores, tenham familiaridade com parte dos recursos tecnológicos citados, essa familiaridade não está associada ao contexto educativo e é fundamental pensar sobre as adequações que precisam ocorrer para que eles façam parte da prática dos professores, com qualidade.

Como lembra Almeida (2016), comumente se vê hoje em sala de aula os estudantes usando o celular, mas esse uso pelos estudantes não necessariamente agrega avanços em seu aprendizado. Em muitos casos, inclusive promove distrações, em especial em razão das redes sociais e de jogos, tirando sua atenção do trabalho desenvolvido em sala de aula.

O celular tem sido usado por alguns estudantes para tirar fotos das respostas de uma avaliação e compartilhá-las com os colegas, o que facilita a “fila” (ou “cola”, como se denomina em alguns lugares). Por esse motivo, alguns professores e diretores de escolas proíbem o uso desses aparelhos na sala de aula.

O autor citado defende que o professor deve “[...] utilizar essas ferramentas em favor de si, buscando métodos de associá-las às aulas, no caso de matemática, para que o aproveitamento e o interesse discentes sejam despertados” (ALMEIDA, 2016, p.321). A tecnologia pode facilitar o desenvolvimento do trabalho com conteúdos matemáticos e torná-lo atrativo

para o aluno, ampliando sua ação no processo de ensino e aprendizagem por meio de ferramentas virtuais.

No processo de formação docente é fundamental portanto, que sejam discutidos os modos de avaliação que podem ser feitos de um recurso tecnológico, identificando-se suas potencialidades e limitações; seu uso associado a conteúdos matemáticos diversos; a exploração orientada, pelos estudantes; a elaboração de bons roteiros de atividades; dentre outros aspectos.

Uma base formativa geral relacionada ao uso de novas tecnologias em sala de aula, permitirá que o professor acompanhe o que tem sido desenvolvido a partir de pesquisas sobre o tema e tenham autonomia na hora de selecionarem o que poderão inserir em seu planejamento para o trabalho com um conteúdo matemático em sala de aula.

Como destaca Almeida (2016, p.319), os professores precisam

> [...] estar preparados para interagir com uma geração mais atualizada e mais informada, porque os modernos meios de comunicação, liderados pela Internet, permitem o acesso instantâneo à informação e os alunos têm mais facilidade para buscar conhecimento por meio da tecnologia colocada à sua disposição.

Ou seja, se antes a referência do estudante para o trabalho com um conteúdo matemático era apenas a de seu professor em sala de aula, hoje ele pode ter acesso a inúmeras aulas sobre o mesmo conteúdo, ministrada por diferentes professores. Se antes o professor constituía autoridade única no trabalho com um conteúdo, hoje ele pode ser questionado, caso os estudantes comparem sua prática com a de outros profissionais que disponibilizam material didáticos em plataformas como o Youtube.

As mesmas ressalvas feitas em relação ao uso de jogos e materiais manipuláveis se aplicam ao trabalho com novas tecnologias, em especial na compreensão de que nenhum recurso didático é bom ou ruim por princípio, ou seja, sua qualidade dependerá principalmente do uso que fazemos deles.

3. APRESENTAÇÃO E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS DA PESQUISA

Não era nossa intenção apresentar todos os recursos que podem ser explorados no ensino de Análise Combinatória, mas destacar algumas possibilidades, dependendo da natureza do recurso (se manipulativo, jogo ou aplicativo), para exemplificar as ferramentas que o professor pode dispor para facilitar a aprendizagem do conteúdo na Educação Básica.

3.1 MATERIAIS MANIPULATIVOS PARA O ENSINO DE COMBINATÓRIA

Neste item iremos destacar recursos manipulativos que podem ser explorados no ensino de elementos que visam o desenvolvimento do pensamento combinatório. Muitos deles podem ser elaborados pelo próprio professor, com ou sem a participação dos estudantes, o que aumenta a possibilidade de uso de recursos dessa natureza em sala de aula.

3.1.1 FICHAS DE CONTAGEM

Em sua dissertação de Mestrado, Gadelha (2020), analisou o uso de material manipulável concreto (fichas) e de material manipulável virtual (com o software Pixton©) na aprendizagem de problemas combinatórios, segundo classificação de Borba (2010): arranjo, combinação, permutação e produto de medidas. A pesquisa foi realizada com 36 estudantes do 5º ano do Ensino Fundamental de duas escolas do Município de Recife, Pernambuco.

As fichas eram utilizadas na resolução de problemas propostos pela pesquisadora e os resultados evidenciaram uma melhor compreensão dos elementos combinatórios e a manifestação de várias representações simbólicas, com listagens sendo a mais usual e também presentes na determinação das respostas corretas das questões. As fichas também facilitaram a elaboração de estratégias de organização das respostas, facilitando a sistematização das contagens.

O material manipulativo elaborado por Gadelha e Borba (2019) era formado por um conjunto com 408 figuras representando os elementos das situações-problemas de um pré-teste com quatro itens. Cada elemento estava

presente em 12 fichas repetidas, de modo que a quantidade total de fichas fosse maior que o suficiente para a resolução de todos os problemas. Esse é um ponto importante a ser observado na preparação do material.

As fichas, impressas em papel fotográfico, eram fixadas pelos estudantes em um quadro de material emborrachado (EVA), por meio de uso de velcro, conforme ilustrado na Figura 1.

Figura 1 – Material manipulativo com fichas e EVA

Fonte: GADELHA, D.; BORBA, R., 2019, p. 6.

O material pode ser impresso em papel comum, sem sistema de fixação como o apresentado na pesquisa de Gadelha e Borba, se o material for utilizado na horizontal, sobre uma mesa ou carteira escolar. Para explorar o recurso o professor propõe problemas abordando arranjo, combinação, permutação e produto cartesiano, como os sugeridos por Gadelha e Borba (2019, p. 5):

> Três amigos (Beto, Liz e Chico) apostaram corrida na praia de Boa Viagem. De quantas maneiras diferentes se pode ter o primeiro e o segundo lugares?
>
> D. Marta levou seus quatro filhos (Bianca, Sabrina, Diego e Felipe) ao parque e no brinquedo pula-pula só podem entrar três crianças por vez. De quantas maneiras diferentes três crianças brincarão por vez no pula-pula?
>
> Três irmãos (Igor, Léo e Tina) querem se sentar nos três últimos lugares disponíveis no cinema. De quantas maneiras diferentes os três irmãos podem se sentar nos lugares disponíveis?
>
> Na loja Quero Mais estão disponíveis três tipos de botas (marrom, preta e vinho) e dois tipos de gorros (cinza e rosa). De quantas maneiras diferentes pode-se comprar uma bota e um gorro?

