Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Física

Letícia Cavalcante Monteiro

Cosmologia de Partículas no Universo Primordial: Repovoamento Pós-inflacionário via Preheating e Reheating

João Pessoa

2021

Letícia Cavalcante Monteiro

Cosmologia de Partículas no Universo Primordial: Repovoamento Pós-inflacionário via Preheating e Reheating

Dissertação apresentada ao Departamento de Física da Universidade Federal da Paraíba como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Física.

Área de Concentração: Física de Partículas
Orientador(a): Prof. Dr. Carlos Antonio de Souza Pires

João Pessoa

2021

Catalogação na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

M775c Monteiro, Letícia Cavalcante.
Cosmologia de partículas no universo primordial : repovoamento pós-inflacionário via preheating e reheating / Letícia Cavalcante Monteiro. - João Pessoa, 2021.
78 f. : il.

Orientação: Carlos Antônio de Sousa Pires.
Dissertação (Mestrado) - UFPB/CCEN.

1. Física. 2. Inflação cosmológica. 3. Preheating. 4. Reheating. 5. Ressonância paramétrica. I. Pires, Carlos Antônio de Sousa. II. Título.

UFPB/BC CDU 53(043)

Elaborado por ANNA REGINA DA SILVA RIBEIRO - CRB-15/024

A Deus e à minha família por demonstrarem um amor sem igual!

Agradecimentos

A Deus, por sempre me guiar e demonstrar seu infinito amor;

Aos meus pais, Ana Lígia e Irenildo Evaristo, por estarem sempre ao meu lado me apoiando, convivendo com minha falta de tempo e presença por conta dos estudos;

Aos meus irmãos, Larissa Cavalcante e Ignácio Neto, por sempre me motivarem, por confiarem em mim e nas minhas decisões;

Ao meu orientador, Carlos Pires, pela orientação e dedicação durante o meu mestrado, possibilitando-me enxergar novos horizontes e estudar um assunto que considero fascinante;

Ao professor Paulo Sérgio por todas as nossas reuniões, por sua dedicação e por ter me suportado e guiado durante toda a minha graduação, sempre buscando desenvolver o meu melhor;

Aos professores que contribuíram na minha formação acadêmica, em especial os professores Eugênio Bezerra e Charlie Salvador por serem exemplos de profissionais que amam e se dedicam ao que fazem, exemplos esses que levarei para vida;

Aos colegas, Pablo Vasconcelos, Débora Ramalho, Rafael Batista, Alberto Albuquerque, Moallison Ferreira e Samuel Lucas, pelas conversas, brincadeiras e convivência durante todo meu período na universidade, tornando o trabalho mais prazeroso;

À CAPES, pelo apoio financeiro;

A todos que contribuíram direta ou indiretamente na conclusão deste trabalho.

"*A menos que modifiquemos a nossa maneira de pensar, não seremos capazes de resolver os problemas causados pela forma como nos acostumamos a ver o mundo.*"

Albert Einstein

Resumo

Este trabalho tem como foco o estudo de épocas iniciais do universo, em particular a era inflacionária e o período pós-inflacionário, que compreende o preheating e o reheating. Tais assuntos são de grande importância na compreensão da evolução do universo e de sua estrutura atual, pois a inflação explica o fato de o universo ser praticamente homogêneo, isotrópico e plano (problemas do horizonte e da planura), assim como é a fonte das perturbações inicias que se desenvolveram e originaram as estruturas em largas escalas que observamos atualmente. A inflação foi proposta originalmente por Alan Guth no início da década de 80 e consiste em uma época de expansão exponencial dirigida por um campo escalar chamado de inflaton. Como essa época ocorre em energias altíssimas, entender a dinâmica dessa expansão permite estabelecer parâmetros que restringem os modelos inflacionários. Após esse período, precisamos repovoar o universo. A oscilação do campo do inflaton faz com que tal partícula decaia em deteminados graus de liberdade, ou seja, outras partículas, levando à evolução da cosmologia padrão, com o universo sendo dominado por radiação nessa época. Exite dois mecanismos principais para esse tipo de decaimento - preheating (regime de ressonância paramétrica ampla, decaimento não perturbativo) e reheating (regime de decaimento usual, perturbativo). A depender do modelo, um mecanismo pode ser mais dominante que o outro, ou até mesmo, nenhum dos dois dominarem.

Palavras-chave: Decaimento, Inflação, Inflaton, Preheating, Ressonância Paramétrica, Reheating.

Abstract

This work focuses on the study of the early stages of the universe, in particular the inflationary era and the post-inflationary period, which includes preheating and reheating. Such topics are of great importance in understanding the evolution of the universe and its present structure, since inflation is the source of the initial perturbations that originated the structures at large scales that we observe today, and it explains the fact that the universe is practically homogeneous, isotropic and flat (horizon and flatness problems). Inflation was originally proposed by Alan Guth in the early 1980s and consists of an era of exponential expansion driven by a scalar field called the inflaton. As this epoch occurs at very high energies, understanding the dynamics of this expansion allows us to establish certain parameters that restrict inflationary models. After this period, we need to repopulate the universe. The oscillations of the inflaton field cause this particle to decay into other degrees of freedom, that is, other particles, leading to the evolution of standard cosmology with the universe being dominated by radiation at that time. There are two main mechanisms for this type of decay: preheating (broad parametric resonance regime) and reaheating (usual decay regime). Depending on the model, one of the mechanism may be dominant over the other, or even none of them could be relevant.

Keywords: Decay, Inflation, Inflaton, Parametric Ressonance, Preheating, Reheating.

Lista de Figuras

1.1 Evolução na medição da radiação cósmica de fundo (CMB) 3

2.1 Evolução das densidades do Universo (caso houvesse dominação de alguma componente) em suas respectivas eras 9
2.2 Relação entre o parâmetro de Hubble (H_0) e o parâmetro de densidade de matéria (Ω_m) 10
2.3 Solução gráfica para o problema do horizonte 18
2.4 Volume de Hubble antes e após a inflação 23

3.1 Vínculos sobre o running do índice espectral (n_s') no modelo ΛCDM . . . 31
3.2 Vínculos sobre a razão tensor-escalar ($r_{0.002}$) no modelo ΛCDM 32
3.3 Vínculos sobre a razão tensor-escalar, considerando diferentes modelos inflacionários 34

4.1 Flutuações quânticas do campo do inflaton em um dado potencial 35
4.2 Comportamento do campo do inflaton no final da inflação 37
4.3 Gráfico da evolução das densidades de energia do campo do inflaton e da radiação durante o final da inflação. 39
4.4 Esquema da evolução temporal da função de estado 42
4.5 Evolução do horizonte comóvel 43
4.6 Reentrada dos modos k no horizonte para diferentes valores de ω_{re} 43
4.7 Relação entre os parâmetros N_{re}, T_{re} e n_s para diferentes tipos de potenciais polinomiais. 45

A.1 Evolução do fator de escala do universo para diferentes parâmetros de densidade. 57

B.1 Gráfico com alguns valores para a equação $\dot{x} = \sin x$ 59
B.2 Espaço de fase do sistema regido pela equação (B.1) 59
B.3 Campo vetorial da função $\dot{x} = \sin x$ 60
B.4 Comportamento da função $x = x(t)$ da equação B.1 61
B.5 Sistema massa-mola 61
B.6 Sistema massa-mola com deformação 62
B.7 Plano de fase do sistema massa-mola 63
B.8 Trajetórias do sistema massa-mola 63
B.9 Plano de Poincaré (S) 64
B.10 Diagrama de Ince-Strutt de um oscilador harmônico amortecido 67
B.11 Pêndulo com ponto de suspensão móvel 67

Lista de Tabelas

2.1 Rotulação dos dados utilizados nos gráficos 11

3.1 Principais parâmetros relacionados à inflação mensurados pelo Planck . . . 34

Sumário

1. Introdução 2

2. Explorando a Cosmologia Moderna e as Bases da Inflação 5

2.1 Breve Recapitulação da Cosmologia Moderna 6

2.2 Motivações para Inflação 10

2.3 Campos Escalares 13

2.4 Inflação 16

2.4.1 Campo do Inflaton 19

3. Perturbações relacionadas às anisotropias da CMB 24

3.1 Perturbações do Campo 24

3.2 Perturbações Cosmológicas 27

4. Período Pós-Inflacionário 35

4.1 Reheating 36

4.2 Preheating 44

5. Conclusões 49

Referências 51

Apêndice 55

A. Aproximação de de Sitter 56

B. Estabilidade de sistemas dinâmicos 58
B.1 Oscilações Paramétricas 65
B.2 Equação de Mathieu 66
B.2.1 Aplicação da equação de Mathieu ao pêndulo com ponto de suspensão móvel 67

Capítulo 1

Introdução

O modelo padrão da cosmologia atual é conhecido como ΛCDM (Lambda-Cold Dark Matter) - baseado no princípio cosmológico e com acréscimo da matéria escura e da energia escura sob a forma de constante cosmológica - e possui várias bases observacionais, tais como: o diagrama de Hubble (que nos mostra a expansão do universo), a nucleossíntese primordial (abundância dos elementos leves no início do universo), as oscilações acústicas bariônicas (relacionadas com as flutuações na densidade de matéria visível), a supernova do tipo Ia (utilizadas como velas-padrão, seu brilho extremo nos permite mensurar a distância de certos objetos a nossa galáxia), a radiação cósmica de fundo ("fingerprint" do Universo). Daremos mais atenção a este último dado observacional.

Prevista teoricamente em 1948 por George Gamov, Ralph Alpher e Robert Herman, a radiação cósmica de fundo (CMB) compreende os melhores dados que possuímos atualmente na cosmologia moderna. Detectada em 1965 por Arno Penzias e Robert Woodrow Wilson no Bell Labs (Penzias e Wilson (1965)), a CMB era isotrópica e homogênea em todo o universo. Com as gerações seguintes de telescópios (COBE, WMAP, Planck) - Figura 1.1 - pudemos perceber que existem pequenas variações na temperatura dessa radiação, o que nos leva a considerar a existência de flutuações na densidade de matéria do universo primordial. Tais flutuações desenvolveram-se via instabilidade gravitacional (instabilidade de Jeans) no que cohecemos como estruturas em largas escalas (LSS).

Podemos nos questionar por que regiões tão distantes possuem basicamente a mesma temperatura ou qual seria a origem das flutuações da CMB e como elas se desenvolveram. A resposta a tais questionamentos foi proposta pelo físico americano Alan Guth, na década de 80, e assim surgiu a ***teoria inflacionária***.

Como motivação inicial da inflação, temos os problemas que não eram justificados com

a teoria do Big Bang (problemas da planura, do horizonte e da abundância de partículas relíquias). A inflação cosmológica corresponde a uma época de expansão extremamente acelerada do universo primordial que estima-se ter ocorrido entre 10^{-35} segundos e 10^{-32} segundos após a singularidade inicial do Big Bang.

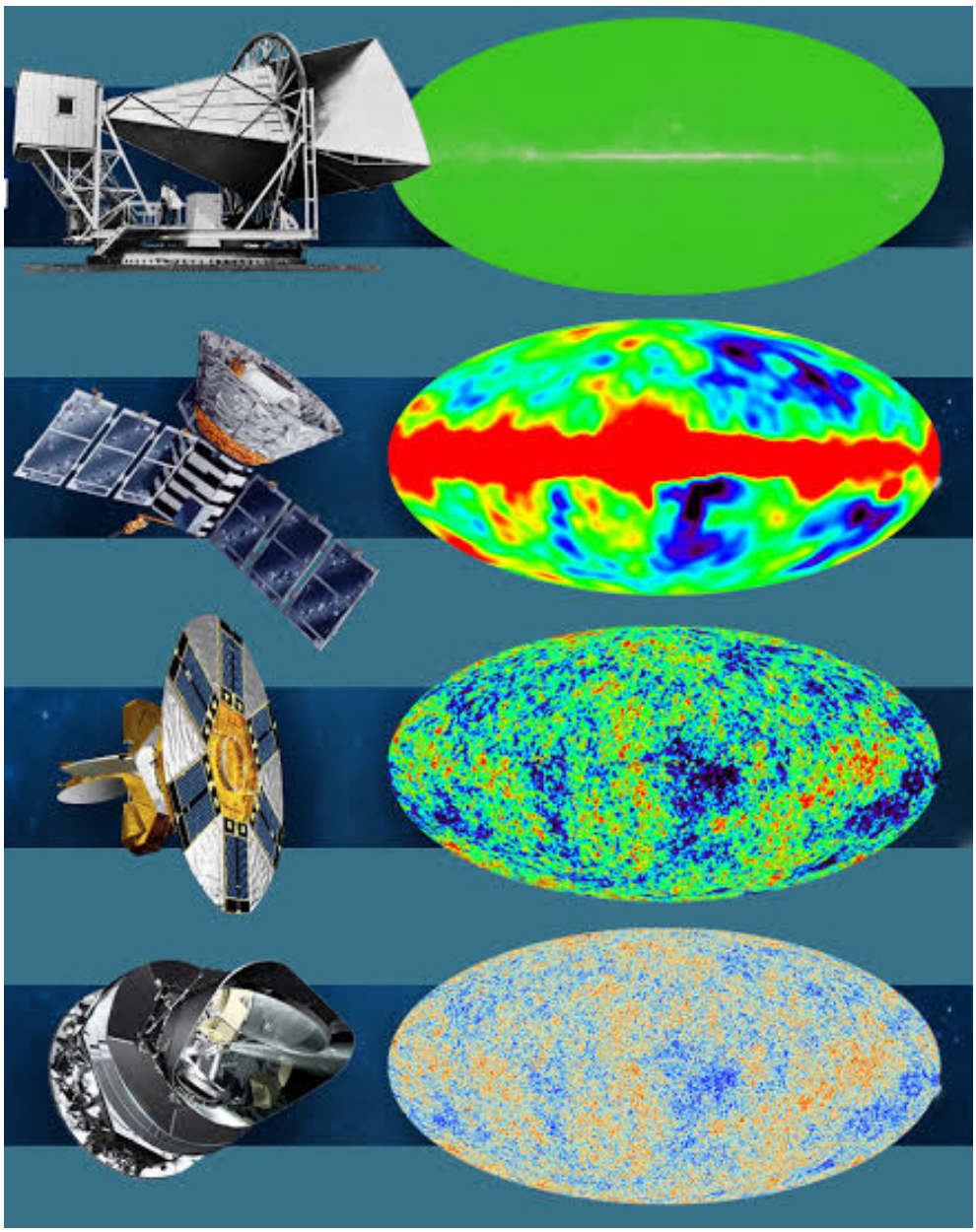

Figura 1.1: Evolução ao longo das décadas na medição da radiação cósmica de fundo (CMB) com o avanço da tecnologia. As cores diferentes representam as anisotropias na temperatura do universo, mostrando que ele não é completamente homôgeneo. De cima pra baixo, temos as seguintes medições: Arno Penzias e Robert Woodrow Wilson nos Laboratórios Bell, satélite COBE (lançado em 1989), sonda WMAP (lançada em 2001) e, por último, a sonda PLANCK (lançada em 2009).

Um modo simples de se explicar essa expansão é considerarmos que ela está sendo

dirigida pela energia do vácuo, e assim adicionamos um campo escalar à teoria ΛCDM. Após a resolução dos problemas que o Big Bang não explica, tal fase chegaria ao fim com o campo escalar decaindo em partículas que reaqueceriam o universo (preheating e reheating), levando à evolução padrão de um universo dominado por radiação.

Esta dissertação está organizada da seguinte maneira:

- No Capítulo 2, faremos uma recapitulação da Cosmologia Moderna e uma discussão acerca dos problemas que surgem com as condições iniciais da evolução do universo. Além disso, explanaremos as bases da Inflação e mostraremos como resolver os problemas citados. Este capítulo é a base de todo o estudo que será apresentado nessa dissertação. As referências fundamentais são: os livros Dodelson (2003), Guth (1998), Lemoine et al. (2007), Liddle (2015), Liddle e Lyth (2000), Linder (1990), Lyth e Liddle (2009), Weinberg (1972), as notas de aula Baumann (2011), Rosa (2012) e os artigos Guth (1981), Guth (1997), Guth (2002), Guth e Kaiser (2005), Hawking (1982), Linde (1982).

- No Capítulo 3, trataremos das perturbações relacionadas às anisotropias da CMB, fator gerador da estrutura atual do universo, visto que o universo atual fornece uma série de informações sobre seu início. Além disso, abordaremos alguns parâmetros fundamentais relacionados à inflação, cujos dados foram obtidos das últimas medidas anunciadas pelo PLANCK. Assim, será nesse capítulo que estabeleceremos a vinculação entre os modelos inflacionários e os dados advindos da CMB. As referências principais são: Aghanim et al. (2018), Akrami et al. (2018), Goncharov et al. (1987), Liddle e Leach (2003), Sasaki (1986), além dos já citados anteriormente.

- No Capítulo 4, trataremos do período pós-inflacionário, ou seja, o que ocorre com o universo quando a inflação chega ao fim. Além disso, abordaremos duas teorias (preheating e reheating) que seriam as responsáveis por repovoar o universo com partículas logo após o final da inflação. Como principais referências, temos: Dai et al. (2014), Greene et al. (1997), Hertzberg (2010), Kofman et al. (1994), Kofman et al. (1997).

Capítulo 2

Explorando a Cosmologia Moderna e as Bases da Inflação

A cosmologia moderna baseia-se no chamado princípio cosmológico, somado à Teoria da Relatividade Geral. O princípio cosmológico - em acordo com os dados advindos da radiação cósmica de fundo (CMB)) - supõe que, em largas escalas (acima de $100Mpc$), o universo é homogêneo e isotrópico.

A Relatividade Geral, mediante às equações de Einstein, elaboradas pelo físico alemão Albert Einstein, em um de seus artigos mais visionário e famoso - *Cosmological Considerations in the General Theory of Relativity* (Einstein (1917)) mudou a forma com a qual pensávamos o universo, levando-nos a estabelecer relações entre curvatura e energia.

Por acreditar em um universo estático, Einstein teve que adicionar um termo extra às suas equações, chamado de constante cosmológica, garantir este tipo de solução. Alguns anos mais tarde, ao descobrir que o universo não era estático, apontou que suas equações teria sido o seu "maior erro". Porém, não sabia ele que o modelo atual de universo que temos se adequa bem à presença de uma constante cosmológica.

Em 1922 e 1924, o físico russo Alexander Friedmann pulicou soluções das equações de Einstein para um universo não estático e em expansão (Friedman (1922) e Friedmann (1924)). De maneira independente, em 1927 e 1931, o físico belga Georges Lemaître também publicou suas pesquisas, que levavam a um universo em expansão (Lemaître (1927) e Lemaître (1931)).

A expansão do universo foi comprovada experimentalmente por Edwin Hubble em 1929 (Hubble (1929)). Todos esses fatores, ao fazermos uma extrapolação temporal para o passado, levam ao que conhecemos como Teoria do Big Bang.

Porém, conforme as observações experimentais foram evoluindo, percebeu-se que alguns dados e conceitos teóricos estavam em desacordo com os experimentais. Assim, para tentar resolver tais problemas, surge a teoria inflacionária (Guth (1981)), como veremos adiante.

2.1 Breve Recapitulação da Cosmologia Moderna

Para estudarmos a evolução do universo, podemos partir tanto da teoria newtoniana da gravidade como da relatividade geral de Einstein, chegando, dessa forma, às conhecidas equações de Friedmann, as quais descrevem tal evolução a partir da teoria do Big Bang quente. Referências base desta seção são: d'Inverno (1992), Misner et al. (2017), Wald (2007).

Via Einstein, em vez de pensarmos na gravidade como uma força exercida por um corpo massivo sobre outri - e falarmos de partículas movendo-se em um campo gravitacional - podemos incluí-la na métrica e pensar em partículas movendo-se livremente em um espaço tempo curvo. Nesse trabalho, será adotada a métrica de Friedmann-Robertson-Walker (FRW), que descreve um universo plano e em expansão (o que está em acordo com as observações experimentais em largas escalas), e dada por:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2(t) \end{pmatrix}, \tag{2.1}$$

onde $a(t)$ é o fator de escala que conecta as distâncias comóveis com as distâncias físicas e cuja evolução depende da densidade de energia no universo. Quando perturbações são introduzidas, a métrica se torna mais complicada e a parte perturbada será determinada pelas inomogeneidades na matéria e na radiação, conforme iremos estudar mais adiante.

As equações de Einstein levam em conta que a gravitação pode ser descrita por uma métrica e buscam relacioná-la com a matéria e a energia existentes no universo. Assim, é estabelecida uma relação entre as componentes do tensor de Einstein com o tensor energia-momento,

$$\mathrm{G}_{\mu\nu} \equiv \mathrm{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \mathcal{R} = 8\pi \mathrm{G}\ \mathrm{T}_{\mu\nu}, \tag{2.2}$$

onde $\mathrm{G}_{\mu\nu}$ é o tensor de Einstein, $\mathrm{R}_{\mu\nu}$ é o tensor de Ricci, $\mathcal{R} \equiv g^{\mu\nu}\mathrm{R}_{\mu\nu}$ é o escalar de Ricci, G é a constante gravitacional de Newton, $\mathrm{T}_{\mu\nu}$ é o tensor energia-momento e a velocidade

da luz c é tomada como a unidade (c = 1).

Considerando que o universo é um fluido isotrópico perfeito, implicação do princípio cosmológico (pois estamos tratando com escalas acima de $100Mpc$), o tensor energia-momento é representado por

$$\mathrm{T}_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix}, \tag{2.3}$$

onde ρ é a densidade de energia do fluido e p é a pressão exercida por ele. Dessa forma, chegamos às equações de Friedmann, dadas por

$$H^2 = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho, \tag{2.4}$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}\left(\rho + 3p\right), \tag{2.5}$$

onde H é o parâmetro de Hubble. Representamos a medida atual por H_0 e, de acordo com os últimos dados do Planck,

$$H_0 = 100\ h\ \text{km s}^{-1}\ \text{Mpc}^{-1}\ = (67,4 \pm 0,5)\ \text{km s}^{-1}\ \text{Mpc}^{-1}\ . \tag{2.6}$$

onde h é um parâmetro adimensional que atualmente mede $0,73^{+0,04}_{-0,03}$.

A equação (2.4), de uma forma mais geral, pode ser escrita como

$$H^2 = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2} + \frac{\Lambda}{3}\ ,$$

onde k é uma constante geralmente chamada de curvatura e nos remete à geometria do universo e, Λ é conhecida como constante cosmológica. Esses termos não foram colocados em (2.4) pois, a princípio, estamos considerando um universo plano, $k = 0$, e sem constante cosmológica.

Atualmente Λ tem sido bastante abordada, visto que, conforme veremos, nosso Universo está em expansão. Uma constante cosmológica positiva nos leva a uma contribuição positiva do fator $\ddot{a}$, agindo como uma força repulsiva. Alguns pesquisadores associam tal constante com a energia escura.

A equação (2.5) é conhecida como equação da aceleração e, por conta de sua estrutura, acreditava-se que o universo estava desacelerando, visto que as densidades e pressões da matéria e da radiação usuais não são negativas.

Usando (2.4) e (2.5), chegamos em

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p) = 0, \tag{2.7}$$

conhecida como equação de estado de um determinado material. Vejamos agora como fica (2.7) para os casos em que tal material pode ser a matéria e a radiação.

- *Matéria:* 'matéria não relativística', qualquer tipo de material que exerce pressão negligenciável ($p = 0$). É uma boa descrição quando queremos tratar de um aglomerado de galáxias. Resolvendo (2.7),

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}\rho = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d(\rho a^3)}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \rho \propto \frac{1}{a^3} = \frac{\rho_0}{a^3}\,. \tag{2.8}$$

  Como era de se esperar, a densidade da matéria é inversamente proporcionalmente ao volume do universo.

