UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
COORDENAÇÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

TESE DE DOUTORADO

TESTES DE MODIFICAÇÕES DA GRAVITAÇÃO NA ESCALA ATÔMICA

Gabriela Coutinho Luna

João Pessoa
- Fevereiro 2020 -

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
COORDENAÇÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

TESE DE DOUTORADO

TESTES DE MODIFICAÇÕES DA GRAVITAÇÃO NA ESCALA ATÔMICA

Gabriela Coutinho Luna

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal da Paraíba, como requisito parcial para obtenção do Grau de Doutor em Física.

Orientador: Prof. Dr. Fábio Leal de Melo Dahia

João Pessoa
- Fevereiro 2020 -

Catalogação na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

L961t Luna, Gabriela Coutinho.
Testes de modificações da gravitação na escala atômica / Gabriela Coutinho Luna. - João Pessoa, 2020.
118 f. : il.

Orientação: Fábio Leal de Melo Dahia.
Tese (Doutorado) - UFPB/CCEN.

1. dimensões-extras. 2. vínculos espectroscópicos. 3. modificações da gravidade. 4. acoplamento spin-órbit gravitacional. I. Dahia, Fábio Leal de Melo. II. Título.

UFPB/BC

Elaborado por - CRB-

Ata da Sessão Pública da Defesa de Tese de **Doutorado** da aluna **Gabriela Coutinho Luna**, candidata ao Título de Doutora em Física na Área de Concentração Gravitação e Cosmologia.

Aos vinte e oito dias do mês de fevereiro do ano de dois mil e vinte, às 10:00, no Auditório da Pós-Graduação em Física do Centro de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade Federal da Paraíba, reuniram-se os membros da Banca Examinadora constituída para examinar a candidata ao grau de Doutora em Física na área de Gravitação e Cosmologia, **Gabriela Coutinho Luna**. A comissão examinadora foi composta pelos professores doutores: *Fábio Dahia* (UFPB), orientador e presidente da banca examinadora, *Valdir Barbosa Bezerra* (UFPB), *Carlos Augusto Romero Filho* (UFPB), *Rodrigo Holanda* (UFRN) e *Victor Afonso* (UFCG). Dando início aos trabalhos, o Prof. Fábio Dahia comunicou aos presentes a finalidade da reunião. A seguir, passou a palavra para que a candidata fizesse, oralmente, a exposição do trabalho de tese intitulado "*Testes de modificações da gravitação em escala atômica*". Concluída a exposição, a candidata foi arguida pela Banca Examinadora, que emitiu o seguinte parecer: **"aprovada".** Assim sendo, deve a Universidade Federal da Paraíba expedir o respectivo diploma de Doutora em Física na forma da lei. E para constar, eu, Danilo Wilson Lemos Menezes, redigi esta ata que vai assinada por mim e pelos membros da Banca Examinadora. João Pessoa, Paraíba, **28 de fevereiro 2020**.

Prof. Dr. Fábio Dahia
Orientador – PPGF/UFPB

Prof. Dr. Valdir Barbosa Bezerra
PPGF/UFPB

Prof. Dr. Carlos Augusto Romero Filho
PPGF/UFPB

Prof. Dr. Rodrigo Holanda
UFRN

Prof. Dr. Victor Afonso
UFCG

"*Dedico esta tese à minha família*"

Agradecimentos

"Os olhos enxergam mais beleza quando pertencem a uma pessoa de coração grato."

Neste momento, externo em palavras aquilo que o coração já diz ao relembrar de toda trajetória até chegar aqui.

Agradeço primeiramente a Deus por ter me presenteado cada dia com saúde e ter conduzido meus passos. Ele, que é dono de minha vida, merece meu mais profundo agradecimento.

Ao meu orientador, Fábio Dahia, por toda sua paciência e compreensão ao longo desses quatro anos. Por ter me orientado com tanta sabedoria e por todo zelo pelo nosso trabalho. Gratidão, professor!

Aos meus pais Valter e Luciene. Não sei o que seria de mim sem eles que desde a minha infância, mesmo com algumas dificuldades, nunca abriram mão de me dar uma educação de qualidade. Eles sempre souberam incentivar meus estudos e nunca exitaram em medir esforços para me oferecer o melhor; sem contar que durante esses últimos meses foram muito compreensivos com relação a minha ausência. Incluo, também, aqui os agradecimentos a minha irmã, Emanuela, ela é uma das pessoas que mais acreditou que eu poderia chegar onde chego hoje, que acredita que isso é apenas o começo de minha carreira acadêmica e que sempre me incentivou e foi tão companheira. Acredito em você da mesma forma, Bi. Minha base, meu porto mais seguro, obrigada por tudo.

Ao meu namorado, Thallis, que está comigo desde os últimos oito anos sendo sinônimo de companheirismo e compreensão; que vem sendo meu ponto de equilíbrio ao ajudar-me a manter firme nesses últimos meses, os quais foram tão intensos, me segurando com suas palavras e sua presença. A ele que é presente do céu para mim, minha gratidão e amor.

Aos meus avós, Pedro e Maria das Dores, por serem sinônimo de amor e cuidado na minha vida. E a senhora, vovó, obrigada por sua companhia em meus primeiros dias

em João Pessoa e por cada ligação diária.

À minha família, nas pessoas de minhas tias (Lucione, Lúcia, Lucicleide e Francisca), Tio Silzonaldo e primas (Letícia e Sofia). Agradeço pela preocupação de cada semana, pelo amor, cuidado, pelas orações e por serem tão presente em minha vida.

A Ivaldy Barreto, que foi meu professor de física durante os quatro anos de escola, obrigada por, de forma tão encantadora, ter me apresentado à Física. Sem dúvidas tem muito de você na minha escolha profissional.

Ao meu antigo professor da graduação, Jean Spinelly, por ser uma pessoa que me inspira profissionalmente através de seu zelo pelas aulas e de sua organização. Agradeço também a sua esposa, Juciane, por junto dele ter me ajudado a procurar um apartamento para residir em João Pessoa. Obrigada pela amizade construída ao longo desses 10 anos.

Aos professores do departamento de Física da UFPB, com os quais tive contato direto através das disciplinas aqui cursadas: Carlos Romero, Jorge Gabriel e Plasck. Agradeço pela forma cativante com que ministraram as aulas e por todo conhecimento que adquiri através de vocês.

Às minhas amigas e companheiras de apartamento, Ikla e Alana. Mesmo não morando mais juntas eu não poderia deixar de gravar aqui minha gratidão à elas pelo que vivemos. Com elas pude construir um lar em uma cidade que era nova para mim. Foi tudo tão leve com vocês. Obrigada!

À minha amiga Juliana Gonçalves, a qual é tão especial para mim. Obrigada por ter vivido comigo esse doutorado com a mesma intensidade em que vivi e por ter tomado para você minhas preocupações e alegrias como se também fossem suas. Gratidão por suas orações. Quero te levar pra vida!

À Raissa Pimental, pelas vezes que não exitou em deixar seus estudos de lado para me ajudar com alguma dúvida e por sua companhia divertida em tantos momentos ao longo desses quatro anos.

Por fim, agradeço à CAPES pelo apoio financeiro.

Sumário

Agradecimentos **vi**

Sumário **ix**

Resumo **x**

Abstract **xi**

1 Introdução **1**

2 Teorias de dimensões extras **5**

2.1 Teoria de Kaluza-Klein 6

2.1.1 Compactação de Klein 8

2.2 Modelo ADD 11

2.2.1 Localização da matéria 12

2.2.2 A localização dos Férmions 15

2.2.3 Potencial gravitacional em dimensões extras não compactas 18

2.2.4 Potencial gravitacional com dimensão extra compacta 20

2.2.5 Gravitação e comprimento de Planck 22

2.3 Os modelos Randall-Sundrum 25

2.3.1 O modelo RSI 26

2.3.2 O modelo RSII 30

3 Vínculos sobre os parâmetros dos modelos de dimensões extras e outras modificações da gravidade **32**

3.1 Balança de torção: Teste da Lei do inverso do quadrado 34

3.1.1 O Eöt-Wash 2004 35

3.1.2 O Eöt-Wash 2006 . . . 37
3.2 Vínculos do Efeito Casimir . . . 38
3.3 Vínculos de Colisores de Partículas . . . 40
3.4 Vínculos Espectroscópicos . . . 43
3.5 O problema do raio do próton . . . 48
3.5.1 Contribuição gravitacional ao Lamb-Shift . . . 50

4 Mecânica Quântica Relativística 52
4.1 Equação de Dirac . . . 52
4.1.1 Simetrias da equação de Dirac . . . 58
4.1.2 Soluções da equação de Dirac . . . 60
4.1.3 Limite não relativístico . . . 63
4.2 A Transformação de Foldy-Wolthuysen . . . 65
4.2.1 A Transformação de Foldy-Wolthuysen para a partícula livre . . . 65
4.2.2 A Transformação de Foldy-Wolthuysen na presença de um campo externo . . . 68
4.3 A equação de Dirac no espaço-tempo curvo . . . 71

5 Testes espectroscópicos 77
5.1 Vínculos espectroscópicos extraídos da transição $1S - 3S$ . . . 77
5.1.1 O Hélio antiprotônico . . . 78
5.1.2 Calculando novos vínculos . . . 79
5.2 Vínculos espectroscópicos extraídos da transição $2P_{1/2} - 2P_{3/2}$ . . . 83
5.2.1 O experimento MTV-G . . . 83
5.2.2 Acoplamento spin-órbita gravitacional . . . 86

Referências Bibliográficas 98

Resumo

Há alguns cenários teóricos, entre os quais modelos de dimensões extras de grande escala, que prevêem um fortalecimento do campo gravitacional para curtas distâncias. Motivados por isso, procuramos por desvios do campo gravitacional na escala de comprimento atômica. Utilizando dados recentes da espectroscopia do hidrogênio obtivemos novos limites empíricos para supostas modificações da gravidade padrão nessa escala. Os novos limites foram extraídos a partir da frequência de transição $1S-3S$. Comparando-os com os dados espectroscópicos do Hélio antiprotônico, que estabelece um dos vínculos mais fortes para desvios do potencial Newtoniano nessa escala, verificamos que nossos resultados são um pouco mais fortes. Outros vínculos foram obtidos da análise do efeito de acoplamento spin-órbita gravitacional na espectroscopia atômica para a transição $2P_{1/2} - 2P_{3/2}$. Tais vínculos são mais fortes do que limites previamente determinados em um experimento que mede a precessão do spin do elétron em um espalhamento elétron-núcleo. Mostramos também que a análise desta interação, responsável pela precessão do spin, pode ser empregada como um teste de potencial Pós-Newtoniano no domínio atômico.

Palavras-chave: dimensões-extras, vínculos espectroscópicos, modificações da gravidade, acoplamento spin-órbita gravitacional.

Abstract

There are some theoretical scenarios, as the large-scale extra dimensions models, that predict a strengthening of the gravitational field for short distances. Motivated by this, we investigate deviations of the gravitational field in the atomic length scale. Using recent data from hydrogen spectroscopy, we obtained new empirical limits for supposed modifications of the standard gravity on this scale. The new limits were extracted from the $1S - 3S$ transition frequency. We compared them with the spectroscopic data of the antiprotonic helium, which determine one of the most stringent bound for deviations of the Newtonian potential in this domain. We found that our results are slightly stronger that the antiprotonic helium limit. Other constraints were obtained from the analysis of the effect of gravitational spin-orbit coupling in atomic spectroscopy for the transition $2P_{1/2} - 2P_{3/2}$. Such bounds are stronger than limits previously determined by an experiment that measures the electron spin precession in an electron-nucleus scattering. We also show that the analysis of this interaction, responsible for the spin precession, can be used as a test of Post-Newtonian potential in the atomic domain.

Keywords: extra dimensions, spectroscopic constraints, modifications of gravity, gravitational spin-orbit coupling.

Capítulo 1

Introdução

De acordo com o paradigma atual da física há quatro forças fundamentais na natureza: a força nuclear fraca, a força forte, a eletromagnética e a gravidade. A tentativa de unificar essas quatro forças é algo que ao longo dos anos vem estimulando a pesquisa dos físicos. Em especial no que se refere ao modo de como combinar a gravidade com as outras três forças, pois a gravitação possui uma magnitude muito inferior em comparação com as demais [19].

De fato, a busca por esta unificação motivou o surgimento de teorias de dimensões extras, que historicamente se desenvolveram a partir do advento da Teoria de Kaluza-Klein em 1921. Essa teoria é conhecida por sua tentativa de unificar a gravidade com o eletromagnetismo em uma única teoria de $(4 + 1)$ dimensões. Para evitar contradições empíricas, supõe-se que a quinta dimensão possua a topologia de um círculo com um raio da ordem do comprimento de Plank (10^{-35}m). Desta forma, estaria justificado o fato das dimensões extras não serem verificadas experimentalmente [4, 11, 10].

Após o modelo de Kaluza-Klein, surge outro modelo de dimensões extras: o modelo ADD [13]. Esse, por suas vez, fundamentado em teorias de branas, considera que a matéria e todos os campos do modelo padrão são confinados em um espaço tridrimensional, com exceção do campo gravitacional, que tem livre acesso as dimensões extras. Por esse motivo, tal modelo seria uma boa explicação para o problema da hierarquia (discrepância existente entre a escala da força eletro-fraca e da força gravitacional, que é da ordem de 10^{16}).

Outra característica interessante do modelo ADD, e de modo geral, dos modelos de brana, é a possibilidade dos sinais de dimensões extras serem sondados experimentalmente. Uma vez que, o modelo ADD, é fenomenologicamente compatível com uma escala de

compactação muito superior a escala de Planck, podendo chegar até uma escala de comprimento submilimétrica. Por esse motivo, o modelo ADD é conhecido como um modelo de dimensões extras de grande escala.

Para um espaço suplementar de topologia compacta, o campo gravitacional tem seu comportamento quadrimensional recuperado para distâncias muito maiores que o raio de compactação, no entanto a força gravitacional aumenta para distâncias menores. Assim, eventuais desvios da Lei do Inverso do quadrado em curtas distâncias podem ser indicações da existência de dimensões extras. Experimentos como balança de torção, por exemplo, vêm sendo utilizados como teste dessa lei e impõem um limite superior de $R < 44\mu m$ [39] para a escala de compactação. Outros vínculos são obtidos por meio de outros experimentos, no objetivo de buscar evidências de dimensões extras, tais como: vínculos de colisores de partículas [81, 82], vínculos cosmológicos [48], vínculos astrofísicos [46] e vínculos espectroscópicos [49]. Esta amplificação da gravidade a curtas distâncias também motivou muitas investigações sobre o comportamento do campo gravitacional nos domínios microscópicos. Como por exemplo, no que diz respeito ao problema do raio do próton [59, 60]. Existem conjecturas sobre a possibilidade de que a gravidade nessas dimensões mais altas seja uma explicação para este problema [49, 63].

Usualmente, a modificação da gravidade é expressa de duas formas: ou por meio da parametrização por lei de potência ou da parametrização de Yukawa, a qual será usada aqui. Essa parametrização consiste em adicionar um termo tipo Yukawa no potencial newtoniano, de modo que ele possa ser expresso como $V(r) = \frac{-Gm_1m_2}{r}\left(1 + \alpha e^{-r/\lambda}\right)$, onde α é um parâmetro de força adimensional e λ determina a escala de comprimento em que as modificações são significativas [34]. Com essa parametrização, os resultados referentes a nossa investigação, acerca da modificação da gravidade, podem ser expressos por meio de vínculos sobre o parâmetro α em função de λ. A parametrização de Yukawa é útil pois permite explicar desvios da gravidade Newtoniana com diferentes origens físicas. As dimensões extras são apenas uma causa possível para esses desvios, mas existem outras justificativas, tais como: a existência de bósons adicionais que podem interferir na Lei do inverso do quadrado em certo domínio [41, 40], como também algumas teorias F(R) que fazem previsões semelhantes [40].

Nosso interesse neste trabalho é procurar por desvios no campo gravitacional em escala atômica utilizando dados espectroscópicos do hidrogênio. Faremos isso seguindo

dois caminhos. Um dos limites atuais mais fortes para os parâmetros de Yukawa tem origem na espectroscopia do Hélio antiprotônico. Sabendo disso, analisaremos a frequência de transição $1S - 3S$ para o hidrogênio (recentemente medida com precisão relativa da ordem de 10^{-12}) e compararemos com os limites já existentes, determinado por aquele átomo exótico. Veremos que os vínculos obtidos são ligeiramente melhores.

Além dos limites espectroscópicos, outros limites independentes para interações hipotéticas de curto alcance, em torno da escala de comprimento do Ångstrom, podem ser inferidos a partir de experimentos que examinam diferentes fenômenos físicos, como por exemplo o espalhamento de nêutrons [94] e o experimento MTV-G [95].

O experimento MTV-G investiga a possibilidade de um forte campo gravitacional ao redor do núcleo atômico através da medida da precessão do spin do elétron, com um polarímetro de Mott, em um processo de espalhamento com um núcleo pesado. Essa suposta precessão do spin seria afetada pelo acoplamento spin-órbita gravitacional do elétron com o núcleo. Inspirados nisto, buscaremos por desvios da gravitação impondo limites para os parâmetros de Yukawa (α e λ) através da influência do acoplamento spin-órbita gravitacional na separação fina dos estados $2P_{1/2} - 2P_{3/2}$. O experimento MTV-G considera a dinâmica do spin numa perspectiva clássica [96], consideraremos do ponto de vista quântico. Os vínculos aqui obtidos são mais fortes do que os obtidos no experimento MTV-G.

Em adição a isso, veremos também que o termo de interação spin-órbita gravitacional tem contribuição do potencial Newtoniano e pós-Newtoniano. Como estamos, neste trabalho, buscando por desvios da gravitação no domínio atômico, optamos por não desconsiderar a diferença entre eles, prevista por certas teorías métricas diferentes da Teoria Geral da Relatividade. Do ponto de vista geométrico, o potencial pós-Newtoniano, que é investigado aqui, está relacionado à curvatura da seção espacial do espaço-tempo ($t = constante$). Usualmente, essa diferença entre os potenciais é tratada com o formalismo de parametrização pós-Newtoniana (PPN). Um dos objetivos desse formalismo é analisar teorias métricas alternativas da gravitação. Como veremos o potencial pós Newtoniano investigado pode ser relacionado com o parâmetro γ do formalismo PPN.

Este trabalho está organizado como segue. No capítulo 2 trazemos uma revisão bibliográfica sobre alguns modelos de dimensões extras, iniciando com o modelo precursor

de Kaluza-klein; posteriormente, o modelo ADD e finalizamos com o modelo de Randall-Sundrum.

No capítulo 3 abordamos um pouco dos vínculos obtidos para os parâmetros das teorias de dimensões extras e outras modificações da gravidade por meio de diversos experimentos: balança de torção, vínculos de colisores de partículas, efeito Casimir e vínculos espectroscópicos. Trazemos ainda, neste capítulo, o problema do raio do próton, o qual consiste de uma diferença de medida oferecida pelo hidrogênio eletrônico e pelo hidrogênio muônico para o tamanho do raio de carga do próton. Essa diferença levou a uma discussão sobre a precisão dos experimentos, como também, sobre a possibilidade de uma nova física envolvida. Como o múon é cerca de 207 vezes mais pesado que o elétron, podemos pensar que a justificativa para tal diferença esteja na presença da gravidade.

Como já foi mencionado, consideraremos o fenômeno da precessão do spin do ponto de vista da mecânica quântica. Por este motivo, no capítulo 4, trazemos uma revisão sobre a mecânica quântica relativística. Iniciamos com um estudo sobre a equação de Dirac, abordando-a tanto no espaço plano quanto no espaço curvo. Este capítulo é escrito pensando no capítulo final de nosso trabalho, no qual usaremos a equação de Dirac no espaço curvo para obter uma parcela de nossos resultados. Finalizamos o capítulo com um estudo sobre a transformação de Foldy-Wouthuysen. Este formalismo nos permite, por meio de uma série de aproximações, escrever a equação de Dirac livre de operadores ímpares. Além disso, por meio dessas aproximações é possível obter uma série de correções para a equação de Dirac, dentre elas obtemos o termo de interação spin-órbita gravitacional.

Por fim, no capítulo 5 trazemos nossos resultados que, como já foi mencionado, utilizam dados espectroscópicos do hidrogênio para buscar desvios no comportamento do campo gravitacional em escala atômica. Na primeira parte desde capítulo trazemos os limites obtidos da transição $1S-3S$ do hidrogênio. Como veremos, os limites obtidos são ligeiramente mais fortes do que os da espectroscopia do átomo $\bar{p}He^{+}$. Compararemos também nossos resultados com vínculos provenientes de outras fontes. Na segunda parte de nossos resultados, onde obtemos limites a partir da frequência de transição $2P_{1/2}-2P_{3/2}$ do átomo de hidrogênio, veremos que o estudo do acoplamento spin-órbita gravitacional na verdade nos permite realizar um teste experimental de um potencial pós-Newtoniano. Os vínculos obtidos aqui são mais fortes do que os do experimento MTV-G.

Capítulo 2

Teorias de dimensões extras

As Teorias de dimensões extras surgem motivadas pelo desejo de solucionar alguns desafios da física teórica, tais como: a tentativa de unificar a força gravitacional com a eletromagnética, o problema da hierarquia entre a escala eletro-fraca e a escala de Planck [19] (também chamada de escala gravitacional), o problema da constante cosmológica, dentre outros.