Para resolver as questões o estudante, sozinho ou em dupla, utiliza as fichas que representam os elementos presentes no enunciado (nas três primeiras questões, as pessoas, e na última, os tipos de botas e gorros), e organiza todas as possibilidades por meio do material. Por exemplo, para resolver a primeira questão são usadas as fichas com os três amigos citados no enunciado (Beto, Liz e Chico).

O aluno pode representar inicialmente todas as situações nas quais o vencedor foi o mesmo. Escolhendo primeiro Liz como vencedora, o aluno encontrará duas possibilidades para o segundo colocado, isto é, Beto e Chico, então ele usa as fichas para representar os resultados Liz-Beto e Liz-Chico, juntando as fichas dos dois primeiros colocados e mantendo um espaço vazio para separar os resultados.

Em seguida, usa o mesmo procedimento para os dois casos em que Chico fica em primeiro lugar, isto é, Chico-Beto e Chico-Liz; e nos dois casos nos quais Beto fica em primeiro lugar, ou seja, Beto-Liz e Beto-Chico. Assim, ele encontrará seis possíveis maneiras de se ter o primeiro e o segundo colocados.

O uso das fichas visa facilitar a compreensão e generalização dos procedimentos de contagem envolvidos em problemas que envolvem o pensamento combinatório, ou seja, através deste material, os alunos podem observar padrões na organização das possibilidades listadas (no caso do problema usado como exemplo, para cada possível vencedor temos duas possibilidades para o segundo colocado), o que os ajudará a sistematizar tais procedimentos de contagem em fórmulas, de forma generalizada.

Uma vez que os estudantes compreenderam a constituição básica dos problemas envolvendo o pensamento combinatório, entendendo as particularidades presentes na importância ou não da ordem dos elementos em um conjunto de elementos ou como proceder quando há elementos repetidos ou não, eles podem fazer uso de calculadoras on-line específicas para o trabalho com Análise Combinatória, como a disponível no site Calculadoras On-Line[1].

Vale destacar ainda que a representação das possibilidades é importante para que os alunos percebam como se comportam as combinações, permutações e arranjos com um número finito de elementos, de modo a

[1] Disponível em: <http://ecalc.blogspot.com/p/variaveis-var-contvar-repetvar-ordemvar.html> Acesso em: 4 ago, 2021.

perceberem que em algum momento já não será mais possível encontrar uma nova combinação, permutação ou arranjo, diferente dos que já foram identificados por eles.

Com as fichas manipulativas também podemos abordar os invariantes de ordem e escolha, pois existem situações em que a ordem dos elementos importa e outras em que a ordem é irrelevante. Se devemos escolher, por exemplo, três dentre cinco pessoas para formarem os possíveis resultados de uma competição, então a ordem importa e cada possível ordem deve ser representada com as fichas. As fichas ajudam a compreender essa particularidade de uma combinação de elementos.

Se devemos escolher, por exemplo, três dentre cinco pessoas para formarem um grupo para um passeio, então a ordem não importa. Ou seja, se A, B e C são as pessoas escolhidas, não faz diferença montar os grupos A-B-C e B-C-A para o passeio, mas em uma competição, o resultado A-B-C, com A como primeiro colocado, B como segundo e C como terceiro, será diferente do resultado B-C-A, do primeiro ao terceiro colocado, nessa ordem.

As fichas podem ser exploradas simultaneamente com o uso de outras formas de representação das possibilidades, como indicado no exemplo envolvendo a questão do Exame Nacional de Avaliação de Estudantes do Ensino Médio (ENEM) do ano 2012, a Questão 144, que tinha o seguinte enunciado:

> O diretor de uma escola convidou os 280 alunos de terceiro ano a participarem de uma brincadeira. Suponha que existem 5 objetos e 6 personagens numa casa de 9 cômodos; um dos personagens esconde um dos objetos em um dos cômodos da casa. O objetivo da brincadeira é adivinhar qual objeto foi escondido por qual personagem e em qual cômodo da casa o objeto foi escondido. Todos os alunos decidiram participar. A cada vez um aluno é sorteado e dá a sua resposta. As respostas devem ser sempre distintas das anteriores, e um mesmo aluno não pode ser sorteado mais de uma vez. Se a resposta do aluno estiver correta, ele é declarado vencedor e a brincadeira é encerrada.
>
> O diretor sabe que algum aluno acertará a resposta porque há:
>
> a)10 alunos a mais do que possíveis respostas distintas.
> b) 20 alunos a mais do que possíveis respostas distintas.
> c) 119 alunos a mais do que possíveis respostas distintas.
> d) 260 alunos a mais do que possíveis respostas distintas.
> e) 270 alunos a mais do que possíveis respostas distintas. (Fonte: https://brasilescola.uol.com.br/matematica/fatorial-principio-fundamental-da-contagem.htm)

Para representar os elementos presentes no enunciado, os estudantes utilizariam as fichas ilustradas na Figura 2: de A a F são os seis personagens; de 1 a 9, os nove cômodos; de a até e, os cinco objetos.

