UFPB

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciência Exatas e da Natureza
Coordenação dos Cursos de Pós-Graduação em Física

Promovendo Matéria Escura Leve em Cosmologia Não-Padrão

Vinícius Luiz Barbosa Oliveira

João Pessoa - PB, 24 de agosto de 2021

Vinícius Luiz Barbosa Oliveira

Promovendo Matéria Escura Leve em Cosmologia Não-Padrão

Dissertação de Mestrado realizada no Departamento de Física da UFPB, sob orientação do Prof. Dr. Carlos Antônio de Sousa Pires, para obtenção do grau de Mestre em Física.

Universidade Federal da Paraíba – UFPB

Centro de Ciências Exatas e da Natureza

Orientador: Carlos Antônio de Sousa Pires

João Pessoa - PB

24 de agosto de 2021

Catalogação na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

O48p Oliveira, Vinícius Luiz Barbosa.
Promovendo matéria escura leve em cosmologia não-padrão / Vinícius Luiz Barbosa Oliveira. - João Pessoa, 2021.
102 f. : il.

Orientação: Carlos Antônio de Sousa Pires.
Dissertação (Mestrado) - UFPB/CCEN.

1. Física. 2. Matéria escura. 3. Cosmologia não-padrão. 4. Abundância relíquia. I. Pires, Carlos Antônio de Sousa. II. Título.

UFPB/BC CDU 53(043)

Elaborado por Gracilene Barbosa Figueiredo - CRB-15/794

Ata da Sessão Pública da Defesa de Dissertação de **Mestrado** do aluno **Vinicius Luiz Barbosa Oliveira**, candidato ao Título de Mestre em Física na Área de Concentração Física das Partículas Elementares e Campos.

vinte e sete dias do mês de julho do ano de dois mil e vinte e um, às 10:00, reuniram-se, remotamente, os membros da Banca Examinadora constituída para examinar o candidato ao grau de Mestre em Física na área de Física das Partículas Elementares e Campos, **Vinicius Luiz Barbosa Oliveira**. A comissão examinadora composta pelos professores doutores: Carlos Antônio de Sousa Pires (DF/UFPB), orientador e presidente da banca examinadora, Valdir Barbosa Bezerra (DF/UFPB) e António de Aguiar e Pestana de Morais (UA). Dando início aos trabalhos, o Prof. Carlos Antônio de Sousa Pires comunicou aos presentes a finalidade da reunião. A seguir, passou a palavra o candidato para que o mesmo fizesse, oralmente, a exposição do trabalho de dissertação intitulado "*Promovendo Matéria Escura Leve em Cosmologia Não-Padrão*". Concluída a exposição, o candidato foi arguido pela Banca Examinadora que emitiu o seguinte parecer: **"aprovado".** Assim sendo, deve a Universidade Federal da Paraíba expedir o respectivo diploma de Mestre em Física na forma da lei. E para constar, eu, José Sérgio Trindade Silva, lavrei esta ata que vai assinada por mim e pelos membros da Banca Examinadora. João Pessoa, **27 de julho de 2021**.

Prof. Dr. Carlos Antônio de Sousa Pires
Orientador - UFPB

Prof. Dr. Valdir Barbosa Bezerra
UFPB

Prof. Dr. António de Aguiar e Pestana de Morais
UA

Link da reunião:

Aos meus pais,
por sempre estarem comigo em todos os momentos.

Agradecimentos

Agradeço a todos os meus familiares, especialmente, aos meus pais, Marizete e Luiz Carlos, por estarem sempre presentes na minha jornada e me apoiando nas minhas decisões.

Agradeço ao professor Carlos Pires, pela orientação, dedicação e pelas suas lições de vida, além de sempre estar preocupado com a formação da minha carreira acadêmica.

Agradeço aos amigos que a física trouxe para a minha vida. Em especial a Jefferson, João Paulo, William, Jacinto e Leandro pelas discussões enriquecedoras durante toda a graduação e mestrado. E Thiago e Igor, pelas discussões filosóficas.

Agradeço à Maíra Dutra que me coorientou voluntariamente, e sempre estava aberta e disposta a me auxiliar. Sou também imensamente grato pela sua preocupação com a minha carreia acadêmica. Sua honestidade, dedicação e perfeccionismo me serviram de exemplo a serem seguidos.

Agradeço aos meus familiares residentes em João Pessoa, os quais me acolheram em sua residência durante minha graduação, em especial ao meu primo Arisson, quem compartilhei quarto durante este período.

Agradeço aos meus amigos fiéis da minha cidade natal, Recife, que estiveram presente durante toda essa minha trajetória, e sempre me proporcionaram experiências ímpares.

Agradeço ao professor Paulo Sérgio, por transmitir o seu fascínio pela física. O que me motivou ainda mais na minha vida acadêmica.

Agradeço também ao professor Farinaldo, pela sua dedicação e grande impacto na comunidade acadêmica local.

Agradeço ao CNPQ, pelo apoio financeiro.

"Se eu fosse planta,
gostaria de um meio favorável
que me fizesse crescer...
Mas sou ser humano,
prefiro um meio adverso
que me desafie crescer."
(Hermógenes)

Resumo

A Matéria Escura (ME) é um dos principais enigmas da atualidade. Indícios da sua existência no nosso universo vêm sendo observados há décadas e várias são as teorias que tentam explicá-la. A proposta que assume a ME sendo composta por partículas é a que atualmente possui maior credibilidade ao concordar com os vínculos experimentais. Entretanto, o Modelo Padrão das Partículas Elementares (MP) não possui nenhum candidato que satisfaça as características da ME, as quais são: ser estável, eletricamente neutra, fria ou morna e não-bariônica. Diante do exposto, surge a necessidade de irmos além do MP e estendê-lo. Há muitas extensões do MP que podem fornecer candidatos a ME com diferentes propriedades (massa e interação). Contudo, a classe das WIMPs triunfaram como candidatos a ME, uma vez que elas respeitam os vínculos experimentais ao mesmo tempo em que sua interação é da escala da eletrofraca, o que as tornam experimentalmente acessíveis. Vale ressaltar que, o fato das WIMPs interagirem fracamente exige que elas sejam pesadas, com massa grosseiramente maior que $\mathcal{O}(10\text{ GeV})$, a fim de serem suficientemente abundantes. Porém, apesar do sucesso das WIMPs, até o presente momento nenhum sinal dessas partículas foi encontrado nos experimentos. Além do mais, trabalhos mais recentes mostram que uma matéria escura fria, como as WIMPs, pode afetar negativamente o período de formação de estrutura. Como uma possível solução à problemática das WIMPs iremos, nesta dissertação, apresentar um mecanismo que viabiliza a existência da matéria escura leve, com massa $\sim \mathcal{O}(2\text{ keV})$. Uma ME com essa massa tende a ser naturalmente quente e super-produzida, quando produzida via *freeze-out*, não respeitando os vínculos experimentais. Todavia, demonstraremos que se o universo primordial foi dominado por uma era de matéria seguido por um aumento considerável da entropia, logo a ME leve tem sua abundância diluída e se torna morna. Adicionalmente, mostraremos evidências de que este tipo de ME pode solucionar os problemas no período de formação de estrutura relacionados a ME fria. Finalmente, aplicaremos tal mecanismo a uma extensão do MP no qual o neutrino de mão direita mais leve é o candidato a matéria escura.

Palavras-chaves: Matéria Escura. Neutrinos de Majorana. Abundância Relíquia. Mecanismo de Diluição. Cosmologia Não-Padrão.

Abstract

Dark Matter (DM) is one of the main enigmas of our time. Evidence of its existence in our universe has been observed for decades and there are several theories that try to explain it. The one that assumes DM being composed of particles is the one that currently has the greatest credibility in agreeing with the experimental bounds. However, the Standard Model of Particle (SM) does not have any candidate that satisfies the characteristics of DM, which are: being stable, electrically neutral, cold or warm and non-baryonic. Given the above, the need arose to go beyond the SM and extend it. There are several SM extensions can provide DM candidates with different properties (mass and interactions). However, the class of WIMPs triumphed as candidates for DM, since they respect experimental bounds while their interaction is of order of the electroweak, which make them experimentally accessible. It is noteworthy that the fact that WIMPs interact weakly requires them to be heavy, with mass grossly greater than $\mathcal{O}(10$ GeV), in order to be sufficiently abundant. However, despite the success of WIMPs, so far no signs of these particles have been found in the experiments, and more recent works has shown that cold dark matter, such as WIMPs, can negatively affect the period of structure formation. As a possible solution to the WIMPs problem, we will, in this dissertation, present a mechanism that enables the existence of light dark matter, with mass $\sim \mathcal{O}(2$ keV). An DM with this mass tends to be naturally hot and over-produced, when produced via freeze-out, not respecting the experimental bounds. However, we will demonstrate that if the early universe was dominated by an period of matter followed by a considerable increase in entropy, then light DM has its abundance diluted and becomes warm. Additionally, we will show evidence that this type of DM can solve the problems in the period of structure formation related to cold DM. Finally, we will apply such a mechanism to an extension of SM in which the lighter right-hand neutrino is the dark matter candidate.

Keywords: Dark Matter. Majorana Neutrinos. Relic Abundance. Dilution Mechanism. Non-Standard Cosmology.

Lista de Publicações

- Maíra Dutra, Vinícius Oliveira, C. A. de S. Pires, Farinaldo S. Queiroz, **A model for mixed warm and hot right-handed neutrino dark matter** [1]

Lista de ilustrações

Figura 1 – Curva de rotação da galáxia NGC 3198. 6
Figura 2 – *Bullet Cluster* 7
Figura 3 – Evolução de g_e e g_s. 15
Figura 4 – Razão entre a taxa de aniquilação (espalhamento) Γ e o parâmetro de Hubble H. 20
Figura 5 – Evolução da função de distribuição no equilíbrio f^{eq}. 24
Figura 6 – Evolução de $(1 \pm f_i^{eq})$. 25
Figura 7 – *Freeze-out* de uma WIMP. 31
Figura 8 – Comportamento de S, ρ_R, ρ_ϕ e T de acordo com a cosmologia não padrão. 50
Figura 9 – Interações. 55
Figura 10 – *Freeze-out* de N_1 e N_2. 56
Figura 11 – Evolução de Y_{N_1}, Y_{N_2}, S, ρ_R, ρ_{N_2} de acordo com a cosmologia não-padrão. 62
Figura 12 – Espaço de parâmetros. 64
Figura 13 – Evolução da densidade de energia do universo. 75

Sumário

Introdução 1

1 MATÉRIA ESCURA – EVIDÊNCIAS E CANDIDATOS 3
1.1 Evidências 3
1.1.1 Aglomerados de Galáxias 3
1.1.2 Curvas de Rotação 5
1.1.3 Colisões de Aglomerados de Galáxias 7
1.1.4 CMB e BBN 8
1.2 Candidatos 8

2 TERMODINÂMICA DO UNIVERSO PRIMORDIAL 10
2.1 Termodinâmica no Equilíbrio 11
2.2 N_{eff} 16
2.3 Desacoplamento 17
2.4 Equação de Boltzmann 20
2.5 Operador Colisão 22
2.5.1 Aniquilação: $1 + 2 \leftrightarrow 3 + 4$ 25
2.5.2 Decaimento: $1 \rightarrow 2 + 3$ 27
2.6 Relíquia Térmica 27

3 WIMPS 29
3.0.1 Equação de Boltzmann – WIMPs 30
3.1 Discussão e conclusões 32

4 DECAIMENTO FORA DO EQUILÍBRIO E DILUIÇÃO 34
4.1 Decaimento Fora do Equilíbrio 35
4.1.1 Equação do Fluido 36
4.1.2 Cosmologia não-padrão 40
4.1.3 Injeção de Entropia 43
4.1.4 Abordagem Analítica 44
4.1.5 Abordagem Numérica 48
4.2 Diluição 50
4.3 Discussão e conclusões 52

5 MECANISMO DE DILUIÇÃO EM UMA EXTENSÃO DO MODELO PADRÃO 54
5.1 Interações 55

5.2 **Produção Térmica** **56**
5.3 ***Freeze-out* relativístico** **58**
5.4 **Produção Não-Térmica** **58**
5.5 **Equações acopladas dos neutrinos estereis** **59**
5.6 **Resultados Numéricos** **61**
5.7 **Espaço de parâmetros permitido** **63**
5.7.1 Contribuição para ΔN_{eff} 64
5.7.2 Formação de estrutura (*free-streaming*) 65
5.8 **Discussão e conclusões** **66**

APÊNDICES **70**

APÊNDICE A – MODELO COSMOLÓGICO PADRÃO **71**
A.1 **O Principio Cosmológico** **71**
A.2 **Universo em Expansão** **71**
A.3 **Modelo Cosmológico de Friedmann-Robertson-Walker** **73**
A.4 **Radiação Cósmica de Fundo** **76**
A.4.1 Recombinação e Desacoplamento 76
A.5 **Big Bang Nucleossíntese** **77**

APÊNDICE B – FORMAÇÃO DE ESTRUTURA **78**

APÊNDICE C – MÉDIA TÉRMICA DAS INTERAÇÕES **79**
C.1 **Média Térmica da Seção de Choque** **80**
C.2 **Média Térmica da Largura de Decaimento** **81**

APÊNDICE D – TEMPERATURA DE N_1 NA IGUALDADE RADIAÇÃO-MATÉRIA **83**

APÊNDICE E – CÁLCULO DO ΔN_{eff} **85**

REFERÊNCIAS **87**

Introdução

Em meados de 1937, o astrônomo suíço Fritz Zwicky publicou um artigo que só anos depois ficou conhecido como o primeiro trabalho que apontou para a existência de uma massa faltante no nosso Universo [2]. Zwicky a chamou de Matéria Escura. Desde então, surgiram vários outros trabalhos que evidenciaram a existência da ME. Entretanto, nada ainda se sabe sobre a sua natureza, tornando-a um dos grandes enigmas da nossa época.

Atualmente, a matéria escura parece ser o sinônimo de uma nova partícula além do Modelo Padrão, entretanto este fato não foi sempre verdade. O primeiro trabalho que tentou explicar a ME sendo composta por partículas surgiu 40 anos após o trabalho de Zwicky, em 1977 [3]. Além desta proposta, muitas outras teorias tentaram explicar a natureza da ME sem muito êxito. Como o caso das teorias que modificam a dinâmica newtoniana, chamadas de MOND [4] (do inglês: *Modified Newtonian dynamics*), a qual foi excluída como explicação à ME após trabalhos sobre a colisão entre aglomerados de galáxias [5, 6]. Nesta dissertação iremos considerar a matéria escura sendo composta por partículas.

Inicialmente, era sabido que uma partícula candidata a ME deveria ser neutra, estável e pouco interagente com as partículas do MP, mediante as primeiras evidências experimentais. De acordo com estas características, os neutrinos do MP se tornaram os primeiros fortes candidatos a matéria escura, entretanto, naquele período pouco se sabia sobre a massa dessas partículas. Apenas por volta de 1980 um estudo do decaimento beta do trítio concluiu que a massa do neutrino do elétron seria de ~ 30 eV [7]. Motivado por este fato, começaram a surgir alguns trabalhos para entender as implicações cosmológicas da matéria escura sendo composta por esses neutrinos tão leves. Um dos estudos mais importantes foi sobre a formação das primeiras estruturas do nosso universo.

Através de simulações computacionais foi possível estudar as implicações da matéria escura quente, fria e morna no início do universo. Com isso, a ME composta por neutrinos com massa ~ 30 eV é classificada como quente, a qual está excluída de compor maior parte da matéria escura observada no nosso universo [8]. O estudo sobre a formação de estruturas apontou mais uma característica que uma partícula candidata a ME deve satisfazer, ela deve ser ou morna ou fria.

Como o MP não possuía mais partículas capazes de explicar a natureza da matéria escura, foi necessário buscar esses candidatos em extensões do Modelo Padrão. Motivado por este cenário surgiu uma importante classe de partículas candidatas a matéria escura, as Partículas Massivas Fracamente Interagentes (do inglês: *Weakly Interacting Massive*

Particles, abreviado de WIMPs). Para que essas partículas sejam matéria escura fria elas não podem ser muito leves, tendo uma massa grosseiramente maior que ~ 1 GeV, e ter uma seção de choque da ordem da interação eletrofraca $\sigma v \sim 10^{-26}\text{cm}^3/\text{s}$ [9]. As WIMPs originalmente foram tidas como um "milagre", pois a sua interação da mesma ordem da eletrofraca permite que os experimentos necessários para detectá-las sejam acessíveis, além de satisfazer todos os critérios necessários para ser matéria escura.

Apesar do sucesso das WIMPs como candidatas a matéria escura fria, trabalhos mais recentes mostram que este tipo de ME não está totalmente de acordo com as observações feitas do nosso universo hoje. Alguns dos problemas endereçados a uma matéria escura fria são: problema do halo concentrado [10] e a formação do disco galático [11]. Por outro lado, a ME morna surge como uma solução aos problemas endereçados a ME fria e quente [12, 13]. Adicionalmente, a falta de evidências experimentais desfavorece ainda mais o cenário das WIMPs [14].

Uma matéria escura morna é comumente associada a uma ME que é produzida quente mas "esfria" antes do período de formação de estrutura [15]. Vamos mostrar nesta dissertação que uma matéria escura leve, com massa $\sim \mathcal{O}(\text{keV})$, é naturalmente super-produzida e quente no início do universo, sendo consequentemente excluída como ME. Mas, veremos que um decaimento fora do equilíbrio aumenta a entropia do universo, o qual dilui e "esfria" a ME, a tornando suficientemente abundante e morna.

No Capítulo 1 iremos apresentar as principais evidências da existência da matéria escura, além de uma discussão sobre os seus possíveis candidatos. Já no Capítulo 2, iniciaremos com uma breve revisão sobre a termodinâmica do universo primordial e em seguida uma abordagem detalhada da equação de Boltzmann, necessária para compreendermos processos que ocorrem fora do equilíbrio no início do universo, como o desacoplamento das partículas. Em seguida, no Capítulo 3, trataremos de forma detalhada o caso das WIMPs. O foco desta dissertação será inicialmente abordado no Capítulo 4, onde mostraremos de forma detalhada o mecanismo de diluição via o decaimento fora do equilíbrio, seguido por um exemplo deste mecanismo aplicado a uma extensão do Modelo Padrão, no Capítulo 5.

Nesta dissertação vamos tomar a constante de Planck reduzida $\hbar$ e a velocidade da luz c igual a um ($\hbar = c = 1$).

1 Matéria Escura – Evidências e Candidatos

1.1 Evidências

Neste capítulo faremos uma revisão das principais evidências que apontam para a existência da matéria escura. Apesar de terem algumas controvérsias sobre quem cunhou o termo "matéria escura", ao menos podemos dizer que foi em decorrência dos trabalhos de Zwicky em meados de 1937 que tal termo começou a ganhar popularidade [16]. Assim, vamos começar tratando das evidências apresentadas por Zwicky no seu trabalho sobre o estudo dos aglomerados de galáxias na subseção 1.1.1. Zwicky concluiu em seu trabalho que deveria existir uma componente de matéria no nosso universo com propriedades que fugiam do conhecimento científico da época, pois esta componente de matéria não deveria interagir eletromagneticamente.

Apesar do resultado obtido por Zwicky ter sido surpreendente, este assunto ficou esquecido por aproximadamente 40 anos, quando a astrônoma Vera Rubin publicou seu trabalho sobre o movimento dos astros em galáxias espirais [17]. Como iremos mostrar na subseção 1.1.2 Vera Rubin observou experimentalmente que o movimento desses astros não estavam de acordo com a predição teórica, mas poderia ser explicado se considerasse a presença de uma componente de matéria a qual não era observada.

O trabalho de Vera Rubin foi importante para atrair a atenção dos físicos da época para este assunto, e daquele momento em diante começaram a surgir mais trabalhos que apontavam para a existência da matéria escura, como iremos ver neste capítulo. Mais recentemente, o entendimento sobre o processo de formação de estruturas no nosso universo mostrou que precisa existir uma componente de matéria, a qual não é composta pelas partículas do Modelo Padrão (MP), de tal forma que o resultado teórico corrobore com os dados experimentais [18]. Como vamos discutir mais adiante, a compreensão de como as primeiras estruturas do universo foram formadas implicou em um entendimento mais profundo sobre as características da matéria escura.

1.1.1 Aglomerados de Galáxias

Zwicky é considerado um dos pioneiros no estudo sobre a matéria escura devido ao seu estudo sobre o *redshift* das galáxias que compõe o aglomerado de Coma [2]. Em seu trabalho Zwicky mediu a razão η entre a massa do aglomerado M e a luminosidade L emitida por ele. Onde

$$\eta \equiv \frac{M}{L}\frac{L_\odot}{M_\odot}\,, \tag{1.1}$$

é normalizado em termo da massa $M_\odot \simeq 1.988\times10^{30}$ kg e da luminosidade $L_\odot \simeq 3.82\times10^{26}$ W solar, respectivamente [19].

A abordagem feita por Zwicky na época para obter a massa do aglomerado foi através da aplicação do teorema do virial, utilizando a velocidade de dispersão das galáxias contidas no aglomerado. A aplicação do teorema do virial no aglomerado de galáxias parte do pressuposto que para um sistema ligado gravitacionalmente

$$\langle K\rangle = -\frac{1}{2}\langle V\rangle\,, \tag{1.2}$$

onde $\langle\dots\rangle$ representa a média temporal, K a energia cinética do sistema e V a energia potencial.

Assumindo a existência de N galáxias no aglomerado e que a massa M contida no aglomerado possa ser representada a partir de uma distribuição uniforme dentro de uma esfera de raio R, teremos

$$\langle K\rangle = \frac{1}{2}\langle\sum_i^N m_i v_i^2\rangle = \frac{1}{2}M\langle\langle v^2\rangle\rangle\,, \tag{1.3}$$

onde $\langle\langle\dots\rangle\rangle$ representa a média temporal e a média sob a distância, m_i e v_i representam a massa e a velocidade de cada galáxia, respectivamente. Devido a distribuição esférica da massa

$$\langle V\rangle = \frac{3}{5}\frac{GM^2}{R}\,, \tag{1.4}$$

onde $G \simeq 6.67\times10^{-11}\mathrm{m^3kg^{-1}s^{-2}}$ [19] é a constante gravitacional.

Substituindo as Equações 1.3 e 1.4 na Equação 1.2 do teorema do virial, obtemos

$$M = \frac{5R\langle\langle v^2\rangle\rangle}{3G}\,. \tag{1.5}$$

Era sabido por Zwicky na época que o raio do aglomerado Coma era $R \simeq 2\times10^6$ ly $=$ 613 kpc, e através do *redshift* da luz proveniente do aglomerado Zwicky obteve que $\langle\langle v^2\rangle\rangle \simeq 190\times10^3\mathrm{km^2/s^2}$. Sendo assim a massa total do aglomerado é $M \simeq 4.5\times10^{13}M_\odot$. A luminosidade total proveniente do aglomerado medida por Zwicky foi de $L \simeq 8.5\times10^{10}L_\odot$. Com isso Zwicky pôde concluir que

$$\eta \simeq 529\,. \tag{1.6}$$

Entretanto o valor esperado de η para o aglomerado de Coma seria $\mathcal{O}(1)$. O resultado obtido por Zwicky implica que maior parte do aglomerado de Coma é composto por uma matéria a qual não podemos observar (pois não emite ondas eletromagnéticas). A possibilidade do teorema do virial está errado não é capaz de explicar tal discrepância. Pois através dos dados medidos por Zwicky, caso $M/L \simeq \mathcal{O}(1)$ muitas das galáxias teria uma velocidade maior que a velocidade de escape do aglomerado, entretanto indícios de

galáxias com energia cinética maior que a potencial do sistema não foram observados nos experimentos. A conclusão que Zwicky chegou foi a presença de uma matéria a qual não emitia ondas eletromagnéticas, Zwicky a chamou de matéria escura e foi o primeiro a utilizar este termo em trabalhos científicos. A partir de agora vamos utilizar o termo matéria escura para nos referimos a este tipo de matéria que não podemos observar.

1.1.2 Curvas de Rotação

Uma outra forte evidência para a existência de ME foi obtida pela astrônoma Vera Rubin em meados da década de 70. Na tentativa de descrever a velocidade circular das estrelas e dos gases dentro de uma galáxia semelhante à Via Láctea em função da distância desses objetos ao centro da galáxia, Vera Rubin observou uma discrepância entre a predição teórica e os dados experimentais obtidos [17].

A predição teórica para a velocidade de um objeto ao redor do centro de uma galáxia vem da utilização do teorema das cascas de Isaac Newton e do fato que o objeto sofre uma força centrípeta devido à força gravitacional

$$\frac{mv^2}{R} = \frac{GM(R)\,m}{R^2}, \tag{1.7}$$

onde v é a velocidade do objeto, m a sua massa, R a distância do objeto ao centro da galáxia e $M(R)$ é a massa da galáxia contida dentro de uma esfera de raio R responsável pela força gravitacional que age sobre o objeto. Logo, a velocidade de um objeto ao redor de uma galáxia em função da sua distância ao centro da mesma é dado por

$$v(R) = \sqrt{\frac{GM(R)}{R}}. \tag{1.8}$$

O valor de $M(R)$ pode ser obtido a partir da densidade de matéria da galáxia $\rho(\vec{r})$ por

$$M(R) = \int \rho(\vec{r})\, d\vec{r}. \tag{1.9}$$

Entretanto, através de medições da luminosidade proveniente de galáxias espirais foi possível concluir que para distâncias próximas ao seu centro a densidade de matéria $\rho(\vec{r})$ é aproximadamente constante [20]. Logo, podemos aproximar $M(R)$ para pequenas distâncias da seguinte forma

$$M(R) = \int \rho(\vec{r})\, d\vec{r} \simeq \rho \int d\vec{r} = \frac{4\pi R^3}{3}\rho. \tag{1.10}$$

Ou seja, se assumirmos que $\rho(\vec{r})$ é constante para distâncias menores que uma distância arbitrária, que vamos denotar por R', teremos $M(R < R') \propto R^3$. Por outro lado, para distâncias maiores que R' se observa que $\rho(\vec{r})$ diminui abruptamente [20], isto nos

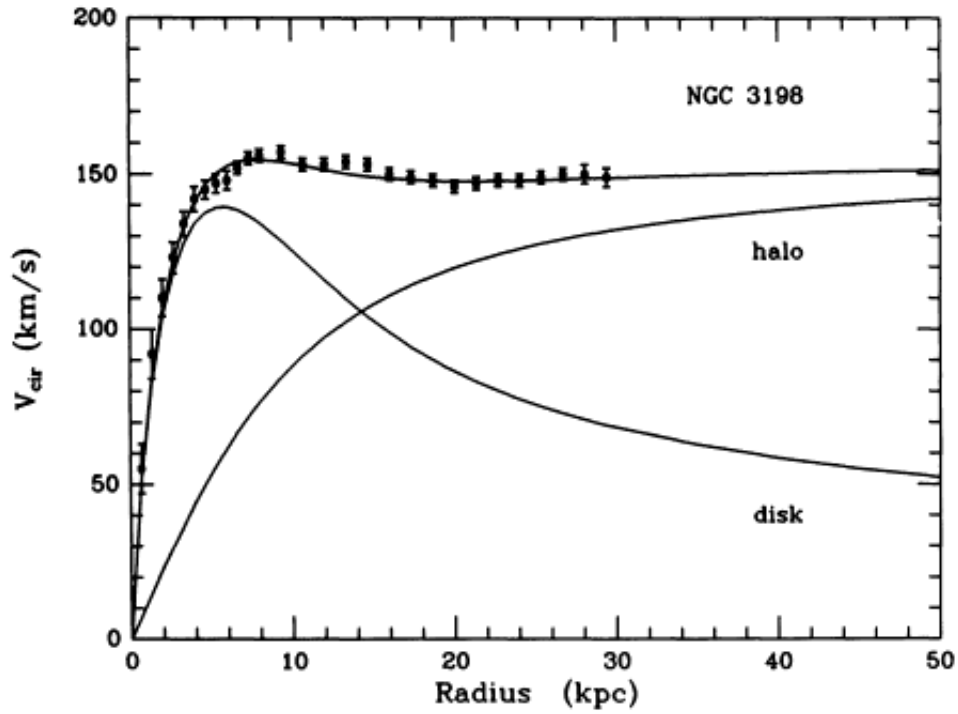

Figura 1 – Curva de rotação da galáxia NGC 3198. Reproduzida de [20].

faz concluir que nesta região $M(R > R') \simeq$ constante. Sendo assim podemos reescrever a Equação 1.8 de forma mais geral

$$v\,(R) \;\propto\; \begin{cases} R\,, & R < R' \\ \frac{1}{\sqrt{R}}\,, & R > R'\,. \end{cases} \tag{1.11}$$

Com isso esperamos que a velocidade dos objetos próximos ao centro da galáxia aumente proporcional a R, e após uma determinada distância do centro da galáxia a velocidade desses objetos comecem a decrescer.

O comportamento teórico descrito pela Equação 1.11 é mostrado na Figura 1 pela curva denotada por *disk*. Já os pontos com as barras de erro representam os dados experimentais. Os experimentos mostraram que a velocidade dos objetos para distâncias $R > R'$ não diminui como esperado pela Equação 1.11, mas permanece constante. A curva contínua que acompanha tais pontos representa uma aproximação teórica para tal comportamento. Essa anomalia pode ser explicada através da presença de mais uma componente massiva na galáxia e que não emite luminosidade, já que não era medida nos experimentos. Tal componente massiva deve crescer proporcional com a distância ao centro da galáxia

$$M\,(R) \propto R\,, \tag{1.12}$$

para $R > R'$, de tal forma que $v\,(R > R') \simeq$ *constante*. Na Figura 1, a curva contínua denotada por *halo* representa como deve ser o comportamento desta nova componente massiva.

Entretanto esta evidência não implica diretamente na existência de uma matéria não observada, por outro lado ela pode ser explicada através de teorias que modificam a dinâmica newtoniana, estas teorias são chamadas de MOND, para uma revisão [21]. Entretanto, outras evidências que serão apresentadas adiante entram em conflito com as teorias de MOND.

1.1.3 Colisões de Aglomerados de Galáxias

Outra importante evidência para a existência de matéria escura veio através da observação de um aglomerado de galáxias (1E0657-558), chamado de Aglomerado Bala (do inglês: *Bullet Cluster*). A aparência de bala do aglomerado (como pode ser notada na Figura 2) deu origem ao seu nome e foi o resultado de uma colisão entre dois aglomerados.

Observou-se que a concentração de matéria bariônica (neste capítulo utilizaremos o termo "matéria bariônica" para nos referir a tudo aquilo que compõe átomos) dos dois aglomerados que formam o *Bullet Cluster* não estavam localizadas nos seus respectivos centros de gravidade [5]. Era sabido que um aglomerado de galáxias era composto por: $\sim 2\%$ de galáxias [22], $\sim 15\%$ de plasma (gás quente) [23] e o restante por uma componente de matéria não observada (matéria escura). Pode-se medir a concentração de matéria bariônica (plasma) de um aglomerado através da observação do raio-X emitido pelo seu plasma, como pode ser visto no painel da direita da Figura 2. Entretanto, através das lentes gravitacionais fracas é possível mapear o potencial gravitacional, como mostra os contornos verdes na Figura 2 (para mais detalhes sobre lentes gravitacionais fracas ver [24]).

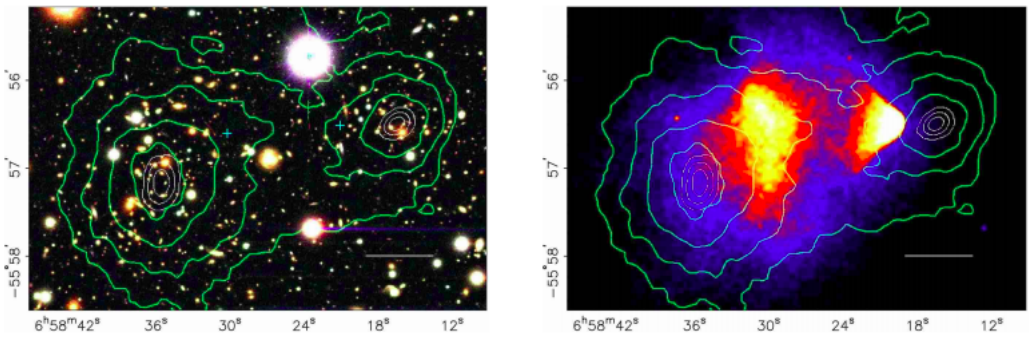

Figura 2 – Esquerda: Imagem obtida pelo Magellan da colisão dos dois aglomerados que originou o *Bullet Cluster*. Direita: Imagem de raio-X obtida pelo Chandra. Os contornos em verde mostram o mapeamento do potencial gravitacional feito através das lentes gravitacionais fracas. Figura retirada de [5].

Caso não existisse matéria escura, as linhas do potencial gravitacional iria coincidir com a região de concentração do plasma. Entretanto, o que se observou foi que devido a colisão a componente de matéria escura, que antes estava distribuída pelo aglomerado, continuou seu trajeto sem sofrer nenhuma alteração, deslocando o centro de gravidade.

Enquanto o plasma (onde se encontra a maior concentração da matéria bariônica) das duas galáxias interagiam entre si. Essa observação exclui totalmente as teorias de MOND como explicação à matéria escura [5, 6].

1.1.4 CMB e BBN

As partículas do Modelo Padrão contribuem para a densidade de relíquia de matéria bariônica do universo

$$\Omega_b = \frac{\rho_b^0}{\rho_{cr}}\,, \tag{1.13}$$

onde ρ_b^0 representa a densidade de energia bariônica medida hoje e $\rho_{cr} = 1.053 \times 10^{-5} h^2$ GeV cm^{-3} é a densidade de energia crítica e $h \simeq 0.7$ (para mais detalhes, ver Apêndice A). Através das predições do período da Big Bang Nucleossíntese (BBN), ou mais precisamente através da predição da abundância primitiva do deutério, pode-se inferir com grande precisão que a densidade de relíquia de matéria bariônica é [25]

$$\Omega_b h^2 \simeq 0.02\,, \tag{1.14}$$

onde este valor é uma predição da BBN. Entretanto, a radiação cósmica de fundo (do inglês: *Cosmic Microwave Background*, abreviado CMB) que permeia todo o nosso universo nos diz que $\Omega_b h^2 = 0.0225 \pm 0.00023$, de acordo com o Planck [26] (para mais detalhes sobre a BBN e a CMB, ver Apêndice A). Ou seja, a predição da BBN está totalmente de acordo com os dados observacionais do Planck.

Além disso, a amplitude do espectro de potência da CMB é sensível ao valor de $\Omega_m h^2$ (densidade de relíquia de matéria), ou seja, ela nos informa com precisão o valor da densidade de relíquia de matéria do nosso universo, onde [26]

$$\Omega_m h^2 \simeq 0.13\,. \tag{1.15}$$

Sendo assim, o resultado de uma simples subtração da densidade de relíquia de matéria medida pela CMB menos a densidade de relíquia de matéria bariônica

$$\Omega_m h^2 - \Omega_b h^2 \simeq 0.11\,, \tag{1.16}$$

nos mostra que maior parte da matéria que constitui nosso universo não é composta pelas partículas que compõe os átomos, é não bariônica. E que esta matéria é responsável por uma densidade de relíquia $\Omega h^2 \simeq 0.11$ do nosso universo, a qual é a densidade de relíquia da matéria escura.

1.2 Candidatos

Discutimos anteriormente algumas evidências que implicam para a existência de uma componente de matéria desconhecida no nosso universo (a matéria escura), a qual

não pode ser explicada pela matéria bariônica. Também, podemos notar que a ME está presente no nosso universo desde muito cedo, como durante a BBN e o período de último espalhamento.

