

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Uma introdução à álgebra de Lipschitz

Manoel Felipe da Silva Neto

João Pessoa - PB
Novembro de 2021

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Uma introdução à álgebra de Lipschitz

por

Manoel Felipe da Silva Neto

sob a orientação do

Prof. Dr. Joedson Silva dos Santos

João Pessoa - PB
Novembro de 2021

Catálogo na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

S586i Silva Neto, Manoel Felipe da.
Uma introdução à álgebra de Lipschitz / Manoel Felipe da Silva Neto. - João Pessoa, 2021.
107 f.

Orientação: Joedson Silva dos Santos.
Dissertação (Mestrado) - UFPB/CCEN.

1. Análise funcional. 2. Funções Lipschitz. 3. Espaço de Arens-Eells. 4. Ideal de operadores 2- Lipschitz. I. Santos, Joedson Silva dos. II. Título.

UFPB/BC

CDU 517.98(043)

Uma introdução à álgebra de Lipschitz

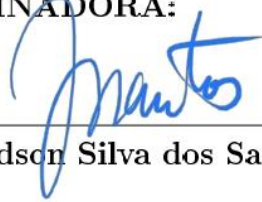
Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Federal da Paraíba, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Joedson Silva dos Santos

Área de concentração: Análise

Aprovado em: 26 / 11 / 2021

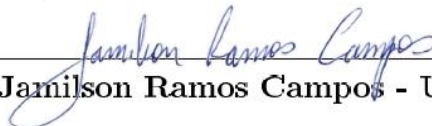
COMISSÃO EXAMINADORA:



Prof. Dr. Joedson Silva dos Santos - UFPB (Orientador)



Prof. Dr. Daniel Marinho Pellegrino - UFPB (Interno)



Prof. Dr. Jamilson Ramos Campos - UFPB (Interno)



Prof. Dr. Nacib André Gurgel e Albuquerque - UFPB (Interno)



Prof. Dr. Cleon da Silva Barroso - UFC (Externo)

AGRADECIMENTOS

A DEUS por ter me dado saúde, força e capacidade para estudar e conseguir alcançar meus objetivos.

A minha vó, Maria José Soares da Silva, por ter cuidado de mim sempre com muito carinho, amor e educação.

A minha noiva, Maria Thays Fernandes da Silva, pelo companheirismo, paciência, dedicação e por me apoiar e estar presente ao meu lado em todos os momentos bons e ruins que passei ao longo desses dois anos.

Aos meus pais, Patrícia Cristina da Silva e Reginaldo Felipe da Silva, pelo afeto, incentivo e por tudo que fizeram por mim ao longo da minha vida.

Ao meu orientador, professor Joedson Silva dos Santos, pela confiança, amizade, ajuda em todas as minhas dificuldades, ótimos conselhos e por me colocar no caminho certo da matemática.

Aos meus familiares e amigos que me incentivaram, apoiaram e estavam ao meu lado durante esses anos.

Aos professores do Departamento de Matemática da UFPB que contribuíram para a minha formação de forma direta ou indireta, com ensinamentos e dicas valiosas para a meu crescimento acadêmico e pessoal.

Aos colegas de graduação e pós-graduação pela amizade, colaboração e bons momentos e conhecimentos compartilhados. Em especial, a Renato Burity Croccia Macedo pelas dicas e sugestões valiosas.

Aos professores da banca examinadora pelas contribuições importantes e valiosas para este trabalho.

A CAPES pelo apoio financeiro.

RESUMO

O objetivo deste trabalho é apresentar um estudo sobre álgebra de Lipschitz. Inicialmente, iremos abordar as funções Lipschitz limitadas, as funções Lipschitz que preservam ponto base e o espaço de Arens-Eells. Em seguida, vamos estudar a classe dos operadores 2-Lipschitz, que podem ser vistos como uma extensão natural dos operadores bilineares contínuos para o contexto Lipschitz, e apresentar um método para obter ideais de operadores 2-Lipschitz a partir de ideais de operadores lineares. Por fim, apresentaremos alguns exemplos de ideais de operadores 2-Lipschitz.

Palavras-chaves: Funções Lipschitz, espaço de Arens-Eells, ideal de operadores 2-Lipschitz.

ABSTRACT

The aim of this work is to introduce a study about Lipschitz algebra. Initially, we will approach the bounded Lipschitz functions, Lipschitz functions which preserve the base point and Arens-Eells space. Next, we will study the class of the 2-Lipschitz operators, which can be seen as a natural extension of the continuous bilinear operators for the Lipschitz context, and we will present a method to obtain 2-Lipschitz operator ideals from linear operator ideals. At last, we will give some examples of 2-Lipschitz operator ideals.

Keywords: Lipschitz functions, Arens-Eells space, 2-Lipschitz operator ideals.

SUMÁRIO

Agradecimentos	iii
Resumo	iv
Abstract	v
Lista de Símbolos	vii
Introdução	x
1 Preliminares	1
1.1 Espaços métricos	1
1.2 Análise Funcional	5
1.3 O Produto tensorial projetivo	9
2 Espaços de funções Lipschitz	14
2.1 Função Lipschitz	14
2.2 Função Lipschitz a valores escalares	18
2.3 Espaços de funções Lipschitz particulares	26
2.4 O espaço de Arens-Eells	35
3 O Ideal de operadores 2-Lipschitz	45
3.1 Bi-linearização de operadores 2-Lipschitz	45
3.2 O Ideal de operadores 2-Lipschitz	58
4 Aplicações e Exemplos	70
4.1 Ideal de operadores 2-Lipschitz compactos	70
4.2 Ideal de operadores 2-Lipschitz fortemente p -somantes	74
4.3 Ideal de operadores 2-Lipschitz $(p; p_1, p_2)$ -somantes	79
4.4 Ideal de operadores 2-Lipschitz fatorável p -dominados	87
Referências Bibliográficas	93

LISTA DE SÍMBOLOS

Em todo o texto X , Y e Z representarão espaços métricos e E , F e G denotarão espaços de Banach, exceto quando houver menção em contrário. A seguir, listamos alguns símbolos utilizados neste trabalho.

- $\mathbb{N}$ denota o conjunto dos números naturais $\{1, 2, 3, \dots\}$;
- $\mathbb{Q}$ denota o conjunto dos números racionais;
- $\mathbb{R}$ denota o conjunto dos números reais;
- $\mathbb{C}$ denota o conjunto dos números complexos;
- $\mathbb{K}$ denota os corpos $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$;
- $\mathcal{M}_0$ denota a classe de todos os espaços métricos completos e pontuados;
- $\mathcal{M}_2$ denota a classe de todos os espaços métricos completos com diâmetro menor ou igual a 2;
- B_E denota a bola unitária fechada de E ;
- S_E denota a esfera unitária de E ;
- $\overline{X}$ denota o fecho de X ;
- $\mathcal{B}(X; E)$ denota o espaço das funções limitadas de X em E ;
- $L(X, Y)$ denota o espaço de todas as funções lineares de X em Y . Quando $Y = \mathbb{K}$, escrevemos o espaço $L(X, \mathbb{K})$ por X' ;
- $\mathcal{L}(X, Y)$ denota o espaço de todas as funções lineares contínuas de X em Y . No caso em que $Y = \mathbb{K}$, denotamos o espaço $\mathcal{L}(X, \mathbb{K})$ por X^* ;
- $\ell_p(E)$ denota o espaço de todas as sequências fortemente p -somáveis de E , com $1 \leq p \leq \infty$;
- $\ell_{p,w}(E)$ denota o espaço de todas as sequências fracamente p -somáveis de E , com $1 \leq p \leq \infty$;

-
- $B(X, Y; Z)$ denota o espaço de todas as aplicações bilineares de $X \times Y$ em Z . Se $Z = \mathbb{K}$, representamos apenas por $B(X, Y)$ o espaço $B(X, Y; \mathbb{K})$;
 - $\mathcal{L}(X, Y; Z)$ denota o espaço de todas as aplicações bilineares contínuas de $X \times Y$ em Z ;
 - $\mathcal{L}_{\mathcal{K}}(X, Y; Z)$ denota o espaço de todas as aplicações bilineares compactas de $X \times Y$ em Z ;
 - $X \otimes Y$ denota o produto tensorial de X e Y . Esse espaço munido com a norma projetiva $\pi(\cdot)$ é representado por $X \otimes_{\pi} Y$ que tem o completamento denotado por $X \hat{\otimes}_{\pi} Y$;
 - $Lip(X; E)$ denota o espaço das funções Lipschitz limitadas de X em E . No caso em que $E = \mathbb{K}$, escrevemos $Lip(X; \mathbb{K})$ apenas por $Lip(X)$;
 - $Lip_0(X; E)$ denota o espaço das funções Lipschitz de X em E que preservam ponto base. Se $E = \mathbb{K}$, escrevemos $Lip_0(X; \mathbb{K})$ por $Lip_0(X)$ ou simplesmente $X^{\#}$;
 - $\mathcal{M}(X)$ denota o espaço de todas as moléculas de X ;
 - $\mathcal{A}(X)$ denota o completamento do espaço normado $(\mathcal{M}(X), \|\cdot\|_{\mathcal{A}(X)})$;
 - $BLip_0(X, Y; E)$ denota o conjunto de todos os operadores 2-Lipschitz do produto cartesiano entre espaços métricos pontuados $X \times Y$ em E que satisfazem $T(x, 0) = T(0, y) = 0$ para cada $x \in X$ e $y \in Y$;
 - $\mathcal{L}$ denota a classe de todos os operadores lineares contínuos;
 - $\mathcal{I}$ denota o ideal de operadores lineares;
 - Lip_0 denota a classe de todas as aplicações Lipschitz que preservam ponto base;
 - $\mathcal{I}_{Lip}$ denota o ideal de operadores Lipschitz;
 - $\mathcal{M}$ denota o ideal de operadores multilineares;
 - $BLip_0$ denota a classe de todas as aplicações 2-Lipschitz;
 - $\mathcal{I}_{BLip}$ denota o ideal de operadores 2-Lipschitz;
 - $\mathcal{I} \circ BLip_0$ denota o ideal composição de operadores 2-Lipschitz;
 - $\mathcal{K}$ denota a classe de todos os operadores lineares contínuos compactos;
 - $BLip_{0\mathcal{K}}(X, Y; E)$ denota o espaço dos operadores 2-Lipschitz compactos de $X \times Y$ em E ;
 - $BLip_{0\mathcal{K}}$ denota o ideal de operadores 2-Lipschitz compactos;
 - $\Pi_p(E, F)$ denota o espaço das aplicações lineares absolutamente p -somantes de E em F , com $1 \leq p < \infty$;
 - $\mathcal{D}_p(E, F)$ denota o espaço dos operadores lineares Cohen fortemente p -somantes de E em F , com $1 < p \leq \infty$;

-
- $\mathcal{D}_p$ denota o ideal de operadores Cohen fortemente p -somantes;
 - $\mathcal{D}_p^L(X, E)$ denota o espaço dos operadores Lipschitz fortemente p -somantes de X em E , com $1 < p \leq \infty$;
 - $\mathcal{D}_p^2(E, F; G)$ denota o espaço dos operadores bilineares Cohen fortemente p -somantes de $E \times F$ em G , com $1 < p \leq \infty$;
 - $\mathcal{D}_p^{BL}(X, Y; E)$ denota o espaço dos operadores 2-Lipschitz fortemente p -somantes de $X \times Y$ em E , com $1 < p \leq \infty$;
 - $\mathcal{D}_p^{BL}$ denota o ideal de operadores 2-Lipschitz fortemente p -somantes, com $1 < p \leq \infty$;
 - $\Pi_{p,q}(E, F)$ denota o espaço formado pelos operadores lineares absolutamente $(p; q)$ -somantes de E em F , com $1 \leq p, q < \infty$;
 - $\Pi_p^L(X; E)$ denota o espaço das aplicações Lipschitz p -somantes de X em E , com $1 \leq p < \infty$;
 - $\mathcal{L}_{as, (p; p_1, p_2)}(E, F; G)$ denota o espaço das aplicações bilineares absolutamente $(p; p_1, p_2)$ -somantes de $E \times F$ em G , com $1 \leq p, p_1, p_2 < \infty$ e $\frac{1}{p} \leq \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}$;
 - $BL_{as, (p; p_1, p_2)}(X, Y; E)$ denota o espaço dos operadores 2-Lipschitz $(p; p_1, p_2)$ -somantes de $X \times Y$ em E , com $1 \leq p, p_1, p_2 < \infty$ e $\frac{1}{p} \leq \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}$;
 - $BL_{as, (p; p_1, p_2)}$ denota o ideal de operadores 2-Lipschitz formado pelos operadores 2-Lipschitz $(p; p_1, p_2)$ -somantes, com $1 \leq p, p_1, p_2 < \infty$ e $\frac{1}{p} \leq \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}$;
 - $\mathcal{L}_{si, p}(E, F; G)$ denota o espaço dos operadores bilineares p -semi-integrais de $E \times F$ em G , com $1 \leq p < \infty$;
 - $\mathcal{L}_{si, p}$ denota o ideal de operadores bilineares p -semi-integrais, com $1 \leq p < \infty$;
 - $BL_{f, p}(X, Y; E)$ denota o espaço dos operadores 2-Lipschitz fatorável p -dominados de $X \times Y$ em E , com $1 \leq p < \infty$;
 - $BL_{f, p}$ denota o ideal de operadores 2-Lipschitz fatorável p -dominados, com $1 \leq p < \infty$.

INTRODUÇÃO

A Análise Funcional tem com um dos principais objetos de estudo os operadores lineares contínuos entre espaços normados ou espaços de Banach. Nestas classes de operadores estão presentes duas estruturas matemáticas: a algébrica, associada aos espaços vetoriais e aos operadores lineares; e a topológica, associada aos espaços normados e às funções contínuas. O estudo destas classes de operadores torna-se ainda mais interessante quando nos restringimos as subclasses que satisfazem uma determinada propriedade de ideal. O grande número de subclasses de operadores desse tipo e a importância dessas subclasses para a Teoria de Espaços de Banach fizeram com que surgisse, na década de 60, uma nova teoria, a *teoria de ideais de operadores*, que tem como protagonista o matemático A. Pietsch. No notável livro [28], Pietsch apresenta os principais ideais de operadores. Entretanto, o mais famoso é o ideal de operadores lineares absolutamente p -somantes, que possui um enorme volume de boas propriedades, incluindo várias caracterizações surpreendentes que inspiraram e inspiram vários outros conceitos de classes de operadores lineares e não-lineares.

Estender o estudo dos operadores lineares contínuos para uma configuração mais geral é uma tarefa, no mínimo, bastante desafiadora. Por exemplo, deixando de lado a estrutura linear e trabalhando apenas com a topológica, considerando uma função $f : X \rightarrow E$ entre espaços métricos sempre teremos:

$$f \text{ Lipschitz} \Rightarrow f \text{ uniformemente contínua} \Rightarrow f \text{ contínua} \Rightarrow f \text{ contínua em um ponto},$$

e, em geral, as recíprocas dessas implicações não valem. Porém, se considerarmos f sendo um operador linear entre espaços normados é possível mostrar que essas implicações, na verdade, são equivalências. Isso mostra que, de certo modo, a estrutura algébrica enriquece o comportamento topológico.

O principal objetivo deste trabalho é estudar alguns espaços de funções Lipschitz, tais como os espaços das funções Lipschitz limitadas e das funções Lipschitz que preservam ponto base. Esses espaços têm algumas propriedades notáveis, por exemplo, eles são espaços de Banach com normas apropriadas. Uma outra propriedade interessante, e extremamente importante, é que dado um espaço métrico X é possível construir um espaço de Banach $\mathcal{A}(X)$, chamado de espaço de Arens-Eells, tal que a estrutura Lipschitz de X (das funções Lipschitz sobre X) está associada a estrutura algébrica de $\mathcal{A}(X)$ (dos operadores lineares sobre $\mathcal{A}(X)$). Tal fato é conhecido como *propriedade universal de $\mathcal{A}(X)$* . A principal referência que usamos para o estudo das funções Lipschitz é o livro *Lipschitz Algebra* [36], de N. Weaver.

Um primeiro esboço da extensão da teoria dos operadores lineares absolutamente somantes para o contexto das funções Lipschitz foi dado por Farmer e Johnson no ano de 2009, em [17]. Em 2016, uma teoria axiomática sobre ideal de operadores Lipschitz entre espaços de Banach foi desenvolvida por Achour em [5] e, em [3], para ideal de operadores Lipschitz entre espaços métricos pontuados. Esse novo ideal de operadores Lipschitz tornou-se um ponto de partida para o estudo de algumas propriedades específicas de ideais de operadores não-lineares. Tais trabalhos motivaram vários outros na tarefa de generalizar a teoria linear dos operadores somantes para o ambiente Lipschitz (veja, por exemplo, [2, 6, 11, 19, 20, 35]).

Em 2009, Dubei et. al. [16] definiu um operador 2-Lipschitz entre o produto cartesiano de dois espaços métricos pontuados e um espaço de Banach como sendo aquele que é Lipschitz em cada uma das coordenadas, fazendo uma alusão natural aos operadores bilineares. Já Sánchez-Pérez, em [33], apresentou uma definição mais adequada para operador 2-Lipschitz a valores reais (chamado de bi-forma Lipschitz) a qual está diretamente associada a uma forma bilinear contínua. Em [19], os autores estenderam a definição de Sánchez-Pérez para operadores 2-Lipschitz valorados em um espaço de Banach arbitrário e, na ocasião, apresentaram alguns exemplos e mostraram que esses operadores estão intimamente relacionados aos operadores bilineares contínuos entre espaços de Banach.

A seguir, descrevemos como o trabalho está organizado. Para facilitar a compreensão e leitura do texto, no primeiro capítulo, vamos abordar a teoria básica necessária para o desenvolvimento dos demais capítulos. Nele, exibiremos algumas definições e resultados da Análise Funcional e das Teorias de Espaços Métricos, Espaço de Banach e Produto Tensorial. Os resultados enunciados têm suas demonstrações devidamente referenciadas, baseadas principalmente em [10, 13, 22, 24, 32].

No segundo capítulo, usando como referência o livro [36], começaremos nossos estudos sobre as funções Lipschitz e provaremos alguns resultados fundamentais. Em sequência, apresentaremos os espaços das funções Lipschitz limitadas e das funções Lipschitz que preservam ponto base. Mostraremos que eles são espaços de Banach e que, em um caso particular, são isomorfos isometricamente. Para finalizar esse capítulo, apresentaremos o *espaço de Arens-Eells* $\mathcal{A}(X)$. Mostraremos que $\mathcal{A}(X)^*$ é isomorfo isometricamente ao espaço $Lip_0(X)$ e também exibiremos a principal propriedade de $\mathcal{A}(X)$, que é linearizar as aplicações Lipschitz definidas sobre X . Além das referências citadas anteriormente, também usamos [10, 24].

Para a construção do terceiro capítulo, a principal referência usada foi o artigo [19]. Iniciaremos o capítulo com a definição de operador 2-Lipschitz e mostraremos que o espaço formado por esses operadores é Banach com uma norma apropriada e também que cada operador 2-Lipschitz está relacionado de modo único com uma aplicação bilinear contínua. Deguindo os mesmos passos dos ideais de operadores lineares (ver [28]), multilineares (ver [18, 29]) e Lipschitz (ver [5]), abordaremos a definição de ideal de operadores 2-Lipschitz e exibiremos um método, chamado de *método da composição*, para construir um ideal de operadores 2-Lipschitz a partir de um ideal de operadores lineares. Esse novo ideal de operadores 2-Lipschitz é denominado de ideal de composição de operadores 2-Lipschitz e veremos que ele herda algumas propriedades do ideal de operadores lineares que o gera.

No quarto e último capítulo, apresentaremos quatro exemplos de ideais de operadores 2-Lipschitz, cada um em uma seção. Na primeira seção, falaremos dos operadores 2-Lipschitz compactos, mostrando que a classe formada por esses operadores é um ideal de composição de operadores 2-Lipschitz gerado pelo ideal de operadores lineares compactos. Na segunda seção, abordaremos os operadores 2-Lipschitz fortemente p -somantes, com

$1 < p \leq \infty$, provando que a classe desses operadores é um ideal de composição de operadores 2-Lipschitz gerado pelo o ideal de operadores lineares fortemente p -somantes. Na terceira seção, estudamos o espaço dos operadores 2-Lipschitz $(p; p_1, p_2)$ -somantes, com $1 \leq p, p_1, p_2 < \infty$ e $\frac{1}{p} \leq \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}$, e mostraremos que ele também é um ideal de operadores 2-Lipschitz. Por fim, a última seção trata do ideal de operadores 2-Lipschitz fatorável p -dominados, com $1 \leq p < \infty$. Esse capítulo foi baseado principalmente no artigo [19], mas também utilizamos muitas outras referências, a saber [1, 4, 8, 14, 15, 23, 25, 27, 29, 30, 31, 35].

CAPÍTULO 1

PRELIMINARES

Neste capítulo apresentaremos definições importantes e resultados básicos de espaços métricos e Análise Funcional que serão necessários para o desenvolvimento dos temas dos demais capítulos. Omitiremos as demonstrações, mas citaremos suas devidas referências. O presente capítulo foi construído com base nas seguintes referências [10, 13, 22, 24, 32].

1.1 Espaços métricos

Definição 1.1.1. Seja X um conjunto não vazio. Uma *métrica* em X é uma função $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$, que associa cada par ordenado de elementos $x, y \in X$ a um número real $d(x, y)$, denominado de *distância de x a y* , tal que as seguintes condições sejam satisfeitas para quaisquer $x, y, z \in X$:

- (d1) $d(x, x) = 0$;
- (d2) Se $x \neq y$, então $d(x, y) > 0$;
- (d3) $d(x, y) = d(y, x)$;
- (d4) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Definição 1.1.2. Um *espaço métrico* é um par (X, d) , onde X é um conjunto não vazio e d é uma métrica em X . Para deixar a escrita mais clara, às vezes denotaremos a métrica em X por d_X . Quando não houver dúvidas em relação a métrica d usada, escrevemos apenas o espaço métrico X .

Observação 1.1.1. Dado um espaço métrico (X, d) , podemos definir um novo espaço métrico (X, d') , com a métrica $d' : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$d'(x, y) = \min\{d(x, y), 2\}.$$

De fato, tomando quaisquer pontos $x, y, z \in X$, segue que d' é uma métrica, pois

- $d'(x, x) = \min\{d(x, x), 2\} = \min\{0, 2\} = 0$;
- Se $x \neq y$, então $d'(x, y) = \min\{d(x, y), 2\} > 0$;

- $d'(x, y) = \min\{d(x, y), 2\} = \min\{d(y, x), 2\} = d'(y, x);$
- $d'(x, z) = \min\{d(x, z), 2\} \leq \min\{d(x, y) + d(y, z), 2\}$
 $\leq \min\{d(x, y), 2\} + \min\{d(y, z), 2\} = d'(x, y) + d'(y, z).$

Abaixo vamos apresentar alguns exemplos de espaços métricos que serão usados ao longo deste trabalho.

Exemplo 1.1.1. O conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais é um dos exemplos de espaço mais importantes e sua métrica é dada por $d(x, y) = |x - y|$. No geral, o espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$ é um espaço métrico com qualquer uma das métricas abaixo, sendo os pontos $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$:

- $d_1(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$ (métrica Euclidiana);
- $d_2(x, y) = |x_1 - y_1| + \dots + |x_n - y_n|;$
- $d_3(x, y) = \max\{|x_1 - y_1|, \dots, |x_n - y_n|\}.$

Exemplo 1.1.2. Considere X um conjunto qualquer. Uma função $f : X \rightarrow \mathbb{K}$ é dita *limitada* quando podemos encontrar uma constante $M > 0$ satisfazendo $|f(x)| \leq M$ para todo $x \in X$. Denotaremos por $\mathcal{B}(X; \mathbb{K})$ o conjunto de todas as funções limitadas $f : X \rightarrow \mathbb{K}$ e definiremos uma métrica em $\mathcal{B}(X; \mathbb{K})$ pondo, para cada $f, g \in \mathcal{B}(X; \mathbb{K})$,

$$d(f, g) = \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)|. \quad (1.1)$$

Definição 1.1.3. Sejam X e Y espaços métricos. Uma função $f : X \rightarrow Y$ é dita *contínua no ponto* $x \in X$ quando, para todo $\epsilon > 0$ dado, podemos encontrar um $\delta > 0$ tal que

$$x' \in X \text{ e } d(x, x') < \delta \implies d(f(x), f(x')) < \epsilon.$$

Quando a função f é contínua em todos os pontos $x \in X$, dizemos que f *contínua*. Além disso, a função $f : X \rightarrow Y$ é dita *uniformemente contínua* se, para todo $\epsilon > 0$ dado, existe $\delta > 0$ tal que, para quaisquer pontos $x, x' \in X$,

$$d(x, x') < \delta \implies d(f(x), f(x')) < \epsilon.$$

Claramente, toda função uniformemente contínua é também contínua, pois a escolha do δ a partir do ϵ dado é independente do ponto onde se analisa a continuidade da função.

Definição 1.1.4. Dados X e Y espaços métricos. Uma *imersão isométrica* é uma função $f : X \rightarrow Y$ que satisfaz $d(f(x), f(x')) = d(x, x')$ para todos $x, x' \in X$. Chamamos de *isometria* uma imersão isométrica sobrejetiva.

Observe que uma imersão isométrica $f : X \rightarrow Y$ é sempre uniformemente contínua, já que para qualquer $\epsilon > 0$ dado, tomando $\delta = \epsilon > 0$ com $d(x, x') < \delta$ para cada $x, x' \in X$, temos

$$d(f(x), f(x')) = d(x, x') < \epsilon.$$

Além disso, toda imersão isométrica f é injetora, pois

$$f(x) = f(x') \implies 0 = d(f(x), f(x')) = d(x, x') \implies x = x'.$$

Com isso, concluímos que toda isometria é uniformemente contínua e também bijetora.

Definição 1.1.5. Considere um espaço métrico X , um ponto $x \in X$ e um subconjunto não-vazio $C \subseteq X$. Definimos a *distância do ponto x ao subconjunto C* como o número real

$$d(x, C) = \inf_{y \in C} d(x, y).$$

Além disso, o *diâmetro* de um espaço métrico X é definido por

$$\text{diam}(X) = \sup_{x, y \in X} d(x, y).$$

Proposição 1.1.1. *Seja X um espaço métrico. Dados $x, y \in X$ e um subconjunto não-vazio $C \subseteq X$, tem-se:*

$$|d(x, C) - d(y, C)| \leq d(x, y).$$

Demonstração. Ver [24, Proposição 3, Página 21]. □

Agora, vamos abordar as definições de sequência de Cauchy e de espaço métrico completo. Sugerimos para mais detalhes sobre esses assuntos o livro [24, Capítulo 7].

Definição 1.1.6. Uma sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ em um espaço métrico X é chamada de *sequência de Cauchy* quando, dado qualquer $\epsilon > 0$, podemos encontrar $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$m, n \geq n_0 \implies d(x_m, x_n) < \epsilon.$$

Definição 1.1.7. Dizemos que um espaço métrico X é *completo* quando toda sequência de Cauchy em X converge para algum elemento de X .

Sabemos que nem todo espaço métrico X é completo. Por exemplo, o conjunto dos números racionais $\mathbb{Q}$ com a métrica induzida dos números reais não é completo. Por isso, surge uma questão: É possível completar qualquer espaço métrico, ou seja, podemos relacionar um espaço métrico que não é completo com um espaço métrico completo? Essa pergunta tem resposta positiva e, ainda, o tal espaço métrico completo é único a menos de uma isometria.

Definição 1.1.8. Seja X um espaço métrico. O *completamento* de X é o par $(\widehat{X}, \varphi)$, onde $\widehat{X}$ é um espaço métrico completo e $\varphi : X \longrightarrow \widehat{X}$ é uma imersão isométrica cuja imagem $\varphi(X)$ é densa em $\widehat{X}$, ou seja, $\overline{\varphi(X)} = \widehat{X}$. Para simplificar a notação, omitiremos a imersão isométrica φ e escrevemos apenas $\widehat{X}$ para representar o completamento de X .

Observação 1.1.2. Por X e $\varphi(X)$ serem isométricos, geralmente considera-se $X \subset \widehat{X}$, identificando-se X com sua imagem $\varphi(X)$. Neste caso, obtemos $\overline{X} = \widehat{X}$.

Exemplo 1.1.3. $\mathbb{R}$ é o completamento de $\mathbb{Q}$, pois $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$. Se X é um espaço métrico completo e A é um subconjunto de X , então $\overline{A}$ em X é o completamento de A .

Proposição 1.1.2 (Existência do completamento). *Todo espaço métrico possui um completamento.*

Demonstração. Ver [24, Proposição 13, Página 201] □

Proposição 1.1.3 (Unicidade do completamento). *Sejam $(\widehat{X}, \varphi)$ e $(\widetilde{X}, \phi)$ dois completamentos do mesmo espaço métrico X . Então, existe uma única isometria $f : \widehat{X} \rightarrow \widetilde{X}$ tal que $f \circ \varphi = \phi$.*

Demonstração. Ver [24, Proposição 14, Página 201] □

Definição 1.1.9. Dado qualquer espaço métrico X , podemos fixar arbitrariamente um ponto $e \in X$, o qual é chamado de ponto base de X e denotado por e_X quando for necessário. O par (X, e_X) é chamado de *espaço métrico pontuado*. Por simplicidade, vamos omitir o ponto base e dizer apenas que X é um espaço métrico pontuado.

Vamos denotar por $\mathcal{M}_0$ a classe de todos os espaços métricos completos e pontuados, e também denotaremos por $\mathcal{M}_2$ a classe de todos os espaços métricos completos com diâmetro menor ou igual a 2.

Definição 1.1.10. Uma *norma* em um espaço vetorial E é uma função

$$\begin{aligned} \|\cdot\| : E &\longrightarrow [0, +\infty) \\ x &\longmapsto \|x\| \end{aligned}$$

que associa cada vetor $x \in E$ a número real $\|x\|$, denominado de norma de x , tal que para quaisquer $x, y \in E$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ são satisfeitas as seguintes propriedades:

$$(N1) \quad \|x\| \geq 0 \text{ e } \|x\| = 0 \iff x = 0;$$

$$(N2) \quad \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|;$$

$$(N3) \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

Dizemos que a função $\|\cdot\|$ é uma *semi-norma* quando satisfaz os itens (N2) e (N3) acima e também $\|x\| \geq 0$.

Definição 1.1.11. Um *espaço vetorial normado* é um par $(E, \|\cdot\|)$, onde E é um espaço vetorial e $\|\cdot\|$ é uma norma em E . Quando não existir o risco de ambiguidade na notação, vamos denotar este espaço simplesmente por E .

Um espaço normado E é um espaço métrico com a métrica definida por

$$d(x, y) = \|x - y\|,$$

com $x, y \in E$. Neste caso, dizemos que a métrica é induzida pela norma $\|\cdot\|$ e toda a teoria sobre espaços métricos continua válida para espaços normados.

Definição 1.1.12. Um espaço normado E é dito *espaço de Banach* quando ele for completo com a métrica induzida pela norma.

Todo espaço vetorial normado E sempre será visto como um espaço métrico pontuado considerando a métrica induzida pela norma e o ponto base como sendo o elemento neutro do espaço, ou seja, $e_E = 0$.

Exemplo 1.1.4. Sejam X um conjunto não-vazio e E um espaço de Banach. O conjunto $\mathcal{B}(X; E)$ de todas as funções limitadas $f : X \longrightarrow E$, que é um espaço vetorial com as operações usuais de funções, é um espaço de Banach com a norma dada por

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} \|f(x)\|.$$

Note que a métrica (1.1) em $\mathcal{B}(X, \mathbb{K})$ é induzida pela norma $\|\cdot\|_\infty$.

Exemplo 1.1.5. Sejam $(E_1, \|\cdot\|_{E_1}), \dots, (E_n, \|\cdot\|_{E_n})$ espaços vetoriais normados. Então, são alguns exemplos de norma sobre o espaço produto cartesiano $E_1 \times \dots \times E_n$:

- $\|(x_1, \dots, x_n)\|_1 = \|x_1\|_{E_1} + \dots + \|x_n\|_{E_n}$;
- $\|(x_1, \dots, x_n)\|_2 = (\|x_1\|_{E_1}^2 + \dots + \|x_n\|_{E_n}^2)^{\frac{1}{2}}$;
- $\|(x_1, \dots, x_n)\|_\infty = \max\{\|x_1\|_{E_1}, \dots, \|x_n\|_{E_n}\}$.

O próximo resultado mostra uma equivalência que é bastante usada quando se quer provar que um determinado espaço é de Banach.

Teorema 1.1.1. *Um espaço vetorial normado $(E, \|\cdot\|)$ é Banach se, e somente se, toda série absolutamente convergente é convergente.*

Demonstração. Ver [22, Problems 8 e 9, Página 71]. □

Definição 1.1.13. Dizemos que duas normas $\|\cdot\|$ e $\|\cdot\|_0$ em um espaço vetorial E são *equivalentes* quando existem constantes $C, K > 0$ tais que, para todo $x \in E$, vale

$$C\|x\|_0 \leq \|x\| \leq K\|x\|_0.$$

Podemos ver em [10, Exercício 1.8.12] que as normas $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ e $\|\cdot\|_\infty$ definidas acima são normas equivalentes no produto cartesiano $E_1 \times \dots \times E_n$. Além disso, os espaços $E_1, \dots, E_n$ são Banach se, e somente se, o espaço $E_1 \times \dots \times E_n$ munido de uma das normas acima (e portanto todas) é Banach.

Teorema 1.1.2. *Todo espaço normado de dimensão finita é um espaço de Banach.*

Demonstração. Ver [10, Teorema 1.1.6]. □

1.2 Análise Funcional

Agora, vamos apresentar algumas definições, nomenclaturas e resultados importantes sobre aplicações lineares contínuas, que serão bastante úteis para os próximos capítulos.

Definição 1.2.1. Sejam X e Y espaços vetoriais. Uma aplicação (operador, transformação ou função) $T : X \rightarrow Y$ é chamada de *linear* quando satisfaz:

- (I) $T(x + y) = T(x) + T(y)$ para todos $x, y \in X$.
- (II) $T(\lambda x) = \lambda T(x)$ para todos $x \in X$ e $\lambda \in \mathbb{K}$.

Vamos denotar por $L(X, Y)$ o espaço de todas as aplicações lineares de X em Y munido com as operações usuais de soma e multiplicação por escalar. Se $Y = \mathbb{K}$ denotaremos o espaço $L(X, Y)$ simplesmente por X' . As aplicações $T \in X'$ serão chamadas de *funcionais lineares* e o espaço X' de *dual algébrico* de X .

O conjunto de todas as aplicações lineares contínuas de X em Y será denotado por $\mathcal{L}(X, Y)$. Observe que $\mathcal{L}(X, Y)$ é um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{K}$ com as operações usuais de funções. Quando $Y = \mathbb{K}$, escreveremos $\mathcal{L}(X, \mathbb{K})$ apenas por X^* . As aplicações $T \in X^*$ serão chamadas de *funcionais lineares contínuos* e o espaço X^* de *dual topológico* de X , ou simplesmente *dual* de X .

Dizemos que os espaços normados X e Y são *isomorfos*, quando existe uma aplicação linear contínua bijetora $T : X \longrightarrow Y$ tal que sua inversa $T^{-1} : Y \longrightarrow X$ (que é sempre linear) é contínua. A aplicação T acima é dita *isomorfismo*. Além disso, um isomorfismo $T : X \longrightarrow Y$ que é ainda uma isometria é chamado de *isomorfismo isométrico* e, neste caso, os espaços X e Y são ditos *isomorfos isometricamente*. Para provar que uma aplicação $T : X \longrightarrow Y$ é um isomorfismo isométrico, basta mostrar que T é linear, sobrejetora e imersão isométrica, pois a função inversa T^{-1} é claramente isometria (em particular, T^{-1} é contínua).

Observação 1.2.1. Sejam X e Y espaços normados. Uma aplicação linear $T : X \longrightarrow Y$ é uma imersão isométrica se, e somente se, $\|T(x)\| = \|x\|$ para todo $x \in X$. De fato, suponha que T é imersão isométrica e seja $x \in X$, então

$$\begin{aligned}\|T(x)\| &= \|T(x) - 0\| = \|T(x) - T(0)\| = d(T(x), T(0)) \\ &= d(x, 0) = \|x - 0\| = \|x\|.\end{aligned}$$

Reciprocamente, assumamos que $\|T(x)\| = \|x\|$ para cada $x \in X$. Assim, para quaisquer $x, x' \in X$, temos

$$d(T(x), T(x')) = \|T(x) - T(x')\| = \|T(x - x')\| = \|x - x'\| = d(x, x'),$$

ou seja, T é uma imersão isométrica.

No teorema abaixo, vamos definir uma norma para o espaço $\mathcal{L}(X, Y)$ e, ainda, apresentaremos uma condição suficiente para que este espaço seja Banach.

Teorema 1.2.1. *Sejam X e Y espaços normados. Então:*

(a) *A expressão*

$$\|T\| = \sup\{\|T(x)\|; x \in X \text{ e } \|x\| \leq 1\}$$

define uma norma no espaço $\mathcal{L}(X, Y)$;

(b) *$\|T(x)\| \leq \|T\|\|x\|$ para todos $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ e $x \in X$;*

(c) *Se Y for Banach, então $\mathcal{L}(X, Y)$ também é Banach.*

Demonstração. Ver [10, Teorema 2.1.4]. □

Definição 1.2.2. Uma aplicação $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ é chamada de *posto finito* quando a dimensão do espaço da imagem $\text{Im}(T)$ é finita.

A seguir, veremos um exemplo importante de operador linear contínuo de posto finito.

Exemplo 1.2.1. Para quaisquer X e Y espaços normados, $\varphi \in X^*$ e $y \in Y$, operador

$$\begin{aligned}\varphi \otimes y : X &\longrightarrow Y \\ x &\longmapsto \varphi \otimes y(x) = \varphi(x)y\end{aligned}$$

é linear, contínuo, de posto finito e $\|\varphi \otimes y\| = \|\varphi\|\|y\|$. De fato, tomando $x, x' \in X$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, segue que $\varphi \otimes y$ é linear, pois

$$\varphi \otimes y(\lambda x + x') = \varphi(\lambda x + x')y = (\lambda\varphi(x) + \varphi(x'))y = \lambda\varphi(x)y + \varphi(x')y = \lambda\varphi \otimes y(x) + \varphi \otimes y(x').$$

Já que $\varphi \otimes y$ satisfaz

$$\|\varphi \otimes y(x)\| = \|\varphi(x)y\| = |\varphi(x)|\|y\| \leq \|\varphi\|\|x\|\|y\| = \|\varphi\|\|y\|\|x\|$$

para cada $x \in X$, segue que φ é contínua. Além disso, como $\varphi \otimes y(x)$ está contido do subespaço gerado por y , que tem dimensão 1, obtemos que $\varphi \otimes y$ é um operador linear contínuo de posto finito. Por fim, vale a igualdade $\|\varphi \otimes y\| = \|\varphi\|\|y\|$, pois

$$\|\varphi \otimes y\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|\varphi \otimes y(x)\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|\varphi(x)y\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |\varphi(x)|\|y\| = \|\varphi\|\|y\|.$$

Apresentaremos agora alguns resultados da Análise Funcional que serão citados neste trabalho.

Teorema 1.2.2 (Teorema de Hahn-Banach). *Sejam X um espaço vetorial sobre o corpo dos números reais e $p : X \rightarrow \mathbb{R}$ uma função que satisfaz:*

- $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ para todos $x, y \in X$;
- $p(\alpha x) = \alpha p(x)$ para quaisquer $x \in X$ e $\alpha > 0$.

Sejam F um subespaço vetorial de X e $f_0 : F \rightarrow \mathbb{R}$ um funcional linear tal que $f_0(x) \leq p(x)$ para todo $x \in F$. Então, existe um funcional linear $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ que estende f_0 (isto é, $f_0(y) = f(y)$ para todo $y \in F$) e satisfaz $f(x) \leq p(x)$ para qualquer $x \in X$.

Demonstração. Ver [10, Teorema 3.1.1]. □

Corolário 1.2.1. *Sejam F um subespaço de um espaço normado X sobre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ e $\varphi : F \rightarrow \mathbb{K}$ um funcional linear contínuo. Então, existe um funcional linear contínuo $\hat{\varphi} : X \rightarrow \mathbb{K}$ cuja restrição a F coincide com φ e $\|\hat{\varphi}\| = \|\varphi\|$.*

Demonstração. Ver [10, Corolário 3.1.3]. □

Corolário 1.2.2. *Seja X um espaço normado. Para todo $x \in X$, $x \neq 0$, existe um funcional linear $\varphi \in X^*$ tal que $\|\varphi\| = 1$ e $\varphi(x) = \|x\|$.*

Demonstração. Ver [10, Corolário 3.1.4]. □

Corolário 1.2.3. *Sejam X um espaço normado, $X \neq \emptyset$, e $x \in X$. Então,*

$$\|x\| = \sup\{|\varphi(x)|; \varphi \in X^* \text{ e } \|\varphi\| \leq 1\} = \max\{|\varphi(x)|; \varphi \in X^* \text{ e } \|\varphi\| = 1\}.$$

Demonstração. Ver [10, Corolário 3.1.5]. □

Agora, vamos definir os espaços das sequências fortemente p -somáveis e fracamente p -somáveis.

Definição 1.2.3. Sejam E espaço de Banach e $1 \leq p < \infty$. Uma sequência $(x_i)_{i=1}^\infty$ em E é dita *fortemente p -somável* se $\sum_{i=1}^\infty \|x_i\|^p < \infty$. Denotaremos por $\ell_p(E)$ o espaço de todas as sequências fortemente p -somáveis em E , ou seja,

$$\ell_p(E) = \left\{ (x_i)_{i=1}^\infty \subset E; \sum_{i=1}^\infty \|x_i\|^p < \infty \right\}.$$

No espaço $\ell_p(E)$, definimos uma norma por

$$\|(x_i)_{i=1}^\infty\|_p = \left(\sum_{i=1}^\infty \|x_i\|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Definição 1.2.4. Sejam E espaço de Banach e $1 \leq p < \infty$. Uma sequência $(x_i)_{i=1}^\infty$ em E é *fracamente p -somável* quando $\sum_{i=1}^\infty |x^*(x_i)|^p < \infty$ para todo $x^* \in E^*$, e indicaremos por $\ell_{p,w}(E)$ o espaço de todas as sequências fortemente p -somáveis em E , isto é,

$$\ell_{p,w}(E) = \left\{ (x_i)_{i=1}^\infty \subset E; \sum_{i=1}^\infty |x^*(x_i)|^p < \infty, \forall x^* \in E^* \right\}.$$

Em $\ell_{p,w}(E)$, definimos uma norma por

$$\|(x_i)_{i=1}^\infty\|_{p,w} = \sup_{\|x^*\|_{E^*} \leq 1} \|(x^*(x_i))_{i=1}^\infty\|_p.$$

Dos cursos de Análise Funcional, provamos que os espaços $(\ell_p(E), \|\cdot\|_p)$ e $(\ell_{p,w}(E), \|\cdot\|_{p,w})$ são de Banach. Adiante, veremos a clássica Desigualdade de Hölder para os espaços de sequências $\ell_p(E)$.

Proposição 1.2.1 (Desigualdade de Hölder). *Sejam E espaço de Banach e $p, p_1, p_2 \in (0, \infty]$ tais que $\frac{1}{p} \leq \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}$. Se as sequências $(x_i)_{i=1}^\infty \subset \ell_{p_1}(E)$ e $(y_i)_{i=1}^\infty \subset \ell_{p_2}(E)$, então $(x_i y_i)_{i=1}^\infty \subset \ell_p(E)$ e, além disso,*

$$\left(\sum_{i=1}^\infty \|x_i y_i\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^\infty \|x_i\|^{p_1} \right)^{\frac{1}{p_1}} \left(\sum_{i=1}^\infty \|y_i\|^{p_2} \right)^{\frac{1}{p_2}}.$$

Demonstração. Ver [34, Teorema 1.1]. □

Abaixo, abordaremos um pouco da teoria das aplicações bilineares.

Definição 1.2.5. Sejam X, Y e Z espaços vetoriais sobre o corpo $\mathbb{K}$. Uma aplicação $A : X \times Y \longrightarrow Z$ é chamada de *bilinear* se satisfizer, para cada $x, x' \in X$, $y, y' \in Y$ e $\lambda \in \mathbb{K}$:

- (I) $A(x + x', y) = A(x, y) + A(x', y)$;
- (II) $A(x, y + y') = A(x, y) + A(x, y')$;
- (III) $A(\lambda x, y) = \lambda A(x, y)$;
- (IV) $A(x, \lambda y) = \bar{\lambda} A(x, y)$.

Quando $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ na definição acima, o item (IV) é simplesmente $A(x, \lambda y) = \lambda A(x, y)$.

Em outras palavras, uma aplicação $A : X \times Y \longrightarrow Z$ é bilinear se for linear em cada uma das variáveis quando deixamos a outra variável fixa.

Vamos denotar por $B(X, Y; Z)$ o espaço de todas as aplicações bilineares de $X \times Y$ em Z munido com as operações usuais de soma e multiplicação por escalar. Se $Z = \mathbb{K}$ denotaremos o espaço $B(X, Y; \mathbb{K})$ simplesmente por $B(X, Y)$ e chamaremos as aplicações $A \in B(X, Y)$ de *formas bilineares*. Além disso, denotaremos por $\mathcal{L}(X, Y; Z)$ o espaço de todas as aplicações bilineares contínuas de $X \times Y$ em Z .

No teorema adiante, apresentaremos algumas condições equivalentes para uma aplicação bilinear ser contínua.

Teorema 1.2.3. *Sejam X, Y e Z espaços normados e $A : X \times Y \longrightarrow Z$ uma aplicação bilinear. Então, são equivalentes:*

- (a) A é contínua;
- (b) A é contínua na origem;
- (c) $\sup\{\|A(x, y)\|; \|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1\} < \infty$;
- (d) Existe uma constante $C \geq 0$ tal que $\|A(x, y)\| \leq C\|x\|\|y\|$ para todos $x \in X$ e $y \in Y$.

Demonstração. Ver [10, Exercício 2.7.25]. $\square$

Definição 1.2.6. Sejam E , F e G espaços de Banach e $A : E \times F \longrightarrow G$ um operador bilinear. Dizemos que A é *compacto*, em símbolo $A \in \mathcal{L}_K(E, F; G)$, se $A(B_E \times B_F)$ é um subconjunto relativamente compacto de G , ou seja, $A(B_E \times B_F)$ é compacto em G .

A definição acima é equivalente a dizer que a aplicação A leva conjuntos limitados de $E \times F$ em conjuntos relativamente compactos de G .

