

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

**UMA ANÁLISE DE DESEMPENHO DE ESTUDANTES DO
ENSINO MÉDIO E DO ENSINO SUPERIOR NA RESOLUÇÃO DE
QUESTÕES DE GEOMETRIA DO ENEM**

PLÍNIO MARTINS VICENTE DA SILVA

João Pessoa – Paraíba

Junho de 2018

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

PLÍNIO MARTINS VICENTE DA SILVA

**UMA ANÁLISE DE DESEMPENHO DE ESTUDANTES DO
ENSINO MÉDIO E DO ENSINO SUPERIOR NA RESOLUÇÃO DE
QUESTÕES DE GEOMETRIA DO ENEM**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à
Coordenação do Curso de Licenciatura em
Matemática da Universidade Federal da Paraíba
como requisito parcial para obtenção do título de
licenciado em Matemática.

Orientadora: Prof^a Dr^a Rogéria Gaudencio do Rêgo

João Pessoa – Paraíba

Junho de 2018

Catálogo na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

S586a Silva, Plínio Martins Vicente da.

Uma análise de desempenho de estudantes do ensino médio e do ensino superior na resolução de questões de geometria do ENEM / Plínio Martins Vicente da Silva. - João Pessoa, 2018.

47 p f. : il.

Orientação: Rogéria Gaudencio do Rêgo.

TCC (Curso de Licenciatura em Matemática) - UFPB/CCEN.

1. Geometria. 2. Ensino de geometria - ENEM. 3. Resoluções de problemas - Geometria. I. Rêgo, Rogéria Gaudencio do. II. Título.

UFPB/CCEN

CDU 514(043.2)

PLÍNIO MARTINS VICENTE DA SILVA

**UMA ANÁLISE DE DESEMPENHO DE ESTUDANTES DO
ENSINO MÉDIO E DO ENSINO SUPERIOR NA RESOLUÇÃO DE
QUESTÕES DE GEOMETRIA DO ENEM**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal da Paraíba como requisito parcial para a obtenção do título de licenciado em Matemática.

Orientador: Prof^a Dr^a Rogéria Gaudencio do Rêgo

Aprovada em: 19 / 06 / 2018.

BANCA EXAMINADORA



Prof^a Dr^a Rogéria Gaudencio do Rêgo - UFPB
(Orientadora)



Prof. Ms. Antonio Sales da Silva - UFPB
(Avaliador)



Prof. Dr. Roosevelt Imperiano da Silva
(Avaliador)

Dedico esse trabalho a todos os meus familiares.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, quero agradecer a Deus, ao Poderoso que vive e reina para Todo o Sempre, por ter me concedido o dom da vida, por ter me capacitado e ter me dado à sabedoria necessária para lograr êxito nessa minha prazerosa trajetória ao longo de todo o curso.

À minha família, principalmente, aos meus pais, Paulo Vicente da Silva e Maria de Fátima Martins da Silva, que foram essenciais nessa caminhada, por terem me dado a possibilidade de realizar meu sonho. Aos meus irmãos e minha cunhada, a eles, meu eterno obrigado.

Quero agradecer, também, a todos os meus professores da Educação Básica, em especial, aos(às) professores(as): Ana Paula Colaço; Carlos Valério; Diego Rangel; Edson Andrade; Ézio Augusto; Fabiana Fugêncio; Flávio Alves; Glauber Dantas; Marcos Ribeiro; Onaldo Rodrigues; que o Senhor Deus o tenho no Céu; Viviane Macena; Zé Carlos; e aos da UFPB: Antônio Sales; Bruno Ribeiro; Carlos Bocker; Jacqueline Rojas; João Batista Alves Parente; e Rogéria Gaudencio (orientadora).

Aos meus amigos, que levarei para sempre em meu coração: Allif Santos; Anderson Lima; Bruno Souza; Erika Coelho; Gabriel; Geyson; Isabel Alves; Jonas Petruccio; Manoel Felipe; Pedro Igor; Rafael Brito; Raoní Ponciano; Rilderson Pedroza e Thiago Davidson.

E, também, a minha namorada, Gleycielle Rodrigues do Nascimento, que me ajudou neste trabalho de conclusão de curso, e por ser a menina que faz do meu mundo o mais bonito.

Serei Eternamente Grato a Todos Vocês.

“A educação é um processo social, é desenvolvimento. Não é preparação para a vida: é a própria vida.” (JOHN DEWEY)

RESUMO

O presente trabalho teve como principal objetivo analisar o desempenho de estudantes do Ensino Médio e do Ensino Superior, de um curso de Licenciatura em Matemática, na resolução de questões do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), da área de Geometria. No texto trazemos um recorte sobre a história da Geometria, considerando as necessidades humanas que levaram ao estudo mais aprofundado dessa área, e as contribuições que ela trouxe não só para a Matemática, mas, também, sobre sua relação com outras áreas de conhecimento. Tratamos do ensino de Geometria Plana e Espacial, tomando por base pesquisadores e documentos oficiais que regulamentam seu ensino e, também, da importância do pensamento geométrico para a formação do estudante da Educação Básica. Abordamos a história do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), desde seu início, focando em seus objetivos no campo da Geometria, presentes na Matriz de Referência desse exame. Realizamos uma pesquisa qualitativa, exploratória, cujos dados foram obtidos por meio da aplicação de um questionário, com oito itens do ENEM, relativas ao campo da Geometria, no período de 2012 a 2017. Os dados foram analisados com foco nos principais tipos de erros cometidos por estudantes do Ensino Superior e do Ensino Médio, bem como os métodos utilizados por eles para resolverem tais questões. Os resultados de nossa análise apontam muitas lacunas na formação da maioria dos estudantes da Educação Básica que participaram de nosso estudo, diante da demanda de resolução de questões de Geometria Plana e Espacial, mesmo quando eram demandados conteúdos que deveriam ser estudados ainda no Ensino Fundamental. Mesmo em relação aos graduandos da Licenciatura em Matemática os resultados foram preocupantes, uma vez que, em algumas questões, seu desempenho não foi o desejável para alunos que em breve estarão legalmente aptos a atuarem como professores da Educação Básica.

Palavras-chaves: Ensino de Geometria; ENEM; Resolução de Problemas.

ABSTRACT

The present work had as main objective to analyze the performance of students of High School and Higher Education, of a degree course in Mathematics, in the resolution of questions of the National High School Examination (ENEM), in the area of Geometry. In the text we bring a clipping about the history of Geometry, considering the human needs that led to the further study of this area, and the contributions that it brought not only to Mathematics, but also to its relation with other areas of knowledge. We deal with the teaching of Plane and Space Geometry, based on researchers and official documents that regulate their teaching, and also on the importance of geometric thinking for the basic education student. We discuss the history of the National High School Examination (ENEM), since its inception, focusing on its objectives in the field of Geometry, present in the Reference Matrix of this exam. We performed a qualitative, exploratory research, whose data were obtained through the application of a questionnaire, with eight ENEM items, related to the field of Geometry, in the period from 2012 to 2017. The data were analyzed focusing on the main types of errors committed by students of Higher and High School, as well as the methods used by them to solve such questions. The results of our analysis point to many gaps in the training of most of the students of Basic Education who participated in our study, in view of the demand for resolution of issues of Flat and Space Geometry, even when they were demanded contents that should be studied still in Elementary School. Even with regard to undergraduate students in Mathematics, the results were worrisome, since in some questions their performance was not desirable for students who will soon be legally able to act as teachers of Basic Education.

Key-words: Teaching Geometry; ENEM; Problem solving.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Resposta de um estudante universitário para a Questão 1.....	20
Figura 2 - Resposta de um estudante universitário para a Questão 1.....	21
Figura 3 - Resposta de um estudante da educação básica para a Questão 1.	22
Figura 4 - Resposta de um estudante da educação básica para a Questão 1.	23
Figura 5 - Resposta de um estudante universitário para a Questão 2.....	25
Figura 6 - Resposta de um estudante da educação básica para a Questão 2.	25
Figura 7 - Resposta de um estudante universitário para a Questão 3.....	28
Figura 8 - Resposta de um estudante universitário para a Questão 3.....	28
Figura 9 - Resposta de um estudante universitário para a Questão 5.....	34
Figura 10 - Resposta de um estudante universitário para a Questão 6.....	37
Figura 11 - Resposta de um estudante da Educação Básica para a Questão 6.	37
Figura 12 - Resposta de um estudante universitário para a Questão 7	40

SUMÁRIO

1	UMA BREVE APRESENTAÇÃO DA TEMÁTICA DE NOSSA PESQUISA..	1
1.1	AS MOTIVAÇÕES DE NOSSA ESCOLHA	1
1.2	QUESTÃO DE INVESTIGAÇÃO E OBJETIVOS.....	2
1.3	A METODOLOGIA ADOTADA NO TRABALHO	3
1.4	RESUMO DA ESTRUTURA DO TRABALHO	4
2	O ENSINO DE GEOMETRIA.....	5
2.1	HISTÓRIA DA GEOMETRIA: UM BREVE RECORTE.....	5
2.2	A IMPORTÂNCIA DO PENSAMENTO GEOMÉTRICO E DO ENSINO DE GEOMETRIA.....	7
2.3	O EXAME NACIONAL DO ENSINO MÉDIO (ENEM)	13
3	ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS DADOS DE NOSSA PESQUISA	17
3.1	ANÁLISE DAS QUESTÕES RELATIVAS A CONTEÚDOS DE GEOMETRIA PLANA	17
3.2	ANÁLISE DAS QUESTÕES RELATIVAS A CONTEÚDOS DE GEOMETRIA ESPACIAL.....	35
4	CONSIDERAÇÕES FINAIS	44
	REFERÊNCIAS.....	46

1 UMA BREVE APRESENTAÇÃO DA TEMÁTICA DE NOSSA PESQUISA

1.1 AS MOTIVAÇÕES DE NOSSA ESCOLHA

As motivações que nos levaram à escolha do tema de investigação de nosso trabalho foram, inicialmente, nossa identificação pessoal com o campo da Geometria desenvolvida ao longo do Curso de Graduação. Este campo é destacado nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) (BRASIL, 1998) como sendo importante para a formação do estudante da Educação Básica e um dos argumentos apresentados no documento é que a Geometria “[...] é um campo fértil para trabalhar com situações-problema e é um tema pelo qual os alunos costumam se interessar naturalmente” (BRASIL, 1998, p.51).

Além disso, de acordo com o mesmo documento, o trabalho com elementos desse campo facilitaria a “[...] aprendizagem de números e medidas, pois estimula o aluno a observar, perceber semelhanças e diferenças, identificar regularidades [...]” (BRASIL, 1998, p.51). Quando se refere ao ensino de Geometria principalmente nos dois últimos anos do Ensino Fundamental, os PCN destacam que os problemas desse campo irão proporcionar os primeiros contatos dos alunos “[...] com a necessidade e as exigências estabelecidas por um raciocínio dedutivo” (BRASIL, 1998, p.86).

Esse aspecto da Geometria atraiu nossa atenção ao longo da Graduação em Matemática e nos fez lembrar das dificuldades que nós estudantes tínhamos frente às questões de Geometria Plana e Espacial, em especial quando estudávamos itens que já haviam sido propostos no Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), quando estávamos na Educação Básica.

Tal assunto já foi objeto de investigações científicas, a exemplo de Santos (2014), que trabalhou com a análise de desempenho de estudantes da Educação Básica em questões de Geometria o ENEM. Os resultados do trabalho citado apontam que as principais dificuldades dos estudantes do Ensino Médio que responderam as questões foram relativas à interpretação dos enunciados e na passagem da linguagem materna para a linguagem matemática. Os estudantes apresentaram, ainda, dificuldades relativas à aplicação das fórmulas que eram demandadas na resolução das questões.

Em nosso estudo buscamos identificar quais as estratégias mais utilizadas, bem como as dificuldades centrais dos estudantes ao resolverem questões do ENEM, contando com a participação não apenas de estudantes do Ensino Médio, mas, também, de estudantes universitários de um curso de Licenciatura em Matemática em nossa investigação.

Como Santos (2014), entendemos ser de fundamental importância olharmos para os erros dos estudantes não apenas do ponto de vista da pontuação correspondente, mas o que eles podem informar sobre o que eles sabem ou o que ainda precisam aprender.

1.2 QUESTÃO DE INVESTIGAÇÃO E OBJETIVOS

Considerando o que foi explanado no item anterior, selecionamos como questão para guiar nossa investigação, o que segue: como é o desempenho de estudantes da Educação Básica e do Ensino Superior, em relação à resolução de questões do Exame Nacional do Ensino Médio ENEM, que envolvem conteúdos de Geometria?

Em razão da questão que traçamos, o objetivo central de nosso trabalho foi, portanto, *analisar o desempenho de estudantes da Educação Básica e do Ensino Superior na resolução de problemas de Geometria do ENEM*.

Para alcançarmos nosso objetivo geral, percorremos os seguintes objetivos específicos:

- Selecionar questões do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) que envolvessem conteúdos de Geometria (plana e espacial), para compor nosso instrumento de levantamento de dados (Questionário);
- Aplicar o questionário para um grupo de estudantes da Educação Básica (3º ano do Ensino Médio) e para um grupo de estudantes do Ensino Superior.
- Avaliar o desempenho dos dois grupos de estudantes, considerando aspectos quantitativos (número de acertos e erros) e qualitativos (tipos de erros e estratégias de resolução).

