

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Superfícies mínimas nos Espaços
Damek-Ricci Lorentzianos
4-dimensionais

Railane Antonia da Silva

JOÃO PESSOA – PB
OUTUBRO DE 2019

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Superfícies mínimas nos Espaços Damek-Ricci Lorentzianos 4-dimensionais

por

Railane Antonia da Silva

sob a orientação do

Prof(a). Dra. Gabriela Albuquerque Wanderley

João Pessoa – PB
Outubro de 2019

Catálogo na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

S586s Silva, Railane Antonia da.
Superfícies mínimas nos espaços Damek-Ricci
Lorentzianos 4-dimensionais / Railane Antonia da Silva.
- João Pessoa, 2019.
67 f.

Orientação: Gabriela Albuquerque Wanderley.
Dissertação (Mestrado) - UFPB/CCEN.

1. Matemática. 2. Superfícies mínimas. 3. Espaços
Damek-Ricci. 4. Representação de Weierstrass. I.
Wanderley, Gabriela Albuquerque. II. Título.

UFPB/BC

CDU 51(043)

Superfícies mínimas nos Espaços Damek-Ricci Lorentzianos 4-dimensionais

por

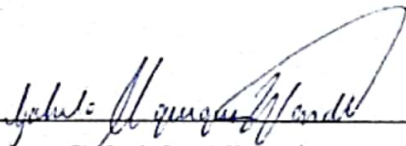
Railane Antonia da Silva ¹

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Paraíba como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

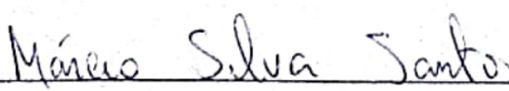
Área de Concentração: Geometria \ Topologia

Aprovada em 11 de Outubro de 2019.

Banca Examinadora:


Prof(a). Dra. Gabriela Albuquerque Wanderley – UFPB
(Orientador)


Prof. Dr. Feliciano Marcílio Aguiar Vitória – UFAL
(Examinador Externo)


Prof. Dr. Márcio Silva Santos – UFPB
(Examinador Interno)

¹O autor foi bolsista da CAPES durante a elaboração desta dissertação.

Aos meus pais.

Agradecimentos

Agradeço a Deus pelo imenso Amor e maravilhosa Graça. A Ele toda honra e glória.

À minha família, em especial, a minha mãe Claudionici, pelo amor e dedicação.

À minha orientadora Dra. Gabriela Albuquerque Wanderley pelos ensinamentos, compreensão e paciência durante esse período.

Aos meus irmãos em Cristo Jesus, Antônio Moraes, Sueli Medeiros, Benedict Pontes, Daniele Silva, Cleyde Duarte, Edna Maria, Maria da Penha Cabral e Maria Pereira da Silva pelas orações e acolhida.

Aos meus amigos Getes Barbosa, Jessica Scheidegger, Marcos Ferreira, Angélica Carvalho e Raoní Cabral, Johnatan Costa, Lenin Alexandre, Lorena Augusto e Douglas Queiroz pela amizade e companherismo.

Aos professores e funcionários do PPGMAT-UFPB pela dedicação e profissionalismo.

À CAPES pelo apoio financeiro.

Resumo

Neste trabalho, faremos um estudo detalhado sobre o Grupo de Lie munido de uma métrica Lorentziana invariante à esquerda, denominado espaço de Damek-Ricci. A partir dos resultados obtidos por Adriana A. Cintra, Francesco Mercuri e Irene I. Onnis em "Minimal surfaces in Lorentzian Heisenberg group and Damek–Ricci spaces via the Weierstrass representation" [5], apresentamos a construção da fórmula da representação de Weierstrass, bem como alguns exemplos de imersões mínimas conformes, para o caso em que esses espaços são Lorentzianos 4-dimensionais.

Palavras-chave: Superfícies mínimas, Teorema da representação de Weierstrass, espaços Damek-Ricci, grupos de Lie.

Abstract

In this work, we will detail the study of the Lie Group equipped with a left invariant Lorentzian metric called Damek-Ricci space. Based on the results obtained by Adriana A. Cintra, Francesco Mercuri and Irene I. Onnis in "Minimal surfaces in Lorentzian Heisenberg group and Damek–Ricci spaces via the Weierstrass representation"[5], we present the construction of the formula of representation of Weierstrass, as well as some examples of conformal minimal immersions, for the case where these spaces are 4-dimensional Lorentzian.

Keywords: Minimal surfaces, Weierstrass representation theorem, Damek-Ricci spaces, Lie groups.

Sumário

Introdução	2
1 A Representação de Weierstrass	7
1.1 Representação em variedades Riemannianas	7
1.2 Representação em variedades Lorentzianas	11
1.2.1 Álgebra dos números paracomplexos	12
1.2.2 Representação em variedades Lorentzianas n -dimensionais . . .	14
1.2.3 Representação de Weierstrass para Grupos de Lie	18
2 A Geometria dos Espaços Damek-Ricci	21
2.1 O grupo de Heisenberg generalizado	21
2.2 Espaços Damek-Ricci Lorentzianos do primeiro tipo	23
2.3 Espaços Damek-Ricci Lorentzianos do segundo tipo	26
3 A Representação de Weierstrass para os Espaços Damek-Ricci	27
3.1 O Grupo $\mathbb{S}_{m+n+1}^1$	28
3.1.1 O Grupo $\mathbb{S}_4^1$	29
3.2 O Grupo $\mathbb{S}_{m+n+1}^{m+n}$	39
3.2.1 O Grupo $\mathbb{S}_4^3$	40
4 Exemplos	49
4.1 Imersões do Primeiro Tipo Lorentziano	49
4.1.1 Exemplo 1	49
4.1.2 Exemplo 2	52
4.2 Imersões do Segundo Tipo Lorentziano	54
4.2.1 Exemplo 3	54
4.2.2 Exemplo 4	56
Referências Bibliográficas	59

Introdução

O estudo das superfícies mínimas ganhou notoriedade em 1860 com o desenvolvimento da fórmula de representação para tais superfícies em $\mathbb{R}^3$ pelo alemão Karl Weierstrass através da análise complexa. Conhecida atualmente como Fórmula da Representação de Weierstrass, essa fórmula consiste em uma ferramenta indispensável na construção de exemplos de superfícies mínimas, além de possibilitar o uso da teoria das funções holomorfas para investigar propriedades estruturais de tais superfícies imersas em Espaços Euclidianos. J. Lira, M. Melo e F. Mercuri em [22] apresentaram a versão local da Representação de Weierstrass da seguinte forma:

Teorema 0.1. (*Representação de Weierstrass*). *Sejam $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ um conjunto aberto munido de uma coordenada complexa $z = u + iv$ e M é uma superfície de Riemann. Seja $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma imersão mínima conforme. Definindo $\phi \in \Gamma(f^*TM \otimes \mathbb{C})$ como o vetor tangente complexo*

$$\phi = \frac{\partial f}{\partial z} := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial u} - i \frac{\partial f}{\partial v} \right).$$

Então, as componentes Euclidianas $\phi_a, a = 1, 2, 3$, de ϕ , definidas por

$$\phi = \sum_{a=1}^3 \phi_a \frac{\partial}{\partial x_a},$$

satisfazem as seguintes condições:

- i) $|\phi_1|^2 + |\phi_2|^2 + |\phi_3|^2 > 0$,*
- ii) $\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 = 0$,*
- iii) $\frac{\partial}{\partial x_a} = 0$.*

Reciprocamente, se Ω é simplesmente conexo e $\phi_a : \Omega \rightarrow \mathbb{C}, a = 1, 2, 3$, são funções que satisfazem as condições acima, a aplicação

$$f = 2\text{Re} \int \phi dz$$

é uma imersão mínima conforme bem definida.

Em 1979, K. Kenmotsu em [12] estudou analiticamente a aplicação de Gauss de superfícies imersas arbitrárias em $\mathbb{R}^3$. A partir disso, apresentou a prova do seguinte resultado:

Teorema 0.2. *A aplicação de Gauss Ψ de uma superfície imersa em $\mathbb{R}^3$ satisfaz a Equação de Beltrami:*

$$H \frac{\partial \Psi}{\partial z} = \phi \frac{\partial \Psi}{\partial \bar{z}}.$$

onde H denota a curvatura média da superfície.

Esse resultado consiste na generalização do teorema na teoria de superfícies mínimas em $\mathbb{R}^3$, uma vez que a aplicação de Gauss dessas superfícies é uma aplicação holomorfa na esfera de Riemann. No caso de superfícies imersas de curvatura média constante não-nula, K. Kenmotsu, a partir da fórmula generalizada de Weierstrass, mostrou como construir uma imersão isométrica de uma variedade bidimensional simplesmente conexa em $\mathbb{R}^3$ tal que a aplicação de Gauss seja uma aplicação harmônica fornecida.

Considerado pioneiro da teoria global das superfícies mínimas completas no espaço euclidiano 3-dimensional, R. Osserman (ver [26] e [27]), a partir do conhecimento da estrutura compacta de Riemann de uma superfície mínima, da aplicação de Gauss e dos dados geométricos-analíticos, apresentou a formulação global do teorema da Representação de Weierstrass para tais superfícies mínimas de curvatura total finita.

As generalizações das fórmulas clássicas de Weierstrass para superfícies genéricas imersas em $\mathbb{R}^3$ possibilitam descrições diretas das superfícies e o estudo das propriedades globais de superfícies imersas em $\mathbb{R}^3$ e suas deformações integráveis.

Em 1999, B. Konopelchenko e G. Landofli em [18] apresentaram generalizações da Representação de Weierstrass para superfícies imersas nos espaços multidimensionais Euclidianos e Riemannianos. A partir da comparação dos resultados obtidos com as fórmulas de K. Kenmotsu em [12], estudaram as propriedades do funcional de Willmore para imersão nos espaços Euclidianos $\mathbb{R}^3$. Em particular, estabeleceram uma forma mais simples para o funcional de Willmore, antes dado por

$$W = \int \vec{H}^2 [dS],$$

agora:

$$W = 4 \int p^2 dx dy (z = x + iy).$$

A representação generalizada de Weierstrass obtida provou ser uma ferramenta eficaz para estudar superfícies em $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^4$ e suas deformações integráveis, uma vez que

permite construir uma nova classe de deformações de superfícies através da equação de Veselov-Novikov modificada (ver [16] e [17]). Dessa forma, esses autores provaram que a característica dessas deformações integráveis é que o funcional Willmore permanece invariável (ver [19] e [3]).

Em 1983, O. Kobayashi em [13] obteve um teorema do tipo Representação de Weierstrass no espaço Lorentz-Minkowski 3-dimensional $\mathbb{L}^3 = (\mathbb{R}^3, g = dx_1^2 + dx_2^2 - dx_3^2)$ para imersões do tipo-espaço. Neste mesmo espaço, J. Konderak em [15] provou uma versão global do teorema da Representação de Weierstrass para imersões do tipo-tempo usando funções $\mathbb{L}$ -diferenciáveis com valores na álgebra dos números de Lorentz $\mathbb{L} = \{u + \tau v; u, v \in \mathbb{R} \text{ e } \tau^2 = 1\}$, onde τ é a unidade imaginária. Em 2011, J. Lira, M. Melo e F. Mercuri em [22] estenderam esses teoremas da Representação de Weierstrass para superfícies mínimas em variedades Lorentzianas 3-dimensionais.

A descrição de um método para obter uma fórmula de Representação de Weierstrass para superfícies mínimas simplesmente conexas em variedades Riemannianas imersas em $\mathbb{H}_3$ e $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ foi dada por F. Mercuri, S. Montaldo e P. Piu em [23] a partir da equação do mapa harmônico padrão. O grupo $\mathbb{H}_3$ é um grupo de Lie Heisenberg 3-dimensional, 2-nilpotente isomorfo ao $\mathbb{R}^3$, munido de uma métrica invariante à esquerda

$$g = dx_1^2 + dx_2^2 + \left(dx_3 + \frac{x_2 dx_1}{2} - \frac{x_1 dx_2}{2} \right)^2.$$

O $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ também é um grupo de Lie com a estrutura produto e munido com a métrica invariante à esquerda

$$g = \frac{dx_1^2 + dx_2^2}{x_2^2} + dx_3^2,$$

onde o plano hiperbólico $\mathbb{H}^2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 > 0\}$ com a estrutura de grupo obtida pela composição de aplicações próprias afins é um grupo de Lie e a métrica $g_{\mathbb{H}^2} = (dx_1^2 + dx_2^2)/x_2^2$ é invariante à esquerda.

A partir da introdução de uma classe de grupos de Lie 2-nilpotentes que surgem da noção de composição de formas quadráticas devido a A. Kaplan em [11] e pelas propriedades geométricas de suas extensões unidimensionais introduzidas por E. Damek em [7], E. Damek e F. Ricci em [8] apresentaram um contra-exemplo para a conjectura de Lichnerowicz feita em [21] em 1944. A. Lichnerowicz questionou a possibilidade dos espaços harmônicos de dimensão maior que 4 coincidirem com espaços simétricos de posto 1, uma vez que conseguiu provar que em dimensões não superiores a 4 os espaços harmônicos coincidem com os espaços simétricos de posto 1.

Em 1990, Z. Szabó em [25] usando os espaços de cobertura universal, forneceu uma

prova dessa conjectura para variedades harmônicas compactas em dimensões arbitrárias que possuem um grupo fundamental finito. Em 1992, E. Damek e F. Ricci em [8], provaram que no caso não-compacto, a conjectura de Lichnerowicz, em geral, não é verdadeira para infinitas dimensões, sendo a menor delas 7. O contraexemplo dado por E. Damek e F. Ricci, consiste em um grupo de Lie simplesmente conexo, onde a álgebra de Lie é a soma semi-direta da álgebra generalizada de Heisenberg com um espaço vetorial unidimensional, equipado com a métrica induzida invariante à esquerda chamado de espaço Damek-Ricci.

Neste trabalho iremos dar uma versão detalhada do artigo [5] de A. Cintra, F. Mercuri e I. Onnis. Apresentaremos a construção da fórmula da Representação de Weierstrass para os espaços de Damek-Ricci Lorentzianos 4-dimensionais de dois tipos. O espaço Damek-Ricci Lorentziano 4-dimensional do primeiro tipo, denotado por $\mathbb{S}_4^1$, é equipado com uma métrica Lorentziana invariante à esquerda, onde consideramos uma métrica Riemanniana no fator Heisenberg e uma métrica negativa no fator $\mathbb{R}$. Nestes espaços encontraremos as condições de harmonicidade que satisfará o seguinte Teorema:

Teorema 0.3. *Seja $\Omega \subseteq \mathbb{K}$ um conjunto aberto munido de coordenadas (para)complexas e $f : \Omega \rightarrow \mathbb{S}_4^1$ de imersão mínima conforme. Então, os componentes do vetor tangente (para)complexo*

$$\phi = \frac{\partial f}{\partial z} = \sum_{i=1}^4 \psi_i e_i$$

satisfazem as seguintes condições:

- i) $|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 + |\psi_3|^2 - |\psi_4|^2 \neq 0$,
- ii) $\psi_1^2 + \psi_2^2 + \psi_3^2 - \psi_4^2 = 0$,
- iii) $\frac{\partial \psi_k}{\partial \bar{z}} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^4 L_{ij}^k \bar{\psi}_i \psi_j = 0, \quad k = 1, 2, 3, 4.$

Reciprocamente, se Ω é simplesmente conexo e $\psi_i : \Omega \rightarrow \mathbb{K}, i = 1, 2, 3, 4$, são funções que satisfazem as condições acima, então a aplicação $f : \Omega \rightarrow \mathbb{S}_4^1$ com coordenadas

$$f_i = 2\mathcal{R}e \int \sum_{j=1}^4 A_{ij} \psi_j dz, \quad i = 1, 2, 3, 4,$$

define uma imersão mínima conforme em $\mathbb{S}_4^1$.

Analogamente, para o espaço Damek-Ricci Lorentziano 4-dimensional do segundo tipo, denotado por $\mathbb{S}_4^3$, consideramos uma métrica Lorentziana no fator Heisenberg e

uma métrica positiva em $\mathbb{R}$. Assim, encontraremos as condições de harmonicidade que satisfará o seguinte Teorema:

Teorema 0.4. *Seja $\Omega \subseteq \mathbb{K}$ um conjunto aberto munido de coordenadas (para)complexas e $f : \Omega \rightarrow \mathbb{S}_4^3$ de imersão mínima conforme. Então, os componentes do vetor tangente (para)complexo*

$$\phi = \frac{\partial f}{\partial z} = \sum_{i=1}^4 \psi_i e_i$$

satisfazem as seguintes condições:

- i) $|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 - |\psi_3|^2 - |\psi_4|^2 \neq 0$,
- ii) $\psi_1^2 + \psi_2^2 - \psi_3^2 - \psi_4^2 = 0$.
- iii) $\frac{\partial \psi_k}{\partial \bar{z}} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^4 L_{ij}^k \bar{\psi}_i \psi_j = 0, \quad k = 1, 2, 3, 4$.

Reciprocamente, se Ω é simplesmente conexo e $\psi_i : \Omega \rightarrow \mathbb{K}, i = 1, 2, 3, 4$, são funções que satisfazem as condições acima, então a aplicação $f : \Omega \rightarrow \mathbb{S}_4^3$ com coordenadas

$$f_i = 2\text{Re} \int \sum_{j=1}^4 A_{ij} \psi_j dz, \quad i = 1, 2, 3, 4$$

define uma imersão mínima tipo-tempo (ou tipo-espaco) conforme em $\mathbb{S}_4^3$.

Dividiremos esse trabalho da seguinte maneira:

No *capítulo 1* apresentaremos a Representação de Weierstrass em variedades Riemannianas e Lorentzianas n -dimensionais. Em seguida, a Representação para o caso dos Grupos de Lie.

O *capítulo 2* é dedicado a Geometria dos espaços Damek-Ricci, apresentando o grupo de Heisenberg Riemanniano generalizado e o grupo de Heisenberg Lorentziano generalizado.

No *capítulo 3*, descreveremos a Representação de Weierstrass para os Espaços Damek-Ricci Lorentzianos $\mathbb{S}_4^1$ e $\mathbb{S}_4^3$. Finalmente, no *capítulo 4* apresentaremos alguns exemplos de superfícies mínimas tipo-espaco e tipo-tempo nestes espaços.

Capítulo 1

A Representação de Weierstrass

Neste capítulo, apresentaremos a Representação de Weierstrass em variedades Riemannianas e Lorentzianas n -dimensionais. No caso riemanniano, a representação foi obtida por F. Mercuri, S. Montaldo e P. Piu em [23]. Esses autores, usando a equação do mapa harmônico padrão, estenderam a versão local da Representação de Weierstrass para o caso de superfícies mínimas, simplesmente conexas, n -dimensionais imersas em uma variedade Riemanniana. J. Lira, M. Melo e F. Mercuri em [22] apresentaram uma Representação de Weierstrass para superfícies em variedades Lorentzianas 3-dimensionais e a generalização dessa representação é dada por A. Cintra em [4].

1.1 Representação em variedades Riemannianas

Definição 1.1. *Sejam (M^n, g) uma variedade Riemanniana n -dimensional, Σ uma superfície de Riemann e $f : \Sigma \rightarrow M^n$ uma aplicação suave. O fibrado pull-back $f^*(TM)$ é definido por*

$$f^*(TM) = \{(e, v) \in \Sigma \times TM : \pi(v) = f(e), v \in T_{f(e)}M\},$$

e possui uma métrica e uma conexão compatível, a conexão de pull-back, induzidas pela métrica Riemanniana e a conexão de Levi-Civita da variedade M .

Considerando a complexificação do fibrado $\mathbb{E} = f^*(TM) \otimes \mathbb{C}$, a métrica g pode ser estendida para $\mathbb{E}$ como:

- Uma forma bilinear complexa $(\cdot, \cdot) : \mathbb{E} \times \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{C}$;
- Uma métrica Hermitiana $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle : \mathbb{E} \times \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{C}$,

e são relacionadas por: $\langle\langle V, W \rangle\rangle = (V, \overline{W})$.