  Substituindo (2.8) em (2.4), obtém-se

$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi G}{3}\frac{\rho_0}{a} \Rightarrow \begin{cases} a(t) = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{\frac{2}{3}} \\ \rho(t) = \rho_0\left(\frac{t_0}{t}\right)^2 \end{cases}, \tag{2.9}$$

  e

$$H \equiv \frac{\dot{a}}{a} = \frac{2}{3t}, \tag{2.10}$$

  ou seja, se considerarmos um universo dominado por matéria, ele se expandirá para sempre com uma taxa de expansão que decai à medida que o tempo passa.

- *Radiação:* qualquer partícula que seja relativística. Para esse material, $p = \frac{\rho}{3}$. Assim, de modo análogo ao caso da matéria,

$$\dot{\rho} + 4\frac{\dot{a}}{a}\rho = 0 \quad \Rightarrow \quad \rho \propto \frac{1}{a^4} \begin{cases} a(t) = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{\frac{1}{2}} \\ \rho(t) = \frac{\rho_0}{a^4} = \rho_0\left(\frac{t_0}{t}\right)^2 \end{cases}. \tag{2.11}$$

  onde ρ_0 é a densidade atual de radiação. Nessa situação, a densidade cai com a quarta potência do fator de escala, pois, além do aumento de volume usual, existe o chamado redshift cosmológico, que consiste em um alongamento no comprimento de onda da radiação.

Pela equação (2.4), a densidade necessária para termos uma geometria plana, definida como densidade crítica ρ_c, pode ser escrita como

$$\rho_c(t) = \frac{3H^2}{8\pi G}, \tag{2.12}$$

e, atualmente,

$$\rho_c(t_0) = 1,88h^2\ 10^{-26}\ kg\ m^{-3} = 2,78h^{-1}\ 10^{11}\ \frac{M_\odot}{(h^{-1}\ Mpc)^3}\ , \tag{2.13}$$

com $M_\odot$ sendo a massa solar.

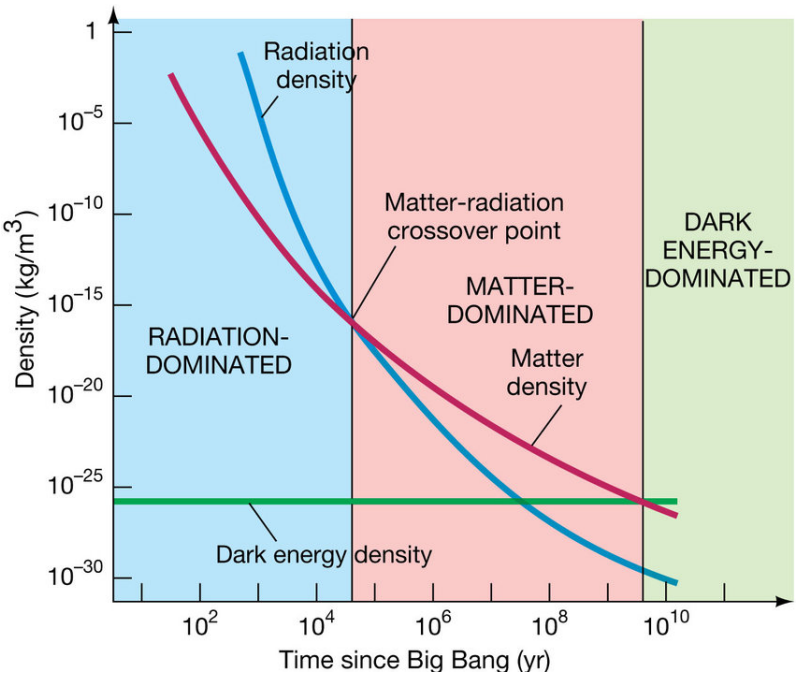

Figura 2.1: Evolução das densidades do Universo (caso houvesse dominação de alguma componente) em suas respectivas eras, tais como conhecemos hoje. Notemos que a densidade de radiação decai mais rapidamente que a densidade de matéria (Copyright: Pearson Education, Inc. (2011).).

Com isso, definimos o chamado parâmetro de densidade relativa, que relaciona a densidade de um dado material que observamos atualmente no universo com a densidade crítica. Se considerarmos o termo de curvatura, chegamos a

$$\Omega(t) \equiv \frac{\rho}{\rho_c} \quad \Rightarrow \quad \Omega - 1 = \frac{k}{a^2\ H^2}\ . \tag{2.14}$$

O caso $\Omega = 1$ implica que $k = 0$ e, como k é uma constante fixa, teríamos um vaor fixo, igual a 1, por toda a evolução do universo, o que nos levaria a um universo completamente plano cuja densidade não se alteraria com o tempo. Atualmente, a densidade total da matéria é $\Omega_m = 0,315 \pm 0,007$, sendo $\Omega_{bar}h^2 = 0,0224 \pm 0,0001$ e $\Omega_{cdm}h^2 = 0,120 \pm 0,001$ os dados relativos à matéria bariônica e à matéria escura fria, respectivamente. Em termos proporcionais, teríamos que a matéria bariônica corresponde a aproximadamente $4,9\%$ da densidade total do universo, enquanto que a matéria escura fria e a energia escura correspondem a aproximadamente $26,4\%$ e $68,5\%$, respectivamente.

Conforme comentado anteriormente, no modelo ΛCDM a descrição da energia escura é feita mediante a inserção da constante cosmológica, uma forma de energia, desconhecida em sua natureza, que compõe a maior parte da densidade atual de energia do universo.

Na Figura 2.2, vemos uma relação gráfica entre o parâmetro de Hubble e o parâmetro de densidade de matéria. Notemos que, à medida que mais dados são incluídos, esta relação tende às medições do Planck.

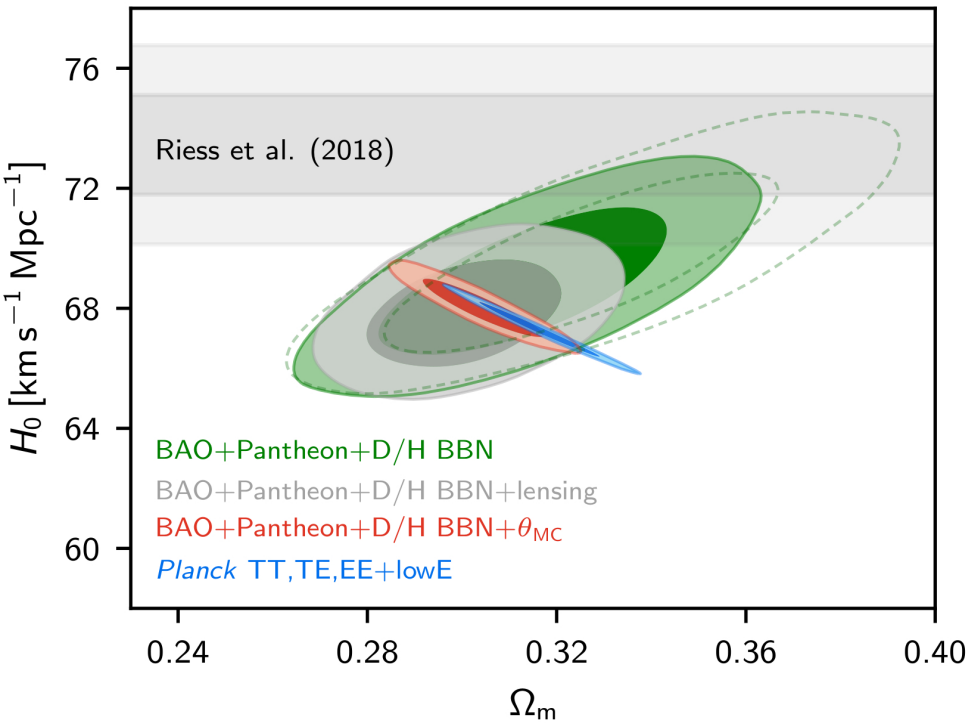

Figura 2.2: Vinculação entre o parâmetro de Hubble (H_0) e o parâmetro de densidade de matéria (Ω_m), usando como base o modelo ΛCDM e considerando os dados do Planck a respeito do espectro de potência da CMB. A intensidade das cores corresponde a 68% e 95% de nível de confiança (Aghanim et al. (2018)).

Na tabela 2.1, temos os rótulos utilizados em alguns dos gráficos dessa dissertação.

2.2 *Motivações para Inflação*

Conforme já mencionado, como motivação inicial à elaboração da inflação cosmólogica, tínhamos problemas que não eram justificados com a teoria do Big Bang, dentre os quais podemos citar os problemas da planura, do horizonte, e da abundância de partículas relíquias. Vamos abordá-los de forma sucinta nesta seção.

Tabela 2.1 - Rotulação dos dados utilizados nos gráficos 2.2, 3.1, 3.2, 3.3

Rotulação dos dados	Dados Utilizados
BAO	Oscilações bariônicas acústicas
D/H BBN	Abundância de deutério da Big Bang Nucleossíntese
EE	Espectro de potência da polarização da CMB (PLANCK)
lensing	Reconstrução do espectro de potência das lentes
lowE	Polarização específica HFI EE para pequenos valores de l
lowP	Dados da polarização do PLANCK na probabilidade para pequenos valores de l ($2 \leq l \leq 29$)
Pantheon	Dados de supernova da amostra Pantheon
TE	Espectro cruzado da temperatura com a polarização da CMB (PLANCK)
TT	Espectro de potência da temperatura da CMB (PLANCK)

1. **O problema da planura:** Analisando a equação (2.14), podemos concluir que se $\Omega_{tot} = 1$, sendo Ω_{tot} a contribuição de todos os materiais que conhecemos no universo, teremos que $k = 0$, que assim permanecerá por todo o tempo. Porém, se considerarmos um valor distinto da unidade para Ω_{tot}, o comportamento de k será completamente diferente. Das equações (2.9) e (2.11), podemos inferir que, para o caso de um universo dominado por matéria, teremos

$$a^2H^2 \propto t^{-\frac{2}{3}} \Rightarrow |\Omega_{tot}(t) - 1| \propto t^{\frac{2}{3}}, \tag{2.15}$$

enquanto que, se o universo for dominado por radiação,

$$a^2H^2 \propto t^{-1} \Rightarrow |\Omega_{tot}(t) - 1| \propto t\cdot \tag{2.16}$$

Ou seja, (2.15) e (2.16) nos revelam o fato de que o universo plano é uma situação instável. Qualquer desvio de $k = 0$ fará com que o universo fique cada vez mais curvado à medida que o tempo passe.

Para um critério mais quantitativo, e baseando-nos no vínculo $t_0 \approx 4 \times 10^{17}$ segundos (tempo atual),

- Na época do desacoplamento ($t \approx 10^{13}$ segundos), teríamos que

$$|\Omega_{tot}(t) - 1| \leq 10^{-5};$$

- Na época da nucleossíntese ($t \approx 1$ segundo), teríamos

$$|\Omega_{tot}(t) - 1| \leq 10^{-18}.$$

Assim, chegamos à conclusão de que o universo teria que ser cada vez mais plano à medida que nos aproximássemos de seu início.

Conforme veremos na seção 2.3, a diferença entre a energia potencial e a cinética define a forma do tensor energia momento, que, por sua vez, define a curvatura local de uma região do espaço. Sob um outro ponto de vista, caso quiséssemos garantir que o universo permaneça homogêneo até em épocas muito após o Big Bang, teríamos que exigir velocidades com valores muito precisos para o fluido inicial. Em outras palavras, se tais velocidades fossem muito pequenas, o universo recolapsaria em frações de segundo, enquanto que, se fossem muito grandes, ele expandiria tão rapidamente que logo ficaria vazio. Esse ajuste fino nas velocidades iniciais ficou conhecido como *problema da planura*

2. **O problema do horizonte:** Dada a consideração que o tempo é finito, a luz também só pode ter viajado uma distância finita. Assim, as trajetórias luminosas definem o cone de luz, e os eventos conectados causalmente estão no máximo sobre essas trajetórias.

   A radiação cósmica de fundo está hoje a uma temperatura de 2,725 K e, conforme já mencionamos, ela é praticamente homogênea e isotrópica. Isso nos confere uma característica de equilíbrio térmico, o que ocorreria se diferentes regiões tivessem interagido no passado. Se, por hipótese, essa interação ocorreu, isso teria acontecido em uma epóca anterior ao desacoplamento, pois, a partir desse momento, a radiação viajou ininterruptamente. Porém, ao considerarmos regiões opostas do nosso universo observável e a evolução padrão do Big Bang, constatamos que elas não teriam tempo de interagirem entre si, isto é, não há explicação física para tais regiões separadas causalmente apresentarem condições físicas tão similares. Tal problema é conhecido como *problema do horizonte*.

   Para uma melhor compreensão, façamos uma análise do horizonte comóvel, ou seja, da região na qual há "contato físico" (trocas de informações são possíveis). Partículas que se encontram nesse horizonte ("dentro dessa região") possuem contato causal, ou

sejam, tiveram tempo suficiente para estabelecerem um contato entre si, mesmo com a expansão. Podemos, de maneira análoga, falar de tempo conforme, cuja definição é dada por:

$$\tau \equiv \int_0^t \frac{dt'}{a(t')} = \int_0^a \frac{da'}{Ha'^2} = \int_0^a \frac{d(\ln a')}{a'H}, \tag{2.17}$$

onde chamamos $(aH)^{-1}$ de raio comóvel de Hubble.

Em particular, vamos analisar o comportamento do tempo conforme para os casos de um universo dominado por matéria ou por radiação. Usando (2.9), (2.10) e (2.17), teremos

$$\tau = \int_0^t \frac{dt'}{a(t')} \propto \begin{cases} t^{\frac{1}{3}}, & \text{matéria dominando} \\ t^{\frac{1}{2}}, & \text{radiação dominando} \end{cases}. \tag{2.18}$$

Podemos notar que, nas situações descritas acima, o horizonte comóvel cresce com o tempo, o que significa dizer que as regiões que estão entrando no horizonte hoje estavam muito afastadas na época do desacoplamento da CMB. Porém, o que temos de informação advinda da CMB é que o universo era homogêneo, na época do último espalhamento, em escalas que a priori estariam desconectadas causalmente.

3. **O problema da abundância de partículas relíquias:** Alguns tipos de partículas, dentre elas o monopolo magnético, são consequências naturais de modelos de grande unificação. Os monopolos magnéticos, por exemplo, são preditos extremamente massivos e possuem uma abundância muito alta nos estágios iniciais do universo. Assim, com o passar do tempo, tal partícula iria dominar sobre a radiação, e sabemos que, pela evolução padrão do universo, não é isso o que ocorre.

Vários questionamentos surgiram acerca de uma resolução natural desses problemas, até que Alan Guth propusesse a teoria inflacionária, em 1981, conforme veremos na seção 2.4.

2.3 *Campos Escalares*

Antes de tratarmos especificamente da teoria inflacionária, vamos abordar, nessa seção, a Relatividade Geral, a ação de Einstein-Hilbert e um acoplamento mínimo de um campo escalar com a gravitação, obtendo, por fim, o tensor energia-momento e as equações de movimento para tal campo.

A Relatividade Geral de Einstein (1916) generalizou o princípio da relatividade restrita para sistemas sujeitos à ação de um campo gravitacional.

"Nós iremos, portanto, assumir a completa equivalência física entre um campo gravitacional e a correspondente aceleração de um sistema de referência. Esta hipótese estende o princípio da relatividade especial para sistemas de referência uniformemente acelerados." *Albert Einstein.*

Nessa teoria, considera-se que matéria-energia deforma o espaço-tempo ao seu redor, fazendo com que a gravitação se torne um efeito geométrico. Os atuais modelos cosmológicos que correspondem a um universo em expansão (conforme experimentos) têm como base a relatividade geral.

A ação de Einstein-Hilbert, proposta por Hilbert em 1915, que obtém como equações de movimento as equações de Einstein, é dada por:

$$S = \frac{1}{2\kappa}\int R\sqrt{-g}\;\; d^4x \;, \tag{2.19}$$

onde κ é uma constante de normalização, R é o escalar de Riccci e g é o determinante do tensor métrico.

Suponhamos uma determinada teoria cuja ação seja dada pelo termo de Einstein-Hilbert mais um termo $\mathcal{L}_M$, que corresponde a um campo escalar minimamente acoplado, ou seja, o campo não está acoplado ao escalar de curvatura R (o caso contrário é dito não-mínimo, o que torna a constante gravitacional variável no tempo, gerando uma teoria da Relatividade Geral modificada). Em unidades naturais, a ação total para essa situação é dada por

$$S = \int d^4x \;\; \sqrt{-g} \;\; \left[\frac{1}{2}R + \mathcal{L}_M\right] = S_{EH} + S_M \;. \tag{2.20}$$

Fazendo uma variação em (2.20) com respeito à métrica $g^{\mu\nu}$,

$$\delta S = \int d^4x \;\; \left[\frac{1}{2}\sqrt{-g}\frac{\delta R}{\delta g^{\mu\nu}} + \frac{1}{2}R\frac{\delta\sqrt{-g}}{\delta g^{\mu\nu}} + \frac{\delta(\sqrt{-g}\;\mathcal{L}_M)}{\delta g^{\mu\nu}}\right]\delta g^{\mu\nu} \;, \tag{2.21}$$

e usando o princípio de extremização da ação, $\delta S = 0$, teremos

$$\int d^4x\;\sqrt{-g}\;g^{\mu\nu}\left[\frac{\delta R}{\delta g^{\mu\nu}} + \frac{R}{\sqrt{-g}}\frac{\delta\sqrt{-g}}{\delta g^{\mu\nu}}\right] = \int d^4x\;\sqrt{-g}\;g^{\mu\nu}\left[\frac{-2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta(\sqrt{-g}\;\mathcal{L}_M)}{\delta g^{\mu\nu}}\right] \;, \tag{2.22}$$

onde identificamos,

$$G_{\mu\nu} = \frac{\partial R}{\partial g^{\mu\nu}} + \frac{R}{\sqrt{-g}}\frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial g^{\mu\nu}} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\;R \;, \tag{2.23}$$

$$T_{\mu\nu} = \frac{-2}{\sqrt{-g}} \frac{\partial(\sqrt{-g}\ \mathcal{L}_M)}{\partial g^{\mu\nu}}, \tag{2.24}$$

conforme (2.2).

Consideremos agora a lagrangeana de matéria de um campo escalar, tal que

$$\mathcal{L}_M = -\frac{1}{2} g^{\mu\nu}\ \partial_\mu\phi\ \partial_\nu\phi - V(\phi)\ . \tag{2.25}$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} &= \frac{-2}{\sqrt{-g}}\left[\frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial g^{\mu\nu}}\mathcal{L}_M + \frac{\partial\mathcal{L}_M}{\partial g^{\mu\nu}}\sqrt{-g}\right] = \frac{-2}{\sqrt{-g}}\left[-\frac{1}{2\sqrt{-g}}\frac{\partial g}{\partial g^{\mu\nu}}\mathcal{L}_M + \frac{\partial\mathcal{L}_M}{\partial g^{\mu\nu}}\sqrt{-g}\right] \\ &= -\left(\frac{1}{g}\frac{\partial g}{\partial g^{\mu\nu}}\mathcal{L}_M + 2\frac{\partial\mathcal{L}_M}{\partial g^{\mu\nu}}\right) = -\left[\frac{1}{g}(-g)g^{\mu\nu}\mathcal{L}_M + 2\frac{\partial\mathcal{L}_M}{\partial g^{\mu\nu}}\right] = g_{\mu\nu}\mathcal{L}_M - 2\frac{\partial\mathcal{L}_M}{\partial g^{\mu\nu}} \\ &= -\frac{1}{2}g_{\mu\nu}g^{\alpha\beta}\ \partial_\alpha\phi\ \partial_\beta\phi - g_{\mu\nu}V(\phi) + \frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial g^{\mu\nu}}\partial_\alpha\phi\ \partial_\beta\phi \\ &= \partial_\mu\phi\ \partial_\nu\phi - g_{\mu\nu}\left(\frac{1}{2}\partial^\alpha\phi\ \partial_\alpha\phi + V(\phi)\right). \end{aligned} \tag{2.26}$$

Considerando o campo ϕ homogêneo, ou seja, $\phi(t,\vec{x}) = \phi(t)$, teremos as seguintes componentes para o tensor energia-momento:

$$T_{00} = \partial_0\phi\ \partial_0\phi - g_{00}\left[\frac{1}{2}\partial^0\phi\ \partial_0\phi + V(\phi)\right] = \dot{\phi}^2 - \left[\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi)\right] = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi) \equiv \rho_\phi, \tag{2.27}$$

$$T_{ii} = -g_{ii}\left[\frac{1}{2}\partial^0\phi\ \partial_0\phi + V(\phi)\right] = -\left[\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi)\right] = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi) \equiv p_\phi \tag{2.28}$$

e

$$T_{ij} = 0, \qquad i \neq j. \tag{2.29}$$

Portanto, consideramos T_{00} como sendo a densidade de energia do campo (ρ) e as componentes T_{ii} como a pressão exercida pelo campo (p), conforme (2.3).

Analisando as equações de movimento para a Lagrangeana (2.25), sendo a métrica do tipo (2.1), teremos

$$\partial_\mu\left[\frac{\partial\left(\sqrt{-g}\mathcal{L}_M\right)}{\partial\left(\partial_\mu\phi\right)}\right] - \frac{\partial\left(\sqrt{-g}\mathcal{L}_M\right)}{\partial\phi} = 0, \tag{2.30}$$

e como (2.1) não depende do campo nem de suas derivadas,

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu\left[\sqrt{-g}\frac{\partial\mathcal{L}_M}{\partial\left(\partial_\mu\phi\right)}\right] - \frac{\partial\mathcal{L}_M}{\partial\phi} = 0\ . \tag{2.31}$$

Logo,

$$\frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial \phi} = -\frac{\partial V}{\partial \phi} \tag{2.32}$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial\left(\partial_\mu \phi\right)} &= -\frac{1}{2}\, g^{\alpha\beta}\, \frac{\partial\left(\partial_\alpha \phi \partial_\beta \phi\right)}{\partial\left(\partial_\mu \phi\right)} = -\frac{1}{2}\, g^{\alpha\beta}\left(\delta_\alpha^\mu\, \partial_\beta \phi + \delta_\beta^\mu\, \partial_\alpha \phi\right) \\ &= -\frac{1}{2}\left(\delta^{\beta\mu}\, \partial_\beta \phi + \delta^{\alpha\mu}\, \partial_\alpha \phi\right) = -\partial_\mu \phi \cdot \end{aligned} \tag{2.33}$$

Usando (2.32) e (2.33), (2.31) toma a seguinte forma:

$$-\frac{1}{\sqrt{-g}}\left(\partial_\mu \sqrt{-g}\right) \partial^\mu \phi - \partial_\mu\left(\partial^\mu \phi\right) + \frac{\partial V}{\partial \phi} = 0 \cdot \tag{2.34}$$

Como consideramos a homogeneidade do espaço tanto em relação ao campo como em relação a métrica, (2.34) se reduzirá a

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\sqrt{-g}}\, \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial(-t)}\, \partial^0 \phi \;-\; \partial_0\left(\partial^0 \phi\right) \;+\; \frac{\partial V}{\partial \phi} = 0, \\ -\frac{1}{\sqrt{-g}}\, \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial t}\, \partial_0 \phi \;+\; \partial_0\left(\partial_0 \phi\right) \;+\; \frac{\partial V}{\partial \phi} = 0, \\ \ddot{\phi} \;-\; \frac{1}{\sqrt{-g}}\, \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial t}\, \dot{\phi} \;+\; \frac{\partial V}{\partial \phi} = 0 \cdot \end{aligned} \tag{2.35}$$

E, como $g = -\frac{1}{a^6}$, teremos que

$$\frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial t} = \frac{\partial\left(a^{-3}\right)}{\partial t} = -3\, a^{-4}\, \dot{a} = -3\, a^{-3} H \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial t} = a^3\, \left(-3\, a^{-3} H\right) = -3H,$$

chegamos assim à equação de Klein-Gordon, expressa abaixo:

$$\ddot{\phi} \;+ 3\, H\, \dot{\phi} \;+\; \frac{\partial V}{\partial \phi} = 0 \cdot \tag{2.36}$$

Notemos, com essa equação, que a dinâmica do campo escalar é diretamente afetada quando consideramos a expansão do universo, e o segundo termo funciona como um termo de fricção.