A unificação das forças gravitacional e eletromagnética era um desejo de Albert Einstein após formular a Teoria da Relatividade Geral. Ele procurava por uma teoria geral que as unificasse, e com a qual pudesse explicar todos os fenômenos da natureza. Porém, não obteve êxito. Por outro lado, o problema da hierarquia é encontrado na física do modelo padrão e diz respeito a uma discrepância existente entre a escala da força eletro-fraca, a qual é da ordem de grandeza de 10^3 GeV, e da gravitacional, da ordem de 10^{19} GeV. Essa diferença de 10^{16} é vista como um problema para os físicos teóricos pois dificultaria a formulação de uma teoria de unificação.

Objetivando justificar e resolver os problemas acima citados, alguns físicos teóricos começaram a propor Teorias de dimensões extras, ou seja, teorias em que o número de dimensões (n) é maior que $(3+1)$, a dimensão do nosso espaço-tempo usual. Estudaremos no presente capítulo algumas dessas Teorias, dentre elas: a Teoria de Kaluza-Klein (que foi precursora), o modelo ADD e o modelo Randall-Sundrum. Veremos ao longo do capítulo que cada um tem uma forma diferente de justificar o fato das dimensões extras não serem observadas experimentalmente.

Deixamos claro que existem também outras teorias que tentam resolver aquelas questões por meios alternativos. Podemos citar, por exemplo: Supersimetria e

Technocolor. Contudo, nosso trabalho está concentrado em Teorias de dimensões extras.

2.1 Teoria de Kaluza-Klein

A Teoria de Kaluza-Klein é uma teoria de dimensão extra conhecida por seu objetivo de unificar a interação gravitacional com a interação eletromagnética em uma única teoria gravitacional com 5 dimensões [1, 2, 3]. Como sabemos, Einstein em sua Teoria da Relatividade Geral (TRG) considerou um espaço-tempo quadrimensional ($4D$), no qual temos 3 coordenadas espaciais e uma temporal. Por sua vez, na teoria de Kaluza-Klein temos 4 coordenadas espaciais e uma temporal.

Do ponto de vista histórico é importante destacar que os físicos Kaluza e Klein tiveram um precursor, o físico finlandês Gunnar Nordstöm. Entre 1911 e 1913, Nordström vinha trabalhando em teorias relativísticas da gravitação e obteve uma teoria escalar consistente [9]; em 1914, antes mesmo do surgimento da Teoria da Relatividade Geral de Einstein, referiu-se a uma unificação de sua teoria escalar da gravitação com o eletromagnetismo. Essa unificação foi alcançada em sua teoria com a adição de uma quinta dimensão ao espaço-tempo quadridimensional e exigindo que a distribuição de massa da matéria fosse independente da quinta coordenada [5].

Poucos anos após a publicação dessas ideias de Nordstom, em 1921, o matemático e físico alemão Theodor Kaluza publicou um artigo intitulado por ″Zum Unitätsproblem der Physik″, ou na língua inglesa, ″On the Unification Problem in Physics″ [4]. Neste trabalho ele propunha uma teoria de gravitação em $5D$, mas com uma métrica que não dependa da coordenada extra. Essa condição imposta por Kaluza ficou conhecida como condição cilíndrica. Posteriormente em 1926 o físico Sueco Oskar Klein, por considerar a condição cilíndrica artificial, fez algumas modificações na teoria e as publicou no artigo ″Quantum Theory and Five-Dimensional Relativity″. Sua maior contribuição foi postular que a dimensão extra tinha uma topologia compacta [11, 10]. Com isso, a teoria ficou conhecida como Teoria de Kaluza-Klein. Vamos a alguns detalhes importantes para se compreender tal teoria.

Kaluza motivado pelo desejo de elaborar uma teoria que unificasse a gravitação com o eletromagnetismo, observava uma semelhança existente entre o símbolo de Christoffel ($\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$) e o tensor de campo eletromagnético ($F_{\mu\nu}$). Ele notou que o tensor eletromagnético

se tornaria um símbolo de Christoffel introduzindo-se uma métrica na qual $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ fosse proporcional a $F_{\mu\nu}$ [5, 4]. Essas quantidades são definidas por:

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\lambda\sigma} \left(\partial_{\mu} g_{\sigma\nu} + \partial_{\nu} g_{\sigma\mu} - \partial_{\sigma} g_{\mu\nu} \right), \tag{2.1}$$

$$F_{\mu\nu} = \partial_{\mu} A_{\nu} - \partial_{\nu} A_{\mu}, \tag{2.2}$$

onde $g_{\mu\nu}$ é o tensor métrico e A_{μ} o quadri-vetor potencial. Foi quando teve a ideia de considerar uma quinta dimensão no espaço. O espaço-tempo teria as seguintes coordenadas: (x^{μ}, z), onde $\mu = 0, 1, 2, 3$ e z seria uma coordenada do tipo espaço, a então sugerida dimensão extra. A métrica proposta foi:

$$g_{AB} = \begin{pmatrix} g_{\mu\nu} + \phi^2 k^2 A_{\mu} A_{\nu} & k\phi^2 A_{\mu} \\ k\phi^2 A_{\nu} & \phi^2 \end{pmatrix}, \tag{2.3}$$

com a condição cilíndrica mencionada anteriormente que exige que a derivada da métrica com respeito a quinta dimensão fosse nula, isto é [6]:

$$\frac{\partial g_{AB}}{\partial z} = 0, \tag{2.4}$$

a motivação para essa exigência vem do fato que a existência da quinta dimensão não é observada.

É interessante destacar que esta métrica não era covariante sobre uma transformação geral de coordenadas. Entrará aqui uma contribuição de Klein como veremos adiante.

Klein fazendo uma revisão sobre os resultados de Kaluza se mostrou preocupado com o fato da métrica não ser covariante sobre uma transformação geral de coordenadas. Por esse motivo ele publicou algumas correções para estes resultados, nas quais fez questão de manter a condição cilíndrica imposta por Kaluza.

Para formular essa teoria de dimensões extras, Kaluza se inspirou na Teoria da Relatividade Geral [7, 8], proposta por Einstein em 1915, que leva em consideração os princípios da relatividade restrita na descrição da gravitação. Tal generalização tem implicações profundas sobre o entendimento acerca do espaço-tempo, e nos leva a concluir que a geometria do espaço-tempo não é absoluta, mas é influenciada pela matéria e energia e que a gravitação é uma manifestação da curvatura do espaço-tempo.

Além disso, dessa forma, o universo em dimensões superiores era vazio. A ideia era mostrar a matéria em $4D$ como manifestação da geometria em $5D$. Levando em

consideração esse ultimo ponto, as equações de campo de Einstein no vácuo em 5 dimensões são:

$$G_{AB} = 0, \tag{2.5}$$

ou ainda

$$R_{AB} = 0. \tag{2.6}$$

Se considerarmos a métrica (2.3) e o fato de que o símbolo de Christoffel e o tensor de Ricci são definidos da mesma maneira que em 4 dimensões, ou seja

$$R_{AB} = \partial_C \Gamma^C_{AB} - \partial_B \Gamma^C_{AC} + \Gamma^C_{CD}\Gamma^D_{AB} - \Gamma^C_{BD}\Gamma^D_{AC} \tag{2.7}$$

$$\Gamma^C_{AB} = \frac{1}{2} g^{CD} \left(\partial_A g_{DB} + \partial_B g_{DA} - \partial_D g_{AB}\right) \tag{2.8}$$

Tomando ϕ constante, obtemos:

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G \phi^2 T^{EM}_{\mu\nu} \tag{2.9}$$

$$\nabla^\mu F_{\mu\nu} = 0 \tag{2.10}$$

onde $G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - R g_{\mu\nu}/2$ é o tensor de Einstein em 4 dimensões, $T^{EM}_{\mu\nu} \equiv g_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}/4 - F^\alpha_\mu F_{\nu\alpha}$ é o tensor energia-momento eletromagnético e $F_{\alpha\beta} \equiv \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha$ é o tensor eletromagnético. Desta forma, observamos que a Teoria de Kaluza-Klein contém a equação da gravitação em $4D$ acoplada às equações de Maxwell no vácuo.

2.1.1 Compactação de Klein

O mecanismo de compactação de Klein não elimina a condição cilíndrica de Kaluza. Na verdade é uma explicação física para o fato da dimensão extra não ser observada experimentalmente. Klein assumiu que a 5ª dimensão teria topologia de um circulo, o que matematicamente nos permite escrever uma relação de periodicidade [11, 10]

$$z \to z + 2\pi l. \tag{2.11}$$

Desta forma, um campo escalar $\phi(x^\mu, z)$ definido em um espaço $5D$ com a quinta dimensão compacta pode ser expresso da seguinte forma

$$\phi(x^\mu, z) = \phi(x^\mu, z + 2\pi l), \tag{2.12}$$

onde l é o raio da dimensão extra.

Podemos generalizar isto para qualquer campo e considerar que todos são periódicos com respeito à quinta coordenada. Assim, podemos expandir todos os campos em série de Fourier [12] :

$$g_{\mu\nu}\left(x^{\mu},z\right)=\sum_{n=-\infty}^{n=\infty}g_{\mu\nu}^{n}\left(x^{\mu}\right)e^{inz/l}, \tag{2.13}$$

$$\phi\left(x^{\mu},z\right)=\sum_{n=-\infty}^{n=\infty}\phi^{n}\left(x^{\mu}\right)e^{inz/l}, \tag{2.14}$$

$$A_{\mu}\left(x^{\mu},z\right)=\sum_{n=-\infty}^{n=\infty}A_{\mu}^{n}\left(x^{\mu}\right)e^{inz/l}, \tag{2.15}$$

o índice n refere-se ao n-ésimo modo de Fourier e cada função $\phi^{n}(x^{\mu})$ é denominada modo de Kaluza-Klein. Observe que os campos são independentes da dimensão extra quando apenas o modo zero($n=0$) é excitado.

Vamos agora analisar alguns efeitos dessa compactação. Para isso, por questão de simplicidade, consideramos o caso de um campo escalar $\phi^{n}(x^{\mu},z)$ sem massa e admitimos que a métrica é plana. Este campo satisfaz à equação de Klein-Gordon em 5 dimensões:

$$\Box_{(5)}\phi(x^{\mu},z)=0 \tag{2.16}$$

onde $\Box_{(5)}=\Box+\frac{\partial^{2}}{\partial z^{2}}$ é o operador D'Lambertiano em 5 dimensões.

Podemos usar o método de separação de variáveis para resolver a equação (2.16). Para tanto, escrevemos a função $\phi(x^{\mu},z)$ como

$$\phi(x^{\mu},z)=\chi(x^{\mu})\varphi(z), \tag{2.17}$$

seguindo o método, substituímos a função (2.17) na equação (2.16). Posteriormente, separamos a equação em duas equações, de tal forma que cada uma delas seja igual a uma constante e a soma dessas constantes seja nula. Vejamos:

$$\frac{1}{\chi(x^{\mu})}\Box\chi(x^{\mu})=C \tag{2.18}$$

e

$$\frac{1}{\varphi(z)}\frac{\partial^{2}\varphi(z)}{\partial z^{2}}=-C. \tag{2.19}$$

podemos ainda escrever a equação (2.18) da seguinte forma

$$\Box\chi(x^{\mu})=C\chi(x^{\mu}). \tag{2.20}$$

Comparando esta equação com a equação de Klein-Gordon com massa

$$(\Box - m^2)\phi = 0,$$

observamos que a mesma representa a equação de Klein-Gordon em um espaço-tempo quadrimensional e a constante C representa a massa do campo.

Resolvendo a equação (2.19) e aplicando as condições de contorno, que são: $\phi(0) = \phi(2\pi l)$, chegamos ao seguinte valor para a constante de separação de variáveis C

$$C = \frac{n^2}{l^2}, \tag{2.21}$$

onde n é um inteiro. Podemos escrever ainda que $C = m^2$, já que essa constante tem significado de massa na equação. Portanto, a equação (2.20) pode ser reescrita como

$$\Box\chi^{(n)}(x^\mu) = m_n^2\chi^{(n)}(x^\mu) \tag{2.22}$$

onde a constante

$$m_n^2 = \frac{n^2}{l^2} \tag{2.23}$$

faz um papel de massa para cada modo n.

Desta forma, temos um campo escalar quadrimensional sem massa apenas para o modo zero, ou seja, quando $n = 0$. Para todos os outros valores de n temos o que chamamos de modos de Kaluza-Klein ou modos KK.

Cada modo possui uma energia de repouso da ordem de n/l, em vista disso, não podem ser excitados em processos envolvendo energia inferior a este valor. Se o raio da dimensão extra for suficientemente pequeno, a energia para excitar um modo com $n \neq 0$ será tão grande a ponto de não ser observado experimentalmente. Portanto, apenas o modo zero seria observado, como é requerido pela Teoria de Kaluza. Com isso, nos questionamos quanto a algo importante: quão grande pode ser o tamanho da escala de uma quarta dimensão espacial? Para justificar o fato de que até os dias atuais nenhuma dimensão extra foi observada, teóricos frequentemente adotam a escala de compactação como sendo da ordem do comprimento de Planck, ou seja, [1]

$$l_P \equiv \left(\frac{\hbar G}{c^3}\right)^{1/2} \approx 1.6 \times 10^{-35} m. \tag{2.24}$$

Como consequência dessa escala adotada, a massa dos estados excitados seriam da ordem da massa de Planck, ou seja, $M_P \approx 10^{19}$ GeV. Desta maneira, considerando o nível de

energia atingido pelos aceleradores de partículas, que é da ordem de 1TeV (atualmente chegando a 14TeV no LHC), a não detecção experimental da dimensão extra estaria justificada.

Com isso, fazendo uso de seu mecanismo de compactação, Klein justificou fisicamente o argumento puramente matemático da condição cilíndrica de Kaluza.

2.2 Modelo ADD

Proposto em 1998, o modelo ADD [13], cuja sigla vem dos nomes dos físicos Nima Arkani-Hamed, Savas Dimopoulos, e Gia Dvali, é mais um modelo que busca resolver algum problema físico considerando a existência de dimensões extras. Como vimos, Kaluza e Klein, quando formularam sua teoria, objetivavam uma unificação da interação gravitacional com a eletromagnética; o modelo ADD, por sua vez, é motivado pelo desejo de resolver o problema da hierarquia [19].

De maneira resumida, o problema da hierarquia diz respeito a uma grande discrepância existente entre a escala eletro-fraca e a escala gravitacional. Estas escalas diferem uma da outra por um fator da ordem de $\sim 10^{16}$. O modelo ADD vem justificar o porquê da gravidade ser tão fraca quando comparada a força eletro-fraca.

No contexto do modelo ADD a escala eletro-fraca é tomada como sendo a única escala fundamental de curta distância na natureza. A aparente fraqueza da gravidade em distâncias maiores que $1mm$ é justificada pela existência de 2 ou mais dimensões extras. Diferentemente do modelo proposto por Kaluza, no qual a escala da dimensão extra seria da ordem do comprimento de Planck, no modelo ADD esta escala pode atingir comprimentos submilimétricos, por este motivo é também conhecido como modelo de dimensões extras de grande escala.

Baseado em modelos de Branas, o modelo ADD considera que apenas o campo gravitacional pode se propagar livremente nas dimensões extras, enquanto que os outros campos do modelo padrão estão confinados no espaço quadrimensional. A tarefa não trivial neste modelo é a localização dos campos de modelo padrão na brana. Como ilustração, iremos considerar o modelo de localização dos férmions no defeito topológico conhecido por parede de domínio, o qual foi proposto por Rubanov e Shaposhnikov [15, 16, 17]. Queremos deixar claro que poderíamos considerar qualquer outro tipo de

defeito, assim como também encontramos na literatura estudos sobre a localização de campo usando teoria de cordas [18].

2.2.1 Localização da matéria

Um questionamento bastante curioso e que todos os modelos e/ou teorias de dimensões extras procuram responder é: se é verdade que existem dimensões extras no Universo porque elas não são observadas na natureza? Já vimos uma resposta para isto na Teoria de Kaluza-klein, quando eles justificam a falta de evidencias experimentais, que comprovem a presença de dimensões adicionais, através da condição cilíndrica e do mecanismo de compactação de Klein. No modelo ADD um novo cenário de compactação foi apresentado. É presumido que nosso universo de $(3+1)$ dimensões, conhecido por $3-$brana, seja uma hiper-superfície imersa em um espaço de dimensões extras, no qual apenas a gravidade pode se propagar e os demais campos ou matéria ficam confinados na $3-$brana [13].

Do ponto de vista da Teoria de Campos, o confinamento da matéria na brana pode ser compreendido como o aprisionamento da matéria em uma parede de domínio [16, 17]. Na finalidade de ilustrar essa ideia, considere um campo escalar $\phi = \phi(x^{\mu}, z)$, o qual descreve a parede em um espaço que possui dimensão extra. A ação é dada por:

$$S = \int d^4x dz \left[\frac{1}{2}\left(\partial_A \phi\right)^2 - V\left(\phi\right)\right] \tag{2.25}$$

onde $A = 0, 1, 2, 3, 4$ e $V(\phi)$ é o potencial escalar. O potencial que suporta este tipo de defeito topológico tem a seguinte forma

$$V\left(\phi\right) = \frac{\lambda^2}{8}\left(\phi^2 - \nu^2\right)^2, \tag{2.26}$$

observe que ele possui dois mínimos de energia, também chamado de estados de vácuo, em $\phi = \pm\nu$ e um máximo instável em $\phi = 0$. Seu comportamento é descrito pela figura (2.1)

A fim de obtermos a dinâmica do campo usaremos a equação de Euler-Lagrange [20]

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_A\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_A \phi\right)}\right] = 0, \tag{2.27}$$

que quando aplicada a ação (2.25), resulta na seguinte equação de movimento:

$$\Box^{(5)}\phi + \frac{dV}{d\phi} = 0, \tag{2.28}$$

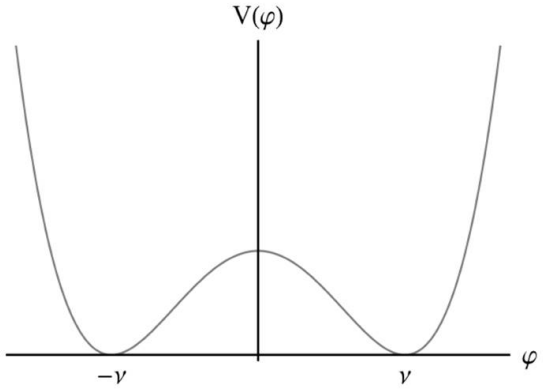

Figura 2.1: Gráfico do potencial $V(\phi)$

onde $\Box^{(5)} = \eta^{AB}\partial_A\partial_B$.

Objetivamos obter uma solução do tipo parede de domínio. Para isto, iremos considerá-la como sendo estacionária. Em adição a isso, consideramos que o campo é função apenas da coordenada de dimensão extra z. Neste caso, a equação acima pode ser reescrita como segue

$$-\frac{d^2\phi_0(z)}{dz^2} + \frac{\lambda^2}{2}\phi_0\left(\phi_0^2 - \nu^2\right) = 0 \tag{2.29}$$

e a solução obtida tem a seguinte forma:

$$\phi_0(z) = \nu \tanh\left(\frac{\lambda z \nu}{2}\right). \tag{2.30}$$

Observe o comportamento da função: quando $z \longrightarrow -\infty$ temos que $\phi_0 = -\nu$ e quando $z \longrightarrow +\infty$, $\phi_0 = +\nu$, ela separa os dois estados de menor energia do campo ϕ, ou seja, essa solução conecta os estados fundamentais. Por este motivo é conhecida por parede de domínio sendo, também, chamada de kink.

Outro ponto que podemos discutir sobre a parede de domínio é a densidade de energia que a mesma possui. Lembrando um pouco da Mecânica Hamiltoniana, vemos que a densidade Hamiltoniana H_0 associada ao campo escalar ϕ tem unidade de densidade de energia e é dada por $\hat{H}_0 = \Pi\dot{\phi} - \mathcal{L}$, onde $\Pi = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}}$ é o momento canônico conjugado à ϕ. Posto isso, podemos calcular a densidade Hamiltoniana para o campo escalar ϕ :

$$\hat{H}_0 = \frac{1}{2}(\partial_A\phi)^2 + \frac{\lambda^2}{8}\left(\phi^2 - \nu^2\right)^2. \tag{2.31}$$

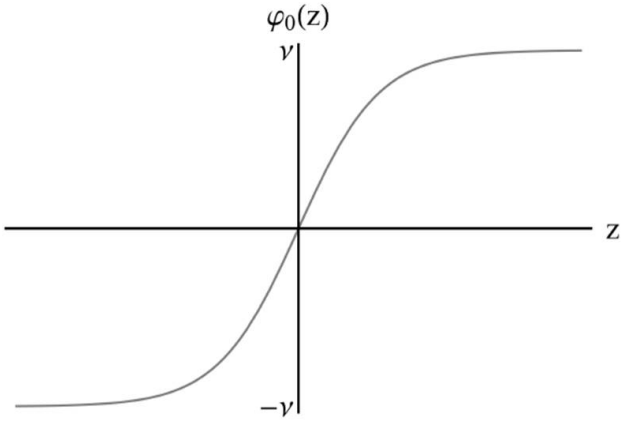

Figura 2.2: Solução para o campo escalar ϕ_0 do tipo parede de domínio

Analisando a expressão acima é fácil ver que em $\phi = \pm\nu$ a energia é zero. No entanto, se considerarmos a solução ϕ_0, dada por (2.30), obtemos

$$\hat{H}_0 = \frac{1}{4}\frac{\lambda^2\nu^4}{cosh^4\left(\frac{\lambda\nu z}{2}\right)}. \tag{2.32}$$

Esta densidade Hamiltoniana representa uma distribuição de energia conforme ilustrada pela figura (2.3), na qual a energia está concentrada em torno de $z = 0$ [17].