Figura 2. Personagens do enunciado do problema do ENEM

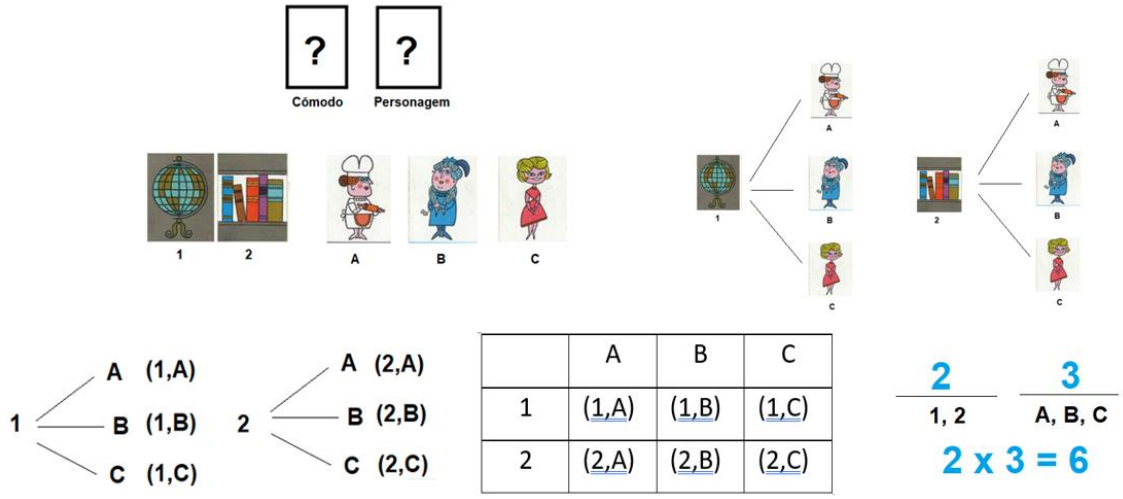
Fonte: material de componente curricular do Curso, elaborado pela orientadora do presente trabalho

O estudante precisaria organizar um trio de dados, tendo como primeiro elemento o personagem; como segundo elemento o ambiente; e como terceiro elemento o objeto. Ele precisaria analisar o número de possibilidades de preenchimento do primeiro elemento do trio de figuras, assim como dos dois outros elementos (ambiente e objeto), sistematizando a resposta por meio de uma multiplicação.

Para atingir esse nível de generalização o estudante precisa resolver, antes, problemas semelhantes, porém, mais simples, envolvendo um número menor de elementos nas composições (no caso, apenas dois cômodos e três personagens), representando o procedimento de organização de possibilidades de diferentes maneiras (Figura 3).

Essa evolução gradual é vista nas Habilidades definidas na BNCC (BRASIL, 2017), para o trabalho com o pensamento combinatório, como discutimos no Capítulo anterior. Do mesmo modo, o documento defende o uso de diferentes formas de representação e estratégia nos procedimentos de resolução, ampliando a compreensão do estudante, acerca daquilo que ele estuda.

Figura 3. Problema simplificado e diferentes representações da solução



Fonte: material de componente curricular do Curso, elaborado pela orientadora do presente trabalho

Temos o mesmo problema representado em árvores de possibilidades criadas a partir do uso das figuras dos elementos; árvores de possibilidades elaboradas com base nos números e letras correspondentes aos cômodos e personagens; uma tabela de dupla entrada com esses mesmos códigos; e casas vazias a serem preenchidas com o número de possibilidades de preenchimento para cada casa – na primeira casa, com o número de cômodos possíveis e na segunda casa, com o número de personagens.

Como podemos perceber, há uma variação do grau de generalização das formas de representação exploradas, o que ajuda o aluno a fazer generalizações, aumentando-se aos poucos o número de elementos nos problemas propostos, assim como a formalização presente na representação, como no caso em que substituímos as figuras por letras e números.

3.1.2 BLOCOS LÓGICOS

Os blocos lógicos foram criados pelo matemático húngaro Zoltan Paul Dienes na década de 1950, sendo constituídos por 48 peças com quatro características variáveis: forma (triângulo, quadrado, retângulo, círculo); tamanho (grande, pequeno); espessura (grosso, fino) e cor (azul, amarelo, vermelho) (Figura 4). Os blocos lógicos podem ser encontrados em lojas de

brinquedos, bem como nas seções de brinquedos em lojas de departamentos e hipermercados, ou podem ser confeccionados em madeira, plástico ou cartão.

Figura 4 - Blocos lógicos

Fonte: PEREIRA, M. C., 2019, p. 24.

Com as características indicadas, cada uma das 48 peças do conjunto possui pelo menos uma característica diferente de cada uma das outras 47 peças. O total de peças do conjunto representa a solução do seguinte problema de combinatória: determine quantas peças podemos confeccionar nas cores azul, amarela e vermelha, nas formas quadrangular, retangular, circular ou triangular, com tamanho grande ou pequeno, e com espessura grossa ou fina.

As peças podem ser usadas para representar situações em que precisamos saber de quantas maneiras podemos tomar decisões sob certas condições, utilizando as características dos blocos para representar cada variável do problema. Neste caso, as peças substituiriam as figuras particulares que exemplificamos com o uso das fichas, envolvendo um grau de generalização maior que naquele caso.

Por exemplo, poderíamos usar uma forma grande de uma cor para cada personagem (por exemplo, círculo grande amarelo, triângulo grande amarelo e quadrado grande amarelo) e uma espessura para cada cômodo (grosso ou fino), no problema representado na Figura 3. Assim, teríamos: um círculo grande, amarelo e fino e um círculo grande, amarelo e grosso; um triângulo grande, amarelo e grosso e um triângulo grande, amarelo e fino; e, finalmente, um quadrado grande, amarelo e grosso e um quadrado grande, amarelo e fino, totalizando seis representações das possíveis combinações.

É importante observar os cuidados que precisam ser observados no uso das peças dos blocos lógicos, em razão da abstração envolvida em termos de representação das características dos elementos dos enunciados da questão, o que pode dificultar a compreensão do processo. Por outro lado, esse tipo de ação é importante para ampliar a capacidade de abstração dos estudantes, não sendo, porém, recomendado para o trabalho com as abordagens iniciais do pensamento combinatório.

Com os blocos lógicos, o aluno representa materialmente as situações envolvidas em um problema, facilitando a determinação de todas as possibilidades que atendem a uma ou mais variáveis. Por outro lado, este material só pode ser utilizado para resolver problemas envolvendo até quatro variáveis, pois não há nenhuma característica para diferenciar as peças após o uso da cor, da forma, do tamanho e da espessura. Além disso, os blocos lógicos também não permitem a materialização de situações em que nós temos mais de 48 possíveis combinações das variáveis dadas.

