

,

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Resultados de controlabilidade pontual para a equação do calor unidimensional

Marcos Gabriel Ferreira da Silva

JOÃO PESSOA – PB
AGOSTO DE 2021

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Resultados de controlabilidade pontual para a equação do calor unidimensional

por

Marcos Gabriel Ferreira da Silva

sob a orientação

Prof. Dr. Felipe Wallison Chaves Silva

João Pessoa – PB
Agosto de 2021

Catálogo na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

S586r Silva, Marcos Gabriel Ferreira da.

Resultados de controlabilidade pontual para a equação do calor unidimensional / Marcos Gabriel Ferreira da Silva. - João Pessoa, 2021.
107 f. : il.

Orientação: Felipe Wallison Chaves Silva.
Dissertação (Mestrado) - UFPB/CCEN.

1. Matemática. 2. Equação do calor unidimensional. 3. Controlabilidade nula pontual. 4. Tempo mínimo de controle. 5. Aproximação diofantina. I. Silva, Felipe Wallison Chaves. II. Título.

UFPB/BC

CDU 51(043)

Resultados de controlabilidade pontual para a equação do calor unidimensional

por

Marcos Gabriel Ferreira da Silva ¹

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Paraíba como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

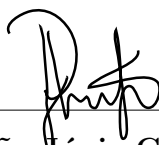
Área de Concentração: Análise

Aprovada em: 13 de agosto de 2021

Banca Examinadora:



Prof. Dr. Felipe Wallison Chaves Silva – UFPB
(Orientador)



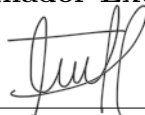
Prof. Dr. Damião Júnio Gonçalves Araújo – UFPB
(Examinador Interno)



Prof. Dr. Fágner Dias Araruna – UFPB
(Examinador Interno)



Prof. Dr. Edgard Almeida Pimentel – PUC-RJ
(Examinador Externo)



Prof. Dr. Nicolás Carreño – UTFSM
(Examinador Externo)

¹Este trabalho contou com apoio financeiro do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - CNPq entre 01/05/2019 e 31/05/2020 e com apoio financeiro da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES entre 01/06/2020 e 31/04/2021.

*À minha companheira que,
incondicionalmente, sempre
está ao meu lado e à mi-
nha família por todo apoio
e confiança.*

Agradecimentos

- À minha companheira *Ana Beatriz Cândido Vieira*, que sempre esteve ao meu lado me apoiando e incentivando incondicionalmente em todos os momentos difíceis que passei durante a minha trajetória. Sou eternamente grato por acreditar no meu potencial. Te amo imensamente.
- À minha mãe *Maria Daquia Ferreira da Silva*, que apesar da distância, sempre se preocupou com minha formação a bem estar. Sua determinação me mantém vivo, sou orgulhoso em te ter como mãe.
- Ao meu pai *Antônio Marcos da Silva*, uma pessoa que desde cedo vem batalhando por uma vida melhor para os seus filhos e pelas inúmeras vezes que me salvou financeiramente quando o momento não era um dos melhores. Tenho você como uma figura a ser seguida.
- Aos meus avós, *Josefa Ferreira Leitão* e *Cosme Celestino Dantas* (In Memoriam) que sempre tomei como exemplos de superação, amo vocês.
- A todos os professores do programa PPGMat-UFPB que diretamente ou indiretamente puderam me proporcionar o nível de conhecimento que hoje possuo, serei eternamente grato.
- Ao professor *Dr. Felipe Wallison Chaves Silva* pela exímia orientação e paciência quando eu já não acreditava mais no meu potencial. Agradeço os conselhos dados e os puxões de orelha mais que merecidos. Você foi de grande importância por eu ter conseguido chegar no meu objetivo, te tenho como um pai acadêmico.
- Aos todos os meus colegas, pelos momentos compartilhados e conhecimentos disseminados. Em especial, gostaria de citar *Geovane Júnior*, *Guilherme Nascimento*, *Renato Bezerra*, *Victor Vinícius*, *Fábio Ferreira*, *Lenin Alexandre* e *Lázaro Rangel* tanto pela parceria quanto pela ajuda durante as disciplinas cursadas, sem vocês eu não teria conseguido. Também, cito *Cláudia Raniele*, *Carla Regina* e a querida mentora do grupo *Elizabeth Lacerda* por toda ajuda durante e após os estudos em Teoria do controle. Levo todos vocês para o resto da minha vida.
- À minha amada tia *Maria da Glória Silva* (In Memoriam), que iluminava todo caminho que passava. Sempre te considerearei como uma segunda mãe e apesar da despedida ter sido breve, um dia nos veremos e te contarei todas as minhas conquistas. Te amo!

Resumo

Neste trabalho estudaremos a controlabilidade nula pontual para a equação do calor unidimensional. Primeiramente, será mostrado que a controlabilidade nula pontual está diretamente relacionada com a convergência de uma série de números reais que depende apenas do ponto, do tempo de controlabilidade e dos autovalores e autofunções do operador de Laplace unidimensional. Como consequência, veremos que existe um tempo mínimo de controle, o qual pode ser estritamente positivo, fenômeno este que não existe no caso de controles aplicados em conjunto abertos. Além disso, usando argumentos de aproximação diofantina, verificamos que o conjunto dos pontos para os quais a equação é pontualmente controlável para todo tempo forma um conjunto denso no domínio. Por fim, tentando entender o fenômeno de tempo mínimo, foi analisado o que acontece com as propriedades de controlabilidade quando o controle está aplicado em um intervalo aberto que se degenera a um ponto.

Palavras-chave: Equação do calor unidimensional, Controlabilidade nula pontual, Tempo mínimo de controle, Aproximação diofantina.

Abstract

In this work we'll study the pointwise null controllability problem for the one-dimensional heat equation. First, will be shown that the pointwise controllability is equivalent to the convergence of an appropriate series depending only on the point, the controllability time and the eigenvalues and eigenfunctions of the one-dimensional Laplace operator. As a consequence, there exists a minimum time of controllability, which may be strictly positive. This phenomenon of positive minimum time of controllability doesn't occur in the case of controls applied on open sets. Furthermore, using arguments from diophantine approximation theory, we show that the set of points for which the equation is pointwise controllable for all time is a dense subset of the domain. Finally, with the aim of understanding the phenomenon of minimum time, it was analyzed what happens when the control is applied to an open set that degenerates to a point.

Keywords: One-dimensional heat equation, Pointwise null controllability, Minimal time control, Diophantine approximation.

Sumário

Introdução	9
1 Controle pontual para a equação do calor unidimensional	12
1.1 Introdução	12
1.2 Controlabilidade nula pontual	17
1.2.1 Custo da controlabilidade pontual	25
1.2.2 Alguns resultados de densidade	32
1.2.3 Outros tipos de controle	44
2 Controlabilidade nula pontual como o limite da controlabilidade nula interna	57
2.1 Introdução	57
2.2 Sobre o limite da controlabilidade interna	60
2.3 Demonstração do Teorema 2.2	77
A Resultados Auxiliares	79
A.1 Análise Funcional	79
A.2 Aproximações do tipo Müntz–Szász	80
A.3 Aproximações diofantinas	81
A.4 Teoria da Medida	88
B Método de momentos para a equação do calor unidimensional	89
C Provas dos Lemas 2.4 e 2.5	94
Referências Bibliográficas	107

Introdução

Com a necessidade de manipular fenômenos presentes no nosso cotidiano, Teoria do Controle busca garantir que um sistema se comporte de uma maneira desejada. De fato, controlar o comportamento de um dado sistema é uma prática comum em organismos vivos, sendo até mesmo indispensável em processos evolutivos, como por exemplo a regulação da glicose no sangue, regulação da temperatura corporal, crescimento populacional, controle da pressão arterial, controle do nível de colesterol, etc.

Nesta dissertação, estudamos diversos resultados acerca da controlabilidade da equação do calor, uma das equações clássicas da Física Matemática. Assim, sejam $T > 0$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto com fronteira $\partial\Omega$ suave e $\omega \subset \Omega$ um subconjunto não-vazio. Em $\Omega \times (0, T)$, considere a equação do calor com controle aplicado em ω

$$\begin{cases} y_t - \Delta y = f1_\omega, & Q = \Omega \times (0, T) \\ y(x, t) + \alpha(x) \frac{\partial y}{\partial \nu}(x, t) = 0, & \Sigma = \partial\Omega \times (0, T) \\ y(x, 0) = y_0(x), & x \in \Omega, \end{cases} \quad (1)$$

em que $y = y(x, t)$ é o estado do sistema, y_0 é o estado inicial, f é o controle que atua em ω , 1_ω é a função característica do conjunto ω , $\alpha \in L^\infty(\Omega)$ e $\frac{\partial}{\partial \nu}$ é a derivada normal.

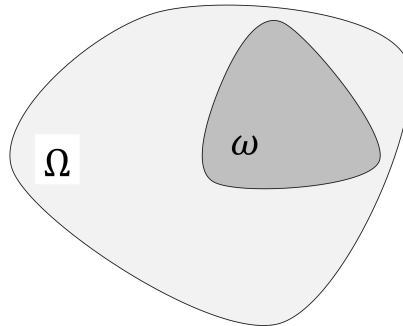


Figura 1: Região de controle

Uma pergunta básica que podemos fazer diz respeito à controlabilidade nula do sistema (1) no tempo T . Mais precisamente:

Dados $T > 0$ e um estado inicial y_0 , existe f (pertencente a algum espaço apropriado) de modo que a solução do sistema (1) satisfaz

$$y(x, T) = 0, \quad \forall x \in \Omega?$$

Este é o chamado problema de controlabilidade nula para o sistema (1).

A resposta para a pergunta acima depende essencialmente do tempo T e do conjunto ω . De fato:

- Quando ω é um conjunto aberto, o sistema (1) é controlável a zero em qualquer tempo $T > 0$. Para obter este resultado, é necessário provar desigualdades de observabilidade para o sistema adjunto da equação (1), o que é feito, por exemplo, por meio das chamadas desigualdades de Carleman. Em particular, podemos construir controles através da minimização de funcionais adequados. Isto pode ser encontrado, por exemplo em [4] e [5].

- Quando o conjunto ω é um ponto, o sistema (1) é controlável a zero em todo tempo $T > T_0$, no qual T_0 é o tempo mínimo de controle (que depende do ponto, dos autovalores e das autofunções do operador de Laplace). Mais uma vez, este resultado é obtido provando desigualdades de observabilidade adequadas para o sistema adjunto da equação (1). Resultados deste tipo podem ser encontrados em [6], [13] e [15].

A controlabilidade nula para o sistema (1) no caso em que ω é um aberto não-vazio é, de certo modo, um problema clássico em Teoria do Controle. Por isso, nosso objetivo será estudar a controlabilidade nula da equação (1) no caso em que o conjunto ω é um ponto.

Dividimos este trabalho da seguinte maneira:

- No *Capítulo 1*, com base no artigo [6], estudamos a controlabilidade nula pontual para a equação do calor unidimensional.

Em um primeiro momento, dados $\vartheta \in (0, 1)$ e $T > 0$, consideramos a equação (unidimensional) do calor (1) com controle aplicado em $\{\vartheta\} \times (0, T)$ e construímos um operador, denominado operador de observabilidade, que associa a cada $u|_{\{\vartheta\} \times (0, T)}$, com u solução do sistema adjunto de (1), o seu valor no tempo T , i.e., $u(\cdot, T)$. Se este operador for contínuo então a equação do calor (1) é controlável a zero no tempo T , com controle aplicado em ϑ .

Em seguida, mostramos que a continuidade do operador de observabilidade é equivalente à convergência de uma série de números reais adequada. Por meio desta série, podemos definir a noção de tempo mínimo de controle, o qual pode ser estritamente

positivo. Também, provamos que o conjunto dos pontos para o qual a equação é controlável a zero em qualquer tempo $T > 0$, com controle aplicado no ponto, é um conjunto de medida total. Por outro lado, vemos que o conjunto dos pontos para o qual o sistema não é controlável a zero em nenhum tempo é um conjunto denso, apesar de ser um conjunto de medida nula.

Finalizamos o *Capítulo 1* apresentando alguns outros casos de controlabilidade nula pontual, como por exemplo o problema do observador móvel e o caso em que as condições de fronteira do sistema são periódicas.

– No *Capítulo 2*, seguindo o exposto em [12], buscamos entender o fenômeno de tempo mínimo, explicitado no *Capítulo 1*. Para isto, consideramos o controle aplicado em um intervalo aberto $\omega_\varepsilon(x_0) = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subset (0, 1)$, com $\varepsilon > 0$, e vemos o que acontece quando este intervalo se degenera ao ponto x_0 , i.e., analisaremos o que acontece com as propriedades de controlabilidade quando $\varepsilon \rightarrow 0$.

Primeiramente, observamos que se a equação do calor unidimensional é controlável a zero com controle aplicado no ponto $x_0 \in (0, 1)$ então para todo $T > T_0(x_0)$, no qual $T_0(x_0)$ é o tempo mínimo de controle no ponto x_0 , existe uma sequência de controles f_ε , aplicado em $\omega_\varepsilon(x_0)$, que converge, em um sentido apropriado, a um controle pontual $f = f(t)$ aplicado no ponto x_0 . Tal controle leva a solução do sistema (1) a zero no tempo T .

No caso em que $T \leq T_0(x_0)$, mostramos que não é possível obter a controlabilidade nula pontual em x_0 para o sistema (1) como limite da controlabilidade nula no aberto $\omega_\varepsilon(x_0)$.

– No *Apêndice A* apresentamos alguns resultados de Análise Funcional, Aproximações do tipo Müntz-Szász, Aproximações diofantinas e Teoria da Medida, que foram utilizados durante o trabalho.

– No *Apêndice B*, por meio de séries de Fourier, mostramos que o problema da controlabilidade nula para a equação do calor unidimensional é equivalente a um problema de momentos envolvendo uma sequência de exponenciais reais. Em seguida, provamos que se existe uma família biortogonal à sequência de exponenciais reais, o problema de momentos tem solução e portanto a equação do calor unidimensional é controlável a zero.

Capítulo 1

Controle pontual para a equação do calor unidimensional

Neste capítulo, estudaremos a controlabilidade pontual para a equação do calor unidimensional. Mais precisamente, provaremos diversos resultados qualitativos relacionados a este tipo de controle. Por exemplo, dados $T_0 > 0$ e $\vartheta \in (0, 1)$, construiremos uma série dependendo somente de T_0 , ϑ e dos autovalores e autofunções do operador $-\frac{d^2}{dx^2}$ (com a condição de fronteira adequada) de modo que, se a série convergir, a equação será controlável para cada $T > T_0$, com controle aplicado em ϑ . Também, mostraremos que o conjunto dos pontos $\vartheta \in (0, 1)$ tais que a equação é controlável para todo $T > 0$ tem medida total em $[0, 1]$. Por outro lado, o conjunto dos pontos $\vartheta \in (0, 1)$ para os quais a equação não é controlável para todo $T > 0$ é denso em $[0, 1]$, apesar de ser um conjunto de medida nula.

Neste capítulo seguimos o exposto em [6].

1.1 Introdução

Seja a equação do calor unidimensional:

$$\begin{cases} y_t - y_{xx} = f1_\omega & (x, t) \in (0, 1) \times (0, T) \\ y(0, t) - \alpha y_x(0, t) = 0, & t \in (0, T) \\ y(1, t) + \beta y_x(1, t) = 0, & t \in (0, T) \\ y(x, 0) = y_0(x), & x \in (0, 1), \end{cases} \quad (1.1)$$

em que $\alpha, \beta \geq 0$, y_0 é o dado inicial, f é uma força externa (ou controle) que está aplicado no conjunto não-vazio $\omega \subset (0, 1)$.

Definição 1.1. *Seja $T > 0$. Dizemos que o sistema 1.1 é controlável a zero no tempo*

T se, para cada $y_0 \in L^2(0, 1)$, existir $f \in L^2(\omega \times (0, T))$ tal que

$$y(x, T) = 0, \quad \forall x \in (0, 1).$$

Este é o chamado problema de controlabilidade nula para a equação do calor (1.1). Distinguiremos os seguintes casos:

- $\omega \subset (0, 1)$ aberto e não-vazio;
- $\omega = \{\vartheta\}$, para algum $\vartheta \in (0, 1)$.

Observação 1.1. No caso em que $\omega = \{\vartheta\}$, para algum $\vartheta \in (0, 1)$, na equação (1.1), devemos escrever $f1_\vartheta = f\delta_\vartheta$, em que δ_ϑ é o delta de Dirac no ponto ϑ .

É bem conhecido que a controlabilidade nula de (1.1) é equivalente à obtenção de uma desigualdade apropriada (desigualdade de observabilidade) para o sistema

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0 & (x, t) \in (0, 1) \times (0, T) \\ u(0, t) - \alpha u_x(0, t) = 0, & t \in (0, T) \\ u(1, t) + \beta u_x(1, t) = 0, & t \in (0, T) \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in (0, 1). \end{cases} \quad (1.2)$$

O sistema (1.2) é chamado de sistema adjunto da equação do calor (1.1).

Observação 1.2. Na literatura, podemos encontrar o seguinte sistema como sendo o adjunto da equação do calor (1.1):

$$\begin{cases} -u_t - u_{xx} = 0 & (x, t) \in (0, 1) \times (0, T) \\ u(0, t) - \alpha u_x(0, t) = 0, & t \in (0, T) \\ u(1, t) + \beta u_x(1, t) = 0, & t \in (0, T) \\ u(x, T) = u_T(x), & x \in (0, 1). \end{cases} \quad (1.3)$$

Entretanto, é fácil ver que a mudança de variável $t \mapsto T - t$ transforma o sistema (1.3) no sistema (1.2). Assim, sem perda de generalidade, trabalharemos diretamente com o sistema (1.2).

A equivalência entre observabilidade e controlabilidade nula para a equação (1.1) é dada pelos seguintes resultados.

Teorema 1.1 (Observabilidade em um aberto). *Sejam $T > 0$ e $\omega \subset (0, 1)$ um aberto não-vazio. A equação do calor unidimensional (1.1) é controlável a zero no tempo T com controle $f \in L^2(\omega \times (0, T))$ se, e somente se, existir uma contante $C > 0$ tal que*

$$\|u(\cdot, T)\|_{L^2(0,1)}^2 \leq C \int_0^T \int_\omega |u(x, t)|^2 dx dt, \quad (1.4)$$

para toda solução $u = u(x, t)$ do sistema adjunto (1.2) com $u_0 \in L^2(0, 1)$.

Teorema 1.2 (Observabilidade em um ponto). *Sejam $T > 0$ e $\omega = \{\vartheta\}$, com $\vartheta \in (0, 1)$. A equação do calor unidimensional (1.1) é controlável a zero no tempo T com controle $f \in L^2(\{\vartheta\} \times (0, T))$ se, e somente se, existir uma constante $C > 0$ tal que*

$$\|u(\cdot, T)\|_{L^2(0,1)}^2 \leq C \int_0^T |u(\vartheta, t)|^2 dt, \quad (1.5)$$

para toda solução $u = u(x, t)$ do sistema adjunto (1.2) com $u_0 \in L^2(0, 1)$.

As demonstrações desses resultados podem ser encontradas em [4].

Provar desigualdades de observabilidade não é, em geral, uma tarefa fácil. Aqui, para estudar as desigualdades (1.4) e (1.5), introduziremos dois operadores que serão úteis no nosso estudo.

Definição 1.2 (Operador de observabilidade em um aberto). *Seja $T > 0$. Definimos o operador de observabilidade em um aberto $\omega \subset (0, 1)$ como a aplicação*

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{\omega, T} : \mathcal{D}(\mathcal{A}_{\omega, T}) \subset L^2(\omega \times (0, T)) &\rightarrow L^2(0, 1) \\ u|_{\omega \times (0, T)} &\mapsto u(\cdot, T), \end{aligned}$$

que associa a cada $u(x, t)$ solução de (1.2), com $u_0 \in L^2(0, 1)$, seu valor $u(\cdot, T) \in L^2(0, 1)$.

Temos que o operador $\mathcal{A}_{\omega, T}$ é contínuo se, e somente se, existe $C > 0$ tal que

$$\|u(\cdot, T)\|_{L^2(0,1)} = \|\mathcal{A}_{\omega, T}(u|_{\omega \times (0, T)})\|_{L^2(0,1)} \leq C \|u\|_{L^2(\omega \times (0, T))},$$

para toda $u = u(x, t)$ solução de (1.2) com $u_0 \in L^2(0, 1)$. Portanto, a continuidade de $\mathcal{A}_{\omega, T}$ é equivalente à desigualdade de observabilidade (1.4).

De modo análogo, temos o mesmo resultado para o caso em que ω se reduz a um ponto.

Definição 1.3 (Operador de observabilidade em um ponto). *Seja $T > 0$. Definimos o operador de observabilidade em um ponto $\vartheta \in (0, 1)$ como sendo a aplicação*

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{\vartheta, T} : \mathcal{D}(\mathcal{A}_{\vartheta, T}) \subset L^2(0, T) &\longrightarrow L^2(0, 1) \\ u|_{\vartheta \times (0, T)} &\mapsto u(\cdot, T), \end{aligned}$$

que associa a cada $u(x, t)$ solução de (1.2), com $u_0 \in L^2(0, 1)$, seu valor $u(\cdot, T) \in L^2(0, 1)$.

Observação 1.3. *Podemos escrever a solução de 1.2 como a seguinte série absolutamente convergente*

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \psi_n(x) e^{-\lambda_n t}, \quad (1.6)$$

em que $\psi_n = \psi_n(x)$ é a autofunção associada ao autovalor λ_n , para o operador $-\frac{d^2}{dx^2}$ com sua respectiva condição de fronteira.

Observação 1.4. *Se $|\psi_n(\vartheta)| \neq 0$ para todo n , então o operador $\mathcal{A}_{\vartheta, T}$ está bem definido para todo $T > 0$. Isto se deve ao seguinte argumento de continuação única. Pelo Lema A.4,*

$$|c_n| \leq \frac{1}{d_n |\psi_n(\vartheta)|} \|u(\vartheta, \cdot)\|_{L^2(0, T)},$$

em que d_n é a distância entre $e^{-\lambda_n t}$ e $\overline{\text{span}\{e^{-\lambda_k t}; k \neq n\}}$ na norma $L^2(0, T)$.

Uma vez que $d_n > 0$, se $\|u(\vartheta, \cdot)\|_{L^2(0, T)} = 0$ então $c_n = 0$, para todo n e, consequentemente, o operador $\mathcal{A}_{\vartheta, T}$ está bem definido. Se existir $n \in \mathbb{N}$ tal que $\psi_n(\vartheta) = 0$ então o operador $\mathcal{A}_{\vartheta, T}$ não está bem definido para todo $T > 0$.

Por outro lado, o operador $\mathcal{A}_{\omega, T}$, com $\omega \subset (0, 1)$ aberto, está bem definido para todo $T > 0$. De fato, isto segue do resultado de continuação única:

$$u = 0, \quad \text{em } \omega \times (0, T) \implies u \equiv 0 \quad \text{em } (0, 1) \times (0, T).$$

Este resultado de continuação única é consequência do Teorema da unicidade de Holmgren, e pode ser encontrado em [4].

Por definição, o operador $\mathcal{A}_{\vartheta, T}$ é contínuo se, e somente se, existe $C > 0$ tal que

$$\|u(\cdot, T)\|_{L^2(0, 1)} = \|\mathcal{A}_{\vartheta, T}(u|_{\{\vartheta\} \times (0, T)})\|_{L^2(0, 1)} \leq C \|u(\vartheta, t)\|_{L^2(0, T)},$$

para toda $u = u(x, t)$ solução de (1.2) com $u_0 \in L^2(0, 1)$. Portanto, a continuidade de $\mathcal{A}_{\vartheta, T}$ é equivalente à desigualdade de observabilidade (1.5).

Do exposto, podemos conectar três importantes conceitos que serão a base para este capítulo:

Continuidade do operador de Observabilidade

$\Updownarrow$

Desigualdade de Observabilidade

$\Updownarrow$

Controlabilidade nula.

É importante notar a diferença entre controlar a equação (1.1) em um conjunto aberto e em um ponto. No primeiro caso, ao olhar para o sistema adjunto, conhecemos

a solução sobre um conjunto aberto de $\mathbb{R}^2$. Já no caso do controle aplicado em um ponto, conhecemos a solução do sistema adjunto sobre uma reta, que é um conjunto de medida nula em $\mathbb{R}^2$. Assim, naturalmente, é mais difícil estudar a controlabilidade da equação do calor (1.1) quando o controle atua em um ponto. As figuras a seguir ilustram a região de controle nos dois casos citados.

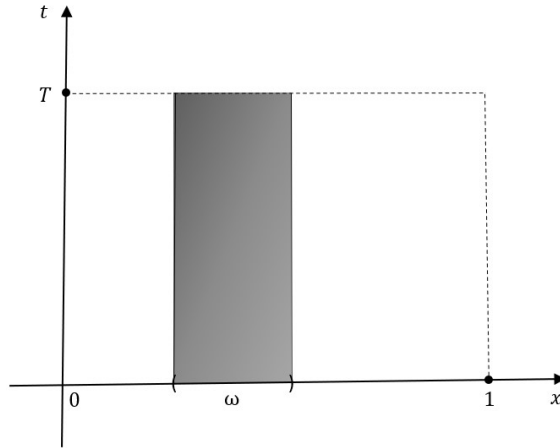


Figura 1.1: Região de controle como um conjunto aberto.

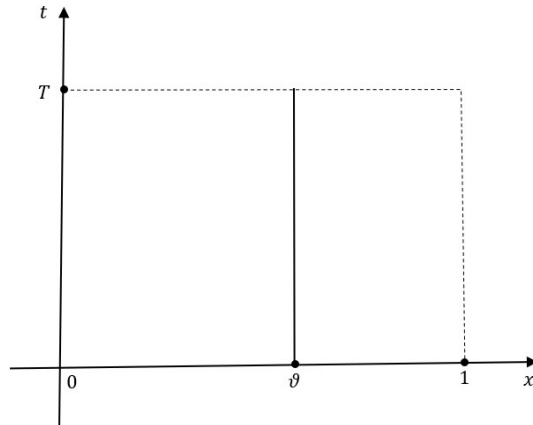


Figura 1.2: Região de controle como um ponto.

É bem sabido que a controlabilidade nula para a equação do calor (1.1) é válida para todo $T > 0$ no caso em que a região de controle ω é um aberto não vazio de $(0, 1)$, ver [4]. Assim, neste capítulo nos concentraremos apenas no caso em que $\omega = \{\vartheta\}$ com $\vartheta \in (0, 1)$.

O seguinte lema, que terá um papel importante mais adiante, caracteriza as autofunções do operador $-\frac{d^2}{dx^2}$.

Lema 1.3. *As autofunções ψ_n do operador $-\frac{d^2}{dx^2}$ (com sua respectiva condição de fronteira), podem ser expressas por*

$$\psi_n(x) = \cos(\sqrt{\lambda_n}x - \beta_n), \quad (1.7)$$

para algum $\beta_n \in [0, \pi]$.

Demonstração. Conhecendo as autofunções, basta notar que $\cos(y - \frac{\pi}{2}) = \sin(y)$ e que a função $\arccos(y) \in [0, \pi]$. $\square$

Observação 1.5. *Por simplicidade da apresentação, consideramos os operadores $\mathcal{A}_{\omega,T}$ e $\mathcal{A}_{\vartheta,T}$ definidos nos espaços $L^2(\omega \times (0, T))$, $L^2(0, T)$ e $L^2(0, 1)$. Entretanto, com as devidas adaptações, poderíamos considerar também estes operadores em outros espaços, por exemplo:*

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{\vartheta,T} : \mathcal{D}(\mathcal{A}_{\vartheta,T}) \subset X &\longrightarrow Y \\ u|_{\vartheta \times (0,T)} &\mapsto u(\cdot, T), \end{aligned}$$

com $X = L^p(0, T)$ ($1 \leq p < \infty$) ou $X = C[0, T]$ e $Y = L^q(0, 1)$ ($1 \leq q < \infty$) ou $Y = C[0, 1]$.

1.2 Controlabilidade nula pontual

Nesta seção, estudaremos a controlabilidade nula pontual da equação do calor (1.1) com controle aplicado em $\vartheta \in (0, 1)$ em termos da convergência de uma série que depende das autofunções no ponto ϑ . Também, conseguiremos estabelecer uma noção de tempo mínimo de controlabilidade.

Nosso primeiro resultado é o seguinte.

Teorema 1.4. *Seja $T > 0$, $\vartheta \in (0, 1)$ e considere a série:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda_n T}}{|\psi_n(\vartheta)|}. \quad (1.8)$$

a) *Se a série (1.8) convergir, o operador $\mathcal{A}_{\vartheta,T'}$ é bem definido e limitado para $T' > T$.*

b) *Se a série (1.8) divergir, então $\mathcal{A}_{\vartheta,T'}$ é não limitado para $T' < T$.*

Observação 1.6. *Se existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\psi_n(\vartheta) = 0$, então o operador $\mathcal{A}_{\vartheta,T}$ não está bem definido para todo $T > 0$. Neste caso, escrevemos $T_0(\vartheta) = \infty$.*

De acordo com o Teorema 1.4, no caso da equação do calor (1.1) com condição de fronteira de Dirichlet, temos:

- Se ϑ for um número racional então $T_0(\vartheta) = \infty$.

De fato, se $\vartheta = \frac{p}{q}$ com $p, q \in \mathbb{Z}$, então $\psi_n(\vartheta) = \sin(n\pi\frac{p}{q}) = 0$ sempre que n for múltiplo de q . Deste modo, pela observação acima, a equação do calor (1.1) com condições de fronteira Dirichlet não é controlável a zero para todo $T > 0$ no ponto ϑ .

- Se ϑ for um número irracional bem aproximado por racionais então $T_0(\vartheta) = \infty$.

Por exemplo, se existir sequências de inteiros p_k e n_k tal que $|\vartheta - \frac{p_k}{n_k}| \leq e^{-Cn_k^3}$, como

$$|\sin(n\pi\vartheta) - \sin(n\pi\frac{p_k}{n_k})| \leq |n\pi(\vartheta - \frac{p_k}{n_k})|,$$

podemos construir uma sequência $n_q \rightarrow \infty$ tal que

$$|\sin(n_q\pi\vartheta)| \leq n_q\pi e^{-Cn_q^3}.$$

Assim, uma vez que

$$\frac{e^{n_q^2(n_q C - \pi^2 T)}}{n_q\pi} \leq \frac{e^{-n_q^2\pi^2 T}}{|\sin(n_q\pi\vartheta)|},$$

temos que a série $\sum \frac{e^{-n^2\pi^2 T}}{|\sin(n\pi\vartheta)|}$ diverge em todo $T > 0$.

- Se ϑ é um irracional algébrico de grau m , i.e., ϑ é raiz de um polinômio irreduzível não-nulo de grau $m \geq 2$, então $T_0(\vartheta) = 0$.