1. A Representação de Weierstrass

Sejam (u, v) coordenadas locais em Σ e $z = u + iv$ o parâmetro local complexo e definido os operadores complexos usuais:

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial u} - i \frac{\partial}{\partial v} \right) \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial u} + i \frac{\partial}{\partial v} \right).$$

A conexão *pull-back* estende a uma conexão complexa em $\mathbb{E}$, Hermitiana com respeito à métrica $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$ e tem-se (veja em [20]) que $\mathbb{E}$ possui uma única estrutura holomorfa tal que a seção $W : \Sigma \rightarrow \mathbb{E}$ é holomorfa se, e somente se,

$$\tilde{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial \bar{z}}} W = 0, \tag{1.1}$$

onde $\tilde{\nabla}$ é a conexão *pull-back*.

Considerando $\phi : \Sigma \rightarrow \mathbb{E}$ a seção do fibrado $\mathbb{E}$ dada por

$$\phi = \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial u} - i \frac{\partial f}{\partial v} \right),$$

onde

$$\left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_p = f_{*p} \left(\left. \frac{\partial}{\partial u} \right|_p \right), \quad \left. \frac{\partial f}{\partial v} \right|_p = f_{*p} \left(\left. \frac{\partial}{\partial v} \right|_p \right),$$

valem as seguintes propriedades:

i) A aplicação f é uma imersão se, e somente se, $\langle\langle \phi, \phi \rangle\rangle \neq 0$. De fato, pois

$$\begin{aligned} \langle\langle \phi, \phi \rangle\rangle &= \frac{1}{4} \left\langle \left\langle \left(\frac{\partial f}{\partial u} - i \frac{\partial f}{\partial v} \right), \left(\frac{\partial f}{\partial u} - i \frac{\partial f}{\partial v} \right) \right\rangle \right\rangle \\ &= \frac{1}{4} \left[g \left(\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial u} \right) + g \left(\frac{\partial f}{\partial v}, \frac{\partial f}{\partial v} \right) \right] \\ &= \frac{1}{4} \left(\left| \frac{\partial f}{\partial u} \right|^2 + \left| \frac{\partial f}{\partial v} \right|^2 \right). \end{aligned}$$

ii) Se f é uma imersão, então f é conforme se, e somente se, $(\phi, \phi) = 0$. De fato, pois

$$\begin{aligned} (\phi, \phi) &= \frac{1}{4} \left(\left(\frac{\partial f}{\partial u} - i \frac{\partial f}{\partial v} \right), \left(\frac{\partial f}{\partial u} - i \frac{\partial f}{\partial v} \right) \right) \\ &= \frac{1}{4} \left(g \left(\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial u} \right) - ig \left(\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v} \right) - ig \left(\frac{\partial f}{\partial v}, \frac{\partial f}{\partial u} \right) - g \left(\frac{\partial f}{\partial v}, \frac{\partial f}{\partial v} \right) \right) \\ &= \frac{1}{4} \left[\left| \frac{\partial f}{\partial u} \right|^2 - \left| \frac{\partial f}{\partial v} \right|^2 - 2ig \left(\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v} \right) \right]. \end{aligned}$$

1. A Representação de Weierstrass

Assim, $(\phi, \phi) = 0$ se, e somente se,

$$\left| \frac{\partial f}{\partial u} \right|^2 = \left| \frac{\partial f}{\partial v} \right|^2 \quad \text{e} \quad g \left(\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v} \right) = 0,$$

ou seja, se e somente se, f é conforme.

Seja $f : \Sigma \rightarrow M$ uma imersão conforme e $z = u + iv$ um parâmetro local conforme. Então, a métrica induzida é dada por $ds^2 = \lambda^2(du^2 + dv^2) = \lambda^2 |dz|^2$, onde $\lambda = \left| \frac{\partial f}{\partial u} \right| = \left| \frac{\partial f}{\partial v} \right|$ e o operador Beltrami-Laplace em Σ , com respeito à métrica induzida, é dado por:

$$\Delta = \lambda^{-2} \left(\frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial f}{\partial v} \right) = 4\lambda^{-2} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \frac{\partial f}{\partial z}.$$

Definição 1.2. *Seja Σ uma superfície de Riemann. Uma aplicação $f : \Sigma \rightarrow M$ é harmônica se, e somente se,*

$$\tau(f) = \text{tr}(\nabla df) = 0, \quad (1.2)$$

onde $\tau(f)$ é dito campo de tensão de f . Essa equação é conhecida com equação harmônica.

F. Mercuri, S. Montaldo e P. Piu em [23] apresentaram a equação harmônica (1.2) em termos de coordenadas locais $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ em uma vizinhança $U \subset M^n$ tal que $U \cap f(\Sigma) \neq \emptyset$. Assim, em um aberto $\Omega \subset \Sigma$,

$$\phi = \sum_{j=1}^n \phi_j \frac{\partial}{\partial x_j},$$

para algumas funções complexas ϕ_j definidas em Ω . Com respeito a decomposição de ϕ , o campo de tensão pode ser escrito como

$$\begin{aligned} \tau(f) &= \sum_{i=1}^n \left\{ \Delta f_i + 4\lambda^{-2} \sum_{j,k=1}^n \Gamma_{jk}^i \frac{\partial f_j}{\partial \bar{z}} \frac{\partial f_k}{\partial z} \right\} \frac{\partial}{\partial x_i} \\ &= 4\lambda^{-2} \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{\partial \phi_i}{\partial \bar{z}} + \sum_{j,k=1}^n \Gamma_{jk}^i \bar{\phi}_j \phi_k \right\} \frac{\partial}{\partial x_i}, \end{aligned} \quad (1.3)$$

1. A Representação de Weierstrass

onde Γ_{jk}^i são os símbolos de Christoffel de M . A seção ϕ é holomorfa se, e somente se,

$$\begin{aligned}
 \tilde{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial \bar{z}}} \left(\sum_{i=1}^n \phi_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right) &= \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{\partial \phi_i}{\partial \bar{z}} \frac{\partial}{\partial x_i} + \phi_i \tilde{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial \bar{z}}} \frac{\partial}{\partial x_i} \right\} \\
 &= \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{\partial \phi_i}{\partial \bar{z}} \frac{\partial}{\partial x_i} + \phi_i \nabla_{\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}} \frac{\partial}{\partial x_i} \right\} \\
 &= \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{\partial \phi_i}{\partial \bar{z}} \frac{\partial}{\partial x_i} + \phi_i \sum_{j=1}^n \bar{\phi}_j \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \frac{\partial}{\partial x_i} \right\} \\
 &= \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{\partial \phi_i}{\partial \bar{z}} \frac{\partial}{\partial x_i} + \phi_i \sum_{j,k=1}^n \bar{\phi}_j \Gamma_{ji}^k \frac{\partial}{\partial x_k} \right\} \\
 &= \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{\partial \phi_i}{\partial \bar{z}} + \sum_{j,k=1}^n \Gamma_{jk}^i \bar{\phi}_j \phi_k \right\} \frac{\partial}{\partial x_i} = 0.
 \end{aligned}$$

Então, ϕ é holomorfa se, e somente se,

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial \bar{z}} + \sum_{j,k=1}^n \Gamma_{jk}^i \bar{\phi}_j \phi_k = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (1.4)$$

De (1.3) e (1.4) temos que

$$4\lambda^{-2} \left(\tilde{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial \bar{z}}} \phi \right) = \tau(f).$$

Assim, $f : \Sigma \rightarrow M$ é harmônica se, e somente se, ϕ é uma seção holomorfa de $\mathbb{E}$. Agora, já que uma aplicação conforme de uma superfície para uma variedade Riemanniana é harmônica se, e somente se, for uma imersão mínima (ver em [9]), concluímos que uma imersão conforme é mínima se, e somente se, ϕ é uma seção holomorfa de $\mathbb{E}$.

Nessas condições, temos o seguinte resultado:

Teorema 1.1. (*Representação de Weierstrass em variedades Riemannianas*) *Sejam (M^n, g) uma variedade Riemanniana n -dimensional e $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ coordenadas locais. Sejam ϕ_j , $j = 1, \dots, n$, funções a valores complexos definidas em um domínio aberto simplesmente conexo $\Omega \subset \mathbb{C}$ que são soluções de (1.4). Então, a aplicação f com funções coordenadas dadas por:*

$$f_j(u, v) = 2\operatorname{Re} \left(\int_{z_0}^z \phi_j dz \right)$$

está bem definida e define uma imersão conforme mínima se, e somente se, as seguintes condições são satisfeitas:

$$(1) \sum_{j,k=1}^n g_{jk} \phi_j \bar{\phi}_k \neq 0;$$

1. A Representação de Weierstrass

$$(2) \sum_{j,k=1}^n g_{jk} \phi_j \phi_k = 0.$$

Demonstração. Dado $A \subset \Omega$ aberto, mostremos que a integral de ϕ_j sobre qualquer curva fechada $\gamma = \partial A$, é igual a zero. De fato, pelo Teorema de Green, temos que

$$\mathcal{R}e \int_{\gamma} \phi_i dz = \int_{\gamma} \mathcal{R}e(\phi_i) du - \mathcal{I}m(\phi_i) dv = - \int \int_A \left(\frac{\partial \mathcal{R}e(\phi_i)}{\partial v} + \frac{\partial \mathcal{I}m(\phi_i)}{\partial u} \right) dudv. \quad (1.5)$$

Note que a equação (1.4) pode ser escrita como:

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial \bar{z}} + \sum_{j,k=1}^n \Gamma_{jk}^i \phi_k \bar{\phi}_j = \frac{\partial \phi_i}{\partial \bar{z}} + \sum_{j \neq k}^n \phi_k \bar{\phi}_j \Gamma_{jk}^i + \sum_{j=1}^n \Gamma_{jj}^i |\phi_j|^2 = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Como $\bar{\phi}_j \phi_k + \bar{\phi}_k \phi_j = 2\mathcal{R}e(\bar{\phi}_j \phi_k)$, segue que

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial \bar{z}} + 2 \sum_{j>k}^n \Gamma_{jk}^i \mathcal{R}e(\phi_k \bar{\phi}_j) + \sum_{j=1}^n \Gamma_{jj}^i |\phi_j|^2 = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

onde os Γ 's são calculados em $f_i(z) = 2\mathcal{R}e \int_{z_0}^z \phi_i dz$. Portanto, $\frac{\partial \phi_i}{\partial \bar{z}} \in \mathbb{R}$. Desde que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_i}{\partial \bar{z}} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial u} + i \frac{\partial \phi_i}{\partial v} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \mathcal{R}e(\phi_i)}{\partial u} - \frac{\partial \mathcal{I}m(\phi_i)}{\partial v} \right) + \frac{i}{2} \left(\frac{\partial \mathcal{R}e(\phi_i)}{\partial v} + \frac{\partial \mathcal{I}m(\phi_i)}{\partial u} \right), \end{aligned}$$

temos

$$\frac{\partial \mathcal{R}e(\phi_i)}{\partial v} + \frac{\partial \mathcal{I}m(\phi_i)}{\partial u} = 0.$$

Logo, de (1.5) segue que $\mathcal{R}e(\int_{\gamma} \phi_i dz) = 0$, ou seja, a 1-forma $\phi_i dz$ não tem períodos reais. Dessa forma, concluímos que f é uma função bem definida. Além disso, note que as propriedades *i*) e *ii*) garantem que f é uma imersão conforme. □

1.2 Representação em variedades Lorentzianas

Nesta seção introduziremos alguns conceitos sobre a álgebra dos números para-complexos (ou de Lorentz) $\mathbb{L}$. Maiores detalhes sobre a álgebra $\mathbb{L}$ podem ser encontrados em [15]. Além disso, apresentaremos os resultados obtidos por A. Cintra em [4], sobre a Representação de Weierstrass em variedades Lorentzianas n -dimensionais e para o caso de grupos de Lie.

1. A Representação de Weierstrass

1.2.1 Álgebra dos números paracomplexos

Definição 1.3. A álgebra dos números paracomplexos é a álgebra dada por

$$\mathbb{L} = \{a + \tau b, a, b \in \mathbb{R}\},$$

onde τ é uma unidade imaginária tal que $\tau^2 = 1$.

As operações de soma e produto em $\mathbb{L}$ são definidas por:

$$(a_1 + \tau b_1) + (a_2 + \tau b_2) := (a_1 + a_2) + \tau(b_1 + b_2);$$

$$(a_1 + \tau b_1) \cdot (a_2 + \tau b_2) := (a_1 a_2 + a_2 b_2) + \tau(a_1 b_2 + b_1 a_2).$$

Munido dessas operações, $\mathbb{L}$ se torna uma álgebra associativa, comutativa e com unidade sobre os reais e o conjunto de divisores zero é o conjunto

$$K = \{a \pm \tau a, a \neq 0\}.$$

Esta álgebra é isomorfa a $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$ (com a multiplicação de coordenadas) via a aplicação

$$\begin{aligned} \rho : \mathbb{L} &\rightarrow \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \\ a + \tau b &\mapsto \frac{1}{2}(a + b, a - b). \end{aligned}$$

Como no caso complexo, a paraconjugação é dada por $\overline{a + \tau b} := a - \tau b$ e a $\mathbb{L}$ -norma de $z = a + \tau b \in \mathbb{L}$ é definida por

$$|z| = |z\bar{z}|^{\frac{1}{2}} = |a^2 - b^2|^{\frac{1}{2}}.$$

Se $z \in \mathbb{L} \setminus K \cup \{0\}$, então z é inversível e o inverso é dado por $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}}$.

Definição 1.4. Seja $\Omega \subseteq \mathbb{L}$ um conjunto aberto e $z_0 \in \Omega$. A $\mathbb{L}$ -derivada de uma função $f : \Omega \rightarrow \mathbb{L}$ em z_0 é definida por

$$f'(z_0) := \lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ z - z_0 \in \mathbb{L} \setminus K \cup \{0\}}} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0},$$

se o limite existe. Se $f'(z_0)$ existe, dizemos que f é $\mathbb{L}$ -diferenciável em z_0 .

Observação 1.1. A condição de $\mathbb{L}$ -diferenciabilidade é muito menos restritiva que a diferenciabilidade complexa usual. Por exemplo, a $\mathbb{L}$ -diferenciabilidade em z_0 não implica na continuidade de f em z_0 .

1. A Representação de Weierstrass

Proposição 1. A $\mathbb{L}$ -diferenciabilidade em um conjunto aberto $\Omega \subseteq \mathbb{L}$ implica na diferenciabilidade usual em Ω e $df(z_0)(z) = f'(z_0)z, \forall z \in \Omega$.

Demonstração. A Demonstração desta proposição se encontra em [4]. $\square$

Definição 1.5. Os operadores paracomplexos são dados por:

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial u} + \tau \frac{\partial}{\partial v} \right) \quad e \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial u} - \tau \frac{\partial}{\partial v} \right),$$

onde $z = u + \tau v$.

Teorema 1.2. Seja $f : \Omega \rightarrow \mathbb{L}$ tal que $f(u, v) = a(u, v) + \tau b(u, v)$, onde $u + \tau v \in \Omega$ e a, b são de classe C^1 em Ω . Então f é $\mathbb{L}$ -diferenciável se, e somente se, $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$.

Demonstração. Pela proposição 1 f é $\mathbb{L}$ -diferenciável se, e somente se, $df(z)$ é uma matriz da forma

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}.$$

Então f é $\mathbb{L}$ -diferenciável se, e somente se,

$$\begin{cases} \frac{\partial a}{\partial u}(u, v) = \frac{\partial b}{\partial v}(u, v) \\ \frac{\partial a}{\partial v}(u, v) = \frac{\partial b}{\partial u}(u, v). \end{cases} \quad (1.6)$$

Desde que

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial u} - \tau \frac{\partial f}{\partial v} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial a}{\partial u} + \tau \frac{\partial b}{\partial u} \right) - \tau \left(\frac{\partial a}{\partial v} + \tau \frac{\partial b}{\partial v} \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial a}{\partial u} - \frac{\partial b}{\partial v} \right) + \tau \left(\frac{\partial b}{\partial u} - \frac{\partial a}{\partial v} \right) \right], \end{aligned}$$

tem-se que $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ se, e somente se, valem as equações para-Cauchy-Riemann (1.6). $\square$

Observação 1.2. Note que derivando as equações (1.6) temos que as condições de integrabilidade são dadas pelas equações de onda

$$a_{uu} - a_{vv} = 0 = b_{uu} - b_{vv}.$$

Proposição 2. Seja γ uma curva em $\mathbb{L}$. Se $f : \Omega \rightarrow \mathbb{L}$ tal que $f(u, v) = a(u, v) + \tau b(u, v)$, onde a e b são de classe C^1 , é uma função $\mathbb{L}$ -diferenciável com $\frac{\partial f}{\partial z}$ contínua, então

$$\int_{\gamma} \frac{\partial f}{\partial z} dz = f(z)|_{\gamma}.$$

1. A Representação de Weierstrass

Além disso, a integral não depende do caminho escolhido.

Demonstração. Como f é $\mathbb{L}$ -diferenciável, por (1.6) segue que

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial z} dz &= \int_{\gamma} \frac{\partial f}{\partial z} (du + \tau dv) = \int_{\gamma} (a_u + \tau b_u) du + \tau (b_v + \tau a_v) dv \\ &= (a_u du + a_v dv) + \tau (b_u du + b_v dv) = \int_{\gamma} d(a + \tau b) \\ &= (a + \tau b)|_{\gamma} = f(z)|_{\gamma}. \end{aligned}$$

□

1.2.2 Representação em variedades Lorentzianas n -dimensionais

Considerando imersões tipo-espaço e tipo-tempo, A. Cintra em [4] apresenta a generalização da Representação de Weierstrass para superfícies em variedades Lorentzianas n -dimensionais.

Sejam M uma superfície de Riemann (no caso tipo-espaço) ou uma superfície de Lorentz (no caso tipo-tempo) e $\mathbb{K}$ o conjunto dos números complexos $\mathbb{C}$ ou os números de Lorentz $\mathbb{L}$.

Sejam $(\overline{M}^n, g)$ uma variedade Lorentziana n -dimensional e $f : M \rightarrow \overline{M}^n$ uma aplicação suave. A métrica Lorentziana e a conexão de Levi-Civita de $\overline{M}$ induzem no fibrado *pull-back* $f^*(T\overline{M})$ uma métrica e uma conexão compatível, a conexão *pull-back*. Considerando a (para)complexificação do fibrado $\mathbb{E} = f^*(T\overline{M}) \otimes \mathbb{K}$, a métrica g pode ser estendida para $\mathbb{E}$ como:

- Uma forma bilinear (para)complexa $(\cdot, \cdot) : \mathbb{E} \times \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{K}$;
- Uma métrica (para)Hermitiana $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle : \mathbb{E} \times \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{K}$,

Sejam (u, v) coordenadas locais em M . Então,

1. Se M é uma superfície de Riemann, podemos considerar $z = u + iv$ o parâmetro local complexo e definir como

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial u} - i \frac{\partial}{\partial v} \right) \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial u} + i \frac{\partial}{\partial v} \right).$$

2. Se M é uma superfície de Lorentz, seja $z = u + \tau v$ o parâmetro local paracomplexo. Considerando (u, v) como coordenadas isotérmicas paracomplexas e definindo

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial u} + \tau \frac{\partial}{\partial v} \right) \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial u} - \tau \frac{\partial}{\partial v} \right),$$

pode-se considerar

$$\phi = \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial u} + \tau \frac{\partial f}{\partial v} \right)$$

como uma seção do fibrado $\mathbb{E}$, onde valem as seguintes propriedades:

- i) A aplicação f é uma imersão se, e somente se, $\langle\langle\phi, \phi\rangle\rangle \neq 0$. De fato, se f é uma imersão do tipo-tempo, então

$$\begin{aligned} \langle\langle\phi, \phi\rangle\rangle &= \frac{1}{4} \left\langle \left\langle \left(\frac{\partial f}{\partial u} + \tau \frac{\partial f}{\partial v} \right), \left(\frac{\partial f}{\partial u} + \tau \frac{\partial f}{\partial v} \right) \right\rangle \right\rangle \\ &= \frac{1}{4} \left[g \left(\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial u} \right) - \tau g \left(\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v} \right) + \tau g \left(\frac{\partial f}{\partial v}, \frac{\partial f}{\partial u} \right) - \tau^2 g \left(\frac{\partial f}{\partial v}, \frac{\partial f}{\partial v} \right) \right] \\ &= \frac{1}{4} \left[g \left(\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial u} \right) - g \left(\frac{\partial f}{\partial v}, \frac{\partial f}{\partial v} \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} g \left(\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial u} \right), \end{aligned}$$

pois (u, v) são coordenadas isotérmicas. De forma análoga, temos que $\langle\langle\phi, \phi\rangle\rangle \neq 0$ se f é uma imersão do tipo-espaço.