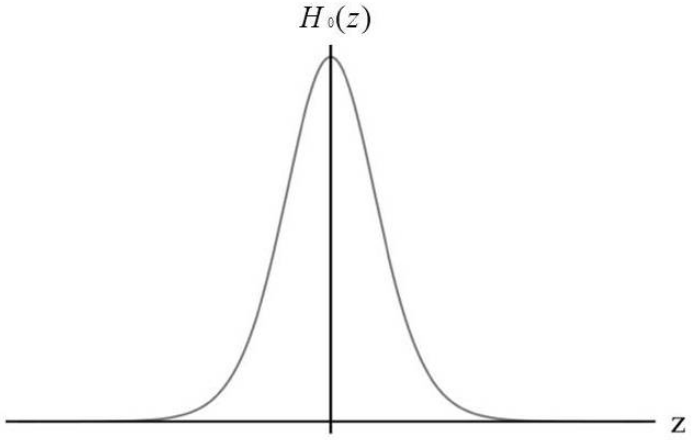

Figura 2.3: Densidade de energia da Brana localizada em $z = 0$

É possível mostrar que λ está relacionado a largura da concentração. Além disso, podemos interpretar $\lambda\nu$ como uma grandeza que tem unidade de inverso do comprimento. Assim, é inversamente proporcional a espessura da parede de domínio.

Por fim, integrando a densidade Hamiltoniana com respeito a dimensão extra encontramos a energia da parede por unidade de 3-volume:

$$\sigma = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{4} \frac{\lambda^2 \nu^4}{cosh^4\left(\frac{\lambda \nu z}{2}\right)} dz = \frac{2\lambda\nu^3}{3}, \tag{2.33}$$

A espessura da parede tende a zero no limite em que $\lambda \longrightarrow \infty$. Neste mesmo limite, se mantivermos σ constante , dizemos que a parede de domínio dará origem a uma $3-$brana ideal, também chamada 3-brana fina.

2.2.2 A localização dos Férmions

Como já foi apresentado nesta seção estamos interessados em descrever o modelo ADD, o qual justifica a diferença entre a escala gravitacional e a eletro-fraca com o argumento de que apenas a gravidade pode se espalhar pelas dimensões superiores e todos os outros campos estão confinados na $3-$brana. Explicamos o processo de localização da matéria numa parede de domínio e neste momento iremos inserir os férmions neste modelo.

Recorde que os férmions são partículas de spin semi-inteiro que obedecem ao Princípio da exclusão de Pauli e são descritos por espinores (ψ), a exemplo do elétron e o próton. A equação de movimento que descreve estas partículas é a equação de Dirac [22]. No quarto capítulo faremos uma revisão detalhada sobre esta equação, o qual será dedicado à Mecânica Quântica Relativística.

De maneira semelhante ao universo quadrimensional, no cenário de dimensões extras a equação de Dirac é escrita da seguinte forma:

$$i\Gamma^A \partial_A \Psi - m\Psi = 0, \tag{2.34}$$

sendo o índice $A = (\mu, z)$, com μ variando de 0 a 3 e z representando a dimensão extra. O termo Γ^A representa as matrizes de Dirac, as quais obedecem à mesma álgebra das matrizes γ^μ em quatro dimensões, isto é

$$\Gamma^A \Gamma^B + \Gamma^B \Gamma^A = 2g^{AB} 1. \tag{2.35}$$

Podemos definir as matrizes de Dirac Γ^A em cinco dimensões em função das matrizes γ^μ em $4D$:

$$\begin{aligned} \Gamma^\mu &= \gamma^\mu \\ \Gamma^z &= -i\gamma^5 \end{aligned} \tag{2.36}$$

onde $\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$, ou ainda

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & 1_{2\times 2} \\ 1_{2\times 2} & 0 \end{pmatrix} \tag{2.37}$$

A ação que gera a equação de Dirac (2.34) é:

$$S_{1/2} = \int d^4xdz \left(i\bar{\Psi}\Gamma^A\partial_A\Psi - m\bar{\Psi}\Psi\right), \tag{2.38}$$

de onde observamos que a Lagrangeana tem a seguinte forma:

$$\mathcal{L} = i\bar{\Psi}\Gamma^A\partial_A\Psi - m\bar{\Psi}\Psi \tag{2.39}$$

Posto isto, vamos estudar como os férmions se comportam em uma parede de domínio [15, 16, 17] admitindo que a interação entre eles é do tipo Yukawa. Lembremos que os férmions são descritos pelo campo de Dirac Ψ e a parede de domínio, por um campo escalar ϕ. A ação desta interação tem a seguinte forma:

$$S_{int} = -h\int d^4xdz\phi\bar{\Psi}\Psi \tag{2.40}$$

onde h é uma constante de acoplamento. Portanto, a ação total é construída pela soma da ação que descreve o campo de Dirac com a ação da interação, dadas pelas equações (2.38) e (2.40), respectivamente, isto é

$$S = \int d^4xdz \left(i\bar{\Psi}\Gamma^A\partial_A\Psi - m\bar{\Psi}\Psi - h\phi_0\bar{\Psi}\Psi\right) \tag{2.41}$$

sendo $\phi_0(z)$ a solução de ϕ na parede de domínio. Considerando o férmion sem massa, $m = 0$, temos que a ação acima é reescrita como:

$$S = \int d^4xdz \left(i\bar{\Psi}\Gamma^A\partial_A\Psi - h\phi_0\bar{\Psi}\Psi\right), \tag{2.42}$$

com isso, utilizando as equações de Euler-Lagrange, obtemos a seguinte equação de movimento

$$i\Gamma^z\partial_z\Psi + i\Gamma^\mu\partial_\mu\Psi - h\phi_0\Psi = 0, \tag{2.43}$$

a qual iremos resolver pelo método de separação de variáveis. Como Ψ é uma função das coordenadas do espaço $4D$ e da dimensão extra, $\Psi(x,z)$, podemos escrevê-la como $\Psi_5(x,z) = \psi(x)f(z)$, onde $\psi(x)$ é um espinor em $4D$ e $f(z)$ é uma função escalar. Substituindo isso na equação acima e separando as variáveis, obtemos

$$i\Gamma^z\psi(x)\frac{\partial_z f(z)}{f(z)} + i\Gamma^\mu\partial_\mu\psi(x) - h\phi_0\psi(x) = 0. \tag{2.44}$$

Usando a equação (2.36) e a seguinte restrição:

$$\gamma^5\psi = -\psi(x), \tag{2.45}$$

a equação acima torna-se:

$$\left(\frac{1}{f(z)}\partial_z f(z) + h\phi_0\right)\psi(x) - i\gamma^\mu\partial_\mu\psi(x) = 0. \tag{2.46}$$

Note que, para a equação (2.46) ser satisfeita, devemos ter

$$i\gamma^\mu\partial_\mu\psi(x) = m\psi(x) \tag{2.47}$$

o que implica em

$$\frac{df(z)}{dz} = (m - h\phi_0)\, f(z). \tag{2.48}$$

Assim, a constante de separação m é interpretada como sendo a massa do espinor em 4 dimensões. Para o modo zero, a equação (2.48) se reduz a:

$$\frac{df(z)}{dz} = -h\phi_0 f(z). \tag{2.49}$$

Para resolver esta equação iremos aplicar a condição de contorno na qual $f(z)$ tende a zero no infinito. Assim, chegamos na seguinte solução :

$$f(z) = \exp\left(-h\int_0^z \phi_0(z)dz\right). \tag{2.50}$$

Logo, a solução geral será dada por [16]

$$\Psi_0 = \exp\left(-h\int \phi_0(z)dz\right)\psi_0 \tag{2.51}$$

onde ψ_0 é a solução de (2.47) com $m = 0$, esta é a função de onda para o modo zero fermiônico. Analisando essa solução, percebemos que o modo zero dos férmions está localizado na parede de domínio, ou seja, em $z = 0$, pois para z muito grande, $f(z)$ cai exponencialmente ao longo dessa dimensão. Podemos ver isto mais claramente se observarmos a equação (2.30).

O espinor $\psi_0(x)$ deve satisfazer à condição (2.45). Devido a quiralidade das partículas de massa nula ser bem definida, esta condição (2.45) não representa nenhuma restrição física.

A fim de determinar os possíveis valores de m usamos a equação (2.48), cada solução é interpretada como uma espécie de modos KK e se comportam conforme apresenta a figura (2.2.2) [16].

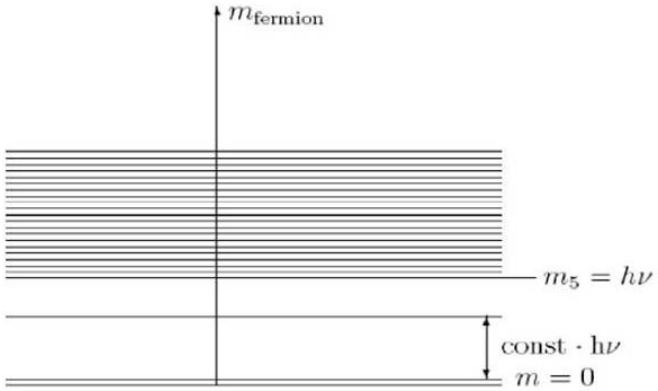

Figura 2.4: Espectro de massa dos férmions preso a brana. (Figura retirada da referência [49])

A principal característica desse espectro é que ele possui um salto entre o modo zero e os demais modos, sendo ele proporcional a $m_{(5)} = h\nu$. De modo que, quando ν for muito grande, os modos massivos estariam inacessíveis experimentalmente [15, 16], o que tornaria a teoria compatível com as observações.

2.2.3 Potencial gravitacional em dimensões extras não compactas

Visto que o campo gravitacional é o único campo que não está confinado à brana no modelo ADD, dedicaremos esta seção a entender os efeitos das dimensões extras sobre este campo [13, 14]. Começaremos por obter o Campo gravitacional Newtoniano gerado por um corpo massivo de simetria esférica no espaço usual de $(3+1)$ dimensões e depois generalizaremos para um espaço de dimensões extras. O campo gravitacional $\vec{g}(\vec{r})$ satisfaz à seguinte equação

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{g} = -4\pi G\rho, \tag{2.52}$$

onde G é a constante gravitacional e ρ a densidade de matéria.

Considere uma esfera $S^2(r)$ de raio r, na qual em seu centro temos um corpo de massa m, e uma bola $B^3(r)$ cujo contorno é a esfera $S^2(r)$. Integrando a equação (2.52) sobre a bola B^3, temos

$$\int_{B^3} \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{g}\right) dV = -4\pi G \int_{B^3} \rho dV. \tag{2.53}$$

Aplicando do lado esquerdo o Teorema de Gauss, obtemos:

$$gA = -4\pi Gm \tag{2.54}$$

onde m é a massa total do corpo, $g = |\vec{g}|$ e A é a área de $S^2(r)$. Assim, resolvendo a equação (2.54), vemos que sobre a superfície S^2 o campo gravitacional é

$$\vec{g}(\vec{r}) = -\frac{Gm}{r^2}\hat{r}, \tag{2.55}$$

onde usamos que a área da esfera é $A = 4\pi r^2$. Como o campo gravitacional é conservativo, o que matematicamente é expresso por $\vec{\nabla} \times \vec{g} = 0$, podemos escrevê-lo como sendo o gradiente do potencial escalar $\Phi(r)$ como segue

$$\vec{g}\,(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\Phi, \tag{2.56}$$

assim,

$$\Phi(r) = -\frac{Gm}{r}. \tag{2.57}$$

Vamos considerar agora este mesmo corpo de massa m em um espaço-tempo com n dimensões espaciais. Neste caso a esfera $S^2(r)$ passa a ser uma esfera $S^{n-1}(r)$ e a bola B^3, uma bola B^n. Com isso,a equação (2.52) em n-Dimensões é escrita como

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{g} = -4\pi G^{(n)}\rho \tag{2.58}$$

onde $G^{(n)}$ é a constante gravitacional em n-dimensões.

Repetindo os cálculos, vamos integrar a equação acima sobre a bola $B^{(n)}$ [23]

$$\int_{B^n} \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{g}\right) dV = -4\pi G^{(n)} \int_{B^n} \rho dV, \tag{2.59}$$

usando o Teorema da divergência, temos que

$$\int_{B^n} \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{g}\right) dV = \Phi_n \tag{2.60}$$

onde Φ_n é o fluxo de $\vec{g}$ através de $S^{n-1}(r)$, que pela equação (2.59) também é dado por

$$\Phi_n = -4\pi G^{(n)} m. \tag{2.61}$$

Por outro lado, o lado esquerdo de (2.59) resulta em:

$$\Phi_n = g(r) Vol\left(S^{n-1}\right) \tag{2.62}$$

onde $Vol\left(S^{n-1}\right)$ é o volume de uma esfera em um espaço de dimensões extras

$$Vol\left(S^{n-1}\right) = r^{n-1}\frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma\left(n/2\right)} \tag{2.63}$$

Segue, portanto, que

$$\vec{g}\left(\vec{r}\right) = \frac{-2\Gamma\left(n/2\right)}{\pi^{n/2-1}}\frac{G^{(n)}m}{r^{n-1}}\hat{r} \tag{2.64}$$

Observe que se escolhemos $n = 3$, isto é, três coordenadas espaciais, a equação anterior recai na equação (2.55), que mostra o campo gravitacional para a lei do inverso do quadrado de Newton. Quanto maior o número de dimensões, mais rápido cai o campo $\vec{g}$.

Usando a equação (2.56) obtemos a equação para o potencial gravitacional em um espaço de n dimensões gerado por um corpo de simetria esférica e massa m

$$\Phi(r) = -\frac{2\Gamma\left(n/2\right)}{\pi^{n/2-1}\left(n-2\right)}\frac{G^{(n)}m}{r^{n-2}}. \tag{2.65}$$

2.2.4 Potencial gravitacional com dimensão extra compacta

Determinada a forma do potencial gravitacional para um corpo de massa m em um universo com n dimensões não-compactas, agora iremos determinar o potencial para o caso em que $(n-3)$ dimensões extras são compactas [23]. Como ilustração, considere o universo $(n = 4)$ e com topologia de um hipercilindro.

Para entender como um determinado observador ver um corpo massivo se as dimensões extras são compactas, observe a figura (2.5). Nela temos um corpo de massa representado pela letra m e um observador O localizado em um certo ponto do universo. Como este tem topologia de um hipercilindro, as linhas de força que emergem de m dão voltas em torno do espaço até atingir o observador. Imagine, agora, que fazemos um corte abrindo o cilindro e deixando-o na forma de um plano, como mostra a figura (2.5(b)). Neste caso, o observador estaria sofrendo a ação de várias massas espalhadas ao longo da dimensão extras. Estas massas recebem o nome de massas topológicas pois surgem, apenas, devido a topologia do espaço. Sendo o comprimento do círculo igual a $2\pi l$, o que equivale ao comprimento da dimensão extra, temos que esta é a distância mínima entre as massas.

Na figura (2.5 (c)), consideramos que o observador se encontra a uma distância R muito maior que l. Assim, a distribuição praticamente uniforme de massa é contínua ao longo de z (a coordenada de dimensão extra). Em vista disso, podemos calcular o

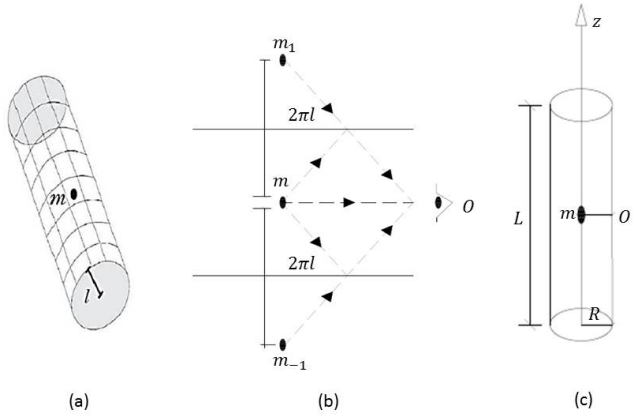

Figura 2.5: Corpo massivo visto por um observador em um universo de dimensões extras compactas. Na figura (a), a massa está localizada em um ponto do universo; na figura (b), abrimos o cilindro e o identificamos como um espaço aberto no qual encontramos as imagens topológicas; na figura (c), consideramos que o observador está muito distante das massas e as ver como uma distribuição continua.

potencial por meio da Lei de Gauss para esta distribuição de massas. Considerando a superfície gaussiana (SG) na figura (2.5 (c)), temos

$$\int \vec{g} \cdot d\vec{A} = -4\pi M_{int}. \tag{2.66}$$

No problema que estamos considerando, o espaço possui quatro dimensões espaciais, o que implica que SG é um "cilindro"com base esferoidal.

M_{int} representa a quantidade de massa topológica contida no interior da superfície gaussiana. Devido a separação mínima entre as cargas ser de $2\pi l$, temos que o número de massas contido na linha no interior da superfície é igual a $L/2\pi l$, onde L é a altura do cilindro. Logo,

$$M_{int} = \frac{L}{2\pi l} m; \tag{2.67}$$

Quanto a $\vec{g}$, temos que este será perpendicular a dimensão extra e dependerá apenas da coordenada radial R. Isto é oriundo da simetria da distribuição. Portanto,

$$g\,(R) \int dA = -4\pi G^{(5)} \frac{L}{2\pi l} m; \tag{2.68}$$

Com relação a área do cilindro, temos que esta é igual a $4\pi R^2 L$. Assim,

$$g\,(R) = \frac{-G^{(5)} m}{2\pi R^2 l} \hat{r}. \tag{2.69}$$

Disto segue que o potencial gravitacional será

$$\Phi(R) = -\left(\frac{G^{(5)}m}{2\pi l}\right)\frac{1}{R}. \tag{2.70}$$

Comparando com o potencial gravitacional no espaço usual, em $(3+1)$ dimensões, o qual é $\Phi(r) = G^{(4)}m/R$, identificamos $G^{(4)} = G^{(5)}/2\pi l$. Portanto, o potencial pode ser escrito em termos da constante gravitacional $G^{(4)}$

$$\Phi(R) = -\left(\frac{G^{(4)}m}{R}\right), \tag{2.71}$$

observe que ele reproduz o comportamento tridimensional para longas distâncias $R \gg 2\pi l$.

2.2.5 Gravitação e comprimento de Planck

A fim de encerrar nosso estudo sobre o modelo ADD iremos tratar, nesta seção,da relação entre a gravitação e o comprimento de Planck, finalizando com uma breve discussão acerca do problema da Hierarquia.

Muitas vezes é mais conveniente estudar a Gravitação usando o sistema de unidades de Planck, no qual as três unidades básicas, centímetros, grama e segundo, são substituídas por outras unidades de comprimento, massa e tempo, tal que as constantes fundamentais $(G, \hbar, c)$ tem valor numérico igual a um. Estas novas unidades podem ser escritas em função de $G, \hbar, c$ como:

$$l_p = \sqrt{\frac{G\hbar}{c^3}} = 1,61 \cdot 10^{-33} cm, \tag{2.72}$$

$$t_p = \frac{l_p}{c} = \sqrt{\frac{G\hbar}{c^5}} = 5,4 \cdot 10^{-44} s, \tag{2.73}$$

$$m_p = \sqrt{\frac{c\hbar}{G}} = 2,17 \cdot 10^{-5} g, \tag{2.74}$$

e são nomeadas por comprimento de Planck, tempo de Planck e massa de Planck, respectivamente. Acredita-se que estes valores representam a escala na qual os efeitos da gravitação quântica tornam-se importantes [23].

Recorde que

$$[c] = \frac{L}{T}$$
$$[\hbar] = \frac{ML^2}{T}$$

onde c e $\hbar$ são, respectivamente, a velocidade da luz e a contante de Planck dividida por 2π.

Podemos generalizar este resultado para o universo η-dimensional, onde η é o número total de dimensões. Com base em (2.72) e na análise dimensional o comprimento de Planck é definido por [23]

$$\left(l_p^{(\eta)}\right)^{\eta-2} = \frac{G^{(\eta)}\hbar}{c^3} = l_p^2 \frac{G^{(\eta)}}{G}. \tag{2.75}$$

onde $G^{(\eta)}$ é a constante gravitacional neste espaço, cuja unidade é :

$$\left[G^{(\eta)}\right] = L^{\eta-4}\left[G\right], \tag{2.76}$$

Para o caso especial no qual o universo tem 5 dimensões

$$\left[G^{(5)}\right] = L\left[G\right], \tag{2.77}$$

podemos ver que a constante gravitacional neste caso $\left[G^{(5)}\right]$ possui um fator de comprimento a mais do que no caso quadrimensional $[G]$.

Através da equação (2.75) definimos uma constante gravitacional $G^{(\eta)}$ fundamental no universo de dimensões superiores, ao estabelecer algum valor do comprimento de Planck neste universo $l_p^{(\eta)}$. Onde o valor do comprimento de Planck no espaço-tempo de $(3+1)$ dimensões seria um valor efetivo ($l_p = 10^{-33}cm$) e o valor fundamental seria medido no espaço ambiente $l_p^{(\eta)}$.

Já foi identificado da equação (2.70) a seguinte relação entre a constante gravitacional efetiva $G^{(4)}$ e $G^{(5)}$:

$$G^{(4)} = \frac{G^{(5)}}{2\pi l}, \tag{2.78}$$

onde $2\pi l$ é o comprimento da dimensão extra compacta, o qual representaremos por l_c. Generalizando este resultado para um número η qualquer de dimensões, temos:

$$\frac{G^{(\eta)}}{G^{(4)}} = \left(l_c\right)^{\eta-4}. \tag{2.79}$$

Estamos considerando aqui o caso no qual a topologia da dimensão extra é uma pequena circunferência de comprimento l_c.