Pelo Teorema de Liouville em aproximações diofantinas, existe uma constante $c(\vartheta) > 0$ tal que

$$\left| \vartheta - \frac{p}{n} \right| > \frac{c(\vartheta)}{n^m}, \quad \forall p, n \in \mathbb{Z} \text{ e } n > 0$$

e, em particular, temos

$$|n\vartheta - p| > \frac{c(\vartheta)}{n^{m-1}}, \quad \forall p, n \in \mathbb{Z} \text{ e } n > 0. \quad (1.9)$$

Pelo Lema A.12

$$|\sin(n\pi\vartheta)| \geq 2\|n\vartheta\|_D$$

e como

$$\|n\vartheta\|_D = \inf_{p \in \mathbb{Z}} |n\vartheta - p|,$$

por (1.9), segue que

$$\|n\vartheta\|_D \geq \frac{c(\vartheta)}{n^{m-1}}. \quad (1.10)$$

Logo, de (1.10), concluímos que

$$|\sin(n\pi\vartheta)| \geq \frac{2c(\vartheta)}{n^{m-1}}, \quad \forall n > 0.$$

Deste modo,

$$\sum \frac{e^{-n^2\pi^2 T}}{|\sin(n\pi\vartheta)|} \leq \frac{1}{2c(\vartheta)} \sum n^{m-1} e^{-n^2\pi^2 T} < \infty, \quad \forall T > 0.$$

Portanto, pelo item a) do Teorema 1.4, segue que $T_0(\vartheta) = 0$.

O Teorema 1.4 nos dá o seguinte critério de controlabilidade para a equação do calor (1.1).

Corolário 1.4.1. *Sejam $T > 0$ e $\vartheta \in (0, 1)$.*

a) Se a série (1.8) convergir, então a equação do calor (1.1) é controlável a zero no tempo T' , para todo $T' > T$, com controle aplicado em $\omega = \{\vartheta\}$.

b) Se a série (1.8) divergir, então a equação do calor (1.1) não é controlável a zero no tempo T' para todo $T' < T$, com controle aplicado em $\omega = \{\vartheta\}$.

Para o que segue, lembramos que os autovalores do operador $-\frac{d^2}{dx^2}$ (com sua respectiva condição de fronteira), satisfazem:

1.

$$\sum_n \frac{1}{|\lambda_n|} < \infty; \tag{1.11}$$

2. Existe $\varrho > 0$ satisfazendo

$$|\lambda_n - \lambda_m| > \varrho|n - m|, \quad m, n = 1, 2, \dots; \tag{1.12}$$

3. Existe $\delta > 0$ tal que, para n suficientemente grande

$$\operatorname{Re}(\lambda_n) > \delta|\lambda_n|. \tag{1.13}$$

Para demonstrar o Teorema 1.4, usaremos um resultado que será provado no caso em que ω é um conjunto discreto de pontos. Assim, seja $\omega = \{\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3, \dots\}$, $\vartheta_k \in (0, 1)$ para todo $k \in \mathbb{N}$, e denote por $X_\omega = \{\langle u(\vartheta_1, \cdot), u(\vartheta_2, \cdot), \dots \rangle\} \subset L^2(0, T) \times L^2(0, T) \times \dots$, em que u é solução de (1.2). Veja que, se $v \in X_\omega$ existe u solução de (1.2) tal que $v = \langle u(\vartheta_1, \cdot), u(\vartheta_2, \cdot), \dots \rangle$.

Lema 1.5. *Suponha que a sequência $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de autovalores do operador $-\frac{d^2}{dx^2}$ (com a respectiva condição de fronteira) satisfaz 1.11, 1.12 e 1.13.*

Seja $\omega = \{\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3, \dots\}$, com $\vartheta_k \in (0, 1)$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Assuma que:

i) Para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $B_n > 0$ e $k \in \mathbb{N}$ tal que ψ_n é contínuo em ϑ_k e que

$$B_n |\psi_n(\vartheta_k)| \geq |\psi_n(x)|, \quad \forall x \in (0, 1). \quad (1.14)$$

ii) Existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$\sum_n B_n e^{-\operatorname{Re}(\lambda_n)(T-2\varepsilon)} < \infty. \quad (1.15)$$

Então, o operador $\mathcal{A}_{\omega, T}$ é bem definido e limitado.

Prova do Lema 1.5. Seja $\omega = \{\vartheta_k \in (0, 1); k \in \mathbb{N}\}$. Mostremos que $\mathcal{A}_{\omega, T}$ está bem definida.

Observe que a primeira hipótese nos diz que $|\psi_n(\vartheta_k)| > 0$. Também, lembremos que pelo Lema A.4, para $\vartheta_k \in \omega$ fixo, temos a seguinte desigualdade

$$|c_n|^2 \leq (d_n^2 |\psi_n(\vartheta_k)|^2)^{-1} \|u(\vartheta_k, \cdot)\|_{X_\omega}^2,$$

em que u é solução do adjunto (1.2) e d_n é distância entre $e^{-\lambda_n t}$ e $\overline{\operatorname{span}\{e^{-\lambda_k t}; k \neq n\}}$ na norma de $L^2(0, T)$.

Como $d_n > 0$, se $\|u(\vartheta_k, \cdot)\|_{X_\omega} = 0$, pela desigualdade acima, temos

$$c_n = 0, \quad \forall n.$$

Logo, concluímos que

$$u(\vartheta_k, \cdot) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \psi_n(\vartheta_k) e^{-\lambda_n t} = 0$$

e, consequentemente, o operador $\mathcal{A}_{\omega, T}$ está bem definido.

Agora, para mostrar que o operador $\mathcal{A}_{\omega, T}$ é limitado, provemos que existe $C > 0$, tal que

$$\|u(\cdot, T)\|_{L^2(0, 1)} \leq C \|u(\vartheta_k, \cdot)\|_{X_\omega}.$$

Assim

$$\begin{aligned}
 \|u(\cdot, T)\|_{L^2(0,1)}^2 &= \sum_n |c_n|^2 \|\psi_n\|_{L^2(0,1)}^2 e^{-2\operatorname{Re}(\lambda_n)T} \\
 &\leq \sum_n |c_n|^2 B_n^2 |\psi_n(\vartheta_k)|^2 e^{-2\operatorname{Re}(\lambda_n)T} \\
 &\leq \left(\sum_n \frac{B_n^2 |\psi_n(\vartheta_k)|^2}{d_n^2 |\psi_n(\vartheta_k)|^2} e^{-2\operatorname{Re}(\lambda_n)T} \right) \|u(\vartheta_k, \cdot)\|_{X_\omega}^2 \\
 &= \left(\sum_n \frac{1}{d_n^2} B_n^2 e^{-2\operatorname{Re}(\lambda_n)T} \right) \|u(\vartheta_k, \cdot)\|_{X_\omega}^2.
 \end{aligned}$$

Uma vez que, pelo Lema A.3, para todo $\varepsilon > 0$ temos

$$\frac{1}{d_n} \leq e^{2\varepsilon \operatorname{Re}(\lambda_n)}, \quad \text{conforme } n \rightarrow \infty,$$

segue que

$$\|u(\cdot, T)\|_{L^2(0,1)}^2 \leq \left(C \sum_n B_n^2 e^{-2\operatorname{Re}(\lambda_n)(T-2\varepsilon)} \right) \|u(\vartheta_k, \cdot)\|_{X_\omega}^2.$$

Pela hipótese *ii*)

$$\sum_n B_n^2 e^{-2\operatorname{Re}(\lambda_n)(T-2\varepsilon)} < \infty,$$

e, portanto, vemos que o operador $\mathcal{A}_{\omega, T}$ é limitado. $\square$

Observação 1.7. *Note que, se as hipóteses do Lema 1.5 são válidas quando $\omega = \{\vartheta\}$, com $\vartheta \in (0, 1)$, o operador $\mathcal{A}_{\vartheta, T}$ é bem definido e limitado.*

Agora, provemos o Teorema 1.4.

Demonstração do Teorema 1.4. Seja $\omega = \{\vartheta\}$, com $\vartheta \in (0, 1)$.

a) No Lema 1.5, tome $B_n = \frac{1}{|\psi_n(\vartheta)|}$. Como para $T' > T$ existe $\varepsilon > 0$ tal que $T = T' - 2\varepsilon$, podemos escrever

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda_n T}}{|\psi_n(\vartheta)|} &= \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-\lambda_n T} \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-\lambda_n (T' - 2\varepsilon)}.
 \end{aligned}$$

Consequentemente, se a série (1.8) convergir, o operador $\mathcal{A}_{\vartheta, T'}$ é bem definido e limitado para todo $T' > T$.

b) Caso a série (1.8) seja divergente, existe uma sequência infinita $\{k_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que

$$\frac{e^{-\lambda_{k_n} T}}{|\psi_{k_n}(\vartheta)|} \geq \frac{1}{k_n^2}, \quad (1.16)$$

ou equivalentemente

$$\frac{e^{-\lambda_{k_n} T} k_n^3}{|\psi_{k_n}(\vartheta)|} \geq k_n.$$

No resto da demonstração, por simplicidade, escreveremos $k_n = n$.

Dado $\varepsilon > 0$ temos que $e^{\lambda_n \varepsilon} \geq n^3$ para todo $n \gg 1$. Logo

$$\frac{e^{-\lambda_n(T-\varepsilon)}}{|\psi_n(\vartheta)|} \geq n, \quad \forall n \gg 1. \quad (1.17)$$

Agora, lembrando que toda solução de (1.2) se escreve como

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \psi_n(x) e^{-\lambda_n t},$$

e, em particular,

$$u(\vartheta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \psi_n(\vartheta) e^{-\lambda_n t},$$

temos

$$\mathcal{A}_{\vartheta, T'}(u(\vartheta, \cdot)) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \psi_n(\vartheta) \mathcal{A}_{\vartheta, T}(e^{-\lambda_n t}).$$

Assim, o operador $\mathcal{A}_{\vartheta, T'} : \mathcal{D}(\mathcal{A}_{\vartheta, T'}) \subset L^2(0, T') \rightarrow L^2(0, 1)$ é limitado se, e somente se, existe $c > 0$ tal que

$$\|\mathcal{A}_{\vartheta, T'}(e^{-\lambda_n t})\|_{L^2(0,1)} \leq c \|e^{-\lambda_n t}\|_{L^2(0, T')}.$$

De fato, basta notar que se

$$\bar{u}(\vartheta, t) = e^{-\lambda_{n_0} t},$$

como

$$e^{-\lambda_{n_0} t} = \sum_{j=1}^{\infty} c_j \psi_j(\vartheta) e^{-\lambda_j t} \quad (1.18)$$

com

$$c_j = 0, \quad j \neq n_0, \quad c_{n_0} = \frac{1}{\psi_{n_0}(\vartheta)},$$

temos

$$\bar{u}(x, t) = \sum_{j=1}^{\infty} c_j \psi_j(x) e^{-\lambda_j t}. \quad (1.19)$$

Portanto, $\mathcal{A}_{\vartheta, T'}$ não ser limitado implica que para todo n existe λ_n tal que

$$\|\mathcal{A}_{\vartheta, T'}(e^{-\lambda_n t})\|_{L^2(0,1)} > n \|e^{-\lambda_n t}\|_{L^2(0, T')}. \quad (1.20)$$

Afirmção 1.1. *Se a série (1.8) divergir, para cada n existe λ_n tal que a desigualdade (1.20) é válida.*

Prova: Definamos, para cada n , a seguinte aplicação:

$$\phi(n) = \frac{\|\mathcal{A}_{\vartheta, T'}(e^{-\lambda_n t})\|_{L^2(0,1)}}{\|e^{-\lambda_n t}\|_{L^2(0, T')}}. \quad (1.21)$$

Temos que $\mathcal{A}_{\vartheta, T'}$ é não limitado se, e somente se, $\phi(n) \rightarrow \infty$, quando $n \rightarrow \infty$.

Por (1.19), temos

$$\|\mathcal{A}_{\vartheta, T'}(e^{-\lambda_n t})\|_{L^2(0,1)} = \frac{e^{-\lambda_n T'} \|\psi_n\|_{L^2(0,1)}}{|\psi_n(\vartheta)|} \quad (1.22)$$

e, portanto,

$$\phi(n) = \frac{e^{-\lambda_n T'} \|\psi_n\|_{L^2(0,1)}}{|\psi_n(\vartheta)| \cdot \|e^{-\lambda_n t}\|_{L^2(0, T')}}. \quad (1.23)$$

No que segue, assumiremos que $\|\psi_n\|_{L^2(0,1)} = 1$. Também, é fácil ver que

$$\|e^{-\lambda_n t}\|_{L^2(0, T')} \leq \sqrt{\frac{1}{2\lambda_n}} \leq 1,$$

para $n \rightarrow \infty$.

Para ver esta última estimativa, basta notar que

$$\begin{aligned} \|e^{-\lambda_n t}\|_{L^2(0, T')} &= \left(\int_0^{T'} e^{-2\lambda_n t} dt \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\frac{1}{2\lambda_n} - \frac{e^{-2\lambda_n T'}}{2\lambda_n} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\frac{1}{2\lambda_n} - \frac{1}{2\lambda_n e^{2\lambda_n T'}} \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

e que, para n suficientemente grande, temos $\frac{1}{2\lambda_n e^{2\lambda_n T'}} \ll 1$.

Portanto, para n suficientemente grande, vale

$$\phi(n) \geq C \frac{e^{-\lambda_n T'}}{|\psi_n(\vartheta)|}.$$

Como $T' < T$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $T' = T - \varepsilon$, e então

$$\phi(n) \geq C \frac{e^{-\lambda_n (T-\varepsilon)}}{|\psi_n(\vartheta)|}.$$

Assim, por (1.17)

$$\phi(n) \rightarrow \infty, \quad n \rightarrow \infty.$$

□

Portanto, $\mathcal{A}_{\vartheta, T'}$ não é limitada para $T' < T$. Isto prova o Teorema 1.4. □

Corolário 1.5.1. *Seja $\omega = \{\vartheta\}$ com $\vartheta \in (0, 1)$. O tempo mínimo de controlabilidade para a equação do calor (1.1) é dado por:*

$$T_0(\vartheta) = -\liminf \left(\frac{\ln |\psi_n(\vartheta)|}{\lambda_n} \right). \quad (1.24)$$

Em particular, a equação do calor (1.1) é controlável a zero no tempo T para todo $T > T_0(\vartheta)$.

Observação 1.8. *No tempo $T_0(\vartheta)$, dado por (1.24), a equação do calor (1.1) pode ou não ser controlável.*

Demonstração do Corolário 1.5.1. Pelo item a) do Teorema 1.4, o operador $\mathcal{A}_{\vartheta, T'}$ é limitado para $T' > T$ se a série (1.8) convergir.

Vejamos agora que, para todo $T < T_0(\vartheta)$ a série (1.8) diverge e que para todo $T > T_0(\vartheta)$ a série converge.

Afirmção 1.2. *Para todo $T > T_0(\vartheta)$, a série (1.8) converge.*

Seja $T > T_0(\vartheta)$, ou seja, $-T_0(\vartheta) > -T$. Pela definição de $\liminf$, existe $\varepsilon > 0$ tal que, para n grande

$$\frac{\ln(|\psi_n(\vartheta)|)}{\lambda_n} \geq -T + \varepsilon.$$

Portanto

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda_n T}}{|\psi_n(\vartheta)|} &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\lambda_n \left(\frac{\ln(|\psi_n(\vartheta)|)}{\lambda_n} - \varepsilon \right)}}{|\psi_n(\vartheta)|} \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\ln(|\psi_n(\vartheta)|) - \lambda_n \varepsilon}}{|\psi_n(\vartheta)|} \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\ln(|\psi_n(\vartheta)|)} e^{-\lambda_n \varepsilon}}{|\psi_n(\vartheta)|} \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\psi_n(\vartheta)| e^{-\lambda_n \varepsilon}}{|\psi_n(\vartheta)|} \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n \varepsilon} < \infty.
 \end{aligned}$$

Analogamente, temos a seguinte afirmação.

Afirmção 1.3. *Para todo $T < T_0(\vartheta)$, a série (1.8) diverge.*

Finalmente, note que em $T = T_0(\vartheta)$ temos

$$\limsup_n \left(\frac{e^{-\lambda_n T}}{|\psi_n(\vartheta)|} \right)^{\frac{1}{n}} = 1 \tag{1.25}$$

e o teste da raiz é inconclusivo.

Pelo Teorema 1.4, a equação do calor (1.1) é controlável a zero no tempo T para todo $T > T_0(\vartheta)$ e não é controlável se $T < T_0(\vartheta)$. Portanto, o tempo mínimo de controlabilidade para a equação do calor (1.1) é dado por

$$T_0(\vartheta) = - \liminf_n \left(\frac{\ln(|\psi_n(\vartheta)|)}{\lambda_n} \right).$$

□

1.2.1 Custo da controlabilidade pontual

Controlar um sistema, como é o caso da equação do calor, tem um custo. Este custo pode ser maior ou menor dependendo do tempo $T > 0$, da região ω no qual o controle atua e dos espaços funcionais no quais estamos trabalhando. Aqui, quantificaremos o custo da controlabilidade por $\|\mathcal{A}_{\omega, T}\|$. Mais precisamente, sejam $T > 0$ e $\vartheta \in (0, 1)$ e considere $C_{obs}(T) := \|\mathcal{A}_{\vartheta, T}\|$ o custo de controlabilidade para a equação do calor (1.1) no tempo T no ponto ϑ .

Temos o seguinte resultado.

Teorema 1.6. *Seja $\vartheta \in (0, 1)$. Se $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo aberto tal que a função $C_{obs}(T)$ é limitada para todo $T \in I$, então a função C_{obs} é contínua em I .*

Demonstração: Começamos notando que, se u é solução da equação do calor (1.2) e conhecemos $u(\vartheta, t)$ para todo $t \in (0, T)$, conhecemos $u(x, t)$ para todo $(x, t) \in (0, 1) \times (0, T)$. E, em particular, conhecemos $u(\cdot, t)$ para todo $t \geq T$.

Sejam $T_1, T_2 \in I$ e $\eta > 0$ arbitrário. Queremos encontrar $\delta > 0$ tal que

$$|T_1 - T_2| < \delta \implies |C_{obs}(T_1) - C_{obs}(T_2)| < \eta. \quad (1.26)$$

Tomando $T \in I$ tal que $T_1, T_2 < T$, podemos escrever

$$\begin{aligned} |C_{obs}(T_1) - C_{obs}(T_2)| &= |\|\mathcal{A}_{\vartheta, T_1}\| - \|\mathcal{A}_{\vartheta, T_2}\|| \\ &\leq \|\mathcal{A}_{\vartheta, T_1} - \mathcal{A}_{\vartheta, T_2}\| \\ &= \sup_{u \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_{\vartheta, T})} \frac{\|(\mathcal{A}_{\vartheta, T_1} - \mathcal{A}_{\vartheta, T_2})u(\vartheta, \cdot)\|_{L^2(0,1)}}{\|u(\vartheta, \cdot)\|_{L^2(0,T)}}. \end{aligned}$$

Note que

$$\|(\mathcal{A}_{\vartheta, T_1} - \mathcal{A}_{\vartheta, T_2})u(\vartheta, \cdot)\|_{L^2(0,1)} \leq \sum_{n=1}^{\infty} |c_n| \|\psi_n\|_{L^2(0,1)} |e^{-\lambda_n T_1} - e^{-\lambda_n T_2}|. \quad (1.27)$$

Como $\|\psi_n\|_{L^2(0,1)} = 1$, pelo Lema A.4, temos

$$|c_n| \leq (d_n |\psi_n(\vartheta)|)^{-1} \|u(\vartheta, \cdot)\|_{L^2(0,T)}.$$

Pela desigualdade A.6, segue que

$$\begin{aligned} \|(\mathcal{A}_{\vartheta, T_1} - \mathcal{A}_{\vartheta, T_2})u(\vartheta, \cdot)\|_{L^2(0,1)} &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\|u(\vartheta, \cdot)\|_{L^2(0,T)}}{d_n |\psi_n(\vartheta)|} |e^{-\lambda_n T_1} - e^{-\lambda_n T_2}| \\ &= \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{d_n |\psi_n(\vartheta)|} e^{-\lambda_n T_1} |1 - e^{-\lambda_n (T_2 - T_1)}| \right) \|u(\vartheta, \cdot)\|_{L^2(0,T)} \\ &= \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda_n T_1}}{d_n |\psi_n(\vartheta)|} |1 - e^{-\lambda_n (T_2 - T_1)}| \right) \|u(\vartheta, \cdot)\|_{L^2(0,T)} \\ &= (S_N + S^N) \|u(\vartheta, \cdot)\|_{L^2(0,T)}, \end{aligned}$$

em que

$$S_N := \sum_{n=1}^N \frac{e^{-\lambda_n T_1}}{d_n |\psi_n(\vartheta)|} |1 - e^{-\lambda_n (T_2 - T_1)}|$$

e

$$S^N := \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda_n T_1}}{d_n |\psi_n(\vartheta)|} |1 - e^{-\lambda_n (T_2 - T_1)}|.$$

A seguir, estimamos S^N e S_N .

• *Estimativa de S^N*

Sem perda de generalidade, tomemos $T_2 > T_1$. Daí temos que $|1 - e^{-\lambda_n (T_2 - T_1)}| < 1$, logo

$$S^N \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda_n T_1}}{d_n |\psi_n(\vartheta)|}.$$

Como I é aberto, seja $\varepsilon > 0$ de modo que $T_1 - 2\varepsilon \in I$ e que vale a desigualdade

$$d_n^{-1} \leq e^{2\varepsilon \lambda_n}, \quad \text{quando } n \rightarrow \infty.$$

Seja $T_0 \in I$ tal que $T_1 - 2\varepsilon > T_0$. Como $C_{obs}(T_0) < \infty$, pelo item *a)* do Teorema (1.4) a equação do calor (1.1) é controlável para todo $T \geq T_0$. Assim, concluímos que

$$\sum_n \frac{e^{-\lambda_n (T_1 - 2\varepsilon)}}{|\psi_n(\vartheta)|} < \infty.$$

Dessa forma, podemos tomar N suficientemente grande de tal forma que $S^N \leq \frac{\eta}{2}$.

No caso em que $T_2 < T_1$, vale a desigualdade

$$S^N \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda_n T_2}}{d_n |\psi_n(\vartheta)|},$$

e o argumento acima continua verdadeiro.

• *Estimativa de S_N*

Mostremos que $S_N \leq \frac{\eta}{2}$ se T_1 está suficientemente próximo de T_2 . Começamos com a seguinte afirmação.

Afirmção 1.4. *Seja $t \in \mathbb{R}$. Então*

$$|1 - e^{-\lambda_n t}| \leq |1 - e^{-\lambda_N t}|,$$

para todo $0 \leq \lambda_n \leq \lambda_N$.

Prova da afirmação: Vamos analisar os casos:

- i) $t \geq 0$;
- ii) $t < 0$.

1. Controle pontual para a equação do calor unidimensional

Se $t \geq 0$, uma vez que $\lambda_n \leq \lambda_N$, então $e^{\lambda_n} \leq e^{\lambda_N}$ e

$$\begin{aligned} e^{\lambda_n t} \leq e^{\lambda_N t} &\Leftrightarrow -e^{-\lambda_n t} \leq -e^{-\lambda_N t} \\ &\Leftrightarrow 1 - e^{-\lambda_n t} \leq 1 - e^{-\lambda_N t}. \end{aligned} \quad (1.28)$$

Como $1 - e^{-\lambda_n t} > 0$ e $1 - e^{-\lambda_N t} > 0$, a desigualdade

$$|1 - e^{-\lambda_n t}| \leq |1 - e^{-\lambda_N t}|$$

é válida se $t \geq 0$.

No caso $t < 0$, temos

$$1 - e^{-\lambda_n t} < 0 \quad \text{e} \quad 1 - e^{-\lambda_N t} < 0.$$

Em particular, como $e^{\lambda_n} \leq e^{\lambda_N}$, para $t < 0$ vale

$$e^{\lambda_N t} \leq e^{\lambda_n t} \quad \implies \quad 1 - e^{-\lambda_N t} \leq 1 - e^{-\lambda_n t}.$$

Assim, vemos que

$$|1 - e^{-\lambda_n t}| \leq |1 - e^{-\lambda_N t}|,$$

se $t < 0$. Portanto, fica provado a afirmação. □

Pela Afirmação 1.4 acima, temos que

$$|1 - e^{-\lambda_n(T_2 - T_1)}| \leq |1 - e^{-\lambda_N(T_2 - T_1)}|,$$

para todo T_1 e T_2 . Portanto

$$\sum_{n=1}^N \frac{e^{-\lambda_n T_1}}{d_n |\psi_n(\vartheta)|} |1 - e^{-\lambda_n(T_2 - T_1)}| \leq \sum_{n=1}^N \frac{e^{-\lambda_n T_1}}{d_n |\psi_n(\vartheta)|} |1 - e^{-\lambda_N(T_2 - T_1)}|.$$

Desta forma, é suficiente mostrar que, se T_2 é suficientemente próximo de T_1 , então

$$\sum_{n=1}^N \frac{e^{-\lambda_n T_1}}{d_n |\psi_n(\vartheta)|} |1 - e^{-\lambda_N(T_2 - T_1)}| \leq \frac{\eta}{2}. \quad (1.29)$$

Usaremos a seguinte equivalência:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N \frac{e^{-\lambda_n T_1}}{d_n |\psi_n(\vartheta)|} |1 - e^{-\lambda_N(T_2 - T_1)}| \leq \frac{\eta}{2} &\Leftrightarrow |1 - e^{-\lambda_N(T_2 - T_1)}| \leq \frac{\eta}{2} \left[\sum_{n=1}^N \frac{e^{-\lambda_n T_1}}{d_n |\psi_n(\vartheta)|} \right]^{-1} \\ &\Leftrightarrow |1 - e^{-\lambda_N(T_2 - T_1)}| \leq \left(\frac{2}{\eta} \right)^{-1} \left[\sum_{n=1}^N \frac{e^{-\lambda_n T_1}}{d_n |\psi_n(\vartheta)|} \right]^{-1}. \end{aligned}$$

Assim, para mostrar a desigualdade (1.29), basta mostrar que para T_2 suficientemente próximo de T_1 vale

$$|1 - e^{-\lambda_N(T_2 - T_1)}| \leq \left[2 \sum_{n=1}^N \frac{e^{-\lambda_n T_1}}{d_n \eta |\psi_n(\vartheta)|} \right]^{-1}. \quad (1.30)$$

Separamos em dois casos.

- $T_2 > T_1$

Neste caso, temos que

$$0 < 1 - e^{-\lambda_N(T_2 - T_1)} < 1$$

e então devemos mostrar que

$$|1 - e^{-\lambda_N(T_2 - T_1)}| = 1 - e^{-\lambda_N(T_2 - T_1)} \leq \left[2 \sum_{n=1}^N \frac{e^{-\lambda_n T_1}}{d_n \eta |\psi_n(\vartheta)|} \right]^{-1},$$

se $T_2 > T_1$ estão suficientemente próximos.

É suficiente mostrar que

$$e^{-\lambda_N(T_2 - T_1)} \geq 1 - \left[2 \sum_{n=1}^N \frac{e^{-\lambda_n T_1}}{d_n \eta |\psi_n(\vartheta)|} \right]^{-1},$$

se $T_2 > T_1$ estão suficientemente próximos.

Pelas propriedades de logaritmo, a desigualdade anterior fica

$$-\lambda_N(T_2 - T_1) \geq \ln \left(1 - \left[2 \sum_{n=1}^N \frac{e^{-\lambda_n T_1}}{d_n \eta |\psi_n(\vartheta)|} \right]^{-1} \right),$$

ou

$$T_2 - T_1 \leq -\frac{1}{\lambda_N} \ln \left(1 - \left[2 \sum_{n=1}^N \frac{e^{-\lambda_n T_1}}{d_n \eta |\psi_n(\vartheta)|} \right]^{-1} \right).$$

Agora, como $T_2 - T_1 > 0$, temos $T_2 - T_1 = |T_2 - T_1|$, e tomando

$$|T_2 - T_1| < -\frac{1}{\lambda_N} \ln \left(1 - \left[2 \sum_{n=1}^N \frac{e^{-\lambda_n T_1}}{d_n \eta |\psi_n(\vartheta)|} \right]^{-1} \right), \quad (1.31)$$

concluimos que vale a desigualdade (1.30).

- $T_2 < T_1$

Neste caso, temos que

$$T_2 < T_1 \quad \Rightarrow \quad e^{-\lambda_n(T_2 - T_1)} > 1.$$

Assim

$$|1 - e^{-\lambda_n(T_2 - T_1)}| = e^{-\lambda_n(T_2 - T_1)} - 1,$$

e a desigualdade (1.30) fica

$$e^{-\lambda_N(T_2 - T_1)} - 1 \leq \left[2 \sum_{n=1}^N \frac{e^{-\lambda_n T_1}}{d_n \eta |\psi_n(\vartheta)|} \right]^{-1}.$$

Logo, basta mostrar que

$$-\lambda_N(T_2 - T_1) \leq \ln \left(1 + \left[2 \sum_{n=1}^N \frac{e^{-\lambda_n T_1}}{d_n \eta |\psi_n(\vartheta)|} \right]^{-1} \right),$$

se $T_2 < T_1$ estão suficientemente próximos.

Uma vez que $T_2 - T_1 < 0$, temos $|T_2 - T_1| = -(T_2 - T_1)$ e

$$|T_2 - T_1| \leq \frac{1}{\lambda_N} \ln \left(1 + \left[2 \sum_{n=1}^N \frac{e^{-\lambda_n T_1}}{d_n \eta |\psi_n(\vartheta)|} \right]^{-1} \right). \quad (1.32)$$

Assim, concluimos que, se $T_2 < T_1$ estão suficientemente próximos de modo que vale (1.32), então a desigualdade (1.30) é satisfeita.

Dessa forma, provamos que $S_n \leq \frac{\eta}{2}$ se T_1 e T_2 estão suficientemente próximos.

Finalmente, provemos (1.26).

Sem perda de generalidade, considere $T_2 > T_1$. Tomando

$$|T_2 - T_1| < -\frac{1}{\lambda_N} \ln \left(1 - \left[2 \sum_{n=1}^N \frac{e^{-\lambda_n T_1}}{d_n \eta |\psi_n(\vartheta)|} \right]^{-1} \right),$$

e N suficientemente grande, temos

$$\begin{aligned} \|(\mathcal{A}_{\vartheta, T_1} - \mathcal{A}_{\vartheta, T_2}) u(\vartheta, \cdot)\|_{L^2(0,1)} &\leq (S_N + S^N) \|u(\vartheta, \cdot)\|_{L^2(0,T)} \\ &\leq \left(\frac{\eta}{2} + \frac{\eta}{2}\right) \|u(\vartheta, \cdot)\|_{L^2(0,T)} \\ &= \eta \|u(\vartheta, \cdot)\|_{L^2(0,T)}. \end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned} |C_{obs}(T_1) - C_{obs}(T_2)| &\leq \sup_{u \in \mathcal{A}_{\vartheta, T}} \frac{\|(\mathcal{A}_{\vartheta, T_1} - \mathcal{A}_{\vartheta, T_2}) u(\vartheta, \cdot)\|_{L^2(0,1)}}{\|u(\vartheta, \cdot)\|_{L^2(0,T)}} \\ &\leq \sup_{u \in \mathcal{A}_{\vartheta, T}} \frac{\eta \|u(\vartheta, \cdot)\|_{L^2(0,T)}}{\|u(\vartheta, \cdot)\|_{L^2(0,T)}} \\ &= \eta, \end{aligned}$$

se T_1 e T_2 estão suficientemente próximos.

Isto prova a continuidade de C_{obs} em I . ■

Terminamos esta seção com o seguinte resultado.