- ii) Se f é uma imersão, então f é conforme se, e somente se, $(\phi, \phi) = 0$. De fato, pois se f é uma imersão do tipo-tempo, então

$$\begin{aligned} (\phi, \phi) &= \frac{1}{4} \left(\left(\frac{\partial f}{\partial u} + \tau \frac{\partial f}{\partial v} \right), \left(\frac{\partial f}{\partial u} + \tau \frac{\partial f}{\partial v} \right) \right) \\ &= \frac{1}{4} \left[g \left(\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial u} \right) + \tau g \left(\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v} \right) + \tau g \left(\frac{\partial f}{\partial v}, \frac{\partial f}{\partial u} \right) + \tau^2 g \left(\frac{\partial f}{\partial v}, \frac{\partial f}{\partial v} \right) \right] \\ &= \frac{1}{4} \left[g \left(\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial u} \right) + g \left(\frac{\partial f}{\partial v}, \frac{\partial f}{\partial v} \right) \right] + \frac{\tau}{2} g \left(\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v} \right). \end{aligned}$$

Assim, $(\phi, \phi) = 0$ se, e somente se,

$$g \left(\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial u} \right) = -g \left(\frac{\partial f}{\partial v}, \frac{\partial f}{\partial v} \right) \quad \text{e} \quad g \left(\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v} \right) = 0,$$

ou seja, se e somente se, f é conforme. De forma análoga, temos que se f é uma imersão do tipo-espaço, então f é conforme se, e somente se, $(\phi, \phi) = 0$.

Teorema 1.3. *Uma imersão conforme $f : (M, h) \rightarrow (\bar{M}, g)$ de classe C^∞ é harmônica se, e somente se, é uma imersão mínima.*

Demonstração. A demonstração deste Teorema encontra-se em [4]. □

1. A Representação de Weierstrass

Sejam f uma imersão do tipo-espaço (ou tipo-tempo) e $z = u + iv$ (ou $z = u + \tau v$) um parâmetro isotérmico local. Então, a métrica induzida em M é dada por $ds^2 = \lambda^2(du^2 \pm dv^2) = \lambda^2 |dz|^2$ e o operador Beltrami-Laplace em M , com respeito a métrica induzida, é dado por:

$$\Delta_s = \lambda^{-2} \left(\frac{\partial}{\partial u} \frac{\partial}{\partial u} \pm \frac{\partial}{\partial v} \frac{\partial}{\partial v} \right) = 4\lambda^{-2} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \frac{\partial}{\partial z}.$$

Definição 1.6. Uma aplicação $f : M^2 \rightarrow \overline{M}^n$ é harmônica se, e somente se,

$$\tau_h(f) = \text{tr}_h(h \nabla df) = 0,$$

onde $\tau(f)$ é dito campo de tensão de f .

Em termos de coordenadas locais $\{u_1, u_2\}$ em M e $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ em $\overline{M}$, escrevemos

$$h = \sum_{i,j=1}^2 h_{ij} du_i du_j.$$

Assim,

$$\tau_h(f) = \sum_{\alpha=1}^n \left\{ \Delta_h f_\alpha + \sum_{i,j=1}^2 h^{ij} \sum_{\alpha,\beta,\gamma=1}^n g \Gamma_{\beta,\gamma}^\alpha \frac{\partial f_\beta}{\partial u_i} \frac{\partial f_\gamma}{\partial u_j} \right\} \frac{\partial}{\partial x_\alpha}$$

onde (h^{ij}) é a inversa da matriz (h_{ij}) , Δ_h é o operador de Laplace-Beltrami para h e $g \Gamma_{\beta,\gamma}^\alpha$ são os símbolos de Christoffel para a métrica g .

Dessa forma, considerando agora $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ um sistema de coordenadas locais em uma vizinhança U de $\overline{M}^n$ tal que $U \cap f(M) \neq \emptyset$, então em um conjunto aberto $\Omega \subset M$, temos que

$$\phi = \sum_{j=1}^n \phi_j \frac{\partial}{\partial x_j},$$

para algumas funções (para)complexas ϕ_j definidas em Ω . Com respeito à decomposição de ϕ , o campo de tensão pode ser escrito como

$$\begin{aligned} \tau_s(f) &= \sum_{i=1}^n \left\{ \Delta_s f_i + 4\lambda^{-2} \sum_{j,k=1}^n \Gamma_{jk}^i \frac{\partial f_j}{\partial \bar{z}} \frac{\partial f_k}{\partial z} \right\} \frac{\partial}{\partial x_i} \\ &= 4\lambda^{-2} \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{\partial \phi_i}{\partial \bar{z}} + \sum_{j,k=1}^n \Gamma_{jk}^i \phi_j \phi_k \right\} \frac{\partial}{\partial x_i}, \end{aligned} \quad (1.7)$$

onde Γ_{jk}^i são os símbolos de Christoffel de $\overline{M}$ e $s = f^*g$ é a métrica induzida pela aplicação f . Pelo Teorema 1.3, f é mínima se, e somente se, é harmônica. Pela

1. A Representação de Weierstrass

definição 1.6, f é mínima se, e somente se, $\tau(f) = 0$. Assim,

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial \bar{z}} + \sum_{j,k=1}^n \Gamma_{jk}^i \bar{\phi}_j \phi_k = 0. \quad (1.8)$$

Note que o sistema (1.8) pode ser escrito como:

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial \bar{z}} + \sum_{j,k=1}^n \Gamma_{jk}^i \bar{\phi}_j \phi_k = \frac{\partial \phi_i}{\partial \bar{z}} + \sum_{j \neq k}^n \bar{\phi}_j \phi_k \Gamma_{jk}^i + \sum_{j=1}^n \Gamma_{jj}^i |\phi_j|^2 = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Como $\bar{\phi}_j \phi_k + \bar{\phi}_k \phi_j = 2\mathcal{Re}(\bar{\phi}_j \phi_k)$, segue que

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial \bar{z}} + 2 \sum_{j>k}^n \Gamma_{jk}^i \mathcal{Re}(\bar{\phi}_j \phi_k) + \sum_{j=1}^n \Gamma_{jj}^i |\phi_j|^2 = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Logo, $\frac{\partial \phi_i}{\partial \bar{z}} \in \mathbb{R}$. Assim,

- Se M é uma superfície de Riemann, temos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_i}{\partial \bar{z}} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial u} + i \frac{\partial \phi_i}{\partial v} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \mathcal{Re}(\phi_i)}{\partial u} - \frac{\partial \mathcal{Im}(\phi_i)}{\partial v} \right) + \frac{i}{2} \left(\frac{\partial \mathcal{Im}(\phi_i)}{\partial u} + \frac{\partial \mathcal{Re}(\phi_i)}{\partial v} \right). \end{aligned}$$

- Se M é uma superfície de Lorentz, temos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_i}{\partial \bar{z}} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial u} - \tau \frac{\partial \phi_i}{\partial v} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \mathcal{Re}(\phi_i)}{\partial u} - \frac{\partial \mathcal{Im}(\phi_i)}{\partial v} \right) + \frac{\tau}{2} \left(\frac{\partial \mathcal{Im}(\phi_i)}{\partial u} - \frac{\partial \mathcal{Re}(\phi_i)}{\partial v} \right). \end{aligned}$$

Assim, obtemos que

$$\frac{\partial \mathcal{Im}(\phi_i)}{\partial u} \pm \frac{\partial \mathcal{Re}(\phi_i)}{\partial v} = 0.$$

Portanto, a 1-forma $\phi_i dz$ não tem períodos reais. Dessa forma, concluímos que a integral $\mathcal{Re} \int_{z_0}^z \phi_i dz$ é uma função bem definida. Nessas condições, temos o seguinte resultado:

Teorema 1.4. (*Representação de Weierstrass em variedades Lorentzianas*) Sejam $(\bar{M}^n, g)$ uma variedade Lorentziana e $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ coordenadas locais. Em um aberto simplesmente conexo $\Omega \subset \mathbb{K}$, consideremos $\phi_j, j = 1, \dots, n$, funções (para)complexas definidas

1. A Representação de Weierstrass

em Ω que são soluções de (1.8). Então a aplicação $f : \Omega \rightarrow \overline{M}$ com funções coordenadas

$$f_j(u, v) = 2\mathcal{R}e \left(\int_{z_0}^z \phi_j dz \right), \quad j = 1, \dots, n,$$

está bem definida e define uma imersão mínima conforme do tipo-tempo (ou tipo-espaço) se, e somente se, as seguintes condições são satisfeitas

$$(1) \quad \sum_{j,k=1}^n g_{jk} \overline{\phi_j} \phi_k \neq 0;$$

$$(2) \quad \sum_{j,k=1}^n g_{jk} \phi_j \phi_k = 0.$$

1.2.3 Representação de Weierstrass para Grupos de Lie

Sejam M um grupo de Lie n -dimensional dotado de uma métrica invariante à esquerda Lorentziana e $f : \Omega \subset \mathbb{K} \rightarrow M$ uma imersão mínima conforme do tipo-tempo (ou do tipo-espaço), onde $\Omega \subset \mathbb{K}$ é um conjunto aberto. Seja $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ um referencial ortonormal de campos invariantes à esquerda com $e_1, \dots, e_{n-1}$ do tipo-espaço e e_n do tipo-tempo.

Fixando um parâmetro isotérmico $z \in \Omega$, podemos escrever o campo tangente (para)complexo $\phi = \frac{\partial f}{\partial z}$ ao longo de f tanto em termos de coordenadas locais $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ em M , como usando os campos invariantes à esquerda. Então, temos que

$$\phi = \sum_{i=1}^n \phi_i \frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^n \psi_j e_j,$$

onde as funções ϕ_i e ψ_j com $i, j = 1, \dots, n$ estão relacionadas por

$$\phi_i = \sum_{j=1}^n A_{ij} \psi_j, \tag{1.9}$$

onde $A : \Omega \rightarrow GL(n, \mathbb{R})$ é uma aplicação suave. Em termos das componentes ψ_i a equação de harmonicidade (1.8) pode ser escrita como

$$\frac{\partial \psi_k}{\partial \bar{z}} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n L_{ij}^k \bar{\psi}_i \psi_j = 0, \quad k = 1, \dots, n, \tag{1.10}$$

onde os símbolos L_{ij}^k são definidos por

$$\nabla_{e_i} e_j = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n L_{ij}^k e_k, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

1. A Representação de Weierstrass

Sejam C_{ij}^k as constantes da álgebra de Lie de M definidas por $[e_i, e_j] = \sum_{k=1}^n C_{ij}^k e_k$.

Pelo Teorema de Levi-Civita, temos que

$$\begin{aligned}\langle \nabla_{e_i} e_j, e_k \rangle &= \frac{1}{2} (-\langle [e_j, e_k], e_i \rangle - \langle [e_i, e_k], e_j \rangle - \langle [e_j, e_i], e_k \rangle) \\ &= \frac{1}{2} (-C_{jk}^i \langle e_i, e_i \rangle - C_{ik}^j \langle e_j, e_j \rangle + C_{ij}^k \langle e_k, e_k \rangle).\end{aligned}$$

Sendo

$$\langle \nabla_{e_i} e_j, e_k \rangle = \frac{L_{ij}^k}{2} \langle e_k, e_k \rangle,$$

tem-se que

$$L_{ij}^k \langle e_k, e_k \rangle^2 = -C_{jk}^i \langle e_i, e_i \rangle \langle e_k, e_k \rangle - C_{ik}^j \langle e_j, e_j \rangle \langle e_k, e_k \rangle + C_{ij}^k \langle e_k, e_k \rangle^2.$$

Assim,

$$L_{ij}^k = C_{ij}^k - C_{jk}^i \epsilon_i \epsilon_k - C_{ik}^j \epsilon_j \epsilon_k,$$

onde $\epsilon_i = \langle e_i, e_i \rangle$, com $i = 1, \dots, n$. Assim, o Teorema 1.4 pode ser escrito no caso de um grupo de Lie n -dimensional como segue:

Teorema 1.5. *Seja M um grupo de Lie n -dimensional dotado de uma métrica Lorentziana invariante à esquerda e $\{e_1, \dots, e_n\}$ campos ortonormais invariantes à esquerda. Seja $f : \Omega \rightarrow M$ uma imersão mínima conforme do tipo-tempo (ou tipo-espaço), onde $\Omega \subseteq \mathbb{K}$ é um conjunto aberto. Definindo o vetor tangente (para)complexo $\phi \in \Gamma(f^*TM \otimes \mathbb{K})$ por*

$$\phi(z) = \frac{\partial f}{\partial z}.$$

Então, as componentes $\psi_i, i = 1, \dots, n$, de ϕ definidas por

$$\phi(z) = \sum_{i=1}^n \psi_i e_i,$$

satisfazem as seguintes condições:

- i) $|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 + \dots + |\psi_{n-1}|^2 - |\psi_n|^2 \neq 0$,
- ii) $\psi_1^2 + \psi_2^2 + \dots + \psi_{n-1}^2 - \psi_n^2 = 0$,
- iii) $\frac{\partial \psi_i}{\partial \bar{z}} + \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^n L_{jk}^i \bar{\psi}_j \psi_k = 0, \quad i = 1, \dots, n.$

Reciprocamente, se Ω é um conjunto simplesmente conexo e $\psi_i : \Omega \rightarrow \mathbb{K}, i = 1, \dots, n$, são funções que satisfazem as condições acima, então a aplicação $f : \Omega \rightarrow M$ cujas funções coordenadas são dadas por

1. A Representação de Weierstrass

$$f_i = 2\operatorname{Re} \left(\int \sum_{j=1}^n A_{ij} \psi_j dz \right), \quad i = 1, \dots, n$$

define uma imersão mínima tipo-tempo (ou tipo-espaço).

Capítulo 2

A Geometria dos Espaços Damek-Ricci

A partir dos trabalhos de J. Boggino em [2], E. Damek em [7] e [6], J. Berndt, F. Tricerri e L. Vanhecke em [1] apresentaram os conceitos básicos dos espaços Damek-Ricci. Esses espaços consistem em grupos de Lie conexos e simplesmente conexos, onde a álgebra de Lie é a soma semi-direta da álgebra generalizada de Heisenberg com um espaço unidimensional, dotado de uma métrica invariante à esquerda. Neste capítulo apresentaremos a geometria dos espaços Damek-Ricci Lorentzianos a partir dos trabalhos de J. Boggino em [2] e A. Cintra em [4].

2.1 O grupo de Heisenberg generalizado

Definição 2.1. *Sejam B_m e Z_n espaços vetoriais reais de dimensão m e n , respectivamente. Consideremos $\beta : B_m \times B_m \rightarrow Z_n$ uma aplicação bilinear anti-simétrica e a soma-direta $\mathfrak{h}_{m+n} = B_m \oplus Z_n$ tal que B_m é munido de um produto interno positivo e Z_n com um produto interno positivo ou Lorentziano. Denotemos por $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathfrak{h}_{m+n}}$ o produto interno em $\mathfrak{h}_{m+n}$. Definindo um homomorfismo de $\mathbb{R}$ -álgebra*

$$\begin{aligned} J : Z_n &\rightarrow \text{End}(B_m) \\ Z &\mapsto J_Z \end{aligned}$$

onde

$$\langle J_Z U, V \rangle_{\mathfrak{h}_{m+n}} := \langle \beta(U, V), Z \rangle_{\mathfrak{h}_{m+n}} \quad \forall U, V \in B_m \text{ e } Z \in Z_n, \quad (2.1)$$

e em $\mathfrak{h}_{\mathbf{m}+\mathbf{n}}$ define-se o colchete

$$\beta(U, V) := [U + X, V + Y] \quad \forall U + X, V + Y \in \mathfrak{h}_{\mathbf{m}+\mathbf{n}}. \quad (2.2)$$

Proposição 3. *O colchete $[\cdot, \cdot]$ definido em (2.2) é um colchete de Lie em $\mathfrak{h}_{\mathbf{m}+\mathbf{n}}$ e, assim, $\mathfrak{h}_{\mathbf{m}+\mathbf{n}}$ é álgebra de Lie.*

Demonstração. Note que $[\cdot, \cdot]$ é bilinear e anti-simétrica, uma vez que β é bilinear e anti-simétrica, por definição. Provemos então, a identidade de Jacobi. Dados $U + X, V + Y, W + Z \in \mathfrak{h}_{\mathbf{m}+\mathbf{n}}$, temos

$$\begin{aligned} [U + X, [V + Y, W + Z]] &= [U + X, \beta(V, W)] \\ &= [U + X, 0 + \beta(V, W)] \\ &= \beta(U, 0) = 0 \\ &= \beta(0, W) + \beta(V, 0) \\ &= [\beta(U, V), W + Z] + [V + Y, \beta(U, W)] \\ &= [[U + X, V + Y], W + Z] + [V + Y, [U + X, W + Z]]. \end{aligned}$$

Como queríamos demonstrar. □

Definição 2.2. *Dizemos que a álgebra de Lie $\mathfrak{h}_{\mathbf{m}+\mathbf{n}}$ é uma álgebra generalizada de Heisenberg Riemanniana se o produto interno em Z_n é positivo e para todo $Z \in Z_n$ tem-se*

$$J_Z^2 = -\langle Z, Z \rangle_{\mathfrak{h}_{\mathbf{m}+\mathbf{n}}} id_{B_m}. \quad (2.3)$$

*O grupo de Lie associado simplesmente conexo denotado por $\mathbb{H}_{\mathbf{m}+\mathbf{n}}$, munido de uma métrica Riemanniana invariante à esquerda g é dito **grupo generalizado de Heisenberg Riemanniano**.*

Definição 2.3. *Dizemos que a álgebra de Lie $\mathfrak{h}_{\mathbf{m}+\mathbf{n}}$ é uma álgebra generalizada de Heisenberg Lorentziana se o produto interno em Z_n é Lorentziano e*

$$J_Z^2 = -\langle Z, Z \rangle_{\mathfrak{h}_{\mathbf{m}+\mathbf{n}}} id_{B_m}, \text{ se } Z \text{ é tipo-espaço} \quad (2.4)$$

e

$$J_Z^2 = \langle Z, Z \rangle_{\mathfrak{h}_{\mathbf{m}+\mathbf{n}}} id_{B_m}, \text{ se } Z \text{ é tipo-tempo.} \quad (2.5)$$

O grupo de Lie associado simplesmente conexo denotado por $\mathbb{H}_{m+n}$, munido de uma métrica Lorentziana invariante à esquerda g é dito **grupo generalizado de Heisenberg Lorentziano**.

Cada vetor na soma direta $\mathfrak{s}_{m+n+1} = \mathfrak{h}_{m+n} \oplus \mathfrak{a}$, onde $\mathfrak{a}$ é um espaço vetorial unidimensional, é escrito de uma única maneira da forma $V + Y + sA$, onde $V \in B_m$, $Y \in Z_n$ e $s \in \mathbb{R}$. Ao longo deste capítulo vetores em $\mathfrak{s}_{m+n+1}$ serão escritos desta forma e os símbolos U, V, W para vetores em B_m , X, Y, Z para vetores em Z_n , r, s, t para números reais e A um vetor unitário em $\mathfrak{a}$.

2.2 Espaços Damek-Ricci Lorentzianos do primeiro tipo

Proposição 4. *Seja $\mathfrak{h}_{m+n} = B_m \oplus Z_n$ a álgebra generalizada de Heisenberg Riemanniana tal que B_m e Z_n são perpendiculares. Dados $U + X + rA, V + Y + sA \in \mathfrak{s}_{m+n+1} = \mathfrak{h}_{m+n} \oplus \mathfrak{a}$, onde $\mathfrak{a}$ é um espaço unidimensional Lorentziano e definindo*

$$\langle U + X + rA, V + Y + sA \rangle = \langle U + X, V + Y \rangle_{\mathfrak{h}_{m+n}} - rs \quad (2.6)$$

e

$$[U + X + rA, V + Y + sA] = [U, V]_{\mathfrak{h}_{m+n}} + \frac{r}{2}V - \frac{s}{2}U + rY - sX, \quad (2.7)$$

tem-se que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é uma métrica Lorentziana e $[\cdot, \cdot]$ é um colchete de Lie em $\mathfrak{s}_{m+n+1}$. Portanto, $\mathfrak{s}_{m+n+1}$ é uma álgebra de Lie com métrica Lorentziana. Além disso, $\langle A, A \rangle = -1$.