Nem sempre a ideia de uma teoria para explicar a natureza da ME esteve associada a uma nova partícula além do MP. Uma outra proposta era a de que a ME seria composta por uma classe específica de objetos astrofísicos, os Objetos com Halo Compacto e Massivos (do inglês: *Massive Compact Halo Object*, abreviado MACHO). Alguns exemplos dessa classe de objetos astrofísicos são as estrelas anãs marrons, planetas, estrelas de nêutrons e buracos negros. Os MACHOs, assim como a ME, são "invisíveis" (são pouco luminosos ou não emitem nenhuma luz), isso fez com que os MACHOs se tornassem um excelente candidato a ME. Uma forma utilizada para observar e quantificar esses objetos no nosso universo é através das microlentes gravitacionais [27]. Essas lentes são formadas quando a luz proveniente de um outro astro passa pela vizinhança de um MACHO, sofrendo a ação do seu campo gravitacional. Entretanto, após anos de observações foi possível concluir que os MACHOs constituem no máximo 8% da nossa galáxia, com massa $M \sim 0.5 M_{\odot}$, sendo esta quantidade incapaz de explicar as curvas de rotações da Via Láctea [28, 29]. Além disso, alguns MACHOs podem ser compostos por matéria bariônica e através da BBN é possível inferir a densidade de relíquia bariônica no nosso universo $\Omega_b h^2 \simeq 0.0019$, deixando a proposta dos MACHOs mais desfavorecida [30].

Nesta dissertação vamos considerar a ME sendo composta por partículas. E apesar dos neutrinos do MP aparentemente satisfazerem os critérios para uma partícula candidata a matéria escura, eles foram excluídos por afetar diretamente o período de formação das primeiras estruturas do nosso universo [8] (para mais detalhes sobre este período, ver Apêndice B). Motivado por um cenário onde a matéria escura deve ser não-bariônica e fria, as WIMPs tem um papel muito importante dentro deste cenário, como iremos discutir de forma mais detalhada no Capítulo 3.

Portanto, de acordo com as evidências discutidas na seção anterior e com o que foi discutido nesta seção, podemos concluir os critérios que uma partícula candidata a matéria escura deve satisfazer. Primeiramente, ela deve ser **neutra** pois não interage eletromagneticamente. Também devem ser **estáveis**, pois elas estão presentes no nosso universo desde o seu primórdio. Como discutimos anteriormente elas podem ser **frias** ou **mornas**. Por fim, **não podem ser matéria bariônica**.

2 Termodinâmica do Universo Primordial

O fato de que o espectro da CMB se aproxima do espectro do corpo negro nos conduz a uma importante evidência de onde devemos iniciar nosso estudo sobre o surgimento das partículas no início do universo, o qual será o tema abordado neste capítulo. Este fato implica que antes da superfície de último espalhamento as partículas do Modelo Padrão estariam em equilíbrio térmico entre si [31], nos referiremos a este fato dizendo que as partículas estavam acopladas ao banho térmico. Portanto, a abordagem da termodinâmica no equilíbrio se torna valida, sendo assim faremos uma breve revisão da termodinâmica no equilíbrio aplicada ao universo primordial na seção 2.1 deste capítulo.

Entretanto, vale se perguntar como é possível aplicar as leis da termodinâmica (as quais foram desenvolvidas com base em um sistema fechado) para um sistema como o nosso universo. Para que isto seja possível, devemos fazer algumas considerações. Primeiramente, vamos assumir que uma parte do nosso universo esteja contida em um cubo de volume V, onde os lados desse cubo meçam $L \gtrsim 300$ Mpc com o intuito de garantir o princípio cosmológico (como discutimos no Apêndice A). Com isso temos que no início do universo as partículas do banho térmico se comportam como um gás em equilíbrio distribuído de forma homogênea e isotrópica dentro do cubo. Decorre da isotropia que não pode haver troca de partículas ou energia através das paredes do cubo, pois caso isso ocorra, existirá uma direção privilegiada e o principio cosmológico não será respeitado. O volume V como descrito acima é chamado de caixa cósmica [32] e possui as propriedades de um sistema fechado e adiabático, sendo assim, neste trabalho vamos aplicar a termodinâmica no equilíbrio a este sistema.

No universo primordial as interações que mantém as partículas do MP em equilíbrio são mediadas pelos: fótons (γ); e pelos bósons de gauge massivos $W^{\pm}$ e Z^0, para uma escala abaixo da quebra da simetria eletrofraca ($T \simeq 300$ GeV). A abordagem desenvolvida neste trabalho irá considerar $T < 300$ GeV, ao menos que mencionemos o contrário. No período logo após a quebra da simetria eletrofraca as partículas do MP interagem a uma taxa Γ maior que a taxa de expansão do universo H, chamado de parâmetro de Hubble (para mais detalhes ver Apêndice A), garantindo que as partículas do MP estejam em equilíbrio entre si. Este equilíbrio pode ser caracterizado como equilíbrio químico ou equilíbrio cinético. Iremos abordar este tema na seção 2.3 deste capítulo.

Conforme o universo se expande, teremos uma dada temperatura T_f na qual a sua taxa de expansão se aproxima da taxa de interação de uma dada espécie de partícula $\Gamma(T_f) \simeq H(T_f)$ (para fins ilustrativos vamos denominá-la de χ, entretanto diferentes espécies do MP possuem diferentes valores de T_f). A partir deste instante o universo começa

a se expandir a uma taxa maior do que a taxa de interação de χ com as partículas do banho térmico. Por este motivo, os processos que mantinham χ em equilíbrio com o banho térmico começam a sair do equilíbrio e ocorre o que chamamos de desacoplamento (ou *freeze-out* em inglês). Como o desacoplamento de uma partícula ocorre fora do equilíbrio, teremos que abordar este problema através da equação de Boltzmann, a qual será discutida na seção 2.4.

Após uma partícula desacoplar do banho térmico, assumindo que a mesma é estável, sua quantidade no universo permanece constante. Nos referimos a este tipo de partícula, a qual é proveniente do desacoplamento do banho térmico e que está presente até hoje no nosso universo, como uma relíquia térmica. Este fato será abordado no final deste capítulo, na seção 2.6.

2.1 Termodinâmica no Equilíbrio

A densidade de número n, a densidade de energia ρ e a pressão p de um gás de partículas da mesma espécie com grau de liberdade g caracterizam as propriedades termodinâmicas intensivas desse gás e são definidas em função da função de distribuição $f(\vec{p},t)$:

$$n(t) \equiv \frac{g}{(2\pi)^3}\int f(\vec{p},t)\,d\vec{p}, \quad \text{densidade de número,} \tag{2.1}$$

$$\rho(t) \equiv \frac{g}{(2\pi)^3}\int E(\vec{p})\ f(\vec{p},t)\,d\vec{p}, \quad \text{densidade de energia,} \tag{2.2}$$

$$p(t) \equiv \frac{g}{(2\pi)^3}\int \frac{p^2}{3E}\ f(\vec{p},t)\,d\vec{p}, \quad \text{pressão,} \tag{2.3}$$

onde $\vec{p}=(\vec{p}_x,\vec{p}_y,\vec{p}_z)$, $p\equiv|\vec{p}|$, $d\vec{p}\equiv dp_x dp_y dp_z$ e $E=\sqrt{\vec{p}^2+m^2}$. Se uma partícula i está em equilíbrio térmico a função de distribuição é dada por

$$f_i^{eq} = \begin{cases} \dfrac{1}{e^{\frac{(E_i-\mu_i)}{T}}+1}\ , \text{Fermi-Dirac} \\ \dfrac{1}{e^{\frac{(E_i-\mu_i)}{T}}-1}\ , \text{Bose-Einstein} \\ e^{\frac{-(E_i-\mu_i)}{T}}\ , \text{Maxwell-Boltzmann} \end{cases} \tag{2.4}$$

onde E_i e μ_i é a energia e o potencial químico da partícula i, respectivamente. Onde a estatística de Fermi-Dirac (Bose-Einstein) se aplica a um sistema físico composto por partículas idênticas de spin semi-inteiro (inteiro) que respeitam o princípio de exclusão de Pauli. Adicionalmente, a estatística de Maxwell-Boltzmann representa um gás ideal clássico de partículas.

Utilizando a simetria esférica do espaço dos momentos ($d\vec{p} = 4\pi p^2 dp$), podemos reescrever as Equações 2.1, 2.2 e 2.3 em função da energia E como

$$n = \frac{g}{2\pi^2}\int_m^\infty \frac{\left(E^2 - m^2\right)^{1/2}}{e^{\frac{(E-\mu)}{T}} \pm 1} E dE\,, \tag{2.5}$$

$$\rho = \frac{g}{2\pi^2}\int_m^\infty \frac{\left(E^2 - m^2\right)^{1/2}}{e^{\frac{(E-\mu)}{T}} \pm 1} E^2 dE\,, \tag{2.6}$$

$$p = \frac{g}{6\pi^2}\int_m^\infty \frac{\left(E^2 - m^2\right)^{3/2}}{e^{\frac{(E-\mu)}{T}} \pm 1} dE\,, \tag{2.7}$$

o limite inferior de integração se refere a menor energia que a partícula pode ter, sua massa m.

Utilizando [33, 34]

$$\int_0^\infty \frac{k^s}{e^{(k-\mu)} \pm 1} dk = \mp\Gamma(s+1) Li_{1+s}(\mp e^\mu) \tag{2.8}$$

onde $Li_{1+s}(\mp e^\mu)$ é uma função polilogarítmica [35], e $\Gamma(s+1)$ é a função Gamma definida na Equação 4.72, podemos prosseguir com as seguintes conclusões abaixo.

Em um limite ultra-relativístico (radiação), onde $T \gg m, \mu$ teremos

$$n_R = \begin{cases} g\dfrac{3\ \zeta(3)}{4\pi^2} T^3 \ \text{, Fermi-Dirac} \\ \ \ g\dfrac{\zeta(3)}{\pi^2} T^3 \ \text{, Bose-Einstein}\,, \end{cases} \tag{2.9}$$

onde $\zeta(3) \simeq 1.202$ é a função zeta de Riemann.

$$\rho_R = \begin{cases} g\dfrac{7\ \pi^2}{240} T^4 \ \text{, Fermi-Dirac} \\ \ \ g\dfrac{\pi^2}{30} T^4 \ \text{, Bose-Einstein} \end{cases} \tag{2.10}$$

$$p_R = \frac{1}{3}\rho_R \tag{2.11}$$

Por outro lado, em um limite não-relativístico (matéria) onde $T \ll m, \mu$, teremos

$$n_M = g\left(\frac{m\ T}{2\pi}\right)^{3/2} e^{\frac{-(m-\mu)}{T}}\,, \tag{2.12}$$

$$\rho_M = m n_M\,, \tag{2.13}$$

$$p_M = n_M T \ll \rho \tag{2.14}$$

O valor médio de qualquer quantidade $\mathcal{H}$, que dependa do momento $\vec{p}$, pelo número de partículas é definido por

$$\langle \mathcal{H}\left(\vec{p}\right)\rangle \equiv \frac{1}{n}\frac{g}{\left(2\pi\right)^3}\int d\vec{p}\ \mathcal{H}\left(\vec{p}\right) f\left(\vec{p}\right)\,. \tag{2.15}$$

Com isso o valor médio da energia E por partículas para o caso não-degenerado ($\mu = 0$) e relativístico ($\vec{p} \gg m$) é dado por

$$\langle E \rangle \simeq \langle \vec{p} \rangle = \frac{1}{n} \frac{g}{2\pi^2} \int_0^\infty dp \frac{p^3}{e^{p/T} \pm 1} \,, \tag{2.16}$$

onde utilizamos a simetria esférica do espaço dos momentos ($d\vec{p} = 4\pi p^2 dp$). A solução da integral acima conduz ao seguinte resultado

$$\begin{aligned} \langle E \rangle &\simeq 2.7T \text{ (Bose-Einstein)} \,, \\ \langle E \rangle &\simeq 3.15T \text{ (Fermi-Dirac)} \,. \end{aligned} \tag{2.17}$$

Já para espécies não-relativísticas

$$\langle E \rangle \simeq m + \frac{3}{2} T \,. \tag{2.18}$$

Anteriormente obtivemos a densidade de energia ρ para um gás de partículas da mesma espécie, entretanto as partículas que compunham o banho térmico eram de diferentes espécies do MP. Assumindo um período do universo em que $T \sim 300$ GeV, podemos afirmar que nesta época a sua densidade de energia total é a soma da densidade de energia de cada espécie na sua forma relativística

$$\rho_{Total} = \sum_i \rho_R^{(i)} \,, \tag{2.19}$$

onde índice i representa as espécies de partículas do MP.

Conforme o universo se expande e sua temperatura diminui, algumas espécies de partículas se tornam não-relativísticas (o que ocorre quando $T \sim m$), neste sentido, a densidade de energia dessas partículas deixa de evoluir de acordo com ρ_R (radiação), Equação 2.10, e passa a evoluir de acordo com ρ_M (matéria), Equação 2.13. Sendo assim, de uma forma geral podemos representar a densidade de energia do universo como

$$\rho_{Total} \;=\; \sum_i \rho_R^{(i)} + \sum_j \rho_M^{(j)} \,, \tag{2.20}$$

onde i representa as espécies relativísticas e "j" as espécies não-relativísticas.

Entretanto, vale notar que $\rho_R \propto T^4$ e $\rho_M \propto T^{3/2}\ e^{-m/T}$, ou seja, quando uma espécie de partícula se torna não-relativística sua contribuição para a densidade de energia do universo se torna desprezível, pois ρ_M diminui exponencialmente. Podemos então aproximar a densidade de energia no início do universo ρ_{Total} pela soma das densidades de energia das espécies relativísticas naquele período ($\rho_{Total} \simeq \rho_R$). Levando em conta que as espécies de partículas podem evoluir com temperaturas diferentes, mesmo em equilíbrio, podemos escrever ρ_R em termo da temperatura dos fótons T como

$$\begin{aligned} \rho_R \;&=\; \sum_{i=\text{bósons}} \rho_R^{(i)} \;+\; \sum_{j=\text{férmions}} \rho_R^{(j)} \\ &= \frac{\pi^2}{30} g_e\,(T)\, T^4 \,, \end{aligned} \tag{2.21}$$

onde o primeiro termo do somatório leva em conta todos os bósons e o segundo termo os férmions, e está representado na Equação 2.10 as respectivas densidades de energia. $g_e(T)$ é chamado de grau de liberdade energético, o qual leva em conta os graus de liberdade das partículas relativísticas ($m \ll T$) em equilíbrio sendo definido como

$$g_e(T) \equiv \sum_b g_b \left(\frac{T_b}{T}\right)^4 + \frac{7}{8}\sum_f g_f \left(\frac{T_f}{T}\right)^4 , \tag{2.22}$$

onde b e f se referem aos bósons e férmions, respectivamente. Da mesma maneira podemos aproximar a pressão total p_{Total} pela pressão devido a radiação

$$\begin{aligned} p_R &= \sum_{i=\text{bósons}} p_R^{(i)} + \sum_{j=\text{férmions}} p_R^{(j)} \\ &= \frac{\pi^2}{90} g_e(T)\, T^4 . \end{aligned} \tag{2.23}$$

De acordo com a Equação 2.21, a densidade de energia do nosso universo foi dominada inicialmente por radiação, a qual é a base do modelo padrão cosmológico (para mais detalhes, ver Apêndice A). Com isso, a taxa com a qual um universo dominado por radiação se expande é dada pelo parâmetro de Hubble (Equação A.22) levando em conta a Equação 2.21

$$H = \sqrt{\frac{\pi^2 g_e}{90}}\frac{T^2}{M_{Pl}} , \tag{2.24}$$

onde

$$M_{Pl} \equiv \sqrt{\frac{1}{8\pi G}} \simeq 2.4 \times 10^{18}\ GeV \tag{2.25}$$

é a massa de Planck reduzida.

As Equações 2.21, 2.22 e 2.23 só levam em conta as partículas relativísticas naquele período. Conforme a temperatura do universo diminui e algumas partículas deixam de se comportar como radiação e passam a se comportar como matéria, o valor de g_e diminui. Este fato implica na diminuição da densidade de energia de radiação no universo. E para entendermos melhor o significado de $T_{f(b)}/T$ na Equação 2.22, precisamos entender como a entropia evolui no início do universo.

No universo primordial a entropia S era constante. Aplicando a segunda lei da termodinâmica a um elemento de volume comóvel $V = a^3$, o qual varia de acordo com a expansão do universo, obtemos

$$dS = d\left[\frac{(\rho + p)}{T} a^3\right] = d\left[\mathfrak{s} a^3\right] = 0 \tag{2.26}$$

onde definimos $\mathfrak{s}$ como a densidade de entropia.

Utilizando as Equações 2.21, 2.23 e 2.26 obtemos a densidade de entropia

$$\mathfrak{s} \equiv \frac{2\pi^2}{45} g_{\mathfrak{s}}(T)\, T^3 , \tag{2.27}$$

onde $g_{\mathfrak{s}}(T)$ é chamado de grau de liberdade entrópico e é definido como

$$g_{\mathfrak{s}}(T) \equiv \sum_b g_b \left(\frac{T_b}{T}\right)^3 + \frac{7}{8}\sum_f g_f \left(\frac{T_f}{T}\right)^3 , \tag{2.28}$$

o qual só leva em conta apenas as partículas relativísticas, onde f (b) representam os férmions (bósons).

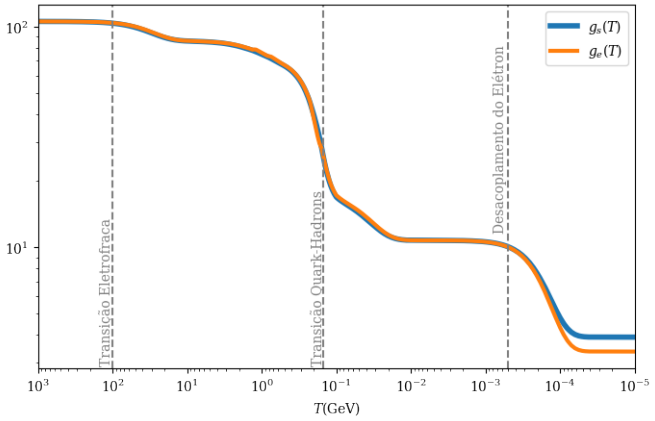

Figura 3 – Evolução de g_e e $g_{\mathfrak{s}}$ em função da temperatura T levando em conta as partículas do MP.

Sendo assim podemos expressar a entropia como

$$S = \mathfrak{s} \times a^3 = \frac{2\pi^2}{45} g_{\mathfrak{s}}(T)\, T^3 a^3 , \tag{2.29}$$

o que nos leva a conclusão de que $S \propto g_{\mathfrak{s}}(T)T^3a^3$ permanece constante conforme o universo se expande. Podemos concluir a partir da equação acima que $T \propto g_{\mathfrak{s}}^{-1/3}(T)\, a^{-1}$. Portanto, enquanto $g_{\mathfrak{s}}$ for constante temos $T \propto a^{-1}$, por outro lado quando uma partícula se torna não-relativística e desacopla $g_{\mathfrak{s}}$ diminui, fazendo com que a temperatura diminua mais rápido, e a entropia desta partícula é transferida para as outras partículas do banho térmico. O comportamento de $g_{\mathfrak{s}}$ e g_e é representado na Figura 3, onde notamos que $g_{\mathfrak{s}} \sim g_e$ a altas temperaturas.

A razão entre a temperatura do banho térmico em dois instantes distintos A e B, onde assumimos que $T_A > T_B$, pode ser facilmente obtida a partir da Equação 2.29

$$\frac{T_B}{T_A} = \left(\Delta \frac{g_{\mathfrak{s}}(T_A)}{g_{\mathfrak{s}}(T_B)}\right)^{1/3} \frac{a_A}{a_B} , \tag{2.30}$$

onde definimos Δ como

$$\Delta \equiv \frac{S_B}{S_A} . \tag{2.31}$$

Se a entropia S for constante neste período teremos $\Delta = 1$, ou seja a temperatura irá diminuir de acordo com $T \propto g_{\mathfrak{s}}^{-1/3} a^{-1}$. Por outro lado, se existir uma injeção (aumento) de entropia no banho térmico, entre os instantes A e B, vamos ter um cenário onde $\Delta > 1$

o qual implicará que a temperatura das partículas do banho térmico irá diminuir mais lentamente (como vamos demonstrar no Capítulo 4). No decorrer deste capítulo vamos assumir que $\Delta = 1$, ao menos que mencionemos ao contrário.

Anteriormente vimos que a temperatura das partículas que estão acopladas ao banho térmico evoluem de acordo com a Equação 2.30. Entretanto podemos nos questionar: Como a temperatura das partículas que já desacoplaram do banho térmico evoluem? Após desacoplar a temperatura dessas partículas, como as demais propriedades termodinâmicas intensivas, sofrem um *redshift* devido a expansão do universo e evoluem de acordo com

$$T = T_f \frac{a_f}{a}\,, \tag{2.32}$$

onde o subíndice f se refere ao instante do *freeze-out* e a equação acima é valida para $T < T_f$.

Agora vamos entender o valor da razão T_i/T, na Equação 2.28. Para exemplificar este termo vamos assumir a relação entre a temperatura dos neutrinos (ν) e a dos fótons (γ) após o desacoplamento dos elétrons. Quando o neutrino desacopla (o que acontece aproximadamente a $T \simeq 1$ MeV) e quando 1 MeV $> T >$ 0.5 MeV apenas os elétrons (e pósitrons) e os fótons estão em equilíbrio térmico. Ou seja,

$$g_{\mathfrak{s}} = g_\gamma + \frac{7}{8}\left(g_e + g_{\bar{e}}\right) = \frac{11}{2}\,, \tag{2.33}$$

onde $g_\gamma = 2$ e $g_{e(\bar{e})} = 2$.

Após o desacoplamento do elétron apenas o fóton contribui para o $g_{\mathfrak{s}}$. Utilizando a Equação 2.30 com $\Delta = 1$ podemos inferir que

$$\frac{T_\nu^d}{T} = \left(\frac{4}{11}\right)^{1/3} \frac{a}{a_\nu^d}\,, \tag{2.34}$$

onde o índice superior d indica o valor medido no momento do desacoplamento do neutrino. Usando o fato que após uma partícula desacoplar do banho térmico sua temperatura evolui de forma separada a do fóton, sofrendo apenas um *redshift* dado pela Equação 2.32, podemos escrever a Equação 2.34 da seguinte forma

$$\frac{T_\nu}{T} = \left(\frac{4}{11}\right)^{1/3}\,, \tag{2.35}$$

esta relação é valida para $T < 0.5$ MeV.

2.2 N_{eff}

De acordo com o modelo cosmológico padrão o universo foi inicialmente dominado por radiação. Como a sua temperatura diminui conforme ele se expande, então no início do universo pouco a pouco as partículas relativísticas que estavam em equilíbrio térmico

entre si iam se tornando não-relativísticas e deixando o equilíbrio térmico, causando a diminuição da densidade de energia de radiação ρ_R.

A quantidade de partículas relativísticas no universo na época da recombinação (para mais detalhes sobre o período de recombinação, ver Apêndice A) afeta diretamente o espectro de potência da CMB [36], podendo também trazer implicações severas para as predições da BBN [37]. O número efetivo de partículas relativísticas N_{eff} é usualmente utilizado para quantificar a quantidade de radiação no universo, sem levar em conta a densidade de energia dos fótons (γ). Para entendermos a natureza do parâmetro N_{eff}, tomaremos a expressão da densidade de energia de radiação, dado pela Equação 2.21, e a relação 2.35

$$\rho_R = \frac{\pi^2}{30}T^4\left[g_\gamma + \frac{7}{8}\sum_\nu g_\nu\left(\frac{T_\nu}{T}\right)^4 + \sum_{i=\text{bósons}} g_i\left(\frac{T_i}{T}\right)^4 + \frac{7}{8}\sum_{j=\text{férmions}} g_j\left(\frac{T_j}{T}\right)^4\right] \tag{2.36}$$

$$= \rho_\gamma\left[1 + \frac{1}{2}\frac{7}{8}\left(\frac{T_\nu}{T}\right)^4\left(\sum_\nu g_\nu + \frac{8}{7}\sum_{i=\text{bósons}} g_i\left(\frac{T_i}{T_\nu}\right)^4 + \sum_{j=\text{férmions}} g_j\left(\frac{T_j}{T_\nu}\right)^4\right)\right] \tag{2.37}$$

$$= \rho_\gamma\left[1 + \frac{7}{8}\left(\frac{T_\nu}{T}\right)^4 N_{eff}\right], \tag{2.38}$$

onde $g_\gamma = 2$ e definimos o número efetivo de partículas relativísticas N_{eff} como

$$N_{eff} \equiv \frac{1}{2}\left(\sum_\nu g_\nu + \frac{8}{7}\sum_{i=\text{bósons}} g_i\left(\frac{T_i}{T_\nu}\right)^4 + \sum_{j=\text{férmions}} g_j\left(\frac{T_j}{T_\nu}\right)^4\right). \tag{2.39}$$

Levando em conta as partículas do Modelo Padrão, apenas os neutrinos ativos ν contribuem para o valor do N_{eff} no período da recombinação. Considerando a oscilação entre os neutrinos e as correções radiativas da QED (do inglês: *Quantum Electrodynamics*) obtemos $N^\nu_{eff} = 3.0440$ [38] para os neutrinos do MP, este valor está de acordo com o obtido pelo Planck através da CMB $N_{eff} = 2.99 \pm 0.17$ [39]. Já as predições da BBN exigem que $N^{BBN}_{eff} = 2.86 \pm 0.15$ [40].

2.3 Desacoplamento

Uma das formas de explicar a origem das partículas no início do universo é através do desacoplamento térmico. A importância dessa abordagem vem do sucesso na predição da radiação cósmica de fundo e da Big Bang nucleossíntese. Este mecanismo de produção considera que no início do universo todas as partículas do MP interagiam a uma taxa $\Gamma \equiv n\cdot\sigma\cdot v$ (onde n é a densidade de número da partícula "alvo", σ é a seção de choque e v a velocidade da partícula) muito maior do que a taxa de expansão do universo H, garantindo o equilíbrio térmico. Conforme o universo se expandia, sua temperatura diminuía até que $\Gamma \sim H$ (para uma dada espécie do MP), neste instante esta espécie deixa o equilíbrio térmico, desacoplando do banho térmico.

Dois tipos de processos distintos devem ser levados em conta na seção de choque σ presente na expressão da taxa de interação Γ: os processos que alteram o número de uma partícula (como os processos de aniquilação, co-aniquilação e decaimento) que são responsáveis por garantir o equilíbrio químico; e os processos de espalhamento que são os responsáveis por manter o equilíbrio cinético. Vamos explicar detalhadamente estes dois tipos de equilíbrio.

Equilíbrio Químico[1]

Para fins ilustrativos, vamos assumir que para uma partícula χ o único processo capaz de alterar o seu número são os processos de aniquilação $\chi + \bar{\chi} \to MP + MP$, onde MP se refere às partículas do Modelo Padrão e $\bar{\chi}$ é a anti-partícula de χ. Definiremos a taxa de interação referente aos processos de aniquilação de χ como $\Gamma_{\chi\bar{\chi}}$, e vamos admitir que existiu um período em que $\Gamma_{\chi\bar{\chi}} > H$. Isto significa que o processo $\chi + \bar{\chi} \to MP + MP$ ocorre a mesma taxa que $MP + MP \to \chi + \bar{\chi}$, ou seja, este processo se encontra em equilíbrio. Um processo em equilíbrio é comumente representado por $\chi + \bar{\chi} \leftrightarrow MP + MP$.

Para os processo de aniquilação, χ se aniquila com sua anti-partícula $\bar{\chi}$ produzindo duas partículas do MP no estado final. Portanto neste caso a partícula "alvo" será $\bar{\chi}$, se assumirmos que $n_\chi = n_{\bar{\chi}}$ e $m_\chi = m_{\bar{\chi}}$ então a taxa de interação será descrita por $\Gamma_{\chi\bar{\chi}} = n_\chi \cdot \sigma_{\chi\bar{\chi}} \cdot v_\chi$. Enquanto $\Gamma_{\chi\bar{\chi}}/H \gg 1$ a densidade de número de n_χ está em equilíbrio (ou seja, χ é produzido a mesma taxa que se aniquila). O equilíbrio químico garante a conservação do potencial químico $\sum_i \mu_i = \sum_f \mu_f$ [41], onde $i(f)$ representa as partículas do estado inicial (final).

Quando a temperatura do universo diminui a tal ponto que $m_\chi \sim T$ a sua densidade de número n_χ passa a diminuir exponencialmente (este comportamento é chamado de supressão de Boltzmann), fazendo com que $\Gamma_{\chi\bar{\chi}}$ diminua rapidamente. Isto ocorre pois quando $m_\chi > T$ as partículas do banho térmico não possuem energia suficiente para criar pares de χ (através do processo $MP + MP \to \chi + \bar{\chi}$), e apenas o processo inverso ocorre ($\chi + \bar{\chi} \to MP + MP$) fazendo com que a abundância de χ diminua rapidamente. A diminuição da densidade de número n_χ cessa quando o universo passa a se expandir a uma taxa maior do que a taxa de aniquilação $\Gamma_{\chi\bar{\chi}}/H \ll 1$, e dizemos que χ desacoplou quimicamente do banho térmico. Deste instante em diante a densidade de número n_χ permanece constante, sofrendo apenas um *redshift* devido a expansão do universo.

Equilíbrio Cinético[2]

[1] Garante a conservação do potencial químico $\sum_i \mu_i = \sum_f \mu_f$, onde $i(f)$ representa as partículas do estado inicial (final).

[2] Garante a conservação da energia $\sum_i E_i = \sum_f E_f$, onde $i(f)$ representa as partículas do estado inicial (final).

Por outro lado, os processos de espalhamento de χ com as partículas do banho térmico $\chi + MP \to \chi + MP$ garantem o equilíbrio cinético. Vamos denotar a taxa de interação para esses processos como $\Gamma_{\chi MP} = n_{MP} \cdot \sigma_{\chi MP} \cdot v_\chi$, onde neste caso a partícula "alvo" será a partícula do MP acoplada ao banho térmico. O equilíbrio cinético garante a conservação da energia $\sum_i E_i = \sum_f E_f$ [41], onde $i(f)$ representa as partículas do estado inicial (final). Como a energia de uma espécie de partícula está diretamente relacionada a sua temperatura, de acordo com as Equações 2.17 e 2.18, a conservação da energia implica que χ tem a mesma temperatura das partículas do banho térmico. Quando $\Gamma_{\chi MP}/H \ll 1$ temos o desacoplamento cinético e χ evolui com uma temperatura diferente da temperatura das partículas do banho térmico.

Comumente o desacoplamento químico ocorre antes do desacoplamento cinético. Para ilustrar este fato vamos assumir que a partícula χ esteja inicialmente em equilíbrio cinético e químico com o banho térmico, e que a seção de choque efetiva de χ com as partículas do MP seja

$$\sigma \sim G_{eff}^2 \, T^2 \,, \tag{2.40}$$

onde definimos

$$G_{eff} \equiv \zeta \, G_F \,, \tag{2.41}$$

onde ζ é um parâmetro livre que vamos utilizar para ilustrar o que ocorre caso o acoplamento varia, e $G_F \simeq 1.16 \times 10^{-5}$ GeV^{-2} é a constante de Fermi [19]. Caso $\zeta = 1$, σ representará a seção de choque da interação eletrofraca [31].

Também vamos assumir o modelo cosmológico padrão, onde o universo é inicialmente dominado por radiação, e o parâmetro de Hubble evolui de acordo com a Equação 2.24

$$H \simeq \frac{T^2}{M_{Pl}} \,. \tag{2.42}$$

De acordo com o que foi discutido anteriormente a taxa de aniquilação e de espalhamento de χ, quando $m_\chi \sim T$ podem ser expressa da seguinte forma

$$\Gamma_{\chi\bar{\chi}} \propto n_{nr} \times \sigma \tag{2.43}$$

$$\Gamma_{\chi MP} \propto n_r \times \sigma \,, \tag{2.44}$$

onde n_{nr} e n_r se referem a densidade de número não-relativística e relativística, respectivamente. $\Gamma_{\chi MP}$ tende a depender de n_r pois as partículas "alvos" que estão acopladas ao banho térmico são relativísticas.

O comportamento da taxa de aniquilação e de espalhamento estão representadas na Figura 4. A curva azul representa $\Gamma_{\chi\bar{\chi}}$ e a curva laranja $\Gamma_{\chi MP}$. O instante em que o desacoplamento químico e cinético ocorrem estão bem representados na figura, quando as curvas cruzam a linha horizontal a qual representa $\Gamma \sim H$. Observamos que para a interação eletrofraca, quando $\zeta = 1$ (curvas contínuas), χ desacopla quimicamente primeiro

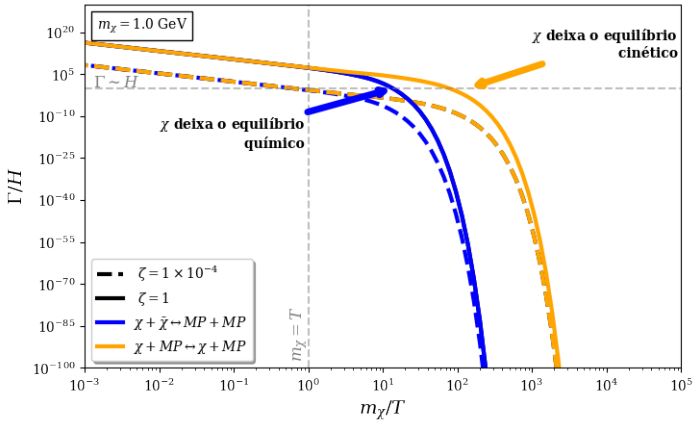

Figura 4 – Razão entre a taxa de aniquilação (espalhamento) Γ e o parâmetro de Hubble H, representado pela curva azul (laranja), para $m_\chi = 1$ GeV. As curvas contínuas (tracejadas) representam $\zeta = 1$ ($\zeta = 1 \times 10^{-4}$).

[42], entretanto quando o acoplamento diminui consideravelmente, $\zeta = 1 \times 10^{-4}$ (curvas tracejadas), o desacoplamento químico e cinético tendem a acontecer no mesmo instante, pois a interação de χ com as partículas do banho térmico se torna mais "fraca".

Sendo assim, daqui em diante quando mencionarmos que uma partícula está acoplada ao banho térmico, estaremos nos referindo que a mesma se encontra em equilíbrio químico e cinético. Já quando dissermos que a partícula se encontra desacoplada, estaremos nos referindo que ela já desacoplou quimicamente e termicamente. Além disso, na literatura é comum utilizar o termo *freeze-out* para se referir apenas ao desacoplamento químico da partícula. Este termo faz uma alusão ao fato de que a densidade de número n "congela" neste instante, sofrendo apenas um *redshift* dai em diante. O cenário em que o acoplamento químico nunca existiu é chamado de *freeze-in* [43], entretanto, não iremos abordá-lo neste trabalho.