Essa análise dos campos escalares será importante a partir da seção 2.4.1, na qual aplicaremos os resultados aqui obtidos.

2.4 *Inflação*

Na seção 2.2, discutimos acerca dos problemas não solucionados pela Teoria do Big Bang. Vamos agora procurar uma maneira de resolvê-los. Notemos que, ao considerarmos

o raio comóvel de Hubble no universo primordial muito maior do que é agora, a contribuição principal de τ deve vir daquele período. Portanto, como o parâmetro de Hubble é tomado basicamente como constante, para o raio comóvel decrescer de uma maneira tal que a maior contribuição venha do período primordial, teríamos que considerar que, nessa época, houve uma expansão extremamente acelerada do fator de escala. É a essa aceleração que damos o nome de ***inflação***.

A inflação foi desenvolvida inicialmente principalmente por Alan Guth, Paul Steinhardt, Andrei Linde, Stephen Hawking e A. A. Starobinsky.

Vamos analisar a equação (2.5). Como queremos uma expansão acelerada, é necessário que $\ddot{a} > 0$, o que nos leva a concluir que

$$p < -\frac{\rho}{3}, \tag{2.37}$$

e que o material dominante nessa época do universo possui uma pressão negativa. O exemplo clássico é supormos que o universo possui uma constante cosmológica Λ, que domina durante a expansão inflacionária. Portanto, (2.4) se resume a

$$H^2 = \frac{\Lambda}{3} \;\Rightarrow\; \dot{a} = \sqrt{\frac{\Lambda}{3}}\, a \;\Rightarrow\; \int \frac{1}{\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}\, a}\, da = \int dt \;\Rightarrow\; \frac{1}{\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}} \ln a = t \;\Rightarrow\; a = \exp\left(\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}\, t\right) \tag{2.38}$$

ou seja, considerando a situação descrita acima, a taxa de expansão é da forma exponencial.

Supõe-se que a inflação tenha-se iniciado por volta de 10^{-35} segundos após o início do universo. Podemos então nos questionar como esse tipo de expansão resolveria os problemas mencionados na seção 2.2.

1. **O problema da planura:** De (2.38), temos

$$\dot{a} = \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} \exp\left(\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}\, t\right) \Rightarrow a^2 H^2 = \dot{a}^2 = \frac{\Lambda}{3} \exp\left(\sqrt{\frac{4\Lambda}{3}}\, t\right) \Rightarrow$$

$$|\Omega_{tot}(t) - 1| \propto \frac{1}{a^2 H^2} = \exp\left(-\sqrt{\frac{4\Lambda}{3}}\, t\right), \tag{2.39}$$

   donde concluímos que, de fato, $\Omega_{tot} \to 1$, o que implica que $k \to 0$. Em outras palavras, $\Omega = 1$ é um atrator durante a inflação.

2. **O problema do horizonte:** Consideremos uma região pequena o suficiente para que estivesse em equilíbrio térmico antes da inflação. Como vimos, durante essa

época, temos um aumento extraordinário no tamanho de uma determinada região do universo, mas sua escala característica fixa é mantida fixa. Assim, a radiação que vem de lados opostos do céu realmente estaria na mesma temperatura. Observemos os esquemas na Figura 2.3.

3. **Problema da abundância de partículas relíquias:** Como a expansão durante a inflação é extremamente acelerada, as densidades de tais partículas relíquias diminuem exponencialmente, fazendo com que suas abundâncias também diminuam para níveis indetectáveis, o que justificaria sua não observação atualmente.

Um modelo inflacionário consistente deve conter uma hipótese razoável para a origem da constante cosmológica e uma maneira natural desse período ter chegado ao fim. Uma ideia crucial está no fato de podermos considerar transições de fase, o que corresponderia a uma mudança brusca nas propriedades de um dado sistema físico à medida que ele esfriasse ou esquentasse. No nosso caso, esse sistema seria o universo e essas transições seriam controladas por um determinado tipo de material que, confome veremos a seguir em 2.4.1, consideraremos como sendo campos escalares.

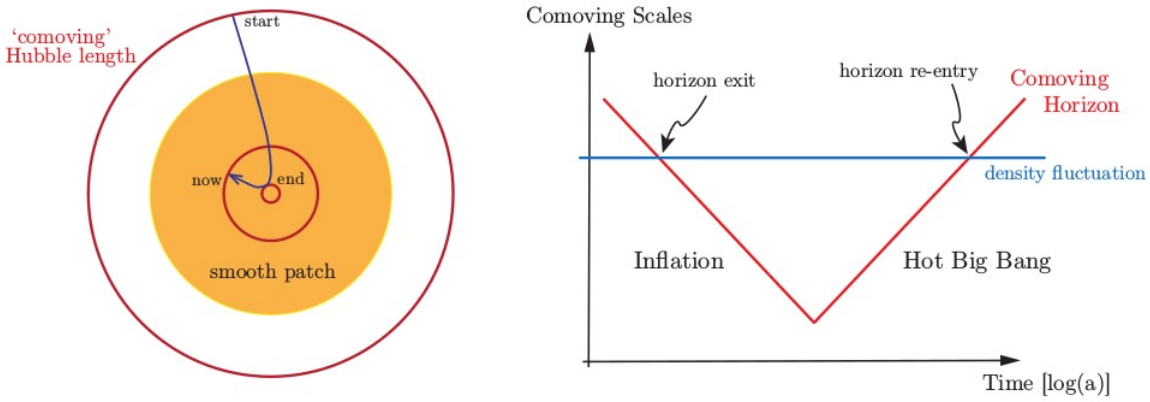

Figura 2.3: Na figura da esquerda, vemos a evolução do raio comóvel de Hubble, $(aH)^{-1}$, do início da inflação até os dias atuais. É como se ampliássemos bastante cada trecho do universo. Na figura da direita, temos a solução para o problema do horizonte. Escalas que antes tinham um contato causal se distanciam o suficiente e perdem tal contato durante a época inflacionária. Com o fim da inflação, tais escalas voltam eventualmente a entrar em nosso horizonte e a serem passíveis de observação. Porém, retornam maiores que o raio de Hubble, fazendo com que achemos que nunca tiveram contato causal (Baumann (2011)).

2.4.1 Campo do Inflaton

Conforme vimos, as equações de Friedmann determinam a expansão do espaço-tempo levando em consideração o princípio cosmológico. Analisando (2.5) mais criteriosamente, para a condição de inflação, teríamos um conteúdo de matéria dominante com pressão negativa. Porém, nem a matéria usual nem a radiação satisfazem a condição $\rho + 3p > 0$. Assim, precisamos fazer alguma modificação no modelo, como, por exemplo, adicionar um campo extra ou uma constante cosmológica, a fim de entrarmos em acordo com as observações cosmológicas. Podemos reescrever (2.5) como

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \dot{H} + H^2 = H^2(1-\epsilon), \qquad \text{com} \quad \epsilon \equiv -\frac{\dot{H}}{H^2}, \tag{2.40}$$

onde ϵ é chamado de parâmetro de slow-roll relacionado à evolução do parâmetro de Hubble. Nesse caso, a condição $\ddot{a} > 0$ corresponderia a $\epsilon < 1$.

Consideremos que a matéria que dominava na época da inflação era um campo escalar, o qual chamaremos de inflaton (se considerarmos apenas um campo, chamamos esse tipo de inflação de single field inflation). Os campos escalares são o tipo de matéria mais simples que podemos conjecturar, e sua existência foi postulada décadas atrás. Dentre suas aplicações na física, podemos citar:

- Descrição de píons neutros (estados ligados de quarks e antiquarks);
- Bóson de Higgs (campo escalar responsável pela quebra de simetria espontânea eletrofraca e pela geração de massa de partículas elementares);
- Supersimetria (extensão do modelo padrão que postula a existência de um parceiro escalar para todos os quarks e léptons);
- Teorias com dimensões extras compactas (física além do modelo padrão, na qual o tamanho e forma das dimensões extras são descritas pela dinâmica de campos escalares).

Utilizando (2.3),(2.4), (2.5), (2.27) e (2.28), chegamos nas seguintes equações de Friedman para um campo escalar:

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\left[\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi)\right] \tag{2.41}$$

e

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{8\pi G}{3}\left[\dot{\phi}^2 - V(\phi)\right]. \tag{2.42}$$

Portanto, para que haja o período de inflação nessa situação, teremos que tomar a energia potencial dominando sobre a energia cinética. Por simplicidade, vamos considerar que a massa reduzida de Planck é igual a unidade $\left(M_{Pl} = (8\pi G)^{-\frac{1}{2}} = 1\right)$.

Analisando as equações (2.40), (2.41) e (2.42), podemos reescrever o parâmetro de slow-roll como sendo

$$\epsilon = \frac{1}{2}\frac{\dot{\phi}^2}{H^2}. \tag{2.43}$$

O caso em que $p_\phi \to -\rho_\phi$, conhecido como limite de de Sitter (conforme discutiremos no apêndice A), corresponde a $\epsilon \to 0$, o que resulta em $\dot{\phi}^2 \ll V(\phi)$. Tal situação é conhecida como condição de slow-roll e nela praticamente não vemos uma variação do potencial com o campo. Além disso, tal expansão precisa ter ocorrido durante um período de tempo suficiente para resolver os problemas mencionados anteriormente. Assim, definimos um segundo parâmetro de slow-roll, adimensional, relacionado com a aceleração,

$$\eta \equiv -\frac{\ddot{\phi}}{H\dot{\phi}}, \tag{2.44}$$

de tal modo que, se $|\eta| \ll 1$, teremos que $|\ddot{\phi}| \ll |H\dot{\phi}|$, e a equação de Klein-Gordon, (2.36), se reduz a

$$3H\dot{\phi} \approx -V_\phi, \tag{2.45}$$

onde V_ϕ é a primeira derivada do potencial em relação ao campo. Notemos que tal aproximação é justificada pelo fato de que o termo de fricção tem que dominar sobre $\ddot{\phi}$, caso contrário, a condição de slow-roll $\left(\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 \ll V\right)$ seria rapidamente quebrada. Além disso, também desprezamos $|\ddot{\phi}|$ em relação a V_ϕ, com a mesma justificativa anterior (basta derivar a condição de slow-roll em relação ao tempo).

Uma outra maneira de conseguirmos analisar tal condição é relacionando o parâmetro de densidade com a pressão relacionados ao campo ϕ. Tal relação é conhecida como equação de estado, ω.

$$\omega = \frac{p_\phi}{\rho_\phi} = \frac{\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi)}{\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi)} \approx -1 \Rightarrow V(\phi) \gg \frac{1}{2}\dot{\phi}^2\,. \tag{2.46}$$

A aproximação utilizada deve-se ao fato de a equação de estado que conhecemos para uma dominação completa por um campo escalar ser de $\omega = -1$.

Agora podemos escrever os parâmetros de slow-roll relacionados ao potencial. Elevando (2.45) ao quadrado, dividindo ambos os lados por H^4, desconsiderando o fator multiplicativo e comparando com (2.43), chegaremos a

$$\epsilon_\phi \equiv \frac{M_{Pl}^2}{2}\left(\frac{V_\phi}{V}\right)^2 . \tag{2.47}$$

O outro parâmetro é encontrado derivando (2.45) em relação ao tempo e dividindo ambos os membros por $3H^2\dot{\phi}$:

$$\eta_\phi \equiv M_{Pl}^2\frac{V_{\phi\phi}}{V} , \tag{2.48}$$

onde $V_{\phi\phi}$ é a segunda derivada do potencial em relação ao campo. Com isso, chegamos a uma expressão que relaciona os parâmetros de slow-roll,

$$\eta + \epsilon = \eta_\phi \cdot \tag{2.49}$$

A inflação acaba quando há violação das condições de slow-roll, ou seja, $\epsilon(\phi_f) \equiv 1 \Rightarrow \epsilon_\phi(\phi_f) \approx 1$.

Podemos definir uma nova quantidade, N, tal que

$$dN \equiv H dt = \frac{\dot{a}}{a}dt = \frac{1}{a}\frac{da}{dt}dt = d\ln a \quad \Rightarrow \quad N_{tot} = \ln\left(\frac{a_f}{a_i}\right), \tag{2.50}$$

onde a_i e a_f são os fatores de escala no início e no final da inflação, respectivamente. A quantidade N, conhecido como número de e-folds, é uma medida da expansão do universo durante a época da inflação, ou seja, ela mensura o quanto o universo se desdobrou na era inflacionária. Analisando de uma outra forma, temos

$$N = \int_t^{t_f} H\ dt = \int_{\phi_f}^{\phi}\frac{H}{\dot{\phi}}d\phi \approx \int_{\phi_f}^{\phi}\frac{1}{M_{Pl}}\frac{1}{\sqrt{2\epsilon_\phi}}d\phi, \tag{2.51}$$

e, dessa maneira, conseguimos relacionar o número de e-folds com o parâmetro de slow-roll.

As flutuações observadas na CMB são criadas quando $N_{CMB} \approx 60$ e-folds antes do final da inflação (o valor preciso depende dos detalhes do reheating, que comentaremos mais adiante em 4.1, e da história térmica pós-inflacionária do universo). Observe a Figura 2.4.

Vamos agora analisar alguns dos primeiros tipos de potenciais estudados durante a elaboração da teoria inflacionária. Os modelos de inflação são classificados segundo a forma de seu potencial.

- Potencial do tipo ϕ^2 : O modelo mais simples seria considerar um potencial de campo escalar apenas com termo de massa, ou seja, $V(\phi) = \frac{1}{2}m^2\phi^2$. Assim, $\epsilon_\phi = 2\left(\frac{M_{Pl}}{\phi}\right)^2$ e,

impondo a condição para o término da inflação, temos que $\phi_f \approx \sqrt{2}M_{Pl}$, ou seja, no potencial quadrático, estamos tratando de campos numa escala superior a de Planck. Portanto,

$$N(\phi) = \int_{\sqrt{2}M_{Pl}}^{\phi} \frac{\phi}{2M_{Pl}^2} d\phi = \frac{\phi^2}{4M_{Pl}^2} - \frac{1}{2},$$

e as flutuações da CMB são criadas quando $\phi_{CMB} \sim 15M_{Pl}$.

Usando (2.45),

$$\dot{\phi} \propto -m \quad \Rightarrow \quad \phi = \phi_f + \alpha\, m(t_f - t)\ ,$$

com α sendo uma constante de proporcionalidade positiva. Logo, temos que o campo decresce linearmente com o tempo.

- Potencial do tipo ϕ^4 : Vamos agora considerar uma autointeração do tipo quártica do campo, ou seja, $V(\phi) = \frac{\lambda}{4}\phi^4$. Assim, $\epsilon_\phi = 8\left(\frac{M_{Pl}}{\phi}\right)^2$ e impondo a condição para o término da inflação, decorre que $\phi_f \approx \sqrt{8}M_{Pl}$. Portanto,

$$N(\phi) = \int_{\sqrt{8}M_{Pl}}^{\phi} \frac{\phi}{4M_{Pl}^2} d\phi = \frac{\phi^2}{8M_{Pl}^2} - 1,$$

e as flutuações da CMB são criadas quando $\phi \sim 22M_{Pl}$.

Usando (2.45),

$$\dot{\phi} \propto -\sqrt{\lambda}\, M_{Pl}\, \phi \quad \Rightarrow \quad \frac{d\phi}{\phi} = -\beta\, \sqrt{\lambda}\, M_{Pl} dt \quad \Rightarrow \quad \phi = \phi_f\, exp[\beta\, \sqrt{\lambda}\, M_{Pl}\, (t_f - t)],$$

com β sendo uma constante de proporcionalidade positiva. Dessa forma, o campo decresce exponencialmente à medida que o tempo passa.

- Potencial para Inflação Híbrida: Modelos híbridos são modelos que consideram dois ou mais campos acoplados e cujo potencial é da forma

$$V(\phi, \chi) = f(\phi) + \frac{g^2}{2}\phi^2\chi^2 + \frac{\lambda^2}{4}\left(\chi^2 - v^2\right)^2,$$

onde ϕ é o campo do inflaton, χ é um campo auxiliar e $f(\phi)$ é uma função genérica dependente do modelo e que em geral inclui contribuições de efeitos quânticos.

A ideia desse tipo de potencial está no fato χ possuir um potencial tipo Higgs, cujos pontos que extremizam V, em relação a χ, dependem de ϕ $\left(\chi = 0 \text{ e } \chi = \pm\sqrt{v^2 - \frac{g^2}{\lambda^2}\phi^2}\right)$. Vamos analisar a solução $\chi = 0$. A massa efetiva do campo nesse ponto é

$$m_\chi^2(\chi = 0) = \frac{\partial^2 V(\phi, \chi)}{\partial \chi^2}(\phi, 0) = g^2\phi^2 - \lambda^2 v^2,$$

e, portanto, se $g\phi > \lambda v$, ϕ é um campo pesado e χ está em um mínimo metaestável. O potencial será $V(\phi, 0) = f(\phi) + \frac{\lambda^2}{4}v^4$. Se $f(\phi)$ faz com que o inflaton decresça, o sistema irá eventualmente chegar em um estágio no qual o campo auxiliar terá massa efetiva nula, e esse ponto se tornará um máximo instável. Isso desencadeia uma transição de fase que leva ao fim da inflação, com χ indo para o seu mínimo verdadeiro em $\chi = v$.

Na Figura 3.3, veremos que alguns desses modelos já estão descartados com os dados atuais que obtemos da radiação cósmica de fundo.

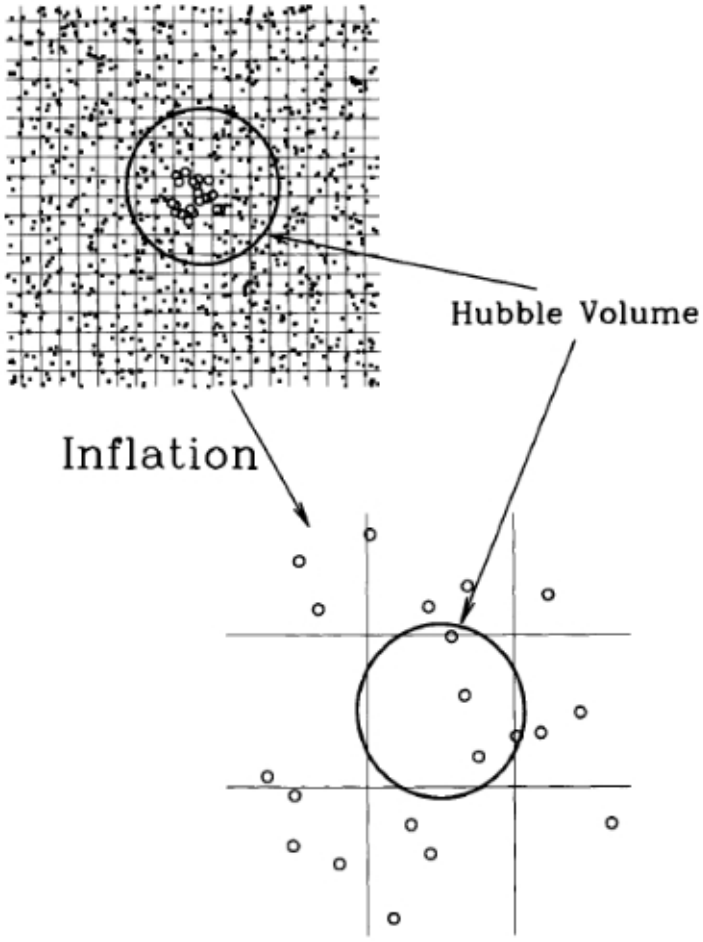

Figura 2.4: Partículas em um volume de Hubble antes e após a inflação. O raio de Hubble que antes ocupava várias células no grid, encolhe após a inflação e passa a ocupar apenas uma célula. Nessa imagem temos um crescimento do fator de escala da ordem de 7 (Dodelson (2003)).

Dessa maneira, concluímos, nesse capítulo, nossa síntese a respeito da cosmologia moderna e da inflação. Discutiremos no próximo capítulo como podemos vincular as teorias inflacionárias com os dados observacionais advindos da CMB.

Capítulo 3

Perturbações relacionadas às anisotropias da CMB

Vamos nos ater, nesse momento, em tentar explicar a estrutura atual do universo. Se conseguíssemos voltar à época em que tivemos a superfície de último espalhamento, observaríamos que esta era da ordem de 1° (um grau). Dessa maneira, através de informações que conseguimos obter via dados da CMB, podemos inferir que existiam inomogeneidades na densidade do universo primordial, uma vez que as anisotropias na temperatura da CMB superam a escala de um grau. Em outras palavras, ou essas inomogeneidades já existiam antes do desacoplamento da radiação cósmica de fundo, ou estaríamos violando o príncipio da causalidade (levando em consideração os dados que temos da CMB).

Precisamos buscar explicar como essas inomogeneidades foram inicialmente produzidas e como se desenvolveram a ponto de gerar o universo como o conhecemos atualmente. Podemos encarar tais pertubações como "sementes" que se desenvolveram à medida que o tempo passasse, visto que essas "sementes" tornam-se regiões nas quais a matéria se aglutina. Na época em que temos o universo dominado por máteria, tais inomogeneidades se desnvolvem via instabilidade de Jeans.

3.1 Perturbações do Campo

No âmbito que estamos trabalhando, uma proposta seria considerar flutuações quânticas durante a época inflacionária. Uma vez que tais pertubações seriam "lançadas" para escalas angulares superiores a um grau, elas seriam "esticadas" a ponto de tornarem-se passíveis de observação.

Conforme já discutido, o inflaton é a componente dominante da densidade de energia do universo primordial. Sendo assim, sua evolução controla o final da inflação. Nesse sentido,

o campo representa um papel de um relógio local que mede o quanto de inflação ainda resta. Como relógios microscópicos são objetos quânticos - cada um evolui a uma taxa diferente do outro -, o que vai levar pontos distintos do espaço-tempo a sair da inflação em épocas diferentes e a produzir uma futura diferença nas densidades locais, conforme observamos atualmente. Tais flutuações quânticas que consideraremos no inflaton serão da forma

$$\phi = \overline{\phi} + \delta\phi, \tag{3.1}$$

onde $\overline{\phi}$ é a parte homogênea (irá satisfazer a equação de movimento clássica) e $\delta\phi$ são suas respectivas flutuações.

Expandindo a derivada do potencial em torno de $\overline{\phi}$, teremos

$$\begin{aligned} V'(\phi) &= V'(\overline{\phi}+\delta\phi) = V'(\overline{\phi}) + V''(\overline{\phi})[\overline{\phi}+\delta\phi-\overline{\phi}] \\ &= V'(\overline{\phi}) + V''(\overline{\phi})\delta\phi \cdot \end{aligned} \tag{3.2}$$

Assim, usando as equações (2.36), (3.1) e (3.2), chegamos à equação que rege as flutuações quânticas do inflaton

$$\delta\ddot{\phi} - \frac{1}{a^2}\nabla^2(\delta\phi) + 3H\delta\dot{\phi} + V''(\overline{\phi})\delta\phi = 0, \tag{3.3}$$

e podemos desprezar o último termo devido às condições de slow-roll. Colocando em termos do tempo conforme, ou seja, fazendo a mudança de variável de t para τ, podemos reescrever a expressão (3.3) como

$$\delta\phi'' + 2\frac{a'}{a}\delta\phi' - \nabla^2\delta\phi = 0 \cdot \tag{3.4}$$

em que agora, $'$ representa a derivada em relação ao tempo conforme.