Teorema 1.7. *Sejam $\vartheta \in (0, 1)$ e $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto tal que $C_{obs}(T)$ seja limitada para todo $T \in I$, então a função $C_{obs}(T) = \|\mathcal{A}_{\vartheta, T}\|$ é decrescente em I .*

Demonstração: Sejam $T_1, T_2 \in I$ com $T_2 > T_1$. Mostremos que $C_{obs}(T_2) < C_{obs}(T_1)$.

Seja u solução não nula do sistema adjunto (1.2). Assim

$$\begin{aligned} \|u(\cdot, T_2)\|_{L^2(0,1)}^2 &= \left\| \sum_{n=1}^{\infty} c_n \psi_n(\cdot) e^{-\lambda_n T_2} \right\|_{L^2(0,1)}^2 \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 \|\psi_n\|_{L^2(0,1)}^2 e^{-2\lambda_n T_2} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 e^{-2\lambda_n T_2} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 e^{-2\lambda_n (T_2 - T_1)} e^{-2\lambda_n T_1}. \end{aligned}$$

Uma vez que $e^{-2\lambda_n (T - T')} \leq 1$, pois $T_2 - T_1 > 0$, segue que

$$\begin{aligned} \|u(\cdot, T_2)\|_{L^2(0,1)}^2 &\leq \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 e^{-2\lambda_n T_1} \\ &= \|u(\cdot, T_1)\|_{L^2(0,1)}^2. \end{aligned}$$

Dessa forma

$$\begin{aligned} C_{obs}(T_2) = \|\mathcal{A}_{\vartheta, T_2}\| &= \sup_{u \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_{\vartheta, T_2})} \frac{\|u(\cdot, T_2)\|_{L^2(0,1)}}{\|u(\vartheta, \cdot)\|_{L^2(0, T_2)}} \\ &\leq \sup_{u \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_{\vartheta, T_2})} \frac{\|u(\cdot, T_1)\|_{L^2(0,1)}}{\|u(\vartheta, \cdot)\|_{L^2(0, T_2)}}. \end{aligned}$$

Como $\|u(\vartheta, \cdot)\|_{L^2(0, T_1)} < \|u(\vartheta, \cdot)\|_{L^2(0, T_2)}$, temos

$$\sup_{u \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_{\vartheta, T_2})} \frac{\|u(\cdot, T_1)\|_{L^2(0,1)}}{\|u(\vartheta, \cdot)\|_{L^2(0, T_2)}} < \sup_{u \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_{\vartheta, T_1})} \frac{\|u(\cdot, T_1)\|_{L^2(0,1)}}{\|u(\vartheta, \cdot)\|_{L^2(0, T_1)}}$$

e, consequentemente,

$$\begin{aligned} C_{obs}(T_2) &< \sup_{u \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_{\vartheta, T_1})} \frac{\|u(\cdot, T_1)\|_{L^2(0,1)}}{\|u(\vartheta, \cdot)\|_{L^2(0, T_1)}} \\ &= \|\mathcal{A}_{\vartheta, T_1}\| \\ &= C_{obs}(T_1). \end{aligned}$$

Isto prova que $C_{obs}(\cdot)$ é decrescente em I . ■

Observação 1.9. Na prova acima, usamos que para toda solução não nula do sistema adjunto (1.2), se $T_1 < T_2$, temos $\|u(\vartheta, \cdot)\|_{L^2(0, T_1)} < \|u(\vartheta, \cdot)\|_{L^2(0, T_2)}$. De fato, se fosse $\|u(\vartheta, \cdot)\|_{L^2(0, T_1)} = \|u(\vartheta, \cdot)\|_{L^2(0, T_2)}$, teríamos

$$\int_{T_1}^{T_2} |u(\vartheta, t)|^2 dt = 0,$$

em que $u(\vartheta, t) = 0$ para todo $t \in (T_1, T_2)$, o que implicaria em $u \equiv 0$.

1.2.2 Alguns resultados de densidade

Nesta seção, mostraremos que, para quase todo $\vartheta \in (0, 1)$, a equação do calor (1.1) é nulamente controlável para todo $T > 0$. Também, mostraremos que, dado $0 \leq c \leq \infty$, o conjunto dos $\vartheta \in (0, 1)$ tal que $T_0(\vartheta) = c$ é denso em $[0, 1]$.

Teorema 1.8. Para quase todo $\vartheta \in (0, 1)$, o operador $\mathcal{A}_{\vartheta, T}$ é bem definido e limitado para todo $T > 0$. Mais precisamente

$$|\{\vartheta \in (0, 1); T_0(\vartheta) = 0\}| = 1,$$

em que $|\cdot|$ é a medida de Lebesgue.

No que segue, dada uma sentença P_n , usaremos a seguinte notação:

- $\bigwedge_n P_n$ significa que para todo n , a sentença P_n é verdadeira;
- $\bigvee_n P_n$ significa que existe pelo menos um n , tal que a sentença P_n é verdadeira.

Demonstração do Teorema 1.8: Seja

$$E = \{\vartheta \in (0, 1); T_0(\vartheta) = 0\}.$$

Mostraremos que $|E| = 1$.

Pelo Teorema 1.4, para $\vartheta \in (0, 1)$ e $T' > 0$, temos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda_n T'}}{|\psi_n(\vartheta)|} < \infty \quad \forall \hat{T} > T' \quad \Rightarrow \quad \|\mathcal{A}_{\vartheta, \hat{T}}\| < \infty.$$

Assim, se $\vartheta \in E$, o operador $\mathcal{A}_{\vartheta, T}$ é bem definido e limitado para todo $T > 0$.

Considere $\{T_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ uma sequência decrescente com $T_n \rightarrow 0$. É fácil ver que

$$E = \bigcap_n \{\vartheta \in (0, 1); \|\mathcal{A}_{\vartheta, T_n}\| < \infty\} := \bigcap_n E_n.$$

A demonstração do teorema segue da seguinte afirmação.

Afirmção 1.5. *Para cada $T > 0$ fixo, o conjunto $\{\vartheta \in (0, 1); \|\mathcal{A}_{\vartheta, T}\| < \infty\}$ tem medida total em $(0, 1)$.*

De fato, pela afirmação $|E_n| = 1$ para todo n . Assim

$$\left| \bigcup_n E_n^c \right| \leq \sum_n |E_n^c| = 0,$$

o que implica $|E| = 1$.

Prova da afirmação. Sejam $T' > 0$ e

$$\Gamma_n := \{\vartheta \in (0, 1); |\psi_n(\vartheta)| < n^2 e^{-\lambda_n T'}\}.$$

É fácil ver que, se $\vartheta \notin \Gamma_n$, então

$$\frac{e^{-\lambda_n T'}}{|\psi_n(\vartheta)|} \leq \frac{1}{n^2}.$$

Tomando

$$\Upsilon := \left\{ \vartheta \in (0, 1); \bigwedge_n |\psi_n(\vartheta)| \neq 0 \right\},$$

temos que

$$\mathcal{Y} \cap \left\{ \vartheta \in (0, 1); \bigvee_N \bigwedge_{n > N} |\psi_n(\vartheta)| \geq n^2 e^{-\lambda_n T'} \right\} \subset \left\{ \vartheta \in (0, 1); \sum_n \frac{e^{-\lambda_n T'}}{|\psi_n(\vartheta)|} < \infty \right\}.$$

Em particular, para todo $\widehat{T} > T'$:

$$\mathcal{Y} \cap \left\{ \vartheta \in (0, 1); \bigvee_N \bigwedge_{n > N} |\psi_n(\vartheta)| \geq n^2 e^{-\lambda_n T'} \right\} \subset \left\{ \vartheta \in (0, 1); \|\mathcal{A}_{\vartheta, \widehat{T}}\| < \infty \right\}.$$

Também, é fácil ver que

$$\begin{aligned} \left\{ \vartheta \in (0, 1); \bigvee_N \bigwedge_{n > N} |\psi_n(\vartheta)| \geq n^2 e^{-\lambda_n T'} \right\} &= \liminf_n \{ \vartheta \in (0, 1); |\psi_n(\vartheta)| \geq n^2 e^{-\lambda_n T'} \} \\ &= \liminf_n (\Gamma_n)^{\mathbb{C}} \\ &= (\limsup_n \Gamma_n)^{\mathbb{C}}. \end{aligned}$$

Assim, para todo $\widehat{T} > T'$:

$$\mathcal{Y} \cap (\limsup_n \Gamma_n)^{\mathbb{C}} \subset \left\{ \vartheta \in (0, 1); \|\mathcal{A}_{\vartheta, \widehat{T}}\| < \infty \right\}. \quad (1.33)$$

Agora, mostremos que $\mathcal{Y}$ e $(\limsup_n \Gamma_n)^{\mathbb{C}}$ tem medida total em $(0, 1)$.

- $\mathcal{Y}$ tem medida total em $(0, 1)$.

Note que

$$\mathcal{Y}^{\mathbb{C}} = \bigcup_n \{ \vartheta \in (0, 1); |\psi_n(\vartheta)| = 0 \} := \bigcup_n Z_n.$$

Agora, como as autofunções do operador $\frac{d^2}{dx^2}$ (com a resp. condição de fronteira) são representadas em termos de seno e cosseno, para cada n , o conjunto Z_n é enumerável e, conseqüentemente, tem medida nula em $(0, 1)$. Portanto, $\mathcal{Y}$ tem medida total.

- $(\limsup_n \Gamma_n)^{\mathbb{C}}$ tem medida total em $(0, 1)$.

Lembremos que

$$\Gamma_n = \{ \vartheta \in (0, 1); |\psi_n(\vartheta)| < n^2 e^{-\lambda_n T'} \}.$$

Pelo Lema 1.3, sabemos que $\psi_n(\vartheta) = \cos(\sqrt{\lambda_n} \vartheta - \beta_n)$ com $\beta_n \in [0, \pi]$. Assim, usando o Lema A.12, concluimos que

$$\Gamma_n \subset \left\{ \vartheta \in (0, 1); 2 \left\| \frac{\sqrt{\lambda_n} \vartheta - \beta_n}{\pi} \right\|_D < n^2 e^{-\lambda_n T'} \right\} := \Gamma_n^*,$$

no qual $\|\cdot\|_D$ é a distância diofantina (ver Definição A.4).

Se $\vartheta \in \Gamma_n^*$, então

$$\left\| \frac{\sqrt{\lambda_n}}{\pi} \vartheta - \frac{\beta_n}{\pi} \right\|_D < \frac{n^2 e^{-\lambda_n T'}}{2}.$$

É fácil verificar que:

- $\frac{\sqrt{\lambda_n}}{\pi} > 1$ para $n \gg 1$, pois $\lambda_n = O(n^2)$;
- $\frac{\beta_n}{\pi} \in [0, 1]$, para todo n .
- $\frac{n^2 e^{-\lambda_n T'}}{2} \in \left(0, \frac{1}{4}\right)$, pois para $n \gg 1$ temos $n^2 e^{-\lambda_n T'} \ll 1$.

Aplicando o Lema de Rolewicz, vemos que

$$|\Gamma_n^*| < 8n^2 e^{-\lambda_n T'}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Como $\Gamma_n \subset \Gamma_n^*$, temos

$$|\Gamma_n| < 8n^2 e^{-\lambda_n T'}$$

e, consequentemente,

$$\sum_n |\Gamma_n| < \sum_n 8n^2 e^{-\lambda_n T'} < \infty.$$

Pelo Lema de Borel-Cantelli, concluímos que

$$|\limsup_n \Gamma_n| = 0,$$

do que segue que $(\limsup_n \Gamma_n)^c$ tem medida total em $(0, 1)$.

Assim, provamos que $\mathcal{T} \cap (\limsup_n \Gamma_n)^c$ tem medida total em $(0, 1)$ e, por (1.33), o conjunto $\left\{ \vartheta \in (0, 1); \|\mathcal{A}_{\vartheta, \hat{T}}\| < \infty \right\}$ tem medida total em $(0, 1)$, para todo $\hat{T} > T'$. Como T' é arbitrário, a afirmação está provada. $\square$

Isto conclui a demonstração do Teorema 1.8. $\square$

Para o que segue, precisamos do seguinte lema.

Lema 1.9. *Seja $I \subset \mathbb{R}$. Dados $A, B \subset I$ com $A \subset B$, se A é denso em I então B é denso em I .*

O próximo teorema nos dá uma informação bem interessante com respeito ao conjunto de pontos $\vartheta \in (0, 1)$ para o qual o operador $\mathcal{A}_{\vartheta, T}$ é não limitado para todo $T > 0$.

Teorema 1.10. *O conjunto*

$$\Lambda := \{\vartheta \in (0, 1); \|\mathcal{A}_{\vartheta, T}\| = \infty, \forall T > 0\}$$

é denso em $[0, 1]$.

Além disso, no caso em que todos os autovalores do operador $-\frac{d^2}{dx^2}$ (com sua condição de fronteira) são estritamente positivos, i.e.,

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \dots,$$

temos que, para todo $\vartheta \notin \Lambda$, o operador $\mathcal{A}_{\vartheta, \infty} : u(\vartheta, \cdot) \mapsto \lim_{T \rightarrow \infty} u(\cdot, T)$ tem norma zero.

Observação 1.10. *Se $\vartheta \notin \Lambda$, então existe $T_1 > 0$ tal que $\|\mathcal{A}_{\vartheta, T_1}\| < \infty$. Assim, em particular, para todo $T > T_1$ temos $\|\mathcal{A}_{\vartheta, T}\| < \infty$. Pelos Teoremas 1.6 e 1.7, segue que $\|\mathcal{A}_{\vartheta, T}\|$ é contínua e decrescente em $(T_1, +\infty)$.*

Demonstração: Seja o conjunto

$$\Theta = \bigcup_n \{\vartheta \in (0, 1); |\psi_n(\vartheta)| = 0\}.$$

Assim, para todo $\vartheta \in \Theta$, temos

$$\|\mathcal{A}_{\vartheta, T}\| = \infty, \quad \forall T > 0.$$

Em particular, $\Theta \subset \Lambda$.

Afirmção 1.6. *Θ é denso em $[0, 1]$.*

Prova da afirmação: Sabemos que $\psi_n(\vartheta) = \sin(\sqrt{\lambda_n}\vartheta - \beta_n)$, para algum $\beta_n \in \mathbb{R}$. Também, sabemos que o período da função $\psi_n(\vartheta)$ é dado por $\frac{2\pi}{\sqrt{\lambda_n}}$ e que

$$\frac{2\pi}{\sqrt{\lambda_n}} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Assim, dados $a, b \in [0, 1]$, existe $a < \vartheta < b$ e $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\psi_n(\vartheta) = 0.$$

Isto prova que Θ é denso em $[0, 1]$. □

Portanto, como $\Theta \subset \Lambda$, pelo Lema 1.9, concluímos que Λ é denso em $[0, 1]$.

Mostremos agora que se os autovalores são positivos e $\vartheta \notin \Lambda$ então $\|\mathcal{A}_{\vartheta, \infty}\| = 0$.

Temos que

$$\|\mathcal{A}_{\vartheta,\infty}\| = \lim_{T \rightarrow \infty} \|\mathcal{A}_{\vartheta,T}\|.$$

Por definição

$$\|\mathcal{A}_{\vartheta,T}\| = \sup_{u \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_{\vartheta,T})} \frac{\|\mathcal{A}_{\vartheta,T}(u(\vartheta, \cdot))\|_{L^2(0,1)}}{\|u(\vartheta, \cdot)\|_{L^2(0,T)}}.$$

Escrevemos

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \psi_n(x) e^{-\lambda_n t}$$

e, para $T_1 > 0$, é fácil ver que

$$\|u(\cdot, T)\|_{L^2(0,1)} \leq e^{-\lambda_1(T-T_1)} \|u(\cdot, T_1)\|_{L^2(0,1)}, \quad \forall T > T_1.$$

Para toda $u \neq 0$ solução de (1.2) e todo $T_1 > 0$ fixo, temos

$$\|u(\vartheta, \cdot)\|_{L^2(0,T_1)} > 0.$$

Em particular, para $T \gg T_1$:

$$\|u(\vartheta, \cdot)\|_{L^2(0,T)} \geq \|u(\vartheta, \cdot)\|_{L^2(0,T_1)} > 0.$$

Assim, temos que

$$\frac{\|u(\cdot, T)\|_{L^2(0,T)}}{\|u(\vartheta, \cdot)\|_{L^2(0,T)}} \leq \frac{e^{-\lambda_1(T-T_1)} \|u(\cdot, T_1)\|_{L^2(0,1)}}{\|u(\vartheta, \cdot)\|_{L^2(0,T_1)}}.$$

Com isso, concluímos que

$$\begin{aligned} \|\mathcal{A}_{\vartheta,\infty}\| &= \lim_{T \rightarrow \infty} \|\mathcal{A}_{\vartheta,T}\| \\ &\leq \lim_{T \rightarrow \infty} \sup_{u \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_{\vartheta,T_1})} \frac{e^{-\lambda_1(T-T_1)} \|u(\cdot, T_1)\|_{L^2(0,1)}}{\|u(\vartheta, \cdot)\|_{L^2(0,T_1)}} \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} e^{-\lambda_1(T-T_1)} \|\mathcal{A}_{\vartheta,T_1}\| \\ &= 0. \end{aligned}$$

■

Nos casos em que a condição de fronteira na equação do calor (1.1) é Dirichlet ou Neumann, temos o seguinte resultado.

Teorema 1.11. *Seja $0 < c < \infty$ e suponha que a equação do calor (1.1) satisfaz a*

condição de Dirichlet ou Neumann. O conjunto

$$\Psi := \{\vartheta \in (0, 1), \vartheta \text{ irracional}; \|\mathcal{A}_{\vartheta, c}\| = \infty, T_0(\vartheta) = c\}$$

é denso em $[0, 1]$.

A demonstração será feita considerando a condição de fronteira Neumann. A prova no caso em que a condição de fronteira é Dirichlet é mais simples e segue de modo análogo.

Demonstração: Na equação do calor (1.1) com condição de fronteira Neumann, os autovalores e as autofunções são dados por

$$\lambda_n = n^2 \pi^2 \quad \text{e} \quad \psi_n(x) = \cos(n\pi x),$$

respectivamente.

Todo $\theta \in [0, 1]$ pode ser representado em frações contínuas. Escrevemos:

$$\theta = [b_0, b_1, \dots, b_n, b_{n+1}, \dots]. \quad (1.34)$$

Agora, dado n construiremos $\frac{\vartheta}{2} \in \Psi$ tal que

$$\left| \frac{\vartheta}{2} - \frac{\theta}{2} \right| < \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Seja $x = [a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \dots] \in \mathbb{R}$ e $\frac{p_n}{q_n}$ a melhor aproximação de x de ordem q_n . Para mais detalhes, veja seção A.3 no Apêndice A.

Por (A.13), qualquer que seja a sequência $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$, podemos modificar os a_n, a_{n+1}, a_{n+2} de tal modo que p_{n+2}, p_{n+3} são ímpares. Assim, tomando os a_{n+k} como números pares, para $k \geq 2$, obtemos uma sequência de p_{n+k} formada por números ímpares. De fato:

- Se p_n é ímpar e p_{n-1} é par, escolhemos a_n ímpar, a_{n+1} par e a_{n+2} par;
- Se p_n é par e p_{n-1} é ímpar, escolhemos a_n ímpar, a_{n+1} ímpar e a_{n+2} par;
- Se p_n é ímpar e p_{n-1} é ímpar, escolhemos a_n par, a_{n+1} par e a_{n+2} par.

Note que, o caso em que p_n e p_{n-1} são pares não pode ocorrer por consequência do Lema A.7.

Dados q_{n-1} e q_n para os quais p_{n-1} e p_n sejam ímpares, tome o menor inteiro a_n par tal que

$$q_n e^{\pi^2 q_n^2 c} \leq q_{n+1} = a_n q_n + q_{n-1} \leq q_n (e^{\pi^2 q_n^2 c} + 2), \quad (1.35)$$

no qual $0 < c < \infty$.

Assim, dado $\theta = [b_0, b_1, \dots, b_n, b_{n+1}, \dots] \in [0, 1]$, seja $\vartheta = [b_0, b_1, \dots, b_{n-1}, a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \dots]$, em que $a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \dots$ são construídos como acima e de modo que $p_{n+2}, p_{n+3}, \dots$ são todos ímpares e vale (1.35).

Pelo Lema A.10, temos

$$|\vartheta - \theta| < \frac{1}{2^{n-2}},$$

ou seja

$$\left| \frac{\vartheta}{2} - \frac{\theta}{2} \right| < \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Portanto, para terminarmos a prova, precisamos mostrar que o $\frac{\vartheta}{2}$ construído pertence ao conjunto Ψ . Isto é, precisamos mostrar que $\frac{\vartheta}{2}$ é irracional

$$T_0\left(\frac{\vartheta}{2}\right) = c \quad \text{e} \quad \left\| \mathcal{A}_{\frac{\vartheta}{2}, c} \right\| = \infty.$$

O fato de que $\frac{\vartheta}{2}$ é irracional segue de que $\vartheta = [b_0, b_1, \dots, b_{n-1}, a_n, a_{n+1}, \dots]$ e que a sequência a_n é infinita.

Dividiremos em duas partes.

- Para todo $\varepsilon > 0$ vale:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-n^2\pi^2(c+2\varepsilon)}}{|\cos(n\pi\frac{\vartheta}{2})|} < \infty.$$

Portanto, para todo $c + 2\varepsilon > c$, a equação do calor (1.1) é controlável com controle aplicado em $\omega = \{\frac{\vartheta}{2}\}$.

Pelo Lema A.13, sabemos que

$$C_2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-n^2\pi^2(c+2\varepsilon)}}{\|n\frac{\vartheta}{2} - \frac{1}{2}\|_D} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-n^2\pi^2(c+2\varepsilon)}}{|\cos(n\pi\frac{\vartheta}{2})|} \leq C_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-n^2\pi^2(c+2\varepsilon)}}{\|n\frac{\vartheta}{2} - \frac{1}{2}\|_D}. \quad (1.36)$$

As desigualdades (A.12) e (1.35) implicam

$$\|q_n\vartheta\|_D > \frac{1}{2q_{n+1}} \geq \frac{1}{2q_n(e^{\pi^2 q_n^2 c} + 2)}. \quad (1.37)$$

Afirmção 1.7. *Para todo $\varepsilon > 0$ e n suficientemente grande, temos*

$$\frac{1}{2q_n(e^{\pi^2 q_n^2 c} + 2)} > q_n^2 e^{-\pi^2 q_n^2 (c+\varepsilon)}.$$

Prova da afirmação: Basta mostrar que, para todo $\varepsilon > 0$ e n suficientemente grande, vale

$$2q_n(e^{\pi^2 q_n^2 c} + 2)q_n^2 e^{-\pi^2 q_n^2 (c+\varepsilon)} < 1.$$

Note que

$$\begin{aligned}
 2q_n(e^{\pi^2 q_n^2 c} + 2)q_n^2 e^{-\pi^2 q_n^2 (c+\varepsilon)} &= (2q_n e^{\pi^2 q_n^2 c} + 4q_n)q_n^2 e^{-\pi^2 q_n^2 (c+\varepsilon)} \\
 &= 2q_n^3 e^{\pi^2 q_n^2 c} e^{-\pi^2 q_n^2 (c+\varepsilon)} + 4q_n^3 e^{-\pi^2 q_n^2 (c+\varepsilon)} \\
 &= 2q_n^3 e^{-\pi^2 q_n^2 \varepsilon} + 4q_n^3 e^{-\pi^2 q_n^2 c} e^{-\pi^2 q_n^2 \varepsilon} \\
 &= 2q_n^3 e^{-\pi^2 q_n^2 \varepsilon} (2e^{-\pi^2 q_n^2 c} + 1).
 \end{aligned}$$

Vejamos agora que

$$2q_n^3 e^{-\pi^2 q_n^2 \varepsilon} (2e^{-\pi^2 q_n^2 c} + 1) < 1.$$

Como $2e^{-\pi^2 q_n^2 c} + 1 \leq 2$ para n suficientemente grande, para $\varepsilon > 0$ fixo temos

$$2q_n^3 e^{-\pi^2 q_n^2 \varepsilon} < 1 \implies 2q_n^3 < e^{\pi^2 q_n^2 \varepsilon},$$

segue a afirmação. □

Pela desigualdade (1.37) e pela Afirmação 1.7, para todo $\varepsilon > 0$ e n suficientemente grande, vale

$$\|q_n \vartheta\|_D \geq q_n^2 e^{-\pi^2 q_n^2 (c+\varepsilon)}. \quad (1.38)$$

Seja $\varepsilon > 0$ fixo. Usando que

$$\|q_n \vartheta\|_D \leq \|q \vartheta\|_D, \quad \text{se } 0 < q < q_{n+1},$$

escrevemos

$$\begin{aligned}
 \sum_{q=q_n}^{\infty} \frac{e^{-\pi^2 q^2 (c+2\varepsilon)}}{\|q \vartheta\|_D} &= \sum_{q=q_n}^{q_{n+1}} \frac{e^{-\pi^2 q^2 (c+\varepsilon)} e^{-\pi^2 q^2 \varepsilon}}{\|q \vartheta\|_D} + \sum_{q=q_{n+1}}^{q_{n+2}} \frac{e^{-\pi^2 q^2 (c+\varepsilon)} e^{-\pi^2 q^2 \varepsilon}}{\|q \vartheta\|_D} \\
 &+ \sum_{q=q_{n+2}}^{q_{n+3}} \frac{e^{-\pi^2 q^2 (c+\varepsilon)} e^{-\pi^2 q^2 \varepsilon}}{\|q \vartheta\|_D} + \dots \\
 &\leq \sum_{q=q_n}^{q_{n+1}} \frac{e^{-\pi^2 q_n^2 (c+\varepsilon)} e^{-\pi^2 q^2 \varepsilon}}{\|q_n \vartheta\|_D} + \sum_{q=q_{n+1}}^{q_{n+2}} \frac{e^{-\pi^2 q_{n+1}^2 (c+\varepsilon)} e^{-\pi^2 q^2 \varepsilon}}{\|q_{n+1} \vartheta\|_D} \\
 &+ \sum_{q=q_{n+2}}^{q_{n+3}} \frac{e^{-\pi^2 q_{n+2}^2 (c+\varepsilon)} e^{-\pi^2 q^2 \varepsilon}}{\|q_{n+2} \vartheta\|_D} + \dots
 \end{aligned}$$

Como para todo $\varepsilon > 0$ fixo e $n \gg 1$ temos

$$\|q_n \vartheta\|_D \geq q_n^2 e^{-\pi^2 q_n^2 (c+\varepsilon)} \implies \frac{e^{-\pi^2 q_n^2 (c+\varepsilon)}}{\|q_n \vartheta\|_D} \leq \frac{1}{q_n^2},$$

vemos que

$$\sum_{q=q_n}^{\infty} \frac{e^{-\pi^2 q^2 (c+2\varepsilon)}}{\|q\vartheta\|_D} \leq \frac{1}{q_n^2} \left(\sum_1^{\infty} e^{-\pi^2 q^2 \varepsilon} \right) + \frac{1}{q_{n+1}^2} \left(\sum_1^{\infty} e^{-\pi^2 q^2 \varepsilon} \right) + \frac{1}{q_{n+2}^2} \left(\sum_1^{\infty} e^{-\pi^2 q^2 \varepsilon} \right) + \dots$$

O resultado agora segue do fato que

$$\sum_1^{\infty} e^{-\pi^2 q^2 \varepsilon} = C(\varepsilon)$$

e

$$\frac{1}{q_n^2} + \frac{1}{q_{n+1}^2} + \frac{1}{q_{n+2}^2} + \dots < +\infty.$$

Portanto, concluímos que para todo $\varepsilon > 0$ fixo temos

$$\sum_q \frac{e^{-\pi^2 q^2 (c+2\varepsilon)}}{\|q\vartheta\|} < +\infty.$$

Para terminar basta usar que

$$\|q\vartheta\|_D \leq 2\|q\frac{\vartheta}{2} - \frac{1}{2}\|_D, \quad \forall q \in \mathbb{N}.$$

Esta ultima desigualdade segue diretamente de

$$\|q\vartheta\|_D = \|q\vartheta - 1\|_D \quad \text{e} \quad \|k\vartheta\|_D \leq |k|\|\vartheta\|_D, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Assim

$$\frac{e^{-\pi^2 q^2 (c+2\varepsilon)}}{2\|q\frac{\vartheta}{2} - \frac{1}{2}\|_D} \leq \frac{e^{-\pi^2 q^2 (c+2\varepsilon)}}{\|q\vartheta\|_D}$$

e, por (1.36), concluímos que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-n^2 \pi^2 (c+2\varepsilon)}}{|\cos(n\pi \frac{\vartheta}{2})|} < \infty, \quad \forall \varepsilon > 0.$$

• $\left\| \mathcal{A}_{\frac{\vartheta}{2}, c} \right\| = \infty$

Argumentando como na prova do item b) do Teorema 1.4, mostrar que $\mathcal{A}_{\frac{\vartheta}{2}, c}$ não é limitado é equivalente a mostrar que existe $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que

$$\phi(x_n) = \frac{e^{-x_n^2 \pi^2 c}}{|\cos(x_n \pi \frac{\vartheta}{2})| \|e^{-x_n^2 \pi^2 t}\|_{L^2(0, c)}} \rightarrow \infty, \quad n \rightarrow \infty.$$

Como $\|e^{-n^2\pi^2 t}\|_{L^2(0,c)} \leq 1$, temos

$$\phi(x_n) \geq \frac{e^{-x_n^2\pi^2 c}}{|\cos(x_n\pi\frac{\vartheta}{2})|}.$$

Vamos escolher $x_n = q_n$. Por (A.11) e (1.35), vale

$$\|q_n\vartheta\|_D \leq \frac{1}{q_{n+1}} \leq \frac{e^{-\pi^2 q_n^2 c}}{q_n} \implies q_n \leq \frac{e^{-\pi^2 q_n^2 c}}{\|q_n\vartheta\|_D}.$$

Por definição

$$\begin{aligned} 2\left\|q_n\frac{\vartheta}{2} - \frac{1}{2}\right\|_D &= 2\inf_{z \in \mathbb{Z}} |(q_n\frac{\vartheta}{2} - \frac{1}{2}) - z| \\ &= \inf_{z \in \mathbb{Z}} |q_n\vartheta - (2z + 1)|, \end{aligned}$$

e como, por (A.8), temos $\|q_n\vartheta\|_D = |q_n\vartheta - p_n|$ e p_n é ímpar, segue que

$$\begin{aligned} 2\left\|q_n\frac{\vartheta}{2} - \frac{1}{2}\right\|_D &= \inf_{z \in \mathbb{Z}} |q_n\vartheta - (2z + 1)| \\ &= |q_n\vartheta - p_n| \\ &= \|q_n\vartheta\|_D, \quad \text{para } p_n \text{ ímpar.} \end{aligned}$$

Esta última igualdade é a razão de termos escolhido os p'_n s ímpares.

Deste modo, obtemos

$$\frac{e^{-\pi^2 q_n^2 c}}{\|q_n\vartheta\|_D} \leq \frac{e^{-\pi^2 q_n^2 c}}{\|q_n\frac{\vartheta}{2} - \frac{1}{2}\|_D} \leq \frac{e^{-\pi^2 q_n^2 c}}{|\cos(q_n\pi\frac{\vartheta}{2})|}.$$

Isto mostra que

$$\phi(q_n) \rightarrow \infty, \quad n \rightarrow \infty$$

e, portanto, o operador $\mathcal{A}_{\frac{\vartheta}{2},c}$ é não limitado.