Demonstração. Provemos que (2.6) é uma métrica Lorentziana. Note que $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathfrak{h}_{m+n}}$ é bilinear. Portanto, (2.6) é bilinear. Além disso, dado $V + Y + sA \in \mathfrak{s}_{m+n+1}$ tal que

$$\langle U + X + rA, V + Y + sA \rangle = 0,$$

tem-se que para todo $V + Y \in \mathfrak{h}_{m+n}$

$$\langle U + X + rA, V + Y \rangle = 0 \quad \text{e} \quad \langle U + X + rA, A \rangle = 0.$$

Portanto,

$$\langle U + X, V + Y \rangle_{\mathfrak{h}_{m+n}} = 0 \quad \text{e} \quad r = 0.$$

Sendo $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathfrak{h}_{m+n}}$ não-degenerada, segue que $U + X = 0$, ou seja, (2.6) é não-degenerada.

Consideremos agora, $\{U_1, \dots, U_m\}$ e $\{X_1, \dots, X_n\}$ bases ortonormais de B_m e Z_n , respectivamente. Assim, $\{U_1, \dots, U_m, X_1, \dots, X_n, A\}$ é uma base ortonormal para $\mathfrak{s}_{m+n+1}$. Então,

$$\begin{cases} \langle U_i, U_i \rangle = \langle U_i, U_i \rangle_{\mathfrak{h}_{m+n}} = 1 \\ \langle X_j, X_j \rangle = \langle X_j, X_j \rangle_{\mathfrak{h}_{m+n}} = 1 \\ \langle A, A \rangle = -1 \end{cases} \quad (2.8)$$

Logo, (2.6) tem índice 1. Portanto, (2.6) é uma métrica Lorentziana.

Provemos agora que (2.7) é um colchete de Lie. Sejam $U + X + rA, V + Y + sA, W + Z + tA \in \mathfrak{s}_{m+n+1}$. Como $[\cdot, \cdot]_{\mathfrak{h}_{m+n}}$ é bilinear, tem-se que (2.7) é bilinear. Note ainda que $[U + X + rA, U + X + rA] = 0$, ou seja, (2.7) é anti-simétrica. Além disso,

$$\begin{aligned} I &= [U + X + rA, [V + Y + sA, W + Z + tA]] \\ &= \left[U + X + rA, [V, W]_{\mathfrak{h}_{m+n}} + \frac{s}{2}W - \frac{t}{2}V + sZ - tY \right] \\ &= \left[U, \frac{s}{2}W - \frac{t}{2}V \right]_{\mathfrak{h}_{m+n}} + \frac{r}{2} \left(\frac{s}{2}W - \frac{t}{2}V \right) + r(sZ - tY) + r[V, W]_{\mathfrak{h}_{m+n}} \\ &= \frac{s}{2}[U, W]_{\mathfrak{h}_{m+n}} - \frac{t}{2}[U, V]_{\mathfrak{h}_{m+n}} + r[V, W]_{\mathfrak{h}_{m+n}} + \frac{rs}{4}W - \frac{rt}{4}V + rsZ - rtY, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} II &= [[U + X + rA, V + Y + sA], W + Z + tA] \\ &= \frac{r}{2}[V, W]_{\mathfrak{h}_{m+n}} - \frac{s}{2}[U, W]_{\mathfrak{h}_{m+n}} - t[U, V]_{\mathfrak{h}_{m+n}} + \frac{st}{4}U - \frac{rt}{4}V + tsX - rtY \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} III &= [V + Y + sA, [U + X + rA, W + Z + tA]] \\ &= \frac{r}{2}[V, W]_{\mathfrak{h}_{m+n}} - \frac{t}{2}[V, U]_{\mathfrak{h}_{m+n}} + s[U, W]_{\mathfrak{h}_{m+n}} + \frac{sr}{4}W - \frac{st}{4}U + srZ - stX. \end{aligned}$$

Assim, $I = II + III$. Portanto, a identidade de Jacobi é satisfeita em (2.7). Logo, $\mathfrak{s}_{m+n+1}$ é uma álgebra de Lie com métrica Lorentziana. $\square$

Definição 2.4. O grupo de Lie simplesmente conexo associado a $\mathfrak{s}_{m+n+1}$ munido com a métrica Lorentziana induzida invariante à esquerda é chamado **Espaço de Damek-Ricci Lorentziano do primeiro tipo** e é denotado por $\mathbb{S}_{m+n+1}^1$.

Proposição 5. *Seja ∇ a conexão Levi Civita de $\mathbb{S}_{m+n+1}^1$. Então*

$$\nabla_{V+Y+sA}(U+X+rA) = -\frac{1}{2}J_X V - \frac{1}{2}J_Y U - \frac{1}{2}rV - \frac{1}{2}[U, V] - rY - \frac{1}{2}\langle U, V \rangle A - \langle X, Y \rangle A. \quad (2.9)$$

Demonstração. A equação (2.7) nos fornece que

$$\begin{aligned} I &= \langle [U+X+rA, W+Z+tA], V+Y+sA \rangle \\ &= \left\langle [U, W]_{\mathfrak{h}_{m+n}} + \frac{r}{2}W - \frac{t}{2}U + rZ - tX, V+Y+sA \right\rangle \\ &= \left\langle [U, W]_{\mathfrak{h}_{m+n}} + \frac{r}{2}W - \frac{t}{2}U + rZ - tX, V+Y \right\rangle \\ &= \langle [U, W], Y \rangle + \left\langle \frac{r}{2}W, V \right\rangle - \left\langle \frac{t}{2}U, V \right\rangle + \langle rZ, Y \rangle - \langle tX, Y \rangle, \end{aligned}$$

pois B_m e Z_n são ortogonais.

Das equações (2.2) e (2.1) temos que

$$\begin{aligned} I &= \langle J_Y U, W \rangle + \left\langle \frac{r}{2}V, W \right\rangle - \frac{t}{2}\langle U, V \rangle + \langle rY, Z \rangle - t\langle X, Y \rangle \\ &= \langle J_Y U, W+Z \rangle + \left\langle \frac{r}{2}V, W+Z \right\rangle - \frac{t}{2}\langle U, V \rangle + \langle rY, W+Z \rangle - t\langle X, Y \rangle \\ &= \left\langle J_Y U + \frac{r}{2}V + rY, W+Z \right\rangle - \left[\frac{t}{2}\langle U, V \rangle + t\langle X, Y \rangle \right]. \end{aligned}$$

Assim, de (2.6) temos

$$I = \left\langle J_Y U + \frac{r}{2}V + rY + \frac{1}{2}\langle U, V \rangle A + \langle X, Y \rangle A, W+Z+tA \right\rangle. \quad (2.10)$$

Analogamente, temos que

$$\begin{aligned} II &= \langle [V+Y+sA, W+Z+tA], U+X+rA \rangle \\ &= \left\langle J_X V + \frac{s}{2}U + sX + \frac{1}{2}\langle U, V \rangle A + \langle X, Y \rangle A, W+Z+tA \right\rangle \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} III &= \langle [U+X+rA, V+Y+sA], W+Z+tA \rangle \\ &= \left\langle [U, V]_{\mathfrak{h}_{m+n}} + \frac{r}{2}V - \frac{s}{2}U + rY - sX, W+Z+tA \right\rangle. \end{aligned}$$

Portanto,

$$I+II+III = \langle J_Y U + J_X V + rV + [U, V] + 2rY + \langle U, V \rangle A + 2\langle X, Y \rangle A, W+Z+tA \rangle.$$

Pelo teorema de Levi-Civita, temos que

$$\begin{aligned}\nabla &= \langle \nabla_{V+Y+SA}(U+X+rA), W+Z+tA \rangle \\ &= -\frac{1}{2}\{I+II+III\} \\ &= -\frac{1}{2}\{\langle J_Y U + J_X V + rV + [U, V] + 2rY + \langle U, V \rangle A + 2\langle X, Y \rangle A, W+Z+tA \rangle\}.\end{aligned}$$

O que prova a proposição. $\square$

2.3 Espaços Damek-Ricci Lorentzianos do segundo tipo

Proposição 6. *Seja $\mathfrak{h}_{m+n} = B_m \oplus Z_n$ a álgebra generalizada de Heisenberg Lorentziana munida com o produto interno Lorentziano $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathfrak{h}_{m+n}}$ tal que B_m e Z_n são perpendiculares. Dados $U+X+rA, V+Y+sA \in \mathfrak{s}_{m+n+1} = \mathfrak{h}_{m+n} \oplus \mathfrak{a}$, onde $\mathfrak{a}$ é um espaço unidimensional Riemanniano e definindo*

$$\langle U+X+rA, V+Y+sA \rangle = \langle U+X, V+Y \rangle_{\mathfrak{h}_{m+n}} + rs \quad (2.11)$$

e

$$[U+X+rA, V+Y+sA] = [U, V]_{\mathfrak{h}_{m+n}} + \frac{r}{2}V - \frac{s}{2}U + rY - sX, \quad (2.12)$$

tem-se que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é um produto escalar Lorentziano e $[\cdot, \cdot]$ é um colchete de Lie em $\mathfrak{s}_{m+n+1}$. Portanto, $\mathfrak{s}_{m+n+1}$ é uma álgebra de Lie com produto escalar Lorentziano.

Definição 2.5. *O grupo de Lie simplesmente associado a $\mathfrak{s}_{m+n+1}$ munido com a métrica Lorentziana induzida invariante à esquerda é chamado **Espaço de Damek-Ricci Lorentziano do segundo tipo** e é denotado por $\mathbb{S}_{m+n+1}^{m+n}$.*

Proposição 7. *Seja ∇ a conexão Levi-Civita de $\mathbb{S}_{m+n+1}^{m+n}$. Então*

$$\nabla_{V+Y+SA}(U+X+rA) = -\frac{1}{2}J_X V - \frac{1}{2}J_Y U - \frac{1}{2}rV - \frac{1}{2}[U, V] - rY + \frac{1}{2}\langle U, V \rangle A + \langle X, Y \rangle A. \quad (2.13)$$

Demonstração. A náloga à da Proposição 5. $\square$

Capítulo 3

A Representação de Weierstrass para os Espaços Damek-Ricci

Neste capítulo abordaremos o desenvolvimento da fórmula da Representação de Weierstrass para o caso dos grupos de Lie $\mathbb{S}_4^1$ e $\mathbb{S}_4^3$. Esses grupos são espaços de Damek-Ricci Lorentzianos 4-dimensionais do primeiro tipo e segundo tipo, respectivamente, abordados no capítulo 2. Dessa forma, utilizaremos as mesmas notações do referido capítulo e, baseando nos trabalhos de J. Berndt, F. Tricerri e L. Vanhecke em [1] e A. Cintra em [4], encontraremos as condições de harmonicidade que satisfazem os seguintes Teoremas:

Teorema 3.1. *Sejam $\Omega \subseteq \mathbb{K}$ um conjunto aberto munido de coordenadas (para)complexas e $f : \Omega \rightarrow \mathbb{S}_4^1$ de imersão mínima conforme. Então, as componentes do vetor tangente (para)complexo*

$$\phi = \frac{\partial f}{\partial z} = \sum_{i=1}^4 \psi_i e_i$$

satisfazem as seguintes condições:

- i) $|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 + |\psi_3|^2 - |\psi_4|^2 \neq 0$,
- ii) $\psi_1^2 + \psi_2^2 + \psi_3^2 - \psi_4^2 = 0$,
- iii) $\frac{\partial \psi_k}{\partial \bar{z}} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^4 L_{ij}^k \bar{\psi}_i \psi_j = 0, \quad k = 1, 2, 3, 4.$

Reciprocamente, se Ω é simplesmente conexo e $\psi_i : \Omega \rightarrow \mathbb{K}, i = 1, 2, 3, 4$, são funções que satisfazem as condições acima, então a aplicação $f : \Omega \rightarrow \mathbb{S}_4^1$ com coordenadas

$$f_i = 2\operatorname{Re} \int \sum_{j=1}^4 A_{ij} \psi_j dz, \quad i = 1, 2, 3, 4,$$

3. A Representação de Weierstrass para os Espaços Damek-Ricci

define uma imersão mínima conforme em $\mathbb{S}_4^1$.

Teorema 3.2. *Sejam $\Omega \subseteq \mathbb{K}$ um conjunto aberto munido de coordenadas (para)complexas e $f : \Omega \rightarrow \mathbb{S}_4^3$ de imersão mínima conforme. Então, as componentes do vetor tangente (para)complexo*

$$\phi = \frac{\partial f}{\partial z} = \sum_{i=1}^4 \psi_i e_i$$

satisfazem as seguintes condições:

- i) $|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 - |\psi_3|^2 + |\psi_4|^2 \neq 0$,
- ii) $\psi_1^2 + \psi_2^2 - \psi_3^2 + \psi_4^2 = 0$,
- iii) $\frac{\partial \psi_k}{\partial \bar{z}} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^4 L_{ij}^k \bar{\psi}_i \psi_j = 0, \quad k = 1, 2, 3, 4.$

Reciprocamente, se Ω é simplesmente conexo e $\psi_i : \Omega \rightarrow \mathbb{K}, i = 1, 2, 3, 4$, são funções que satisfazem as condições acima, então a aplicação $f : \Omega \rightarrow \mathbb{S}_4^3$ com coordenadas

$$f_i = 2\operatorname{Re} \left(\int \sum_{j=1}^4 A_{ij} \psi_j dz \right), \quad i = 1, 2, 3, 4,$$

define uma imersão mínima tipo-tempo (ou tipo-espaço) conforme em $\mathbb{S}_4^3$.

3.1 O Grupo $\mathbb{S}_{m+n+1}^1$

Nesta seção, seguiremos J. Berndt em [1].

Definição 3.1. *O grupo de Lie $\mathbb{S}_{m+n+1}^1$ é o produto semi-direto $\mathbb{H}_{m+n} \times_F \mathbb{R}$ com*

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R} &\rightarrow \operatorname{Aut}(\mathbb{H}_{m+n}) \\ s &\mapsto F_s \end{aligned}$$

definida por

$$F_s(\exp_{\mathfrak{h}_{m+n}}(U + X)) = \exp_{\mathfrak{h}_{m+n}}(e^{\frac{s}{2}}U + e^s X) \quad (3.1)$$

onde $\exp_{\mathfrak{h}_{m+n}}$ é a exponencial de Lie de $\mathbb{H}_{m+n}$ e $\mathbb{R}$ é considerado na forma canônica como o grupo de Lie simplesmente conexo associado a $\mathfrak{a}$.

3. A Representação de Weierstrass para os Espaços Damek-Ricci

Escrevendo explicitamente a estrutura grupo em $\mathbb{S}_{m+n+1}^1 = \mathbb{H}_{m+n} \times_F \mathbb{R}$, temos que

$$\begin{aligned} & (\exp_{\mathfrak{h}_{m+n}}(U + X), r) \cdot (\exp_{\mathfrak{h}_{m+n}}(V + Y), s) = \\ & = \left(\exp_{\mathfrak{h}_{m+n}} \left(U + e^{\frac{r}{2}} V + X + e^r Y + \frac{1}{2} e^{\frac{r}{2}} [U, V] \right), r + s \right). \end{aligned} \quad (3.2)$$

3.1.1 O Grupo $\mathbb{S}_4^1$

Consideremos $\mathbb{S}_4^1$ o espaço de Damek-Ricci 4-dimensional Lorentziano com coordenadas globais $\{x, y, z, t\}$. Verifiquemos a estrutura do grupo $\mathbb{S}_4^1 = \mathbb{H}_3 \times_F \mathbb{R}$ de acordo com a operação (3.2). Para isso, sejam E_1, E_2, E_3 uma base da álgebra de Lie do Heisenberg $\mathfrak{h}_3$. Então dois elementos $m, n \in \mathbb{S}_4^1$ são da forma

$$m = (\exp_{\mathfrak{h}_3}(xE_1 + yE_2 + zE_3), t) \quad \text{e} \quad n = (\exp_{\mathfrak{h}_3}(x_1E_1 + y_1E_2 + z_1E_3), t_1)$$

onde $\exp : \mathfrak{h}_3 \rightarrow \mathbb{H}_3$ dada por $\exp(xE_1 + yE_2 + zE_3) = (x, y, z)$.

Na álgebra de Lie do Heisenberg o colchete $[E_1, E_1] = [E_2, E_2] = 0$ e $[E_1, E_2] = cE_3$, onde $c \in \mathbb{R}$. Portanto, a operação $(\cdot)$ do grupo é dada por

$$\begin{aligned} m \cdot n &= (\exp_{\mathfrak{h}_3}(xE_1 + yE_2 + zE_3), t) \cdot (\exp_{\mathfrak{h}_3}(x_1E_1 + y_1E_2 + z_1E_3), t_1) \\ &= (\exp_{\mathfrak{h}_3}(xE_1 + yE_2 + e^{\frac{t}{2}}(x_1E_1 + y_1E_2) + zE_3 + e^t z_1E_3 + \frac{1}{2} e^{\frac{t}{2}} [xE_1 + yE_2, x_1E_1 + y_1E_2], t + t_1)) \\ &= (x + e^{\frac{t}{2}} x_1, y + e^{\frac{t}{2}} y_1, z + e^t z_1 + \frac{c}{2} e^{\frac{t}{2}} (xy_1 - x_1y), t + t_1). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Sejam e_1, e_2, e_3 e e_4 os campos de vetores invariantes à esquerda gerados pelos vetores $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$ e $\hat{e}_4$, respectivamente, onde

$$\partial_{x_1}|_{e_1} := \hat{e}_1, \quad \partial_{x_2}|_{e_2} := \hat{e}_2, \quad \partial_{x_3}|_{e_3} := \hat{e}_3$$

são os vetores que geram a álgebra de Lie $\mathfrak{s}_4^1$ de $\mathbb{S}_4^1$ em termos das coordenadas exponenciais (x_1, x_2, x_3, x_4) . Assim, dado $(x, y, z, t) \in \mathbb{S}_4^1$ temos que

$$\begin{aligned} e_1|_{(x,y,z,t)} &= \frac{d}{dw}(x, y, z, t) \cdot (w, 0, 0, 0)|_{w=0} \\ &= \frac{d}{dw}(x + e^{\frac{t}{2}} w, y, z - \frac{c}{2} e^{\frac{t}{2}} yw, t)|_{w=0} \\ &= (e^{\frac{t}{2}} \frac{\partial}{\partial x}, 0, -\frac{cy}{2} e^{\frac{t}{2}} \frac{\partial}{\partial z}, 0) \\ &= e^{\frac{t}{2}} \left(\frac{\partial}{\partial x}, 0, -\frac{cy}{2} \frac{\partial}{\partial z}, 0 \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
e_2|_{(x,y,z,t)} &= \frac{d}{dw}(x, y, z, t) \cdot (0, w, 0, 0)|_{w=0} \\
&= \frac{d}{dw}(x, y + e^{\frac{t}{2}}w, z + \frac{c}{2}e^{\frac{t}{2}}xw, t)|_{w=0} \\
&= (0, e^{\frac{t}{2}}\frac{\partial}{\partial y}, \frac{c}{2}e^{\frac{t}{2}}x\frac{\partial}{\partial z}, 0) \\
&= e^{\frac{t}{2}}\left(0, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{cx}{2}\frac{\partial}{\partial z}, 0\right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
e_3|_{(x,y,z,t)} &= \frac{d}{dw}(x, y, z, t) \cdot (0, 0, w, 0)|_{w=0} \\
&= \frac{d}{dw}(x, y, z + we^t, t)|_{w=0} \\
&= (0, 0, e^t\frac{\partial}{\partial z}, 0) \\
&= e^t\left(0, 0, \frac{\partial}{\partial z}, 0\right)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
e_4|_{(x,y,z,t)} &= \frac{d}{dw}(x, y, z, t) \cdot (0, 0, 0, w)|_{w=0} \\
&= \frac{d}{dw}(x, y, z, t + w)|_{w=0} \\
&= \left(0, 0, 0, \frac{\partial}{\partial t}\right).
\end{aligned}$$