2.4 Equação de Boltzmann

Para entendermos como uma espécie de partícula se comporta no início do universo devemos compreender como a sua função de distribuição $f \equiv f\left(p^\mu, x^\mu, t\right)$ evolui neste período. O evolução de f é dado através da equação de Boltzmann [31]

$$\hat{L}\left[f\right] \;=\; \hat{C}\left[f\right], \tag{2.45}$$

onde $\hat{L}$ é o operador de Liouville e $\hat{C}$ é o operador colisão, vamos dedicar mais adiante uma seção para uma discussão mais detalhada do operador colisão. O operador de Liouville é escrito na sua forma covariante relativística como

$$\hat{L} \;\equiv\; p^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \;-\; \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} p^\beta p^\gamma \frac{\partial}{\partial p^\alpha}, \tag{2.46}$$

onde $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$ é o simbolo de Christoffel (definido na Equação A.12) e p^{α} e x^{α} representam as componentes do quadrimomento e quadrivetor, respectivamente. Aplicando a métrica de Robertson-Walker, Equação A.9, no operador de Liouville, Equação 2.46 obtemos

$$\hat{L}\left[f\right] \;=\; E\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{\dot{a}}{a}pE\frac{\partial f}{\partial p}\,, \tag{2.47}$$

onde $p \equiv |\vec{p}|$ e $E^2 \;=\; \vec{p}^2 + m^2$. E a equação de Boltzmann se torna:

$$\frac{\partial f}{\partial t} - Hp\frac{\partial f}{\partial p} \;=\; \frac{\hat{C}\left[f\right]}{E}\,. \tag{2.48}$$

Como a métrica de Robertson-Walker contém a informação de que nosso universo é isotrópico e homogêneo, a função de distribuição f deixa de depender das coordenadas especiais $\vec{x}$, podendo ser descrita como $f = f\left(p,t\right)$. As funções de distribuição no equilíbrio dada na Equação 2.4 satisfazem a equação de Boltzmann para $\hat{C}\left[f\right] = 0$.

Com o intuito de compreendermos como a densidade de número n de uma espécie de partícula evolui no início do universo, devemos solucionar a equação de Boltzmann para n. Sendo assim integramos a equação de Boltzmann no espaço dos momentos e utilizando a definição da densidade de número dado pela Equação 2.1, o lado esquerdo da equação de Boltzmann (Equação 2.48) se torna

$$\begin{aligned}
\frac{g}{\left(2\pi\right)^3}\left[\int d\vec{p}\frac{\partial f}{\partial t} - H\int d\vec{p}\; p\frac{\partial f}{\partial p}\right] &= \frac{dn}{dt} - H4\pi\frac{g}{\left(2\pi\right)^3}\int dp\; p^3\frac{\partial f}{\partial p} \\
&= \frac{dn}{dt} - H4\pi\frac{g}{\left(2\pi\right)^3}\left[p^3 f\right]_{-\infty}^{\infty} + 3Hn \\
&= \frac{dn}{dt} + 3Hn\,,
\end{aligned} \tag{2.49}$$

onde utilizamos acima conceitos como integração por partes e da simetria esférica do espaço dos momentos ($d\vec{p} = 4\pi p^2 dp$). Da segunda para a terceira linha o segundo termo do lado direito desaparece pois conforme $p \to \pm\infty$ temos que $f \to 0$ exponencialmente. E portanto a equação de Boltzmann para a densidade de número toma a seguinte forma

$$\frac{dn}{dt} = -3Hn + \frac{g}{\left(2\pi\right)^3}\int\frac{d\vec{p}}{E}\hat{C}\left[f\right]\,. \tag{2.50}$$

O primeiro termo do lado direito da equação acima é responsável pela diminuição da densidade de número n devido a expansão do universo. Já o operador colisão traz consigo a informação das interações que tem a capacidade de alterar a densidade de número da partícula (processos de aniquilação, co-aniquilação e decaimento). Reenfatizando que dedicamos mais adiante uma seção deste capítulo para discutir sobre o operador colisão.

Entretanto, podemos escrever a Equação 2.50 de uma forma mais simples. Para isto vamos definir a quantidade adimensional

$$Y \equiv \frac{n}{\mathfrak{s}}\,, \tag{2.51}$$

onde s é a densidade de entropia. O parâmetro Y é chamado de abundância. Utilizando a expressão para a densidade de número no limite relativístico (não-relativístico), Equação 2.9 (Equação 2.12), e a expressão da densidade de entropia, Equação 2.27, obtemos

$$Y^{eq} \equiv \begin{cases} \dfrac{45}{2\pi^4}\left(\dfrac{\pi}{8}\right)^{1/2}\dfrac{g_{eff}}{g_{\mathfrak{s}}(T)}\left(\dfrac{m}{T}\right)^{3/2} e^{-m/T} & ,\text{se } m \gg T \\ \dfrac{45\zeta(3)}{2\pi^4}\dfrac{g_{eff}}{g_{\mathfrak{s}}(T)} & ,\text{se } m \ll T\,, \end{cases} \tag{2.52}$$

onde $g_{eff} = g$ para bósons e $g_{eff} = 3g/4$ para férmions.

Assumindo o caso mais geral, onde a entropia S não é constante, teremos

$$\frac{dn}{dt} + 3Hn = \mathfrak{s}\frac{dY}{dt} + \frac{Y}{a^3}\frac{dS}{dt}\,. \tag{2.53}$$

Vamos redefinir também a variável t para uma variável adimensional $x \equiv m/T$, para isto assumiremos o universo dominado por radiação, e de acordo com o parâmetro de Hubble dado pela Equação 2.24 podemos concluir que

$$t = (H(T))^{-1} = \left(\sqrt{\frac{\pi^2 g_e(T)}{90}}\frac{T^2}{M_{pl}}\right)^{-1} = \left(\sqrt{\frac{\pi^2 g_e(T)}{90}}\frac{m^2}{M_{pl}}\right)^{-1} x^2\,, \tag{2.54}$$

onde vamos definir

$$H(m) \equiv \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi^2 g_e(T)}{90}}\frac{m^2}{M_{pl}}\,, \tag{2.55}$$

e portanto teremos

$$\frac{d}{dt} = \frac{H(m)}{x}\frac{d}{dx}\,. \tag{2.56}$$

Por questões de simplicidade vamos assumir daqui para frente que a entropia é constante ($\frac{dS}{dt} = 0$), entretanto no Capítulo 5 vamos tratar detalhadamente o caso onde a entropia do sistema varia.

Então, podemos reescrever a Equação 2.50 da seguinte forma:

$$\frac{dY}{dx} = \frac{x}{\mathfrak{s}H(m)}\cdot\frac{g}{(2\pi)^3}\int\frac{d\vec{p}}{E}\hat{C}[f] - \frac{Y}{S}\frac{dS}{dx}\,, \tag{2.57}$$

por questões de simplicidade neste capitulo iremos considerar $\frac{dS}{dx} = 0$ (entropia constante), entretanto vamos tratar no Capítulo 5 o caso em que a entropia não é constante.

2.5 Operador Colisão

Nesta seção vamos voltar nossa atenção para o operador colisão. Como nesta dissertação vamos apenas lidar com processos de aniquilação e de decaimento, iremos fazer aqui o tratamento do operador colisão para esses dois casos. Por fins didáticos vamos

representar os processos de aniquilação por $1 + 2 \to 3 + 4$ e de decaimento por $1 \to 2 + 3$. Sendo assim, a evolução da abundância da partícula 1 é dada por

$$\frac{dY_1}{dx} = \frac{x}{\mathfrak{s}H\left(m_1\right)} \cdot \frac{g_1}{\left(2\pi\right)^3} \int \frac{d\vec{p}_1}{E_1} \hat{C}\left[f_1\right] . \tag{2.58}$$

Para um processo de aniquilação $1 + 2 \to 3 + 4$, o operador colisão é definido como [31]:

$$\begin{aligned} \frac{g_1}{\left(2\pi\right)^3} \int \frac{d\vec{p}_1}{E_1} \hat{C}\left[f_1\right] \equiv \pm \int d\Pi_1 d\Pi_2 d\Pi_3 d\Pi_4 \left(2\pi\right)^4 \delta^4\left(\mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2 - \mathcal{P}_3 - \mathcal{P}_4\right) \\ \times \left[|\overline{\mathcal{M}}|^2_{1+2\to 3+4} \; f_1 f_2 \left(1 \pm f_3\right)\left(1 \pm f_4\right) - |\overline{\mathcal{M}}|^2_{3+4\to 1+2} \; f_3 f_4 \left(1 \pm f_1\right)\left(1 \pm f_2\right) \right] , \end{aligned} \tag{2.59}$$

onde $\mathcal{P}_i \equiv (E_i, \vec{p}_i)$ representa o quadrimomento e definimos

$$d\Pi_i \equiv \frac{g_i}{\left(2\pi\right)^3} \frac{d\vec{p}_i}{2E_i} . \tag{2.60}$$

Na Equação 2.59 f_i representa a função de distribuição da partícula i. O sinal $(\pm)$ que multiplica todo o integrando se refere ao tipo de processo que estamos considerando. Teremos $(-)$ se considerarmos $1+2 \to 3+4$, pois esse processo contribui para a diminuição da quantidade da partícula 1, por outro lado, se considerarmos o processo $3 + 4 \to 1 + 2$ teremos o sinal $(+)$ já que este processo aumenta o número da partícula 1. No termo $(1 \pm f_i)$ teremos $(+)$ para bósons e $(-)$ para férmions. Já $|\overline{\mathcal{M}}|^2$ representa a média (sob os spins finais e iniciais) quadrática da amplitude do processo em questão, e vamos admitir que $|\overline{\mathcal{M}}|^2$ leva em conta o fator de simetria $S_{inicial(final)} \equiv 1/n_{inicial(final)}!$, onde $n_{inicial}$ (n_{final}) representa o número de partículas idênticas no estado inicial (final). No decorrer desta dissertação vamos tratar apenas de interações que $|\overline{\mathcal{M}}|^2_{1+2\to 3+4} = |\overline{\mathcal{M}}|^2_{3+4\to 1+2}$, sendo assim vamos definir $|\overline{\mathcal{M}}|^2 \equiv |\overline{\mathcal{M}}|^2_{1+2\to 3+4} = |\overline{\mathcal{M}}|^2_{3+4\to 1+2}$. Para um processo de $1+2 \to 3+4$ a média quadrática da amplitude fica definida por

$$|\overline{\mathcal{M}}|^2 \equiv \frac{S_{12} S_{34}}{g_1 g_2 g_3 g_4} |\mathcal{M}|^2 . \tag{2.61}$$

E portanto

$$\begin{aligned} \frac{g_1}{\left(2\pi\right)^3} \int \frac{d\vec{p}_1}{E_1} \hat{C}\left[f_1\right] \equiv - \int d\Pi_1 d\Pi_{\bar{2}} d\Pi_3 d\Pi_4 \left(2\pi\right)^4 \delta^4\left(\mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2 - \mathcal{P}_3 - \mathcal{P}_4\right) \\ \times |\overline{\mathcal{M}}|^2 \left[f_1 f_2 \left(1 \pm f_3\right)\left(1 \pm f_4\right) - f_3 f_4 \left(1 \pm f_1\right)\left(1 \pm f_2\right) \right] . \end{aligned} \tag{2.62}$$

Se uma partícula i está acoplada ao banho térmico então sua função de distribuição pode ser representada por

$$f_i^{eq} = \begin{cases} \dfrac{1}{e^{E_i/T} + 1} \text{ , Fermi-Dirac} \\ \dfrac{1}{e^{E_i/T} - 1} \text{ , Bose-Einstein} \\ e^{-E_i/T} \text{ , Maxwell-Boltzmann} \end{cases} \tag{2.63}$$

onde seguimos as Referências [44, 45] e assumimos $\mu_i \simeq 0$, por ser um parâmetro desprezível no período do universo em que estamos interessados. Como iremos ver adiante a escolha da utilização de uma das estatísticas acima não será definida pela natureza (spin) da partícula em questão, mas sim pela sua energia.

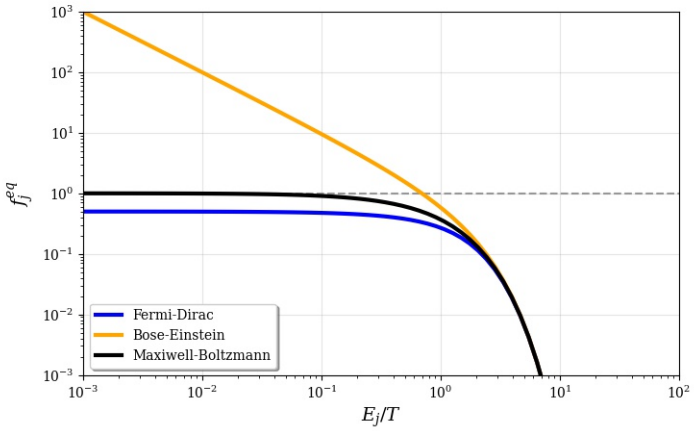

Figura 5 – Evolução da função de distribuição no equilíbrio f_i^{eq} em função da variável adimensional E_i/T. Onde a curva laranja representa a distribuição de Bose-Einstein, a curva azul a distribuição de Fermi-Dirac e a curva preta a distribuição de Maxwell-Boltzmann.

A evolução das três Equações em 2.63 estão representadas na Figura 5. Vimos na Equação 2.17 que a média da energia das partículas relativísticas do banho térmico é maior que a temperatura ($E_i > T$). Sendo assim, de acordo com a Figura 5 notamos que para este regime de energia as partículas (férmions ou bósons) acopladas ao banho térmico se comportam de acordo com a distribuição de Maxwell-Boltzmann (classicamente). Portanto, podemos e iremos assumir f^{eq} como sendo a distribuição de Maxwell-Boltzmann para qualquer partícula relativística acoplada ao banho térmico ($E_i > T$), como mostrado aqui e de acordo com [44, 45], esta é uma boa aproximação. Em um cenário não-relativístico ($E_i \ll T$), onde as partículas se encontram em equilíbrio, devemos levar em conta o spin da partícula e utilizar ou a distribuição de Fermi-Dirac ou a de Bose-Einstein.

Se voltarmos agora nossa atenção para o termo $(1 \pm f_i)$, assumindo que i esteja acoplado ao banho térmico obtemos o resultado mostrado na Figura 6. Assim, para uma partícula acoplada ao banho térmico ($E_i > T$) podemos assumir a seguinte aproximação

$$(1 \pm f_i) \simeq 1\,. \tag{2.64}$$

Para um processo $1+2 \to 3+4$, onde as partículas 3 e 4 encontram-se em equilíbrio, o termo $f_3^{eq} f_4^{eq}$ que aparecerá no operador colisão (Equação 2.62) poderá ser escrito da seguinte forma

$$f_3^{eq}\ f_4^{eq} = e^{-(E_3+E_3)/T} = e^{-(E_1+E_2)/T} = f_1^{eq}\ f_2^{eq}\,, \tag{2.65}$$

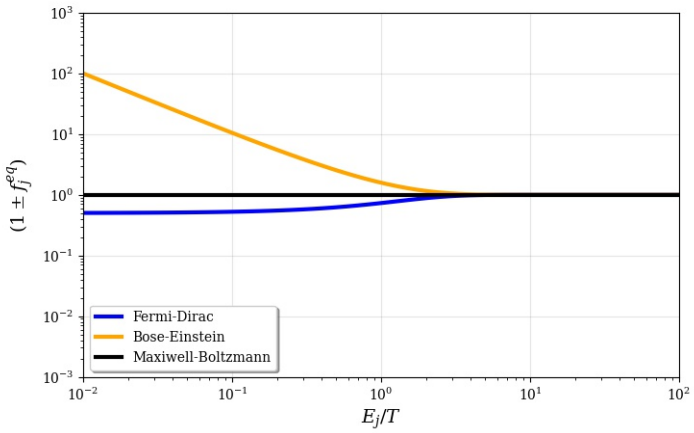

Figura 6 – Evolução do termo $(1 \pm f_i^{eq})$ em função da variável adimensional E_i/T. Onde para a curva laranja consideramos a distribuição de Bose-Einstein, na curva azul a distribuição de Fermi-Dirac e a curva preta a distribuição de Maxwell-Boltzmann.

onde utilizamos da conservação da energia ($E_1 + E_2 = E_3 + E_4$).

Utilizando os resultados obtidos anteriormente podemos reescrever o operador colisão (Equação 2.62) de forma geral para um processo $\sum_i^n i \to \sum_j^m j$ como

$$\frac{g_1}{(2\pi)^3}\int \frac{d\vec{p_1}}{E_1}\hat{C}\left[f_1\right] \simeq -\int \prod_i^n \prod_j^m d\Pi_i d\Pi_j \,(2\pi)^4\,\delta^4\left(\sum_i^m \mathcal{P}_i - \sum_j^m \mathcal{P}_j\right)|\overline{\mathcal{M}}|^2\left[\prod_i^n f_i - \prod_i^n f_i^{eq}\right], \tag{2.66}$$

onde assumimos que as partículas do estado final do processo estejam em equilíbrio.

2.5.1 Aniquilação: $1 + 2 \leftrightarrow 3 + 4$

Aqui vamos obter a expressão para o operador colisão para o processo de aniquilação $1 + 2 \leftrightarrow 3 + 4$. Considerando a Equação 2.61 e assumindo que as partículas 3 e 4 estão em equilíbrio com o banho térmico, o operador colisão para a partícula 1 é dado por

$$\frac{g_1}{(2\pi)^3}\int \frac{d\vec{p_1}}{2E_1}\hat{C}\left[f_1\right] \equiv -S_{12}S_{34}\int \frac{d\Pi_1}{g_1}\frac{d\Pi_2}{g_2}\frac{d\Pi_3}{g_3}\frac{d\Pi_4}{g_4}\,(2\pi)^4\,\delta^4\left(\mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2 - \mathcal{P}_3 - \mathcal{P}_4\right) \times |\mathcal{M}|^2\left[\, f_1 f_2 - f_1^{eq} f_2^{eq}\right]. \tag{2.67}$$

A seção de choque para um processo $1 + 2 \to 3 + 4$ é

$$\sigma = \frac{S_{12}S_{34}}{4\sqrt{\left(\mathcal{P}_1 \cdot \mathcal{P}_2\right)^2 - \left(m_1 m_2\right)^2}}\int \frac{d\Pi_3}{g_3}\frac{d\Pi_4}{g_4}\,(2\pi)^4\,\delta^4\left(\mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2 - \mathcal{P}_3 - \mathcal{P}_4\right)\frac{|\mathcal{M}|^2}{g_1 g_2}, \tag{2.68}$$

portanto

$$S_{12}S_{34}\int \frac{d\Pi_3}{g_3}\frac{d\Pi_4}{g_4}\,(2\pi)^4\,\delta^4\left(\mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2 - \mathcal{P}_3 - \mathcal{P}_4\right)\frac{|\mathcal{M}|^2}{g_1 g_2} = 4\sigma\sqrt{\left(\mathcal{P}_1 \cdot \mathcal{P}_2\right)^2 - \left(m_1 m_2\right)^2}. \tag{2.69}$$

Utilizando do resultado acima e da definição da densidade de número, dada pela Equação 2.1, podemos escrever a Equação 2.67 como

$$\frac{g_1}{(2\pi)^3}\int \frac{d\vec{p}_1}{2E_1}\hat{C}\left[f_1\right] = -\int \left(\sigma v_{\text{Møller}}\right)\left[\, dn_1 dn_2 - dn_1^{eq} dn_2^{eq}\right] , \tag{2.70}$$

onde utilizamos a Equação 2.60 e definimos

$$v_{\text{Møller}} \equiv \frac{\sqrt{\left(\mathcal{P}_1\cdot\mathcal{P}_2\right)^2 - \left(m_1 m_2\right)^2}}{E_1 E_2} , \tag{2.71}$$

a qual é chamada de velocidade de Møller. A velocidade de Møller torna o produto $v_{\text{Møller}} n_1 n_2$ invariante de Lorentz [45].

Portanto a Equação 2.70 pode ser escrita da seguinte forma

$$\frac{g_1}{(2\pi)^3}\int \frac{d\vec{p}_1}{2E_1}\hat{C}\left[f_1\right] = -\langle\sigma v_{\text{Møller}}\rangle\left[\, n_1 n_2 - n_1^{eq} n_2^{eq}\right] , \tag{2.72}$$

onde a média térmica da seção de choque vezes a velocidade é definida como

$$\langle\sigma v_{\text{Møller}}\rangle \equiv \frac{\int \left(\sigma v_{\text{Møller}}\right) dn_1^{eq} dn_2^{eq}}{\int dn_1^{eq} dn_2^{eq}} , \tag{2.73}$$

daqui para frente por simplicidade vamos denotar a média térmica da seção de choque, definida acima, apenas por $\langle\sigma v\rangle$.

Vamos voltar agora nossa atenção para os processos de aniquilação (onde $m_1 = m_2 = m$), o qual é de nosso maior interesse neste trabalho, sendo assim a média térmica da seção de choque fica definida como

$$\langle\sigma v\rangle = \frac{1}{8m^4 T K_2^2(m/T)}\int_{4m^2}^{\infty} \sigma\left(s - 4m^2\right)\sqrt{s}K_1(\sqrt{s}/T)ds , \tag{2.74}$$

onde $s = (\mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2)^2$ é a variável de Mandelstam e K_i é a função de Bessel modificada do segundo tipo e de ordem i. O cálculo para obter a Equação 2.74 está contida no Apêndice C.

Por fim, podemos escrever a equação de Boltzmann para Y_1 (Equação 2.57) como

$$\frac{dY_1}{dx} = -\frac{x\langle\sigma v\rangle\mathfrak{s}}{H\left(m_1\right)}\left[\, \left(Y_1\right)^2 - \left(Y_1^{eq}\right)^2\right] . \tag{2.75}$$

A expressão acima leva em conta apenas os processos de aniquilação. Já os processos de espalhamento não são considerados pois não contribuem para a variação do parâmetro Y_1, dado que este tipo de processo não tem a capacidade de alterar a densidade de número da partícula 1. Por outro lado, os processos de co-aniquilação contribuem para a variação de Y_1 e devem ser levados em conta na Equação 2.75, entretanto não iremos tratar deste tipo de processo nesta dissertação, para mais detalhes ver [46].

2.5.2 Decaimento: $1 \to 2 + 3$

Para os processos de decaimento $1 \to 2 + 3$, considerando que as partículas 2 e 3 estejam em equilíbrio, a integral do operador colisão será

$$\frac{g_1}{(2\pi)^3}\int \frac{d\vec{p}_1}{2E_1}\hat{C}\left[f_1\right] = -S_{final}\int \frac{d\Pi_1}{g_1}\frac{d\Pi_2}{g_2}\frac{d\Pi_3}{g_3}\left(2\pi\right)^4\delta^4\left(\mathcal{P}_1-\mathcal{P}_2-\mathcal{P}_3\right)\left|\mathcal{M}\right|^2\left[\ f_1 - f_1^{eq}\right]\ . \tag{2.76}$$

Sabendo que a largura de decaimento para um processo $1 \to 2 + 3$ é dada por

$$\Gamma = \frac{S_{final}}{2E_1}\int \frac{d\Pi_2}{g_2}\frac{d\Pi_3}{g_3}\left(2\pi\right)^4\delta^4\left(\mathcal{P}_1-\mathcal{P}_2-\mathcal{P}_3\right)\frac{\left|\mathcal{M}\right|^2}{g_1}\,, \tag{2.77}$$

e substituindo a Equação 2.77 na Equação 2.76, obtemos

$$\frac{g_1}{(2\pi)^3}\int \frac{d\vec{p}_1}{2E_1}\hat{C}\left[f_1\right] = -\int d\Pi_1 2E_1\Gamma\left[\ f_1 - f_1^{eq}\right]\ . \tag{2.78}$$

Utilizando a definição da densidade de número (Equação 2.1) ficamos com

$$\frac{g_1}{(2\pi)^3}\int \frac{d\vec{p}_1}{2E_1}\hat{C}\left[f_1\right] = -\int \Gamma\left[\ dn_1 - dn_1^{eq}\right]\ . \tag{2.79}$$

Por fim, a Equação 2.76 pode ser escrita como

$$\frac{g_1}{(2\pi)^3}\int \frac{d\vec{p}_1}{2E_1}\hat{C}\left[f_1\right] = -\langle\Gamma\rangle\left[\ n_1 - n_1^{eq}\right]\ , \tag{2.80}$$

onde

$$\langle\Gamma\rangle \equiv \frac{\int \Gamma dn^{eq}}{\int dn^{eq}}\,. \tag{2.81}$$

Entretanto, $\langle\Gamma\rangle$ pode ser escrito como

$$\langle\Gamma\rangle = \Gamma_1\frac{K_1\left(\dfrac{m_1}{T}\right)}{K_2\left(\dfrac{m_1}{T}\right)}\,, \tag{2.82}$$

onde Γ_1 representa a largura de decaimento da partícula 1 no seu referencial de repouso. A demonstração de como se obter a Equação 2.82 está apresentada no Apêndice C.

Sendo assim, podemos escrever a equação para a abundância Y_1 (Equação 2.57), considerando apenas processos de decaimento, como

$$\frac{dY_1}{dx} \;=\; -\frac{x\langle\Gamma\rangle\mathfrak{s}}{H\left(m_1\right)}\left[\ Y_1 - Y_1^{eq}\right]\ . \tag{2.83}$$

2.6 Relíquia Térmica

Após este tratamento detalhado do operador colisão temos a capacidade de compreender como a abundância Y de uma dada partícula evolui no início do universo. Com

esta finalidade vamos tomar como exemplo o caso mais simplista, onde apenas os processos de aniquilação ($2 \rightarrow 2$) contribuem para o operador colisão de uma partícula hipotética χ, candidata a ME. A equação de Boltzmann (Equação 2.75) para este caso será

$$\frac{dY_\chi}{dx} = -\frac{x\langle\sigma v\rangle\mathfrak{s}}{H\left(m_\chi\right)}\left[\left(Y_\chi\right)^2 - \left(Y_\chi^{eq}\right)^2\right] . \tag{2.84}$$

A solução da equação acima nos possibilita estimar a densidade de relíquia $\Omega_\chi^0 h^2$ de χ no nosso universo atualmente

$$\Omega_\chi^0 h^2 \equiv \frac{\rho_\chi^0}{\rho_{cr}} h^2 = \frac{m_\chi n_\chi^0 h^2}{\rho_{cr}} = \frac{m_\chi Y_\chi^0 \mathfrak{s}_0 h^2}{\rho_{cr}} , \tag{2.85}$$

onde o índice "0" indica o valor de tal grandeza medida hoje, ρ_χ se refere a densidade de energia de χ, $\rho_{cr} = 1.053 \times 10^{-5} h^2$ GeV cm^{-3} é a densidade de energia crítica (ver Apêndice A) e $\mathfrak{s}_0 = 2970$ cm^{-3} [19] a densidade de entropia do nosso universo hoje. Além disso, assumimos que χ é não-relativística hoje, sendo assim $\rho_\chi^0 = m_\chi \cdot n_\chi^0$. Com o propósito de que χ represente a ME devemos exigir que $\Omega_\chi^0 h^2 \simeq 0.12$, na Equação 2.85, implicando na seguinte condição para Y_χ^0

$$Y_\chi^0 \simeq 4.25 \times 10^{-10} \left(\frac{1 \text{ GeV}}{m_\chi}\right) . \tag{2.86}$$

No próximo capítulo vamos utilizar as WIMPs para exemplificar o cálculo da densidade de relíquia de uma partícula candidata a matéria escura.

3 WIMPs

Anteriormente obtemos a equação de Boltzmann para a abundância Y. Aqui vamos tratar de uma classe de partículas candidatas a matéria escura muito importante, as WIMPs (do inglês: *Weakly Interacting Massive Particles*). Essa classe de partículas candidatas a matéria escura são caracterizadas por partículas massivas, com massa $\sim \mathcal{O}(10\text{ GeV} - 100\text{ TeV})$, que possui interações da ordem eletrofraca $\sigma \sim \mathcal{O}(10^{-26}\text{ cm}^3/\text{s})$. Como iremos ver, estas características conduz a uma densidade de relíquia correta.

Para ilustrar todo este cenário discutido anteriormente, vamos assumir que uma partícula χ tenha seu *freeze-out* após se tornar não-relativística ($m_\chi \gg T_f$), sendo T_f a temperatura de *freeze-out*. O cenário de um desacoplamento relativístico será tratado em detalhes no Capítulo 5. Partindo da condição do *freeze-out* ($n_\chi^{eq}\langle\sigma v\rangle = H$) e utilizando o parâmetro de Hubble $H \sim T^2/M_{Pl}$ obtemos que

$$n_\chi\left(T_f\right) \simeq \frac{T_f^2}{M_{Pl}\langle\sigma v\rangle_f}\,, \tag{3.1}$$

onde $\langle\sigma v\rangle_f$ representa a média térmica da seção de choque em T_f. Com isso a densidade de relíquia de χ neste caso será

$$\Omega_\chi^0 = \frac{m_\chi n_\chi(T=T_0)}{\rho_{cr}} = \frac{m_\chi T_0^3}{\rho_{cr}}\frac{n_\chi(T_0)}{T_0^3}\,, \tag{3.2}$$

onde $T_0 = 2.75\text{ K} \sim 10^{-4}\text{ eV}$ é a temperatura da CMB medida hoje. Utilizando o fato que o *redshift* da densidade de número é

$$n_\chi(T_f) = n_\chi(T_0)\frac{T_f^3}{T_0^3}\,, \tag{3.3}$$

então teremos que

$$\Omega_\chi^0 = \frac{T_0^3}{\rho_{cr}M_{Pl}}\frac{x_f}{\langle\sigma v\rangle_f}\,, \tag{3.4}$$

onde utilizamos a Equação 3.1 e definimos $x_f \equiv m_\chi/T_f$. Substituindo os valores conhecidos de T_0, M_{Pl} e ρ_{cr} na equação acima, somos conduzidos a

$$\frac{\Omega_\chi^0}{\Omega_{ME}^0} \simeq \frac{x_f}{20}\frac{10^{-8}\text{GeV}^{-2}}{\langle\sigma v\rangle_f} \tag{3.5}$$

onde tomamos $\Omega_{ME}^0 = 0.2$. Como iremos mostrar mais adiante, $x_f \simeq 20$ é uma boa aproximação para o caso das WIMPs, com $m_\chi \sim 100$ GeV. A seção de choque que implica em $\langle\sigma v\rangle_f = 10^{-8}\text{ GeV}^{-2} \simeq 10^{-26}\text{ cm}^3/\text{s}$ corresponde ao das interações eletrofraca. Devido a essa coincidência, $\langle\sigma v\rangle_f \simeq 10^{-26}\text{ cm}^3/\text{s}$ é tido como um "valor miraculoso". Entretanto, o "milagre das WIMPs" não é apenas pelo fato de que essa classe de partículas implica na

densidade de relíquia da ME observada, mas sim pela coincidência da sua interação com a da escala eletrofraca, o que permite ser mais facilmente sondada experimentalmente. Vale salientar que apesar das WIMPs implicarem na densidade de relíquia correta, existem outras propostas de candidatos a ME que implicam no mesmo feito, por exemplo as *WIMPless* [47], a qual recupera a densidade de relíquia da ME para diferentes valores de σ e m_χ.

A "receita" para obter a densidade de relíquia da matéria escura que utilizamos implicitamente no caso das WIMPs, nos diz informações valiosas sobre os vínculos sobre m_χ. Utilizamos que:

- χ deve ser uma relíquia fria ($x_f \gg 1$) e através da Equação 3.1 teremos que $\frac{\langle\sigma v\rangle_f M_{Pl}}{T_f^2} \gg 1$,
- $\langle\sigma v\rangle_f = 10^{-8}$ GeV^{-2}.

Substituindo a segunda condição na primeira, concluímos que $m_\chi \gtrsim 0.1$ eV. Entretanto uma matéria escura tão leve está excluída por afetar diretamente a CMB e a BBN, tendo que ter um limite inferior para a sua massa de $\mathcal{O}$(MeV) [48], para uma ME fria. Entretanto, se assumirmos o $\langle\sigma v\rangle_f$ das WIMPs igual ao dos neutrinos do MP (interação eletrofraca), teremos [31]

$$\langle\sigma v\rangle_f \simeq G_F^2 m_\chi^2 \,. \tag{3.6}$$

Com isso, podemos escrever a densidade de relíquia de χ, seguindo a Equação 3.5, da seguinte forma

$$\frac{\Omega_\chi^0}{\Omega_{ME}^0} \simeq \left(\frac{10 \text{ GeV}}{m_\chi}\right)^2 , \tag{3.7}$$

onde tomamos $x_f \simeq 20$. O que implica que para o caso das WIMPs devemos ter $m_\chi \gtrsim$ 10 GeV, este vínculo é conhecido como limite de Lee-Weinberg [3]. Assim como existe um limite inferior para a massa das WIMPs, elas também possuem um limite superior. As WIMPs devem ser mais leves que $m_\chi \lesssim 120$ TeV, com o intuito de não violar a unitariedade das ondas parciais [49].

3.0.1 Equação de Boltzmann – WIMPs

Para entendermos melhor a evolução da abundância Y_χ vamos solucionar a equação Boltzmann (Equação 2.75) numericamente através de um algorítimo em Python com a utilização do pacote Scipy. Primeiramente, reescrevemos a Equação 2.75 de uma forma mais conveniente para o nosso propósito

$$\frac{x}{Y_\chi^{eq}}\frac{dY_\chi}{dx} = -\frac{\Gamma_\chi}{H\,(T)}\left[\left(\frac{Y_\chi}{Y_\chi^{eq}}\right)^2 - 1\right] , \tag{3.8}$$

onde $H(T) = x^{-2}H(m_\chi)$ e $\Gamma_\chi \equiv n_\chi^{eq}\ \langle\sigma v\rangle$.

Para o caso não-relativístico a média térmica da seção de choque $\langle\sigma v\rangle$ pode ser aproximada por uma expansão em série de potência de $x^{-1} \equiv m/T$. Para este fim devemos usar $s = 4m^2 + m^2v^2$ e expandir σv em potências de v^2 e tomar a média térmica em seguida [45]

$$\langle\sigma v\rangle = \langle a + bv^2 + cv^4 + ...\rangle \tag{3.9}$$

$$= a + \frac{3}{2}bx^{-1} + \frac{15}{8}cx^{-2} + ... \tag{3.10}$$

Sem perda de generalidade podemos assumir que $a \gg b, c, ...$ e como o caso não-relativístico implica em valores elevados de x podemos aproximar $\langle\sigma v\rangle$ a uma constante σ_0, referente ao primeiro termo da expansão de série de potência acima [50]

$$\langle\sigma v\rangle \simeq \sigma_0\,. \tag{3.11}$$

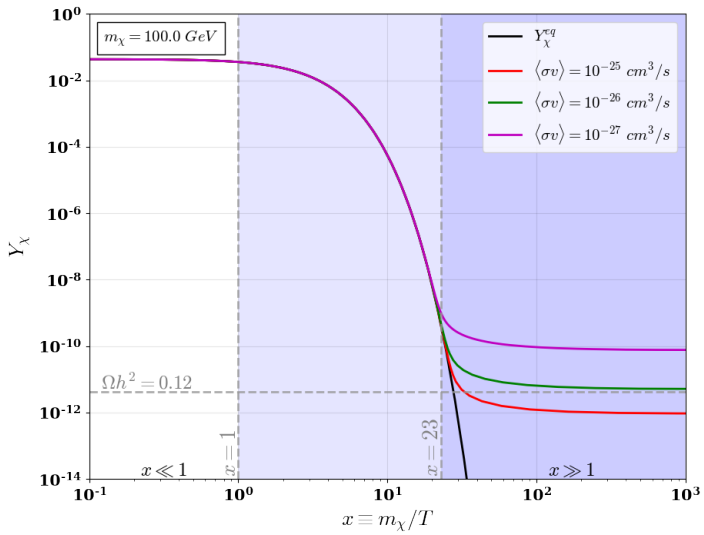

Figura 7 – Solução numérica da Equação 3.8 para uma WIMP com massa $m_\chi = 100$ GeV e para três valores de $\langle\sigma v\rangle$: 10^{-25} cm^3/s (curva vermelha), 10^{-26} cm^3/s (curva verde) e 10^{-27}cm^3/s (curva roxa). A evolução da abundância no equilíbrio Y_χ^{eq} é representada pela curva preta.