Ainda podemos expandir tais flutuações em seus modos de Fourier ($\delta\phi \propto \int \delta\phi_k \, e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \, d^3k$), obtendo-se

$$\delta\phi_k'' + 2\frac{a'}{a}\delta\phi_k' + k^2\delta\phi_k = 0, \tag{3.5}$$

e, dessa forma percebemos que cada modo satisfaz uma equação desacoplada. Reescalonando-os pelo fator de escala, $\delta\chi_k(\tau) = a(t)\ \delta\phi_k(\tau)$ - com $\delta\chi_k$ sendo as flutuações conformes do campo do inflaton -, e usando a expressão (3.5), chegaremos a

$$\delta\chi_k'' + \left(k^2 - \frac{2}{\tau^2}\right)\delta\chi_k = 0, \tag{3.6}$$

uma estrutura muito conhecida de oscilador harmônico com frequência dependente do tempo.

Podemos agora estudar cada modo com mais detalhes. Seus comprimentos de onda serão esticados e a partir de um determinado momento se tornarão maiores que o horizonte de Hubble ($\lambda_{fis} \gg H^{-1}$). Assim, analisando a equação (3.6), teremos que

- se $|k\tau| \gg 1$: o modo se encontrará dentro do horizonte,
- se $|k\tau| \ll 1$: o modo se encontrará fora do horizonte,
- se $|k\tau| \simeq 1$: o modo estará cruzando o horizonte.

Dessa maneira, percebemos que o tempo de saída do horizonte depende apenas do módulo do seu número de onda - todos os modos que possuam o mesmo comprimento de onda sairão em fase.

Uma maneira de resolver a equação (3.6) é perceber que, dentro do horizonte, os modos obedecem a uma equação de oscilador harmônico simples. Assim, podemos tomar como ansatz a solução do tipo $\delta\chi_k = f_k(\tau)e^{\pm ikr}$. Resolvendo (3.6) com esse ansatz, teremos

$$\delta\chi_k^{\pm} \propto \left(1 \mp \frac{i}{k\tau}\right) e^{\pm ikr} \cdot \tag{3.7}$$

As flutuações do inflaton serão escritas como

$$\delta\hat{\phi}(\mathbf{x},\tau) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2k}}\frac{1}{a}\left(\hat{a}_k\delta\chi_k^{+}(\tau)e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + h.c\right), \tag{3.8}$$

com $\left(\delta\chi_k^{+}\right)^* = \delta\chi_k^{-}$. O valor esperado no vácuo das flutuações quadráticas do campo é dado por

$$\left\langle 0|\delta\hat{\phi}^2|0\right\rangle = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\frac{H^2\tau^2}{2k}\left|\delta\chi_k^{+}\right|^2 \cdot \tag{3.9}$$

Para os modos dentro do horizonte, $\left|\delta\chi_k^{+}\right| \approx 1$, enquanto que, para os modos fora do horizonte, $\left|\delta\chi_k^{+}\right| \approx \frac{1}{k\tau} \gg 1$ (considerando este limite). Logo, a contribuição dominante para a expressão (3.9) vem dos modos que estão fora do horizonte. Logo,

$$\begin{aligned}
\left\langle 0|\delta\hat{\phi}^2|0\right\rangle &= \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\frac{H^2}{2k^3} = \frac{1}{2}\frac{H^2}{(2\pi)^3}\int d^3\mathbf{k}\frac{1}{k^3} \\
&= \frac{1}{2}\frac{H^2}{(2\pi)^3}\int dk\ 4\pi k^2\frac{1}{k^3} = \left(\frac{H}{2\pi}\right)^2\int dk\ \frac{1}{k} \\
&= \left(\frac{H}{2\pi}\right)^2 ln\left(\frac{k_{max}}{k_{min}}\right) \equiv \int \frac{dk}{k}\mathcal{P}_\phi, \qquad \mathcal{P}_\phi \equiv \left(\frac{H}{2\pi}\right)^2 \cdot
\end{aligned} \tag{3.10}$$

A quantidade $\mathcal{P}_\phi$ é definida como o *espectro de potência das perturbações do inflaton*. Conforme já sabemos, o espectro de potência de qualquer sinal é uma média estatística feita em termos de seu conteúdo de frequência. A inflação prediz um espectro que é invariante de escala.

O parâmetro $\mathcal{P}_\phi$ é o mais relevante dessa seção. Iremos usá-lo mais adiante quando estivermos tratando de perturbação comóvel na curvatura. Vamos agora discutir sobre as perturbações cosmológicas.

3.2 Perturbações Cosmológicas

Consideremos a seguinte perturbação na métrica

$$g_{\mu\nu} = g^{(0)}_{\mu\nu}(t) + \delta g_{\mu\nu}(\mathbf{x}, t), \tag{3.11}$$

onde $g^{(0)}_{\mu\nu}$ é a métrica de FRW não perturbada, da qual estávamos tratando até o momento, e $\delta g_{\mu\nu}\left(\ll g^{(0)}_{\mu\nu}\right)$ uma perturbação, que pode ser do tipo escalar, vetorial ou tensorial.

Com isso, podemos escrever a perturbação relacionada ao tensor energia momento,

$$\begin{aligned}\delta T_{\mu\nu} &= \partial_\mu(\delta\phi)\ \partial_\nu\phi + \partial_\mu\phi\ \partial_\nu(\delta\phi) - (\delta g_{\mu\nu})\left[\frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\ \partial_\alpha\phi\ \partial_\beta\phi + V(\phi)\right] \\ &- g_{\mu\nu}\left[\frac{1}{2}\left(\delta g^{\alpha\beta}\right)\partial_\alpha\phi\ \partial_\beta\phi + g^{\alpha\beta}\partial_\alpha(\delta\phi)\ \partial_\beta\phi + g^{\alpha\beta}\partial_\alpha\phi\ \partial_\beta(\delta\phi) + V(\delta\phi)\right],\end{aligned} \tag{3.12}$$

e, usando as equações de Einstein, podemos calcular as perturbações induzidas na geometria pelas "sementes".

Uma maneira um pouco mais geral de escrever a métrica perturbada sem que ela deixe de ser simétrica é

$$\begin{aligned}ds^2 &= g_{\alpha\beta}\ dx^\alpha dx^\beta = a^2\{-(1+2\Phi)d\tau^2 + 2\partial_i B d\tau dx^i + [(1-2\psi)\delta_{ij} \\ &+ D_{ij}E]\ dx_i dx_j\},\end{aligned} \tag{3.13}$$

com Φ, B, ψ e E sendo quantidades escalares, $\partial_i B$ uma quantidade vetorial e $D_{ij}E$ uma quantidade tensorial.

É interessante pensarmos um pouco a respeito da perturbação de uma determinada quantidade. Ela é dada ao considerarmos o valor de tal quantidade em pontos correspondentes de espaços distintos. Em nosso caso, conforme já mencionado, o espaço de referência

é o de FRW, e o que estamos analisando é o espaço físico em si, no qual encontramos discrepâncias em relação ao de FRW. Como os pontos encontram-se em geometrias diferentes, precisamos determinar uma relação unívoca entre os dois espaços - feita mediante a fixação do gauge. Mudar tal correspondência entre os pontos significa fazer uma transformação de gauge. Assim, relembrando a métrica como escrevemos em (3.13), se escolhermos

$$x^\mu \to \tilde{x}^\mu = x^\mu + \delta x^\mu, \qquad \begin{cases} \delta x^0 = \xi^0(x^\mu) \\ \delta x^i = \partial^i \beta(x^\mu) + v^i(x^\mu), \quad \partial_i v^i = 0 \end{cases} , \tag{3.14}$$

obteremos uma mudança nas quantidades escalares da equação (3.13),

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi} &= \Phi + \xi^{0\prime} - \frac{a'}{a}\xi^0, \\ \tilde{B} &= B + \xi^0 + \beta', \\ \tilde{\psi} &= \psi - \frac{1}{3}\nabla^2\beta + \frac{a'}{a}\xi^0, \\ \tilde{E} &= E + 2\beta \cdot \end{aligned} \tag{3.15}$$

Dessa maneira, temos que tomar cuidado, pois uma mudança no sistema de coordenadas levaria a uma variação na perturbação de uma dada quantidade, fazendo com que ela pudesse assumir valores distintos ao mudarmos o gauge. Podemos resolver tal problema fixando um dado gauge e realizando todos os cálculos nele (o que não nos é muito conveniente, dado que usamos gauges específicos exatamente para facilitar a conta em determinada situação, o que em geral faz com que as contas fiquem mais complicadas em outras situações); ou então identificar as combinações que representam quantidades que são invariantes de gauge (o que é mais conveniente, e em geral nos fornece quantidades físicas). Vamos ficar, no momento, com a segunda opção.

A primeira quantidade que iremos analisar é a *perturbação na curvatura comóvel*. A curvatura espacial intrínseca em hipersuperfícies que possuam o tempo conforme constante com universo plano é dada por

$$R = \frac{4}{a^2}\nabla^2\psi \ , \tag{3.16}$$

onde ψ é a mesma perturbação na métrica que vemos em (3.13), usualmente chamada de perturbação na curvatura. Uma superfície que exibe curvatura extrínseca é aquela que, quando curvada, fica em uma dimensão maior (como exemplo, uma folha de papel que se transforma em um cilindro). A que exibe curvatura intrínseca, possui uma geometria dentro da superfície diferente da plana. Dessa forma, podemos, por construção, criar um

invariante que está relacionado com essa perturbação na curvatura, $\mathcal{R}$, dado por

$$\mathcal{R} = \psi + \mathcal{H}\frac{\delta\phi}{\phi'} = \psi + H\frac{\delta\phi}{\dot{\phi}} \ , \tag{3.17}$$

onde a primeira igualdade é a representação em relação ao tempo conforme.

A segunda quantidade é a *perturbação na curvatura em superfícies com densidade de energia uniforme*,

$$-\zeta = \psi + H\frac{\delta\rho}{\dot{\rho}} \ . \tag{3.18}$$

Notemos que essas duas quantidades são equivalentes durante a época inflacionária, visto que o campo do inflaton é a matéria dominante neste período.

Sem negligenciar as perturbações na métrica e usando a invariância de gauge, podemos mostrar que o espectro de potência para a perturbação comóvel na curvatura é dado por

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}} = \left(\frac{H}{\dot{\phi}}\right)^2 \mathcal{P}_{\phi}. \tag{3.19}$$

Em termos adimensionais,

$$\Delta^2_{\mathcal{R}} \equiv \frac{k^3}{2\pi^2}\mathcal{P}_{\mathcal{R}} = \left(\frac{H}{\dot{\phi}}\right)^2 \left(\frac{H}{2\pi}\right)^2 . \tag{3.20}$$

Essa quantidade é conhecida como *amplitude do espectro de potência da curvatura comóvel*. Foi mensurada pela primeira vez pelo COBE e sua medida atual é, conforme Aghanim et al. (2018),

$$\Delta^2_{\mathcal{R}} \approx 2,101 \times 10^{-9}. \tag{3.21}$$

Uma maneira de relacionar mais facilmente inflação com física de partículas é expressar (3.20) em função do conteúdo energético do universo. Destarte, usando (3.10), chegamos a

$$\frac{\delta\rho}{\rho} \sim \frac{\delta a}{a} \Rightarrow \frac{\delta\rho}{\rho} \sim H\delta t \Rightarrow \frac{\delta\rho}{\rho} \sim H\frac{\delta\phi}{\dot{\phi}} = \frac{H}{\dot{\phi}}\frac{H}{2\pi} = \frac{H^2}{2\pi\dot{\phi}} \ . \tag{3.22}$$

Logo,

$$\Delta^2_{\mathcal{R}} = \left(\frac{\delta\rho}{\rho}\right)^2 \ . \tag{3.23}$$

Usando as equações de slow-roll, podemos reescrever (3.20) como

$$\Delta^2_{\mathcal{R}} \simeq \frac{1}{24\pi^2}\frac{V(\phi)}{M^4_{Pl}}\frac{1}{\epsilon_\phi}|_{k=aH} \tag{3.24}$$

e, dessa forma, podemos restringir os parâmetros do potencial do inflaton.

Temos que levar em consideração que todas as quantidades são calculadas quando os modos vísiveis de Fourier relevantes atravessam o horizonte na época da inflação.

Podemos, nesse momento, fazer algumas observações no que diz respeito a essas perturbações cosmológicas e às ideias que tomamos como base para a inflação.

1. Quando consideramos o limite exato de de Sitter, $\epsilon_\phi \to 0$, perdemos o significado das perturbações na curvatura e na densidade (olhar equações (2.43), (3.22) e (3.24)).

2. Por outro lado, a invariância de escala exata só é obtida quando usamos o limite de de Sitter (observar (3.10)).

3. Conforme sabemos, o inflaton está em um regime de slow-roll. Sendo assim, os valores de campo e de potencial associados se alteram quando tratamos de modos que cruzam o horizonte em épocas distintas.

Diante de tais observações, temos que encontrar uma quantidade que estime esse desvio da escala invariante. Tal desvio será dado mediante o *índice espectral escalar*, n_s, tal que

$$n_s - 1 = \frac{d\ ln\Delta^2_{\mathcal{R}}}{d\ lnk}, \tag{3.25}$$

o que nos leva a reescrever (3.20) da seguinte forma:

$$\Delta^2_{\mathcal{R}} = \Delta^{*2}_{\mathcal{R}} \left(\frac{k}{k^*}\right)^{n_s-1} = A_s \left(\frac{k}{k^*}\right)^{n_s-1}, \qquad \Delta^{*2}_{\mathcal{R}} \equiv A_s, \tag{3.26}$$

onde A_s é a amplitude correspondente ao modo k^* (uma escala que pode ser medida na CMB).

Com isso, concluímos que o espectro realmente é invariante no espaço de de Sitter, pois $n_s = 1$ [1]. Contudo, com as aproximações de slow-roll, conseguimos encontrar pequenos desvios nesses parâmetros.

A última medida anunciada pelo Planck (Akrami et al. (2018)) nos mostrou que o espectro é levemente desviado para o vermelho,

$$n_s \simeq 0,9649 \pm 0,0042\ \cdot \tag{3.27}$$

[1] Podemos espressar o índice espectral escalar em função dos parâmetros de slow-roll:

$$n_s - 1 \simeq 2\eta_\phi - 6\epsilon_\phi\ \cdot$$

Os modos com números de onda comóvel pequenos possuem mais influência.

Se procurarmos por desvios, em escalas mais altas, da invariância de escala, teremos o que chamamos de *running do índice espectral* (olhar Figura 3.1),

$$n_s' = \frac{d\ n_s}{d\ lnk} \simeq -16\epsilon_\phi\ \eta_\phi + 24\epsilon_\phi^2 + 2\xi_\phi^2\ , \qquad \text{com} \quad \xi_\phi^2 \equiv M_{Pl}^4 \frac{V'\ V'''}{V^2}\ . \tag{3.28}$$

De acordo com o Planck, com 95% de C.L., $n_s' \approx 0$.

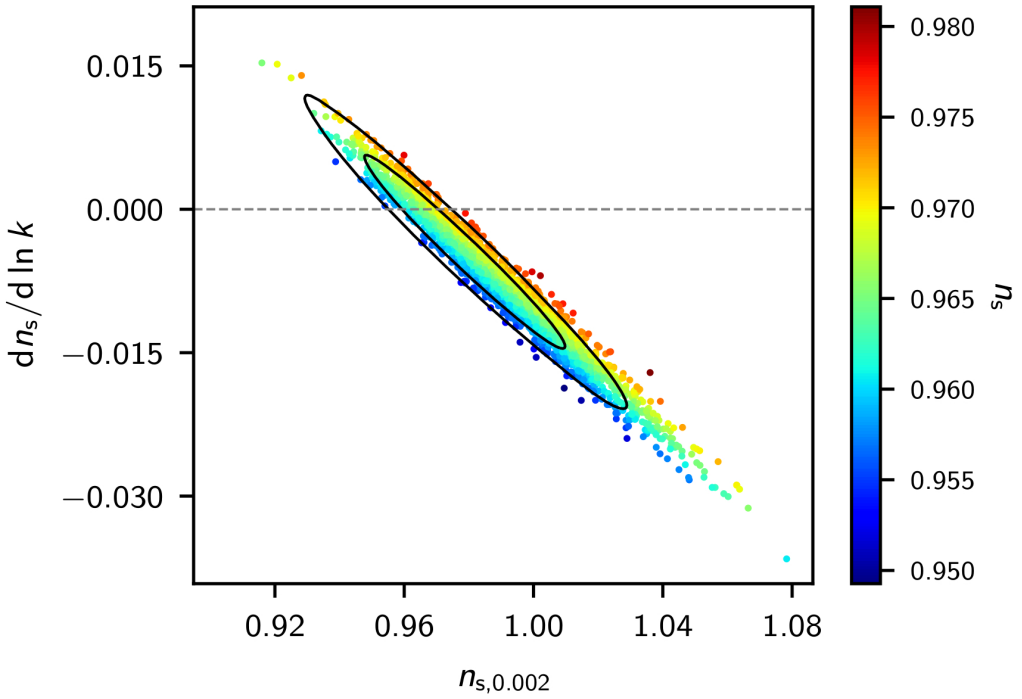

Figura 3.1: Vínculos sobre o running do índice espectral (n_s') no modelo ΛCDM, usando Planck TT,TE,EE+lowE+lensing. Os contornos em preto correspondem a $r = 0$, com 68% e 95% de confidence level, e os diferentes valores para n_s é considerando a escala pivot de k = 0.05Mpc^{-1}. Notemos que os dados são consistentes com um running espectral nulo e abrem margem também para um running negativo, o que levaria a um desvio positivo do índice espectral $n_{s,0.002}$. (Aghanim et al. (2018))

De forma análoga ao espectro de potência escalar, podemos obter o *espectro de potência tensorial*, que é dado por

$$\Delta_t^2 = \frac{2}{\pi^2}\frac{H^2}{M_{Pl}^2}\ . \tag{3.29}$$

Como a natureza das perturbações é quântica, o que nos leva a ter um espectro estocástico, e elas modificam a geometria do espaço-tempo, teremos uma alteração no espectro das anisotropias na temperatura da CMB. Podemos, ainda, computar uma quantidade que nos dará uma relação entre as perturbações tensoriais e escalares, conhecida como

razão tensor-escalar, r:

$$r = \frac{\Delta_t^2}{\Delta_s^2} \equiv \frac{\Delta_t^2}{\Delta_R^2} = 16\ \epsilon_\phi. \tag{3.30}$$

Notemos que as perturbações tensoriais são suprimidas frente às escalares. Dada a não observação de perturbações tensoriais, dados associados, advindos de BAO, BICEP2 e Keck Array, colocam um limite superior nesse parâmetro de

$$r_{0,002} < 0,064,$$

onde o subíndice 0,002 representa a escala pivot de $0,002\text{Mpc}^{-1}$ (Akrami et al. (2018)). Olhar Figura 3.2.

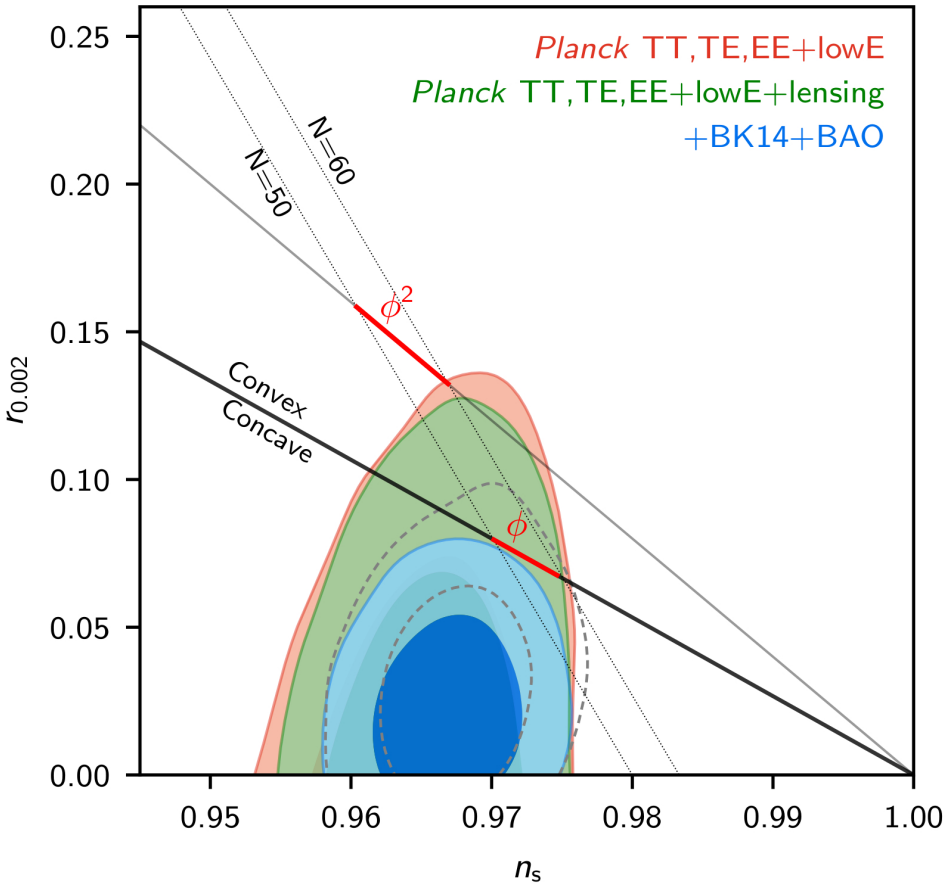

Figura 3.2: Vínculos sobre a razão tensor-escalar ($r_{0.002}$) no modelo ΛCDM, usando diferentes combinações de dados observacionais. As retas pontilhadas são uma representação para modelos com $N = 50$ e $N = 60$, caso consideremos a inflação causada por um único campo e com potencial da forma $V \propto \left(\frac{\phi}{m_{Pl}}\right)^p$. As retas sólidas correspondem a relação entre n_s e r para o potencial linear e quadrático (Aghanim et al. (2018)).

Por uma questão de clareza, podemos expressar uma equação que leva à escala de

inflação

$$\Delta_R^2 = \frac{\Delta_t^2}{r} = \frac{2}{\pi^2}\,\frac{H^2}{M_{Pl}^2}\,\frac{1}{r} = \frac{2}{\pi^2}\,\frac{V}{3M_{Pl}^2}\,\frac{1}{M_{Pl}^2}\,\frac{1}{r} \approx 2,2\times 10^{-9}\ , \tag{3.31}$$

e, isolando o potencial,

$$V^{\frac{1}{4}} \approx \left(\frac{r}{0,01}\right)^{\frac{1}{4}} 10^{16}\ GeV. \tag{3.32}$$

Como exemplo, para encerrar esta subseção, vamos olhar para o potencial quadrático e calcular as quantidades principais que comentamos até o momento. Dessa maneira,

$$\begin{aligned}
V(\phi) = \frac{m^2}{2}\phi^2 \quad &\Rightarrow \quad \begin{cases} \epsilon_\phi = \eta_\phi = 2\left(\frac{M_{Pl}}{\phi}\right)^2, \\ \phi = \phi_* \Rightarrow N_e \simeq \frac{\phi_*^2}{4M_{Pl}^2}\ , \end{cases} \\
n_s - 1 \simeq -\frac{2}{N_e} \quad &\Rightarrow \quad \begin{cases} \text{para 50 e-folds, } n_s \simeq 0,96, \\ \text{para 60 e-folds, } n_s \simeq 0,967\ , \end{cases} \\
A_s \simeq \frac{N_e^2}{6\pi^2}\frac{m^2}{M_{Pl}^2} \quad &\Rightarrow \quad \text{para 50 e-folds, } m \simeq 5\times 10^{12}\ GeV \\
H_* \approx \sqrt{\frac{V(\phi_*)}{3M_{Pl}^2}} \approx 6m \quad &\Rightarrow \quad \text{para 50 e-folds, } V_*^{\frac{1}{4}} \sim 10^{16} GeV.
\end{aligned}$$

Com isso, concluímos que a escala de inflação para o potencial quadrático é próxima à escala de GUT.