1.3 A METODOLOGIA ADOTADA NO TRABALHO

O presente trabalho é de natureza predominantemente qualitativa, uma vez que nosso objetivo central não está centrado em aspectos que possam ser tratados estatisticamente e se enquadra em um estudo que pode ser denominado como exploratório (JEZINE, 2007).

Nosso foco está na análise de erros de estudantes do Ensino Médio e do Ensino Superior, frente às questões do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) no campo da geometria plana e espacial, bem como nas estratégias que eles utilizaram na resolução das questões.

A pesquisa foi feita por meio de um questionário (prova) composto de oito questões do ENEM, compreendidas dos anos de 2012 a 2017, cujos objetivos centrais serão apresentados e discutidos no terceiro Capítulo do presente texto. A aplicação do questionário foi feita com 18 estudantes de uma escola pública na cidade de João Pessoa, na turma do 3º ano do Ensino Médio e com 18 estudantes de graduação em Licenciatura em Matemática de uma Instituição Pública de ensino superior, também em João Pessoa.

A aplicação do questionário da escola de Educação Básica se deu em uma sala climatizada com ar-condicionado e o enunciado a princípio foi lido pelos próprios estudantes, que apresentaram algumas manifestações relativas a dúvidas e, nestes casos, a leitura do enunciado da questão foi feita por nós. Os estudantes podiam usar calculadora e tiveram 1h30min para responderem a prova, o que corresponde a duas aulas consecutivas na escola regular.

Dentre os 18 estudantes de nível superior do curso de Licenciatura em Matemática que participaram de nosso estudo, 10 eram do penúltimo e último períodos e oito eram do 4º e 5º períodos. Os graduandos responderam o teste em até uma hora e não utilizaram calculadora, apesar de não ter sido proibido esse uso. A leitura do enunciado foi feita pelos próprios alunos e não apresentaram dúvidas pertinentes a essa leitura ao longo da aplicação do Questionário.

1.4 RESUMO DA ESTRUTURA DO TRABALHO

O presente trabalho está organizado em três Capítulos. No Capítulo 1 voltamos nossa atenção à parte introdutória do trabalho, ou seja, à explanação de forma breve do tema que foi abordado, apontando os objetivos e a metodologia adotada em nosso estudo.

O Capítulo 2 trata da fundamentação teórica de nossa pesquisa, tendo como base principal documentos oficiais brasileiros, como os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) e os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM), além de outros trabalhos que tratam do mesmo tema.

No Capítulo 3 apresentamos e discutimos os dados de nossa pesquisa de campo, coletados por meio da aplicação de um Questionário, a fim de analisarmos o desempenho de estudantes da Educação Básica e do Ensino Superior, diante de questões do ENEM que envolviam conteúdos de geometria.

Finalizamos o texto com nossas Considerações Finais sobre o estudo que realizamos, elaborando uma síntese dos principais resultados que obtivemos, bem como identificando novos trabalhos de investigação que vislumbramos a partir de nosso estudo sobre o tema.

2 O ENSINO DE GEOMETRIA

2.1 HISTÓRIA DA GEOMETRIA: UM BREVE RECORTE

De acordo com Devlin (2004), as diferentes visões sobre o que é Matemática estão relacionadas com as maneiras como a humanidade resolvia suas necessidades básicas e problemas do cotidiano. A visão que predominava até por volta do século 500 antes de Cristo, da Matemática como ciência dos números, era resultado das relações de contagem, medição e da parte financeira, vivenciadas no cotidiano.

No caso da Geometria, ela veio inicialmente da necessidade de lidar com formas no mundo e, posteriormente, compreendê-las, em especial a partir da contribuição do pensamento grego, que promoveria a passagem da visão da Matemática como ciência dos números para a de ciência dos números e das formas (DEVLIN, 2004). A relação do homem com elementos geométricos se dá, portanto, desde tempos remotos, tornando-se, séculos depois, um importante objeto de conhecimento e estudo.

Segundo Eves (1997, apud PIASESKI, 2010, p.08), “[...] as primeiras considerações feitas a respeito da Geometria são muito antigas, tendo como origem a simples observação e a capacidade de reconhecer figuras, comparar formas e tamanhos”. De acordo com esse autor, um dos primeiros conceitos geométricos a serem desenvolvidos teria sido a noção de distância, hoje explorada no campo das Grandezas e Medidas.

Desde a antiguidade o ser humano sempre buscou melhorar sua qualidade de vida, ou seja, organizar o espaço onde ele se encontra para, com isso, otimizar seu tempo e, conseqüentemente, ser ainda mais produtivo. Essas demandas iniciais estariam mais ligadas ao campo dos números e das Grandezas e Medidas.

Ainda segundo Eves (1997, apud PIASESKI, 2010, p.08), “[...] foi das necessidades da sociedade, quando o homem teve que delimitar terras, que teve origem uma geometria caracterizada pelo traçado de desenho de formas, fórmulas, cálculo de medidas de comprimento de área, volume, etc. Foi nessa época que se desenvolveu a noção de figuras geométricas como, retângulo,

quadrado e triângulos. Outros conceitos geométricos, como noções de paralelismo e perpendicularidade teriam sido sugeridas pela construção de muros e moradias”.

Apenas com o tempo, essas necessidades do ser humano, resolvidas por meio do pensamento numérico aplicado às formas, começariam a ser pensadas de forma mais abstrata, passando-se de situações particulares para casos gerais, por meio de generalizações e determinação de fórmulas. A formalização da Geometria só teria início com as contribuições de vários pensadores gregos da antiguidade, os quais dedicaram parte ou até mesmo toda a sua vida para essa significativa contribuição.

Dentre muitos nomes destacam-se: Tales de Mileto (624 a.C. – 546 a.C.); Pitágoras (570 a.C. – 495 a.C.); Zenon de Eleia (490 a.C. – 430 a.C.); Hipócrates de Quios (470 a.C. – 410 a.C.); Platão (427 – 347 a.C.); Eudoxo de Cnidos (408 a.C. – 355 a.C.); Aristóteles (384 a.C. – 322 a.C.); Arquimedes de Siracusa (287 a.C. – 212 a.C.); Apolônio de Pérgamo (262 a.C. – 190 a.C.), dentre outros. (PIASESKI, 2010).

Contudo, o maior avanço foi proporcionado pelo matemático Euclides (300 a.C), com sua obra ‘Os Elementos’ (MOL, 2013). De acordo com Mol, foi por meio da obra de Euclides que não só a Geometria, mas toda a Matemática até então conhecida, começou a ser organizada na forma de uma teoria axiomática e, com isso, promovendo um grande avanço matemático. A partir do trabalho de Euclides, muitos outros estudiosos proporcionaram contribuições relevantes para o crescimento da Matemática e, em especial, da Geometria, nos séculos seguintes.

Outro fato igualmente importante de mudança de paradigma no campo da Geometria ocorreu quando se superou a visão de que havia apenas a Geometria Euclidiana e foram criadas as Geometrias Não-euclidianas, a Geometria Elíptica e a Geometria Hiperbólica, iniciaram-se a partir da teoria axiomática de Euclides, em especial na tentativa de verificação de que o Quinto Postulado seria, na verdade, um resultado decorrente dos quatro axiomas iniciais.

No Quinto Postulado afirma-se que: ‘Dado um ponto $\underline{P}$ fora de uma reta $\underline{S}$, existe uma única reta $\underline{L}$ que passa pelo ponto $\underline{P}$ e é paralela à reta $\underline{S}$ ’. Muitos matemáticos, como Nicolai Lobachevsk (1793 d.C – 1856 d.C), Johann Bolyai (1802 d.C – 1860 d.C), dentre outros, dedicaram suas vidas à tentativa de provar

a independência desse Postulado. Contudo, as contribuições mais relevantes foram proporcionadas pelos estudiosos Isaac Newton (1642 d.C – 1727 d.C); Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 d.C – 1716 d.C) e Bernhard Riemann (1826 d.C – 1866 d.C) (MOL, 2013).

A descoberta de novas geometrias provocou desdobramentos relevantes desde então, tanto na própria Matemática quanto em outras áreas de conhecimento, como a Física. De acordo com a Secretaria de Estado da Educação do Paraná (2008), muitos problemas científicos ou mesmo do cotidiano passaram a ser resolvidos, desde então, com o uso de Geometrias não-Euclidianas, citando, como exemplo, o feito por Albert Einstein em sua geometria do espaço, na elaboração da Teoria da Relatividade.

Embora não seja interesse de nosso trabalho tratar especificamente das geometrias citadas, uma vez que nossa investigação está situada no campo da Geometria Euclidiana, entendemos ser importante evidenciar os saltos mais relevantes vivenciados por esse ramo da Matemática, ao longo do tempo. Esse breve recorte histórico ajuda-nos a perceber a Matemática como uma ciência em permanente evolução e um produto social e historicamente construído.

2.2 A IMPORTÂNCIA DO PENSAMENTO GEOMÉTRICO E DO ENSINO DE GEOMETRIA

Representações de elementos que estudamos na Geometria estão presentes em todos os lugares e as enxergamos em diversas formas no mundo onde habitamos. Em toda nossa volta, estamos cercados de figuras e formas, sendo elas produtos da natureza e, outras, produções do homem, como: obras de artes, pinturas, desenhos, esculturas e artesanato.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática (PCN), publicados no final da década de 1990, destacam a importância desse ramo da Matemática, que serve de ferramenta para tantas outras áreas de estudo e conhecimento, afirmando:

[O] aluno desenvolve um tipo especial de pensamento que lhe permite compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive. [...] O trabalho com noções geométricas contribui para a aprendizagem de números e

medidas, pois estimula o aluno a observar, perceber semelhanças e diferenças, identificar regularidades etc. (BRASIL, 1998, p. 51).

O documento destaca a importância do pensamento geométrico para a formação do estudante da Educação Básica e, ainda, orienta que seu estudo se dê a partir da exploração de objetos da realidade na qual ele está inserido, o que possibilitará que os conteúdos estudados em Matemática sejam melhores compreendidos e valorizados por ele.

Além disso, é fundamental que os estudos do espaço e forma sejam explorados a partir de objetos do mundo físico, de obras de artes, pinturas, desenhos, esculturas e artesanato, de modo que permita ao aluno estabelecer conexões entre a Matemática e outras áreas do conhecimento. (BRASIL, 1998, p. 51).

Os PCN (BRASIL, 1998) ressaltam que o estudo da Geometria é um campo fértil para se trabalhar com situações-problemas, visto que, podemos encontrar elementos em nossa volta que podemos utilizar como representações dos elementos que estudamos nesse ramo da Matemática. Problemas dessa natureza podem ser atraentes para os alunos e, conseqüentemente, estimulá-los a pensar em formas criativas para realizarem suas atividades no cotidiano.

Em razão das conexões que podem ser feitas entre elementos estudados na Geometria e o mundo à nossa volta, o desenvolvimento do pensamento geométrico do estudante o ajudará a entender o que é a Geometria no mundo físico, fazendo uma ligação do que aprende na escola com o que há fora dela. Desse modo, os PCN (BRASIL, 1997; 1998) destacam a importância do trabalho com Geometria na Educação Básica, desde o Ensino Fundamental.

O destaque dado a essa área da Matemática é relevante, pois, durante algumas décadas, ela esteve praticamente ausente da Educação Básica, em decorrência do Movimento da Matemática Moderna (MMM), implantado no Brasil no final da década de 1960, e de lacunas conceituais nos cursos de formação de professores de Matemática (SANTOS, 2009). Como consequência dos problemas de formação e das demandas do MMM, a maioria dos professores tinham dificuldades em trabalhar os conceitos geométricos seguindo as indicações do Movimento, e também pelo fato dos livros didáticos existentes naquela época trazerem os conteúdos geométricos nos capítulos finais.

Outro fator importante destacado por Santos e Nacarato (2014) que levou ao total abandono da Geometria nas escolas, foi que muitos professores da época consideravam o ensino de Geometria pouco relevante para a formação intelectual dos estudantes, o que, conseqüentemente, acarretou uma lacuna no trabalho com esse campo nas escolas, que só retornaria para o currículo da Educação Básica no final dos anos 1990.

O marco central para esse retorno foi a publicação dos PCN (BRASIL, 1998), que ressaltam que, na vida em sociedade, a Geometria está presente em quase todas as atividades realizadas. Desse modo, desempenham papel fundamental na construção do saber do estudante e é de extrema importância no currículo, pois mostram claramente ao aluno a utilidade do conhecimento matemático em sua vida. Com a crescente presença da Geometria em diversos campos da atividade humana, a necessidade da reestruturação do trabalho escolar a uma nova realidade se fez necessária.

Além disso, pesquisadores do campo da Educação Matemática (SANTOS e NACARATO, 2014), começaram a chamar a atenção da comunidade científica e escolar para a importância da aprendizagem da Geometria para a formação dos estudantes, e seus trabalhos contribuíram para trazer de volta a Geometria para a sala de aula, endossados pelas recomendações oficiais presentes nos PCN.