Do exposto acima, concluímos que $T_0(\frac{\vartheta}{2}) = c$. ■

Teorema 1.12. *Seja $0 \leq c \leq \infty$ e suponha que a equação do calor (1.1) satisfaz a condição de Dirichlet ou Neumann. O conjunto*

$$\Phi := \{\vartheta \in (0, 1); T_0(\vartheta) = c\}$$

é denso em $[0, 1]$.

Demonstração: Dividiremos a demonstração em três partes.

Parte 1: $c = 0$.

Note que, neste caso, pelo Teorema 1.8, precisamos mostrar que o conjunto

$$E = \{\vartheta \in (0, 1); T_0(\vartheta) = 0\}$$

é denso em $[0, 1]$, em que $|E| = 1$.

Suponhamos que E não seja denso em $[0, 1]$. Assim, existe um intervalo $I \subset [0, 1]$ não-degenerado, de tal modo que

$$E \cap I = \emptyset.$$

Isto contradiz o fato que $|E| = 1$. Logo o conjunto E é denso em $[0, 1]$.

Parte 2: $c = \infty$.

Aqui, queremos mostrar que o conjunto $\{\vartheta \in (0, 1); T_0(\vartheta) = \infty\}$ é denso em $[0, 1]$.

Observe que, o conjunto Λ definido no Teorema 1.10 satisfaz

$$\Lambda \subset \{\vartheta \in (0, 1); T_0(\vartheta) = \infty\}.$$

Uma vez que Λ é denso em $[0, 1]$, pelo Lema 1.9, segue que o conjunto

$$\{\vartheta \in (0, 1); T_0(\vartheta) = \infty\}$$

é denso em $[0, 1]$.

Parte 3: $0 < c < \infty$.

Neste caso, queremos mostrar que o conjunto $\{\vartheta \in (0, 1); T_0(\vartheta) = c, 0 < c < \infty\}$ é denso em $[0, 1]$.

Notemos que, o conjunto Ψ definido no Teorema 1.11, satisfaz

$$\Psi \subset \{\vartheta \in (0, 1); T_0(\vartheta) = c, 0 < c < \infty\}.$$

Como Ψ é denso em $[0, 1]$, pelo Lema 1.9, o conjunto

$$\{\vartheta \in (0, 1); T_0(\vartheta) = c, 0 < c < \infty\}$$

é denso em $[0, 1]$.

Portanto, o Teorema está provado. ■

1.2.3 Outros tipos de controle

Nesta seção, estudaremos outros tipos de controle para a equação (1.1). De fato, isto será feito considerando outros tipos de observabilidade.

Começamos com o caso no qual o controle está se movendo.

O problema do observador móvel

Do exposto anteriormente, sabemos que controlar a equação do calor em um tempo $T > 0$ com controle aplicado em um ponto fixo $\vartheta \in (0, 1)$ é equivalente a provar uma desigualdade de observabilidade adequada. Mais precisamente, precisamos recuperar a solução do sistema adjunto (1.2) no tempo T conhecendo a solução sobre a reta vertical (ϑ, t) com $t \in (0, T)$ (ver Figura 1.2).

Nos perguntamos agora se é possível recuperar a solução do sistema adjunto (1.2) no tempo T conhecendo a solução do sistema sobre uma reta inclinada não vertical. Isto nos leva ao problema da controlabilidade nula para a equação do calor com controle que está se movendo, ou equivalentemente, ao problema do observador móvel para o sistema adjunto.

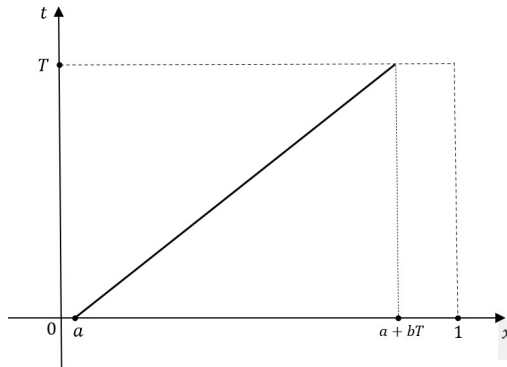


Figura 1.3: Região de controle como uma reta inclinada não-vertical.

Provaremos o seguinte teorema.

Teorema 1.13. *Sejam $T > 0$, $a \in (0, 1)$ e $0 < b < \infty$ tal que $a + bT \leq 1$. Então, o operador $\mathcal{A} : L^2(0, T) \rightarrow L^2(0, 1)$, dado por*

$$\mathcal{A}(u(a + bt, t)) = u(\cdot, T),$$

em que u é solução do adjunto (1.2), é bem definido e limitado.

Demonstração: Sabemos que

$$u(a + bt, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \psi_n(a + bt) e^{-\lambda_n t}. \quad (1.39)$$

Também, para cada n , existe $a_n \in [0, \pi]$ de tal modo que

$$\psi_n(a + bt) = \cos(\sqrt{\lambda_n}(a + bt) - a_n).$$

Logo, substituindo em 1.39, temos

$$u(a + bt, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(\sqrt{\lambda_n}(a + bt) - a_n) e^{-\lambda_n t}. \quad (1.40)$$

Uma vez que

$$\cos(x) = \cosh(ix) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2},$$

então

$$\begin{aligned} \cos(\sqrt{\lambda_n}(a + bt) - a_n) &= \frac{e^{i(\sqrt{\lambda_n}(a+bt)-a_n)} + e^{-i(\sqrt{\lambda_n}(a+bt)-a_n)}}{2} \\ &= \frac{e^{i\sqrt{\lambda_n}a-ia_n} e^{i\sqrt{\lambda_n}bt} + e^{-i\sqrt{\lambda_n}a+ia_n} e^{-i\sqrt{\lambda_n}bt}}{2}. \end{aligned}$$

Assim

$$\begin{aligned} \cos(\sqrt{\lambda_n}(a + bt) - a_n) e^{-\lambda_n t} &= \left(\frac{e^{(i\sqrt{\lambda_n}a-ia_n)} e^{i\sqrt{\lambda_n}bt} + e^{(-i\sqrt{\lambda_n}a+ia_n)} e^{-i\sqrt{\lambda_n}bt}}{2} \right) e^{-\lambda_n t} \\ &= \frac{e^{(i\sqrt{\lambda_n}a-ia_n)} e^{(i\sqrt{\lambda_n}b-\lambda_n)t} + e^{(-i\sqrt{\lambda_n}a+ia_n)} e^{(-i\sqrt{\lambda_n}b-\lambda_n)t}}{2} \end{aligned}$$

e por 1.40, temos que

$$u(a + bt, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{2} \left(e^{(i\sqrt{\lambda_n}a-ia_n)} e^{(i\sqrt{\lambda_n}b-\lambda_n)t} + e^{(-i\sqrt{\lambda_n}a+ia_n)} e^{(-i\sqrt{\lambda_n}b-\lambda_n)t} \right). \quad (1.41)$$

Tomando $x_n = i\sqrt{\lambda_n}b - \lambda_n$ e $y_n = -i\sqrt{\lambda_n}b - \lambda_n$, então

$$\begin{aligned} u(a + bt, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{2} \left(e^{(i\sqrt{\lambda_n}a-ia_n)} e^{x_n t} + e^{(-i\sqrt{\lambda_n}a+ia_n)} e^{y_n t} \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} g_n e^{z_n t}, \end{aligned}$$

em que

$$g_n = \begin{cases} \frac{c_n}{2} e^{(i\sqrt{\lambda_n}a - ia_n)}, & \text{se } n \text{ é ímpar;} \\ \frac{c_n}{2} e^{(-i\sqrt{\lambda_n}a - ia_n)}, & \text{se } n \text{ é par,} \end{cases}$$

e

$$z_n = \begin{cases} x_n, & \text{se } n \text{ é ímpar;} \\ y_n, & \text{se } n \text{ é par.} \end{cases}$$

Como a sequência z_n satisfaz (1.11), (1.12) e (1.13), pelo Lema A.4 vale a seguinte desigualdade:

$$\left| \frac{c_n}{2} \right| = |g_n| \leq \frac{1}{d_n} \|u(a + bt, t)\|_{L^2(0,T)}. \quad (1.42)$$

Portanto, se $\|u(a + bt, t)\|_{L^2(0,T)} = 0$ então $g_n = 0$, para todo n , no qual segue que o operador $\mathcal{A}$ está bem definido.

Agora, note que

$$\begin{aligned} \|u(\cdot, T)\|_{L^2(0,1)}^2 &\leq \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 e^{-2\lambda_n T} \\ &\leq 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\|u(a + bt, t)\|_{L^2(0,T)}}{d_n} e^{-2\lambda_n T} \\ &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{d_n} e^{-2\lambda_n T} \right) \|u(a + bt, t)\|_{L^2(0,T)}. \end{aligned}$$

Como $\frac{1}{d_n} \leq e^{2\varepsilon\lambda_n}$, para n suficientemente grande, então

$$\|u(\cdot, T)\|_{L^2(0,1)} \leq 2 \sum_{n=1}^{\infty} (e^{-2\lambda_n(T-\varepsilon)}) \|u(a + bt, t)\|_{L^2(0,T)},$$

e, pela convergência da série $\sum e^{-\lambda_n(T-2\varepsilon)}$, segue que

$$\|u(\cdot, T)\|_{L^2(0,1)} \leq C \|u(a + bt, t)\|_{L^2(0,T)}.$$

Portanto, o operador $\mathcal{A}$ é limitado. ■

Na seção anterior, vimos que, em geral, é possível recuperar $u(\cdot, T)$ em $L^2(0, 1)$ a partir de uma observação de $u(\vartheta, \cdot)$ em $L^2(0, T)$ com $\vartheta \in (0, 1)$. Assim, é natural nos perguntar se é possível recuperar $u(\cdot, T)$ em $L^2(0, 1)$ a partir de uma observação da média $\int_a^b u(x, \cdot) dx$ em $L^2(0, T)$, com $a, b \in [0, 1]$.

Provaremos o seguinte resultado.

Teorema 1.14. *Sejam $a, b \in [0, 1]$ e $\mathcal{A}_{a,b,T}$ o operador de $L^2(0, T)$ em $L^2(0, 1)$ dado*

por

$$\mathcal{A}_{a,b,T} : \int_a^b u(x, \cdot) dx \mapsto u(\cdot, T),$$

em que u é solução do adjunto (1.2).

a) O conjunto dos pontos $\{(a, b); a, b \in [0, 1]\}$ tal que o operador $\mathcal{A}_{a,b,T}$ é bem definido e limitado para todo $T > 0$, tem medida total em $[0, 1] \times [0, 1]$.

b) O conjunto dos pontos $\{(a, b); a, b \in [0, 1]\}$ tal que o operador $\mathcal{A}_{a,b,T}$ não é bem definido, é um conjunto denso em $[0, 1] \times [0, 1]$.

Demonstração: Como

$$\int_a^b u(x, t) dx = \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} c_n \psi_n(x) e^{-\lambda_n t} dx$$

e $\psi_n(x) = \cos(\sqrt{\lambda_n}x - a_n)$ para algum a_n , então

$$\begin{aligned} \int_a^b u(x, t) dx &= \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(\sqrt{\lambda_n}x - a_n) e^{-\lambda_n t} dx \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\lambda_n t} \int_a^b \cos(\sqrt{\lambda_n}x - a_n) dx. \end{aligned} \quad (1.43)$$

Assim, tomando $y = \sqrt{\lambda_n}x - a_n$, temos

$$\begin{aligned} \int_a^b \cos(\sqrt{\lambda_n}x - a_n) dx &= \int_{\sqrt{\lambda_n}a - a_n}^{\sqrt{\lambda_n}b - a_n} \frac{\cos(y)}{\sqrt{\lambda_n}} dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \left(\sin(\sqrt{\lambda_n}b - a_n) - \sin(\sqrt{\lambda_n}a - a_n) \right). \end{aligned} \quad (1.44)$$

Logo, substituindo 1.44 em 1.43, obtemos

$$\int_a^b u(x, t) dx = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\lambda_n t} \frac{\sin(\sqrt{\lambda_n}b - a_n) - \sin(\sqrt{\lambda_n}a - a_n)}{\sqrt{\lambda_n}}.$$

Pelo Lema A.4:

$$|c_n| \left| \frac{\sin(\sqrt{\lambda_n}b - a_n) - \sin(\sqrt{\lambda_n}a - a_n)}{\sqrt{\lambda_n}} \right| \leq \frac{1}{d_n} \left\| \int_a^b u(x, \cdot) dx \right\|_{L^2(0, T)}.$$

Para todo $\varepsilon > 0$, vale

$$\int_0^1 |u(\cdot, T + \varepsilon)|^2 dx \leq \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 e^{-2\lambda_n(T+\varepsilon)}.$$

Agora, escrevendo

$$B_n = \frac{\sqrt{\lambda_n}}{|\sin(\sqrt{\lambda_n}b - a_n) - \sin(\sqrt{\lambda_n}a - a_n)|},$$

e lembrando que, para todo $\varepsilon > 0$, temos

$$\frac{1}{d_n^2} \leq e^{\varepsilon \lambda_n}, \quad \text{quando } n \rightarrow \infty,$$

concluimos que

$$\int_0^1 |u(\cdot, T + \varepsilon)|^2 dx \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} B_n^2 e^{-2\lambda_n(T + \frac{\varepsilon}{2})} \right) \left\| \int_a^b u(x, \cdot) dx \right\|_{L^2(0, T)}.$$

Portanto, o operador $\mathcal{A}_{a,b,T+\varepsilon}$ é bem definido e contínuo se

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{\lambda_n} e^{-\lambda_n(T + \frac{\varepsilon}{2})}}{|\sin(\sqrt{\lambda_n}b - a_n) - \sin(\sqrt{\lambda_n}a - a_n)|} < \infty. \quad (1.45)$$

a) Analogamente ao Teorema 1.8, é suficiente provar a seguinte afirmação.

Afirmação 1.8. *Sejam $T > 0$ fixo e $\varepsilon > 0$ dado. O conjunto definido por*

$$\Lambda = \left\{ (a, b); \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{\lambda_n} e^{-\lambda_n(T + \frac{\varepsilon}{2})}}{|\sin(\sqrt{\lambda_n}b - a_n) - \sin(\sqrt{\lambda_n}a - a_n)|} < \infty \right\} \quad (1.46)$$

tem medida total em $[0, 1] \times [0, 1]$.

Para provar a afirmação acima, usaremos o fato, cuja demonstração é trivial, de que a série 1.45 é convergente se existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$|\sin(\sqrt{\lambda_n}b - a_n) - \sin(\sqrt{\lambda_n}a - a_n)| \geq n^2 e^{-\lambda_n T}, \quad \forall n \geq N \quad (1.47)$$

e se para todo $n \in \mathbb{N}$

$$\sin(\sqrt{\lambda_n}b - a_n) \neq \sin(\sqrt{\lambda_n}a - a_n). \quad (1.48)$$

Assim, a afirmação é verdade se mostrarmos que o conjunto dos pontos (a, b) , com $a, b \in [0, 1]$, tal que existe $N \in \mathbb{N}$ de forma que vale 1.47 e 1.48, é um conjunto de medida total em $[0, 1] \times [0, 1]$.

Por identidades trigonométricas elementares, é fácil ver que a desigualdade (1.47)

pode ser escrita da seguinte forma

$$\left| 2 \sin \left(\frac{1}{2} \sqrt{\lambda_n} (b - a) \right) \sin \left(\frac{1}{2} \sqrt{\lambda_n} (b + a) - \beta_n \right) \right| \geq n^2 e^{-\lambda_n T}, \quad (1.49)$$

em que $\beta_n = a_n + \frac{\pi}{2}$.

Defina o conjunto

$$S_n = \left\{ (a, b); \left| 2 \sin \left(\frac{1}{2} \sqrt{\lambda_n} (b - a) \right) \sin \left(\frac{1}{2} \sqrt{\lambda_n} (b + a) - \beta_n \right) \right| \geq n^2 e^{-\lambda_n T} \right\} \quad (1.50)$$

e denote $S = \liminf_n S_n$.

Prova da afirmação 1.8. No que segue, $a, b \in [0, 1]$.

Denotando por

$$\Theta = \left\{ (a, b); \bigvee_n \sin(\sqrt{\lambda_n} b - a_n) = \sin(\sqrt{\lambda_n} a - a_n) \right\},$$

então

$$S \cap \Theta^c \subset A. \quad (1.51)$$

Assim, por A.6, para provar a Afirmação 1.8, basta mostrar que

$$|S^c| = \left| \limsup_n S_n^c \right| = 0 \quad (1.52)$$

e

$$|\Theta| = 0. \quad (1.53)$$

- Neste passo, veremos que $|\limsup_n S_n^c| = 0$.

Observe que, se (a, b) satisfaz

$$\sin \left(\frac{1}{2} \sqrt{\lambda_n} (b - a) \right) \geq \frac{n e^{-\frac{1}{2} \lambda_n T}}{\sqrt{2}} \quad \text{e} \quad \sin \left(\frac{1}{2} \sqrt{\lambda_n} (b + a) - \beta_n \right) \geq \frac{n e^{-\frac{1}{2} \lambda_n T}}{\sqrt{2}}$$

então $(a, b) \in S$.

Logo, escrevendo

$$A = \left\{ (a, b); \sin \left(\frac{1}{2} \sqrt{\lambda_n} (b - a) \right) < \frac{n e^{-\frac{1}{2} \lambda_n T}}{\sqrt{2}} \right\} \quad (1.54)$$

e

$$B = \left\{ (a, b); \sin \left(\frac{1}{2} \sqrt{\lambda_n} (b + a) - \beta_n \right) < \frac{n e^{-\frac{1}{2} \lambda_n T}}{\sqrt{2}} \right\}, \quad (1.55)$$

temos que $S_n^{\mathbb{C}} \subset A \cup B$.

Pelo Lema A.12, tomando

$$A^* = \left\{ (a, b); \left\| \frac{\frac{1}{2}\sqrt{\lambda_n}(b-a)}{\pi} \right\|_D < \frac{ne^{-\frac{1}{2}\lambda_n T}}{\sqrt{2}} \right\} \quad (1.56)$$

e

$$B^* = \left\{ (a, b); \left\| \frac{\frac{1}{2}\sqrt{\lambda_n}(b+a) - \beta_n}{\pi} \right\|_D < \frac{ne^{-\frac{1}{2}\lambda_n T}}{\sqrt{2}} \right\}, \quad (1.57)$$

é fácil ver que $A \subset A^*$ e $B \subset B^*$.

Assim

$$S_n^{\mathbb{C}} \subset A \cup B \subset A^* \cup B^* := E.$$

Agora, considere a transformação linear $L : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1] \times [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, na qual $L(a, b) := (\frac{b+a}{2}, \frac{b-a}{2})$. Uma vez que os conjuntos A^* e B^* são mensuráveis, E é um conjunto mensurável e pelo Teorema da mudança de variáveis, temos

$$|L(E)| = |\det L'| \cdot |E|. \quad (1.58)$$

em que $|\cdot|$ é a medida de Lebesgue.

Como

$$\det L' = \det \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2},$$

por 1.58, temos

$$|E| = 2|L(E)| = 2|L(A^* \cup B^*)| \leq 2(|L(A^*)| + |L(B^*)|). \quad (1.59)$$

Pela transformação linear L , temos

$$L(A^*) = \left\{ \frac{b-a}{2} \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]; \left\| \frac{\sqrt{\lambda_n} \frac{b-a}{2}}{\pi} \right\|_D < \frac{ne^{-\frac{1}{2}\lambda_n T}}{\sqrt{2}} \right\} \times \left\{ \frac{a+b}{2} \in [0, 1] \right\}$$

e

$$L(B^*) = \left\{ \frac{a+b}{2} \in [0, 1]; \left\| \frac{\sqrt{\lambda_n} \frac{b+a}{2} - \beta_n}{\pi} \right\|_D < \frac{ne^{-\frac{1}{2}\lambda_n T}}{\sqrt{2}} \right\} \times \left\{ \frac{a-b}{2} \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \right\}.$$

É fácil ver que

$$\left| \left\{ \frac{b-a}{2} \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]; \left\| \frac{\sqrt{\lambda_n} \frac{b-a}{2}}{\pi} \right\|_D < \frac{ne^{-\frac{1}{2}\lambda_n T}}{\sqrt{2}} \right\} \right| \\ = 2 \left| \left\{ \frac{b-a}{2} \in [0, \frac{1}{2}]; \left\| \frac{\sqrt{\lambda_n} \frac{b-a}{2}}{\pi} \right\|_D < \frac{ne^{-\frac{1}{2}\lambda_n T}}{\sqrt{2}} \right\} \right|.$$

Assim

$$|L(A^*)| \leq 2 \left| \left\{ \frac{b-a}{2} \in [0, \frac{1}{2}]; \left\| \frac{\sqrt{\lambda_n} \frac{b-a}{2}}{\pi} \right\|_D < \frac{ne^{-\frac{1}{2}\lambda_n T}}{\sqrt{2}} \right\} \right|$$

e

$$|L(B^*)| \leq \left| \left\{ \frac{a+b}{2} \in [0, 1]; \left\| \frac{\sqrt{\lambda_n} \frac{b+a}{2} - \beta_n}{\pi} \right\|_D < \frac{ne^{-\frac{1}{2}\lambda_n T}}{\sqrt{2}} \right\} \right|.$$

Lembramos que:

- $\frac{\sqrt{\lambda_n}}{\pi} > 1$ para $n \gg 1$, pois $\lambda_n = O(n^2)$;
- $\frac{\beta_n}{\pi} \in [0, 1]$, para todo n .
- $\frac{ne^{-\lambda_n \frac{T}{2}}}{\sqrt{2}} \in (0, \frac{1}{4})$, para $n \gg 1$, pois para $n \gg 1$ temos $ne^{-\lambda_n \frac{T}{2}} \ll 1$.

Deste modo, pelo Lema de Rolewicz, concluimos que

$$|L(A^*)| \leq 2 \left| \left\{ \frac{b-a}{2} \in [0, \frac{1}{2}]; \left\| \frac{\sqrt{\lambda_n} \frac{b-a}{2}}{2\pi} \right\|_D < \frac{ne^{-\frac{1}{2}\lambda_n T}}{\sqrt{2}} \right\} \right| < \frac{16ne^{-\lambda_n \frac{T}{2}}}{\sqrt{2}}$$

e

$$|L(B^*)| \leq \left| \left\{ \frac{b+a}{2} \in [0, 1]; \left\| \frac{\sqrt{\lambda_n} \frac{b+a}{2}}{2\pi} - \frac{\beta_n}{\pi} \right\|_D < \frac{ne^{-\frac{1}{2}\lambda_n T}}{\sqrt{2}} \right\} \right| < \frac{8ne^{-\lambda_n \frac{T}{2}}}{\sqrt{2}}.$$

Logo, obtemos

$$|E| < \frac{Cne^{-\lambda_n \frac{T}{2}}}{\sqrt{2}}.$$

Como $S_n^{\mathbb{C}} \subset E$, segue que

$$|S_n^{\mathbb{C}}| < Cne^{-\lambda_n \frac{T}{2}}.$$

Portanto, como $\sum_n 4ne^{-\lambda_n \frac{T}{2}} < \infty$, então

$$\sum_n |S_n^{\mathbb{C}}| < \infty,$$

e, pelo Lema de Borel-Cantelli, concluimos

$$|\limsup_n S_n^{\mathbb{C}}| = 0. \quad (1.60)$$

• $|\Theta| = 0$.

Temos

$$\Theta = \left\{ (a, b); \bigvee_n \sin(\sqrt{\lambda_n}b - a_n) = \sin(\sqrt{\lambda_n}a - a_n) \right\}.$$

Como $\beta_n = a_n + \frac{\pi}{2}$, vale

$$\cos(\sqrt{\lambda_n}b - \beta_n) = \sin(\sqrt{\lambda_n}b - a_n)$$

e

$$\cos(\sqrt{\lambda_n}a - \beta_n) = \sin(\sqrt{\lambda_n}a - a_n),$$

no qual

$$\begin{aligned} \Theta &= \bigcup_n \left\{ (a, b); \cos(\sqrt{\lambda_n}b - \beta_n) = \cos(\sqrt{\lambda_n}a - \beta_n) \right\} \\ &:= \bigcup_n \Theta_n \end{aligned}$$

Para analisarmos o conjunto Θ , precisamos saber o que acontece quando $\cos(\sqrt{\lambda_n}b - \beta_n) = \cos(\sqrt{\lambda_n}a - \beta_n)$, para cada n , com $(a, b) \in [0, 1] \times [0, 1]$. Podemos mostrar que Θ_n tem medida nula em $\mathbb{R}^2$, para todo n e, conseqüentemente, $|\Theta| = 0$.

Assim, fica provado que $S \cap \Theta^{\mathbb{C}}$ tem medida total em $[0, 1] \times [0, 1]$, e por (1.51) segue que o conjunto Λ tem medida total em $[0, 1] \times [0, 1]$. $\square$

b) Um argumento análogo ao do Teorema 1.10, aplicado ao conjunto Θ denotado por

$$\Theta = \bigcup_n \left\{ (a, b) \in [0, 1] \times [0, 1]; \sin(\sqrt{\lambda_n}b - a_n) = \sin(\sqrt{\lambda_n}a - a_n) \right\},$$

prova esta parte do teorema. ■

O próximo resultado nos diz que podemos recuperar toda $u(\cdot, T)$ em $L^2(0, 1)$, para qualquer $T > 0$, conhecendo tanto $u(\theta, \cdot)$ e $u_x(\theta, \cdot)$ em $L^2(0, T)$. Este resultado é interessante pois sabemos que existem casos em que conhecendo somente $u(\theta, \cdot)$ não é possível recuperar $u(\cdot, T)$.

Teorema 1.15. *Qualquer que seja $\theta \in (0, 1)$, o operador definido por $\mathcal{A} : \langle u(\theta, \cdot), u_x(\theta, \cdot) \rangle \rightarrow$*

$u(\cdot, T)$ é bem definido e limitado de $L^2(0, T) \times L^2(0, T)$ em $L^2(0, 1)$, para todo $T > 0$.

Demonstração: É sabido que

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \psi_n(x) e^{-\lambda_n t},$$

em que u é solução do adjunto (1.2).

Uma vez que, pelo Lema 1.3, $\psi_n(x) = \cos(\sqrt{\lambda_n}x - \beta_n)$, com $\beta_n \in [0, \pi]$, temos

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(\sqrt{\lambda_n}x - \beta_n) e^{-\lambda_n t}$$

e, em particular

$$u_x(x, t) = - \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sqrt{\lambda_n} \sin(\sqrt{\lambda_n}x - \beta_n) e^{-\lambda_n t}.$$

Seja $\theta \in (0, 1)$ fixo.

- Se $\psi_n(\theta) \neq 0$, pelo Lema A.4, vale

$$|c_n| \leq \frac{1}{d_n |\psi_n(\theta)|} \|u(\theta, \cdot)\|_{L^2(0, T)},$$

em que d_n é a distância entre $e^{-\lambda_n t}$ e $\overline{\text{span}\{e^{-\lambda_k t}; k \neq n\}}$ na norma $L^2(0, T)$.

- Caso $\psi_n(\theta) = 0$, temos que $(\psi_n)_x(\theta) \neq 0$. Assim, pelo Lema A.4, temos

$$|c_n \sqrt{\lambda_n}| \leq \frac{1}{d_n |(\psi_n)_x(\theta)|} \|u_x(\theta, \cdot)\|_{L^2(0, T)}.$$

Deste modo, se $\|u(\theta, \cdot)\|_{L^2(0, T)} + \|u_x(\theta, \cdot)\|_{L^2(0, T)} = 0$ então $c_n = 0$ para todo n . Isto nos garante que, para todo ponto $\theta \in (0, 1)$, o operador $\mathcal{A}$ está bem definido.

Agora, mostremos que o operador $\mathcal{A}$ é limitado para todo $T > 0$, ou seja, existe $C > 0$ tal que

$$\|u(\cdot, T)\|_{L^2(0, 1)}^2 \leq C \left(\|u(\theta, \cdot)\|_{L^2(0, T)}^2 + \|u_x(\theta, \cdot)\|_{L^2(0, T)}^2 \right),$$

para toda solução do adjunto (1.2).

Note que

$$\|u(\cdot, T)\|_{L^2(0, 1)}^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 \|\psi_n\|_{L^2(0, 1)}^2 e^{-2\lambda_n T}.$$

Afirmção 1.9. *Seja $\theta \in (0, 1)$ fixo. Então*

$$\|\psi_n\|_{L^2(0,1)}^2 \leq 2(|\psi_n(\theta)|^2 + |(\psi_n)_x(\theta)|^2), \quad \forall x \in (0, 1).$$

Prova da afirmação. Basta notar que, para $\theta \in (0, 1)$ fixo, vale

$$1 \leq 2(|\psi_n(\theta)|^2 + |(\psi_n)_x(\theta)|^2).$$

Assim, sabendo que $|\psi_n(x)| \leq 1$, para todo $x \in (0, 1)$, temos

$$\|\psi_n\|_{L^2(0,1)}^2 = \int_0^1 |\psi_n(x)|^2 dx \leq 2(|\psi_n(\theta)|^2 + |(\psi_n)_x(\theta)|^2).$$

□

Pela afirmação, concluímos que

$$\|u(\cdot, T)\|_{L^2(0,1)}^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 2(|\psi_n(\theta)|^2 + |(\psi_n)_x(\theta)|^2) e^{-2\lambda_n T}.$$

Sabemos que vale

$$|c_n \psi_n(\theta)|^2 \leq \frac{1}{d_n^2} \|u(\theta, \cdot)\|_{L^2(0,T)}^2$$

ou

$$|c_n (\psi_n)_x(\theta)|^2 \leq \frac{1}{d_n^2 \lambda_n} \|u_x(\theta, \cdot)\|_{L^2(0,T)}^2.$$

Portanto

$$\|u(\cdot, T)\|_{L^2(0,1)}^2 \leq C \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-2\lambda_n T}}{d_n^2} \left(\|u(\theta, \cdot)\|_{L^2(0,T)}^2 + \|u_x(\theta, \cdot)\|_{L^2(0,T)}^2 \right),$$

ou equivalentemente

$$\|u(\cdot, T)\|_{L^2(0,1)}^2 \leq C \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-2\lambda_n T}}{d_n^2} \right) \left(\|u(\theta, \cdot)\|_{L^2(0,T)}^2 + \|u_x(\theta, \cdot)\|_{L^2(0,T)}^2 \right).$$

Uma vez que a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-2\lambda_n T}}{d_n^2}$$

converge para todo $T > 0$, concluímos que

$$\|u(\cdot, T)\|_{L^2(0,1)}^2 \leq C \left(\|u(\theta, \cdot)\|_{L^2(0,T)}^2 + \|u_x(\theta, \cdot)\|_{L^2(0,T)}^2 \right).$$

■

O caso de condições de fronteira periódicas

Podemos também considerar o problema da controlabilidade para a equação do calor com condições de fronteira periódicas. Mais precisamente, seja o sistema

$$\begin{cases} y_t - y_{xx} = f1_\omega & (x, t) \in (0, 2) \times (0, T) \\ y(0, t) = y(2, t), & t \in (0, T) \\ y_x(0, t) = y_x(2, t), & t \in (0, T) \\ y(x, 0) = y_0(x), & x \in (0, 2). \end{cases} \quad (1.61)$$

Neste caso, temos o sistema adjunto

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0 & (x, t) \in (0, 2) \times (0, T) \\ u(0, t) = u(2, t), & t \in (0, T) \\ u_x(0, t) = u_x(2, t), & t \in (0, T) \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in (0, 2), \end{cases} \quad (1.62)$$

cujas solução se escreve como

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (c_n \cos(n\pi x) + b_n \sin(n\pi x)) e^{-n^2 \pi^2 t}.$$

Assim, pela expressão da solução, vemos que o operador $\mathcal{A}_{\omega, T}$ não está bem definido se ω é apenas um ponto, i.e., $\omega = \{\theta\}$ com $\theta \in (0, 2)$.