Na Figura 7 temos a solução numérica da Equação 3.8 para diferentes valores de $\langle\sigma v\rangle$, para $m_\chi = 100$ GeV. Onde $\langle\sigma v\rangle = 10^{-25}$cm^3/s (curva vermelha), $\langle\sigma v\rangle = 10^{-26}$cm^3/s (curva verde) e $\langle\sigma v\rangle = 10^{-27}$cm^3/s (curva roxa). A curva preta representa a evolução da abundância de χ no equilíbrio Y_χ^{eq}. Quando $x \ll 1$ (região branca) χ ainda é relativística e se encontra acoplada ao banho térmico ($Y_\chi \simeq Y_\chi^{eq}$). Conforme o universo se expande e esfria, χ se torna não-relativística ($x \simeq 1$). No período $1 \lesssim x \lesssim 23$ (região azul clara) χ ainda está acoplada ao banho térmico e Y_χ segue o valor da abundância no equilíbrio Y_χ^{eq}, entretanto neste período $Y_\chi^{eq} \propto x^{3/2}e^{-x}$ diminui exponencialmente como podemos observar na Figura 7. Isto significa que neste período (quando $T \ll m_\chi$) as partículas do

banho térmico não possuem energia suficiente para se aniquilarem e produzir um par de χ, ou seja, o processo $\chi + \bar{\chi} \leftrightarrow MP + MP$ que anteriormente estava em equilíbrio, começa a deixar o equilíbrio e ocorrer em uma única direção $\chi + \bar{\chi} \rightarrow MP + MP$. Com isso a abundância de χ começa a diminuir exponencialmente, até ocorrer o *freeze-out* de χ.

Podemos notar que na Figura 7 quando $x \simeq 23$ a curva da abundância de χ deixa de seguir a curva da abundância no equilíbrio Y_χ^{eq} e se mantém constante, além disso vemos que $\langle\sigma v\rangle \sim \mathcal{O}(10^{-26}\text{cm}^3/\text{s})$ conduz a abundância correta de χ como matéria escura, como havíamos predito na Equação 3.5. E podemos concluir também que abundância de χ após o seu *freeze-out* é inversamente proporcional ao valor de $\langle\sigma v\rangle$, pois quando $\langle\sigma v\rangle$ aumenta (diminui) isto implica que o processo $\chi + \bar{\chi} \rightarrow MP + MP$ cessa mais tarde (cedo), possibilitando que a abundância final de χ diminua (aumente).

O valor de $\langle\sigma v\rangle$ está diretamente relacionado ao acoplamento das interações, sendo assim, se o acoplamento for muito fraco o *freeze-out* da partícula pode ocorrer quando ela ainda for relativística. Neste caso, a abundância final da partícula precisa ser diluída de tal forma a satisfazer os vínculos da densidade de relíquia da ME. Vamos tratar deste cenário no próximo capítulo.

Adicionalmente, em um cenário de *freeze-in* a partícula χ não entraria em equilíbrio com as partículas do banho térmico, com isso, a abundância Y_χ não iria acompanhar a curva da abundância no equilíbrio Y_χ^{eq}. Neste cenário o comportamento da curva de Y_χ, assim como o seu valor final, irá depender das interações levadas em conta em $\langle\sigma v\rangle$ as quais a partícula está sujeita.

3.1 Discussão e conclusões

Neste capítulo exemplificamos o cenário das WIMPs como candidata a matéria escura fria. Vimos porque $\langle\sigma v\rangle \sim \mathcal{O}(10^{-26}\text{cm}^3/\text{s})$ é tido como um valor "miraculoso", já que implica em $\Omega_\chi^0 h^2 = 0.12$ além de ser da mesma ordem da interação eletrofraca. Fazendo com que as WIMPs se tornassem umas das principais candidatas a matéria escura.

Desde o início desta dissertação estamos interessados em calcular a densidade de relíquia de um candidato a ME. Por isso calculamos nesta seção apenas o instante do desacoplamento químico (*freeze-out*). Entretanto, em um cenário de WIMP o desacoplamento cinético ocorre quando $T \sim \mathcal{O}(10\text{ MeV})$ [42]. Para calcular o desacoplamento cinético devemos resolver a equação de Boltzmann (Equação 2.48) para a temperatura da partícula T_χ e considerar os processos de espalhamento (responsável por garantir o equilíbrio cinético) no operador colisão, assim como foi feito em [42]. Entretanto esta abordagem esta além do escopo desta dissertação.

Reenfatizando o que já havia sido comentado anteriormente, as WIMPs são co-

mumente apresentadas como matéria escura fria afim de evitar os problemas no período de formação de estruturas endereçados a uma matéria escura quente [8]. Entretanto, já é sabido atualmente que a matéria escura fria está relacionada a alguns problemas: problema do halo concentrado [10] e a formação do disco galático [11]. Por outro lado, esses problemas podem ser solucionados quando se considera uma matéria escura morna [12, 13].

Uma partícula candidata a matéria escura é classificada como morna quando o seu *free-streaming* se encontra entre $0.01\ \text{Mpc} < \lambda_{FS} < 0.1\ \text{Mpc}$ como discutido no Apêndice B. Este valor de *free-streaming* esta comumente associado a uma partícula que tem *freeze-out* relativístico e se torna não-relativística antes do período de igualdade radiação-matéria [15] ou é diluída via injeção de entropia [51]. Este último caso é o foco desta dissertação e iremos tratar dele nos capítulos posteriores. A diluição é necessária pois como iremos ver, um *freeze-out* relativístico implica diretamente em uma super-produção $\Omega_\chi^0 h^2 > 0.11$ de matéria escura. Sendo assim, a abundância Y_χ precisará ser diluída por um fator D

$$Y_\chi \to \frac{Y_\chi}{D}\,. \tag{3.12}$$

4 Decaimento Fora do Equilíbrio e Diluição

Anteriormente tratamos do caso do *freeze-out* não-relativístico, utilizando o exemplo das WIMPs. Entretanto, se assumirmos que a partícula χ, candidata a matéria escura, tenha o seu *freeze-out* relativístico, a sua abundância após o *freeze-out* de acordo com a Equação 2.52 será

$$Y_\chi(T_f) = \frac{45\zeta(3)}{2\pi^4}\frac{g_\chi}{g_s\left(T_f\right)}\,. \tag{4.1}$$

A partir das Equações 4.1 e 2.85 podemos obter a densidade de relíquia de χ hoje

$$\frac{\Omega_\chi^0 h^2}{\Omega_{ME}^0 h^2} = \frac{m_\chi Y_\chi(T_f)\mathfrak{s}_0 h^2}{\rho_{cr}}\frac{1}{\Omega_{ME}^0 h^2} \simeq 1.3\times 10^9 \frac{m_\chi}{\text{GeV}}\frac{1}{g_s\left(T_f\right)}\,, \tag{4.2}$$

onde utilizamos $\Omega_{ME}^0 h^2 = 0.12$ e $g_\chi = 2$.

A fim de que χ corresponda a totalidade de ME escura observada no nosso universo hoje ($\Omega_\chi^0 h^2 \simeq 0.12$), vamos escolher na Equação 4.2 o melhor conjunto de valores $(m_\chi, g_s\left(T_f\right))$ para este propósito, sempre respeitando o *freeze-out* relativístico. $g_s \simeq 105$ é o maior valor que g_s pode assumir quando consideramos as partículas do MP, isto ocorre quando $T_f \geq 200$ GeV . Ficamos portanto com

$$\frac{\Omega_\chi^0 h^2}{\Omega_{ME}^0 h^2} \simeq 1.0\times 10^7 \frac{m_\chi}{\text{GeV}}\frac{105}{g_s\left(T_f\right)}\,. \tag{4.3}$$

Sendo assim, devemos ter $m_\chi = 9.0\times 10^{-8}$ GeV $=$ 90.0 eV para que $\Omega_\chi^0 h^2 \simeq 0.12$.

Entretanto, como o foco desta dissertação é tratar de candidatos a ME fermiônicos (como os neutrinos estéreis), devemos ter em mente que este tipo de candidato a ME deve ser mais pesado que 2.5 keV [52, 53, 54, 55], a fim de não afetar o período de formação de estruturas. Portanto, tomando $m_\chi = 2.5$ keV

$$\frac{\Omega_\chi^0 h^2}{\Omega_{ME}^0 h^2} \simeq \left(\frac{25}{D}\right)\left(\frac{m_\chi}{2.5\text{ keV}}\right)\left(\frac{105}{g_s\left(T_f\right)}\right)\,, \tag{4.4}$$

onde definimos o fator D como um fator de diluição, devendo ter $D = 25$ de tal forma a obter χ como a totalidade da ME observada. Normalmente $D \sim \mathcal{O}\left(10-100\right)$ é capaz de diluir a abundância de uma matéria escura leve [56].

Neste capítulo iremos mostrar que o fator de diluição D esta diretamente relacionado a variação da entropia do banho térmico devido ao decaimento de uma partícula instável ϕ após o seu *freeze-out* e o *freeze-out* de χ. Iremos ver na seção 4.1 que o decaimento fora do equilíbrio da partícula ϕ aumenta a entropia do banho térmico padrão (banho térmico das partículas do MP) quando o produto final do decaimento termaliza. Já na seção 4.2 vamos relacionar o fator de diluição D com esse aumento da entropia.

4.1 Decaimento Fora do Equilíbrio

No Capítulo 2 obtemos a equação de Boltzmann para a densidade de número. Entretanto, aqui vamos tratar da variação da entropia do banho térmico, para isto é crucial que saibamos como a densidade de energia da partícula ϕ e das partículas do banho térmico evoluem. Sendo assim, na subseção 4.1.1 vamos obter a equação de Boltzmann para a densidade de energia considerando processos fora do equilíbrio. Em seguida iremos mostrar na subseção 4.1.3 que a entropia das partículas do banho térmico padrão aumenta quando ϕ decai nessas partículas e as mesmas termalizam [57].

Se a partícula ϕ tem o seu *freeze-out* relativístico em T_f e decai após se tornar não-relativística então ela pode dominar a densidade de energia do universo na forma de matéria. Para mostrarmos isto, vamos tomar a densidade de número de ϕ em T_f

$$n_\phi \;=\; g_\phi \frac{3\zeta(3)}{4\pi^2} T_f^3 \,, \tag{4.5}$$

onde a mesma permanece constante após o *freeze-out*, sofrendo apenas um *redshift* devido a expansão do universo. Por outro lado, quando ϕ se torna não-relativístico, sua densidade de energia é dada por $\rho_\phi = m_\phi n_\phi(T_f)$. E de acordo com o modelo cosmológico padrão a densidade de energia do nosso universo foi dominada inicialmente pela densidade de energia de radiação

$$\rho_R = g_e(T) \frac{\pi^2}{30} T^4 \,. \tag{4.6}$$

Portanto, a razão entre a densidade de energia da partícula ϕ após se tornar não-relativística e a densidade de energia de radiação é

$$\frac{\rho_\phi}{\rho_R} \propto a \times m_\phi \,. \tag{4.7}$$

O que a expressão acima nos informa é que a densidade de energia (ρ_ϕ) de uma partícula que desacopla relativisticamente e se torna não-relativística em seguida diminui mais lentamente do que a densidade de energia de radiação (ρ_R), portanto ρ_ϕ pode dominar a densidade de energia do universo caso ϕ viva o suficiente para isto. Tal comportamento entre as duas densidades de energia só é possível pois assumimos que o *freeze-out* de ϕ ocorre quando ele ainda é relativístico. Entretanto, o mesmo não acontece para um *freeze-out* não-relativístico, pois neste caso a densidade de energia $\rho_\phi \propto (m_\phi T)^{3/2} e^{-m_\phi/T}$ diminui exponencialmente.

Antecipamos este resultado pois iremos ver na subseção 4.1.5 que a densidade de energia da partícula ϕ deve dominar a densidade de energia do universo na sua forma de matéria antes de decair, para que tenhamos um aumento significativo da entropia do banho térmico padrão. Com isso já vamos admitir aqui que a partícula ϕ tem seu *freeze-out* relativístico e decai apenas após se tornar não-relativística.

4.1.1 Equação do Fluido

A evolução da densidade de energia ρ de um sistema em equilíbrio é dada por [31]

$$\dot{\rho} + 3H\left(\rho + p\right) = 0\,, \tag{4.8}$$

onde p é a pressão e H é o parâmetro de Hubble.

Entretanto, estamos lidando agora com decaimento fora do equilíbrio, sendo assim, devemos obter a equação de Boltzmann para a densidade de energia. Para isto tomamos a equação de Boltzmann (Equação 2.48), multiplicamos ambos os lados por $E\frac{g}{(2\pi)^3}$ e em seguida integramos no espaço dos momentos

$$\frac{g}{(2\pi)^3}\int d\vec{p}\; E\frac{\partial f}{\partial t} - H\frac{g}{(2\pi)^3}\int d\vec{p}\; Ep\frac{\partial f}{\partial p} \;= \frac{g}{(2\pi)^3}\int d\vec{p}\; E\frac{\hat{C}\left[f\right]}{E}\,, \tag{4.9}$$

onde $\vec{p} = (\vec{p}_x, \vec{p}_y, \vec{p}_z)$, $p \equiv |\vec{p}|$, $d\vec{p} \equiv dp_x dp_y dp_z$ e $E = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$.

Vale lembrar que a energia E depende explicitamente apenas do momento $\vec{p}$, portanto a energia comuta com a derivada temporal no primeiro termo do lado esquerdo da expressão acima. E utilizando da definição da densidade de energia dada pela Equação 2.2

$$\rho \equiv \frac{g}{(2\pi)^3}\int\; E\left(\vec{p}\right)\; f\left(\vec{p}\right) d\vec{p}\,, \tag{4.10}$$

podemos escrever a Equação 4.9 como

$$\frac{d\rho}{dt} - H\frac{g}{(2\pi)^3}\int d^3p\; Ep\frac{\partial f}{\partial p} \;= \frac{g}{(2\pi)^3}\int d\vec{p}\; E\frac{\hat{C}\left[f\right]}{E}\,. \tag{4.11}$$

Onde o segundo termo do lado esquerdo da equação acima será

$$\begin{aligned}\int d\vec{p}\; Ep\frac{\partial f}{\partial p} &= 4\pi\int dp\; Ep^3\frac{\partial f}{\partial p} \\ &= 4\pi\int dp\;\frac{\partial}{\partial p}\left(Ep^3 f\right) - 3\;4\pi\int dp\; p^2 Ef - 4\pi\int dp\; p^3 f\frac{dE}{dp} \\ &= -3\int d\vec{p}Ef - \int d\vec{p}\frac{p^2}{E}f\,,\end{aligned} \tag{4.12}$$

e da segunda para a terceira linha, o segundo termo desaparece pois conforme $p \to +\infty$ temos que $f \to 0$ exponencialmente. Além disso, utilizamos na Equação 4.12 o fato que

$$\frac{dE}{dp} = \frac{p}{E}\,. \tag{4.13}$$

Por fim, usando a definição da pressão, dada pela Equação 2.3

$$p \equiv \frac{g}{(2\pi)^3}\int\; \frac{p^2}{3E}\; f\left(\vec{p}\right) d\vec{p}\,, \tag{4.14}$$

e substituindo a Equação 4.12 na Equação 4.11, obtemos a equação de Boltzmann para a densidade de energia

$$\dot{\rho} + 3H\left(\rho + p\right) = \frac{g}{\left(2\pi\right)^3}\int d\vec{p}\; E\frac{\hat{C}\left[f\right]}{E}\,, \tag{4.15}$$

onde $p = \frac{1}{3}\rho$ para radiação e $p = 0$ para matéria

$$\begin{cases} \dot{\rho} + 4H\rho = \dfrac{g}{\left(2\pi\right)^3}\displaystyle\int d\vec{p}\; E\frac{\hat{C}\left[f\right]}{E} & \text{(radiação)} \\ \dot{\rho} + 3H\rho = \dfrac{g}{\left(2\pi\right)^3}\displaystyle\int d\vec{p}\; E\frac{\hat{C}\left[f\right]}{E} & \text{(matéria)}\,. \end{cases} \tag{4.16}$$

Sabemos que no início do universo o banho térmico padrão é composto por várias espécies de partículas em equilíbrio entre si. Para cada espécie de partícula existe uma equação de densidade de energia associada, como as partículas que compõem o banho térmico padrão são relativísticas, as n equações associadas a cada uma das n espécies são

$$\begin{cases} \dot{\rho}_1 + 4H\rho_1 = \dfrac{g_1}{\left(2\pi\right)^3}\displaystyle\int d\vec{p}_1\; E_1\frac{\hat{C}\left[f_1\right]}{E_1} \\ \qquad\qquad \vdots \\ \dot{\rho}_n + 4H\rho_n = \dfrac{g_n}{\left(2\pi\right)^3}\displaystyle\int d\vec{p}_n\; E_n\frac{\hat{C}\left[f_n\right]}{E_n}\,. \end{cases} \tag{4.17}$$

Entretanto, se definirmos o campo $\rho_R = \sum_{i=1}^{n}\rho_i$ poderemos resumir as n equações acima como

$$\dot{\rho}_R + 4H\rho_R = \sum_{i=1}^{n}\int d\vec{p}_i\; E_i\frac{\hat{C}\left[f_i\right]}{E_i}\,, \tag{4.18}$$

onde essa equação corresponde a densidade de energia do banho térmico padrão.

De acordo com o nosso cenário o único processo que devemos levar em conta no operador colisão da equação de Boltzmann para ρ_R e ρ_ϕ é o decaimento da partícula ϕ. Por simplicidade, vamos aqui só obter o operador colisão para ρ_R, entretanto o operador colisão para ρ_ϕ pode ser obtido facilmente de forma análoga.

De modo a generalizar nossa abordagem, vamos assumir que dentre todos os canais de decaimento possíveis para ϕ, apenas uma fração deles tem em seu produto final partículas que termalizam com o banho térmico padrão. Vamos definir a largura de decaimento dos canais que termalizam Γ_T e que não-termalizam Γ_{NT} com o banho térmico padrão da seguinte forma

$$\begin{aligned} \Gamma_T &\equiv \sum_{i}^{N}\Gamma^{(i)}(\phi \to X + Y + Z) \\ \Gamma_{NT} &\equiv \sum_{j}^{M}\Gamma^{(j)}(\phi \to \tilde{X} + \tilde{Y} + \tilde{Z})\,, \end{aligned} \tag{4.19}$$

onde o somatório é referente aos N (M) canais de decaimento possíveis de ϕ que termalizam (não-termalizam). X ($\tilde{X}$), Y ($\tilde{Y}$) e Z ($\tilde{Z}$) representam partículas que termalizam (não-termalizam) com o banho térmico padrão. Vamos assumir que as partículas que não-termalizam com o banho térmico padrão se acoplem a um setor escondido, contribuindo para a densidade de energia $\tilde{\rho}$ deste setor. Além disso, admitiremos que o produto final do decaimento é relativístico e termaliza instantaneamente [57].

Prosseguindo, podemos agora escrever o operador colisão (Equação 2.59) para a partícula X produzida pelo decaimento $\phi \to X + Y + Z$

$$\frac{g_X}{(2\pi)^3}\int \frac{d\vec{p}_X}{E_X} E_X \hat{C}\left[f_X\right] \simeq \pm \int d\Pi_\phi d\Pi_X d\Pi_Y d\Pi_Z \, (2\pi)^4 \, \delta^4\left(\mathcal{P}_\phi - \mathcal{P}_X - \mathcal{P}_Y - \mathcal{P}_Z\right) E_X \left[|\overline{\mathcal{M}}|^2_{\phi\to X+Y+Z} f_\phi - |\overline{\mathcal{M}}|^2_{X+Y+Z\to\phi} f_X f_Y f_Z\right] . \quad (4.20)$$

onde já assumimos $(1 \pm f) \simeq 1$ como discutimos na seção 2.5 (ver Figura 6).

Como ϕ só decai depois de se tornar não-relativístico ($m_\phi \gg T$). Neste período as partículas do banho térmico padrão não possuem energia suficiente para produzir ϕ, sendo assim, o processo $X + Y + Z \to \phi$ está impossibilitado de ocorrer, e ficamos com

$$\frac{g_X}{(2\pi)^3}\int \frac{d\vec{p}_X}{E_X} E_X \hat{C}\left[f_X\right] \simeq \int d\Pi_\phi d\Pi_X d\Pi_Y d\Pi_Z \, (2\pi)^4 \, \delta^4\left(\mathcal{P}_\phi - \mathcal{P}_X - \mathcal{P}_Y - \mathcal{P}_Z\right) E_X \left[|\overline{\mathcal{M}}|^2_{\phi\to X+Y+Z} f_\phi\right] . \quad (4.21)$$

Vale ressaltar que estamos obtendo o operador colisão apenas da partícula X, entretanto, para o mesmo decaimento $\phi \to X + Y + Z$ teremos um operador colisão associado a partícula Y e outro a partícula Z. O operador colisão de Y e Z serão análogos ao do X, dado pela Equação 4.21

$$\frac{g_Y}{(2\pi)^3}\int \frac{d\vec{p}_Y}{E_Y} E_Y \hat{C}\left[f_Y\right] \simeq \int d\Pi_\phi d\Pi_X d\Pi_Y d\Pi_Z \, (2\pi)^4 \, \delta^4\left(\mathcal{P}_\phi - \mathcal{P}_X - \mathcal{P}_Y - \mathcal{P}_Z\right) E_Y \left[|\overline{\mathcal{M}}|^2_{\phi\to X+Y+Z} f_\phi\right] , \quad (4.22)$$

$$\frac{g_Z}{(2\pi)^3}\int \frac{d\vec{p}_Z}{E_Z} E_Z \hat{C}\left[f_Z\right] \simeq \int d\Pi_\phi d\Pi_X d\Pi_Y d\Pi_Z \, (2\pi)^4 \, \delta^4\left(\mathcal{P}_\phi - \mathcal{P}_X - \mathcal{P}_Y - \mathcal{P}_Z\right) E_Z \left[|\overline{\mathcal{M}}|^2_{\phi\to X+Y+Z} f_\phi\right] . \quad (4.23)$$

Como vimos na Equação 4.18, a densidade de energia do banho térmico padrão é a soma da densidade de energia de cada espécie que o compõe, devemos então somar as Equações 4.21, 4.22 e 4.23

$$\sum_{i=X,Y,Z} \frac{g_i}{(2\pi)^3}\int \frac{d\vec{p}_i}{E_i} E_i \hat{C}\left[f_i\right] = \int d\Pi_\phi d\Pi_X d\Pi_Y d\Pi_Z \, (2\pi)^4 \, \delta^4\left(\mathcal{P}_\phi - \mathcal{P}_X - \mathcal{P}_Y - \mathcal{P}_Z\right) E_\phi \left[|\overline{\mathcal{M}}|^2_{\phi\to X+Y+Z} f_\phi\right] , \quad (4.24)$$

onde utilizamos a conservação da energia $E_\phi = E_X + E_Y + E_Z$.

E a partir da definição da largura de decaimento (Equação 2.77) podemos escrever a equação acima como

$$\sum_{i=X,Y,Z} \frac{g_i}{(2\pi)^3} \int \frac{d\vec{p}_i}{E_i} E_i \hat{C}\left[f_i\right] = \frac{g_\phi}{(2\pi)^3} \int d\vec{p}_\phi E_\phi \Gamma(E_\phi) f_\phi \,, \tag{4.25}$$

onde $\Gamma(E_\phi)$ representa a largura de decaimento da partícula ϕ. Por fim, solucionamos a equação acima como

$$\begin{aligned} \int d\Pi_\phi 2E_\phi^2 \Gamma(E_\phi) f_\phi = & \\ &= \frac{g_\phi}{(2\pi)^3} \int d\vec{p}_\phi \; E_\phi \; \Gamma(E_\phi) \; f_\phi \\ &= \Gamma(E_\phi) E_\phi \; \frac{g_\phi}{(2\pi)^3} \int d\vec{p}_\phi f_\phi \\ &= \frac{\Gamma(E_\phi) E_\phi}{m_\phi} \; n_\phi \; m_\phi \\ &= \Gamma(m_\phi) \; \rho_\phi \,, \end{aligned} \tag{4.26}$$

onde utilizamos do fato que de acordo com a Equação 2.77 $\Gamma(E_\phi) \propto E_\phi^{-1}$, portanto $\Gamma(E_\phi)E_\phi$ é uma constante e pode sair do integrando. $\Gamma(m_\phi)$ representa a largura de decaimento da partícula ϕ no seu referencial de centro de massa.

Repetindo o raciocínio desenvolvido anteriormente para todos os canais de decaimento de ϕ que termalizam, definido na Equação 4.19, podemos obter a equação de Boltzmann para a densidade de energia das partículas do banho térmico padrão (Equação 4.18) considerando o decaimento fora do equilíbrio da partícula ϕ

$$\dot{\rho}_R + 4H\rho_R = \Gamma_T \rho_\phi \,. \tag{4.27}$$

De forma análoga ao que fizermos para obter a equação de Boltzmann para ρ_R, repetimos para obter $\tilde{\rho}$ e ρ_ϕ

$$\begin{cases} \dfrac{d\rho_\phi}{dt} + 3H\rho_\phi \;\; = -\Gamma_\phi \rho_\phi \,, \\ \dfrac{d\rho_R}{dt} + 4H\rho_R \;\; = BR_T \Gamma_\phi \rho_\phi \,, \\ \dfrac{d\tilde{\rho}}{dt} + 4H\tilde{\rho} \;\; = BR_{NT} \Gamma_\phi \rho_\phi \,, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{d\rho_\phi}{da} + 3\dfrac{\rho_\phi}{a} \;\; = -\dfrac{\Gamma_\phi}{H}\dfrac{\rho_\phi}{a} \,, \\ \dfrac{d\rho_R}{da} + 4\dfrac{\rho_R}{a} \;\; = BR_T \dfrac{\Gamma_\phi}{H}\dfrac{\rho_\phi}{a} \,, \\ \dfrac{d\tilde{\rho}}{da} + 4\dfrac{\tilde{\rho}}{a} \;\; = BR_{NT} \dfrac{\Gamma_\phi}{H}\dfrac{\rho_\phi}{a} \,, \end{cases} \tag{4.28}$$

onde $\Gamma_\phi \equiv \Gamma_T + \Gamma_{NT}$ é a largura de decaimento total da partícula ϕ e $BR_T \equiv \Gamma_T/\Gamma_\phi$ ($BR_{NT} \equiv \Gamma_{NT}/\Gamma_\phi$) representa o *branching ratio* dos canais que termalizam (não-termalizam) com o banho térmico padrão. Também utilizamos a transformação de variáveis $\frac{d}{dt} = aH\frac{d}{da}$.

Podemos escrever a equação diferencial de ϕ acima, da seguinte forma

$$\frac{d}{dt}\left(a^3\rho_\phi\right) = -\Gamma_\phi \left(a^3\rho_\phi\right) \,, \tag{4.29}$$

cuja solução é

$$\rho_\phi = \rho_\phi^{(A)} \left(\frac{a}{a_A}\right)^{-3} e^{-\Gamma_\phi t}\,, \tag{4.30}$$

onde o índice "A" indica o valor medido em algum momento anterior ao decaimento de ϕ. Concluímos assim que a partícula ϕ decai exponencialmente.

4.1.2 Cosmologia não-padrão

De acordo com o modelo cosmológico padrão o universo foi dominado inicialmente por radiação. Entretanto, vamos mostrar aqui que para ocorrer uma produção significativa de entropia via um decaimento fora do equilíbrio a dinâmica do universo se altera naturalmente [58], conduzindo a uma cosmologia não-padrão, pois como já antecipamos ρ_ϕ deve dominar a densidade de energia do universo na sua forma não-relativística antes de decair. Existe na literatura alguns trabalhos que utilizam uma cosmologia não-padrão semelhante para viabilizar outros tipos de partículas candidatas a ME, como o caso dos áxions [59] ou de uma matéria escura produzida via *freeze-in* [60].

Para ilustrar o nosso cenário, iremos assumir que a partícula instável ϕ está inicialmente acoplada ao banho térmico padrão e tem seu *freeze-out* relativístico a uma temperatura T_f. Após o seu *freeze-out*, ϕ se torna não-relativística em T_i, passando a dominar a evolução do universo na forma de matéria em T_M. Como ϕ decai exponencialmente (de acordo com a Equação 4.30) vamos admitir que ela começa a decair em T_{PE} (Produção de Entropia, abreviado: PE) e o seu decaimento cessa em T_{RH} (do inglês: *Reheating* [57], abreviado RH).

Vamos admitir por simplicidade que $\rho_R \gg \tilde{\rho}$ durante todo o período, e $BR_T \simeq 1$ para que o aumento da entropia seja relevante. Na época anterior ao *freeze-out* da partícula ϕ e antes da mesma se tornar não-relativística, o universo é dominado por radiação e o parâmetro de Hubble evolui de acordo com a Equação 2.24

$$H_{RD} = \sqrt{\frac{\pi^2 g_e(T)}{90}}\frac{T^2}{M_{Pl}} \tag{4.31}$$

A partir do instante em que ϕ se torna não-relativística (em T_i) a densidade de energia do universo deixa de ser dominada apenas por radiação e passa a receber a contribuição da densidade de energia de ϕ. Sendo assim, a densidade de energia do universo tem a contribuição de três componentes: ρ_R, $\tilde{\rho}$ e ρ_ϕ. Entretanto podemos aproximá-la por

$$\rho \simeq \rho_R + \rho_\phi\,, \tag{4.32}$$

onde desprezamos $\tilde{\rho}$, e ρ_ϕ representa a densidade de energia de ϕ na sua forma não-relativística.

Conforme o universo se expande, ρ_ϕ começa a dominar a densidade de energia do universo a uma dada temperatura T_M. Neste período o parâmetro de Hubble evolui de

acordo com

$$H_M = \sqrt{\frac{\rho_\phi}{3M_{Pl}^2}}\,, \tag{4.33}$$

para mais detalhes ver a Equação A.22.

Após o *freeze-out* (em t_f) da partícula ϕ a sua energia no universo permanece constante, portanto podemos representar a sua densidade de energia em qualquer instante t' após o *freeze-out* como $\rho_\phi(t') = \rho_\phi(t_f)\left(\frac{a(t_f)}{a(t')}\right)^3$. Com isso, o valor da densidade de energia de ϕ no instante em que ela começa a dominar a evolução do universo pode ser representado por

$$\rho_\phi = \rho_\phi^{(i)}\left(\frac{a^{(i)}}{a}\right)^3 = \frac{\rho_\phi^{(i)}}{\mathfrak{s}^{(i)}}\mathfrak{s} = m_\phi Y_\phi^{(i)}\frac{2\pi^2}{45}g_s(T)T^3 \tag{4.34}$$

onde o índice "i" se refere a medida no instante T_i e $\mathfrak{s}$ representa a densidade de entropia, dada pela Equação 2.27. Consideramos acima que como ϕ é não-relativístico em T_i, então $\rho_\phi^{(i)} = m_\phi n_\phi^{(i)}$. Sendo assim podemos escrever a Equação 4.33 como

$$H_M(T) = H_{RD}(T_{RH})\sqrt{\frac{4m_\phi Y_\phi^{(i)}}{3T_{RH}}\frac{g_s(T)}{g_e(T_{RH})}}\left(\frac{T}{T_{RH}}\right)^{3/2}\,, \tag{4.35}$$

onde utilizamos a Equação 4.31.

Quando a partícula ϕ começa a decair, o período em que o universo é dominado por matéria termina (em T_{PE}), iniciando o período de produção de entropia. De acordo com a Equação 4.30 a partícula ϕ decai exponencialmente. Devido ao comportamento exponencial do decaimento, podemos assumir que $\frac{d(\rho_\phi a^3)}{da} \simeq 0$ [58] no intervalo $t_{PE} \lesssim t < t_{RH}$, onde t_{PE} e t_{RH} representam o instante quando a temperatura do universo é T_{PE} e T_{RH}, respectivamente. Vamos mostrar mais adiante que esta aproximação é valida. Neste período a entropia e a densidade de energia de radiação deixam de ser constantes e passam a aumentar. Com isto em mente podemos escrever a equação diferencial para ρ_R, dado pela Equação 4.28, como

$$\frac{d(\rho_R a^4)}{da} \simeq \sqrt{3}M_{Pl}\Gamma_\phi\left(\rho_\phi^{(i)}(a^{(i)})^3\right)^{1/2}a^{3/2}\,, \tag{4.36}$$

onde assumimos $BR_T \simeq 1$ e cuja primitiva é

$$\rho_R \simeq \frac{2}{5}\sqrt{3}M_{Pl}\Gamma_\phi\left(\rho_\phi^{(i)}(a^{(i)})^3\right)^{1/2}a^{-3/2}\,. \tag{4.37}$$

Finalmente, utilizando da equação acima junto com a definição de ρ_R (Equação 2.21) o parâmetro de Hubble no período de produção de entropia (PE) pode ser escrito como

$$H_{PE} = \sqrt{\frac{\rho_\phi}{3M_{Pl}^2}} = \sqrt{\frac{\rho_\phi^{(i)}(a^{(i)})^3}{3M_{Pl}^2a^3}} = \frac{5}{2}\frac{1}{3M_{Pl}^2\Gamma_\phi}\frac{\pi^2}{30}g_e(T)T^4\,. \tag{4.38}$$

O decaimento da partícula ϕ cessa em T_{RH} e o universo volta a ser dominado por radiação, a expressão para a temperatura de *reheating* pode ser obtida através da

relação $\Gamma_\phi = \kappa H_{RD}(T_{RH})$, o parâmetro κ surge do fato que a partícula ϕ não decai instantaneamente em T_{RH}, entretanto não existe um consenso sobre o valor de κ podendo-se encontrar trabalhos com $\kappa \simeq 1$ [57, 61] e $\kappa = 3$ [62, 63].

Como estamos lidando com uma variação do parâmetro de Hubble entre os diferentes períodos do universo, isto requer a continuidade do parâmetro de Hubble

$$\begin{aligned} H_{RD}(T_M) &= H_M(T_M) \\ H_M(T_{PE}) &= H_{PE}(T_{PE}) \\ H_{PE}(T_{RH}) &= H_{RD}(T_{RH})\,, \end{aligned} \tag{4.39}$$

esta condição de continuidade irá impor o valor de κ.

A fim de fazer o estudo da continuidade do parâmetro de Hubble discutido acima, vamos reescrever a Equação 4.38 da seguinte forma

$$H_{PE}(T) = H_{RD}(T_{RH})\frac{5}{2}\frac{1}{\kappa}\frac{g_e(T)}{g_e(T_{RH})}\left(\frac{T}{T_{RH}}\right)^4 . \tag{4.40}$$

E de forma a garantir a continuidade de $H_{PE}(T_{RH}) = H_{RD}(T_{RH})$, obtemos $\kappa = \frac{5}{2}$ [58].