Com os avanços atuais no mundo, relacionados à produção e socialização de conhecimentos e informações, se faz necessário que o ensino em geral e o de Matemática, em particular, dê suporte aos estudantes, para que eles desenvolvam competências nas mais diversas áreas. De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM), é fundamental que

[A] Educação se volte para o desenvolvimento das capacidades de comunicação, de resolver problemas, de tomar decisões, de fazer inferências, de criar, de aperfeiçoar conhecimentos e valores, de trabalhar cooperativamente. [...] Em um mundo onde as necessidades sociais, culturais e profissionais ganham novos contornos, todas as áreas requerem alguma competência em Matemática e a possibilidade de compreender conceitos e procedimentos matemáticos é necessária tanto para tirar conclusões e fazer argumentações, quanto para o cidadão agir como consumidor prudente ou tomar decisões em sua vida pessoal e profissional. (BRASIL, 1998, p.40)

O ensino de Geometria ao longo da Educação Básica tem como objetivo o desenvolvimento de capacidades e competências na realização de diversas tarefas, como apontam os PCN (BRASIL, 1998), dentre as quais se destacam a interpretação e a resolução de situações-problema vinculadas à posição de pontos e de seus deslocamentos no plano; a figuras bidimensionais e tridimensionais; a ângulos; a propriedades de figuras planas e espaciais; ao cálculo de grandezas como comprimento, área e volume, por exemplo. Destacam, ainda, a orientação para o desenvolvimento de competências relacionadas ao uso de instrumentos de medida e de realização de mudanças de unidades de medida mais usadas, para as grandezas citadas e outras.

Recomenda-se, para isso, que sejam feitas associações a situações do cotidiano, em uma das possibilidades de contextualização do conhecimento matemático. Essa recomendação é particularmente destacada nos PCN dirigidos ao Ensino Médio (BRASIL, 2001), na medida em que defendem que o trabalho com Matemática deve também servir para responder às demandas da vida contemporânea, além de visar o desenvolvimento de conhecimentos mais amplos e abstratos, ajudando a contribuir na construção de sua visão de mundo.

De acordo com Ramalho e Nuñez (2011), citando D'Ambrósio, com um ensino contextualizado, os alunos conseguem compreender verdadeiramente o sentido de estudar conteúdos matemáticos.

Contextualizar a matemática é essencial para todos. Afinal, como deixar de relacionar os Elementos de Euclides com o panorama cultural da Grécia antiga? Ou a adoção da numeração indo-arábica na Europa como florescimento do mercantilismo nos séculos XIV e XV? E não se pode entender Newton descontextualizado. [...] Alguns dirão que a contextualização não é importante, que o importante é reconhecer a matemática como a manifestação mais nobre do pensamento e da inteligência humana... e assim justificam sua importância nos currículos. (D'AMBRÓSIO, 2001, apud RAMALHO, NÚÑEZ, 2011, p.148).

Sendo assim, contextualizar o ensino de Geometria deve servir não apenas para “ilustrar” um conteúdo, associando-o a situações do cotidiano, mas para auxiliar a dar sentido ao conhecimento matemático escolar, ampliando a formação do estudante. No âmbito da Geometria, contextualizações internas à

própria Matemática são facilitadas pelo fato de a Geometria poder ser facilmente relacionada aos outros campos dessa ciência, como a Aritmética, a Álgebra, as Grandezas e Medidas e o Tratamento da Informação, conforme organização dos PCN (BRASIL, 1998).

Do mesmo modo, contextualizações de conteúdos geométricos em associação com outras áreas de conhecimento também não são difíceis de serem realizadas, uma vez que ideias essenciais relacionadas às formas, ângulos, paralelismo e perpendicularismo, dentre outros, podem ser explorados em aulas de Geografia, Física, Química ou outras disciplinas da Educação Básica. Tais conhecimentos farão parte da prática de inúmeras profissões, como a de engenheiros; arquitetos; dentistas; costureiros; mecânicos; dentre muitas outras.

Como afirmamos anteriormente, focamos nosso trabalho no campo da Geometria Euclidiana, visando analisar questões do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), relacionadas tanto a elementos de Geometria Plana quanto de Geometria Espacial. O estudo da Geometria Espacial, em particular, ajuda o estudante a desenvolver um tipo particular de pensamento, que facilita a compreensão e representação do meio que em ele se encontra.

De acordo com os PCN,

[...] é cada vez mais indispensável que as pessoas desenvolvam a capacidade de observar o espaço tridimensional e de elaborar modos de comunicar-se a respeito dele, pois a imagem é um instrumento de informação essencial no mundo moderno (BRASIL, 1998, p.122).

Ou seja, o domínio do conhecimento geométrico espacial é importante não apenas para o aluno no âmbito escolar, mas para sua vida pessoal fora da escola e para seu exercício profissional, qualquer que seja a área em que ele vá atuar. O ensino de Geometria, de modo geral, e da Espacial, de modo particular, pode ser facilitado pelo fato de ser possível fazermos muitas aplicações interessantes dos conteúdos desse campo no mundo real (BRASIL, 1998).

Os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (BRASIL, 2001, p.40) reforçam a importância do estudo da Geometria, por seu valor formativo, uma vez que ajuda na estruturação do pensamento geométrico e também no raciocínio dedutivo, e ela é, também, uma ferramenta que auxilia na

realização de diversas atividades do cotidiano, assim como em tarefas específicas em quase todas as áreas do conhecimento.

Não só a contextualização é importante, a interdisciplinaridade é outro fator que vem sendo apontado como estando diretamente ligado à boa qualidade da formação dos estudantes, em razão da possibilidade de proporcionar mais abrangência ao conhecimento, possibilitando que o estudante faça conexões do que aprende em Matemática com situações fora desse campo, entendendo melhor, também, a importância histórica dos diversos conteúdos no desenvolvimento da própria ciência. (BRASIL, 2001).

O ensino de conteúdos de Geometria espacial, em particular, nas séries iniciais, tem como objetivo principal levar o estudante a compreender a importância de conhecimentos dessa natureza e desenvolver sua percepção espacial, que está diretamente relacionada com a tridimensionalidade do espaço que o cerca (FONSECA et al, 2001 apud SANTOS e NACARATO, 2014).

O ensino de Geometria, em especial de Geometria espacial, desenvolvido com o auxílio de materiais manipulativos promove o desenvolvimento de conhecimento relacionado à relação entre elementos de sólidos geométricos e figuras planas. O uso de aplicativos também é recomendado, em razão da qualidade das imagens produzidas e na possibilidade de ampliar a capacidade de relacionar objetos reais com suas representações no plano.

Para Santos e Nacarato (2014), a disponibilidade diversificada de materiais que o professor oferece para seus alunos manipularem, visualizarem e representarem, faz com que eles aumentem seu nível de conhecimento sobre um sólido geométrico e as figuras planas que o compõem e, sobretudo, desenvolvem neles a capacidade de abstraírem tais imagens em sua mente, facilitando o entendimento de propriedades e relações entre elas.

Santos e Nacarato (2014) destacam, ainda, que os materiais didáticos têm por finalidade serem facilitadores da relação entre o professor, o aluno e o conhecimento, no momento da elaboração do saber, e que a manipulação desses materiais, pelo aluno, não deve ser vista apenas como uma forma lúdica de se trabalhar, mas deve ser pautada em questionamentos e análises das ações feitas sobre tais objetos. Ou seja, o objeto material, sua representação por meio de um desenho, a imagem mental e o conceito estão intrinsecamente ligados.

Nessa direção, é fundamental que o professor planeje suas aulas, de modo geral, e de Geometria, de modo particular, identificando quais os objetivos a serem alcançados; que recursos didáticos podem ser explorados; que problemas podem ser propostos e como proporá a discussão das ideias elaboradas pelos estudantes.

A seleção de problemas geométricos a serem trabalhados em sala de aula, associados aos diversos conteúdos desse campo, deve ser criteriosa e satisfazer as orientações de contextualização e interdisciplinaridade, sempre que possível. Se os problemas selecionados pelo professor forem os do livro didático adotado na escola, ele deve não apenas avaliar a qualidade destes problemas, mas, também, planejar a melhor forma de explorar suas potencialidades para incitar a geração de novos conhecimentos, de avaliar o que os estudantes sabem ou têm dúvida, dentre outras possibilidades.

2.3 O EXAME NACIONAL DO ENSINO MÉDIO (ENEM)

Para nosso trabalho de investigação selecionamos um conjunto de problemas de Geometria que fizeram parte de avaliações do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), de diversos anos. A seleção de questões foi baseada na leitura e localização, nas avaliações do ENEM a partir do ano de 2012, de questões que explorassem conteúdos de Geometria plana ou espacial.

A aplicação do ENEM teve início em 1998 e seu objetivo é avaliar o desempenho de estudantes da Educação Básica ao fim da escolaridade desse nível e dele podem participar estudantes concluintes ou que já concluíram o Ensino Médio em anos anteriores (<http://portal.mec.gov.br/enem-sp-2094708791>).

Inicialmente o exame foi utilizado como fonte de dados para a determinação de políticas públicas para a Educação Básica, considerando os resultados apresentados pelos estudantes e que apontavam aspectos relativos às fragilidades e demandas de formação. Posteriormente os resultados do ENEM passaram a ser utilizados como forma de ingresso no nível superior de ensino, em especial de instituições públicas.

Hoje os resultados são utilizados como um dos critérios de seleção para alunos que desejam concorrer a bolsas de financiamento de estudos do Programa Universidade para Todos (ProUni). De acordo com informações presentes no endereço oficial do ENEM, [...]cerca de 500 universidades já usam o resultado do exame como critério de seleção para o ingresso no ensino superior, seja complementando ou substituindo o vestibular". (<http://portal.mec.gov.br/enem-sp-2094708791>).

De acordo com informações disponibilizadas no endereço eletrônico do ENEM, no ENEM de 2016, na área de Matemática e suas tecnologias, "[A] maioria dos participantes, 2.430.115, alcançaram notas entre 400 e 500 pontos. Apenas 3.747 participantes alcançaram nota entre 800 e 900 e 5.734 tiveram nota zero. A média nacional foi 493,9".

O ENEM contou com 8.630.306 de inscritos, sendo que "[...] 2.518.976 (29,19%) se ausentaram no primeiro dia de provas e 2.667.899 (30,91%) faltaram ao segundo dia. Quando se consideram os dois dias juntos, foram 2.494.294 (28,90%) faltantes. Além disso, 3.942 (0,05%) foram eliminados no primeiro dia e 4.780 (0,06%), no segundo dia". (http://inep.gov.br/artigo/-/asset_publisher/B4AQV9zFY7Bv/content/resultados-do-enem-2016-estao-liberados-para-consulta/21206).

O número de participantes que obtiveram notas entre 400 e 500 pontos (2.430.115) corresponde a 28,15% dos inicialmente inscritos (8.630.306), o que não justifica a informação apresentada no endereço oficial do ENEM, de que a maioria dos estudantes participantes do exame alcançou nota final na faixa entre 400 e 500 pontos. Não fica claro, pelos números apresentados no endereço eletrônico oficial, a qual total se refere a informação, para que a quantidade citada corresponda à maioria dos estudantes.

Ainda considerando o total de estudantes inicialmente inscritos (8.630.306), os que obtiveram as maiores notas, entre 800 e 900 pontos, correspondem a 0,04% do total; 0,066% do total de estudantes inscritos no ENEM 2016 obtiveram nota zero em Matemática e suas Tecnologias.

A média final de cada estudante é definida com base da Teoria de Resposta ao Item (TRI), que visa diminuir o peso dos "chutes", na resposta às questões, uma vez que as provas são com itens de múltipla escolha, à exceção da Redação.

A TRI qualifica o item de acordo com os seguintes parâmetros:

- Poder de discriminação: capacidade de um item distinguir os participantes que têm a proficiência requisitada daqueles quem não a têm

- Grau de dificuldade.

- Possibilidade de acerto ao acaso, ou seja, de “chute”

O número de questões por nível de dificuldade em cada prova e as demais características dessas questões reflete-se no resultado. Acertar um número maior de itens em uma área não significa, necessariamente, ter uma proficiência maior do que em outra, cujo número de acertos foi inferior.

([http://inep.gov.br/artigo/-](http://inep.gov.br/artigo/-/asset_publisher/B4AQV9zFY7Bv/content/resultados-do-enem-2016-estao-liberados-para-consulta/21206)

[/asset_publisher/B4AQV9zFY7Bv/content/resultados-do-enem-2016-estao-liberados-para-consulta/21206](http://inep.gov.br/artigo/-/asset_publisher/B4AQV9zFY7Bv/content/resultados-do-enem-2016-estao-liberados-para-consulta/21206))

A ideia da TRI é que os estudantes com determinado nível de proficiência deverão acertar as questões com menor nível de dificuldade e errar as questões consideradas mais difíceis pela Comissão Elaboradora e o padrão de respostas é, então, considerado no cálculo, além disso, “Como a TRI não tem um limite, inferior ou superior, padrão entre as áreas de conhecimento, as notas dos participantes não variam entre zero e mil. Elas podem ultrapassar os mil pontos”. (http://inep.gov.br/artigo/-/asset_publisher/B4AQV9zFY7Bv/content/resultados-do-enem-2016-estao-liberados-para-consulta/21206).

As questões no ENEM são elaboradas com base em matrizes de Competências e Habilidades definidos para as diferentes áreas e, no caso da Matemática, foram definidas sete competências, associadas a trinta habilidades. Conteúdos de Geometria estão contemplados especificamente na competência de área 2, discriminada em seguida, com indicação das respectivas habilidades:

Competência de área 2 (C2): Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

H6 - Interpretar a localização e a movimentação de pessoas/objetos no espaço tridimensional e sua representação no espaço bidimensional.

H7 - Identificar características de figuras planas ou espaciais.

H8 - Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma.

H9 - Utilizar conhecimentos geométricos de espaço e forma na seleção de argumentos propostos como solução de problemas do cotidiano.