No caso em que $\omega = \{\theta, \tau\}$ com $\theta, \tau \in (0, 2)$, temos o seguinte resultado.

Teorema 1.16. *Considere a série*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n^2 \pi^2 T}}{\|n(\theta - \tau)\|_{\mathcal{D}}}. \quad (1.63)$$

a) Se série (1.63) convergir, então o operador $\mathcal{A}_{\theta, \tau, T'}$ é bem definido e limitado para todo $T' > T$.

b) Se série (1.63) divergir, então o operador $\mathcal{A}_{\theta, \tau, T'}$ é não limitado para todo $T' < T$.

Demonstração: A demonstração deste teorema é bastante trabalhosa e técnica. Para mais detalhes, ver [6, Teorema 9, pág. 302] ■

Corolário 1.16.1. *Seja*

$$T_0(\theta, \tau) = - \liminf_n \frac{\ln(\|n(\theta - \tau)\|_D)}{n^2 \pi^2}. \quad (1.64)$$

1. Controle pontual para a equação do calor unidimensional

Então, o operador $\mathcal{A}_{\theta,\tau,T}$ é bem definido e limitado para todo $T > T_0$ e é não limitado para $T < T_0$.

Prova: Segue de modo análogo à demonstração do Corolário 1.5.1. □

Capítulo 2

Controlabilidade nula pontual como o limite da controlabilidade nula interna

Neste capítulo, consideramos a equação do calor unidimensional com controle aplicado em um aberto não-vazio do domínio e estudaremos o que acontece com as propriedades de controlabilidade da equação quando a região de controle se degenera a um ponto.

Aqui, seguiremos o exposto em [12].

2.1 Introdução

Sejam $x_0 \in (0, 1)$, $0 < \varepsilon < 1$ e considere a equação

$$\begin{cases} y_t - y_{xx} = f 1_{(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)}, & (x, t) \in (0, 1) \times (0, T) \\ y(x, t) = 0, & (x, t) \in \{0, 1\} \times (0, T) \\ y(x, 0) = y_0(x), & x \in (0, 1). \end{cases} \quad (2.1)$$

Sabemos que para todo $(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon) \subset (0, 1)$ existe $f = f_\varepsilon \in L^2((x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon) \times (0, T))$ tal que a solução $y = y(\varepsilon)$ de (2.1), satisfaz

$$y(x, T) = 0, \quad \forall x \in (0, 1).$$

Motivados pelo estudo feito no capítulo anterior, nosso objetivo será estudar o seguinte problema:

Questão: Sejam $T > 0$, $y_0 \in L^2(0,1)$ e $x_0 \in (0,1)$. É verdade que, para cada $0 < \varepsilon < 1$, podemos construir um controle f_ε tal que a solução y_ε de (2.1) satisfaz

$$y_\varepsilon(x, T) = 0, \quad \forall x \in (0, 1)$$

e que f_ε converge (em algum sentido), quando $\varepsilon \rightarrow 0^+$, para uma função $f \in L^2(0, T)$ de modo que a solução da equação

$$\begin{cases} y_t - y_{xx} = f\delta_{x_0}, & (x, t) \in (0, 1) \times (0, T) \\ y(x, t) = 0, & (x, t) \in \{0, 1\} \times (0, T) \\ y(x, 0) = y_0(x), & x \in (0, 1) \end{cases} \quad (2.2)$$

satisfaz

$$y(x, T) = 0 \quad \forall x \in (0, 1)?$$

Aqui, e no restante deste capítulo, δ_{x_0} é delta de Dirac aplicada em x_0 . Assim, o controle em (2.2) está aplicado somente no ponto $x_0 \in (0, 1)$. Portanto, queremos saber se, para a equação do calor, controlabilidade nula em conjuntos abertos implica controlabilidade pontual.

Para estudar o problema acima, lembramos que, dada a equação do calor

$$\begin{cases} y_t - y_{xx} = g1_\omega, & (x, t) \in (0, 1) \times (0, T) \\ y(x, t) = 0, & (x, t) \in \{0, 1\} \times (0, T) \\ y(x, 0) = y_0(x), & x \in (0, 1) \end{cases} \quad (2.3)$$

e seu sistema adjunto

$$\begin{cases} -u_t - u_{xx} = 0, & em (x, t) \in (0, 1) \times (0, T) \\ u(x, t) = 0, & (x, t) \in \{0, 1\} \times (0, T) \\ u(x, T) = u_T(x), & x \in (0, 1) \end{cases} \quad (2.4)$$

vale o seguinte resultado:

Teorema 2.1. *Sejam $T > 0$ e $\omega \subset (0, 1)$ aberto não-vazio. Para cada $y_0 \in L^2(0, 1)$ existe $g \in L^2(\omega \times (0, T))$ tal que a solução da equação (2.3) satisfaz*

$$y(x, T) = 0, \quad \forall x \in (0, 1)$$

se, e somente se, existir $C > 0$ tal que

$$C^2 \|u(\cdot, 0)\|_{L^2(0,1)}^2 \leq \int_0^T \int_\omega |u(x, t)|^2 dx dt, \quad (2.5)$$

para toda $u = u(x, t)$ solução do sistema adjunto (2.4) com $u_T \in L^2(0, 1)$.

Além disso, se vale a desigualdade (2.5), então o controle de norma mínima em $L^2(\omega \times (0, T))$, denotado por g , satisfaz

$$\|g\|_{L^2(\omega \times (0, T))} \leq \frac{1}{C(T, \omega)} \|y_0\|_{L^2(0, 1)}. \quad (2.6)$$

A prova deste resultado pode ser encontrado em [4, Pág. 51].

A maior constante para o qual vale a desigualdade (2.5) será denotada por $C_{obs}(T, \omega)$. Esta constante é chamada de constante de observabilidade e terá um papel fundamental no nosso estudo. De fato, usaremos a seguinte definição:

Definição 2.1.

$$C_{obs}(T, \omega) = \inf \left\{ \frac{(\int_0^T \int_{\omega} |u(x, t)|^2 dx dt)^{\frac{1}{2}}}{\|u(\cdot, 0)\|_{L^2(0, 1)}}; u \text{ solução de (2.4) com } 0 \neq u_T \in L^2(0, 1) \right\}. \quad (2.7)$$

Da definição acima, vemos que

$$\|u(\cdot, 0)\|_{L^2(0, 1)} \leq \frac{1}{C_{obs}(T, \omega)} \|u\|_{L^2((x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \times (0, T))},$$

para toda u solução do sistema adjunto (2.4).

Portanto, se $0 < C_{obs}(T, \omega) < \infty$ então a equação (2.3) é controlável a zero no tempo T com controle aplicado em ω .

No que segue, denotaremos $\omega_{\varepsilon} := (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$. O objetivo deste capítulo é provar o seguinte teorema.

Teorema 2.2. *Sejam $T > 0$, $x_0 \in (0, 1)$ e $\delta > 0$ tal que $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset (0, 1)$. Para $0 < \varepsilon < \delta$, seja $f_{\varepsilon} \in L^2(\omega_{\varepsilon} \times (0, T))$ um controle que leva a equação do calor (2.1), com dado inicial $y_0 \in L^2(0, 1)$, a zero no tempo T .*

Suponha que existe $C > 0$ independente de ε tal que

$$\varepsilon^{\frac{1}{2}} \|f_{\varepsilon}\|_{L^2(\omega_{\varepsilon} \times (0, T))} \leq C.$$

Definindo

$$\varphi_{\varepsilon}(x, t) = \varepsilon f_{\varepsilon}(x_0 + \frac{\varepsilon}{\delta}x, t) \in L^2((-\delta, \delta) \times (0, T)),$$

então

$$\varphi_{\varepsilon} \rightharpoonup \varphi \quad \text{em } L^2((-\delta, \delta) \times (0, T)).$$

Mais ainda, a função

$$f(t) = \frac{1}{\delta} \int_{-\delta}^{\delta} \varphi(x, t) dx \in L^2(0, T)$$

é um controle pontual que leva a equação do calor (2.2), com dado inicial $y_0 \in L^2(0, 1)$, a zero no tempo T no ponto x_0 .

A demonstração deste resultado será feita na Seção 2.3.

Pelo Teorema 2.3 da próxima seção, dado $x_0 \in (0, 1)$ cujo tempo mínimo de controle $T_0(x_0)$ é finito, se $T > T_0(x_0)$ então o controle f_ε de norma mínima em $L^2(\omega_\varepsilon \times (0, T))$ que leva a solução de (2.1) a zero no tempo T satisfaz $\varepsilon^{\frac{1}{2}} \|f_\varepsilon\|_{L^2(\omega_\varepsilon \times (0, T))} \leq C$, com C independente de ε . Isto nos dá uma resposta afirmativa ao nosso problema no caso em que $T > T_0(x_0)$.

Por outro lado, pelo Teorema 2.6, a resposta ao nosso problema é negativa no caso em que $T \leq T_0(x_0)$.

2.2 Sobre o limite da controlabilidade interna

Seja $x_0 \in (0, 1)$. Do capítulo anterior, sabemos que existe um tempo mínimo de controle $0 \leq T_0 := T_0(x_0) \leq \infty$. Mais precisamente, quando $T_0 < \infty$ a equação do calor (2.2) é controlável a zero no tempo T para todo $T > T_0$. Por outro lado, quando $0 < T < T_0$ a equação (2.2) não é controlável a zero no tempo T .

No que segue, adotaremos a convenção que se $T_0 = \infty$ a desigualdade $T > T_0$ nunca é satisfeita (mesmo para $T = \infty$). Ou seja, ao escrever $T > T_0$ estaremos assumindo que $T_0 < \infty$.

No restante deste capítulo, denotaremos por $C(T, \varepsilon) := C_{obs}(T, \omega_\varepsilon)$ a constante de observabilidade para a equação (2.4) no tempo T no intervalo $\omega_\varepsilon = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$.

Nosso primeiro resultado nos dá uma estimativa para $C(T, \varepsilon)$.

Teorema 2.3. *Sejam $T > 0$ e $x_0 \in (0, 1)$ um ponto tal que seu tempo mínimo de controle satisfaz $0 \leq T_0 < \infty$. Então:*

a) *Se $T > T_0$, existem constantes $C_1, C_2 > 0$, que dependem do tempo T , tal que*

$$C_1 \varepsilon^{\frac{1}{2}} \leq C(T, \varepsilon) \leq C_2 \varepsilon^{\frac{1}{2}}.$$

b) *Se $T < T_0$, existe uma sequência $\varepsilon_k \rightarrow 0$ e constantes $c_1 > 0$ e $c_2 > \frac{1}{2}$, que dependem do tempo T , tal que*

$$C(T, \varepsilon_k) \leq c_1 \varepsilon_k^{c_2}.$$

Observação 2.1. *O teorema acima nos diz que, no caso em que $T > T_0$ o controle de norma mínima ótimo em $L^2(\omega_\varepsilon \times (0, T))$ da equação (2.1) satisfaz*

$$\|f_\varepsilon\|_{L^2(\omega_\varepsilon \times (0, T))} \leq \frac{1}{C(T, \varepsilon)} \|y_0\|_{L^2(0, 1)} \leq C\varepsilon^{-\frac{1}{2}}.$$

Veremos que esta última estimativa é suficiente para passar o limite no caso em que $T > T_0$.

Para provar o Teorema 2.3 precisamos dos seguintes resultados.

Lema 2.4. *Para todo $\delta > 0$, existem $C > 0$ e uma sequência $\{\varepsilon_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ satisfazendo*

$$\varepsilon_j \rightarrow 0, \quad j \rightarrow \infty,$$

$$\frac{\varepsilon_j}{2} \leq \varepsilon_{j+1} \leq \varepsilon_j, \quad \forall j \in \mathbb{N}$$

e

$$\phi_n^j \geq C\varepsilon_j e^{-n^2 \pi^2 \delta}, \quad (2.8)$$

em que $\phi_n^j = \inf_{p \in \mathbb{Z}} |\varepsilon_j - \frac{p}{n}|$.

Prova: Ver Apêndice C. □

Lema 2.5. *Sejam $\{\varepsilon_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ uma sequência que satisfaz as condições do Lema 2.4 e $x_0 \in (0, 1)$ tal que $0 \leq T_0(x_0) < \infty$.*

Para $\delta > 0$ fixado, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\left| \int_{x_0 - \varepsilon_j}^{x_0 + \varepsilon_j} \sin(n\pi x) dx \right| \geq C\varepsilon_j |\sin(n\pi x_0)| e^{-n^2 \pi^2 \delta}.$$

Prova: Ver Apêndice C. □

Demonstração do Teorema 2.3.

Prova do item a) . Este item será provado em duas partes.

Parte 1: $C(T, \varepsilon) \leq C_2 \varepsilon^{\frac{1}{2}}$.

Considere o sistema adjunto (2.4) com dado inicial $u_0(x) = \sqrt{2} \sin(\pi x)$, cuja solução é dada por

$$u(x, t) = \sqrt{2} e^{-\pi^2(T-t)} \sin(\pi x). \quad (2.9)$$

Como

$$\begin{aligned} \|u(\cdot, 0)\|_{L^2(0, 1)}^2 &= \int_0^1 2e^{-2\pi^2 T} \sin^2(\pi x) dx \\ &= e^{-2\pi^2 T}, \end{aligned}$$

pela definição de $C(T, \varepsilon)$, segue que

$$C(T, \varepsilon) \leq \frac{1}{e^{-\pi^2 T}} \left(\int_0^T \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} 2e^{-2\pi^2(T-t)} \sin^2(\pi x) dx dt \right)^{\frac{1}{2}},$$

ou equivalentemente

$$C(T, \varepsilon)^2 \leq \frac{2}{e^{-2\pi^2 T}} \int_0^T \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} e^{-2\pi^2(T-t)} \sin^2(\pi x) dx dt. \quad (2.10)$$

Como $e^{-2\pi^2 t} \leq 1$ para todo $t \geq 0$ e $|\sin(n\pi x)| \leq 1$ para todo $x \in (0, 1)$, vemos que

$$\frac{2}{e^{-2\pi^2 T}} \int_0^T \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} e^{-2\pi^2(T-t)} \sin^2(\pi x) dx dt \leq K T e^{2\pi^2 T} \varepsilon,$$

que implica em

$$C(T, \varepsilon) \leq C_2 \varepsilon^{\frac{1}{2}}.$$

Parte 2: $C_1 \varepsilon^{\frac{1}{2}} \leq C(T, \varepsilon)$.

Dado $\varepsilon > 0$ e $y_0 \in L^2(0, 1)$, construiremos um controle $\varphi_\varepsilon \in L^2(\omega_\varepsilon \times (0, T))$ que leva a solução de (2.1) a zero no tempo T e satisfaz

$$\|\varphi_\varepsilon\|_{L^2(\omega_\varepsilon \times (0, T))} \leq C \varepsilon^{-\frac{1}{2}} \|y_0\|_{L^2(0, 1)},$$

na qual C é independente de ε e y_0 .

Logo, se $f_\varepsilon = f_\varepsilon(x, t)$ é o controle de norma mínima em $L^2(\omega_\varepsilon \times (0, T))$ que leva a solução de (2.1) a zero no tempo T , devemos ter

$$\|f_\varepsilon\|_{L^2(\omega_\varepsilon \times (0, T))} \leq C \varepsilon^{-\frac{1}{2}} \|y_0\|_{L^2(0, 1)}$$

e, pelo Teorema 2.1, teremos a estimativa

$$C(T, \varepsilon) \geq C \varepsilon^{\frac{1}{2}}.$$

Provaremos a existência do controle φ_ε usando o método de momentos. Mais precisamente, construiremos uma sequência $\{\varepsilon_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ apropriada, com $\varepsilon_j \rightarrow 0$ quando $j \rightarrow \infty$, e $\varphi_{\varepsilon_j} = h_{\varepsilon_j}(t) \chi_{[x_0-\varepsilon_j, x_0+\varepsilon_j]}$, tal que existe $C > 0$, independente de ε e y_0 , de modo que

$$\|\varphi_{\varepsilon_j}\|_{L^2(\omega_{\varepsilon_j} \times (0, T))} \leq C \varepsilon_j^{-\frac{1}{2}} \|y_0\|_{L^2(0, 1)}.$$

Isto será suficiente para provar a desigualdade desejada.

Dado $\varepsilon_j > 0$, pelo método de momentos, sabemos que existe um controle na forma $\varphi_{\varepsilon_j} = h_{\varepsilon_j}(t)\chi_{[x_0-\varepsilon_j, x_0+\varepsilon_j]}$ que leva a solução da equação (2.1) a zero no tempo T . Assim, se $y_0(x) = \sum y_0^n \sin(n\pi x)$, temos

$$h_{\varepsilon_j}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n^2\pi^2 T} y_0^n}{\int_{x_0-\varepsilon_j}^{x_0+\varepsilon_j} \sin(n\pi x) dx} \xi_n(t).$$

Para mais detalhes, ver Apêndice B.

Assim, calculando a norma $L^2(0, T)$, temos

$$\begin{aligned} \|h_{\varepsilon_j}(t)\|_{L^2(0, T)} &= \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n^2\pi^2 T} y_0^n}{\int_{x_0-\varepsilon_j}^{x_0+\varepsilon_j} \sin(n\pi x) dx} \xi_n(t) \right\|_{L^2(0, T)} \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|y_0^n| e^{-n^2\pi^2 T}}{\left| \int_{x_0-\varepsilon_j}^{x_0+\varepsilon_j} \sin(n\pi x) dx \right|} \|\xi_n(t)\|_{L^2(0, T)}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Como $T > T_0$, pelo Teorema 1.4, podemos escolher $\delta > 0$ tal que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n^2\pi^2(T-2\delta)}}{|\sin(n\pi x)|} < \infty$$

e, em particular, vale

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-2n^2\pi^2(T-2\delta)}}{|\sin(n\pi x)|^2} < \infty. \quad (2.12)$$

Fixe $\delta > 0$ para o qual vale (2.12) e considere uma sequência $\{\varepsilon_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ nas condições do Lema 2.4.

Como a família $\{\xi_n\} \in L^2(0, T)$ é biortogonal à família $\{e^{-n^2\pi^2 t}\} \in L^2(0, T)$, pelo Lema B.1 existe uma constante $C^* > 0$ tal que

$$\|\xi_n\|_{L^2(0, T)} \leq e^{C^* n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (2.13)$$

Além disso, pelo Lema 2.5, existe $C' > 0$ tal que

$$\left| \int_{x_0-\varepsilon_j}^{x_0+\varepsilon_j} \sin(n\pi x) dx \right| \geq C' \varepsilon_j |\sin(n\pi x_0)| e^{-n^2\pi^2 \delta}, \quad \forall \delta > 0$$

e, em particular, temos

$$\frac{1}{\left| \int_{x_0-\varepsilon_j}^{x_0+\varepsilon_j} \sin(n\pi x) dx \right|} \leq \frac{1}{C' \varepsilon_j |\sin(n\pi x_0)| e^{-n^2\pi^2 \delta}}. \quad (2.14)$$

Logo, usando (2.13) e (2.14):

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|y_0^n| e^{-n^2 \pi^2 T}}{\left| \int_{x_0 - \varepsilon_j}^{x_0 + \varepsilon_j} \sin(n\pi x) dx \right|} \|\xi_n(t)\|_{L^2(0,T)} &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|y_0^n| e^{-n^2 \pi^2 T}}{C' \varepsilon_j |\sin(n\pi x_0)| e^{-n^2 \pi^2 \delta}} e^{C^* n} \\ &= C \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\varepsilon_j} \frac{|y_0^n| e^{-n^2 \pi^2 (T-\delta)} e^{C^* n}}{|\sin(n\pi x_0)|}, \end{aligned}$$

em que $C = \frac{1}{C'}$.

Para n suficientemente grande podemos fazer $C^* \leq n\pi^2 \delta$, i.e., existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$C^* \leq n\pi^2 \delta, \quad \forall n \geq n_0.$$

Assim, escrevemos

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\varepsilon_j} \frac{|y_0^n| e^{-n^2 \pi^2 (T-\delta)} e^{C^* n}}{|\sin(n\pi x_0)|} &= \sum_{n=1}^{n_0} \frac{1}{\varepsilon_j} \frac{|y_0^n| e^{-n^2 \pi^2 (T-\delta)} e^{C^* n}}{|\sin(n\pi x_0)|} \\ &\quad + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{1}{\varepsilon_j} \frac{|y_0^n| e^{-n^2 \pi^2 (T-\delta)} e^{C^* n}}{|\sin(n\pi x_0)|}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Para estimar o primeiro termo do lado direito, reescrevemos

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{n_0} \frac{1}{\varepsilon_j} \frac{|y_0^n| e^{-n^2 \pi^2 (T-\delta)} e^{C^* n}}{|\sin(n\pi x_0)|} &= \sum_{n=1}^{n_0} \frac{1}{\varepsilon_j} \frac{|y_0^n| e^{-n^2 \pi^2 (T-\delta)} e^{n^2 \pi^2 \delta} e^{-n^2 \pi^2 \delta} e^{C^* n}}{|\sin(n\pi x_0)|} \\ &= \sum_{n=1}^{n_0} \frac{1}{\varepsilon_j} \frac{|y_0^n| e^{-n^2 \pi^2 (T-2\delta)} e^{C^* n} e^{-n^2 \pi^2 \delta}}{|\sin(n\pi x_0)|}. \end{aligned}$$

Como $e^{-n^2 \pi^2 \delta} < 1$ e $e^{C^* n} \leq e^{C^* n_0}$, obtemos

$$\sum_{n=1}^{n_0} \frac{1}{\varepsilon_j} \frac{|y_0^n| e^{-n^2 \pi^2 (T-\delta)} e^{C^* n}}{|\sin(n\pi x_0)|} \leq C \sum_{n=1}^{n_0} \frac{1}{\varepsilon_j} \frac{|y_0^n| e^{-n^2 \pi^2 (T-2\delta)}}{|\sin(n\pi x_0)|}.$$

Por outro lado, como $C^* \leq n\pi^2 \delta$ para n suficientemente grande, a segunda série do lado direito em (2.15) pode ser estimada como

$$\begin{aligned} \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{1}{\varepsilon_j} \frac{|y_0^n| e^{-n^2 \pi^2 (T-\delta)} e^{C^* n}}{|\sin(n\pi x_0)|} &\leq \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{1}{\varepsilon_j} \frac{|y_0^n| e^{-n^2 \pi^2 (T-\delta)} e^{n^2 \pi^2 \delta}}{|\sin(n\pi x_0)|} \\ &= \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{1}{\varepsilon_j} \frac{|y_0^n| e^{-n^2 \pi^2 (T-2\delta)}}{|\sin(n\pi x_0)|}. \end{aligned}$$

Portanto

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\varepsilon_j} \frac{|y_0^n| e^{-n^2 \pi^2 (T-\delta)} e^{C^* n}}{|\sin(n\pi x_0)|} \leq C \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\varepsilon_j} \frac{|y_0^n| e^{-n^2 \pi^2 (T-2\delta)}}{|\sin(n\pi x_0)|}.$$

Deste modo, concluimos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|y_0^n| e^{-n^2 \pi^2 T}}{\left| \int_{x_0-\varepsilon_j}^{x_0+\varepsilon_j} \sin(n\pi x) dx \right|} \|\xi_n(t)\|_{L^2(0,T)} \leq C \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\varepsilon_j} \frac{|y_0^n| e^{-n^2 \pi^2 (T-2\delta)}}{|\sin(n\pi x_0)|}. \quad (2.16)$$

Logo, de (2.11) e (2.16),

$$\|h_{\varepsilon_j}(t)\|_{L^2(0,T)} \leq \frac{C}{\varepsilon_j} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|y_0^n| e^{-n^2 \pi^2 (T-2\delta)}}{|\sin(n\pi x_0)|}. \quad (2.17)$$

Como $y_0(x) = \sum y_0^n \sin(n\pi x)$, pela identidade de Parseval, temos que

$$\|y_0\|_{L^2(0,1)}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |y_0^n|^2. \quad (2.18)$$

Pela desigualdade de Hölder,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|y_0^n| e^{-n^2 \pi^2 (T-2\delta)}}{|\sin(n\pi x_0)|} \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |y_0^n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{e^{-n^2 \pi^2 (T-2\delta)}}{|\sin(n\pi x_0)|} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Assim

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|y_0^n| e^{-n^2 \pi^2 (T-2\delta)}}{|\sin(n\pi x_0)|} \right)^2 \leq \|y_0\|_{L^2(0,1)}^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-2n^2 \pi^2 (T-2\delta)}}{|\sin(n\pi x_0)|^2}$$

e, portanto,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|y_0^n| e^{-n^2 \pi^2 (T-2\delta)}}{|\sin(n\pi x_0)|} \leq \|y_0\|_{L^2(0,1)} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-2n^2 \pi^2 (T-2\delta)}}{|\sin(n\pi x_0)|^2} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.19)$$

De (2.17) e (2.19), obtemos

$$\|h_{\varepsilon_j}(t)\|_{L^2(0,T)} \leq \frac{C}{\varepsilon_j} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-2n^2 \pi^2 (T-2\delta)}}{|\sin(n\pi x_0)|^2} \right)^{\frac{1}{2}} \|y_0\|_{L^2(0,1)},$$

e por (2.12), temos

$$\|h_{\varepsilon_j}(t)\|_{L^2(0,T)} \leq \frac{C}{\varepsilon_j} \|y_0\|_{L^2} \quad (2.20)$$

e, pela convergência da série em (2.12), a constante C depende somente de T e x_0 .

Agora, como $\varphi_{\varepsilon_j}(x, t) = h_{\varepsilon_j}(t)\chi_{[x_0-\varepsilon_j, x_0+\varepsilon_j]}$, então

$$\begin{aligned}\|\varphi_{\varepsilon_j}\|_{L^2(\omega_{\varepsilon_j} \times (0, T))}^2 &= \|h_{\varepsilon_j}(t)\chi_{[x_0-\varepsilon_j, x_0+\varepsilon_j]}\|_{L^2(\omega_{\varepsilon_j} \times (0, T))}^2 \\ &= \int_0^T \int_{x_0-\varepsilon_j}^{x_0+\varepsilon_j} |h_{\varepsilon_j}(t)|^2 dx dt \\ &= \int_0^T |h_{\varepsilon_j}(t)|^2 2\varepsilon_j dt \\ &= 2\varepsilon_j \|h_{\varepsilon_j}(t)\|_{L^2(0, T)}^2,\end{aligned}$$

no qual

$$\|\varphi_{\varepsilon_j}\|_{L^2(\omega_{\varepsilon_j} \times (0, T))} \leq \sqrt{2\varepsilon_j^{\frac{1}{2}}} \|h_{\varepsilon_j}(t)\|_{L^2(0, T)}. \quad (2.21)$$

Portanto, de (2.20) e (2.21):

$$\|\varphi_{\varepsilon_j}\|_{L^2(\omega_{\varepsilon_j} \times (0, T))} \leq \frac{C}{\varepsilon_j^{\frac{1}{2}}} \|y_0\|_{L^2(0, 1)}.$$

Considerando f_{ε_j} o controle de norma mínima em $L^2(\omega_{\varepsilon_j} \times (0, T))$, segue que

$$\|f_{\varepsilon_j}\|_{L^2(\omega_{\varepsilon_j} \times (0, T))} \leq \|\varphi_{\varepsilon_j}\|_{L^2(\omega_{\varepsilon_j} \times (0, T))} \leq \frac{C}{\varepsilon_j^{\frac{1}{2}}} \|y_0\|_{L^2(0, 1)}. \quad (2.22)$$

Pela definição de $C(T, \varepsilon_j)$, segue que

$$\frac{1}{C(T, \varepsilon_j)} \leq \frac{C}{\varepsilon_j^{\frac{1}{2}}},$$

ou equivalentemente

$$C\varepsilon_j^{\frac{1}{2}} \leq C(T, \varepsilon_j). \quad (2.23)$$

Agora, mostremos que, para todo $\varepsilon > 0$, suficientemente pequeno, vale

$$C(T, \varepsilon) \geq C\varepsilon^{\frac{1}{2}}.$$

Assim, dado $\varepsilon \in (-\delta, \delta)$, tome ε_j de tal modo que

$$\frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon_j \leq \varepsilon, \quad (2.24)$$

o que é possível pela construção da sequência ε_j .

O controle f_{ε_j} de norma mínima em $L^2(\omega_{\varepsilon_j} \times (0, T))$, se anula fora do intervalo $(x_0 - \varepsilon_j, x_0 + \varepsilon_j)$. Por (2.24) tem-se que $\omega_{\varepsilon_j} \subset \omega_\varepsilon$, então f_{ε_j} também se anula fora do

intervalo $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$.

Seja f_ε o controle de norma mínima em $L^2(\omega_\varepsilon \times (0, T))$. Temos

$$\begin{aligned} \varepsilon \|f_\varepsilon\|_{L^2(\omega_\varepsilon \times (0, T))}^2 &\leq 2\varepsilon_j \|f_{\varepsilon_j}\|_{L^2(\omega_\varepsilon \times (0, T))}^2 \\ &= 2\varepsilon_j \|f_{\varepsilon_j}\|_{L^2(\omega_{\varepsilon_j} \times (0, T))}^2, \end{aligned} \quad (2.25)$$

na qual usamos que

$$\varepsilon \leq 2\varepsilon_j \leq 2\varepsilon.$$

Uma vez que $\varepsilon_j^{\frac{1}{2}} \|f_{\varepsilon_j}\|_{L^2(\omega_{\varepsilon_j} \times (0, T))} \leq C \|y_0\|_{L^2(0, 1)}$, ou equivalentemente $\varepsilon_j \|f_{\varepsilon_j}\|_{L^2(\omega_{\varepsilon_j} \times (0, T))}^2 \leq C \|y_0\|_{L^2(0, 1)}^2$, segue que

$$2\varepsilon_j \|f_{\varepsilon_j}\|_{L^2(\omega_{\varepsilon_j} \times (0, T))}^2 \leq C \|y_0\|_{L^2(0, 1)}^2$$

e obtemos

$$\varepsilon \|f_\varepsilon\|_{L^2(\omega_\varepsilon \times (0, T))}^2 \leq C \|y_0\|_{L^2(0, 1)}^2. \quad (2.26)$$

Finalmente, pela definição de $C(T, \varepsilon)$, concluímos que

$$C\varepsilon^{\frac{1}{2}} \leq C(T, \varepsilon). \quad (2.27)$$

Portanto, fica provada a limitação inferior e consequentemente o item a) do teorema.

Prova do item b).

Como $T < T_0$, pelo Teorema 1.4 existem $\delta > 0$ e uma sequência crescente $\{n_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ com $n_k \rightarrow \infty$, tal que

$$|\sin(n_k \pi x_0)| \leq e^{-n_k^2 \pi^2 (T + \delta)}. \quad (2.28)$$

Considere $\theta_{n_k} = \inf_{p \in \mathbb{Z}} |x_0 - \frac{p}{n_k}|$, a melhor aproximação do ponto x_0 por frações com denominador n_k .