Tendo encontrado a relação entre o comprimento de Planck e a constante gravitacional em uma dimensão qualquer, dada por (2.75), e determinado como as constantes gravitacionais são relacionadas à compactação, através de (2.79), iremos descobrir como o comprimento fundamental de Planck em uma teoria de dimensões extras com compactação é relacionado ao comprimento de Planck na teoria efetivamente

quadridimensional. Para tanto, substituímos a equação (2.79) em (2.75), o que resulta na seguinte relação:

$$l_c = l_p^{(\eta)} \left(\frac{l_p^{(\eta)}}{l_p} \right)^{\frac{2}{\eta-4}} . \tag{2.80}$$

Admitindo que o comprimento de Planck no espaço n-dimensional é da mesma ordem da escala eletro-faca, ou seja $\sim 10^{-18} cm$ e sabendo que no espaço usual ele mede $l_p = 10^{-33} cm$, vemos que a equação acima torna-se:

$$l_c = 10^{-18} \left(10^{15}\right)^{2/\eta-4} . \tag{2.81}$$

Considerando que o espaço possui 5 dimensões, isto é, uma única dimensão extra, temos que o tamanho dessa dimensão seria $l_c \sim 10^{12} cm \sim 10^7 km$, quase vinte vezes maior que a distância da Terra a Lua, o que fisicamente é inapropriado, pois se existisse uma dimensão extra desse tamanho ela já haveria sido verificada experimentalmente. O modelo ADD descarta então a ideia de um universo com apenas uma dimensão extra. Se ao invés disto considerarmos que o universo tem 6 dimensões, ou seja, duas dimensões extras, temos que $l_c \sim 0,01 mm$ [23].

A Lei da Gravitação Universal de Newton vem sendo testada nesta escala de $\sim 0,01 mm$ [39]. Para distâncias maiores que a escala de compactação temos que o mundo é aparentemente quadrimensional, e a lei do inverso do quadrado é satisfeita; para distâncias menores, os efeitos das dimensões extras seriam mais significativos modificando o comportamento da gravidade, de modo que esta lei mudará.

De fato, vimos na seção (2.2.4) que o potencial assintoticamente ($r \gg 2\pi l$) recupera o comportamento usual (ver equação 2.70) e (2.71)). No entanto, é possível mostrar que, numa topologia toroidal, os efeitos das dimensões extras compactas,sobre o potencial gravitacional, numa primeira aproximação é dado por [24]

$$V_{\delta+4} \simeq \frac{G_4 M}{r} \left(1 + 2 d_m e^{-r/R_m}\right) \tag{2.82}$$

onde δ representa o número de dimensões extras, d_m diz respeito à quantas dimensões compactas estão com o mesmo raio R_m, que é o valor do raio de compactação.

Com isso, desvios nas leis do inverso do quadrado podem ser indicações da existência de dimensões extras.

2.3 Os modelos Randall-Sundrum

Vimos até agora que uma forte motivação para o estudo de dimensões extras e para a busca destas dimensões no universo é o problema da hierarquia, o qual apresenta uma grande diferença existente entre a escala eletro-fraca e a escala de Planck. Modelos de brana vem se desenvolvendo neste cenário, a exemplo do modelo ADD e dos modelos Randall-Sundrum. Como já vimos, o ADD pretende explicar o problema da hierarquia justificando que a fraqueza da gravidade se dá pelo fato de suas linhas de campo se espalharem ao longo de dimensões extras compactas e que o tamanho da escala de compactação é grande comparado à escala de Planck usual. Contudo, embora este modelo elimine a hierarquia entre estas duas escalas, ele traz uma nova hierarquia entre a escala de compactação e a eletro-fraca. Em 1999, Lisa Randall e Raman Sundrum conceberam o modelo de Randall-Sundrum na tentativa de eliminar essa hierarquia [25, 26, 29].

Os modelos Randall-Sundrum são dois: O RSI [25] e o RSII [26]. O primeiro deles considera a existência de duas branas com tensões σ_1 e σ_2, admitindo que a dimensão extra é compacta. Por outro lado, o segundo modelo considera que uma das branas é colocada no infinito. Estes se distinguem do modelo ADD por mostrar que um universo de cinco dimensões não é incompatível com os dados experimentais.

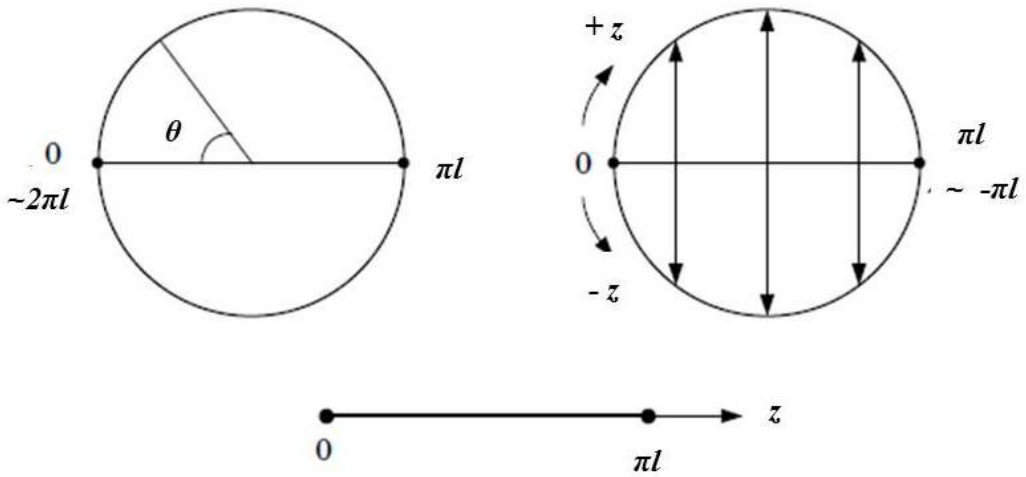

Figura 2.6: Topologia S^1/Z_2 (Figura retirada da referência [30]).

2.3.1 O modelo RSI

Configuração do modelo

O modelo Randall-Sundrum considera que o espaço-tempo tem $(4+1)$ dimensões, ou seja, existe uma dimensão extra e esta é compactificada em um círculo cujas metades superior e inferior são identificadas conforme a figura (2.6). Dito de outra forma, isto significa que a topologia de nosso espaço é do tipo S^1/Z_2, onde S^1 é a topologia da esfera unidimensional e Z_2 é o grupo multiplicativo $\{-1, 1\}$. Nesta topologia, o ponto com coordenada θ é identificado com o ponto de coordenada $-\theta$, o que significa que esta condição incorpora periodicidade à dimensão extra. Nesta configuração temos dois pontos fixos, $\theta = 0$ $(z = 0)$ e $\theta = \pi$ $(z = z_c = \pi l)$, onde z_c é o comprimento da dimensão extra e l é o raio de compactação. Em cada um desses pontos temos um mundo quadrimensional semelhante ao que vivemos, as chamadas 3-branas. Este modelo considera que as branas são fronteiras de um espaço-tempo de 5 dimensões dotado de constante cosmológica, conforme a figura (2.7)[25, 30].

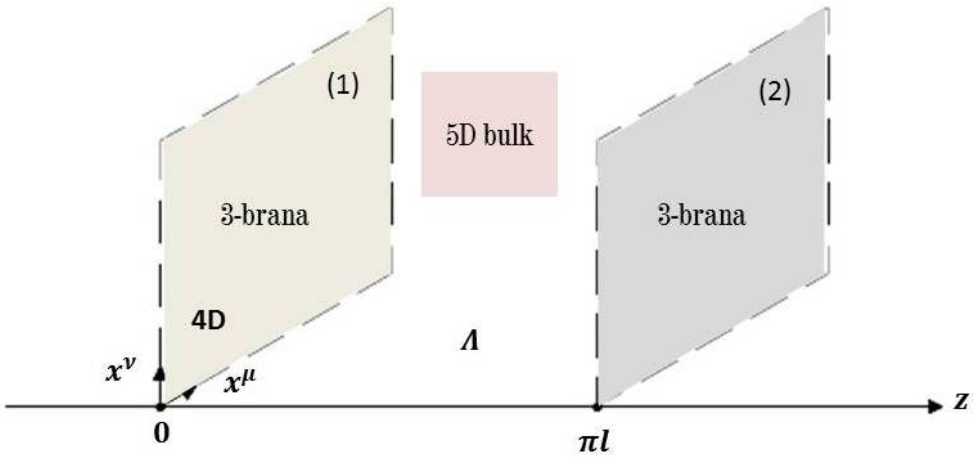

Figura 2.7: Configuração do modelo Randall-Sundrum.

Neste modelo, os campos estão presos a 3-brana localizada em $\theta = \pi$ e, semelhante ao modelo ADD, o único campo que se propaga ao longo da dimensão extra é o campo gravitacional.

A métrica do modelo

A fim de descrever matematicamente este modelo precisamos encontrar a métrica desta configuração. Estamos procurando soluções para as equações de Einstein em $5D$ que estejam de acordo com o mundo real: a métrica de fundo nas 3-branas deve preservar a invariância de Poincaré, ou seja, o vácuo no universo quadrimensional derivado dessa teoria deve parecer plano e estático. Com isso, podemos propor o seguinte Ansatz [25, 30, 31]:

$$ds^2 = e^{-2k|z|}\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu + dz^2, \tag{2.83}$$

onde $\eta_{\mu\nu} = diag\,(-1, 1, 1, 1)$ é a métrica de Minkowski e o termo exponencial é chamado fator de deformação $a\,(z) = \pm kz = k\,|z|$ (ver figura 2.8). O fator de deformação depende

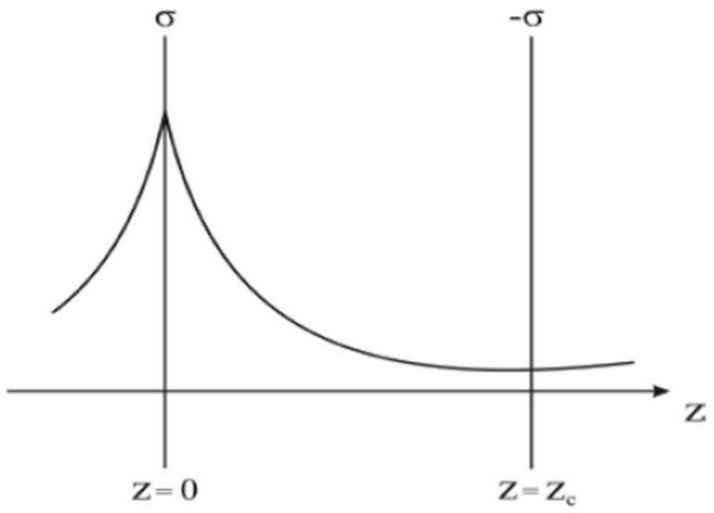

Figura 2.8: Comportamento do fator de deformação $a(z)$.

da dimensão extra. Por esse motivo a métrica não é fatorável, o que significa que não podemos escrevê-la como um produto da métrica de Minkowski com uma variedade da dimensão extra, assim como no modelo ADD. Calculamos o valor de k por meio das equações de Einstein. As quais, em cinco dimensões, são dadas por:

$$R_{AB} - \frac{1}{2}g_{AB}R = T_{AB}, \tag{2.84}$$

aqui, levamos em conta a constante cosmológica Λ do espaço $5D$. Logo, o tensor energia-momento terá contribuição de Λ e da tensão da brana $\mathcal{T}_{AB}$ [27]:

$$T_{AB} = \Lambda g_{AB} + 8\pi G^{(5)}\mathcal{T}_{AB}. \tag{2.85}$$

A constante cosmológica

Calculando o tensor de Einstein para a métrica (2.83) e admitindo que no intervalo $0 < z < z_c$ a função $a(z)$ é regular. Obtemos a seguinte condição [27]:

$$k^2 = -\frac{1}{6}\Lambda, \tag{2.86}$$

observe que esta equação será satisfeita apenas se ($\Lambda < 0$), o que nos mostra que a configuração do modelo Randall-sundrum exige uma constante cosmológica negativa, isto é, o espaço entre as duas branas é um trecho do espaço anti-de Sitter [25].

Em adição a isso, temos que a tensão da brana está ajustada à constante cosmológica de acordo com a seguinte expressão [27]

$$\sigma = \frac{-3}{32\pi^2 G_{(5)}^2}\Lambda. \tag{2.87}$$

Linearização da gravidade na brana e espectro de massa dos grávitons

Iremos discutir a linearização da equação de Einstein no cenário das branas, a fim de verificar as correções causadas pela dimensão extra. Partindo da métrica

$$ds^2 = \left[a\left(z\right)\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}\left(x,z\right)\right]dx^\mu dx^\nu - dz^2, \tag{2.88}$$

podemos calcular a massa dos grávitons para os primeiros estados excitados. Onde $h_{\mu\nu}$ é o termo de perturbação da métrica ($|h_{\mu\nu}| \ll 1$).

Linearizando as equações de Einstein somos capazes de obter as equações de campo para a perturbação $h_{\mu\nu}$, que no intervalo $0 < z < z_c$ é escrita como [27]

$$h''_{\sigma\nu} - 4k^2 h_{\sigma\nu} - a^{-2}\partial^\mu\partial_\mu h_{\sigma\nu} = 0, \tag{2.89}$$

tal que obedece às seguintes condições de contorno devido à presença da brana em $z = 0$ e $z = z_c$:

$$\left(h'_{\sigma\nu} + 4kh_{\sigma\nu}\right)\big|_{z=0} = 0 \tag{2.90}$$

$$\left(h'_{\sigma\nu} + 4kh_{\sigma\nu}\right)\big|_{z=z_c} = 0 \tag{2.91}$$

onde o símbolo $'$ representa a derivada com respeito a dimensão extra z.

Aplicando o método de separação de variáveis na equação (2.89), podemos escrever a solução como $h_{\sigma\nu}\left(x,z\right) = \Psi\left(z\right)\Phi_{\sigma\nu}\left(x\right)$ e obtemos as seguintes equações

$$\Psi''\left(z\right) - 4k^2\Psi\left(z\right) + \frac{C}{a^2}\Psi\left(z\right) = 0, \tag{2.92}$$

$$\Box\Phi_{\sigma\nu}\left(x\right) = -C\Phi_{\sigma\nu}\left(x\right), \tag{2.93}$$

a constante C pode assumir diferentes valores não negativos ($C = m^2$), o que nos permite escrever a equação (2.93) como

$$\Box\Phi_{\sigma\nu}(x) + m^2\Phi_{\sigma\nu}(x) = 0. \tag{2.94}$$

Note que a mesma é uma equação de Klein-Gordon para um campo $\Phi_{\sigma\nu}$, e a constante m^2 está relacionada à massa deste campo. Desta forma, $\Phi_{\sigma\nu}$ pode ser interpretado como o campo de um gráviton de massa m, onde para cada valor de m temos um campo $\Phi_{\sigma\nu}$ correspondendo a ele, o qual é conhecido como modo KK.

Por outro lado, em relação à equação (2.92), reescrita para $C = m^2$, podemos distinguir duas classes de soluções. Uma para $m = 0$:

$$\Psi_0 = C_0 e^{-kz} \tag{2.95}$$

conhecida como o modo zero. E outra para $m \neq 0$:

$$\Psi_m(z) = C_m \left[J_1\left(\frac{m}{k}\right) N_2\left(\frac{m}{k}e^{kz}\right) - N_1\left(\frac{m}{k}\right) J_2\left(\frac{m}{k}e^{kz}\right)\right], \tag{2.96}$$

onde C_m é uma constante de normalização e $J_1(z)$, $J_2(z)$, $N_1(z)$ e $N_2(z)$ são as funções de Bessel de primeira e segunda especies, respectivamente [28].

Impondo a condição de contorno para $z = z_c$ (2.91), obtemos

$$N_1\left(\frac{m}{k}\right) J_1\left(\frac{m}{k}e^{kz_c}\right) + J_1\left(\frac{m}{k}\right) N_1\left(\frac{m}{k}e^{kz_c}\right) = 0, \tag{2.97}$$

os valores permitidos para m são as raízes desta equação. Portanto, o conjunto de soluções determina o espectro de massa dos grávitons.

Analisando esta função graficamente (ver figura 2.9), admitindo que m é pequeno comparado a k, vemos que a mesma possui infinitas raízes. A primeira raiz corresponde a um gráviton sem massa $\left(\frac{m}{k}e^{kL} = 0\right)$; a segunda, ao primeiro modo massivo $\left(\frac{m}{k}e^{kL} \approx 3.8\right)$; e assim por diante. De modo que podemos escrever [27]

$$\frac{m}{k}e^{kz_c} \approx constante, \tag{2.98}$$

onde para os primeiros valores de m, temos

$$m \simeq ke^{-kz_c}. \tag{2.99}$$

Observe que existe um salto no espectro de massa de maneira semelhante ao modelo Kaluza-Klein. A massa dos grávitons é dada em função do comprimento da

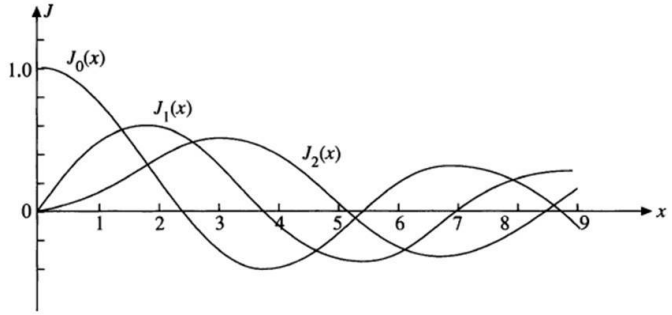

Figura 2.9: Funções de Bessel

dimensão extra. Portanto, se z_c é muito pequeno temos que a massa do primeiro modo é suficientemente grande ($m \sim k$), o que exige uma energia muito alta para que este estado seja excitado. Por este motivo, grávitons massivos estariam fora do alcance experimental. Um observador localizado na 3−brana não detecta estes grávitons em princípio, apenas os de modo zero.

2.3.2 O modelo RSII

Imagine, agora, que a brana de tensão negativa é deslocada para o infinito. Isto significa que a posição z_c se encontra a uma distância infinita da brana de tensão positiva. Implicando então em uma dimensão extra de tamanho infinito, ou seja, ela não é mais compacta.

Repetindo-se o procedimento de linearização da equação de Einstein para este novo cenário, observamos que as soluções reproduzem um comportamento conhecido no limite de campo fraco, o que torna o modelos de branas consistente [27].

Sabendo que a função de Green $G(x, z; x', z')$ representa a função potencial, estas correções para o potencial gravitacional serão determinadas pelo cálculo dessa função $G(x, z; x', z')$.

Vimos no modelo RSI que os valores permitidos de m caracterizavam um conjunto discreto de soluções, os quais eram interpretados como a massa dos grávitons e estavam relacionados ao tamanho da dimensão extra z_c pela equação $m \sim ke^{-kz_c}$. Tomando o limite do modelo RSII ($z_c \to \infty$), a condição de contorno (2.91) deixa de ser aplicada e consequentemente m pode assumir valores reais não negativos (o espectro torna-se contínuo). A existência de um modo zero normalizável implica em um comportamento

quadrimensional para o campo gravitacional acrescido de um termo de correção para longas distâncias. Deste modo, a função de Green será [27]:

$$G(x,z;x',z') = \frac{-k}{4\pi R}\left(1 - \frac{1}{\pi^2 k^2 R^2}\right). \tag{2.100}$$

Observe que a contribuição do modo KK com massa leva a uma correção para a função de Green e carrega efeitos da dimensão extra.

Capítulo 3

Vínculos sobre os parâmetros dos modelos de dimensões extras e outras modificações da gravidade

Tendo feito uma revisão bibliográfica acerca dos modelos de dimensões extras, iremos, neste momento, estudar algumas consequências fenomenológicas deste espaço extra-dimensional. No presente capítulo, apresentaremos vínculos experimentais impostos por diferentes sistemas físicos para o raio da dimensão extra e para a massa de Planck; assim como para os parâmetros de Yukawa α e λ. Para isto, concentraremos nossa atenção no modelo ADD, o qual, como foi visto, é um modelo de branas que considera um espaço de dimensões extras compactas e de larga escala. Nele, todos os campos do modelo padrão estão aprisionados na brana, com exceção da gravidade, que tem liberdade para se propagar ao longo das dimensões adicionais.

O fato da gravidade ser tão fraca quando comparada a outras forças conhecidas no universo (a força fraca, a força forte e a eletromagnética) traz um grande desafio para os que acreditam em uma teoria de unificação das forças [33]. Algumas teorias candidatas a solucionar este problema envolvem dimensões extras e foram estudadas no capítulo anterior. O modelo ADD, por exemplo, prevê que pode haver um desvio na Lei do inverso do quadrado da força gravitacional. Portanto, procurar por esse desvio pode lançar luz sobre essa nova teoria.

Além dos testes da Lei do inverso do quadrado, essa nova teoria pode também ser revelada em outros fenômenos físicos, como por exemplo: fenômenos astrofísicos,

relacionados à explosão de super novas e à produção de neutrinos, fenômenos cosmológicos, experimentos espectroscópicos e o problema do raio do próton. No presente capítulo, trazemos alguns vínculos sobre dimensões extras presentes nesses fenômenos.

Parametrização

A Lei da Gravitação Universal, introduzida por Newton, vem sendo testada desde o seu advento até os dias atuais. Como visto no capítulo anterior, testes de desvios da lei do inverso do quadrado podem ser um bom indicio de desvio do potencial gravitacional e consequentemente da existência de dimensões extras no universo. Estes desvios vem sendo buscados experimentalmente e os limites são impostos por meio de parametrizações. Consideramos aqui dois tipos de parametrizações: a parametrização de Yukawa e a parametrização por Lei de potência.