A resolução de problemas geométricos que envolvem a determinação de áreas, volumes ou outros valores relativos ao campo das grandezas e medidas envolve conteúdos presentes na competência de área 3:

Competência de área 3 (C3): Construir noções de grandezas e medidas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano.

H10 - Identificar relações entre grandezas e unidades de medida.

H11 - Utilizar a noção de escalas na leitura de representação de situação do cotidiano.

H12 - Resolver situação-problema que envolva medidas de grandezas.

H13 - Avaliar o resultado de uma medição na construção de um argumento consistente.

H14 - Avaliar proposta de intervenção na realidade utilizando conhecimentos geométricos relacionados a grandezas e medidas.

Em um estudo realizado por Rodrigues (2013), foi feita a classificação das questões do ENEM entre os anos de 2009 a 2012 e os resultados revelaram que é grande o número de questões envolvendo conteúdos de Geometria, compreendendo um total de 40 questões, dentre as 180 analisadas. Ou seja, 22,22% do total de questões analisadas no trabalho contemplavam a competência de área 2 (“Utilizar o conceito geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela”).

O autor argumenta que esse percentual aponta para a crescente valorização desse campo de conteúdos matemáticos, negligenciado por algumas décadas no Brasil, o que se manifesta na exploração de conteúdos em um exame nacional de grande porte, caso do ENEM.

3 ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS DADOS DE NOSSA PESQUISA

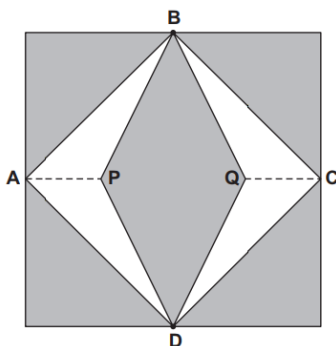
Na análise dos dados de nossa pesquisa, dividimos a discussão em dois grupos. O primeiro deles foi constituído pelas questões relativas à Geometria plana, selecionadas de avaliações do ENEM dos anos de 2012, 2014, 2015 e 2017. O segundo grupo foi constituído por questões de Geometria espacial de avaliações do ENEM dos anos 2013, 2016 e 2017. As questões do ENEM são de múltipla escolha, com indicação de cinco itens.

Depois de apresentarmos o enunciado de cada questão, destacamos as habilidades demandadas e os conteúdos nela envolvidos, além de, tecermos comentários gerais sobre sua solução. Em seguida trazemos os resultados obtidos pelos estudantes do Ensino Superior e do Ensino Médio que participaram de nosso estudo.

3.1 ANÁLISE DAS QUESTÕES RELATIVAS A CONTEÚDOS DE GEOMETRIA PLANA

3.1.1 ANÁLISE DAQUESTÃO 160 (ENEM 2012/Azul)

A primeira questão que fez parte de nosso estudo continha o seguinte enunciado: *Para decorar a fachada de um edifício, um arquiteto projetou a colocação de vitrais compostos de quadrados de lado medindo 1 m, conforme a figura a seguir.*



Nesta figura, os pontos A, B, C e D são pontos médios dos lados do quadrado e os segmentos AP e QC medem $\frac{1}{4}$ da medida do lado do quadrado.

Para confeccionar um vitral, são usados dois tipos de materiais: um para a parte sombreada da figura, que custa R\$ 30,00 o m², e outro para a parte mais clara (regiões ABPDA e BCDQB), que custa R\$ 50,00 o m². De acordo com esses dados, qual é o custo dos materiais usados na fabricação de um vitral?

- A) R\$ 22,50
- B) R\$ 35,00
- C) R\$ 40,00
- D) R\$ 42,50
- E) R\$ 45,00

A habilidade central demandada na resolução da questão é calcular a razão das áreas menores em relação à área total. Os conteúdos nela envolvidos são: Geometria Plana; Cálculo de área de figuras poligonais.

Entendemos que a questão atende as indicações dos PCN (1998) e dos PCNEM (2001) quanto ao uso de um contexto que envolva elementos do cotidiano, uma vez que esses documentos defendem que é fundamental que os estudos do espaço e forma ocorram a partir de referências do mundo físico, de obras de artes, pinturas, desenhos, esculturas e artesanato (BRASIL, 1998). Para resolver corretamente a questão proposta, o aluno deveria observar que a figura total é a composição de várias outras figuras menores, uma das competências que os PCN (BRASIL, 1998) exigem que os alunos desenvolvam, o que facilita a resolução do problema do cálculo da área, pela soma das áreas das outras figuras menores que compõem a figura principal.

No problema, a área total da figura principal (AT), correspondente ao vitral quadrado, é dada pela soma das áreas dos quatro triângulos retângulos iguais (ATR), quatro triângulos obtusângulos iguais (ATO) e um losango (AL), ou seja: $AT = 4ATR + 4ATO + AL$.

Para obter a resposta final precisamos saber como determinar a área do quadrado (base x altura); do triângulo ((base x altura)/2); e do losango ((D x d)/2, onde $\underline{D}$ é a diagonal maior e $\underline{d}$ é a diagonal menor). As medidas dos lados dos triângulos retângulos são conhecidas - a base mede 1/2 m e a altura também mede 1/2 m, pois são do tamanho da metade do lado do vitral quadrado que tem lados iguais a 1m, com isso: $ATR = (1/2 \times 1/2)/2 = (1/4)/2 = 1/4 \times 1/2 = 1/8m$.

Como temos quatro triângulos retângulos, $4ATR = 4 \times 1/8 = 1/2m$. Uma vez que o valor da medida da diagonal maior do losango é igual à medida do

lado do quadrado, e a diagonal menor é $1/2$ da medida do lado, a área do losango é dada por: $AL = (D \times d)/2 = (1 \times 1/2)/2 = (1/2)/2 = 1/2 \times 1/2 = 1/4m$.

Não temos como calcular a área dos triângulos obtusângulos de uma forma direta, assim, obtemos sua área por meio da subtração da área indicada com a cor cinza, na figura que ilustra o problema, da área total do vitral, ou seja, fazemos: $4ATO = AT - 4ATR - AL = 1 - 1/2 - 1/4 = 1/4m$.

Assim, a área da região sombreada (AS), é dada por: $AS = 4ATR + AL = 1/2 + 1/4 = 3/4$. A região clara (RC) é dada por: $RC = 4ATO = 1/4$. Após descobrir os valores de tais áreas, fazemos a proporção entre o valor do metro quadrado dado na questão com o das áreas encontradas, tanto a área sombreada da figura quanto a área clara, e descobrimos quanto valem as mesmas, usando uma regra de três, ou seja:

$$\begin{array}{rcl} 1m^2 & - & R\$30,00 \\ (3/4)m^2 & - & R\$x \end{array}$$

Efetuada corretamente as operações, obtemos $x = R\$22,50$, que corresponde ao valor da região sombreada, e usamos o mesmo procedimento para identificar o valor da região clara:

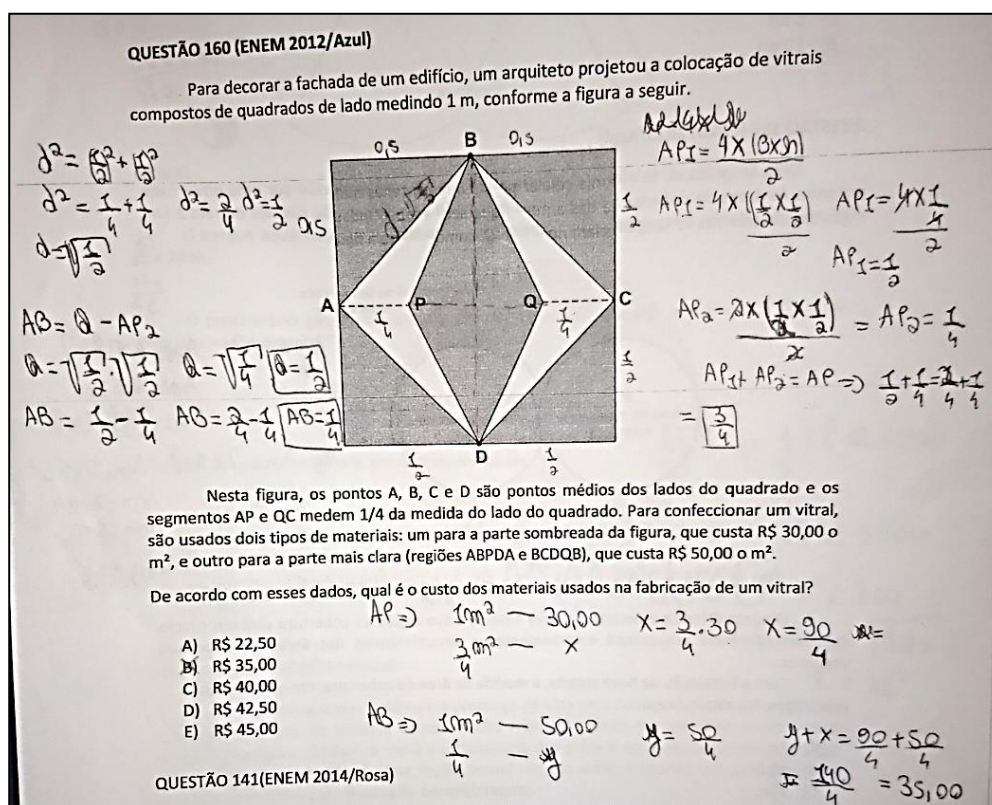
$$\begin{array}{rcl} 1m^2 & - & R\$ 50,00 \\ (1/4)m^2 & - & R\$ y \end{array}$$

Como resultado da regra de três, determinamos que $y = R\$12,50$, logo, o valor de um vitral (VV) será dado por: $w = x + y = R\$22,50 + R\$12,50 = R\$35,00$.

Ao resolverem a questão, os estudantes universitários que participaram de nosso estudo apresentaram o seguinte resultado: treze estudantes acertaram a resposta, pois marcaram o item B; três erraram (dois marcaram o item A e um o item C); e dois não responderam à questão.

Na resolução da questão, os estudantes utilizaram procedimento semelhante ao que expusemos ao apresentarmos a questão, usando o Teorema de Pitágoras; fórmula do cálculo da área de um triângulo e Regra de Três (Proporcionalidade). Muitos estudantes universitários que acertaram a questão adotaram o método exposto na Figura 1.

Figura 1 - Resposta de um estudante universitário para a Questão 1.

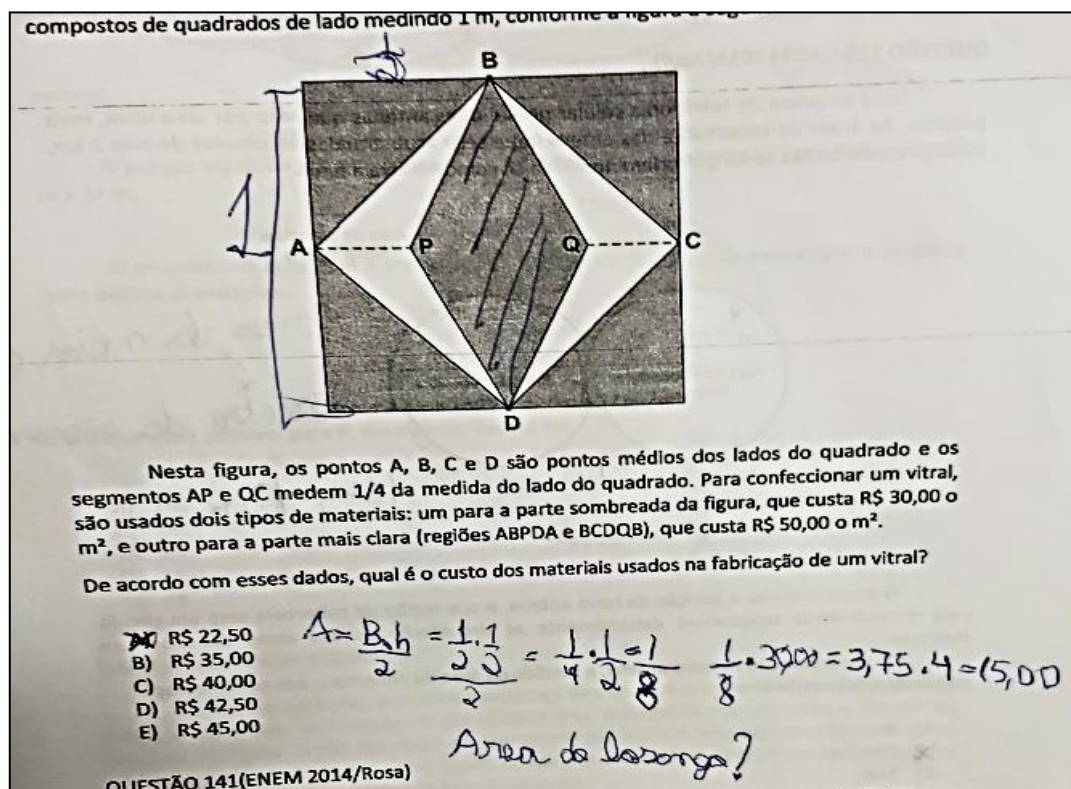


Fonte: arquivo do autor.

Dentre os erros cometidos, o que predominou foi o esquecimento da fórmula para o cálculo da área do losango BPDQ, como indicado na Figura 2, mas que não seria necessária na resolução da questão, caso o estudante observasse os vários triângulos em que a figura pode ser decomposta.