1.3 O Produto tensorial projetivo

O objetivo principal desta seção é apresentar o produto tensorial projetivo entre espaços de Banach. De início, veremos o produto tensorial entre dois espaços vetoriais do ponto de vista algébrico, onde definiremos os tensores elementares como aplicações lineares. Em seguida, vamos estudar uma forma simples de construir uma norma no produto tensorial entre dois espaços de Banach. Tal norma será chamada de norma projetiva. Por fim, definiremos o produto tensorial projetivo entre espaços de Banach e, ainda, veremos um dos principais resultados da teoria, que é a linearização das aplicações bilineares contínuas. Para a construção desta seção utilizamos as referências [13, 32].

Definição 1.3.1. Sejam X e Y espaços vetoriais. Dados $x \in X$ e $y \in Y$, denotaremos por $x \otimes y$ a aplicação dada pela avaliação de uma forma bilinear $A \in B(X, Y)$ no ponto $(x, y) \in X \times Y$, isto é,

$$\begin{aligned} x \otimes y : B(X, Y) &\longrightarrow \mathbb{K} \\ A &\longmapsto (x \otimes y)(A) = A(x, y). \end{aligned}$$

A aplicação $x \otimes y$ é chamado de *tensor elementar*.

Observe que o tensor elementar $x \otimes y$ é linear, pois dados $A, C \in B(X, Y)$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, temos

$$\begin{aligned} (x \otimes y)(A + \lambda C) &= (A + \lambda C)(x, y) \\ &= A(x, y) + (\lambda C)(x, y) \\ &= A(x, y) + \lambda C(x, y) \\ &= (x \otimes y)(A) + \lambda(x \otimes y)(C). \end{aligned}$$

Definição 1.3.2. Sejam X e Y espaços vetoriais. Definimos o *produto tensorial* de X e Y , denotado por $X \otimes Y$, como sendo o subespaço do dual algébrico $B(X, Y)'$ gerado pelos tensores elementares $x \otimes y$, com $x \in X$ e $y \in Y$. Os elementos de $X \otimes Y$ são chamados de *tensores*. Em símbolos, temos

$$X \otimes Y = \text{span}\{x \otimes y; x \in X, y \in Y\}.$$

Logo, um tensor típico $u \in X \otimes Y$ tem a forma

$$u = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \otimes y_i, \quad (1.2)$$

onde $n \in \mathbb{N}$, $\lambda_i \in \mathbb{K}$, $x_i \in X$, $y_i \in Y$ e $i = 1, 2, \dots, n$. Veremos adiante que essa não é a única forma de representar um tensor de $X \otimes Y$. Essa não unicidade da representação de um tensor como combinação linear de tensores elementares é um fato delicado no estudo da teoria de produto tensorial.

Se $u = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \otimes y_i$ é um tensor qualquer de $X \otimes Y$ e $A \in B(X, Y)$, então a avaliação de u em A é dada por

$$u(A) = \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \otimes y_i \right) (A) = \sum_{i=1}^n \lambda_i A(x_i, y_i). \quad (1.3)$$

É importante ressaltar que o valor da expressão (1.3) independe da representação escolhida para o tensor u .

Nas duas próximas proposições veremos propriedades interessantes do produto tensorial.

Proposição 1.3.1. *Sejam X e Y espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$. Então:*

- (a) $(x_1 + x_2) \otimes y = x_1 \otimes y + x_2 \otimes y$ para todos $x_1, x_2 \in X$ e $y \in Y$;
- (b) $x \otimes (y_1 + y_2) = x \otimes y_1 + x \otimes y_2$ para todos $x \in X$ e $y_1, y_2 \in Y$;
- (c) $\lambda(x \otimes y) = (\lambda x) \otimes y = x \otimes (\lambda y)$ para todos $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in X$ e $y \in Y$;
- (d) $x \otimes 0 = 0 \otimes y = 0$ para todos $x \in X$ e $y \in Y$.

Demonstração. Ver [13, Proposição 2.2]. □

Usando o item (c) da proposição anterior, podemos reescrever a representação típica do tensor $u \in X \otimes Y$ dada em (1.2) na forma

$$u = \sum_{i=1}^n z_i \otimes y_i, \quad (1.4)$$

onde $z_i = \lambda_i x_i$. Sendo assim, podemos utilizar quaisquer uma das formas (1.2) e (1.4) para representar um tensor $u \in X \otimes Y$.

Como podemos saber se dois tensores são iguais? Esta pergunta pode ser reduzida na seguinte forma: como é possível determinar se o tensor $\sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i$ é uma representação do tensor nulo? Para responder tal pergunta, teríamos que provar que $\sum_{i=1}^n A(x_i, y_i) = 0$ para cada forma bilinear $A \in B(X, Y)$, o que seria uma tarefa muito complicada. Felizmente, existem formas mais “simples” de fazer este procedimento, como podemos ver na proposição abaixo.

Proposição 1.3.2. *Sejam X e Y espaços vetoriais. As seguintes afirmações são equivalentes para $u = \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i \in X \otimes Y$:*

- (a) $u = 0$;

(b) $\sum_{i=1}^n \varphi(x_i)\phi(y_i) = 0$ para todos $\varphi \in X^*$ e $\phi \in Y^*$;

(c) $\sum_{i=1}^n \varphi(x_i)y_i = 0$ para todo $\varphi \in X^*$;

(d) $\sum_{i=1}^n x_i\phi(y_i) = 0$ para todo $\phi \in Y^*$.

Demonstração. Ver [32, Proposition 1.2]. $\square$

Agora, considere X e Y espaços de Banach. Para qualquer forma bilinear contínua $A \in \mathcal{L}(X, Y; \mathbb{K})$ temos que

$$|x \otimes y(A)| = |A(x, y)| \leq \|A\| \|x\| \|y\| \text{ para todos } x \in X \text{ e } y \in Y.$$

E como esperarmos a continuidade dos tensores é natural esperarmos que um tensor elementar satisfaça a seguinte desigualdade

$$\|x \otimes y\| \leq \|x\| \|y\| \text{ para todos } x \in X \text{ e } y \in Y. \quad (1.5)$$

Seja $u \in X \otimes Y$ um tensor qualquer. Então, se $\sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i$ é uma representação de u , segue da desigualdade triangular e da desigualdade (1.5) que a norma de u deverá satisfazer

$$\begin{aligned} \|u\| &= \left\| \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i \right\| \\ &= \|x_1 \otimes y_1 + \cdots + x_n \otimes y_n\| \\ &\leq \|x_1 \otimes y_1\| + \cdots + \|x_n \otimes y_n\| \\ &\leq \|x_1\| \|y_1\| + \cdots + \|x_n\| \|y_n\| \\ &= \sum_{i=1}^n \|x_i\| \|y_i\|, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\|u\| \leq \sum_{i=1}^n \|x_i\| \|y_i\|. \quad (1.6)$$

Dessa forma, a desigualdade (1.6) é válida para toda representação u . Tomando o ínfimo sobre todas essas possíveis representações de u , obtemos que

$$\|u\| \leq \inf \left\{ \sum_{i=1}^n \|x_i\| \|y_i\|; u = \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i \right\}. \quad (1.7)$$

Note que o zero é uma cota inferior para o conjunto do lado direito da desigualdade acima, assim esse ínfimo está bem definido. Na verdade, ele define uma norma em $X \otimes Y$.

Definição 1.3.3. Sejam X e Y espaços de Banach sobre o corpo $\mathbb{K}$. Se $u \in X \otimes Y$ é um tensor qualquer, então definimos a *norma projetiva* de u por

$$\pi(u) := \inf \left\{ \sum_{i=1}^n \|x_i\| \|y_i\|; u = \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i \right\}, \quad (1.8)$$

onde o ínfimo é tomado sobre todas as possíveis representações de u .

A proposição a seguir mostra que $\pi(\cdot)$ é de fato uma norma no produto tensorial $X \otimes Y$ e, além disso, caracteriza o valor de $\pi(\cdot)$ em cada tensor elementar.

Proposição 1.3.3. *Sejam X e Y espaços de Banach sobre o corpo $\mathbb{K}$. Então, $\pi(\cdot)$ é uma norma no produto tensorial $X \otimes Y$ e, para cada tensor elementar, vale $\pi(x \otimes y) = \|x\| \|y\|$ para todos $x \in X$ e $y \in Y$.*

Demonstração. Ver [32, Proposition 2.1]. □

Vamos denotar por $X \otimes_\pi Y$ o produto tensorial $X \otimes Y$ munido com a norma projetiva $\pi(\cdot)$.

A seguir veremos alguns resultados pertinentes da teoria de produto tensorial.

Proposição 1.3.4. *Sejam X e Y espaços vetoriais de dimensão finita. Então, o produto tensorial $X \otimes Y$ é um espaço vetorial de dimensão finita.*

Demonstração. Ver [13, Proposição 3.3]. □

Corolário 1.3.1. *Sejam X e Y espaços vetoriais normados de dimensão finita. Então, o produto tensorial $X \otimes_\pi Y$ é completo.*

Demonstração. Com efeito, pela Proposição 1.3.4, segue que $X \otimes_\pi Y$ tem dimensão finita e assim, pelo Teorema 1.1.2, $X \otimes_\pi Y$ é completo. □

Observação 1.3.1. Se X e Y são espaços vetoriais de dimensão infinita, então o produto tensorial $X \otimes_\pi Y$ nunca é completo, como podemos ver em [32, Exercise 2.5].

Pela observação acima, o espaço $X \otimes_\pi Y$ nem sempre é completo. Dessa forma, podemos considerar o seu completamento, que é denotado por $X \hat{\otimes}_\pi Y$. Chamaremos o espaço de Banach $X \hat{\otimes}_\pi Y$ de *produto tensorial projetivo* entre os espaços de Banach X e Y .

Na proposição abaixo, apresentaremos um operador linear contínuo com a norma projetiva que é definido a partir de dois operadores lineares contínuos.

Proposição 1.3.5. *Sejam X, Y, W, Z espaços vetoriais normados e $S : X \rightarrow W$ e $T : Y \rightarrow Z$ operadores lineares contínuos. Então, existe um único operador linear contínuo $S \otimes_\pi T : X \hat{\otimes}_\pi Y \rightarrow W \hat{\otimes}_\pi Z$ tal que $S \otimes_\pi T(x \otimes y) = S(x) \otimes T(y)$, para cada $x \in X$ e $y \in Y$, e vale a igualdade $\|S \otimes_\pi T\| = \|S\| \|T\|$.*

Demonstração. Ver [13, Proposição 3.7]. □

O teorema seguinte é o principal resultado desta seção e diz que as aplicações bilineares contínuas estão associadas com as aplicações lineares definidas no produto tensorial projetivo. Portanto, o produto tensorial projetivo é o espaço vetorial que "lineariza" as aplicações bilineares contínuas.

Teorema 1.3.1. *Sejam X, Y e Z espaços normados. Para cada aplicação bilinear contínua $T : X \times Y \rightarrow Z$, existe uma única aplicação linear contínua $T_L : X \hat{\otimes}_\pi Y \rightarrow Z$ satisfazendo $T_L(x \otimes y) = T(x, y)$ para todos $x \in X$ e $y \in Y$. Além disso, é um isomorfismo isométrico a correspondência $T \longleftrightarrow T_L$ entre os espaços normados $\mathcal{L}(X, Y; Z)$ e $\mathcal{L}(X \hat{\otimes}_\pi Y, Z)$.*

Demonstração. Ver [32, Theorem 2.9]. □

Desse teorema segue a identificação

$$\mathcal{L}(X, Y; Z) \cong \mathcal{L}(X \hat{\otimes}_{\pi} Y, Z)$$

e temos o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} X \times Y & \xrightarrow{T} & Z \\ \sigma_2 \downarrow & \nearrow T_L & \\ X \hat{\otimes}_{\pi} Y & & \end{array}$$

onde a aplicação

$$\begin{aligned} \sigma_2 : X \times Y &\longrightarrow X \hat{\otimes}_{\pi} Y \\ (x, y) &\longmapsto \sigma_2(x, y) = x \otimes y \end{aligned}$$

age como uma aplicação bilinear universal. A construção feita acima diz que qualquer aplicação bilinear contínua definida em $X \times Y$ é escrita como a composta de σ_2 por uma aplicação linear contínua definida no produto tensorial projetivo $X \hat{\otimes}_{\pi} Y$.

CAPÍTULO 2

ESPAÇOS DE FUNÇÕES LIPSCHITZ

Neste capítulo, estudaremos alguns conceitos e resultados relacionados à álgebra de Lipschitz. Mostraremos que o espaço das funções Lipschitz limitadas e o espaço das funções Lipschitz que preservam ponto base são espaços de Banach. Além disso, veremos qual é a relação entre esses dois espaços e, por fim, definiremos o espaço de Arens-Eells e provaremos algumas de suas propriedades. Nossas principais referências foram os trabalhos [10, 24, 30, 36].

2.1 Função Lipschitz

Nesta seção começaremos com a definição de função Lipschitz e de função que preserva ponto base.

Definição 2.1.1. Sejam (X, d_X) e (Y, d_Y) espaços métricos. Uma função $f : X \rightarrow Y$ é chamada de *Lipschitz* quando existe uma constante $C \geq 0$ tal que

$$d_Y(f(x), f(y)) \leq C d_X(x, y) \quad (2.1)$$

para todos $x, y \in X$. A menor constante C que satisfaz a desigualdade acima é chamada de *número de Lipschitz* (ou *constante de Lipschitz*) da função f e denotada por $Lip(f)$. Equivalentemente, podemos definir o número $Lip(f)$ por:

$$Lip(f) = \sup_{x, y \in X, x \neq y} \frac{d_Y(f(x), f(y))}{d_X(x, y)}.$$

Quando $Lip(f) = \infty$, dizemos que f não é Lipschitz.

Toda função Lipschitz $f : X \rightarrow Y$ é uniformemente contínua. De fato, dado qualquer $\epsilon > 0$, basta tomar $\delta = \frac{\epsilon}{Lip(f)} > 0$ e notar que se $d(x, y) < \delta$ com $x, y \in X$, tem-se

$$d(f(x), f(y)) \leq Lip(f) d(x, y) < Lip(f) \frac{\epsilon}{Lip(f)} d(x, y) = \epsilon d(x, y).$$

Porém, a recíproca é falsa. Considere a função

$$\begin{aligned} f : [0, 1] &\rightarrow [0, 1] \\ x &\mapsto f(x) = \sqrt{1 - x^2}. \end{aligned}$$

Note que f é uniformemente contínua, já que f é contínua e está definida no compacto $[0, 1]$. No entanto, como

$$\begin{aligned} Lip(f) &= \sup_{x \in [0,1)} \frac{|f(1) - f(x)|}{|1 - x|} = \sup_{x \in [0,1)} \frac{|\sqrt{1 - 1^2} - \sqrt{1 - x^2}|}{|1 - x|} \\ &= \sup_{x \in [0,1)} \frac{\sqrt{1 - x^2}}{1 - x} = \sup_{x \in [0,1)} \frac{\sqrt{1 - x^2}}{1 - x} \frac{\sqrt{1 - x^2}}{\sqrt{1 - x^2}} \\ &= \sup_{x \in [0,1)} \frac{(\sqrt{1 - x^2})^2}{(1 - x)\sqrt{1 - x^2}} = \sup_{x \in [0,1)} \frac{1 - x^2}{(1 - x)\sqrt{1 - x^2}} \\ &= \sup_{x \in [0,1)} \frac{(1 - x)(1 + x)}{(1 - x)\sqrt{1 - x^2}} = \sup_{x \in [0,1)} \frac{(1 + x)}{\sqrt{1 - x^2}}, \end{aligned}$$

temos que f não é Lipschitz, pois $Lip(f) = \infty$ quando x tende a 1.

No próximo teorema, veremos que se uma aplicação é linear, então ser uniformemente contínua é equivalente a ser Lipschitz.

Teorema 2.1.1. *Sejam X e Y espaços normados sobre $\mathbb{K}$ e $T : X \longrightarrow Y$ uma aplicação linear. Então, são equivalentes:*

- (a) T é Lipschitz;
- (b) T é uniformemente contínua;
- (c) T é contínua;
- (d) T é contínua em algum ponto de X ;
- (e) T é contínua na origem;
- (f) $\sup\{\|T(x)\|; x \in X \text{ e } \|x\| \leq 1\} < \infty$;
- (g) Existe uma constante $C \geq 0$ tal que $\|T(x)\| \leq C\|x\|$ para todo $x \in X$.

Demonstração. Ver [10, Teorema 2.1.1]. □

Definição 2.1.2. Sejam X e Y espaços métricos pontuados, sendo e_X e e_Y os pontos bases de X e Y , respectivamente. Uma função $f : X \longrightarrow Y$ preserva ponto base quando

$$f(e_X) = e_Y.$$

Exemplo 2.1.1. Sejam X um espaço métrico e $C \subseteq X$ um subconjunto fechado. Então, a função

$$\begin{aligned} f : X &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = d(x, C) = \inf_{y \in C} d(x, y). \end{aligned}$$

é Lipschitz. Primeiramente, observe que $f(x) = 0$ se, e somente se, $x \in C$. Tomando $x, y \in X$, a Proposição 1.1.1 garante que

$$|f(x) - f(y)| = |d(x, C) - d(y, C)| \leq d(x, y),$$

implicando que f é Lipschitz e $Lip(f) \leq 1$. Em particular, quando $C = \{q\}$ consiste de apenas um ponto, a função f acima tem uma notação especial, a saber

$$\begin{aligned} d_q : X &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto d_q(x) = d(x, q). \end{aligned}$$

Temos ainda $Lip(d_q) = 1$, pois, usando a Proposição 1.1.1,

$$Lip(d_q) = \sup_{x, y \in X} \frac{|d_q(x) - d_q(y)|}{d(x, y)} = \sup_{x, y \in X} \frac{|d(x, q) - d(y, q)|}{d(x, y)} \leq \sup_{x, y \in X} \frac{|d(x, y)|}{d(x, y)} = 1$$

e como o supremo acima atinge o 1 quando $y = q$, concluímos que $Lip(d_q) = 1$. Nos casos em que assumimos X possuir um ponto base $e_X \neq q$ e que 0 é o ponto base de $\mathbb{R}$, essa função d_q não preserva ponto base, pois

$$d_q(e_X) = d(e_X, q) \neq 0.$$

Para definir uma nova função partindo de d_q e que leve o ponto e_X em 0, devemos subtrair a constante $d(e_X, q)$ na definição de d_q . Sendo assim, obtemos a função

$$\begin{aligned} \tilde{d}_q : X &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \tilde{d}_q(x) = d(x, q) - d(e_X, q). \end{aligned}$$

Veremos agora três proposições básicas sobre funções Lipschitz.

Proposição 2.1.1. *Sejam X, Y e Z espaços métricos e $f : X \longrightarrow Y$ e $g : Y \longrightarrow Z$ funções Lipschitz. A composta $g \circ f : X \longrightarrow Z$ também é uma função Lipschitz e*

$$Lip(g \circ f) \leq Lip(f)Lip(g).$$

Demonstração. Como f e g são Lipschitz, temos

$$d(f(x), f(x')) \leq Lip(f)d(x, x') \text{ e } d(g(y), g(y')) \leq Lip(g)d(y, y')$$

para cada $x, x' \in X$ e $y, y' \in Y$. Segue que

$$\begin{aligned} d((g \circ f)(x), (g \circ f)(x')) &= d(g(f(x)), g(f(x'))) \\ &\leq Lip(g)d(f(x), f(x')) \\ &\leq Lip(g)Lip(f)d(x, x'). \end{aligned}$$

Portanto, $g \circ f$ é Lipschitz e ainda $Lip(g \circ f) \leq Lip(f)Lip(g)$. □

Proposição 2.1.2. *Considere Y e Z espaços métricos completos e Y_0 um subconjunto denso de Y . Se $f_0 : Y_0 \longrightarrow Z$ é Lipschitz, então f_0 tem uma única extensão Lipschitz $f : Y \longrightarrow Z$ e, além disso, vale a igualdade*

$$Lip(f) = Lip(f_0).$$

Demonstração. Por f_0 ser Lipschitz, sabemos que f_0 é uniformemente contínua. Como Y_0 é denso em Y , por [24, Proposição 10, Página 196] f_0 possui uma única extensão de Y em Z que é também uniformemente contínua. Dado qualquer $a \in Y$, pela densidade de Y_0 em Y , segue que existe uma sequência $(y_n)_{n=1}^\infty$ em Y_0 que converge para a . Já que toda sequência convergente é de Cauchy, segue que $(y_n)_{n=1}^\infty$ é de Cauchy e, pela [24, Proposição

4, Página 18], a sequência $(f_0(y_n))_{n=1}^{\infty}$ também é de Cauchy em Z e, como Z é completo, $(f_0(y_n))_{n=1}^{\infty}$ converge em Z . Agora, tome uma outra sequência $(y'_n)_{n=1}^{\infty}$ em Y_0 convergindo para a . Seguindo o mesmo raciocínio acima, tem-se que $(f_0(y'_n))_{n=1}^{\infty} \subset Z$ é uma sequência de Cauchy que converge em Z . Dessa forma, segue que

$$\lim_n f_0(y_n) = \lim_n f_0(y'_n),$$

pois a continuidade da função distância d garante que

$$\begin{aligned} d(\lim_n f_0(y_n), \lim_n f_0(y'_n)) &= \lim_n d(f_0(y_n), f_0(y'_n)) \\ &\leq \lim_n Lip(f_0)d(y_n, y'_n) \\ &= Lip(f_0)d(\lim_n y_n, \lim_n y'_n) \\ &= Lip(f_0)d(a, a) = 0. \end{aligned}$$

Com isso, podemos definir a extensão de f_0 por

$$\begin{aligned} f : Y &\longrightarrow Z \\ a &\longmapsto f(a) = \lim_n f_0(y_n), \end{aligned}$$

sendo $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência de Cauchy de Y_0 que converge para $a \in Y$. Por f_0 ser Lipschitz e considerando os pontos $x, y \in Y$ e as sequências de Cauchy $(p_n)_{n=1}^{\infty}, (q_n)_{n=1}^{\infty}$ em Y_0 , com p_n convergindo para x e q_n convergindo para y , obtemos

$$\begin{aligned} d(f(x), f(y)) &= d\left(\lim_n f_0(p_n), \lim_n f_0(q_n)\right) \\ &= \lim_n d(f_0(p_n), f_0(q_n)) \\ &\leq Lip(f_0) \lim_n d(p_n, q_n) \\ &= Lip(f_0)d\left(\lim_n p_n, \lim_n q_n\right) \\ &= Lip(f_0)d(x, y), \end{aligned}$$

onde usamos novamente a continuidade da função distância d . Com isso, f é Lipschitz e $Lip(f) \leq Lip(f_0)$. Além disso, como f é extensão de f_0 , é claro que o domínio da f possui mais elementos que o domínio da f_0 , donde segue que $Lip(f_0) \leq Lip(f)$. Portanto, vale a igualdade $Lip(f_0) = Lip(f)$. $\square$

Proposição 2.1.3. *Sejam X e Y espaços métricos e $f, f_n : X \longrightarrow Y$ funções, com $n \in \mathbb{N}$, tais que $f_n \longrightarrow f$ pontualmente. Então,*

$$Lip(f) \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} Lip(f_n).$$

Demonstração. Como f_n converge pontualmente para f , dados quaisquer $x, y \in X$, com $x \neq y$, vale que

$$\lim_n f_n(x) = f(x) \text{ e } \lim_n f_n(y) = f(y).$$

Daí, usando a continuidade da função distância d , tem-se

$$d(f(x), f(y)) = d\left(\lim_n f_n(x), \lim_n f_n(y)\right) = \lim_n d(f_n(x), f_n(y)).$$

Dividindo ambos os membros das igualdades acima por $d(x, y)$, segue que

$$\frac{d(f(x), f(y))}{d(x, y)} = \lim_n \frac{d(f_n(x), f_n(y))}{d(x, y)} \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} Lip(f_n).$$

Por fim, tomando o supremo sobre x e y , concluímos que

$$Lip(f) \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} Lip(f_n).$$

□

O exemplo abaixo mostra que, ao contrário do que acontece com funções contínuas, as funções Lipschitz em geral não podem ser “coladas”.

Exemplo 2.1.2. Considere os conjuntos

$$X_1 = \{(t, 0); 0 \leq t \leq 1\} \text{ e } X_2 = \{(t, t^2); 0 \leq t \leq 1\}$$

do quadrado unitário em $\mathbb{R}^2$ munidos com a métrica euclidiana. Defina $X = X_1 \cup X_2$ e considere uma função f pondo

$$\begin{aligned} f : X &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (t, 0) &\longmapsto f(t, 0) = 0 \\ (t, t^2) &\longmapsto f(t, t^2) = t. \end{aligned}$$

Os conjuntos X_1 e X_2 são subconjuntos fechados de X e, além disso, f restrita a cada um deles é Lipschitz, pois dados os pontos $(t, 0), (t', 0) \in X_1$ e $(t_1, t_1^2), (t_2, t_2^2) \in X_2$, tem-se

$$|f(t, 0) - f(t', 0)| = |0 - 0| \leq d((t, 0), (t', 0)) \text{ e}$$

$$\begin{aligned} |f(t_1, t_1^2) - f(t_2, t_2^2)| &= |t_1 - t_2| = \sqrt{(t_1 - t_2)^2} \\ &\leq \sqrt{(t_1 - t_2)^2 + (t_1^2 - t_2^2)^2} \\ &= d((t_1, t_1^2), (t_2, t_2^2)). \end{aligned}$$

Por outro lado, f não é Lipschitz, já que considerando $0 < t < 1$, vale a seguinte desigualdade

$$\begin{aligned} |f(t, t^2) - f(t, 0)| &= |t - 0| = |t| \geq |t^2| = \sqrt{(t - 0)^2} \\ &= \sqrt{(t - t)^2 + (t^2 - 0)^2} = d((t, t^2), (t, 0)). \end{aligned}$$

2.2 Função Lipschitz a valores escalares

Na maioria dos resultados desta seção, o corpo escalar não interfere, pois a conclusão de cada resultado permanece a mesma. Porém, isso não é sempre verdade, como veremos no Teorema 2.2.1 e no seu Corolário 2.2.1. A nossa primeira proposição relaciona as funções Lipschitz com valores complexos com suas partes real e imaginária.

Proposição 2.2.1. *Sejam X um espaço métrico e $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ uma função Lipschitz. Então,*

$$\max\{Lip(Ref), Lip(Imf)\} \leq Lip(f) \leq \sqrt{2} \max\{Lip(Ref), Lip(Imf)\},$$

onde Ref e Imf representam, respectivamente, a parte real e a parte imaginária da função f . Em particular, f é Lipschitz se, e somente se, a parte real e a parte imaginária de f são também Lipschitz.

Demonstração. Inicialmente, vamos provar para qualquer $z \in \mathbb{C}$ as seguintes desigualdades:

$$\max\{|Rez|, |Imz|\} \leq |z| \leq \sqrt{2} \max\{|Rez|, |Imz|\}. \quad (2.2)$$

De fato, lembre-se de que

$$z = a + ib \text{ com } a, b \in \mathbb{R}, |z| = \sqrt{a^2 + b^2}, Rez = a \text{ e } Imz = b.$$

Sem perda de generalidade, suponha que $|a| \leq |b|$. Assim,

$$|b|^2 \leq |a|^2 + |b|^2 = a^2 + b^2 \leq b^2 + b^2 = 2b^2 = 2|b|^2$$

e aplicando raiz quadrada em ambos os membros das desigualdades acima, temos

$$|b| \leq \sqrt{a^2 + b^2} \leq \sqrt{2}|b| \implies |Imz| \leq |z| \leq \sqrt{2}|Imz|,$$

o que prova (2.2). Agora, dados $x, y \in X$, fazendo $z = f(x) - f(y)$ em (2.2) e dividindo ambos os membros das desigualdades por $d(x, y)$, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\max\{|Re(f(x) - f(y))|, |Im(f(x) - f(y))|\}}{d(x, y)} &\leq \frac{|f(x) - f(y)|}{d(x, y)} \\ &\leq \sqrt{2} \frac{\max\{|Re(f(x) - f(y))|, |Im(f(x) - f(y))|\}}{d(x, y)}, \end{aligned}$$

que é equivalente a

$$\begin{aligned} \max \left\{ \frac{|Ref(x) - Ref(y)|}{d(x, y)}, \frac{|Imf(x) - Imf(y)|}{d(x, y)} \right\} &\leq \frac{|f(x) - f(y)|}{d(x, y)} \\ &\leq \sqrt{2} \max \left\{ \frac{|Ref(x) - Ref(y)|}{d(x, y)}, \frac{|Imf(x) - Imf(y)|}{d(x, y)} \right\}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Com isso, tomando o supremo sobre os pontos $x, y \in X$ nas desigualdades acima, concluímos que

$$\max\{Lip(Ref), Lip(Imf)\} \leq Lip(f) \leq \sqrt{2} \max\{Lip(Ref), Lip(Imf)\}.$$

Por fim, se f é Lipschitz, segue de (2.3) que Ref e Imf são Lipschitz, pois

$$\begin{aligned} |Ref(x) - Ref(y)| &\leq |f(x) - f(y)| \leq Lip(f)d(x, y) \text{ e} \\ |Imf(x) - Imf(y)| &\leq |f(x) - f(y)| \leq Lip(f)d(x, y). \end{aligned}$$

Reciprocamente, suponha que Ref e Imf são Lipschitz. Por (2.3), pelo menos uma das desigualdades abaixo é válida

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\leq \sqrt{2}|Ref(x) - Ref(y)| \leq \sqrt{2}Lip(Ref)d(x, y) \text{ e} \\ |f(x) - f(y)| &\leq \sqrt{2}|Imf(x) - Imf(y)| \leq \sqrt{2}Lip(Imf)d(x, y), \end{aligned}$$

implicando que f é Lipschitz. □

No exemplo abaixo, mostraremos que a igualdade na última desigualdade da Proposição 2.2.1 pode ser atingida.

Exemplo 2.2.1. Considere a função $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $\phi(t) = (1 + i)t$. Observe que ϕ é Lipschitz e $Lip(\phi) = \sqrt{2}$, pois

$$|\phi(t) - \phi(t')| = |(1 + i)t - (1 + i)t'| = |(1 + i)(t - t')| = |1 + i||t - t'|$$

para cada $t, t' \in \mathbb{R}$ e, ainda,

$$Lip(\phi) = \sup_{t, t' \in \mathbb{R}} \frac{|\phi(t) - \phi(t')|}{|t - t'|} = \sup_{t, t' \in \mathbb{R}} \frac{|1 + i||t - t'|}{|t - t'|} = |1 + i| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$$

Assim, aplicando a Proposição 2.2.1, obtemos que as partes real e imaginária de ϕ são Lipschitz e têm número de Lipschitz igual 1, já que

$$Lip(Re\phi) = \sup_{t, t' \in \mathbb{R}} \frac{|Re\phi(t) - Re\phi(t')|}{|t - t'|} = \sup_{t, t' \in \mathbb{R}} \frac{|t - t'|}{|t - t'|} = 1$$

e

$$Lip(Im\phi) = \sup_{t, t' \in \mathbb{R}} \frac{|Im\phi(t) - Im\phi(t')|}{|t - t'|} = \sup_{t, t' \in \mathbb{R}} \frac{|t - t'|}{|t - t'|} = |i| \sup_{t, t' \in \mathbb{R}} \frac{|t - t'|}{|t - t'|} = 1.$$

As duas próximas proposições resumem as propriedades lineares e algébricas das funções Lipschitz a valores escalar. Ressaltamos que essas proposições também são válidas para funções com valores em um espaço de Banach qualquer.

Proposição 2.2.2. *Sejam X um espaço métrico e $f, g, f_n : X \rightarrow \mathbb{K}$ funções Lipschitz, com $n \in \mathbb{N}$. Logo:*

(a) *A função λf é Lipschitz e $Lip(\lambda f) = |\lambda|Lip(f)$ para todo $\lambda \in \mathbb{K}$;*

(b) *A função $f + g$ é Lipschitz e $Lip(f + g) \leq Lip(f) + Lip(g)$;*

(c) *Se $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge pontualmente, então*

$$Lip\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} Lip(f_n).$$

Demonstração. (a) Dados $\lambda \in \mathbb{K}$ e $x, y \in X$, pelo fato de f ser Lipschitz, segue que

$$\begin{aligned} |(\lambda f)(x) - (\lambda f)(y)| &= |\lambda \cdot f(x) - \lambda \cdot f(y)| \\ &= |\lambda(f(x) - f(y))| \\ &= |\lambda||f(x) - f(y)| \\ &\leq |\lambda|Lip(f)d(x, y). \end{aligned}$$

Assim, λf é Lipschitz e $Lip(\lambda f) \leq |\lambda|Lip(f)$. Além disso, pelas definições de $Lip(f)$ e $Lip(\lambda f)$, vale a igualdade na desigualdade anterior, pois

$$\begin{aligned} Lip(\lambda f) &= \sup_{x, y \in X} \frac{|(\lambda f)(x) - (\lambda f)(y)|}{d(x, y)} = \sup_{x, y \in X} \frac{|\lambda \cdot f(x) - \lambda \cdot f(y)|}{d(x, y)} \\ &= \sup_{x, y \in X} \frac{|\lambda(f(x) - f(y))|}{d(x, y)} = \sup_{x, y \in X} \frac{|\lambda||f(x) - f(y)|}{d(x, y)} \\ &= |\lambda| \sup_{x, y \in X} \frac{|f(x) - f(y)|}{d(x, y)} = |\lambda|Lip(f). \end{aligned}$$

(b) Como f e g são Lipschitz, para quaisquer $x, y \in X$, tem-se

$$\begin{aligned} |(f+g)(x) - (f+g)(y)| &= |f(x) + g(x) - f(y) - g(y)| \\ &\leq |f(x) - f(y)| + |g(x) - g(y)| \\ &\leq \text{Lip}(f)d(x, y) + \text{Lip}(g)d(x, y) \\ &= (\text{Lip}(f) + \text{Lip}(g))d(x, y). \end{aligned}$$

Portanto, $f + g$ é Lipschitz e $\text{Lip}(f + g) \leq \text{Lip}(f) + \text{Lip}(g)$.

(c) Primeiramente, defina

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \text{ e, para cada } k \in \mathbb{N}, \quad g_k = \sum_{n=1}^k f_n.$$

Como $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge pontualmente, temos que $g_k \rightarrow f$ pontualmente. Agora, pelo item (b) acima e como $\text{Lip}(f_n) \geq 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$, segue que

$$\text{Lip}(g_k) = \text{Lip}\left(\sum_{n=1}^k f_n\right) \leq \text{Lip}(f_1) + \cdots + \text{Lip}(f_k) = \sum_{n=1}^k \text{Lip}(f_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \text{Lip}(f_n),$$

o que significa que $\sum_{n=1}^{\infty} \text{Lip}(f_n)$ é uma cota superior para o conjunto dos $\{\text{Lip}(g_k)\}_{k \in \mathbb{N}}$. Desse modo,

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} \text{Lip}(g_k) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \text{Lip}(f_n).$$

Com isso e pela Proposição 2.1.3, concluímos que

$$\text{Lip}\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\right) = \text{Lip}(f) \leq \sup_{k \in \mathbb{N}} \text{Lip}(g_k) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \text{Lip}(f_n).$$

□

Proposição 2.2.3. *Sejam X um espaço métrico e $f, g : X \rightarrow \mathbb{K}$ funções Lipschitz e limitadas. Logo:*

(a) *A função fg é Lipschitz e, ainda, $\text{Lip}(fg) \leq \|f\|_{\infty} \text{Lip}(g) + \|g\|_{\infty} \text{Lip}(f)$;*

(b) *Se $|f(x)| \geq \epsilon > 0$ para todo $x \in X$ e todo $\epsilon > 0$ fixado, então a função*

$$\begin{aligned} \frac{1}{f} : X &\longrightarrow \mathbb{K} \\ x &\longmapsto \frac{1}{f}(x) = \frac{1}{f(x)} \end{aligned}$$

é Lipschitz e $\text{Lip}\left(\frac{1}{f}\right) \leq \frac{\text{Lip}(f)}{\epsilon^2}$;

(c) *Se $\text{diam}(X) < \infty$, então o produto de duas funções Lipschitz definidas em X e a valores escalares é também Lipschitz.*

Demonstração. (a) Sejam quaisquer $x, y \in X$, por f e g serem Lipschitz, segue que

$$\begin{aligned} |(fg)(x) - (fg)(y)| &= |f(x)g(x) - f(x)g(y) + f(x)g(y) - f(y)g(y)| \\ &\leq |f(x)g(x) - f(x)g(y)| + |f(x)g(y) - f(y)g(y)| \\ &= |f(x)(g(x) - g(y))| + |g(y)(f(x) - f(y))| \\ &= |f(x)||g(x) - g(y)| + |g(y)||f(x) - f(y)| \\ &\leq \|f\|_{\infty} \text{Lip}(g)d(x, y) + \|g\|_{\infty} \text{Lip}(f)d(x, y) \\ &= (\|f\|_{\infty} \text{Lip}(g) + \|g\|_{\infty} \text{Lip}(f))d(x, y). \end{aligned}$$

2. Espaços de funções Lipschitz

Sendo assim, fg é Lipschitz e $Lip(fg) \leq \|f\|_\infty Lip(g) + \|g\|_\infty Lip(f)$.

(b) Por hipótese, para cada $x \in X$, tem-se

$$|f(x)| \geq \epsilon > 0 \implies f(x) \neq 0 \text{ e } \frac{1}{|f(x)|} \leq \frac{1}{\epsilon}.$$

Com isso e por f ser Lipschitz, temos

$$\left| \frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(y)} \right| = \left| \frac{f(y) - f(x)}{f(x)f(y)} \right| = \frac{|f(x) - f(y)|}{|f(x)||f(y)|} \leq \frac{Lip(f)d(x,y)}{\epsilon^2} = \frac{Lip(f)}{\epsilon^2}d(x,y),$$

com $x, y \in X$, concluindo que $\frac{1}{f}$ é Lipschitz e também

$$Lip\left(\frac{1}{f}\right) \leq \frac{Lip(f)}{\epsilon^2}.$$

(c) Suponha que $\text{diam}(X) < \infty$, então

$$\exists M > 0 \text{ tal que } \sup_{x,y \in X} d(x,y) \leq M.$$

Agora, considere as funções Lipschitz $f, g : X \longrightarrow \mathbb{K}$. Observe que f é limitada, pois tomando $x \in X$ e fixando $f(y) \in \mathbb{K}$ para algum $y \in X$, obtemos

$$\begin{aligned} |f(x)| &= |f(x) - f(y) + f(y)| \\ &\leq |f(x) - f(y)| + |f(y)| \\ &\leq Lip(f)d(x,y) + |f(y)| \\ &\leq Lip(f)M + |f(y)| = C. \end{aligned}$$

Analogamente, tem-se que g é limitada. Portanto, pelo item (a) provado anteriormente, a função produto $fg : X \longrightarrow \mathbb{K}$ é Lipschitz. $\square$

Se $f, g : X \longrightarrow \mathbb{K}$ são funções Lipschitz ilimitadas, não podemos garantir que o produto fg seja também Lipschitz. Por exemplo, a função identidade $id_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por $id_{\mathbb{R}}(x) = x$, é claramente Lipschitz, porém a função produto

$$\begin{aligned} id_{\mathbb{R}} \cdot id_{\mathbb{R}} &= id_{\mathbb{R}}^2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto id_{\mathbb{R}}^2(x) = (id_{\mathbb{R}}(x))^2 = x^2 \end{aligned}$$

não é Lipschitz, pois

$$\begin{aligned} \sup_{x,y \in \mathbb{R}} \frac{d(id_{\mathbb{R}}^2(x), id_{\mathbb{R}}^2(y))}{d(x,y)} &= \sup_{x,y \in \mathbb{R}} \frac{|x^2 - y^2|}{|x - y|} = \sup_{x,y \in \mathbb{R}} \frac{|(x - y)(x + y)|}{|x - y|} \\ &= \sup_{x,y \in \mathbb{R}} \frac{|x - y||x + y|}{|x - y|} = \sup_{x,y \in \mathbb{R}} |x + y| = \infty. \end{aligned}$$

Dadas as funções Lipschitz $f, g, f_n : X \longrightarrow \mathbb{R}$, com $n \in \mathbb{N}$, usaremos a notação

$$f \vee g = \max\{f, g\} \text{ (junção), } f \wedge g = \min\{f, g\} \text{ (reunião), } \bigvee f_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n \text{ e } \bigwedge f_n = \inf_{n \in \mathbb{N}} f_n.$$

Proposição 2.2.4. *Sejam X um espaço métrico e $f, g, f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ funções Lipschitz, com $n \in \mathbb{N}$. Então, $f \vee g$ e $f \wedge g$ são Lipschitz e ainda*

$$Lip(f \vee g) \leq \max\{Lip(f), Lip(g)\} \text{ e } Lip(f \wedge g) \leq \max\{Lip(f), Lip(g)\}.$$

Além disso, se as aplicações $\bigvee f_n$ e $\bigwedge f_n$ são finitas em todos os pontos, então $\bigvee f_n$ e $\bigwedge f_n$ são Lipschitz e também

$$Lip\left(\bigvee f_n\right) \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} Lip(f_n) \text{ e } Lip\left(\bigwedge f_n\right) \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} Lip(f_n).$$

Demonstração. Primeiramente, considere $h = f \vee g$, $a = \max\{Lip(f), Lip(g)\}$ e fixe os pontos $p, q \in X$. Sem perda de generalidade, suponha que $h(p) \geq h(q)$ e $h(p) = f(p)$. Daí, é claro que $h(q) \geq f(q)$ e ainda

$$|h(p) - h(q)| \leq |f(p) - f(q)| \leq ad(p, q).$$

Logo, h é Lipschitz e $Lip(h) \leq a$, ou seja

$$Lip(f \vee g) \leq \max\{Lip(f), Lip(g)\}.$$

Analogamente, temos que

$$Lip(f \wedge g) \leq \max\{Lip(f), Lip(g)\}.$$

Para mostrar as últimas desigualdades, observe que a junção e reunião de uma família infinita são limites pontuais das junções e reuniões de todas as subfamílias finitas. Assim, usando a Proposição 2.1.3 obtemos que

$$Lip\left(\bigvee f_n\right) \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} Lip(f_n) \text{ e } Lip\left(\bigwedge f_n\right) \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} Lip(f_n).$$

□

Os dois próximos resultados são importantes na teoria Lipschitz, pois eles dizem que as funções Lipschitz definidas em um subconjunto de um espaços métrico em $\mathbb{K}$ podem ser estendidas para o espaço métrico inteiro. Além disso, quando $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ os números de Lipschitz da função e de sua extensão são iguais e no caso em que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ obtemos uma desigualdade entre esses números de Lipschitz.

Teorema 2.2.1 (Extensão de McShane). *Sejam X um espaço métrico, X_0 um subconjunto não-vazio de X e $f_0 : X_0 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função Lipschitz. Então, existe uma extensão Lipschitz $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ de f_0 tal que $Lip(f) = Lip(f_0)$. Se f_0 é limitada, então existe uma extensão Lipschitz $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ de f_0 tal que*

$$Lip(g) = Lip(f_0) \text{ e } \|g\|_\infty = \|f_0\|_\infty.$$

Demonstração. Inicialmente, considere a aplicação $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \bigwedge_{q \in X_0} (f_0(q)\chi_X + Lip(f_0)d_q)(x)$$

onde χ_X é a função característica de X . Vamos provar que f estende f_0 . Como f_0 é Lipschitz, sabemos que

$$|f_0(p) - f_0(q)| \leq Lip(f_0)d(p, q)$$

para cada $p, q \in X_0$. Com isso,

$$\begin{aligned} f_0(p) &\leq f_0(q) + Lip(f_0)d(p, q) \\ &= f_0(q)\chi_X(p) + Lip(f_0)d_q(p) \\ &= (f_0(q)\chi_X + Lip(f_0)d_q)(p), \end{aligned}$$

implicando que $f_0(p) \leq f(p)$ para todo $p \in X_0$. Por outro lado, como

$$f(q) \leq f_0(q)\chi_X(q) + Lip(f_0)d_q(q) = f_0(q),$$

segue que $f(q) \leq f_0(q)$ para qualquer $q \in X_0$. Então, vale a igualdade $f = f_0$ em X_0 . Agora, mostraremos que f é Lipschitz. Para cada $q \in X_0$ fixado, é claro a aplicação $f_0(q) + Lip(f_0)d_q$ é Lipschitz com

$$Lip(f_0(q) + Lip(f_0)d_q) = Lip(f_0),$$

já que d_q é Lipschitz e $Lip(d_q) = 1$ pelo Exemplo 2.1.1. Sendo assim, a Proposição 2.2.4 garante que f é Lipschitz com $Lip(f) \leq Lip(f_0)$. Por outro lado, $Lip(f) \geq Lip(f_0)$, pois f estende de f_0 . Portanto, vale a igualdade $Lip(f) = Lip(f_0)$, provando a primeira parte do teorema. Para mostrar a parte final, vamos supor que f_0 é limitada. Assim, sejam $a = \|f_0\|_\infty$ e a aplicação

$$\begin{aligned} g : X &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto g(x) = f \wedge a\chi_X. \end{aligned}$$

Note que g estende f_0 , pois $f(x) \leq a$ para cada $x \in X_0$ e, consequentemente, $g = f$ em X_0 . Além disso, a Proposição 2.2.4 diz que g é Lipschitz e $Lip(g) \leq Lip(f) = Lip(f_0)$, obtendo que

$$Lip(g) = Lip(f_0),$$

já que a desigualdade $Lip(g) \geq Lip(f_0)$ segue do fato de que g estende f_0 . Por fim, pela definição de g , temos que $\|g\|_\infty \leq a = \|f_0\|_\infty$ e, como g estende f_0 , a desigualdade $\|g\|_\infty \geq \|f_0\|_\infty$ é clara, implicando que

$$\|g\|_\infty = \|f_0\|_\infty.$$

□

O corolário abaixo diz que podemos estender funções Lipschitz a valores complexos e que o número de Lipschitz não é preservado.