A parametrização por meio do potencial de Yukawa [34] é dado como segue

$$V(r) = V_N(r) + V_{YK}(r)$$

$$V(r) = -G\frac{m_1 m_2}{r} - G\frac{m_1 m_2}{r}\alpha e^{-r/\lambda}$$

$$V(r) = -G\frac{m_1 m_2}{r}\left(1 + \alpha e^{-r/\lambda}\right), \tag{3.1}$$

onde V_N é o potencial Newtoniano e V_{YK} é o potencial de Yukawa [1]; α é um parâmetro de força adimensional (considerando os modelos de dimensões extras o valor de α está relacionado com o número de dimensões extras) e λ é uma escala de comprimento associada a escala de compactificação da dimensão extra [33]. Os limites obtidos usando essa parametrização são dados por meio de um gráfico de $\alpha \times \lambda$.

Já a parametrização feita com base na correção da Lei de potência para o potencial Newtoniano, é dado por

$$V(r) = G\frac{m_1 m_2}{r}\alpha_N \left(\frac{r_0}{r}\right)^{N-1}, \tag{3.2}$$

onde α_N é uma constante adimensional, N é o expoente da Lei de potencias e r_0 corresponde a uma nova escala de comprimento associada com o novo processo. Em

[1] O potencial de Yukawa foi desenvolvido para aplicações em física de partículas e física atômica e vem da interação da troca de um bóson virtual com intensidade proporcional à constante de acoplamento ao quadrado, e alcance $\lambda = \hbar/m_b c$ igual ao comprimento de Compton do bóson de troca, sendo m_b a massa do bóson [35, 37]

relação as teorias de dimensões extras, $N-1$ estaria associado ao número de dimensões extras.

Nas seções seguintes, iremos examinar diferentes vínculos empíricos determinados por diversos experimentos sobre desvios da lei do inverso do quadrado usando as parametrizações de Yukawa e a da lei de potência.

3.1 Balança de torção: Teste da Lei do inverso do quadrado

Até alguns anos atrás, era amplamente aceito que a gravidade obedece à Lei do inverso do quadrado para distâncias maiores que o comprimento de Planck $l_P = \sqrt{G\hbar/c^3} = 1.6 \cdot 10^{-33} cm$. No entanto, a gravidade vinha sendo testada com boa precisão apenas para separações maiores que $1cm$ [36]. De uns anos para cá, após uma grande quantidade de especulações teóricas, é que a gravidade vem sendo testada abaixo de $1mm$ [32]. Pesquisas por desvios da gravidade Newtoniana são motivadas pela possibilidade de observações de dimensões extras compactas de grande escala. Tais pesquisas vem melhorando sua sensibilidade em várias ordens de grandeza ao longo dos anos. No entanto, esta é apenas umas das motivações causadas por esse desvio, existem extensões do modelo padrão da física de partículas que prevêem a existência de bósons adicionais que indiretamente poderiam interferir na lei da gravidade do inverso do quadrado em certos domínios [40, 41] e algumas teorias $F(R)$ também fazem previsões semelhantes [42]. Historicamente, a maioria dos experimentos sensíveis à gravidade foram executados com balanças de torção[2] e ainda é usado na atualidade [37].

Um dos grupos que se destacou nos experimentos com balança de torção foi o Eöt-Wash da universidade de Washington. Um de seus objetivos é buscar por sinais experimentais de gravidade quântica que violem o Princípio de equivalência de Einstein e/ou a Lei do inverso do quadrado de Newton [38].

A figura (3.1) mostra o limite existente entre $|\alpha|$ para testes do inverso do quadrado em intervalos inferiores a 1 cm, plotados em função de λ. Nela encontramos vínculos de alguns experimentos, dentre eles, dois realizados pelo grupo Eöt-Wash. No que segue, vamos compreender o funcionamento físico destes experimentos e comentar seus vínculos.

[2] A balança de torção é um aparelho capaz de medir torques muito fracos.

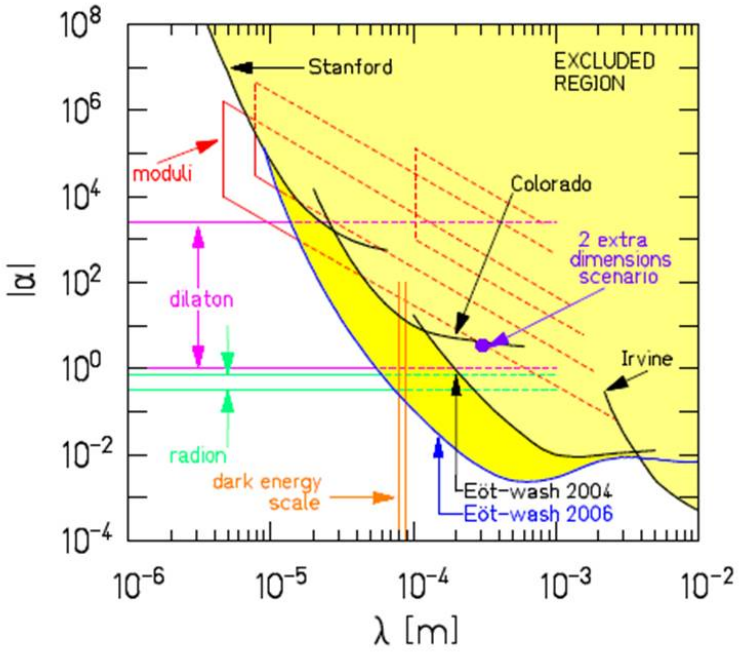

Figura 3.1: Limites às violações de Yukawa para a Lei da Gravitação do inverso do quadrado. As linhas rotuladas por Eöt-Wash 2004 [32], Eöt-Wash 2006 [39], Irvine [43], Colorado [44] e Stanford [45] mostram limites experimentais obtidos por esses respectivos grupos. As linhas mais claras mostram os resultados teóricos e a região sombreada é excluída experimentalmente (Figura retirada da referência [39]).

3.1.1 O Eöt-Wash 2004

O dispositivo experimental, utilizado no experimento Eöt-Wash de 2014, para medir a gravidade em curtas distâncias foi um pêndulo de torção de baixas frequências, conforme mostra a figura (3.2). Este dispositivo consistia de um anel de Alumínio (chamado de detector) com dez orifícios, igualmente espaçados, suspenso por uma fina fibra de Tungstênio e, logo abaixo, consistia de dois discos coaxiais, giratórios, de cobre, com dez orifícios semelhantes (chamados de atrator) e que atuavam como a massa atratora do dispositivo. Estes discos, por sua vez, proporcionavam a atração gravitacional no pêndulo, que gira num sentido e no outro dez vezes a cada volta. Os furos no disco inferior foram rodados azimutalmente por 18° em comparação com os furos superiores. Essa geometria reduz o sinal da gravidade newtoniana, mas tem pouco efeito sobre um sinal de curto alcance. Um espelho montado acima do anel, funcionando como autocolimador, media o torque do pêndulo através do brilho de um raio laser [32, 37, 38].

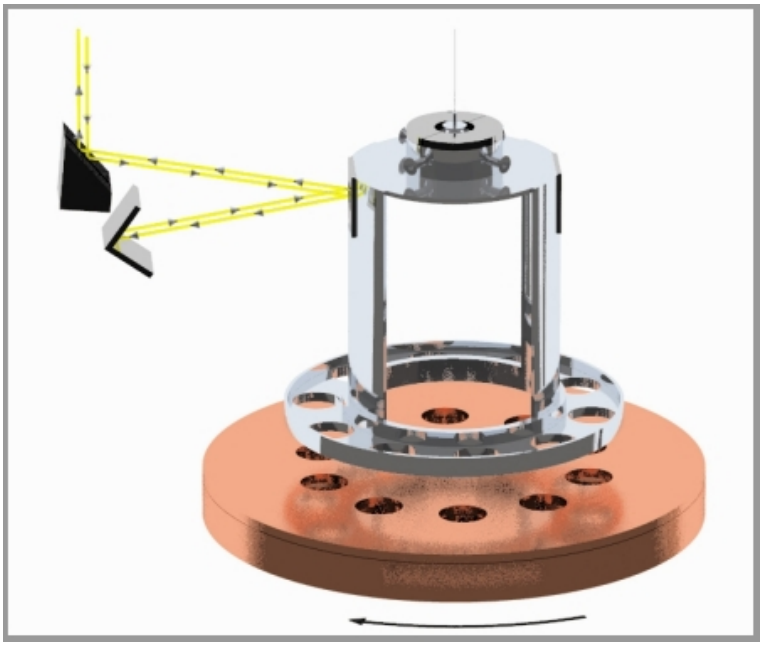

Figura 3.2: Desenho esquemático do experimento de curto alcance Eöt-Wash. Balança de torção criada pelo grupo Eöt-Wash da Universidade de Washington, composta por um pêndulo de torção e uma base atrativa giratória. A separação vertical entre a fonte e o detector não está em escala e a blindagem não é mostrada. (Figura retirada da referência [38])

Se a Lei do inverso do quadrado estiver correta, os orifícios inferiores produzem um torque no anel do pêndulo que diminui, em certa ordem de magnitude, a torção induzida pelo disco superior. Entretanto, se a força gravitacional mudar para curtas distâncias, o torque induzido pelo disco inferior não cancelará a torção do disco superior e veremos um sinal de torção.

O potencial para este experimento foi parametrizado por um potencial do tipo Yukawa. E a melhor sensibilidade alcançada no experimento foi para $\lambda \approx 1.5$mm, restringindo $\mid \alpha \mid < 0.0079$ com 95% de confiança. Ele também restringiu o raio da dimensão extra como sendo $R < 160\mu m$. No caso de duas dimensões extras, foi imposto um limite inferior para a massa de unificação: $M \geqslant 1.7\text{TeV/c}^2$. Esta relação entre os parâmetros de Yukawa e o raio da dimensão extra é feita por meio da equação (2.82).

3.1.2 O Eöt-Wash 2006

Este segundo experimento realizado pelo grupo Eöt-Wash, assim como o primeiro, usou uma balança de torção de baixa frequência, porém, o aparato experimental possuía algumas evoluções significativas e isso permitiu realizar um experimento sensível a uma escala de comprimento ainda menor; os corpos de teste foram 42 orifícios feitos no detector e na fonte (veja a figura 3.3), o tamanho relativo dos orifícios foi otimizado de modo que aumentasse o torque da interação de curto alcance e diminuísse o torque Newtoniano. Do mesmo modo que no experimento de 2004, este torque era medido por um autocolimador. O desempenho do autocolimador também foi melhorado [37, 38, 39]. Assim como no Eöt-

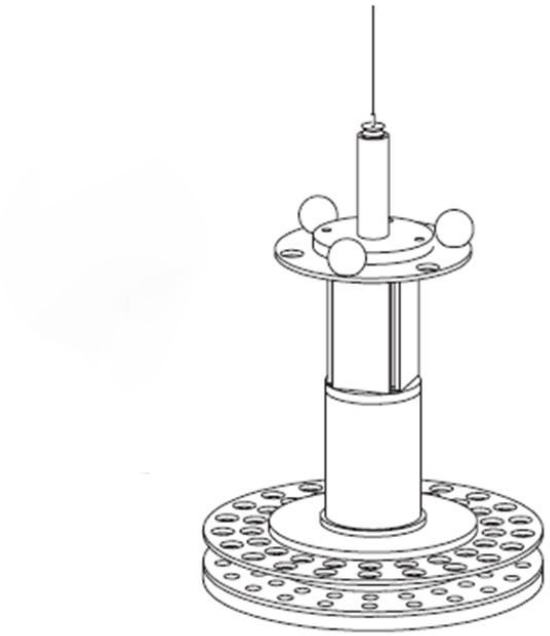

Figura 3.3: Desenho do segundo experimento realizado pelo grupo Eöt-Wash. Os quatro espelho planos retangulares, abaixo das três esferas, foram usados para o monitoramento da torção. (Figura 1 da referência [39])

Wash 2004, um disco foi colocado inferiormente ao primeiro disco para cancelar a interação gravitacional Newtoniana. Esse disco quase cancelaria o torque se a Lei do inverso do quadrado fosse mantida. Novamente, seria sensível a uma interação parametrizada por um potencial tipo Yukawa, desde que λ fosse menor que a espessura da fonte. Devido a quantidade de buracos, o cancelamento do efeito gravitacional Newtoniano foi alcançado em um grau mais alto.

O grupo Eöt-Wash realizou três experimentos variando a espessura do disco compensador, o ângulo de suspensão e a frequência de rotação. E seu melhor resultado foi alcançado para $\lambda \approx 600\mu m$, restringindo $\mid \alpha \mid < 0.0037$ para um nível de confiança de 95%. Eles restringiram ainda mais o vínculo sobre a escala de dimensão extra, observe a figura (3.1), para $\mid \alpha \mid = 1$ temos $\lambda < 56\mu m$. Para este resultado, o tamanho máximo da escala de compactação da dimensão extra foi $R < 44\mu m$. No caso de duas dimensões extras do mesmo tamanho, um limite inferior de massa de unificação foi imposto: $M \geqslant 3.2\mathrm{TeV/c^2}$.

3.2 Vínculos do Efeito Casimir

Considerem o seguinte experimento: uma câmara perfeitamente selada, no formato de uma cavidade cúbica, na qual o vácuo foi estabelecido. Dentro dela temos duas placas metálicas quadradas condutoras, porém eletricamente neutras, as quais estão dispostas paralelamente entre si e separadas por uma distância da ordem de micrômetros. Um medidor de força muito sensível é colocado dentro da câmara capaz de medir forças pequenas entre as placas. Interferências externas são neutralizadas e os pesos das placas estão convenientemente cancelados por meio de suportes. Do ponto de vista da física clássica, espera-se, portanto, que este medidor não detecte a presença de nenhuma força elétrica, visto que as placas são eletricamente neutras. No entanto, as medidas indicam a existência de uma força atrativa entre as placas. Tal efeito recebe o nome de Efeito Casimir em homenagem ao físico holandês que o descobriu em 1948, Hendrik Brugt Gerhard Casimir [78, 79, 80]. Ele mostrou que a força de atração destas placas deveria ser inversamente proporcional a quarta potência da distância que as separam (a)

$$F = -A\frac{\pi^2 \hbar c}{240a^4} \tag{3.3}$$

onde A é a área de cada placa. Mas com justificar esse efeito?

No domínio clássico, a palavra vácuo é relacionada à completa ausência de matéria. No entanto, quanticamente, o conceito de vácuo sofre modificações. Com o advento da mecânica quântica surge um conceito chamado energia do ponto zero, o qual se refere a uma energia decorrente de flutuações quânticas que não podem ser eliminadas por nenhum processo físico. Esta energia está relacionada com a mínima energia do oscilador harmônico quântico que não é nula, mas $E = h\nu/2$. E o efeito Casimir é uma

consequência dessa energia do ponto zero, isto é, é consequência de oscilações quânticas eletromagnéticas.

Considerando que o espaço inteiro é vácuo, temos que o campo eletromagnético pode ter qualquer valor de frequência de oscilação variando de zero à infinito. Contudo, confinando o campo eletromagnético em uma região espacial limitada, temos que este espectro de frequência torna-se discreto devido às condições de contorno impostas. O efeito Casimir resulta desta alteração do espectro de frequências de vibração do campo eletromagnético, em razão da presença de placas metálicas, por exemplo. Temos que esta alteração ocorre mesmo quando as condições de contorno são impostas no vácuo, devido a energia do ponto zero.

Calculando a energia do vácuo sem as placas metálicas obtemos um valor infinito, do mesmo modo acontece se calculamos a energia do vácuo entre as placas. Entretanto, a diferença de energia entre as duas situações é um valor finito e com significado físico (para chegar a este resultado aplica-se um procedimento de renormalização). Essa diferença finita de energia pode ser interpretada como a energia necessária para se introduzir as placas no vácuo. Temos, portanto, que o efeito Casimir é uma manifestação macroscópica das propriedades microscópicas do vácuo quântico. Dito de outra maneira, é um efeito puramente quântico resultante da modificação das oscilações de ponto zero do campo eletromagnético, devido a presença de fronteiras materiais, quando comparada com o espaço sem fronteiras [78, 79].

Este experimento, assim como os outros aqui estudados, também impõe vínculos para a modificação da gravidade padrão. Diferentemente dos experimentos de balança de torção, que obtêm $\alpha < 1$, as sensibilidades experimentais nessa região estão muito aquém da detecção da força gravitacional Newtoniana (ver gráfico 5.2). Desta forma, todos os vínculos foram obtidos como limites superiores à força gravitacional. O efeito Casimir tem estimulado muitos experimentos e embora nem todos busquem por vínculos para testes gravitacionais, eles impõem vínculos para os parâmetros de Yukawa [56]. Vejamos alguns destes vínculos na tabela 3.1.

Tabela 3.1: Limite superior para os parâmetros de Yukawa obtidos por meio de experimentos do efeito Casimir (vínculos retirados da referência [56, 57])

Experimento	**Vínculo para os parâmetros α e λ**
Lamoreaux (1997)	$\alpha < 2 \times 10^{8}$ para $\lambda = 5\mu$m
Sushkov et. al (2001)	$\alpha < 2 \times 10^{9}$ para $\lambda = 1\mu$m
Masuda (2009)	$\alpha < 3 \times 10^{10}$ para $\lambda = 1\mu$m
Decca et al (2005, 2007)	$\alpha < 3 \times 10^{13}$ para $\lambda = 100$nm
Harris et al 2000	$\alpha < 3 \times 10^{19}$ para $\lambda = 10$nm
Bezerra et al (2011)	$\alpha < 2.8565 \times 10^{25}$ para $\lambda = 10$nm,
	$\alpha < 1.470 \times 10^{14}$ para $\lambda = 100$nm
	e $\alpha < 1.1212 \times 10^{11}$ para $\lambda = 1000$nm

3.3 Vínculos de Colisores de Partículas

Colisores de partículas são uma espécie de aceleradores que envolvem feixes de partículas de alta energia, os quais pretendem testar os limites do nosso conhecimento sobre a natureza e podem levar a descoberta de nova física que envolveria desde a detecção de partículas super-simétricas até traços de dimensões extras [77]. Os vínculos que trazemos nesta seção são oriundos do grande colisor de hadrons, ou do inglês the Large Hadron Collider (LHC), que é um colisor de próton-próton capaz de estudar efetivamente a física na escala TeV.

Consideramos, novamente, o cenário do modelo ADD, no qual a gravidade se propaga ao longo das dimensões extras e define uma teoria efetiva válida abaixo da escala fundamental M_D [13, 56]. Em processos de colisão de hádrons a produção dos grávitons com massa (os modos KK) ocorreriam apenas se $M_D \sim$ TeV. Nos coletores de hádrons, os modos KK do gráviton escaparia da detecção direta, mas como seriam produzidos em associação com um fóton energético ou um jato, sua detecção indireta se daria por uma assinatura de monofóton ou monojato no estado final com energia faltante [77]. Essa energia faltante corresponderia a energia emitida na forma de modos KK do grávitons que pode ser estimada no modelo ADD como faremos a seguir.

Os modos massivos de Kaluza-Klein tem uma massa $|n|/R$, portanto a separação

entre os modos adjacentes é [56]

$$\Delta m \sim \frac{1}{R} = M_D \left(\frac{M_D}{\bar{M}_P}\right)^{2/\delta} \sim \left(\frac{M_D}{\text{Tev}}\right)^{\frac{\delta+2}{2}} 10^{\frac{12\delta-31}{\delta}}\text{eV}, \tag{3.4}$$

usamos a relação entre o raio de compactificação R e a massa efetiva de Planck da teoria D-dimensional, a qual é dada por

$$\bar{M}_P \equiv \sqrt{V_\delta}\bar{M}_D^{1+\delta/2} = (2\pi R)^{\delta/2}\,\bar{M}_D^{1+\delta/2} = R^{\delta/2}M_D^{1+\delta/2}, \tag{3.5}$$

onde $\bar{M}_P = M_P/\sqrt{8\pi} = 2.4 \cdot 10^{18}\text{GeV}$ é a massa de Planck reduzida [56].

Para grandes valores de δ, Δm seria grande, e consequentemente apenas um pequeno número de modos KK seriam produzidos. No entanto, para $\delta \leq 6$, Δm seria bem menor do que a resolução experimental do LHC. Neste caso, esperamos uma grande quantidade de grávitons sendo produzida em processos de colisão de altas energias.

Como estamos tratando de aplicações experimentais, se torna mais conveniente expressar a taxa de produção de grávitons em função da seção de choque inclusiva. O número de modos dN com momento entre $|n|$ e $|n| + dn$ é dado por [56]

$$dN = S_{\delta-1} \mid n \mid^{\delta-1} dn \tag{3.6}$$

onde

$$S_{\delta-1} = \frac{2\pi^{\delta/2}}{\Gamma(\delta/2)} \tag{3.7}$$

é a superfície de uma $\delta-$esfera de raio unitário. Usando (3.5) e fazendo a seguinte mudança de variável $m = |n|/R$, podemos escrever (3.6) como [56]

$$dN = S_{\delta-1}\frac{\bar{M}_P^2}{M_D^{2+\delta}} m^{\delta-1} dm \tag{3.8}$$

com isso, expressamos a seção de choque diferencial para a produção de grávitons da seguinte forma [56]

$$\frac{d^2\sigma}{dtdm} = S_{\delta-1}\frac{\bar{M}_P^2}{M_D^{2+\delta}} m^{\delta-1}\frac{d\sigma_m}{dt} \tag{3.9}$$

onde $d\sigma_m/dt$ é a seção de choque diferencial para a produção de um único gráviton KK de massa m.