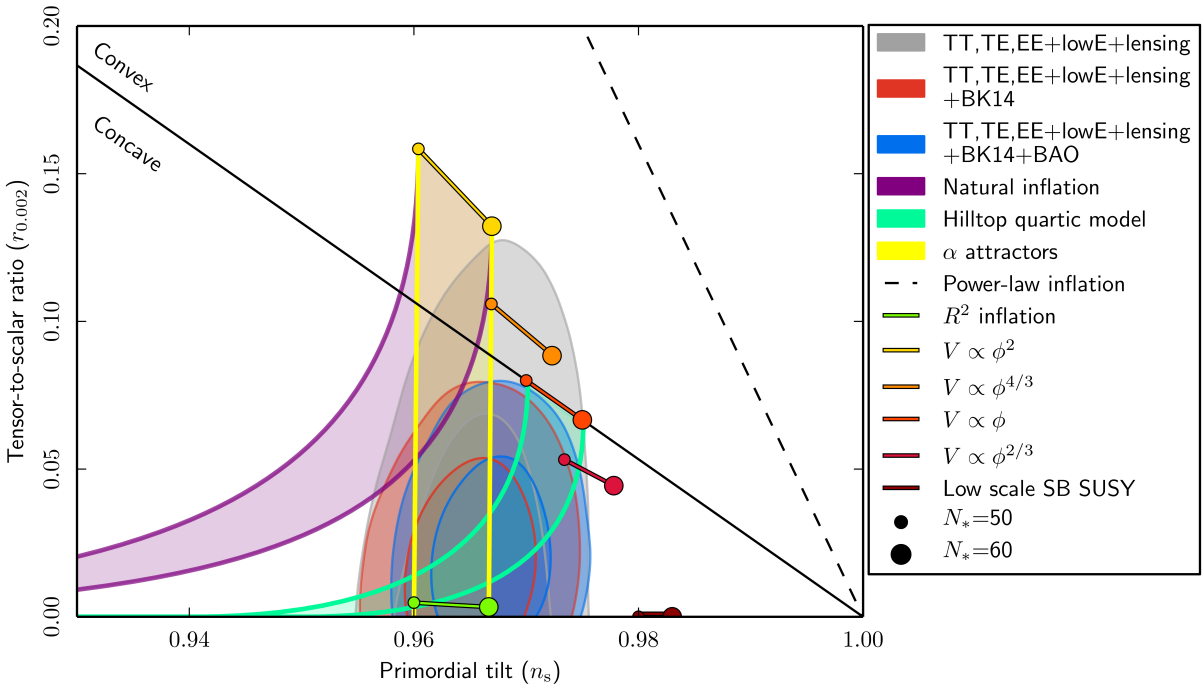

Figura 3.3: Vínculos sobre a razão tensor-escalar, considerando diferentes modelos inflacionários. Notemos que, ao fundo, temos uma referência à Figura 3.2, com diferentes combinações de dados observacionais e confidence level de 68% e 95%. Sobre esse fundo, temos uma série de tipos de potenciais cujas regiões abrangidas estão limitadas entre 50 e 60 e-folds. Notemos que alguns modelos já estão descartados (Akrami et al. (2018)).

Notemos que os parâmetros de slow-roll não são os observáveis; porém, os observáveis inflacionários estão relacionados com eles. Finalizamos este capítulo com a tabela 3.1, na qual expressamos os principais parâmetros da inflação e suas atuais medidas.

Tabela 3.1 - Principais parâmetros relacionados à inflação mensurados pelo Planck.

Parâmetro	Definição	Dados
n_s	Índice espectral escalar	$0,9649 \pm 0,0042$
n'_s	Running do índice espectral	≈ 0
r	Razão tensor-escalar	$< 0,064$
$\Delta^2_{\mathcal{R}}$	Amplitude do espectro de potência da curvatura comóvel	$2,101 \times 10^{-9}$

Capítulo 4

Período Pós-Inflacionário

Após a inflação, o universo fica praticamente "vazio" e precisamos encontrar um modo de repovoá-lo. Nesse contexto, surge a ideia de reheating, que seria a época posterior à inflação na qual quase todas as partículas elementares seriam produzidas. Tal produção ocorreria mediante oscilações de um determinado campo, que em geral tratamos como sendo o campo escalar do inflaton. Ele oscilaria em torno do mínimo de seu potencial, conforme a Figura 4.1, produzindo partículas que, por sua vez, iriam interagir até que, em dado momento, atingissem o equilíbrio térmico. Isso ocorreria quando praticamente toda a energia do inflaton fosse transformada em energia térmica de partículas elementares. Um importante conceito que surge é o de temperatura de reheating, T_R, que é a temperatura alcançada quando obtemos esse equilíbrio.

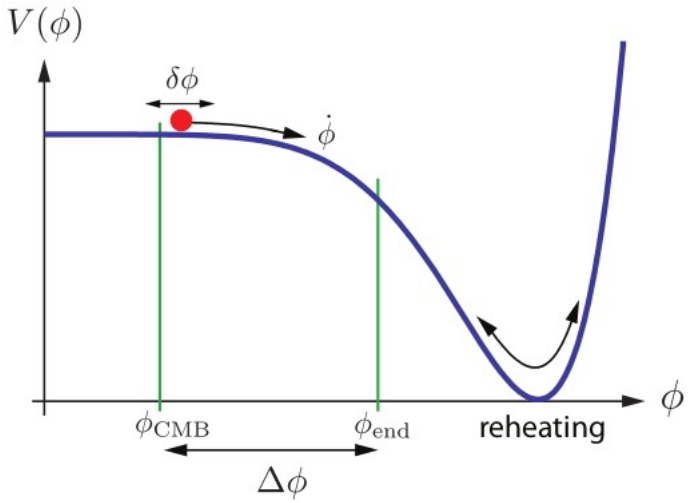

Figura 4.1: Flutuações quânticas do campo do inflaton ($\delta\phi$) num dado potencial. As flutuações na radiação cósmica de fundo são criadas quando consideramos que $\delta\phi$ ocorreu cerca de 60 e-folds antes do final da inflação (Baumann (2011)).

Em alguns modelos inflacionários, durante estágios iniciais e intermediários do reheating, temos o que chamamos de ressonância paramétrica ampla, que pode chegar a ser mais eficiente que os estágios finais do reheating. Esse fenômeno é conhecido como preheating.

Abordaremos tanto o preheating como o reheating nas seções abaixo.

4.1 Reheating

Conforme vimos, para a inflação chegar ao fim, temos que violar as condições de slow-roll, e assim a energia cinética do inflaton começa a aumentar e se torna relevante, podendo eventualmente dominar. Essa fase é conhecida como *kination* e, como característica principal, temos que $\rho_\phi \propto a^{-6}$, o que leva a um decaimento muito rápido da densidade de energia.

Considerando que o potencial do campo do inflaton possui um mínimo e que evolui para ele, observamos pela equação de Klein-Gordon, equação (2.36), que o campo passará a executar oscilações amortecidas em torno deste mínimo. Podemos ver tal resultado considerando um potencial do tipo $V(\phi) = \frac{1}{2}m\phi^2$ e que, nos estágios finais da inflação, o termo de fricção é ainda não negligenciável. Assintoticamente, para $mt \gg 1$, vemos que a solução para (2.36), conforme Kofman et al. (1997), é do tipo

$$\phi(t) = \Phi(t)sin(mt), \qquad \text{com} \quad \Phi(t) = \frac{M_{Pl}}{\sqrt{3\pi}mt}. \tag{4.1}$$

Na Figura 4.2, vemos o gráfico da equação (4.1) para diferentes valores de m, e considerando $M_{Pl}/\sqrt{3\pi}$ igual a unidade. Como esse fator influencia apenas na amplitude das curvas, essa escolha de valor não será qualitativamente relevante na análise gráfica.

Anteriormente, havíamos desconsiderado a interação do campo escalar com qualquer outro grau de liberdade. Porém, como precisamos repovoar o universo, precisamos que haja transferência de energia para outras partículas, levando ao que conhecemos como evolução da cosmologia padrão (inicialmente tendo dominação por radiação). Ao considerarmos o acoplamento do inflaton com outros campos, estamos tornando-o instável, o que permite seu decaimento em outros graus de liberdade.

Dessa forma, a equação de Klein-Gordon é modificada pela adição de um tempo de fricção proporcional à largura de decaimento do campo do inflaton, Γ_ϕ (descrição fenome-

nológica). A equação é modificada para

$$\ddot{\phi} + 3\,H\,\dot{\phi} + \Gamma_\phi\,\dot{\phi} + \frac{\partial V}{\partial \phi} = 0\,, \tag{4.2}$$

e é válida apenas no estágio de oscilações rápidas do campo. Embora Γ_ϕ esteja como um parâmetro arbitrário, ele pode ser computado tomando-se diversos tipos de interações distintas, e esse é o ponto de maior interesse da física de partículas.

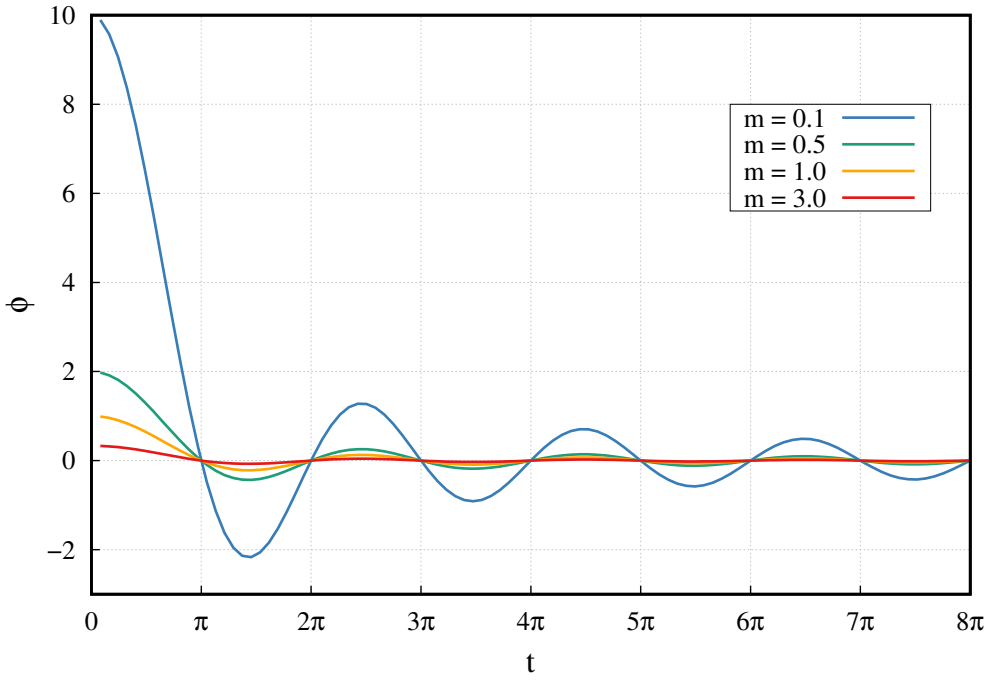

Figura 4.2: Gráfico da equação (4.1), representando o comportamento do campo do inflaton no final da inflação. O gráfico foi feito considerando $M_{Pl}/\sqrt{3}\pi$ igual à unidade, o que faz com que m (massa do campo do inflaton) seja da ordem da massa de Planck. As diferentes cores das curvas representam diferentes valores para m e, independente de seu valores, o comportamento oscilatório que diminui a amplitude com o tempo é o mesmo. No entanto, quanto menor o valor da massa, maior é essa amplitude.

Usando (2.27), (2.28) e (4.2), a equação de conservação energia-momento (2.5) será modificada pelo termo de decaimento

$$\dot{\rho_\phi} + 3H\,(\rho_\phi + p_\phi) = -\Gamma_\phi\,\dot{\phi}^2. \tag{4.3}$$

Notemos que o lado direito da equação está relacionado com a entropia. Como antes havíamos considerado um fluido perfeito, nenhuma entropia era criada ou destruída. Dessa forma, concluímos que ao decair em outras partículas, o inflaton cria a entropia necessária para se chegar à cosmologia padrão. Esse período é conhecido como *reheating*.

Os produtos do decaimento dispersam-se suficientemente rápido para alcançar um período de equilíbrio térmico. Sabemos que, conforme a cosmologia padrão, a contribuição dominante da entropia corresponderá a graus de liberdade relativísticos. Além disso, a energia perdida do inflaton formará um banho térmico de radiação à temperatura T, e a equação da densidade de energia da radiação será dada por

$$\dot{\rho_r} \ + 3H\left(\rho_r + p_r\right) = \Gamma_\phi \ \dot{\phi}^2. \tag{4.4}$$

A densidade de energia total, $\rho = \rho_\phi + \rho_r$, e a pressão total, $p = p_\phi + p_r$, satisfazem a conservação energia-momento, $\dot{\rho} \ + 3H\left(\rho + p\right) = 0$, uma vez que a entropia é transferida entre os dois componentes, isto é, a entropia é conservada.

Seja $\phi = \phi_{min}$ o ponto de mínimo de um dado potencial. Expandindo em Taylor, teremos

$$V(\phi) = V\left(\phi_{min}\right) + \frac{1}{2}V''\left(\phi_{min}\right)\left(\phi - \phi_{min}\right)^2 + \cdots \tag{4.5}$$

Consideremos que, nas vizinhanças de ϕ_{min}, temos o comportamento de um oscilador harmônico. Desta forma, $\langle V \rangle = \left\langle \frac{\dot{\phi}^2}{2} \right\rangle = \frac{\rho_\phi}{2}$ e $p_\phi \simeq 0$, o que nos leva à equação de estado $w_{re} = 0$ durante a época de reheating de oscilações em torno do mínimo do potencial. Portanto, nesse período, o comportamento do inflaton é semelhante ao da matéria não-relativística e, nessa fase, o sistema composto por inflaton-radiação obedece às seguintes equações diferenciais acopladas

$$\dot{\rho_\phi} \ + 3H \ \rho_\phi = -\Gamma_\phi \ \rho_\phi \ ,$$

$$\dot{\rho_r} \ + 4H \ \rho_r = \Gamma_\phi \ \rho_\phi \ ,$$

$$H^2 = \frac{\rho_\phi + \rho_r}{3M_{Pl}^2} \ . \tag{4.6}$$

Desconsiderando a fase de kination e supondo que as oscilações começam imediatamente após o término da inflação, desacoplando as equações acima, teremos que, para uma largura de decaimento constante, a densidade de energia do inflaton, após o desacoplamento das equações 4.6, é dada por

$$\rho_\phi(t) = \rho_\phi(t_f) \ \left(\frac{a_f}{a}\right)^3 \ e^{-\Gamma_\phi\left(t - t_f\right)} \ , \tag{4.7}$$

e a equação acima representa o comportamento esperado para uma matéria não-relativística instável. Se, durante sua oscilação, o inflaton ainda for a componente dominante, podemos

tratá-lo como matéria não-relativística $\left(a \propto t^{\frac{2}{3}}\right)$. Além disso, usando que $\rho_r \simeq 0$ no final da inflação, a solução das equações acopladas para a densidade de radiação será

$$\rho_r(t) \simeq \frac{3}{5}\Gamma_\phi \; t \; \rho_\phi \left[1 - \left(\frac{t_f}{t}\right)^{\frac{5}{3}}\right] \; , \tag{4.8}$$

cujo comportamento indica que ρ_r cresce inicialmente e depois decresce. Usando a distribuição de Bose-Einstein, a temperatura máxima será dada por

$$T_{max} \sim g^{-\frac{1}{4}} \; \rho_\phi^{\frac{1}{8}}(t_f) \; \left(M_{Pl} \; \Gamma_\phi\right)^{\frac{1}{4}} \; , \tag{4.9}$$

onde g representa os graus de liberdade da radiação. Notemos que T_{max} depende apenas da densidade de energia do campo no final da inflação.

A era de radiação começa quando $\Gamma_\phi \gtrsim H$, isto é, quando o inflaton decaiu efetivamente. Assim, usando essa condição, (2.4), (2.11) e a distribuição de Bose-Einstein, podemos estimar a temperatura de reheating,

$$T_{re} = 1,7 \; g^{-\frac{1}{4}} \; \left(M_{Pl} \; \Gamma_\phi\right)^{\frac{1}{2}} \; , \tag{4.10}$$

que, diferentemente de T_{max}, depende apenas da duração do período de reheating, τ_ϕ, onde $\tau_\phi = {\Gamma_\phi}^{-1}$. Analisemos a Figura 4.3.

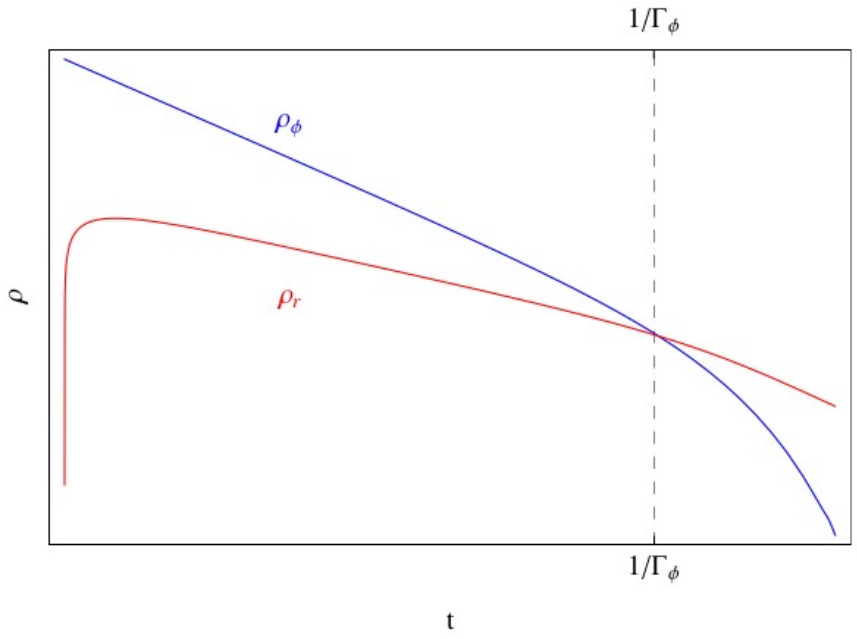

Figura 4.3: Gráfico da evolução das densidades de energia do campo do inflaton e da radiação durante o final da era inflacionária. Notemos que, à medida que o inflaton decai, ocorrre a produção da radiação e esta última eventualmente dominará sobre a primeira após um tempo de decaimento de $\tau_\phi = {\Gamma_\phi}^{-1}$ (Rosa (2012)).

Podemos impor limites superior e inferior para a temperatura de reheating. Se o inflaton decair rapidamente, sua energia será convertida em radiação e T_{max} será aproximadamente T_{re}. Logo, $T_{re} \sim \rho_\phi^{\frac{1}{4}}(t_f)$. Por outro lado, o reheating tem que acabar antes do início da nucleossíntese para não interferir na produção dos elementos leves. Sabendo disto, temos a seguinte vinculação:

$$10MeV \lesssim T_{re} \lesssim \rho_\phi^{\frac{1}{4}}(t_f) \cdot \tag{4.11}$$

Vamos supor agora que, além de termos referentes ao campo do inflaton, a lagrangeana possui termos de um outro campo escalar χ, de um campo espinorial ψ, além de seus respectivos acoplamentos com o inflaton (Kofman et al. (1997)),

$$\mathcal{L} \supset \frac{1}{2}\partial_i\chi\partial^i\chi - \frac{1}{2}m_\chi^2(0)\chi^2 + \frac{1}{2}\xi R\chi^2 + \bar{\psi}[i\gamma^i\partial_i - m_\psi(0)]\psi - \frac{1}{2}g^2\phi^2\chi^2 - h\bar{\psi}\psi\phi \tag{4.12}$$

onde g, h, ξ são constantes de acoplamento pequenas, $V(\phi)$ é o potencial efetivo do campo ϕ e $m_\chi^2(0)$ e $m_\psi^2(0)$ são as massas dos campos χ e ψ antes da mudança de variável $\phi - \sigma \to \phi$, respectivamente.

Em uma lagrangeana como a da equação (4.12), com potencial $V \sim \frac{1}{2}m^2(\phi - \sigma)^2$ e $m \gg H$, as probabilidades de decaimento de ϕ em um par de escalares ou de espinores, usando o método usual de teoria de campos (que corresponde à fase de reheating), são dadas por (Kofman et al. (1997))

$$\Gamma(\phi \to \chi\chi) = \frac{g^4\sigma^2}{8\pi m}, \tag{4.13}$$

$$\Gamma(\phi \to \psi\psi) = \frac{h^2 m}{8\pi} \cdot \tag{4.14}$$

Com isso, concluímos que o número de densidade comóvel de partículas decresce exponencialmente com taxa de decaimento Γ, assim como a energia comóvel do campo oscilante ϕ (Kofman et al. (1997)). Importante chamar atenção para essa conclusão pois nela reside uma grande distinção entre as fases pós-inflacionárias de preheating e reheating.

O reheating é uma época díficil de ser vinculada, visto que as flutuações produzidas nesse período não deixam uma assinatura observável a nível da CMB ou LSS (Cook et al. (2015)). Uma maneira de tentar conseguir informações dessa época é obtendo uma relação entre os parâmetros da inflação e do reheating.

Consideremos o momento em que uma determinada escala, k, sai do horizonte durante a época inflacionária, $a_k H_k = k$. Podemos escrever

$$\frac{k}{a_0 H_0} = \frac{a_k H_k}{a_0 H_0} = \frac{a_k H_k}{a_0 H_0}\frac{a_{end}}{a_{end}}\frac{a_{re}}{a_{re}}\frac{a_{eq}}{a_{eq}}\frac{H_{eq}}{H_{eq}} = \frac{a_k}{a_{end}}\frac{a_{end}}{a_{re}}\frac{a_{re}}{a_{eq}}\frac{a_{eq}H_{eq}}{a_0 H_0}\frac{H_k}{H_{eq}}, \tag{4.15}$$

onde $_{end}$, $_{re}$ e $_{eq}$ são subíndicies que correspondem aos períodos relacionados com o final da inflação, com o final do reheating, e com a equalização radiação-matéria, respectivamente.

A equação (4.15) pode ser reescrita como

$$ln\left[\frac{k}{a_0H_0}\right] = -N_k - N_{re} - N_{RD} + ln\left[\frac{a_{eq}H_{eq}}{a_0H_0}\right] + ln\left[\frac{H_k}{H_{eq}}\right], \tag{4.16}$$

onde N_k, N_{re} e N_{RD} correspondem, respectivamente, ao número de e-folds entre a saída do modo k durante a inflação e o final da era inflacionária, durante o final da inflação e o final do reheating e durante o final do reheating e o final da era dominada por radiação.

De Liddle e Lyth (2000), temos que

$$\frac{a_{eq}H_{eq}}{a_0H_0} = 219\ \Omega_0\ h\ , \tag{4.17}$$

$$H_{eq} = 5,25 \times 10^6\ h^3\ \Omega_0^2\ H_0\ \cdot \tag{4.18}$$

Dessa maneira, com os dados obtidos do espectro de potência primordial advindos da CMB, e considerando um determinado modelo inflacionário, somos capazes de inferir a soma $N_{re} + N_{RD}$.

Consideremos que o período de reheating é dominado por matéria, $\omega_{re} = 0$. Além disso, consideremos também que as transições de fase entre as épocas ocorrem instantaneamente. Desta forma,

$$\frac{k}{a_0H_0} = e^{-N_K}\ \left(\frac{\rho_{re}}{\rho_{end}}\right)^{1/3}\left(\frac{\rho_{eq}}{\rho_{re}}\right)^{1/4}\frac{a_{eq}H_{eq}}{a_0H_0}\frac{H_k}{H_{eq}}\ . \tag{4.19}$$

Olhando para o gráfico 4.4, notemos que a fração $\left(\frac{\rho_{re}}{\rho_{end}}\right)^{1/3}$ foi obtida tomando-se o limite pela direita para o fim da inflação e pela esquerda para o fim do reheating. De maneira análoga, a fração $\left(\frac{\rho_{eq}}{\rho_{re}}\right)^{1/4}$ foi obtida tomando-se o limite pela direita para o fim do reheating e pela esquerda para o fim da era dominada por radiação.