Para $p' = p'(n_k) \in \mathbb{Z}$ atingindo o ínfimo em θ_{n_k} , temos que

$$\theta_{n_k} = |x_0 - \frac{p'}{n_k}|. \quad (2.29)$$

Por conveniência, escrevemos $p' = p$.

Como $|x_0 - \frac{p}{n_k}| = \frac{1}{n_k} |n_k x_0 - p|$, pela definição de distância diofantina, temos

$$|n_k x_0 - p| \leq \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad \theta_{n_k} \leq \frac{1}{2n_k}.$$

É sabido que $\frac{|\sin(\pi x)|}{2} \geq |x|$, para $|x| \leq \frac{1}{2}$. Assim

$$|n_k x_0 - p| \leq \frac{|\sin(n_k \pi x_0 - \pi p)|}{2}.$$

Logo, substituindo a estimativa acima em (2.29) e usando que $|\sin(n_k \pi x_0 - \pi p)| = |\sin(n_k \pi x_0)|$, temos

$$\theta_{n_k} = \frac{1}{n_k} |n_k x_0 - p| \leq \frac{1}{2n_k} |\sin(n_k \pi x_0)|.$$

Por (2.28), obtemos

$$0 \leq \theta_{n_k} \leq \frac{1}{2n_k} e^{-n_k^2 \pi^2 (T+\delta)} \leq e^{-n_k^2 \pi^2 (T+\delta)}, \quad (2.30)$$

e

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \theta_{n_k} = 0.$$

Aplicando as propriedades da função logaritmo natural em ambos os lados da desigualdade (2.30):

$$\ln(\theta_{n_k}) \leq \ln(e^{-n_k^2 \pi^2 (T+\delta)}) = -n_k^2 \pi^2 (T+\delta),$$

em que

$$n_k^2 \pi^2 (T+\delta) = -\ln(\theta_{n_k})$$

e, portanto,

$$n_k^2 \leq \frac{-\ln(\theta_{n_k})}{\pi^2 (T+\delta)}. \quad (2.31)$$

Seja agora $\varepsilon_k = \theta_{n_k}$. Assim, $\varepsilon_k \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow \infty$.

No que segue, estimamos $C(T, \varepsilon_k)$.

Considere u solução do sistema adjunto (2.4) com dado inicial $u_0(x) = \sqrt{2} \sin(n_k \pi x)$, cuja solução é

$$u(x, t) = \sqrt{2} e^{-n_k^2 \pi^2 (T-t)} \sin(n_k \pi x).$$

Como

$$\|u(\cdot, 0)\|_{L^2(0,1)}^2 = \int_0^1 2e^{-2n_k^2 \pi^2 T} \sin^2(n_k \pi x) dx = e^{-2n_k^2 \pi^2 T}$$

então

$$C(T, \varepsilon_k) \leq \frac{\sqrt{2}}{e^{-n_k^2 \pi^2 T}} \left(\int_0^T \int_{x_0 - \varepsilon_k}^{x_0 + \varepsilon_k} e^{-2n_k^2 \pi^2 (T-t)} \sin^2(n_k \pi x) dx dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Assim

$$C(T, \varepsilon_k)^2 \leq \frac{e^{2n_k^2 \pi^2 T} - 1}{n_k^2 \pi^2} \left| \int_{x_0 - \varepsilon_k}^{x_0 + \varepsilon_k} \sin^2(n_k \pi x) dx \right|. \quad (2.32)$$

Uma vez que $\varepsilon_k = \theta_{n_k} = |x_0 - \frac{p}{n_k}|$, então

$$x_0 - \frac{p}{n_k} = \pm \varepsilon_k.$$

Temos:

- Se $\theta_{n_k} = x_0 - \frac{p}{n_k} = \varepsilon_k$.

$$\int_{x_0 - \varepsilon_k}^{x_0 + \varepsilon_k} \sin^2(n_k \pi x) dx = \int_{\frac{p}{n_k}}^{x_0 + \theta_{n_k}} \sin^2(n_k \pi x) dx.$$

- Se $x_0 - \frac{p}{n_k} = -\varepsilon_k$.

$$\int_{x_0 - \varepsilon_k}^{x_0 + \varepsilon_k} \sin^2(n_k \pi x) dx = - \int_{\frac{p}{n_k}}^{x_0 - \theta_{n_k}} \sin^2(n_k \pi x) dx.$$

Logo, em ambos os casos vale a estimativa

$$\left| \int_{x_0 - \varepsilon_k}^{x_0 + \varepsilon_k} \sin^2(n_k \pi x) dx \right| \leq \left| \int_{\frac{p}{n_k}}^{x_0 + \theta_{n_k}} \sin^2(n_k \pi x) dx \right|,$$

e, portanto, temos

$$C(T, \varepsilon_k)^2 \leq \frac{e^{2n_k^2 \pi^2 T} - 1}{2n_k^2 \pi^2} \left| \int_{\frac{p}{n_k}}^{x_0 + \theta_{n_k}} \sin^2(n_k \pi x) dx \right|. \quad (2.33)$$

Fazendo $y(x) = n_k x$, temos $dx = \frac{1}{n_k} dy$ e

$$y\left(\frac{p}{n_k}\right) = p \quad \text{e} \quad y(x_0 + \theta_{n_k}) = n_k(x_0 + \theta_{n_k})$$

e, substituindo na integral acima, obtemos

$$\int_{\frac{p}{n_k}}^{x_0 + \theta_{n_k}} \sin^2(n_k \pi x) dx = \frac{1}{n_k} \int_p^{n_k(x_0 + \theta_{n_k})} \sin^2(\pi y) dy. \quad (2.34)$$

De modo análogo à análise anterior:

- Se $\theta_{n_k} = x_0 - \frac{p}{n_k}$, então $n_k x_0 = n_k \theta_{n_k} - p$ e

$$\int_p^{n_k(x_0 + \theta_{n_k})} \sin^2(\pi y) dy = \int_p^{2n_k \theta_{n_k} + p} \sin^2(\pi y) dy = \int_0^{2n_k \theta_{n_k}} \sin^2(\pi y) dy.$$

- Se $\theta_{n_k} = -x_0 + \frac{p}{n_k}$, então $n_k x_0 = p - n_k \theta_{n_k}$, e

$$\int_p^{n_k(x_0 + \theta_{n_k})} \sin^2(\pi y) dy = \int_p^{p - n_k \theta_{n_k} + n_k \theta_{n_k}} \sin^2(\pi y) dy = \int_p^p \sin^2(\pi y) dy = 0.$$

Logo, segue que

$$\left| \int_p^{n_k(x_0 + \theta_{n_k})} \sin^2(\pi y) dy \right| \leq \int_0^{2n_k \theta_{n_k}} \sin^2(\pi y) dy,$$

e, consequentemente,

$$\left| \int_{x_0 - \varepsilon_k}^{x_0 + \varepsilon_k} \sin^2(n_k \pi x) dx \right| \leq \frac{1}{n_k} \int_0^{2n_k \theta_{n_k}} \sin^2(\pi y) dy. \quad (2.35)$$

Combinando (2.35) e (2.32), temos

$$C(T, \varepsilon_k)^2 \leq \left(\frac{e^{2n_k^2 \pi^2 T} - 1}{2n_k^3 \pi^2} \right) \int_0^{2n_k \theta_{n_k}} \sin^2(\pi y) dy. \quad (2.36)$$

Como $|\sin(x)| \leq |x|$ para todo x , então

$$\int_0^{2n_k \theta_{n_k}} \sin^2(\pi y) dy \leq \int_0^{2n_k \theta_{n_k}} |\pi y|^2 dy = \frac{\pi^2 (2n_k \theta_{n_k})^3}{3}.$$

Substituindo em (2.36), obtemos

$$\begin{aligned} C(T, \varepsilon_k)^2 &\leq \left(\frac{e^{2n_k^2 \pi^2 T} - 1}{2n_k^3 \pi^2} \right) \left(\frac{\pi^2 (2n_k \theta_{n_k})^3}{3} \right) \\ &\leq \frac{4}{3} (e^{2n_k^2 \pi^2 T} \theta_{n_k}^3), \end{aligned}$$

pois $\theta_{n_k} \geq 0$.

Por (2.31), $n_k^2 \leq \frac{-\ln(\theta_{n_k})}{\pi^2(T+\delta)}$. Assim

$$\begin{aligned} e^{2n_k^2 \pi^2 T} &\leq e^{2\pi^2 T \left(\frac{-\ln(\theta_{n_k})}{\pi^2(T+\delta)} \right)} \\ &= \theta_{n_k}^{\frac{-2T}{T+\delta}}. \end{aligned}$$

Deste modo, temos a estimativa

$$C(T, \varepsilon_k)^2 \leq \frac{4}{3} \theta_{n_k}^3 \theta_{n_k}^{\frac{-2T}{T+\delta}} = \frac{4}{3} \varepsilon_k^{3 - \frac{2T}{T+\delta}},$$

pois $\theta_{n_k} = \varepsilon_k$. Equivalentemente

$$C(T, \varepsilon_k) \leq \sqrt{\frac{4}{3}} \left(\varepsilon_k^{3 - \frac{2T}{T+\delta}} \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{4}{3}} \varepsilon_k^{\frac{3}{2} - \frac{T}{T+\delta}}. \quad (2.37)$$

Agora, notando que

$$\frac{3}{2} - \frac{T}{T+\delta} = \frac{1}{2} + \frac{\delta}{T+\delta},$$

a desigualdade (2.37) implica

$$C(T, \varepsilon_k) \leq \sqrt{\frac{4}{3}} \varepsilon_k^{\frac{1}{2} + \frac{\delta}{T+\delta}}.$$

Por fim, tomando $c_1 = \sqrt{\frac{4}{3}}$ e $c_2 = \frac{1}{2} + \frac{\delta}{T+\delta}$, na qual claramente $c_2 > \frac{1}{2}$, concluimos que

$$C(T, \varepsilon_k) \leq c_1 \varepsilon_k^{c_2}.$$

Isto finaliza a prova do item b), e a prova do teorema está completa. $\square$

O próximo teorema nos diz o que acontece com a norma do controle de norma mínima em $L^2(\omega_\varepsilon \times (0, T))$ no caso em que $T \leq T_0(x_0)$. Em outras palavras, dado $y_0 \in L^2(0, 1)$ para o qual a equação (2.2) não é controlável pontualmente no ponto $x_0 \in (0, 1)$ no tempo T , mostraremos que a norma do controle de norma mínima em $L^2(\omega_\varepsilon \times (0, T))$, que leva y_0 a zero no tempo T , diverge na ordem de ε^β , com $\beta < -\frac{1}{2}$.

Teorema 2.6. *Sejam $T > 0$, $x_0 \in (0, 1)$ e $T \leq T_0(x_0)$. Suponha que a equação do calor (2.2) com dado inicial $y_0 \in L^2(0, 1)$ não é controlável a zero no tempo T no ponto x_0 . Então, o controle f_ε de norma mínima em $L^2(\omega_\varepsilon \times (0, T))$ que leva o dado inicial y_0 a zero no tempo T , satisfaz*

$$\varepsilon^{\frac{1}{2}} \|f_\varepsilon\|_{L^2(\omega_\varepsilon \times (0, T))} \rightarrow \infty.$$

Demonstração: Considere a equação do calor unidimensional

$$\begin{cases} y_t - y_{xx} = f(t)\delta_{x_0}, & (x, t) \in (0, 1) \times (0, T) \\ y(0, t) = y(1, t) = 0, & t \in (0, T) \\ y(x, 0) = y_0, & x \in (0, 1), \end{cases} \quad (2.38)$$

que por hipótese não é controlável a zero no tempo T no ponto x_0 .

Agora, seja

$$\begin{cases} \bar{y}_t - \bar{y}_{xx} = f_\varepsilon 1_{\omega_\varepsilon}, & (x, t) \in (0, 1) \times (0, T) \\ \bar{y}(0, t) = \bar{y}(1, t) = 0, & t \in (0, T) \\ \bar{y}(x, 0) = y_0, & x \in (0, 1), \end{cases} \quad (2.39)$$

em que $f_\varepsilon = f_\varepsilon(x, t)$ é o controle de norma mínima em $L^2(\omega_\varepsilon \times (0, T))$ tal que

$$\bar{y}(x, T) = 0, \quad \forall x \in (0, 1).$$

Suponhamos por contradição que existe $C > 0$ e uma sequência $\{\varepsilon_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ com $\varepsilon_j \rightarrow 0$, que satisfaz

$$\varepsilon_j^{\frac{1}{2}} \|f_{\varepsilon_j}\|_{L^2} \leq C. \quad (2.40)$$

Mostremos que, nessas condições, o sistema (2.38) é pontualmente controlável com controle $f = f(t) \in L^2(0, T)$.

Por conveniência, omitiremos o índice j da sequência $\{\varepsilon_j\}$.

Seja $\delta > 0$ tal que $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset (0, 1)$ e $0 < \varepsilon < \delta$. Para $x \in (-\delta, \delta)$ e quase todo $t \in (0, T)$ considere

$$\varphi_\varepsilon(x, t) = \varepsilon f_\varepsilon(x_0 + \frac{\varepsilon}{\delta}x, t),$$

em que $\varphi_\varepsilon \in L^2((-\delta, \delta) \times (0, T))$.

Assim

$$\|\varphi_\varepsilon(x, t)\|_{L^2((-\delta, \delta) \times (0, T))}^2 = \int_0^T \int_{-\delta}^\delta \varepsilon^2 |f_\varepsilon(x_0 + \frac{\varepsilon}{\delta}x, t)|^2 dx dt. \quad (2.41)$$

Fazendo a mudança de variável $x'(x) = x_0 + \frac{\varepsilon}{\delta}x$, temos que

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{-\delta}^\delta \varepsilon^2 |f_\varepsilon(x_0 + \frac{\varepsilon}{\delta}x, t)|^2 dx dt &= \int_0^T \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} \delta \varepsilon |f_\varepsilon(x', t)|^2 dx' dt \\ &= \delta \varepsilon \int_0^T \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} |f_\varepsilon(x', t)|^2 dx' dt, \end{aligned}$$

na qual

$$\|\varphi_\varepsilon\|_{L^2((-\delta, \delta) \times (0, T))}^2 = \delta \varepsilon \|f_\varepsilon\|_{L^2(\omega_\varepsilon \times (0, T))}^2.$$

Por (2.40), voltando a ε_j , segue que

$$\|\varphi_{\varepsilon_j}\|_{L^2((-\delta, \delta) \times (0, T))}^2 \leq C\delta, \quad (2.42)$$

em que C e δ não dependem de ε_j .

Portanto, existe $\varphi \in L^2((-\delta, \delta) \times (0, T))$, tal que

$$\varphi_{\varepsilon_j} \rightharpoonup \varphi \quad \text{em } L^2((-\delta, \delta) \times (0, T)).$$

Agora, para quase todo $t \in (0, T)$ defina

$$f(t) = \frac{1}{\delta} \int_{-\delta}^{\delta} \varphi(x, t) dx, \quad (2.43)$$

que satisfaz $f \in L^2(0, T)$.

Mostremos que $f(t)$, definido em (2.43), é um controle aplicado no ponto x_0 que leva a solução do sistema (2.38) a zero no tempo T . O que é uma contradição.

Multiplicando o sistema (2.38) por $u = u(x, t)$ solução do sistema adjunto (2.4) e integrando por partes em $(0, 1) \times (0, T)$, obtemos a seguinte condição de optimalidade

$$\langle y(\cdot, T), u_T \rangle_{L^2(0,1)} - \langle y_0, u(\cdot, 0) \rangle_{L^2(0,1)} = \int_0^T f(t) u(x_0, t) dt, \quad (2.44)$$

noa qual δ_{x_0} é o delta de Dirac.

Por outro lado, multiplicando o sistema (2.39) por $u = u(x, t)$ solução do sistema adjunto (2.4) e integrando por partes em $(0, 1) \times (0, T)$, temos a seguinte condição de optimalidade

$$- \langle y_0, u(\cdot, 0) \rangle_{L^2(0,1)} = \int_0^T \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} f_\varepsilon(x, t) u(x, t) dx dt. \quad (2.45)$$

A demonstração do teorema segue da seguinte afirmação.

Afirmção 2.1. *Quando $\varepsilon \rightarrow 0$, temos*

$$\int_0^T \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} f_\varepsilon(x, t) u(x, t) dx dt \rightarrow \int_0^T f(t) u(x_0, t) dt.$$

De fato, se a Afirmção 2.1 for verdadeira, teremos que

$$- \langle y_0, u(\cdot, 0) \rangle_{L^2(0,1)} = \int_0^T f(t) u(x_0, t) dt.$$

Desta forma, pela condição de optimalidade (2.44), concluímos que

$$\langle y(\cdot, T), u_T \rangle_{L^2(0,1)} = 0, \quad \forall u_T \in L^2(0, 1)$$

e conseqüentemente

$$y(x, T) = 0, \quad \forall x \in (0, 1). \quad (2.46)$$

Assim, se a Afirmação 2.1 for verdadeira, segue que $f(t)\delta_{x_0}$ é um controle aplicado no ponto x_0 que leva a solução do sistema (2.38) a zero no tempo T . O que é uma contradição, pois estamos assumindo que a equação (2.38) com dado inicial $y_0 \in L^2(0, 1)$ não é controlável a zero no tempo T no ponto x_0 . A contradição veio do fato de considerarmos $\varepsilon^{\frac{1}{2}} \|f_\varepsilon\|_{L^2(\omega_\varepsilon \times (0, T))}$ limitado.

Prova da afirmação 2.1. Lembramos que $0 < \varepsilon < \delta$ e que

$$\varphi_\varepsilon(x, t) = \varepsilon f_\varepsilon(x_0 + \frac{\varepsilon}{\delta}x, t), \quad \forall (x, t) \in (-\delta, \delta) \times (0, T).$$

Assim, é fácil ver que

$$\int_0^T \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} f_\varepsilon(x, t) u(x, t) dx dt = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^T \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} \varphi_\varepsilon\left(\frac{\delta}{\varepsilon}(x - x_0), t\right) u(x, t) dx dt.$$

Agora, fazendo a mudança de variável $y(x) = \frac{\delta}{\varepsilon}(x - x_0)$, a integral do lado direito fica

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_0^T \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} \varphi_\varepsilon\left(\frac{\delta}{\varepsilon}(x - x_0), t\right) u(x, t) dx dt = \frac{1}{\delta} \int_0^T \int_{-\delta}^{\delta} \varphi_\varepsilon(y, t) u(x_0 + \frac{\varepsilon}{\delta}y, t) dy dt. \quad (2.47)$$

Escrevendo

$$\begin{aligned} \frac{1}{\delta} \int_0^T \int_{-\delta}^{\delta} \varphi_\varepsilon(y, t) u(x_0 + \frac{\varepsilon}{\delta}y, t) dy dt &= \frac{1}{\delta} \int_0^T \int_{-\delta}^{\delta} \varphi_\varepsilon(y, t) u(x_0, t) dy dt \\ &+ \frac{1}{\delta} \int_0^T \int_{-\delta}^{\delta} \varphi_\varepsilon(y, t) [u(x_0 + \frac{\varepsilon}{\delta}y, t) - u(x_0, t)] dy dt \end{aligned}$$

e tomando

$$A(\varepsilon) = \frac{1}{\delta} \int_0^T \int_{-\delta}^{\delta} \varphi_\varepsilon(y, t) u(x_0, t) dy dt,$$

$$B(\varepsilon) = \frac{1}{\delta} \int_0^T \int_{-\delta}^{\delta} \varphi_\varepsilon(y, t) [u(x_0 + \frac{\varepsilon}{\delta}y, t) - u(x_0, t)] dy dt,$$

vemos que

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_0^T \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} \varphi_\varepsilon\left(\frac{\delta}{\varepsilon}(x - x_0), t\right) u(x, t) dx dt = A(\varepsilon) + B(\varepsilon). \quad (2.48)$$

Por conveniência, nas integrais $A(\varepsilon)$ e $B(\varepsilon)$, usaremos a variável x ao invés de y .

Para a integral de $A(\varepsilon)$, usamos que $\varphi_\varepsilon \rightharpoonup \varphi$ em $L^2((-\delta, \delta) \times (0, T))$, quando $\varepsilon \rightarrow 0$,

temos que

$$\begin{aligned}
 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} A(\varepsilon) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\delta} \int_0^T \int_{-\delta}^{\delta} \varphi_{\varepsilon}(x, t) u(x_0, t) dx dt \\
 &= \frac{1}{\delta} \int_0^T \int_{-\delta}^{\delta} \varphi(x, t) u(x_0, t) dx dt \\
 &= \int_0^T u(x_0, t) \frac{1}{\delta} \int_{-\delta}^{\delta} \varphi(x, t) dx dt \\
 &= \int_0^T f(t) u(x_0, t) dt.
 \end{aligned}$$

Agora, mostremos que $B(\varepsilon) \rightarrow 0$, quando $\varepsilon \rightarrow 0$.

Note que

$$B^2(\varepsilon) = \left(\frac{1}{\delta} \int_0^T \int_{-\delta}^{\delta} \varphi_{\varepsilon}(x, t) [u(x_0 + \frac{\varepsilon}{\delta}x, t) - u(x_0, t)] dx dt \right)^2.$$

Pela Desigualdade de Cauchy-Schwarz:

$$B^2(\varepsilon) \leq \left(\frac{1}{\delta} \int_0^T \int_{-\delta}^{\delta} |\varphi_{\varepsilon}(x, t)|^2 dx dt \right) \left(\frac{1}{\delta} \int_0^T \int_{-\delta}^{\delta} |u(x_0 + \frac{\varepsilon}{\delta}x, t) - u(x_0, t)|^2 dx dt \right).$$

Além disso, por (2.42):

$$\frac{1}{\delta} \int_0^T \int_{-\delta}^{\delta} |\varphi_{\varepsilon}(x, t)|^2 dx dt = \frac{1}{\delta} \|\varphi_{\varepsilon}\|_{L^2((-\delta, \delta) \times (0, T))}^2 \leq C.$$

Logo

$$B^2(\varepsilon) \leq \frac{C}{\delta} \left(\int_0^T \int_{-\delta}^{\delta} |u(x_0 + \frac{\varepsilon}{\delta}x, t) - u(x_0, t)|^2 dx dt \right). \quad (2.49)$$

Por fim, é suficiente mostrar que

$$\int_0^T \int_{-\delta}^{\delta} |u(x_0 + \frac{\varepsilon}{\delta}x, t) - u(x_0, t)|^2 dx dt \rightarrow 0, \quad \text{quando } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (2.50)$$

Antes disso, lembremos que podemos escrever a solução do sistema adjunto (2.4), como uma série absolutamente convergente, dada por

$$u(x, t) = \sum a_n \sin(n\pi x) e^{-n^2\pi^2(T-t)}. \quad (2.51)$$

Fazendo a mudança de variável $z = \frac{\varepsilon}{\delta}x$, a integral em (2.50) fica

$$\int_0^T \int_{-\delta}^{\delta} |u(x_0 + \frac{\varepsilon}{\delta}x, t) - u(x_0, t)|^2 dx dt = \frac{\delta}{\varepsilon} \int_0^T \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} |u(x_0 + z, t) - u(x_0, t)|^2 dz dt.$$

Usando que

$$\begin{aligned} |u(x_0 + z, t) - u(x_0, t)| &\leq |u(x_0 + z, t)| + |u(x_0, t)| \\ &= 2\|u\|_{L^\infty((0,1) \times (0,T))}, \end{aligned}$$

temos

$$\int_0^T \int_{-\delta}^{\delta} |u(x_0 + \frac{\varepsilon}{\delta}x, t) - u(x_0, t)|^2 dx dt \leq \frac{\delta 2\|u\|_{L^\infty}}{\varepsilon} \int_0^T \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} |u(x_0 + z, t) - u(x_0, t)| dz dt. \quad (2.52)$$

Agora, notando que

$$|u(x_0 + z, t) - u(x_0, t)| \leq \sum |a_n| e^{-n^2\pi^2(T-t)} |\sin(n\pi(x_0 + z)) - \sin(n\pi x_0)|,$$

e que

$$|\sin(n\pi(x_0 + z)) - \sin(n\pi x_0)| \leq |n\pi(x_0 + z) - n\pi x_0| = n\pi z,$$

temos

$$|u(x_0 + z, t) - u(x_0, t)| \leq \sum |a_n| e^{-n^2\pi^2(T-t)} n\pi z. \quad (2.53)$$

Estimando (2.52) por (2.53), obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{-\delta}^{\delta} |u(x_0 + \frac{\varepsilon}{\delta}x, t) - u(x_0, t)|^2 dx dt &\leq \frac{\delta 2\|u\|_{L^\infty}}{\varepsilon} \int_0^T \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \sum |a_n| n\pi z e^{-n^2\pi^2(T-t)} dz dt \\ &= \frac{\delta 2\|u\|_{L^\infty}}{\varepsilon} \int_0^T \sum \varepsilon^2 |a_n| n\pi e^{-n^2\pi^2(T-t)} dt \end{aligned}$$

e, portanto,

$$\int_0^T \int_{-\delta}^{\delta} |u(x_0 + \frac{\varepsilon}{\delta}x, t) - u(x_0, t)|^2 dx dt \leq 2\delta\varepsilon\|u\|_{L^\infty} \int_0^T \sum |a_n| n\pi e^{-n^2\pi^2(T-t)} dt. \quad (2.54)$$

Assim, combinando (2.49) e (2.54), obtemos a seguinte estimativa para $B^2(\varepsilon)$:

$$B^2(\varepsilon) \leq 2C\varepsilon\|u\|_{L^\infty} \int_0^T \sum |a_n| n\pi e^{-n^2\pi^2(T-t)} dt. \quad (2.55)$$

A série $\sum |a_n| n\pi e^{-n^2\pi^2(T-t)}$ converge, pois podemos fazer $n\pi|a_n| \leq e^{n^2\pi^2(T-t)}$ para n suficientemente grande, logo o termo

$$2C\|u\|_{L^\infty} \int_0^T \sum |a_n| n\pi e^{-n^2\pi^2(T-t)} dt$$

é limitado independentemente de ε .

Dessa forma, fazendo $\varepsilon \rightarrow 0$, concluímos que

$$B(\varepsilon) \rightarrow 0.$$

Assim, de (2.48), vemos que

$$\int_0^T \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} f_\varepsilon(x, t) u(x, t) dx dt \rightarrow \int_0^T f(t) u(x_0, t) dt, \quad \text{quando } \varepsilon \rightarrow 0, \quad (2.56)$$

o que prova a afirmação. $\square$

Isto conclui a demonstração do Teorema 2.6. $\blacksquare$

Observação 2.2. *Se existir uma sequência de controles $h_\varepsilon \in L^2(\omega_\varepsilon \times (0, T))$ tal que*

$$\varepsilon^{\frac{1}{2}} \|h_\varepsilon\|_{L^2(\omega_\varepsilon \times (0, T))} \rightarrow \infty,$$

não podemos concluir, a priori, que a sequência de controles de norma mínima em $L^2(\omega_\varepsilon \times (0, T))$ satisfaz

$$\varepsilon^{\frac{1}{2}} \|f_\varepsilon\|_{L^2(\omega_\varepsilon \times (0, T))} \rightarrow \infty.$$

De fato, como

$$\|f_\varepsilon\|_{L^2(\omega_\varepsilon \times (0, T))} \leq \|h_\varepsilon\|_{L^2(\omega_\varepsilon \times (0, T))},$$

somente podemos concluir que

$$\varepsilon^{\frac{1}{2}} \|h_\varepsilon\|_{L^2(\omega_\varepsilon \times (0, T))} \rightarrow \infty.$$

2.3 Demonstração do Teorema 2.2

A demonstração do Teorema 2.2 usa argumentos semelhantes aos da demonstração do Teorema 2.6. Por isso, daremos a ideia da prova.

Demonstração do Teorema 2.2. Sejam $0 < \varepsilon < \delta$ e $f_\varepsilon \in L^2(\omega_\varepsilon \times (0, T))$ um controle que leva a solução do sistema (2.1), com dado inicial $y_0 \in L^2(0, 1)$, a zero no tempo T (f_ε não precisa ser um controle de norma mínima em $L^2(\omega_\varepsilon \times (0, T))$).

Suponha que existe $C > 0$, independente de ε , tal que

$$\varepsilon^{\frac{1}{2}} \|f_\varepsilon\|_{L^2(\omega_\varepsilon \times (0, T))} \leq C. \quad (2.57)$$

Defina

$$\varphi_\varepsilon(x, t) = \varepsilon f_\varepsilon\left(x_0 + \frac{\varepsilon}{\delta}x, t\right) \in L^2((-\delta, \delta) \times (0, T)).$$

Assim, por (2.57), é fácil ver que existe $C > 0$ tal que

$$\|\varphi_\varepsilon\|_{L^2((-\delta,\delta)\times(0,T))}^2 \leq C\delta,$$

na qual C não depende de ε nem de x_0 .

Logo, existe $\varphi \in L^2((-\delta,\delta) \times (0,T))$ tal que

$$\varphi_\varepsilon \rightharpoonup \varphi, \quad \text{quando } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Considere

$$f(t) = \frac{1}{\delta} \int_{-\delta}^{\delta} \varphi(x,t) dx \in L^2(0,T).$$

Usando os mesmos argumentos do Teorema 2.6, vemos que $f(t)$ é um controle pontual que leva a solução do sistema (2.2), com dado inicial $y_0 \in L^2(0,1)$, a zero no tempo T no ponto x_0 . $\square$

Observação 2.3. *Pelo Teorema 2.3, se $T > T_0(x_0)$, existem constantes $C_1, C_2 > 0$ (que dependem apenas do tempo T) tal que*

$$C_1 \varepsilon^{\frac{1}{2}} \leq C(T, \varepsilon) \leq C_2 \varepsilon^{\frac{1}{2}}.$$

Em particular

$$\frac{1}{C(T, \varepsilon)} \leq C \varepsilon^{-\frac{1}{2}}. \quad (2.58)$$

Lembrando que o controle $f_\varepsilon = f_\varepsilon(x,t)$ de norma mínima em $L^2(\omega_\varepsilon \times (0,T))$ satisfaz

$$\|f_\varepsilon\|_{L^2(\omega_\varepsilon \times (0,T))} \leq \frac{1}{C(T, \varepsilon)} \|y_0\|_{L^2(0,1)}, \quad (2.59)$$

e combinando (2.58) e (2.59), obtemos

$$\varepsilon^{\frac{1}{2}} \|f_\varepsilon\|_{L^2(\omega_\varepsilon \times (0,T))} \leq C$$

e, conseqüentemente, a quantidade $\varepsilon^{\frac{1}{2}} \|f_\varepsilon\|_{L^2(\omega_\varepsilon \times (0,T))}$ é uniformemente limitada.

Portanto, o Teorema 2.2 se aplica neste caso.

Apêndice A

Resultados Auxiliares

Neste capítulo, apresentamos alguns resultados que foram utilizados na presente dissertação.

A.1 Análise Funcional

Definição A.1 (Operador linear limitado). *Sejam X e Y espaços normados e $T : \mathcal{D}(T) \rightarrow Y$ um operador linear, em que $\mathcal{D}(T) \subset X$. Se existir um número real c tal que*

$$\|Tx\|_Y \leq c\|x\|_X, \quad \forall x \in \mathcal{D}(T), \quad (\text{A.1})$$

dizemos que o operador T é limitado

Observação A.1. *Podemos nos perguntar qual é o menor valor que a constante c pode assumir para que A.1 seja válida para todo $x \neq 0$ com $x \in \mathcal{D}(T)$.*

Como

$$\frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X} \leq c, \quad x \neq 0$$

vemos que o menor valor da constante c é dado pelo supremo da expressão do lado esquerdo, calculado sobre $\mathcal{D}(T) - \{0\}$. Este valor será denotado por $\|T\|$.