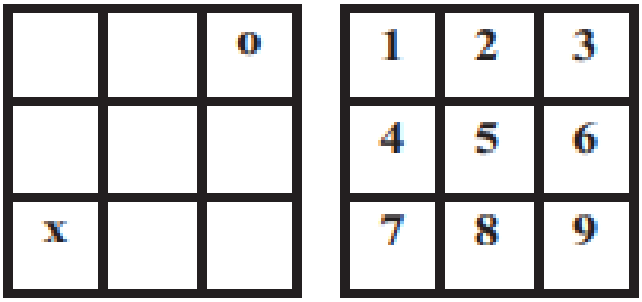
3.2 JOGOS PARA O ENSINO DE COMBINATÓRIA

3.2.1 JOGO DO QUADRADO

No Jogo do Quadrado é utilizado o mesmo tabuleiro do Jogo da Velha tradicional, ou seja, um tabuleiro quadriculado 3 x 3, com nove casas, assim como são utilizados dois marcadores, um para cada jogador. Os movimentos que podem ser realizados nas jogadas e as capturas de peças, porém, se assemelham aos utilizados por peões e torres no jogo de xadrez (LOPES E REZENDE, 2010).

Esse jogo foi desenvolvido para dois jogadores, dos quais um deve colocar sua peça na extremidade esquerda inferior e o outro deve colocar sua peça na extremidade direita superior do tabuleiro (Figura 5). Na figura 5 temos as peças de cada jogador na posição inicial do jogo e um tabuleiro indicado a numeração das casas, para facilitar a indicação das jogadas e proposição de questões de aprofundamento.

Figura 5 - Posição inicial do Jogo do Quadrado e tabuleiro numerado



Fonte: LOPES E REZENDE, 2010, p. 667.

Cada jogador deve chegar ao ponto de partida de seu adversário ou eliminar a peça dele, podendo fazer até oito movimentos no total e, em cada jogada, até quatro movimentos, sendo que se nenhum jogador finalizar o jogo em oito movimentos (ou menos), a partida é encerrada e é declarado um empate. Cada jogador não pode voltar ao seu ponto de partida, só pode mover sua peça apenas uma casa (na vertical ou na horizontal) e pode eliminar a peça do adversário apenas na diagonal.

Além disso, se o jogador estiver a uma diagonal do seu adversário, ou se estiver a uma casa (na vertical ou na horizontal) do ponto de partida deste, ele é obrigado a fazer esse movimento, tal como ocorre com a eliminação de peças do outro jogador em outros jogos de tabuleiro, como damas e o próprio xadrez.

Os próprios alunos, e/ou o próprio professor, podem confeccionar o jogo usando papel, papelão (que pode ser recortado de uma caixa usada para embalar produtos de um supermercado), ou cartolina (facilmente encontrada em papelarias), para o tabuleiro, e tampinhas de garrafas pet (em duas cores, uma para cada jogador) para as peças. Também pode-se usar um tabuleiro do Jogo da Velha, que pode ser encontrado em lojas de brinquedos, bem como nas seções de brinquedos em lojas de departamentos e hipermercados.

O professor organiza os alunos em duplas para disputar o jogo em cinco rodadas, de modo que o jogador que vencer mais rodadas vence o jogo. "É importante lembrar que o Jogador 1 é sempre escolhido por sorteio no início de cada rodada." (LOPES E REZENDE, p. 667). Os alunos precisam compreender bem as regras do jogo, para que possam resolver os problemas propostos posteriormente. Além disso, eles devem anotar suas jogadas para que tenham

condições de corrigir jogadas mal sucedidas e definir possíveis estratégias vencedoras.

Após o jogo, o professor pode fazer os seguintes questionamentos, como sugerem Lopes e Rezende (2010, p.667):

> Será que o Jogador 1 sempre vence? Por quê?
> É possível ocorrer empate? Por quê? O Jogador 2 poderá vencer o jogo?
> O jogo é de azar ou de estratégia? Se aumentarmos a quantidade de movimentos para nove, quais os possíveis resultados do jogo?

O jogo tem como objetivo "[...] fazer com que os alunos desenvolvam alguma estratégia de contagem" (LOPES E REZENDE, p. 668). As jogadas devem ser representadas em uma árvore de possibilidades, na qual cada configuração do tabuleiro aponta para uma ou duas possíveis configurações após um movimento, até que um dos jogadores vença a rodada ou o jogo termine em empate.

3.2.2 JOGO SENHA

O jogo “Senha”, também conhecido como Mastermind, foi criado pelo israelense Mordechai Meirovitz e tem como objetivo descobrir a sequência formada por peças de quatro cores distintas, sem repetição, dentre as seis cores disponíveis. Não tendo o tabuleiro e peças originais do jogo, vendido em lojas especializadas, os alunos podem usar papel para o tabuleiro; quadrados pretos e brancos de papel para marcação dos resultados das jogadas; tampinhas de garrafas de diferentes cores, para formar uma senha; uma barreira de cartão para esconder o código criado pelo estudante (Figura 6).

Figura 6 - Materiais do jogo “Senha”

Fonte: PEREIRA, M. C., 2019, p. 35.

Conforme Pereira (2019, p. 35-36), as regras do jogo são:

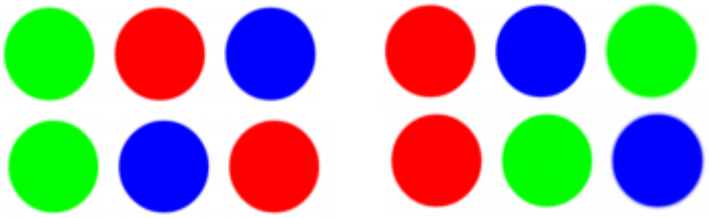
> I. O Jogador A elabora uma senha de 3 cores e coloca no "esconderijo" da esquerda para direita. Uma senha é uma combinação de 3 cores diferentes. Por exemplo: Azul, Verde e Vermelho configura uma senha; Azul, Vermelho e Verde configura outra senha distinta da senha anterior. Ou seja, a ordem das tampinhas é importante;
> II. O Jogador B, na tentativa de descobrir a senha do Jogador A, utiliza as linhas do seu tabuleiro para dar um palpite de senha;
> III. Após o Jogador B ter elaborado a senha, o Jogador A analisa a senha que foi proposta e na coluna da direita marcará com uma ficha preta as tampinhas que estão na posição correta. Caso não haja nenhuma tampinha na posição correta não deverá ser colocado nenhuma ficha;
> IV. O Jogador B tem até 7 tentativas para descobrir a senha. Caso não acerte em nenhuma das tentativas, ele contabiliza 7 pontos (O número máximo de tentativas só é atingido, caso o estudante cometa algum equívoco, visto que com 3 cores temos 6 possíveis senhas), após acertar os papéis se invertem;
> V. Ganha o jogo o estudante que adivinhar a senha com o menor número de palpites, ou seja, o estudante que fizer o menor número de pontos.