Usando a aproximação de slow-roll para H_k na equação (4.19), teremos

$$N_k = \frac{1}{3}\ \ln\left(\frac{\rho_{re}}{\rho_{end}}\right) + \frac{1}{4}\ \ln\left(\frac{\rho_{eq}}{\rho_{re}}\right) + \ln\left(\frac{a_{eq}H_{eq}}{a_0H_0}\right) + \ln\left(\sqrt{\frac{8\pi V_k}{3M_{Pl}^2}}\ \frac{1}{H_{eq}}\right) - \ln\left(\frac{k}{a_0H_0}\right)\cdot \tag{4.20}$$

Para uma primeira aproximação em relação ao número máximo de e-folds, podemos considerar que não existe perda significativa na densidade de energia durante os estágios finais da inflação - $V_k = \rho_{end}$ - e que o reheating acontece instantaneamente - $\rho_{re} = \rho_{end}$. Usando (3.21), (3.24), (4.17), (4.18) e (4.20), chegaremos a

$$N_k \approx 63,3 + \frac{1}{4}\ln\epsilon, \tag{4.21}$$

conforme Liddle e Leach (2003).

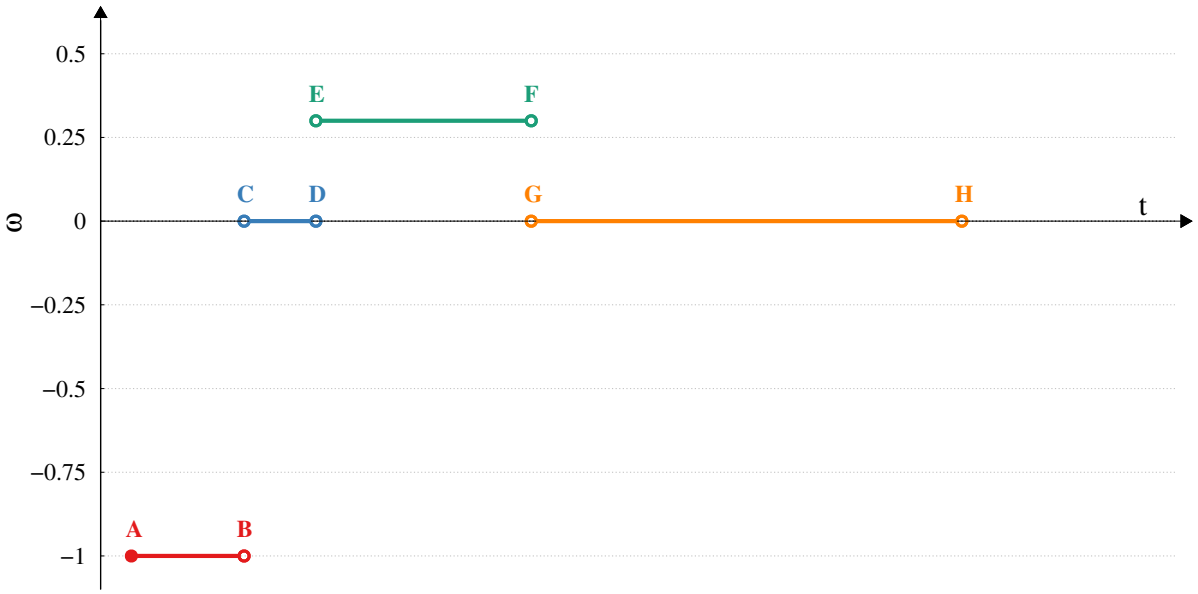

Figura 4.4: Esquema da evolução temporal da função de estado (ω). Os pontos correspondem aos seguintes períodos: A - início da inflação, B - final da inflação, C - início do reheating, D - término do reheating, E - começo da era dominada por radiação, F - fim da era dominada por radiação, G - começo da era dominada por matéria, H - término da era dominada por matéria. As trasnsições de fase entre as diferentes épocas ocorrem instantaneamente. Considera-se que os pontos B e C, D e E, F e G, aconteceram instantaneamente par a par. Na época inflacionária, temos $\omega = -1$; no reheating, $\omega = 0$; no período de dominação por radiação, $\omega = 1/3$; e no período de dominação por matéria, $\omega = 0$. Atualmente estamos numa época de dominação pela energia escura, portanto ω é negativo novamente. Gráfico fora de escala.

Um modelo de reheating possui três parâmetros fundamentais: a temperatura de reheating (T_{re}), sua duração (N_{re}) e sua equação de estado (ω_{re}). Voltando à discussão antes da aproximação do gráfico 4.4, em geral, os modelos de reheating consideram a equação de estado constante e nula durante este período. Porém, no final da era inflacionária, tal equação é $\omega = -\frac{1}{3}$ - condição para termos $\dot{\phi}^2 \approx V(\phi)$. Quando consideramos um inflaton massivo, ω tende a zero rapidamente, pois a massa - que é o parâmetro relacionado à frequência das oscilações - é muito maior que a taxa de expansão do universo, que ocorre enquanto o inflaton ainda é a componente dominante. À medida que o inflaton decai e vai se tornando menos dominante, ω passa de 0 a 1/3 quando se inicia a dominação por radiação.

Nas Figuras 4.5 e 4.6, podemos perceber que a equação de estado e o número de e-folds do período pós-inflacionário são inversamente proporcionais, visto que, quanto menor for a equação de estado durante o período de reheating, mais tempo será necessário para os

modos reentrarem no horizonte.

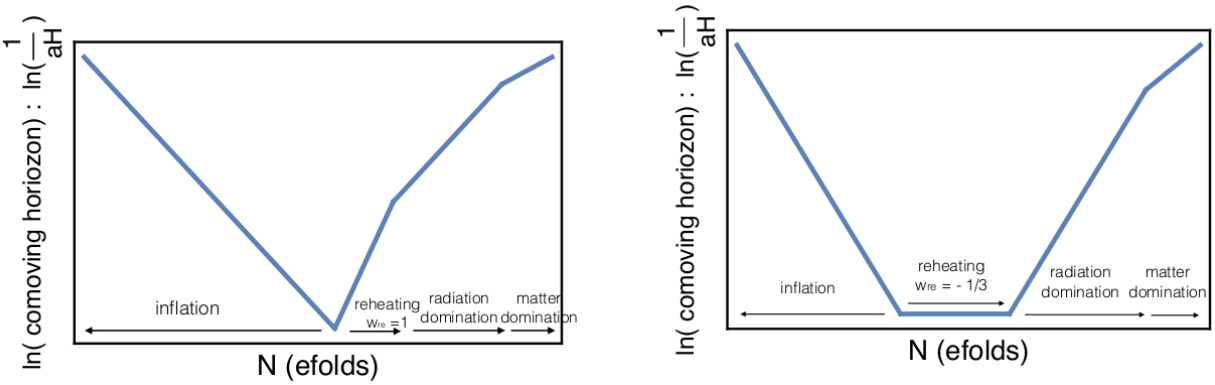

Figura 4.5: Evolução temporal (número de e-folds) do horizonte comóvel. No gráfico da esquerda temos que o reheating acontece com equação de estado $\omega_{re} = 1$ (caso extremo máximo), enquanto que no gráfico da direita temos um reheating com equação de estado $\omega_{re} = -1/3$ (caso extremo mínimo). Notemos que quanto menor for a equação de estado, menos eficiente será a reentrada dos modos no horizonte (Cook et al. (2015)).

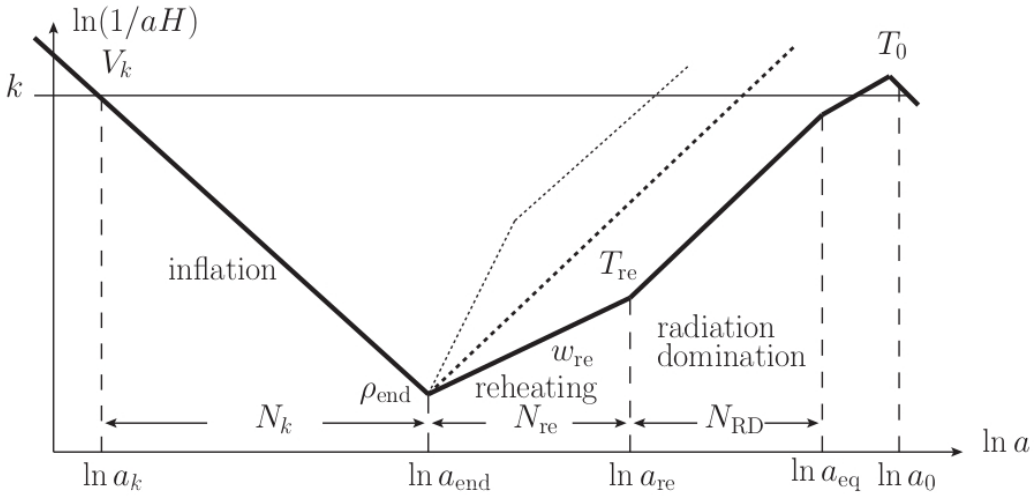

Figura 4.6: Evolução temporal do horizonte comóvel mostrando a reentrada dos modos k no horizonte para diferentes valores de ω_{re}. No gráfico, temos que a linha tracejada negrita corresponde ao reheating instantâneo, ou seja, $\omega_{re} = 1/3$, a mesma equação de estado da radiação. A linha tracejada fina corresponde a $1 \leq \omega_{re} < 1/3$ e a linha contínua grossa corresponde a $1/3 < \omega_{re} \leq -1/3$. Nesse gráfico, fica claro que, quanto menor ω_{re}, maior será o número de e-folds pós-inflacionário e, portanto, mais tempo demorará para os modos reentrarem no horizonte (Dai et al. (2014)).

Consideremos uma equação de estado efetiva para o período de reheating. Deste modo,

$$\frac{\rho_{end}}{\rho_{re}} = \left(\frac{a_{end}}{a_{re}}\right)^{-3(1+\omega_{re})}. \tag{4.22}$$

Escrevendo o número de e-folds, teremos

$$N_{re} = \frac{1}{3(1+\omega_{re})} \ln\left(\frac{\rho_{end}}{\rho_{re}}\right) = \frac{1}{3(1+\omega_{re})} \ln\left(\frac{3}{2}\frac{V_{end}}{\rho_{re}}\right). \tag{4.23}$$

A última igualdade vem do fato de tomarmos $\omega = -1/3$ no final da inflação. Considerando que, no final da era de reheating, teremos dominação por radiação, podemos usar a distribuição de Bose-Einstein para relacionar o número de e-folds com a temperatura de reheating. Logo,

$$N_{re} = \frac{1}{3(1+\omega_{re})} \ln\left(\frac{45\ V_{end}}{\pi^2\ g_{rel}\ T_{re}^4}\right), \tag{4.24}$$

onde g_{rel} é o número de graus relativísticos ao final do reheating.

Notemos que, pela equação (4.24), quanto maior for a temperatura de reheating, menor será o número de e-folds desse período. Tal consideração é esperada, visto que, quanto mais rápido e eficiente for este período, mais quente estará o universo.

Consideremos potenciais do tipo polinomiais, isto é,

$$V = \frac{1}{2} m^{4-\alpha} \phi^{\alpha}. \tag{4.25}$$

Usando (2.47) e (2.51), o número de e-folds será

$$N_k = \frac{1}{2\alpha M_{Pl}^2}\left(\phi_k^2 - \phi_{end}^2\right) \approx \frac{1}{2\alpha M_{Pl}^2}\ \phi_k^2\ , \tag{4.26}$$

onde o último termo foi obtido do fato de considerarmos $\phi_k^2 \gg \phi_{end}^2$. Reescrevendo N_k em função dos parâmetros de slow-roll, com o auxílio de (2.47), (2.48) e (1), teremos

$$N_k = \frac{\alpha + 2}{2(1 - n_s)}\ . \tag{4.27}$$

Podemos ainda expressar o potencial no final da inflação em termos de n_s e A_s. Conforme Cook et al. (2015),

$$V_{end} = 6\pi^2 M_{Pl}^4 A_s (1 - n_s)\left(\frac{\alpha(1-n_s)}{2(\alpha+2)}\right)\ . \tag{4.28}$$

Com essas informações, podemos obter graficamente alguns resultados para a temperatura de reheating e o número de e-folds desse período. Ver Figura 4.7.

4.2 Preheating

À medida que a inflação vai chegando ao fim, a energia do campo do inflaton é transferida para outros campos, sejam vetores ou escalares, aos quais o inflaton esteja acoplado. Esse estágio em que a energia é transferida rapidamente e os produtos do decaimento encontram-se longe do equilíbrio térmico é conhecido como preheating.

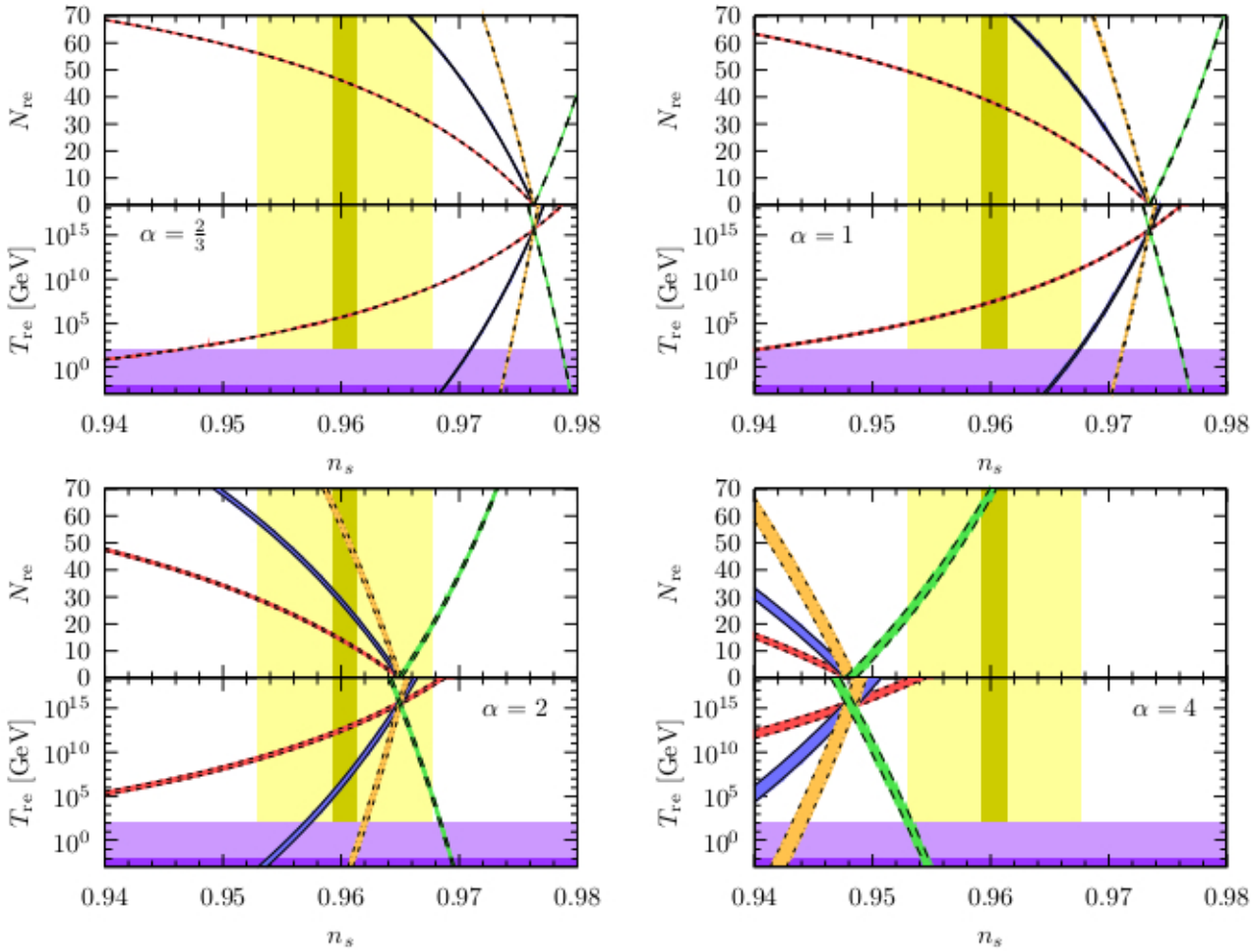

Figura 4.7: Relação entre os parâmetros de número de e-folds durante a época do reheating (N_{re}), a temperatura de reheating (T_{re}) e a razão tensor-escalar (n_s) para diferentes potenciais polinomiais do tipo $V = \frac{1}{2}m^{4-\alpha}\phi^{\alpha}$. Na figura, temos cada gráfico com os seguintes graus de polinômio: $\alpha = 2/3, 1, 2, 4$. A região amarela corresponde a $n_s = 0,9603 \pm 0,0073$ (dados do PLANCK 2013). Cada curva refere-se a uma equação de estado diferente, representadas pelas cores vermelha, azul, laranja e verde, correspondendo a $\omega_{re} = -1/3, 0, 1/6$ e $2/3$, respectivamente. O ponto de intersecção das curvas corresponde ao reheating instantâneo. Além disso, temperaturas acima do ponto de intersecção são consideradas não físicas, pois resultariam em $N_{re} < 0$ (Dai et al. (2014)).

Apesar do tema ser abordado após a seção sobre reheating (pois as ideias surgiram nessa ordem), cronologicamente, o preheating antecede o reheating. Alguns dos primeiros artigos na área foram Kofman et al. (1994) e Kofman et al. (1997).

Na equação (4.1), se a amplitude do campo for suficientemente grande, o decaimento irá ocorrer no regime de ressonância paramétrica. Voltemos para o acoplamento entre os campos escalares na lagrangeana (4.12). Se muitas partículas χ já tiverem sido criadas, a probabilidade do decaimento $\phi \to \chi\chi$ aumenta, devido a efeitos da estatística de Bose-Einstein.

A equação de movimento para χ, dada (4.12), é

$$\partial_\mu \partial^\mu \chi + 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{\chi} + \left(m_\chi^2(0) - \xi R + g^2\phi^2\right)\chi = 0 \cdot \tag{4.29}$$

Considerando a representação de Heisenberg para um campo escalar quântico, e apenas a autofunção com momento comóvel $\vec{k}$, (4.29) se tornará

$$\ddot{\chi}_k + 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{\chi}_k + \left(\left(\frac{k}{a}\right)^2 + m_\chi^2(0) - \xi R + g^2\phi^2\right)\chi_k = 0 \cdot \tag{4.30}$$

Essa equação é muito parecida com a de um oscilador harmônico amortecido com frequência variável, dadas as dependências temporais do fator de escala e do campo ϕ. Seja $V(\phi) = \frac{1}{2}m^2(\phi - \sigma)^2$. Fazendo a mudança de variável $(\phi - \sigma) \to \phi$ e considerando que a massa efetiva do campo χ vai a zero no mínimo do potencial de ϕ, teremos

$$\ddot{\chi}_k + 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{\chi}_k + \left(\left(\frac{k}{a}\right)^2 - \xi R + g^2\phi^2 + 2g^2\sigma\phi + g^2\sigma^2\right)\chi_k = 0 \cdot \tag{4.31}$$

Para facilitar nosso estudo da equação (4.31), consideremos que a amplitude das oscilações do campo ϕ muito menor que σ e negligenciemos a expansão do universo. Desta maneira, usando (4.1) e (4.31), obtemos

$$\ddot{\chi}_k + \left(k^2 + g^2\sigma^2 + 2g^2\sigma\Phi\sin mt\right)\chi_k = 0 \ , \tag{4.32}$$

que representa a equação de um oscilador harmônico com mudança de frequência periódica:

$$\omega_k^2(t) = \left(k^2 + g^2\sigma^2 + 2g^2\sigma\Phi\sin mt\right) \cdot \tag{4.33}$$

Com a mudança de variável $mt \to 2z - \pi/2$, chegaremos à equação

$$\chi_k'' + \left\{\left[\frac{4}{m^2}\left(k^2 + g^2\sigma^2\right)\right] - \frac{8}{m^2}g^2\sigma\Phi\cos 2z\right\}\chi_k = 0 \ , \tag{4.34}$$

onde a derivada é em relação a z. Notemos que a equação (4.33) tem a mesma forma da equação de Mathieu:

$$\chi_k'' + (A_k - 2q\cos 2z)\,\chi_k = 0 \ , \qquad \text{com } A_k = \frac{4}{m^2}\left(k^2 + g^2\sigma^2\right) \text{ e } q = \frac{4g^2\sigma\Phi}{m^2} \cdot \tag{4.35}$$

No apêndice B, tratamos especificamente sobre sistemas dinâmicos, com ênfase naqueles regidos por equações paramétricas, em especial a equação de Mathieu. Abordaremos detalhes sobre a questão de como encontrar critérios para analisarmos a estabilidade de tais sitemas. No restante desse capítulo, iremos apenas usar tais resultados.

As soluções da equação de Mathieu possuem regiões de estabilidade e instabilidade que determinam bem suas propriedades. Tal equação apresenta em suas soluções um conjunto de bandas de ressonância de frequências, $\Delta k^{(n)}$. Com isso, observamos um comportamento de instabilidade exponencial dentro destas bandas, $\chi_k \propto exp(\mu_k^{(n)} z)$, onde $\mu_k^{(n)}$ dependerá dos valores de A_k e q.

Se olharmos para a energia de cada modo e dividirmos pela energia de cada partícula, ou seja, $\frac{1}{2}|\dot{\chi_k}|^2 + \frac{1}{2}\omega^2|\chi_k|^2$ dividido por ω_k, obteremos a quantidade de partículas naquele modo, chamada número de ocupação n_k. Dessa maneira, concluímos que $n_k \propto exp(2\mu_k^{(n)} z)$ e podemos interpretar esse resultado como uma produção exponencial de partículas durante esse período.

Se tivermos $m^2 \gg g^2\sigma^2$ para a primeira banda, conforme Kofman et al. (1997), a taxa de crescimento exponencial é dada por

$$\mu_k = \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(2\frac{k}{m} - 1\right)^2}\,. \tag{4.36}$$

Para os casos em que $k > \frac{m}{2}(1 + \frac{q}{2})$ ou $k < \frac{m}{2}(1 - \frac{q}{2})$, teremos uma exponencial complexa e, portanto, essas serão regiões de estabilidade. Para os casos intermediários, $\frac{m}{2}(1 - \frac{q}{2}) < k < \frac{m}{2}(1 + \frac{q}{2})$, observamos a região de instabilidade, cujo valor máximo de μ_k é obtido para $k = \frac{m}{2}$, sendo ele $\mu_k = \frac{q}{2} = \frac{2g^2\sigma\Phi}{m^2}$. Nessas circunstâncias, podemos interpretar que a partícula ϕ está decaindo em um par de partículas χ, cada qual com momento $k = \frac{m}{2}$.

A diferença principal entre o decaimento usual que ocorre na fase de reheating e esse reside no fato de que a quantidade de partículas que será produzida dependerá da quantidade produzida anteriormente. Por critérios comparativos, tínhamos que, no decaimento usual, $\Gamma(\phi \to \chi\chi) = \frac{g^4\sigma^2}{8\pi m}$ [2], enquanto que, no decaimento ressonante a taxa de decaimento é dada por $\mu_k m \sim \frac{g^2\sigma\Phi}{m}$. No início, espera-se que o campo oscile com $\Phi > \frac{g^2\sigma}{8\pi}$ fazendo com que decaimentos por ressonâncias paramétricas dominem. Porém, à medida que o campo oscila e perde sua energia, a amplitude das oscilações diminue até chegar ao ponto em que o decaimento usual dominará.

Quando fizemos a aproximação que resultou na equação (4.32), não levamos em conta alguns efeitos, como, por exemplo:

- expansão do universo;

[2] Olhar equação (4.13).

- back reaction das partículas criadas;
- estatística das partículas criadas.