Agora, com o intuito discutir a continuidade do parâmetro de Hubble entre as demais fases do universo, vamos antecipar a expressão do parâmetro de diluição D que iremos obter na seção 4.2

$$D \equiv \frac{4}{3}\frac{m_\phi Y_\phi^{(i)}}{T_{RH}} . \tag{4.41}$$

Com isso em mente e utilizando as Equações 4.35 e 4.31, a igualdade $H_{RD}(T_M) = H_M(T_M)$ implica em

$$D = \frac{g_e(T_M)}{g_s(T_M)}\frac{T_M}{T_{RH}} . \tag{4.42}$$

E por fim, utilizando as Equações 4.35 e 4.40, a continuidade de $H_M(T_{PE}) = H_{PE}(T_{PE})$ implicará em

$$\frac{T_{PE}}{T_{RH}} = \left(D\frac{g_s(T_{PE})g_e(T_{RH})}{g_e^2(T_{RH})}\right)^{1/5} . \tag{4.43}$$

Agora, utilizando o valor de $\kappa = \frac{5}{2}$ obtido anteriormente e a condição para a temperatura de *reheating* $\Gamma_\phi = \kappa H_{RD}(T_{RH})$, obtemos

$$T_{RH} = \left(\frac{90}{\left(\frac{5}{2}\right)^2 \pi^2 g_e(T_{RH})}\right)^{1/4} \sqrt{M_{Pl}\Gamma_\phi} . \tag{4.44}$$

Quando necessário nesta dissertação iremos utilizar $\kappa = \frac{5}{2}$ [58], pois como foi mostrado este valor garante a continuidade do parâmetro de Hubble.

4.1.3 Injeção de Entropia

Com $BR_T \simeq 1$ a partícula ϕ decai majoritariamente em partículas que entram em equilíbrio com as partículas do banho térmico padrão (termalizam com o banho térmico padrão), sendo assim é de se esperar que o decaimento aumente a densidade de energia desse setor. Com isso, nesta subseção vamos descrever como esse aumento da energia implica no aumento da entropia banho térmico padrão. Vale ressaltar que como o setor escondido se encontra desacoplado do banho térmico padrão, eles evoluem com temperaturas distintas T (banho térmico padrão) e $\tilde{T}$ (banho térmico do setor escondido). Este fato implica que a entropia do banho térmico padrão S evolui diferentemente da entropia do setor escondido $\tilde{S}$. A discussão que iremos fazer aqui também se aplica ao setor escondido.

Quando ϕ decai sua energia é transferida para as partículas do MP acopladas ao banho térmico. Como existe um aumento da energia das partículas do banho térmico padrão, é de se esperar que através da segunda lei da termodinâmica a entropia do banho térmico também aumente [57]

$$dS = \frac{dQ}{T}\,, \tag{4.45}$$

onde dS representa a variação da entropia devido a variação de calor dQ do sistema. De acordo com a primeira lei da termodinâmica, a variação de calor de um sistema é dada por

$$dQ = dE + pdV\,, \tag{4.46}$$

onde dE representa a variação da energia do sistema (banho térmico padrão), p a pressão e dV a variação do volume. Assumindo que estamos em um referencial comóvel, teremos $dV = 0$. Recaímos então no caso $dQ = dE$, onde $dQ = d(BR_T\rho_\phi a^3)$.

Sendo assim, utilizando ρ_ϕ dado pela Equação 4.30, ficamos com [51, 1, 58]

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{T}\frac{d(BR_T\rho_\phi a^3)}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{dS}{dt} = BR_T\frac{\Gamma_\phi\rho_\phi a^3}{T}\,, \tag{4.47}$$

onde por simplicidade daqui para frente não vamos nos preocupar com o fator BR_T, já que assumimos $BR_T \simeq 1$.

Com o intuito de solucionarmos a equação acima, podemos representar a temperatura T em função da entropia S a partir da Equação 2.29

$$T = S^{1/3}a^{-1}z(T)^{-1/3}\,, \tag{4.48}$$

onde,

$$z(T) \equiv \frac{2\pi^2}{45}g_s(T)\,. \tag{4.49}$$

Com isso podemos reescrever a Equação 4.47 como

$$\dot{S} = \rho_\phi\Gamma_\phi a^4 z(T)^{-1/3}S^{-1/3}\,, \tag{4.50}$$

onde $\dot{S}$ significa a derivada temporal de S. E a densidade de energia do banho térmico evolui da seguinte forma

$$\rho_R = \frac{\pi^2}{30} g_e(T) T^4 = \frac{\pi^2}{30} g_e(T) a^{-4} \left(\frac{S}{z(T)} \right)^{4/3} . \tag{4.51}$$

Observamos que a densidade de energia de radiação pode aumentar quando a entropia S aumenta, entretanto é um equívoco afirmar isto, pois ρ_R sempre decresce proporcional a a^{-4}, como iremos ver mais adiante a densidade de energia de radiação diminui mais lentamente quando a entropia aumenta.

4.1.4 Abordagem Analítica

Para obtermos como a entropia varia quando consideramos o decaimento fora do equilíbrio, vamos solucionar analiticamente a Equação 4.50. Integrando-a de algum período muito antes de ϕ decair (em t_A), mas após se tornar não-relativístico, até algum período depois do seu decaimento (em algum instante $t \gg \Gamma_\phi^{-1}$, onde tomamos $t = \frac{1}{\kappa H}$)

$$\Delta = \left[1 + \frac{4}{3} \frac{Y_\phi^{(A)} m_\phi}{T_A} \frac{1}{z(T)^{1/3}} \int_{t_A}^{t} z(T)^{1/3} \frac{a}{a_A} e^{-\Gamma_\phi t'} d\left(\Gamma_\phi t'\right) \right]^{3/4} , \tag{4.52}$$

onde $Y_\phi^{(A)} \equiv Y_\phi(T_A)$, $\Delta \equiv S/S_A$ e $a_A \equiv a(t_A)$. Com o intuito de observarmos como a densidade de energia de radiação ρ_R evolui mediante o aumento da entropia, dado pela Equação 4.52, substituímos este último resultado na Equação 4.51

$$\rho_R = \overbrace{\frac{\pi^2}{30} g_e(T) a^{-4}(t) \left(z^{-1}(T) S_A \right)^{4/3}}^{I} + \overbrace{\frac{\pi^2}{30} g_e(T) a^{-4}(t) \left(z^{-1}(T) S_A \right)^{4/3} \left[\frac{4}{3} \frac{Y_\phi^{(A)} m_\phi}{T_A} \frac{1}{z(T)^{1/3}} \int_{t_A}^{t} z(T)^{1/3} \frac{a}{a_A} e^{-\Gamma_\phi t'} d\left(\Gamma_\phi t'\right) \right]}^{II} . \tag{4.53}$$

Desenvolvendo o termo I temos

$$I = \frac{\pi^2}{30} g_e(T_A) \frac{g_e(T)}{g_e(T_A)} a_A^{-4} \frac{a^{-4}}{a_A^{-4}} \left[z(T_A)^{-1} \frac{z(T)^{-1}}{z(T_A)^{-1}} S_A \right]^{4/3} \tag{4.54}$$

$$= \rho_R(T_A) \left(\frac{a}{a_A} \right)^{-4} \frac{g_e(T)}{g_e(T_A)} \left(\frac{z(T)}{z(T_A)} \right)^{-4/3} , \tag{4.55}$$

repetindo o mesmo processo para o termo II, concluímos que

$$\rho_R(T) = \rho_R(T_A) \left(\frac{a}{a_A} \right)^{-4} \frac{g_e(T)}{g_e(T_A)} \left(\frac{z(T)}{z(T_A)} \right)^{-4/3} + \rho_\phi(T_A) \left(\frac{a}{a_A} \right)^{-4} g_e(T) g_s(T)^{-4/3} \int_{t_A}^{t} g_s(T)^{1/3} \frac{a}{a_A} e^{-\Gamma_\phi t'} d\left(\Gamma_\phi t'\right) . \tag{4.56}$$

Notamos que as Equações 4.52 e 4.56 são representadas como a soma de dois termos. Se não houvesse o decaimento teríamos $\Delta = 1$, o qual é representado pelo primeiro termo do lado direito da Equação 4.52. Isto nos faz concluir que o segundo termo do lado direito da Equação 4.52 se refere ao aumento da entropia devido ao decaimento. O mesmo acontece com a densidade de energia do banho térmico, representada pela Equação 4.56, o primeiro termo do lado direito representa o *redshift* da densidade de energia do instante T_A até um instante posterior ao decaimento T, entretanto, o segundo termo do lado direito representa a contribuição da densidade de energia de ϕ, devido ao decaimento. Sendo assim podemos representar as Equações 4.52 e 4.56 de uma forma mais intuitiva como

$$\rho_R = \rho_R^{(A)} + \rho_R^{(\phi)} \tag{4.57}$$

$$S = S^{(A)} + S^{(\phi)}\,, \tag{4.58}$$

onde o índice superior "(A)" ("(ϕ)") significa uma medida no tempo anterior (posterior) ao decaimento.

Antes de prosseguirmos com a solução analítica, vamos solucionar grosseiramente a integral na Equação 4.52 a fim de obtermos algumas pistas sobre o comportamento de S e ρ_R. Consideremos agora um período $t_A < t' < t$ muito antes do decaimento de ϕ ($\Gamma_\phi t' \ll 1$), onde $e^{-\Gamma_\phi t'} \simeq 1$ e assumimos que $g_s(T)^{1/3} \simeq$ constante neste período, sendo assim temos [57]

$$\int g_s(T)^{1/3} \frac{a}{a_A} e^{-\Gamma_\phi t'} d\left(\Gamma_\phi t'\right) \simeq \Gamma_\phi t \frac{a}{a_A} \frac{g_s(T)^{1/3}}{1+d}\,, \tag{4.59}$$

onde utilizamos o fato que $a \propto \left(\frac{t}{t_A}\right)^d$ [31] ($d = \frac{1}{2}$ se o universo for dominado por radiação e $d = \frac{2}{3}$ se for dominado por matéria).

Substituindo a Equação 4.59 na Equação 4.56 podemos obter facilmente que $\rho_R^{(\phi)} \propto a^{-3/2}$, enquanto que $\rho_R^{(A)} \propto a^{-4}$. Como o decaimento de ϕ ocorre quando ρ_ϕ domina a densidade de energia do universo ($\rho_\phi \gg \rho_R$), vai existir um período em que $\rho_R^{(\phi)}$ é o termo dominante em ρ_R. Utilizando a Equação 4.51 temos $S \propto \rho_R^{3/4} a^3$, ou seja, quando $\rho_\phi \gg \rho_R$ teremos $S \propto \rho_R^{(\phi)} a^3 \propto a^{15/8}$. O que implica que de acordo com a Equação 4.48 a temperatura T passa diminuir mais lentamente $T \propto a^{-3/8}$. Ou seja, no período de produção de entropia a temperatura do banho térmico não aumenta, mas diminui mais lentamente.

Prosseguindo com o nosso objetivo de obter uma aproximação analítica das Equações 4.52 e 4.56 vamos definir o seguinte conjunto de novas variáveis

$$x \equiv \Gamma_\phi t\,, \quad y \equiv \frac{a}{a_A}\,, \quad f_i \equiv \frac{\rho_i}{\rho_\phi^{(A)}}\,, \quad H_\phi \equiv \frac{\sqrt{\rho_\phi^{(A)}}}{\sqrt{3} M_{Pl}} \; e \quad x_\phi \equiv \frac{\Gamma_\phi}{\kappa H_\phi}\,. \tag{4.60}$$

Com isso, reescrevemos as Equações 4.52 e 4.56 em função das novas variáveis

$$f_R = f_R^{(A)}\ y^{-4}\frac{g_e}{g_{e,A}}\left(\frac{z}{z_A}\right)^{-4/3} + y^{-4}g_e g_s^{-4/3}\int_0^{x'} dx\ g_s^{1/3} y e^{-x}\,, \tag{4.61}$$

$$\Delta^{4/3} = 1 + \frac{4}{3}\frac{Y_\phi^{(A)} m_\phi}{T_A} g_s^{-1/3}\int_0^{x'} g_s^{1/3} y e^{-x} dx\,, \tag{4.62}$$

onde tomamos o limite de integração inferior igual a zero pois assumimos que $x_A \ll 1$.

Antes de ϕ decair, a sua densidade de energia domina a densidade de energia do universo o que irá implicar em um aumento significativo da entropia e da densidade de energia de radiação, sendo assim podemos esperar que $S^{(\phi)} \gg S^{(A)}$ ($\rho_R^{(\phi)} \gg \rho_R^{(A)}$) e com isso desprezar o primeiro termo das duas equações acima, os quais representam os valores de S e ρ_R iniciais (antes do decaimento),

$$\begin{aligned} f_R &\simeq y^{-4} g_e g_s^{-4/3} \textstyle\int_0^{x'} dx\ g_s^{1/3} y e^{-x}\,, \\ \Delta^{4/3} &\simeq \frac{4}{3}\frac{Y_\phi^{(A)} m_\phi}{T_A} g_{s,A}^{-1/3} \textstyle\int_0^{x'} g_s^{1/3} y e^{-x} dx\,. \end{aligned} \tag{4.63}$$

Seguindo o mesmo raciocínio, como ρ_ϕ domina a densidade de energia do universo antes do decaimento, então o parâmetro de Hubble evolui de acordo com

$$H \simeq \frac{\sqrt{\rho_\phi + \rho_R^{(\phi)}}}{\sqrt{3} M_{Pl}}\,, \tag{4.64}$$

onde ρ_ϕ é dado pela Equação 4.30. Com o intuito de resolvermos a integral na Equação 4.63, precisamos expressar y de uma forma mais conveniente. Para isto vamos tomar o parâmetro de Hubble (Equação 4.64) escrito em função das novas variáveis

$$\frac{\dot{y}}{y} \simeq x_\phi^{-1}\left[y^{-3}e^{-x} + g_s^{-1/3} y^{-4}\int_0^{x'} g_s^{1/3} y e^{-x} dx\right]^{1/2}\,, \tag{4.65}$$

onde tomamos $g_e \simeq g_s$. O primeiro termo se refere a densidade de energia da partícula ϕ (Equação 4.30) e o segundo termo se refere a f_R, Equação 4.63. Para simplificarmos mais ainda a expressão acima, vamos definir uma nova variável

$$w \equiv x_\phi^{2/3} y\,, \tag{4.66}$$

de tal forma a eliminar a dependência de x_ϕ. Com isto podemos escrever a Equação 4.65 como

$$\frac{\dot{w}}{w} = \left[w^{-3}e^{-x} + g_s^{-1/3} w^{-4}\int_0^{x'} g_s^{1/3} w e^{-x} dx\right]^{1/2}\,. \tag{4.67}$$

Se assumirmos que durante o período de decaimento g_s é aproximadamente constante, só precisaremos de uma expressão para w para resolvermos a integral. De acordo

com [57] podemos obter w através das condições de contorno impostas naturalmente pela Equação 4.67

$$w|_{t=t_A} = x_\phi^{2/3} y|_{t=t_A} = x_\phi^{2/3}\,, \tag{4.68}$$

$$\left.\frac{\dot{w}}{w}\right|_{t=t_A} = \left.\frac{\dot{y}}{y}\right|_{t=t_A} = x_\phi\,. \tag{4.69}$$

Uma solução para w que satisfaça as condições de contorno acima é

$$w = \left(\frac{3x}{2}\right)^{2/3}\,. \tag{4.70}$$

Sendo assim

$$\begin{aligned}\int_0^\infty g_s^{1/3} y e^{-x} dx = & \\ &= x_\phi^{2/3}\int_0^\infty g_s^{1/3} w e^{-x} dx \\ &= x_\phi^{2/3}\left(\frac{3}{2}\right)^{2/3}\int_0^\infty g_s^{1/3}\,(x)^{2/3}\,e^{-x} dx \\ &= x_\phi^{2/3}\left(\frac{3}{2}\right)^{2/3}\overline{g_s}^{1/3}\Gamma\left(\frac{5}{3}\right)\,,\end{aligned} \tag{4.71}$$

onde $\overline{g_s}$ representa o valor médio de g_s no período em que ϕ decai. $\Gamma\left(\frac{5}{3}\right) \simeq 0.9$ é a função Gamma

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty x^{z-1} e^{-x} dx\,. \tag{4.72}$$

Portanto, substituindo o resultado da Equação 4.71 na Equação 4.62, obtemos que

$$\Delta \simeq \left[1 + k^{2/3}\frac{4}{3}\left(\frac{3}{2}\right)^{2/3}\Gamma\left(\frac{5}{3}\right)\left(\frac{\overline{g_s}}{3}\right)^{1/3}\frac{\left(m_D Y_\phi^{(A)}\right)^{4/3}}{\left(M_{Pl}\Gamma_\phi\right)^{2/3}}\right]^{3/4}\,, \tag{4.73}$$

onde escrevemos a temperatura T em função da entropia, de acordo com a Equação 4.48. Assumindo que a produção de entropia é muito maior que a entropia inicial, podemos aproximar a equação acima da seguinte forma

$$\Delta \simeq 1.07\overline{g_s}^{1/4}\kappa^{1/2}\frac{N_\phi^{(A)}}{S_A}\frac{m_\phi}{\sqrt{M_{Pl}\Gamma_\phi}}\,, \tag{4.74}$$

onde $N_\phi^{(A)} = n_\phi^{(A)} \times a_A^3$. A expressão acima traz uma informação muito relevante sobre a injeção de entropia, pois nos mostra que a entropia após o decaimento da partícula $S = S_A\Delta$ independe da entropia inicial do banho térmico, dependendo só da massa da partícula m_ϕ, do número de partículas $N_\phi^{(A)}$ e da largura de decaimento Γ_ϕ.

Como ϕ decai exponencialmente, admitimos que ele começa a decair em T_{PE} e o seu decaimento cessa em T_{RH}, assim como fizemos anteriormente. Podemos obter T_{RH}

através das Equações 4.48 e 4.74

$$\begin{aligned} T_{RH} &\equiv (z(T_{RH}))^{-1/3} S_{RH}^{1/3} a(\kappa/\Gamma_\phi)^{-1} \\ &= 1.346 g_{s,RH}^{-1/4} \kappa^{1/6} \frac{a_A}{a(\kappa/\Gamma_\phi)} \frac{(\rho_\phi^{(A)})^{1/3}}{(M_{Pl}\Gamma_\phi)^{1/6}} \\ &= 1.94 \kappa^{-1/2} g_{s,RH}^{-1/4} \sqrt{M_{Pl}\Gamma_\phi}\,, \end{aligned} \tag{4.75}$$

onde $g_{s,RH} \equiv g_s(T_{RH})$ e tomamos que $\overline{g}_{s,RH} \simeq g_{s,RH}$, além de utilizarmos $a_A/a(t) = (t_A/t)^d$ e $t = \frac{1}{\kappa H}$. A equação acima se aproxima da Equação 4.44, para $\kappa = \frac{5}{2}$ e $g_e \simeq g_s$. Portanto, $\Gamma_\phi = \frac{5}{2} H_{RD}(T_{RH})$ é uma boa condição para obtermos a temperatura de *reheating* quando $BR_T \simeq 1$.

A partir da Equação 4.75 podemos reescrever a Equação 4.74 de uma forma que será muito útil mais adiante

$$\Delta \simeq 2 \frac{m_\phi Y_\phi^{(A)}}{T_{RH}}\,, \tag{4.76}$$

onde assumimos que $\overline{g}_{s,RH} \simeq g_{s,RH}$.

4.1.5 Abordagem Numérica

Nesta seção vamos solucionar numericamente o conjunto de equações diferenciais acopladas

$$\begin{aligned} \frac{d\rho_\phi}{dt} &= -3H\rho_\phi \; - \Gamma_\phi \rho_\phi \\ \frac{d\rho_R}{dt} &= -4H\rho_R \; + \Gamma_\phi \rho_\phi \\ \frac{dS}{dt} &= \frac{\rho_\phi \Gamma_\phi a^3}{T}\,. \end{aligned} \tag{4.77}$$

onde ρ_ϕ é a densidade de energia da partícula ϕ não-relativística, ρ_R representa a densidade de energia do banho térmico padrão e S a sua entropia. Por simplicidade assumimos que todo produto final do decaimento da partícula ϕ termaliza com o banho térmico padrão.

Para obter a solução numérica nós utilizamos a função Odeint do Python a qual é baseada na livraria Odepack escrita em Fortran. E com o propósito do código funcionar perfeitamente (sem apresentar erros) nós redefinimos os campos ρ_R e ρ_ϕ e a variável t. O conjunto de Equações 4.77 será resolvido em função da nova variável $A \equiv a \times T_{RH}$. E como $\rho_\phi \propto a^{-3}$ (pois $\rho_\phi = m_\phi n_\phi$) e $\rho_R \propto a^{-4}$ definimos os novos campos

$$\Phi \equiv \frac{\rho_\phi A^3}{T_{RH}}\,, \quad R \equiv \rho_R A^4\,. \tag{4.78}$$

Com isso o parâmetro de Hubble será dado por

$$H(A) = \frac{1}{\sqrt{3} M_{Pl}} \left(\frac{T_{RH}}{A}\right)^2 \sqrt{A\Phi + R}\,. \tag{4.79}$$

De acordo com os novos campos, podemos escrever o conjunto de Equações 4.77 em função da nova variável A como

$$\begin{aligned}\frac{d\Phi}{dA} &= -\frac{\Phi}{A}\frac{\Gamma_\phi}{H(A)} \\ \frac{dR}{dA} &= \Phi\frac{\Gamma_\phi}{H(A)} \\ \frac{dS}{dA} &= \frac{\Phi}{A}\frac{T_{RH}}{T}\frac{\Gamma_\phi}{H(A)}\,.\end{aligned} \tag{4.80}$$

As condições iniciais para a resolução do sistema de equações diferenciais serão dadas pelo modelo inflacionário. Para isto devemos resolver o conjunto de Equações 4.80 para o inflaton. De acordo com [58], teremos como condições iniciais $R_i = 1790$ e $S_i = 897$, para a temperatura de *reheating* do inflaton $T_{RH}^{Inf} = 7.0 \times 10^{15}$ GeV. As condições iniciais R_i e S_i são válidas para qualquer instante após T_{RH}^{Inf}.

Através da Equação 4.78, a condição inicial para o campo Φ será dada por

$$\Phi_i = \frac{Y_\phi(T_f) S_i m_\phi}{T_{RH}}\,, \tag{4.81}$$

onde $Y_\phi(T_f) \simeq 0.004$, de acordo com a Equação 2.52, levando em conta que ϕ tem o seu *freeze-out* ainda relativístico. A condição inicial de Φ só é válida quando ϕ for não-relativístico ($T \gtrsim m_\phi$). Com isso, de acordo com a Equação 4.48 ($T \propto S^{1/3}a^{-1}$) podemos escrever

$$T = z(T)^{-1/3} S^{1/3} A^{-1} T_{RH}\,, \tag{4.82}$$

e assim obter a condição inicial para A, que represente o instante em que ϕ seja não-relativístico

$$A_i = \frac{z(m_\phi)^{-1/3} S_i^{1/3} T_{RH}}{m_\phi}\,. \tag{4.83}$$

A Figura 8 mostra a evolução de T (curva vermelha), ρ_ϕ (curva azul), S (curva amarela) e ρ_R (curva preta) após solucionarmos as Equações 4.80. Podemos notar que no período antes de ϕ começar a decair (antes de T_{PE}) a entropia permanece constante, já a temperatura decresce proporcional a a^{-1}. Em T_M a densidade de energia de ϕ começa a dominar a densidade de energia do universo, e tem seu decaimento iniciado em T_{PE}. O aumento da entropia faz com que a temperatura do banho térmico diminua mais lentamente $T \propto a^{-3/8}$, como havíamos discutido. Também observamos que ρ_R começa a aumentar após T_{PE}, já que a densidade de energia de ϕ é transferida para as partículas do banho térmico. A partícula ϕ decai totalmente em T_{RH} e o universo volta a ser dominado por radiação. Após o término do decaimento de ϕ a entropia volta a ser constante.

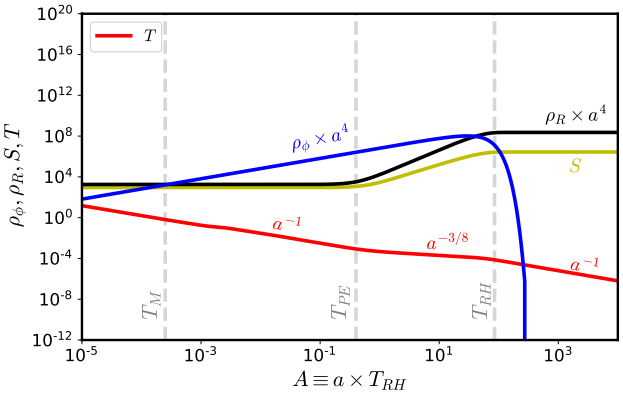

Figura 8 – Evolução do conjunto de Equações 4.80 escrita em função dos campos ρ_ϕ(azul), ρ_R(preto), S (amarelo) e T (vermelho). Para $m_\phi = 100$ GeV e $\Gamma_\phi = 1.0 \times 10^{-22}$ GeV.

4.2 Diluição

Nesta seção vamos mostrar que o decaimento fora do equilíbrio da partícula ϕ dilui a abundância, por um fator D, de uma partícula χ que já tenha desacoplado do banho térmico

$$Y_\chi(T_0) = \frac{Y_\chi(T_f)}{D}\,, \tag{4.84}$$

onde assumimos que χ é um candidato a matéria escura super-produzido.

Este é um resultado extremamente importante, pois permite que candidatos a ME super-produzidos no início do universo se tornem viáveis teoricamente. No Capítulo 5 vamos tratar de um desses casos, onde um neutrino estéril candidato a matéria escura leve é super-produzido no início do universo e diluído em seguida.

Para entendermos esse mecanismo vamos retornar ao conjunto de equações acopladas

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_\phi &= -3H\rho_\phi - \Gamma_\phi \rho_\phi\,, \\ \dot{\rho}_R &= -4H\rho_R + \Gamma_\phi \rho_\phi\,, \\ H &= \frac{1}{\sqrt{3}M_{Pl}}\sqrt{\rho_\phi + \rho_R}\,, \end{aligned} \tag{4.85}$$

onde ρ_ϕ representa a densidade de energia da partícula instável ϕ não-relativística, ρ_R é a densidade de energia do banho térmico padrão e H representa o parâmetro de Hubble. Assim como fizemos anteriormente, já partiremos do pressuposto de que ϕ tem seu *freeze-out* ainda relativístico, e decai após dominar a densidade de energia do universo na sua forma não-relativística.

Vamos assumir que em um instante $t_0 \ll \Gamma_\phi^{-1}$, muito antes de ϕ decair, a densidade de energia de ϕ domina a densidade de energia do universo, de tal forma que assumiremos

como condição inicial para o sistema de equações acopladas [62]

$$\rho_\phi(t_0) = \rho_{\phi,0}\,, \quad \rho_R(t_0) = 0 \text{ e } \quad a(t_0) = a_0\,. \tag{4.86}$$

Agora vamos tomar o seguinte conjunto de novas variáveis

$$x \equiv t\Gamma_\phi\,, \quad \Phi \equiv \frac{\rho_\phi a^3}{\Gamma_\phi^2 M_{Pl}^2}\,, \quad R \equiv \frac{\rho_R a^4}{\Gamma_\phi^2 M_{Pl}^2}\,. \tag{4.87}$$

Este novo conjunto de variáveis implica em

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi}{dx} &= -\Phi\,, \\ \frac{dR}{dx} &= a\Phi\,, \\ \frac{da}{dx} &= \frac{a}{\sqrt{3}}\sqrt{a^{-3}\Phi + a^{-4}R}\,. \end{aligned} \tag{4.88}$$

A primeira equação acima nos conduz ao decaimento exponencial de ϕ

$$\Phi = \Phi_0 e^{-(x-x_0)}\,, \tag{4.89}$$

com isso a equação para R se torna

$$\frac{dR}{dx} = a\Phi_0 e^{-(x-x_0)}\,. \tag{4.90}$$

É fácil ver que quando $x \to \infty$ teremos que $\frac{dR}{dx} \to 0$, ou seja,

$$R(t \to \infty) = r_f\,, \tag{4.91}$$

onde r_f é uma constante.

Agora voltemos nossa atenção para o problema. Nosso intuito é provar que se o aumento da entropia acontecer após o *freeze-out* de χ então sua abundância (e consequentemente sua densidade de relíquia) diminui, podendo concordar com os dados experimentais $\Omega_\chi h^2 \simeq 0.11$. Sendo assim, a abundância de χ hoje pode ser expressa como

$$Y_\chi\,(t \to \infty) = \frac{n_\chi}{s}\,(t \to \infty) = \frac{n_\chi}{\rho_R^{3/4}}\frac{\rho_R^{3/4}}{s}\,(t \to \infty)\,. \tag{4.92}$$

Como $\rho_R \propto T^4$ então $\rho_R^{3/4} \propto T^3$ e sabendo que $s \propto T^3$ podemos reescrever a abundância de χ hoje como

$$Y_\chi\,(t \to \infty) = \frac{n_\chi}{\rho_R^{3/4}}\,(t \to \infty)\,\frac{\rho_R^{3/4}}{s}\,. \tag{4.93}$$

Utilizando das redefinições dos campos 4.87 temos

$$\begin{aligned} Y_\chi\left(t\to\infty\right) &= \frac{n_\chi}{\rho_\phi}\frac{\Phi}{R^{3/4}}\left(t\to\infty\right)\sqrt{\Gamma_\phi M_{Pl}}\frac{\rho_R^{3/4}}{s}\,, \\ &= \frac{n_\chi}{\rho_\phi}\frac{\Phi}{R^{3/4}}\left(t\to\infty\right)\sqrt{\Gamma_\phi M_{Pl}}\frac{\rho_R^{3/4}}{s}\,, \\ &= \frac{n_\chi}{\rho_\phi}e^{-(x-x_0)}\left(t\to\infty\right)\frac{\Phi_0}{r_f^{3/4}}\sqrt{\Gamma_\phi M_{Pl}}\frac{\rho_R^{3/4}}{s}\,, \\ &= \frac{n_{\chi,0}\left(\frac{a}{a_0}\right)^3}{\rho_{\phi,0}\left(\frac{a}{a_0}\right)^3}\left(t\to\infty\right)\frac{\Phi_0}{r_f^{3/4}}\sqrt{\Gamma_\phi M_{Pl}}\frac{\rho_R^{3/4}}{s}\,, \\ &= \frac{n_\chi}{\rho_\phi}\left(t\to t_0\right)\frac{\Phi_0}{r_f^{3/4}}\sqrt{\Gamma_\phi M_{Pl}}\frac{\rho_R^{3/4}}{s}\,. \end{aligned} \tag{4.94}$$

A partir da definição de ρ_R (Equação 2.21), da temperatura de *reheating* (Equação 4.75) e da densidade de entropia s (Equação 2.27), podemos escrever a equação para $Y_\chi(t\to\infty)$ (Equação 4.94) como

$$Y_\chi\left(t\to\infty\right) = \frac{n_\chi}{\rho_\phi}\left(t\to t_0\right)\frac{\Phi_0}{r_f^{3/4}}\sqrt{\frac{\kappa}{3}}T_{RH}\frac{3^{5/4}}{4}\,. \tag{4.95}$$

O valor da razão

$$\frac{\Phi_0}{r_f^{3/4}} \simeq 1.2\,, \tag{4.96}$$

foi obtido numericamente, onde este valor independe do valor de Φ_0 admitido no cálculo numérico.

Com isso podemos reescrever a abundância de χ hoje da seguinte forma

$$Y_\chi\left(t\to\infty\right) = \frac{Y_{\chi,0}}{D}\,, \tag{4.97}$$

onde tomamos a definição não-relativística do campo ρ_ϕ ($\rho_\phi = m_\phi n_\phi$) e D é o fator de diluição definido como

$$D \equiv 1.3\frac{m_\phi Y_{\phi,0}}{T_{RH}}\,, \tag{4.98}$$

onde assumimos $\kappa = 5/2$ e $Y_{\phi,0}$ representa a abundância de ϕ hoje, assumindo que a mesma não tivesse decaído. Vale notar que o fator de diluição D é aproximadamente Δ, Equação 4.76.

4.3 Discussão e conclusões

Neste capítulo tratamos do caso do decaimento fora do equilíbrio de uma partícula ϕ. Vimos que se o produto final do decaimento termalizar com as partículas do banho

térmico padrão, então a entropia deste setor irá aumentar por um fator Δ. Por este motivo exigimos inicialmente que $BR_T \simeq 1$, de tal forma que o aumento da entropia fosse significante.

Também foi possível relacionar o aumento da entropia Δ com a capacidade de diluir a abundância de uma partícula χ, por um fator D, que já tenha desacoplado do banho térmico padrão. Se χ for uma partícula candidata a matéria escura leve, onde $m_\chi \sim \mathcal{O}(1\text{ keV})$ precisamos de $D \sim \mathcal{O}(10-100)$ [56] a fim de obter a densidade de relíquia correta para χ. Para obtermos um valor de D dessa ordem, é necessário que a partícula ϕ satisfaça alguns critérios: *freeze-out* relativístico, ϕ deve decair após dominar a densidade de energia do universo na forma de matéria e que grande parte do produto final do seu decaimento termalize com o banho térmico padrão ($BR_T \simeq 1$).

Esses critérios implicam naturalmente em uma cosmologia não padrão, como discutimos na subseção 4.1.2, já que a densidade de energia do universo é dominada por diferentes componentes antes de ϕ decair. Observamos que inicialmente temos um período dominado pela radiação das partículas do banho térmico padrão, seguido por um período dominado pela densidade de energia da partícula ϕ na sua forma não-relativística a qual começa a decair aumentando a entropia e a densidade de energia do banho térmico padrão, e por fim em T_{RH} o universo volta a ser dominado por radiação.

Como a partícula ϕ deve decair principalmente nas partículas do MP o valor de T_{RH} não pode ser muito baixo, a fim de evitar problemas com as predições da BBN. Se a partícula ϕ decair apenas nos neutrinos do MP, esses devem termalizar totalmente. Caso contrário a taxa de expansão do universo se altera significativamente trazendo drásticas consequências para a produção dos elementos leves no período da BBN, a fim de evitar este problema devemos assumir $T_{RH} \gtrsim 4.1$ MeV [64, 65, 66]. Por outro lado se ϕ decair também em hádrons a temperatura de *reheating* deve ser $T_{RH} \gtrsim 4\text{ MeV} - 5\text{ MeV}$ [65]. O decaimento de ϕ a baixas temperaturas nos neutrinos ativos também pode trazer graves implicações no valor do N_{eff} no período da recombinação, sendo assim deve-se ter $T_{RH} \gtrsim 4.7$ MeV [64, 67] de tal forma que os neutrinos termalizem completamente antes da recombinação.

5 Mecanismo de Diluição em uma Extensão do Modelo Padrão

Neste capítulo vamos apresentar de forma mais concreta tudo aquilo que discutimos até agora sobre o mecanismo de diluição. Onde iremos aqui reproduzir detalhadamente o trabalho [1].

Apesar do sucesso do modelo padrão, o mesmo não contém uma partícula capaz de explicar a natureza da matéria escura. Por este motivo iremos utilizar aqui como exemplo uma extensão do MP baseado na simetria de gauge $SU(3)_C \times SU(3)_L \times U(1)_X$ (abreviado por 331). Vamos focar mais precisamente no 331ν_R [68, 69], o qual apresenta neutrinos de majorana de mão direita ν_R no mesmo multípleto dos neutrinos ativos [70]

$$L_l = \begin{pmatrix} \nu_l \\ l \\ (\nu_{lR})^C \end{pmatrix}, \tag{5.1}$$

onde $l = e\,, \mu\,, \tau$ representam as três gerações. Como o objetivo deste capítulo e desta dissertação é tratar do mecanismo de diluição via injeção de entropia, não vamos nos aprofundar nos detalhes do modelo. Para mais detalhes sobre o modelo e o mecanismo de geração de massa dessas partículas, ver [1]. Apenas apresentaremos os fatos relevantes para o nosso propósito.