Suponha que o jogador A propõe uma senha, mantendo-a escondida do jogador B. O jogador B, então, dá um palpite de qual é essa senha, registrando o lance no seu tabuleiro de papel. Uma ficha preta deve ser colocada sobre um dos quatro quadrados menores ao lado do lance dado pelo jogador, caso seja informado que uma tampinha está na posição correta. Se o jogador acerta a cor de uma tampa da senha, mas não sua posição, coloca um quadradinho branco em uma das quatro casas do lance. O jogo continua até que um jogador descubra qual a senha elaborada por seu adversário.

Pereira recomenda que o professor trabalhe inicialmente com três cores distintas e depois do jogo terminar, com quatro cores, aumentando o grau de complexidade da tarefa. O professor deve realizar perguntas abordando os princípios aditivo e multiplicativo, bem como permutação e arranjo simples, como sugere Pereira (2019, p. 37):

> 1. Em uma senha de três cores, um estudante acertou a posição de uma delas e errou as demais. O que deveria fazer para que acerte na próxima tentativa?

2) Existe outra senha além das apresentadas abaixo? Qual(is)?



3) Utilizando o tabuleiro do jogo, exiba todas as senhas de 3 cores distintas possíveis.

4) É possível exibir todas as senhas de 4 e 5 cores distintas no tabuleiro do jogo?

5) Qual a quantidade de senhas de 3 cores distintas que podemos formar dispondo de 5 tampinhas de cores distintas?

Esse jogo ajuda os alunos a perceberem como a ordem é importante, pois cada mudança na ordem das tampinhas gera uma senha diferente. Além disso, os alunos podem encontrar formas de contar a quantidade de senhas para qualquer quantidade de cores e para qualquer quantidade de tampinhas que receberem no início para compor sua senha.

Vale destacar, no entanto, que para ampliar a potencialidade do jogo Senha como recurso didático para o ensino de Combinatória, é essencial que sejam propostas questões de aprofundamento, como as sugeridas no texto de Pereira (2019) e que podem ser adaptadas ou servir de base para a criação de outras questões pelo professor. Outras questões na mesma linha podem ser encontradas no texto de Gonçalves Filho (2016).

3.3 APLICATIVOS E SOFTWARES PARA O ENSINO DE COMBINATÓRIA

3.3.1 VERSÃO DIGITAL DO JOGO SENHA

Uma versão digital do jogo Senha pode ser encontrada no site do GeoGebra: https://www.geogebra.org/m/rjyuwp2j. As regras e a versão do tabuleiro para impressão estão disponíveis no seguinte endereço: https://blog.ufes.br/lem/files/2015/09/CFC2015_jogo-senha.pdf. As regras são as mesmas das apresentadas anteriormente, quando tratamos do uso de jogos no ensino de Combinatória.

Os mesmos autores do aplicativo Senha do GeoGebra disponibilizaram vídeos na plataforma YouTube com questões propostas a partir do uso do aplicativo, com comentários sobre os procedimentos de resolução (PARTE 1: https://www.youtube.com/watch?v=_vnR6Zs_TF8; PARTE 2: https://www.youtube.com/watch?v=t5FT3ehvrpk; PARTE 3: https://www.youtube.com/watch?v=caC-ojNlOI8; PARTE 4: https://www.youtube.com/watch?v=ATPB-aw8mTc&t=242s).

Há também um decodificador online de senhas do jogo Senha no seguinte endereço: https://www.dcode.fr/mastermind-solver. O aplicativo está em língua inglesa mas a interface é amigável.

3.3.2 PIXTON

Pixton é um software online criado para a elaboração de histórias em quadrinhos (HQ). Tem como principais ferramentas, segundo Gadelha e Borba (2020) "[...] as ilustrações que podem ser adequadas ao critério de quem manuseia, com as opções de inserir cenários, personagens e objetos que podem ser movidos e terem seus tamanhos alterados".

Os personagens, cenários e objetos também podem ser representados com diferentes cores e estilos visuais. Gadelha e Borba (2020, p.4) também destacam que:

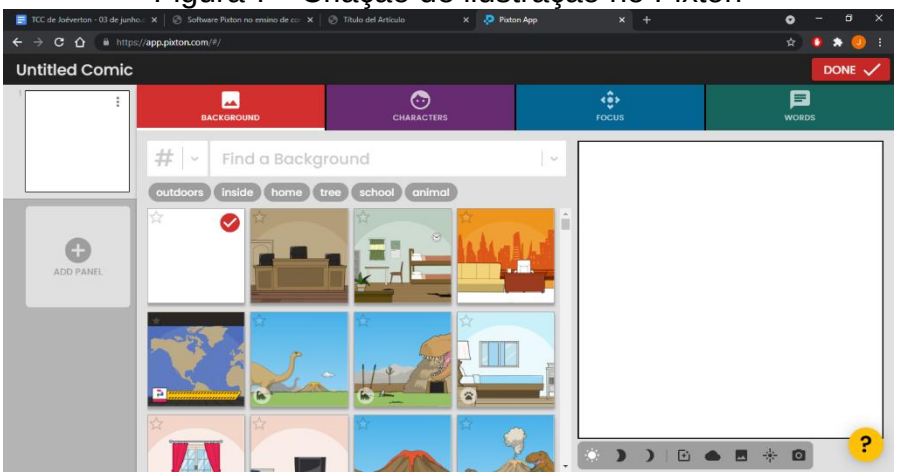
> O uso do Pixton pode ser para três diferentes fins: para diversão, para aprendizagem escolar e para uso em empresas. Enquanto instrumento educativo, não foi pensado especificamente para a resolução de problemas combinatórios, mas pode-se fazer uso, de modo dinâmico, de seus recursos para a construção de representações das possibilidades dos diferentes tipos de situações-problemas, na perspectiva de auxiliar o estudante na visualização e assimilação dos diferentes invariantes.