As seções de choque para os processos parciais mais relevantes na produção de gráviton mais jato em colisores de hadrons são

$$\frac{d\sigma_m}{dt}\left(q\bar{q} \to gG\right) = \frac{\alpha_s}{36}\frac{1}{s\bar{M}_P^2} F_1\left(\frac{t}{s}, \frac{m^2}{s}\right), \tag{3.10}$$

$$\frac{d\sigma_m}{dt}(qg \to qG) = \frac{\alpha_s}{96}\frac{1}{s\bar{M}_P^2}F_2\left(\frac{t}{s}, \frac{m^2}{s}\right), \tag{3.11}$$

$$\frac{d\sigma_m}{dt}(gg \to gG) = \frac{\alpha_s}{16}\frac{1}{s\bar{M}_P^2}F_3\left(\frac{t}{s}, \frac{m^2}{s}\right) \tag{3.12}$$

onde $t = (p_q - p_G)^2$ é a variável Mandlstam, as funções F_1, F_2 e F_3 são polinômios dados no apêndice da referência [56], α_s é a constante de acoplamento da interação forte e s é a energia do centro de massa.

O principal sinal experimental da produção de grávitons no LHC é o proveniente do processo $pp \to jet + E$, vindo do subprocesso $qg \to qG$, cuja seção de choque é dada por (3.11).

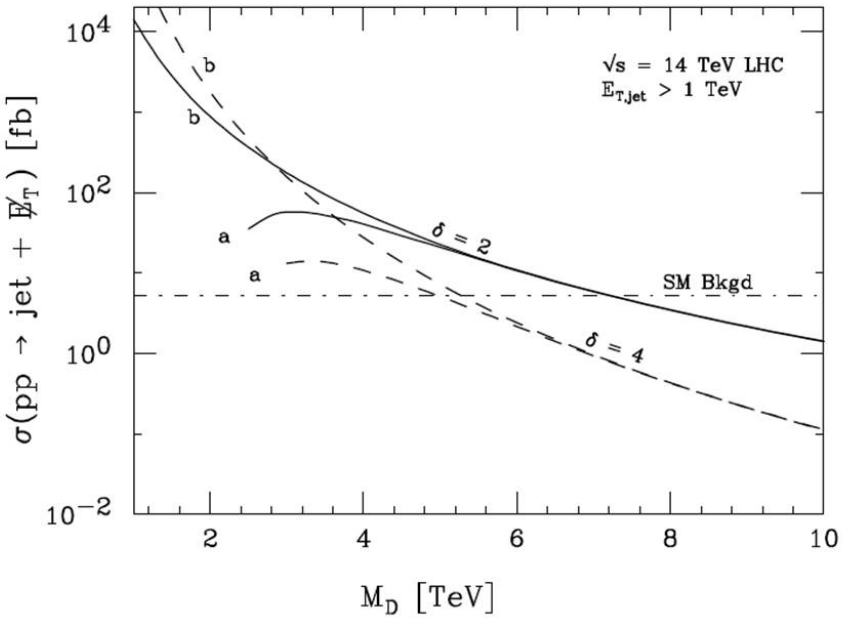

Figura 3.4: Gráfico da seção transversal total em função de M_D para todo valor de $E_{T,jet} > 1$TeV com o requerimento que $|\eta_{jet}| < 3$. A linha horizontal pontilhada representa o background do modelo padrão (Figura 4 da referência [58]).

Na figura (3.4) temos a seção de choque total em função de M_D para um $E_{jet}^{min} = 1$TeV, nela temos duas curvas para cada valor de δ. A curva indicada por a é o resultado de zerar a seção de choque na equação (3.11) sempre que $\sqrt{s} > M_D$, ou seja, que a energia efetiva do centro de massa na colisão seja maior que a escala fundamental. Enquanto que a segunda curva, indicada por b, permite que as seções cresçam indefinidamente com $\sqrt{s}$. Na região em que as curvas coincidem, a contribuição

dominante vem de momentos menores que M_D e a teoria efetiva é totalmente aplicável. Por outro lado, quando elas se separam a contribuição ultravioleta torna-se importante e essa análise perde a validade.

Para $\delta \geq 5$ não há região de M_D na qual podemos confiar simultaneamente na teoria de perturbação e obter um sinal visível no LHC [56]. Porém, para $\delta < 5$ o LHC sondará M_D num intervalo de energia dentro da escala TeV num regime perturbativo e de maneira confiável.

Os vínculos recentes obtidos pelo processo $pp \rightarrow jato + E_T$ estão expostos na tabela, para um certo valor $\sqrt{s} = 8$ TeV (3.2).

Tabela 3.2: Limite inferior sobre a escala fundamental de Planck (M_D) para $\sqrt{s} = 8$ TeV [81, 82]

Número de dimensões extras (δ)	$M_D >$
2	5.61TeV
3	4.38 TeV
4	3.86TeV
5	3.55TeV
6	3.26 TeV

Observe que os vínculos sobre M_D decrescem com o aumento da quantidade de dimensões do espaço. Para $\delta > 4$ os vínculos são mais fortes do que os encontrados pelo teste da lei do inverso do quadrado [62].

3.4 Vínculos Espectroscópicos

Os vínculos espectroscópicos discutidos nesta seção foram inspirados pela possibilidade de procurar por sinais de dimensões extras na espectroscopia de átomos de hidrogênio [49]. Veremos de que maneira estes vínculos foram obtidos.

De acordo com o modelo ADD, espera-se que a gravidade seja modificada para distâncias inferiores a l, onde l pode ter dois significados a depender da característica das dimensões extras: ele pode significar o tamanho desta dimensão adicional, para dimensões extras compactas, ou estar relacionado ao raio de curvatura, para as não-compactas. Como

visto no capítulo anterior, no limite de campo fraco o campo gravitacional de um corpo massivo se comporta conforme as seguintes expressões

$$V = \begin{cases} -G_{(4)}\frac{m}{r}, & \text{para} \quad r \gg l \\ -G_{(4+\delta)}\frac{m}{r^{\delta+1}}, & \text{para} \quad r \ll l. \end{cases} \tag{3.13}$$

onde $G_{(4+\delta)} \sim G_{(4)} l^{\delta}$ é a constante de Newton no espaço de dimensões extras. A relação entre $G_{(4+\delta)}$ e $G_{(4)}$ depende do volume do espaço extra-dimensional.

A interação gravitacional Newtoniana é muito pequena e pode ser desprezada em sistemas atômicos. No entanto, na presença de dimensões extras, no domínio de curtas distâncias $r < l$, a energia potencial aumenta por um fator de ordem de $(l/r)^{\delta}$. Assim, esta energia poderia causar modificações no espectro de energia do hidrogênio. Portanto, este pode ser um caminho para obter-se vínculos sobre modelos de dimensões extras usando medidas de transições atômicas.

Podemos calcular o desvio que a contribuição gravitacional causa na energia de um determinado estado ψ do átomo de hidrogênio. Para isso, admitimos que a energia potencial causa uma pertubação na hamiltoniana do átomo, a qual é proporcional à média $\left\langle r^{-(\delta+1)} \right\rangle$, e essa média causa uma divergência para os estados S quando $\delta \geq 2$. Alguns trabalhos trazem soluções para essa divergência estabelecendo-se um raio de corte [50, 51, 52, 53, 54]. Outros consideram os desvios que a energia potencial gravitacional fornece aos níveis de energia molecular [55], porém essa abordagem produz vínculos muito fracos. Os vínculos que mostraremos na presente seção foram encontrados em [49]. Essa referência, objetivando regularizar essas divergências, considera a subestrutura da brana para o caso de branas espessas.

Quando estudamos, na seção 2.2.1, a localização da matéria na brana, vimos que o modo zero do campo espinorial é dado por

$$\Psi_0(x,z) = \exp\left(-h\int \phi_0(z)dz\right)\psi_0(x). \tag{3.14}$$

Generalizando este resultado acima para um espaço D-dimensional, consideramos que a função de onda das partículas localizadas podem ser escritas como $\Psi(x,z) = \chi(z)\psi(x)$, onde $\chi(z)$ é uma função do espaço suplementar e $\psi(x)$ é um espinor em $4D$. Assumimos, por questão de simplicidade, que a função $\chi(z)$ é uma gaussiana [49]

$$\chi(z) = \left(\frac{2}{\pi\sigma^2}\right)^{\delta/4} \exp\left(-\sum_{i=1}^{\delta}\frac{z_i^2}{\sigma^2}\right), \tag{3.15}$$

que está localizada em torno do centro da brana com desvio padrão σ. A largura (σ) da função de onda deve satisfazer a condição $\sigma < \epsilon < l$, onde ϵ é a espessura da brana e deve ser menor do que 10^{-19}m de acordo com os limites experimentais [13].

Visto que o átomo se localiza em uma brana espessa, precisamos entender como se dá a interação gravitacional entre o elétron e o próton neste cenário. Considerando que o espaço extra dimensional tem uma topologia de um toro $\delta-$dimensional de tamanho $l = 2\pi R$, o potencial gravitacional de uma massa m no ponto $R = (x, z)$ do espaço ambiente é

$$V(R) = -\frac{G_{4+\delta}m}{R^{\delta+1}} - \sum_i \frac{G_{4+\delta}m}{\mid R - R'_i \mid^{\delta+1}}, \tag{3.16}$$

onde m é uma massa puntiforme, $\vec{R'}$ é o vetor posição das massas topológicas (dado por $R'_i = (0, 0, 0, lk_1, ..., lk_\delta)$ e $[k_1, k_2, ..., k_\delta]$ são inteiros). Com esta forma o potencial $V(R)$ é periódico em relação as dimensões extras. Este potencial é uma solução da equação de Laplace em $(3 + \delta)$ dimensões com condições de contorno apropriadas. Para $\mid x \mid \gg l$, $V(R)$ reproduz o potencial Newtoniano.

Vamos estudar aqui apenas a contribuição do primeiro termo de (3.16), porque, como mostrado em [49] ele dá a maior contribuição no caso de estados do tipo S.

Considerando que a massa do próton m_p é distribuída de maneira uniforme no núcleo, temos que o próton produz o seguinte potencial [49]

$$\phi(R) = -G_{4+\delta} \int ... \int \frac{\rho(R')}{\mid R - R' \mid^{\delta+1}} d^{3+\delta}R' \tag{3.17}$$

onde $\rho =\mid \Psi_P \mid^2 m_p$ é a densidade de massa e $\Psi_P(x, z) = \chi(z)\psi_p(x)$ é a função de onda do próton no espaço de dimensão maior. Sendo Ψ_P constante no interior do núcleo e zero na região externa.

O desvio na energia de um determinado estado atômico, ou seja, a contribuição gravitacional aos níveis de energia, a partir da teoria de pertubação será dado por [49]:

$$\delta E^g_\psi = \int ... \int \mid \psi_e \mid^2 m_e\phi(R)d^{3+\delta}R, \tag{3.18}$$

onde $H_G = m_e\phi$ é a hamiltoniana que governa a interação gravitacional entre elétron e próton no cenário clássico e $\psi_e(x, z) = \chi(z)\psi_e(x)$ é a função de onda do elétron; considera-se que H_G é um termo pequeno. Desta forma, a interação gravitacional entre elétron e próton, modificada pelo espaço de dimensões extras, altera o espectro de energia do átomo de hidrogênio. Sendo,

$$\psi_{1S} = \frac{1}{\sqrt{\pi a_0^3}} e^{-r/a_0} \tag{3.19}$$

e

$$\psi_{2S} = \frac{1}{\sqrt{8\pi a_0^3}}\left(1 - \frac{r}{2a_0}\right)e^{-r/2a_0} \tag{3.20}$$

as funções de onda dos estados $1S$ e $2S$, respectivamente, a contribuição gravitacional da transição é calculada [49]

$$\mid \delta E^g_{2S} - \delta E^g_{1S} \mid = \frac{7\gamma_\delta}{8\pi}\frac{G_{4+\delta} m_p m_e}{a_0^3 \sigma^{\delta-2}}\left[1 - \frac{3}{2}\frac{r_p}{a_0} + \mathcal{O}\left(\frac{r_p^2}{a_0^2}\right)\right]\left[1 + \mathcal{O}\left(\frac{\sigma}{r_p}\right)\right], \tag{3.21}$$

onde γ_δ é o coeficiente que depende do numero de dimensões extras, por exemplo: $\gamma_3 = 2\pi^{3/2}$, $\gamma_4 = 4\pi/3$, $\gamma_5 = \pi^{3/2}/3$ e $\gamma_6 = 4\pi/15$.

Calculando o desvio na frequência da transição $2S-1S$, $\Delta\nu_G = |\delta E_{2S} - \delta E_{1S}|/h$ e comparando com os dados experimentais, os vínculos podem ser obtidos [49]. O valor dessa frequência experimental no átomo de hidrogênio é igual a $f_{exp} = 246606143187035(10)\mathrm{H}_z$. É natural que o efeito proveniente das dimensões extras seja menor que a soma quadrática dos erros experimental e teórico ($\delta\nu_{\text{teórico}} = 32kH_z$), isto é

$$\Delta\nu_G < \sqrt{\delta\nu^2_{\text{teórico}} + \delta\nu^2_{\text{exp}}} \tag{3.22}$$

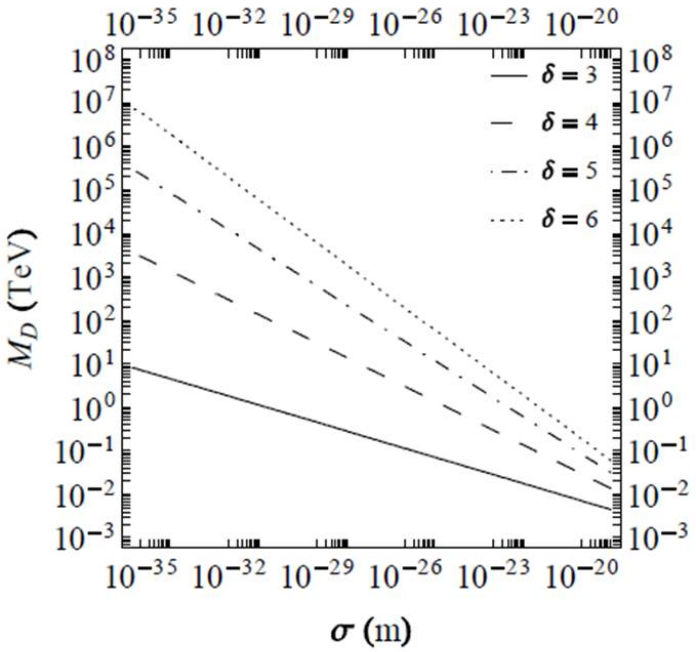

Figura 3.5: Vínculos inferiores sobre a massa de Planck M_D em função de σ [49].

No gráfico (3.5) temos os limites inferiores para a massa de Planck M_D em função de σ com base na análise numérica de (3.22). Esta análise mostra que os vínculos para

branas finas são mais restritivos. Observe que o gráfico não mostra os resultados para $\delta = 1$ e $\delta = 2$, isto porque os vínculos obtidos para esses valores de δ são muito fracos. Para a espessura da brana $\epsilon < 10^{-19}$m (branas realísticas) a principal contribuição da energia potencial gravitacional para $\delta \geqslant 3$ vem da integral no interior do núcleo.

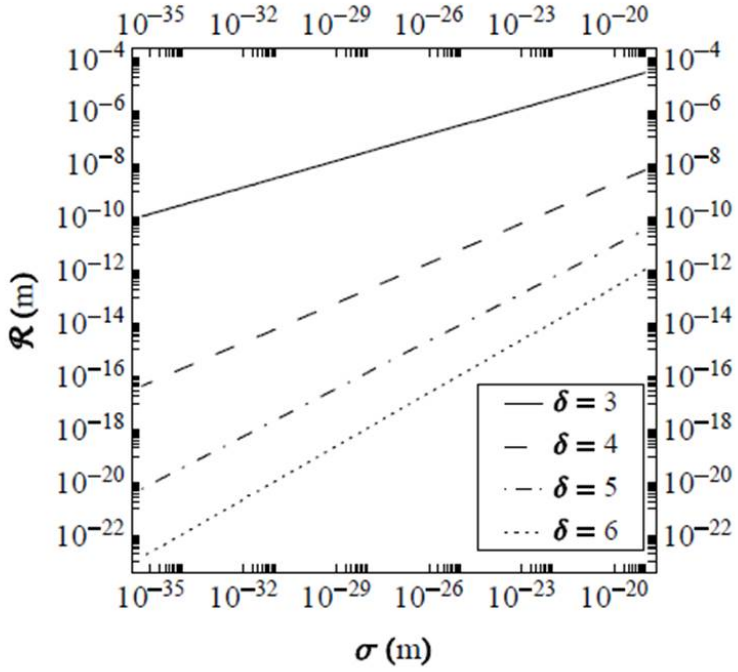

Figura 3.6: Vínculos superiores sobre o raio de dimensões extras R em função de σ [49]

Uma vez determinado os vínculos para M_D, é possível examinar os limites experimentais para R, isso é feito na figura (3.6). Vemos que para uma longa faixa de σ temos vínculos mais fortes do que os encontrados pelo teste da Lei do inverso do quadrado. A área abaixo das curvas representa a região excluída. Para obter este limite usamos as seguintes relações entre a massa de Planck M_D e a constante gravitacional no espaço de dimensão extra $G_{4+\delta}$, e entre a massa de Planck e o raio da dimensão extra R, respectivamente [14, 56]

$$M_{4+\delta}^{2+\delta} \equiv M_D^{2+\delta} = \Omega_\delta \left(\frac{\hbar}{c}\right)^\delta \frac{\hbar c}{G_{4+\delta}} \tag{3.23}$$

e

$$G_4^{-1} = 8\pi R^\delta M_D^{2+\delta} \left(\frac{\hbar}{c}\right)^\delta \hbar c \tag{3.24}$$

onde $\Omega_\delta = 2\pi^\delta \Gamma\left(\frac{\delta+3}{2}\right) / (\delta+2)\, 2\pi^{\frac{\delta+3}{2}}$.

3.5 O problema do raio do próton

O próton, apesar de ser um dos principais componentes do universo visível, possui características ainda não bem compreendidas, a exemplo de seu raio de carga [59]. A estrutura do próton é importante pois a probabilidade de um elétron no estado S ser encontrado dentro do próton é diferente de zero. Desta forma, as frequências de transição medidas dependem do tamanho do próton [60].

O valor do raio de carga do próton, obtido em 2010, dado pelo Comitê de dados para a ciência e tecnologia (CODATA) é $r_p = 0.8775(51)$fm [64]. Este valor é extraído principalmente da espectroscopia de átomos de hidrogênio eletrônico [65, 66, 67, 68, 69, 70] e de medidas da seção de choque em experimentos de espalhamento de elétron-próton [71, 72, 73].

A espectroscopia do hidrogênio muônico [3] fornece um caminho alternativo para melhorar a precisão na medição do raio do próton. O raio de Bohr do múon é 186 vezes menor do que o raio de Bohr do elétron, o que causa um aumento na sensibilidade do hidrogênio muônico ao tamanho finito do próton [60]. Em particular, o Lamb-Shift, a sutil diferença entre as energias de ligação dos estados $2S_{1/2}$ e $2P_{1/2}$ dos átomos de hidrogênio, é afetado em até 2%. O raio do próton medido para o hidrogênio muônico, com experimentos de espectroscopia a laser pulsado, é $r_p = 0.84184(67)$fm [60], tal resultado apresenta uma diferença de 7 desvios padrões com relação ao obtido pelo CODATA. Essa discrepância, conhecida por problema do raio do próton, desencadeou uma discussão sobre a precisão desses experimentos, como também, sobre a possibilidade de uma nova física envolvida. Nesta seção, abordaremos este problema e mostraremos como o cenário de branas espessas contribui para uma explicação [63].

O tamanho do próton é expresso pela raiz quadrática média do raio de carga

$$r_p = \sqrt{\langle r_p^2 \rangle} \tag{3.25}$$

onde

$$\langle r_p^2 \rangle = \int r^2 \rho_e(r) d^3r \tag{3.26}$$

sendo ρ_e a densidade de carga elétrica normalizada do próton. A teoria que prevê os efeitos da estrutura interna do próton sobre o espectro de energia atômica é a eletrodinâmica quântica(QED).

[3] Átomo formado por um próton (p) e um múon negativo (μ^-)

Foram medidas as transições de frequência no hidrogênio muônico para o estado $2S-$tripleto, $\nu_t = 2P_{3/2}^{F=2} - 2S_{1/2}^{F=1}$, e para o estado $2S-$singleto, $\nu_S = 2P_{3/2}^{F=1} - 2S_{1/2}^{F=0}$. a partir dessas medidas, pode-se encontrar o valor experimental do Lamb shift no hidrogênio muônico com base na seguinte expressão [63]

$$\Delta E_L^{exp} = \frac{1}{4}h\nu_S + \frac{3}{4}h\nu_t - 8.8123(2)\text{meV}. \tag{3.27}$$

O termo 8.8123(2)meV é derivado do cálculo das separações fina e hiperfina no estado $2P$. Utilizando as frequências medidas $\nu_S = 54611.16(1.05)$GHz [60, 61] e $\nu_t = 49881.35(65)$GHz [60, 61], encontramos que $\Delta E_L^{exp} = 202.3706(23)$meV. Por outro lado, a previsão teórica para o Lamb-Shift total é [61]

$$\Delta E_L^{th} = \left[206.0668(25) - 5.2275(10)\frac{r_p^2}{\text{fm}^2}\right]\text{meV}, \tag{3.28}$$

onde r_p é medido em fentômetros.

Se usarmos o valor de r_p dado pelo CODATA, para calcular ΔE_L^{th}, então os resultados teóricos e experimentais do Lamb-shift apresentam uma diferença de 0.3290(469)meV, a qual não encontra explicação na física teórica padrão. Uma variedade de propostas foram sugeridas para tentar explicar esse excesso de energia por meio de uma nova interação além do modelo padrão [74, 75, 76].