Assim,

$$e_1 = e^{\frac{t}{2}}\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{cy}{2}\frac{\partial}{\partial z}\right), \quad e_2 = e^{\frac{t}{2}}\left(\frac{\partial}{\partial y} + \frac{cx}{2}\frac{\partial}{\partial z}\right), \quad e_3 = e^t\frac{\partial}{\partial z}, \quad e_4 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad (3.4)$$

onde os vetores e_1, e_2 e e_3 são tipo-espaço e e_4 tipo-tempo. Segue portanto, que

$$\frac{\partial}{\partial x} = e^{-\frac{t}{2}}e_1 + \frac{cy}{2}\frac{\partial}{\partial z}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = e^{-\frac{t}{2}}e_2 - \frac{cx}{2}\frac{\partial}{\partial z}, \quad \frac{\partial}{\partial z} = e^{-t}e_3, \quad \frac{\partial}{\partial t} = e_4,$$

ou seja,

$$\frac{\partial}{\partial x} = e^{-\frac{t}{2}}e_1 + e^{-t}\frac{cy}{2}e_3, \quad \frac{\partial}{\partial y} = e^{-\frac{t}{2}}e_2 - e^{-t}\frac{cx}{2}e_3, \quad \frac{\partial}{\partial z} = e^{-t}e_3, \quad \frac{\partial}{\partial t} = e_4.$$

Seja g uma métrica Lorentziana invariante à esquerda em $\mathbb{S}_4^1$. Como

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x} \right\rangle &= \left\langle e^{-\frac{t}{2}}e_1 + e^{-t}\frac{cy}{2}e_3, e^{-\frac{t}{2}}e_1 + e^{-t}\frac{cy}{2}e_3 \right\rangle \\
&= e^{-t} \langle e_1, e_1 \rangle + e^{-\frac{3t}{2}}cy \langle e_1, e_3 \rangle + e^{-2t} \left(\frac{cy}{2} \right)^2 \langle e_3, e_3 \rangle \\
&= e^{-t} + e^{-2t} \left(\frac{cy}{2} \right)^2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial y} \right\rangle &= \left\langle e^{-\frac{t}{2}}e_2 - e^{-t}\frac{cx}{2}e_3, e^{-\frac{t}{2}}e_2 - e^{-t}\frac{cx}{2}e_3 \right\rangle \\
&= e^{-t} \langle e_2, e_2 \rangle - e^{-\frac{3t}{2}}cx \langle e_2, e_3 \rangle + e^{-2t} \left(\frac{cx}{2} \right)^2 \langle e_3, e_3 \rangle \\
&= e^{-t} + e^{-2t} \left(\frac{cx}{2} \right)^2,
\end{aligned}$$

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial z} \right\rangle = e^{-2t} \text{ e } \left\langle \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle = -1,$$

além de

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right\rangle &= \left\langle \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial x} \right\rangle = \left\langle e^{-\frac{t}{2}}e_1 + e^{-t}\frac{cy}{2}e_3, e^{-\frac{t}{2}}e_2 - e^{-t}\frac{cx}{2}e_3 \right\rangle \\
&= e^{-t} \langle e_1, e_2 \rangle - e^{-\frac{3t}{2}}\frac{cx}{2} \langle e_1, e_3 \rangle + e^{-\frac{3t}{2}}\frac{cy}{2} \langle e_3, e_2 \rangle - e^{-2t} \left(\frac{c}{2} \right)^2 xy \langle e_3, e_3 \rangle \\
&= -e^{-2t} \left(\frac{c}{2} \right)^2 xy,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial z} \right\rangle &= \left\langle \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial x} \right\rangle = \left\langle e^{-\frac{t}{2}}e_1 + e^{-t}\frac{cy}{2}e_3, e^{-t}e_3 \right\rangle \\
&= e^{-\frac{3t}{2}} \langle e_1, e_3 \rangle + e^{-2t}\frac{cy}{2} \langle e_3, e_3 \rangle \\
&= e^{-2t}\frac{cy}{2},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle &= \left\langle \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x} \right\rangle = \left\langle e^{-\frac{t}{2}} e_1 + e^{-t} \frac{cy}{2} e_3, e_4 \right\rangle \\
&= e^{-\frac{t}{2}} \langle e_1, e_4 \rangle + e^{-t} \frac{cy}{2} \langle e_3, e_4 \rangle \\
&= 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right\rangle &= \left\langle \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial y} \right\rangle = \left\langle e^{-\frac{t}{2}} e_2 - e^{-t} \frac{cx}{2} e_3, e^{-t} e_3 \right\rangle \\
&= e^{-\frac{3t}{2}} \langle e_2, e_3 \rangle - e^{-2t} \frac{cx}{2} \langle e_3, e_3 \rangle \\
&= -e^{-2t} \frac{cx}{2},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle &= \left\langle \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial y} \right\rangle = \left\langle e^{-\frac{t}{2}} e_2 - e^{-t} \frac{cx}{2} e_3, e_4 \right\rangle \\
&= e^{-\frac{t}{2}} \langle e_2, e_4 \rangle - e^{-t} \frac{cx}{2} \langle e_3, e_4 \rangle \\
&= 0,
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle &= \left\langle \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial z} \right\rangle = \langle e^{-t} e_3, e_4 \rangle = e^{-t} \langle e_3, e_4 \rangle \\
&= 0,
\end{aligned}$$

esta métrica g é representada pela matriz

$$(g_{ij}) = \left(\left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle \right) = \begin{pmatrix} e^{-t} + e^{-2t} \left(\frac{cy}{2} \right)^2 & -e^{-2t} \left(\frac{c}{2} \right)^2 xy & e^{-2t} \frac{cy}{2} & 0 \\ -e^{-2t} \left(\frac{c}{2} \right)^2 xy & e^{-t} + e^{-2t} \left(\frac{cx}{2} \right)^2 & -e^{-2t} \frac{cx}{2} & 0 \\ e^{-2t} \frac{cy}{2} & -e^{-2t} \frac{cx}{2} & e^{-2t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Portanto, sua expressão coordenada é dada por

3. A Representação de Weierstrass para os Espaços Damek-Ricci

$$g = e^{-t}dx^2 + e^{-t}dy^2 + e^{-2t}(dz + \frac{c}{2}ydx - \frac{c}{2}xdy)^2 - dt^2.$$

Calculemos agora os colchetes de Lie. Note que

$$\begin{aligned} [e_1, e_2] &= e^t \left[\frac{\partial}{\partial x} - \frac{cy}{2} \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial y} + \frac{cx}{2} \frac{\partial}{\partial z} \right] \\ &= e^t \left\{ \left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right] + \left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{cx}{2} \frac{\partial}{\partial z} \right] - \left[\frac{cy}{2} \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial y} \right] - \left[\frac{cy}{2} \frac{\partial}{\partial z}, \frac{cx}{2} \frac{\partial}{\partial z} \right] \right\} \\ &= e^t \left\{ \frac{cx}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial z} \right] + \frac{c}{2} \frac{\partial}{\partial x}(x) \frac{\partial}{\partial z} - \frac{cy}{2} \left[\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial y} \right] + \frac{c}{2} \frac{\partial}{\partial y}(y) \frac{\partial}{\partial z} \right. \\ &\quad \left. - \frac{c^2 xy}{4} \left[\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial z} \right] - \frac{c^2 x}{4} \frac{\partial}{\partial z}(y) \frac{\partial}{\partial z} + \frac{c^2 y}{4} \frac{\partial}{\partial z}(x) \frac{\partial}{\partial z} \right\} \\ &= ce^t \frac{\partial}{\partial z} = ce_3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [e_1, e_3] &= \left[e^{\frac{t}{2}} \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{cy}{2} \frac{\partial}{\partial z} \right), e^t \frac{\partial}{\partial z} \right] = e^{\frac{3t}{2}} \left[\frac{\partial}{\partial x} - \frac{cy}{2} \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial z} \right] \\ &= e^{\frac{3t}{2}} \left\{ \left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial z} \right] - \left[\frac{cy}{2} \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial z} \right] \right\} \\ &= e^{\frac{3t}{2}} \left\{ -\frac{cy}{2} \left[\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial z} \right] + \frac{\partial}{\partial z}(y) \frac{c}{2} \frac{\partial}{\partial z} \right\} = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [e_1, e_4] &= \left[e^{\frac{t}{2}} \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{cy}{2} \frac{\partial}{\partial z} \right), \frac{\partial}{\partial t} \right] = e^{\frac{t}{2}} \left\{ \left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t} \right] - \frac{c}{2} \left[y \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial t} \right] \right\} \\ &= e^{\frac{t}{2}} \left\{ -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{c}{2} y \frac{\partial}{\partial z} \right\} \\ &= -\frac{1}{2} e^{\frac{t}{2}} \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{cy}{2} \frac{\partial}{\partial z} \right) = -\frac{1}{2} e_1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[e_2, e_3] &= \left[e^{\frac{t}{2}} \left(\frac{\partial}{\partial y} + \frac{cx}{2} \frac{\partial}{\partial z} \right), e^t \frac{\partial}{\partial z} \right] = e^{\frac{3t}{2}} \left[\frac{\partial}{\partial y} + \frac{cx}{2} \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial z} \right] \\
&= e^{\frac{3t}{2}} \left\{ \left[\frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right] + \left[\frac{cx}{2} \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial z} \right] \right\} \\
&= e^{\frac{3t}{2}} \left\{ \frac{cx}{2} \left[\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial z} \right] - \frac{\partial}{\partial z}(x) \frac{c}{2} \frac{\partial}{\partial z} \right\} = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[e_2, e_4] &= \left[e^{\frac{t}{2}} \left(\frac{\partial}{\partial y} + \frac{cx}{2} \frac{\partial}{\partial z} \right), \frac{\partial}{\partial t} \right] = e^{\frac{t}{2}} \left[\frac{\partial}{\partial y} + \frac{cx}{2} \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial t} \right] \\
&= e^{\frac{t}{2}} \left\{ \left[\frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial t} \right] + \frac{c}{2} \left[x \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial t} \right] \right\} \\
&= e^{\frac{t}{2}} \left(-\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} - \frac{1}{2} \frac{cx}{2} \frac{\partial}{\partial z} \right) \\
&= -\frac{1}{2} e^{\frac{t}{2}} \left(\frac{\partial}{\partial y} + \frac{cx}{2} \frac{\partial}{\partial z} \right) = -\frac{1}{2} e_2,
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
[e_3, e_4] &= \left[e^t \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial t} \right] = e^t \left[\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial t} \right] \\
&= -e^t \frac{\partial}{\partial z} = -e_3,
\end{aligned}$$

os colchetes de Lie são dados por

$$\begin{cases} [e_1, e_2] = ce_3, & [e_1, e_3] = 0, & [e_1, e_4] = -\frac{1}{2}e_1, \\ [e_2, e_3] = 0, & [e_2, e_4] = -\frac{1}{2}e_2, & [e_3, e_4] = -e_3. \end{cases}$$

Denotando $e_1 = U, e_2 = V, e_3 = X$ e $e_4 = A$ e usando a equação da conexão de Levi-Civita da Proposição 5 obtemos que

$$\begin{aligned}
\nabla_{e_1} e_1 = \nabla_U U &= -\frac{1}{2} \{ [U, U] + \langle U, U \rangle A \} \\
&= -\frac{1}{2} \{ [e_1, e_1] + \langle e_1, e_1 \rangle e_4 \} = -\frac{1}{2} e_4,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \nabla_{e_1} e_2 = \nabla_U V &= -\frac{1}{2} \{[V, U] + \langle V, U \rangle A\} \\
 &= -\frac{1}{2} \{[e_2, e_1] + \langle e_2, e_1 \rangle e_4\} \\
 &= \frac{1}{2} [e_1, e_2] = \frac{c}{2} e_3,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \nabla_{e_1} e_3 = \nabla_U X &= -\frac{1}{2} \{J_X U + [X, U] + \langle X, U \rangle A\} \\
 &= -\frac{1}{2} J_X U.
 \end{aligned}$$

Note que

$$\langle J_X U, U \rangle = \langle \beta(U, U), X \rangle = \langle [U, U], X \rangle = 0$$

e

$$\langle J_X U, V \rangle = \langle \beta(U, V), X \rangle = \langle [U, V], X \rangle = \langle ce_3, e_3 \rangle = c,$$

ou seja, $J_X U = ce_2$. Portanto,

$$\nabla_{e_1} e_3 = -\frac{c}{2} e_2.$$

Temos ainda que

$$\nabla_{e_1} e_4 = \nabla_U A = -\frac{1}{2} U = -\frac{1}{2} e_1,$$

$$\begin{aligned}
 \nabla_{e_2} e_1 = \nabla_V U &= \{[U, V] + \langle U, V \rangle A\} \\
 &= -\frac{1}{2} \{[e_1, e_2] + \langle e_1, e_2 \rangle e_4\} \\
 &= -\frac{1}{2} [e_1, e_2] = -\frac{c}{2} e_3,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \nabla_{e_2} e_2 = \nabla_V V &= \{[V, V] + \langle V, V \rangle A\} \\
 &= -\frac{1}{2} \langle V, V \rangle A = -\frac{1}{2} \langle e_2, e_2 \rangle e_4 = -\frac{1}{2} e_4,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \nabla_{e_2} e_3 = \nabla_V X &= -\frac{1}{2} \{J_X V + [X, V] + \langle X, V \rangle A\} \\
 &= -\frac{1}{2} J_X V.
 \end{aligned}$$

3. A Representação de Weierstrass para os Espaços Damek-Ricci

Note que

$$\langle J_X V, U \rangle = \langle \beta(V, U), X \rangle = \langle [V, U], X \rangle = \langle -ce_3, e_3 \rangle = -c$$

e

$$\langle J_X V, V \rangle = \langle \beta(V, V), X \rangle = \langle [V, V], X \rangle = 0,$$

ou seja, $J_X V = -ce_1$. Portanto,

$$\nabla_{e_2} e_3 = \frac{c}{2} e_1.$$

Temos ainda que

$$\nabla_{e_2} e_4 = \nabla_V A = -\frac{1}{2} V = -\frac{1}{2} e_2,$$

$$\begin{aligned} \nabla_{e_3} e_1 = \nabla_X U &= -\frac{1}{2} \{J_X V + [U, X] + \langle U, X \rangle A\} \\ &= -\frac{1}{2} J_X U. \end{aligned}$$

Note que

$$\langle J_X U, U \rangle = \langle \beta(U, U), X \rangle = \langle [U, U], X \rangle = 0$$

e

$$\langle J_X U, V \rangle = \langle \beta(U, V), X \rangle = \langle [U, V], X \rangle = \langle [e_1, e_2], e_3 \rangle = \langle ce_3, e_3 \rangle = c$$

ou seja, $J_X U = ce_2$. Portanto,

$$\nabla_{e_3} e_1 = -\frac{c}{2} e_2.$$

Temos ainda que

$$\begin{aligned} \nabla_{e_3} e_2 = \nabla_X U &= -\frac{1}{2} \{J_X V + [V, X] + \langle V, X \rangle A\} \\ &= -\frac{1}{2} J_X V. \end{aligned}$$

Note que

$$\langle J_X V, U \rangle = \langle \beta(V, U), X \rangle = \langle [V, U], X \rangle = \langle [e_2, e_1], e_3 \rangle = \langle -ce_3, e_3 \rangle = -c$$

e

$$\langle J_X V, V \rangle = \langle \beta(V, V), X \rangle = \langle [V, V], X \rangle = 0$$

3. A Representação de Weierstrass para os Espaços Damek-Ricci

ou seja, $J_X V = -ce_1$. Logo,

$$\nabla_{e_3} e_2 = \frac{c}{2} e_1.$$

Temos ainda que

$$\nabla_{e_3} e_3 = \nabla_X X = -\langle X, X \rangle A = -e_4, \quad \nabla_{e_3} e_4 = \nabla_X A = -X = -e_3,$$

e

$$\nabla_{e_4} e_1 = \nabla_A U = 0, \quad \nabla_{e_4} e_2 = \nabla_A V = 0, \quad \nabla_{e_4} e_3 = \nabla_A X = 0, \quad \nabla_{e_4} e_4 = \nabla_A A = 0.$$

Por definição,

$$\nabla_{e_i} e_j = \sum_1^4 \frac{L_{ij}^k}{2} e_k.$$

Assim,

$$\nabla_{e_1} e_1 = \frac{L_{11}^1}{2} e_1 + \frac{L_{11}^2}{2} e_2 + \frac{L_{11}^3}{2} e_3 + \frac{L_{11}^4}{2} e_4 = -\frac{1}{2} e_4 \Rightarrow L_{11}^4 = -1,$$

$$\nabla_{e_1} e_2 = \frac{L_{12}^1}{2} e_1 + \frac{L_{12}^2}{2} e_2 + \frac{L_{12}^3}{2} e_3 + \frac{L_{12}^4}{2} e_4 = \frac{c}{2} e_3 \Rightarrow L_{12}^3 = c,$$

$$\nabla_{e_1} e_3 = \frac{L_{13}^1}{2} e_1 + \frac{L_{13}^2}{2} e_2 + \frac{L_{13}^3}{2} e_3 + \frac{L_{13}^4}{2} e_4 = -\frac{c}{2} e_2 \Rightarrow L_{13}^2 = -c,$$

$$\nabla_{e_1} e_4 = \frac{L_{14}^1}{2} e_1 + \frac{L_{14}^2}{2} e_2 + \frac{L_{14}^3}{2} e_3 + \frac{L_{14}^4}{2} e_4 = -\frac{1}{2} e_1 \Rightarrow L_{14}^1 = -1,$$

$$\nabla_{e_2} e_1 = \frac{L_{21}^1}{2} e_1 + \frac{L_{21}^2}{2} e_2 + \frac{L_{21}^3}{2} e_3 + \frac{L_{21}^4}{2} e_4 = -\frac{c}{2} e_4 \Rightarrow L_{21}^3 = -c,$$

$$\nabla_{e_2} e_2 = \frac{L_{22}^1}{2} e_1 + \frac{L_{22}^2}{2} e_2 + \frac{L_{22}^3}{2} e_3 + \frac{L_{22}^4}{2} e_4 = -\frac{1}{2} e_4 \Rightarrow L_{22}^4 = -1,$$

$$\nabla_{e_2} e_3 = \frac{L_{23}^1}{2} e_1 + \frac{L_{23}^2}{2} e_2 + \frac{L_{23}^3}{2} e_3 + \frac{L_{23}^4}{2} e_4 = \frac{c}{2} e_1 \Rightarrow L_{23}^1 = c,$$

$$\nabla_{e_2} e_4 = \frac{L_{24}^1}{2} e_1 + \frac{L_{24}^2}{2} e_2 + \frac{L_{24}^3}{2} e_3 + \frac{L_{24}^4}{2} e_4 = -\frac{1}{2} e_2 \Rightarrow L_{24}^2 = -1,$$

3. A Representação de Weierstrass para os Espaços Damek-Ricci

$$\nabla_{e_3} e_1 = \frac{L_{31}^1}{2} e_1 + \frac{L_{31}^2}{2} e_2 + \frac{L_{31}^3}{2} e_3 + \frac{L_{31}^4}{2} e_4 = -\frac{c}{2} e_2 \Rightarrow L_{31}^2 = -c,$$

$$\nabla_{e_3} e_2 = \frac{L_{32}^1}{2} e_1 + \frac{L_{32}^2}{2} e_2 + \frac{L_{32}^3}{2} e_3 + \frac{L_{32}^4}{2} e_4 = \frac{c}{2} e_1 \Rightarrow L_{32}^1 = c,$$

$$\nabla_{e_3} e_3 = \frac{L_{33}^1}{2} e_1 + \frac{L_{33}^2}{2} e_2 + \frac{L_{33}^3}{2} e_3 + \frac{L_{33}^4}{2} e_4 = -e_4 \Rightarrow L_{33}^4 = -2,$$

$$\nabla_{e_3} e_4 = \frac{L_{34}^1}{2} e_1 + \frac{L_{34}^2}{2} e_2 + \frac{L_{34}^3}{2} e_3 + \frac{L_{34}^4}{2} e_4 = -e_3 \Rightarrow L_{34}^3 = -2,$$

$$\nabla_{e_4} e_1 = \nabla_{e_4} e_2 = \nabla_{e_4} e_3 = \nabla_{e_4} e_4 = 0 \Rightarrow L_{4j}^k = 0, \forall j, k = 1, 2, 3, 4.$$

Dessa forma,

$$\begin{cases} L_{11}^4 = -1, & L_{12}^3 = c, & L_{13}^2 = -c, & L_{14}^1 = -1, & L_{21}^3 = -c, & L_{22}^4 = -1, \\ L_{23}^1 = c, & L_{24}^2 = -1, & L_{31}^2 = -c, & L_{32}^1 = c, & L_{33}^4 = -2, & L_{34}^3 = -2. \end{cases} \quad (3.5)$$

e os outros L_{ij}^k são nulos. Definindo $\phi = \frac{\partial f}{\partial z}$, podemos escrever o campo tangente ϕ tanto em termos de coordenadas locais como usando os campos invariantes à esquerda.