Corolário 2.2.1. *Sejam X um espaço métrico, X_0 um subconjunto não-vazio de X e $f_0 : X_0 \longrightarrow \mathbb{C}$ uma função Lipschitz. Então, existe uma extensão Lipschitz $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ de f_0 tal que $Lip(f) \leq \sqrt{2}Lip(f_0)$. Além disso, se f_0 é limitada, obtemos uma extensão Lipschitz $g : X \longrightarrow \mathbb{C}$ de f_0 tal que*

$$Lip(g) \leq \sqrt{2}Lip(f_0) \text{ e } \|g\|_\infty = \|f_0\|_\infty.$$

Demonstração. De acordo com a Proposição 2.2.1, as funções $Re f_0$ e $Im f_0$ são Lipschitz e também vale a desigualdade

$$\max\{Lip(Re f_0), Lip(Im f_0)\} \leq Lip(f_0). \quad (2.4)$$

Com isso, usando o Teorema 2.2.1, podemos estender Ref_0 e Imf_0 para X , obtendo as funções Lipschitz $\widetilde{Ref_0}, \widetilde{Imf_0} : X \rightarrow \mathbb{R}$ tais que

$$Lip(\widetilde{Ref_0}) = Lip(Ref_0) \text{ e } Lip(\widetilde{Imf_0}) = Lip(Imf_0). \quad (2.5)$$

Defina $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ como a função cujas partes real e imaginária são as funções $\widetilde{Ref_0}$ e $\widetilde{Imf_0}$. Sendo assim, a Proposição 2.2.1 garante que f é Lipschitz e ainda, por (2.5) e (2.4), temos que

$$\begin{aligned} Lip(f) &\leq \sqrt{2} \max\{Lip(\widetilde{Ref_0}), Lip(\widetilde{Imf_0})\} \\ &= \sqrt{2} \max\{Lip(Ref_0), Lip(Imf_0)\} \\ &\leq \sqrt{2} Lip(f_0). \end{aligned}$$

Provaremos a parte final do Corolário. Supondo que f_0 é limitada, seja $a = \|f_0\|_\infty$ e defina a aplicação $\pi_a : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ por

$$\pi_a(z) = \begin{cases} z, & \text{se } |z| \leq a \\ \frac{a}{|z|}z, & \text{se } |z| > a. \end{cases}$$

Com isso, é claro que $|\pi_a(z)| \leq a$ para todo $z \in \mathbb{C}$ e, além disso, π_a é Lipschitz com $Lip(\pi_a) \leq 1$, pois

- Para $|z| \leq a$ e $|z'| \leq a$,

$$|\pi_a(z) - \pi_a(z')| = |z - z'|.$$

- Para $|z| > a$ e $|z'| > a$,

$$\begin{aligned} |\pi_a(z) - \pi_a(z')| &= \left| \frac{a}{|z|}z - \frac{a}{|z'|}z' \right| < \left| \frac{a}{a}z - \frac{a}{|z'|}z' \right| = \left| \frac{a}{|z'|}z' - z \right| \\ &< \left| \frac{a}{a}z' - z \right| = |z' - z| = |z - z'|. \end{aligned}$$

- Para $|z| > a$ e $|z'| \leq a$,

$$|\pi_a(z) - \pi_a(z')| = \left| \frac{a}{|z|}z - z' \right| < \left| \frac{a}{a}z - z' \right| = |z - z'|.$$

Agora, vamos definir a aplicação $g = \pi_a \circ f : X \rightarrow \mathbb{C}$. Pela Proposição 2.1.1, g é Lipschitz com

$$Lip(g) \leq Lip(\pi_a)Lip(f) = Lip(f) \leq \sqrt{2}Lip(f_0).$$

Por fim, mostraremos que $\|g\|_\infty = \|f_0\|_\infty$. Por um lado, segue claramente que

$$\|g\|_\infty = \|\pi_a \circ f\|_\infty = \sup_{z \in X} |\pi_a \circ f(z)| = \sup_{z \in X} |\pi_a(f(z))| \leq a = \|f_0\|_\infty.$$

Por outro lado, note que g estende f_0 em X_0 , pois $|f_0(z_0)| \leq a$ para qualquer $z_0 \in X_0$ e, por isso,

$$g(z_0) = \pi_a \circ f(z_0) = \pi_a(f(z_0)) = \pi_a(f_0(z_0)) = f_0(z_0).$$

Portanto, $\|g\|_\infty \geq \|f_0\|_\infty$, concluindo a igualdade $\|g\|_\infty = \|f_0\|_\infty$. □

O exemplo a seguir mostra que em geral não podemos ter $Lip(f) = Lip(f_0)$ no caso complexo.

Exemplo 2.2.2. Seja um conjunto com quatro elementos $X = \{p_1, p_2, p_3, e\}$ e defina $d(e, p_i) = 1$ para todo $i = 1, 2, 3$ e $d(p_i, p_j) = 2$ para cada $i \neq j$. Considere $X_0 = X - \{e\}$ e $f_0 : X_0 \rightarrow \mathbb{C}$ a imersão isométrica que leva os pontos de X_0 nos vértices de um triângulo equilátero de lado igual a 2. É claro que f_0 é Lipschitz e

$$Lip(f_0) = \sup_{p_i \neq p_j} \frac{|f_0(p_i) - f_0(p_j)|}{d(p_i, p_j)} = \frac{2}{2} = 1.$$

Logo, a extensão $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ de f_0 com o menor número de Lipschitz aplica o ponto e no centro do triângulo equilátero e tem $Lip(f) = \frac{2}{\sqrt{3}}$, pois a distância do centro do triângulo aos vértices desse triângulo é $\frac{2}{\sqrt{3}}$ e, para cada $i \neq j$, temos que

$$\frac{|f(e) - f(p_i)|}{d(e, p_i)} = \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{1} = \frac{2}{\sqrt{3}} \text{ e } \frac{|f(p_i) - f(p_j)|}{d(p_i, p_j)} = \frac{2}{2} = 1,$$

implicando que $Lip(f) = \frac{2}{\sqrt{3}}$. Além disso, se $f(e)$ for diferente do centro do triângulo, teremos que a distância de um dos vértices do triângulo ao ponto $f(e)$ é maior que $\frac{2}{\sqrt{3}}$ e, consequentemente, $Lip(f) > \frac{2}{\sqrt{3}}$.

Esse exemplo mostra que no caso complexo, em geral, não podemos ter $Lip(f) < \frac{2}{\sqrt{3}} Lip(f_0)$, mas, de acordo com o Corolário 2.2.1, sempre podemos ter $Lip(f) \leq \sqrt{2} Lip(f_0)$. Esse fato nos remete a um problema mais geral que é o de determinar as melhores constantes para extensões de funções de Lipschitz em espaços de Banach arbitrários. Em [36, Teorema 5.15] está provado que a melhor constante para a extensão no caso $\mathbb{C}$ é $\frac{4}{\pi}$.

2.3 Espaços de funções Lipschitz particulares

O nosso objetivo nesta seção é estudar dois novos espaços funções vetoriais no contexto Lipschitz, um formado pelas funções Lipschitz limitadas e o outro composto pelas funções Lipschitz que preservam ponto base. Vamos mostrar que cada um desses espaços com uma norma adequada são espaços de Banach. Por fim, mostraremos que esses dois espaços são isométricos.

Definição 2.3.1. Sejam X um espaço métrico e E um espaço de Banach. Definimos por $Lip(X; E)$ o espaço de todas as funções Lipschitz limitada, e chamaremos esse espaço de *espaço de Lipschitz*. Em símbolo, temos

$$Lip(X; E) = \{f : X \rightarrow E; f \text{ é Lipschitz e limitada}\}.$$

Definição 2.3.2. Considere X um espaço métrico pontuado e E um espaço de Banach. Definimos por $Lip_0(X; E)$ o espaço de todas as *funções Lipschitz que preservam ponto base*, ou seja,

$$Lip_0(X; E) = \{f : X \rightarrow E; f \text{ é Lipschitz e } f(e_X) = 0\}.$$

Em particular, quando $E = \mathbb{K}$ denotamos $Lip(X; \mathbb{K})$ e $Lip_0(X; \mathbb{K})$ apenas por $Lip(X)$ e $Lip_0(X)$, respectivamente. Além disso, vamos usar a notação $Lip_0(X) = X^\#$ e quando queremos especificar o corpo escalar das funções Lipschitz nos espaços acima, escrevemos

$$Lip(X; \mathbb{R}), \quad Lip(X; \mathbb{C}), \quad Lip_0(X; \mathbb{R}) \quad \text{ou} \quad Lip_0(X; \mathbb{C}).$$

As próximas duas proposições mostram que podemos munir os espaços $Lip(X; E)$ e $Lip_0(X; E)$ com normas específicas, tornando-os espaços vetoriais normados.

Proposição 2.3.1. *A função*

$$\begin{aligned} Lip(\cdot) : Lip_0(X; E) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\longmapsto Lip(f) \end{aligned}$$

define uma norma no espaço $Lip_0(X; E)$.

Demonstração. Dados $\lambda \in \mathbb{K}$ e $f, g \in Lip_0(X; E)$, seguindo os mesmos passos da demonstração da Proposição 2.2.2, concluímos que

$$Lip(\lambda f) = |\lambda|Lip(f) \quad \text{e} \quad Lip(f + g) \leq Lip(f) + Lip(g).$$

Daí, para mostrar que $Lip(f)$ é uma norma em $Lip_0(X; E)$, devemos provar que

$$Lip(f) \geq 0 \quad \text{e} \quad Lip(f) = 0 \iff f = 0.$$

De fato, se $f \in Lip_0(X; E)$ e $x, y \in X$, então $d(x, y) \geq 0$ e $d(f(x), f(y)) \geq 0$. Assim,

$$Lip(f) = \sup_{x, y \in X} \frac{d(f(x), f(y))}{d(x, y)} \geq 0.$$

Suponha agora que $Lip(f) = 0$. Por f ser Lipschitz, para todos $x, y \in X$, obtemos

$$0 \leq d(f(x), f(y)) \leq Lip(f)d(x, y) = 0d(x, y) = 0,$$

implicando que

$$d(f(x), f(y)) = 0 \implies f(x) = f(y).$$

Em particular, como f preserva ponto base, obtemos

$$f(x) = f(e) = 0 \implies f = 0.$$

Reciprocamente, suponha que $f = 0$. Logo, $f(x) = f(y) = 0$ para quaisquer $x, y \in X$ e, com isso, para todo $M \geq 0$ vale a desigualdade

$$d(f(x), f(y)) = 0 \leq Md(x, y).$$

Sendo assim, a menor constante que satisfaz a desigualdade acima é o zero, ou seja, $Lip(f) = 0$. Portanto, $Lip(f)$ é uma norma no espaço $Lip_0(X; E)$. □

Como o número de Lipschitz de qualquer função constante é zero, segue que $Lip(\cdot)$ não é uma norma em $Lip(X; E)$, mas $Lip(\cdot)$ é uma semi-norma nesse espaço. Além disso, o número de Lipschitz pode ser usado para definimos uma norma em $Lip(X; E)$, conforme veremos na proposição seguinte.

Proposição 2.3.2. *No espaço $Lip(X; E)$, a expressão*

$$\|f\|_L = \max\{\|f\|_\infty, Lip(f)\}$$

define uma norma, denominada de norma Lipschitz.

Demonstração. Para qualquer $f \in Lip(X; E)$, temos $\|f\|_\infty \geq 0$ e $Lip(f) \geq 0$. Assim,

$$\|f\|_L = \max\{\|f\|_\infty, Lip(f)\} \geq 0.$$

Suponha que $\|f\|_L = 0$, então

$$\|f\|_\infty = 0 \text{ e } Lip(f) = 0 \implies f = 0.$$

Reciprocamente, se $f = 0$, é claro que

$$\|f\|_\infty = 0 \text{ e } Lip(f) = 0 \implies \|f\|_L = 0.$$

Para todos $\lambda \in \mathbb{K}$ e $f \in Lip(X; E)$, segue, analogamente a demonstração do item (a) da Proposição 2.2.2, que $Lip(\lambda f) = |\lambda|Lip(f)$ e, pelo fato de $\|\cdot\|_\infty$ ser uma norma, temos

$$\begin{aligned} \|\lambda f\|_L &= \max\{\|\lambda f\|_\infty, Lip(\lambda f)\} = \max\{|\lambda|\|f\|_\infty, |\lambda|Lip(f)\} \\ &= |\lambda| \max\{\|f\|_\infty, Lip(f)\} = |\lambda|\|f\|_L. \end{aligned}$$

Finalmente, vamos provar a desigualdade triangular. Dadas $f, g \in Lip(X; E)$, como $\|\cdot\|_\infty$ é uma norma e de forma semelhante a demonstração do item (b) da Proposição 2.2.2, obtemos

$$\|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty \text{ e } Lip(f + g) \leq Lip(f) + Lip(g).$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} \|f + g\|_L &= \max\{\|f + g\|_\infty, Lip(f + g)\} \\ &\leq \max\{\|f\|_\infty + \|g\|_\infty, Lip(f) + Lip(g)\} \\ &\leq \max\{\|f\|_\infty, Lip(f)\} + \max\{\|g\|_\infty, Lip(g)\} \\ &= \|f\|_L + \|g\|_L. \end{aligned}$$

Portanto, $\|\cdot\|_L$ é uma norma em $Lip(X; E)$. □

Agora, já que sabemos que $Lip(X; E)$ e $Lip_0(X; E)$ são espaços normados, o leitor poderia questionar se esses espaços são de Banach com suas respectivas normas. Veremos nos dois próximos teoremas que a resposta para tal questionamento é verdadeira.

Teorema 2.3.1. *Para qualquer espaço métrico X e qualquer espaço de Banach E , o espaço $(Lip(X; E), \|\cdot\|_L)$ é Banach.*

Demonstração. Vamos usar o Teorema 1.1.1. Seja $(f_n)_{n=1}^\infty$ uma sequência em $Lip(X; E)$ tal que $\sum_{n=1}^\infty \|f_n\|_L < \infty$. Nosso objetivo é provar que a série $\sum_{n=1}^\infty f_n$ é convergente na norma Lipschitz $\|\cdot\|_L$. Como $\|f_n\|_\infty \leq \|f_n\|_L$ e $Lip(f_n) \leq \|f_n\|_L$ para cada $n \in \mathbb{N}$, tem-se

$$\sum_{n=1}^\infty \|f_n\|_\infty \leq \sum_{n=1}^\infty \|f_n\|_L < \infty \text{ e } \sum_{n=1}^\infty Lip(f_n) \leq \sum_{n=1}^\infty \|f_n\|_L < \infty,$$

implicando que as séries $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_{\infty}$ e $\sum_{n=1}^{\infty} Lip(f_n)$ são convergentes. Com isso, a série $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge pontualmente, pois

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|f_n(x)\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_{\infty}, \quad (2.6)$$

para cada $x \in X$. Assim, a função $f : X \rightarrow E$ dada por $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ está bem definida. Mostraremos que $f \in Lip(X; E)$. Primeiramente, note que f é limitada, pois

$$\|f(x)\| \leq \|f\|_{\infty} = \left\| \sum_{n=1}^{\infty} f_n \right\|_{\infty} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_{\infty}$$

para qualquer $x \in X$. Por outro lado, como f_n é Lipschitz para todo $n \in \mathbb{N}$, obtemos

$$\begin{aligned} \|f(x) - f(x')\| &= \left\| \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) - \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x') \right\| = \left\| \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) - f_n(x') \right\| \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \|f_n(x) - f_n(x')\| \leq \left[\sum_{n=1}^{\infty} Lip(f_n) \right] d(x, x'), \end{aligned}$$

para todos $x, x' \in X$. Consequentemente, f é Lipschitz e $Lip(f) \leq \sum_{n=1}^{\infty} Lip(f_n)$, ou seja, $f \in Lip(X; E)$. Agora, para cada $k \in \mathbb{N}$, considere $g_k = \sum_{n=1}^k f_n$. Claramente, g_k é Lipschitz para todo $k \in \mathbb{N}$, uma vez que g_k é a soma finita de funções Lipschitz. Por (2.6), para cada $x \in X$, concluímos que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n(x)\|$ converge. Além disso, como a série $\sum_{n=1}^{\infty} Lip(f_n)$ também converge, para qualquer $\epsilon > 0$ dado, existem $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tais que

$$\sum_{n=n_1}^{\infty} \|f_n(x)\| = \left\| \sum_{n=n_1}^{\infty} f_n(x) \right\| < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{e} \quad \sum_{n=n_2}^{\infty} Lip(f_n) < \frac{\epsilon}{2},$$

para todo $x \in X$. Tomando $k = \max\{n_1, n_2\} \in \mathbb{N}$, temos

$$\sum_{n=k}^{\infty} \|f_n(x)\| < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{e} \quad \sum_{n=k}^{\infty} Lip(f_n) < \frac{\epsilon}{2},$$

para cada $x \in X$, e desse modo,

$$\begin{aligned} \|f - g_k\|_{\infty} &= \sup_{x \in X} \|f(x) - g_k(x)\| = \sup_{x \in X} \left\| \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) - \sum_{n=1}^k f_n(x) \right\| \\ &= \sup_{x \in X} \left\| \sum_{n=k+1}^{\infty} f_n(x) \right\| \leq \sup_{x \in X} \sum_{n=k+1}^{\infty} \|f_n(x)\| \leq \frac{\epsilon}{2} < \epsilon, \end{aligned}$$

e ainda

$$Lip(f - g_k) = Lip\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n - \sum_{n=1}^k f_n\right) = Lip\left(\sum_{n=k+1}^{\infty} f_n\right) \leq \sum_{n=k+1}^{\infty} Lip(f_n) < \frac{\epsilon}{2} < \epsilon.$$

Logo,

$$\|f - g_k\|_{\infty} \rightarrow 0 \quad \text{e} \quad Lip(f - g_k) \rightarrow 0 \implies \|f - g_k\|_L \rightarrow 0$$

e, portanto, $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge para f na norma Lipschitz $\|\cdot\|_L$. □

Teorema 2.3.2. *Para qualquer espaço métrico pontuado X e qualquer espaço de Banach E , o espaço $(Lip_0(X; E), Lip(\cdot))$ é Banach.*

Demonstração. Pelo o Teorema 1.1.1, considerando qualquer sequência $(f_n)_{n=1}^\infty$ em $Lip_0(X; E)$ tal que $\sum_{n=1}^\infty Lip(f_n) < \infty$, temos que provar que a série $\sum_{n=1}^\infty f_n$ é convergente com a norma $Lip(\cdot)$. Para isso, como

$$\|f_n(x)\| = \|f_n(x) - f_n(e)\| \leq Lip(f_n)d(x, e)$$

para todos $x \in X$ e $n \in \mathbb{N}$, segue que

$$\sum_{n=1}^\infty \|f_n(x)\| \leq \left[\sum_{n=1}^\infty Lip(f_n) \right] d(x, e) < \infty.$$

Assim, a série $\sum_{n=1}^\infty \|f_n(x)\|$ é convergente para cada $x \in X$, implicando na convergência pontual da série $\sum_{n=1}^\infty f_n$. Daí, podemos considerar a função $f : X \rightarrow E$ dada por $f(x) = \sum_{n=1}^\infty f_n(x)$. Note que $f \in Lip_0(X; E)$, pois

$$f(e) = \sum_{n=1}^\infty f_n(e) = \sum_{n=1}^\infty 0 = 0$$

e também

$$\begin{aligned} \|f(x) - f(x')\| &= \left\| \sum_{n=1}^\infty f_n(x) - \sum_{n=1}^\infty f_n(x') \right\| = \left\| \sum_{n=1}^\infty (f_n(x) - f_n(x')) \right\| \\ &\leq \sum_{n=1}^\infty \|f_n(x) - f_n(x')\| \leq \left[\sum_{n=1}^\infty Lip(f_n) \right] d(x, x') < \infty \end{aligned}$$

para todos $x, x' \in X$. Agora, vamos mostrar que $\sum_{n=1}^\infty f_n$ converge para f na norma $Lip(\cdot)$. De fato, defina $g_k = \sum_{n=1}^k f_n$ e observe que $g_k \in Lip_0(X; E)$, porque g_k é a soma finita de funções em $Lip_0(X; E)$. Já que a série $\sum_{n=1}^\infty Lip(f_n)$ é convergente, dado qualquer $\epsilon > 0$, podemos encontrar $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{n=k}^\infty Lip(f_n) < \epsilon$$

para todo $k \geq n_0$. Com isso,

$$Lip(f - g_k) = Lip\left(\sum_{n=1}^\infty f_n - \sum_{n=1}^k f_n\right) = Lip\left(\sum_{n=k+1}^\infty f_n\right) \leq \sum_{n=k+1}^\infty Lip(f_n) < \epsilon.$$

Portanto, $\sum_{n=1}^\infty f_n$ converge para f com norma $Lip(\cdot)$. □

Vamos apresentar agora alguns resultados úteis para relacionarmos os espaços Lip e Lip_0 . Para isso, começaremos com o seguinte lema.

Lema 2.3.1. *Sejam Y_0 um espaço métrico e Y o complemento de Y_0 . Se $h_0 \in Lip(Y_0)$, então existe uma única extensão $h \in Lip(Y)$ com $\|h_0\|_L = \|h\|_L$.*

Demonstração. Dada qualquer $h_0 \in Lip(Y_0)$, a Proposição 2.1.2 garante que h_0 possui uma única extensão Lipschitz $h : Y \rightarrow \mathbb{K}$ satisfazendo

$$Lip(h_0) = Lip(h). \quad (2.7)$$

Mostraremos que $h \in Lip(Y)$ e $\|h_0\|_\infty = \|h\|_\infty$. Para isso, sejam $a \in Y$ e uma sequência $(x_n)_{n=1}^\infty$ em Y_0 que converge para a . Então,

$$|h(a)| = |h(\lim_n x_n)| = \lim_n |h(x_n)| = \lim_n |h_0(x_n)| \leq \|h_0\|_\infty,$$

o que significa que $h \in Lip(Y)$ e

$$\|h\|_\infty \leq \|h_0\|_\infty. \quad (2.8)$$

Para provar a desigualdade contrária, tome qualquer $x \in Y_0$ e note que

$$|h_0(x)| = |h(x)| \leq \|h\|_\infty.$$

Logo, $\|h_0\|_\infty \leq \|h\|_\infty$ e, por (2.8), vale a igualdade $\|h_0\|_\infty = \|h\|_\infty$. Portanto, segue de (2.7) que

$$\|h_0\|_L = \|h\|_L.$$

□

Proposição 2.3.3. *Considere os espaços métricos (X, d) , $Y_0 = (X, d')$ com a métrica d' definida por*

$$d'(x, y) = \min\{d(x, y), 2\}$$

e $(Y, \tilde{d})$ o completamento de Y_0 . Então:

- (a) $Lip(X)$ e $Lip(Y_0)$ são isomorfos isometricamente;
- (b) $Y \in \mathcal{M}_2$;
- (c) $Lip(Y_0)$ e $Lip(Y)$ são isomorfos isometricamente;
- (d) $Lip(X)$ e $Lip(Y)$ são isomorfos isometricamente.

Demonstração. (a) Primeiramente, denotaremos por $Lip_d(f)$ e $Lip_{d'}(f)$ o número de Lipschitz da função f em relação aos espaços X e Y_0 , respectivamente, e também denotaremos por $\|f\|_{L,X}$ e $\|f\|_{L,Y_0}$ norma de Lipschitz da função f em relação aos espaços $Lip(X)$ e $Lip(Y_0)$, respectivamente. Vamos mostrar que $Lip(Y_0) = Lip(X)$. Por um lado, $Lip(Y_0) \subset Lip(X)$, pois dada $f \in Lip(Y_0)$ e pontos $x, y \in X$, tem-se que f é limitada e também

$$|f(x) - f(y)| \leq Lip_{d'}(f)d'(x, y) \leq Lip_{d'}(f)d(x, y),$$

ou seja, $f \in Lip(X)$ e ainda $Lip_d(f) \leq Lip_{d'}(f)$, implicando que

$$\|f\|_{L,X} \leq \|f\|_{L,Y_0}. \quad (2.9)$$

Por outro lado, tomando $f \in Lip(X)$ e $x, y \in X$, segue que f é limitada e temos duas possibilidades:

- Se $d(x, y) \leq 2$, então $d'(x, y) = d(x, y)$ e

$$|f(x) - f(y)| \leq Lip_d(f)d(x, y) = Lip_d(f)d'(x, y) \leq \|f\|_{L,X}d'(x, y).$$

- Se $d(x, y) > 2$, temos $d'(x, y) = 2$ e

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x)| + |f(y)| \leq \|f\|_\infty + \|f\|_\infty = 2\|f\|_\infty \leq \|f\|_{L,X} d'(x, y).$$

Daí, vemos que $f \in Lip(Y_0)$ e $Lip_X(f) \leq \|f\|_{L,X}$, concluindo que $Lip(X) \subset Lip(Y_0)$ e

$$\|f\|_{L,Y_0} \leq \|f\|_{L,X}. \quad (2.10)$$

Sendo assim, vale a igualdade $Lip(Y_0) = Lip(X)$ e, com isso, está bem definida a aplicação identidade

$$\begin{aligned} i : Lip(Y_0) &\longrightarrow Lip(X) \\ f &\longmapsto i(f) = f. \end{aligned}$$

É claro que i é uma bijeção linear e, além disso, i é isometria por (2.9) e (2.10). Logo, os espaços $Lip(X)$ e $Lip(Y_0)$ são isomorfos isometricamente.

(b) Já que Y é completo, basta mostrar que $\tilde{d}(x, y) \leq 2$ para cada $x, y \in Y$. Considere quaisquer $x, y \in Y$, logo existem sequências

$$(x_n)_{n=1}^\infty, (y_n)_{n=1}^\infty \in Y_0 \text{ tais que } \lim_n x_n = x \text{ e } \lim_n y_n = y.$$

Com isso, pela continuidade da métrica $\tilde{d}$ em Y , obtemos

$$\tilde{d}(x, y) = \tilde{d}\left(\lim_n x_n, \lim_n y_n\right) = \lim_n \tilde{d}(x_n, y_n) = \lim_n d'(x_n, y_n) \leq 2.$$

Portanto, $Y \in \mathcal{M}_2$.

(c) De acordo com o Lema 2.3.1, podemos definir a aplicação

$$\begin{aligned} \Phi : Lip(Y_0) &\longrightarrow Lip(Y) \\ h_0 &\longmapsto \Phi(h_0) = h \end{aligned}$$

e também vale a igualdade

$$\|\Phi(h_0)\|_L = \|h\|_L = \|h_0\|_L. \quad (2.11)$$

Afirmamos que Φ é linear. De fato, dados $\lambda \in \mathbb{K}$ e $h_0, f_0 \in Lip(Y_0)$, segue que $\lambda f_0 + h_0 \in Lip(Y_0)$. Assim, existem $h, f, P \in Lip(Y)$ tais que $\Phi(h_0) = h$, $\Phi(f_0) = f$ e $\Phi(\lambda f_0 + h_0) = P$. Com isso, considerando $a \in Y$ e uma sequência $(x_n)_{n=1}^\infty$ em Y_0 que converge para a , temos

$$\begin{aligned} (\lambda f + h)(a) &= \lambda f(a) + h(a) = \lambda f(\lim_n x_n) + h(\lim_n x_n) \\ &= \lambda \lim_n f(x_n) + \lim_n h(x_n) = \lambda \lim_n f_0(x_n) + \lim_n h_0(x_n) \\ &= \lim_n (\lambda f_0 + h_0)(x_n) = \lim_n P(x_n) \\ &= \lim_n P(\lim_n x_n) = P(a) \end{aligned}$$

e segue que $\lambda f + h = P$, ou seja, $\lambda \Phi(f_0) + \Phi(h_0) = \Phi(\lambda f_0 + h_0)$. Agora, provaremos que Φ é sobrejetiva. Sejam $f \in Lip(Y)$ e a aplicação

$$\begin{aligned} f_0 : Y_0 &\longrightarrow \mathbb{K} \\ y &\longmapsto f_0(y) = f(y). \end{aligned}$$

Observe que f_0 é Lipschitz, já que f_0 é a restrição da função Lipschitz f em Y_0 . Além disso, f_0 é limitada, pois

$$|f_0(y)| = |f(y)| \leq \|f\|_\infty$$

para cada $y \in Y_0$. Sendo assim, $f_0 \in Lip(Y_0)$. Para provar que $\Phi(f_0) = f$, vamos denotar por $\Phi(f_0) = F$ e mostraremos que $F = f$. Para isso, sejam $a \in Y$ e uma sequência $(x_n)_{n=1}^\infty$ em Y_0 que converge para a , então

$$\begin{aligned} F(a) &= F(\lim_n x_n) = \lim_n F(x_n) \\ &= \lim_n f_0(x_n) = \lim_n f(x_n) \\ &= f(\lim_n x_n) = f(a), \end{aligned}$$

implicando $\Phi(f_0) = F = f$ como queríamos. Portanto, por (2.11), Φ é uma isometria, concluindo que Φ é isomorfismo isométrico.

(d) Segue diretamente dos itens (a) e (c) acima. $\square$

A Proposição 2.3.3 garante que qualquer função Lipschitz limitada definida em um espaço métrico e tomando valores em $\mathbb{K}$ pode ser vista como uma função Lipschitz limitada definida em um espaço métrico completo de $\mathcal{M}_2$ em $\mathbb{K}$.

Veremos abaixo que qualquer espaço métrico X em $\mathcal{M}_2$ pode ser mergulhado isometricamente em $Lip(X)^*$. De fato, dado um espaço métrico (X, d) em $\mathcal{M}_2$ e um ponto $p \in (X, d)$, segue da definição de d' que $d = d'$. Assim, podemos assumir $p \in (X, d')$ e considerar a aplicação

$$\begin{aligned} \hat{p} : Lip(X) &\longrightarrow \mathbb{K} \\ f &\longmapsto \hat{p}(f) = f(p), \end{aligned}$$

chamada de “avaliação em p ”. Note $\hat{p}$ tem as seguintes propriedades:

- $\hat{p}$ é linear.

De fato, para quaisquer $\alpha \in \mathbb{K}$ e $f, g \in Lip(X)$, temos

$$\hat{p}(\alpha f + g) = (\alpha f + g)(p) = (\alpha f)(p) + g(p) = \alpha f(p) + g(p) = \alpha \hat{p}(f) + \hat{p}(g).$$

- $\hat{p}$ é limitada.

Seja $f \in Lip(X)$ e fixe arbitrariamente $q \in X$. Logo, por f ser Lipschitz, tem-se

$$\begin{aligned} |\hat{p}(f)| &= |f(p)| = |f(p) - f(q) + f(q)| \\ &\leq |f(p) - f(q)| + |f(q)| \\ &\leq Lip(f)d'(p, q) + \|f\|_\infty \\ &\leq \|f\|_L d'(p, q) + \|f\|_L \\ &= (1 + d'(p, q))\|f\|_L \\ &\leq (1 + 2)\|f\|_L = 3\|f\|_L. \end{aligned}$$

- $\|\hat{p}\| = 1$

Como $|f(x)| \leq \|f\|_L$ para cada $f \in Lip(X)$ e $x \in X$, segue que

$$\|\hat{p}\| = \sup_{\|f\|_L \leq 1} |\hat{p}(f)| = \sup_{\|f\|_L \leq 1} |f(p)| \leq \sup_{\|f\|_L \leq 1} \|f\|_L \leq 1.$$

Por fim, considerando $f = 1$, é claro que $f \in Lip(X)$ e $\|f\|_L = 1$, implicando que $\|\hat{p}\| = 1$.

Além disso, por [36, Página 43] constatamos a igualdade $\|\hat{p} - \hat{q}\| = d'(p, q)$. Concluimos, então, que a aplicação

$$\begin{aligned} \phi : X &\longrightarrow Lip(X)^* \\ p &\longmapsto \phi(p) = \hat{p} \end{aligned}$$

está bem definida e é uma imersão isométrica, que aplica qualquer ponto de $X \in \mathcal{M}_2$ na esfera unitária do espaço de Banach $Lip(X)^*$.

Considerando um espaço métrico $X \in \mathcal{M}_2$, podemos adicionar um ponto base fictício e a X tal que $d(x, e) = 1$ para todo $x \in X$. Assim, denotamos o espaço métrico pontuado resultante por X^e , isto é,

$$X^e = X \cup \{e\},$$

e tem-se $X^e \in \mathcal{M}_0 \cap \mathcal{M}_2$. No próximo teorema, veremos que os espaços $Lip(X)$ e $Lip_0(X^e)$ são indistinguíveis do ponto de vista métrico.

Teorema 2.3.3. *Seja $X \in \mathcal{M}_2$. Então, $Lip(X)$ e $Lip_0(X^e)$ são isomorfos isometricamente.*

Demonstração. Dada $f \in Lip(X)$, considere a extensão de f em X^e dada por

$$\begin{aligned} T_f : X^e &\longrightarrow \mathbb{K} \\ x &\longmapsto T_f(x) = f(x) \\ e &\longmapsto T_f(e) = 0. \end{aligned}$$

É claro que T_f preserva ponto base e ainda T_f é Lipschitz, já que

$$|T_f(x) - T_f(y)| = |f(x) - f(y)| \leq Lip(f)d(x, y) \leq \|f\|_L d(x, y)$$

e

$$|T_f(x) - T_f(e)| = |T_f(x) - 0| = |f(x)| \leq \|f\|_\infty 1 \leq \|f\|_L d(x, e)$$

para todos $x, y \in X$. Logo, $T_f \in Lip_0(X^e)$ e $Lip(T_f) \leq \|f\|_L$. Para provar a outra desigualdade, observe que $Lip(f) \leq Lip(T_f)$ e $\|f\|_\infty \leq Lip(T_f)$, pois

$$\begin{aligned} Lip(f) &= \sup_{x, y \in X} \frac{|f(x) - f(y)|}{d(x, y)} = \sup_{x, y \in X} \frac{|T_f(x) - T_f(y)|}{d(x, y)} \\ &\leq \sup_{x, y \in X^e} \frac{|T_f(x) - T_f(y)|}{d(x, y)} = Lip(T_f) \end{aligned}$$

e, para cada $x \in X$, tem-se

$$|f(x)| = |f(x) - 0| = |T_f(x) - T_f(e)| \leq Lip(T_f)d(x, e) = Lip(T_f),$$

implicando que

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)| \leq Lip(T_f).$$

Logo, $\|f\|_L \leq Lip(T_f)$ e, consequentemente,

$$\|f\|_L = Lip(T_f). \quad (2.12)$$

Com isso, está bem definida a aplicação

$$\begin{aligned} T : Lip(X) &\longrightarrow Lip_0(X^e) \\ f &\longmapsto T(f) = T_f. \end{aligned}$$

Vamos provar que T é linear. Para isso, sejam $f, g \in Lip(X)$, $\lambda \in \mathbb{K}$ e $x \in X$, então

$$T_{\lambda f+g}(e) = 0 = \lambda 0 + 0 = \lambda T_f(e) + T_g(e) = (\lambda T_f + T_g)(e)$$

e ainda

$$T_{\lambda f+g}(x) = (\lambda f+g)(x) = (\lambda f)(x)+g(x) = \lambda f(x)+g(x) = \lambda T_f(x)+T_g(x) = (\lambda T_f+T_g)(x),$$

o que significa que $T_{\lambda f+g} = \lambda T_f + T_g$, ou seja,

$$T(\lambda f + g) = \lambda T(f) + T(g).$$

Agora, note que T é sobrejetiva, pois para qualquer $g \in Lip_0(X^e)$ a função $h : X \longrightarrow \mathbb{K}$ dada por $h(x) = g(x)$ para todo $x \in X$ satisfaz $T(h) = g$. De fato, claramente h é Lipschitz e, ainda, h é limitada, já que

$$|h(x)| = |g(x) - 0| = |g(x) - g(e)| \leq Lip(g)d(x, e) = Lip(g),$$

para qualquer $x \in X$. Então, $h \in Lip(X)$ e

$$T_h(e) = 0 = g(e) \text{ e } T_h(x) = h(x) = g(x) \text{ para todo } x \in X,$$

implicando que $T_h(x) = g(x)$ para cada $x \in X^e$, ou seja, $T(h) = T_h = g$. Por fim, segue de (2.12) que T é uma isometria, pois

$$Lip(T(f)) = Lip(T_f) = \|f\|_L.$$

Portanto, os espaços $Lip(X)$ e $Lip_0(X^e)$ são isomorfos isometricamente. $\square$

O Teorema 2.3.3 diz que qualquer aplicação de $Lip(X)$, com X em $\mathcal{M}_2$, pode ser considerada como uma aplicação de $Lip_0(X^e)$ e, ainda, a recíproca continua válida. Com isso, segue da Proposição 2.3.3 que os espaços $Lip(\cdot, \mathbb{K})$ são casos especiais de espaços $Lip_0(\cdot, \mathbb{K})$. Além disso, segue do Teorema 2.3.3 que $\|\cdot\|_L$ é uma boa norma no espaço $Lip(X)$ para qualquer espaço métrico X , pois $\|\cdot\|_L$ é essencialmente um caso especial da norma $Lip(\cdot)$ no espaço $Lip_0(X^e)$. A contribuição de $\|f\|_\infty$ na norma sobre $Lip(X)$ pode ser considerada como uma parte extra do número de Lipschitz decorrente do fato de que f desaparece em um ponto base fictício, que tem distância igual a 1 em relação a todos os elementos de X .

2.4 O espaço de Arens-Eells

Agora, dado um espaço métrico pontuado X e um espaço de Banach E , iremos apresentar uma construção do pré-dual de $Lip_0(X)$, ou seja, vamos definir um espaço tal que seu dual seja isometricamente isomorfo ao espaço $Lip_0(X)$. Além disso, veremos que esse novo espaço apresenta propriedades importantes, como linearizar as aplicações Lipschitz pertencentes a $Lip_0(X, E)$. A referência principal desta seção é o livro [36].

Definição 2.4.1. Sejam X um espaço métrico. Uma *molécula* de X é uma função

$$m : X \longrightarrow \mathbb{R}$$

que apresenta valores não nulos em um conjunto finito e satisfaz

$$\sum_{x \in X} m(x) = 0.$$

Vamos denotar por $\mathcal{M}(X)$ o conjunto de todas as moléculas de X . Definimos uma relação entre as funções $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ e as moléculas m de X por

$$\langle f, m \rangle = \sum_{x \in X} f(x)m(x).$$

Dados $p, q \in X$, definimos uma *molécula elementar* m_{pq} por

$$m_{pq} = \chi_{\{p\}} - \chi_{\{q\}},$$

onde $\chi_{\{p\}}$ e $\chi_{\{q\}}$ são as funções características dos conjuntos unitários $\{p\}$ e $\{q\}$, respectivamente.

Pela definição acima, para quaisquer $p, q, r, x \in X$, obtemos:

- $m_{pq}(x) = \chi_{\{p\}}(x) - \chi_{\{q\}}(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x = p \\ -1, & \text{se } x = q \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$
- $m_{pr}(x) - m_{qr}(x) = \chi_{\{p\}}(x) - \chi_{\{r\}}(x) - \chi_{\{q\}}(x) + \chi_{\{r\}}(x) = \chi_{\{p\}}(x) - \chi_{\{q\}}(x) = m_{pq}(x).$

Observação 2.4.1. Toda molécula pode ser escrita como combinação linear de moléculas da forma m_{pq} , ou seja, tomando $m \in \mathcal{M}(X)$, podemos encontrar $n \in \mathbb{N}$, pontos $x_i, y_i \in X$, escalares adequados $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$, tais que

$$m = \sum_{i=1}^n \alpha_i m_{x_i y_i}.$$

Lema 2.4.1. Sejam X um espaço métrico, $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função Lipschitz e $m = \sum_{i=1}^n \alpha_i m_{x_i y_i}$ uma molécula de X . Então,

$$|\langle f, m \rangle| \leq \text{Lip}(f) \sum_{i=1}^n |\alpha_i| d(x_i, y_i).$$

Demonstração. De fato, basta notar que

$$\begin{aligned} |\langle f, m \rangle| &= \left| \langle f, \sum_{i=1}^n \alpha_i m_{x_i y_i} \rangle \right| = \left| \sum_{x \in X} \sum_{i=1}^n f(x) \alpha_i m_{x_i y_i}(x) \right| = \left| \sum_{i=1}^n f(x_i) \alpha_i - f(y_i) \alpha_i \right| \\ &= \left| \sum_{i=1}^n \alpha_i (f(x_i) - f(y_i)) \right| \leq \sum_{i=1}^n |\alpha_i| |f(x_i) - f(y_i)| \\ &\leq \sum_{i=1}^n |\alpha_i| \text{Lip}(f) d(x_i, y_i) = \text{Lip}(f) \sum_{i=1}^n |\alpha_i| d(x_i, y_i). \end{aligned}$$

□

Considere agora uma molécula $m \in \mathcal{M}(X)$ e definida o número

$$\|m\|_{\mathcal{E}(X)} = \inf \left\{ \sum_{i=1}^n |\alpha_i| d(x_i, y_i); m = \sum_{i=1}^n \alpha_i m_{x_i y_i} \right\}, \quad (2.13)$$

onde o ínfimo acima é aplicado sobre todas as representações possíveis da molécula m . Note que $\|m\|_{\mathcal{E}(X)}$ é sempre finito, pois a Observação 2.4.1 garante que cada molécula tem pelo menos uma representação como combinação linear das moléculas elementares. Além disso, o Lema 2.4.1 mostra que o ínfimo acima é diferente de zero quando $m \neq 0$.

A próxima proposição diz que o espaço $(\mathcal{M}(X), \|\cdot\|_{\mathcal{E}(X)})$ é um espaço normado.

Proposição 2.4.1. *Seja X um espaço métrico. A expressão dada em (2.13) define uma norma no espaço $\mathcal{M}(X)$ e é chamada de norma de Arens-Eells.*

Demonstração. Considere uma molécula $m \in \mathcal{M}(X)$. Por (2.13), temos que $\|m\|_{\mathcal{E}(X)} \geq 0$. Suponha que $\|m\|_{\mathcal{E}(X)} = 0$ e tome qualquer $\epsilon > 0$, então podemos encontrar uma representação de m dada por $\sum_{i=1}^n \alpha_i m_{x_i y_i}$, com escalares $\alpha_i \neq 0$ para todo $i = 1, \dots, n$, tal que

$$\sum_{i=1}^n |\alpha_i| d(x_i, y_i) < \epsilon.$$

Como a desigualdade acima é válida para todo $\epsilon > 0$, segue que

$$\sum_{i=1}^n |\alpha_i| d(x_i, y_i) = 0 \implies d(x_i, y_i) = 0 \implies x_i = y_i \text{ com } i = 1, \dots, n \implies m = 0.$$

Por outro lado, se $m = 0$, então $m = \sum_{i=1}^n 0 m_{x_i y_i}$ e, por (2.13), tem-se

$$\|0\|_{\mathcal{E}(X)} = 0.$$

Agora, dado qualquer $\lambda \in \mathbb{K}$, tem-se $\lambda m = \lambda \sum_{i=1}^n \alpha_i m_{x_i y_i} = \sum_{i=1}^n \lambda \alpha_i m_{x_i y_i}$ e, com isso,

$$\begin{aligned} \|\lambda m\|_{\mathcal{E}(X)} &= \inf \left\{ \sum_{i=1}^n |\lambda \alpha_i| d(x_i, y_i); \lambda m = \sum_{i=1}^n \lambda \alpha_i m_{x_i y_i} \right\} \\ &= \inf \left\{ |\lambda| \sum_{i=1}^n |\alpha_i| d(x_i, y_i); \lambda m = \sum_{i=1}^n \lambda \alpha_i m_{x_i y_i} \right\} \\ &= |\lambda| \inf \left\{ \sum_{i=1}^n |\alpha_i| d(x_i, y_i); m = \sum_{i=1}^n \alpha_i m_{x_i y_i} \right\} \\ &= |\lambda| \|m\|_{\mathcal{E}(X)}, \end{aligned}$$

implicando na igualdade $\|\lambda m\|_{\mathcal{E}(X)} = |\lambda| \|m\|_{\mathcal{E}(X)}$. Por fim, sejam $m_1, m_2 \in \mathcal{M}(X)$ com representações

$$m_1 = \sum_{k=1}^r \alpha_k m_{p_k q_k} \text{ e } m_2 = \sum_{l=1}^s \beta_l m_{p'_l q'_l}.$$

Vamos acrescentar, convenientemente, escalares nulos α_k multiplicados por moléculas elementares $m_{p_k q_k}$ em m_2 e também escalares nulos β_l multiplicados por moléculas elementares $m_{p'_l q'_l}$ em m_1 , fazendo com que os somatórios acima tenham a mesma quantidade de parcelas e ainda as mesmas moléculas elementares. Assim, podemos escrever

$$m_1 = \sum_{i=1}^n \alpha_i m_{x_i y_i} \text{ e } m_2 = \sum_{i=1}^n \beta_i m_{x_i y_i}.$$

Com isso,

$$m_1 + m_2 = \sum_{i=1}^n \alpha_i m_{x_i y_i} + \sum_{i=1}^n \beta_i m_{x_i y_i} = \sum_{i=1}^n (\alpha_i + \beta_i) m_{x_i y_i}$$

e a desigualdade triangular segue por

$$\begin{aligned} \|m_1 + m_2\|_{\mathcal{E}(X)} &= \inf \left\{ \sum_{i=1}^n |\alpha_i + \beta_i| d(x_i, y_i); m_1 = \sum_{i=1}^n \alpha_i m_{x_i y_i} \text{ e } m_2 = \sum_{i=1}^n \beta_i m_{x_i y_i} \right\} \\ &\leq \inf \left\{ \sum_{i=1}^n |\alpha_i| d(x_i, y_i) + |\beta_i| d(x_i, y_i); \right. \\ &\quad \left. m_1 = \sum_{i=1}^n \alpha_i m_{x_i y_i} \text{ e } m_2 = \sum_{i=1}^n \beta_i m_{x_i y_i} \right\} \\ &\leq \inf \left\{ \sum_{i=1}^n |\alpha_i| d(x_i, y_i); m_1 = \sum_{i=1}^n \alpha_i m_{x_i y_i} \right\} \\ &\quad + \inf \left\{ \sum_{i=1}^n |\beta_i| d(x_i, y_i); m_2 = \sum_{i=1}^n \beta_i m_{x_i y_i} \right\} \\ &\leq \|m_1\|_{\mathcal{E}(X)} + \|m_2\|_{\mathcal{E}(X)}. \end{aligned}$$

Portanto, $\|\cdot\|_{\mathcal{E}(X)}$ é uma norma em $\mathcal{M}(X)$. $\square$

Definição 2.4.2. Dado um espaço métrico X , denotamos por $\mathcal{E}(X)$ o *complemento do espaço* $\mathcal{M}(X)$ com a norma $\|\cdot\|_{\mathcal{E}(X)}$, ou seja, $\mathcal{E}(X) = \overline{\mathcal{M}(X)}$ e é chamado de espaço de *Arens-Eells*.