O problema poderia ser facilmente resolvido apenas observando-se esta possibilidade de subdivisão das figuras em triângulos e quadrados menores. Basta observar que a área do triângulo ABP é igual à área do triângulo BPO, onde O seria o ponto de interseção das diagonais do losango cinza, pois os dois triângulos têm mesma base e mesma altura.

Figura 2 - Resposta de um estudante universitário para a Questão 1.

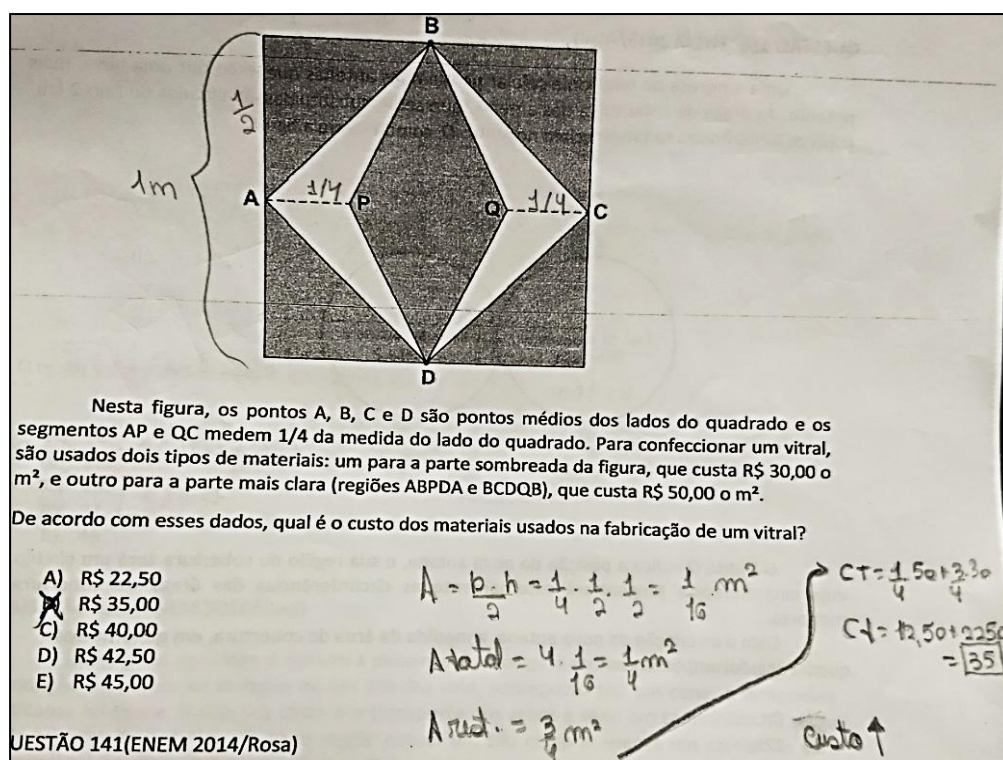


Fonte: arquivo do autor.

Como as áreas dos triângulos ABP e BPO são iguais e, juntas são iguais à área do triângulo cinza maior, a área do losango seria igual à área de um dos quadrados em que podemos dividir o quadrado maior. Assim, a área escura do vitral corresponde a $\frac{3}{4}$ da área total do quadrado maior e a área clara corresponde a $\frac{1}{4}$. Logo, a parte escura terá $0,75m^2$, e custará $0,75 \times 30 = 22,50$, e a parte escura terá $0,25m^2$, e custará $0,25 \times 50 = 12,50$. Somando-se 22,50 e 12,50 obtém-se o custo total de cada vitral, que será igual a R\$35,00.

Quanto aos estudantes da Educação Básica que participaram de nosso estudo, os resultados foram os seguintes: apenas dois estudantes, dos 18 participantes, marcaram a opção correta. Um dos estudantes que marcou a letra B (correta) realizou os cálculos indicados na Figura 3.

Figura 3 - Resposta de um estudante da educação básica para a Questão 1.

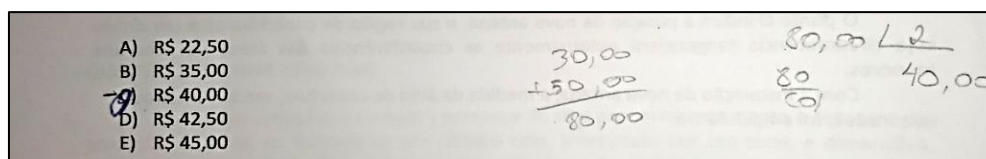


Fonte: arquivo do autor.

Pelos registros feitos pelo estudante, entendemos que ele calculou a área do triângulo ABP (base igual a $\frac{1}{4}m$; altura igual a $\frac{1}{2}m$), usando o Teorema de Pitágoras, e calculou a área clara total, que seria dado pelo quádruplo da área obtida, totalizando $\frac{1}{4}$ da área do quadrado maior. A parte escura seria o que ele denominou de A rest., dada por $1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$. Ou seja, o estudante realizou o procedimento que indicamos após a Figura 2.

Doze dos 18 estudantes deixaram a questão em branco, ou seja, sequer marcaram alguma opção de resposta. Dentre os que marcaram itens incorretos, três assinalaram o item C e um o item D. Muitos erros foram no cálculo das áreas e alguns aparentemente não souberam interpretar a questão, uma vez que calcularam as áreas, mas erraram na proporcionalidade, ou seja, não sabiam como determinar as relações entre as áreas e não completaram os cálculos. Um dos estudantes que errou a resposta registrou o procedimento indicado na Figura 4.

Figura 4 - Resposta de um estudante da educação básica para a Questão 1.



Fonte: arquivo do autor.

O estudante somou os valores individuais do metro de cada tipo de material, e dividiu por 2, chegando ao valor de R\$40,00. Erros dessa mesma natureza foram observados em dois outros testes e nenhum estudante marcou a letra A como resposta.

Em razão da natureza dos conhecimentos necessários para responder à questão, vimos que ela possibilita avaliar o aluno não apenas em relação à Geometria, mas, também, avalia sua capacidade de utilizar outros conhecimentos adquiridos ao longo da Educação Básica, como proporcionalidade e as operações aritméticas básicas. Porém, mesmo podendo ser resolvida de maneira direta, como destacamos na resposta correta de um aluno da Educação Básica, a questão apresentou um índice muito baixo de acertos entre os estudantes desse nível.

Esta mesma questão fez parte do estudo de Santos (2014) e, dos 82 estudantes do Ensino Médio participantes, apenas três alunos obtiveram a resposta correta e 61 deixaram a questão em branco. Dos dezoito estudantes que obtiveram respostas erradas, os principais erros cometidos foram identificados por Santos da seguinte maneira: 13 seriam resultado da dificuldade de relacionarem as informações do enunciado, ou seja, custo dos materiais e as medidas dos elementos que compõem o vitral; um estudante teria aplicado o Teorema de Pitágoras, mas obtido um resultado errado; quatro estudantes cometeram erros relacionados a operações com números decimais.

3.1.2 ANÁLISE DA QUESTÃO 141 (ENEM 2014/Rosa)

A segunda questão que fez parte de nosso instrumento de investigação tinha o seguinte enunciado: *Uma empresa que organiza eventos de formatura confecciona canudos de diplomas a partir de folhas de papel quadradas. Para*

que todos os canudos fiquem idênticos, cada folha é enrolada em torno de um cilindro de madeira de diâmetro d em centímetros, sem folga, dando-se 5 voltas completas em torno de tal cilindro. Ao final, amarra-se um cordão no meio do diploma, bem ajustado, para que não ocorra o desenrolamento, como ilustrado na figura:



Em seguida, retira-se o cilindro de madeira do meio do papel enrolado, finalizando a confecção do diploma. Considere que a espessura da folha de papel original seja desprezível. Qual é a medida, em centímetros, do lado da folha de papel usado na confecção do diploma?

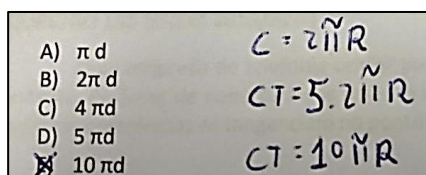
- A) πd
- B) $2 \pi d$
- C) $4 \pi d$
- D) $5 \pi d$
- E) $10 \pi d$

A resolução da questão demandava a capacidade de trabalhar com a planificação de sólidos geométricos e o cálculo de perímetro de figuras planas. Os conteúdos envolvidos na questão são: relação entre Geometria plana e espacial; planificação; e cálculo de perímetro de figuras planas. Para resolver corretamente a questão proposta, o aluno deveria saber que a planificação do papel que seria enrolado no cilindro em questão, em sua forma planificada, tem a forma de um retângulo, além do mais, perceber que o comprimento do lado do papel corresponde às cinco voltas dadas para se formar o canudo de diploma.

Em outras palavras, para resolver a questão o aluno deveria saber a fórmula que permite calcular o comprimento de uma circunferência, $2\pi R$, e multiplicar o valor por 5, quantidade de voltas dadas para formar o diploma. Assim, a medida do comprimento total do lado do papel será: $CT = 5 \cdot 2\pi R$ e $2R = D$, pois o diâmetro é o dobro do raio, sendo assim, ficamos com: $CT = 5\pi D$; onde CT é a medida do lado da folha de papel; R é o raio da circunferência correspondente à base do cilindro de madeira e D é seu diâmetro. Logo, o item correto é o (D).

Dentre os dezoito estudantes universitários que fizeram parte de nosso estudo, dezesseis marcaram a alternativa correta e todos os demais, ou seja, dois alunos marcaram a letra E, únicas respostas presentes no teste. Em relação aos erros cometidos, estes podem ter sido de atenção, como no caso ilustrado na Figura 5, observado em 18 testes de graduandos participantes do estudo.

Figura 5 - Resposta de um estudante universitário para a Questão 2.



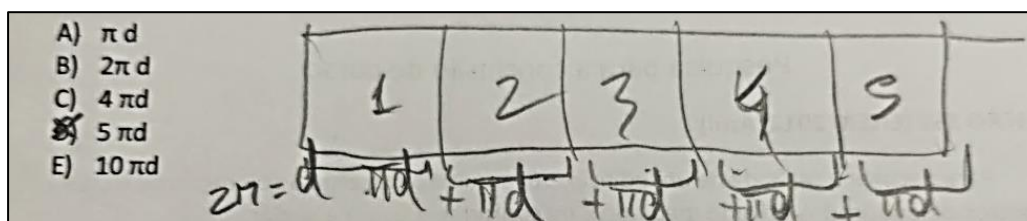
Fonte: arquivo do autor.

Como a fórmula do cálculo do comprimento de uma circunferência é dada em função do raio, e não do diâmetro, e as opções de resposta para a questão faziam referência ao diâmetro, o aluno não observou que $10\pi R = 5\pi d$.

Quanto aos estudantes da Educação Básica, temos os seguintes resultados: um marcou a letra A; dois marcaram a letra B; dois marcaram a letra D (resposta correta); sete marcaram a letra E; ninguém marcou a opção C e seis alunos não responderam à questão.

Dos estudantes desse nível de escolaridade que acertaram a questão, muitos métodos foram utilizados para determinar a solução, dentre eles, destacamos a resposta apresentada na Figura 6.

Figura 6 - Resposta de um estudante da educação básica para a Questão 2.



Fonte: arquivo do autor.

A estratégia adotada pelo estudante foi a seguinte: ele desenhava como seria o papel, com as cinco folhas planificadas, e simplesmente somou o total da

largura, considerando πd como medida de cada folha, registrando o fato de que $2r = d$.

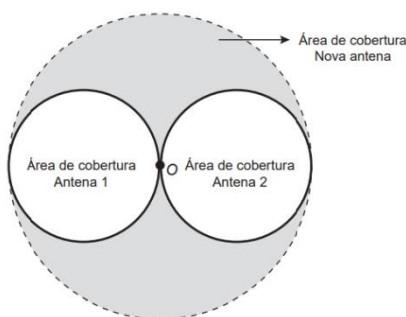
O total de estudantes da Educação Básica que responderam corretamente à questão, ou seja, dois dos dezoito participantes, correspondeu a apenas 11,1% do total, resultado que confirma problemas na formação matemática desses estudantes, pelo menos no campo geométrico, pois se tratava de uma questão de nível fácil.

Alguns erros desses estudantes foram idênticos aos cometidos pelos estudantes do ensino superior, em relação à relação entre raio e diâmetro, e outros foram na planificação do sólido geométrico em questão, na medida em que não identificaram corretamente qual deveria ser o comprimento total do papel.

Com esses resultados fica notório o fato de que alguns alunos terminam o Ensino Médio sem a devida noção sobre planificações de sólidos geométricos ou o domínio do cálculo de grandezas como comprimento de uma circunferência. Não conseguimos fazer com que os alunos sejam capazes de realizar mesmo esses procedimentos básicos indicados nos Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998) como objetivos a serem alcançados ainda no Ensino Fundamental.

3.1.3 ANÁLISE DA QUESTÃO 155 (ENEM 2015/Azul)

A terceira questão do instrumento que aplicamos em nosso estudo continha o seguinte enunciado: Uma empresa de telefonia celular possui duas antenas que serão substituídas por uma nova mais potente. As áreas de cobertura das antenas que serão substituídas são círculos de raio 2 km, cujas circunferências se tangenciam no ponto O, como mostra a figura.