O setor de gauge do modelo 331ν_R é formado pelos bósons do modelo padrão, A, Z e $W^{\pm}$, além de mais cinco outros bósons $W'^{\pm}$, U^0, $U^{0\dagger}$ e Z', onde tais mediadores estão associados aos nove geradores do grupo $SU(3)_L \times U(1)_X$ [71]. Como iremos mostrar mais adiante os neutrinos de mão direita não interagem via nenhum bóson do MP, sendo assim iremos chamá-los de neutrinos estéreis. Todas as interações do 331ν_R podem ser encontradas em [72]. Além disso, para evitar qualquer confusão com a notação vamos daqui em diante representar os neutrinos de mão direta por N_l.

Vamos assumir a hierarquia de massa $m_{N_1} \ll m_{N_2} \ll m_{N_3}$, onde o neutrino estéril mais leve N_1 é estável [70] e portanto candidato a matéria escura. Vamos mostrar que N_1 é super-produzido no início do universo, necessitando ter sua abundância diluída. E os seus parceiros mais pesados (N_2 e N_3) são instáveis e portanto decaem diluindo a abundância de N_1. Por questões de simplicidade vamos assumir que N_3 é muito pesado de tal forma que o seu *freeze-out* ocorre após ele se tornar não-relativístico. Como vimos anteriormente, neste caso N_3 não produz entropia suficiente e nossa abordagem se resume apenas a N_2.

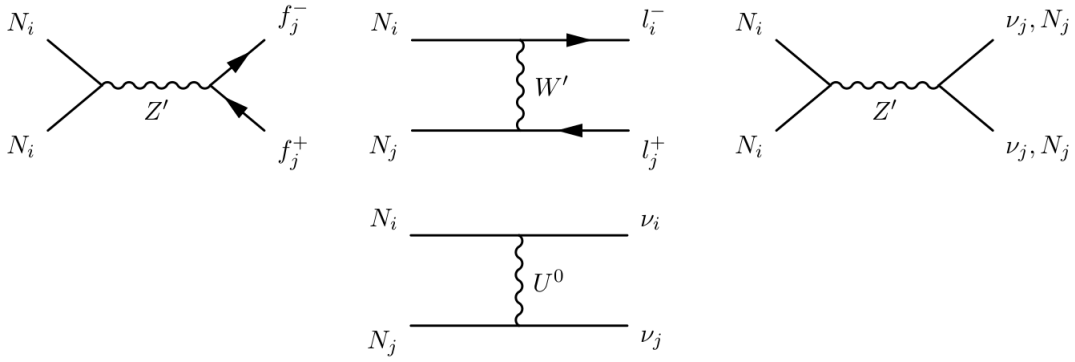

Figura 9 – Processos que contribuem para o *freeze-out* de N_i onde f representa o férmion carregado do modelo padrão e l representa o lépton carregado com $i, j = 1, 2, 3$.

5.1 Interações

Aqui iremos apresentar as interações envolvendo os neutrinos estéreis, em função dos auto-estados de sabor da teoria, onde $\nu_L = (\nu_e\,,\,\nu_\mu\,,\,\nu_\tau)^T_L$ representa os auto-estados de sabor dos neutrinos ativos e $N_L = (N_1^C\,,\,N_2^C\,,\,N_3^C)^T_L$ dos neutrinos estéreis. Para simplificar ainda mais a nossa abordagem, vamos assumir que os N's não se misturam. Portanto, as interações entre os neutrinos estéreis e as partículas do MP são:

$$\mathcal{L}_{W'} = -\frac{g}{\sqrt{2}}\overline{N}_L\gamma^\mu l_L W'^{+}_\mu + \text{H.c.} \tag{5.2}$$

$$\mathcal{L}_{U^0} = -\frac{g}{\sqrt{2}}\overline{\nu}_L\gamma^\mu N_L U^0_\mu + \text{H.c.} \tag{5.3}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{Z'} \quad &= -\frac{g}{2C_W}\left(\frac{(1-2S_W^2)}{\sqrt{3-4S_W^2}}\left[\overline{\nu}_L\gamma^\mu\nu_L\right] - \frac{2C_W^2}{\sqrt{3-4S_W^2}}\left[\overline{N}_L\gamma^\mu N_L\right]\right)Z'_\mu \\ &\quad -\frac{g}{4C_W\sqrt{3-4S_W^2}}\bar{l}\gamma^\mu\left((3-4C_W^2)+\gamma_5\right)lZ'_\mu,\end{aligned} \tag{5.4}$$

onde $C_W \equiv \cos(\theta_W)$ e $S_W \equiv \sin(\theta_W)$ com θ_W sendo o ângulo de Weinberg, $l = (e\,,\,\mu\,,\,\tau)^T$ e $g \equiv \frac{8G_F M_W^2}{\sqrt{2}}$ é a constante de acoplamento da interação eletrofraca $(SU(2)_L)$ do MP [71].

As interações envolvendo os quarks do modelo padrão são:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{Z'} \quad &= -\frac{g}{2C_W}\frac{\sqrt{3-4S_W^2}}{3}\left[\overline{u}_L\gamma^\mu u_L\right]Z'_\mu - \frac{g}{2C_W}\frac{2(1-S_W^2)}{\sqrt{3-4S_W^2}}\left[\overline{t}_L\gamma^\mu t_L\right]Z'_\mu \\ &\quad -\frac{g}{2C_W}\frac{\sqrt{3-4S_W^2}}{3}\left[\overline{d}_L\gamma^\mu d_L\right]Z'_\mu - \frac{g}{2C_W}\frac{2(1-S_W^2)}{\sqrt{3-4S_W^2}}\left[\overline{b}_L\gamma^\mu b_L\right]Z'_\mu,\end{aligned} \tag{5.5}$$

onde $u = (u\,,\,c)^T$ e $d = (d\,,\,s)^T$.

Os diagramas de Feynman de todas essas interações, estão dispostos na Figura 9.

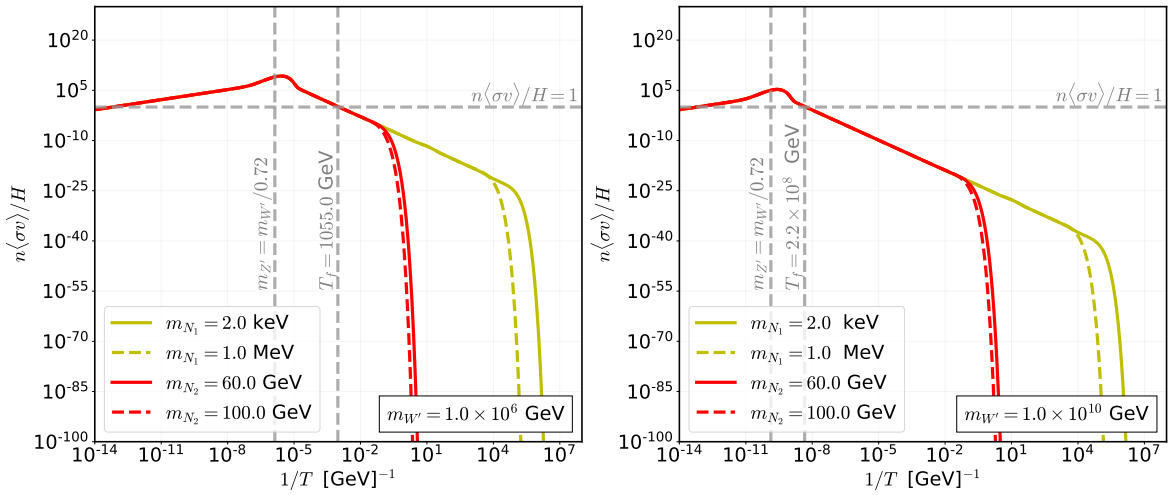

Figura 10 – Razão entre a taxa de interação $\Gamma \equiv n\langle\sigma v\rangle$ e o parâmetro de Hubble H para N_1 (amarelo) e N_2 (vermelho) em função do inverso da temperatura. O painel da esquerda se refere a $m_{W'} = 1.0 \times 10^6$ GeV e o painel da direita, a $m_{W'} = 1.0 \times 10^{10}$ GeV. A linha tracejada horizontal representa $\Gamma/H = 1$. As linhas verticais tracejadas indicam $T = m_{Z'}$ e $T = T_f$.

5.2 Produção Térmica

Sendo N_1 o neutrino estéril mais leve, e o candidato a matéria escura, vamos verificar nesta seção sob quais condições N_1 e N_2 termalizam com o banho térmico de acordo com as interações discutidas anteriormente. Isto ocorre quando a taxa de interação $\Gamma_{N_i}(T)$ é maior que a taxa de expansão do universo $H(T)$ em alguma época T no início do universo

$$\Gamma_{N_i}(T) \gg H(T)\,. \tag{5.6}$$

Devido a hierarquia das massas assumida ($m_{N_1} \ll m_{N_2} \ll m_{N_3}$), os processos de co-aniquilação se tornam irrelevantes, devido a diferença entre as massas dos neutrinos estéreis [73], sendo assim, iremos considerar só os processos de aniquilação para o cálculo de $\Gamma_{N_i}(T)$.

A taxa com que N_i se aniquila é dada por $\Gamma_{N_i}(T) = n^{eq}_{N_i}\langle\sigma v\rangle$, onde a média térmica da seção de choque é dada pela Equação 2.74

$$\langle\sigma v\rangle = \frac{1}{8m^4_{N_i}TK^2_2(m_{N_i}/T)}\int_{4m^2_{N_i}}^{\infty}\sigma\left(s-4m^2_{N_i}\right)\sqrt{s}K_1(\sqrt{s}/T)ds\,. \tag{5.7}$$

Para o cálculo da média térmica da seção de choque, implementamos as interações no CalcHep [71] onde foi possível obter as amplitudes das interações mostradas na Figura 9 através da sua integração com o software Mathematica, e consequentemente foi possível obter a seção de choque σ. Com isso calculamos $\langle\sigma v\rangle$ (Equação 5.7) numericamente por meio da livraria de integração numérica CUBA [74], escrita em C++.

Na Figura 10 podemos ver a razão entre a taxa de aniquilação de N_1 (em amarelo) e de N_2 (em vermelho) e a taxa de Hubble, para um universo dominado por radiação, em função do inverso da temperatura para $m_{W'} = 1.0 \times 10^6$ GeV (painel da esquerda) e $m_{W'} = 1.0 \times 10^{10}$ GeV (painel da direita). Onde consideramos os processos mostrados na Figura 9. Como podemos observar na Figura 10, a temperatura de *freeze-out* T_f aumenta com a massa do mediador e notamos no estudo da razão Γ/H que para $m_{W'} \gtrsim 1.0 \times 10^{16}$ GeV as partículas N_1 e N_2 não termalizam mais, caracterizando o cenário de *freeze-in*, o qual não é do nosso interesse no momento. E de acordo com [72] vamos assumir que $m_{W'} = m_{U^0} \simeq 0.72 \times m_{Z'}$. O pico observado na Figura 10, correspondente ao máximo valor da razão Γ/H, que ocorre quando os bósons de gauge são produzidos *on-shell*.

As massas de N_1, N_2 e W' na Figura 10 foram escolhidas próximas aos valores que recuperam a densidade de relíquia correta para N_1, como iremos mostrar adiante. Podemos observar na figura que N_1 e N_2 tem o seu *freeze-out* no mesmo instante, devido a similaridade das suas interações, com $T_f \simeq 1.0 \times 10^3$ GeV para $m_{W'} = 1.0 \times 10^6$ GeV (no painel da esquerda) e $T_f \simeq 2.2 \times 10^8$ GeV para $m_{W'} = 1.0 \times 10^{10}$ GeV (no painel da direita). Sendo assim, tanto N_1 quanto N_2 tem o seu *freeze-out* relativístico para esses valores de massa. Observamos também na Figura 10 que quando as massas de N_1 e N_2 aumentam, a supressão de Boltzmann (a qual ocorre quando $m \sim T$) tende a acontecer mais cedo.

Levando em conta todos os processos relevantes para o *freeze-out* de N_1 e N_2, calculamos suas respectivas seções de choque com o auxílio do CalcHep [71] e obtemos que a taxa de aniquilação é dada por

$$n_{N_i}\langle\sigma v\rangle \simeq \frac{16}{9}\frac{T^5 G_F^2}{\zeta(3)(2\pi)^4}\left(\frac{m_W}{m_{W'}}\right)^4\left(64 - 8\left(\frac{m_{W'}}{m_{Z'}}\right)^2\right), \tag{5.8}$$

onde consideramos n_{N_i} na sua forma relativística (Equação 2.9) e $m_W \simeq 80.39$ GeV representa a massa do bóson de gauge W do modelo padrão.

Consequentemente conseguimos obter uma expressão aproximada para a temperatura de *freeze-out*, de acordo com a condição $\Gamma_{N_i}(T_f) = H(T_f)$

$$T_f \simeq 1.7\left(\frac{m_W}{m_{W'}}\right)^{4/3} g_e^{1/6}(T_f)\ \text{MeV}\,. \tag{5.9}$$

Com isso podemos concluir que tanto N_1 quanto N_2 serão produzidos termicamente e com isso N_1, por ser estável, é um candidato a matéria escura. Nas próximas seções vamos voltar nossa atenção para obter a densidade de relíquia correta para N_1 compor a totalidade de matéria escura.

5.3 *Freeze-out* relativístico

Já que N_1 tem seu *freeze-out* relativístico, a sua densidade de relíquia sera dada pela Equação 4.4

$$\frac{\Omega^0_{N_1}h^2}{\Omega^0_{ME}h^2} \simeq \left(\frac{20}{D}\right)\left(\frac{m_{N_1}}{2.0\text{ keV}}\right)\left(\frac{105}{g_s\left(T_f\right)}\right). \tag{5.10}$$

Nesta abordagem estamos interessados em um candidato a matéria escura leve, e para um neutrino estéril produzido termicamente sua massa deve ser $m_{N_1} \gtrsim 2.0$ keV [52].

Como havíamos discutido anteriormente, uma partícula candidata a ME que tem seu *freeze-out* relativístico necessita ser diluída via um decaimento fora do equilíbrio. Neste caso vamos considerar o decaimento fora do equilíbrio do N_2. Como assumimos que o N_3 será pesado o suficiente de tal forma a ter o seu *freeze-out* não-relativístico, podemos desconsiderá-lo da nossa abordagem por não injetar uma quantidade de entropia relevante.

5.4 Produção Não-Térmica

Como discutimos anteriormente, quando o produto final do decaimento de N_2 termaliza, a entropia das partículas do banho térmico aumenta. Entretanto, no modelo $331\nu_R$ o N_2 produz inevitavelmente N_1 no estado final [70]. Como o N_2 deve decair após o *freeze-out* de N_1, o N_1 produzido via decaimento do N_2 deve ser considerado como uma produção não-térmica, já que não termaliza mais. Com isso a densidade de relíquia final de N_1 terá uma contribuição do *freeze-out* relativístico (térmica) e outra do decaimento do N_2 (não-térmica):

$$\Omega^0_{N_1}h^2 = \Omega^0_{N_1}h^2\Big|_{\text{térmica}} + \Omega^0_{N_1}h^2\Big|_{\text{não-térmica}}. \tag{5.11}$$

Afim de simplificar e ao mesmo tempo generalizar nossa abordagem, vamos parametrizar a largura de decaimento total de N_2 em termos da sua largura de decaimento em N_1, $\Gamma^{(N_1)}_{N_2}$:

$$\Gamma_{N_2} \equiv (1+\alpha)\Gamma^{(N_1)}_{N_2}. \tag{5.12}$$

O parâmetro adimensional $\alpha = \sum_i \Gamma^i_{N_2}/\Gamma^{(N_1)}_{N_2}$ contém todos os outros canais que não produzem N_1 no estado final. Nem todos os estados finais do decaimento de N_2 termaliza, entretanto vamos assumir por simplicidade que o parâmetro α apenas se refere aos canais que irão termalizar.

O valor de $\Gamma^{(N_1)}_{N_2}$ no limite $m_{N_1}, m_{\text{léptons}} \ll m_{N_2} \ll m_{W'}$, será [70]

$$\Gamma^{(N_1)}_{N_2} \equiv \Gamma_{N_2\to\mu e N_1} + \Gamma_{N_2\to\nu_\mu\nu_e N_1} \approx \frac{G_F^2}{96\pi^3}m^5_{N_2}\left(\frac{m_W^4}{m_{W'}^4}+\frac{m_W^4}{m_U^4}\right). \tag{5.13}$$

5.5 Equações acopladas dos neutrinos estereis

Aqui nesta seção vamos encontrar a densidade de relíquia final para o nosso candidato a matéria escura, o neutrino estéril N_1 na escala de keV. O *freeze-out* relativístico de N_1 e N_2, assim como a produção não-térmica de N_1 devido ao decaimento fora do equilíbrio de N_2, podem ser obtidos solucionando a equação de Boltzmann para a abundância de N_1 e N_2, dado pela Equação 2.57, onde o operador colisão representa as interações que as partículas estão sujeitas

$$\begin{aligned}\frac{dY_{N_1}}{da} &= \frac{R_{N_1}(a, Y_{N_1}, Y_{N_2})}{\mathfrak{s}\ H(a)\ a} - \frac{Y_{N_1}}{S}\frac{dS}{da} \\ \frac{dY_{N_2}}{da} &= \frac{R_{N_2}(a, Y_{N_1}, Y_{N_2})}{\mathfrak{s}\ H(a)\ a} - \frac{Y_{N_2}}{S}\frac{dS}{da}\,,\end{aligned} \tag{5.14}$$

O *freeze-out* relativístico e a produção não-térmica estão contidas no primeiro termo do lado direito das Equações em 5.14, enquanto que o segundo termo é responsável pela diluição da abundância devido ao decaimento de N_2.

R_{N_1} e R_{N_2} são definidos como sendo as taxas de reação, as quais contém todos os processos que podem mudar o número de N_1 e N_2 em um elemento de volume comóvel. Para isso nós teremos as seguintes contribuições:

$$\begin{aligned}R_{N_1} &\approx -\mathfrak{s}^2\langle\sigma v\rangle_{N_1N_1}\left(Y_{N_1}^2 - \left(Y_{N_1}^{(eq)}\right)^2\right) + \mathfrak{s}\ \langle\Gamma_{N_2}^{(N_1)}\rangle\left(Y_{N_2} - Y_{N_1}\frac{Y_{N_2}^{(eq)}}{Y_{N_1}^{(eq)}}\right) \\ R_{N_2} &\approx -\mathfrak{s}^2\langle\sigma v\rangle_{N_2N_2}\left(Y_{N_2}^2 - \left(Y_{N_2}^{(eq)}\right)^2\right) - \mathfrak{s}\ \langle\Gamma_{N_2}^{(N_1)}\rangle\left(Y_{N_2} - Y_{N_1}\frac{Y_{N_2}^{(eq)}}{Y_{N_1}^{(eq)}}\right) \\ &\quad - \alpha\ \mathfrak{s}\ \langle\Gamma_{N_2}^{(N_1)}\rangle\left(Y_{N_2} - Y_{N_2}^{(eq)}\right)\,.\end{aligned} \tag{5.15}$$

Os termos proporcionais a $\langle\sigma v\rangle_{N_iN_i}$ representam os canais de aniquilação nos léptons do MP, os quais são os processos mais relevantes, e suas reações inversas. Nós podemos representar $\langle\sigma v\rangle_{N_iN_i}$ como a soma dos canais que contribuem para ele

$$\begin{aligned}\langle\sigma v\rangle_{N_iN_i} = \langle\sigma v\rangle_{N_iN_i\to e\bar{e}} + \langle\sigma v\rangle_{N_iN_i\to\mu\bar{\mu}} + \langle\sigma v\rangle_{N_iN_i\to\tau\bar{\tau}} + \langle\sigma v\rangle_{N_iN_i\to\nu_e\bar{\nu_e}} + \\ \langle\sigma v\rangle_{N_iN_i\to\nu_\mu\bar{\nu_\mu}} + \langle\sigma v\rangle_{N_iN_i\to\nu_\tau\bar{\nu_\tau}}\,.\end{aligned} \tag{5.16}$$

Os demais termos na Equação 5.15 se referem ao decaimento de N_2.

Com o propósito de injetar uma quantidade significante de entropia no banho térmico, N_2 precisa viver suficientemente para dominar a densidade de energia do universo. E veremos mais adiante que N_2 satisfaz tal condição para o conjunto de parâmetros que estudaremos. O parâmetro de Hubble será dado por sua forma mais geral por

$$H(a) = \frac{\sqrt{\rho_R(a) + \rho_{N_2}(a)}}{\sqrt{3}M_{Pl}}\,. \tag{5.17}$$

Desde o período em que N_2 começa a dominar a densidade de energia do universo T_i, até o período em que ele decai totalmente T_{RH}, o universo foi dominado por matéria. A temperatura do universo quando N_2 cessa o seu decaimento é

$$T_{RH} = \left(\frac{5\pi^2}{72} g_e(T_{RH})\right)^{-1/4} \sqrt{\Gamma_{N_2} M_{Pl}} \tag{5.18}$$

Com o intuito de não prejudicar as predições da BBN [65], nós devemos garantir que $T_{RH} \gtrsim 4$ MeV. Isto garante que N_2 decaia antes do desacoplamento dos neutrinos ativos e todos os léptons do MP produzidos no decaimento termalizam.

Como discutimos anteriormente a variação da entropia devido ao decaimento de N_2 é dada por

$$\frac{dS}{da} = f_T \frac{\Gamma_{N_2}}{H} \frac{\rho_{N_2} a(t)^2}{T}\,, \tag{5.19}$$

onde f_T representa a fração de partículas que termalizam no banho térmico [75, 51], para mais detalhes ver a Equação 4.47. A fração f_{NT} do produto do decaimento que não termaliza irá contribuir para a componente de partículas relativísticas que já desacoplaram do banho térmico (contribuindo para $\Delta N_{eff} \neq 0$).

É portanto conveniente escrever a densidade de energia de N_2 em função de f_T e f_{NT}

$$\begin{aligned}\rho_{N_2} = &\overbrace{\left[f_T^l \cdot BR(N_2 \to \mu e N_1) + f_T^\nu \cdot BR(N_2 \to \nu_\mu \nu_e N_1) + BR(N_2 \to \text{outros})\right]}^{f_T} \cdot \rho_{N_2} + \\ &\overbrace{\left[f_{NT}^l \cdot BR(N_2 \to \mu e N_1) + f_{NT}^\nu \cdot BR(N_2 \to \nu_\mu \nu_e N_1)\right]}^{f_{NT}} \cdot \rho_{N_2}\,,\end{aligned} \tag{5.20}$$

onde $BR(N_2 \to \text{outros}) = 1/(1 + 1/\alpha)$ (ver Equação 5.12) é o *branching ratio* de todos os canais de decaimento que não contém N_1 no estado final.

Já que $T_f > T_{RH}$, o N_1 produzido via decaimento não irá mais termalizar. Por isto que tal contribuição é tida como não-térmica. Por outro lado, para temperaturas acima de 4 MeV todos os léptons do MP produzidos via decaimento do N_2 são capazes de termalizar. É fácil ver então que $f_T^l = f_T^\nu = 2/3$ enquanto que $f_{NT}^l = f_{NT}^\nu = 1/3$, de tal forma que

$$\begin{aligned} f_T &= \frac{\alpha + 2/3}{1 + \alpha} \\ f_{NT} &= \frac{1/3}{1 + \alpha}\,. \end{aligned} \tag{5.21}$$

Por fim, já que ρ_{N_2} e ρ_R evoluem de forma não trivial durante a evolução de N_1 e N_2, o conjunto de Equações 5.14 deve ser resolvido junto com as seguintes equações de

Boltzmann:

$$\begin{aligned} \frac{d\rho_{N_2}}{dt} + 3H\rho_{N_2} &= -\rho_{N_2}\Gamma_{N_2} \\ \frac{d\rho_R}{dt} + 4H\rho_R &= \rho_{N_2}\Gamma_{N_2}\,, \end{aligned} \tag{5.22}$$

onde ρ_R representa a densidade de energia de radiação (considerando tanto a radiação do banho térmico como a que não está termalizada).

5.6 Resultados Numéricos

Nós resolvemos numericamente o conjunto de Equações 5.14, 5.17, 5.19 e 5.22. Por conveniência numérica, nós redefinimos o fator de escala por $A \equiv aT_{RH}$, a densidade de energia de N_2 por $\Phi_{N_2} \equiv \frac{\rho_{N_2} a^3}{T_{RH}}$ e a densidade de energia de radiação por $\Phi_R \equiv \rho_R a^4$.

Com relação as condições iniciais, em $A = A^I \ll 1$ (o real valor de A^I não altera o resultado), os campos de N_1 e N_2 seguem seus valores no equilíbrio. O *freeze-out* dos neutrinos estéreis ocorrem quando eles ainda são relativísticos, durante o período de radiação. De A^I até o momento quando N_2 se torna não-relativístico, em $A = A_{NR}$, não existe nenhuma produção de entropia e nós apenas precisamos resolver o conjunto de Equações 5.14 sem o último termo. Neste caso o parâmetro de Hubble é o usual, $H \propto T^2/M_{Pl}$.

Para $A \geqslant A_{NR}$, nós consideramos o conjunto completo das equações. Nós seguimos a referência [58] e assumimos o modelo inflacionário que se dá a uma temperatura de *reheating* de $T_{RH}^{Inf} \simeq 7 \times 10^{15}$ GeV, o que implica em $S^I = S^{NR} \simeq 897$ e $\Phi_R^I = \Phi_R^{NR} \simeq 1790$. Em A_{NR}, ambos Y_{N_1} e Y_{N_2} são dados por

$$Y_{N_i}^{eq}(T_f) = \frac{45\zeta(3)}{2\pi^4} \frac{g_{N_i}}{g_s\,(T_f)}\,. \tag{5.23}$$

Já que neste período N_2 é não-relativístico, nós temos que

$$\Phi_{N_2}^{NR} = m_{N_2} Y_{N_2}(T_f) \frac{S^{NR}}{T_{RH}}\,. \tag{5.24}$$

Na Figura 11 nós apresentamos a evolução do conjunto de Equações 5.14, 5.19, e 5.22 para $\alpha = 0, 10$ e 100 (curvas contínuas, tracejadas e pontilhadas, respectivamente). No quadro da esquerda da Figura 11 nós mostramos a solução completa para Y_{N_1} (curva azul) e Y_{N_2} (curva vermelha), assim como a solução para Y_{N_1} sem a contribuição não térmica, $Y_{N_1}^{\text{Térmica}}$ (curva amarela). No quadro da direita nós mostramos a solução para a entropia S (curva rosa) e para as quantidades $\rho_{N_2} a^4$ (curva vermelha) e $\rho_R a^4$ (curva verde) e nós conseguimos observar que quando N_2 se torna não-relativístico (em A_{NR}, como mostrado na figura) a densidade de energia de radiação ainda é maior que a densidade de energia de N_2. Entretanto, a razão entre a densidade de energia não-relativística de N_2 e

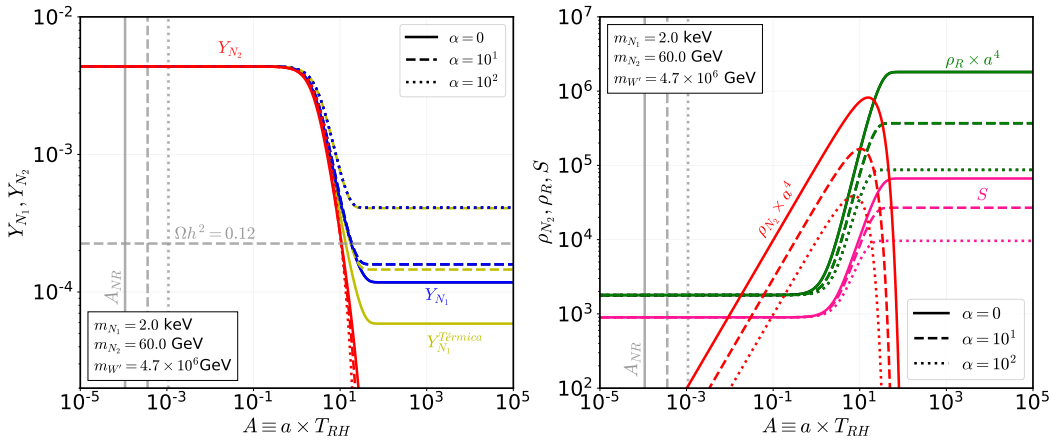

Figura 11 – Evolução das equações acopladas 5.14, 5.19, e 5.22 para $\alpha = 0, 10, 100$ (curvas contínuas, tracejadas e pontilhadas, respectivamente). Quadro da esquerda: Evolução total (contribuição térmica e não térmica) Y_{N_1} (azul), só a contribuição térmica $Y_{N_1}^{\text{Térmica}}$ (amarela) e Y_{N_2} (vermelha). Quadro da direita: Curvas da entropia S (rosa), $\rho_{N_2} \times a^4$ (vermelha) e $\rho_R \times a^4$ (verde), também mostra como o valor de Δ muda conforme nós aumentamos α ($\Delta = 100, 41$ e 14, para respectivo α).

a densidade de energia de radiação evoluem de acordo com $\rho_{N_2}/\rho_R \propto a \times m_{N_2}$, então ρ_{N_2} consegue dominar a densidade de energia de radiação do universo se N_2 viver o suficiente, como mostrado na Figura 11. O decaimento completo de N_2 corresponde na Figura 11 a diminuição abrupta de Y_{N_2} no quadro da esquerda (ou ρ_{N_2} no quadro da direita).

Nós conseguimos observar no quadro da direita da Figura 11 que quando N_2 decai completamente, a entropia aumenta por um fator Δ e, conforme esperado, se mantém constante antes e depois do decaimento de N_2. O aumento da entropia dilui a abundância de N_1, conforme tínhamos discutido, e nós podemos observar este comportamento na evolução de Y_{N_1} (curva azul) no quadro da esquerda da Figura 11. Quando N_2 decai completamente, a injeção de entropia cessa e Y_{N_1}, S e $\rho_R a^4$ voltam a ser contantes.

Como mostrado na Figura 11 o parâmetro livre α tem um papel importante na diluição de N_1. Ingenuamente poderíamos esperar que a diluição aumentasse com α, já que mais canais iriam termalizar. Entretanto, já que Γ_{N_2} aumenta com α, isso faz com que N_2 decaia mais cedo, de tal forma que ele não consiga dominar a densidade de energia do universo por um longo tempo para injetar uma quantidade significante de entropia. Nós podemos observar este comportamento no quadro da direita da Figura 11: quando $\alpha = 0$ (curvas contínuas), $\rho_{N_2} > \rho_R$ por muito mais tempo e injeta mais entropia ($\Delta = 100$) do que quando nós tomamos $\alpha = 10^2$ (curvas pontilhadas) e obtemos $\Delta = 14$. Como a injeção de entropia (parametrizada por Δ) é responsável por diluir N_1, isto explica por que o valor final de Y_{N_1} é maior conforme nós aumentamos α.

O parâmetro livre α tem também um importante papel na contribuição da com-

ponente não-térmica da abundância de N_1. Como mostrado no quadro da esquerda da Figura 11 existe uma lacuna entre Y_{N_1} (contribuição térmica mais não-térmica) e $Y_{N_1}^{\text{Térmica}}$ (apenas a contribuição térmica) a qual significa que o N_1 produzido via decaimento de N_2 é responsável por aumentar a abundância de N_1 de $Y_{N_1}^{\text{Térmica}}$ para Y_{N_1}. Nós conseguimos observar que esta lacuna diminui conforme nós aumentamos α. Este comportamento é explicado pelo fato de que quando α aumenta, ele permite que N_2 decaia em outras partículas além de N_1. De acordo com nossos cálculos, para $\alpha = 10^2$ nós teremos que a contribuição não-térmica será aproximadamente 1%, enquanto que para $\alpha = 0$ a contribuição não-térmica será aproximadamente de 50%.

5.7 Espaço de parâmetros permitido

Nesta seção nós iremos obter os vínculos sobre o espaço de parâmetros $(m_{W'}\,,\, m_{N_2})$, que torna N_1 produzido através do *freeze-out* relativístico e diluído através do decaimento de N_2 um candidato a matéria escura. Na Figura 12 nós apresentamos esses vínculos para $\alpha = 0$ (curva contínua) e $\alpha = 100$ (curva tracejada).

Nosso primeiro vínculo é sob a temperatura de *reheating*, dado pela Equação 5.18, o qual é a temperatura logo após o decaimento de N_2. Como nós já tínhamos discutido, N_2 deve decair antes do desacoplamento dos neutrinos ativos a fim de evitar problemas com as predições da BBN, com isso nós devemos garantir que $T_{RH} \gtrsim 4$ MeV. Na Figura 12 a região em rosa está excluída pois ela se refere a $T_{RH} < 4$ MeV. Como $T_{RH} \propto \sqrt{\Gamma_{N_2}}$ e Γ_{N_2} aumenta com α, este vínculo nos dá um limite superior ao valor de $m_{W'}$, o qual aumenta conforme aumentamos α.

Como nós discutimos anteriormente, N_2 precisa desacoplar relativístico para produzir entropia suficiente a fim de diluir N_1. Este critério exclui toda a região verde na Figura 12, onde $m_{N_2} \gg T_f$ com T_f dado pela Equação 5.9. Este vínculo independe do parâmetro α. Finalmente, o LHC vincula a massa do mediador $m_{W'} \gtrsim 3$ TeV [76, 77, 78, 79], é indicado pela região em azul.

A densidade de relíquia correta de N_1 hoje, $\Omega_{N_1}h^2 \simeq 0.12$, vinculada pelo satélite Planck [39], demanda que

$$Y_{N_1}^0 \simeq 4.25 \times 10^{-4} \left(\frac{1\text{ keV}}{m_{N_1}}\right) . \tag{5.25}$$

Com o propósito de levar em conta as contribuições térmica mais a não-térmica, nós encontramos Y_{N_1} resolvendo a Equação 5.14 numericamente. Para isto nós desenvolvemos um algoritmo em Python o qual procura os valores de m_{N_2} e $m_{W'}$ que obedecem a Equação 5.25. O contorno da densidade de relíquia correta é mostrada para $m_{N_1} = 2$ keV (curva cinza clara) e $m_{N_1} = 1$ MeV (curva cinza), para $\alpha = 0$ (contínua) e $\alpha = 100$ (tracejada). A região abaixo da curva cinza clara (cinza) está excluída pelo Planck. Como

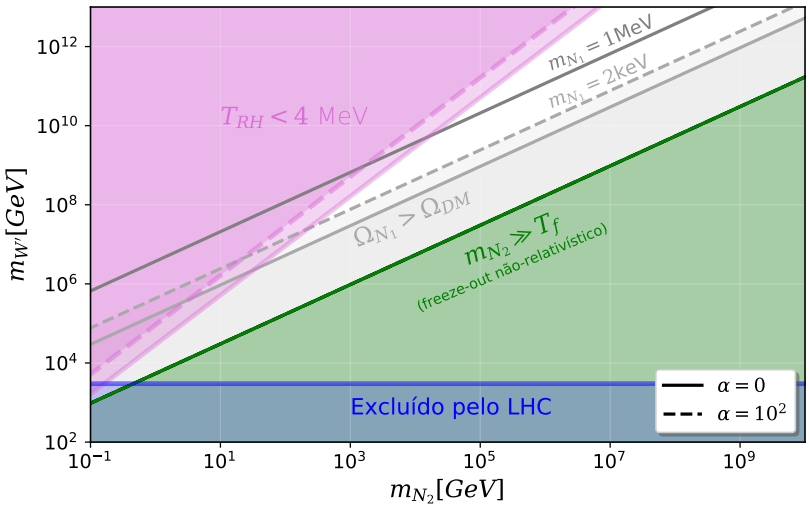

Figura 12 – Vínculos sob o espaço de parâmetros no plano $(m_{W'}, m_{N_2})$. A densidade de relíquia correta de matéria escura é descrita pelas curvas cinza clara ($m_{N_1} = 2$ keV) e cinza ($m_{N_1} = 1$ MeV). As curvas contínuas são para $\alpha = 0$ e as curvas tracejadas, para $\alpha = 10^2$. A região rosa e azul estão excluídas respectivamente pela BBN ($T_{RH} < 4$ MeV) e pelo LHC ($m_{W'} < 3$ GeV). Na região verde, o critério necessário do desacoplamento relativístico de N_2 não está garantido.

o propósito do nosso estudo é ter N_1 como um candidato a ME, nós estamos interessados nos valores que formam a curva cinza clara (cinza). Como nós podemos ver, quanto mais pesada for a matéria escura, mais pesado deverá ser o mediador de tal forma a concordar com Planck.