Observação 2.4.2. Sejam E um espaço de Banach e $f : \mathcal{E}(X) \rightarrow E$ uma aplicação contínua. Então, é suficiente definir f apenas nos elementos de $\mathcal{M}(X)$. De fato, para cada ponto $p \in \mathcal{E}(X)$ podemos encontrar uma sequência $(m_k)_{k=1}^\infty$ em $\mathcal{M}(X)$ que converge para p . Com isso, usando a continuidade da f , obtemos que

$$f(p) = f(\lim_k m_k) = \lim_k f(m_k).$$

Mostraremos no próximo teorema que o dual do espaço $\mathcal{E}(X)$ é isometricamente isomorfo ao espaço $Lip_0(X)$, sempre que X for um espaço métrico pontuado. Por isso, a estrutura do espaço de Banach $Lip_0(X)$ não depende da escolha do ponto base, já que a construção de $\mathcal{E}(X)$ nem mesmo requer um ponto base.

Teorema 2.4.1. *Seja X um espaço métrico pontuado. Então $\mathcal{E}(X)^*$ e $Lip_0(X)$ são isomorfos isometricamente.*

Demonstração. Primeiramente, considere a aplicação $K : Lip_0(X) \rightarrow \mathcal{E}(X)^*$ dada por $K(f)(p) = \lim_k \langle f, m_k \rangle$, onde $f \in Lip_0(X)$ e $(m_k)_{k=1}^\infty \subset \mathcal{M}(X)$ tal que $p = \lim_k m_k$. Note que $K(f)$ é linear para cada $f \in Lip_0(X)$ fixado, pois

$$\begin{aligned} K(f)(\lambda p + q) &= \lim_k \langle f, \lambda m_k + m_l \rangle = \lim_k \sum_{x \in X} f(x) (\lambda m_k + m_l)(x) \\ &= \lim_k \lambda \sum_{x \in X} f(x) m_k(x) + \lim_k \sum_{x \in X} f(x) m_l(x) \\ &= \lim_k \lambda \langle f, m_k \rangle + \lim_k \langle f, m_l \rangle = \lambda K(f)(p) + K(f)(q) \end{aligned}$$

para quaisquer $\lambda \in \mathbb{K}$ e $p, q \in \mathcal{A}(X)$, com $(m_k)_{k=1}^\infty$ e $(m_l)_{l=1}^\infty$ seqüências em $\mathcal{M}(X)$ satisfazendo $p = \lim_k m_k$ e $q = \lim_l m_l$. Além disso, dada $m = \sum_{i=1}^n \alpha_i m_{x_i y_i}$ uma molécula de X , pelo Lema 2.4.1, tem-se

$$|\langle f, m \rangle| \leq \text{Lip}(f) \sum_{i=1}^n |\alpha_i| d(x_i, y_i)$$

e, por definição de ínfimo sobre todas as representações de m na desigualdade acima, obtemos

$$|\langle f, m \rangle| \leq \text{Lip}(f) \|m\|_{\mathcal{A}(X)}. \quad (2.14)$$

Dessa forma, considerando $p \in \mathcal{A}(X)$ e uma seqüência $(m_k)_{k=1}^\infty \subset \mathcal{M}(X)$ tal que $p = \lim_k m_k$, segue que

$$\begin{aligned} |K(f)(p)| &= |\lim_k \langle f, m_k \rangle| = \lim_k |\langle f, m_k \rangle| \\ &\leq \lim_k \text{Lip}(f) \|m_k\|_{\mathcal{A}(X)} = \text{Lip}(f) \|p\|_{\mathcal{A}(X)}. \end{aligned}$$

Logo,

$$K(f) \in \mathcal{A}(X)^* \text{ e } \|K(f)\| \leq \text{Lip}(f). \quad (2.15)$$

Agora, vamos considerar a aplicação

$$\begin{aligned} T : \mathcal{A}(X)^* &\longrightarrow \text{Lip}_0(X) \\ \phi &\longmapsto T(\phi) : X \longrightarrow \mathbb{K} \\ &\quad x \longmapsto T(\phi)(x) = \phi(m_{xe}). \end{aligned}$$

Dada $\phi \in \mathcal{A}(X)^*$, vejamos que $T(\phi)$ preserva ponto base e também é Lipschitz. De fato,

$$T(\phi)(e) = \phi(m_{ee}) = \phi(0) = 0$$

e, como $\|m_{xy}\|_{\mathcal{A}(X)} \leq d(x, y)$ para cada $x, y \in X$, temos

$$\begin{aligned} |T(\phi)(x) - T(\phi)(y)| &= |\phi(m_{xe}) - \phi(m_{ye})| \\ &= |\phi(m_{xe} - m_{ye})| \\ &= |\phi(m_{xy})| \\ &\leq \|\phi\| \|m_{xy}\| \\ &\leq \|\phi\| d(x, y), \end{aligned}$$

donde

$$T(\phi) \in \text{Lip}_0(X) \text{ e } \text{Lip}(T(\phi)) \leq \|\phi\|. \quad (2.16)$$

Observe agora que T é linear, já que tomando $\phi, \psi \in \mathcal{A}(X)^*$, $\alpha \in \mathbb{K}$ e $x \in X$, temos

$$\begin{aligned} T(\alpha\phi + \psi)(x) &= (\alpha\phi + \psi)(m_{xe}) \\ &= (\alpha\phi)(m_{xe}) + \psi(m_{xe}) \\ &= \alpha(\phi)(m_{xe}) + (\psi)(m_{xe}) \\ &= \alpha T(\phi)(x) + T(\psi)(x) \\ &= (\alpha T(\phi) + T(\psi))(x), \end{aligned}$$

implicando que $T(\alpha\phi + \psi) = \alpha T(\phi) + T(\psi)$. Vamos mostrar que T é sobrejetora. Para isso, dada $f \in Lip_0(X)$, considere a aplicação $K(f)$ em $\mathcal{A}(X)^*$ e note que

$$T(K(f))(x) = K(f)(m_{xe}) = \langle f, m_{xe} \rangle = \sum_{p \in X} f(p)m_{xe}(p) = f(x) - f(e) = f(x)$$

para cada $x \in X$, ou seja,

$$f = T(K(f)) = (T \circ K)(f). \quad (2.17)$$

Agora, provaremos que T é uma isometria. Para isso, vamos mostrar inicialmente que T e K são inversas uma da outra. Por (2.17), basta verificar que $(K \circ T)(\phi) = \phi$. Considerando $\phi \in \mathcal{A}(X)^*$ e $m = \sum_{i=1}^n \alpha_i m_{x_i y_i}$ uma molécula de X , temos que

$$\begin{aligned} (K \circ T)(\phi)(m) &= K(T(\phi))(m) = \langle T(\phi), m \rangle = \sum_{x \in X} T(\phi)(x)m(x) \\ &= \sum_{x \in X} T(\phi)(x) \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i m_{x_i y_i}(x) \right) = \sum_{i=1}^n \alpha_i (T(\phi)(x_i) - T(\phi)(y_i)) \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha_i (\phi(m_{x_i e}) - \phi(m_{y_i e})) = \sum_{i=1}^n \alpha_i (\phi(m_{x_i e} - m_{y_i e})) \\ &= \phi \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i m_{x_i y_i} \right) = \phi(m). \end{aligned}$$

Com isso, pela Observação 2.4.2, concluímos que $(K \circ T)(\phi) = \phi$. Finalmente, usando (2.16) e (2.15), concluímos que T é uma isometria, pois

$$Lip(T(\phi)) \leq \|\phi\| = \|(K \circ T)(\phi)\| = \|K(T(\phi))\| \leq Lip(T(\phi))$$

para qualquer $\phi \in \mathcal{A}(X)^*$. Portanto, T é um isomorfismo isométrico. $\square$

Lema 2.4.2. *Seja X um espaço métrico pontuado. Então:*

(a) $\|m_{xy}\|_{\mathcal{A}(X)} = d(x, y)$ para todos $x, y \in X$;

(b) $\|\cdot\|_{\mathcal{A}(X)}$ é a maior semi-norma no espaço $\mathcal{M}(X)$ que satisfaz

$$\|m_{xy}\|_{\mathcal{A}(X)} \leq d(x, y) \text{ para todos } x, y \in X.$$

Demonstração. (a) Dados $x, y \in X$, é claro que $\|m_{xy}\|_{\mathcal{A}(X)} \leq d(x, y)$ decorre da definição de $\|\cdot\|_{\mathcal{A}(X)}$. Por outro lado, o Exemplo 2.1.1 diz que a aplicação

$$\begin{aligned} \tilde{d}_x : X &\longrightarrow \mathbb{R} \\ p &\longmapsto \tilde{d}_x(p) = d(p, x) - d(e, x) \end{aligned}$$

é Lipschitz com $Lip(\tilde{d}_x) = 1$. Com isso, segue de (2.14) que

$$|\langle \tilde{d}_x, m_{xy} \rangle| \leq Lip(\tilde{d}_x) \|m_{xy}\|_{\mathcal{A}(X)} = \|m_{xy}\|_{\mathcal{A}(X)}.$$

Além disso, vale que $|\langle \tilde{d}_x, m_{xy} \rangle| = d(x, y)$, pois

$$\begin{aligned}
 |\langle \tilde{d}_x, m_{xy} \rangle| &= \left| \sum_{p \in X} \tilde{d}_x(p) m_{xy}(p) \right| \\
 &= \left| \sum_{p \in X} (d(p, x) - d(e, x)) m_{xy}(p) \right| \\
 &= \left| \sum_{p \in X} d(p, x) m_{xy}(p) - \sum_{p \in X} d(e, x) m_{xy}(p) \right| \\
 &= |d(x, x) m_{xy}(x) + d(y, x) m_{xy}(y) - d(e, x) m_{xy}(x) - d(e, x) m_{xy}(y)| \\
 &= |0 - d(y, x) - d(e, x) + d(e, x)| \\
 &= |-d(y, x)| = d(x, y).
 \end{aligned}$$

Portanto,

$$\|m_{xy}\|_{\mathbb{E}(X)} \geq |\langle \tilde{d}_x, m_{xy} \rangle| = d(x, y),$$

concluindo a igualdade $\|m_{xy}\|_{\mathbb{E}(X)} = d(x, y)$.

(b) Suponha que $\|\cdot\|_0$ é uma semi-norma satisfazendo $\|m_{xy}\|_0 \leq d(x, y)$ para todos $x, y \in X$. Então, para qualquer $m = \sum_{i=1}^n \alpha_i m_{x_i y_i}$ molécula de X , temos

$$\begin{aligned}
 \|m\|_0 &= \left\| \sum_{i=1}^n \alpha_i m_{x_i y_i} \right\|_0 \leq \sum_{i=1}^n \|\alpha_i m_{x_i y_i}\|_0 \\
 &= \sum_{i=1}^n |\alpha_i| \|m_{x_i y_i}\|_0 \leq \sum_{i=1}^n |\alpha_i| d(x_i, y_i).
 \end{aligned}$$

Daí, por definição de ínfimo sobre todas as representações de m , concluímos que

$$\|m\|_0 \leq \|m\|_{\mathbb{E}(X)}.$$

□

Na próxima proposição, vamos mostrar que qualquer espaço métrico pontuado X é mergulhado isometricamente no espaço $\mathbb{E}(X)$ por uma aplicação Lipschitz pertencente a $Lip_0(X, \mathbb{E}(X))$.

Proposição 2.4.2. *Dado um espaço métrico pontuado X , a aplicação*

$$\begin{aligned}
 \delta_X : X &\longrightarrow \mathbb{E}(X) \\
 x &\longmapsto \delta_X(x) = m_{xe}
 \end{aligned}$$

é uma imersão isométrica de X em $\mathbb{E}(X)$ e $\delta_X \in Lip_0(X, \mathbb{E}(X))$.

Demonstração. Para cada $x, y \in X$, segue do item (a) do Lema 2.4.2 que

$$\|\delta_X(x) - \delta_X(y)\|_{\mathbb{E}(X)} = \|m_{xe} - m_{ye}\|_{\mathbb{E}(X)} = \|m_{xy}\|_{\mathbb{E}(X)} = d(x, y),$$

o que significa que δ_X é Lipschitz e também é uma imersão isométrica de X em $\mathbb{E}(X)$. Além disso, como

$$\delta_X(e) = m_{ee} = 0,$$

segue que δ_X preserva ponto base e, portanto, $\delta_X \in Lip_0(X, \mathbb{E}(X))$. □

Apresentaremos no próximo teorema a principal propriedade do espaço $\mathcal{A}(X)$, que se caracteriza por linearizar as aplicações de Lipschitz definidas de um espaço métrico pontuado em um espaço de Banach.

Teorema 2.4.2 (Propriedade Universal de $\mathcal{A}(X)$). *Sejam X um espaço métrico pontuado, E um espaço de Banach e uma aplicação Lipschitz $f \in \text{Lip}_0(X, E)$. Então, existe uma única aplicação linear contínua*

$$\widetilde{f}_L : \mathcal{A}(X) \longrightarrow E \text{ tal que } \widetilde{f}_L \circ \delta_X = f \text{ e } \|\widetilde{f}_L\| = \text{Lip}(f).$$

Logo, o diagrama comuta

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & E \\ \delta_X \downarrow & \nearrow \widetilde{f}_L & \\ \mathcal{A}(X) & & \end{array}$$

Demonstração. Dada qualquer $f \in \text{Lip}_0(X, E)$, defina a aplicação

$$\begin{aligned} f_L : \mathcal{M}(X) &\longrightarrow E \\ m &\longmapsto f_L(m) = \sum_{p \in X} m(p)f(p). \end{aligned}$$

Note que f_L é linear, pois considerando $\lambda \in \mathbb{K}$ e as moléculas $m, n \in \mathcal{M}(X)$, temos

$$\begin{aligned} f_L(m + \lambda n) &= \sum_{x \in X} (m + \lambda n)(x)f(x) = \sum_{x \in X} (m(x) + \lambda n(x))f(x) \\ &= \sum_{x \in X} m(x)f(x) + \lambda \sum_{x \in X} n(x)f(x) = f_L(m) + \lambda f_L(n). \end{aligned}$$

A igualdade $f_L \circ \delta_X = f$ segue diretamente de

$$f_L \circ \delta_X(x) = f_L(\delta_X(x)) = f_L(m_{xe}) = \sum_{x \in X} m_{xe}(x)f(x) = f(x) - f(e) = f(x),$$

com $x \in X$. Agora, vamos mostrar que f_L é contínua e $\|f_L\| = \text{Lip}(f)$. Tome $m \in \mathcal{M}(X)$ e defina

$$\|m\|_0 = \frac{\|f_L(m)\|}{\text{Lip}(f)}.$$

Observe que $\|\cdot\|_0$ é uma semi-norma em $\mathcal{M}(X)$, pois

- $\|m\|_0 = \frac{\|f_L(m)\|}{\text{Lip}(f)} \geq 0$ e $m = 0 \implies \|0\|_0 = \frac{\|f_L(0)\|}{\text{Lip}(f)} = \frac{\|0\|}{\text{Lip}(f)} = \frac{0}{\text{Lip}(f)} = 0$;
- $\|\lambda m\|_0 = \frac{\|f_L(\lambda m)\|}{\text{Lip}(f)} = \frac{|\lambda| \|f_L(m)\|}{\text{Lip}(f)} = |\lambda| \|m\|_0$;
- $\|m_1 + m_2\|_0 = \frac{\|f_L(m_1 + m_2)\|}{\text{Lip}(f)} = \frac{\|f_L(m_1) + f_L(m_2)\|}{\text{Lip}(f)} \leq \frac{\|f_L(m_1)\|}{\text{Lip}(f)} + \frac{\|f_L(m_2)\|}{\text{Lip}(f)} = \|m_1\|_0 + \|m_2\|_0$.

Além disso, $\|\cdot\|_0$ satisfaz $\|m\|_0 \leq d(x, y)$ para cada $x, y \in X$, pois

$$\begin{aligned} \|m_{xy}\|_0 &= \frac{\|f_L(m_{xy})\|}{\text{Lip}(f)} = \frac{\|f_L(m_{xe} - m_{ye})\|}{\text{Lip}(f)} \\ &= \frac{\|f_L(m_{xe}) - f_L(m_{ye})\|}{\text{Lip}(f)} = \frac{\|f_L(\delta_X(x)) - f_L(\delta_X(y))\|}{\text{Lip}(f)} \\ &= \frac{\|f_L \circ \delta_X(x) - f_L \circ \delta_X(y)\|}{\text{Lip}(f)} = \frac{\|f(x) - f(y)\|}{\text{Lip}(f)} \\ &\leq \frac{\text{Lip}(f)d(x, y)}{\text{Lip}(f)} = d(x, y). \end{aligned}$$

Assim, o item (b) do Lema 2.4.2 garante que

$$\|m\|_0 \leq \|m\|_{\mathcal{AE}(X)} \iff \frac{\|f_L(m)\|}{Lip(f)} \leq \|m\|_{\mathcal{AE}(X)} \iff \|f_L(m)\| \leq Lip(f) \|m\|_{\mathcal{AE}(X)}$$

para qualquer molécula m de X . Dessa forma, a aplicação linear f_L é contínua e ainda $\|f_L\| \leq Lip(f)$. Para provar a outra desigualdade, vamos usar o fato de f_L ser linear e contínua e o item (a) do Lema 2.4.2 para garantir que

$$\begin{aligned} \|f(x) - f(y)\| &= \|f_L(m_{xe}) - f_L(m_{ye})\| = \|f_L(m_{xe} - m_{ye})\| \\ &= \|f_L(m_{xy})\| \leq \|f_L\| \|m_{xy}\|_{\mathcal{AE}(X)} = \|f_L\| d(x, y), \end{aligned}$$

implicando que $Lip(f) \leq \|f_L\|$. Logo, vale a igualdade $\|f_L\| = Lip(f)$. Agora, mostraremos a unicidade da aplicação f_L . Suponha que exista uma aplicação linear e contínua

$$R : \mathcal{M}(X) \longrightarrow E \text{ tal que } \|R\| = Lip(f) \text{ e } R \circ \delta_X = f.$$

Com isso, dada uma molécula $m = \sum_{i=1}^n \alpha_i m_{x_i y_i} \in \mathcal{M}(X)$, obtemos

$$\begin{aligned} R(m) &= R\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i m_{x_i y_i}\right) = \sum_{i=1}^n \alpha_i R(m_{x_i e} - m_{y_i e}) \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha_i (R(m_{x_i e}) - R(m_{y_i e})) = \sum_{i=1}^n \alpha_i (R(\delta_X(x_i)) - R(\delta_X(y_i))) \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha_i (R \circ \delta_X(x_i) - R \circ \delta_X(y_i)) = \sum_{i=1}^n \alpha_i (f(x_i) - f(y_i)) \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha_i (f_L \circ \delta_X(x_i) - f_L \circ \delta_X(y_i)) = \sum_{i=1}^n \alpha_i (f_L(\delta_X(x_i)) - f_L(\delta_X(y_i))) \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha_i (f_L(m_{x_i e}) - f_L(m_{y_i e})) = \sum_{i=1}^n \alpha_i f_L(m_{x_i e} - m_{y_i e}) \\ &= f_L\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i m_{x_i y_i}\right) = f_L(m), \end{aligned}$$

implicando que $R = f_L$. Finalmente, por [7, Teorema 3.1.9], a aplicação linear contínua f_L possui uma única extensão

$$\widetilde{f_L} : \mathcal{AE}(X) \longrightarrow E$$

tal que $\|\widetilde{f_L}\| = \|f_L\| = Lip(f)$ e ainda $\widetilde{f_L} \circ \delta_X = f_L \circ \delta_X = f$. □

A partir de agora, para simplificar a notação, denotaremos a aplicação $\widetilde{f_L}$ apenas por f_L . A construção feita acima diz que qualquer aplicação Lipschitz que preserva ponto base $f : X \longrightarrow E$ se fatora por δ_X via uma aplicação linear contínua $f_L : \mathcal{AE}(X) \longrightarrow E$, que é chamada de *linearização* de f . A aplicação

$$\begin{aligned} \varphi : Lip_0(X, E) &\longrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{AE}(X), E) \\ f &\longmapsto \varphi(f) = f_L \end{aligned}$$

estabelece um isomorfismo isométrico entre os espaços vetoriais $Lip_0(X, E)$ e $\mathcal{L}(\mathbb{A}(X), E)$. Considerando $E = \mathbb{K}$ na propriedade universal de $\mathbb{A}(X)$ o Teorema 2.4.1 segue de forma imediata, isto é, $\mathbb{A}(X)^* \cong X^\#$.

O corolário adiante estabelece uma relação entre os espaços $Lip_0(X, Y)$ e $\mathcal{L}(\mathbb{A}(X), \mathbb{A}(Y))$, sendo X e Y espaços métricos pontuados.

Corolário 2.4.1. [21, Lemma 3.1] *Sejam X e Y espaços métricos pontuados e uma aplicação Lipschitz $f \in Lip_0(X, Y)$. Então existe um único operador linear $\hat{f} \in \mathcal{L}(\mathbb{A}(X), \mathbb{A}(Y))$ tal que*

$$\hat{f} \circ \delta_X = \delta_Y \circ f \quad \text{e ainda} \quad \|\hat{f}\| = Lip(f).$$

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \delta_X \downarrow & & \downarrow \delta_Y \\ \mathbb{A}(X) & \xrightarrow{\hat{f}} & \mathbb{A}(Y) \end{array}$$

Demonstração. Já que $f \in Lip_0(X, Y)$ e por $\delta_Y \in Lip_0(Y, \mathbb{A}(Y))$, segue da Proposição 2.1.1 que a composta $\delta_Y \circ f \in Lip_0(X, \mathbb{A}(Y))$ e vale $Lip(\delta_Y \circ f) = Lip(f)$, pois

$$\begin{aligned} Lip(\delta_Y \circ f) &= \sup_{x, y \in X} \frac{d(\delta_Y \circ f(x), \delta_Y \circ f(y))}{d(x, y)} = \sup_{x, y \in X} \frac{d(\delta_Y(f(x)), \delta_Y(f(y)))}{d(x, y)} \\ &= \sup_{x, y \in X} \frac{d(f(x), f(y))}{d(x, y)} = Lip(f). \end{aligned}$$

Logo, aplicando o Teorema 2.4.2, existe um único operador linear contínuo

$$\hat{f} = (\delta_Y \circ f)_L : \mathbb{A}(X) \longrightarrow \mathbb{A}(Y)$$

satisfazendo

$$\hat{f} \circ \delta_X = \delta_Y \circ f \quad \text{e} \quad \|\hat{f}\| = Lip(\delta_Y \circ f) = Lip(f).$$

□

CAPÍTULO 3

O IDEAL DE OPERADORES 2-LIPSCHITZ

Neste capítulo, vamos abordar o conceito e alguns resultados sobre operadores 2-Lipschitz e veremos que esses operadores estão associados de modo único a uma aplicação bilinear contínua. Mostraremos também que essa classe de operadores forma um ideal de operadores 2-Lipschitz, seguindo o espírito dos ideais de operadores lineares [28], multilineares [18, 29] e Lipschitz [5]. Além disso, veremos um método para construir um ideal de operadores 2-Lipschitz a partir de um ideal de operadores lineares, método denominado de método da composição. Todo o capítulo foi baseado em [19].

3.1 Bi-linearização de operadores 2-Lipschitz

O conceito abaixo de operador 2-Lipschitz foi apresentado em [33, Section 3.4].

Definição 3.1.1. Sejam (X, d_X) e (Y, d_Y) espaços métricos pontuados e E um espaço de Banach. Dizemos que uma aplicação $T : X \times Y \longrightarrow E$ é *2-Lipschitz* se existe uma constante $C > 0$ tal que, para cada $x, x' \in X$ e $y, y' \in Y$, tem-se

$$\|T(x, y) - T(x, y') - T(x', y) + T(x', y')\| \leq C \cdot d_X(x, x') \cdot d_Y(y, y'). \quad (3.1)$$

Denotamos por $BLip_0(X, Y; E)$ o conjunto de todos os operadores 2-Lipschitz de $X \times Y$ em E que satisfazem

$$T(x, 0) = T(0, y) = 0 \quad (3.2)$$

para todos $x \in X$ e $y \in Y$. Para cada $T \in BLip_0(X, Y; E)$, definimos o número

$$\begin{aligned} BLip(T) &= \inf\{C; C \text{ satisfazendo (3.1)}\} \\ &= \sup_{x \neq x', y \neq y'} \frac{\|T(x, y) - T(x, y') - T(x', y) + T(x', y')\|}{d_X(x, x')d_Y(y, y')}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

O próximo resultado mostrará que a expressão (3.3) pode ser usada para definir uma norma no espaço $BLip_0(X, Y; E)$.

Proposição 3.1.1. A aplicação

$$\begin{aligned} BLip(\cdot) : BLip_0(X, Y; E) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ T &\longmapsto BLip(T) \end{aligned}$$

define uma norma no espaço $BLip_0(X, Y; E)$.

Demonstração. Dada qualquer $T \in BLip_0(X, Y; E)$, segue que $BLip(T) \geq 0$. É claro que $BLip(0) = 0$. Por outro lado, supondo que $BLip(T) = 0$, de (3.3) segue que

$$0 = \sup_{x \neq 0, y \neq 0} \frac{\|T(x, y) - T(x, 0) - T(0, y) + T(0, 0)\|}{d_X(x, 0)d_Y(y, 0)} = \sup_{x \neq 0, y \neq 0} \frac{\|T(x, y)\|}{d_X(x, 0)d_Y(y, 0)}.$$

Com isso, para todos $x \in X$ e $y \in Y$, obtemos

$$\|T(x, y)\| = 0 \implies T(x, y) = 0,$$

ou seja, $T = 0$. Agora, se $\alpha \in \mathbb{K}$ temos

$$\begin{aligned} BLip(\alpha T) &= \sup_{x \neq x', y \neq y'} \frac{\|(\alpha T)(x, y) - (\alpha T)(x, y') - (\alpha T)(x', y) + (\alpha T)(x', y')\|}{d_X(x, x')d_Y(y, y')} \\ &= \sup_{x \neq x', y \neq y'} \frac{\|\alpha \cdot T(x, y) - \alpha \cdot T(x, y') - \alpha \cdot T(x', y) + \alpha \cdot T(x', y')\|}{d_X(x, x')d_Y(y, y')} \\ &= \sup_{x \neq x', y \neq y'} \frac{\|\alpha (T(x, y) - T(x, y') - T(x', y) + T(x', y'))\|}{d_X(x, x')d_Y(y, y')} \\ &= \sup_{x \neq x', y \neq y'} \frac{|\alpha| \|T(x, y) - T(x, y') - T(x', y) + T(x', y')\|}{d_X(x, x')d_Y(y, y')} \\ &= |\alpha| \sup_{x \neq x', y \neq y'} \frac{\|T(x, y) - T(x, y') - T(x', y) + T(x', y')\|}{d_X(x, x')d_Y(y, y')} \\ &= |\alpha| BLip(T). \end{aligned}$$

Finalmente, para provar a desigualdade triangular, considerando $S \in BLip_0(X, Y; E)$ e pontos $x, x' \in X$ e $y, y' \in Y$, com $x \neq x'$ e $y \neq y'$, temos

$$\begin{aligned} \|(T + S)(x, y) - (T + S)(x, y') - (T + S)(x', y) + (T + S)(x', y')\| &= \\ &= \|T(x, y) + S(x, y) - T(x, y') - S(x, y') \\ &\quad - T(x', y) - S(x', y) + T(x', y') + S(x', y')\| \\ &\leq \|T(x, y) - T(x, y') - T(x', y) + T(x', y')\| \\ &\quad + \|S(x, y) - S(x, y') - S(x', y) + S(x', y')\| \\ &\leq BLip(T)d_X(x, x')d_Y(y, y') \\ &\quad + BLip(S)d_X(x, x')d_Y(y, y') \\ &= (BLip(T) + BLip(S))d_X(x, x')d_Y(y, y'), \end{aligned}$$

implicando em $BLip(T + S) \leq BLip(T) + BLip(S)$. Portanto, $BLip(\cdot)$ é uma norma em $BLip_0(X, Y; E)$. $\square$

Dada uma aplicação $T : X \times Y \longrightarrow E$ e fixando quaisquer pontos $x \in X$ e $y \in Y$, podemos considerar as aplicações

$$\begin{array}{ccc} A_x : Y & \longrightarrow & E \\ y & \longmapsto & A_x(y) = T(x, y) \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{ccc} A_y : X & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & A_y(x) = T(x, y). \end{array}$$

Proposição 3.1.2. *Seja $T : X \times Y \longrightarrow E$ uma aplicação. Então, as afirmações abaixo são equivalentes:*

(a) $T \in BLip_0(X, Y; E)$;

3. O Ideal de operadores 2-Lipschitz

(b) $A_x \in Lip_0(Y; E)$ para cada $x \in X$ fixado, $A_y \in Lip_0(X; E)$ para cada $y \in Y$ fixado e o operador

$$\begin{aligned} G : X &\longrightarrow Lip_0(Y; E) \\ x &\longmapsto G(x) = A_x \end{aligned}$$

pertence ao espaço $Lip_0(X, Lip_0(Y; E))$;

(c) $A_x \in Lip_0(Y; E)$ para cada $x \in X$ fixado, $A_y \in Lip_0(X; E)$ para cada $y \in Y$ fixado e o operador

$$\begin{aligned} H : Y &\longrightarrow Lip_0(X; E) \\ y &\longmapsto H(y) = A_y. \end{aligned}$$

pertence ao espaço $Lip_0(Y, Lip_0(X; E))$.

Demonstração. (a) $\implies$ (b) Supondo que $T \in BLip_0(X, Y; E)$, fixe $x \in X$ e tome quaisquer $y, y' \in Y$. Assim,

$$\begin{aligned} \|A_x(y) - A_x(y')\| &= \|T(x, y) - T(x, y')\| \\ &= \|T(x, y) - T(x, y') - T(0, y) + T(0, y')\| \\ &\leq BLip(T)d(x, 0)d(y, y') \end{aligned}$$

implica que A_x é Lipschitz e $Lip(A_x) \leq BLip(T)d(x, 0)$. Como T satisfaz (3.2), segue que $A_x(0) = 0$ e portanto $A_x \in Lip_0(Y; E)$. Analogamente, concluímos que $A_y \in Lip_0(X; E)$ e $Lip(A_y) \leq BLip(T)d(y, 0)$. Agora, observe que G preserva ponto base, pois $G(0) = A_0 = 0$, já que $A_0(y) = T(0, y) = 0$ para todo $y \in Y$. Por fim, considerando $x, x' \in X$, temos

$$\begin{aligned} Lip(G(x) - G(x')) &= Lip(A_x - A_{x'}) \\ &= \sup_{y \neq y'} \frac{\|(A_x - A_{x'})(y) - (A_x - A_{x'})(y')\|}{d(y, y')} \\ &= \sup_{y \neq y'} \frac{\|A_x(y) - A_{x'}(y) - A_x(y') + A_{x'}(y')\|}{d(y, y')} \\ &= \sup_{y \neq y'} \frac{\|T(x, y) - T(x, y') - T(x', y) + T(x', y')\|}{d(y, y')} \\ &\leq \sup_{x \neq x', y \neq y'} \frac{\|T(x, y) - T(x, y') - T(x', y) + T(x', y')\|}{d(y, y')} \frac{d(x, x')}{d(x, x')} \\ &= BLip(T)d(x, x'), \end{aligned}$$

provando que $G \in Lip_0(X; Lip_0(Y; E))$ e $Lip(G) \leq BLip(T)$.

(b) $\implies$ (a) Admita que (b) é válido. Então, para todos $x \in X$ e $y \in Y$, tem-se

$$T(x, 0) = A_x(0) = 0 \text{ e } T(0, y) = A_y(0) = 0.$$

Como $G \in Lip_0(X; Lip_0(Y; E))$, para quaisquer $x, x' \in X$, vale a desigualdade

$$Lip(G(x) - G(x')) \leq Lip(G)d(x, x')$$

e com isso, dados $x, x' \in X$ e $y, y' \in Y$, com $x \neq x'$ e $y \neq y'$, obtemos

$$\|T(x, y) - T(x, y') - T(x', y) + T(x', y')\| =$$

$$\begin{aligned}
&= \|A_x(y) - A_x(y') - A_{x'}(y) + A_{x'}(y')\| \\
&= \frac{\|(A_x - A_{x'})(y) - (A_x - A_{x'})(y')\|}{d(y, y')} d(y, y') \\
&\leq \sup_{y \neq y'} \frac{\|(A_x - A_{x'})(y) - (A_x - A_{x'})(y')\|}{d(y, y')} d(y, y') \\
&= \text{Lip}(A_x - A_{x'}) d(y, y') \\
&= \text{Lip}(G(x) - G(x')) d(y, y') \\
&\leq \text{Lip}(G) d(x, x') d(y, y').
\end{aligned}$$

Portanto, $T \in BLip_0(X, Y; E)$.

(a) $\iff$ (c) Análogo as demonstrações feitas nos itens acima. $\square$

No exemplo abaixo, mostraremos que os operadores bilineares entre espaços de Banach são também operadores 2-Lipschitz.

Exemplo 3.1.1. Sejam X, Y e E espaços de Banach. Então todo operador bilinear $T : X \times Y \longrightarrow E$ pertence a $BLip_0(X, Y; E)$ e $BLip(T) = \|T\|$. De fato, para cada $x, x' \in X$ e $y, y' \in Y$, tem-se

$$\begin{aligned}
\|T(x, y) - T(x, y') - T(x', y) + T(x', y')\| &= \|T(x - x', y - y')\| \\
&\leq \|T\| \|x - x'\| \|y - y'\|
\end{aligned}$$

e, além disso,

$$T(x, 0) = T(0, y) = 0.$$

Logo, $T \in BLip_0(X, Y; E)$ com $BLip(T) \leq \|T\|$. Para mostrar a outra desigualdade, basta observar que

$$\begin{aligned}
BLip(T) &= \sup_{x \neq x', y \neq y'} \frac{\|T(x, y) - T(x, y') - T(x', y) + T(x', y')\|}{d(x, x') d(y, y')} \\
&\geq \sup_{x \neq 0, y \neq 0} \frac{\|T(x, y) - T(x, 0) - T(0, y) + T(0, 0)\|}{d(x, 0) d(y, 0)} \\
&= \sup_{x \neq 0, y \neq 0} \frac{\|T(x, y)\|}{\|x\| \|y\|} = \|T\|.
\end{aligned}$$

Assim, $BLip(T) = \|T\|$.

A proposição seguinte garante que, sob certas hipóteses, a composta de algumas aplicações é uma aplicação 2-Lipschitz que preserva ponto base. Esse resultado será de grande importância na próxima seção.

Proposição 3.1.3. Sejam X, Y, Z e W espaços métricos pontuados e E e F espaços de Banach. Se $f \in Lip_0(Z; X)$, $g \in Lip_0(W; Y)$, $T \in BLip_0(X, Y; E)$ e $u \in \mathcal{L}(E; F)$, então

$$u \circ T \circ (f, g) \in BLip_0(Z, W; F),$$

onde $(f, g) : Z \times W \longrightarrow X \times Y$ é definida por $(f, g)(z, w) = (f(z), g(w))$. Além disso, vale a seguinte desigualdade

$$BLip(u \circ T \circ (f, g)) \leq \|u\| BLip(T) Lip(f) Lip(g).$$

Demonstração. Primeiramente, para cada $x \in X$ e $y \in Y$, note que

$$u \circ T \circ (f, g)(x, y) = (u \circ T)(f, g)(x, y) = (u \circ T)(f(x), g(y)) = u(T(f(x), g(y))).$$

Assim, $u \circ T \circ (f, g)$ satisfaz (3.2), pois

$$u \circ T \circ (f, g)(x, 0) = u(T(f(x), 0)) = u(0) = 0$$

e

$$u \circ T \circ (f, g)(0, y) = u(T(f(0), y)) = u(0) = 0.$$

Agora, vamos provar que $u \circ T \circ (f, g)$ é 2-Lipschitz. Como u é linear, $T \in BLip_0(X, Y; E)$ e f e g são Lipschitz, temos

$$\begin{aligned} & \|u(T(f(x), g(y))) - u(T(f(x), g(y'))) - u(T(f(x'), g(y))) + u(T(f(x'), g(y')))\| = \\ & = \|u(T(f(x), g(y)) - T(f(x), g(y')) - T(f(x'), g(y)) + T(f(x'), g(y')))\| \\ & \leq \|u\| \|T(f(x), g(y)) - T(f(x), g(y')) - T(f(x'), g(y)) + T(f(x'), g(y'))\| \\ & \leq \|u\| BLip(T) d(f(x), f(x')) d(g(y), g(y')) \\ & \leq \|u\| BLip(T) Lip(f) d(x, x') Lip(g) d(y, y') \\ & = \|u\| BLip(T) Lip(f) Lip(g) d(x, x') d(y, y') \end{aligned}$$

para quaisquer pontos $x, x' \in X$ e $y, y' \in Y$. Portanto, $u \circ T \circ (f, g) \in BLip_0(X, Y; F)$ e $BLip(u \circ T \circ (f, g)) \leq \|u\| BLip(T) Lip(f) Lip(g)$. $\square$

Vimos na Proposição 3.1.1 que $(BLip_0(X, Y; E), BLip(\cdot))$ é um espaço normado. O leitor poderia questionar se esse espaço é Banach. No próximo teorema, mostraremos que a resposta a esta pergunta é afirmativa.

Teorema 3.1.1. *Sejam X e Y espaços métricos pontuados e E espaço de Banach. Então $(BLip_0(X, Y; E), BLip(\cdot))$ é Banach.*

Demonstração. De acordo com o Teorema 1.1.1, tomando uma sequência $(f_n)_{n=1}^\infty$ em $BLip_0(X, Y; E)$ tal que $\sum_{n=1}^\infty BLip(f_n) < \infty$, temos de provar que a série $\sum_{n=1}^\infty f_n$ converge na norma $BLip(\cdot)$. Para tanto, como f_n é 2-Lipschitz para qualquer $n \in \mathbb{N}$, temos

$$\|f_n(x, y)\| = \|f_n(x, y) - f_n(x, 0) - f_n(0, y) + f_n(0, 0)\| \leq BLip(f_n) d(x, 0) d(0, y)$$

para cada $x \in X$ e $y \in Y$, implicando em

$$\sum_{n=1}^\infty \|f_n(x, y)\| \leq \sum_{n=1}^\infty BLip(f_n) d(x, 0) d(0, y) < \infty.$$

Logo, a série $\sum_{n=1}^\infty \|f_n(x, y)\|$ é convergente para quaisquer $x \in X$ e $y \in Y$. Daí, como E é Banach, segue do Teorema 1.1.1 que a série $\sum_{n=1}^\infty f_n(x, y)$ converge. Assim, a função $f : X \times Y \rightarrow E$ dada por $f(x, y) = \sum_{n=1}^\infty f_n(x, y)$ está bem definida e satisfaz

$$\begin{aligned} & \|f(x, y) - f(x, y') - f(x', y) + f(x', y')\| = \\ & = \left\| \sum_{n=1}^\infty (f_n(x, y) - f_n(x, y') - f_n(x', y) + f_n(x', y')) \right\| \\ & \leq \sum_{n=1}^\infty \|f_n(x, y) - f_n(x, y') - f_n(x', y) + f_n(x', y')\| \\ & \leq \left[\sum_{n=1}^\infty BLip(f_n) \right] d(x, x') d(y, y') \end{aligned}$$

para todos $x, x' \in X$ e $y, y' \in Y$. Além disso, como

$$f(0, y) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(0, y) = 0 \quad \text{e} \quad f(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x, 0) = 0,$$

concluimos que $f \in BLip_0(X, Y; E)$. Agora, para cada $k \in \mathbb{N}$, defina $g_k = \sum_{n=1}^k f_n$ e note que cada g_k é 2-Lipschitz, pois g_k é a soma finita de funções 2-Lipschitz. Já que por hipótese a série $\sum_{n=1}^{\infty} BLip(f_n)$ é convergente, dado qualquer $\epsilon > 0$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{n=k}^{\infty} BLip(f_n) = \left| \sum_{n=k}^{\infty} BLip(f_n) \right| < \epsilon \quad \text{para todo } k \geq k_0.$$

Portanto, para qualquer $k \geq k_0$, tem-se

$$BLip(f - g_k) = BLip\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n - \sum_{n=1}^k f_n\right) = BLip\left(\sum_{n=k+1}^{\infty} f_n\right) \leq \sum_{n=k+1}^{\infty} BLip(f_n) < \epsilon$$

e, conseqüentemente, $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge para f na norma $BLip(\cdot)$. $\square$

Sejam (X, d_X) e (Y, d_Y) espaços métricos e considere o espaço produto $X \times Y$ equipado com a métrica

$$d((x, x'), (y, y')) = d_X(x, x') + d_Y(y, y')$$

para todos $x, x' \in X$ e $y, y' \in Y$. Lembre-se de que quando E e F são espaços de Banach, o espaço produto $E \times F$ é Banach com a norma

$$\|(x, y)\|_{E \times F} = \|x\|_E + \|y\|_F$$

para cada $x \in E$ e $y \in F$. A proposição seguinte faz uso dessa norma no espaço $\mathcal{A}(X) \times \mathcal{A}(Y)$.

Proposição 3.1.4. *Sejam X e Y espaços métricos pontuados. Então, a aplicação*

$$\begin{aligned} (\delta_X, \delta_Y) : X \times Y &\longrightarrow \mathcal{A}(X) \times \mathcal{A}(Y) \\ (x, y) &\longmapsto (\delta_X, \delta_Y)(x, y) = (\delta_X(x), \delta_Y(y)) = (m_{x0}, m_{y0}) \end{aligned}$$

é uma imersão isométrica $X \times Y$ em $\mathcal{A}(X) \times \mathcal{A}(Y)$.

Demonstração. Considerando quaisquer $(x, y), (x', y') \in X \times Y$ e usando o item (a) do Lema 2.4.2, obtemos

$$\begin{aligned} \|(\delta_X, \delta_Y)(x, y) - (\delta_X, \delta_Y)(x', y')\|_{\mathcal{A}(X) \times \mathcal{A}(Y)} &= \|(m_{x0}, m_{y0}) - (m_{x'0}, m_{y'0})\|_{\mathcal{A}(X) \times \mathcal{A}(Y)} \\ &= \|(m_{x0} - m_{x'0}, m_{y0} - m_{y'0})\|_{\mathcal{A}(X) \times \mathcal{A}(Y)} \\ &= \|(m_{xx'}, m_{yy'})\|_{\mathcal{A}(X) \times \mathcal{A}(Y)} \\ &= \|m_{xx'}\|_{\mathcal{A}(X)} + \|m_{yy'}\|_{\mathcal{A}(Y)} \\ &= d_X(x, x') + d_Y(y, y') \\ &= d((x, y), (x', y')), \end{aligned}$$

isto é, (δ_X, δ_Y) é uma imersão isométrica. $\square$

Para cada operador 2-Lipschitz $T : X \times Y \longrightarrow E$, vamos definir uma aplicação $T_B : \mathcal{M}(X) \times \mathcal{M}(Y) \longrightarrow E$ por

$$T_B \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i m_{x_i x'_i}, \sum_{j=1}^m \beta_j m_{y_j y'_j} \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \alpha_i \beta_j (T(x_i, y_j) - T(x_i, y'_j) - T(x'_i, y_j) + T(x'_i, y'_j)).$$

Em particular, temos

$$T_B(m_{xx'}, m_{yy'}) = T(x, y) - T(x, y') - T(x', y) + T(x', y'). \quad (3.4)$$

Além disso, vale a igualdade $T = T_B \circ (\delta_X, \delta_Y)$, pois

$$\begin{aligned} T_B \circ (\delta_X, \delta_Y)(x, y) &= T_B((\delta_X, \delta_Y)(x, y)) \\ &= T_B(\delta_X(x), \delta_Y(y)) \\ &= T_B(m_{x0}, m_{y0}) \\ &= T(x, y) - T(x, 0) - T(0, y) + T(0, 0) \\ &= T(x, y) \end{aligned}$$

para cada $x \in X$ e $y \in Y$.

O teorema abaixo mostrará que podemos estender de forma única a aplicação T_B para o espaço $\mathcal{A}(X) \times \mathcal{A}(Y)$.