O ponto O indica a posição da nova antena, e sua região de cobertura será um círculo cuja circunferência tangenciará externamente as circunferências das áreas de cobertura menores. Com a instalação da nova antena, a medida da área de cobertura, em quilômetros quadrados, foi ampliada em:

- a) 8π .
- b) 12π .
- c) 16π .
- d) 32π .
- e) 64π .

A resolução da questão envolvia o cálculo da área total através de propriedades de inscrição e circunscrição de figuras planas, ou seja, os conteúdos envolvidos na questão eram: Geometria Plana; Cálculo da área de círculos (o grande e os menores); e subtração de áreas. Para resolver corretamente a questão o aluno deveria conhecer a fórmula para calcular a área de um círculo, dado seu raio, πR^2 , para calcular a área das regiões indicadas na figura.

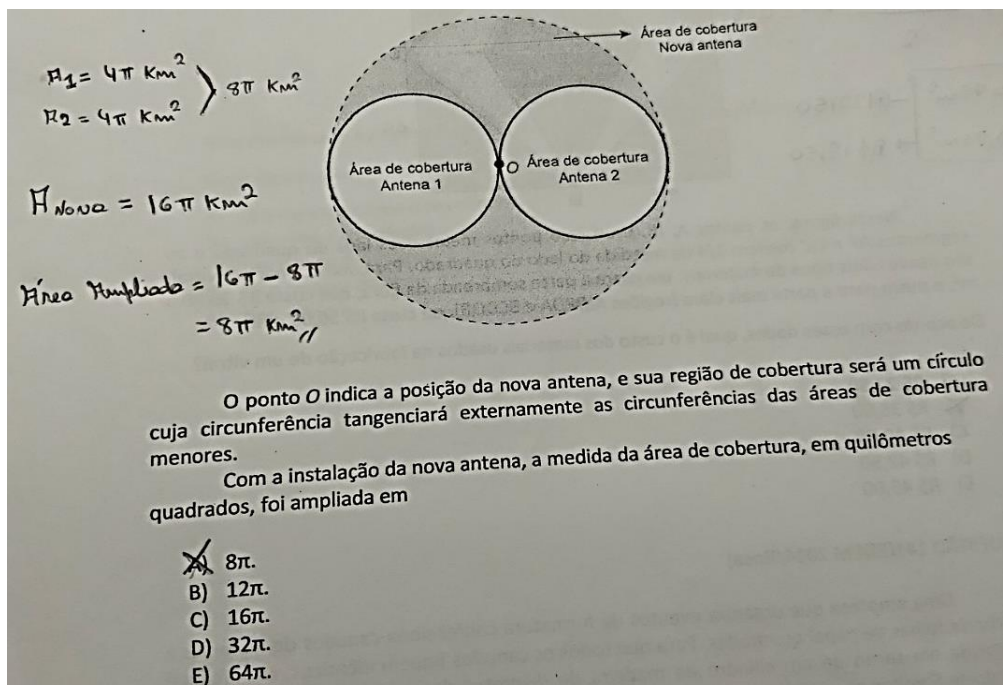
A área de cobertura com a colocação da nova antena, indicada na cor cinza, na figura do enunciado, é circular e circula dois círculos pequenos idênticos. O raio dos círculos menores é dado na questão, 2 Km, sendo assim, a área de cada um dos círculos menores é dada por: $AC_m = \pi(R_m)^2 = \pi(2)^2 = 4\pi$ unidades quadradas. Como são dois círculos idênticos, chegamos à conclusão que a área dos dois círculos menores é igual a 8π unidades quadradas.

Para calcular a área do círculo maior, precisamos encontrar a medida de seu raio, mas, este, é igual ao diâmetro dos círculos menores, logo, o raio do círculo maior é o dobro do raio do círculo menor, ou seja, é igual a 4Km, com isso: $AC_M = \pi(R_M)^2 = \pi(4)^2 = 16\pi$. Para finalizar a questão, subtraímos da área do círculo maior a área dos círculos menores, ficando com: $AA = AC_M - 2AC_m = 16\pi - 2(4\pi) = 8\pi$, onde: AA- Área Ampliada de cobertura; AC_m - Área do Círculo menor e AC_M - Área do Círculo maior.

Dentre os dezoito estudantes universitários que fizeram parte de nosso estudo, dezesseis marcaram a alternativa A (resposta correta); dois marcaram a letra B; e as alternativas C, D e E não foram assinaladas. Quase a totalidade dos

estudantes que acertaram a questão, adotou o método proposto por nós na resolução da questão, conforme podemos observar na Figura 7.

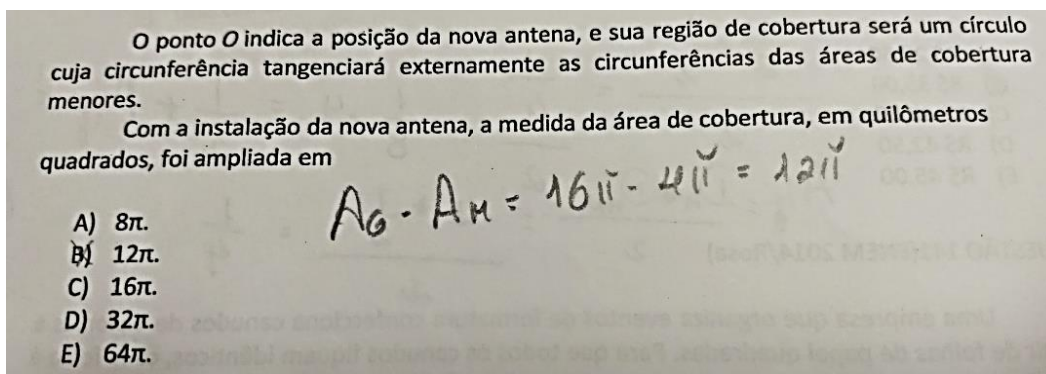
Figura 7 - Resposta de um estudante universitário para a Questão 3.



Fonte: arquivo do autor.

Quanto aos erros cometidos por parte dos estudantes universitários, estes foram, mais uma vez, em nosso entendimento, devidos à falta de atenção, como podemos concluir a partir do que está registrado na Figura 8.

Figura 8 - Resposta de um estudante universitário para a Questão 3.



Fonte: arquivo do autor.

Percebemos que, tal estudante, subtraiu apenas a área correspondente a um círculo pequeno ao invés de dois e, com isso, errou a questão.

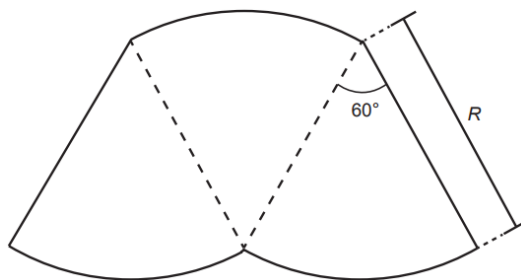
Quanto aos dezoito estudantes da Educação Básica que participaram de nosso estudo, dois marcaram a alternativa A (resposta correta); um estudante assinalou a letra B; um assinalou a letra D; nenhum estudante assinalou as alternativas C e E. Os 14 demais, deixaram a questão em branco, isto é, sequer assinalaram alguma alternativa.

Com os resultados obtidos, é nítida a diferença entre o desempenho dos graduandos e dos estudantes da Educação Básica, uma vez que pouco mais de 10% destes últimos, acertou a questão, mesmo que ela tenha tratado de assuntos que são abordados ainda no Ensino Fundamental (BRASIL, 1998).

Em relação aos erros cometidos por parte desses alunos, compreendemos que estes se deram pelo fato de que muitos alunos não conseguem identificar as propriedades básicas das figuras geométricas presentes nas questões, mesmo sendo elas do tipo padrão (círculos, retângulos, triângulos retângulos, dentre outras figuras presentes nas questões já discutidas em nosso texto). Diante dessas dificuldades eles não conseguem traçar estratégias que possibilitem responder à questão.

3.1.4 ANÁLISE DAQUESTÃO 165 (ENEM 2015/Azul)

O enunciado da quarta questão do instrumento utilizado em nosso estudo era o seguinte: *O proprietário de um parque aquático deseja construir uma piscina em suas dependências. A figura representa a vista superior dessa piscina, que é formada por três setores circulares idênticos, com ângulo central igual a 60° . O raio R deve ser um número natural.*



O parque aquático já conta com uma piscina em formato retangular com dimensões 50 m x 24 m. O proprietário quer que a área ocupada pela nova piscina seja menor que a ocupada pela piscina já existente. Considere 3,0 como aproximação para π . O maior valor possível para R, em metros, deverá ser

- A) 16.
- B) 28.
- C) 29.
- D) 31.
- E) 49.

A habilidade central demandada para responder corretamente a questão era calcular a área da nova piscina e comparar sua área com a área da piscina já existente. Os conteúdos envolvidos na questão são: Geometria Plana; cálculo de áreas e comparação de figuras geométricas.

A questão busca avaliar no aluno sua capacidade de fazer algumas mudanças de posição na figura dada e perceber que grandezas como lados, ângulos e área de superfícies, não variam quando são rotacionadas e transladadas, até chegar a uma posição canônica e facilitar o que se pede na questão.

Para calcular a área da piscina já existente, que tem formato retangular, e calcular a área da nova piscina a ser construída, formada por setores circulares idênticos, o aluno precisaria saber a fórmula da área do retângulo (base x altura), e a fórmula da área de um semicírculo $(\pi R^2)/2$.

Calculando a área da piscina já existente, temos: $(50\text{m} \times 24\text{m}) = 1200\text{m}^2$ e, para encontrar o tamanho do raio da nova piscina, precisamos observar as imposições feitas na questão, ou seja, que a área da nova piscina seja menor que a área da piscina antiga e que o raio seja o maior número natural possível satisfazendo o que se pede.

Sendo assim, devemos ter $(\pi R^2)/2 < 1200$ e, resolvendo corretamente a expressão e assumindo o valor $\pi = 3$, obtemos a seguinte expressão: $R < (2400/3)^{(1/2)}$ e concluímos que $R < 28,28$, ou seja, $R=28$ metros.

Ao resolverem a questão, os estudantes universitários que participaram de nosso estudo apresentaram o seguinte resultado: doze estudantes assinalaram a alternativa B, acertando a questão; seis erraram a questão, sendo

que três marcaram o item C e três o item D; e nenhum estudante marcou as alternativas A e E.

Quanto aos erros cometidos por eles, alguns ocorreram no cálculo aritmético, enquanto outros apenas marcaram alguma alternativa, aparentemente de modo aleatório, já que não fizeram registro de cálculos que tenham levado à resposta indicada, o que observamos em quatro questionários.

Quanto aos estudantes da Educação Básica, dezessete não assinalaram nenhuma alternativa, ou seja, deixaram a questão totalmente em branco; e apenas um estudante assinalou a alternativa D. Nenhum estudante acertou a questão. Tais resultados evidenciam as fragilidades da formação dos estudantes para lidar com questões envolvendo Geometria.

Habilidades como a capacidade de identificação de regularidades em transformações feitas em figuras planas; em manipulações algébricas e mesmo em operações aritméticas básicas, estão ausentes em muitos estudantes que concluem o Ensino Médio, apesar de sabermos que estas competências deveriam ser desenvolvidas ainda no Ensino Fundamental (BRASIL, 1998). Muitos estudantes avançam para o nível seguinte e até ingressam no nível superior, sem terem adquirido tais competências.

3.1.5 ANÁLISE DA QUESTÃO 153 (ENEM 2017/Azul)

A quinta questão de nosso teste tinha o seguinte enunciado: *A manchete demonstra que o transporte de grandes cargas representa cada vez mais preocupação quando feito em vias urbanas.*

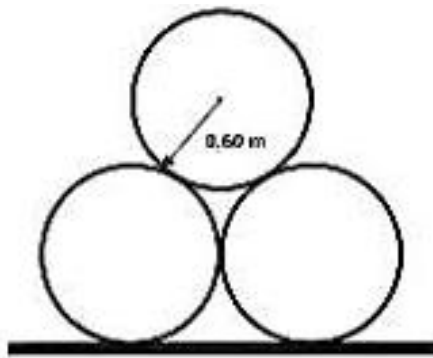
Caminhão entala em viaduto no Centro

Um caminhão de grande porte estalou embaixo do viaduto no cruzamento das avenidas Borges de Medeiros e Loureiro da Silva no sentido Centro-Bairro, próximo à Ponte de Pedra, na capital. Esse veículo vinha de São Paulo para Porto Alegre e transportava três grandes tubos, conforme ilustrado na foto.

Considere que o raio externo de cada cano da imagem seja 0,60 m e que eles estejam em cima de uma carroceria cuja parte superior está a 1,30 m do solo. O desenho representa a vista traseira do empilhamento dos canos.



A margem de segurança recomendada para que um veículo passe sob um viaduto é que a altura total do veículo com a carga seja, no mínimo, 0,50 m menor do que a altura do vão do viaduto.



Considere 1,7 como aproximação para $\sqrt{3}$.

Qual deveria ser a altura mínima do viaduto, em metro, para que esse caminhão pudesse passar com segurança sob seu vão?

- A) 2,82
- B) 3,52
- C) 3,70
- D) 4,02
- E) 4,20

A habilidade central demandada na resolução da questão proposta seria a determinação da distância entre o solo e o viaduto, além do conhecimento de propriedades do círculo; e cálculo da altura de um triângulo equilátero. Os conteúdos nela envolvidos são: Geometria Plana; cálculo de medidas pela composição de outras.