O aplicativo Pixton pode ser encontrado no site https://www.pixton.com/, sendo necessário fazer um cadastro gratuito para usar os recursos do software, disponível apenas nos idiomas inglês, espanhol e francês, embora a interface seja amigável e de manuseio simples por um usuário de Língua Portuguesa.

Ao fazer o login no Pixton, o professor deve clicar no botão “New Comic” (em tradução livre, Novo Quadrinho), para começar um novo desenho. Depois,

ele deve escolher um cenário, como indicado na Figura 7, e um ou mais personagens, que podem ser personalizados.

Figura 7 - Criação de ilustração no Pixton



Fonte: Autoral, a partir de https://www.pixton.com/.

É possível filtrar os cenários e personagens por algumas características, colocar um foco maior em uma área do desenho e inserir palavras dentro dele. Vejamos um exemplo de problema de Combinatória que pode ser resolvido com o auxílio do Pixton, como sugerem Gadelha e Vicente (2018, p. 163):

> A mãe levou seus quatro filhos ao parque (Bianca, Sabrina, Diego e Felipe). No brinquedo pula-pula só podem entrar três crianças por vez. Ajude a mãe a montar os grupos, de maneiras diferentes, que brincarão no pula-pula.

Como temos uma combinação de quatro três a três, então a mãe pode montar os grupos de quatro maneiras diferentes: $\frac{4!}{3!\times(4-3)!} = \frac{4\times3!}{3!\times1!} = \frac{4}{1} = 4$. Podemos representar a solução, no Pixton, com a ilustração presente na Figura 8.

Figura 8 - Ilustração da solução no Pixton

Fonte: GADELHA, D. S.; VICENTE, D. M. B, 2018, p. 164.

O Pixton permite ao professor, e aos alunos, ilustrar os mais diversos problemas de Combinatória, em especial os que envolvem grupos de pessoas, como o que foi descrito no exemplo, devido à variedade de personagens que podem ser inseridos nos desenhos. Os desenhos virtuais também ajudam a poupar parte do tempo que seria gasto com representações apenas com números e letras, e sobretudo com desenhos manuais.

A ideia básica é que o uso de representações próximas da realidade pode auxiliar o estudante a raciocinar acerca das combinações possíveis de serem feitas, além de motivar os estudantes em razão do contexto da representação utilizada por eles. As representações servirão de base para a promoção de generalizações, na direção de sistematizar procedimentos de resolução, sem que seja necessário realizar sua representação por meio de desenhos.

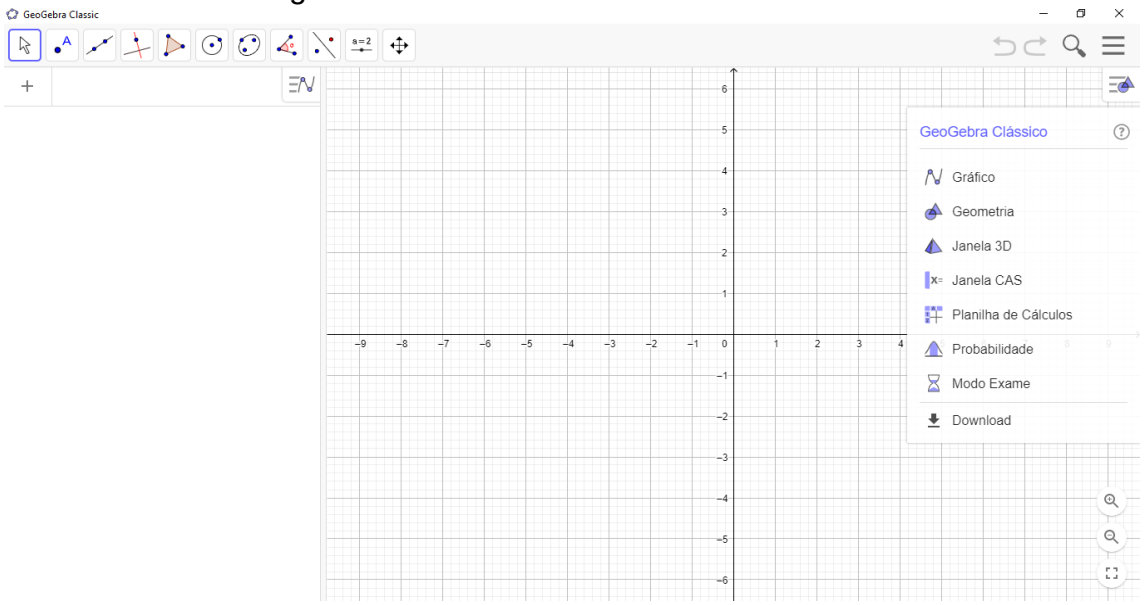
3.3.3 GEOGEBRA

O GeoGebra é um software de matemática dinâmica que reúne Geometria, Álgebra, Planilha de Cálculo, Gráficos, Probabilidade, Estatística e Cálculos Simbólicos em um único aplicativo. Podemos utilizar o aplicativo para explorar marcação de pontos e traçado de retas, segmentos e semirretas no plano cartesiano; construir polígonos, círculos, arcos, setores, elipses, hipérboles e parábolas; assim como a representação do plano de poliedros e outros sólidos geométricos.

O software facilita a determinação de raízes de uma função e a determinação de medidas de ângulos, de distâncias entre pontos (para o cálculo de comprimento de um segmento ou perímetro de uma figura) e cálculo de áreas de polígonos. Além disso, também pode ser utilizado para calcular probabilidades.