Teorema 3.1.2. *Sejam X e Y espaços métricos pontuados, E espaço de Banach e $T \in BLip_0(X, Y; E)$. Então, existe uma única aplicação bilinear contínua $\widetilde{T}_B : \mathcal{A}(X) \times \mathcal{A}(Y) \longrightarrow E$ que satisfaz (3.4), $T = \widetilde{T}_B \circ (\delta_X, \delta_Y)$ e, ainda, $BLip(T) = \|\widetilde{T}_B\|$. A aplicação bilinear $\widetilde{T}_B$ é chamada de bi-linearização do operador 2-Lipschitz T .*

Demonstração. Seja $T \in BLip_0(X, Y; E)$ e considere a aplicação T_B associada a T . Inicialmente, provaremos que T_B é bilinear. Tomando $\lambda \in \mathbb{K}$, $m, m_1 \in \mathcal{M}(X)$ e $m_2 \in \mathcal{M}(Y)$, com representações

$$m = \sum_{i=1}^n \gamma_i m_{x_i x'_i}, \quad m_1 = \sum_{i=1}^n \alpha_i m_{x_i x'_i} \quad \text{e} \quad m_2 = \sum_{j=1}^m \beta_j m_{y_j y'_j},$$

obtemos

$$\begin{aligned} T_B(m + m_1, \lambda m_2) &= T_B \left(\sum_{i=1}^n \gamma_i m_{x_i x'_i} + \sum_{i=1}^n \alpha_i m_{x_i x'_i}, \lambda \sum_{j=1}^m \beta_j m_{y_j y'_j} \right) \\ &= T_B \left(\sum_{i=1}^n (\gamma_i + \alpha_i) m_{x_i x'_i}, \lambda \sum_{j=1}^m \beta_j m_{y_j y'_j} \right) \\ &= \lambda \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (\gamma_i + \alpha_i) \beta_j (T(x_i, y_j) - T(x_i, y'_j) - T(x'_i, y_j) + T(x'_i, y'_j)) \\ &= \lambda \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \gamma_i \beta_j (T(x_i, y_j) - T(x_i, y'_j) - T(x'_i, y_j) + T(x'_i, y'_j)) \\ &\quad + \lambda \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \alpha_i \beta_j (T(x_i, y_j) - T(x_i, y'_j) - T(x'_i, y_j) + T(x'_i, y'_j)) \\ &= \lambda T_B \left(\sum_{i=1}^n \gamma_i m_{x_i x'_i}, \sum_{j=1}^m \beta_j m_{y_j y'_j} \right) + \lambda T_B \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i m_{x_i x'_i}, \sum_{j=1}^m \beta_j m_{y_j y'_j} \right) \\ &= \lambda T_B(m, m_2) + \lambda T_B(m_1, m_2), \end{aligned}$$

3. O Ideal de operadores 2-Lipschitz

ou seja, T é bilinear. Agora, mostraremos que T_B é contínua. Para isso, dados $m_1 \in \mathcal{M}(X)$, $m_2 \in \mathcal{M}(Y)$ e $\epsilon > 0$, pela definição de ínfimo, podemos escolher representações para m_1 e m_2 da forma

$$m_1 = \sum_{i=1}^n \alpha_i m_{x_i x'_i} \quad \text{e} \quad m_2 = \sum_{j=1}^m \beta_j m_{y_j y'_j}$$

tais que

$$\sum_{i=1}^n |\alpha_i| d(x_i, x'_i) \leq \epsilon + \|m_1\|_{\mathcal{A}(X)} \quad \text{e} \quad \sum_{j=1}^m |\beta_j| d(y_j, y'_j) \leq \epsilon + \|m_2\|_{\mathcal{A}(Y)},$$

sendo $\alpha_i, \beta_j \in \mathbb{K}$, $x_i, x'_i \in X$, $y_j, y'_j \in Y$, $i \in \{1, \dots, n\}$ e $j \in \{1, \dots, m\}$. Dessa forma,

$$\begin{aligned} \|T_B(m_1, m_2)\| &= \left\| T_B \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i m_{x_i x'_i}, \sum_{j=1}^m \beta_j m_{y_j y'_j} \right) \right\| \\ &= \left\| \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \alpha_i \beta_j T(x_i, y_j) - T(x_i, y'_j) - T(x'_i, y_j) + T(x'_i, y'_j) \right\| \\ &\leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m |\alpha_i| |\beta_j| BLip(T) d(x_i, x'_i) d(y_j, y'_j) \\ &= BLip(T) \sum_{i=1}^n |\alpha_i| d(x_i, x'_i) \sum_{j=1}^m |\beta_j| d(y_j, y'_j) \\ &\leq BLip(T) \left(\epsilon + \|m_1\|_{\mathcal{A}(X)} \right) \left(\epsilon + \|m_2\|_{\mathcal{A}(Y)} \right). \end{aligned}$$

Como a desigualdade acima é válida para todo $\epsilon > 0$, concluimos que

$$\|T_B(m_1, m_2)\| \leq BLip(T) \|m_1\|_{\mathcal{A}(X)} \|m_2\|_{\mathcal{A}(Y)}.$$

Logo, pelo Teorema 1.2.3, T_B é contínua e satisfaz $\|T_B\| \leq BLip(T)$. Por outro lado, pela bilinearidade de T_B e considerando que $T = T_B \circ (\delta_X, \delta_Y)$, obtemos

$$\begin{aligned} \|T(x, y) - T(x, y') - T(x', y) + T(x', y')\| &= \\ &= \|T_B \circ (\delta_X, \delta_Y)(x, y) - T_B \circ (\delta_X, \delta_Y)(x, y') \\ &\quad - T_B \circ (\delta_X, \delta_Y)(x', y) + T_B \circ (\delta_X, \delta_Y)(x', y')\| \\ &= \|T_B(\delta_X(x), \delta_Y(y)) - T_B(\delta_X(x), \delta_Y(y')) \\ &\quad - T_B(\delta_X(x'), \delta_Y(y)) + T_B(\delta_X(x'), \delta_Y(y'))\| \\ &= \|T_B(\delta_X(x) - \delta_X(x'), \delta_Y(y) - \delta_Y(y'))\| \\ &\leq \|T_B\| \|\delta_X(x) - \delta_X(x')\| \|\delta_Y(y) - \delta_Y(y')\| \\ &= \|T_B\| \|m_{x0} - m_{x'0}\| \|m_{y0} - m_{y'0}\| \\ &= \|T_B\| \|m_{xx'}\| \|m_{yy'}\| \\ &= \|T_B\| d(x, x') d(y, y') \end{aligned}$$

para quaisquer $x, x' \in X$ e $y, y' \in Y$, implicando $BLip(T) \leq \|T_B\|$. Sendo assim, vale a igualdade $BLip(T) = \|T_B\|$. Agora, por [7, Teorema 3.1.9], a aplicação contínua bilinear T_B possui uma única extensão

$$\widetilde{T_B} : \mathcal{A}(X) \times \mathcal{A}(Y) \longrightarrow E$$

tal que $\|\widetilde{T_B}\| = \|T_B\| = BLip(T)$ e $T = \widetilde{T_B} \circ (\delta_X, \delta_Y)$. Para mostrar a unicidade da bi-linearização $\widetilde{T_B}$, basta provar que T_B é única. De fato, suponha que exista uma aplicação bilinear contínua

$$S : \mathcal{M}(X) \times \mathcal{M}(Y) \longrightarrow E \text{ tal que } T = S \circ (\delta_X, \delta_Y) \text{ e } \|S\| = BLip(T).$$

Logo, para quaisquer $m_1 = \sum_{i=1}^n \alpha_i m_{x_i x'_i} \in \mathcal{M}(X)$ e $m_2 = \sum_{j=1}^m \beta_j m_{y_j y'_j} \in \mathcal{M}(Y)$, tem-se

$$\begin{aligned} S(m_1, m_2) &= S\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i m_{x_i x'_i}, \sum_{j=1}^m \beta_j m_{y_j y'_j}\right) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \alpha_i \beta_j S(m_{x_i x'_i}, m_{y_j y'_j}) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \alpha_i \beta_j S(m_{x_i 0} - m_{x'_i 0}, m_{y_j 0} - m_{y'_j 0}) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \alpha_i \beta_j (S(m_{x_i 0}, m_{y_j 0}) - S(m_{x_i 0}, m_{y'_j 0}) \\ &\quad - S(m_{x'_i 0}, m_{y_j 0}) + S(m_{x'_i 0}, m_{y'_j 0})) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \alpha_i \beta_j (S(\delta_X(x_i), \delta_Y(y_j)) - S(\delta_X(x_i), \delta_Y(y'_j)) \\ &\quad - S(\delta_X(x'_i), \delta_Y(y_j)) + S(\delta_X(x'_i), \delta_Y(y'_j))) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \alpha_i \beta_j (S \circ (\delta_X, \delta_Y)(x_i, y_j) - S \circ (\delta_X, \delta_Y)(x_i, y'_j) \\ &\quad - S \circ (\delta_X, \delta_Y)(x'_i, y_j) + S \circ (\delta_X, \delta_Y)(x'_i, y'_j)) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \alpha_i \beta_j (T(x_i, y_j) - T(x_i, y'_j) - T(x'_i, y_j) + T(x'_i, y'_j)) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \alpha_i \beta_j T_B(m_{x_i x'_i}, m_{y_j y'_j}) \\ &= T_B\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i m_{x_i x'_i}, \sum_{j=1}^m \beta_j m_{y_j y'_j}\right) \\ &= T_B(m_1, m_2). \end{aligned}$$

Portanto, $S = T_B$ como queríamos demonstrar. $\square$

A partir de agora, vamos denotar a bi-linearização $\widetilde{T_B}$ apenas por T_B . Dados X e Y espaços métricos pontuados, de acordo com o Teorema 1.3.1, o operador bilinear T_B admite uma linearização $(T_B)_L : \mathbb{A}(X) \hat{\otimes}_\pi \mathbb{A}(Y) \longrightarrow E$ que satisfaz

$$T = T_B \circ (\delta_X, \delta_Y) = (T_B)_L \circ \sigma_2 \circ (\delta_X, \delta_Y) \quad (3.5)$$

e, além disso, $\|T_B\| = \|(T_B)_L\|$. Disso, segue que

$$(T_B)_L(m_{x0} \otimes m_{y0}) = T_B(m_{x0}, m_{y0}) = T(x, y)$$

e, pelo Teorema 3.1.2,

$$BLip(T) = \|T_B\| = \|(T_B)_L\|. \quad (3.6)$$

Definição 3.1.2. O operador linear $(T_B)_L$ é chamado de *linearização* do operador 2-Lipschitz T . Para simplificar a notação, escreveremos apenas T_L em vez de $(T_B)_L$.

Observação 3.1.1. A aplicação que associa $T \mapsto T_L$ é linear, pois considerando $\alpha \in \mathbb{K}$, $T, S \in BLip_0(X, Y; E)$ e as linearizações T_L, S_L e $(\alpha T + S)_L$, tem-se

$$\begin{aligned} (\alpha T + S)_L(m_{x0} \otimes m_{y0}) &= (\alpha T + S)(x, y) = \alpha T(x, y) + S(x, y) \\ &= \alpha T_L(m_{x0} \otimes m_{y0}) + S_L(m_{x0} \otimes m_{y0}) \end{aligned}$$

para cada $x \in X$ e $y \in Y$. Como as aplicações $(\alpha T + S)_L$, T_L e S_L são lineares e contínuas, as igualdades acima continuam válidas para qualquer elemento de $\mathbb{A}(X) \hat{\otimes}_\pi \mathbb{A}(Y)$, o que significa que

$$(\alpha T + S)_L = \alpha T_L + S_L.$$

Apresentaremos agora dois exemplos simples de operadores 2-Lipschitz que serão bastante usados nas próximas seções.

Exemplo 3.1.2. Sejam X e Y espaços métricos pontuados e considere a aplicação

$$\begin{aligned} \sigma_2 \circ (\delta_X, \delta_Y) : X \times Y &\longrightarrow \mathbb{A}(X) \hat{\otimes}_\pi \mathbb{A}(Y) \\ (x, y) &\longmapsto \sigma_2 \circ (\delta_X, \delta_Y)(x, y) = m_{x0} \otimes m_{y0}. \end{aligned}$$

Temos

$$\sigma_2 \circ (\delta_X, \delta_Y) \in BLip_0(X, Y; \mathbb{A}(X) \hat{\otimes}_\pi \mathbb{A}(Y)) \text{ e } BLip(\sigma_2 \circ (\delta_X, \delta_Y)) = 1.$$

De fato, como σ_2 é bilinear, usando o Exemplo 3.1.1, segue que $\sigma_2 \in BLip_0(\mathbb{A}(X), \mathbb{A}(Y); \mathbb{A}(X) \hat{\otimes}_\pi \mathbb{A}(Y))$. Com isso e pela Proposição 2.4.2, para cada $x, x' \in X$ e $y, y' \in Y$, temos

$$\begin{aligned} &\|\sigma_2 \circ (\delta_X, \delta_Y)(x, y) - \sigma_2 \circ (\delta_X, \delta_Y)(x, y') - \sigma_2 \circ (\delta_X, \delta_Y)(x', y) + \sigma_2 \circ (\delta_X, \delta_Y)(x', y')\| = \\ &= \|\sigma_2(\delta_X(x), \delta_Y(y)) - \sigma_2(\delta_X(x), \delta_Y(y')) - \sigma_2(\delta_X(x'), \delta_Y(y)) + \sigma_2(\delta_X(x'), \delta_Y(y'))\| \\ &\leq BLip(\sigma_2) \|\delta_X(x) - \delta_X(x')\| \|\delta_Y(y) - \delta_Y(y')\| \\ &= BLip(\sigma_2) d(x, x') d(y, y') \end{aligned}$$

e, além disso,

$$\sigma_2 \circ (\delta_X, \delta_Y)(x, 0) = m_{x0} \otimes m_{00} = 0 \text{ e } \sigma_2 \circ (\delta_X, \delta_Y)(0, y) = m_{00} \otimes m_{y0} = 0.$$

Logo, $\sigma_2 \circ (\delta_X, \delta_Y) \in BLip_0(X, Y; \mathbb{A}(X) \hat{\otimes}_\pi \mathbb{A}(Y))$. Por fim, $BLip(\sigma_2 \circ (\delta_X, \delta_Y)) = 1$, pois

$$\begin{aligned} BLip(\sigma_2 \circ (\delta_X, \delta_Y)) &= \sup_{x \neq x', y \neq y'} \frac{\|\sigma_2 \circ (\delta_X, \delta_Y)(x, y) - \dots + \sigma_2 \circ (\delta_X, \delta_Y)(x', y')\|}{d(x, x') d(y, y')} \\ &= \sup_{x \neq x', y \neq y'} \frac{\|m_{x0} \otimes m_{y0} - m_{x0} \otimes m_{y'0} - m_{x'0} \otimes m_{y0} + m_{x'0} \otimes m_{y'0}\|}{d(x, x') d(y, y')} \\ &= \sup_{x \neq x', y \neq y'} \frac{\|(m_{x0} - m_{x'0}) \otimes (m_{y0} - m_{y'0})\|}{\|m_{xx'}\| \|m_{yy'}\|} \\ &= \sup_{x \neq x', y \neq y'} \frac{\|m_{xx'} \otimes m_{yy'}\|}{\|m_{xx'}\| \|m_{yy'}\|} \\ &= \sup_{x \neq x', y \neq y'} \frac{\|m_{xx'}\| \|m_{yy'}\|}{\|m_{xx'}\| \|m_{yy'}\|} = 1. \end{aligned}$$

Exemplo 3.1.3. Sejam X e Y espaços métricos pontuados e E um espaço de Banach. Considere um ponto qualquer $e \in E$ e funções Lipschitz não-nulas $f \in X^\#$ e $g \in Y^\#$. Defina a aplicação

$$\begin{aligned} f \cdot g \cdot e : X \times Y &\longrightarrow E \\ (x, y) &\longmapsto f \cdot g \cdot e(x, y) = f(x)g(y)e. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Então, $f \cdot g \cdot e \in BLip_0(X, Y; E)$ e verifica-se a igualdade

$$BLip(f \cdot g \cdot e) = Lip(f)Lip(g)\|e\|. \quad (3.8)$$

De fato, como f e g são Lipschitz e preservam ponto base, tem-se

$$\begin{aligned} \|f \cdot g \cdot e(x, y) - f \cdot g \cdot e(x, y') - f \cdot g \cdot e(x', y) + f \cdot g \cdot e(x', y')\| &= \\ &= \|f(x)g(y)e - f(x)g(y')e - f(x')g(y)e + f(x')g(y')e\| \\ &= \|(f(x) - f(x'))(g(y) - g(y'))e\| \\ &= |f(x) - f(x')||g(y) - g(y')|\|e\| \\ &\leq Lip(f)d(x, x')Lip(g)d(y, y')\|e\| \\ &= Lip(f)Lip(g)\|e\|d(x, x')d(y, y') \end{aligned}$$

e

$$f \cdot g \cdot e(x, 0) = 0 \text{ e } f \cdot g \cdot e(0, y) = 0$$

para cada $x, x' \in X$ e $y, y' \in Y$. Então, $f \cdot g \cdot e \in BLip_0(X, Y; E)$ e, pelas definições de $BLip(f \cdot g \cdot e)$, $Lip(f)$ e $Lip(g)$, concluímos que

$$\begin{aligned} BLip(f \cdot g \cdot e) &= \sup_{x \neq x', y \neq y'} \frac{\|f \cdot g \cdot e(x, y) - f \cdot g \cdot e(x, y') - f \cdot g \cdot e(x', y) + f \cdot g \cdot e(x', y')\|}{d(x, x')d(y, y')} \\ &= \sup_{x \neq x', y \neq y'} \frac{\|f(x)g(y)e - f(x)g(y')e - f(x')g(y)e + f(x')g(y')e\|}{d(x, x')d(y, y')} \\ &= \sup_{x \neq x', y \neq y'} \frac{\|(f(x) - f(x'))(g(y) - g(y'))e\|}{d(x, x')d(y, y')} \\ &= \sup_{x \neq x'} \frac{|f(x) - f(x')|}{d(x, x')} \sup_{y \neq y'} \frac{|g(y) - g(y')|}{d(y, y')} \|e\| \\ &= Lip(f)Lip(g)\|e\|. \end{aligned}$$

Definição 3.1.3. Denotaremos por $BLip_{0\mathcal{F}}(X, Y; E)$ o subespaço linear de todos os operadores 2-Lipschitz gerado pelas aplicações da forma especial definida em (3.7). Os elementos desse espaço são chamados de *tipo finito*. Então, qualquer $T \in BLip_{0\mathcal{F}}(X, Y; E)$ admite uma representação finita da forma

$$T = \sum_{i=1}^n f_i \cdot g_i \cdot e_i,$$

onde $n \in \mathbb{N}$, $(f_i)_{i=1}^n \subset X^\#$, $(g_i)_{i=1}^n \subset Y^\#$ e $(e_i)_{i=1}^n \subset E$.

Na proposição abaixo, mostraremos algumas propriedades que a bi-linearização de uma aplicação 2-Lipschitz apresenta.

Proposição 3.1.5. *Sejam X e Y espaços métricos pontuados e E espaço de Banach. Então:*

- (a) $(\lambda S + T)_B = \lambda S_B + T_B$ para todos $S, T \in BLip_0(X, Y; E)$ e $\lambda \in \mathbb{K}$;
- (b) $(f \cdot g \cdot e)_B = f_L \cdot g_L \cdot e$ para quaisquer $f \in X^\#$, $g \in Y^\#$ e $e \in E$, onde f_L e g_L são as linearizações de f e g , respectivamente, e a aplicação $f_L \cdot g_L \cdot e \in \mathcal{L}(\mathcal{A}(X), \mathcal{A}(Y); E)$ é definida por $f_L \cdot g_L \cdot e(m, m') = f_L(m)g_L(m')e$;
- (c) $(u \circ T \circ (f, g))_B = u \circ T_B \circ (\hat{f}, \hat{g})$ para cada $f \in Lip_0(Z, X)$, $g \in Lip_0(W, Y)$, $T \in BLip_0(X, Y; E)$ e $u \in \mathcal{L}(E, F)$, sendo as aplicações $\hat{f}$ e $\hat{g}$ dadas pelo Corolário 2.4.1.

Demonstração. Como são contínuas as aplicações $(\lambda S + T)_B$, λS_B , T_B , $(f \cdot g \cdot e)_B$, $f_L \cdot g_L \cdot e$, $(u \circ T \circ (f, g))_B$ e $u \circ T_B \circ (\hat{f}, \hat{g})$, usaremos a Observação 2.4.2 para mostrar os itens acima apenas nos espaços das moléculas.

(a) Dados $m \in \mathcal{M}(X)$ e $m' \in \mathcal{M}(Y)$ com representações

$$m = \sum_{i=1}^n \alpha_i m_{x_i x'_i} \quad \text{e} \quad m' = \sum_{k=1}^r \beta_k m_{y_k y'_k},$$

onde $x_i, x'_i \in X$, $y_k, y'_k \in Y$ e $\alpha_i, \beta_k \in \mathbb{K}$, obtemos

$$\begin{aligned} (\lambda S + T)_B(m, m') &= (\lambda S + T)_B \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i m_{x_i x'_i}, \sum_{k=1}^r \beta_k m_{y_k y'_k} \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^r \alpha_i \beta_k ((\lambda S + T)(x_i, y_k) - (\lambda S + T)(x_i, y'_k) \\ &\quad - (\lambda S + T)(x'_i, y_k) + (\lambda S + T)(x'_i, y'_k)) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^r \alpha_i \beta_k (\lambda S(x_i, y_k) + T(x_i, y_k) - \lambda S(x_i, y'_k) - T(x_i, y'_k) \\ &\quad - \lambda S(x'_i, y_k) - T(x'_i, y_k) + \lambda S(x'_i, y'_k) + T(x'_i, y'_k)) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^r \alpha_i \beta_k (\lambda S(x_i, y_k) - \lambda S(x_i, y'_k) - \lambda S(x'_i, y_k) + \lambda S(x'_i, y'_k)) \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^r \alpha_i \beta_k (T(x_i, y_k) - T(x_i, y'_k) - T(x'_i, y_k) + T(x'_i, y'_k)) \\ &= \lambda S_B \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i m_{x_i x'_i}, \sum_{k=1}^r \beta_k m_{y_k y'_k} \right) + T_B \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i m_{x_i x'_i}, \sum_{k=1}^r \beta_k m_{y_k y'_k} \right) \\ &= \lambda S_B(m, m') + T_B(m, m') = (\lambda S_B + T_B)(m, m'), \end{aligned}$$

ou seja, $(\lambda S + T)_B = \lambda S_B + T_B$.

(b) Vamos seguir usando as notações do item (a) acima. Sendo assim, temos

$$\begin{aligned} (f \cdot g \cdot e)_B(m, m') &= (f \cdot g \cdot e)_B \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i m_{x_i x'_i}, \sum_{k=1}^r \beta_k m_{y_k y'_k} \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^r \alpha_i \beta_k (f \cdot g \cdot e(x_i, y_k) - f \cdot g \cdot e(x'_i, y_k) \\ &\quad - f \cdot g \cdot e(x_i, y'_k) + f \cdot g \cdot e(x'_i, y'_k)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -f \cdot g \cdot e(x_i, y'_k) + f \cdot g \cdot e(x'_i, y'_k)) \\
= & \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^r \alpha_i \beta_k (f(x_i)g(y_k)e - f(x'_i)g(y_k)e \\
& - f(x_i)g(y'_k)e + f(x'_i)g(y'_k)e) \\
= & \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^r \alpha_i \beta_k (f(x_i) - f(x'_i)) (g(y_k) - g(y'_k)) e \\
= & \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^r \alpha_i \beta_k (f_L(m_{x_i 0}) - f_L(m_{x'_i 0})) (g_L(m_{y_k 0}) - g_L(m_{y'_k 0})) e \\
= & \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^r \alpha_i \beta_k f_L(m_{x_i 0} - m_{x'_i 0}) g_L(m_{y_k 0} - m_{y'_k 0}) e \\
= & f_L \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i m_{x_i x'_i} \right) g_L \left(\sum_{k=1}^r \beta_k m_{y_k y'_k} \right) e \\
= & f_L(m) g_L(m') e = f_L \cdot g_L \cdot e(m, m'),
\end{aligned}$$

implicando que $(f \cdot g \cdot e)_B = f_L \cdot g_L \cdot e$.

(c) Tome $m_1 \in \mathcal{M}(Z)$ e $m_2 \in \mathcal{M}(W)$ com representações

$$m_1 = \sum_{j=1}^p \alpha_j m_{z_j z'_j} \quad \text{e} \quad m_2 = \sum_{l=1}^q \beta_l m_{w_l w'_l},$$

onde $z_j, z'_j \in Z$, $w_l, w'_l \in W$ e $\alpha_j, \beta_l \in \mathbb{K}$. Então,

$$\begin{aligned}
(u \circ T \circ (f, g))_B(m_1, m_2) &= (u \circ T \circ (f, g))_B \left(\sum_{j=1}^p \alpha_j m_{z_j z'_j}, \sum_{l=1}^q \beta_l m_{w_l w'_l} \right) \\
&= \sum_{j=1}^p \sum_{l=1}^q \alpha_j \beta_l (u \circ T \circ (f, g)(z_j, w_l) - u \circ T \circ (f, g)(z_j, w'_l) \\
&\quad - u \circ T \circ (f, g)(z'_j, w_l) + u \circ T \circ (f, g)(z'_j, w'_l)) \\
&= \sum_{j=1}^p \sum_{l=1}^q \alpha_j \beta_l (u \circ T(f(z_j), g(w_l)) - u \circ T(f(z_j), g(w'_l)) \\
&\quad - u \circ T(f(z'_j), g(w_l)) + u \circ T(f(z'_j), g(w'_l))) \\
&= \sum_{j=1}^p \sum_{l=1}^q \alpha_j \beta_l (u(T(f(z_j), g(w_l))) - u(T(f(z_j), g(w'_l))) \\
&\quad - u(T(f(z'_j), g(w_l))) + u(T(f(z'_j), g(w'_l)))) \\
&= \sum_{j=1}^p \sum_{l=1}^q \alpha_j \beta_l u(T(f(z_j), g(w_l)) - T(f(z_j), g(w'_l)) \\
&\quad - T(f(z'_j), g(w_l)) + T(f(z'_j), g(w'_l))) \\
&= \sum_{j=1}^p \sum_{l=1}^q \alpha_j \beta_l u(T_B(m_{f(z_j)0}, m_{g(w_l)0}) - T_B(m_{f(z_j)0}, m_{g(w'_l)0}) \\
&\quad - T_B(m_{f(z'_j)0}, m_{g(w_l)0}) + T_B(m_{f(z'_j)0}, m_{g(w'_l)0}))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=1}^p \sum_{l=1}^q \alpha_j \beta_l u(T_B(\hat{f}(m_{z_j 0}), \hat{g}(m_{w_l 0})) - T_B(\hat{f}(m_{z'_j 0}), \hat{g}(m_{w'_l 0})) \\
&\quad - T_B(\hat{f}(m_{z_j 0}), \hat{g}(m_{w_l 0})) + T_B(\hat{f}(m_{z'_j 0}), \hat{g}(m_{w'_l 0}))) \\
&= \sum_{j=1}^p \sum_{l=1}^q \alpha_j \beta_l u(T_B(\hat{f}(m_{z_j 0}) - \hat{f}(m_{z'_j 0}), \hat{g}(m_{w_l 0}) - \hat{g}(m_{w'_l 0}))) \\
&= \sum_{j=1}^p \sum_{l=1}^q \alpha_j \beta_l u(T_B(\hat{f}(m_{z_j 0} - m_{z'_j 0}), \hat{g}(m_{w_l 0} - m_{w'_l 0}))) \\
&= u(T_B(\hat{f}\left(\sum_{j=1}^p \alpha_j m_{z_j z'_j}\right), \hat{g}\left(\sum_{l=1}^q \beta_l m_{w_l w'_l}\right))) \\
&= u \circ T_B(\hat{f}(m_1), \hat{g}(m_2)) \\
&= u \circ T_B \circ (\hat{f}, \hat{g})(m_1, m_2),
\end{aligned}$$

o que significa que $(u \circ T \circ (f, g))_B = u \circ T_B \circ (\hat{f}, \hat{g})$. □

3.2 O Ideal de operadores 2-Lipschitz

Antes de definir um ideal de operadores 2-Lipschitz, vamos exibir os conceitos ideais de operadores lineares, Lipschitz e multilineares. Para mais detalhes desses conceitos, veja os trabalhos [5, 18, 28, 29].

Definição 3.2.1. Um ideal de operadores lineares $\mathcal{I}$ é uma subclasse da classe $\mathcal{L}$ de todos os operadores lineares contínuos entre espaços de Banach tal que, para quaisquer espaços de Banach E e F , as componentes $\mathcal{I}(E, F) = \mathcal{L}(E, F) \cap \mathcal{I}$ gozam das propriedades:

- (a) $\mathcal{I}(E, F)$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{L}(E, F)$ tal que contém os operadores lineares de posto finito de E em F ;
- (b) Propriedade de ideal: Se $u \in \mathcal{L}(E, F)$, $v \in \mathcal{I}(F, G)$ e $t \in \mathcal{L}(G, H)$, então a composição $t \circ v \circ u \in \mathcal{I}(E, H)$.

Definição 3.2.2. Um *ideal normado de operadores lineares* é um ideal de operadores lineares $\mathcal{I}$ munido com uma função $\|\cdot\|_{\mathcal{I}} : \mathcal{I} \rightarrow [0, +\infty)$ que satisfaz:

- (a') $\|\cdot\|_{\mathcal{I}}$ restrita à componente $\mathcal{I}(E, F)$ é uma norma para cada espaços de Banach E e F ;
- (b') $\|id_{\mathbb{K}}\|_{\mathcal{I}} = 1$, sendo $id_{\mathbb{K}} : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$ dada por $id_{\mathbb{K}}(\alpha) = \alpha$;
- (c') Dados $u \in \mathcal{L}(E, F)$, $v \in \mathcal{I}(F, G)$ e $t \in \mathcal{L}(G, H)$, então $\|t \circ v \circ u\|_{\mathcal{I}} \leq \|t\| \|v\|_{\mathcal{I}} \|u\|$.

Quando as componentes $\mathcal{I}(E, F)$ são espaços completos com relação à norma $\|\cdot\|_{\mathcal{I}}$, dizemos que $(\mathcal{I}, \|\cdot\|_{\mathcal{I}})$ é um *ideal de Banach de operadores lineares*. Além disso, se todas as componentes $\mathcal{I}(E, F)$ são fechadas em $\mathcal{L}(E, F)$ com respeito à norma usual dos operadores lineares, dizemos que $\mathcal{I}$ é um *ideal fechado de operadores lineares*.

Observação 3.2.1. Sejam E e F espaços de Banach e $(\mathcal{I}, \|\cdot\|_{\mathcal{I}})$ um ideal normado de operadores lineares. Então, $\|v\| \leq \|v\|_{\mathcal{I}}$ para qualquer $v \in \mathcal{I}(E, F)$. De fato, sejam $v \in \mathcal{I}(E, F)$, $\varphi \in F^*$, $x \in E$ e considere as aplicações $\varphi \circ v \circ (id_{\mathbb{K}} \otimes x)$ e

$$\begin{aligned} \varphi(v(x))id_{\mathbb{K}} : \mathbb{K} &\longrightarrow \mathbb{K} \\ \lambda &\longmapsto (\varphi(v(x))id_{\mathbb{K}})(\lambda) = \varphi(v(x))\lambda. \end{aligned}$$

Para qualquer $\lambda \in \mathbb{K}$, temos que

$$(\varphi(v(x))id_{\mathbb{K}})(\lambda) = \varphi(v(x))\lambda = \varphi(v(x\lambda)) = \varphi(v((id_{\mathbb{K}} \otimes x)(\lambda))) = \varphi \circ v \circ (id_{\mathbb{K}} \otimes x)(\lambda),$$

implicando que $\varphi(v(x))id_{\mathbb{K}} = \varphi \circ v \circ (id_{\mathbb{K}} \otimes x)$ para cada $x \in E$. Com isso, por $(\mathcal{I}, \|\cdot\|_{\mathcal{I}})$ ser um ideal normado de operadores lineares e pelo Exemplo 1.2.1, segue que

$$\begin{aligned} |\varphi(v(x))| &= |\varphi(v(x))| \|id_{\mathbb{K}}\|_{\mathcal{I}} = \|\varphi(v(x))id_{\mathbb{K}}\|_{\mathcal{I}} \\ &= \|\varphi \circ v \circ (id_{\mathbb{K}} \otimes x)\|_{\mathcal{I}} \leq \|\varphi\| \|v\|_{\mathcal{I}} \|id_{\mathbb{K}} \otimes x\| \\ &= \|\varphi\| \|v\|_{\mathcal{I}} \|id_{\mathbb{K}}\| \|x\| = \|\varphi\| \|v\|_{\mathcal{I}} \|x\| \end{aligned}$$

e, pelo Corolário 1.2.3, temos

$$\|v(x)\| = \sup_{\|\varphi\| \leq 1} |\varphi(v(x))| \leq \sup_{\|\varphi\| \leq 1} \|\varphi\| \|v\|_{\mathcal{I}} \|x\| = \|v\|_{\mathcal{I}} \|x\|.$$

Portanto,

$$\|v\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|v(x)\| \leq \sup_{\|x\| \leq 1} \|v\|_{\mathcal{I}} \|x\| = \|v\|_{\mathcal{I}}.$$

A seguinte definição visa generalizar a definição de ideal para os operadores Lipschitz.

Definição 3.2.3. Um *ideal de operadores Lipschitz* $\mathcal{I}_{Lip}$ é uma subclasse da classe Lip_0 de todas as aplicações Lipschitz que preservam ponto base de um espaço métrico pontuado em um espaço de Banach tal que, para cada espaço métrico pontuado X e espaço de Banach E , as componentes $\mathcal{I}_{Lip}(X, E) = Lip_0(X, E) \cap \mathcal{I}_{Lip}$ satisfazem:

- (I) $\mathcal{I}_{Lip}(X, E)$ é um subespaço vetorial de $Lip_0(X, E)$;
- (II) Para quaisquer $f \in X^{\#}$ e $e \in E$, a aplicação $f \cdot e \in \mathcal{I}_{Lip}(X, E)$;
- (III) Propriedade de ideal: Se $g \in Lip_0(Y, X)$, $f \in \mathcal{I}_{Lip}(X, E)$ e $u \in \mathcal{L}(E, F)$, então a composição

$$u \circ f \circ g \in \mathcal{I}_{Lip}(Y, F).$$

Definição 3.2.4. Um ideal de operadores Lipschitz $\mathcal{I}_{Lip}$ é denominado de *ideal normado (Banach) de operadores Lipschitz* quando existe uma função $\|\cdot\|_{\mathcal{I}_{Lip}} : \mathcal{I}_{Lip} \longrightarrow [0, +\infty)$ com as propriedades:

- (I') Para cada espaço métrico pontuado X e espaço de Banach E , o par $(\mathcal{I}_{Lip}(X, E), \|\cdot\|_{\mathcal{I}_{Lip}})$ é um espaço normado (Banach) e $Lip(f) \leq \|f\|_{\mathcal{I}_{Lip}}$ para todos $f \in \mathcal{I}_{Lip}(X, E)$.
- (II') A aplicação $id_{\mathbb{K}} : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$, $id_{\mathbb{K}}(\alpha) = \alpha$, satisfaz $\|id_{\mathbb{K}}\|_{\mathcal{I}_{Lip}} = 1$.
- (III') Sejam $g \in Lip_0(Y, X)$, $f \in \mathcal{I}_{Lip}(X, E)$ e $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Então

$$\|u \circ f \circ g\|_{\mathcal{I}_{Lip}} \leq \|u\| \|f\|_{\mathcal{I}_{Lip}} Lip(g).$$

3. O Ideal de operadores 2-Lipschitz

A próxima definição generaliza para o contexto multilinear o conceito de ideal de operadores lineares.

Definição 3.2.5. Um *ideal de operadores multilineares* $\mathcal{M}$ é uma subclasse da classe de todas as aplicações multilineares contínuas entre espaços de Banach tal que, para todos $n \in \mathbb{N}$ e espaços de Banach $E_1, \dots, E_n, F$, as componentes $\mathcal{M}(E_1, \dots, E_n; F) = \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F) \cap \mathcal{M}$ satisfazem:

- (A) $\mathcal{M}(E_1, \dots, E_n; F)$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$ que contém as aplicações multilineares de tipo finito;
- (B) Propriedade de ideal: Se $u_j \in \mathcal{L}(G_j, E_j)$ para cada $j = 1, \dots, n$, $A \in \mathcal{M}(E_1, \dots, E_n; F)$ e $t \in \mathcal{L}(F, H)$, então a aplicação composição

$$t \circ A \circ (u_1, \dots, u_n) \in \mathcal{M}(G_1, \dots, G_n; F).$$

Definição 3.2.6. Um *ideal normado de aplicações multilineares* é um ideal de aplicações multilineares $\mathcal{M}$ munido com uma função $\|\cdot\|_{\mathcal{M}} : \mathcal{M} \rightarrow [0, +\infty)$ que tem as propriedades:

- (A') $\|\cdot\|_{\mathcal{M}}$ restrita à componente $\mathcal{M}(E_1, \dots, E_n; F)$ é uma norma para quaisquer $n \in \mathbb{N}$ e espaços de Banach $E_1, \dots, E_n, F$;
- (B') Para todo $n \in \mathbb{N}$, tem-se $\|id_{\mathbb{K}^n}\|_{\mathcal{M}} = 1$, com $id_{\mathbb{K}^n} : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}$ dada por

$$id_{\mathbb{K}^n}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \alpha_1 \cdots \alpha_n.$$

- (C') Dados $u_j \in \mathcal{L}(G_j, E_j)$ para cada $j = 1, \dots, n$, $A \in \mathcal{M}(E_1, \dots, E_n; F)$ e $t \in \mathcal{L}(F, H)$, então

$$\|t \circ A \circ (u_1, \dots, u_n)\|_{\mathcal{M}} \leq \|t\| \|A\|_{\mathcal{M}} \|u_1\| \cdots \|u_n\|.$$

Quando as componentes $\mathcal{M}(E_1, \dots, E_n; F)$ são completas com respeito a $\|\cdot\|_{\mathcal{M}}$, dizemos que $\mathcal{M}$ é um *ideal completo de aplicações multilineares*.

Agora, vamos seguir o espírito das definições anteriores para apresentar o ideal de operadores 2-Lipschitz.

Definição 3.2.7. Um *ideal de operadores 2-Lipschitz* $\mathcal{I}_{BLip}$ é uma subclasse da classe $BLip_0$ tal que, para quaisquer espaços métricos pontuados X e Y e espaço de Banach E ,

$$\mathcal{I}_{BLip}(X, Y; E) = BLip_0(X, Y; E) \cap \mathcal{I}_{BLip},$$

que é denominada de componente de $\mathcal{I}_{BLip}$ em $BLip_0(X, Y; E)$, satisfaz as seguintes condições:

- (i) $\mathcal{I}_{BLip}(X, Y; E)$ é um subespaço vetorial de $BLip_0(X, Y; E)$;
- (ii) Para quaisquer $f \in X^\#$, $g \in Y^\#$ e $e \in E$, a aplicação $f \cdot g \cdot e \in \mathcal{I}_{BLip}(X, Y; E)$;
- (iii) Propriedade de ideal: Se $f \in Lip_0(Z, X)$, $g \in Lip_0(W, Y)$, $T \in \mathcal{I}_{BLip}(X, Y; E)$ e $u \in \mathcal{L}(E, F)$, então a composição

$$u \circ T \circ (f, g) \in \mathcal{I}_{BLip}(Z, W; F).$$

Definição 3.2.8. Um ideal de operadores 2-Lipschitz $\mathcal{I}_{BLip}$ é chamado de *ideal normado de operadores 2-Lipschitz* se existe uma função $\|\cdot\|_{\mathcal{I}_{BLip}} : \mathcal{I}_{BLip} \longrightarrow [0, +\infty)$ com as propriedades:

- (i') Para quaisquer espaços métricos pontuados X e Y e todo espaço de Banach E , o par $(\mathcal{I}_{BLip}(X, Y; E), \|\cdot\|_{\mathcal{I}_{BLip}})$ é um espaço normado e $BLip(T) \leq \|T\|_{\mathcal{I}_{BLip}}$ para cada $T \in \mathcal{I}_{BLip}(X, Y; E)$.
- (ii') A aplicação

$$\begin{aligned} id_{\mathbb{K}^2} : \mathbb{K} \times \mathbb{K} &\longrightarrow \mathbb{K} \\ (\alpha, \beta) &\longmapsto id_{\mathbb{K}^2}(\alpha, \beta) = \alpha \cdot \beta \end{aligned}$$

satisfaz $\|id_{\mathbb{K}^2}\|_{\mathcal{I}_{BLip}} = 1$.

- (iii') Sejam $f \in Lip_0(Z, X)$, $g \in Lip_0(W, Y)$, $T \in \mathcal{I}_{BLip}(X, Y; E)$ e $u \in \mathcal{L}(E, F)$, então vale a desigualdade

$$\|u \circ T \circ (f, g)\|_{\mathcal{I}_{BLip}} \leq \|u\| \|T\|_{\mathcal{I}_{BLip}} Lip(f) Lip(g).$$

Analogamente, um ideal de operadores 2-Lipschitz $\mathcal{I}_{BLip}$ é denominado *ideal de Banach de operadores 2-Lipschitz* quando existe uma função $\|\cdot\|_{\mathcal{I}_{BLip}} : \mathcal{I}_{BLip} \longrightarrow [0, +\infty)$ satisfazendo os itens (ii') e (iii') acima e que satisfaz a propriedade:

- (iv') O par $(\mathcal{I}_{BLip}(X, Y; E), \|\cdot\|_{\mathcal{I}_{BLip}})$ é um espaço de Banach e $BLip(T) \leq \|T\|_{\mathcal{I}_{BLip}}$ para cada $T \in \mathcal{I}_{BLip}(X, Y; E)$.

Um ideal de operadores 2-Lipschitz $\mathcal{I}_{BLip}$ é dito *fechado* quando cada componente $\mathcal{I}_{BLip}(X, Y; E)$ é subespaço fechado de $BLip_0(X, Y; E)$ com a norma $BLip(\cdot)$.

É claro que os espaços de Banach considerados nas definições acima estão todos com o mesmo corpo escalar fixo.

Observação 3.2.2. Pela definição acima, as classes $BLip_{0\mathcal{F}}$ e $BLip_0$ são o menor e o maior ideal de operadores 2-Lipschitz, respectivamente.

Proposição 3.2.1. Sejam $\mathcal{I}_{BLip}$ um ideal normado de operadores 2-Lipschitz, X e Y espaços métricos pontuados e E um espaço de Banach. Então,

$$\|f \cdot g \cdot e\|_{\mathcal{I}_{BLip}} = Lip(f) Lip(g) \|e\| = BLip(f \cdot g \cdot e)$$

para quaisquer $f \in X^\#$, $g \in Y^\#$ e $e \in E$.

Demonstração. Considere arbitrariamente $f \in X^\#$, $g \in Y^\#$ e $e \in E$. Podemos escrever $f \cdot g \cdot e$ da seguinte forma

$$f \cdot g \cdot e = e \cdot id_{\mathbb{K}} \circ id_{\mathbb{K}^2} \circ (f, g), \tag{3.9}$$

pois, para cada $x \in X$ e $y \in Y$, tem-se

$$\begin{aligned} e \cdot id_{\mathbb{K}} \circ id_{\mathbb{K}^2} \circ (f, g)(x, y) &= e \cdot id_{\mathbb{K}} \circ id_{\mathbb{K}^2}((f, g)(x, y)) \\ &= e \cdot id_{\mathbb{K}} \circ id_{\mathbb{K}^2}(f(x), g(y)) \\ &= e \cdot id_{\mathbb{K}}(id_{\mathbb{K}^2}(f(x), g(y))) \\ &= e \cdot id_{\mathbb{K}}(f(x) \cdot g(y)) \\ &= e \cdot f(x) \cdot g(y) \\ &= f(x) \cdot g(y) \cdot e \\ &= f \cdot g \cdot e(x, y). \end{aligned}$$

Pelas igualdades (3.9) e (3.8) e por (i), (ii) e (iii), obtemos

$$\begin{aligned}
 \|f \cdot g \cdot e\|_{\mathcal{I}BLip} &= \|e \cdot id_{\mathbb{K}} \circ id_{\mathbb{K}^2} \circ (f, g)\|_{\mathcal{I}BLip} \\
 &\leq \|e \cdot id_{\mathbb{K}}\| \|id_{\mathbb{K}^2}\|_{\mathcal{I}BLip} Lip(f) Lip(g) \\
 &= \|e\| \|id_{\mathbb{K}}\| Lip(f) Lip(g) \\
 &= \|e\| Lip(f) Lip(g) \\
 &= BLip(f \cdot g \cdot e) \\
 &\leq \|f \cdot g \cdot e\|_{\mathcal{I}BLip},
 \end{aligned}$$

implicando que $\|f \cdot g \cdot e\|_{\mathcal{I}BLip} = \|e\| Lip(f) Lip(g) = BLip(f \cdot g \cdot e)$. $\square$

Usando técnicas inspiradas em [9], apresentaremos um método para construir uma estrutura de ideal de operadores 2-Lipschitz a partir de um determinado ideal de operadores lineares. Esse método é chamado método da composição.

Definição 3.2.9. Seja $\mathcal{I}$ um ideal de operadores lineares. Dizemos que um operador 2-Lipschitz $T \in BLip_0(X, Y; E)$ pertence ao *ideal composição de operadores 2-Lipschitz* $\mathcal{I} \circ BLip_0$, neste caso escrevemos $T \in \mathcal{I} \circ BLip_0(X, Y; E)$, se existem um espaço de Banach F , um operador 2-Lipschitz $S \in BLip_0(X, Y; F)$ e um operador linear $u \in \mathcal{I}(F, E)$ tais que $T = u \circ S$. Caso $(\mathcal{I}, \|\cdot\|_{\mathcal{I}})$ seja um ideal normado de operadores, escreveremos

$$\|T\|_{\mathcal{I} \circ BLip_0} = \inf \|u\|_{\mathcal{I}BLip}(S),$$

onde o ínfimo acima é tomado sobre todas as aplicações u e S que satisfazem as condições acima.

O próximo teorema apresenta um condição necessária e suficiente para que um operador 2-Lipschitz $T \in BLip_0(X, Y; E)$ também pertença ao ideal composição de operadores 2-Lipschitz $\mathcal{I} \circ BLip_0(X, Y; E)$.

Teorema 3.2.1. *Considere um ideal de operadores lineares $\mathcal{I}$ e uma aplicação $T \in BLip_0(X, Y; E)$. Então, são equivalentes:*

- (a) $T \in \mathcal{I} \circ BLip_0(X, Y; E)$;
- (b) $T_L \in \mathcal{I}(\mathcal{A}(X) \hat{\otimes}_{\pi} \mathcal{A}(Y), E)$.