5.7.1 Contribuição para ΔN_{eff}

A quantidade de partículas relativísticas na época de igualdade radiação-matéria contribui para o número do grau de liberdade relativístico e afeta diretamente o espectro de potência da CMB. Um importante parâmetro que retrata isto é o número efetivo de espécies de neutrinos definido pela Equação 2.39. O valor atual para N_{eff} de acordo com Planck 2018+BAO [39] é $N_{eff} = 2.99 \pm 0.17$ o qual está em acordo com a predição do modelo padrão $N_{eff}^{SM} = 3.0440$ [38]. A variação na quantidade de radiação é quantificada pelo parâmetro $\Delta N_{eff} \equiv N_{eff} - N_{eff}^{SM}$.

Já que a fração de N_1 produzida não termicamente se torna não-relativística a temperaturas da ordem de $\mathcal{O}\,(\text{eV})$ (ver Apêndice D), esta componente irá aumentar o valor de N_{eff}. Vale notar que a fração de N_1 produzida termicamente e então diluída não contribui para o ΔN_{eff} pois ele se torna não-relativístico antes do período de igualdade (ver Apêndice D).

A contribuição para ΔN_{eff} no nosso modelo vem da componente não-térmica de

N_1 e depende diretamente do parâmetro α:

$$\begin{aligned}\Delta N_{eff} &= \frac{4}{7}\left(\frac{11}{4}\right)^{4/3}\frac{1}{3}\left(Br\left(N_2 \to \mu e N_1\right) + Br\left(N_2 \to \nu_\mu \nu_e N_1\right)\right)\left(\frac{g^4_{s,igualdade}}{g_{s,RH}}\right)^{1/3} \\ &= \frac{4}{7}\left(\frac{11}{4}\right)^{4/3}\frac{1}{3}\left(1+\alpha\right)^{-1}\left(\frac{g^4_{s,igualdade}}{g_{s,RH}}\right)^{1/3},\end{aligned} \tag{5.26}$$

o cálculo para se obter a expressão acima se encontra no Apêndice E.

De acordo com isto, $\alpha = 0$ implica em $\Delta N_{eff} \simeq 2.05$ o qual é excluído pelos vínculos discutidos acima. Em outras palavras, nós precisamos de $\alpha > 0$. Futuros experimentos como o CMB-S4 irá ter sensibilidade para vincular $\Delta N_{eff} = 0.060$ (em 95% C.L.) [80], na ausência de evidências para $\Delta N_{eff} \neq 0$, nós iremos ter o limite $\Delta N_{eff} < 0.06$ o qual requer que $\alpha \gtrsim 33$.

5.7.2 Formação de estrutura (*free-streaming*)

Como discutimos anteriormente, a matéria escura pode ser classificada como fria (CDM), morna (WDM) ou quente (HDM) de acordo com o seu *free-streaming* λ_{fs} [81] (para mais detalhes, ver Apêndice B), nesta seção nós iremos grosseiramente estimar o *free-streaming* de N_1, com o intuito de classificá-lo.

O *free-streaming* na época de igualdade radiação-matéria é um importante parâmetro que nos permite entender como as primeiras estruturas do universo foram formadas. Sendo definido por [31]

$$\lambda_{fs} \equiv \int_{t_{prod}}^{t_e} \frac{\langle v(t)\rangle}{a(t)} dt\,, \tag{5.27}$$

onde t_{prod} é o instante em que a partícula foi produzida, t_e é o instante da igualdade e $\langle v(t)\rangle$ é a média da velocidade de N_1.

A fração de N_1 produzida termicamente e então diluída devido a injeção de entropia é "mais fria" quando comparada a mesma componente não diluída, só produzida termicamente. A relação entre a temperatura de N_1 e a do plasma é afetada pela injeção de entropia e é parametrizada pelo parâmetro Δ

$$\frac{T_{N_1}}{T} = \left(\frac{1}{\Delta}\frac{g_s}{g_{s,b}}\right)^{1/3}, \tag{5.28}$$

onde o sub-índice "b" se refere a qualquer época anterior a diluição.

A componente térmica de N_1 na escala de keV, o qual é produzido relativisticamente, tem seu *free-streaming* suprimido para a escala de $\mathcal{O}\left(0.1\text{Mpc}\right)$ devido a diluição Δ, sendo portanto classificado como matéria escura morna ou até mesmo fria (para mais detalhes ver as referências [51, 81]).

Por outro lado, o *free-streaming* de N_1 produzido não termicamente é dado por [15, 82]

$$\begin{aligned}\lambda_{fs} &\simeq \int_0^{t_e} \frac{v(t)}{a(t)} dt \\ &\simeq 2 v_0 t_e \left(1+z_e\right)^2 ln\left(\frac{1}{v_0\left(1+z_e\right)} + \sqrt{1+\frac{1}{v_0^2\left(1+z_e\right)^2}}\right),\end{aligned} \tag{5.29}$$

onde v_0 é a velocidade inicial de N_1 e z_e é o *redshift* correspondente ao período de igualdade.

Já que a componente não-térmica de N_1 é produzida em T_{RH} através do decaimento de N_2, e no limite do estado final sem massa, nós obtemos o momento que N_1 não-térmico é produzido $p_{prod}^{N_1} \simeq m_{N_2}/3$. Para temperaturas abaixo de T_{RH}, o universo é dominado por radiação e a temperatura sofre um *redshift* de acordo com $a = a_0 \times T_0/T$. Nós temos portanto

$$v_0 \equiv \frac{p_{prod}^{N_1}}{m_{N_1}} a_{prod} \simeq \frac{m_{N_2}}{3 m_{N_1}} \frac{T_0}{T_{RH}}. \tag{5.30}$$

Para $m_{N_1} = 2.0$ keV, $m_{N_2} = 60.0$ GeV e $m_{W'} = 4.7 \times 10^6$ GeV nós obtemos $\lambda_{fs} \simeq 2.4$ Mpc. A fração não-térmica de N_1 é portanto classificada como HDM.

Nossa componente não-térmica pode compor até 50% da abundância total de N_1 (para $\alpha = 0$) e 1% (para $\alpha = 10^2$). Como o vínculo da CMB requer que $\alpha > 0$, nós devemos ter um cenário de mistura, uma componente morna e outra quente. Tal cenário tem importantes implicações para o período de formação de estruturas e podem estar relacionados a solução de alguns problemas como *core-cusp* [83]. Se N_1 for majoritariamente morna, este fato implica que $m_{N_1} \gtrsim 3$ keV [84]. Uma abordagem mais rigorosa sobre as implicações de uma matéria escura morna+quente no período de formação de estruturas pode trazer mais vínculos para o parâmetros α [85, 86]. Entretanto, isto requer o cálculo das flutuações do espectro de potência para o nosso cenário o qual foge do foco desta dissertação.

5.8 Discussão e conclusões

Neste capítulo fomos capazes de aplicar o mecanismo de diluição de matéria escura em uma Extensão do Modelo Padrão, mostrando que é viável existir uma matéria escura leve. Nós investigamos isto em um modelo baseado no grupo de gauge $SU(3)_L$. Neste modelo os neutrinos ativos e estéreis compõem o mesmo multípleto de $SU(3)_L$, com o neutrino estéril mais leve sendo a matéria escura. Sua densidade de relíquia é definida pelas suas interações com as partículas do Modelo Padrão mediadas pelos novos bósons de gauge da teoria.

Nós mostramos que os neutrinos estéreis termalizam facilmente com as partículas do Modelo Padrão por interações mediadas pelos novos bósons de gauge mais pesados,

ao menos que suas massas forem na escala de GUT. Sendo os neutrinos estéreis muito mais leves que os bósons de gauge, eles tem o seu *freeze-out* relativístico, e portanto são super-produzidos.

Neste exemplo, nós mostramos que este problema de super-produção com um neutrino estéril na escala de keV pode ser resolvido dentro do grupo de gauge $SU(3)_L$. Desde que os neutrinos estéreis mais pesados tenham seu *freeze-out* ainda relativístico e dominem a densidade de energia do universo (após se tornarem não-relativístico) antes de decair. Eles tem como produto final do decaimento fora do equilíbrio as partículas do MP e o neutrino estéril mais leve na escala de keV. Então eles contribuem para diluir a componente da matéria escura produzida termicamente e injetar uma componente não-térmica.

Este cenário de uma mistura de matéria escura morna e quente tende a ser favorável aos vínculos cosmológicos. Como a injeção de entropia deve acontecer antes da BBN, os vínculos são endereçados para a massa dos neutrinos estéreis pesados e para os bósons de gauge. Nós obtemos que eles devem ser mais pesados que a escala de TeV. Além do mais, a matéria escura quente pode também aumentar o N_{eff} de maneira detectável e por esta razão nós impomos que $\alpha \gtrsim 33$ para assegurar que os neutrinos estéreis mais pesados decaiam em outras partículas do grupo de gauge $SU(3)_L$ além da matéria escura.

Conclusões

Esta dissertação teve como foco principal tornar viável a existência de uma matéria escura com massa na escala de keV. Com isso, iniciamos a nossa abordagem apresentando as principais evidências para a existência da matéria escura, seguida por uma breve discussão sobre os seus possíveis candidatos, onde também mostramos que o Modelo Padrão não possui nenhuma partícula que respeite as características da ME.

No capítulo 2, fizemos uma revisão sobre a termodinâmica aplicada ao início do universo, no cenário de física de partículas. Posteriormente, no mesmo capítulo, tratamos do processo de produção de partículas no universo primordial, e por ser um processo que ocorre fora do equilíbrio introduzimos a equação de Boltzmann e fizemos um estudo detalhado sobre a mesma.

Já no capítulo 3, abordamos o caso das WIMPs, onde serviu para exemplificar o processo de *freeze-out* de uma partícula, o qual havíamos discutido no capítulo anterior. Mostramos analiticamente que as interações das WIMPs sendo da ordem da interação eletrofraca conduz a densidade de relíquia correta da ME. Em seguida, resolvemos numericamente a equação de Boltzmann para as WIMPs, mostrando que o resultado numérico corroborava com a abordagem analítica. Além disso, discutimos sobre alguns problemas endereçados a uma matéria escura fria onde mostramos que uma possível solução seria considerar uma ME morna. Por fim, sugerimos que se uma matéria escura leve, a qual é naturalmente quente e super-produzida, tivesse sua abundância diluída através de um mecanismo de injeção de entropia, então, poderia ser uma ME morna.

Posteriormente, no capítulo 4, mostramos o que já havíamos discutido no capítulo anterior, de que uma partícula candidata a matéria escura com massa na escala de keV é super-produzida. E vimos que se uma partícula instável dominar a densidade de energia do universo antes de decair, ela é capaz de aumentar de forma significativa a entropia do banho térmico e consequentemente diluir a abundância da matéria escura super-produzida. Discutimos também como a cosmologia se modifica neste cenário, onde o Modelo Cosmológico Padrão acaba sendo naturalmente substituído, pois a densidade de energia do universo passa por diferentes fases antes da partícula decair. Além disso, discutimos os vínculos sob T_{RH}, a fim de que o decaimento fora do equilíbrio não prejudicasse as predições da BBN e nem as observações da CMB.

Por fim, no capítulo 5, aplicamos o mecanismo de diluição a uma extensão do Modelo Padrão baseado na simetria de gauge $SU(3)_C \times SU(3)_L \times U(1)_X$, a qual apresenta neutrinos de majorana de mão direita (neutrinos estéreis), onde assumimos o neutrino estéril mais leve, na escala de keV, como o candidato a ME. Vimos nesse modelo que os

neutrinos mais pesados, os quais são naturalmente instáveis, tem a capacidade de diluir a abundância da matéria escura para a abundância correta, como mostramos no espaço de parâmetros Figura 12.

Por outro lado, o modelo que utilizamos como exemplo nos conduziu a um cenário incomum, onde tivemos a contribuição de uma componente de matéria escura não-térmica, produzida via decaimento do neutrino estéril mais pesado. E mostramos que a componente térmica da ME "esfria" devido a injeção de entropia, sendo considerada ME morna, enquanto que a componente não-térmica é quente. Sendo assim, fomos forçados a calcular o ΔN_{eff}, de onde surgiu um vínculo para a largura de decaimento do neutrino responsável pela diluição.

Em suma, mostramos um mecanismo que torna possível a existência de uma matéria escura com massa na escala de keV. Para isso é necessário que uma partícula instável domine a densidade do universo antes de decair, sendo necessário que o produto final do decaimento termalize e que T_{RH} respeite os vínculos da BBN e CMB.

Apêndices

APÊNDICE A – Modelo Cosmológico Padrão

Neste apêndice vamos apresentar as bases observacionais e teóricas do modelo cosmológico padrão.

A.1 O Principio Cosmológico

Um dos pilares, talvez o principal, em que o modelo cosmológico padrão se apoia é no princípio cosmológico. O princípio cosmológico assume que o nosso universo é isotrópico e homogêneo a grande distâncias (aproximadamente 300 Mpc de acordo com [87]). A isotropia garante que o universo não possui uma direção privilegiada, ou seja, não importa a direção em que um observador aponta o seu telescópio, ele sempre irá observar as mesmas propriedades. Já a homogeneidade garante que não existe uma localização privilegiada, para qualquer local que um observador for ele sempre irá observar as mesmas propriedades.

Durante todo este apêndice e também em toda a dissertação estaremos assumindo o princípio cosmológico, mesmo quando não o comentamos.

A.2 Universo em Expansão

Em meados de 1920, se chegou a uma conclusão por meios de dados observacionais que o universo está se expandindo. Esta conclusão veio do fato de que o espectro emitido pelas galáxias sofriam um *redshift*.

O *redshift* da luz proveniente de uma galáxia é definido da seguinte forma

$$z = \frac{\lambda_{ob} - \lambda_{em}}{\lambda_{ob}}, \tag{A.1}$$

onde λ_{ob} é o comprimento de onda observado proveniente da galáxia e λ_{em} é o comprimento de onda emitido pela mesma. O espectro onda visível emitido pelas galáxias contém linhas de absorção devido aos elementos presentes nas estrelas dessas galáxias. Com isso é possível obter o valor de λ_{em}. Quando $z < 0$ temos um desvio para o azul (*blueshift*) e quando $z > 0$ temos um desvio para o vermelho (*redshift*).

Através do estudo da relação entre o *redshift* z de uma galáxia e a sua distância r da Terra, o cosmologista Edwin Hubble ficou famoso por obter a relação

$$z = \frac{H_0}{c} r, \tag{A.2}$$

onde H_0 é a constante de Hubble. Hubble interpretou o *redshift* de uma galáxia como sendo um efeito Doppler, devido a velocidade radial da galáxia. Como as galáxias que estão próximas a nossa (as quais foram utilizadas no trabalho de E. Hubble) se distanciam a uma baixa velocidade, Hubble utilizou a abordagem não-relativística do efeito Doppler ($z = v/c$) e concluiu que

$$v = H_0 r \,. \tag{A.3}$$

A constante de Hubble é obtida a partir da Equação A.3, por dividir a velocidade de uma galáxia pela sua distância a Terra. A constante de Hubble é expressa em unidades de km s^{-1} Mpc^{-1}, onde 1 pc $= 3,0 \times 10^{16}$m. Entretanto, na busca por escolher um sistema de coordenadas satisfatório para medir a distância r, devemos levar em conta que o universo está se expandindo, ou seja, $r = r(t)$. O sistema de coordenadas $(x, y, z) = (x(t), y(t), z(t))$ que leva em conta a expansão do universo é chamado de sistema de coordenadas comóvel. Podemos definir este sistema de coordenadas da seguinte forma:

$$(x(t), y(t), z(t)) \equiv a(t)\ (x, y, z)\,, \tag{A.4}$$

onde $a(t)$ é chamado de fator de escala, e faz o papel da expansão do universo. Por enquanto vamos assumir que o fator de escala só dependa do tempo, na próxima seção vamos apresentar argumentos para isto.

Considere um observador na origem de um sistema de coordenadas comóvel $\vec{r}_{ob} = a(t)(0, 0, 0)$ e ele observa uma galáxia localizada em $\vec{r}_{gal} = a(t)(x, 0, 0)$, portanto esta galáxia está a uma distância

$$d(t) \equiv \vec{r}_{gal}(t) - \vec{r}_{ob}(t) = a(t)x\,, \tag{A.5}$$

portanto a velocidade com que esta galáxia se distancia do observador será

$$v(t) = \frac{d}{dt}(d(t)) = \dot{a}(t)x\,, \tag{A.6}$$

onde levamos em conta que x não varia com o tempo.

Substituindo as Equações A.5 e A.6 na Equação A.3, concluímos que

$$H = \frac{\dot{a}}{a}\,, \tag{A.7}$$

onde utilizamos H ao invés de H_0 pois observamos que a constante de Hubble não é em si uma constante, mas um parâmetro que varia com o tempo. Vamos deixar a notação H_0 para se referir ao parâmetro de Hubble medido hoje $H_0 = H(t_0)$. O parâmetro de Hubble é dado na unidade de $[\mathrm{s}]^{-1}$ e nos informa a que taxa o universo se expande. Existe uma discrepância no valor de H_0 medido hoje, esta discrepância é chamada de Tensão de Hubble, entretanto não vamos entrar em detalhes sobre este problema neste trabalho, e vamos tomar [88]

$$H_0 \ = 100\ h\ \text{km s}^{-1}\text{Mpc}^{-1} \ = \ 72.1\ \text{km s}^{-1}\text{Mpc}^{-1}\,, \tag{A.8}$$

onde $h \simeq 0.721$ é um parâmetro adimensional utilizado comumente para expressar a incerteza das medidas experimentais.

A.3 Modelo Cosmológico de Friedmann-Robertson-Walker

Apesar de hoje ser chamado de Modelo Cosmológico Padrão, inicialmente ele recebeu o nome de Modelo Cosmológico de FRW (Friedmann-Robertson-Walker), entretanto o modelo acabou recebendo o nome atual devido ao grande sucesso das suas predições teóricas corroborarem com os dados observacionais.

Nesta seção vamos definir a métrica de FRW a qual formaliza teoricamente conceitos como o do princípio cosmológico e do sistema de coordenadas comóvel, além de definir as equações de Friedmann.

A métrica de FRW em coordenadas esféricas é dada por

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\left(\frac{dr^2}{1-\kappa r^2} + r^2 d\Omega^2\right), \tag{A.9}$$

onde $d\Omega^2 \equiv d\theta^2 + sen^2\theta d\phi^2$ representa o ângulo sólido, já a expansão do universo é representada pelo fator de escala $a(t)$. O termo κ representa a curvatura do universo e pode assumir os valores $\kappa = -1, 0$ e $+1$ para um universo com curvatura negativa (hiperbólico), nula (plano) e positiva (esférico), respectivamente.

A partir da definição da métrica de FRW na Equação A.9, podemos obter as equações de Friedmann a partir da equação de Einstein:

$$G_{\mu\nu} \; + \; \lambda g_{\mu\nu} \; = \; R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \Lambda g_{\mu\nu} \; = \; 8\pi G T_{\mu\nu}\,, \tag{A.10}$$

onde Λ é a constante cosmológica, $g_{\mu\nu} \equiv diag(-1,1,1,1)$ é a métrica de Minkowski, $R_{\mu\nu}$ é o tensor de Ricci e é definido como

$$R_{\mu\nu} \; \equiv \; \frac{\partial \Gamma^{\rho}_{\mu\nu}}{\partial x^{\rho}} - \frac{\partial \Gamma^{\rho}_{\mu\rho}}{\partial x^{\nu}} + \Gamma^{\rho}_{\delta\rho}\Gamma^{\delta}_{\mu\nu} - \Gamma^{\rho}_{\delta\nu}\Gamma^{\delta}_{\mu\rho}\,, \tag{A.11}$$

e a partir da definição acima, o escalar de Ricci R é definido como $R \equiv g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$. Já o termo $\Gamma^{\rho}_{\mu\nu}$ é chamado de simbolo de Christoffel e é definido como

$$\Gamma^{\rho}_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2} g^{\rho\delta}\left[\frac{\partial g_{\delta\mu}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial g_{\delta\nu}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\delta}}\right]. \tag{A.12}$$

Como o nosso universo em grandes escalas se caracteriza por uma distribuição homogênea e isotrópica de matéria, neste cenário podemos descreve-lo como um fluido perfeito, cujo tensor energia-momento $T_{\mu\nu}$ de um fluido perfeito é dado por

$$T_{\mu\nu} \; \equiv \; (\rho + p)\, U_{\mu} U_{\nu} - p g_{\mu\nu}\,, \tag{A.13}$$

onde p, ρ e U^μ representam a pressão, a densidade de energia e a quadri-velocidade do fluido, respectivamente.

Portanto, podemos agora prosseguir calculando o tensor de Ricci (Equação A.11) a partir da definição do simbolo de Christoffel (Equação A.12), e obtemos

$$R_{\mu\nu} = \begin{cases} R_{00} &= -3\dfrac{\ddot{a}}{a} \\ R_{\mu\nu} &= g_{\mu\nu}\left(2H^2 + \dfrac{\ddot{a}}{a} + 2\dfrac{\kappa}{a^2}\right), \end{cases} \tag{A.14}$$

e a partir da definição do escalar de Ricci, temos

$$R \equiv g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} = 6\left(H^2 + \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\kappa}{a^2}\right). \tag{A.15}$$

Como $g_{\mu\nu}$ é diagonal, isto implica que $R_{\mu\nu}$ também será. Por este motivo e pelo fato de que o tensor energia-momento (dado pela Equação A.13) também ser diagonal, as equações de Einstein só terão as componentes diagonais não nulos.

Portanto, substituindo as Equações A.9, A.14 e A.13 na equação de Einstein (Equação A.10), podemos obter:

$$H^2 + \frac{\kappa}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}T_{00} + \frac{\Lambda}{3} \tag{A.16}$$

$$g_{\mu\nu}\left(H^2 + 2\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\kappa}{a^2} - \Lambda\right) = -8\pi G T_{\mu\nu}\,, \tag{A.17}$$

as quais são comumente chamadas de equação de Friedmann e equação da aceleração, respectivamente. Por fim, podemos escrever essas duas equações de uma forma mais usual através da definição do tensor energia-momento (Equação A.13)

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho + \frac{\Lambda}{3} - \frac{\kappa}{a^2} \tag{A.18}$$

$$\ddot{a} = \left(-\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) + \frac{\Lambda}{3}\right)a^2\,. \tag{A.19}$$

A equação de Friedmann nos diz como o parâmetro de Hubble evolui.

Uma das principais previsões da equação de Friedmann é acerca da densidade de energia necessária para que o universo tenha curvatura $\kappa = 0$ (plano). Para mostrar tal feito vamos incorporar o termo proporcional a Λ a densidade de energia ρ e tomando $\kappa = 0$ na Equação A.18, obtemos

$$\rho_{cr} \equiv \frac{3H^2}{8\pi G}\,, \tag{A.20}$$

onde ρ_{cr} representa a densidade de energia crítica que o universo deve ter de tal forma que $\kappa = 0$. Atualmente $\rho_{cr} = 1.053 \times 10^{-5}h^2$ GeV cm^{-3} de acordo com [19].

A partir da definição de ρ_{cr} e da Equação A.18 podemos escrever a curvatura κ em função da densidade de energia ρ

$$\kappa = H^2\left(\frac{\rho}{\rho_{cr}} - 1\right)a^2\,, \tag{A.21}$$

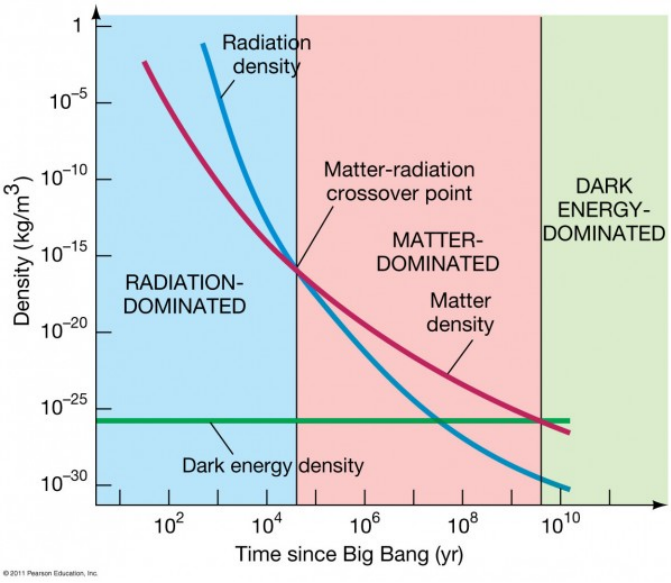

Figura 13 – Evolução da densidade de energia do universo. Retirado de: <http://scienceblogs.com/startswithabang/2013/06/12/what-is-the-big-bang-all-about/>.

e concluímos que se a densidade de energia do universo ρ for maior que ρ_{cr} teremos $\kappa > 0$ e teremos um universo com curvatura positiva (esférico), por outro lado, se $\rho < \rho_{cr}$ teremos $\kappa < 0$ um universo com curvatura negativa (hiperbólico).

Mais recentemente, a partir da análise da CMB pôde-se inferir que o nosso universo é plano ($\kappa = 0$) [89]. Com isso, a Equação A.18 que também é conhecida como parâmetro de Hubble, pode ser representada por uma forma mais usual se utilizarmos do fato que nosso universo é plano ($\kappa = 0$) e incorporando o termo $\frac{\Lambda}{3}$ na densidade de energia ρ

$$H = \frac{\sqrt{\rho}}{\sqrt{3}M_{Pl}}, \tag{A.22}$$

onde $M_{Pl} \equiv \sqrt{\frac{1}{8\pi G}}$ é a massa de Planck.

Na Figura 13 podemos observar como a densidade de energia do nosso universo evolui de acordo com o Modelo Cosmológico Padrão. Inicialmente, o nosso universo foi dominado por radiação, pois nesse período o universo era muito quente e denso de tal forma que as partículas do Modelo Padrão estavam em equilíbrio entre si. Conforme o universo se esfria e as partículas passam a ser não-relativísticas, o universo começa a ser dominado por matéria, no período que é chamado de igualdade radiação-matéria. Por fim, quando a densidade de energia de matéria se torna irrelevante, o universo começa a ser dominado pela energia escura, representada pelo parâmetro Λ na Equação A.18, este é o período que nos encontramos atualmente.

A.4 Radiação Cósmica de Fundo

Um dos sucessos do Modelo Cosmológico Padrão (MCP) vem da predição da Radiação Cósmica de Fundo (do inglês: *Cosmic Microwave Background*, abreviado CMB), a qual é uma radiação eletromagnética. A CMB foi descoberta acidentalmente por Arno Penzias e Robert Wilson em 1965 [90]. Eles notaram um ruido insistente sendo captado pelas antenas de rádio dos Laboratórios Bell, o qual era isotrópico e constante no tempo, e mais tarde eles concluíram como sendo a radiação cósmica de fundo. Entretanto ela já havia sido predita muito antes por Gamow, Alpher e Herman, em 1948 [91, 92]. O trabalho de Gamow auxiliou na conclusão feita por Penzias e Wilson sobre a CMB. Mais recentemente, o satélite COBE (do inglês: *Cosmic Microwave Background*) inferiu que o espectro de energia da radiação cósmica de fundo se assemelha ao do corpo negro.

A descoberta da CMB nos oferece muitas pistas sobre o universo primordial. E neste ponto o MCP se destaca, pois prever a existência da radiação cósmica de fundo. De acordo com o MCP o universo era inicialmente muito quente e denso, e a elevadas temperaturas a matéria bariônica estava completamente ionizada. Os elétrons livres tornava o universo opaco, pois os fótons estavam a todo o tempo sendo espalhados por eles. Esse universo quente, denso e opaco produz o espectro de corpo negro observado hoje na CMB. Conforme o universo se expande e esfria, os íons e elétrons se combinam para formar os primeiros átomos neutros. Quando o número de elétrons livres diminuem consideravelmente os fótons conseguem viajar livremente sem se espalhar com os elétrons.

A.4.1 Recombinação e Desacoplamento

Para entendermos melhor o surgimento da CMB de acordo com o Modelo Cosmológico Padrão precisamos compreender três períodos cruciais que antecederam o seu surgimento, são esses períodos: recombinação, desacoplamento do fóton e último espalhamento.

O período de recombinação é caracterizado pela época em que a componente bariônica do universo passa de ionizada para neutra. Este período costuma ser definido como o instante em que a densidade de número de íons se torna igual a densidade de número de átomos neutros [93]. Seguido pelo período de recombinação, vem o desacoplamento do fóton, que é caracterizado quando a taxa de espalhamento dos fótons com os elétrons se torna menor que a taxa com a qual o universo se expande, nesse instante os fótons desacoplam. E, por fim, temos o período de último espalhamento, que ocorre quando o fóton se espalha pela última vez com o elétron e viaja livremente, dando origem a radiação cósmica de fundo. O período de último espalhamento tende a ser muito próximo ao do desacoplamento do fóton, já que o universo se expande cada vez mais rápido.

A.5 Big Bang Nucleossíntese

O Modelo Cosmológico Padrão também se destaca na predição da abundância dos elementos leves do nosso universo: D (Deutério), ^{3}He (Hélio-3), ^{4}He (Hélio-4) e ^{7}Li (Lítio-7). Como os processos astrofísicos atuais não tem a capacidade de produzir esses elementos em grandes quantidades, decorre que eles foram majoritariamente produzidos no início do universo. Por exemplo, de toda a abundância do ^{4}He observada hoje, apenas $\Delta Y \simeq 0.05$ é proveniente de estrelas, para o caso do Deutério essa contribuição é ainda menor[31]. De acordo com o Modelo Cosmológico Padrão o período de nucleossíntese primordial ocorreu quando a temperatura do universo era 0.1 MeV $\lesssim T \lesssim$ 10 MeV [31]. A predição feita pelo MCP da abundância desses elementos concorda com o que é observado hoje [94], com a exceção do ^{7}Li. O problema do ^{7}Li decorre do fato que o MCP prevê $\simeq 3$ vezes mais a abundância de ^{7}Li do que a observada hoje [95], este problema vem sendo amplamente discutido por ser um forte indicativo de física nova, já que ele pode ser solucionado através de uma Extensão do Modelo Padrão [96].

APÊNDICE B – Formação de Estrutura

O processo de formação de estrutura do nosso universo pode nos fornecer informações valiosas sobre as propriedades da matéria escura. O estudo sobre a formação de estrutura é amplamente baseado em simulações computacionais e não dependem significativamente do que a matéria escura é constituída e das suas interações (exceto a gravitacional). Entretanto as simulações são extremamente sensíveis a velocidade de distribuição inicial da matéria escura [97, 98]. Esta dependência com a velocidade de distribuição inicial é de fato importante para classificar os candidatos a matéria escura. Pois, enquanto os neutrinos do Modelo Padrão tem o seu *freeze-out* ainda relativístico, outros candidatos a ME como os neutralinos tem seu *freeze-out* não-relativístico [46].

Vale salientar que as grandes estruturas que observamos atualmente no universo (como os aglomerados de galáxias) se originaram de pequenas inomogeneidades na distribuição de matéria nos primórdios do nosso universo. Apesar das simulações cosmológicas mostrarem que as grandes estruturas atuais serem insensíveis a velocidade de distribuição inicial, o mesmo não acontece para as inomogeneidades primordiais. Neste período inicial essas inomogeneidades sofrem a ação da força gravitacional e da repulsão gerada pela pressão da radiação sob a matéria. O processo de formação se inicia quando esta primeira força se prevalece sob a segunda. Sendo assim, um candidato a ME relativístico no início do universo suprime o processo de formação de pequenas estruturas, eliminando as inomogeneidades neste período [8].

Uma grandeza capaz de quantificar e classificar a matéria escura no início do universo é o seu livre caminho médio (chamado também de *free-streaming*). As partículas relativísticas possuem um livre caminho médio maior do que as não-relativísticas, devido a sua velocidade. O *free-streaming* de uma partícula é definido como

$$\lambda_{FS} \equiv \int_{t_i}^{t_{eq}} \frac{\langle v \rangle}{a(t)} dt \,, \tag{B.1}$$

onde t_i é o tempo em que a partícula foi criada, t_{eq} é o tempo da igualdade radiação-matéria e $\langle v \rangle$ é a média da velocidade da partícula. E a matéria escura pode ser classificada de acordo com o seu *free-streaming* como [81]

$$\begin{aligned} \lambda_{FS} &< 0.01 \text{ Mpc} \,, \quad \text{(Fria)} \\ 0.01 \text{ Mpc} < \lambda_{FS} &< 0.1 \text{ Mpc} \,, \quad \text{(Morna)} \\ 0.1 \text{ Mpc} < \lambda_{FS} &\,, \quad \text{(Quente)} \,. \end{aligned} \tag{B.2}$$

Com isso os neutrinos do MP são classificados como quentes por desacoplarem relativístico implicando em $\lambda_{FS} > 0.1$ Mpc , enquanto os neutralinos são frios por desacoplarem não-relativístico.

APÊNDICE C – Média Térmica das Interações

Neste apêndice vamos solucionar a equação da média térmica da seção de choque (Equação 2.73)

$$\langle \sigma v_{\text{Møller}} \rangle \equiv \frac{\int (\sigma v_{\text{Møller}})\, dn_1^{eq} dn_2^{eq}}{\int dn_1^{eq} dn_2^{eq}}\,, \tag{C.1}$$

e da média térmica do decaimento (Equação 2.81)

$$\langle \Gamma \rangle \equiv \frac{\int \Gamma dn^{eq}}{\int dn^{eq}}\,. \tag{C.2}$$

Primeiramente vamos apresentar alguns resultados matemáticos que iremos utilizar na nossa abordagem. Vimos na seção 2.5 que a função de distribuição das partículas que estão acopladas ao banho térmico pode ser descrita pela distribuição de Maxwell-Boltzmann (Equação 2.4)

$$f = e^{-E/T}\,, \tag{C.3}$$

onde tomamos por simplicidade $\mu = 0$. Sendo assim, a partir da definição da densidade de número, dado pela Equação 2.1, temos

$$n = \frac{g}{(2\pi)^3} 4\pi \int_m^\infty E\sqrt{E^2 - m^2} e^{-E/T} dE\,, \tag{C.4}$$

onde utilizamos a definição da energia $E^2 = |\vec{p}|^2 + m^2$ e a simetria esférica do espaço dos momentos ($d^3p = 4\pi E\sqrt{E^2 - m^2}dE$). O limite inferior da integral surge do fato que a menor energia possível que a partícula pode ter é sua massa. Integrando por partes a Equação C.4

$$n = \frac{g}{(2\pi)^3} 4\pi \left(\frac{1}{3} \left[\left(E^2 - m^2\right)^{3/2} e^{-E/T} \right]_m^\infty + \frac{1}{3T} \int_m^\infty \left(E^2 - m^2\right)^{3/2} e^{-E/T} dE \right)\,, \tag{C.5}$$

é fácil ver que o primeiro termo do lado direito da equação acima é identicamente nulo após a substituição dos limites de integração. Portanto ficamos com

$$n = \frac{g}{(2\pi)^3} \frac{4\pi}{3T} \int_m^\infty \left(E^2 - m^2\right)^{3/2} e^{-E/T} dE\,. \tag{C.6}$$

Com o intuito de resolvermos a equação acima precisamos definir K_α a função de Bessel modificada do segundo tipo e de ordem α [99]

$$K_\alpha(z) \equiv \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(\alpha + \frac{1}{2})} \left(\frac{z}{2}\right)^\alpha \int_1^\infty \left(x^2 - 1\right)^{\alpha - 1/2} e^{-zx} dx\,, \tag{C.7}$$

onde $\Gamma(y)$ é a função Gamma. A fim de utilizarmos a função de Bessel, reescrevemos a Equação C.6 de uma forma mais conveniente

$$n = \frac{g}{(2\pi)^3}\frac{4\pi}{3}\frac{m^4}{T}\int_1^\infty \left(y^2-1\right)^{2-1/2} e^{-yx}dy\,, \tag{C.8}$$

onde $y \equiv E/m$ e $x \equiv m/T$. E a partir da definição da função de Bessel modificada (Equação C.7), chegamos a

$$n = \frac{g}{2\pi^2}m^2TK_2(m/T)\,, \tag{C.9}$$

onde $\Gamma(5/2) = \frac{3\sqrt{\pi}}{4}$.