Ao incluirmos o efeito de expansão do universo, temos uma contribuição para a taxa Γ, visto que o termo de fricção na equação (4.31) contribuirá para o decrescimento de ϕ. Logo, $\mu_k m$ deve ser comparada com a taxa de decaimento efetiva, dada por $3H + \Gamma$. Além disso, o efeito de redshift no momento k pode fazer com que tal modo não esteja mais na banda de ressonância. Considerando que a largura efetiva seja metade da largura total, ou seja, $\frac{qm}{2}$, e que o tempo durante o qual o modo permanece na banda pode ser estimado por qH^{-1}, o preheating só ocorre se $q^2 m \simeq H$.

A back reaction das partículas criadas é também um efeito que precisa ser levado em consideração pois afeta os parâmetros A_k e q. Dependendo das interações, os modos também podem não se encontrar mais na banda de ressonância, mesmo que as condições acimas sejam satisfeitas.

Com relação às partículas criadas, elas precisam possuir uma estatística de Bose-Einstein, sendo, portanto, bósons. O princípio de exclusão de Pauli dos férmions faz com que o número de ocupação não seja tão grande para este tipo de partícula.

Notemos que a análise foi realizada com um potencial quadrático. Cada potencial terá sua particularidade. Por exemplo, se considerarmos $V(\phi) = \frac{\lambda}{4}(\phi^2 - \sigma^2)^2$, a autointeração quártica do campo ϕ, o termo $\frac{\lambda}{4}\phi^4$, terá uma contribuição maior que o termo $\frac{g^2}{2}\phi\chi$. Em outras palavras, a produção de partículas ϕ será mais eficiente que a produção de partículas χ. Para mais informações, Greene et al. (1997).

Dessa maneira, concluímos que, dependendo do potencial adotado e das interações consideradas entre os campos, um dado modelo inflacionário pode possuir ou não a fase de preheating e/ou reheating, assim como cada uma dessas fases pode ser considerada eficiente ou não.

Capítulo 5

Conclusões

Neste trabalho, vimos que a inflação cosmológica fornece um mecanismo que resolve os problemas da cosmologia padrão do Big Bang (problemas do horizonte, da planura e da abundância de partículas relíquias), explicando a estrutura atual do nosso universo ao se adicionar um campo escalar, conhecido como campo do inflaton, à teoria preexistente. Tal mecanismo tem como resultado uma expansão exponencial no fator de escala.

Ao considerarmos flutuações quânticas no campo do inflaton, observamos que tais perturbações primordiais geram uma assinatura tanto na radiação cósmica de fundo quanto nas estruturas em larga escala. Dessa maneira, devido às últimas informações obtidas na missão PLANCK, conseguimos vincular vários parâmetros inflacionários, bem como o tempo de duração dessa época. Isso faz com que diversos modelos sejam descartados, como, por exemplo, modelos com potencial caótico do tipo $V(\phi) = \frac{\lambda\phi^n}{nM_{Pl}^{n-4}}$, com $n \in \mathbb{N}^*$. Em outras palavras, tais observações experimentais nos permitem o falseamento de diferentes modelos inflacionários.

Quando a inflação chega ao fim, violando a aproximação de slow-roll, precisamos levar em consideração outros graus de liberdade, pois o universo precisa seguir sua evolução padrão de dominação por radiação. O inflaton irá decair em outros campos com os quais esteja acoplado, produzindo partículas relativísticas. Esse período pós-inflacionário pode ser dividido em duas etapas: o preheating e o reheating.

A primeira fase pós-inflacionária é o preheating. Nela, observamos bandas que determinam a estrutura de estabilidade/instabilidade do sistema, nas quais ocorrem ressonâncias paramétricas (instabilidade). Esse tipo de oscilação leva o inflaton a decair em outros graus de liberdade (decaimento não-perturbativo), de modo que teremos uma produção exponencial de tais partículas, que estarão longe de atingir o equilíbrio térmico. Em alguns

modelos, o preheating consegue ser completamente eficiente, assim como em outros pode se mostrar completamente ineficiente. Tudo dependerá do modelo de potencial adotado e das interações consideradas entre os graus de liberdade.

Na segunda fase,o reheating, temos o decaimento usual radiativo do inflaton em outras partículas com as quais esteja acoplado. Além disso, os produtos de tal decaimento atingem o equilíbrio térmico rapidamente, de forma que conseguimos obter um dos parâmetros mais significativos durante essa época, que é a temperatura de reheating, T_{re}. Assim como no preheating, dependemos do modelo de potencial adotado e das interações que serão consideradas.

A era inflacionária já está relativamente bem vinculada atualmente. Sabemos que o número de e-folds é de aproximadamente 50 a 60, que o valor do índice espectral está em torno $0,9649 \pm 0,0042$, que a razão tensor escalar tem que ser inferior a $0,064$ e que a amplitude do espectro de potência é de aproximadamente $2,101 \times 10^{-9}$. Em contrapartida, a era pós-inflacionária ainda é bastante obscura. O que conseguimos é estabelecer limites superiores e inferiores para determinados parâmetros como, por exemplo, a temperatura de reheating, mas apenas considerando casos extremos.

Ainda há muito o que desenvolver, principalmente a respeito do período pós-inflacionário. Necessitamos de mais dados experimentais, a fim de diminuir as janelas dos parâmetros e de encontrar uma maneira de fazer a conexão da inflação com a física de partículas, repovoando assim o universo e obtendo a evolução padrão da cosmologia do Big Bang.

Referências Bibliográficas

Aghanim N., Akrami Y., Ashdown M., Aumont J., Baccigalupi C., Ballardini M., Banday A., Barreiro R., Bartolo N., Basak S. e. a., Planck 2018 results. VI. Cosmological parameters, 2018

Akrami Y., Arroja F., Ashdown M., Aumont J., Baccigalupi C., Ballardini M., Banday A., Barreiro R., Bartolo N., Basak S. e. a., Planck 2018 results. X. Constraints on inflation, 2018

Baumann D., Inflation. In Physics of the large and the small, TASI 09, proceedings of the Theoretical Advanced Study Institute in Elementary Particle Physics, Boulder, Colorado, USA, 1-26 June 2009 , 2011, p. 523

Butikov E., Analytical expressions for stability regions in the Ince-Strutt diagram of Mathieu equation, American Journal of Physics, 2018, vol. 86, p. 257

Champneys A., , 2011 Dynamics of Parametric Excitation. Springer New York pp 183–204

Cook J. L., Dimastrogiovanni E., Easson D. A., Krauss L. M., Reheating predictions in single field inflation, Journal of Cosmology and Astroparticle Physics, 2015, vol. 1504, p. 047

Dai L., Kamionkowski M., Wang J., Reheating constraints to inflationary models, Physical Review letters, 2014, vol. 113, p. 041302

d'Inverno R. A., Introducing Einstein's relativity. Clarendon Press, 1992

Dodelson S., Modern cosmology. Elsevier, 2003

Einstein A., Cosmological Considerations in the General Theory of Relativity, Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.), 1917, vol. 1917, p. 142

Friedman A., On the Curvature of space, Z. Phys., 1922, vol. 10, p. 377

Friedmann A., On the Possibility of a world with constant negative curvature of space, Z. Phys., 1924, vol. 21, p. 326

Goncharov A., Linde A., Mukhanov V., The global structure of the inflationary universe, International Journal of Modern Physics A, 1987, vol. 2, p. 561

Greene P. B., Kofman L., Linde A. D., Starobinsky A. A., Structure of resonance in preheating after inflation, Physical Review, 1997, vol. D56, p. 6175

Guth A., The Inflationary Universe: A Possible Solution to the Horizon and Flatness Problems, Physical Review, 1981, vol. D23, p. 347

Guth A., Was Cosmic Inflation the 'Bang' of The Big Bang, Beam Line: A periodical of particle physics, 1997, vol. 27, p. 14

Guth A., The inflationary universe: the quest for a new theory of cosmic origins. Random House, 1998

Guth A., Inflation and the new era of high precision cosmology, MIT Physics Annual, 2002, pp 28–39

Guth A., Kaiser D. I., Inflationary cosmology: Exploring the universe from the smallest to the largest scales, Science, 2005, vol. 307, p. 884

Hawking S., The development of irregularities in a single bubble inflationary universe, Physics Letters B, 1982, vol. 115, p. 295

Hertzberg M. P., On inflation with non-minimal coupling, Journal of High Energy Physics, 2010, vol. 11, p. 023

Hubble E., A relation between distance and radial velocity among extra-galactic nebulae, Proceedings of the National Academy of Sciences, 1929, vol. 15, p. 168

Kofman L., Linde A., Starobinsky A. A., Towards the theory of reheating after inflation, Physical Review, 1997, vol. D56, p. 3258

Kofman L., Linde A. D., Starobinsky A. A., Reheating after inflation, Physical Review Letters, 1994, vol. 73, p. 3195

Landau L. D., Lifshitz E. M., Mecânica. Hemus, 2004

Lemaître G., A homogeneous universe of constant mass and increasing radius accounting for the radial velocity of extra-galactic nebulae, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 1927, vol. 91, p. 483

Lemaître G., Contributions to a British Association Discussion on the Evolution of the Universe, Nature, 1931, vol. 129, p. 704–706

Lemoine M., Martin J., Peter P., Inflationary cosmology. vol. 738, Springer, 2007

Liddle A., An introduction to modern cosmology. John Wiley & Sons, 2015

Liddle A. R., Leach S. M., How long before the end of inflation were observable perturbations produced?, Physical Review, 2003, vol. D68, p. 103503

Liddle A. R., Lyth D. H., Cosmological inflation and large-scale structure. Cambridge University Press, 2000

Linde A., A new inflationary universe scenario: a possible solution of the horizon, flatness, homogeneity, isotropy and primordial monopole problems, Physics Letters B, 1982, vol. 108, p. 389

Linder C. C., Particle physics and inflationary cosmology. CRC press, 1990

Lyth D. H., Liddle A. R., The primordial density perturbation: Cosmology, inflation and the origin of structure. Cambridge University Press, 2009

McLachlan N. W., Theory and application of Mathieu functions. Clarendon Press, 1951

Magnus W., Winkler S., Hill's Equation, Interscience Tracts in Pure and Applied Mathematics, 1966

Misner C. W., Thorne K. S., Wheeler J. A., Kaiser D. I., Gravitation. Princeton University Press, 2017

Penzias A., Wilson R., A Measurement of excess antenna temperature at 4080-Mc/s, Astrophysical Journal, 1965, vol. 142, p. 419

Rosa J., Introduction to Cosmology, 13 fev. - 12 jun. de 2012

Sasaki M., Large scale quantum fluctuations in the inflationary universe, Progress of Theoretical Physics, 1986, vol. 76, p. 1036

Sträng J. E., On the characteristic exponents of Floquet solutions to the Mathieu equation, arXiv preprint math-ph/0510076, 2005

Strogatz S., Nonlinear dynamics and chaos: with applications to physics, biology, chemistry, and engineering. Addinson-Wesley Publishing Company, 1994

Wald R. M., General relativity. University of Chicago Press, 2007

Weinberg S., Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity. John Wiley & Sons, 1972

Yerchuck D., Dovlatova A., Yerchak Y., Borovik F., Analytical Solution of Mathieu Equation, arXiv preprint quant-ph/1401.5348, 2014

Ávila K. M. V., Pêndulos paramétricos: ponto de suspensão oscilante e comprimento variável, Universidade Estadual do Ceará, 2012, Dissertação de Mestrado, 63 p.

Apêndice

Apêndice A

Aproximação de de Sitter

O "universo de de Siter" é uma solução para as equações de Einstein na qual o universo tem o comportamento regido por uma constante cosmológica. O espaço de de Sitter é análogo ao de Minkowski, considerando-se, no entanto um universo esférico em vez de plano.

A aproximação de de Sitter foi utilizada na seção 2.4.1 e com ela chegamos à condição de slow-roll. Derivando (2.4) em relação ao tempo, teremos

$$2\,\frac{\dot{a}}{a}\frac{\ddot{a}a-\dot{a}^2}{a^2}=\frac{1}{3}\dot{\rho}\quad\Rightarrow\quad 2\,\frac{\dot{a}}{a}\left[\frac{\ddot{a}}{a}-\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2\right]=\frac{1}{3}\dot{\rho}\quad\Rightarrow\quad \frac{\ddot{a}}{a}=\frac{1}{6}\,\dot{\rho}\,\frac{a}{\dot{a}}+\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2,$$

e igualando a (2.5),

$$\dot{\rho}\,a^3+3(\rho+p)a^2\dot{a}=0, \tag{A.1}$$

que é a equação de conservação energia-momento. Fixando $\omega=\frac{p}{\rho}$ como parâmetro em (A.1),

$$\dot{\rho}+3\rho(1+\omega)\frac{\dot{a}}{a}=0\qquad\Rightarrow\qquad \rho\sim a^{-3(1+\omega)}, \tag{A.2}$$

e para que ρ (densidade de energia do campo do inflaton) seja basicamente constante durante a época inflacionária, precisamos que $\omega=-1$, o que implica em $\rho=-p$.

Com isso, concluímos que $V(\phi)\gg\dot{\phi}^2$. Portanto, $\epsilon\to 0$.

Porém, não podemos tratar esse período como um espaço de de Sitter puro, pois, conforme vimos na equação (1), teríamos um espectro completamente invariante. Tal conclusão não está em acordo com os dados obtidos nas medições do Planck, os quais indicam um leve desvio do índice n_s.

O correto, portanto, é trabalharmos com o espaço chamado de quasi-de Sitter. utilizamos o de de Sitter puro apenas por questão de simplicidade nas contas. Depois, podemos fazer a extrapolação para o outro espaço.

Na Figura A.1 está demonstrado como seria a evolução do universo em diferentes tipos de espaços.

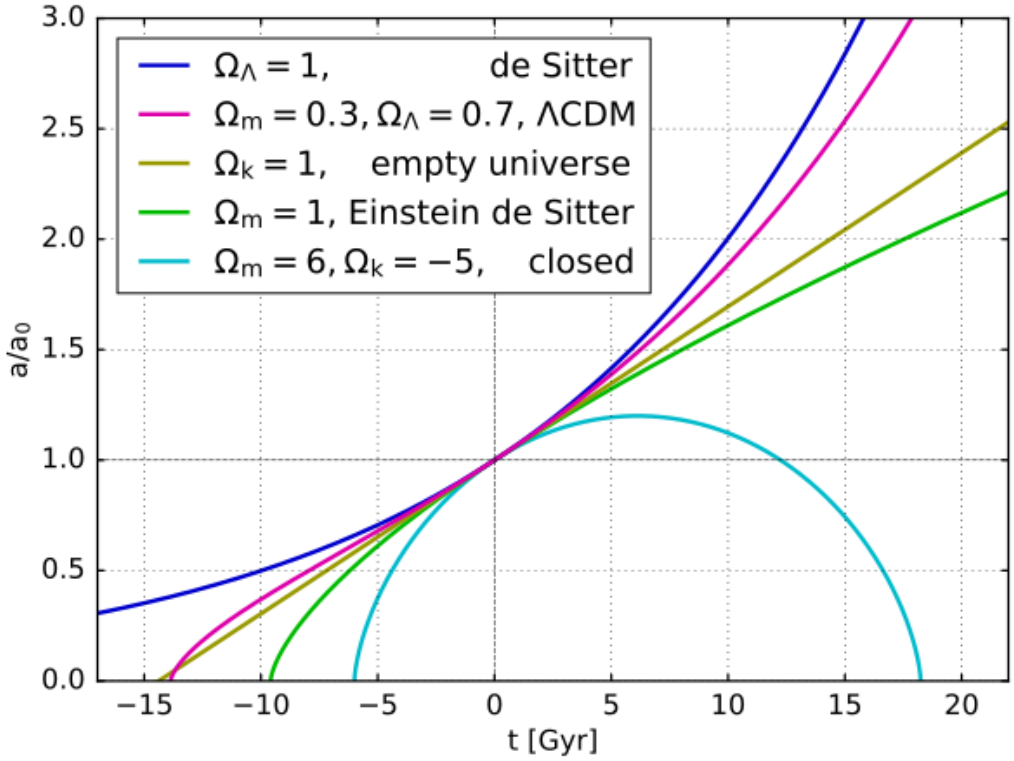

Figura A.1: Evolução do fator de escala (ou tamanho) do universo no tempo (em bilhões de anos) considerando diferentes valores para o parâmetro de densidade, equação (2.14). Notemos que o crescimento mais acelerado ocorre num "universo de de Siter" (linha azul escuro).

Apêndice B

Estabilidade de sistemas dinâmicos

Quando estudamos sistemas dinâmicos, muitas vezes não conseguimos resolver as equações diferenciais que os regem. Para contornar esse problema, Henri Poincaré procurava, já ao final do século XIX, uma visão mais qualitativa do comportamento desses sistemas.

As referências principais desse apêndice são: Ávila (2012), Butikov (2018), Champneys (2011), Sträng (2005), Strogatz (1994).

Vamos fazer a análise de um sistema que seja regido por uma equação específica, na qual conhecemos todo o seu comportamento, a fim de melhor elucidar o que iremos abordar nesse apêndice. Consideremos, por exemplo, o sistema dirigido pela seguinte equação:

$$\dot{x} = \sin x\cdot \tag{B.1}$$

Em geral, o que buscamos quando tratamos de sistemas dinâmicos é o seu espaço de fase, pois ele nos auxilia na compreensão do comportamento do sistema, visto que representa sua evolução temporal por meio de suas variáveis dinâmicas. Em outras palavras, o espaço de fase determina qual o conjunto de pontos possíveis nos quais o sistema pode estar, determinando o seu estado.

Retornando à equação (B.1), se não conhecêssemos o comportamento da função seno, poderíamos atribuir valores para x, a fim de obtermos os respectivos valores para $\dot{x}$ e construirmos o espaço de fase da equação (B.1). Obteríamos algo semelhante à Figura B.1. Realizando esse procedimento repetidas vezes, chegaríamos ao gráfico B.2.

Analisando a Figura B.2 e a equação (B.1), concluímos que, nos pontos em que a função seno é positiva, $\dot{x} > 0$, o que significa que x cresce. Já nos pontos em que tal função é negativa, $\dot{x} < 0$ e x decresce. Por fim, quando a função é nula, temos que $\dot{x} = 0$, ou seja, x não varia. Com isso, podemos construir um campo vetorial no espaço de fase que, nesse caso, será unidimensional, como mostrado na Figura B.3.

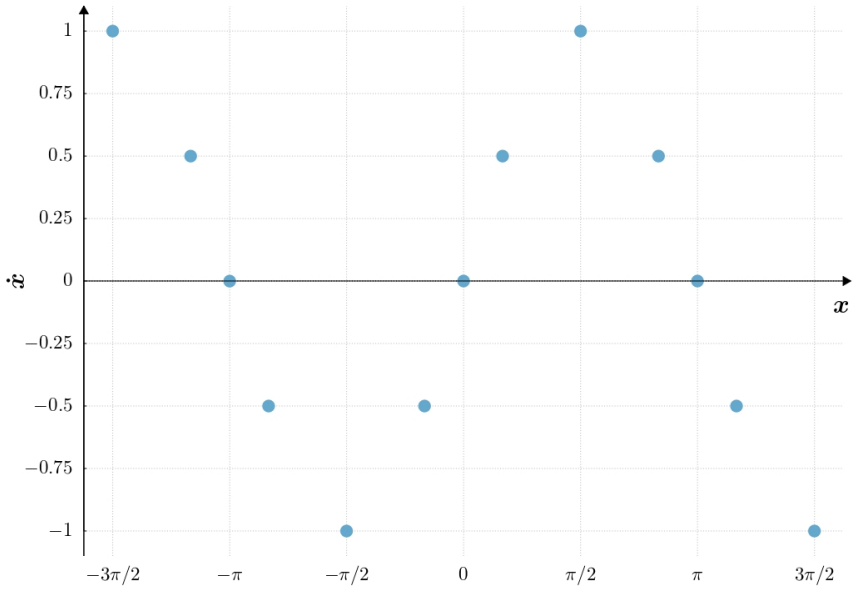

Figura B.1: Gráfico com alguns valores para a equação $\dot{x} = \sin x$. O conjunto dos pontos $(x, \dot{x})$ nos ajuda a compreender qual a forma do espaço de fase desta função.

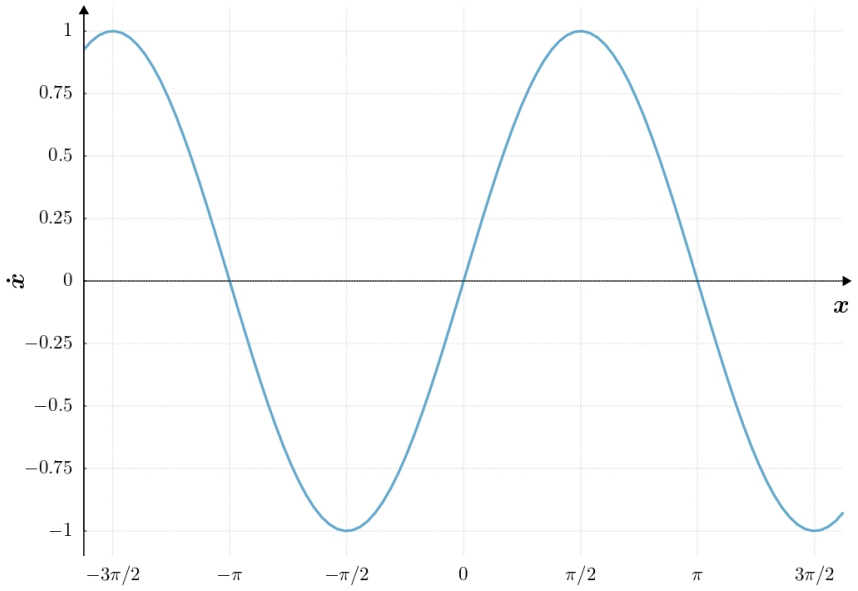

Figura B.2: Espaço de fase do sistema regido pela equação (B.1), obtido pela interpolação da Figura B.1. Com esse procedimento, podemos visualizar graficamente a função B.1.

Observando a Figura B.3, notamos que o "fluxo" vai para direita, quando $\dot{x} > 0$, e para esquerda, quando $\dot{x} < 0$. Além disso, mesmo em regiões nas quais $\dot{x} > 0$ (por exemplo, entre $0 < x < \pi$), as taxas de velocidade desse fluxo são diferentes: cresce aceleradamente entre $0 < x < \pi/2$ e cresce desaceleradamente entre $\pi/2 < x < \pi$. Ademais, podemos

notar que há dois tipos de pontos fixos:

- os do tipo $\dot{x}_n = 2n\pi$, com $n \in \mathbb{Z}$, que são considerados **pontos estáveis** (ou atratores), pois os fluxos em ambos os lados "partem" dele em direções opostas; e,
- os do tipo $\dot{x}_n = (2n+1)\pi$, com $n \in \mathbb{Z}$, que são ditos **pontos instáveis** (ou fontes), pois os fluxos em ambos os lados vão em sua direção.

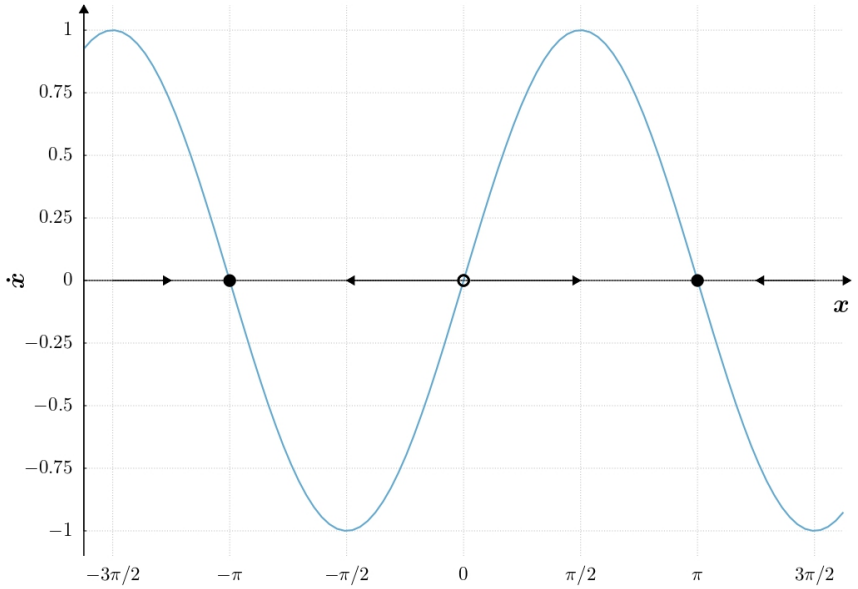

Figura B.3: Campo vetorial da função $\dot{x} = \sin x$ mostrando os pontos considerados estáveis e os pontos instáveis de tal função.