Entendemos que tal questão proposta aos candidatos, mais uma vez, atende às indicações dos PCN (BRASIL, 1998) e, também, dos PCNEM

(BRASIL, 2001) quanto ao uso de um contexto que envolva situações do cotidiano, pois tais documentos defendem que é fundamental que os estudos do espaço e forma, em particular o da Geometria Plana, ocorram a partir de situações-problema do mundo físico.

Para responder corretamente a questão, o candidato deveria saber calcular a altura de um triângulo equilátero e perceber que, para se chegar à resposta correta, seria necessário montar uma equação que resultaria na soma de medidas que encontraríamos a partir da composição de outras medidas. Tal equação seria dada por: $AT = 1,3 + R + ATE + R + 0,5$; AT (Altura Total); R (Raio); ATE (Altura do Triângulo Equilátero).

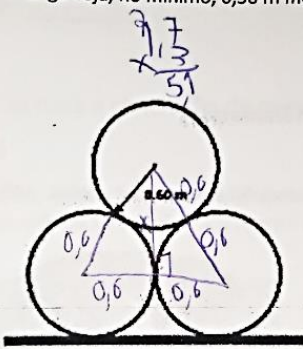
O raio do cano cilíndrico pode ser extraído diretamente do enunciado da questão e, ao ligarmos os centros dos três círculos que formam a segunda figura da questão, obtemos um triângulo equilátero de lados iguais a $2R$, e consequentemente, a medida da altura desse triângulo é dada por $ATE = (L(3)^{1/2})/2$, onde L é a medida do lado do triângulo equilátero. Assim: $ATE = L(3)^{1/2}/2 = (1,2 \times 3^{1/2})/2 = 1,02$ m. Com isso, temos todas as medidas necessárias para efetuar o cálculo da questão. Logo: $AT = 1,3 + 0,6 + 1,02 + 0,6 + 0,5 = 4,02$ metros (letra D).

Ao resolverem a questão proposta, os graduandos que participaram de nossa pesquisa apresentaram o seguinte resultado: dois estudantes marcaram a letra A; três marcaram a letra B; cinco marcaram a letra C; cinco marcaram a letra D (resposta correta); e, quatro estudantes sequer marcaram algum item. Cinco estudantes dos que marcaram algum item errado não fizeram registros em suas provas em relação a qualquer procedimento de cálculo adotado.

O principal erro cometido pelos estudantes desse nível de escolaridade foi relacionado ao esquecimento da fórmula usada para calcular a altura do triângulo equilátero, sendo assim, muitos alunos não conseguiram completar o procedimento da resolução da questão e, consequentemente, não chegaram à resposta correta. Dentre outros erros, podemos destacar o destacado na Figura 9.

Figura 9 - Resposta de um estudante universitário para a Questão 5.

A margem de segurança recomendada para que um veículo passe sob um viaduto é que a altura total do veículo com a carga seja, no mínimo, 0,50 m menor do que a altura do vão do viaduto.



Handwritten calculations:

$$1,2^2 = 0,6^2 + x^2$$

$$x^2 = 1,44 - 0,36 = 1,08 = \frac{108}{100}$$

$$x = \frac{\sqrt{108}}{10} = \frac{6\sqrt{3}}{10} = \frac{3\sqrt{3}}{5}$$

$$\frac{3\sqrt{3}}{5} \approx \frac{3 \cdot 1,7}{5} = \frac{5,1}{5} = 1,02$$

Considera 1,7 como aproximação para $\sqrt{3}$.

Qual deveria ser a altura mínima do viaduto, em metro, para que esse caminhão pudesse passar com segurança sob seu vão?

Handwritten calculation: $1,3 + 1,02 + 0,6 + 0,6 + 0,5 = 3,7$

Options:

- A) 2,82
- B) 3,52
- ☒ C) 3,70
- D) 4,02
- E) 4,20

Fonte: arquivo do autor.

No caso ilustrado na Figura 9, o estudante acertou os procedimentos anteriores e chegou ao cálculo necessário para responder à questão: $1,3 + 1,02 + 0,6 + 0,6 + 0,5$, que seria igual a 4,2 e não a 3,7, como fez ele. Como a resposta equivocada que ele determinou constava como alternativa para a questão, ele não observou que seu cálculo estava errado.

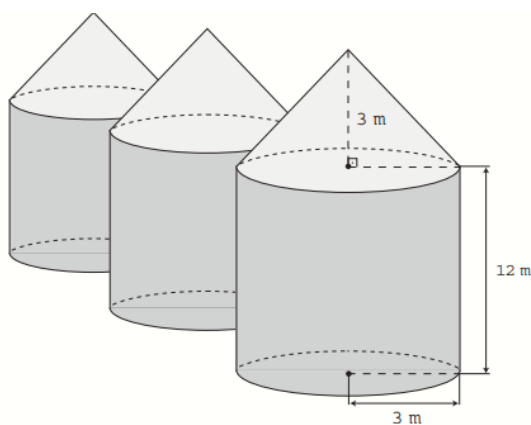
Quanto aos estudantes da Educação Básica, obtivemos o seguinte resultado: três marcaram a letra A; dois marcaram a letra B; cinco marcaram a letra C; oito marcaram a letra E, e a alternativa D não foi assinalada, com isso, nenhum estudante acertou a questão. A maioria dos estudantes que assinalou alguma alternativa não fez registro de procedimentos de cálculo.

Novamente, destaca-se a dificuldade sentida por parte de alunos do Ensino Médio para resolver questões envolvendo conteúdos básicos de Geometria Plana, estando eles à porta de concluírem a Educação Básica e muitos a prestarem exame (ENEM) para ingressarem no Ensino Superior, sem adquirirem muitas das competências indicadas nos documentos oficiais (BRASIL, 1998, 2001).

3.2 ANÁLISE DAS QUESTÕES RELATIVAS A CONTEÚDOS DE GEOMETRIA ESPACIAL

3.2.1 ANÁLISE DA QUESTÃO 136 (ENEM 2016/Azul)

A sexta questão de nossa atividade envolvia elementos de Geometria Espacial e tinha o seguinte enunciado: *Em regiões agrícolas, é comum a presença de silos para armazenamento e secagem da produção de grãos, no formato de um cilindro reto, sobreposto por um cone, e dimensões indicadas na figura. O silo fica cheio e o transporte dos grãos é feito em caminhões de carga cuja capacidade é de 20 m^3 . Uma região possui um silo cheio e apenas um caminhão para transportar os grãos para a usina de beneficiamento.*



Utilize 3 como aproximação para π .

O número mínimo de viagens que o caminhão precisará fazer para transportar todo o volume de grãos armazenados no silo é

- A) 6.
- B) 16.
- C) 17.
- D) 18.
- E) 21.

A habilidade central demandada na questão para a obtenção da resposta correta é calcular o volume de alguns sólidos geométricos, no caso, cilindro e cone, e perceber que determinados sólidos propostos são resultados da união de outros já conhecidos. Os conteúdos de Geometria Espacial envolvidos na questão são: cálculo de volume de sólidos e composição de volumes.

A questão busca avaliar no candidato sua capacidade de calcular grandezas, observar o espaço tridimensional e retirar informações do enunciado, necessárias para lograr êxito na questão, pois a imagem é um instrumento de informação essencial no mundo moderno (BRASIL, 1998).

Para responder corretamente a questão, o aluno deveria conhecer a fórmula que calcula o volume do cilindro, dada por $V_{Ci} = \pi R_1^2 H_1$, onde R_1 e H_1 são o raio e a altura do cilindro, respectivamente, e, também, saber a fórmula do cálculo do volume de um cone, dada por $V_{Co} = (\pi R_2^2 H_2)/3$, onde R_2 e H_2 são o raio e a altura do cone, respectivamente, pois o sólido da questão é formado pela composição desses dois sólidos geométricos.

Sendo assim, chegamos ao cálculo do volume do sólido em questão através da seguinte equação: $VT = V_{Ci} + V_{Co}$, onde: VT é o Volume Total; V_{Ci} é o volume do Cilindro; e V_{Co} é o volume do Cone. Com isso, $VT = \pi R_1^2 H_1 + (\pi R_2^2 H_2)/3$ e todas essas medidas são fornecidas na questão, ou seja, $H_1 = 12$ e $R_1 = R_2 = H_2 = 3$, logo: $VT = 3.3^2.12 + (3.3^2.3)/3 = 324 + 27 = 351 \text{ m}^3$.

Na questão é dada a informação de quantos metros cúbicos o caminhão transporta, sendo assim, precisamos dividir o volume total do silo pelo volume que o caminhão transporta, que denotaremos por (VC) . Assim, $QC = VT/CC = 351/20 = 17,55$. Com base no valor obtido precisamos, ainda, indicar o número de caminhões necessários. Caso escolhêssemos 17 caminhões (alternativa C), faltariam caminhões para levar o restante da carga, ou seja, os $0,55 \text{ m}^3$ a mais que a carga de dezessete caminhões e, com isso, precisamos escolher a resposta “18 caminhões” (alternativa D).

Ao resolverem a questão, os graduandos que participaram de nosso estudo apresentaram o seguinte resultado: treze assinalaram a alternativa D (resposta certa); cinco assinalaram a alternativa C; e as alternativas A, B e E não foram assinaladas.

Dentre os estudantes que erraram a questão, o erro mais comum se deu no fim da resolução, quando dividiram o volume total do silo pela carga que o caminhão transporta, obtendo o valor 17,55, indicando como resposta a parte inteira do resultado obtido que é 17, como indicado na Figura 10. Cinco estudantes desse nível de escolaridade cometeram o mesmo erro.

Figura 10 - Resposta de um estudante universitário para a Questão 6.

Utilize 3 como aproximação para π .

O número mínimo de viagens que o caminhão precisará fazer para transportar todo o volume de grãos armazenados no silo é

A) 6.
B) 16.
C) 17.
D) 18.
E) 21.

$1 \rightarrow 20m^3$

$V_d = V_{ci} + V_{co}$
 $V_d = 351m^3$

$V_{ci} = \pi R^2 \cdot h$
 $V_{ci} = 3 \cdot 9 \cdot 12$
 $V_{ci} = 324m^3$

$V_{co} = \frac{\pi R^2 \cdot h}{3} = \frac{8 \cdot 3 \cdot 9}{8} = 27m^3$

Handwritten calculations at the top right:

$$\begin{array}{r} 351 \overline{) 120} \\ 117 \\ \hline 151 \\ 110 \\ \hline 410 \\ 396 \\ \hline 140 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 324 \\ 27 \\ \hline 351 \end{array}$$

Fonte: arquivo do autor.

O erro cometido pelos estudantes, neste caso, diz respeito a dificuldade de interpretação da solução encontrada, na medida em que não observam que o enunciado fala no número mínimo de viagens para transportar “todo” o volume de grãos. Se fossem feitas apenas 17 viagens, uma pequena parte dos grãos não seria transportada.

Quanto aos estudantes da Educação Básica, é notória a dificuldade que têm para identificar a possibilidade de obtenção do volume de um sólido, por meio da composição do volume de sólidos geométricos mais conhecidos. Foram observados vários tipos de estratégias como tentativa de chegarem à resposta e, em muitos casos, é difícil levantar hipóteses sobre o raciocínio utilizado por eles, como no caso destacado na Figura 11.

Figura 11 - Resposta de um estudante da Educação Básica para a Questão 6.

O número mínimo de viagens que o caminhão precisará fazer para transportar todo o volume de grãos armazenados no silo é

A) 6.
B) 16.
C) 17.
D) 18.
E) 21.

$12 - 3 - 3 = 6$

Fonte: arquivo do autor.

O estudante, neste caso, limitou-se simplesmente a realizar uma operação aritmética básica envolvendo os três números presentes na imagem dada no enunciado da questão, mas que não tem qualquer sentido no processo de resolução.

Entendemos que ocorreu neste caso o que alertam os PCN quando afirmam que

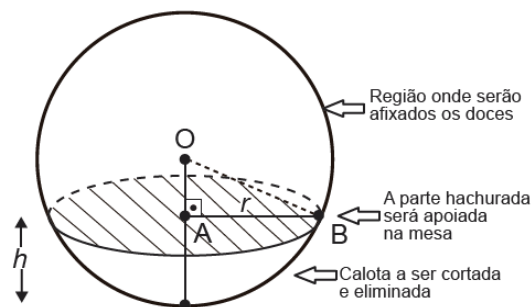
[P]ara a grande maioria dos alunos, resolver um problema significa fazer cálculos com os números do enunciado ou aplicar algo que aprenderam nas aulas. Desse modo, o que o professor explora na atividade matemática não é mais a atividade, ela mesma, mas seus resultados, definições, técnicas e demonstrações. (BRASIL, 1998, p.40).

Os resultados gerais da análise das respostas apontam, mais uma vez, as dificuldades de estudantes da Educação Básica frente a problemas que dependem de sua capacidade de percepção espacial ou de determinação de volume de sólidos canônicos (cilindro, cone, pirâmide e esfera), conteúdos que deveriam ser trabalhos pelo menos no Ensino Médio (BRASIL, 2001).

3.2.2 ANÁLISE DA QUESTÃO 167 (ENEM 2017/Azul)

A sétima questão relacionada à Geometria Espacial de nosso teste tinha o seguinte enunciado: *Para decorar uma mesa de festa infantil, um chefe de cozinha usará um melão esférico com diâmetro medindo 10 cm, o qual servirá de suporte para espetar diversos doces.*

Ele irá retirar uma calota esférica do melão, conforme ilustra a figura, e, para garantir a estabilidade deste suporte, dificultando que o melão role sobre a mesa, o chefe fará o corte de modo que o raio r da seção circular de corte seja de pelo menos 3 cm. Por outro lado, o chefe desejará dispor da maior área possível da região em que serão afixados os doces.