Como o múon é cerda de 207 vezes mais pesado que o elétron, é razoável pensar que a presença da gravidade pode explicar esse excesso de energia. No entanto, como já vimos, o potencial newtoniano é desprezível em sistemas atômicos no espaço quadrimensional. Por outro lado, considerando o cenário de dimensões extras de larga escala, temos que o potencial pode ser muito maior em curtas distâncias. É neste cenário que surgem os vínculos trazidos nesta seção [63]. Os autores da referência [63] consideram o hidrogênio muônico no cenário de branas espessas. O desvio nos níveis de energia associado à interação gravitacional múon-próton é encontrado e com isso verifica-se que essa contribuição gravitacional poderia fornecer o excesso medido de energia, resolvendo, assim, o problema do raio do próton.

Na seção anterior, mostramos que a interação gravitacional entre elétrons e prótons modificam os níveis de energia do átomo de hidrogênio. De maneira análoga, a interação gravitacional entre prótons e múons alteram os níveis de energia desse sistema ligado. Seguindo os mesmos passos, da seção anterior, podemos mostrar que para estados S o

desvio da energia provocado pela dimensão extra é

$$\delta E^{g}_{nS} = -\gamma_{\delta}\frac{G_{4+\delta}m_p m_{\mu}}{\sigma^{\delta-2}} \mid \psi_{nS}(0) \mid^2 \left[1 - \frac{3}{2}\frac{r_p}{a_{0\mu}} + \mathcal{O}\left(\frac{r_p^2}{a_{0\mu}^2}\right)\right]\left[1 + \mathcal{O}\left(\frac{\sigma}{r_p}\right)\right], \qquad (3.29)$$

onde $a_{0\mu}$ é o raio de Bohr do hidrogênio muônico, $\psi_{nS}(0)$ é a função de onda do múon no estado nS avaliada na origem e γ_{δ} é o mesmo fator numérico visto nos vínculos espectroscópicos. Observe que a equação (3.29) só é válida para $\delta > 2$, ou seja, para um espaço com a quantidade de dimensões extras maior que 2.

Para os casos em que $\delta = 1$ e $\delta = 2$, temos que a energia gravitacional não é forte o suficiente para explicar o problema do raio do próton, logo, não o consideramos aqui. Calculando a integral (3.18) para a região externa, podemos mostrar que ela é menor que (3.29) por um fator da ordem de σ/r_p, que no caso de branas realísticas ($\epsilon \leq 10^{-20}$m) é menor que 10^{-5}. Para os estados P, a contribuição gravitacional é menor por um fator da ordem $r_p^2/a_{0\mu}^2$ [63].

3.5.1 Contribuição gravitacional ao Lamb-Shift

Vimos que o valor teórico $\Delta E_L^{th}(r_p^{CD})$ e o valor experimental ΔE_L^{exp} diferem por excesso de energia de 0.3290(469)meV. Observando a equação (3.29) temos que o nível $2S$ decresce por uma quantidade

$$\delta E^{g}_{2S} = -\gamma_{\delta}\frac{G_{4+\delta}m_p m_{\mu}}{8\pi a_0^3 \sigma^{\delta-2}}\left(1 - \frac{3r_p}{2a_0}\right), \qquad (3.30)$$

enquanto o efeito gravitacional sobre o estado P é suprimido por um fator de $\sim 10^{-5}$. Tal efeito é desprezível pois a precisão experimental que envolve essas medidas do hidrogênio muônico é de 10^{-7}eV. Assim, uma separação adicional é fornecida pela interação gravitacional $\mid \delta E^{g}_{2S} \mid$ entre os níveis $2S - 2P$. Se $\mid \delta E^{g}_{2S} \mid = 0.3290(469)$meV, o problema do raio do próton está resolvido. Essa condição leva a uma relação entre $G_{4+\delta}$ e σ, que pode ser escrita em termos de M_D como

$$\left[\frac{(\hbar/c)^{\delta}\hbar c}{\delta+2}\frac{\Gamma\left(\frac{\delta+3}{2}\right)}{2\pi^{(\delta+3)/2}}\frac{(2\pi)^{\delta}}{M_D^{\delta+2}}\right]\frac{\gamma_{\delta}}{8\pi}\frac{m_p m_{\mu}}{a_0^3\sigma^{\delta-2}}\left(1 - \frac{3r_p}{2a_0}\right) = 0.3290(469)\text{meV}, \qquad (3.31)$$

onde $G_{4+\delta}$ é o termo entre colchetes.

O gráfico (3.7) mostra a análise numérica da equação (3.31) encontrada por [63] para $\delta = 3, 4, 5$ e 6. Considerando que o parâmetro de confinamento σ obedece a seguinte condição $10^{-35}\text{m} \leq \sigma \leq 10^{-20}\text{m}$, encontramos vínculos sobre M_D que solucionam o

problema do raio do próton. Se σ for muito pequeno, ψ é fortemente confinada a brana e os limites de M_D são altos.

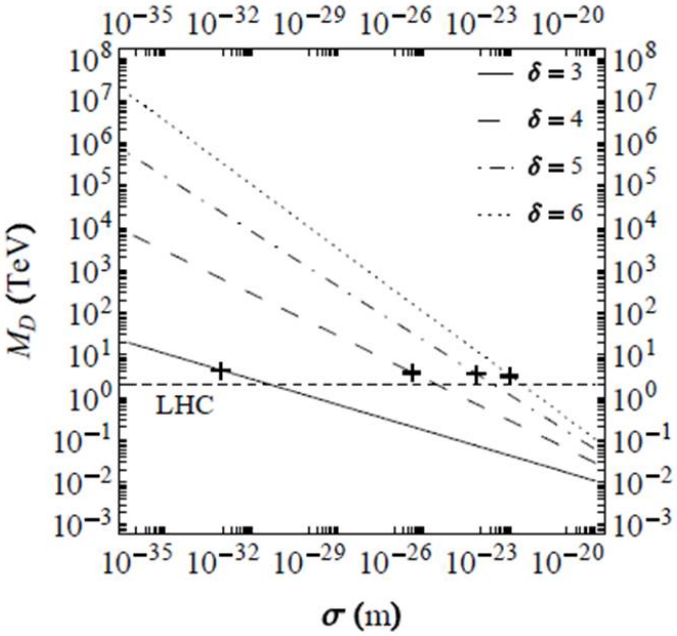

Figura 3.7: Relação entre a massa de Planck M_D do espaço de dimensões extras em função do parâmetro de confinamento σ. Os sinais + representam os limites inferiores sobre M_D vinculados pelos eventos de monojet no LHC [49].

Capítulo 4

Mecânica Quântica Relativística

Desde o surgimento da mecânica quântica, os físicos da época desejavam elaborar uma teoria quântica que fosse compatível com a Relatividade Restrita, teoria essa que recebeu o nome de Mecânica Quântica Relativística. Matematicamente falando, essa teoria deve ser elaborada na forma covariante de Lorentz. Nesta proposta, surgiram a Teoria de Klein-Gordon, fundamentada nos trabalhos de Oskar Klein e Walter Gordon [83, 84], e a Teoria de Dirac, proposta por Paul A. M. Dirac [85]. Essa segunda resolveu problemas encontrados na teoria de Klein-Gordon e é formulada em perfeito acordo com os postulado da Teoria da Relatividade Restrita.

No próximo capítulo, onde os nossos resultados serão apresentados e discutidos, consideraremos o fenômeno da precessão do spin sob o formalismo da Mecânica Quântica Relativística, com a finalidade de analisar qual o efeito do campo gravitacional do núcleo sobre o comportamento do elétron em um átomo de Hidrogênio. Por este motivo, no presente capítulo, faremos uma revisão desta teoria proposta por Dirac, considerando-a no contexto do espaço-tempo plano e curvo. Por fim, apresentamos a transformação de Foldy-Wouthuysen, que fornece o limite não-relativístico da Mecânica Quântica Relativística com suas correções relativísticas expressas como uma expansão em série.

4.1 Equação de Dirac

Uma proposta para a Mecânica Quântica Relativística foi formulada por Dirac, em 1928, enquanto ele buscava uma equação de onda relativística covariante na forma da

equação de Schrödinger

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = H\psi. \tag{4.1}$$

Mantendo a ideia de que a derivada temporal deveria ser de primeira ordem, ele construiu um hamiltoniano com derivadas espaciais, também, de primeira ordem:

$$H = \frac{\hbar c}{i}\left(\hat{\alpha_1}\frac{\partial}{\partial x^1} + \hat{\alpha_2}\frac{\partial}{\partial x^2} + \hat{\alpha_3}\frac{\partial}{\partial x^3}\right) + \hat{\beta}mc^2 \tag{4.2}$$

$$H = -i\hbar c\hat{\alpha_i}\cdot\vec{\nabla}_i + \hat{\beta}mc^2. \tag{4.3}$$

Dado esse hamiltoniano, temos a equação de Dirac

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \left(-i\hbar c\hat{\alpha_i}\cdot\vec{\nabla}_i + \hat{\beta}mc^2\right)\psi, \tag{4.4}$$

onde os coeficientes $\hat{\alpha}_i$ são matrizes; se fossem números a equação não seria invariante sob uma rotação espacial. Consequentemente, ψ deixa de ser interpretado como função escalar e passa a ser descrito por uma matriz coluna ψ. Dirac propôs que $\hat{\alpha}_i$ e $\hat{\beta}$ são matrizes hermitianas quadradas $N \times N$. Logo, ψ deve ter N componentes:

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1(x,t) \\ \psi_2(x,t) \\ \vdots \\ \psi_N(x,t) \end{pmatrix} \tag{4.5}$$

o qual recebe o nome de espinor, por causa de suas propriedades de transformação frente às transformações de Lorentz.

As matrizes $\hat{\alpha}$ e $\hat{\beta}$ são determinadas por alguns critérios fundamentais que a equação relativística deve obedecer: a energia e o momento devem se relacionar segundo a equação da energia relativística ($E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$); deve ter uma probabilidade positiva definida; e ser invariante frente às transformações de Lorentz. O primeiro requerimento implica que todo componente do espinor ψ deve satisfazer á equação de Klein-Gordon [87]

$$-\hbar^2\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = \left(m^2c^4 - \hbar^2c^2\nabla^2\right)\psi. \tag{4.6}$$

Elevando (4.1) ao quadrado, substituindo a Hamiltoniana de Dirac (4.3) e comparando com (4.6), obtemos algumas identidades para as matrizes $\hat{\alpha}_i$ e $\hat{\beta}$:

$$\hat{\alpha}_i\hat{\alpha}_j + \hat{\alpha}_j\hat{\alpha}_i = 2\delta_{ij}1 \tag{4.7}$$

$$\hat{\alpha}_i\hat{\beta} + \hat{\beta}\hat{\alpha}_i = 0 \tag{4.8}$$

$$\hat{\alpha}_i^2 = \hat{\beta}^2 = 1 \tag{4.9}$$

as quais definem uma álgebra matricial. Para que a hamiltoniana seja hermitiana $\hat{\alpha}_i$ e $\hat{\beta}$ também devem ser, isto é

$$(\hat{\alpha}_i)^\dagger = \hat{\alpha}_i \tag{4.10}$$

$$\hat{\beta}^\dagger = \hat{\beta}. \tag{4.11}$$

Observando a equação (4.9) é possível notar que os autovalores de $\hat{\alpha}_i$ e $\hat{\beta}$ devem ser ± 1. Da relação de anti-comutação mostrada em (4.8), temos que o traço das matrizes $\hat{\alpha}_i$ e $\hat{\beta}$ deve ser nulo. Vejamos, da equação (4.8) é possível escrever

$$\hat{\alpha}_i = -\hat{\beta}\hat{\alpha}_i\hat{\beta}, \tag{4.12}$$

de onde, usando a propriedade do traço da matriz, podemos mostrar que

$$Tr\left(\hat{\alpha}_i\right) = Tr\left(\hat{\beta}^2\hat{\alpha}_i\right) = Tr\left(\hat{\beta}\hat{\alpha}_i\hat{\beta}\right) = -Tr\left(\hat{\alpha}_i\right) \Rightarrow Tr\left(\hat{\alpha}_i\right) = 0. \tag{4.13}$$

Para que a matriz tenha traço nulo, ela deve ter dimensão par, pois assim os elementos de sua diagonal principal, isto é, os autovalores, se anularão. O menor número par possível é $N = 2$, no entanto só existem três matrizes de duas dimensões, hermitianas, que anti-comutam e cujo quadrado é a matriz identidade, que são as matrizes de Pauli σ_i. Portanto, a menor dimensão possível e adotada para as matrizes $\hat{\alpha}_i$ e $\hat{\beta}$ é $N = 4$. Essas matrizes são chamadas matrizes de Dirac

$$\hat{\alpha}_i = \begin{pmatrix} 0 & \hat{\sigma}_i \\ \hat{\sigma}_i & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \hat{\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{4.14}$$

onde $\hat{\sigma}_i$ são as matrizes de Pauli

$$\hat{\sigma}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \hat{\sigma}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{4.15}$$

e 1 é a matriz unitária.

Desta forma, o espinor ψ representado pela matriz coluna na equação (4.5) deve ter 4 elementos

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1(x,t) \\ \psi_2(x,t) \\ \psi_3(x,t) \\ \psi_4(x,t) \end{pmatrix}. \tag{4.16}$$

Em algumas situações é conveniente dividir ψ em dois espinores (φ, χ) de dois componentes

$$\varphi = \begin{pmatrix} \psi_1(x,t) \\ \psi_2(x,t) \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \chi = \begin{pmatrix} \psi_3(x,t) \\ \psi_4(x,t) \end{pmatrix}, \tag{4.17}$$

de modo que ψ pode ser escrito como

$$\psi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}. \tag{4.18}$$

Essa divisão é útil na obtenção do limite não-relativístico da equação de Dirac, como veremos mais adiante ao tratar do procedimento de Foldy-Wouthuysen.

Densidade de probabilidade

O próximo passo é construir a quadri-corrente e a equação de continuidade para verificar se a densidade é positiva definida. De modo análogo, multiplicamos pela esquerda a equação (4.4) pelo complexo conjugado do spinor $\psi^\dagger$, posteriormente, tomamos o complexo conjugado da equação (4.4) e multiplicamos pela direita por ψ. As duas equações obtidas são:

$$i\hbar\psi^\dagger\frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{\hbar c}{i}\sum_{k=1}^{3}\psi^\dagger\hat{\alpha}_k\frac{\partial}{\partial x^k}\psi + mc^2\psi^\dagger\hat{\beta}\psi \tag{4.19}$$

e

$$-i\hbar\frac{\partial\psi^\dagger}{\partial t}\psi = -\frac{\hbar c}{i}\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial\psi^\dagger}{\partial x^k}\hat{\alpha}_k\psi + mc^2\psi^\dagger\hat{\beta}\psi \tag{4.20}$$

subtraindo (4.20) de (4.19), temos:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\left(\psi^\dagger\psi\right) = \frac{\hbar c}{i}\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\psi^\dagger\hat{\alpha}_k\psi\right). \tag{4.21}$$

Observe que essa equação tem a forma de uma equação de continuidade

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{j} = 0, \tag{4.22}$$

onde ρ é a densidade positiva definida

$$\rho = \psi^\dagger\psi = \sum_{i=1}^{4}\psi_i'\psi_i. \tag{4.23}$$

Logo, pode ser interpretada como densidade de probabilidade. E j^k, dado por

$$j^k = c\psi^\dagger\hat{\alpha}^k\psi \tag{4.24}$$

ou

$$\vec{j} = c\psi^{\dagger}\hat{\alpha}\psi \tag{4.25}$$

é a densidade de corrente. Podemos ainda escrever $\vec{j}$ como um quadrivetor $\vec{j} = \{c\rho, j\}$.

Portanto, a equação de Dirac resolve o problema encontrado na equação de Klein-Gordon, a qual não possuía uma densidade de probabilidade positiva definida.

Covariância de Lorentz da equação de Dirac

Um próximo ponto a ser verificado é se a equação de Dirac é invariante frente as transformações de Lorentz, isto é, se a forma da equação se mantém invariante sob uma transição de um sistema inercial para outro. Sejam A e B, dois observadores, associados a diferentes sistemas inerciais de coordenadas. Um evento físico é descrito pela coordenada x^{μ} para o observador A e pela coordenada x'^{μ} para o observador B. Conforme o princípio da covariância da Relatividade Restrita, as leis da física devem ser as mesmas, independentemente do referencial inercial escolhido. Os sistemas de coordenadas são relacionados por meio das transformações de Lorentz

$$x'^{\nu} = \Lambda^{\nu}_{\mu} x^{\mu}, \tag{4.26}$$

onde Λ^{ν}_{μ} é a chamada matriz de transformação de Lorentz. A equação (4.26) é uma transformação linear e homogênea e os coeficientes Λ^{ν}_{μ} dependem apenas da velocidade relativa e da orientação espacial dos observadores nos referenciais.

Se temos um dado espinor $\psi(x)$ para o observador A, a transformação de Lorentz nos permite calcular $\psi'(x')$ para o observador B. Tanto $\psi(x)$ quanto $\psi'(x')$ devem satisfazer a equação de Dirac, que segundo o princípio da covariância, deve manter a mesma forma nos dois sistemas de coordenadas.

Neste momento, torna-se mais conveniente usar a equação de Dirac na notação quadrimensional. Para isto, multiplicamos a equação (4.4) por β/c, o que resulta em:

$$i\hbar\left(\gamma^0\frac{\partial}{\partial x^0} + \gamma^i\frac{\partial}{\partial x^i}\right)\psi - mc\psi = 0, \tag{4.27}$$

ou, de maneira mais abreviada

$$\left(i\hbar\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - mc\right)\psi = 0 \tag{4.28}$$

onde $\beta^2 = 1$, $\gamma^0 = \beta$ e $\gamma^i = \beta\alpha_i$ com $i = 1, 2, 3$. Escrevendo na forma matricial, temos

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.29}$$

As matrizes γ^μ obedecem à seguinte relação de anti-comutação

$$\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2\eta^{\mu\nu}1, \tag{4.30}$$

sendo 1 uma matriz unitária 4×4 e $\eta^{\mu\nu}$ a métrica de Minkowski. As matrizes γ^i são unitárias $\left[(\gamma^i)^{-1} = \gamma^{i\dagger}\right]$ e anti-hermitiana $\left[(\gamma^i)^\dagger = -\gamma^i\right]$. Por outro lado, γ^0 é unitária e hermitiana $\left[\gamma^{0\dagger} = \gamma^0\right]$.

Tendo escrito a equação de Dirac na forma (4.28), vamos verificar sua covariância. como já foi mencionado, de acordo com o princípio da relatividade, temos que $\psi'(x')$ deve ser solução da equação de Dirac. Logo,

$$\left(i\hbar\gamma'^\mu\frac{\partial}{\partial x'^\mu} - mc\right)\psi'(x') = 0, \tag{4.31}$$

onde γ'^μ obedece a mesma relação de anti-comutação que γ^μ:

$$\gamma'^\mu\gamma'^\nu + \gamma'^\nu\gamma'^\mu = 2\eta^{\mu\nu}1 \tag{4.32}$$

e mantém as mesmas propriedades: $\gamma'^{0\dagger} = \gamma'^0$ e $\gamma'^{i\dagger} = -\gamma'^i$, com $i = 1, 2, 3$. Isto implica que elas se relacionam por meio de uma transformação unitária

$$\gamma'^\mu = U^{-1}\gamma^\mu U. \tag{4.33}$$

Mas de que forma $\psi(x)$ no sistema inercial A se transforma em $\psi'(x')$ no sistema B, e vice-versa? Visto que a equação de Dirac e a transformação de Lorentz são lineares, esta transformação será também linear. Portanto, ela deve ter a seguinte forma

$$\psi'(x') = \psi'(\Lambda x) = S(\Lambda)\psi(x) = S(\Lambda)\psi\left(\Lambda^{-1}x'\right), \tag{4.34}$$

onde Λ representa a matriz de transformação de Lorentz Λ^ν_μ e $S(\Lambda)$ é uma matriz 4×4 que é função dos parâmetros de Λ. O princípio da Relatividade implica numa transformação inversa $S^{-1}(\Lambda)$, a qual permite o observador A construir sua função $\psi(x)$ partindo de $\psi'(x')$ do observador B. Isto é,

$$\psi(x) = S^{-1}(\Lambda)\psi'(x') = S^{-1}(\Lambda)\psi'(\Lambda x). \tag{4.35}$$

Usando (4.34), obtemos:

$$\psi(x) = S\left(\Lambda^{-1}\right)\psi'(x') = S\left(\Lambda^{-1}\right)\psi'(\Lambda x), \tag{4.36}$$

de onde temos que

$$S^{-1}(\Lambda) = S\left(\Lambda^{-1}\right). \tag{4.37}$$

Expressando $\psi(x)$ na equação de Dirac por meio de (4.35), temos

$$\left(i\hbar\gamma^{\mu}S^{-1}(\Lambda)\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} - mcS^{-1}(\Lambda)\right)\psi'(x') = 0, \tag{4.38}$$

multiplicando por $S(\Lambda)$ pela esquerda e usando o fato que $S^{-1}(\Lambda)S(\Lambda^{-1}) = 1$, obtemos

$$\left(i\hbar S(\Lambda)\gamma^{\mu}S^{-1}(\Lambda)\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} - mc\right)\psi'(x') = 0. \tag{4.39}$$

Devemos lembrar que $\partial/\partial x^{\mu}$ se transforma da seguinte maneira

$$\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} = \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\mu}}\frac{\partial}{\partial x'^{\nu}} = \Lambda^{\nu}_{\mu}\frac{\partial}{\partial x'^{\nu}} \tag{4.40}$$

isto nos permite escrever (4.39) como

$$\left(i\hbar S(\Lambda)\gamma^{\mu}S^{-1}(\Lambda)\Lambda^{\nu}_{\mu}\frac{\partial}{\partial x'^{\nu}} - mc\right)\psi'(x') = 0, \tag{4.41}$$

para essa equação ser idêntica a equação de Dirac, $S(\Lambda)$ deve ter a seguinte propriedade

$$S(\Lambda)\gamma^{\mu}S^{-1}(\Lambda)\Lambda^{\nu}_{\mu} = \gamma^{\nu} \tag{4.42}$$

o que é equivalente a

$$S(\Lambda)\gamma^{\nu}S^{-1}(\Lambda) = \Lambda^{\nu}_{\mu}\gamma^{\mu}. \tag{4.43}$$

Encontrar $S(\Lambda)$ significa resolver a equação anterior. Uma vez encontrada a matriz $S(\Lambda)$ teremos provado a covariância da equação de Dirac.