Definição A.2 (Norma de um Operador Linear). *Sejam X e Y espaços normados e $T : \mathcal{D}(T) \rightarrow Y$ um operador linear, em que $\mathcal{D}(T) \subset X$. A norma do operador linear T é definido por*

$$\|T\| = \sup_{x \in \mathcal{D}(T), x \neq 0} \frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X}. \quad (\text{A.2})$$

Da definição, segue que

$$\|Tx\|_Y \leq \|T\|\|x\|_X.$$

Teorema A.1. *Seja $T : \mathcal{D}(T) \rightarrow Y$ um operador linear, com $\mathcal{D}(T) \subset X$ com X e Y espaços normados. Então T é contínuo se, e somente se, T é limitado.*

Demonstração: Ver ([11], pág. 97). ■

Observação A.2. *No caso de um operador $T : X \rightarrow Y$ com X um espaço de Hilbert, se $\{e_n\}$ é uma base de X , então o operador T é limitado se, e somente se, existe $c > 0$ tal que*

$$\|T(e_n)\|_Y \leq c\|e_n\|_X, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

A.2 Aproximações do tipo Müntz–Szász

O Teorema de Müntz–Szász é um resultado de teoria da aproximação que pode ser visto como uma generalização do Teorema da aproximação de Weierstrass. Este resultado relaciona a densidade de um certo subconjunto do espaço $C[a, b]$ ou $L^p(a, b)$ com a divergência de uma série apropriada.

Teorema A.2 (Müntz–Szász). *Sejam $0 \leq a < b < \infty$ e $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de números complexos distintos satisfazendo*

$$|\operatorname{Re}(\lambda_n)| > \delta|\lambda_n|, \quad \text{para } n \gg 1.$$

Então

$$\sum \frac{1}{|\lambda_n|} = \infty \iff \overline{\operatorname{span}\{z^{\lambda_n}\}} = L^p(a, b), \quad 1 \leq p < \infty.$$

A prova deste teorema pode ser encontrado em [13, pág. 30].

Seguindo o exposto em [13], consideremos o problema de determinar a distância d_n entre z^{λ_n} e $\overline{\operatorname{span}\{z^{\lambda_k}; k \neq n\}}$ no espaço $L^p(a, b)$. Sob hipóteses adequadas na sequência $\{\lambda_n\}$, temos uma estimativa inferior assintótica para d_n .

Assuma que $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência distinta de números complexos satisfazendo:

1.

$$\sum_n \frac{1}{|\lambda_n|} < \infty; \tag{A.3}$$

2. Existe $\varrho > 0$ satisfazendo

$$|\lambda_n - \lambda_m| > \varrho|n - m|, \quad m, n = 1, 2, \dots; \tag{A.4}$$

3. Existe $\delta > 0$ tal que, para n suficientemente grande

$$|\operatorname{Re}(\lambda_n)| > \delta|\lambda_n|. \tag{A.5}$$

Definição A.3. *Sejam $0 \leq a < b < \infty$ e $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência distinta de números complexos satisfazendo (A.3), (A.4) e (A.5). Em $L^p(a, b)$, definimos*

$$d_n := \text{dist} \left(z^{\lambda_n}, \overline{\text{span}\{z^{\lambda_k}; k \neq n\}} \right).$$

Temos a seguinte estimativa assintótica para a distância d_n .

Lema A.3. *Seja $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência distinta de números complexos, satisfazendo (A.3), (A.4) e (A.5).*

Para todo $\varepsilon > 0$, vale

$$\frac{1}{d_n} \leq e^{2\varepsilon \text{Re}(\lambda_n)}, \quad \text{quando } n \rightarrow \infty.$$

O seguinte resultado nos dá uma estimativa para os coeficientes de um elemento pertencente a $\overline{\text{span}\{z^{\lambda_k}\}}$.

Lema A.4. *Seja $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência distinta de números complexos satisfazendo (A.3), (A.4) e (A.5).*

Considere $p(z) \in L^p(a, b)$ ($1 \leq p < \infty$) uma soma finita dada por

$$p(z) = \sum a_n z^{\lambda_n}.$$

Então

$$|a_n| \leq \frac{1}{d_n} \|p\|_{L^p(a, b)}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (\text{A.6})$$

Prova: Ver [13, pág. 34]. □

Observação A.3. *Caso a série $p(z) = \sum a_n z^{\lambda_n}$ seja infinita e convirja em $L^p(a, b)$, a desigualdade (A.6) ainda é satisfeita.*

A.3 Aproximações diofantinas

A teoria de aproximações diofantinas é uma ferramenta poderosa no estudo da aproximação de números reais por números racionais.

A seguir, apresentamos alguns resultados básicos de aproximações diofantinas que foram utilizados durante este trabalho. Para um bom entendimento desta teoria, recomendamos o livro [3].

Definição A.4 (Distância diofantina). *Seja $\theta \in \mathbb{R}$. Definimos a distância diofantina como sendo*

$$\|\theta\|_D = \inf_{p \in \mathbb{Z}} |\theta - p|.$$

Observação A.4. *A distância diofantina calcula a distância entre θ e o inteiro mais próximo.*

Listamos algumas propriedades a respeito da definição acima.

1. $\|\theta\|_D \geq 0$ e $\|\theta\|_D = 0$ se, e somente se, $\theta \in \mathbb{Z}$;
2. $\|\theta\|_D \leq \frac{1}{2}$;
3. $\|\theta_1 + \theta_2\|_D \leq \|\theta_1\|_D + \|\theta_2\|_D$;
4. $\|n\theta\|_D \leq |n|\|\theta\|_D$, para todo $n \in \mathbb{Z}$;
5. $\|\theta\|_D = \|\theta - a\|_D = \|\theta + a\|_D$, para todo $a \in \mathbb{Z}$.

Teorema A.5. *Sejam θ e $r \in \mathbb{R}$ com $r > 1$. Então, existe $q \in \mathbb{Z}$ tal que*

$$\|q\theta\|_D \leq \frac{1}{r}, \quad 0 < q < r. \quad (\text{A.7})$$

Demonstração: Ver [3, pág. 01] ■

O Teorema acima garante que a desigualdade $q\|q\theta\|_D < 1$ tem infinitas soluções $q > 1$ no caso em que θ é um número irracional.

Dado $\theta \in \mathbb{R}$, existe uma sequência $1 < q_1 < q_2 < \dots$ de números inteiros (que é finita se, e somente se, θ for racional) e uma sequência $p_1 < p_2 < \dots$ de números inteiros, tal que

$$\|q_n\theta\|_D = |q_n\theta - p_n|; \quad (\text{A.8})$$

$$\|q_{n+1}\theta\|_D < \|q_n\theta\|_D; \quad (\text{A.9})$$

$$\|q\theta\|_D \geq \|q_n\theta\|_D, \quad \text{para } 0 < q < q_{n+1}. \quad (\text{A.10})$$

As frações $\frac{p_n}{q_n}$ são ditas melhores aproximações de θ de ordem q_n .

Temos o seguinte resultado:

Lema A.6. *Sejam p_n e q_n sequências de números inteiros satisfazendo (A.8), (A.9) e (A.10). Temos:*

- a) *Se θ é racional, então $\theta = \frac{p_k}{q_k}$ para algum $k \in \mathbb{N}$.*
- b) *Se θ é irracional, então $\frac{p_n}{q_n} \rightarrow \theta$.*

Prova: Ver [3, pág. 03]. □

Lema A.7. *Sejam p_n e q_n satisfazendo as condições (A.8), (A.9) e (A.10). Então*

$$|q_{n+1}p_n - q_n p_{n+1}| = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Prova: Ver [3, pág. 03]. □

As seguintes desigualdades são válidas

$$\|q_n \theta\| \leq \frac{1}{q_{n+1}} \quad (\text{A.11})$$

e

$$\|q_n \theta\| > \frac{1}{2q_{n+1}}. \quad (\text{A.12})$$

Lema A.8. Para $n \geq 2$, existe um inteiro $a_n \in \mathbb{Z}$ tal que

$$p_{n+1} = a_n p_n + p_{n-1}; \quad (\text{A.13})$$

$$q_{n+1} = a_n q_n + q_{n-1}. \quad (\text{A.14})$$

Prova: Ver [3, pág. 04]. □

Teorema A.9 (Liouville). *Seja $\alpha \in \mathbb{R}$ um irracional algébrico de grau d , ou seja, α é raiz de um polinômio irredutível não-nulo de grau d . Então, existe uma constante $c(\alpha) > 0$ não-nula tal que*

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| > \frac{c(\alpha)}{q^d},$$

para todo $p, q \in \mathbb{Z}$ com $q > 0$.

Demonstração: Ver [17, pág. 118]. ■

Definição A.5 (Frações contínuas). *Sejam $\theta \in \mathbb{R}$ e $a_n \in \mathbb{N}$ com $a_n \neq 0$ para todo $n \geq 1$. Então:*

- Se θ é irracional

$$\theta := [a_0; a_1, a_2, \dots, a_n, \dots] = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{\ddots}}}}.$$

- Se θ é racional, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$\theta = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_k] = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_{k-1} + \frac{1}{a_k}}}}}.$$

Observação A.5. Se $\theta \in [0, 1]$, escrevemos

$$\theta = [a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots].$$

Lema A.10. Dados $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$, com representações em frações contínuas dadas por

$$\theta = [a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}, \dots] \quad e \quad \theta' = [a_1, a_2, \dots, a_n, b_{n+1}, b_{n+2}, \dots],$$

na qual ambas as expressões podem ser finitas ou não. Então

$$|\theta - \theta'| < \frac{1}{2^{n-2}}. \quad (\text{A.15})$$

Prova: Ver [3, pág. 07]. □

Provemos agora o Lema de Rolewicz, bastante útil para esta dissertação.

Lema A.11 (Rolewicz). Sejam $a \in [0, 1]$, $r > 1$ e $0 < \mu < \frac{1}{4}$.

Dado o conjunto

$$I = \{\vartheta \in [0, 1]; \ \|r\vartheta - a\|_D < \mu\}$$

tem-se

$$|I| < 8\mu,$$

em que $|I|$ é a medida de Lebesgue do conjunto I .

Prova: Construiremos um conjunto $\aleph$, cuja medida de Lebesgue é mais fácil de calcular, de modo que $I \subset \aleph$ e

$$|\aleph| < 8\mu.$$

Começamos notando que

$$\|r\vartheta - a\|_D < \mu \iff \inf_{z \in \mathbb{Z}} |(r\vartheta - a) - z| < \mu \iff \inf_{z \in \mathbb{Z}} |r\vartheta - (a + z)| < \mu. \quad (\text{A.16})$$

Note que, para cada $\vartheta \in [0, 1]$ existe $p = p(\vartheta) \in \mathbb{Z}$ tal que

$$\inf_{z \in \mathbb{Z}} |r\vartheta - (a + z)| = |r\vartheta - (a + p)|.$$

Também, é imediato que

$$|r\vartheta - (a + p)| < \mu \iff \vartheta \in \left(\frac{a + p - \mu}{r}, \frac{a + p + \mu}{r} \right) := E_p. \quad (\text{A.17})$$

Vejamos agora para quais $p \in \mathbb{Z}$ existe $\vartheta \in [0, 1]$ satisfazendo (A.17).

Afirmção A.1. Para todo $p \geq r + 1$ não existe $\vartheta \in [0, 1]$ satisfazendo (A.17).

Prova da afirmação. De fato, se $p \geq r + 1$ então

$$\frac{a + p - \mu}{r} \geq 1 + \frac{a + 1 - \mu}{r} > 1,$$

no qual segue que não existe $\vartheta \in [0, 1]$ satisfazendo (A.17). $\square$

Afirmação A.2. Para todo $p \leq -2$ não existe $\vartheta \in [0, 1]$ satisfazendo (A.17).

Prova da afirmação. De fato

$$\frac{a + p + \mu}{r} \leq \frac{a - 2 + \mu}{r} < 0,$$

no qual segue que não existe $\vartheta \in [0, 1]$ satisfazendo (A.17). $\square$

Deste modo, concluímos que

$$E_p \cap [0, 1] \neq \emptyset \iff p \in (-2, r + 1).$$

Vamos analisar dois casos.

1º Caso: $a < \mu$.

Neste caso, temos

$$E_{-1} \cap [0, 1] = \emptyset.$$

Considerando $\Lambda = \{p \in \mathbb{Z}; 0 \leq p < r + 1\}$ e

$$\aleph := \bigcup_{p \in \Lambda} E_p,$$

temos que

$$I \subset \aleph \quad \text{e} \quad |I| \leq |\aleph|.$$

Agora, note que

$$\begin{aligned} |\aleph| &= \left| \bigcup_{p \in \Lambda} E_p \right| \\ &\leq \sum_{p \in \Lambda} |E_p| \\ &= \#(\Lambda) \frac{2\mu}{r}, \end{aligned} \tag{A.18}$$

em que $\#(\Lambda)$ é a cardinalidade do conjunto Λ .

Também,

- Se $r \in \mathbb{Z}$, então $\#(\Lambda) = r + 1$.

- Se $r \notin \mathbb{Z}$, então $\#\Lambda = \lfloor r \rfloor + 2$. Isto segue de

$$\lfloor r \rfloor + 1 < r + 1,$$

em que $\lfloor r \rfloor$ é a parte inteira de r .

Assim, de (A.18), concluimos que

$$\begin{aligned} |\aleph| &\leq \frac{2(r+2)\mu}{r} \\ &= 2\mu + \frac{4\mu}{r} \\ &< 6\mu \\ &< 8\mu. \end{aligned}$$

2º Caso: $a \geq \mu$.

Neste caso

$$E_{-1} \cap [0, 1] \neq \emptyset.$$

Assim, considerando $\Lambda = \{p \in \mathbb{Z}; -1 \leq p < r + 1\}$ e

$$\aleph := \bigcup_{p \in \Lambda} E_p,$$

temos que

$$I \subset \aleph \quad \text{e} \quad |I| \leq |\aleph|.$$

É fácil ver que $\#(\Lambda) < r + 3$.

Assim

$$\begin{aligned} |\aleph| &\leq \frac{2(r+3)\mu}{r} \\ &= 2\mu + \frac{6\mu}{r} \\ &< 8\mu. \end{aligned}$$

Portanto, em ambos casos

$$|I| < 8\mu.$$

□

Lema A.12. *Para todo $x, \beta \in \mathbb{R}$ vale*

$$2\|x - \beta\|_D \leq |\sin \pi(x - \beta)| \leq \pi\|x - \beta\|_D.$$

Prova: Começamos lembrando que para todo $|x| < \frac{1}{2}$ vale

$$|\sin \pi x| \geq 2|x|.$$

Note também que

$$\begin{aligned} |\sin \pi(x - \beta)| &= |\sin[(\pi(x - \beta - n_0)) + \pi n_0]| \\ &= |\sin(\pi(x - \beta - n_0)) \cos(\pi n_0) + \sin(\pi n_0) \cos(\pi(x - \beta - n_0))|. \end{aligned}$$

Como $\sin(\pi n_0) = 0$ para todo $n_0 \in \mathbb{N}$ e $\cos(\pi n_0) = \pm 1$, temos que

$$\begin{aligned} |\sin \pi(x - \beta)| &= |\sin(\pi(x - \beta - n_0))| \\ &\geq 2|(x - \beta) - n_0| \\ &\geq 2 \inf_{n \in \mathbb{N}} |(x - \beta) - n| \\ &= 2\|x - \beta\|_D. \end{aligned}$$

Por outro lado, a seguinte desigualdade é válida para todo x

$$|\sin x| \leq |x|.$$

Logo, temos que

$$\begin{aligned} |\sin \pi(x - \beta)| &= |\sin \pi(x - \beta - n)| \\ &\leq |\pi(x - \beta - n)| \\ &= \pi|(x - \beta - n)|, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned} |\sin \pi(x - \beta)| &\leq \pi \inf_{n \in \mathbb{N}} |(x - \beta - n)| \\ &= \pi\|x - \beta\|_D. \end{aligned}$$

□

Lema A.13. Para todo $x, \beta \in \mathbb{R}$ vale

$$2\|x - \frac{1}{2}\|_D \leq |\cos(\pi x)| \leq \pi\|x - \frac{1}{2}\|_D.$$

Prova: Basta notar que $|\sin(\pi(x - \frac{1}{2}))| = |\cos(\pi x)|$ e usar o Lema A.12.

□

A.4 Teoria da Medida

Definição A.6. *Sejam $X \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto não-vazio e $E \subset X$ um subconjunto mensurável. Dizemos que E tem medida total em X se o seu complementar é um conjunto de medida nula em X .*

A seguinte definição caracteriza o conceito de limite inferior e superior de uma sequência de conjuntos.

Definição A.7. *Sejam $X \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto não-vazio e uma sequência de conjuntos $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$, com $A_n \subset X$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

- *Seja $B \subset X$ tal que cada $x \in B$ pertence a todos os A_n , com exceção de um número finito deles.*

Escrevemos

$$B = \bigcup_{m=1}^{\infty} \left[\bigcap_{n=m}^{\infty} A_n \right].$$

O conjunto B é chamado de limite inferior da sequência de conjuntos A_n , i.e.,

$$\liminf_n A_n := \bigcup_{m=1}^{\infty} \left[\bigcap_{n=m}^{\infty} A_n \right].$$

- *Seja $C \subset X$ tal que cada $x \in C$, $x \in A_n$ para uma infinidade de n 's.*

Escrevemos

$$C = \bigcap_{m=1}^{\infty} \left[\bigcup_{n=m}^{\infty} A_n \right].$$

O conjunto C é chamado de limite superior da sequência de conjuntos A_n , i.e.,

$$\limsup_n A_n := \bigcap_{m=1}^{\infty} \left[\bigcup_{n=m}^{\infty} A_n \right].$$

Para mais detalhes, ver [9, pág. 02].

Lema A.14 (Borel-Cantelli). *Sejam $X \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto não-vazio e $E_n \subset X$ uma sequência de conjuntos.*

Se $\sum |E_n| < \infty$, então

$$|\limsup E_n| = 0.$$

Prova: Ver [9, pág. 321].

□

Apêndice B

Método de momentos para a equação do calor unidimensional

Nesta seção, introduzimos o problema de momentos para a equação do calor unidimensional com condições de fronteira Dirichlet, considerando o controle como sendo um controle escalar.

Método de momentos

Seja a equação do calor

$$\begin{cases} y_t - y_{xx} = b(x)f(t), & (x, t) \in (0, 1) \times (0, T) \\ y(0, t) = y(1, t) = 0, & t \in (0, T) \\ y(x, 0) = y_0, & x \in (0, 1). \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

Dado $b \neq 0$ em $L^2(0, 1)$, temos por objetivo encontrar $f \in L^2(0, T)$, tal que

$$y(x, T) = 0, \quad \forall x \in (0, 1).$$

Vamos resolver este problema de controle nulo usando o chamado método de momentos.

Como $b \in L^2(0, 1)$, temos

$$b(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\pi x), \quad (\text{B.2})$$

em que

$$b_n = \int_0^1 \sin(n\pi x) b(x) dx. \quad (\text{B.3})$$

Também, para o dado inicial $y_0 \in L^2(0, 1)$, podemos escrever

$$y_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} y_0^n \sin(n\pi x).$$

Como $y_0 \in L^2(0, 1)$, a solução $y \in L^2((0, 1) \times (0, T))$ do sistema (B.1) se escreve na forma

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n(t) \sin(n\pi x). \quad (\text{B.4})$$

Substituindo na equação do calor (B.1)₁:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (y_n'(t) \sin(n\pi x) + n^2 \pi^2 y_n(t)) \sin(n\pi x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n f(t) \sin(n\pi x). \quad (\text{B.5})$$

Uma vez que $\{\sin(n\pi x)\}$ é base ortogonal de $L^2(0, 1)$, temos o seguinte sistema

$$\begin{cases} y_k'(t) + k^2 \pi^2 y_k(t) = b_k f(t) \\ y_k(0) = y_0^k, \end{cases} \quad (\text{B.6})$$

cuja solução, pelo método de variação dos parâmetros, é dada por

$$y_k(t) = e^{-k^2 \pi^2 t} y_0^k + \int_0^t e^{-k^2 \pi^2 (t-s)} b_k f(s) ds. \quad (\text{B.7})$$

Note que $y(x, T) = 0$, para todo $x \in (0, 1)$, se

$$y_k(T) = 0, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Assim, vemos que $y(x, T) = 0$, para todo $x \in (0, 1)$, se

$$0 = e^{-k^2 \pi^2 T} y_0^k + \int_0^T e^{-k^2 \pi^2 (T-s)} b_k f(s) ds,$$

e se $b_k \neq 0$, para todo k , então

$$-\int_0^T e^{-k^2 \pi^2 (T-s)} f(s) ds = \frac{e^{-k^2 \pi^2 T} y_0^k}{b_k}.$$

Fazendo a mudança de variável $\hat{f}(t) = f(T - t)$, a identidade acima se reescreve como

$$\int_0^T e^{-k^2 \pi^2 s} \hat{f}(s) ds = C_k, \quad (\text{B.8})$$

na qual $C_k = \frac{e^{-k^2 \pi^2 T} y_0^k}{b_k}$.

Portanto, existe um controle $f \in L^2(0, T)$ que leva a solução de (B.1) a zero no tempo T se, e somente se, f satisfaz a identidade (B.8) para todo $k \in \mathbb{N}$. Este é o chamado problema de momentos para o sistema (B.1).

Definição B.1 (Família biortogonal). *Dizemos que a família $\{\xi_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in L^2(0, T)$ é biortogonal à família $\{\varrho_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in L^2(0, T)$ quando*

$$\int_0^T \varrho_k(t) \xi_n(t) dt = \delta_{kn}, \quad \forall k, n \in \mathbb{N}, \quad (\text{B.9})$$

em que δ_{kn} é o delta de Kronecker.

Da definição acima, é imediato que, se existir uma família $\{\xi_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in L^2(0, T)$ biortogonal à família $\{e^{-n^2 \pi^2 t}\}_{n \in \mathbb{N}} \in L^2(0, T)$, o problema de momentos (B.8) tem solução dada por

$$\hat{f}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \xi_n(t), \quad (\text{B.10})$$

se esta série convergir em $L^2(0, T)$.

De fato, neste caso

$$\int_0^T e^{-k^2 \pi^2 s} \left(\sum_{n=1}^{\infty} C_n \xi_n(t) \right) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^T e^{-k^2 \pi^2 s} \xi_n(t) C_n dt = C_k.$$

Portanto, no caso particular do sistema (B.1), a solução do problema de momentos se escreve como

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n^2 \pi^2 T} y_0^n}{b_n} \xi_n(t), \quad (\text{B.11})$$

ou equivalentemente

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n^2 \pi^2 T} y_0^n}{\int_0^1 \sin(n\pi x) b(x) dx} \xi_n(t), \quad (\text{B.12})$$

se esta série convergir em $L^2(0, T)$.

Lema B.1. *Existe uma família $\{\xi_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in L^2(0, T)$ biortogonal à família $\{e^{-n^2 \pi^2 t}\}$.*

Além disso, existe $C > 0$ tal que

$$\|\xi_n\|_{L^2(0, T)} \leq e^{Cn}, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (\text{B.13})$$

Suponha que existe uma família $\{\xi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ biortogonal à família $\{e^{-\lambda_n t}\}_{n \in \mathbb{N}}$, no qual $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de números reais positivos satisfazendo

$$\lambda_n = K(n + \alpha)^\beta + o(n^{\beta-1}), \quad n \rightarrow \infty, \quad (\text{B.14})$$

com $\beta > 1$.

Em [7, Lema 3.1, pág. 278], prova-se que existem constantes P_β e Q_β , com $P_\beta > Q_\beta$, de modo que, quando $n \rightarrow \infty$, vale

$$\prod_{j=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\lambda_n}{\lambda_j}\right) = e^{\left(K^{-\frac{1}{\beta}} P_\beta + o(1)\right) \lambda_n^{\frac{1}{\beta}}} \quad (\text{B.15})$$

e

$$\prod_{j=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda_n}{\lambda_j}\right) = e^{\left(K^{-\frac{1}{\beta}} Q_\beta + o(1)\right) \lambda_n^{\frac{1}{\beta}}}. \quad (\text{B.16})$$

Além disso, prova-se que vale a seguinte desigualdade

$$\|\xi_n\|_{L^2(0,T)} \leq \frac{\lambda_n K_T}{2} \frac{\prod_{j=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\lambda_n}{\lambda_j}\right)}{\prod_{j=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda_n}{\lambda_j}\right)}, \quad (\text{B.17})$$

para alguma constante $K_T \in \mathbb{R}$ (Ver [7, pág. 278, estimativa 3.9]).

Substituindo (B.15) e (B.16) em (B.17), obtém-se a seguinte estimativa para a norma da família biortogonal

$$\|\xi_n\|_{L^2(0,T)} \leq \frac{\lambda_n K_T}{2} e^{\lambda_n^{\frac{1}{\beta}} \left[K^{\frac{1}{\beta}} (P_\beta - Q_\beta) + o(1) \right]}, \quad n \gg 1. \quad (\text{B.18})$$

Com respeito às constantes P_β e Q_β :

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} P_\beta - Q_\beta = 0$$

$$\lim_{\beta \rightarrow 1^+} P_\beta - Q_\beta = +\infty$$

e

$$P_2 - Q_2 = \pi.$$

Prova do Lema B.1. A existência de uma família $\{\xi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ biortogonal a $\{e^{-n^2 \pi^2 t}\}_{n \in \mathbb{N}}$ é consequência do Teorema de Müntz, e pode ser encontrado em [14, Seção 6.4, pág. 76].

Agora, escrevemos

$$\lambda_n = n^2 \pi^2 = \pi^2 (n + 0)^2 + o(n^{2-1}) = n^2 \pi^2 + o(n), \quad n \rightarrow \infty.$$

Seja $\{\xi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ a família de norma mínima em $L^2(0, T)$ biortogonal a $\{e^{-n^2 \pi^2 t}\}_{n \in \mathbb{N}}$.

Pela desigualdade (B.18), temos que

$$\|\xi_n\|_{L^2(0,T)} \leq \frac{n^2 \pi^2 K_T}{2} e^{n\pi \left[\frac{1}{\pi}(P_2 - Q_2) + o(1) \right]}.$$

Como $P_2 - Q_2 = \pi$, tomando $C(T) = \frac{\pi^2 K_T}{2}$, reescrevemos a desigualdade como

$$\|\xi_n\|_{L^2(0,T)} \leq C(T) n^2 e^{n\pi[1+o(1)]}. \quad (\text{B.19})$$

Note que

$$e^{n\pi[1+o(1)]} = e^{n\pi+o(n)} \quad (\text{B.20})$$

e

$$C(T) n^2 \leq e^n, \quad n \gg 1. \quad (\text{B.21})$$

Substituindo (B.20) e (B.21) em (B.19) obtemos o resultado. $\square$

Apêndice C

Provas dos Lemas 2.4 e 2.5

Este Apêndice está dedicado a provar os Lemas 2.4 e 2.5, que foram utilizados na demonstração do Teorema (2.3) do Capítulo 2.

Prova do Lema 2.4. Seja $\delta > 0$. Construiremos a sequência $\{\varepsilon_j\}$ por indução, de modo que para uma constante C apropriada, vale a desigualdade (2.8).

Para cada $n \in \mathbb{N}$, considere o conjunto

$$\Xi_{0,n} = \{x \in [0, 1] \mid \exists p \in \mathbb{Z} ; |x - \frac{p}{n}| < Ce^{-n^2\pi^2\delta}\},$$

na qual $C > 0$ será escolhido a posteriori. Seja também

$$\Xi_0 := \bigcup_n \Xi_{0,n}. \quad (\text{C.1})$$

Da definição, segue que se $x \in [0, 1] \setminus \Xi_0$ então $x \notin \Xi_{0,n}$, para todo $n \in \mathbb{N}$, e

$$|x - \frac{p}{n}| \geq Ce^{-n^2\pi^2\delta}, \quad \forall p \in \mathbb{Z}.$$

Etapa 1: Construção de ε_0 .

A existência de ε_0 segue diretamente da seguinte afirmação, tomando $\varepsilon_0 \in [0, 1] \setminus \Xi_0$.

Afirmação C.1. *Existe $C > 0$ tal que $|\Xi_0| \leq 1/2$.*

Assumindo que a afirmação é verdadeira, provemos o Lema 2.4. A prova da Afirmação C.1 será feita posteriormente.

Pela Afirmação C.1, existe $C > 0$ tal que $|\Xi_0| \leq \frac{1}{2}$. Assim, podemos escolher $\varepsilon_0 \in [0, 1] \setminus \Xi_0$. Em particular, ε_0 satisfaz

$$|\varepsilon_0 - \frac{p}{n}| \geq Ce^{-n^2\pi^2\delta}$$

e além disso, ainda vale

$$\inf_{p \in \mathbb{Z}} |\varepsilon_0 - \frac{p}{n}| \geq C e^{-n^2 \pi^2 \delta}.$$

Uma vez que $0 \leq \varepsilon_0 \leq 1$, temos que $C e^{-n^2 \pi^2 \delta} \geq C \varepsilon_0 e^{-n^2 \pi^2 \delta}$ e obtemos

$$\inf_{p \in \mathbb{Z}} |\varepsilon_0 - \frac{p}{n}| \geq C \varepsilon_0 e^{-n^2 \pi^2 \delta}.$$

Denotemos $\phi_n^0 = \inf_{p \in \mathbb{Z}} |\varepsilon_0 - \frac{p}{n}|$.

Observação C.1. *Note que, na Etapa 1 acima, escolhemos $|\Xi_0| \leq \frac{1}{2}$ por conveniência. De fato, basta que $|\Xi_0| < 1$ para que exista $\varepsilon_0 \in [0, 1] \setminus \Xi_0$. Entretanto, escolhemos $|\Xi_0| \leq \frac{1}{2}$ para poder encontrar a constante C de maneira explícita.*

Etapa 2: Construção de ε_1 .

Sabemos que $C = \left(4 \sum (n+1) e^{-n^2 \pi^2 \delta}\right)^{-1}$. Seja ε_0 escolhido anteriormente e para cada $n \in \mathbb{N}$ consideremos o seguinte conjunto

$$\Xi_{1,n} = \{x \in (\frac{\varepsilon_0}{2}, \varepsilon_0) \mid \exists p \in \mathbb{Z} ; |x - \frac{p}{n}| < C \varepsilon_0 e^{-n^2 \pi^2 \delta}\}$$

em que $(\frac{\varepsilon_0}{2}, \varepsilon_0) \subset [0, 1]$ e definamos

$$\Xi_1 := \bigcup_n \Xi_{1,n}. \quad (\text{C.2})$$

De maneira semelhante a construção do ε_0 , provaremos que existe $x \in (\frac{\varepsilon_0}{2}, \varepsilon_0) \setminus \Xi_1$ e para isso é suficiente mostrar a seguinte afirmação.

Afirmação C.2. $|\Xi_1| \leq \frac{\varepsilon_0}{4}$.