Assim, temos que

$$\phi = \sum_{i=1}^4 \phi_i \frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^4 \psi_i e_i,$$

onde as funções ϕ_i e ψ_i são funções (para)complexas. Existe uma matriz invertível $A = (A_{ij})$, com $A_{ij} : f(\Omega) \cap U \rightarrow \mathbb{R}$, onde Ω é domínio simplesmente conexo em $\mathbb{K}(\mathbb{L} \text{ ou } \mathbb{C})$ tal que

$$\phi_i = \sum_{j=1}^4 A_{ij} \psi_j, \quad i = 1, 2, 3, 4. \quad (3.6)$$

Assim, a matriz A é definida por

$$A = \begin{bmatrix} e^{\frac{t}{2}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{\frac{t}{2}} & 0 & 0 \\ -\frac{c}{2} e^{\frac{t}{2}} y & \frac{c}{2} e^{\frac{t}{2}} x & e^t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

3. A Representação de Weierstrass para os Espaços Damek-Ricci

Portanto, f é mínima se, e somente se, vale (1.10), ou seja,

$$\frac{\partial \psi_k}{\partial \bar{z}} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^4 L_{ij}^k \bar{\psi}_i \psi_j = 0, \quad k = 1, 2, 3, 4. \quad (3.7)$$

De (3.7) e (3.5) obtemos o sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi_1}{\partial \bar{z}} - \frac{1}{2} \bar{\psi}_1 \psi_4 + \frac{c}{2} (\bar{\psi}_2 \psi_3 + \bar{\psi}_3 \psi_2) = 0, \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial \bar{z}} - \frac{1}{2} \bar{\psi}_2 \psi_4 - \frac{c}{2} (\bar{\psi}_1 \psi_3 + \bar{\psi}_3 \psi_1) = 0, \\ \frac{\partial \psi_3}{\partial \bar{z}} - \bar{\psi}_3 \psi_4 + \frac{c}{2} (\bar{\psi}_1 \psi_2 - \bar{\psi}_2 \psi_1) = 0, \\ \frac{\partial \psi_4}{\partial \bar{z}} - \frac{1}{2} (\bar{\psi}_1 \psi_1 + \bar{\psi}_2 \psi_2) - \bar{\psi}_3 \psi_3 = 0. \end{cases} \quad (3.8)$$

Note que o sistema (3.8) é equivalente ao seguinte sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi_1}{\partial \bar{z}} - \frac{1}{2} \bar{\psi}_1 \psi_4 + c \operatorname{Re}(\bar{\psi}_2 \psi_3) = 0, \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial \bar{z}} - \frac{1}{2} \bar{\psi}_2 \psi_4 - c \operatorname{Re}(\bar{\psi}_1 \psi_3) = 0, \\ \frac{\partial \psi_3}{\partial \bar{z}} - \bar{\psi}_3 \psi_4 + \frac{c}{2} (\bar{\psi}_1 \psi_2 - \bar{\psi}_2 \psi_1) = 0, \\ \frac{\partial \psi_4}{\partial \bar{z}} - \frac{1}{2} (\bar{\psi}_1 \psi_1 + \bar{\psi}_2 \psi_2) - \bar{\psi}_3 \psi_3 = 0. \end{cases} \quad (3.9)$$

Logo, encontramos as condições de harmonicidade que satisfazem o Teorema 3.1.

3.2 O Grupo $\mathbb{S}_{m+n+1}^{m+n}$

De forma análoga à descrição da estrutura do grupo anterior, nesta seção seguiremos J. Berndt em [6].

Definição 3.2. O grupo de Lie $\mathbb{S}_{m+n+1}^{m+n}$ é o produto semi-direto $\mathbb{H}_{m+n} \times_F \mathbb{R}$ com

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R} &\rightarrow \operatorname{Aut}(\mathbb{H}_{m+n}) \\ s &\mapsto F_s \end{aligned}$$

definida por

$$F_s(\exp_{\mathfrak{h}_{m+n}}(U + X)) = \exp_{\mathfrak{h}_{m+n}}(e^{\frac{s}{2}}U + e^sX) \quad (3.10)$$

3. A Representação de Weierstrass para os Espaços Damek-Ricci

onde $\exp_{\mathfrak{h}_{m+n}}$ é a exponencial de Lie de $\mathbb{H}_{m+n}$ e $\mathbb{R}$ é considerado na forma canônica como o grupo de Lie simplesmente conexo associado a $\mathfrak{a}$.

Escrevendo explicitamente a estrutura grupo em $\mathbb{S}_{m+n+1}^{m+n} = \mathbb{H}_{m+n} \times_F \mathbb{R}$, temos que

$$\begin{aligned} & (\exp_{\mathfrak{h}_{m+n}}(U + X), r) \cdot (\exp_{\mathfrak{h}_{m+n}}(V + Y), s) = \\ & = \left(\exp_{\mathfrak{h}_{m+n}} \left(U + e^{\frac{r}{2}} V + X + e^r Y + \frac{1}{2} e^{\frac{r}{2}} [U, V] \right), r + s \right). \end{aligned} \quad (3.11)$$

3.2.1 O Grupo $\mathbb{S}_4^3$

Consideremos $\mathbb{S}_4^3$ o espaço de Damek-Ricci 4-dimensional Lorentziano com coordenadas globais $\{x, y, z, t\}$. Procedendo de forma análoga ao grupo $\mathbb{S}_4^1$, a operação $(\cdot)$ do grupo $\mathbb{S}_4^3 = \mathbb{H}_3 \times_F \mathbb{R}$ é dada por

$$m \cdot n = (x + e^{\frac{t}{2}} x_1, y + e^{\frac{t}{2}} y_1, z + e^t z_1 + \frac{c}{2} e^{\frac{t}{2}} (x y_1 - x_1 y), t + t_1),$$

onde E_1, E_2, E_3 é uma base da álgebra de Lie do Heisenberg $\mathfrak{h}_3$ e $m, n \in \mathbb{S}_4^3$ são da forma

$$m = (\exp_{\mathfrak{h}_3}(x E_1 + y E_2 + z E_3), t) \quad \text{e} \quad n = (\exp_{\mathfrak{h}_3}(x_1 E_1 + y_1 E_2 + z_1 E_3), t_1)$$

onde $\exp : \mathfrak{h}_3 \rightarrow \mathbb{H}_3$ dada por $\exp_{\mathfrak{h}_3}(x E_1 + y E_2 + z E_3) = (x, y, z)$.

Sejam e_1, e_2, e_3 e e_4 os campos de vetores invariantes à esquerda gerados pelos vetores $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$ e $\hat{e}_4$, respectivamente, onde

$$\partial_{x_1}|_{e_1} := \hat{e}_1, \quad \partial_{x_2}|_{e_2} := \hat{e}_2, \quad \partial_{x_3}|_{e_2} := \hat{e}_3$$

são os vetores que geram a álgebra de Lie $\mathfrak{s}_4^3$ de $\mathbb{S}_4^3$ em termos das coordenadas exponenciais (x_1, x_2, x_3, x_4) . Assim, dado $(x, y, z, t) \in \mathbb{S}_4^3$ temos de forma análoga ao grupo $\mathbb{S}_4^1$ que

$$e_1 = e^{\frac{t}{2}} \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{cy}{2} \frac{\partial}{\partial z} \right), \quad e_2 = e^{\frac{t}{2}} \left(\frac{\partial}{\partial y} + \frac{cx}{2} \frac{\partial}{\partial z} \right), \quad e_3 = e^t \frac{\partial}{\partial z}, \quad e_4 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad (3.12)$$

os vetores e_1, e_2 e e_4 são tipo-espaco e e_3 tipo-tempo. Segue portanto, que

$$\frac{\partial}{\partial x} = e^{-\frac{t}{2}} e_1 + \frac{cy}{2} \frac{\partial}{\partial z}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = e^{-\frac{t}{2}} e_2 - \frac{cx}{2} \frac{\partial}{\partial z}, \quad \frac{\partial}{\partial z} = e^{-t} e_3, \quad \frac{\partial}{\partial t} = e_4,$$

3. A Representação de Weierstrass para os Espaços Damek-Ricci

ou seja,

$$\frac{\partial}{\partial x} = e^{-\frac{t}{2}}e_1 + e^{-t}\frac{cy}{2}e_3, \quad \frac{\partial}{\partial y} = e^{-\frac{t}{2}}e_2 - e^{-t}\frac{cx}{2}e_3, \quad \frac{\partial}{\partial z} = e^{-t}e_3, \quad \frac{\partial}{\partial t} = e_4.$$

Seja g uma métrica Lorentziana invariante à esquerda em $\mathbb{S}_4^3$. Note que sendo

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x} \right\rangle &= \left\langle e^{-\frac{t}{2}}e_1 + e^{-t}\frac{cy}{2}e_3, e^{-\frac{t}{2}}e_1 + e^{-t}\frac{cy}{2}e_3 \right\rangle \\ &= e^{-t} \langle e_1, e_1 \rangle + e^{-\frac{3t}{2}}cy \langle e_1, e_3 \rangle + e^{-2t} \left(\frac{cy}{2} \right)^2 \langle e_3, e_3 \rangle \\ &= e^{-t} - e^{-2t} \left(\frac{cy}{2} \right)^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial y} \right\rangle &= \left\langle e^{-\frac{t}{2}}e_2 - e^{-t}\frac{cx}{2}e_3, e^{-\frac{t}{2}}e_2 - e^{-t}\frac{cx}{2}e_3 \right\rangle \\ &= e^{-t} \langle e_2, e_2 \rangle - e^{-\frac{3t}{2}}cx \langle e_2, e_3 \rangle + e^{-2t} \left(\frac{cx}{2} \right)^2 \langle e_3, e_3 \rangle \\ &= e^{-t} - e^{-2t} \left(\frac{cx}{2} \right)^2, \end{aligned}$$

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial z} \right\rangle = -e^{-2t} \quad \text{e} \quad \left\langle \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle = 1,$$

além de

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right\rangle &= \left\langle \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial x} \right\rangle = \left\langle e^{-\frac{t}{2}}e_1 + e^{-t}\frac{cy}{2}e_3, e^{-\frac{t}{2}}e_2 - e^{-t}\frac{cx}{2}e_3 \right\rangle \\ &= e^{-t} \langle e_1, e_2 \rangle - e^{-\frac{3t}{2}}\frac{cx}{2} \langle e_1, e_3 \rangle + e^{-\frac{3t}{2}}\frac{cy}{2} \langle e_3, e_2 \rangle - e^{-2t} \left(\frac{c}{2} \right)^2 xy \langle e_3, e_3 \rangle \\ &= e^{-2t} \left(\frac{c}{2} \right)^2 xy, \end{aligned}$$

3. A Representação de Weierstrass para os Espaços Damek-Ricci

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial z} \right\rangle &= \left\langle \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial x} \right\rangle = \left\langle e^{-\frac{t}{2}} e_1 + e^{-t} \frac{cy}{2} e_3, e^{-t} e_3 \right\rangle \\
&= e^{-\frac{3t}{2}} \langle e_1, e_3 \rangle + e^{-2t} \frac{cy}{2} \langle e_3, e_3 \rangle \\
&= -e^{-2t} \frac{cy}{2},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle &= \left\langle \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x} \right\rangle = \left\langle e^{-\frac{t}{2}} e_1 + e^{-t} \frac{cy}{2} e_3, e_4 \right\rangle \\
&= e^{-\frac{t}{2}} \langle e_1, e_4 \rangle + e^{-t} \frac{cy}{2} \langle e_3, e_4 \rangle \\
&= 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right\rangle &= \left\langle \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial y} \right\rangle = \left\langle e^{-\frac{t}{2}} e_2 - e^{-t} \frac{cx}{2} e_3, e^{-t} e_3 \right\rangle \\
&= e^{-\frac{3t}{2}} \langle e_2, e_3 \rangle - e^{-2t} \frac{cx}{2} \langle e_3, e_3 \rangle \\
&= e^{-2t} \frac{cx}{2},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle &= \left\langle \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial y} \right\rangle = \left\langle e^{-\frac{t}{2}} e_2 - e^{-t} \frac{cx}{2} e_3, e_4 \right\rangle \\
&= e^{-\frac{t}{2}} \langle e_2, e_4 \rangle - e^{-t} \frac{cx}{2} \langle e_3, e_4 \rangle \\
&= 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle &= \left\langle \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial z} \right\rangle = \langle e^{-t} e_3, e_4 \rangle = e^{-t} \langle e_3, e_4 \rangle \\
&= 0,
\end{aligned}$$

esta métrica g é representada pela matriz

$$(g_{ij}) = \left(\left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle \right) = \begin{pmatrix} e^{-t} - e^{-2t} \left(\frac{cy}{2} \right)^2 & e^{-2t} \left(\frac{c}{2} \right)^2 xy & -e^{-2t} \frac{cy}{2} & 0 \\ e^{-2t} \left(\frac{c}{2} \right)^2 xy & e^{-t} - e^{-2t} \left(\frac{cx}{2} \right)^2 & e^{-2t} \frac{cx}{2} & 0 \\ -e^{-2t} \frac{cy}{2} & -e^{-2t} \frac{cx}{2} & -e^{-2t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Portanto, sua expressão coordenada é dada por

$$g = e^{-t} dx^2 + e^{-t} dy^2 - e^{-2t} \left(dz + \frac{c}{2} y dx - \frac{c}{2} x dy \right)^2 + dt^2$$

Calculando os colchetes de Lie de forma análoga ao grupo $\mathbb{S}_4^1$, obtemos que o referencial ortogonal $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ verifica

$$\begin{cases} [e_1, e_2] = ce_3, & [e_1, e_3] = 0, & [e_1, e_4] = -\frac{1}{2}e_1, \\ [e_2, e_3] = 0, & [e_2, e_4] = -\frac{1}{2}e_2, & [e_3, e_4] = -e_3. \end{cases}$$

Denotando $e_1 = U, e_2 = V, e_3 = X$ e $e_4 = A$ e usando a equação da conexão de Levi-Civita da Proposição 7 obtemos que

$$\begin{aligned} \nabla_{e_1} e_1 = \nabla_U U &= -\frac{1}{2} \{[U, U] - \langle U, U \rangle A\} \\ &= -\frac{1}{2} \{[e_1, e_1] - \langle e_1, e_1 \rangle e_4\} = \frac{1}{2} e_4, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla_{e_1} e_2 = \nabla_U V &= -\frac{1}{2} \{[V, U] - \langle V, U \rangle A\} \\ &= -\frac{1}{2} \{[e_2, e_1] - \langle e_2, e_1 \rangle e_4\} \\ &= \frac{1}{2} [e_1, e_2] = \frac{c}{2} e_3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla_{e_1} e_3 = \nabla_U X &= -\frac{1}{2} \{J_X U + [X, U] - \langle X, U \rangle A\} \\ &= -\frac{1}{2} J_X U. \end{aligned}$$

3. A Representação de Weierstrass para os Espaços Damek-Ricci

Note que

$$\langle J_X U, U \rangle = \langle \beta(U, U), X \rangle = \langle [U, U], X \rangle = 0$$

e

$$\langle J_X U, V \rangle = \langle \beta(U, V), X \rangle = \langle [U, V], X \rangle = \langle [e_1, e_2], e_3 \rangle = \langle ce_3, e_3 \rangle = -c,$$

ou seja, $J_X U = -ce_2$. Portanto,

$$\nabla_{e_1} e_3 = \frac{c}{2} e_2.$$

Temos ainda que

$$\nabla_{e_1} e_4 = \nabla_U A = -\frac{1}{2} U = -\frac{1}{2} e_1,$$

$$\begin{aligned} \nabla_{e_2} e_1 = \nabla_V U &= \{[U, V] - \langle U, V \rangle A\} \\ &= -\frac{1}{2} \{[e_1, e_2] - \langle e_1, e_2 \rangle e_4\} \\ &= -\frac{1}{2} [e_1, e_2] = -\frac{c}{2} e_3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla_{e_2} e_2 = \nabla_V V &= \{[V, V] - \langle V, V \rangle A\} \\ &= \frac{1}{2} \langle V, V \rangle A = \frac{1}{2} \langle e_2, e_2 \rangle e_4 = \frac{1}{2} e_4, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla_{e_2} e_3 = \nabla_V X &= -\frac{1}{2} \{J_X V + [X, V] - \langle X, V \rangle A\} \\ &= -\frac{1}{2} J_X V. \end{aligned}$$

Note que

$$\langle J_X V, U \rangle = \langle \beta(V, U), X \rangle = \langle [V, U], X \rangle = \langle -ce_3, e_3 \rangle = c$$

e

$$\langle J_X V, V \rangle = \langle \beta(V, V), X \rangle = \langle [V, V], X \rangle = 0,$$

ou seja, $J_X V = ce_1$. Portanto,

$$\nabla_{e_2} e_3 = -\frac{c}{2} e_1.$$

Temos ainda que

$$\nabla_{e_2} e_4 = \nabla_V A = -\frac{1}{2} V = -\frac{1}{2} e_2,$$

3. A Representação de Weierstrass para os Espaços Damek-Ricci

$$\begin{aligned}\nabla_{e_3}e_1 = \nabla_X U &= -\frac{1}{2}\{J_X V + [U, X] - \langle U, X \rangle A\} \\ &= -\frac{1}{2}J_X U.\end{aligned}$$

Note que

$$\langle J_X U, U \rangle = \langle \beta(U, U), X \rangle = \langle [U, U], X \rangle = 0$$

e

$$\langle J_X U, V \rangle = \langle \beta(U, V), X \rangle = \langle [U, V], X \rangle = \langle [e_1, e_2], e_3 \rangle = \langle ce_3, e_3 \rangle = -c,$$

ou seja, $J_X U = -ce_2$. Portanto,

$$\nabla_{e_3}e_1 = \frac{c}{2}e_2.$$

Temos ainda que

$$\begin{aligned}\nabla_{e_3}e_2 = \nabla_X U &= -\frac{1}{2}\{J_X V + [V, X] - \langle V, X \rangle A\} \\ &= -\frac{1}{2}J_X V.\end{aligned}$$

Note que

$$\langle J_X V, U \rangle = \langle \beta(V, U), X \rangle = \langle [V, U], X \rangle = \langle [e_2, e_1], e_3 \rangle = \langle -ce_3, e_3 \rangle = c$$

e

$$\langle J_X V, V \rangle = \langle \beta(V, V), X \rangle = \langle [V, V], X \rangle = 0,$$

ou seja, $J_X V = ce_1$. Portanto,

$$\nabla_{e_3}e_2 = -\frac{c}{2}e_1.$$

Temos ainda que

$$\nabla_{e_3}e_3 = \nabla_X X = \langle X, X \rangle A = -e_4, \quad \nabla_{e_3}e_4 = \nabla_X A = -X = -e_3$$

e

$$\nabla_{e_4}e_1 = \nabla_A U = 0, \quad \nabla_{e_4}e_2 = \nabla_A V = 0, \quad \nabla_{e_4}e_3 = \nabla_A X = 0, \quad \nabla_{e_4}e_4 = \nabla_A A = 0.$$