Além disso, se $(\mathcal{I}, \|\cdot\|_{\mathcal{I}})$ é um ideal normado de operadores lineares, vale a igualdade

$$\|T\|_{\mathcal{I} \circ BLip_0} = \|T_L\|_{\mathcal{I}} \quad (3.10)$$

e ainda temos a identificação isométrica

$$(\mathcal{I} \circ BLip_0(X, Y; E), \|\cdot\|_{\mathcal{I} \circ BLip_0}) = (\mathcal{I}(\mathcal{A}(X) \hat{\otimes}_{\pi} \mathcal{A}(Y), E), \|\cdot\|_{\mathcal{I}}). \quad (3.11)$$

Demonstração. (a) $\implies$ (b) Suponha que $T \in \mathcal{I} \circ BLip_0(X, Y; E)$. Dado qualquer $\epsilon > 0$, pela definição de $\|\cdot\|_{\mathcal{I} \circ BLip_0}$, existe um espaço de Banach F , um operador 2-Lipschitz $S \in BLip_0(X, Y; F)$ e um operador linear $u \in \mathcal{I}(F, E)$ tais que $T = u \circ S$ com

$$\|u\|_{\mathcal{I}BLip}(S) \leq \|T\|_{\mathcal{I} \circ BLip_0} + \epsilon. \quad (3.12)$$

Considere T_L e S_L as únicas linearizações de T e S , respectivamente, e observe que $T_L = u \circ S_L$, pois

$$T_L(m_{x0} \otimes m_{y0}) = T(x, y) = (u \circ S)(x, y) = u(S(x, y)) = u(S_L(x \otimes y)) = u \circ S_L(m_{x0} \otimes m_{y0})$$

sempre que $x \in X$ e $y \in Y$. Dessa forma, $T_L \in \mathcal{I}(\mathcal{A}(X) \hat{\otimes}_\pi \mathcal{A}(Y), E)$ pela propriedade de ideal. Além disso, por (3.6) e (3.12), segue que

$$\|T_L\|_{\mathcal{I}} = \|u \circ S_L\|_{\mathcal{I}} \leq \|u\|_{\mathcal{I}} \|S_L\| = \|u\|_{\mathcal{I} \circ BLip}(S) \leq \|T\|_{\mathcal{I} \circ BLip_0} + \epsilon$$

para todo $\epsilon > 0$. Logo,

$$\|T_L\|_{\mathcal{I}} \leq \|T\|_{\mathcal{I} \circ BLip_0}. \quad (3.13)$$

(b) $\implies$ (a) Admita que $T_L \in \mathcal{I}(\mathcal{A}(X) \hat{\otimes}_\pi \mathcal{A}(Y), E)$ e considere a fatoraçaõ $T = T_L \circ \sigma_2 \circ (\delta_X, \delta_Y)$. Fazendo $R = \sigma_2 \circ (\delta_X, \delta_Y)$, pelo Exemplo 3.1.2, tem-se $R \in BLip_0(X, Y; \mathcal{A}(X) \hat{\otimes}_\pi \mathcal{A}(Y))$ e $BLip(R) = 1$. Assim, $T = T_L \circ R \in \mathcal{I} \circ BLip_0(X, Y; E)$ e também

$$\|T\|_{\mathcal{I} \circ BLip_0} = \|T_L \circ R\|_{\mathcal{I} \circ BLip_0} \leq \|T_L\|_{\mathcal{I} \circ BLip_0}(R) = \|T_L\|_{\mathcal{I}},$$

obtendo que $\|T\|_{\mathcal{I} \circ BLip_0} \leq \|T_L\|_{\mathcal{I}}$. Portanto, por (3.13), temos $\|T\|_{\mathcal{I} \circ BLip_0} = \|T_L\|_{\mathcal{I}}$. Agora, para provar a identificação (3.11), considere a aplicação que associa $T \mapsto T_L$, a qual é linear pela Observação 3.1.1. Mostraremos a sobrejetividade dessa aplicação. O Teorema 1.3.1 diz que os espaços $\mathcal{L}(\mathcal{A}(X), \mathcal{A}(Y); E)$ e $\mathcal{L}(\mathcal{A}(X) \hat{\otimes}_\pi \mathcal{A}(Y); E)$ são isomorfos isometricamente. Dessa forma, dada qualquer $R \in \mathcal{L}(\mathcal{A}(X) \hat{\otimes}_\pi \mathcal{A}(Y); E)$, existe uma única $T \in \mathcal{L}(\mathcal{A}(X), \mathcal{A}(Y); E)$ tal que $R = T_L$. Daí, segue analogamente ao Exemplo 3.1.1 que a aplicação $T \circ (\delta_X, \delta_Y) \in BLip_0(X, Y; E)$. Com isso, o Teorema 3.1.2 garante que existe um única aplicação $(T \circ (\delta_X, \delta_Y))_B \in \mathcal{L}(\mathcal{A}(X), \mathcal{A}(Y); E)$ tal que

$$T \circ (\delta_X, \delta_Y) = (T \circ (\delta_X, \delta_Y))_B \circ (\delta_X, \delta_Y).$$

Logo, $T = (T \circ (\delta_X, \delta_Y))_B$, implicando que $R = (T \circ (\delta_X, \delta_Y))_L$, o que prova a sobrejetividade. Por fim, a isometria vem diretamente da igualdade (3.10) provada acima. $\square$

Na proposição abaixo, mostraremos que o ideal $\mathcal{I} \circ BLip_0$ é, de fato, um ideal de operadores 2-Lipschitz e ainda veremos que $\mathcal{I} \circ BLip_0$ herda algumas propriedades do ideal de operadores lineares $\mathcal{I}$.

Proposição 3.2.2. *Seja $\mathcal{I}$ um ideal de operadores lineares. Então:*

- (a) *O ideal $\mathcal{I} \circ BLip_0$ é um ideal de operadores 2-Lipschitz;*
- (b) *Se $\mathcal{I}$ é um ideal normado de operadores lineares, então $\mathcal{I} \circ BLip_0$ é um ideal normado de operadores 2-Lipschitz;*
- (c) *Se $\mathcal{I}$ é um ideal de Banach de operadores lineares, então $\mathcal{I} \circ BLip_0$ é um ideal de Banach de operadores 2-Lipschitz;*
- (d) *Se $\mathcal{I}$ é um ideal fechado de operadores lineares, então $\mathcal{I} \circ BLip_0$ é um ideal fechado de operadores 2-Lipschitz.*

Demonstração. (a) Provaremos que $\mathcal{I} \circ BLip_0$ satisfaz as condições da Definição 3.2.7:

(i) $\mathcal{I} \circ BLip_0(X, Y; E)$ é um subespaço linear de $BLip_0(X, Y; E)$.

De fato, é claro que a aplicação nula pertence em $\mathcal{I} \circ BLip_0(X, Y; E)$. Sejam $\alpha \in \mathbb{K}$ e $T, S \in \mathcal{I} \circ BLip_0(X, Y; E)$, assim $T, S \in BLip_0(X, Y; E)$ e pela Observação 3.1.1, tem-se

$$(\alpha T + S)_L = \alpha T_L + S_L.$$

Com isso, segue do Teorema 3.2.1 que

$$\begin{aligned} T, S \in \mathcal{I} \circ BLip_0(X, Y; E) &\iff T_L, S_L \in \mathcal{I}(\mathbb{A}(X) \hat{\otimes}_\pi \mathbb{A}(Y), E) \\ &\iff (\alpha T + S)_L = \alpha T_L + S_L \in \mathcal{I}(\mathbb{A}(X) \hat{\otimes}_\pi \mathbb{A}(Y), E) \\ &\iff \alpha T + S \in \mathcal{I} \circ BLip_0(X, Y; E). \end{aligned}$$

Logo, $\mathcal{I} \circ BLip_0(X, Y; E)$ é um subespaço linear de $BLip_0(X, Y; E)$.

(ii) Dados quaisquer $f \in X^\#, g \in Y^\#$ e $e \in E$, então $f \cdot g \cdot e \in \mathcal{I} \circ BLip_0(X, Y; E)$.

Como $\mathcal{I}$ é um ideal de operadores lineares, sabemos que a aplicação

$$\begin{aligned} id_{\mathbb{K}} \otimes e : \mathbb{K} &\longrightarrow E \\ \alpha &\longmapsto (id_{\mathbb{K}} \otimes e)(\alpha) = id_{\mathbb{K}}(\alpha)e = \alpha e \end{aligned}$$

pertencem a $\mathcal{I}(\mathbb{K}, E)$. Segue analogamente ao Exemplo 3.1.3 que $(f \cdot g) \in BLip_0(X, Y; E)$.

Agora, note que $f \cdot g \cdot e = (id_{\mathbb{K}} \otimes e) \circ (f \cdot g)$, pois

$$\begin{aligned} (id_{\mathbb{K}} \otimes e) \circ (f \cdot g)(x, y) &= id_{\mathbb{K}} \otimes e(f \cdot g(x, y)) \\ &= id_{\mathbb{K}} \otimes e(f(x)g(y)) \\ &= f(x)g(y)e \\ &= f \cdot g \cdot e(x, y) \end{aligned}$$

para cada $x \in X$ e $y \in Y$. Assim, $f \cdot g \cdot e = (id_{\mathbb{K}} \otimes e) \circ (f \cdot g) \in \mathcal{I} \circ BLip_0(X, Y; E)$.

(iii) Propriedade de ideal: Se $f \in Lip_0(Z, X)$, $g \in Lip_0(W, Y)$, $T \in \mathcal{I} \circ BLip_0(X, Y; E)$ e $u \in \mathcal{L}(E, F)$, então a composição

$$u \circ T \circ (f, g) \in \mathcal{I} \circ BLip_0(Z, W; F).$$

Com efeito, já que $T \in \mathcal{I} \circ BLip_0(X, Y; E)$, existem um espaço de Banach G , um operador $S \in BLip_0(X, Y, G)$ e um operador linear $u' \in \mathcal{I}(G, E)$ tais que $T = u' \circ S$. Observe que $S \circ (f, g) \in BLip_0(Z, W; G)$, pois

$$S \circ (f, g)(0, w) = S \circ (f, g)(z, 0) = 0$$

e ainda

$$\begin{aligned} \|S \circ (f, g)(z, w) - S \circ (f, g)(z, w') - S \circ (f, g)(z', w) + S \circ (f, g)(z', w')\| &= \\ &= \|S((f, g)(z, w)) - S((f, g)(z, w')) - S((f, g)(z', w)) + S((f, g)(z', w'))\| \\ &= \|S(f(z), g(w)) - S(f(z), g(w')) - S(f(z'), g(w)) + S(f(z'), g(w'))\| \\ &\leq BLip(S)d(f(z), f(z'))d(g(w), g(w')) \\ &\leq BLip(S)Lip(f)Lip(g)d(z, z')d(w, w') \end{aligned}$$

para todos $z, z' \in Z$ e $w, w' \in W$. Com isso, por $u \circ u' \in \mathcal{I}(G, F)$ pela propriedade de ideal, concluímos

$$u \circ T \circ (f, g) = u \circ (u' \circ S) \circ (f, g) = (u \circ u') \circ (S \circ (f, g)) \in \mathcal{I} \circ BLip_0(Z, W; F).$$

Portanto, $\mathcal{I} \circ BLip_0$ é um ideal de operadores 2-Lipschitz.

(b) Vamos mostrar que $\mathcal{I} \circ BLip_0$ satisfaz as condições da Definição 3.2.8:

(i') $(\mathcal{I} \circ BLip_0(X, Y; E), \|\cdot\|_{\mathcal{I} \circ BLip_0})$ é um espaço normado e $BLip(T) \leq \|T\|_{\mathcal{I} \circ BLip_0}$ para cada $T \in \mathcal{I} \circ BLip_0(X, Y; E)$.

Sejam $T, S \in \mathcal{I} \circ BLip_0(X, Y; E)$ e $\alpha \in \mathbb{K}$. Como $\mathcal{I}$ é um ideal normado de operadores lineares e por (3.6) e (3.10), temos

$$BLip(T) = \|T_L\| \leq \|T_L\|_{\mathcal{I}} = \|T\|_{\mathcal{I} \circ BLip_0}.$$

Além disso, usando (3.10) e a Observação 3.1.1, segue que $\|\cdot\|_{\mathcal{I} \circ BLip_0}$ define uma norma em $\mathcal{I} \circ BLip_0(X, Y; E)$, pois

- $\|T\|_{\mathcal{I} \circ BLip_0} = \|T_L\|_{\mathcal{I}} \geq 0$.
- $\|T\|_{\mathcal{I} \circ BLip_0} = 0 \iff \|T_L\|_{\mathcal{I}} = 0 \iff T_L = 0 \iff T = 0$.
- $\|\alpha T\|_{\mathcal{I} \circ BLip_0} = \|(\alpha T)_L\|_{\mathcal{I}} = \|\alpha T_L\|_{\mathcal{I}} = |\alpha| \|T_L\|_{\mathcal{I}} = |\alpha| \|T\|_{\mathcal{I} \circ BLip_0}$.
- $\|T + S\|_{\mathcal{I} \circ BLip_0} = \|(T + S)_L\|_{\mathcal{I}} = \|T_L + S_L\|_{\mathcal{I}} \leq \|T_L\|_{\mathcal{I}} + \|S_L\|_{\mathcal{I}} = \|T\|_{\mathcal{I} \circ BLip_0} + \|S\|_{\mathcal{I} \circ BLip_0}$.

(ii') A aplicação $id_{\mathbb{K}^2} : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$ satisfaz $\|id_{\mathbb{K}^2}\|_{\mathcal{I} \circ BLip_0} = 1$.

Inicialmente, note que $id_{\mathbb{K}^2} = id_{\mathbb{K}} \circ id_{\mathbb{K}^2}$, pois

$$id_{\mathbb{K}} \circ id_{\mathbb{K}^2}(\alpha, \beta) = id_{\mathbb{K}}(id_{\mathbb{K}^2}(\alpha, \beta)) = id_{\mathbb{K}^2}(\alpha, \beta)$$

sempre que $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Então, já que $id_{\mathbb{K}} \in \mathcal{I}(\mathbb{K}, \mathbb{K})$ e $id_{\mathbb{K}^2} \in BLip_0(\mathbb{K}, \mathbb{K}; \mathbb{K})$, obtemos

$$id_{\mathbb{K}^2} = id_{\mathbb{K}} \circ id_{\mathbb{K}^2} \in \mathcal{I} \circ BLip_0(\mathbb{K}, \mathbb{K}; \mathbb{K})$$

e, consequentemente,

$$1 = BLip(id_{\mathbb{K}^2}) \leq \|id_{\mathbb{K}^2}\|_{\mathcal{I} \circ BLip_0} \leq \|id_{\mathbb{K}}\|_{\mathcal{I}} BLip(id_{\mathbb{K}^2}) = 1.$$

(iii') Se $f \in Lip_0(Z, X)$, $g \in Lip_0(W, Y)$, $T \in \mathcal{I} \circ BLip_0(X, Y; E)$ e $u \in \mathcal{L}(E, F)$, então vale a desigualdade

$$\|u \circ T \circ (f, g)\|_{\mathcal{I} \circ BLip_0} \leq \|u\| \|T\|_{\mathcal{I} \circ BLip_0} Lip(f) Lip(g).$$

De fato, pelo Corolário 2.4.1, considere as únicas aplicações lineares $\hat{f} \in \mathcal{I}(\mathcal{E}(Z), \mathcal{E}(X))$ e $\hat{g} \in \mathcal{I}(\mathcal{E}(W), \mathcal{E}(Y))$ associadas a f e g , respectivamente. Pela Proposição 1.3.5, existe um único operador linear

$$\begin{aligned} \hat{f} \otimes_{\pi} \hat{g} : \mathcal{E}(Z) \hat{\otimes}_{\pi} \mathcal{E}(W) &\longrightarrow \mathcal{E}(X) \hat{\otimes}_{\pi} \mathcal{E}(Y) \\ (m \otimes m') &\longmapsto \hat{f} \otimes_{\pi} \hat{g}(m \otimes m') = \hat{f}(m) \otimes \hat{g}(m'), \end{aligned}$$

com $\|\hat{f} \otimes_{\pi} \hat{g}\| = \|\hat{f}\| \|\hat{g}\| = Lip(f) Lip(g)$. Agora, tomando as aplicações bilineares canônicas

$$\begin{aligned} \sigma_2 : \mathcal{E}(X) \times \mathcal{E}(Y) &\longrightarrow \mathcal{E}(X) \hat{\otimes}_{\pi} \mathcal{E}(Y) \\ (m_{x0}, m_{y0}) &\longmapsto \sigma_2(m_{x0}, m_{y0}) = m_{x0} \otimes m_{y0} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \sigma'_2 : \mathcal{E}(Z) \times \mathcal{E}(W) &\longrightarrow \mathcal{E}(Z) \hat{\otimes}_{\pi} \mathcal{E}(W) \\ (m_{z0}, m_{w0}) &\longmapsto \sigma'_2(m_{z0}, m_{w0}) = m_{z0} \otimes m_{w0}, \end{aligned}$$

obtemos

$$\begin{aligned}
 \sigma_2 \circ (\delta_X, \delta_Y) \circ (f, g)(z, w) &= \sigma_2 \circ (\delta_X, \delta_Y)((f, g)(z, w)) \\
 &= \sigma_2 \circ (\delta_X, \delta_Y)(f(z), g(w)) \\
 &= \sigma_2(\delta_X(f(z)), \delta_Y(g(w))) \\
 &= \sigma_2(m_{f(z)0}, m_{g(w)0}) \\
 &= m_{f(z)0} \otimes m_{g(w)0} \\
 &= \hat{f}(m_{z0}) \otimes \hat{g}(m_{w0}) \\
 &= \hat{f} \otimes_{\pi} \hat{g}(m_{z0} \otimes m_{w0}) \\
 &= \hat{f} \otimes_{\pi} \hat{g}(\sigma'_2(m_{z0}, m_{w0})) \\
 &= \hat{f} \otimes_{\pi} \hat{g} \circ \sigma'_2(m_{z0}, m_{w0}) \\
 &= \hat{f} \otimes_{\pi} \hat{g} \circ \sigma'_2(\delta_Z(z), \delta_W(w)) \\
 &= \hat{f} \otimes_{\pi} \hat{g} \circ \sigma'_2 \circ (\delta_Z, \delta_W)(z, w)
 \end{aligned}$$

para quaisquer $z \in Z$ e $w \in W$, isto é,

$$\sigma_2 \circ (\delta_X, \delta_Y) \circ (f, g) = \hat{f} \otimes_{\pi} \hat{g} \circ \sigma'_2 \circ (\delta_Z, \delta_W).$$

Com isso, usando a igualdade $T = T_L \circ \sigma_2 \circ (\delta_X, \delta_Y)$ dada em (3.5), segue que

$$\begin{aligned}
 u \circ T \circ (f, g) &= u \circ [T_L \circ \sigma_2 \circ (\delta_X, \delta_Y)] \circ (f, g) \\
 &= u \circ T_L \circ [\sigma_2 \circ (\delta_X, \delta_Y) \circ (f, g)] \\
 &= u \circ T_L \circ [\hat{f} \otimes_{\pi} \hat{g} \circ \sigma'_2 \circ (\delta_Z, \delta_W)] \\
 &= (u \circ T_L \circ \hat{f} \otimes_{\pi} \hat{g}) \circ \sigma'_2 \circ (\delta_Z, \delta_W).
 \end{aligned}$$

Como $u \circ T \circ (f, g) = (u \circ T \circ (f, g))_L \circ \sigma'_2 \circ (\delta_Z, \delta_W)$ e pela unicidade da linearização de $u \circ T \circ (f, g)$, concluímos

$$(u \circ T \circ (f, g))_L = u \circ T_L \circ \hat{f} \otimes_{\pi} \hat{g}.$$

Portanto, pela propriedade do ideal de operadores $\mathcal{I}$ e por (3.10), temos

$$\begin{aligned}
 \|u \circ T \circ (f, g)\|_{\mathcal{I} \circ BLip_0} &= \|(u \circ T \circ (f, g))_L\|_{\mathcal{I}} \\
 &= \|u \circ T_L \circ \hat{f} \otimes_{\pi} \hat{g}\|_{\mathcal{I}} \\
 &\leq \|u\| \|T_L\|_{\mathcal{I}} \|\hat{f} \otimes_{\pi} \hat{g}\| \\
 &= \|u\| \|T\|_{\mathcal{I} \circ BLip_0} Lip(f) Lip(g).
 \end{aligned}$$

(c) Pelo item (b) anterior, basta provar que $(\mathcal{I} \circ BLip_0(X, Y; E), \|\cdot\|_{\mathcal{I} \circ BLip_0})$ é um espaço de Banach. Seja $(T_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência de Cauchy em $\mathcal{I} \circ BLip_0(X, Y; E)$, então $(T_n)_{n=1}^{\infty}$ pertence a $BLip_0(X, Y; E)$ e, pelo Teorema 3.2.1, $((T_n)_L)_{n=1}^{\infty}$ pertence a $\mathcal{I}(\mathcal{A}(X) \hat{\otimes}_{\pi} \mathcal{A}(Y); E)$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Logo, dado $\epsilon > 0$, podemos encontrar $n_{\epsilon} \in \mathbb{N}$ tal que

$$BLip(T_n - T_k) \leq \|T_n - T_k\|_{\mathcal{I} \circ BLip_0} < \epsilon$$

e

$$\|(T_n)_L - (T_k)_L\|_{\mathcal{I}} = \|T_n - T_k\|_{\mathcal{I} \circ BLip_0} < \epsilon$$

para todos $n, k \geq n_{\epsilon}$, onde a igualdade acima segue de (3.10). Assim, as sequências $(T_n)_{n=1}^{\infty}$ e $((T_n)_L)_{n=1}^{\infty}$ são de Cauchy nos espaços de Banach $BLip_0(X, Y; E)$ e $\mathcal{I}(\mathcal{A}(X) \hat{\otimes}_{\pi} \mathcal{A}(Y); E)$,

respectivamente. Daí, existem aplicações $T \in BLip_0(X, Y; E)$ e $F \in \mathcal{I}(\mathcal{A}(X) \hat{\otimes}_\pi \mathcal{A}(Y); E)$ tais que $(T_n)_{n=1}^\infty$ converge para T com a norma $BLip(\cdot)$ e $((T_n)_L)_{n=1}^\infty$ converge para F com a norma $\|\cdot\|_{\mathcal{I}}$. Com isso, considerando a linearização T_L , segue que

$$T_L \circ \sigma_2 \circ (\delta_X, \delta_Y) = T = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (T_n)_L \circ \sigma_2 \circ (\delta_X, \delta_Y) = F \circ \sigma_2 \circ (\delta_X, \delta_Y),$$

ou seja, $T_L = F \in \mathcal{I}(\mathcal{A}(X) \hat{\otimes}_\pi \mathcal{A}(Y); E)$. Portanto, o Teorema 3.2.1 garante que $T \in \mathcal{I} \circ BLip_0(X, Y; E)$ e, assim, a sequência de Cauchy $(T_n)_{n=1}^\infty$ converge para T .

(d) Seja $(T_n)_{n=1}^\infty \in \mathcal{I} \circ BLip_0(X, Y; E)$ que converge para $T \in BLip_0(X, Y; E)$. O Teorema 3.2.1 garante que $(T_n)_L \in \mathcal{I}(\mathcal{A}(X) \hat{\otimes}_\pi \mathcal{A}(Y); E)$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Então, pela Observação 3.1.1 e por (3.6),

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|(T_n)_L - T_L\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|(T_n - T)_L\| = \lim_{n \rightarrow \infty} BLip(T_n - T) = 0.$$

Daí, como $\mathcal{I}$ é um ideal fechado de operadores lineares, tem-se $T_L \in \mathcal{I}(\mathcal{A}(X) \hat{\otimes}_\pi \mathcal{A}(Y); E)$ e, pelo Teorema 3.2.1, $T \in \mathcal{I} \circ BLip_0(X, Y; E)$, implicando que $\mathcal{I} \circ BLip_0(X, Y; E)$ é um subespaço fechado de $BLip_0(X, Y; E)$ com a norma $BLip(\cdot)$. Portanto, $\mathcal{I} \circ BLip_0$ é um ideal fechado de operadores 2-Lipschitz. $\square$

Sejam $\mathcal{I}$ um ideal de operadores lineares e X_1, X_2 e Y espaços métricos pontuados. Na próxima proposição, apresentaremos uma condição necessária e suficiente para garantirmos que uma aplicação 2-Lipschitz $T : X_1 \times X_2 \rightarrow \mathcal{A}(Y)$ pertence ao ideal de operadores 2-Lipschitz $\mathcal{I} \circ BLip_0(X_1, X_2; \mathcal{A}(Y))$. Para provar esse resultado precisamos do seguinte lema:

Lema 3.2.1. *Sejam $\mathcal{I}_1$ e $\mathcal{I}_2$ ideais de operadores, X_1 e X_2 espaços métricos pontuados e F espaço de Banach. Logo:*

- (a) *Se $\mathcal{I}_1 \circ BLip_0(X_1, X_2; F) \subset \mathcal{I}_2 \circ BLip_0(X_1, X_2; F)$, então $\mathcal{I}_1(\mathcal{A}(X_i), F) \subset \mathcal{I}_2(\mathcal{A}(X_i), F)$ para cada $i = 1, 2$*
- (b) *Se $\mathcal{I}_1 \circ BLip_0(X_1, X_2; F) = \mathcal{I}_2 \circ BLip_0(X_1, X_2; F)$, então $\mathcal{I}_1(\mathcal{A}(X_i), F) = \mathcal{I}_2(\mathcal{A}(X_i), F)$ para cada $i = 1, 2$.*

Demonstração. (a) Considerando qualquer $u \in \mathcal{I}_1(\mathcal{A}(X_2), F)$, nosso objetivo é provar que $u \in \mathcal{I}_2(\mathcal{A}(X_2), F)$. Para tanto, fixe $a_1 \in X_1$, $a_1 \neq 0$, e $\varphi_1 \in \mathcal{A}(X_1)^*$ tal que $\varphi_1(m_{a_1 0}) = 1$. Defina as aplicações

$$\begin{aligned} T : X_1 \times X_2 &\longrightarrow F \\ (x_1, x_2) &\longmapsto T(x_1, x_2) = \varphi_1(m_{x_1 0})u(m_{x_2 0}) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} R : X_1 \times X_2 &\longrightarrow \mathcal{A}(X_2) \\ (x_1, x_2) &\longmapsto R(x_1, x_2) = \varphi_1(m_{x_1 0})m_{x_2 0}. \end{aligned}$$

Observe que $R \in BLip_0(X_1, X_2; \mathcal{A}(X_2))$, já que $R(0, x_2) = R(x_1, 0) = 0$ e

$$\begin{aligned} \|R(x_1, x_2) - R(x_1, x'_2) - R(x'_1, x_2) + R(x'_1, x'_2)\| &= \\ &= \|\varphi_1(m_{x_1 0})m_{x_2 0} - \varphi_1(m_{x_1 0})m_{x'_2 0} - \varphi_1(m_{x'_1 0})m_{x_2 0} + \varphi_1(m_{x'_1 0})m_{x'_2 0}\| \\ &= \|(\varphi_1(m_{x_1 0}) - \varphi_1(m_{x'_1 0}))m_{x_2 0} - (\varphi_1(m_{x_1 0}) - \varphi_1(m_{x'_1 0}))m_{x'_2 0}\| \\ &= \|\varphi_1(m_{x_1 0} - m_{x'_1 0})(m_{x_2 0} - m_{x'_2 0})\| \\ &= \|\varphi_1(m_{x_1 x'_1})m_{x_2 x'_2}\| \\ &= |\varphi_1(m_{x_1 x'_1})| \|m_{x_2 x'_2}\| \\ &\leq \|\varphi_1\| \|m_{x_1 x'_1}\| \|m_{x_2 x'_2}\| \\ &= \|\varphi_1\| d(x_1 x'_1) d(x_2 x'_2) \end{aligned}$$

3. O Ideal de operadores 2-Lipschitz

para cada $x_1, x'_1 \in X_1$ e $x_2, x'_2 \in X_2$. Agora, note que $T = u \circ R$, pois

$$u \circ R(x_1, x_2) = u(R(x_1, x_2)) = u(\varphi_1(m_{x_1 0})m_{x_2 0}) = \varphi_1(m_{x_1 0})u(m_{x_2 0}) = T(x_1, x_2),$$

concluimos que $T \in \mathcal{I}_1 \circ BLip_0(X_1, X_2; F)$. Assim, pela hipótese inicial, segue que $T \in \mathcal{I}_2 \circ BLip_0(X_1, X_2; F)$ e, conseqüentemente, existe um espaço de Banach G , um operador 2-Lipschitz $S \in BLip_0(X_1, X_2; G)$ e um operador linear $v \in \mathcal{I}_2(G, F)$ tais que $T = v \circ S$. Considere S_B a bi-linearização de S e o operador

$$\begin{aligned} w : \mathcal{M}(X_2) &\longrightarrow G \\ m &\longmapsto w(m) = S_B(m_{a_1 0}, m) \end{aligned}$$

que é linear e contínua, pois, para cada $\alpha \in \mathbb{K}$ e $m, n \in \mathcal{M}(X_2)$, temos

$$w(\alpha m + n) = S_B(m_{a_1 0}, \alpha m + n) = \alpha S_B(m_{a_1 0}, m) + S_B(m_{a_1 0}, n) = \alpha w(m) + w(n)$$

e

$$\|w(m)\|_G = \|S_B(m_{a_1}, m)\|_G \leq \|S_B\| \|m_{a_1}\| \|m\|.$$

Vamos mostrar agora que $u = v \circ w$ em $\mathcal{M}(X_2)$. Para isso, tome quaisquer $x_2, x'_2 \in X_2$ e por (3.4), note que

$$\begin{aligned} u(m_{x_2 x'_2}) &= u(m_{x_2 0} - m_{x'_2 0}) \\ &= 1u(m_{x_2 0}) - 1u(m_{x'_2 0}) \\ &= \varphi_1(m_{a_1 0})u(m_{x_2 0}) - \varphi_1(m_{a_1 0})u(m_{x'_2 0}) \\ &= T(a_1, x_2) - T(a_1, x'_2) \\ &= (v \circ S)(a_1, x_2) - (v \circ S)(a_1, x'_2) \\ &= v(S(a_1, x_2)) - v(S(a_1, x'_2)) \\ &= v(S_B(m_{a_1 0}, m_{x_2 0})) - v(S_B(m_{a_1 0}, m_{x'_2 0})) \\ &= v(S_B(m_{a_1 0}, m_{x_2 0}) - S_B(m_{a_1 0}, m_{x'_2 0})) \\ &= v(S_B(m_{a_1 0}, m_{x_2 0} - m_{x'_2 0})) \\ &= v(S_B(m_{a_1 0}, m_{x_2 x'_2})) \\ &= v(w(m_{x_2 x'_2})) \\ &= v \circ w(m_{x_2 x'_2}), \end{aligned}$$

implicando, pela linearidade de u , que $u(m) = v \circ w(m)$ para todo $m \in \mathcal{M}(X_2)$. Por fim, o Corolário 1.2.1 garante que o operador w possui uma única extensão linear e contínua de $\mathcal{M}(X_2) = \mathcal{A}(X_2)$ em G , que também denotaremos por w , satisfazendo $u = v \circ w$. Com isso e pela propriedade de ideal $\mathcal{I}_2$, concluimos que $u \in \mathcal{I}_2(\mathcal{A}(X_2), F)$. Analogamente, prova-se que

$$\mathcal{I}_1(\mathcal{A}(X_1), F) \subset \mathcal{I}_2(\mathcal{A}(X_1), F).$$

(b) Segue diretamente do item (a) acima. $\square$

Proposição 3.2.3. *Sejam $\mathcal{I}$ um ideal de operadores lineares e Y espaço métrico pontuado. Para quaisquer espaços métricos pontuados X_1, X_2 , temos*

$$\mathcal{I} \circ BLip_0(X_1, X_2; \mathcal{A}(Y)) = BLip_0(X_1, X_2; \mathcal{A}(Y)) \quad (3.14)$$

se, e somente se, o operador identidade $id_{\mathcal{A}(Y)} : \mathcal{A}(Y) \longrightarrow \mathcal{A}(Y)$ pertence a $\mathcal{I}$.

Demonstração. ($\implies$) Suponha válida a igualdade (3.14). Em particular, fazendo $X_1 = X_2 = Y$, obtemos

$$\mathcal{I} \circ BLip_0(Y, Y; \mathbb{A}(Y)) = BLip_0(Y, Y; \mathbb{A}(Y)). \quad (3.15)$$

Vamos provar a igualdade

$$BLip_0(Y, Y; \mathbb{A}(Y)) = \mathcal{L} \circ BLip_0(Y, Y; \mathbb{A}(Y)). \quad (3.16)$$

De fato, a inclusão $\mathcal{L} \circ BLip_0(Y, Y; \mathbb{A}(Y)) \subset BLip_0(Y, Y; \mathbb{A}(Y))$ vem diretamente da definição de componente de $\mathcal{L} \circ BLip_0$. Para mostrar a outra inclusão, basta tomar $T \in BLip_0(Y, Y; \mathbb{A}(Y))$, considerar o operador identidade $id_{\mathbb{A}(Y)} \in \mathcal{L}(\mathbb{A}(Y), \mathbb{A}(Y))$ e notar que

$$T = id_{\mathbb{A}(Y)} \circ T \in \mathcal{L} \circ BLip_0(Y, Y; \mathbb{A}(Y)).$$

Logo, por (3.15) e (3.16),

$$\mathcal{I} \circ BLip_0(Y, Y; \mathbb{A}(Y)) = \mathcal{L} \circ BLip_0(Y, Y; \mathbb{A}(Y)).$$

Daí, considerando $\mathcal{I}_1 = \mathcal{I}$, $\mathcal{I}_2 = \mathcal{L}$ e $F = \mathbb{A}(Y)$ no Lema 3.2.1, segue que

$$\mathcal{I}(\mathbb{A}(Y), \mathbb{A}(Y)) = \mathcal{L}(\mathbb{A}(Y), \mathbb{A}(Y))$$

e, portanto, $id_{\mathbb{A}(Y)} \in \mathcal{I}(\mathbb{A}(Y), \mathbb{A}(Y))$, já que $id_{\mathbb{A}(Y)} \in \mathcal{L}(\mathbb{A}(Y), \mathbb{A}(Y))$.

($\impliedby$) Admita que $id_{\mathbb{A}(Y)}$ pertence a $\mathcal{I}$. Pela definição de componente de $\mathcal{I} \circ BLip_0$, sabemos que

$$\mathcal{I} \circ BLip_0(X_1, X_2, \mathbb{A}(Y)) \subset BLip_0(X_1, X_2, \mathbb{A}(Y)).$$

Por outro lado, tomando $T \in BLip_0(X_1, X_2, \mathbb{A}(Y))$, podemos escrever

$$T = id_{\mathbb{A}(Y)} \circ T \in \mathcal{I} \circ BLip_0(X_1, X_2, \mathbb{A}(Y)).$$

Portanto, $BLip_0(X_1, X_2, \mathbb{A}(Y)) \subset \mathcal{I} \circ BLip_0(X_1, X_2, \mathbb{A}(Y))$, implicando na igualdade

$$\mathcal{I} \circ BLip_0(X_1, X_2; \mathbb{A}(Y)) = BLip_0(X_1, X_2; \mathbb{A}(Y)).$$

□

CAPÍTULO 4

APLICAÇÕES E EXEMPLOS

Neste capítulo, abordaremos quatro exemplos de ideais de operadores 2-Lipschitz. Inicialmente, falaremos do ideal de operadores 2-Lipschitz compactos, apresentaremos o ideal de operadores 2-Lipschitz fortemente p -somantes e provaremos que eles são ideais de operadores 2-Lipschitz do tipo composição gerados por ideais de operadores lineares. Além disso, vamos estudar os ideais de operadores 2-Lipschitz (p_1, p_2, p_3) -somantes e fatorável p -dominados. A principal referência usada neste capítulo é o artigo [19].

4.1 Ideal de operadores 2-Lipschitz compactos

Apresentaremos o conceito de operador 2-Lipschitz compacto e mostraremos que a classe formada por esses operadores é um ideal do tipo composição. Veremos que essa nova classe é uma extensão da classe dos operadores bilineares e que algumas propriedades do ambiente bilinear (e também linear) podem ser transferidas para o caso 2-Lipschitz. Muitos artigos foram dedicados ao conceito de operadores bilineares compactos entre espaços de Banach, como os trabalhos [8, 23, 30, 31].

Definição 4.1.1. Sejam X e Y espaços métricos pontuados, E espaço de Banach e $T \in BLip_0(X, Y; E)$. Analogamente ao caso Lipschitz (ver [20]), chamamos de *imagem 2-Lipschitz* de T o subconjunto $Im_{BLip}(T) \subset E$ que consiste em todos os elementos da forma

$$\frac{T(x, y) - T(x, y') - T(x', y) + T(x', y')}{d(x, x')d(y, y')},$$

onde $x, x' \in X$ e $y, y' \in Y$, com $x \neq x'$ e $y \neq y'$.

Seja $T : X \times Y \longrightarrow E$ um operador com $Im_{BLip_0}(T)$ limitado. Logo existe $C > 0$ tal que, para cada $x, x' \in X$, $x \neq x'$, e $y, y' \in Y$, $y \neq y'$, tem-se

$$\left\| \frac{T(x, y) - T(x, y') - T(x', y) + T(x', y')}{d(x, x')d(y, y')} \right\| \leq C,$$

ou, equivalentemente,

$$\|T(x, y) - T(x, y') - T(x', y) + T(x', y')\| \leq Cd(x, x')d(y, y').$$

Dessa forma, se $Im_{BLip}(T)$ é um subconjunto limitado de E , então a aplicação T é 2-Lipschitz. Além disso, é claro que vale a recíproca dessa implicação pela definição de operador 2-Lipschitz.

Definição 4.1.2. Um operador 2-Lipschitz $T \in BLip_0(X, Y; E)$ é dito *compacto* se $Im_{BLip}(T)$ é relativamente compacto em E , ou seja, $\overline{Im_{BLip}(T)}$ é compacto em E . O espaço vetorial formado por esses operadores é denotado por $BLip_{0\kappa}(X, Y; E)$.

Os operadores bilineares compactos são também operadores 2-Lipschitz compactos. De fato, considere X, Y e E espaços de Banach e $T : X \times Y \rightarrow E$ um operador bilinear compacto. Então $Im_{BLip}(T) = T(S_X \times S_Y)$, pois, por um lado, tomando $p \in Im_{BLip}(T)$, podemos encontrar $x, x' \in X$ e $y, y' \in Y$, com $x \neq x'$ e $y \neq y'$, tais que

$$\begin{aligned} p &= \frac{T(x, y) - T(x, y') - T(x', y) + T(x', y')}{\|x - x'\| \|y - y'\|} \\ &= \frac{T(x - x', y - y')}{\|x - x'\| \|y - y'\|} \\ &= T\left(\frac{x - x'}{\|x - x'\|}, \frac{y - y'}{\|y - y'\|}\right) \in T(S_X \times S_Y). \end{aligned}$$

Assim, $Im_{BLip}(T) \subseteq T(S_X \times S_Y)$. Por outro lado, dado qualquer $p \in T(S_X \times S_Y)$, existem $x \in S_X$ e $y \in S_Y$ satisfazendo $p = T(x, y)$. Com isso, $\|x\| = 1$, $\|y\| = 1$ e ainda

$$p = T(x, y) = \frac{T(x, y) - T(x, 0) - T(0, y) + T(0, 0)}{\|x - 0\| \|y - 0\|} \in Im_{BLip}(T),$$

donde $T(S_X \times S_Y) \subseteq Im_{BLip}(T)$ e, conseqüentemente, $Im_{BLip}(T) = T(S_X \times S_Y)$. Portanto, como T é bilinear compacto, segue que $T(S_X \times S_Y)$ é relativamente compacto e, pela igualdade provada acima, $Im_{BLip}(T)$ também é relativamente compacto, mostrando que T é 2-Lipschitz compacto.

O próximo teorema fornece um caminho mais curto para mostrar que a classe dos operadores 2-Lipschitz compactos é um ideal de Banach fechado de operadores 2-Lipschitz. Para prová-lo, vamos usar o lema abaixo. Lembre-se de que a envoltória absolutamente convexa do subconjunto A de um espaço de Banach é definida por

$$\Gamma(A) = \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i; n \in \mathbb{N}, x_i \in A, \alpha_i \in \mathbb{R}, \sum_{i=1}^n |\alpha_i| \leq 1 \right\}.$$

Lema 4.1.1. *Sejam X_1 e X_2 espaços métricos pontuados, E um espaço de Banach e $T \in BLip_0(X_1, X_2; E)$. Então, são válidas as inclusões*

$$Im_{BLip}(T) \subset T_B \left(\overline{\Gamma(M_{X_1})} \times \overline{\Gamma(M_{X_2})} \right) \subset \overline{\Gamma(Im_{BLip}(T))}, \quad (4.1)$$

onde $M_{X_i} = \left\{ \frac{m_{x_i 0} - m_{x'_i 0}}{d(x_i, x'_i)}; x_i, x'_i \in X_i, x_i \neq x'_i \right\}$ para cada $i = 1, 2$.

Demonstração. Primeiramente, por [20, Lema 1.1], segue que

$$B_{\mathbb{E}(X_i)} = \overline{\Gamma(M_{X_i})} \text{ com } i = 1, 2. \quad (4.2)$$

Para provar a primeira inclusão, lembre-se de (3.4), do item (a) do Lema 2.4.2 e que T_B é bilinear. Assim, tomando $p \in Im_{BLip}(T)$, existem $x, x' \in X$ e $y, y' \in Y$, com $x \neq x'$ e $y \neq y'$, tais que

$$\begin{aligned} p &= \frac{T(x, y) - T(x, y') - T(x', y) + T(x', y')}{d(x, x')d(y, y')} \\ &= \frac{T_B(m_{xx'}, m_{yy'})}{\|m_{xx'}\|_{\mathbb{E}(X_1)} \|m_{yy'}\|_{\mathbb{E}(X_2)}} \\ &= T_B \left(\frac{m_{xx'}}{\|m_{xx'}\|_{\mathbb{E}(X_1)}}, \frac{m_{yy'}}{\|m_{yy'}\|_{\mathbb{E}(X_2)}} \right) \in T_B \left(B_{\mathbb{E}(X_1)} \times B_{\mathbb{E}(X_2)} \right). \end{aligned}$$

Logo, pela igualdade (4.2), $p \in T_B \left(\overline{\Gamma(M_{X_1})} \times \overline{\Gamma(M_{X_2})} \right)$. Para a segunda inclusão, considere $q \in T_B \left(\overline{\Gamma(M_{X_1})} \times \overline{\Gamma(M_{X_2})} \right)$, então podemos encontrar

$$v_1 \in \overline{\Gamma(M_{X_1})} \text{ e } v_2 \in \overline{\Gamma(M_{X_2})} \text{ tais que } q = T_B(v_1, v_2).$$

Com isso, existem sequências

$$(s_{1,n})_{n=1}^{\infty} \in \Gamma(M_{X_1}) \text{ e } (s_{2,n})_{n=1}^{\infty} \in \Gamma(M_{X_2}) \text{ com } \lim_n s_{1,n} = v_1 \text{ e } \lim_n s_{2,n} = v_2$$

e para cada $n \in \mathbb{N}$, tem-se

$$s_{1,n} = \sum_{i=1}^k \alpha_{n,i} a_{n,i} \text{ e } s_{2,n} = \sum_{j=1}^l \beta_{n,j} b_{n,j},$$

com $k, l \in \mathbb{N}$, $k < l$, $a_{n,i} \in M_{X_1}$, $b_{n,j} \in M_{X_2}$, $\alpha_{n,i}, \beta_{n,j} \in \mathbb{R}$, $\sum_{i=1}^k |\alpha_{n,i}| \leq 1$ e $\sum_{j=1}^l |\beta_{n,j}| \leq 1$. Daí, para quaisquer $n \in \mathbb{N}$,

$$a_{n,i} = \frac{m_{x_{n,i}0} - m_{x'_{n,i}0}}{d(x_{n,i}, x'_{n,i})} = \frac{m_{x_{n,i}x'_{n,i}}}{d(x_{n,i}, x'_{n,i})} \text{ e } b_{n,j} = \frac{m_{y_{n,j}0} - m_{y'_{n,j}0}}{d(y_{n,j}, y'_{n,j})} = \frac{m_{y_{n,j}y'_{n,j}}}{d(y_{n,j}, y'_{n,j})},$$

onde $x_{n,i}, x'_{n,i} \in X_1$ e $y_{n,j}, y'_{n,j} \in X_2$, com $x_{n,i} \neq x'_{n,i}$ e $y_{n,j} \neq y'_{n,j}$. Portanto, por (3.4) e como T_B ser bilinear e contínua, obtemos que

$$\begin{aligned} q &= T_B(v_1, v_2) = T_B \left(\lim_n s_{1,n}, \lim_n s_{2,n} \right) = \lim_n T_B(s_{1,n}, s_{2,n}) \\ &= \lim_n T_B \left(\sum_{i=1}^k \alpha_{n,i} a_{n,i}, \sum_{j=1}^l \beta_{n,j} b_{n,j} \right) = \lim_n \sum_{i=1}^k \alpha_{n,i} \sum_{j=1}^l \beta_{n,j} T_B(a_{n,i}, b_{n,j}) \\ &= \lim_n \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l \alpha_{n,i} \beta_{n,j} T_B \left(\frac{m_{x_{n,i}x'_{n,i}}}{d(x_{n,i}, x'_{n,i})}, \frac{m_{y_{n,j}y'_{n,j}}}{d(y_{n,j}, y'_{n,j})} \right) \\ &= \lim_n \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l \alpha_{n,i} \beta_{n,j} \frac{T(x_{n,i}, y_{n,j}) - T(x_{n,i}, y'_{n,j}) - T(x'_{n,i}, y_{n,j}) + T(x'_{n,i}, y'_{n,j})}{d(x_{n,i}, x'_{n,i})d(y_{n,j}, y'_{n,j})}, \end{aligned}$$

e também

$$\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l |\alpha_{n,i} \beta_{n,j}| = \sum_{i=1}^k |\alpha_{n,i}| \sum_{j=1}^l |\beta_{n,j}| \leq 1 \cdot 1 = 1.$$

Com isso, segue que $q \in \overline{\Gamma(Im_{BLip}(T))}$ e as inclusões em (4.1) estão provadas. $\square$

Teorema 4.1.1. *Sejam X_1 e X_2 espaços métricos pontuados e E um espaço de Banach. Para $T \in BLip_0(X_1, X_2; E)$, as seguintes afirmações são equivalentes:*

- (i) T é 2-Lipschitz compacto;
- (ii) $T_B : \mathcal{A}(X_1) \times \mathcal{A}(X_2) \longrightarrow E$ é bilinear compacto;
- (iii) $T_L : \mathcal{A}(X_1) \hat{\otimes}_\pi \mathcal{A}(X_2) \longrightarrow E$ é linear compacto.

Demonstração. (i) $\implies$ (ii) Suponha que T é 2-Lipchitz compacto, ou seja, $Im_{BLip}(T)$ é relativamente compacto. Assim, por (4.2) e (4.1) e pelo fato de que o fecho da envoltória absolutamente convexa de um subconjunto relativamente compacto de um espaço de Banach é compacto, tem-se

$$\overline{T_B \left(B_{\mathcal{A}(X_1)} \times B_{\mathcal{A}(X_2)} \right)} = \overline{T_B \left(\overline{\Gamma(M_{X_1})} \times \overline{\Gamma(M_{X_2})} \right)} \subset \overline{\Gamma(Im_{BLip}(T))} = \overline{\Gamma(Im_{BLip}(T))}.$$

Logo, $\overline{T_B \left(B_{\mathcal{A}(X_1)} \times B_{\mathcal{A}(X_2)} \right)}$ é compacto e, conseqüentemente, T_B é compacto.

(ii) $\implies$ (i) Admita que T_B é compacto. Então, $\overline{T_B \left(B_{\mathcal{A}(X_1)} \times B_{\mathcal{A}(X_2)} \right)}$ é compacto e usando novamente (4.2) e (4.1), segue que

$$\overline{Im_{BLip}(T)} \subset \overline{T_B \left(\overline{\Gamma(M_{X_1})} \times \overline{\Gamma(M_{X_2})} \right)} = \overline{T_B \left(B_{\mathcal{A}(X_1)} \times B_{\mathcal{A}(X_2)} \right)},$$

implicando que $\overline{Im_{BLip}(T)}$ é compacto, ou seja, T é compacto.

(ii) $\iff$ (iii) É provado em [23, Páginas 375 e 376]. □

Como a classe $\mathcal{K}$ de todos os operadores lineares contínuos compactos entre espaços de Banach é um ideal de Banach fechado de operadores lineares (ver [28]), obtemos diretamente do teorema precedente, do Teorema 3.2.1 e da Proposição 3.2.2 o seguinte corolário.

Corolário 4.1.1. *A classe $BLip_{0\mathcal{K}}$ é um ideal de Banach fechado de operadores 2-Lipschitz gerado pelo método da composição por $\mathcal{K}$, ou seja,*

$$BLip_{0\mathcal{K}}(X, Y; E) = \mathcal{K} \circ BLip_0(X, Y; E), \quad (4.3)$$

para todos espaços métricos pontuados X e Y e todo espaço de Banach E .