O GeoGebra está disponível no site https://www.geogebra.org/download, para download gratuito no computador (disponível para os sistemas Windows, Linux e Mac) e no celular (disponível para os sistemas Android, iOS e Chromebook), e também para uso online no navegador. Na figura 9 temos a tela inicial do software.

Figura 9. Tela inicial do software GeoGebra

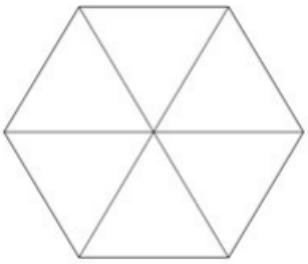


Fonte: https://www.geogebra.org/

No canto superior esquerdo da tela temos várias opções de construções geométricas. Ao selecionar com o mouse cada opção, aparece uma descrição das funções disponíveis. Clicando em cada botão, aparece um menu com alguns objetos que podem ser inseridos no software, desde pontos, retas, polígonos e círculos até um controle deslizante, com o qual podemos explorar os coeficientes de uma função com uma ou mais variáveis e visualizar os gráficos para os possíveis valores desses coeficientes.

No canto direito da tela inicial temos um menu com opções de janelas de trabalho, como a Janela 3D, na qual podemos construir a representação de figuras espaciais; a Planilha de Cálculos, que funciona de forma similar ao Microsoft Excel; e a Calculadora de Probabilidade, que podemos usar para determinar a média e o desvio padrão (conceitos muito importantes da Estatística) para calcular a probabilidade de um evento.

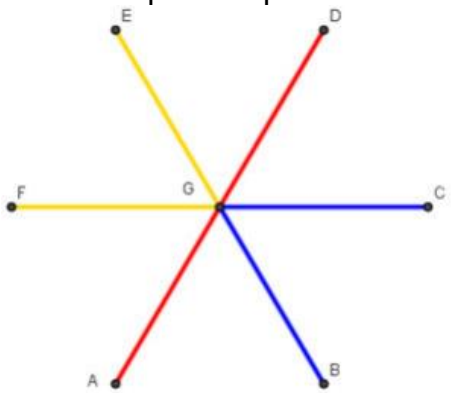
Vejamos um exemplo de problema de Combinatória que pode ser resolvido com o auxílio do GeoGebra, como sugere Império (2017, p. 32), proposta na Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) de 2014. O enunciado da questão é: “Pedrinho está brincando de fazer arranjos com palitos. Ele dispõe seus palitos formando triângulos equiláteros, como mostra a figura abaixo:



Pedrinho quer pintar cada palito de seu arranjo de tal forma que cada triângulo tenha seus lados pintados de exatamente duas cores diferentes. Para isso, ele dispõe de tintas na cor vermelha, azul e amarela. De quantos modos ele pode pintar o arranjo?”.

Primeiramente, vamos calcular a quantidade de maneiras de colorir os seis segmentos que partem do centro aos vértices do hexágono. Pelo Princípio Fundamental da Contagem, temos $3^6 = 729$ possibilidades. Com o GeoGebra, podemos traçar esses segmentos e modificar suas respectivas cores. A Figura 10 mostra um desses arranjos.

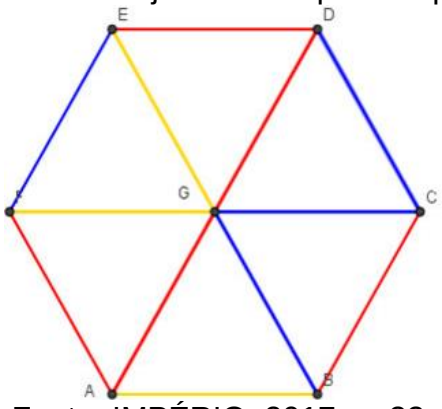
Figura 10. Arranjo de cores para os palitos do interior do hexágono



Fonte: IMPÉRIO, 2017, p. 32.

De acordo com Império (2017), não importa como os palitos do centro foram pintados, os palitos que formam os lados do hexágono podem ser pintados de duas maneiras diferentes cada. Sendo assim, pelo Princípio Fundamental da Contagem, temos 3626=729×64=46656 possibilidades de arranjos. A Figura 11 mostra todos os palitos pintados conforme as condições dadas no enunciado.

Figura 11. Arranjo de cores para os palitos



Fonte: IMPÉRIO, 2017, p. 33.

Podemos perceber que o problema não especifica as medidas dos lados do hexágono, mas que são todos iguais entre si, e iguais aos segmentos que ligam os vértices ao centro. Então, para representar esses palitos, devemos construir um hexágono regular, usando a função “Polígono Regular”, definindo dois vértices que formarão um dos lados e a quantidade de lados, no caso, seis. O polígono aparecerá já com os vértices marcados.

Em seguida, devemos traçar as diagonais AD, BE e CF, pois a interseção entre elas é o centro do hexágono, o qual podemos marcar com a função “Interseção de Dois Objetos” (que também funciona para mais de dois, neste caso, três). Feito isso, o hexágono e as diagonais devem ser ocultadas, para que possamos traçar os segmentos AB, BC, CD, DE, EF, FA, AG, BG, CG, DG, EG e FG e colorir todos eles com as cores desejadas. Para isso, selecionamos com o botão esquerdo do mouse o segmento desejado, e depois, clicamos na opção de colorir, representada por um balde derramando tinta, e selecionamos a cor desejada.

O GeoGebra pode ajudar a resolver não apenas problemas envolvendo Geometria, como calcular de quantas maneiras podemos colorir os lados ou as diagonais de um polígono, ou uma figura formada por vários polígonos (por exemplo, uma bandeira retangular dividida em retângulos, quadrados e/ou triângulos), quantas diagonais um polígono regular possui (existe uma fórmula para generalizar isso no GeoGebra) ou quantos planos contém pelo menos três pontos de um determinado conjunto. No GeoGebra também podemos simular, virtualmente, fichas e outros materiais manipulativos que usamos no ensino de Combinatória, sobretudo para a Educação à Distância (EaD).