Por definição,

$$\nabla_{e_i}e_j = \sum_1^4 \frac{L_{ij}^k}{2} e_k.$$

Assim,

3. A Representação de Weierstrass para os Espaços Damek-Ricci

$$\nabla_{e_1} e_1 = \frac{L_{11}^1}{2} e_1 + \frac{L_{11}^2}{2} e_2 + \frac{L_{11}^3}{2} e_3 + \frac{L_{11}^4}{2} e_4 = \frac{1}{2} e_4 \Rightarrow L_{11}^4 = 1,$$

$$\nabla_{e_1} e_2 = \frac{L_{12}^1}{2} e_1 + \frac{L_{12}^2}{2} e_2 + \frac{L_{12}^3}{2} e_3 + \frac{L_{12}^4}{2} e_4 = \frac{c}{2} e_3 \Rightarrow L_{12}^3 = c,$$

$$\nabla_{e_1} e_3 = \frac{L_{13}^1}{2} e_1 + \frac{L_{13}^2}{2} e_2 + \frac{L_{13}^3}{2} e_3 + \frac{L_{13}^4}{2} e_4 = \frac{c}{2} e_2 \Rightarrow L_{13}^2 = c,$$

$$\nabla_{e_1} e_4 = \frac{L_{14}^1}{2} e_1 + \frac{L_{14}^2}{2} e_2 + \frac{L_{14}^3}{2} e_3 + \frac{L_{14}^4}{2} e_4 = -\frac{1}{2} e_1 \Rightarrow L_{14}^1 = -1,$$

$$\nabla_{e_2} e_1 = \frac{L_{21}^1}{2} e_1 + \frac{L_{21}^2}{2} e_2 + \frac{L_{21}^3}{2} e_3 + \frac{L_{21}^4}{2} e_4 = -\frac{c}{2} e_3 \Rightarrow L_{21}^3 = -c,$$

$$\nabla_{e_2} e_2 = \frac{L_{22}^1}{2} e_1 + \frac{L_{22}^2}{2} e_2 + \frac{L_{22}^3}{2} e_3 + \frac{L_{22}^4}{2} e_4 = \frac{1}{2} e_4 \Rightarrow L_{22}^4 = 1,$$

$$\nabla_{e_2} e_3 = \frac{L_{23}^1}{2} e_1 + \frac{L_{23}^2}{2} e_2 + \frac{L_{23}^3}{2} e_3 + \frac{L_{23}^4}{2} e_4 = -\frac{c}{2} e_1 \Rightarrow L_{23}^1 = -c,$$

$$\nabla_{e_2} e_4 = \frac{L_{24}^1}{2} e_1 + \frac{L_{24}^2}{2} e_2 + \frac{L_{24}^3}{2} e_3 + \frac{L_{24}^4}{2} e_4 = -\frac{1}{2} e_2 \Rightarrow L_{24}^2 = -1,$$

$$\nabla_{e_3} e_1 = \frac{L_{31}^1}{2} e_1 + \frac{L_{31}^2}{2} e_2 + \frac{L_{31}^3}{2} e_3 + \frac{L_{31}^4}{2} e_4 = \frac{c}{2} e_2 \Rightarrow L_{31}^2 = c,$$

$$\nabla_{e_3} e_2 = \frac{L_{32}^1}{2} e_1 + \frac{L_{32}^2}{2} e_2 + \frac{L_{32}^3}{2} e_3 + \frac{L_{32}^4}{2} e_4 = -\frac{c}{2} e_1 \Rightarrow L_{32}^1 = -c,$$

$$\nabla_{e_3} e_3 = \frac{L_{33}^1}{2} e_1 + \frac{L_{33}^2}{2} e_2 + \frac{L_{33}^3}{2} e_3 + \frac{L_{33}^4}{2} e_4 = -e_4 \Rightarrow L_{33}^4 = -2,$$

$$\nabla_{e_3} e_4 = \frac{L_{34}^1}{2} e_1 + \frac{L_{34}^2}{2} e_2 + \frac{L_{34}^3}{2} e_3 + \frac{L_{34}^4}{2} e_4 = -e_3 \Rightarrow L_{34}^3 = -2,$$

3. A Representação de Weierstrass para os Espaços Damek-Ricci

$$\nabla_{e_4} e_1 = \nabla_{e_4} e_2 = \nabla_{e_4} e_3 = \nabla_{e_4} e_1 = 0 \Rightarrow L_{4j}^k = 0, \forall j, k = 1, 2, 3, 4.$$

Assim,

$$\begin{cases} L_{11}^4 = 1, & L_{12}^3 = c, & L_{13}^2 = c, & L_{14}^1 = -1, & L_{21}^3 = -c, & L_{22}^4 = 1, \\ L_{23}^1 = -c, & L_{24}^2 = -1, & L_{31}^2 = c, & L_{32}^1 = -c, & L_{33}^4 = -2, & L_{34}^3 = -2. \end{cases} \quad (3.13)$$

e os outros L_{ij}^k são nulos. Definindo $\phi = \frac{\partial f}{\partial z}$, podemos escrever o campo tangente ϕ tanto em termos de coordenadas locais como usando os campos invariantes à esquerda.

Assim, temos que

$$\phi = \sum_{i=1}^4 \phi_i \frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^4 \psi_i e_i,$$

onde as funções ϕ_i e ψ_i são funções (para)complexas. Existe uma matriz invertível $A = (A_{ij})$, com $A_{ij} : f(\Omega) \cap U \rightarrow \mathbb{R}$, onde Ω é domínio simplesmente conexo em $\mathbb{K}(\mathbb{L} \text{ ou } \mathbb{C})$ tal que

$$\phi_i = \sum_{j=1}^4 A_{ij} \psi_j, \quad i = 1, 2, 3, 4. \quad (3.14)$$

Assim, a matriz A é definida por

$$A = \begin{bmatrix} e^{\frac{t}{2}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{\frac{t}{2}} & 0 & 0 \\ -\frac{c}{2}e^{\frac{t}{2}}y & \frac{c}{2}e^{\frac{t}{2}}x & e^t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Portanto, f é mínima se, e somente se, vale (1.10), ou seja,

$$\frac{\partial \psi_k}{\partial \bar{z}} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^4 L_{ij}^k \bar{\psi}_i \psi_j = 0, \quad k = 1, 2, 3, 4. \quad (3.15)$$

De (3.15) e (3.13) obtemos o sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi_1}{\partial \bar{z}} - \frac{1}{2} \bar{\psi}_1 \psi_4 - \frac{c}{2} (\bar{\psi}_2 \psi_3 + \bar{\psi}_3 \psi_2) = 0, \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial \bar{z}} - \frac{1}{2} \bar{\psi}_2 \psi_4 + \frac{c}{2} (\bar{\psi}_1 \psi_3 + \bar{\psi}_3 \psi_1) = 0, \\ \frac{\partial \psi_3}{\partial \bar{z}} - \bar{\psi}_3 \psi_4 + \frac{c}{2} (\bar{\psi}_1 \psi_2 - \bar{\psi}_2 \psi_1) = 0, \\ \frac{\partial \psi_4}{\partial \bar{z}} + \frac{1}{2} (\bar{\psi}_1 \psi_1 + \bar{\psi}_2 \psi_2) - \bar{\psi}_3 \psi_3 = 0. \end{cases} \quad (3.16)$$

Note que o sistema (3.16) é equivalente ao seguinte sistema

3. A Representação de Weierstrass para os Espaços Damek-Ricci

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \psi_1}{\partial \bar{z}} - \frac{1}{2} \bar{\psi}_1 \psi_4 - c \operatorname{Re}(\bar{\psi}_2 \psi_3) = 0, \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial \bar{z}} - \frac{1}{2} \bar{\psi}_2 \psi_4 + c \operatorname{Re}(\bar{\psi}_1 \psi_3) = 0, \\ \frac{\partial \psi_3}{\partial \bar{z}} - \bar{\psi}_3 \psi_4 + \frac{c}{2} (\bar{\psi}_1 \psi_2 - \bar{\psi}_2 \psi_1) = 0, \\ \frac{\partial \psi_4}{\partial \bar{z}} + \frac{1}{2} (\bar{\psi}_1 \psi_1 + \bar{\psi}_2 \psi_2) - \bar{\psi}_3 \psi_3 = 0. \end{array} \right. \quad (3.17)$$

Logo, encontramos as condições de harmonicidade que satisfazem o Teorema 3.2.

Capítulo 4

Exemplos

Neste capítulo apresentaremos alguns exemplos de imersões mínimas conformes nos espaços Damek-Ricci Lorentzianos $\mathbb{S}_4^1$ e $\mathbb{S}_4^3$.

4.1 Imersões do Primeiro Tipo Lorentziano

4.1.1 Exemplo 1

Seja $\Omega = \{u + \tau v \in \mathbb{L}; u > 0\}$ um domínio simplesmente conexo e considere as seguintes funções paracomplexas

$$\psi_1 = \frac{\tau}{u}, \quad \psi_2 = \psi_3 = 0 \text{ e } \psi_4 = \frac{1}{u} \quad (4.1)$$

definidas em Ω . Note que

$$\text{i) } \psi_1 \bar{\psi}_1 + \psi_2 \bar{\psi}_2 + \psi_3 \bar{\psi}_3 - \psi_4 \bar{\psi}_4 = \left(\frac{\tau}{u}\right) \left(-\frac{\tau}{u}\right) - \left(\frac{1}{u}\right) \left(\frac{1}{u}\right) = -\frac{1}{u^2} - \frac{1}{u^2} \neq 0;$$

$$\text{ii) } \psi_1^2 + \psi_2^2 + \psi_3^2 - \psi_4^2 = \left(\frac{\tau}{u}\right)^2 - \left(\frac{1}{u}\right)^2 = 0,$$

isto é, os itens i) e ii) do Teorema 3.1 são satisfeitos. Além disso, sendo $\psi_2 = \psi_3 = 0$ tem-se que

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi_1}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \bar{\psi}_1 \psi_4 - c \mathcal{R}e(\bar{\psi}_2 \psi_3) = \frac{1}{2} \left(-\frac{\tau}{u}\right) \left(\frac{1}{u}\right) = -\frac{\tau}{2u^2}, \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \bar{\psi}_2 \psi_4 + c \mathcal{R}e(\bar{\psi}_1 \psi_3) = 0, \\ \frac{\partial \psi_3}{\partial \bar{z}} = \bar{\psi}_3 \psi_4 - \frac{c}{2} (\bar{\psi}_1 \psi_2 - \bar{\psi}_2 \psi_1) = 0, \\ \frac{\partial \psi_4}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} (\bar{\psi}_1 \psi_1 + \bar{\psi}_2 \psi_2) + \bar{\psi}_3 \psi_3 = \frac{1}{2} \left(-\frac{\tau}{u}\right) \left(\frac{\tau}{u}\right) = -\frac{1}{2u^2}. \end{cases}$$

4. Exemplos

Portanto, pelo Teorema 3.1 temos que as coordenadas da aplicação $f : \Omega \rightarrow \mathbb{S}_4^1$ são dadas por

$$f_i = 2\mathcal{R}e \int \sum_{j=1}^4 A_{ij} \psi_j dz, \quad i = 1, 2, 3, 4,$$

onde a aplicação $A : \Omega \rightarrow GL(4, \mathbb{R})$ é dada por

$$A = \begin{bmatrix} e^{\frac{f_4}{2}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{\frac{f_4}{2}} & 0 & 0 \\ -\frac{c}{2}e^{\frac{f_4}{2}}f_2 & \frac{c}{2}e^{\frac{f_4}{2}}f_1 & e^{f_4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.2)$$

Assim, obtemos o seguinte sistema

$$\begin{cases} f_1 = 2\mathcal{R}e \int \{A_{11}\psi_1 + A_{12}\psi_2 + A_{13}\psi_3 + A_{14}\psi_4\} dz = 2\mathcal{R}e \int e^{\frac{f_4}{2}} \psi_1 dz, \\ f_2 = 2\mathcal{R}e \int \{A_{21}\psi_1 + A_{22}\psi_2 + A_{23}\psi_3 + A_{24}\psi_4\} dz = 2\mathcal{R}e \int e^{\frac{f_4}{2}} \psi_2 dz, \\ f_3 = 2\mathcal{R}e \int \{A_{31}\psi_1 + A_{32}\psi_2 + A_{33}\psi_3 + A_{34}\psi_4\} dz \\ \quad = 2\mathcal{R}e \int \left\{ -\frac{c}{2}e^{\frac{f_4}{2}}f_2\psi_1 + \frac{c}{2}e^{\frac{f_4}{2}}f_1\psi_2 + e^{f_4}\psi_3 \right\} dz, \\ f_4 = 2\mathcal{R}e \int \{A_{41}\psi_1 + A_{42}\psi_2 + A_{43}\psi_3 + A_{44}\psi_4\} = 2\mathcal{R}e \int \psi_4 dz. \end{cases} \quad (4.3)$$

Consequentemente, pelas funções em (4.1) tem-se

$$\begin{cases} f_1(u, v) = 2\mathcal{R}e \int e^{\frac{f_4}{2}} \frac{\tau}{u} dz, \\ f_2(u, v) = 2\mathcal{R}e \int 0 dz = c_2 \in \mathbb{R}, \\ f_3(u, v) = 2\mathcal{R}e \int \left\{ -\frac{c}{2}e^{\frac{f_4}{2}}f_2\frac{\tau}{u} + \frac{c}{2}e^{\frac{f_4}{2}}f_1 \cdot 0 + e^{f_4} \cdot 0 \right\} dz = 2\mathcal{R}e \int -\frac{c}{2}e^{\frac{f_4}{2}}f_2\frac{\tau}{u} dz, \\ f_4(u, v) = 2\mathcal{R}e \int \psi_4 dz. \end{cases}$$

Note que dados $z = u + \tau v \in \Omega$ e $z_0 = u_0 + \tau v_0 \in \Omega$, temos que $dz = du + \tau dv$. Tomando o caminho $\alpha(t) = (1-t)z_0 + tz$ com $t \in [0, 1]$, segue que $\alpha'(t) = z - z_0 = (u - u_0) + \tau(v - v_0)$. Dessa forma,

$$\begin{aligned}
f_4(u, v) &= 2\mathcal{R}e \int_0^1 \psi_4(\alpha(t))\alpha'(t)dt \\
&= 2\mathcal{R}e \int_0^1 \frac{1}{(1-t)u_0 + tu}((u - u_0) + \tau(v - v_0))dt \\
&= 2\mathcal{R}e \left[\int_0^1 \frac{(u - u_0)}{(1-t)u_0 + tu}dt + \tau \int_0^1 \frac{(v - v_0)}{(1-t)u_0 + tu}dt \right] \\
&= 2 \int_0^1 \frac{(u - u_0)}{(1-t)u_0 + tu}dt = 2\ln(c_4[(1-t)u_0 + tu]) \Big|_0^1 \\
&= 2\ln(c_4u) - 2\ln(c_4u_0), \quad c_4 > 0.
\end{aligned}$$

Tomando $z_0 = 1$, segue que $f_4(u, v) = 2\ln(c_4u) - 2\ln(1) = 2\ln(c_4u)$. Assim,

$$\begin{aligned}
f_1(u, v) &= 2\mathcal{R}e \int_{z_0}^z e^{\frac{f_4}{2}} \psi_1 dz = 2\mathcal{R}e \int_{z_0}^z e^{\ln(c_4u)} \frac{\tau}{u} (du + \tau dv) \\
&= 2\mathcal{R}e \int_{z_0}^z c_4 u \frac{\tau}{u} (du + \tau dv) = 2\mathcal{R}e \int_{z_0}^z c_4 \tau (du + \tau dv) \\
&= 2\mathcal{R}e \left[\int_{z_0}^z c_4 \tau du + \int_{z_0}^z c_4 \tau dv \right] = 2 \int_{z_0}^z c_4 \tau dv \\
&= 2c_4 v + c_1, \quad c_1 \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Considerando agora, sem perda de generalidade, $c = 1$, obtemos que

$$\begin{aligned}
f_3(u, v) &= 2\mathcal{R}e \int_{z_0}^z -\frac{c}{2} e^{\frac{f_4}{2}} f_2 \psi_1 dz = 2\mathcal{R}e \int_{z_0}^z -\frac{1}{2} e^{\ln(c_4u)} c_2 \frac{\tau}{u} (du + \tau dv) \\
&= \mathcal{R}e \int_{z_0}^z -c_4 u c_2 \frac{\tau}{u} (du + \tau dv) = \mathcal{R}e \int_{z_0}^z -c_4 c_2 \tau (du + \tau dv) \\
&= \mathcal{R}e \left[\int_{z_0}^z -c_4 c_2 \tau du + \int_{z_0}^z -c_4 c_2 \tau dv \right] = - \int_{z_0}^z c_4 c_2 \tau dv \\
&= -c_4 c_2 v + c_3, \quad c_3 \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

4. Exemplos

Portanto, a aplicação $f : \Omega \rightarrow \mathbb{S}_4^1$ dada por

$$\begin{cases} f_1(u, v) = 2c_4v + c_1, \\ f_2(u, v) = c_2, \\ f_3(u, v) = -c_4c_2v + c_3, \\ f_4(u, v) = 2 \ln(c_4u). \end{cases}$$

é uma imersão mínima conforme do tipo-tempo em $\mathbb{S}_4^1$, com $c_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, 3$ e $c_4 > 0$.

4.1.2 Exemplo 2

Seja $\Omega = \{u + \tau v \in \mathbb{L}; u > 0\}$ um domínio simplesmente conexo e considere as seguintes funções paracomplexas

$$\psi_1 = \psi_2 = \frac{\tau}{\sqrt{2}u}, \quad \psi_3 = 0 \text{ e } \psi_4 = \frac{1}{u} \quad (4.4)$$

definidas em Ω . Note que

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad & \psi_1\bar{\psi}_1 + \psi_2\bar{\psi}_2 + \psi_3\bar{\psi}_3 - \psi_4\bar{\psi}_4 = -2 \left(\frac{\tau}{\sqrt{2}u} \right) \left(\frac{\tau}{\sqrt{2}u} \right) - \left(\frac{1}{u} \right) \left(\frac{1}{u} \right) = -\frac{1}{u^2} - \frac{1}{u^2} \neq 0, \\ \text{ii)} \quad & \psi_1^2 + \psi_2^2 + \psi_3^2 - \psi_4^2 = 2 \left(\frac{\tau}{\sqrt{2}u} \right)^2 - \left(\frac{1}{u} \right)^2 = 0, \end{aligned}$$

isto é, os itens i) e ii) do Teorema 3.1 são satisfeitos. Além disso, sendo $\psi_3 = 0$ e $\bar{\psi}_1\psi_2 - \bar{\psi}_2\psi_1 = 0$ tem-se

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi_1}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\bar{\psi}_1\psi_4 - c\mathcal{R}e(\bar{\psi}_2\psi_3) = \frac{1}{2} \left(-\frac{\tau}{\sqrt{2}u^2} \right) = -\frac{\tau}{2\sqrt{2}u^2}, \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\bar{\psi}_2\psi_4 + c\mathcal{R}e(\bar{\psi}_1\psi_3) = \frac{1}{2} \left(-\frac{\tau}{\sqrt{2}u^2} \right) = -\frac{\tau}{2\sqrt{2}u^2}, \\ \frac{\partial \psi_3}{\partial \bar{z}} = \bar{\psi}_3\psi_4 - \frac{c}{2}(\bar{\psi}_1\psi_2 - \bar{\psi}_2\psi_1) = 0, \\ \frac{\partial \psi_4}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}(\bar{\psi}_1\psi_1 + \bar{\psi}_2\psi_2) + \bar{\psi}_3\psi_3 = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{u^2} \right) = -\frac{1}{2u^2}. \end{cases}$$

Assim, pelo Teorema (3.1), da aplicação $A : \Omega \rightarrow GL(4, \mathbb{R})$ em (4.2), do sistema (4.3) e das funções dadas em (4.4), obtemos o seguinte sistema

4. Exemplos

$$\left\{ \begin{array}{l} f_1(u, v) = 2\mathcal{R}e \int e^{\frac{f_4}{2}} \frac{\tau}{\sqrt{2}u} dz, \\ f_2(u, v) = 2\mathcal{R}e \int e^{\frac{f_4}{2}} \frac{\tau}{\sqrt{2}u} dz, \\ f_3(u, v) = 2\mathcal{R}e \int \left\{ -\frac{c}{2} e^{\frac{f_4}{2}} f_2 \frac{\tau}{\sqrt{2}u} + \frac{c}{2} e^{\frac{f_4}{2}} f_1 \frac{\tau}{\sqrt{2}u} + e^{f_4} \cdot 0 \right\} dz \\ \quad = 2\mathcal{R}e \int \left\{ -\frac{c}{2} e^{\frac{f_4}{2}} f_2 \frac{\tau}{\sqrt{2}u} + \frac{c}{2} e^{\frac{f_4}{2}} f_1 \frac{\tau}{\sqrt{2}u} \right\} dz, \\ f_4(u, v) = 2\mathcal{R}e \int \psi_4 dz. \end{array} \right.$$