C.1 Média Térmica da Seção de Choque

Seguindo [45], vamos voltar agora nossa atenção para a definição da média térmica da seção de choque (Equação C.1) escrita em função dos momentos

$$\langle\sigma v_{\text{Møller}}\rangle \equiv \frac{\int (\sigma v_{\text{Møller}})\, e^{-E_1/T}e^{-E_2/T}d^3p_1d^3p_2}{\int e^{-E_1/T}e^{-E_2/T}d^3p_1d^3p_2}\,. \tag{C.10}$$

Aqui vamos fazer um tratamento mais simples da expressão acima, assumindo que a partícula 1 seja igual a partícula 2. Pois é a situação que será abordada nesta dissertação. O cenário de co-aniquilação, onde as partículas 1 e 2 diferem, é abordado de forma detalhada em [46].

Através do que foi discutido anteriormente, é fácil ver que o denominador da equação acima será

$$\int e^{-E_1/T}e^{-E_2/T}d^3p_1d^3p_2 = \left(4\pi m^2TK_2(m/T)\right)^2\,, \tag{C.11}$$

onde $m = m_1 = m_2$.

Com o propósito de calcularmos o numerador da Equação C.10 vamos escrever o produto do elemento de volume do espaço dos momentos da seguinte forma

$$d^3p_1d^3p_2 = 4\pi|\vec{p_1}|E_1dE_1 4\pi|\vec{p_2}|E_2dE_2\frac{1}{2}dcos\theta\,, \tag{C.12}$$

onde θ é o angulo entre $\vec{p_1}$ e $\vec{p_2}$. Então vamos fazer a seguinte mudança de variáveis

$$\begin{cases} E_+ = E_1 + E_2 \\ E_- = E_1 - E_2 \\ s = 2m^2 + 2E_1E_2 - 2|\vec{p_1}||\vec{p_2}|cos\theta\,, \end{cases} \tag{C.13}$$

onde $s \equiv (\mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2)^2$ é a variável de Mandelstam. Portanto, o produto do elemento de volume assume a seguinte forma

$$d\vec{p_1}d\vec{p_2} = 2\pi^2E_1E_2dE_+dE_-ds\,. \tag{C.14}$$

E o limite de integração $E_1 \geq m_1\,, E_2 \geq m_2\,, |cos\theta| \leq 1$ se transforma em [45]

$$\begin{cases} s \geq 4m^2 \\ E_+ \geq \sqrt{s} \\ |E_-| \leq \sqrt{1-\dfrac{4m^2}{s}}\sqrt{E_+^2 - s}\,. \end{cases} \tag{C.15}$$

Portanto, o numerador da Equação C.10 toma a seguinte forma

$$\int (\sigma v_{\text{Møller}})\, e^{-E_1/T} e^{-E_2/T} d\vec{p}_1 d\vec{p}_2 = 2\pi^2 \int dE_- \int dE_+ \int ds\ \sigma v_{\text{Møller}} E_1 E_2 e^{-E_+/T}\,. \tag{C.16}$$

A partir da definição da velocidade de Møller $v_{\text{Møller}}$, dado pela Equação 2.71

$$v_{\text{Møller}} \equiv \frac{\sqrt{(\mathcal{P}_1 \cdot \mathcal{P}_2)^2 - m^4}}{E_1 E_2}\,, \tag{C.17}$$

podemos concluir que o produto $\sigma v_{\text{Møller}} E_1 E_2$ na Equação C.16 só depende de s. Então podemos efetuar a integração em E_- seguida pela integração em E_+

$$\int (\sigma v_{\text{Møller}})\, e^{-E_1/T} e^{-E_2/T} d\vec{p}_1 d\vec{p}_2 = 4\pi^2 \int ds\ \sigma G \sqrt{1-\frac{4m^2}{s}} \int dE_+\ e^{-E_+/T} \sqrt{E_+^2 - s} \tag{C.18}$$

$$= 2\pi^2 T \int ds\ \sigma \left(s - 4m^2\right) \sqrt{s} K_1\left(\sqrt{s}/T\right) \tag{C.19}$$

onde definimos $G \equiv v_{\text{Møller}} E_1 E_2 = \dfrac{1}{2}\sqrt{s(s-4m^2)}$ e utilizamos a definição da função de Bessel (Equação C.7), de tal forma que K_1 é a função de Bessel modificada do segundo tipo e de ordem 1.

Sendo assim, utilizando as Equações C.11 e C.18 obtemos que a equação da média térmica da seção de choque (Equação C.1) será

$$\langle \sigma v_{\text{Møller}} \rangle = \frac{1}{8m^4 T K_2^2(m/T)} \int_{4m^2}^{\infty} \sigma \left(s - 4m^2\right) \sqrt{s} K_1(\sqrt{s}/T) ds\,. \tag{C.20}$$

C.2 Média Térmica da Largura de Decaimento

Assim como fizemos anteriormente para obter a expressão para $\langle \sigma v_{\text{Møller}} \rangle$, vamos partir da definição da média térmica da largura de decaimento (Equação 2.81) escrita em função dos momentos

$$\langle \Gamma \rangle \equiv \frac{\int \Gamma(E_1) e^{-E_1/T} d\vec{p}_1}{\int e^{-E_1/T} d\vec{p}_1}\,, \tag{C.21}$$

onde $\Gamma(E_1)$ (Equação 2.77) representa a largura de decaimento da partícula 1 para o processo $1 \to 2 + 3 + 4$.

De acordo com o que obtemos anteriormente na seção anterior, podemos definir $\langle\Gamma\rangle$ da seguinte forma

$$\langle\Gamma\rangle \equiv \frac{\int d\vec{p_1}\Gamma\left(E_1\right)e^{-E_1/T}}{\int d\vec{p_1}e^{-E_1/T}} = \frac{\Gamma_1}{m_1 T K_2\left(\frac{m_1}{T}\right)}\int_{m_1}^{\infty} dE_1\sqrt{E_1^2-m_1^2}e^{-E_1/T} = \Gamma\frac{K_1\left(\frac{m_1}{T}\right)}{K_2\left(\frac{m_1}{T}\right)}, \tag{C.22}$$

onde utilizamos a simetria esférica do espaço dos momentos ($d\vec{p} = 4\pi|\vec{p}|^2 d|\vec{p}|$) e definimos $\Gamma_1 \equiv \Gamma\left(m_1\right)$ o qual representa a largura de decaimento da partícula 1 no seu referencial de repouso.

APÊNDICE D – Temperatura de N_1 na igualdade radiação-matéria

Nós iremos checar aqui quando N_1 produzido termicamente e não termicamente se tornam não-relativístico podendo contribuir para o ΔN_{eff} no período da CMB. Seguindo [15, 100], o momento de N_1 produzido não termicamente $p_{N_1}^{NT}$ através do decaimento de N_2 sofre um *redshift*

$$p_{N_1}^{NT}(T) = |p_{N_1}^{NT}(T_D)| \frac{a_D}{a(T)}, \tag{D.1}$$

onde a_D é o fator de escala no momento do decaimento e $p_{N_1}^{NT}(T_D)$ é o momento no instante em que N_1 não-térmico é produzido. Assumindo que $m_{N_2} \gg m_{N_1}, m_{e,\mu,\nu_e,\nu_\mu}$, o que implica em

$$|p_{N_1}^{NT}(T_D)| \simeq \frac{m_{N_2}}{3} \tag{D.2}$$

então,

$$p_{N_1}^{NT}(T) = \frac{m_{N_2}}{3} \frac{a_D}{a(T)}. \tag{D.3}$$

Nós assumimos que N_1 produzido via decaimento se torna não-relativístico a alguma temperatura T_{nr}, associado ao fator de escala a_{nr}. Isto acontece quando $p_{N_1}^{NT}(T_{nr}) = m_{N_1}$ [100]. Então, a partir da Equação D.3 nós temos

$$m_{N_1} = \frac{m_{N_2}}{3} \frac{a_D}{a_{nr}}. \tag{D.4}$$

Nós podemos representar o *redshift* quando N_1 não-térmico se torna não-relativístico por

$$Z_{nr}^{NT} + 1 \equiv \frac{a_0}{a_{nr}} = \frac{a_0}{a_D} \frac{a_D}{a_{nr}}. \tag{D.5}$$

Para um universo dominado por radiação a temperatura sofre um *redshift* de acordo com $T = T_0 \times a_0/a$ e usando a Equação D.4 nós obtemos

$$Z_{nr}^{NT} + 1 = \frac{3m_{N_1}}{m_{N_2}} \frac{T_D}{T_0} \left(\frac{g_s(T_D)}{g_s(T_0)} \right)^{1/3}, \tag{D.6}$$

onde,

$$T_D \simeq T_{RH} = 116MeV \ (1+\alpha)^{1/2} \left(\frac{70}{g_e(T_{RH})} \right)^{1/4} \left(\frac{m_{N_2}}{100GeV} \right)^{5/2} \left(\frac{10^6 GeV}{M_{W'}} \right)^2. \tag{D.7}$$

Como um resultado da Equação D.6 nós obtemos que N_1 produzido não termicamente se torna não-relativístico a temperaturas $\mathcal{O}(eV)$ para um grande intervalo de valores de α e então contribui para N_{eff}.

Por outro lado, o valor do *redshift* do instante em que N_1 produzido termicamente se torna não-relativístico é dado por

$$Z_{nr}^{T}+1=\frac{a_0}{a_{nr}}=\frac{a_0}{a_f}\frac{a_f}{a_{nr}}\,, \tag{D.8}$$

onde a_f representa o fator de escala correspondente ao instante do *freeze-out* de N_1, a uma temperatura T_f. O momento do N_1 térmico sofre um *redshift*

$$p_{N_1}^{T}\left(t\right) \;=\; T_f\frac{a_f}{a\left(t\right)}\,. \tag{D.9}$$

Entretanto, nós devemos notar que como o *freeze-out* de N_1 ocorre antes do decaimento de N_2, então ele sofre a influência da variação da entropia do banho térmico Δ, implicando que N_1 térmico irá ser mais "frio" do que as partículas do MP em equilíbrio [51]

$$\frac{a_f}{a}\frac{T_f}{T}=\left(\frac{1}{\Delta}\frac{g_s(T)}{g_s(T_f)}\right)^{1/3}\,, \tag{D.10}$$

onde a e T representam o fator de escala e a temperatura para alguma momento após o decaimento de N_2. Como N_1 não-térmico é produzido durante a injeção de entropia devido ao decaimento de N_2 nós não consideramos o Δ no tratamento para o N_1 não-térmico.

Como N_1 térmico se torna não-relativístico quando $p_{N_1}^{T}\sim m_{N_1}$, então a partir da Equação D.9 e da Equação D.10, nós podemos reescrever a Equação D.8 como

$$Z_{nr}^{T}+1=\frac{m_{N_1}}{T_0}\left(\Delta\frac{g_s\left(T_f\right)}{g_s\left(T_0\right)}\right)^{1/3}\,. \tag{D.11}$$

O parâmetro Δ tem um papel importante para o valor de Z_{nr}^{T}. Para $m_{N_1}=2.0$ keV e para algum α existe apenas um único valor de Δ que consegue reproduzir N_1 como ME, por exemplo para $\alpha=0$ nós obtemos numericamente que precisamos de $\Delta\simeq 50$ para obter $\Omega_{N_1}h^2=0.12$. Como discutimos na seção 5.6, se aumentarmos o valor de α nós diminuímos a abundância da componente não-térmica de N_1 o que implica que precisamos diminuir Δ com o propósito de obter N_1 como ME. Então, conseguimos obter um limite inferior de Z_{nr}^{T} para $m_{N_1}=2.0$ keV se tomarmos o cenário para o menor valor de Δ permitido. Este cenário pode ser reproduzido se assumirmos que N_1 é produzido apenas via *freeze-out* ou se assumirmos que α é muito grande que a componente não-térmica se torna irrelevante. Nesses casos concluímos que o menor valor de Δ que produz a densidade de relíquia correta para N_1 é $\Delta\simeq 19.0$, assumindo que $\Omega_{N_1}^{0}h^2\Big|_{\text{não-térmica}}=0$

$$\frac{\Omega_{N_1}^{0}h^2}{0.12}\simeq\left(\frac{m_{N_1}}{2\text{keV}}\right)\left(\frac{19.0}{\Delta}\right)\,, \tag{D.12}$$

onde tomamos $g_s(T_f)=100$. Para $\Delta=19.0$ obtemos $Z_{NT}^{T}=6.9\times10^{7}\gg Z_e$, onde $Z_e\simeq 3365$ é o *redshift* do instante de igualdade radiação-matéria. Este é um resultado importante, pois mostra que o N_1 produzido via *freeze-out* e consequentemente diluído através do decaimento de N_2 se torna não-relativístico antes do período de igualdade radiação-matéria.

APÊNDICE E – Cálculo do ΔN_{eff}

Aqui vamos obter a Equação 5.26. Para uma temperatura $T \lesssim 0.5$ MeV só os fótons (γ), os neutrinos do MP (ν) e o N_1 não-térmico contribuem para a densidade de energia de radiação do universo, então, podemos representar a densidade de energia de radiação nesta época por $\rho_R = \rho_\gamma + N_\nu^{SM}\rho_\nu + \rho_{N_1}$. A densidade de energia para uma partícula relativística é dada por

$$\rho_R = \begin{cases} g\dfrac{7}{8}\dfrac{\pi^2}{30}T^4 \text{ , Fermi-Dirac} \\ g\dfrac{\pi^2}{30}T^4 \text{ , Bose-Einstein} \end{cases} \tag{E.1}$$

Como discutimos na seção 5.5, podemos escrever a densidade de energia do N_1 não-térmico em função da densidade de energia de N_2 no instante em que N_1 foi produzido (em T_{RH}) da seguinte forma $\rho_{N_1} = f_{NT} \cdot \rho_{N_2}(T_{RH})$, com f_{NT} dado pela Equação 5.21. De acordo com [31, 57], entre a época que ρ_{N_2} começou a dominar a densidade de energia do universo até o instante do seu decaimento (em T_{RH}) a radiação produzida pelo decaimento de N_2 é maior que a densidade de energia de radiação antes do decaimento, então, nós podemos assumir que $\rho_{N_2}(T_{RH}) \simeq \rho_R(T_{RH})$. Como N_1 produzido via decaimento de N_2 não termaliza com o banho térmico, sua densidade de energia sofre apenas um *redshift*. Sendo assim, nós podemos escrever a densidade de energia de radiação como

$$\rho_R = \frac{\pi^2}{30}T^4\left[g_\gamma + \frac{7}{8}g_\nu\left(\frac{T_\nu}{T}\right)^4\overbrace{\left[N_\nu^{SM} + f_{NT}\cdot\frac{g_e(T_{RH})}{g_\nu}\frac{8}{7}\left(\frac{T}{T_\nu}\right)^4\left(\frac{T_{N_1}^{RH}}{T}\right)^4\right]}^{N_{eff}}\right], \tag{E.2}$$

onde T_ν representa a temperatura dos neutrinos do MP e $T_{N_1}^{RH}$ é a temperatura de N_1 no momento de sua produção (onde $T_{N_1}^{RH} = T_{RH}$ no instante de sua produção, após este instante $T_{N_1}^{RH}$ sofre um *redshift*). Como $g_\nu = 2$, $T/T_\nu = (11/4)^{1/3}$ [31] e usando o valor de f_{NT} dado pela Equação 5.21 nós podemos obter ΔN_{eff} da Equação E.2

$$\Delta N_{eff} = \frac{1}{3}(1+\alpha)^{-1}\cdot g_e(T_{RH})\frac{4}{7}\left(\frac{11}{4}\right)^{4/3}\left(\frac{T_{N_1}^{RH}}{T}\right)^4. \tag{E.3}$$

Entretanto nós gostaríamos de saber o valor de ΔN_{eff} na época de igualdade radiação-matéria T_e. Como a temperatura de N_1 sofre um *redshift* após sua produção, nós iremos representar a temperatura de N_1 na igualdade por $T_{N_1}^e = T_{N_1}^{RH} \times a_{RH}/a_e$. Da conservação da entropia nós temos $g_s(T_{RH})T_{RH}^3 a_{RH} = g_s(T_e)T_e^3 a_e^3$, então

$$\frac{1}{T_e^3}\left(\overbrace{T_{N_1}^{RH}\frac{a_{RH}}{a_e}}^{T_{N_1}^e}\right)^3 = \frac{g_s(T_e)}{g_s(T_{RH})}, \tag{E.4}$$

e nós obtemos

$$\Delta N_{eff} = \frac{4}{7}\left(\frac{11}{4}\right)^{4/3}\frac{1}{3}\left(1+\alpha\right)^{-1}\left(\frac{g^4_{s,igualdade}}{g_{s,RH}}\right)^{1/3} . \tag{E.5}$$

Referências

1 DUTRA, M. et al. A model for mixed warm and hot right-handed neutrino dark matter. 4 2021.

2 ZWICKY, F. On the Masses of Nebulae and of Clusters of Nebulae. *Astrophys. J.*, v. 86, p. 217–246, 1937.

3 LEE, B. W.; WEINBERG, S. Cosmological lower bound on heavy-neutrino masses. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 39, p. 165–168, Jul 1977. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.39.165>.

4 MILGROM, M. A Modification of the Newtonian dynamics as a possible alternative to the hidden mass hypothesis. *Astrophys. J.*, v. 270, p. 365–370, 1983.

5 CLOWE, D. et al. A direct empirical proof of the existence of dark matter. *Astrophys. J. Lett.*, v. 648, p. L109–L113, 2006.

6 KLYPIN, A.; PRADA, F. Testing gravity with motion of satellites around galaxies: Newtonian gravity against Modified Newtonian Dynamics. *Astrophys. J.*, v. 690, p. 1488–1496, 2009.

7 LYUBIMOV, V. A. et al. An Estimate of the electron-Neutrino Mass from the beta Spectrum of Tritium in the Valine Molecule. *Phys. Lett. B*, v. 94, p. 266–268, 1980.

8 White, S. D. M.; Frenk, C. S.; Davis, M. Clustering in a neutrino-dominated universe. , v. 274, p. L1–L5, nov. 1983.

9 STEIGMAN, G.; TURNER, M. S. Cosmological constraints on the properties of weakly interacting massive particles. *Nuclear Physics B*, v. 253, p. 375–386, 1985. ISSN 0550-3213. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0550321385905371>.

10 MOORE, B. et al. Cold collapse and the core catastrophe. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, v. 310, p. 1147–1152, 1999.

11 FALL, S. M.; EFSTATHIOU, G. Formation and rotation of disc galaxies with haloes. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, v. 193, n. 2, p. 189–206, 11 1980. ISSN 0035-8711. Disponível em: <https://doi.org/10.1093/mnras/193.2.189>.

12 SOMMER-LARSEN, J.; DOLGOV, A. Formation of disk galaxies: warm dark matter and the angular momentum problem. *Astrophys. J.*, v. 551, p. 608–623, 2001.

13 BODE, P.; OSTRIKER, J. P.; TUROK, N. Halo formation in warm dark matter models. *Astrophys. J.*, v. 556, p. 93–107, 2001.

14 BERTONE, G.; TAIT M. P., T. A new era in the search for dark matter. *Nature*, v. 562, n. 7725, p. 51–56, 2018.

15 BORGANI, S.; MASIERO, A.; YAMAGUCHI, M. Light gravitinos as mixed dark matter. *Phys. Lett. B*, v. 386, p. 189–197, 1996.

16 BERTONE, G.; HOOPER, D. History of dark matter. *Rev. Mod. Phys.*, v. 90, n. 4, p. 045002, 2018.

17 Rubin, V. C.; Ford W. KENT, J. Rotation of the Andromeda Nebula from a Spectroscopic Survey of Emission Regions. , v. 159, p. 379, fev. 1970.

18 SILK, J. Cosmology and structure formation. *Nuclear Physics B - Proceedings Supplements*, v. 81, p. 3–10, 2000. ISSN 0920-5632. Proceedings of the International Workshop on Particles in Astrophysics and Cosmology: From Theory to Observation. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0920563299008518>.

19 TANABASHI, M. et al. Review of particle physics. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 98, p. 030001, Aug 2018. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.98.030001>.

20 van Albada, T. S. et al. Distribution of dark matter in the spiral galaxy NGC 3198. , v. 295, p. 305–313, ago. 1985.

21 BUGG, D. Mond — a review. *Canadian Journal of Physics*, v. 93, n. 2, p. 119–125, 2015. Disponível em: <https://doi.org/10.1139/cjp-2014-0057>.

22 Kochanek, C. S. et al. Clusters of Galaxies in the Local Universe. , v. 585, n. 1, p. 161–181, mar. 2003.

23 VIKHLININ, A. et al. Chandra sample of nearby relaxed galaxy clusters: Mass, gas fraction, and mass-temperature relation. *Astrophys. J.*, v. 640, p. 691–709, 2006.

24 DODELSON, S. *Modern Cosmology*. Amsterdam: Academic Press, 2003. ISBN 978-0-12-219141-1.

25 BURLES, S. et al. Sharpening the predictions of big-bang nucleosynthesis. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 82, p. 4176–4179, May 1999. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.82.4176>.

26 AKRAMI, Y. et al. Planck 2018 results. X. Constraints on inflation. *Astron. Astrophys.*, v. 641, p. A10, 2020.

27 Paczynski, B. Gravitational Microlensing by the Galactic Halo. , v. 304, p. 1, maio 1986.

28 LASSERRE, T. Not enough stellar mass machos in the galactic halo. *Astron. Astrophys.*, v. 355, p. L39–L42, 2000.

29 TISSERAND, P. et al. Limits on the Macho Content of the Galactic Halo from the EROS-2 Survey of the Magellanic Clouds. *Astron. Astrophys.*, v. 469, p. 387–404, 2007.

30 FUKUGITA, M.; HOGAN, C. J.; PEEBLES, P. J. E. The Cosmic baryon budget. *Astrophys. J.*, v. 503, p. 518, 1998.

31 KOLB, E. W.; TURNER, M. S. *The Early Universe*. [S.l.: s.n.], 1990. v. 69. ISBN 978-0-201-62674-2.

32 HARRISON, E. *Cosmology. The Science of the Universe*. [S.l.: s.n.], 2002. v. 34. ISBN 978-0521661485.

33 WEISSTEIN, E. W. *"Fermi-Dirac Distribution."*. (Accessed: 2021-07-30). Disponível em: <https://mathworld.wolfram.com/Fermi-DiracDistribution.html>.

34 WEISSTEIN, E. W. *"Bose-Einstein Distribution."*. (Accessed: 2021-07-30). Disponível em: <https://mathworld.wolfram.com/Bose-EinsteinDistribution.html>.

35 WEISSTEIN, E. W. *"Polylogarithm."*. (Accessed: 2021-07-30). Disponível em: <https://mathworld.wolfram.com/Polylogarithm.html>.

36 CHOI, K.; CHOI, K.-Y.; SHIN, C. S. Dark radiation and small-scale structure problems with decaying particles. *Phys. Rev. D*, v. 86, p. 083529, 2012.

37 MANGANO, G.; SERPICO, P. D. A robust upper limit on N_{eff} from BBN, circa 2011. *Phys. Lett. B*, v. 701, p. 296–299, 2011.

38 FROUSTEY, J.; PITROU, C.; VOLPE, M. C. Neutrino decoupling including flavour oscillations and primordial nucleosynthesis. *JCAP*, v. 12, p. 015, 2020.

39 AGHANIM, N. et al. Planck 2018 results. VI. Cosmological parameters. *Astron. Astrophys.*, v. 641, p. A6, 2020.

40 FIELDS, B. D. et al. Big-Bang Nucleosynthesis after Planck. *JCAP*, v. 03, p. 010, 2020. [Erratum: JCAP 11, E02 (2020)].

41 MUKHANOV, V. *Physical Foundations of Cosmology*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2005.

42 BRINGMANN, T.; HOFMANN, S. Thermal decoupling of WIMPs from first principles. *JCAP*, v. 04, p. 016, 2007. [Erratum: JCAP 03, E02 (2016)].

43 HALL, L. J. et al. Freeze-In Production of FIMP Dark Matter. *JHEP*, v. 03, p. 080, 2010.

44 BERNSTEIN, J.; BROWN, L. S.; FEINBERG, G. Cosmological heavy-neutrino problem. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 32, p. 3261–3267, Dec 1985. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.32.3261>.

45 GONDOLO, P.; GELMINI, G. Cosmic abundances of stable particles: Improved analysis. *Nucl. Phys. B*, v. 360, p. 145–179, 1991.

46 EDSJO, J.; GONDOLO, P. Neutralino relic density including coannihilations. *Phys. Rev. D*, v. 56, p. 1879–1894, 1997.

47 FENG, J. L.; KUMAR, J. The WIMPless Miracle: Dark-Matter Particles without Weak-Scale Masses or Weak Interactions. *Phys. Rev. Lett.*, v. 101, p. 231301, 2008.

48 BOEHM, C.; DOLAN, M. J.; MCCABE, C. A Lower Bound on the Mass of Cold Thermal Dark Matter from Planck. *JCAP*, v. 08, p. 041, 2013.

49 GRIEST, K.; KAMIONKOWSKI, M. Unitarity Limits on the Mass and Radius of Dark Matter Particles. *Phys. Rev. Lett.*, v. 64, p. 615, 1990.

50 PROFUMO, S. *An Introduction to Particle Dark Matter*. WORLD SCIENTIFIC (EUROPE), 2017. Disponível em: <https://www.worldscientific.com/doi/abs/10.1142/q0001>.

51 PATWARDHAN, A. V. et al. Diluted equilibrium sterile neutrino dark matter. *Phys. Rev. D*, v. 92, n. 10, p. 103509, 2015.

52 SELJAK, U. et al. Can sterile neutrinos be the dark matter? *Phys. Rev. Lett.*, v. 97, p. 191303, 2006.

53 BOYARSKY, A.; RUCHAYSKIY, O.; IAKUBOVSKYI, D. A Lower bound on the mass of Dark Matter particles. *JCAP*, v. 03, p. 005, 2009.

54 VIEL, M. et al. Warm dark matter as a solution to the small scale crisis: New constraints from high redshift Lyman-α forest data. *Phys. Rev. D*, v. 88, p. 043502, 2013.

55 BANIK, N. et al. Probing the nature of dark matter particles with stellar streams. *JCAP*, v. 07, p. 061, 2018.

56 EVANS, J. A. et al. Light Dark Matter from Entropy Dilution. *JHEP*, v. 02, p. 151, 2020.

57 SCHERRER, R. J.; TURNER, M. S. Decaying Particles Do Not Heat Up the Universe. *Phys. Rev. D*, v. 31, p. 681, 1985.

58 COSME, C. et al. Neutrino Portal to FIMP Dark Matter with an Early Matter Era. *JHEP*, v. 03, p. 026, 2021.

59 ARIAS, P. et al. New opportunities for axion dark matter searches in nonstandard cosmological models. 7 2021.

60 ARIAS, P. et al. Reconstructing Non-standard Cosmologies with Dark Matter. *JCAP*, v. 10, p. 047, 2019.

61 BEZRUKOV, F.; HETTMANSPERGER, H.; LINDNER, M. keV sterile neutrino Dark Matter in gauge extensions of the Standard Model. *Phys. Rev. D*, v. 81, p. 085032, 2010.

62 HARIGAYA, K.; KAWASAKI, M. QCD axion dark matter from long-lived domain walls during matter domination. *Phys. Lett. B*, v. 782, p. 1–5, 2018.

63 BARENBOIM, G.; PARK, W.-I. Lepton number asymmetries and the lower bound on the reheating temperature. *JCAP*, v. 12, p. 037, 2017.

64 SALAS, P. F. de et al. Bounds on very low reheating scenarios after Planck. *Phys. Rev. D*, v. 92, n. 12, p. 123534, 2015.

65 HASEGAWA, T. et al. MeV-scale reheating temperature and thermalization of oscillating neutrinos by radiative and hadronic decays of massive particles. *JCAP*, v. 12, p. 012, 2019.

66 KAWASAKI, M.; KOHRI, K.; SUGIYAMA, N. MeV scale reheating temperature and thermalization of neutrino background. *Phys. Rev. D*, v. 62, p. 023506, 2000.

67 KAWASAKI, M.; KOHRI, K.; SUGIYAMA, N. Cosmological constraints on late time entropy production. *Phys. Rev. Lett.*, v. 82, p. 4168, 1999.

68 FOOT, R.; LONG, H. N.; TRAN, T. A. $SU(3)_L \otimes U(1)_N$ and $SU(4)_L \otimes U(1)_N$ gauge models with right-handed neutrinos. *Phys. Rev. D*, v. 50, n. 1, p. R34–R38, 1994.

69 SINGER, M.; VALLE, J. W. F.; SCHECHTER, J. Canonical neutral-current predictions from the weak-electromagnetic gauge group su(3) × u(1). *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 22, p. 738–743, Aug 1980. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.22.738>.

70 DIAS, A. G.; PIRES, C. A. de S.; SILVA, P. S. Rodrigues da. Naturally light right-handed neutrinos in a 3-3-1 model. *Phys. Lett. B*, v. 628, p. 85–92, 2005.

71 BELYAEV, A.; CHRISTENSEN, N. D.; PUKHOV, A. CalcHEP 3.4 for collider physics within and beyond the Standard Model. *Comput. Phys. Commun.*, v. 184, p. 1729–1769, 2013.

72 LONG, H. N. The 331 model with right handed neutrinos. *Phys. Rev. D*, v. 53, p. 437–445, 1996.

73 GRIEST, K.; SECKEL, D. Three exceptions in the calculation of relic abundances. *Phys. Rev. D*, v. 43, p. 3191–3203, 1991.

74 HAHN, T. CUBA: A Library for multidimensional numerical integration. *Comput. Phys. Commun.*, v. 168, p. 78–95, 2005.

75 FULLER, G. M.; KISHIMOTO, C. T.; KUSENKO, A. Heavy sterile neutrinos, entropy and relativistic energy production, and the relic neutrino background. 10 2011.

76 CAO, Q.-H.; ZHANG, D.-M. Collider Phenomenology of the 3-3-1 Model. 11 2016.

77 COUTINHO, Y. A.; AES, V. S. G.; NEPOMUCENO, A. A. Bounds on Z' from 3-3-1 model at the LHC energies. *Phys. Rev. D*, v. 87, n. 11, p. 115014, 2013.

78 COGOLLO, D. et al. Deep learning analysis of the inverse seesaw in a 3-3-1 model at the LHC. *Phys. Lett. B*, v. 811, p. 135931, 2020.

79 MELO, T. B. de et al. Rare kaon decay to missing energy: Implications of the NA62 result for a Z model. *Phys. Rev. D*, v. 103, n. 11, p. 115001, 2021.

80 ABAZAJIAN, K. et al. CMB-S4 Science Case, Reference Design, and Project Plan. 7 2019.

81 MERLE, A.; NIRO, V.; SCHMIDT, D. New Production Mechanism for keV Sterile Neutrino Dark Matter by Decays of Frozen-In Scalars. *JCAP*, v. 03, p. 028, 2014.

82 LIN, W. B. et al. Nonthermal production of WIMPs and the subgalactic structure of the universe. *Phys. Rev. Lett.*, v. 86, p. 954, 2001.

83 LOVELL, M. R. et al. The haloes of bright satellite galaxies in a warm dark matter universe. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, v. 420, n. 3, p. 2318–2324, 02 2012. ISSN 0035-8711. Disponível em: <https://doi.org/10.1111/j.1365-2966.2011.20200.x>.

84 CHATTERJEE, A. et al. Ruling out 3 keV warm dark matter using 21 cm EDGES data. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, v. 487, n. 3, p. 3560–3567, 2019.

85 DAYAL, P. et al. Reionization and Galaxy Formation in Warm Dark Matter Cosmologies. *Astrophys. J.*, v. 836, n. 1, p. 16, 2017.

86 SCHNEIDER, A. Constraining noncold dark matter models with the global 21-cm signal. *Phys. Rev. D*, v. 98, n. 6, p. 063021, 2018.

87 WU, K. K. S.; LAHAV, O.; REES, M. J. The large-scale smoothness of the Universe. *Nature*, v. 397, p. 225–230, 1999.

88 SOLTIS, J.; CASERTANO, S.; RIESS, A. G. The Parallax of ω Centauri Measured from Gaia EDR3 and a Direct, Geometric Calibration of the Tip of the Red Giant Branch and the Hubble Constant. *Astrophys. J. Lett.*, v. 908, n. 1, p. L5, 2021.

89 BERINGER, J. et al. Review of particle physics. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 86, p. 010001, Jul 2012. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.86.010001>.

90 PENZIAS, A. A.; WILSON, R. W. A Measurement of excess antenna temperature at 4080-Mc/s. *Astrophys. J.*, v. 142, p. 419–421, 1965.

91 GAMOW, G. The origin of elements and the separation of galaxies. *Phys. Rev.*, American Physical Society, v. 74, p. 505–506, Aug 1948. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.74.505.2>.

92 ALPHER, R. A.; HERMAN, R. C. On the relative abundance of the elements. *Phys. Rev.*, American Physical Society, v. 74, p. 1737–1742, Dec 1948. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.74.1737>.

93 RYDEN, B. *Introduction to Cosmology*. 2. ed. [S.l.]: Cambridge University Press, 2016.

94 COC, A.; UZAN, J.-P.; VANGIONI, E. Standard Big-Bang Nucleosynthesis after Planck. 7 2013.

95 ILIADIS, C.; COC, A. Thermonuclear reaction rates and primordial nucleosynthesis. *Astrophys. J.*, v. 901, n. 2, p. 127, 2020.

96 FIELDS, B. D. The primordial lithium problem. *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.*, v. 61, p. 47–68, 2011.

97 Bond, J. R.; Szalay, A. S. The collisionless damping of density fluctuations in an expanding universe. , v. 274, p. 443–468, nov. 1983.

98 BOND, J. R.; EFSTATHIOU, G.; SILK, J. Massive neutrinos and the large-scale structure of the universe. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 45, p. 1980–1984, Dec 1980. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.45.1980>.

99 ABRAMOWITZ, M. *Handbook of Mathematical Functions, With Formulas, Graphs, and Mathematical Tables,*. USA: Dover Publications, Inc., 1974. ISBN 0486612724.

100 HASENKAMP, J.; KERSTEN, J. Dark radiation from particle decay: cosmological constraints and opportunities. *JCAP*, v. 08, p. 024, 2013.