Vale destacar que no banco de ferramentas do Geogebra é possível localizar recursos diversos relacionados a conteúdos de Matemática e que podem ser acessados por qualquer pessoa cadastrada no site do software, a exemplo do material relativo à versão digital do jogo Senha, citado anteriormente no presente texto. Outros recursos relacionados ao ensino de Análise Combinatória estão disponíveis no seguinte endereço: https://www.geogebra.org/search/an%C3%A1lise%20combinat%C3%B3ria.

Como o uso de recursos didáticos digitais em sala de aula ainda apresenta algumas limitações, relativas à falta de acesso a computador ou celular pelos estudantes ou de Internet na escola, é sempre importante analisar a possibilidade de trabalhar com versões analógicas das propostas, produzidas em papel, fazendo as adaptações necessárias.

De maneira geral, entendemos que os recursos que destacamos em nosso texto, relativos ao ensino de Análise Combinatória podem auxiliar o trabalho do professor em sala de aula, facilitando a compreensão dos conteúdos relativos a esse tema, ao longo da Educação Básica. Como destacamos em nossa fundamentação teórica, é fundamental que o professor explore os recursos didáticos que têm em mãos de maneira cuidadosa, identificando suas potencialidades e limitações e planejando seu uso de acordo com os objetivos de ensino que pretende alcançar.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao longo do desenvolvimento deste trabalho, identificamos sete recursos didáticos que podem ser utilizados no ensino de Análise Combinatória, visando facilitar a aprendizagem dos alunos, por meio de uma abordagem prática e dinâmica, envolvendo objetos já presentes em seu dia-a-dia, antes de começarem a estudar as fórmulas propriamente ditas e seus enunciados formais.

Para isso, foi fundamental pesquisarmos sobre o ensino de Matemática no Brasil, com foco no pensamento combinatório, com destaque para a combinatória nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) e na Base Nacional Comum Curricular BNCC), assim como realizar estudos dirigidos para recursos didáticos para o ensino de Matemática de modo geral.

A partir dos conhecimentos adquiridos sobre esses temas, foi possível explicar e entender como funciona cada recurso e quais as suas potencialidades e limitações em termos de uso em sala de aula, considerando diferentes momentos do desenvolvimento do pensamento combinatório.

.Aprendemos muito com a realização desta pesquisa, tanto pelas características de um TCC, como orientação, estrutura e leitura, quanto pelo conhecimento adquirido sobre o tema, no qual pudemos nos aprofundar, o que entendemos ser importante para nossa formação como licenciando em Matemática, pensando em nossa prática futura como professor da disciplina.

Mesmo durante a elaboração deste trabalho, não imaginávamos que seria possível ensinar Combinatória com alguns dos recursos aqui abordados, uma vez que já conhecíamos alguns deles como recurso para o ensino de outros conteúdos matemáticos, como geometria, no caso do GeoGebra.

A pesquisa ajudou a ampliarmos nosso olhar quando nos deparamos com um determinado recurso didático, pensando em que outros contextos e abordagens poderíamos usá-lo para melhorar a aprendizagem de nossos estudantes.

Pelos motivos aqui destacamos, ressaltamos nosso interesse em fazer outras pesquisas sobre este tema, como um estudo de recursos didáticos para o ensino de Arranjos, Permutações e Combinações, tratados como objetos

próprios de estudo - cada tema visto de maneira separada, e um estudo de recursos didáticos para o ensino de Probabilidade, tanto simples quanto condicional.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, H. M**. O Uso de Celulares, Tablets e Notebooks no Ensino da Matemática.** Revista Científica Multidisciplinar Núcleo do Conhecimento. Ano 1. Vol. 9. pp 814-829., Outubro / Novembro de 2016. Disponível em: < https://www.nucleodoconhecimento.com.br/educacao/uso-de-celulares>. Acesso em out. 2020.

BRASIL. Secretaria da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais** (PCN). Matemática – Primeiro e Segundo Ciclos. Secretaria de Ministério Educação: Brasília, 1998.

BRASIL. Secretaria da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais** (PCN). Matemática – Terceiro e Quarto Ciclos. Secretaria de Ministério Educação: Brasília, 1999.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. BNCC. Secretaria de Educação Básica: Brasília, 2018.

CARRAHER, T.N., CARRAHER, D.W. & SCHLIEMANN, A.D. **Na Vida Dez, na Escola Zero**. São Paulo: Cortez Editora, 1988.

FIORENTINI, D.; MIORIM, M. Â. **Uma reflexão sobre o uso de materiais concretos e jogos no Ensino de Matemática**. Boletim SBEM-SP. Ano 4 nº7. 1990.

GADELHA, D.S; BORBA, R.E.S.R. **Resolução de problemas combinatórios nos anos iniciais: uso do software Pixton© e de material manipulativo.** 2020. Disponível em < https://www.ugr.es/~fqm126/civeest/gadelha.pdf >. Acesso em Jun 2021.

GIL, A. **Métodos e técnicas de estudos sociais**. São Paulo: Atlas, 1999.

GONÇALVES FILHO, H. S. **O jogo senha como recurso didático para o ensino dos métodos de contagem**. Dissertação. Mestrado em Matemática do

Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro. Rio de Janeiro: 2016. Disponível em: <https://uenf.br/posgraduacao/matematica/wp-content/uploads/sites/14/2017/09/26102016Humberto-Silveira-Gon%C3%A7alves-Filho.pdf>. Acesso em abril 2021.

IMPÉRIO, P. S. **A Utilização do GeoGebra na Resolução de Problemas de Análise Combinatória**. 2017. 51 f. Dissertação. Mestrado em Matemática, Universidade Federal do Maranhão, São Luís, 2017. Disponível em: <http://tedebc.ufma.br:8080/jspui/bitstream/tede/1924/2/PabloImperio.pdf>. Acesso em: 25 ago. 2021.

PEREIRA, M.C. **Os jogos no ensino de Combinatória**. Trabalho de Conclusão de Curso de Licenciado em Matemática pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre: 2019. Disponível em: < https://lume.ufrgs.br/bitstream/handle/10183/212828/001116448.pdf?sequence=1&isAllowed=y>. Maio de 2021.

RÊGO, R.G RÊGO, R.M. **Matematicativa**. São Paulo: Autores Associados, 2016.