Demonstração. Aplicando os Teoremas 4.1.1 e 3.2.1, temos a igualdade (4.3), porque

$$\begin{aligned} T \in BLip_{0\mathcal{K}}(X, Y; E) &\iff T_L \in \mathcal{K}(\mathcal{A}(X) \hat{\otimes}_\pi \mathcal{A}(Y), E) \\ &\iff T \in \mathcal{K} \circ BLip_0(X, Y; E). \end{aligned}$$

Basta usar agora a Proposição 3.2.2 para garantir que $BLip_{0\mathcal{K}} = \mathcal{K} \circ BLip_0$ é um ideal de Banach fechado de operadores 2-Lipschitz, já que $\mathcal{K}$ é um ideal de Banach fechado de operadores lineares. □

4.2 Ideal de operadores 2-Lipschitz fortemente p -somantes

Agora, estudaremos as aplicações 2-Lipschitz fortemente p -somantes, com $1 < p \leq \infty$, e mostraremos que a classe dessas aplicações é um ideal de Banach de operadores 2-Lipschitz gerado pelo método da composição. Para isso, precisamos definir alguns conceitos e provar alguns resultados sobre essas aplicações. Dado qualquer $1 < p \leq \infty$, vamos denotar por p^* o número real tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1$. Para quaisquer espaço de Banach E , $x \in E$ e $f \in E^*$, usaremos a notação $\langle x, f \rangle$ para representar $f(x)$.

Definição 4.2.1. Sejam E e F espaços de Banach, $T : E \rightarrow F$ um operador linear e $1 \leq p < \infty$. Dizemos que T é *absolutamente p -somante* (ou simplesmente *p -somante*) se existe uma constante $C \geq 0$ tal que

$$\left(\sum_{i=1}^n \|T(x_i)\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq C \|(x_i)_{i=1}^n\|_{p,w} \quad (4.4)$$

para cada $n \in \mathbb{N}$ e quaisquer pontos $x_1, \dots, x_n \in E$.

Vamos denotar por $\pi_p(E, F)$ o espaço das aplicações lineares absolutamente p -somantes de E em F . A menor constante C que satisfaz (4.4) é denotada por $\pi_p(T)$.

Apresentaremos agora a definição de operador linear Cohen fortemente p -somante entre espaços de Banach, com $1 < p \leq \infty$.

Definição 4.2.2. Sejam E e F espaços de Banach e $1 < p \leq \infty$. Um operador linear $u : E \rightarrow F$ é *Cohen fortemente p -somante* se existir uma constante $C > 0$ tal que

$$\|(\langle u(x_i), y_i^* \rangle)_{i=1}^n\|_1 \leq C \|(x_i)_{i=1}^n\|_p \|(y_i^*)_{i=1}^n\|_{p^*,w} \quad (4.5)$$

para todos $n \in \mathbb{N}$, $x_1, \dots, x_n \in E$ e $y_1^*, \dots, y_n^* \in F^*$.

Denotamos por $\mathcal{D}_p(E, F)$ o espaço formado pelos operadores lineares Cohen fortemente p -somantes de E em F e ainda $\|u\|_{\mathcal{D}_p} = \inf\{C > 0; C \text{ satisfazendo (4.5)}\}$. Além disso, $(\mathcal{D}_p, \|\cdot\|_{\mathcal{D}_p})$ é um ideal de Banach de operadores lineares.

A generalização desse conceito para as aplicações Lipschitz foi introduzido por Yahi, Achour e Rueda em [35].

Definição 4.2.3. Sejam X um espaço métrico pontuado e E um espaço de Banach. Uma aplicação $T \in Lip_0(X, E)$ é chamada *Lipschitz fortemente p -somante* ($1 < p \leq \infty$) se existem um espaço de Banach F e um operador $u \in \mathcal{D}_p(F, E)$ satisfazendo

$$\|T(x) - T(x'), y^*\| \leq d(x, x') \|u^*(y^*)\| \quad (4.6)$$

para quaisquer $x, x' \in X$ e $y^* \in E^*$.

Definindo $\|T\|_{\mathcal{D}_p^L} = \inf\{\|u\|_{\mathcal{D}_p}; u \text{ satisfaz a Definição 4.2.3}\}$ e representando por $\mathcal{D}_p^L(X, E)$ a classe de todas as aplicações Lipschitz fortemente p -somantes de X em E , temos que o espaço $(\mathcal{D}_p^L(X, E), \|\cdot\|_{\mathcal{D}_p^L})$ é de Banach.

A próxima definição é devida a Achour e Mezrag (ver [4]) e estende para o contexto bilinear o conceito de operador Cohen fortemente p -somante.

Definição 4.2.4. Sejam E, F e G espaços de Banach e $1 < p \leq \infty$. Uma aplicação bilinear contínua $T \in \mathcal{L}(E, F; G)$ é *Cohen fortemente p -somante* quando existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\|(\langle T(x_i, y_i), g_i^* \rangle)_{i=1}^n\|_1 \leq C \left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^p \|y_i\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \| (g_i^*)_{i=1}^n \|_{p^*, w} \quad (4.7)$$

para cada $n \in \mathbb{N}$, $x_1, \dots, x_n \in E$, $y_1, \dots, y_n \in F$ e $g_1^*, \dots, g_n^* \in G^*$.

O espaço vetorial dessas aplicações é denotado por $\mathcal{D}_p^2(E, F; G)$ e a menor constante $C > 0$ que satisfaz a desigualdade (4.7) é denotada por $\|T\|_{\mathcal{D}_p^2}$. Além disso, $(\mathcal{D}_p^2, \|\cdot\|_{\mathcal{D}_p^2})$ é um ideal de Banach de operadores bilineares.

Adiante, vamos construir um novo ideal de operadores 2-Lipschitz pelo método da composição a partir do ideal de operadores lineares $(\mathcal{D}_p, \|\cdot\|_{\mathcal{D}_p})$.

Definição 4.2.5. Sejam X e Y um espaços métricos pontuados, E um espaço de Banach e $1 < p \leq \infty$. Um operador $T \in BLip_0(X, Y; E)$ é dito *2-Lipschitz fortemente p -somante* quando podemos encontrar um espaço de Banach G e um operador linear p^* -somante $S : E^* \rightarrow G$ tais que

$$|\langle T(x, y) - T(x, y') - T(x', y) + T(x', y'), e^* \rangle| \leq d(x, x')d(y, y')\|S(e^*)\| \quad (4.8)$$

sempre que $x, x' \in X$, $y, y' \in Y$ e $e^* \in E^*$.

Vamos denotar por $\mathcal{D}_p^{BL}(X, Y; E)$ o conjunto de todos os operadores 2-Lipschitz fortemente p -somantes de $X \times Y$ em E . Além disso, se $T \in \mathcal{D}_p^{BL}(X, Y; E)$, então definimos $\|T\|_{\mathcal{D}_p^{BL}} = \inf\{\pi_{p^*}(S)\}$ com o ínfimo tomado sobre todos os espaços de Banach G e operadores S que satisfazem a Definição 4.2.5 e a expressão (4.8).

Agora, vamos apresentar um exemplo de operador 2-Lipschitz fortemente p -somante.

Exemplo 4.2.1. Considere X e Y um espaços métricos pontuados, E um espaço de Banach, $1 < p \leq \infty$, $S : Y \rightarrow E$ um operador Lipschitz fortemente p -somante e $f \in X^\#$. A aplicação

$$\begin{aligned} T : X \times Y &\longrightarrow E \\ (x, y) &\longmapsto T(x, y) = f(x)S(y) \end{aligned}$$

é 2-Lipschitz fortemente p -somante com $\|T\|_{\mathcal{D}_p^{BL}} \leq Lip(f)\|S\|_{\mathcal{D}_p^L}$. De fato, observe que $T \in BLip_0(X, Y; E)$, pois, como $f \in X^\#$ e $S \in Lip_0(Y, E)$, para cada $x, x' \in X$ e $y, y' \in Y$, temos que

$$T(x, 0) = f(x)S(0) = f(x)0 = 0 \text{ e } T(0, y) = f(0)S(y) = 0S(y) = 0$$

e ainda

$$\begin{aligned} \|T(x, y) - T(x, y') - T(x', y) + T(x', y')\| &= \\ &= \|f(x)S(y) - f(x)S(y') - f(x')S(y) + f(x')S(y')\| \\ &= \|(f(x) - f(x'))(S(y) - S(y'))\| \\ &= |f(x) - f(x')|\|S(y) - S(y')\| \\ &\leq Lip_0(f)d(x, x')Lip_0(S)d(y, y') \\ &= Lip_0(f)Lip_0(S)d(x, x')d(y, y'). \end{aligned}$$

Agora, dado qualquer $\epsilon > 0$, pela definição de $\|S\|_{\mathcal{D}_p^L}$, existem um espaço de Banach F e $u \in \mathcal{D}_p(E, F)$ tais que $\|u\|_{\mathcal{D}_p} \leq \|S\|_{\mathcal{D}_p^L} + \epsilon$. Considerando $x, x' \in X$, $y, y' \in Y$ e $e^* \in E^*$, como $f \in X^\#$ e $S \in \mathcal{D}_p^L(Y, E)$, obtemos

$$\begin{aligned} |\langle T(x, y) - T(x, y') - T(x', y) + T(x', y'), e^* \rangle| &= \\ &= |\langle f(x)S(y) - f(x)S(y') - f(x')S(y) + f(x')S(y'), e^* \rangle| \\ &= |\langle (f(x) - f(x'))(S(y) - S(y')), e^* \rangle| \\ &= |f(x) - f(x')| |\langle S(y) - S(y'), e^* \rangle| \\ &\leq \text{Lip}_0(f) d(x, x') d(y, y') \|u^*(e^*)\|. \end{aligned}$$

Como $u^* : E^* \rightarrow F^*$ é p^* -somante com $\|u\|_{\mathcal{D}_p} = \pi_{p^*}(u^*)$ (ver [14, Theorem 2.2.2]), segue que $T \in \mathcal{D}_p^{BL}(X, Y; E)$ e

$$\|T\|_{\mathcal{D}_p^{BL}} \leq \text{Lip}_0(f) \pi_{p^*}(u^*) \leq \text{Lip}_0(f) (\|S\|_{\mathcal{D}_p^L} + \epsilon)$$

para todo $\epsilon > 0$, implicando que $\|T\|_{\mathcal{D}_p^{BL}} \leq \text{Lip}_0(f) \|S\|_{\mathcal{D}_p^L}$.

O teorema a seguir relaciona a classe dos operadores 2-Lipschitz fortemente p -somantes e com a classe dos operadores bilineares Cohen fortemente p -somantes.

Teorema 4.2.1. *Sejam X, Y e E espaços de Banach e $T \in \mathcal{L}(X, Y; E)$. Então, são equivalentes:*

$$(a) \ T \in \mathcal{D}_p^{BL}(X, Y; E);$$

$$(b) \ T \in \mathcal{D}_p^2(X, Y; E).$$

Além disso, é válida a igualdade $\|T\|_{\mathcal{D}_p^2} = \|T\|_{\mathcal{D}_p^{BL}}$.

Demonstração. (a) $\implies$ (b) Suponha que $T \in \mathcal{D}_p^{BL}(X, Y; E)$. Para cada $\epsilon > 0$ dado, pela definição da norma $\|T\|_{\mathcal{D}_p^{BL}}$, podemos escolher um espaço de Banach G e um operador linear p^* -somante $S : E^* \rightarrow G$ tais que $\pi_{p^*}(S) \leq \|T\|_{\mathcal{D}_p^{BL}} + \epsilon$. Se $(x_i)_{i=1}^n \subset X$, $(y_i)_{i=1}^n \subset Y$ e $(e_i^*)_{i=1}^n \subset E^*$, então por (4.8), pela Desigualdade de Hölder e por S ser p^* -somante, tem-se

$$\begin{aligned} \|(\langle T(x_i, y_i), e_i^* \rangle)_{i=1}^n\|_1 &= \sum_{i=1}^n |\langle T(x_i, y_i), e_i^* \rangle| \\ &= \sum_{i=1}^n |\langle T(x_i, y_i) - T(x_i, 0) - T(0, y_i) + T(0, 0), e_i^* \rangle| \\ &\leq \sum_{i=1}^n d(x_i, 0) d(0, y_i) \|S(e_i^*)\| \\ &= \sum_{i=1}^n \|x_i\| \|y_i\| \|S(e_i^*)\| \\ &\leq \left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^p \|y_i\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n \|S(e_i^*)\|^{p^*} \right)^{\frac{1}{p^*}} \\ &\leq \left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^p \|y_i\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \pi_{p^*}(S) \|(e_i^*)_{i=1}^n\|_{p^*, w} \\ &= \pi_{p^*}(S) \left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^p \|y_i\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \|(e_i^*)_{i=1}^n\|_{p^*, w}. \end{aligned}$$

Com isso, T é Cohen fortemente p -somante e também

$$\|T\|_{\mathcal{D}_p^2} \leq \pi_{p^*}(S) \leq \|T\|_{\mathcal{D}_p^{BL}} + \epsilon,$$

o que significa $\|T\|_{\mathcal{D}_p^2} \leq \|T\|_{\mathcal{D}_p^{BL}}$.

(b) $\implies$ (a) Suponha que $T \in \mathcal{D}_p^2(X, Y; E)$ e sejam $x, x' \in X$, $y, y' \in Y$ e $e^* \in E^*$. Por [4, Theorem 2.4], existe uma medida de probabilidade de Borel regular $\mu \in B_{E^{**}}$ tal que

$$|\langle T(x - x', y - y'), e^* \rangle| \leq \|T\|_{\mathcal{D}_p^2} \|x - x'\| \|y - y'\| \left(\int_{B_{E^{**}}} |\langle e^*, \phi \rangle|^{p^*} d\mu(\phi) \right)^{\frac{1}{p^*}}. \quad (4.9)$$

Agora, considere a isometria natural $A : E^* \longrightarrow C(B_{E^{**}})$ composta com inclusão de $C(B_{E^{**}})$ em $L_\infty(\mu)$ dada por $A(e^*)(\phi) = \langle e^*, \phi \rangle$, com $e^* \in E^*$ e $\phi \in B_{E^{**}}$. Como a aplicação canônica $i_{p^*} : L_\infty(\mu) \longrightarrow L_{p^*}(\mu)$ é p^* -somante com $\pi_{p^*}(i_{p^*}) = 1$ (ver [15, Página 40]), segue que a composta $i_{p^*} \circ A$ também é p^* -somante com $\pi_{p^*}(i_{p^*} \circ A) \leq 1$. Logo, $T \in \mathcal{D}_p^{BL}(X, Y; E)$, pois fazendo $G = L_{p^*}(\mu)$ e $S = \|T\|_{\mathcal{D}_p^2}(i_{p^*} \circ A)$ e usando (4.9), temos

$$\begin{aligned} |\langle T(x, y) - T(x, y') - T(x', y)T(x', y'), e^* \rangle| &= |\langle T(x - x', y - y'), e^* \rangle| \\ &\leq \|T\|_{\mathcal{D}_p^2} \|x - x'\| \|y - y'\| \left(\int_{B_{E^{**}}} |\langle e^*, \phi \rangle|^{p^*} d\mu(\phi) \right)^{\frac{1}{p^*}} \\ &= d(x, x') d(y, y') \|T\|_{\mathcal{D}_p^2} \left(\int_{B_{E^{**}}} |\langle e^*, \phi \rangle|^{p^*} d\mu(\phi) \right)^{\frac{1}{p^*}} \\ &= d(x, x') d(y, y') \|S(e^*)\|. \end{aligned}$$

Além disso,

$$\|T\|_{\mathcal{D}_p^{BL}} \leq \pi_{p^*}(S) = \pi_{p^*}(\|T\|_{\mathcal{D}_p^2}(i_{p^*} \circ A)) = \|T\|_{\mathcal{D}_p^2} \pi_{p^*}(i_{p^*} \circ A) \leq \|T\|_{\mathcal{D}_p^2},$$

implicando na igualdade $\|T\|_{\mathcal{D}_p^2} = \|T\|_{\mathcal{D}_p^{BL}}$. $\square$

Para provar que $\mathcal{D}_p^{BL}$ é um ideal de operadores 2-Lipschitz gerado pelo método da composição com o ideal de operadores lineares $\mathcal{D}_p$, vamos apresentar um resultado essencial abaixo.

Proposição 4.2.1. *Sejam X e Y espaços métricos pontuados, E espaço de Banach e $1 < p \leq \infty$. Então, são equivalentes:*

- (i) $T \in \mathcal{D}_p^{BL}(X, Y; E)$;
- (ii) $T_B \in \mathcal{D}_p^2(\mathcal{A}(X), \mathcal{A}(Y); E)$;
- (iii) $T_L \in \mathcal{D}_p(\mathcal{A}(X) \hat{\otimes}_\pi \mathcal{A}(Y); E)$.

Neste caso, verifica-se $\|T\|_{\mathcal{D}_p^{BL}} = \|T_B\|_{\mathcal{D}_p^2} = \|T_L\|_{\mathcal{D}_p}$.

Demonstração. (i) $\implies$ (ii) Suponha que $T \in \mathcal{D}_p^{BL}(X, Y; E)$ e sejam $m^1 \in \mathcal{M}(X)$, $m^2 \in \mathcal{M}(Y)$ e $e^* \in E^*$, com representações

$$m^1 = \sum_{k=1}^n \alpha_k m_{x_k x'_k} \quad \text{e} \quad m^2 = \sum_{j=1}^r \beta_j m_{y_j y'_j},$$

onde $n, r \in \mathbb{N}$, $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_r \in \mathbb{K}$, $x_k, x'_k \in X$ e $y_j, y'_j \in Y$, sendo $k = 1, \dots, n$ e $j = 1, \dots, r$. Então, podemos encontrar um espaço de Banach G e um operador linear p^* -somante $S : E^* \rightarrow G$ satisfazendo

$$|\langle T(x, y) - T(x, y') - T(x', y) + T(x', y'), e^* \rangle| \leq d(x, x')d(y, y')\|S(e^*)\|$$

para cada $x, x' \in X$, $y, y' \in Y$ e $e^* \in E^*$. Com isso e por (3.4), segue que

$$\begin{aligned} |\langle T_B(m^1, m^2), e^* \rangle| &= \left| \langle T_B \left(\sum_{k=1}^n \alpha_k m_{x_k x'_k}, \sum_{j=1}^r \beta_j m_{y_j y'_j} \right), e^* \rangle \right| \\ &= \left| \sum_{k=1}^n \alpha_k \sum_{j=1}^r \beta_j \langle T_B(m_{x_k x'_k}, m_{y_j y'_j}), e^* \rangle \right| \\ &= \left| \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^r \alpha_k \beta_j \langle T(x_k, y_j) - T(x_k, y'_j) - T(x'_k, y_j) + T(x'_k, y'_j), e^* \rangle \right| \\ &\leq \sum_{k=1}^n |\alpha_k| \sum_{j=1}^r |\beta_j| d(x, x') d(y, y') \|S(e^*)\| \\ &= \sum_{k=1}^n |\alpha_k| d(x, x') \sum_{j=1}^r |\beta_j| d(y, y') \|S(e^*)\|. \end{aligned}$$

Daí, aplicando o ínfimo sobre todas as representações de m^1 e m^2 , obtemos

$$|\langle T_B(m^1, m^2), e^* \rangle| \leq \|m^1\|_{\mathcal{A}(X)} \|m^2\|_{\mathcal{A}(Y)} \|S(e^*)\|$$

e usando a Desigualdade de Hölder e o fato de S ser p^* -somante, concluimos que

$$\begin{aligned} \|(\langle T_B(m_i^1, m_i^2), e_i^* \rangle)_{i=1}^n\|_1 &= \sum_{i=1}^n |\langle T_B(m_i^1, m_i^2), e_i^* \rangle| \\ &\leq \sum_{i=1}^n \|m_i^1\|_{\mathcal{A}(X)} \|m_i^2\|_{\mathcal{A}(Y)} \|S(e_i^*)\| \\ &\leq \left(\sum_{i=1}^n \|m_i^1\|_{\mathcal{A}(X)}^p \|m_i^2\|_{\mathcal{A}(Y)}^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n \|S(e_i^*)\|^{p^*} \right)^{\frac{1}{p^*}} \\ &\leq \left(\sum_{i=1}^n \|m_i^1\|_{\mathcal{A}(X)}^p \|m_i^2\|_{\mathcal{A}(Y)}^p \right)^{\frac{1}{p}} \pi_{p^*}(S) \|(e_i^*)_{i=1}^n\|_{p^*, w} \\ &= \pi_{p^*}(S) \left(\sum_{i=1}^n \|m_i^1\|_{\mathcal{A}(X)}^p \|m_i^2\|_{\mathcal{A}(Y)}^p \right)^{\frac{1}{p}} \|(e_i^*)_{i=1}^n\|_{p^*, w} \end{aligned}$$

para quaisquer $m_1^1, \dots, m_n^1 \in \mathcal{M}(X)$, $m_1^2, \dots, m_n^2 \in \mathcal{M}(Y)$ e $e_1^*, \dots, e_n^* \in E^*$. Portanto,

$$T_B \in \mathcal{D}_p^2(\mathcal{A}(X), \mathcal{A}(Y); E) \text{ e } \|T_B\|_{\mathcal{D}_p^2} \leq \pi_{p^*}(S)$$

e tomando o ínfimo sobre todos espaços de Banach G e operadores S que satisfazem (4.8), segue que $\|T_B\|_{\mathcal{D}_p^2} \leq \|T\|_{\mathcal{D}_p^{BL}}$.

(ii) $\implies$ (i) Assuma que T_B é Cohen fortemente p -somante e considere $x, x' \in X$, $y, y' \in Y$ e $e^* \in E^*$. Por [4, Theorem 2.4], existe uma medida regular de probabilidade de Borel $\mu \in B_{E^{**}}$ tal que

$$\begin{aligned} |\langle T(x, y) - T(x, y') + T(x', y) - T(x', y'), e^* \rangle| &= |\langle T_B(m_{xx'}, m_{yy'}), e^* \rangle| \\ &\leq \|T\|_{\mathcal{D}_p^2} \|m_{xx'}\| \|m_{yy'}\| \left(\int_{B_{E^{**}}} |\langle e^*, \phi \rangle|^{p^*} d\mu(\phi) \right)^{\frac{1}{p^*}}. \end{aligned}$$

Analogamente a segunda parte da demonstração do Teorema 4.2.1, obtemos que $T \in \mathcal{D}_p^{BL}(X, Y; E)$ e ainda $\|T\|_{\mathcal{D}_p^{BL}} \leq \|T_B\|_{\mathcal{D}_p^2}$, consequentemente $\|T\|_{\mathcal{D}_p^{BL}} = \|T_B\|_{\mathcal{D}_p^2}$.

(ii) $\iff$ (iii) Basta usar [1, Theorem 3.6] para concluir que

$$T_B \in \mathcal{D}_p^2(\mathbb{A}(X), \mathbb{A}(Y); E) \iff T_L \in \mathcal{D}_p(\mathbb{A}(X) \hat{\otimes}_{\pi} \mathbb{A}(Y); E)$$

e também

$$\|T_B\|_{\mathcal{D}_p^2} = \|T_L\|_{\mathcal{D}_p}.$$

□

Finalmente, como consequência imediata da Proposição 4.2.1, do Teorema 3.2.1 e da Proposição 3.2.2, o corolário abaixo mostrará que $\mathcal{D}_p^{BL}$ é um ideal de Banach de operadores 2-Lipschitz.

Corolário 4.2.1. *A classe $\mathcal{D}_p^{BL}$ é um ideal de Banach de operadores 2-Lipschitz gerado pelo método da composição a partir do ideal de operadores lineares $\mathcal{D}_p$, isto é,*

$$\mathcal{D}_p^{BL}(X, Y; E) = \mathcal{D}_p \circ BLip_0(X, Y; E)$$

para quaisquer X e Y espaços métricos pontuados e E espaço de Banach.

Demonstração. Pela Proposição 4.2.1 e Teorema 3.2.1, temos as equivalências

$$\begin{aligned} T \in \mathcal{D}_p^{BL}(X, Y; E) &\iff T_L \in \mathcal{D}_p(\mathbb{A}(X) \hat{\otimes}_{\pi} \mathbb{A}(Y); E) \\ &\iff T \in \mathcal{D}_p \circ BLip_0(X, Y; E), \end{aligned}$$

implicando na igualdade $\mathcal{D}_p^{BL}(X, Y; E) = \mathcal{D}_p \circ BLip_0(X, Y; E)$. Por fim, já que $\mathcal{D}_p$ é um ideal de Banach de operadores lineares, usando Proposição 3.2.2, concluímos que $\mathcal{D}_p^{BL} = \mathcal{D}_p \circ BLip_0$ é um ideal de Banach de operadores 2-Lipschitz. □

4.3 Ideal de operadores 2-Lipschitz $(p; p_1, p_2)$ -somantes

Em [17], Famer e Johnson estenderam o conceito de operadores lineares p -somantes para o caso Lipschitz introduzindo os operadores Lipschitz p -somantes ($1 \leq p < \infty$). Nessa seção, vamos apresentar os operadores 2-Lipschitz $(p; p_1, p_2)$ -somantes, com $\frac{1}{p} \leq \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}$, e mostrar que a classe desses operadores é um ideal de Banach de operadores 2-Lipschitz.

Definição 4.3.1. Sejam E e F espaços de Banach e $1 \leq p, q < \infty$. Um operador linear contínuo $u : E \longrightarrow F$ é dito *absolutamente $(p; q)$ -somante* (ou apenas *$(p; q)$ -somante*) se existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\|(u(x_i))_{i=1}^n\|_p \leq C \sup_{f \in B_{E^*}} \|(f(x_i))_{i=1}^n\|_q$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ e quaisquer $x_1, \dots, x_n \in E$.

Vamos denotar por $\Pi_{p,q}(E, F)$ o espaço formado pelos operadores lineares absolutamente $(p; q)$ -somantes de E em F . Quando $p = q$, escreveremos apenas $\Pi_p(E, F)$ em vez de $\Pi_{p,q}(E, F)$.

Definição 4.3.2. Sejam X espaço métrico pontuado, E espaço de Banach e $1 \leq p < \infty$. Uma aplicação $T \in Lip_0(X; E)$ é chamada *Lipschitz p -somante*, em símbolo $T \in \Pi_p^L(X; E)$, quando existe uma constante $C > 0$ tal que, dado $n \in \mathbb{N}$ e independente da escolha dos pontos $x_1, \dots, x_n, x'_1, \dots, x'_n \in X$, tem-se

$$\|(T(x_i) - T(x'_i))_{i=1}^n\|_p \leq C \sup_{f \in B_{X\#}} \|(f(x_i) - f(x'_i))_{i=1}^n\|_p.$$

Exemplo 4.3.1. Para todo $p \geq 1$, é Lipschitz p -somante a aplicação

$$\begin{aligned} \delta_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathcal{A}(\mathbb{R}) \\ x &\longmapsto \delta_{\mathbb{R}}(x) = m_{x0}. \end{aligned}$$

De fato, é imediato que $\delta_{\mathbb{R}} \in Lip_0(\mathbb{R}; \mathcal{A}(\mathbb{R}))$. Agora, sejam $n \in \mathbb{N}$ e $x_1, \dots, x_n, x'_1, \dots, x'_n \in \mathbb{R}$. Então

$$\begin{aligned} \|(\delta_{\mathbb{R}}(x_i) - \delta_{\mathbb{R}}(x'_i))_{i=1}^n\|_p &= \|(m_{x_i 0} - m_{x'_i 0})_{i=1}^n\|_p = \|(m_{x_i x'_i})_{i=1}^n\|_p \\ &= \left(\sum_{i=1}^n \|m_{x_i x'_i}\|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{i=1}^n |x_i - x'_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \|(x_i - x'_i)_{i=1}^n\|_p = \|(id_{\mathbb{R}}(x_i) - id_{\mathbb{R}}(x'_i))_{i=1}^n\|_p \\ &\leq \sup_{f \in B_{\mathbb{R}\#}} \|(f(x_i) - f(x'_i))_{i=1}^n\|_p. \end{aligned}$$

Portanto, $\delta_{\mathbb{R}}$ é Lipschitz p -somante.

A definição de operadores n -lineares absolutamente p -somantes é devida a Pietsch em [29]. Em [25], Matos apresentou a seguinte definição para aplicações bilineares a valores vetoriais.

Definição 4.3.3. Sejam E, F e G espaços de Banach e $1 \leq p, p_1, p_2 < \infty$, com $\frac{1}{p} \leq \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}$. Um operador bilinear $T \in \mathcal{L}(E, F; G)$ é dito *absolutamente $(p; p_1, p_2)$ -somante* se existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\|(T(x_i, y_i))_{i=1}^n\|_p \leq C \sup_{f \in B_{E^*}} \|(f(x_i))_{i=1}^n\|_{p_1} \sup_{g \in B_{F^*}} \|(g(y_i))_{i=1}^n\|_{p_2} \quad (4.10)$$

para quaisquer $n \in \mathbb{N}$ e $x_1, \dots, x_n \in E, y_1, \dots, y_n \in F$.

O espaço de todas essas aplicações é denotado por $\mathcal{L}_{as, (p; p_1, p_2)}(E, F; G)$, o qual é um espaço de Banach com a norma $\|T\|_{\mathcal{L}_{as, (p; p_1, p_2)}}$, que é definida como a menor constante C satisfazendo a desigualdade (4.10).

Adiante, vamos estender a definição de operadores bilineares absolutamente $(p; p_1, p_2)$ -somantes para o caso de operadores 2-Lipschitz.

Definição 4.3.4. Considere X e Y espaços métricos pontuados, E espaço de Banach e $1 \leq p, p_1, p_2 < \infty$, com $\frac{1}{p} \leq \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}$. Um operador $T \in BLip_0(X, Y; E)$ é denominado *2-Lipschitz $(p; p_1, p_2)$ -somante* quando podemos encontrar uma constante $C > 0$ satisfazendo

$$\begin{aligned} & \| (T(x_i, y_i) - T(x_i, y'_i) - T(x'_i, y_i) + T(x'_i, y'_i))_{i=1}^n \|_p \\ & \leq C \sup_{f \in B_{X\#}} \| (f(x_i) - f(x'_i))_{i=1}^n \|_{p_1} \sup_{g \in B_{Y\#}} \| (g(y_i) - g(y'_i))_{i=1}^n \|_{p_2} \end{aligned} \quad (4.11)$$

para cada $n \in \mathbb{N}$ e $x_1, \dots, x_n, x'_1, \dots, x'_n \in X$ e $y_1, \dots, y_n, y'_1, \dots, y'_n \in Y$.

Indicaremos a classe desses operadores por $BL_{as, (p; p_1, p_2)}(X, Y; E)$ e, nesse espaço, definimos uma norma por

$$\|T\|_{BL_{as, (p; p_1, p_2)}} = \inf\{C; C \text{ satisfazendo (4.11)}\}. \quad (4.12)$$

Observação 4.3.1. Não sabemos se aplicações bilineares 2-Lipschitz $(p; p_1, p_2)$ -somantes são também absolutamente $(p; p_1, p_2)$ -somantes. No entanto, o inverso é verdadeiro, ou seja, se X, Y e E são espaços de Banach e $T : X \times Y \rightarrow E$ é bilinear absolutamente $(p; p_1, p_2)$ -somante, então T é 2-Lipschitz $(p; p_1, p_2)$ -somante. De fato, pela nossa hipótese inicial e como $B_{X^*} \subset B_{X\#}$ e $B_{Y^*} \subset B_{Y\#}$, para $x_1, \dots, x_n, x'_1, \dots, x'_n \in X$ e $y_1, \dots, y_n, y'_1, \dots, y'_n \in Y$, obtemos

$$\begin{aligned} & \| (T(x_i, y_i) - T(x_i, y'_i) - T(x'_i, y_i) + T(x'_i, y'_i))_{i=1}^n \|_p = \| (T(x_i - x'_i, y_i - y'_i))_{i=1}^n \|_p \\ & \leq \|T\|_{\mathcal{L}_{as, (p; p_1, p_2)}} \sup_{f \in B_{X^*}} \| (f(x_i - x'_i))_{i=1}^n \|_{p_1} \sup_{g \in B_{Y^*}} \| (g(y_i - y'_i))_{i=1}^n \|_{p_2} \\ & = \|T\|_{\mathcal{L}_{as, (p; p_1, p_2)}} \sup_{f \in B_{X^*}} \| (f(x_i) - f(x'_i))_{i=1}^n \|_{p_1} \sup_{g \in B_{Y^*}} \| (g(y_i) - g(y'_i))_{i=1}^n \|_{p_2} \\ & \leq \|T\|_{\mathcal{L}_{as, (p; p_1, p_2)}} \sup_{f \in B_{X\#}} \| (f(x_i) - f(x'_i))_{i=1}^n \|_{p_1} \sup_{g \in B_{Y\#}} \| (g(y_i) - g(y'_i))_{i=1}^n \|_{p_2}. \end{aligned}$$

Logo, T é 2-Lipschitz $(p; p_1, p_2)$ -somante e ainda $\|T\|_{BL_{as, (p; p_1, p_2)}} \leq \|T\|_{\mathcal{L}_{as, (p; p_1, p_2)}}$.

No próximo teorema, veremos que o espaço vetorial formado pelos operadores 2-Lipschitz $(p; p_1, p_2)$ -somantes é um ideal de Banach de operadores 2-Lipschitz.

Teorema 4.3.1. A classe $(BL_{as, (p; p_1, p_2)}, \|\cdot\|_{BL_{as, (p; p_1, p_2)}})$ é um ideal de Banach de operadores 2-Lipschitz.

Demonstração. Sejam X e Y espaços métricos pontuados, E espaço de Banach e considere $n \in \mathbb{N}$ e os pontos $x_1, \dots, x_n, x'_1, \dots, x'_n \in X$, $y_1, \dots, y_n, y'_1, \dots, y'_n \in Y$. Vamos provar que as componentes de $BL_{as, (p; p_1, p_2)}$ em $BLip_0(X, Y; E)$, dadas por

$$BL_{as, (p; p_1, p_2)}(X, Y; E) = BLip_0(X, Y; E) \cap BL_{as, (p; p_1, p_2)},$$

satisfazem as condições da Definição 3.2.7 e da Definição 3.2.8:

(i) $BL_{as, (p; p_1, p_2)}(X, Y; E)$ é um subespaço linear de $BLip_0(X, Y; E)$.

De fato, claramente $0 \in BL_{as, (p; p_1, p_2)}(X, Y; E)$. Para cada $T, S \in BL_{as, (p; p_1, p_2)}(X, Y; E)$ e $\alpha \in \mathbb{K}$, tem-se

$$\begin{aligned} & \| ((\alpha T)(x_i, y_i) - (\alpha T)(x_i, y'_i) - (\alpha T)(x'_i, y_i) + (\alpha T)(x'_i, y'_i))_{i=1}^n \|_p = \\ & = \| (\alpha \cdot T(x_i, y_i) - \alpha \cdot T(x_i, y'_i) - \alpha \cdot T(x'_i, y_i) + \alpha \cdot T(x'_i, y'_i))_{i=1}^n \|_p \\ & = \| (\alpha \cdot (T(x_i, y_i) - T(x_i, y'_i) - T(x'_i, y_i) + T(x'_i, y'_i)))_{i=1}^n \|_p \\ & = |\alpha| \| (T(x_i, y_i) - T(x_i, y'_i) - T(x'_i, y_i) + T(x'_i, y'_i))_{i=1}^n \|_p \\ & \leq |\alpha| \|T\|_{BL_{as, (p; p_1, p_2)}} \sup_{f \in B_{X\#}} \| (f(x_i) - f(x'_i))_{i=1}^n \|_{p_1} \sup_{g \in B_{Y\#}} \| (g(y_i) - g(y'_i))_{i=1}^n \|_{p_2}, \end{aligned}$$

implicando que $\alpha T \in BL_{as,(p;p_1,p_2)}(X, Y; E)$ e

$$\|\alpha T\|_{BL_{as,(p;p_1,p_2)}} \leq |\alpha| \|T\|_{BL_{as,(p;p_1,p_2)}}. \quad (4.13)$$

Além disso, note que

$$\begin{aligned} & \|((S+T)(x_i, y_i) - (S+T)(x_i, y'_i) - (S+T)(x'_i, y_i) + (S+T)(x'_i, y'_i))_{i=1}^n\|_p \\ & \leq \| (S(x_i, y_i) - S(x_i, y'_i) - S(x'_i, y_i) + S(x'_i, y'_i))_{i=1}^n \\ & \quad + (T(x_i, y_i) - T(x_i, y'_i) - T(x'_i, y_i) + T(x'_i, y'_i))_{i=1}^n \|_p \\ & \leq \| (S(x_i, y_i) - S(x_i, y'_i) - S(x'_i, y_i) + S(x'_i, y'_i))_{i=1}^n \|_p \\ & \quad + \| (T(x_i, y_i) - T(x_i, y'_i) - T(x'_i, y_i) + T(x'_i, y'_i))_{i=1}^n \|_p \\ & \leq \|S\|_{BL_{as,(p;p_1,p_2)}} \sup_{f \in B_{X^\#}} \|(f(x_i) - f(x'_i))_{i=1}^n\|_{p_1} \sup_{g \in B_{Y^\#}} \|(g(y_i) - g(y'_i))_{i=1}^n\|_{p_2} \\ & \quad + \|T\|_{BL_{as,(p;p_1,p_2)}} \sup_{f \in B_{X^\#}} \|(f(x_i) - f(x'_i))_{i=1}^n\|_{p_1} \sup_{g \in B_{Y^\#}} \|(g(y_i) - g(y'_i))_{i=1}^n\|_{p_2} \\ & = \left(\|S\|_{BL_{as,(p;p_1,p_2)}} + \|T\|_{BL_{as,(p;p_1,p_2)}} \right) \sup_{f \in B_{X^\#}} \|(f(x_i) - f(x'_i))_{i=1}^n\|_{p_1} \\ & \quad \cdot \sup_{g \in B_{Y^\#}} \|(g(y_i) - g(y'_i))_{i=1}^n\|_{p_2}, \end{aligned}$$

o que significa que $S+T \in BL_{as,(p;p_1,p_2)}(X, Y; E)$ e

$$\|S+T\|_{BL_{as,(p;p_1,p_2)}} \leq \|S\|_{BL_{as,(p;p_1,p_2)}} + \|T\|_{BL_{as,(p;p_1,p_2)}}. \quad (4.14)$$

Logo, $BL_{as,(p;p_1,p_2)}(X, Y; E)$ é um subespaço linear de $BLip_0(X, Y; E)$.

(ii) Para quaisquer $f \in X^\#$, $g \in Y^\#$ e $e \in E$, tem-se $f \cdot g \cdot e \in BL_{as,(p;p_1,p_2)}(X, Y; E)$. Sem perda de generalidade, vamos considerar que $f \in B_{X^\#}$ e $g \in B_{Y^\#}$. Já sabemos que $f \cdot g \cdot e \in BLip_0(X, Y; E)$ pelo Exemplo 3.1.3. Usando a Desigualdade de Hölder, segue que

$$\begin{aligned} & \|(f \cdot g \cdot e(x_i, y_i) - f \cdot g \cdot e(x_i, y'_i) - f \cdot g \cdot e(x'_i, y_i) + f \cdot g \cdot e(x'_i, y'_i))_{i=1}^n\|_p = \\ & = \|(f(x_i)g(y_i)e - f(x_i)g(y'_i)e - f(x'_i)g(y_i)e + f(x'_i)g(y'_i)e)_{i=1}^n\|_p \\ & = \|((f(x_i) - f(x'_i))(g(y_i) - g(y'_i))e)_{i=1}^n\|_p \\ & = \left(\sum_{i=1}^n \|(f(x_i) - f(x'_i))(g(y_i) - g(y'_i))e\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ & = \left(\sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x'_i)|^p |g(y_i) - g(y'_i)|^p \|e\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ & = \left(\|e\|^p \left(\sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x'_i)|^p |g(y_i) - g(y'_i)|^p \right) \right)^{\frac{1}{p}} \\ & = \|e\| \left(\sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x'_i)|^p |g(y_i) - g(y'_i)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ & \leq \|e\| \left(\sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x'_i)|^{p_1} \right)^{\frac{1}{p_1}} \left(\sum_{i=1}^n |g(y_i) - g(y'_i)|^{p_2} \right)^{\frac{1}{p_2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \|e\| \|(f(x_i) - f(x'_i))_{i=1}^n\|_{p_1} \|(g(y_i) - f(y'_i))_{i=1}^n\|_{p_2} \\ &\leq \|e\| \sup_{\varphi \in B_{X\#}} \|(\varphi(x_i) - \varphi(x'_i))_{i=1}^n\|_{p_1} \sup_{\phi \in B_{Y\#}} \|(\phi(y_i) - \phi(y'_i))_{i=1}^n\|_{p_2}. \end{aligned}$$

Dessa forma, a aplicação $f \cdot g \cdot e \in BL_{as,(p;p_1,p_2)}(X, Y; E)$.