Desta forma, podemos obter o comportamento da função $x(t)$. Supondo que $x_0 = \pi/6$, teremos que, entre $\pi/6 < x < \pi/2$, a função apresentará um comportamento de crescimento acelerado. Em $x = \pi/2$, teremos um ponto de inflexão e, entre $\pi/2 < x < \pi$, a função apresentará um comportamento de crescimento desacelerado. Já em $x = \pi$, teremos um ponto estável. O gráfico de $x(t)$, na região $\pi/6 < x < \pi$, é apresentado na Figura B.4

Retornando à equação (B.1), ao integrá-la, teremos

$$t = \ln \left| \frac{\csc x_0 + \cot x_0}{\csc x + \cot x} \right| \tag{B.2}$$

e, para encontrarmos a solução $x \equiv x(t)$, teríamos que inverter a equação (B.2) (Strogatz (1994)). Como podemos perceber, essa não é uma ação simples. Além do mais, várias equações diferenciais, mesmo em casos de fluxos unidimensionais, não possuem soluções conhecidas.

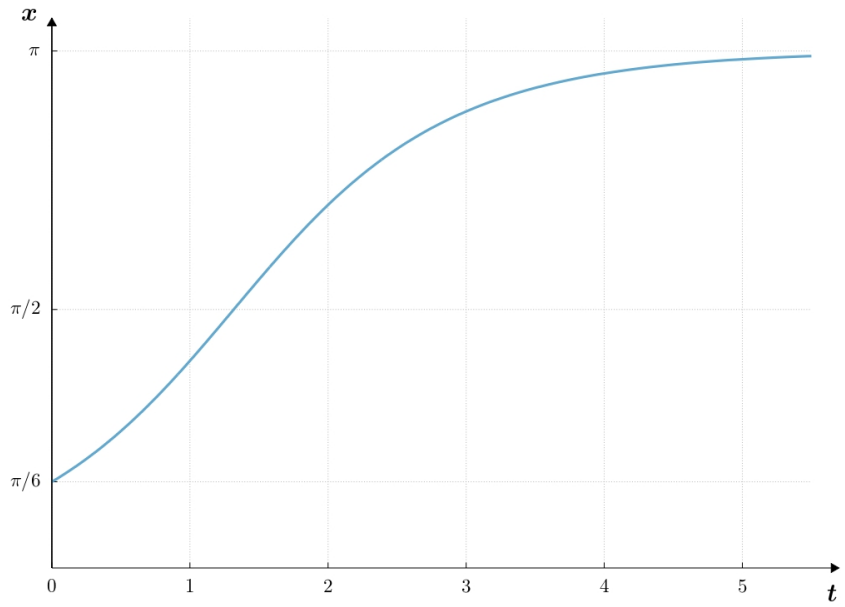

Figura B.4: Comportamento da função $x = x(t)$ da equação B.1, entre $\pi \leq x \leq \pi/6$, extraído do campo vetorial dessa equação, representado na Figura B.3.

O que acontecerá então se estivermos lidando com fluxos bidimensionais?

Em espaços de fase que possuem mais de duas variáveis dinâmicas, surge uma complicação extra, pois teremos uma infinidade de pontos a mais para representar a evolução do possível sistema.

Consideremos um oscilador harmônico simples, cuja equação diferencial é dada por

$$m\ddot{x} + kx = 0, \tag{B.3}$$

com m sendo a massa do corpo preso à mola, k a constante elástica da mola e x o deslocamento da massa ao seu ponto de equilíbrio. Tal sistema é conhecido como massa-mola, Figura B.5.

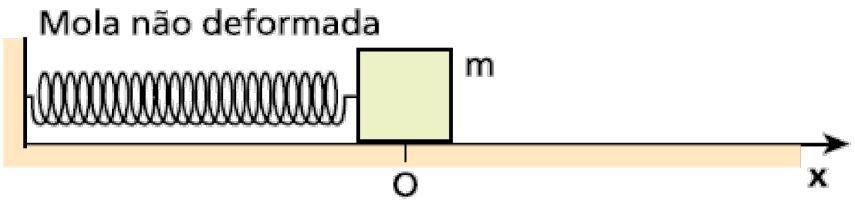

Figura B.5: Representação do sistema massa-mola, com constante elástica k, massa m e deslocamento x. Nessa situação específica, não observamos deformação na mola.

Linearizando a equação (B.3), obtemos

$$\dot{x} = \nu, \tag{B.4}$$

$$\dot{\nu} = -\frac{k}{m}x. \tag{B.5}$$

O plano de fase do sistema, (x, ν), será representado por um campo vetorial. Dessa forma, escolhendo um valor para x, conseguimos definir a direção de variação de ν (isto é, determinar o sinal de $\dot{\nu}$).

Se estivermos, por exemplo, sobre o eixo $x = 0$, a equação (B.5) nos dá $\dot{\nu} = 0$ e os vetores que estarão "saindo" do eixo $x = 0$ serão paralelos ao eixo x, pois não temos variação em ν. Analogamente, se estivermos sobre o eixo $\nu = 0$, a equação (B.4) nos dá $\dot{x} = 0$ e os vetores "saindo" do eixo $\nu = 0$ serão paralelos ao eixo ν.

Podemos determinar o sentido dos vetores mencionados no parágrafo anterior olhando para a equação (B.5). Vamos supor que a massa m é solta de um ponto $x = A$, tal que $A > 0$. Nesse ponto, $\dot{x} = 0$ e, ao passar por $x = 0$, $\dot{x}$ atingirá o seu máximo (Figura B.6).

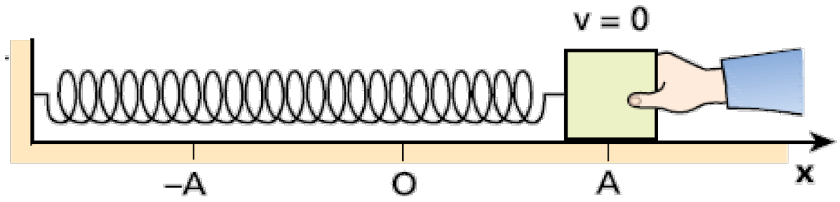

Figura B.6: Representação do mesmo sistema massa-mola da Figura B.5 apresentando deformação positiva $A(A > 0)$ e massa partindo do repouso.

De (B.5), à medida que x cresce, $\dot{\nu}$ decresce. Logo, o vetor correspondente também sofrerá uma variação negativa, enquanto que, no caso contrário (x decrescendo), tal vetor sofrerá uma variação positiva. Traçando o plano de fase, teremos a Figura B.7.

Com o auxílio da Figura B.7, percebemos que, dado um ponto inicial $(x_0, \nu_0) \neq (0, 0)$, o sistema irá evoluir com trajetórias em torno da origem, formando órbitas fechadas. A origem é considerada um ponto fixo nessa situação, pois $(\dot{x}(0), \dot{\nu}(0)) = (0, 0)$.

Representando geometricamente todas as trajetórias possíveis do sistema massa-mola em um plano, obtemos várias curvas e cada uma delas representará uma condição inicial diferente. Tal representação é conhecida como retrato de fase. Na Figura B.8, temos a representação do retrato de fase do nosso sistema em questão.

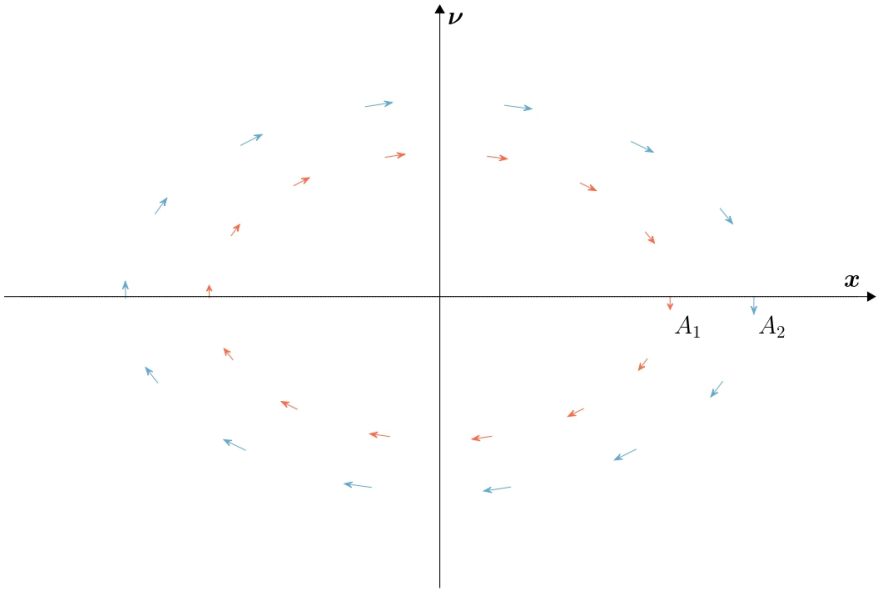

Figura B.7: Plano de fase do sistema massa-mola representando o campo vetorial para valores de amplitude distintos (A_1 e A_2). A justificativa para a direção de cada seta é discutida no texto.

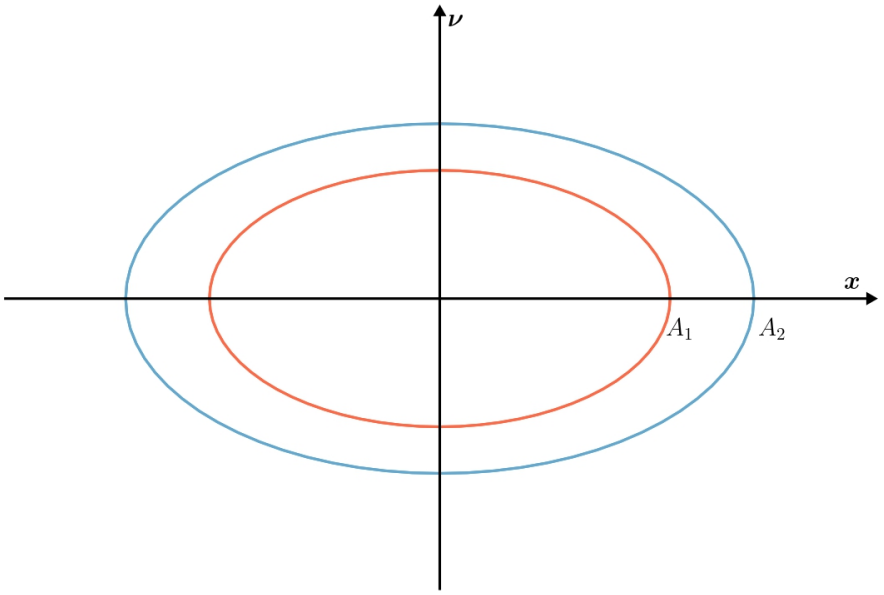

Figura B.8: Retrato de fase do sistema massa-mola mostrando diferentes trajetórias para valores de amplitude distintos (A_1 e A_2). As trajetórias desse tipo de sistema são periódicas, desde que respeitemos a tensão máxima que podemos imprimir na mola, e possuem estabilidade neutra, que é um tipo de estabilidade de Liapunov.

Notemos que essas trajetórias possuem movimentos periódicos, ou seja, a massa sofre um movimento de oscilação. Além do mais, se dividirmos (B.4) por (B.5) e integrarmos a

equação - separando as variáveis -, obteremos equações de elipses da forma

$$\nu^2 + \left(\frac{k}{m}\right)^2 x^2 = C, \tag{B.6}$$

onde $C \geq 0$ é uma constante. Interessante notar que a equação (B.6) é equivalente à condição de conservação da energia.

As trajetórias da Figura B.8 possuem uma estabilidade que não podemos chamar de atrativa, pois, se realizássemos uma pequena perturbação no sitema, a trajetória alterada não convergiria para a trajetória original. Também não podemos dizer que é repulsiva, pois a trajetória alterada não tende a se afastar da original. Possuem um tipo de estabilidade chamada estabilidade neutra, na qual um pequeno deslocamento faria com que o sistema permanecesse em uma trajetória próxima. Mais precisamente, no sistema massa-mola, se deslocássemos um pouco mais a massa m, sua trajetória passaria para uma outra elipse vizinha.

Quando tratamos de sistemas que possuem mais de duas variáveis dinâmicas, um outra maneira de obtermos informações sobre eles é utilizarmos o que chamamos de mapa de Poincaré, denotado por P. Nesse mapa, observamos as intersecções da trajetória do sistema com um dado plano transveral S, chamado de plano de Poincaré (Figura B.9). Tal conjunto de pontos de intersecção corresponderá a um subespaço do sistema dinâmico contínuo.

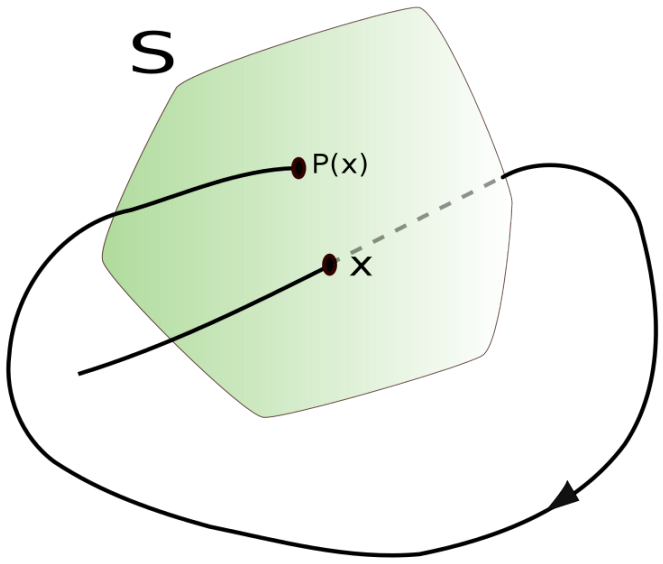

Figura B.9: Plano de Poincaré, S, no qual observamos as intersecções da trajetória a fim de simplificar o estudo de determinadas equações.

Se $x_k \in S$ representa a k-ésima intersecção, o mapa de Poincaré é definido por

$$x_{k+1} = P(x_k)\cdot \tag{B.7}$$

Se x^* é um ponto fixo de P, teremos que $P(x^*) = x^*$. Isso significa que um sistema apresenta uma órbita fechada, pois, dado um período T, a órbita retorna para x^*. Dessa maneira, podemos determinar a estabilidade de órbitas fechadas estudando o comportamento do mapa de Poincaré próximo a pontos fixos.

No restante deste apêndice, iremos abordar o efeito qualitativo relacionado à estabilidade de sistemas dinâmicos que apresentam oscilações paramétricas.

B.1 Oscilações Paramétricas

Uma oscilação paramétrica é caracterizada quando a ação de uma força externa sobre o oscilador harmônico resulta em uma variação temporal dos parâmetros do sistema (Landau e Lifshitz (2004)). Em geral, tais parâmetros variam de forma periódica e, em alguns casos, podemos linearizar as equações diferenciais que regem tais sistemas, facilitando sua resolução. Como exemplos de equações paramétricas, podemos citar as equações de Hill e de Mathieu, sendo esta última um caso especial da primeira (Magnus e Winkler (1966)). Discutiremos acerca da equação de Mathieu com mais detalhes na seção (B.2).

Existem diversos sistemas que possuem oscilações paramétricas, tais como:

- pêndulo com comprimento do fio variável: nesse caso, o parâmetro variável é o comprimento do fio que oscila à medida que o pêndulo está oscilando;
- pêndulo com ponto de suspensão móvel: nesse caso, o parâmetro variável é o ponto onde o fio encontra-se pendurado, que varia de posição com o tempo;
- criança em um balanço: nesse caso, o parâmetro variável é o momento de inércia da criança (ou centro de gravidade), que modifica a cada vez que encolhe ou estica as pernas no balanço.

Em todos os exemplos acima, podemos obter suas respectivas equações diferenciais, que serão não-lineares. Podemos linearizá-las, restringindo seus movimentos para pequenos ângulos, por exemplo. Dessa maneira, tais equações diferenciais reduzem-se ao que conhecemos como equação de Mathieu.

B.2 Equação de Mathieu

A equação de Mathieu é amplamente utilizada em sistemas dinâmicos. Foi primeiramente estudada por É. Mathieu no cenário de modos vibracionais de uma membrana elíptica (McLachlan (1951)). Sua equação geral é da forma

$$\frac{d^2y}{dx^2} + [a - 2q\cos(2x)]\, y = 0, \tag{B.8}$$

onde a e q são parâmetros característicos que podem assumir quaisquer valores. A solução dessa equação é a série de Floquet,

$$y = e^{\mu x}\Sigma\ c_n\ e^{2inx} + e^{-\mu x}\Sigma\ d_n\ e^{2inx}, \tag{B.9}$$

onde $\mu = \mu(a, q)$ (Yerchuck et al. (2014)). Podemos obter o valor númerico de μ utilizando o teorema de Whittaker-Hill (não iremos abordá-lo neste anexo). A fim de se chegar nessa solução, utilizamos o teorema de Floquet, abaixo enunciado.

Teorema: Em uma equação diferencial do tipo $y''(t) + \Phi(t)\ y(t) = 0$, onde $\Phi(t) = \Phi(t+T)$, ou seja, $\Phi(t)$ é uma função periódica de período T, existe uma solução não trivial $y(t)$, tal que $y(t+T) = \rho\ y(t)$, onde ρ é uma constante denominada multiplicador de Floquet.

Logo, podemos estudar a estabilidade da solução (B.9) analisando o valor de μ. Vejamos os seguintes casos:

- μ sendo real (com exceção de $\mu = 0$) : trajetórias instáveis, pois, enquanto uma das soluções vai a zero, a outra tende a infinito. Dessa maneira, concluímos que um pequeno deslocamento do ponto de equilíbrio em um sistema paramétrico levará a uma oscilação cuja amplitude aumenta. Tal fenômeno é conhecido como ressonância paramétrica.

- μ sendo imaginário: trajetórias estáveis, visto que as soluções serão apenas do tipo oscilantes.

Dessa forma, podemos construir um diagrama de estabilidade, conhecido como diagrama de Ince-Strutt, considerando o plano $a - q$ - parâmetros da equação (B.8) que determinam o valor de μ da solução (B.9). Com ele, podemos determinar em quais regiões de pontos (a, q) nosso sistema terá comportamento estável ou instável. Analisar Figura B.10.

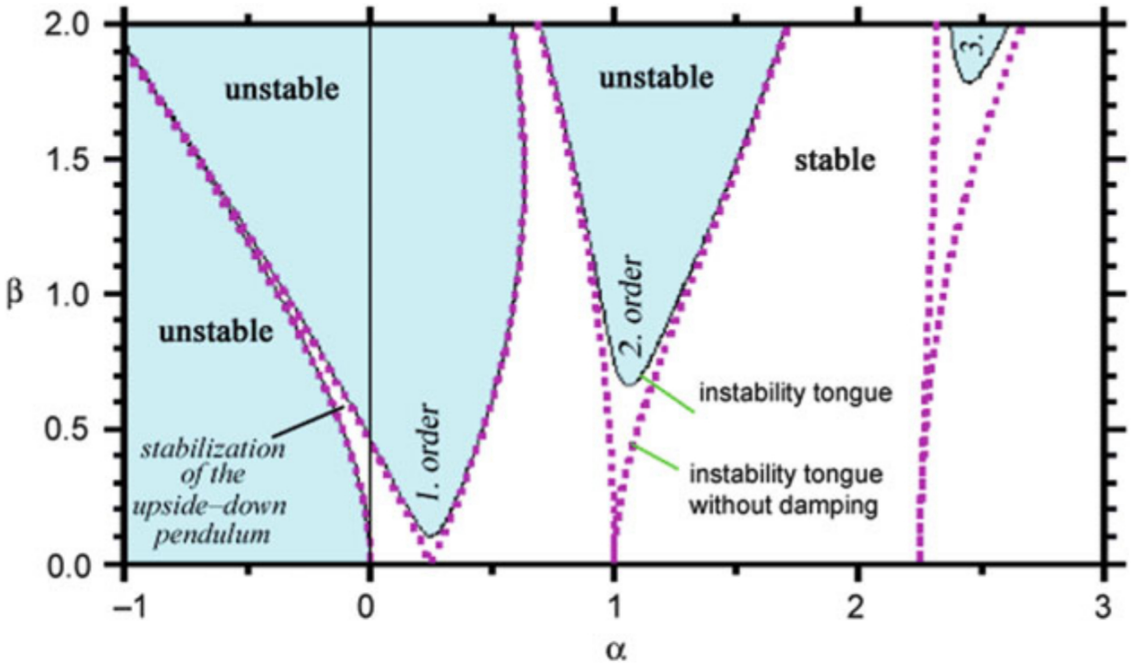

Figura B.10: Diagrama de Ince-Strutt de um oscilador harmônico amortecido cuja equação é dada por $\ddot{x} + \delta\dot{x} + (\alpha + \beta\cos t)x$, com $\delta = 0, 1$. Notemos que conseguimos observar as bandas de instabilidade e a forma como o amortecimento modifica tais bandas (Champneys (2011)).

B.2.1 Aplicação da equação de Mathieu ao pêndulo com ponto de suspensão móvel

Nesta subsecção, mostraremos como se chegar à equação de Mathieu de um sistema oscilatório. Consideremos o problema do pêndulo com ponto de suspensão móvel (Figura B.11). Seja o ponto de suspensão, P, regido por uma função oscilante na vertical, $p(t)$.

Assim, a equação do ângulo formado entre a vertical e o pêndulo é dada por

$$\ddot{\theta} + \left(\frac{g + \ddot{p}(t)}{L}\right)\theta = 0 \cdot \tag{B.10}$$

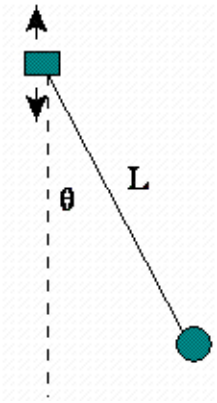

Figura B.11: Pêndulo com ponto de suspensão variável movendo-se na vertical.

Queremos estudar o pêndulo em sua posição invertida, isto é, $\theta \approx \pi$. Faremos a substituição de variável $\theta \to x = \theta - \pi$, tal que $|x| \ll 1$. Logo,

$$\ddot{x} + \left(\frac{g + \ddot{p}(t)}{L}\right)(-x) = 0 \cdot \tag{B.11}$$

Considerando $p(t)$ uma função oscilatória do tipo $p(t) = A\cos\omega t$ e fazendo a substituição $\omega t \to 2\tau$, obteremos

$$x'' + \left(-\frac{4g}{\omega^2 L} + \frac{4A}{L}\cos 2\tau\right)x = 0 \ , \tag{B.12}$$

com x'' sendo a segunda derivada de x em relação a τ.

Rotulando

$$a = -\frac{4g}{\omega^2 L} \qquad \text{e} \qquad q = -\frac{2A}{L} \ , \tag{B.13}$$

recuperamos a equação de Mathieu (B.8). Um valor pequeno de q (em módulo) significa que a amplitude de oscilação do ponto de suspensão é pequena se comparada ao comprimento do fio do pêndulo.

Dessa maneira, podemos analisar esse sistema estudando a equação

$$x'' + (a - 2q\cos 2\tau)\,x = 0 \ , \tag{B.14}$$

e determinar para quais valores de a e q teremos uma solução estável. Assim, poderíamos aplicar a esse sistema o que foi desenvolvido ao longo desse apêndice.