Para atingir todos os seus objetivos, o chefe deverá cortar a calota do melão numa altura h , em centímetro, igual a

- A) $5 - \sqrt{91}/2$
- B) $10 - \sqrt{91}$
- C) 1
- D) 4
- E) 5

A habilidade central demandada na questão envolve o cálculo da medida h pedida, através do uso do Teorema de Pitágoras. Os conteúdos presentes na questão são, portanto: Geometria Espacial e Plana; Teorema de Pitágoras. A questão busca avaliar no candidato sua percepção em relação ao lugar onde deverá ser realizado o corte, de modo a obter a maior área possível na superfície do melão.

Vale observar que, mesmo sendo uma questão do campo da Geometria Espacial, a resolução é essencialmente executada com o uso de conhecimentos do campo da Geometria Plana. Outro ponto que merece destaque é que, apesar de a questão aparentemente envolver uma situação do cotidiano, seria pouco provável que um chefe de cozinha realizasse esse cálculo matemático para resolver seu problema. Não estamos aqui questionando a capacidade matemática do chefe, mas o fato de que o tempo demandado para realizar esse procedimento talvez não compensasse, considerando a necessidade apontada no enunciado.

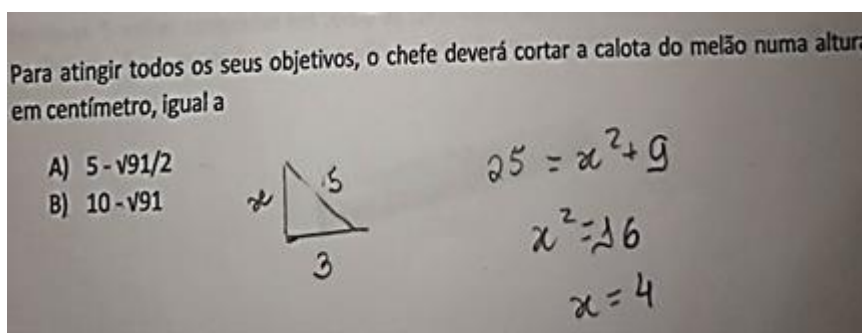
Para responder corretamente à questão o aluno deveria encontrar a medida h pedida na questão a partir da equação $h = R - X$, onde R é o raio da esfera; e X a distância do ponto A ao ponto O. O corte deverá ser realizado onde a medida do Raio é igual a pelo menos três centímetros, para obtermos a maior área possível disponível para afixar os doces, obedecendo ao que a questão pede.

Sendo assim, determinamos a medida de um dos catetos do triângulo retângulo formado na figura, observando que a hipotenusa, OB, é a metade do diâmetro da esfera, que é dado na questão. Logo, calculamos a medida X através do Teorema de Pitágoras: $X^2 + R^2 = (OB)^2 = X^2 + 3^2 = (10/2)^2$. Efetuando a operação indicada concluímos que $X = 4$. Com isso, $h = R - X = 5 - 4 = 1$ cm.

Ao resolverem a questão, os graduandos apresentaram o seguinte resultado: um estudante assinalou a alternativa A; dois assinalaram a alternativa B; onze assinalaram a alternativa C (resposta correta); quatro assinalaram a alternativa D; e nenhum estudante assinalou a alternativa E.

Quanto aos erros cometidos por eles, mais uma vez, a maioria parece estar na falta de atenção em relação ao que é pedido na questão, como no caso destacado na Figura 12, na qual o estudante não complementa a solução, uma vez que precisaria subtrair o valor obtido do valor do raio.

Figura 12 - Resposta de um estudante universitário para a Questão 7



Fonte: arquivo do autor.

Erros semelhantes foram detectados nos registros de todos os quatro graduandos que marcaram o item D. Mais uma vez observa-se que, como a resposta que o estudante encontrou, errada, consta como opção de resposta para a questão, ele não avalia se ela está correta, o que talvez ocorresse se o número quatro não estivesse em algum item.

Vale ressaltar que nossa compreensão de que o erro cometido tenha sido devido à desatenção dos estudantes não corresponda à realidade e o problema seja mesmo de lacunas em sua formação em relação ao domínio de conteúdos básicos de Geometria Plana.

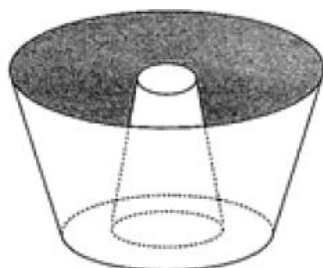
Quanto aos resultados dos estudantes da Educação Básica, temos o seguinte: quatro estudantes assinalaram a alternativa A; três assinalaram a alternativa B; três assinalaram a alternativa D; três assinalaram a alternativa E; e cinco sequer marcaram alguma alternativa, ou seja, nenhum estudante acertou a questão. Os erros que eles cometeram foram de várias naturezas, alguns idênticos aos dos graduandos. Em alguns casos, foi apenas assinalada alguma alternativa, mas sem indicação de cálculos.

A ausência de respostas corretas por parte de estudantes da Educação Básica em uma questão que, embora aparentemente seja de Geometria Espacial, seria resolvida por meio do uso de conteúdos de Geometria Plana básicos, que deveriam ser estudados no Ensino Fundamental, como o Teorema de Pitágoras (BRASIL, 1998).

Vale ressaltar, em relação aos erros cometidos, como o destacado na Figura 12, as dificuldades dos estudantes, tanto do ensino superior quanto da Educação Básica, em relação à interpretação do que é pedido no enunciado das questões, se a solicitação não pode ser visualizada de modo direto.

3.2.3 ANÁLISE DAQUESTÃO 169(ENEM 2013/amarela)

A última questão que fez parte de nosso instrumento de estudo tinha o seguinte enunciado: *Uma cozinheira, especialista em fazer bolos, utiliza uma forma no formato representado na figura:*



Nela identifica-se a representação de duas figuras geométricas tridimensionais. Essas figuras são

- A) Um tronco de cone e um cilindro
- B) Um cone e um cilindro
- C) Um tronco de pirâmide e um cilindro
- D) Dois troncos de cone

E) Dois cilindros

A habilidade central demandada na resolução da questão é o reconhecimento do sólido geométrico da imagem presente no enunciado, desenhado em perspectiva. A questão é do campo da Geometria Espacial e não demandaria qualquer cálculo, apenas observar a representação do sólido em questão e identificar de as formas dos sólidos que o compõem.

Para responder corretamente a questão, basta observar que a forma de bolo composta a partir de duas figuras geométricas tridimensionais que possuem duas bases circulares paralelas, mas que não têm o mesmo raio, logo, não podem ser cilindros. As duas figuras são obtidas a partir de um corte paralelo à base de um cone, logo, as duas figuras são troncos de cone.

Todos os 18 graduandos que participaram de nossa pesquisa marcaram a letra D (resposta correta), ou seja, todos eles acertaram a questão. Quanto aos estudantes da Educação Básica, um marcou a letra A; quatro marcaram a letra B; três marcaram a letra D (Resposta certa); dez marcaram a letra E; e nenhum estudante marcou a letra C.

Os resultados do desempenho dos estudantes da Educação Básica destacam sua dificuldade em relação à habilidade de percepção espacial, competência presente nos Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998), como habilidade a ser desenvolvida ainda no Ensino Fundamental. Vale ressaltar que estudos que envolvem Geometria Espacial também ocorrem no Ensino Médio.

Uma hipótese que levantamos em relação aos resultados que observamos nessa questão, que consideramos ser de nível fácil, já que não envolvem fórmulas nem cálculos, é que, quando estudam Geometria Espacial, as figuras que são exploradas são as canônicas, ou seja, cone, cilindro, esfera e paralelepípedo e os troncos de cone e de pirâmide não estariam incluídos nessa relação.

De maneira geral, os resultados em relação aos estudantes do Ensino Médio foram muito abaixo do desejável, uma vez que seu desempenho em questões no âmbito de Geometria foi muito abaixo do esperado para estudantes que estão prestes a concluir a Educação Básica.

Os resultados gerais que obtivemos são semelhantes aos do estudo de Santos (2014), com 82 alunos do Ensino Médio, envolvendo quatro questões de

Geometria do ENEM, no qual apenas 3,4% das respostas às questões estavam corretas e o índice de respostas em branco atingiu 51,4% do total.

O desempenho dos estudantes de Licenciatura que participaram de nosso estudo, embora tenham sido superiores aos resultados dos estudantes do Ensino Médio, ainda são preocupantes, pois estes estão próximos de estarem legalmente habilitados a atuarem como professores da Educação Básica e boa parte das competências demandadas na resolução das questões que fizeram parte de nosso estudo era de conteúdos explorados ainda no Ensino Fundamental.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nosso trabalho teve como tema central o campo da Geometria e com ele procuramos responder à questão relativa a como seria o desempenho de estudantes da Educação Básica e do Ensino Superior, em relação à resolução de questões do ENEM, que envolvem conteúdos de Geometria. Assim, nosso principal objetivo foi analisar o desempenho de estudantes da Educação Básica e do Ensino Superior na resolução de problemas de Geometria.

Em razão do que apresentamos nos Capítulos de nosso trabalho, entendemos que o objetivo que traçamos para nossa pesquisa foi realizado, não havendo problemas quanto ao seu desenvolvimento, em se tratando de aspectos metodológicos ou de acesso às instituições que colaboraram com nossa investigação.

Como resultado de nossa pesquisa, observamos dificuldades de diversas naturezas por parte dos estudantes participantes, em especial dos estudantes da Educação Básica. É preocupante o fato de terem limitações relacionadas até mesmo a conteúdos que deveriam ser trabalhados no Ensino Médio.

Nossa hipótese é que há problemas no ensino da Geometria na Educação Básica e que não consegue dar conta das exigências mínimas orientadas em documentos oficiais como os citados ao longo de nosso trabalho, acarretando lacunas no aprendizado de Matemática pelos estudantes.

Com a elaboração desse nosso trabalho, entendemos que o ensino de Geometria precisa avançar em nossas salas de aula da Educação Básica, para que os estudantes possam desenvolver plenamente todas as suas potencialidades. Se a Geometria ajuda o aluno a compreender melhor como o mundo está organizado e funciona, como afirmam os Parâmetros Curriculares Nacionais, seu ensino precisa ter qualidade.

Para isso, precisamos investir também na melhoria da formação dos professores que ensinam Matemática, uma vez que observamos lacunas na formação inicial de alunos de graduação de uma Licenciatura em Matemática, parte deles já próximos de concluírem a Graduação. Se esses estudantes não tiverem uma boa formação inicial, irão contribuir pouco para mudar o quadro atual do ensino de Matemática em nosso estado.

A partir da realização deste trabalho, desejamos ampliar nossa formação, realizando outras pesquisas em que possamos aprender mais sobre os erros e estratégias utilizados pelos estudantes ao resolverem questões matemáticas, em particular no âmbito da Geometria.

REFERÊNCIAS

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais – Matemática**: primeiro e segundo ciclos. MEC/SEB: Brasília: 1997.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais – Matemática**: terceiro e quarto ciclos. MEC/SEB: Brasília: 1998.

JEZINE, E. **Metodologia do Trabalho Científico**. In: Antonio Sales da Silva. (Org.). Licenciatura em Matemática a Distância. 1ed. João Pessoa: Liceu, 2007.

MOL, R. S. **Introdução à História da Matemática**. Belo Horizonte: Caed-ufmg: 2013.

Secretaria de Estado da Educação do Paraná. **Diretrizes Curriculares da Educação Básica**. Curitiba: Jam3 Comunicação, 2008. 82 p.

PIASESKI, C. M. A **Geometria no Ensino Fundamental**. Monografia (Especialização) - Curso de Matemática, Departamento de Ciências Exatas e da Terra, Universidade Regional Integrada do Alto Uruguai e das Missões Campus de Erechim – Uri, Erechim: 2010.

RAMALHO, B.L; NUÑES, I. B. **Aprendendo com o ENEM: Reflexões para melhor se pensar o ensino e a aprendizagem das ciências naturais e da matemática**. Brasília: Liber Livro Editora, 2011.

RODRIGUES, M. U. **Análise das Questões de Matemática do Novo ENEM (2009 à 2012)**: Reflexões para Professores de Matemática. UNEMAT, 2013 Disponível em: http://sbem.bruc.com.br/XIENEM/pdf/1029_804_ID.pdf. Acesso em 10 de setembro de 2014.

SANTOS, C. A.; NACARATO, A. M. **Aprendizagem em Geometria na educação básica: A fotografia e a escrita na sala de aula**. Belo Horizonte: Autêntica, 2014. 111 p.

SANTOS, M. C. O Cabri-Géomètre e o desenvolvimento do pensamento geométrico: o caso dos quadriláteros. In: BORBA, R.; GUIMARÃES, G. (Org.). **A Pesquisa em Educação Matemática: Repercussões na sala de aula**. São Paulo: Cortez, 2009.

SANTOS, R. R. **Análise de erros em questões de Geometria do ENEM: um estudo com alunos do Ensino Médio**. 2014. 59 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Matemática, Departamento de Matemática Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – Profmat, Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2014.