(iii) Propriedade de ideal: Dados $f \in Lip_0(Z, X)$, $g \in Lip_0(W, Y)$, $u \in \mathcal{L}(E, F)$ e $T \in BL_{as,(p;p_1,p_2)}(X, Y; E)$, então a composição

$$u \circ T \circ (f, g) \in BL_{as,(p;p_1,p_2)}(Z, W; F).$$

Tome os pontos $z, z_1, \dots, z_n, z', z'_1, \dots, z'_n \in Z$, $w, w_1, \dots, w_n, w', w'_1, \dots, w'_n \in W$. Pelas nossas hipóteses iniciais, temos

$$\begin{aligned} &\|u \circ T \circ (f, g)(z, w) - u \circ T \circ (f, g)(z, w') \\ &\quad - u \circ T \circ (f, g)(z', w) + u \circ T \circ (f, g)(z', w')\| = \\ &= \|(u \circ T)(f, g)(z, w) - (u \circ T)(f, g)(z, w') \\ &\quad - (u \circ T)(f, g)(z', w) + (u \circ T)(f, g)(z', w')\| \\ &= \|(u \circ T)(f(z), g(w)) - (u \circ T)(f(z), g(w')) \\ &\quad - (u \circ T)(f(z'), g(w)) + (u \circ T)(f(z'), g(w'))\| \\ &= \|u(T(f(z), g(w))) - u(T(f(z), g(w'))) - u(T(f(z'), g(w))) + u(T(f(z'), g(w')))\| \\ &= \|u(T(f(z), g(w)) - T(f(z), g(w')) - T(f(z'), g(w)) + T(f(z'), g(w')))\| \\ &\leq \|u\| \|T(f(z), g(w)) - T(f(z), g(w')) - T(f(z'), g(w)) + T(f(z'), g(w'))\| \\ &\leq \|u\| \|BLip(T)d(f(z), f(z'))d(g(w), g(w'))\| \\ &\leq \|u\| \|BLip(T)Lip(f)Lip(g)d(z, z')d(w, w')\| \end{aligned}$$

e ainda valem as igualdades $u \circ T \circ (f, g)(0, w) = 0$ e $u \circ T \circ (f, g)(z, 0) = 0$, pois

$$\begin{aligned} u \circ T \circ (f, g)(0, w) &= (u \circ T)(f, g)(0, w) = (u \circ T)(f(0), g(w)) \\ &= (u \circ T)(0, g(w)) = u(T(0, g(w))) = u(0) = 0 \end{aligned}$$

e analogamente $u \circ T \circ (f, g)(z, 0) = 0$. Sendo assim, $u \circ T \circ (f, g) \in BLip_0(Z, W; F)$. Agora, para provar que $u \circ T \circ (f, g)$ é 2-Lipschitz $(p; p_1, p_2)$ -somante, observe que

$$\begin{aligned} &\|(u \circ T \circ (f, g)(z_i, w_i) - u \circ T \circ (f, g)(z_i, w'_i) \\ &\quad - u \circ T \circ (f, g)(z'_i, w_i) + u \circ T \circ (f, g)(z'_i, w'_i))_{i=1}^n\|_p = \\ &= \|((u \circ T)(f, g)(z_i, w_i) - (u \circ T)(f, g)(z_i, w'_i) \\ &\quad - (u \circ T)(f, g)(z'_i, w_i) + (u \circ T)(f, g)(z'_i, w'_i))_{i=1}^n\|_p \\ &= \|((u \circ T)(f(z_i), g(w_i)) - (u \circ T)(f(z_i), g(w'_i)) \\ &\quad - (u \circ T)(f(z'_i), g(w_i)) + (u \circ T)(f(z'_i), g(w'_i)))_{i=1}^n\|_p \\ &= \|(u(T(f(z_i), g(w_i))) - u(T(f(z_i), g(w'_i))) \\ &\quad - u(T(f(z'_i), g(w_i))) + u(T(f(z'_i), g(w'_i))))_{i=1}^n\|_p \\ &= \|(u(T(f(z_i), g(w_i)) - T(f(z_i), g(w'_i)) - T(f(z'_i), g(w_i)) + T(f(z'_i), g(w'_i))))_{i=1}^n\|_p \\ &\leq \|u\| \|(T(f(z_i), g(w_i)) - T(f(z_i), g(w'_i)) - T(f(z'_i), g(w_i)) + T(f(z'_i), g(w'_i)))_{i=1}^n\|_p \\ &\leq \|u\| \|T\|_{BL_{as,(p;p_1,p_2)}} \sup_{\varphi \in B_{X\#}} \|(\varphi(f(z_i)) - \varphi(f(z'_i)))_{i=1}^n\|_{p_1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \cdot \sup_{\phi \in B_{Y\#}} \|(\phi(g(w_i)) - \phi(g(w'_i)))_{i=1}^n\|_{p_2} \\
 &= \|u\| \|T\|_{BL_{as,(p;p_1,p_2)}} \frac{Lip(f)}{Lip(f)} \sup_{\varphi \in B_{X\#}} \|((\varphi \circ f)(z_i) - (\varphi \circ f)(z'_i))_{i=1}^n\|_{p_1} \\
 & \cdot \frac{Lip(g)}{Lip(g)} \sup_{\phi \in B_{Y\#}} \|((\phi \circ g)(w_i) - (\phi \circ g)(w'_i))_{i=1}^n\|_{p_2} \\
 &= \|u\| \|T\|_{BL_{as,(p;p_1,p_2)}} Lip(f) \sup_{\varphi \in B_{X\#}} \left\| \left(\left(\frac{\varphi \circ f}{Lip(f)} \right) (z_i) - \left(\frac{\varphi \circ f}{Lip(f)} \right) (z'_i) \right)_{i=1}^n \right\|_{p_1} \\
 & \cdot Lip(g) \sup_{\phi \in B_{Y\#}} \left\| \left(\left(\frac{\phi \circ g}{Lip(g)} \right) (w_i) - \left(\frac{\phi \circ g}{Lip(g)} \right) (w'_i) \right)_{i=1}^n \right\|_{p_2} \\
 &\leq \|u\| \|T\|_{BL_{as,(p;p_1,p_2)}} Lip(f) Lip(g) \sup_{\tilde{f} \in B_{X\#}} \|(\tilde{f}(z_i) - \tilde{f}(z'_i))_{i=1}^n\|_{p_1} \\
 & \cdot \sup_{\tilde{g} \in B_{Y\#}} \|(\tilde{g}(w_i) - \tilde{g}(w'_i))_{i=1}^n\|_{p_2}.
 \end{aligned}$$

Portanto, $u \circ T \circ (f, g) \in BL_{as,(p;p_1,p_2)}(Z, W; F)$ e também

$$\|u \circ T \circ (f, g)\|_{BL_{as,(p;p_1,p_2)}} \leq \|u\| \|T\|_{BL_{as,(p;p_1,p_2)}} Lip(f) Lip(g). \quad (4.15)$$

(iv') O par $(BL_{as,(p;p_1,p_2)}(X, Y; E), \|\cdot\|_{BL_{as,(p;p_1,p_2)}})$ é um espaço de Banach e, para cada $T \in BL_{as,(p;p_1,p_2)}(X, Y; E)$, vale a desigualdade $BLip(T) \leq \|T\|_{BL_{as,(p;p_1,p_2)}}$. Inicialmente, note que

$$\begin{aligned}
 & \|T(x, y) - T(x, y') - T(x', y) + T(x', y')\| \\
 & \leq \|T\|_{BL_{as,(p;p_1,p_2)}} \sup_{f \in B_{X\#}} \|f(x) - f(x')\| \cdot \sup_{g \in B_{Y\#}} \|g(y) - g(y')\| \\
 & \leq \|T\|_{BL_{as,(p;p_1,p_2)}} d(x, x') d(y, y'),
 \end{aligned}$$

implicando na desigualdade $BLip(T) \leq \|T\|_{BL_{as,(p;p_1,p_2)}}$. Vamos provar que $\|\cdot\|_{BL_{as,(p;p_1,p_2)}}$ é uma norma no espaço $BL_{as,(p;p_1,p_2)}(X, Y; E)$. Tome arbitrariamente uma aplicação $T \in BL_{as,(p;p_1,p_2)}(X, Y; E)$. Por (4.12), segue claramente que $\|T\|_{BL_{as,(p;p_1,p_2)}} \geq 0$. Se $\|T\|_{BL_{as,(p;p_1,p_2)}} = 0$, tem-se

$$0 \leq \|(T(x_i, y_i) - T(x_i, y'_i) - T(x'_i, y_i) + T(x'_i, y'_i))_{i=1}^n\|_p \leq 0.$$

Em particular, fazendo $x'_i = 0 = y'_i$ para todo $1 \leq i \leq n$, segue que

$$0 \leq \|(T(x_i, y_i))_{i=1}^n\|_p \leq 0 \implies T(x_i, y_i) = 0 \implies T = 0.$$

É claro que $\|0\|_{BL_{as,(p;p_1,p_2)}} = 0$. Dado qualquer $\alpha \in \mathbb{K}$, para mostrar a igualdade $\|\alpha T\|_{BL_{as,(p;p_1,p_2)}} = |\alpha| \|T\|_{BL_{as,(p;p_1,p_2)}}$ basta provar que

$$\|\alpha T\|_{BL_{as,(p;p_1,p_2)}} \geq |\alpha| \|T\|_{BL_{as,(p;p_1,p_2)}},$$

pois a outra desigualdade segue de (4.13). Para isso, já que

$$\begin{aligned}
 & |\alpha| \|(T(x_i, y_i) - T(x_i, y'_i) - T(x'_i, y_i) + T(x'_i, y'_i))_{i=1}^n\|_p = \\
 & = \|\alpha \cdot (T(x_i, y_i) - T(x_i, y'_i) - T(x'_i, y_i) + T(x'_i, y'_i))_{i=1}^n\|_p \\
 & = \|(\alpha \cdot T(x_i, y_i) - \alpha \cdot T(x_i, y'_i) - \alpha \cdot T(x'_i, y_i) + \alpha \cdot T(x'_i, y'_i))_{i=1}^n\|_p \\
 & = \|((\alpha T)(x_i, y_i) - (\alpha T)(x_i, y'_i) - (\alpha T)(x'_i, y_i) + (\alpha T)(x'_i, y'_i))_{i=1}^n\|_p \\
 & \leq \|\alpha T\|_{BL_{as,(p;p_1,p_2)}} \sup_{f \in B_{X\#}} \|f(x_i) - f(x'_i)\|_{p_1} \sup_{g \in B_{Y\#}} \|g(y_i) - g(y'_i)\|_{p_2},
 \end{aligned}$$

obtemos

$$\begin{aligned} & \| (T(x_i, y_i) - T(x_i, y'_i) - T(x'_i, y_i) + T(x'_i, y'_i))_{i=1}^n \|_p \\ & \leq \frac{\|\alpha T\|_{BL_{as,(p;p_1,p_2)}}}{|\alpha|} \sup_{f \in B_{X\#}} \|(f(x_i) - f(x'_i))_{i=1}^n\|_{p_1} \sup_{g \in B_{Y\#}} \|(g(y_i) - g(y'_i))_{i=1}^n\|_{p_2} \end{aligned}$$

e, consequentemente,

$$\|T\|_{BL_{as,(p;p_1,p_2)}} \leq \frac{\|\alpha T\|_{BL_{as,(p;p_1,p_2)}}}{|\alpha|} \implies |\alpha| \|T\|_{BL_{as,(p;p_1,p_2)}} \leq \|\alpha T\|_{BL_{as,(p;p_1,p_2)}}.$$

Por fim, a desigualdade triangular foi mostrada em (4.14), concluindo que $\|\cdot\|_{BL_{as,(p;p_1,p_2)}}$ é uma norma em $BL_{as,(p;p_1,p_2)}(X, Y; E)$.

Agora, para provar a completude do espaço $BL_{as,(p;p_1,p_2)}(X, Y; E)$, tome uma sequência de Cauchy $(T_n)_{n=1}^\infty \subset BL_{as,(p;p_1,p_2)}(X, Y; E)$. Então, para todo $\epsilon > 0$, existe $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ tal que

$$BLip(T_n - T_k) \leq \|T_n - T_k\|_{BL_{as,(p;p_1,p_2)}} < \epsilon$$

para todos $n, k \geq n_\epsilon$. Com isso, $(T_n)_{n=1}^\infty$ é uma sequência de Cauchy no espaço de Banach $BLip_0(X, Y; E)$. Assim, podemos encontrar $T \in BLip_0(X, Y; E)$ satisfazendo $BLip(T_n - T) \longrightarrow 0$, ou seja, $T_n(x, y) \longrightarrow T(x, y)$ para todos $x \in X$ e $y \in Y$. Por $(T_n - T_k)$ ser 2-Lipschitz $(p; p_1, p_2)$ -somante, para todos $n, k \geq n_\epsilon$, segue que

$$\begin{aligned} & \| ((T_n - T_k)(x_i, y_i) - (T_n - T_k)(x_i, y'_i) - (T_n - T_k)(x'_i, y_i) + (T_n - T_k)(x'_i, y'_i))_{i=1}^n \|_p \\ & \leq \|T_n - T_k\|_{BL_{as,(p;p_1,p_2)}} \sup_{f \in B_{X\#}} \|(f(x_i) - f(x'_i))_{i=1}^n\|_{p_1} \sup_{g \in B_{Y\#}} \|(g(y_i) - g(y'_i))_{i=1}^n\|_{p_2} \\ & < \epsilon \sup_{f \in B_{X\#}} \|(f(x_i) - f(x'_i))_{i=1}^n\|_{p_1} \sup_{g \in B_{Y\#}} \|(g(y_i) - g(y'_i))_{i=1}^n\|_{p_2}. \end{aligned}$$

Como $T_n(x, y) \longrightarrow T(x, y)$, fazendo $k \longrightarrow +\infty$ nas desigualdades acima, concluímos, para todo $n \geq n_\epsilon$,

$$\begin{aligned} & \| ((T_n - T)(x_i, y_i) - (T_n - T)(x_i, y'_i) - (T_n - T)(x'_i, y_i) + (T_n - T)(x'_i, y'_i))_{i=1}^n \|_p \\ & < \epsilon \sup_{f \in B_{X\#}} \|(f(x_i) - f(x'_i))_{i=1}^n\|_{p_1} \sup_{g \in B_{Y\#}} \|(g(y_i) - g(y'_i))_{i=1}^n\|_{p_2}. \end{aligned}$$

Dessa forma, $(T_n - T) \in BL_{as,(p;p_1,p_2)}(X, Y; E)$ e, consequentemente,

$$T = T_n - (T_n - T) \in BL_{as,(p;p_1,p_2)}(X, Y; E).$$

Portanto, $\|T_n - T\|_{BL_{as,(p;p_1,p_2)}} < \epsilon$ para todo $n \geq n_\epsilon$, ou seja, a sequência de Cauchy $(T_n)_{n=1}^\infty$ converge para T em $BL_{as,(p;p_1,p_2)}(X, Y; E)$.

(ii') A aplicação $id_{\mathbb{K}^2}$ satisfaz $\|id_{\mathbb{K}^2}\|_{BL_{as,(p;p_1,p_2)}} = 1$. Sejam $(\alpha_i)_{i=1}^n, (\alpha'_i)_{i=1}^n, (\beta_i)_{i=1}^n, (\beta'_i)_{i=1}^n$ em $\mathbb{K}$, então $\|id_{\mathbb{K}^2}\|_{BL_{as,(p;p_1,p_2)}} \leq 1$ e $BLip(id_{\mathbb{K}^2}) = 1$, pois

$$\begin{aligned} & \| (id_{\mathbb{K}^2}(\alpha_i, \beta_i) - id_{\mathbb{K}^2}(\alpha_i, \beta'_i) - id_{\mathbb{K}^2}(\alpha'_i, \beta_i) + id_{\mathbb{K}^2}(\alpha'_i, \beta'_i))_{i=1}^n \|_p = \\ & = \| (\alpha_i \cdot \beta_i - \alpha_i \cdot \beta'_i - \alpha'_i \cdot \beta_i + \alpha'_i \cdot \beta'_i)_{i=1}^n \|_p \\ & = \| ((\alpha_i - \alpha'_i)(\beta_i - \beta'_i))_{i=1}^n \|_p \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\sum_{i=1}^n |(\alpha_i - \alpha'_i)(\beta_i - \beta'_i)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \left(\sum_{i=1}^n |\alpha_i - \alpha'_i|^{p_1} \right)^{\frac{1}{p_1}} \left(\sum_{i=1}^n |\beta_i - \beta'_i|^{p_2} \right)^{\frac{1}{p_2}} \\
&= \|(\alpha_i - \alpha'_i)_{i=1}^n\|_{p_1} \|(\beta_i - \beta'_i)_{i=1}^n\|_{p_2} \\
&= \|(id_{\mathbb{K}}(\alpha_i) - id_{\mathbb{K}}(\alpha'_i))_{i=1}^n\|_{p_1} \|(id_{\mathbb{K}}(\beta_i) - id_{\mathbb{K}}(\beta'_i))_{i=1}^n\|_{p_2} \\
&\leq \sup_{f \in B_{\mathbb{K}^\#}} \|(f(\alpha_i) - f(\alpha'_i))_{i=1}^n\|_{p_1} \sup_{g \in B_{\mathbb{K}^\#}} \|(g(\beta_i) - g(\beta'_i))_{i=1}^n\|_{p_2}
\end{aligned}$$

e também

$$\begin{aligned}
|id_{\mathbb{K}^2}(\alpha_i, \beta_i) - id_{\mathbb{K}^2}(\alpha_i, \beta'_i) - id_{\mathbb{K}^2}(\alpha'_i, \beta_i) + id_{\mathbb{K}^2}(\alpha'_i, \beta'_i)| &= \\
&= |\alpha_i \cdot \beta_i - \alpha_i \cdot \beta'_i - \alpha'_i \cdot \beta_i + \alpha'_i \cdot \beta'_i| \\
&= |(\alpha_i - \alpha'_i)(\beta_i - \beta'_i)| \\
&= |\alpha_i - \alpha'_i| |\beta_i - \beta'_i| \\
&= d(\alpha_i - \alpha'_i) d(\beta_i - \beta'_i).
\end{aligned}$$

Logo, segue do item (iv') provado acima que

$$1 = BLip(id_{\mathbb{K}^2}) \leq \|id_{\mathbb{K}^2}\|_{BL_{as,(p;p_1,p_2)}} \leq 1 \implies \|id_{\mathbb{K}^2}\|_{BL_{as,(p;p_1,p_2)}} = 1.$$

(iii') Se $f \in Lip_0(Z, X)$, $g \in Lip_0(W, Y)$, $T \in BL_{as,(p;p_1,p_2)}(X, Y; E)$ e $u \in \mathcal{L}(E, F)$, então

$$\|u \circ T \circ (f, g)\|_{BL_{as,(p;p_1,p_2)}} \leq \|u\| \|T\|_{BL_{as,(p;p_1,p_2)}} Lip(f) Lip(g).$$

Com efeito, segue diretamente de (4.15). $\square$

Nas seções anteriores, vimos que $BLip_{0\mathcal{K}}$ e $\mathcal{D}_p^{BL}$ são exemplos de ideais de operadores 2-Lipschitz do tipo composição. Por isso, o leitor poderia questionar se o ideal de operadores 2-Lipschitz $BL_{as,(p;p_1,p_2)}$ é também do tipo composição proveniente do ideal de operadores lineares Π_p . No exemplo abaixo, veremos que $BL_{as,(p;p_1,p_2)} \neq \Pi_p \circ BLip_0$.

Exemplo 4.3.2. Sejam $1 \leq p, p_1, p_2 < \infty$ com $\frac{1}{p} \leq \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}$. Considere a aplicação

$$\begin{aligned}
S : \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathcal{A}(\mathbb{R}) \hat{\otimes}_\pi \mathcal{A}(\mathbb{R}) \\
(x, y) &\longmapsto S(x, y) = m_{x0} \otimes m_{y0}.
\end{aligned}$$

Então, S é 2-Lipschitz $(p; p_1, p_2)$ -somante e $S \notin \Pi_p \circ BLip_0(\mathcal{A}(\mathbb{R}) \hat{\otimes}_\pi \mathcal{A}(\mathbb{R}), \mathcal{A}(\mathbb{R}) \hat{\otimes}_\pi \mathcal{A}(\mathbb{R}))$. De fato, primeiramente observe que $S = \sigma_2 \circ (\delta_{\mathbb{R}}, \delta_{\mathbb{R}})$, porque

$$S(x, y) = m_{x0} \otimes m_{y0} = \sigma_2(m_{x0}, m_{y0}) = \sigma_2(\delta_{\mathbb{R}}(x), \delta_{\mathbb{R}}(y)) = \sigma_2 \circ (\delta_{\mathbb{R}}, \delta_{\mathbb{R}})(x, y),$$

sempre que $x, y \in \mathbb{R}$. Daí, segue do Exemplo 3.1.2 que $S \in BLip_0(\mathbb{R}, \mathbb{R}; \mathcal{A}(\mathbb{R}) \hat{\otimes}_\pi \mathcal{A}(\mathbb{R}))$. Agora, pela Desigualdade de Hölder e como a aplicação $\delta_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{A}(\mathbb{R})$ é Lipschitz p -somante para todo $p \geq 1$ e quaisquer $x_1, \dots, x_n, x'_1, \dots, x'_n, y_1, \dots, y_n, y'_1, \dots, y'_n \in \mathbb{R}$, tem-se

$$\|(S(x_i, y_i) - S(x_i, y'_i) - S(x'_i, y_i) + S(x'_i, y'_i))_{i=1}^n\|_p =$$

$$\begin{aligned}
 &= \|(m_{x_i 0} \otimes m_{y_i 0} - m_{x_i 0} \otimes m_{y'_i 0} - m_{x'_i 0} \otimes m_{y_i 0} + m_{x'_i 0} \otimes m_{y'_i 0})_{i=1}^n\|_p \\
 &= \|(m_{x_i 0} \otimes (m_{y_i 0} - m_{y'_i 0}) - m_{x'_i 0} \otimes (m_{y_i 0} - m_{y'_i 0}))_{i=1}^n\|_p \\
 &= \|((m_{x_i 0} - m_{x'_i 0}) \otimes (m_{y_i 0} - m_{y'_i 0}))_{i=1}^n\|_p \\
 &= \|(m_{x_i x'_i} \otimes m_{y_i y'_i})_{i=1}^n\|_p \\
 &= \left(\sum_{i=1}^n \pi(m_{x_i x'_i} \otimes m_{y_i y'_i})^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
 &= \left(\sum_{i=1}^n \|m_{x_i x'_i}\|^p \|m_{y_i y'_i}\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
 &\leq \left(\sum_{i=1}^n \|m_{x_i x'_i}\|^{p_1} \right)^{\frac{1}{p_1}} \left(\sum_{i=1}^n \|m_{y_i y'_i}\|^{p_2} \right)^{\frac{1}{p_2}} \\
 &= \left(\sum_{i=1}^n \|m_{x_i 0} - m_{x'_i 0}\|^{p_1} \right)^{\frac{1}{p_1}} \left(\sum_{i=1}^n \|m_{y_i 0} - m_{y'_i 0}\|^{p_2} \right)^{\frac{1}{p_2}} \\
 &= \left(\sum_{i=1}^n \|\delta_{\mathbb{R}}(x_i) - \delta_{\mathbb{R}}(x'_i)\|^{p_1} \right)^{\frac{1}{p_1}} \left(\sum_{i=1}^n \|\delta_{\mathbb{R}}(y_i) - \delta_{\mathbb{R}}(y'_i)\|^{p_2} \right)^{\frac{1}{p_2}} \\
 &\leq C_1 \sup_{f \in B_{X\#}} \|(f(x_i) - f(x'_i))_{i=1}^n\|_{p_1} C_2 \sup_{g \in B_{Y\#}} \|(g(y_i) - g(y'_i))_{i=1}^n\|_{p_2} \\
 &= C_1 C_2 \sup_{f \in B_{X\#}} \|(f(x_i) - f(x'_i))_{i=1}^n\|_{p_1} \sup_{g \in B_{Y\#}} \|(g(y_i) - g(y'_i))_{i=1}^n\|_{p_2}.
 \end{aligned}$$

Logo, $S \in BL_{as,(p;p_1,p_2)}(\mathbb{R}, \mathbb{R}; \mathcal{A}(\mathbb{R}) \hat{\otimes}_{\pi} \mathcal{A}(\mathbb{R}))$. Por outro lado, considerando S_L a única linearização de S dada por

$$\begin{aligned}
 S_L : \mathcal{A}(\mathbb{R}) \hat{\otimes}_{\pi} \mathcal{A}(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathcal{A}(\mathbb{R}) \hat{\otimes}_{\pi} \mathcal{A}(\mathbb{R}) \\
 (m_{x0} \otimes m_{y0}) &\longmapsto S_L(m_{x0} \otimes m_{y0}) = S(x, y) = m_{x0} \otimes m_{y0},
 \end{aligned}$$

obtemos que S_L é a aplicação identidade do espaço de dimensão infinita $\mathcal{A}(\mathbb{R}) \hat{\otimes}_{\pi} \mathcal{A}(\mathbb{R})$ e, por [15, Página 50], $S_L \notin \Pi_p(\mathcal{A}(\mathbb{R}) \hat{\otimes}_{\pi} \mathcal{A}(\mathbb{R}), \mathcal{A}(\mathbb{R}) \hat{\otimes}_{\pi} \mathcal{A}(\mathbb{R}))$. Finalmente, o Teorema 3.2.1 afirma que $S \notin \Pi_p \circ BLip_0(\mathcal{A}(\mathbb{R}) \hat{\otimes}_{\pi} \mathcal{A}(\mathbb{R}), \mathcal{A}(\mathbb{R}) \hat{\otimes}_{\pi} \mathcal{A}(\mathbb{R}))$, concluindo que $BL_{as,(p;p_1,p_2)} \neq \Pi_p \circ BLip_0$.

4.4 Ideal de operadores 2-Lipschitz fatorável p -dominados

O objetivo principal desta seção é apresentar os operadores 2-Lipschitz fatorável p -dominados, com $1 \leq p < \infty$, e provar que essa classe é um ideal de Banach de operadores 2-Lipschitz. Para tanto, veremos alguns conceitos e resultados essenciais, como a definição de operador bilinear p -semi-integral que foi introduzida em [26].

Definição 4.4.1. Sejam E, F , e G espaços de Banach e $1 \leq p < \infty$. Um operador $T \in \mathcal{L}(E, F; G)$ é chamado p -semi-integral, em símbolo $T \in \mathcal{L}_{si,p}(E, F; G)$, se existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\left(\sum_{i=1}^n \|T(x_i, y_i)\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq C \sup_{\phi_1 \in B_{E^*}, \phi_2 \in B_{F^*}} \left(\sum_{i=1}^n |\phi_1(x_i) \phi_2(y_i)|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

para quaisquer $n \in \mathbb{N}$ e $(x_i)_{i=1}^n \subset E$ e $(y_i)_{i=1}^n \subset F$. Vamos indicar por $\|T\|_{si,p}$ o ínfimo de todas as constantes C que satisfazem a desigualdade acima.

A definição a seguir generaliza o conceito de operadores bilineares fatorável p -dominados (ver [27], Definition 2.7) para o caso 2-Lipschitz.

Definição 4.4.2. Considere X e Y espaços métricos pontuados, E espaço de Banach e $1 \leq p < \infty$. Um operador $T \in BLip_0(X, Y; E)$ é dito *2-Lipschitz fatorável p -dominado* quando podemos encontrar uma constante $C > 0$ satisfazendo

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{j=1}^s \left\| \sum_{i=1}^n \lambda_i^j (T(x_i^j, y_i^j) - T(x_i^j, y_i'^j) - T(x_i'^j, y_i^j) + T(x_i'^j, y_i'^j)) \right\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ & \leq C \sup_{f \in B_{X\#}, g \in B_{Y\#}} \left(\sum_{j=1}^s \left| \sum_{i=1}^n \lambda_i^j (f(x_i^j) - f(x_i'^j)) (g(y_i^j) - g(y_i'^j)) \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} \end{aligned} \quad (4.16)$$

para cada s e n inteiros positivos, $x_i^j, x_i'^j \in X$, $y_i^j, y_i'^j \in Y$ e $\lambda_i^j \in \mathbb{K}$ ($1 \leq j \leq s$, $1 \leq i \leq n$). A classe de todos operadores 2-Lipschitz fatorável p -dominados é denotada por $BL_{f,p}(X, Y; E)$. Neste caso, definimos

$$\|T\|_{BL_{f,p}} = \inf \{C; C \text{ satisfazendo (4.16)}\}.$$

Observação 4.4.1. É válida a inclusão $BL_{f,p}(X, Y; E) \subset BL_{as,(p;p_1,p_2)}(X, Y; E)$ e a relação entre as normas dos operadores dessas classes é dada por $\|T\|_{BL_{as,(p;p_1,p_2)}} \leq \|T\|_{BL_{f,p}}$. De fato, se T é 2-Lipschitz fatorável p -dominado, usando a Desigualdade de Hölder e tomando na definição acima $n = 1$ e $\lambda_1^j = 1$ para cada $1 \leq j \leq s$, temos

$$\begin{aligned} & \|(T(x^j, y^j) - T(x^j, y'^j) - T(x'^j, y^j) + T(x'^j, y'^j))_{j=1}^s\|_p \\ & = \left(\sum_{j=1}^s \|T(x^j, y^j) - T(x^j, y'^j) - T(x'^j, y^j) + T(x'^j, y'^j)\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ & \leq \|T\|_{BL_{f,p}} \sup_{f \in B_{X\#}, g \in B_{Y\#}} \left(\sum_{j=1}^s |(f(x^j) - f(x'^j)) (g(y^j) - g(y'^j))|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ & \leq \|T\|_{BL_{f,p}} \sup_{f \in B_{X\#}, g \in B_{Y\#}} \left(\sum_{j=1}^s |f(x^j) - f(x'^j)|^{p_1} \right)^{\frac{1}{p_1}} \left(\sum_{j=1}^s |g(y^j) - g(y'^j)|^{p_2} \right)^{\frac{1}{p_2}} \\ & = \|T\|_{BL_{f,p}} \sup_{f \in B_{X\#}} \|(f(x^j) - f(x'^j))_{j=1}^s\|_{p_1} \sup_{g \in B_{Y\#}} \|(g(y^j) - g(y'^j))_{j=1}^s\|_{p_2}, \end{aligned}$$

sempre que s é inteiro positivo, $x^j, x'^j \in X$, $y^j, y'^j \in Y$ ($1 \leq j \leq s$). Logo, T é 2-Lipschitz $(p; p_1, p_2)$ -somante e $\|T\|_{BL_{as,(p;p_1,p_2)}} \leq \|T\|_{BL_{f,p}}$.

No teorema abaixo, vamos estudar a relação entre um operador de $BL_{f,p}(X, Y; E)$ e sua bi-linearização.

Teorema 4.4.1. *Sejam X e Y espaços métricos pontuados e E espaço de Banach. Para $1 \leq p < \infty$, são equivalentes:*

- (i) $T \in BL_{f,p}(X, Y; E)$;

(ii) $T_B \in \mathcal{L}_{si,p}(\mathcal{A}(X), \mathcal{A}(Y); E)$.

Além disso, vale a igualdade

$$\|T\|_{BL_{f,p}} = \|T_B\|_{si,p}. \quad (4.17)$$

Demonstração. (i) $\implies$ (ii) Suponha que $T \in BL_{f,p}(X, Y; E)$. Sejam $(m_j^1)_{j=1}^s \subset \mathcal{A}(X)$ e $(m_j^2)_{j=1}^s \subset \mathcal{A}(Y)$ com representações

$$m_j^1 = \sum_{i=1}^n \alpha_i^j m_{x_i^j x_i'^j} \quad \text{e} \quad m_j^2 = \sum_{k=1}^r \beta_k^j m_{y_k^j y_k'^j},$$

onde $x_i^j, x_i'^j \in X$, $y_k^j, y_k'^j \in Y$ e $\alpha_i^j, \beta_k^j \in \mathbb{K}$. Agora, note que pelo Teorema 2.4.2, tomando $h \in Z^\#$, existe $\varphi \in \mathcal{A}(Z)^*$ tal que $h = \varphi \circ \delta_Z$ e $Lip(h) = \|\varphi\|$. Dessa forma,

$$\begin{aligned} h(z) - h(z') &= \varphi \circ \delta_Z(z) - \varphi \circ \delta_Z(z') = \varphi(\delta_Z(z)) - \varphi(\delta_Z(z')) \\ &= \varphi(m_{z0}) - \varphi(m_{z'0}) = \varphi(m_{z0} - m_{z'0}) = \varphi(m_{zz'}) \end{aligned} \quad (4.18)$$

para todos $z, z' \in Z$. Com isso e por (3.4), tem-se

$$\begin{aligned} \left(\sum_{j=1}^s \|T_B(m_j^1, m_j^2)\|^p \right)^{\frac{1}{p}} &= \left(\sum_{j=1}^s \left\| T_B \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i^j m_{x_i^j x_i'^j}, \sum_{k=1}^r \beta_k^j m_{y_k^j y_k'^j} \right) \right\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\sum_{j=1}^s \left\| \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^r \alpha_i^j \beta_k^j T_B(m_{x_i^j x_i'^j}, m_{y_k^j y_k'^j}) \right\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\sum_{j=1}^s \left\| \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^r \alpha_i^j \beta_k^j (T(x_i^j, y_k^j) - T(x_i^j, y_k'^j) - T(x_i'^j, y_k^j) + T(x_i'^j, y_k'^j)) \right\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \|T\|_{BL_{f,p}} \sup_{f \in B_{X^\#}, g \in B_{Y^\#}} \left(\sum_{j=1}^s \left| \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^r \alpha_i^j \beta_k^j (f(x_i^j) - f(x_i'^j)) (g(y_k^j) - g(y_k'^j)) \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \|T\|_{BL_{f,p}} \sup_{\|\varphi_1\| \leq 1, \|\varphi_2\| \leq 1} \left(\sum_{j=1}^s \left| \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^r \alpha_i^j \beta_k^j \varphi_1(m_{x_i^j x_i'^j}) \varphi_2(m_{y_k^j y_k'^j}) \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \|T\|_{BL_{f,p}} \sup_{\|\varphi_1\| \leq 1, \|\varphi_2\| \leq 1} \left(\sum_{j=1}^s \left| \varphi_1 \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i^j m_{x_i^j x_i'^j} \right) \varphi_2 \left(\sum_{k=1}^r \beta_k^j m_{y_k^j y_k'^j} \right) \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \|T\|_{BL_{f,p}} \sup_{\|\varphi_1\| \leq 1, \|\varphi_2\| \leq 1} \left(\sum_{j=1}^s |\varphi_1(m_j^1) \varphi_2(m_j^2)|^p \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Assim, $T_B \in \mathcal{L}_{si,p}(\mathcal{A}(X), \mathcal{A}(Y); E)$ e $\|T_B\|_{si,p} \leq \|T\|_{BL_{f,p}}$.

(ii) $\implies$ (i) Suponha que $T_B \in \mathcal{L}_{si,p}(\mathcal{A}(X), \mathcal{A}(Y); E)$. Dados $x_i^j, x_i'^j \in X$, $y_i^j, y_i'^j \in Y$ e $\lambda_i^j \in \mathbb{K}$ ($1 \leq j \leq s$, $1 \leq i \leq n$), por (3.4) e (4.18), obtemos

$$\left(\sum_{j=1}^s \left\| \sum_{i=1}^n \lambda_i^j (T(x_i^j, y_i^j) - T(x_i^j, y_i'^j) - T(x_i'^j, y_i^j) + T(x_i'^j, y_i'^j)) \right\|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\begin{aligned}
 &= \left(\sum_{j=1}^s \left\| T_B \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i^j m_{x_i^j x_i'^j}, m_{y_i^j y_i'^j} \right) \right\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
 &\leq \|T_B\|_{si,p} \sup_{\|\varphi_1\| \leq 1, \|\varphi_2\| \leq 1} \left(\sum_{j=1}^s \left| \varphi_1 \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i^j m_{x_i^j x_i'^j} \right) \varphi_2 \left(m_{y_i^j y_i'^j} \right) \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
 &= \|T_B\|_{si,p} \sup_{\|\varphi_1\| \leq 1, \|\varphi_2\| \leq 1} \left(\sum_{j=1}^s \left| \sum_{i=1}^n \lambda_i^j \varphi_1 \left(m_{x_i^j x_i'^j} \right) \varphi_2 \left(m_{y_i^j y_i'^j} \right) \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
 &= \|T_B\|_{si,p} \sup_{f \in B_{X^\#}, g \in B_{Y^\#}} \left(\sum_{j=1}^s \left| \sum_{i=1}^n \lambda_i^j (f(x_i^j) - f(x_i'^j)) (g(y_i^j) - g(y_i'^j)) \right|^p \right)^{\frac{1}{p}}.
 \end{aligned}$$

Portanto, $T \in BL_{f,p}(X, Y; E)$ e também

$$\|T\|_{BL_{f,p}} \leq \|T_B\|_{si,p} \implies \|T\|_{BL_{f,p}} = \|T_B\|_{si,p}.$$

□

D. Pellegrino, em [26], provou que a classe $(\mathcal{L}_{si,p}, \|\cdot\|_{si,p})$ é um ideal de Banach de operadores bilineares (ver também [12]). Como consequência direta desse resultado e do teorema precedente, temos o seguinte corolário.

Corolário 4.4.1. *A classe $(BL_{f,p}, \|\cdot\|_{BL_{f,p}})$ é um ideal de Banach de operadores 2-Lipschitz.*

Demonstração. Inicialmente, considere as seguintes afirmações que seguem diretamente da Proposição 3.1.5:

Afirmção 1: $(\alpha S + T)_B = \alpha S_B + T_B$, para todos $S, T \in BL_{f,p}(X, Y; E)$ e $\alpha \in \mathbb{K}$.

Afirmção 2: $(f \cdot g \cdot e)_B = f_L \cdot g_L \cdot e$ para quaisquer $f \in X^\#$, $g \in Y^\#$ e $e \in E$, onde $f_L \cdot g_L \cdot e \in \mathcal{L}(\mathcal{A}(X), \mathcal{A}(Y); E)$ e é definida por $f_L \cdot g_L \cdot e(m, m') = f_L(m)g_L(m')e$.

Afirmção 3: $(u \circ T \circ (f, g))_B = u \circ T_B \circ (\hat{f}, \hat{g})$ para cada $f \in Lip_0(Z, X)$, $g \in Lip_0(W, Y)$, $T \in BL_{f,p}(X, Y; E)$ e $u \in \mathcal{L}(E, F)$.

Mostraremos agora que $BL_{f,p}$ satisfaz as condições da Definição 3.2.7:

(i) $BL_{f,p}(X, Y; E)$ é um subespaço linear de $BLip_0(X, Y; E)$.

De fato, é imediato que a aplicação nula $0 \in BL_{f,p}(X, Y; E)$. Sejam $T, S \in BL_{f,p}(X, Y; E)$ e $\alpha \in \mathbb{K}$. Pelo Teorema 4.4.1 e pela Afirmção 1, segue que

$$\begin{aligned}
 T_B, S_B \in \mathcal{L}_{si,p}(\mathcal{A}(X), \mathcal{A}(Y); E) &\implies (\alpha T + S)_B = \alpha T_B + S_B \in \mathcal{L}_{si,p}(\mathcal{A}(X), \mathcal{A}(Y); E) \\
 &\implies \alpha T + S \in BL_{f,p}(X, Y; E).
 \end{aligned}$$

(ii) Dados $f \in X^\#$, $g \in Y^\#$ e $e \in E$, então a aplicação $f \cdot g \cdot e \in BL_{f,p}(X, Y; E)$. Basta usar a Afirmção 2 e o Teorema 4.4.1 para concluir que

$$(f \cdot g \cdot e)_B = f_L \cdot g_L \cdot e \in \mathcal{L}_{si,p}(\mathcal{A}(X), \mathcal{A}(Y); E) \implies f \cdot g \cdot e \in BL_{f,p}(X, Y; E).$$

(iii) Propriedade de ideal: Se $f \in Lip_0(Z, X)$, $g \in Lip_0(W, Y)$, $T \in BL_{f,p}(X, Y; E)$ e $u \in \mathcal{L}(E, F)$, então a composição

$$u \circ T \circ (f, g) \in BL_{f,p}(Z, W; F).$$

Inicialmente, note que $u \circ T_B \circ (\hat{f}, \hat{g}) \in \mathcal{L}_{si,p}(\mathcal{A}(Z), \mathcal{A}(W); F)$. Assim, a Afirmação 3 garante que

$$(u \circ T \circ (f, g))_B = u \circ T_B \circ (\hat{f}, \hat{g}) \in \mathcal{L}_{si,p}(\mathcal{A}(Z), \mathcal{A}(W); F)$$

e, pelo Teorema 4.4.1, temos

$$u \circ T \circ (f, g) \in BL_{f,p}(Z, W; F).$$

Portanto, $BL_{f,p}$ é um ideal de operadores 2-Lipschitz. Por fim, vamos provar que $BL_{p,f}$ cumpre as condições da Definição 3.2.8 para concluir que $BL_{f,p}$ é um ideal de Banach de operadores 2-Lipschitz.

(i') O par $(BL_{p,f}(X, Y; E), \|\cdot\|_{BL_{f,p}})$ é um espaço de Banach e $BLip(T) \leq \|T\|_{BL_{f,p}}$ para cada $T \in BL_{f,p}(X, Y; E)$.

Inicialmente, pela Observação 4.4.1 e pelo o Teorema 4.3.1, tem-se

$$BLip(T) \leq \|T\|_{BL_{as,(p;p_1,p_2)}} \leq \|T\|_{BL_{f,p}}.$$

Agora, por (4.17) e pela Afirmação 1, obtemos que $\|\cdot\|_{BL_{f,p}}$ define uma norma em $BL_{f,p}(X, Y; E)$, pois

- $\|T\|_{BL_{f,p}} = \|T_B\|_{si,p} \geq 0$.
- $\|T\|_{BL_{f,p}} = 0 \iff \|T_B\|_{si,p} = 0 \iff T_B = 0 \iff T = 0$.
- $\|\alpha T\|_{BL_{f,p}} = \|\alpha T_B\|_{si,p} = |\alpha| \|T_B\|_{si,p} = |\alpha| \|T\|_{BL_{f,p}}$.
- $\|T + S\|_{BL_{f,p}} = \|T_B + S_B\|_{si,p} \leq \|T_B\|_{si,p} + \|S_B\|_{si,p} = \|T\|_{BL_{f,p}} + \|S\|_{BL_{f,p}}$.

Finalmente, para mostrar a completude de $BL_{f,p}(X, Y; E)$, seja uma sequência de Cauchy $(T_n)_{n=1}^\infty \subset BL_{f,p}(X, Y; E)$, então a sequência $(T_n)_{n=1}^\infty$ também pertence a $BLip_0(X, Y; E)$ e, pelo Teorema 4.4.1, $((T_n)_B)_{n=1}^\infty$ pertence a $\mathcal{L}_{si,p}(\mathcal{A}(X), \mathcal{A}(Y); E)$. Logo, dado $\epsilon > 0$, podemos encontrar $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ tal que

$$BLip(T_n - T_k) \leq \|T_n - T_k\|_{BL_{f,p}} < \epsilon$$

e

$$\|(T_n)_B - (T_k)_B\|_{si,p} = \|(T_n - T_k)_B\|_{si,p} = \|T_n - T_k\|_{BL_{f,p}} < \epsilon$$

para todos $n, k \geq n_\epsilon$, onde a última igualdade acima segue de (4.17). Sendo assim, as sequências $(T_n)_{n=1}^\infty$ e $((T_n)_B)_{n=1}^\infty$ são de Cauchy nos espaços de Banach $BLip_0(X, Y; E)$ e $\mathcal{L}_{si,p}(\mathcal{A}(X), \mathcal{A}(Y); E)$, respectivamente. Então, existem $T \in BLip_0(X, Y; E)$ e $F \in \mathcal{L}_{si,p}(\mathcal{A}(X), \mathcal{A}(Y); E)$ tais que $(T_n)_{n=1}^\infty$ converge para T com a norma $BLip(\cdot)$ e $((T_n)_B)_{n=1}^\infty$ converge para F com a norma $\|\cdot\|_{BL_{f,p}}$. Agora, considerando a bi-linearização T_B associada a T , temos que

$$T_B \circ (\delta_X, \delta_X) = T = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (T_n)_B \circ (\delta_X, \delta_Y) = F \circ (\delta_X, \delta_Y),$$

isto é, $T_B = F \in \mathcal{L}_{si,p}(\mathcal{A}(X), \mathcal{A}(Y); E)$ e, pelo Teorema 4.4.1, $T \in BL_{f,p}(X, Y; E)$. Com isso,

$$\|T_n - T\|_{BL_{f,p}} = \|(T_n - T)_B\|_{si,p} = \|(T_n)_B - T_B\|_{si,p} = \|(T_n)_B - F\|_{si,p} \longrightarrow 0$$

e, portanto, a sequência de Cauchy $(T_n)_{n=1}^{\infty}$ converge para T em $BL_{f,p}(X, Y; E)$.

(ii') A aplicação $id_{\mathbb{K}^2}$ satisfaz $\|id_{\mathbb{K}^2}\|_{BL_{f,p}} = 1$.

Pelo Teorema 4.4.1 e por $\mathcal{L}_{si,p}$ ser um ideal de Banach de operadores bilineares, temos

$$\|id_{\mathbb{K}^2}\|_{BL_{f,p}} = \|(id_{\mathbb{K}^2})_B\|_{si,p} = 1.$$

(iii') Dados $f \in Lip_0(Z, X)$, $g \in Lip_0(W, Y)$, $T \in BL_{f,p}(X, Y; E)$ e $u \in \mathcal{L}(E, F)$, então é válida a desigualdade

$$\|u \circ T \circ (f, g)\|_{BL_{f,p}} \leq \|u\| \|T\|_{BL_{f,p}} Lip(f) Lip(g).$$

De fato, usando (4.17), a Afirmação 3, o fato de que $\mathcal{L}_{si,p}$ é um ideal de Banach de operadores bilineares e também o Corolário 2.4.1, concluímos que

$$\begin{aligned} \|u \circ T \circ (f, g)\|_{BL_{f,p}} &= \|(u \circ T \circ (f, g))_B\|_{si,p} \\ &= \|u \circ T_B \circ (\hat{f}, \hat{g})\|_{si,p} \\ &\leq \|u\| \|T\|_{BL_{f,p}} \|\hat{f}\| \|\hat{g}\| \\ &= \|u\| \|T\|_{BL_{f,p}} Lip(f) Lip(g). \end{aligned}$$

Portanto, $BL_{f,p}$ é um ideal de Banach de operadores 2-Lipschitz. □

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] D. Achour, *Multilinear extensions of absolutely $(p;q;r)$ -summing operators*, Rend. Circ. Mat. Palermo 60 (2011) 337–350.
- [2] D. Achour, E. Dahia, M. A. S. Saleh, *Multilinear mixing operators and Lipschitz mixing operator ideals*, Oper. Matrices 12 (4) (2018) 903–931.
- [3] D. Achour, E. Dahia, P. Turco, *The Lipschitz injective hull of Lipschitz operator ideals and applications*, Banach J. Math. Anal. 2020.
- [4] D. Achour, L. Mezrag, *On the Cohen strongly p -summing multilinear operators*, J. Math. Anal. Appl. 327 (2007) 550–563.
- [5] D. Achour, P. Rueda, E. A. Sánchez-Pérez, R. Yah, *Lipschitz operator ideals and the approximation property*, J. Math. Anal. Appl. 436 (2016) 217–236.
- [6] D. Achour, P. Rueda, R. Yah, *(p, σ) -absolutely Lipschitz operators*, Ann. Funct. Anal. 8 (1) (2017) 38–50.
- [7] L. Alberto, *Técnicas de extensão de operadores multilineares em espaços de Banach*, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, 2019.
- [8] R. M. Aron, P. Galindo, *Weakly compact multilinear mappings*, Proc. Edinb. Math. Soc. 40 (1997) 181–192.
- [9] G. Botelho, D. Pellegrino, P. Rueda, *On composition ideals of multilinear mappings and homogeneous polynomials*, Publ. Res. Inst. Math. Sci., Kyoto Univ. 43 (2007) 1139–1155.
- [10] G. Botelho, D. Pellegrino, E. Teixeira, *Fundamentos de Análise Funcional*, 2º ed. Rio de Janeiro: SBM, 2015.
- [11] M. Cabrera-Padilla, A. Chávez-Domínguez, A. Jiménez-Vargas, M. Villegas-Vallecillos, *Maximal Banach ideals of Lipschitz maps*, Ann. Funct. Anal. 7 (2016) 593–608.
- [12] E. Çaliskan, D. Pellegrino, *On the multilinear generalizations of the concept of absolutely summing operators*, Rocky Mt. J. Math. 37 (2007) 1137–1154.

- [13] A. Carlos, *Produto tensorial entre espaços de Banach e aplicações*, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal da Paraíba, 2018.
- [14] J. S. Cohen, *Absolutely p -summing, p -nuclear operators and their conjugates*, Math. Ann. 201 (1973) 177–200.
- [15] J. Diestel, H. Jarchow, A. Tonge, *Absolutely Summing Operators*, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
- [16] M. Dubei, E.D. Tymchatynb, A. Zagorodnyuk, *Free Banach spaces and extension of Lipschitz maps*, Topology 48 (2009) 203–212.
- [17] J. D. Farmer, W. B. Johnson, *Lipschitz p -summing operators*, Proc. Am. Math. Soc. 137 (9) (2009) 2989–2995.
- [18] S. Geiss, *Ideale multilinearer Abbildungen, Diplomarbeit*, 1984.
- [19] K. Hamidi , E. Dahia, D. Achour, A. Tallab *Two-Lipschitz operator ideals*, J. Math. Anal. Appl. 491, 2020.
- [20] A. Jiménez-Vargas, J. M. Sepulcre, M. Villegas-Vallecillos, *Lipschitz compact operators*, J. Math. Anal. Appl. 415 (2014) 889–901.
- [21] N. J. Kalton, *Spaces of Lipschitz and Hölder functions and their applications*, Collect. Math, 55 (2004) 171–217.
- [22] E. Kreyszig, *Introductory functional analysis with applications*, New York, 1978.
- [23] N. Krikorian, *Compact multilinear transformations*, Proc. Am. Math. Soc. 33 (2) (1972) 373–376.
- [24] E. L. Lima, *Espaços Métricos*, 5º ed. Rio de janeiro: IMPA, 2015.
- [25] M. C. Matos, *On multilinear mappings of nuclear type*, Rev. Mat. Complut. 6 (1993) 61–81.
- [26] D. Pellegrino, *Aplicações entre espaços de Banach relacionadas à convergência de séries*, Tese de doutorado, Universidade Estadual de Campinas, 2002.
- [27] D. Pellegrino, P. Rueda, E. A. Sánchez-Pérez, *Surveying the spirit of absolute summability on multilinear operators and homogeneous polynomials*, Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fís. Nat., Ser. A Mat, 110 (2016) 285–302.
- [28] A. Pietsch, *Operator Ideals*, Verlag Wiss, Berlin, 1978, Deutsch, North-Holland, Amsterdam-London-New York-Tokyo, 1980.
- [29] A. Pietsch, *Ideals of multilinear functionals (designs of a theory)*, in: *Proceedings of the Second International Conference on Operator Algebras, Ideals, and Their Applications in Theoretical Physics*, Leibzig, Teubner-Texte, 1983, pp. 185–199.
- [30] M. S. Ramanujan, E. Schock, *Operator ideals and spaces of bilinear operators*, Linear Multilinear Algebra 18 (1985) 307–318.
- [31] D. Ruch, *Characterizations of compact bilinear maps*, Linear Multilinear Algebra 25 (1989) 297–307.

- [32] A. Ryan, *Introduction to Tensor Products of Banach Spaces*, Springer-Verlag, 2002.
- [33] E. A. Sánchez-Pérez, *Product spaces generated by bilinear maps and duality*, Czechoslov. Math. J. 65 (140) (2015) 801–817.
- [34] D. Tomaz, *Desigualdade de Hölder generalizada com normas mistas e aplicações*, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal da Paraíba, 2018.
- [35] R. Yahia, D. Achour, P. Rueda, *Absolutely summing Lipschitz conjugates*, Mediterr. J. Math. 13 (2016) 1949–1961.
- [36] N. Weaver, *Lipschitz Algebras*, 2º ed, New Jersey: World Scientific, 2018.