Prova da afirmação: Uma vez que

$$|x - \frac{p}{n}| < C \varepsilon_0 e^{-n^2 \pi^2 \delta} \Leftrightarrow x \in \left(\frac{p}{n} - C \varepsilon_0 e^{-n^2 \pi^2 \delta}, \frac{p}{n} + C \varepsilon_0 e^{-n^2 \pi^2 \delta}\right),$$

tomando $A_n = C \varepsilon_0 e^{-n^2 \pi^2 \delta}$, temos

$$x \in \Xi_{1,n} \Leftrightarrow x \in \left(\frac{\varepsilon_0}{2}, \varepsilon_0\right) \cap \left(\frac{p}{n} - A_n, \frac{p}{n} + A_n\right). \quad (\text{C.3})$$

Para cada n , considere $I_p = (\frac{p}{n} - A_n, \frac{p}{n} + A_n)$. Assim, é fácil ver que

$$\left(\frac{\varepsilon_0}{2}, \varepsilon_0\right) \cap I_p \neq \emptyset \Leftrightarrow p \in \left(\frac{n \varepsilon_0}{2} - n A_n, n \varepsilon_0 + n A_n\right) = \Gamma_n.$$

Logo, temos que se $p \in \Gamma_n$ então $I_p \cap (\frac{\varepsilon_0}{2}, \varepsilon_0) \neq \emptyset$ e

$$\Xi_{1,n} \subset \bigcup_{p \in \Gamma_n} I_p.$$

Dessa forma

$$\begin{aligned} |\Xi_{1,n}| &\leq \left| \bigcup_{p \in \Gamma_n} I_p \right| \\ &\leq \#\{p \mid p \in \Gamma_n, p \in \mathbb{Z}\} |I_p|, \end{aligned}$$

em que $\#\{\cdot\}$ é a cardinalidade do conjunto.

Considerando $P = \#\{p \mid p \in \Gamma_n, p \in \mathbb{Z}\}$, como $|I_p| = 2A_n = 2C\varepsilon_0 e^{-n^2\pi^2\delta}$, concluímos que

$$|\Xi_{1,n}| \leq 2PC\varepsilon_0 e^{-n^2\pi^2\delta}. \quad (\text{C.4})$$

Como

$$P \leq |\Gamma_n| \quad \text{e} \quad C4(n+1)e^{-n^2\pi^2\delta} \leq 1,$$

temos

$$\begin{aligned} |\Gamma_n| &= \left| \left(\frac{n\varepsilon_0}{2} - nA_n, n\varepsilon_0 + nA_n \right) \right| \\ &= \frac{n\varepsilon_0}{2} + 2nC\varepsilon_0 e^{-n^2\pi^2\delta} \\ &= \frac{n\varepsilon_0}{2} + \frac{n\varepsilon_0(C4(n+1)e^{-n^2\pi^2\delta})}{2(n+1)} \\ &\leq \frac{n\varepsilon_0}{2} + \frac{\varepsilon_0}{2} \\ &= \frac{\varepsilon_0(n+1)}{2}. \end{aligned}$$

Logo, por (C.4), segue que

$$|\Xi_{1,n}| \leq C(n+1)\varepsilon_0^2 e^{-n^2\pi^2\delta}. \quad (\text{C.5})$$

Por definição $\Xi_1 = \bigcup_n \Xi_{1,n}$, então

$$\begin{aligned} |\Xi_1| &\leq \sum_n |\Xi_{1,n}| \\ &= \sum_n \varepsilon_0^2 C(n+1) e^{-n^2 \pi^2 \delta} \\ &= \varepsilon_0^2 \frac{\sum_n (n+1) e^{-n^2 \pi^2 \delta}}{4 \sum_n (n+1) e^{-n^2 \pi^2 \delta}} \\ &= \frac{\varepsilon_0^2}{4} \\ &\leq \frac{\varepsilon_0}{4} \end{aligned}$$

e, portanto, fica provado a afirmação. $\square$

Assim, como $|\Xi_1| \leq \frac{\varepsilon_0}{4}$, podemos escolher $\varepsilon_1 \in (\frac{\varepsilon_0}{2}, \varepsilon_0) \setminus \Xi_1$. Consequentemente $\varepsilon_1 \notin \Xi_{1,n}$ para algum n , ou seja,

$$|\varepsilon_1 - \frac{p}{n}| \geq C \varepsilon_0 e^{-n^2 \pi^2 \delta}$$

e além disso, vale

$$\inf_{p \in \mathbb{Z}} |\varepsilon_1 - \frac{p}{n}| \geq C \varepsilon_0 e^{-n^2 \pi^2 \delta}.$$

Como para $\frac{\varepsilon_0}{2} \leq \varepsilon_1 \leq \varepsilon_0$ temos que $C \varepsilon_0 e^{-n^2 \pi^2 \delta} \geq C \varepsilon_1 e^{-n^2 \pi^2 \delta}$, tomando

$$\phi_n^1 = \inf_{p \in \mathbb{Z}} |\varepsilon_1 - \frac{p}{n}|,$$

segue que

$$\phi_n^1 \geq C \varepsilon_1 e^{-n^2 \pi^2 \delta}.$$

Para construir o resto da sequência $\{\varepsilon_j\}$, na próxima etapa usaremos a mesma ideia da construção do ε_1 , no qual omitiremos alguns passos intermediários.

Etapas 3: Construção de ε_{j+1} .

Sabendo que $C = \left(4 \sum (n+1) e^{-n^2 \pi^2 \delta}\right)^{-1}$. Para todo $j \geq 1$ considere o conjunto

$$\Xi_{j+1,n} = \{x \in (\frac{\varepsilon_j}{2}, \varepsilon_j) \mid \exists p \in \mathbb{Z} ; |x - \frac{p}{n}| < C \varepsilon_j e^{-n^2 \pi^2 \delta}\}$$

e defina

$$\Xi_{j+1} := \bigcup_n \Xi_{j+1,n}. \tag{C.6}$$

Aqui é suficiente mostrar que para todo $j \leq 1$ vale

$$|\Xi_{j+1}| \leq \frac{\varepsilon_j}{4}.$$

A prova segue de modo análogo aos passos feitos na etapa anterior. Portanto

$$\Xi_{j+1,n} \subset \bigcup_{p \in \Gamma_n^j} \left(\frac{p}{n} - C\varepsilon_j e^{-n^2\pi^2\delta}, \frac{p}{n} + C\varepsilon_j e^{-n^2\pi^2\delta} \right)$$

e, conseqüentemente, notando que $\#\{p \mid p \in \Gamma_n; p \in \mathbb{Z}\} \leq |\Gamma_n^j|$ em que

$$\Gamma_n^j = \left(\frac{n\varepsilon_j}{2} - nC\varepsilon_j e^{-n^2\pi^2\delta}, n\varepsilon_j + nC\varepsilon_j e^{-n^2\pi^2\delta} \right),$$

segue que

$$|\Xi_{j+1,n}| \leq \varepsilon_j^2 C(n+1) e^{-n^2\pi^2\delta}.$$

Assim, temos que

$$|\Xi_{j+1}| \leq \frac{\varepsilon_j}{4},$$

e existe $\varepsilon_{j+1} \in (\frac{\varepsilon_j}{2}, \varepsilon_j) \setminus \Xi_{j+1}$.

Por fim, podemos mostrar que

$$\phi_n^{j+1} \geq C\varepsilon_{j+1} e^{-n^2\pi^2\delta}$$

para todo $j \geq 1$, na qual $\phi_n^{j+1} = \inf_{p \in \mathbb{Z}} |\varepsilon_{j+1} - \frac{p}{n}|$ e isto prova o Lema 2.4. $\square$

Provemos agora Afirmação C.1

Prova da afirmação C.1: Se $x \in \Xi_{0,n}$ então existe $p \in \mathbb{Z}$ tal que

$$x \in \left(\frac{p}{n} - A_n, \frac{p}{n} + A_n \right) \cap [0, 1],$$

em que $A_n := Ce^{-n^2\pi^2\delta}$.

Sejam $I_p := (\frac{p}{n} - A_n, \frac{p}{n} + A_n)$ e $\Gamma_n = (-nA_n, n + nA_n)$.

Dado $n \in \mathbb{N}$, temos

$$I_p \cap [0, 1] \neq \emptyset \iff p \in \Gamma_n. \quad (\text{C.7})$$

Para ver isto, notamos que

$$p \notin \Gamma_n \iff p > n + nA_n \quad \text{ou} \quad p < -nA_n.$$

De fato, como

$$p > n + nA_n \iff \frac{p}{n} > 1 + A_n \iff \frac{p}{n} - A_n > 1,$$

temos que $I_p \cap [0, 1] = \emptyset$ se $p > n + nA_n$.

No segundo caso,

$$p < -nA_n \iff \frac{p}{n} < -A_n \iff \frac{p}{n} + A_n < 0$$

e o resultado segue de modo análogo. Portanto, vale (C.7).

Seja p_0 o menor inteiro positivo tal que

$$\frac{p_0}{n} - A_n > 1. \quad (\text{C.8})$$

Seja também, q_0 o maior inteiro negativo tal que

$$\frac{q_0}{n} + A_n < 0. \quad (\text{C.9})$$

Dessa forma, se $p \in \mathbb{Z}$ é tal que $p \notin (q_0, p_0)$ então $p \notin \Gamma_n$. Portanto, vemos que somente os seguintes conjuntos tem interseção não-vazia com $[0, 1]$:

- i) $(-A_n, A_n), (\frac{1}{n} - A_n, \frac{1}{n} + A_n), \dots, (\frac{p_0-1}{n} - A_n, \frac{p_0-1}{n} + A_n)$;
- ii) $(-\frac{1}{n} - A_n, -\frac{1}{n} + A_n), (-\frac{2}{n} - A_n, -\frac{2}{n} + A_n), \dots, (\frac{q_0+1}{n} - A_n, \frac{q_0+1}{n} + A_n)$.

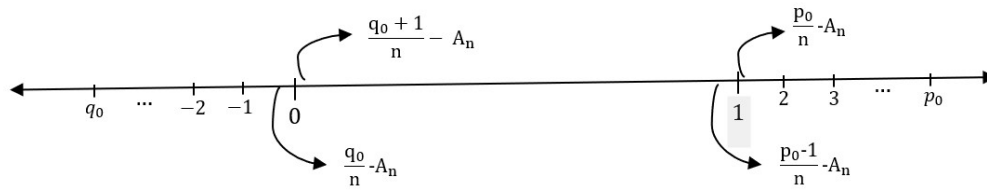


Figura C.1: Interpretação visual na reta.

Porém, é fácil ver que

$$I_p \cap [0, 1] \subset (-A_n, A_n), \quad \forall p \in (q_0, 0).$$

Desse modo, concluímos que os intervalos de i) são suficientes para cobrir o conjunto $[0, 1]$.

$$\bigcup_{j=0}^{p_0-1} \left(\frac{j}{n} - A_n, \frac{j}{n} + A_n \right) \supset [0, 1].$$

Assim, segue que

$$\Xi_{0,n} \subset \bigcup_{j=0}^{p_0-1} \left(\frac{j}{n} - A_n, \frac{j}{n} + A_n \right).$$

Em particular, obtemos

$$\begin{aligned} |\Xi_{0,n}| &\leq \left| \bigcup_{j=0}^{p_0-1} \left(\frac{j}{n} - A_n, \frac{j}{n} + A_n \right) \right| \\ &\leq \sum_{j=0}^{p_0-1} \left| \left(\frac{j}{n} - A_n, \frac{j}{n} + A_n \right) \right| \\ &= \sum_{j=0}^{p_0-1} 2A_n \\ &= 2p_0 A_n \\ &= 2p_0 C e^{-n^2 \pi^2 \delta}. \end{aligned}$$

Agora, uma vez que n está fixado, como p_0 é o menor inteiro positivo satisfazendo (C.8), é fácil obter uma estimativa precisa para p_0 , de tal forma que a constante C seja tomada positiva.

Mais precisamente, $p_0 = n + 1$ é o menor inteiro satisfazendo (C.8) de tal forma que $C > 0$ para todo $p \geq p_0$.

De fato, seja $k \geq 0$ um número inteiro. Mostremos que se $\frac{n-k}{n} - A_n > 1$ então $C \leq 0$ para todo $k \geq 0$.

Note que

$$\begin{aligned} \frac{n-k}{n} - A_n > 1 &\Leftrightarrow 1 - \frac{k}{n} - A_n > 1 \\ &\Leftrightarrow -\frac{k}{n} - A_n > 0 \\ &\Leftrightarrow A_n < -\frac{k}{n} \\ &\Leftrightarrow C e^{-n^2 \pi^2 \delta} < -\frac{k}{n} \\ &\Leftrightarrow C < -\frac{k e^{n^2 \pi^2 \delta}}{n}. \end{aligned}$$

Como $\frac{k e^{n^2 \pi^2 \delta}}{n} \geq 0$, então $C < 0$ para todo $k \geq 0$.

Por outro lado, para todo inteiro maior do que $n + 1$ conseguimos garantir a existência de um $C > 0$ e, portanto, podemos garantir que $n + 1$ é o menor inteiro com esta propriedade.

Portanto, segue que

$$|\Xi_{0,n}| \leq 2(n+1)C e^{-n^2 \pi^2 \delta}.$$

Por definição, $\Xi_0 = \bigcup_n \Xi_{0,n}$. Assim

$$\begin{aligned} |\Xi_0| &= \left| \bigcup_n \Delta_{0,n} \right| \\ &\leq \sum_n |\Delta_{0,n}| \\ &\leq \sum_n 2(n+1)C e^{-n^2\pi^2\delta} \\ &= 2C \sum (n+1) e^{-n^2\pi^2\delta}. \end{aligned}$$

Como o objetivo é provar que $|\Xi_0| \leq \frac{1}{2}$, uma vez que $\sum (n+1) e^{-n^2\pi^2\delta} < \infty$, tomamos

$$C = \left(4 \sum (n+1) e^{-n^2\pi^2\delta} \right)^{-1},$$

na qual

$$|\Xi_0| \leq \frac{1}{2}$$

e segue a afirmação. □

Provemos agora o Lema 2.5.

Prova do Lema 2.5. Sejam $\theta_n = \inf_{p \in \mathbb{Z}} |x_0 - \frac{p}{n}|$ e $\phi_n^j = \inf_{p \in \mathbb{Z}} |\varepsilon_j - \frac{p}{n}|$, as melhores aproximações de ordem n de x_0 e ε_j , respectivamente.

Pela definição de distância diofantina, é fácil notar que $0 \leq \theta_n \leq \frac{1}{2n}$ e $0 \leq \phi_n^j \leq \frac{1}{2n}$.

Fixe j e n . Assim, para algum $p \in \mathbb{Z}$, temos

$$\phi_n^j = |\varepsilon_j - \frac{p}{n}| \implies \varepsilon_j = \frac{p}{n} \pm \phi_n^j.$$

Para o que segue, será omitida a dependência de p em n e j .

Note que, como $0 \leq T_0(x_0) < \infty$, em particular temos que $\sin(n\pi x_0) \neq 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

É necessário analisar dois casos.

Caso 1: $\varepsilon_j \leq \theta_n$.

Temos

$$(x_0 - \varepsilon_j, x_0 + \varepsilon_j) \subseteq (x_0 - \theta_n, x_0 + \theta_n).$$

- Se $\theta_n = x_0 - \frac{p}{n}$, temos $x_0 = \theta_n + \frac{p}{n}$ e

$$(x_0 - \theta_n, x_0 + \theta_n) = \left(\frac{p}{n}, 2\theta_n + \frac{p}{n} \right) \subseteq \left(\frac{p}{n}, \frac{p+1}{n} \right),$$

pois $\theta_n \leq \frac{1}{2n}$.

Observe que

$$\sin(n\pi(\frac{p}{n})) = 0 \quad \text{e} \quad \sin(n\pi(\frac{p+1}{n})) = 0.$$

Em particular, não existe $x_1 \in (\frac{p}{n}, \frac{p+1}{n})$ tal que $\sin(n\pi x_1) = 0$. Assim, concluímos que no intervalo $(x_0 - \varepsilon_j, x_0 + \varepsilon_j)$, a função $\sin(n\pi x)$ tem sinal constante.

- Se $\theta_n = -x_0 + \frac{p}{n}$ então $x_0 = -\theta_n + \frac{p}{n}$ e

$$(x_0 - \theta_n, x_0 + \theta_n) \subseteq (\frac{p-1}{n}, \frac{p}{n}).$$

Portanto, a função $\sin(n\pi x)$ tem sinal constante no intervalo $(x_0 - \varepsilon_j, x_0 + \varepsilon_j)$.

Assim

$$\left| \int_{x_0 - \varepsilon_j}^{x_0 + \varepsilon_j} \sin(n\pi x) dx \right| = \int_{x_0 - \varepsilon_j}^{x_0 + \varepsilon_j} |\sin(n\pi x)| dx.$$

Agora, fazendo a mudança de variável $y = x - \frac{p}{n}$, temos

$$\int_{x_0 - \varepsilon_j}^{x_0 + \varepsilon_j} |\sin(n\pi x)| dx = \int_{x_0 - \varepsilon_j - \frac{p}{n}}^{x_0 + \varepsilon_j - \frac{p}{n}} |\sin(n\pi y)| dy.$$

Como, para todo $x \in \mathbb{R}$ tal que $|x| \leq \frac{1}{2}$, vale

$$|\sin(\pi x)| \geq 2|x|,$$

então

$$\int_{x_0 - \varepsilon_j - \frac{p}{n}}^{x_0 + \varepsilon_j - \frac{p}{n}} |\sin(n\pi y)| dy \geq \int_{x_0 - \varepsilon_j - \frac{p}{n}}^{x_0 + \varepsilon_j - \frac{p}{n}} |2ny| dy \geq \left| \int_{x_0 - \varepsilon_j - \frac{p}{n}}^{x_0 + \varepsilon_j - \frac{p}{n}} 2ny dy \right|. \quad (\text{C.10})$$

De

$$\int_{x_0 - \varepsilon_j - \frac{p}{n}}^{x_0 + \varepsilon_j - \frac{p}{n}} 2ny dy = 4n\varepsilon_j(x_0 - \frac{p}{n}), \quad (\text{C.11})$$

e de (C.10), obtemos

$$\int_{x_0 - \varepsilon_j - \frac{p}{n}}^{x_0 + \varepsilon_j - \frac{p}{n}} |\sin(n\pi y)| dy \geq 4n\varepsilon_j |x_0 - \frac{p}{n}|. \quad (\text{C.12})$$

Pelo Lema (A.12):

$$n|x_0 - \frac{p}{n}| \geq \frac{1}{\pi} |\sin(n\pi x_0)|. \quad (\text{C.13})$$

Assim, combinando (C.12) e (C.13), concluimos que

$$\left| \int_{x_0 - \varepsilon_j}^{x_0 + \varepsilon_j} \sin(n\pi x) dx \right| \geq \frac{4}{\pi} \varepsilon_j |\sin(n\pi x_0)|,$$

na qual

$$\left| \int_{x_0 - \varepsilon_j}^{x_0 + \varepsilon_j} \sin(n\pi x) dx \right| \geq C \varepsilon_j |\sin(n\pi x_0)| e^{-n^2 \pi^2 \delta}$$

e, portanto, fica provado que no *Caso 1* o resultado é válido.

Caso 2: $\varepsilon_j \geq \theta_n$.

Considere a função

$$f(\varepsilon) = \int_{x_0 - \varepsilon}^{x_0 + \varepsilon} \sin(n\pi x) dx.$$

De

$$f'(\varepsilon) = 2 \sin(n\pi x_0) \cos(n\pi \varepsilon),$$

verificamos que:

i) Se $\sin(n\pi x_0) \geq 0$, então f é crescente em $(0, \frac{1}{2n})$ e decrescente em $(\frac{1}{2n}, \frac{1}{n})$.

ii) Se $\sin(n\pi x_0) \leq 0$, então f é decrescente em $(0, \frac{1}{2n})$ e crescente em $(\frac{1}{2n}, \frac{1}{n})$.

iii) $f(\frac{p}{n}) = 0$, para todo $p \in \mathbb{Z}$.

Agora, uma vez que $\varepsilon_j = \frac{p}{n} \pm \phi_n^j$, temos que

$$\left| \int_{x_0 - \varepsilon_j}^{x_0 + \varepsilon_j} \sin(n\pi x) dx \right| = \left| \int_{x_0 - \frac{p}{n} \mp \phi_n^j}^{x_0 + \frac{p}{n} \pm \phi_n^j} \sin(n\pi x) dx \right|.$$

A segunda integral acima pode ser descomposta da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \int_{x_0 - \frac{p}{n} \mp \phi_n^j}^{x_0 + \frac{p}{n} \pm \phi_n^j} \sin(n\pi x) dx &= \int_{x_0 - \frac{p}{n} \mp \phi_n^j}^{x_0 - \frac{p}{n}} \sin(n\pi x) dx \\ &+ \int_{x_0 - \frac{p}{n}}^{x_0 + \frac{p}{n}} \sin(n\pi x) dx \\ &+ \int_{x_0 + \frac{p}{n}}^{x_0 + \frac{p}{n} \pm \phi_n^j} \sin(n\pi x) dx. \end{aligned}$$

Dessas integrais temos as seguinte informações:

1. $\int_{x_0 - \frac{p}{n}}^{x_0 + \frac{p}{n}} \sin(n\pi x) dx = 0$
2. $\int_{x_0 - \frac{p}{n} \mp \phi_n^j}^{x_0 - \frac{p}{n}} \sin(n\pi x) dx = \int_{x_0 \mp \phi_n^j}^{x_0} \sin(n\pi x) dx$
3. $\int_{x_0 + \frac{p}{n}}^{x_0 + \frac{p}{n} \pm \phi_n^j} \sin(n\pi x) dx = \int_{x_0}^{x_0 \pm \phi_n^j} \sin(n\pi x) dx.$

Assim, concluímos que

$$\left| \int_{x_0 - \varepsilon_j}^{x_0 + \varepsilon_j} \sin(n\pi x) dx \right| = \left| \int_{x_0 \mp \phi_n^j}^{x_0 \pm \phi_n^j} \sin(n\pi x) dx \right|. \quad (\text{C.14})$$

Mostremos que existe $C > 0$ tal que

$$\left| \int_{x_0 - \phi_n^j}^{x_0 + \phi_n^j} \sin(n\pi x) dx \right| \geq C \phi_n^j |\sin(n\pi x_0)|. \quad (\text{C.15})$$

Mais uma vez, dividiremos em duas partes.

Parte 1: Se $\phi_n^j \leq \theta_n$, podemos argumentar como no caso $\varepsilon_j \leq \theta_n$ e a desigualdade acima é válida com a constante $C = \frac{4}{\pi}$.

Parte 2: $\theta_n \leq \phi_n^j$.

Lembramos que $0 \leq \theta_n \leq \phi_n^j \leq \frac{1}{2n}$ e suponha que $\sin(n\pi x_0) \geq 0$. Assim

$$\int_{x_0 - \phi_n^j}^{x_0 + \phi_n^j} \sin(n\pi x) dx = \int_{x_0 - \phi_n^j}^{2\frac{p}{n} - x_0 + \phi_n^j} \sin(n\pi x) dx + \int_{2\frac{p}{n} - x_0 + \phi_n^j}^{x_0 + \phi_n^j} \sin(n\pi x) dx. \quad (\text{C.16})$$

Para a primeira integral do lado direito de (C.16), tomando $a = x_0 - \phi_n^j$ e $b = 2\frac{p}{n} - x_0 + \phi_n^j$, temos

$$\begin{aligned} \int_a^b \sin(n\pi x) dx &= -\frac{1}{n\pi} (\cos(n\pi x))_a^b \\ &= -\frac{1}{n\pi} (\cos(n\pi b) - \cos(n\pi a)) \\ &= -\frac{1}{n\pi} (\cos(n\pi(2\frac{p}{n} - x_0 + \phi_n^j)) - \cos(n\pi(x_0 - \phi_n^j))) \\ &= -\frac{1}{n\pi} (\cos(2\pi p - n\pi(x_0 + \phi_n^j)) - \cos(n\pi x_0 - n\pi\phi_n^j)). \end{aligned}$$

Como

$$\cos(2\pi p - n\pi(x_0 + \phi_n^j)) = \cos(2\pi p) \cos(n\pi(x_0 + \phi_n^j)) + \sin(2\pi p) \sin(n\pi(x_0 + \phi_n^j))$$

e $\sin(n\pi p) = 0$ e $\cos(n\pi p) = 1$ para $p \in \mathbb{Z}$, vemos que

$$\begin{aligned} \int_{x_0 - \phi_n^j}^{2\frac{p}{n} - x_0 + \phi_n^j} \sin(n\pi x) dx &= -\frac{1}{n\pi} (\cos(n\pi(x_0 + \phi_n^j)) - \cos(n\pi x_0 - n\pi\phi_n^j)) \\ &= 0. \end{aligned} \quad (\text{C.17})$$

Assim, por (C.16) e (C.17), obtemos

$$\left| \int_{x_0 - \phi_n^j}^{x_0 + \phi_n^j} \sin(n\pi x) dx \right| = \left| \int_{2\frac{p}{n} - x_0 + \phi_n^j}^{x_0 + \phi_n^j} \sin(n\pi x) dx \right|. \quad (\text{C.18})$$

Na integral do lado direito de (C.18), notamos que a função $\sin(n\pi x)$ é positiva no intervalo $(2\frac{p}{n} - x_0 + \phi_n^j, x_0 + \phi_n^j)$.

Usaremos o seguinte fato.

Afirmção C.3. *Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $\sin(n\pi a) > 0$ e $\sin(n\pi x) > 0$ em $(a-b, a+b)$. A seguinte desigualdade é verdadeira*

$$\int_{a-b}^{a+b} \sin(n\pi x) dx \geq b \sin(n\pi a).$$

Prova da afirmação. A prova deste resultado segue do fato que a função $\sin(n\pi x)$ é côncava no intervalo $(a-b, a+b)$ e que a área dada pela integral é maior ou igual do que a área do triângulo de base de tamanho $2b$ e altura $\sin(n\pi a)$. $\square$

Tomando $a = \frac{p}{n} + \phi_n^j$ e $b = x_0 - \frac{p}{n}$, uma vez que $\sin(n\pi x)$ é não negativo em $(2\frac{p}{n} - x_0 + \phi_n^j, x_0 + \phi_n^j)$ e $\sin(n\pi(\frac{p}{n} + \phi_n^j)) \geq 0$, temos

$$\left| \int_{2\frac{p}{n} - x_0 + \phi_n^j}^{x_0 + \phi_n^j} \sin(n\pi x) dx \right| \geq |x_0 - \frac{p}{n}| \sin(n\pi(\frac{p}{n} + \phi_n^j)). \quad (\text{C.19})$$

Fato: Para todo $x \in \mathbb{R}$ satisfazendo $|x| \leq \frac{\pi}{2}$, vale a seguinte desigualdade

$$|\sin(x)| \geq \frac{2}{\pi} |x|.$$

Como $|\sin(n\pi(\frac{p}{n} + \phi_n^j))| = |\sin(n\pi\phi_n^j)|$, pelo Fato acima, segue que

$$|\sin(n\pi\phi_n^j)| \geq \frac{2}{\pi} |n\pi\phi_n^j| = 2n\phi_n^j,$$

que implica

$$\left| \int_{2\frac{p}{n} - x_0 + \phi_n^j}^{x_0 + \phi_n^j} \sin(n\pi x) dx \right| \geq 2n\phi_n^j |x_0 - \frac{p}{n}|. \quad (\text{C.20})$$

Além disso, pelo Lema A.12, temos a seguinte desigualdade

$$n|x_0 - \frac{p}{n}| \geq \frac{1}{\pi} |\sin(n\pi x_0)|$$

e, portanto, a desigualdade (C.20) fica

$$\left| \int_{2\frac{p}{n}-x_0+\phi_n^j}^{x_0+\phi_n^j} \sin(n\pi x) dx \right| \geq \frac{2}{\pi} \phi_n^j |\sin(n\pi x_0)|.$$

Por fim, pelo Lema 2.4, temos que $\phi_n^j \geq c\varepsilon_j e^{-n^2\pi^2\delta}$, logo

$$\left| \int_{2\frac{p}{n}-x_0+\phi_n^j}^{x_0+\phi_n^j} \sin(n\pi x) dx \right| \geq C\varepsilon_j |\sin(n\pi x_0)| e^{-n^2\pi^2\delta}, \quad (\text{C.21})$$

em que $C = \frac{2c}{\pi}$.

Deste modo, combinando (C.14), (C.18) e (C.21), obtemos

$$\left| \int_{x_0-\varepsilon_j}^{x_0+\varepsilon_j} \sin(n\pi x) dx \right| \geq C\varepsilon_j |\sin(n\pi x_0)| e^{-n^2\pi^2\delta}. \quad (\text{C.22})$$

O caso em que $\sin(n\pi x_0) \leq 0$ segue de modo análogo. □

Referências Bibliográficas

- [1] J. Apraiz, L. Escauriaza, *Null-control and measurable sets*, ESAIM Control Optim. Calc. Var., 19 (1)(2013), 239–254.
- [2] F. Boyer, *Controllability of linear parabolic equations and systems*, M2 Lecture Notes, 2020.
- [3] J. W. S. Cassels, *An introduction to diophantine approximation*, Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics, No. 45, 1957.
- [4] F. W. Chaves-Silva, *(Breve) Introdução à Teoria do Controle*, Notas de Aula, UFPB, 2020.
- [5] J. M. Coron, *Control and Nonlinearity*, Mathematical Surveys and Monographs, 136, American Mathematical Society, Providence, RI, 2007.
- [6] S. Dolecki, *Observability for the one-dimensional heat equation*, Studia Math., 48 (1973), 291–305.
- [7] H. O. Fattorini, D. L. Russel, *Exact Controlability theorems for the linear parabolic equations in one space dimension*, Arch. Rational Mech. Anal., 43 (1971), 272–292.
- [8] E. Fernández-Cara, E. Zuazua, *Control Theory: History, mathematical achievements and perspectives*, Bol. Soc. Esp. Mat. Aplic., 23 (2003), 1–62.
- [9] G. B. Folland, *Real analysis: Modern techniques and their applications*, Pure and Applied Mathematics (New York), John Wiley & Sons, New York, 1999.
- [10] F. A. Khodja, A. Benabdallah, M. G. Burgos, L. Teresa, *Minimal time for the null controllability of parabolic systems: The effect of the condensation index of complex sequences*, Journal of Functional Analysis, 267 (7)(2014), 2077–2151.
- [11] E. Kreyszig, *Introductory Functional Analysis with Applications*, Wiley Classics Library, John Wiley & Sons, New York, 1989.

- [12] C. Letrouit, *From internal to pointwise control for the 1D heat equation and minimal control time*, Systems & Control Letters, 133 (2019), 7 pp.
- [13] W. A. J. Luxemburg, J. Korevaar, *Entire functions and Müntz-Szász type approximation*, Trans. Am. Math. Soc., 57 (1971), 23–37.
- [14] S. Micu, E. Zuazua, *An Introduction to the Controllability of Partial Differential Equations*, Quelques questions de théorie du contrôle, T. Sari, ed., Collection Travaux en Cours, Hermann, 2005, 67-150.
- [15] V. J. Mizel, T. I. Seidman, *Observation and prediction for the heat equation*, J. Math. Anal. Appl., 28 (1969), 303–312.
- [16] C. G. Moreira, *Frações Contínuas, Representações de Números e Aproximações Diofantinas*, 1^o Colóquio da Região Sudeste, IMPA, 2011.
- [17] P. M. Wong, *Diophantine approximation and the theory of holomorphic curves*, Notre Dame Mathematical Lectures, 1990, 115–156.