Note que dados $z = u + \tau v \in \Omega$ e $z_0 = u_0 + \tau v_0 \in \Omega$, temos que $dz = du + \tau dv$. Tomando o caminho $\alpha(t) = (1-t)z_0 + tz$ com $t \in [0, 1]$, segue que $\alpha'(t) = z - z_0 = (u - u_0) + \tau(v - v_0)$. Dessa forma,

$$\begin{aligned} f_4(u, v) &= 2\mathcal{R}e \int_0^1 \psi_4(\alpha(t)) \alpha'(t) dt \\ &= 2\mathcal{R}e \int_0^1 \frac{1}{(1-t)u_0 + tu} ((u - u_0) + \tau(v - v_0)) dt \\ &= 2\mathcal{R}e \left[\int_0^1 \frac{(u - u_0)}{(1-t)u_0 + tu} dt + \tau \int_0^1 \frac{(v - v_0)}{(1-t)u_0 + tu} dt \right] \\ &= 2 \int_0^1 \frac{(u - u_0)}{(1-t)u_0 + tu} dt = 2\ln(c_4[(1-t)u_0 + tu]) \Big|_0^1 \\ &= 2\ln(c_4u) - 2\ln(c_4u_0), \quad c_4 > 0. \end{aligned}$$

Tomando $z_0 = 1$, segue que $f_4(u, v) = 2\ln(c_4u) - 2\ln(1) = 2\ln(c_4u)$. Assim,

$$\begin{aligned} f_1(u, v) &= 2\mathcal{R}e \int_{z_0}^z e^{\frac{f_4}{2}} \psi_1 dz = 2\mathcal{R}e \int_{z_0}^z e^{\ln(c_4u)} \frac{\tau}{\sqrt{2}u} (du + \tau dv) \\ &= 2\mathcal{R}e \int_{z_0}^z c_4u \frac{\tau}{\sqrt{2}u} (du + \tau dv) = 2\mathcal{R}e \left[\int_{z_0}^z \frac{c_4}{\sqrt{2}} \tau du + \int_{z_0}^z \frac{c_4}{\sqrt{2}} dv \right] \\ &= \sqrt{2} \int_{z_0}^z c_4 dv = \sqrt{2}c_4v + c_1, \quad c_1 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Analogamente, temos que $f_2(u, v) = \sqrt{2}c_4v + c_2$, $c_2 \in \mathbb{R}$. Considerando agora, sem perda de generalidade, $c = 1$, obtemos que

$$\begin{aligned}
f_3(u, v) &= 2\mathcal{R}e \int_{z_0}^z \left\{ -\frac{c}{2} e^{\frac{f_4}{2}} f_2 \psi_1 + \frac{c}{2} e^{\frac{f_4}{2}} f_1 \psi_2 \right\} dz \\
&= \mathcal{R}e \int_{z_0}^z \left\{ -e^{\ln(c_4 u)} (\sqrt{2} c_4 v + c_2) \frac{\tau}{\sqrt{2} u} + e^{\ln(c_4 u)} (\sqrt{2} c_4 v + c_1) \frac{\tau}{\sqrt{2} u} \right\} (du + \tau dv) \\
&= \mathcal{R}e \int_{z_0}^z \left\{ -c_4 u (\sqrt{2} c_4 v + c_2) \frac{\tau}{\sqrt{2} u} + c_4 u (\sqrt{2} c_4 v + c_1) \frac{\tau}{\sqrt{2} u} \right\} (du + \tau dv) \\
&= \mathcal{R}e \int_{z_0}^z \left\{ (-\sqrt{2} c_4^2 v - c_4 c_2) \frac{\tau}{\sqrt{2}} + (\sqrt{2} c_4^2 v + c_4 c_1) \frac{\tau}{\sqrt{2}} \right\} (du + \tau dv) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{z_0}^z \left\{ -\sqrt{2} c_4^2 v - c_4 c_2 + \sqrt{2} c_4^2 v + c_4 c_1 \right\} dv = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{z_0}^z c_4 (c_1 - c_2) dv \\
&= \frac{c_4 (c_1 - c_2) v + c_3}{\sqrt{2}}, \quad c_3 \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Portanto a aplicação $f : \Omega \rightarrow \mathbb{S}_4^1$ dada por

$$\begin{cases} f_1(u, v) = \sqrt{2} c_4 v + c_1, \\ f_2(u, v) = \sqrt{2} c_4 v + c_2, \\ f_3(u, v) = \frac{c_4 (c_1 - c_2) v + c_3}{\sqrt{2}}, \\ f_4(u, v) = 2 \ln(c_4 u) \end{cases}$$

é uma imersão mínima conforme do tipo-tempo em $\mathbb{S}_4^1$, com $c_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, 3$ e $c_4 > 0$.

4.2 Imersões do Segundo Tipo Lorentziano

4.2.1 Exemplo 3

Seja $\Omega = \{u + iv \in \mathbb{C}; u > 0\}$ um domínio simplesmente conexo e as funções complexas

$$\psi_1 = \frac{i}{u}, \quad \psi_2 = \psi_3 = 0 \text{ e } \psi_4 = \frac{1}{u} \tag{4.5}$$

definidas em Ω . Note que

$$\begin{aligned}
\text{i)} \quad & \psi_1 \bar{\psi}_1 + \psi_2 \bar{\psi}_2 - \psi_3 \bar{\psi}_3 + \psi_4 \bar{\psi}_4 = \left(\frac{i}{u}\right) \left(-\frac{i}{u}\right) + \left(\frac{1}{u}\right) \left(\frac{1}{u}\right) = \frac{1}{u^2} + \frac{1}{u^2} \neq 0; \\
\text{ii)} \quad & \psi_1^2 + \psi_2^2 - \psi_3^2 + \psi_4^2 = \left(\frac{i}{u}\right)^2 + \left(\frac{1}{u}\right)^2 = 0,
\end{aligned}$$

4. Exemplos

isto é, os itens i) e ii) do Teorema 3.2 são satisfeitos. Além disso, tem-se

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \psi_1}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \bar{\psi}_1 \psi_4 + c \mathcal{R}e(\bar{\psi}_2 \psi_3) = \frac{1}{2} \left(-\frac{i}{u^2} \right) = -\frac{i}{2u^2}, \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \bar{\psi}_2 \psi_4 - c \mathcal{R}e(\bar{\psi}_1 \psi_3) = 0, \\ \frac{\partial \psi_3}{\partial \bar{z}} = \bar{\psi}_3 \psi_4 - \frac{c}{2} (\bar{\psi}_1 \psi_2 - \bar{\psi}_2 \psi_1) = 0, \\ \frac{\partial \psi_4}{\partial \bar{z}} = -\frac{1}{2} (\bar{\psi}_1 \psi_1 + \bar{\psi}_2 \psi_2) + \bar{\psi}_3 \psi_3 = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{u^2} \right) = -\frac{1}{2u^2}. \end{array} \right.$$

Assim, pelo Teorema (3.2), da aplicação $A : \Omega \rightarrow GL(4, \mathbb{R})$ em (4.2), do sistema (4.3) e das funções dadas em (4.5), obtemos o seguinte sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} f_1(u, v) = 2\mathcal{R}e \int e^{\frac{f_4}{2}} \frac{i}{u} dz, \\ f_2(u, v) = 2\mathcal{R}e \int e^{\frac{f_4}{2}} \cdot 0 dz = c_2 \in \mathbb{R}, \\ f_3(u, v) = 2\mathcal{R}e \int -\frac{c}{2} e^{\frac{f_4}{2}} f_2 \frac{i}{u} dz, \\ f_4(u, v) = 2\mathcal{R}e \int \psi_4 dz. \end{array} \right.$$

Note que dados $z = u + iv \in \Omega$ e $z_0 = u_0 + iv_0 \in \Omega$, temos que $dz = du + idv$. Tomando o caminho $\alpha(t) = (1-t)z_0 + tz$ com $t \in [0, 1]$, segue que $\alpha'(t) = z - z_0 = (u - u_0) + i(v - v_0)$. Dessa forma,

$$\begin{aligned} f_4(u, v) &= 2\mathcal{R}e \int_0^1 \psi_4(\alpha(t)) \alpha'(t) dt \\ &= 2\mathcal{R}e \int_0^1 \frac{1}{(1-t)u_0 + tu} ((u - u_0) + i(v - v_0)) dt \\ &= 2\mathcal{R}e \left[\int_0^1 \frac{(u - u_0)}{(1-t)u_0 + tu} dt + i \int_0^1 \frac{(v - v_0)}{(1-t)u_0 + tu} dt \right] \\ &= 2 \int_0^1 \frac{(u - u_0)}{(1-t)u_0 + tu} dt = 2 \ln(c_4[(1-t)u_0 + tu]) \Big|_0^1 \\ &= 2 \ln(c_4 u) - 2 \ln(c_4 u_0), \quad c_4 > 0. \end{aligned}$$

4. Exemplos

Tomando $z_0 = 1$, segue que $f_4(u, v) = 2\ln(c_4u) - 2\ln(1) = 2\ln(c_4u)$. Assim,

$$\begin{aligned} f_1(u, v) &= 2\mathcal{R}e \int_{z_0}^z e^{\frac{f_4}{2}} \psi_1 dz = 2\mathcal{R}e \int_{z_0}^z e^{\ln(c_4u)} \frac{i}{u} (du + idv) \\ &= 2\mathcal{R}e \int_{z_0}^z c_4u \frac{i}{u} (du + idv) = 2\mathcal{R}e \left[\int_{z_0}^z c_4 i du - \int_{z_0}^z c_4 dv \right] \\ &= -2 \int_{z_0}^z c_4 dv = -2c_4v + c_1, \quad c_1 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Considerando agora, sem perda de generalidade, $c = 1$, obtemos que

$$\begin{aligned} f_3(u, v) &= 2\mathcal{R}e \int_{z_0}^z -\frac{c}{2} e^{\frac{f_4}{2}} f_2 \psi_1 dz \\ &= 2\mathcal{R}e \int_{z_0}^z -\frac{1}{2} e^{\ln(c_4u)} c_2 \frac{i}{u} (du + idv) \\ &= \mathcal{R}e \int_{z_0}^z -c_4 u c_2 \frac{i}{u} (du + idv) \\ &= \mathcal{R}e \left[\int_{z_0}^z -c_4 c_2 i du + \int_{z_0}^z c_4 c_2 dv \right] \\ &= c_4 c_2 dv + c_3, \quad c_3 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Portanto, a aplicação $f : \Omega \rightarrow \mathbb{S}_4^3$ dada por

$$\begin{cases} f_1(u, v) = -2c_4v + c_1, \\ f_2(u, v) = c_2, \\ f_3(u, v) = c_4c_2v + c_3, \\ f_4(u, v) = 2 \ln(c_4u). \end{cases}$$

é uma imersão mínima conforme do tipo-espaco em $\mathbb{S}_4^3$, com $c_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, 3$ e $c_4 > 0$.

4.2.2 Exemplo 4

Seja $\Omega = \{u + \tau v \in \mathbb{L}; u > 0\}$ um domínio simplesmente conexo e considere as seguintes funções paracomplexas

$$\psi_1 = \psi_2 = 0 \quad \psi_3 = \frac{\tau}{2u} \quad \text{e} \quad \psi_4 = \frac{1}{2u} \quad (4.6)$$

definidas em Ω . Note que

$$\text{i)} \quad \psi_1 \bar{\psi}_1 + \psi_2 \bar{\psi}_2 - \psi_3 \bar{\psi}_3 + \psi_4 \bar{\psi}_4 = -\left(\frac{\tau}{2u}\right) \left(-\frac{\tau}{2u}\right) + \left(\frac{1}{2u}\right) \left(\frac{1}{2u}\right) = \frac{1}{4u^2} + \frac{1}{4u^2} \neq 0,$$

4. Exemplos

$$\text{ii)} \quad \psi_1^2 + \psi_2^2 - \psi_3^2 + \psi_4^2 = -\left(\frac{\tau}{2u}\right)^2 + \left(\frac{1}{2u}\right)^2 = 0,$$

isto é, os itens i) e ii) do Teorema 3.2 são satisfeitos. Além disso, tem-se

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi_1}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \bar{\psi}_1 \psi_4 + c \mathcal{R}e(\bar{\psi}_2 \psi_3) = 0, \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \bar{\psi}_2 \psi_4 - c \mathcal{R}e(\bar{\psi}_1 \psi_3) = 0, \\ \frac{\partial \psi_3}{\partial \bar{z}} = \bar{\psi}_3 \psi_4 - \frac{c}{2} (\bar{\psi}_1 \psi_2 - \bar{\psi}_2 \psi_1) = -\frac{\tau}{4u^2}, \\ \frac{\partial \psi_4}{\partial \bar{z}} = -\frac{1}{2} (\bar{\psi}_1 \psi_1 + \bar{\psi}_2 \psi_2) + \bar{\psi}_3 \psi_3 = -\frac{1}{4u^2}. \end{cases}$$

Assim, pelo Teorema (3.2), da aplicação $A : \Omega \rightarrow GL(4, \mathbb{R})$ em (4.2), do sistema (4.3) e das funções dadas em (4.6), obtemos o seguinte sistema

$$\begin{cases} f_1(u, v) = 2\mathcal{R}e \int e^{\frac{f_4}{2}} \cdot 0 dz = c_1 \in \mathbb{R}, \\ f_2(u, v) = 2\mathcal{R}e \int e^{\frac{f_4}{2}} \cdot 0 dz = c_2 \in \mathbb{R}, \\ f_3(u, v) = 2\mathcal{R}e \int e^{f_4} \frac{\tau}{2u} dz = \mathcal{R}e \int \frac{e^{f_4}}{u} dz, \\ f_4(u, v) = 2\mathcal{R}e \int \psi_4 dz. \end{cases}$$

Note que dados $z = u + \tau v \in \Omega$ e $z_0 = u_0 + \tau v_0 \in \Omega$, temos que $dz = du + \tau dv$. Tomando o caminho $\alpha(t) = (1-t)z_0 + tz$ com $t \in [0, 1]$, segue que $\alpha'(t) = z - z_0 = (u - u_0) + \tau(v - v_0)$. Dessa forma,

$$\begin{aligned} f_4(u, v) &= 2\mathcal{R}e \int_0^1 \psi_4(\alpha(t)) \alpha'(t) dt \\ &= 2\mathcal{R}e \int_0^1 \frac{1}{2((1-t)u_0 + tu)} ((u - u_0) + \tau(v - v_0)) dt \\ &= 2\mathcal{R}e \left[\int_0^1 \frac{(u - u_0)}{2((1-t)u_0 + tu)} dt + \int_0^1 \frac{\tau(v - v_0)}{2((1-t)u_0 + tu)} dt \right] \\ &= \int_0^1 \frac{(u - u_0)}{((1-t)u_0 + tu)} dt = \ln(c_4[(1-t)u_0 + tu]) \Big|_0^1 \\ &= \ln(c_4 u) - \ln(c_4 u_0), \quad c_4 > 0. \end{aligned}$$

4. Exemplos

Tomando $z_0 = 1$, segue que $f_4(u, v) = \ln(c_4 u) - \ln(1) = \ln(c_4 u)$, $c_4 > 0$. Assim,

$$\begin{aligned} f_3(u, v) &= 2\mathcal{R}e \int_{z_0}^z e^{f_4} \psi_3 dz \\ &= 2\mathcal{R}e \int_{z_0}^z e^{\ln(c_4 u)} \frac{\tau}{2u} (du + \tau dv) \\ &= \mathcal{R}e \int_{z_0}^z c_4 u \frac{\tau}{u} (du + \tau dv) = \int_{z_0}^z c_4 dv \\ &= c_4 v + c_3, \quad c_3 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Portanto a aplicação $f : \Omega \rightarrow \mathbb{S}_4^3$ dada por

$$\left\{ \begin{array}{l} f_1(u, v) = c_1, \\ f_2(u, v) = c_2, \\ f_3(u, v) = c_4 v + c_3, \\ f_4(u, v) = \ln(c_4 u) \end{array} \right.$$

é uma imersão mínima conforme do tipo-tempo em $\mathbb{S}_4^3$, com $c_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3$ e $c_4 > 0$.

Referências Bibliográficas

- [1] Berndt, J. and Tricerri, F. and Vanhecke, L. *Generalized Heisenberg groups and Damek-Ricci harmonic spaces*, Springer Verlag, Berlin 2006.
- [2] Boggino, J. *Generalized Heisenberg groups and solvmanifolds naturally associated*. Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino, v.43, 1985.
- [3] Carroll R. and B. Konopelchenko. *Generalized Weierstrass-Enneper inducing, conformal immersion and gravity* . Int. J. Modern Physics A11, 1183-1216, 1996.
- [4] Cintra, A. *Superfícies mínimas em variedades lorentzianas*. Universidade Estadual de Campinas, Unicamp, Campinas, 2014.
- [5] Cintra, A. and Mercuri, F. and Onnis, I. *Minimal surfaces in Lorentzian Heisenberg group and Damek–Ricci spaces via the Weierstrass representation*. Journal of Geometry and Physics, v.121, 396-412, 2017.
- [6] Damek, E. *Curvature of a semi-direct extension of a Heisenberg type nilpotent group*. Colloquium Mathematicae, Institute of Mathematics Polish Academy of Sciences, v. 53, p.249-253, 1987.
- [7] Damek, E. *The geometry of a semi-direct extension of a Heisenberg type nilpotent group*. Colloquium Mathematicum, v.2, 53, 255-268, 1987.
- [8] Damek, E. and Ricci, F. *A class of nonsymmetric harmonic Riemannian spaces*. Bull. Amer. Math Soc. v. 27, 1, 139-142, 1992.
- [9] Eells, J. and Lemaire, L. *Selected Topics in Harmonic Maps*. American Mathematical Soc., 50, 1983.
- [10] Hoffman, D. and Karcher, H. *Complete embedded minimal surfaces of finite total curvature*. Geometry V, Springer, p. 5-93. 1997.
- [11] Kaplan, A. *Fundamental solutions for a class of hypoelliptic PDE generated by composition of quadratic forms*. Transactions of the American Mathematical Society, v.258, 1980.

- [12] Kenmotsu, K. *Weierstrass formula for surfaces of prescribed mean curvature*. Mathematische Annalen, v.245, Springer, 2, 89-99, 1979.
- [13] Kobayashi, O. *Maximal surfaces in 3-dimensional Lorentz $\mathbb{L}^3$* . Tokyo J. Math, v. 6, 1983.
- [14] Koivogui, M. and Todjihounde, L. *Weierstrass representation for minimal immersions into Damek-Ricci spaces*. International Electronic Journal of Geometry, v. 6, Springer, 2013.
- [15] Konderak, J. *A Weierstrass representation theorem for Lorentz surfaces*. Complex Variables, Theory and Application: An International Journal, v. 50, Taylor & Francis, 2005.
- [16] Konopelchenko, B. *Multidimensional integrable systems and dynamics of surfaces in space*. Preprint of Institute of Mathematics, Taipei, August 1993.
- [17] Konopelchenko, B. *Induced surfaces and their integrable dynamics*. Stud. Appl. Math., 96, 9-51, 1996.
- [18] Konopelchenko, B. and Landoffli, G. *Generalized Weierstrass representation for surfaces in multidimensional Riemann spaces*. Journal of Geometry and Physics, v.29, 4, 319-33 1999.
- [19] Konopelchenko, B. and Taimanov, I. *Generalized Weierstrass formulae, soliton equations and Willmore surfaces*. Preprint n. 187, Univ. Bochum, 1995.
- [20] Koszul, J.L., Malgrange, B. *Sur certaines structures fibrées complexes*. Arch. Math, Springer 9, 102-109,1958.
- [21] Lichnerowicz, A. *Sur les espaces riemanniens complètement harmoniques*. Bulletin de la Société Mathématique de France, v.72, 1944.
- [22] Lira, J. and Melo, M. and Mercuri, F. *A Weierstrass representation for minimal surfaces in 3-dimensional manifolds*. Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications, 24, Results in Mathematics,v.60, Springer, 2011.
- [23] Mercuri, F. and Montaldo, S. and Piu, P. *A Weierstrass representation formula for minimal surfaces in $\mathbb{H}_3$ and $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$* . Acta Mathematica Sinica, v. 22, Springer, 2006.
- [24] Mori, Kunihiko. *Einstein metrics on Boggino-Damek-Ricci type solvable Lie groups*. Osaka Journal of Mathematics, v.39,Osaka University and Osaka City University, Departments of Mathematics, 2002.

- [25] Szabó, Z. I. *The Lichnerowicz conjecture on harmonic manifolds*. Journal of Differential Geometry, v.31, Lehigh University, 1990.
- [26] Osserman, R. *Global properties of minimal surfaces in E^3 and E^n* . Annals of Math., 80(2): 340-364, 1964.
- [27] Osserman, R. *A survey of Minimal Surfaces*. Dover Publication, New York, 2nd edition, 1986.