4.1.1 Simetrias da equação de Dirac

Analisar a simetria do problema é algo que vem nos ajudando desde os estudos da mecânica clássica quando a simetria encontrada na Lagrangeana levava à constantes de movimento. Na mecânica quântica, da mesma maneira, problemas são simplificados nos casos em que há simetria na equação de Schrödinger; por outro lado, conhecer os operadores que comutam com o hamiltoniano facilita na resolução da equação de autovalores. Mostraremos nesta seção que na Mecânica Quântica Relativística não é diferente. Examinaremos algumas simetrias inerentes a equação de Dirac. Para isto,

iremos considerar situações na qual uma partícula de spin semi-inteiro se encontra sob a influência de um potencial externo. Isto é, analisaremos as simetrias da equação [86, 87]

$$i\hbar\frac{\partial\psi\left(x,t\right)}{\partial t}=H\psi\left(x,t\right)=E\psi\left(x,t\right), \tag{4.44}$$

onde

$$H=c\hat{\alpha}\cdot\hat{p}+\hat{\beta}mc^{2}+V\left(x\right), \tag{4.45}$$

sendo $V(x)$ a energia potencial. Note que esta forma do hamiltoniano destrói a covariância da equação, a menos que a origem do potencial seja eletromagnética e tenhamos escolhido um referencial onde o potencial vetor seja nulo, $\vec{A}=0$.

Na equação de Schrödinger, exploramos a simetria de rotação ao notar que o operador momento angular orbital $\vec{L}=\vec{x}\times\vec{p}$ comutava com hamiltonianos de ″potenciais centrais″, isto é $\left[H,\vec{L}\right]=0$. Isto ocorre pois $\vec{L}$ comuta com o operador momento ao quadrado $\left[\vec{L},\vec{P}^{2}\right]=0$ e também com o operador posição ao quadrado $\left[\vec{L},\vec{x}^{2}\right]=0$.

Consideremos agora este mesmo operador comutando com o hamiltoniano de Dirac $\left[H,\vec{L}\right]$. De início vamos analisar para o hamiltoniano da partícula livre $H=c\hat{\alpha}\cdot\hat{p}+\hat{\beta}mc^{2}$. Como $\hat{\beta}$ é constante temos que comutará com o momento angular orbital $\left[\hat{\beta},\vec{L}\right]=0$. Mas e $\left[c\hat{\alpha}\cdot\hat{p},\vec{L}\right]$ comuta ou não? Vejamos, para a componente i de $\vec{L}$ temos

$$\begin{aligned}\left[c\hat{\alpha}\cdot\hat{p},L_{i}\right] &= \left[c\alpha_{l}p_{l},\epsilon_{ijk}x_{j}P_{k}\right]\\ &= c\epsilon_{ijk}\alpha_{l}\left[P_{l},x_{j}\right]P_{k}\\ &= c\epsilon_{ijk}\alpha_{l}\left(-i\delta_{lj}\right)P_{k}\\ &= -ic\epsilon_{ijk}\alpha_{j}P_{k}\neq0\end{aligned}$$

o que significa que o momento angular orbital não comuta com o hamiltoniano de Dirac. Concluímos que $\vec{L}$ não se conserva para partículas sob a influência de potenciais centrais e partículas de spin 1/2.

Se analisarmos, ainda para o hamiltoniano da partícula livre, o comutador $\left[H,\hat{\Sigma}\right]$, onde $\hat{\Sigma}$ é o operador de spin

$$\hat{\sigma}=\begin{pmatrix}\hat{\sigma} & o\\ 0 & \hat{\Sigma}\end{pmatrix}, \tag{4.46}$$

vemos que o operador de spin também não comuta com H:

$$\begin{aligned}\left[c\hat{\alpha}\cdot\hat{p}+\beta mc^{2},\Sigma_{i}\right] &= \left[c\alpha_{k}p_{k},\Sigma_{i}\right]\\ &= c\left[\alpha_{k},\Sigma_{i}\right]P_{k}\\ &= 2ic\epsilon_{ijk}\alpha_{j}P_{k}\neq0.\end{aligned}$$

No entanto, embora $\vec{L}$ e $\hat{\Sigma}$ não comutem com o hamiltoniano, o momento angular total

$$\vec{J} = \vec{L} + \frac{\hbar}{2}\hat{\Sigma} = \vec{L} + \vec{S} \tag{4.47}$$

comuta, ou seja, o hamiltoniano de Dirac conserva o momento angular total.

Se a partícula está sob a influência de um potencial, no caso em que $V(x) = V(|x|)$, esperamos que as soluções tenham paridade bem definida, isto é

$$\psi(-x) = \pm\psi(x). \tag{4.48}$$

À principio podemos pensar que o hamiltoniano de Dirac não obedece a essa condição, pois se trocarmos $x \to -x$ e $p \to -p$ na equação (4.45), o hamiltoniano mudará. Porém, o operador paridade $\hat{\pi}$ diz respeito apenas às coordenadas e não a espinores. Com isso, precisamos de um operador paridade que atue no espaço dos espinores e seja diferente de $\hat{\pi}$, de forma que o hamiltoniano seja invariante sob uma transformação de paridade, ou seja, $\mathcal{P}^\dagger H \mathcal{P} = H$. Tal operador é definido por

$$\mathcal{P} \equiv \pi U_P, \tag{4.49}$$

onde U_P é um operador 4×4 unitário que satisfaz as seguintes propriedades:

$$U_p^\dagger \hat{\alpha} U_P = -\hat{\alpha} \tag{4.50}$$

$$U_p^\dagger \hat{\beta} U_P = \hat{\beta} \tag{4.51}$$

$$U_p^2 = 1. \tag{4.52}$$

Observe que essas propriedade são satisfeitas se tomarmos $U_p = \hat{\beta} = \hat{\beta}^\dagger$. Portanto, uma transformação de paridade significa atuar $\hat{\beta}$ no hamiltoniano.

Como $[H, \mathcal{P}] = 0$, as autofunções de $\mathcal{P}$ são as mesmas de H. Concluímos que devido o hamiltoniano comutar com $\vec{J}^2$, J_z e $\mathcal{P}$, suas autofunções devem ser as mesmas. Estas são as já conhecidas autofunções angulares de spin $Y_l^{j,m}(\theta, \phi)$ [86]

$$Y_l^{j=l\pm\frac{1}{2},m}(\theta,\phi) = \frac{1}{\sqrt{2l+1}} \begin{pmatrix} \pm\sqrt{l \pm m + \frac{1}{2}}\, Y_l^{m-\frac{1}{2}}(\theta,\phi) \\ \sqrt{l \mp m + \frac{1}{2}}\, Y_l^{m+\frac{1}{2}}(\theta,\phi) \end{pmatrix} \tag{4.53}$$

4.1.2 Soluções da equação de Dirac

Tendo estudado a equação de Dirac e verificado que ela é capaz de descrever uma Teoria Quântica Relativística, nesta seção discutiremos o caso da partícula livre.

I. Partícula livre

O Caso mais simples a ser estudado é o da partícula livre, ou seja, uma partícula na ausência de potencial. Para resolver este problema vamos escrever a equação de Dirac (4.4) como segue:

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \left(c\hat{\alpha}\cdot\hat{p} + mc^2\hat{\beta}\right)\psi = \hat{H}\psi, \tag{4.54}$$

onde $\hat{p}_i = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x^i}$ é o operador momento. A solução geral da equação acima é dada pelo ansantz

$$\psi_\lambda(x,t) = N\exp\left[\frac{i}{\hbar}(\vec{p}\cdot\vec{x} + \lambda Et)\right]\begin{pmatrix}\varphi\\ \chi\end{pmatrix}, \tag{4.55}$$

lembrando que o espinor $\psi(x)$ pode ser escrito como (4.18). Aqui N é a constante de normalização, E é a energia da partícula dada por

$$E^2 = m^2c^4 - c^2p^2 \tag{4.56}$$

e $\lambda = \pm 1$ determina se a energia é positiva ou negativa.

Substituindo (4.55) em (4.54), obtemos:

$$i\hbar\begin{pmatrix}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\\ \frac{\partial\chi}{\partial t}\end{pmatrix} = \left[c\begin{pmatrix}0 & \hat{\sigma}\\ \hat{\sigma} & 0\end{pmatrix}\cdot\hat{p} + mc^2\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}\varphi\\ \chi\end{pmatrix}, \tag{4.57}$$

realizando os devidos produtos de matrizes podemos escrever o conjunto de duas equações

$$i\hbar\frac{\partial\varphi}{\partial t} = c\hat{\sigma}\cdot\hat{p}\chi + mc^2\varphi \tag{4.58}$$

$$i\hbar\frac{\partial\chi}{\partial t} = c\hat{\sigma}\cdot\hat{p}\varphi + mc^2\chi, \tag{4.59}$$

de onde podemos expressar χ em função de φ, como

$$\chi = \frac{c\hat{\sigma}\cdot\hat{p}}{mc^2 + \lambda E}\varphi. \tag{4.60}$$

Assim, substituindo (4.60) em (4.55) a solução geral pode ser expressa da seguinte forma

$$\psi_\lambda(x,t) = N\exp\left[\frac{i}{\hbar}(\vec{p}\cdot\vec{x} + \lambda Et)\right]\begin{pmatrix}1\\ \frac{c\hat{\sigma}\cdot\hat{p}}{mc^2+\lambda E}\end{pmatrix}\varphi. \tag{4.61}$$

Usando a condição de normalização $\langle\psi^\dagger|\psi\rangle = 1$ é fácil encontrar a expressão de N:

$$N = \sqrt{\frac{mc^2 + \lambda E}{2\lambda E}} \tag{4.62}$$

que substituindo na solução (4.61) nos permite escrever a solução geral como

$$\psi_{\lambda}\left(x,t\right)=\sqrt{\frac{mc^{2}+\lambda E}{2\lambda E}}\exp\left[\frac{i}{\hbar}\left(\vec{p}\cdot\vec{x}+\lambda Et\right)\right]\left(\begin{array}{c}1\\ \frac{c\hat{\sigma}\cdot\hat{p}}{mc^{2}+\lambda E}\end{array}\right)\varphi. \tag{4.63}$$

Para deixar esta solução ainda mais completa podemos considerar as possíveis orientações do spin: spin up e spin down, o espinor φ pode ser denotado na forma

$$\varphi=U=\left(\begin{array}{c}U_{1}\\ U_{2}\end{array}\right). \tag{4.64}$$

Mostraremos um outro número quântico, a helicidade $\hat{\Lambda}_{S}$, que é interpretado como a projeção do spin sobre a direção do momento

$$\hat{\Lambda}_{S}=\frac{\hbar}{2}\hat{\Sigma}\cdot\frac{\hat{p}}{|\vec{p}|}=\hat{S}\cdot\frac{\hat{p}}{|\vec{p}|}, \tag{4.65}$$

onde

$$\hat{\Sigma}=\left(\begin{array}{cc}\hat{\sigma} & 0\\ 0 & \hat{\sigma}\end{array}\right)\quad\text{e}\quad\hat{S}=\frac{\hbar}{2}\hat{\Sigma}. \tag{4.66}$$

Os autovalores do operador helicidade são $\pm\hbar/2$ e os autovetores [86]

$$\left(\begin{array}{c}u_{1}\\ 0\end{array}\right),\left(\begin{array}{c}u_{-1}\\ 0\end{array}\right),\left(\begin{array}{c}0\\ u_{1}\end{array}\right),\left(\begin{array}{c}0\\ u_{-1}\end{array}\right). \tag{4.67}$$

Com u_1 e u_{-1} representando, respectivamente, os estados de spin up e spin down

$$u_{1}=\left(\begin{array}{c}1\\ 0\end{array}\right)\quad\text{e}\quad u_{-1}\left(\begin{array}{c}0\\ 1\end{array}\right), \tag{4.68}$$

Assim, podemos classificar completamente as soluções da partícula livre de Dirac

$$\psi_{p,\lambda,+1/2}\left(x,t\right)=\sqrt{\frac{mc^{2}+\lambda E}{2\lambda E}}\exp\left[\frac{i}{\hbar}\left(\vec{p}\cdot\vec{x}+\lambda Et\right)\right]\left(\begin{array}{c}\left(\begin{array}{c}1\\ 0\end{array}\right)\\ \frac{c\hat{\sigma}\cdot\hat{p}}{mc^{2}+\lambda E}\left(\begin{array}{c}1\\ 0\end{array}\right)\end{array}\right) \tag{4.69}$$

$$\psi_{p,\lambda,-1/2}\left(x,t\right)=\sqrt{\frac{mc^{2}+\lambda E}{2\lambda E}}\exp\left[\frac{i}{\hbar}\left(\vec{p}\cdot\vec{x}+\lambda Et\right)\right]\left(\begin{array}{c}\left(\begin{array}{c}0\\ 1\end{array}\right)\\ \frac{c\hat{\sigma}\cdot\hat{p}}{mc^{2}+\lambda E}\left(\begin{array}{c}0\\ 1\end{array}\right)\end{array}\right) \tag{4.70}$$

Interpretação para a energia negativa

Assim como a Equação de Klein-Gordon, a solução da equação de Dirac também permite energias negativas. A interpretação física que Dirac ofereceu para este resultado matemático fundamenta-se no Princípio de Exclusão de Pauli. Para Dirac, o vácuo da teoria é constituído por todos os estados de energia negativa preenchidos. Ele considera que um elétron sendo excitado de um estado de energia negativa deixa uma lacuna no chamado Mar de Dirac. O Mar seria o Universo de partículas com energia negativa. Esta lacuna pode ser interpretada de duas maneiras: Como sendo a ausência de um elétron de energia negativa ou a presença de uma partícula de energia e carga positiva. A esta lacuna compreende a presença de um pósitron, que é a anti-partícula do elétron. A principal consequência dessa explicação é a previsão do processo de criação de pares de partículas e anti-partículas [86, 87, 88].

4.1.3 Limite não relativístico

Uma teoria mais geral, para ser confiável deve em um certo limite recair na teoria anteriormente conhecida. Por exemplo, no caso da Teoria da Relatividade Restrita, o limite de baixas velocidades recobra a teoria Newtoniana. Da mesma forma acontece com a equação de Dirac. No limite não relativístico, a equação obtida é a equação de Pauli [1]. Para verificar isso vamos escrever a equação de Dirac na presença de um campo eletromagnético. Fazemos isto através da seguinte troca $\vec{p} \to \vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A}$

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \left[c\hat{\alpha}\cdot\left(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A}\right) + \hat{\beta}mc^2 + e\Phi\right]\psi \tag{4.71}$$

onde $A^\mu = \left(\Phi, \vec{A}\right)$ é o quadri-potencial, $V(x) = e\Phi(x)$ é a energia potencial e Φ, o potencial escalar.

Lembrando que $\psi(x)$ pode ser escrito como (4.18), temos que (4.71) resulta nas duas seguintes equações:

$$i\hbar\frac{\partial\varphi}{\partial t} = c\left(\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla} - \frac{e}{c}\vec{A}\right)\vec{\sigma}\chi + \left[V(r) + mc^2\right]\varphi \tag{4.72}$$

$$i\hbar\frac{\partial\chi}{\partial t} = c\left(\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla} - \frac{e}{c}\vec{A}\right)\vec{\sigma}\varphi + \left[V(r) - mc^2\right]\chi. \tag{4.73}$$

[1] A equação de Pauli, também conhecida por equação de Schrödinger-Pauli, descreve as partículas de spin semi-inteiro na presença do campo eletromagnético.

No limite não relativístico consideramos que a energia de repouso (mc^2) é muito maior do que os outros termos da hamiltoniana, de modo que, de acordo com a equação (4.55), podemos escrever:

$$\psi \simeq e^{-\frac{i}{\hbar}mc^2t}\begin{pmatrix}\varphi\\ \chi\end{pmatrix}. \tag{4.74}$$

Substituindo essa equação em (4.72) e (4.73), temos:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix}\varphi\\ \chi\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c\hat{\alpha}\cdot\left(\vec{p}-\frac{e}{c}\vec{A}\right)\chi\\ c\hat{\alpha}\cdot\left(\vec{p}-\frac{e}{c}\vec{A}\right)\varphi\end{pmatrix} - 2mc^2\begin{pmatrix}0\\ \chi\end{pmatrix} + e\Phi\begin{pmatrix}\varphi\\ \chi\end{pmatrix}. \tag{4.75}$$

Vamos considerar a segunda das equações acima. Para as condições em que a energia cinética e a energia potencial são muito menores que a energia de repouso, teremos

$$\left|i\hbar\frac{\partial\chi}{\partial t}\right| \ll \left|mc^2\chi\right|, \tag{4.76}$$

$$\left|e\Phi\chi\right| \ll \left|mc^2\chi\right|, \tag{4.77}$$

obtemos que :

$$\chi = \frac{1}{2mc}\left(\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla}-\frac{e}{c}\vec{A}\right)\cdot\vec{\sigma}\varphi. \tag{4.78}$$

Esta equação estabelece uma relação entre as magnitudes de φ e χ. Observe que o termo entre parênteses se refere ao momento, que classicamente é igual a mv; o termo de massa (m) se cancela com o m do denominador e então temos $\chi = \frac{v}{c}\varphi$. Como $c \gg v$, χ será menor do que φ. Por este motivo, é útil distinguir as componentes da função de onda no limite não-relativístico [86]. Na próxima seção retornaremos a esse ponto.

Para remover χ da equação (4.72), substituímos nela a equação (4.78). Assim,temos a equação

$$i\hbar\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla}-\frac{e}{c}\vec{A}\right)\cdot\vec{\sigma}\right]^2\varphi + \left(V+mc^2\right)\varphi \tag{4.79}$$

a qual pode ser simplificada se usarmos a seguinte propriedade das matrizes de Pauli $\left(\vec{\sigma}\cdot\vec{A}\right)\left(\vec{\sigma}\cdot\vec{B}\right) = \vec{A}\cdot\vec{B} + i\vec{\sigma}\cdot\vec{A}\times\vec{B}$:

$$i\hbar\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla}-\frac{e}{c}\vec{A}\right)^2 - \frac{e\hbar}{2mc}\vec{\sigma}\cdot\vec{B} + V + mc^2\right]\varphi, \tag{4.80}$$

onde $\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$ é o campo magnético externo. Como resultado do limite não relativístico obtemos a equação de Pauli (4.80), o que demonstra que a equação de Dirac tem um correto limite não relativístico.

4.2 A Transformação de Foldy-Wolthuysen

Como vimos na seção anterior, no limite não-relativístico, para espinores que descrevem estados de energia positivas, as duas componentes de cima φ (ver 4.17) tornam-se maiores se comparadas as duas componentes χ; já para os espinores com energia negativa, temos o contrário. Motivados pelo desejo de procurar se isto também é válido para partículas com grandes velocidades, Leslie Foudy e Siegfried Wouthuysen, em 1950, desenvolveram uma transformação canônica da hamiltoniana de Dirac, que quando aplicada a função de onda da partícula livre de spin 1/2 mantém inalterado o sinal algébrico da energia determinada por dois dos quatro componentes [86].

A primeira coisa a observar é que a equação de Dirac envolve as quatro componentes do espinor ψ por causa das matrizes $\hat{\alpha}$, que são ímpares [2]. Devemos procurar por uma representação na qual os termos ímpares da hamiltoniana sejam pequenos, se queremos uma equação que descreva aproximadamente o comportamento das componentes de cima (φ) do espinor (ψ).

No que segue, apresentaremos a transformação de Foudy-Wouthuysen, a qual nos permite passar de uma função de onda de quatro componentes para uma de dois componentes na Teoria de Dirac. A equação de Dirac é representada de tal forma que podemos compará-la diretamente com a equação de Pauli, isto é, essa transformação fornece a equação de onda com correções relativísticas [118].

4.2.1 A Transformação de Foldy-Wolthuysen para a partícula livre

Nosso objetivo aqui é ilustrar o procedimento de Foldy-Wouthuysen começando com o caso de uma partícula livre, procurando então por uma transformação canônica que permite escrever a equação de Dirac livre de operadores ímpares, pois com isso seremos capazes de representar estados de energia positiva ou negativa por meio de espinores de apenas dois componentes.

Sendo S um operador hermitiano, temos que a função de onda se transforma da

[2] O quadrante superior esquerdo e inferior direito é zero, e o quadrante superior direito e inferior esquerdo são diferentes de zero.

seguinte maneira

$$\psi' = e^{i\hat{S}}\psi \tag{4.81}$$

de modo que usando isso na equação de Dirac

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \hat{H}\psi \tag{4.82}$$

vemos que o operador hamiltoniano de Dirac, $\hat{H}$, se transforma como segue:

$$i\hbar\frac{\partial\psi'}{\partial t} = \left[e^{i\hat{S}}\left(\hat{H} - i\frac{\partial}{\partial t}\right)e^{-i\hat{S}}\right]\psi' \equiv \hat{H}'\psi' \tag{4.83}$$

onde

$$\hat{H}' = e^{i\hat{S}}\left(\hat{H} - i\frac{\partial}{\partial t}\right)e^{-i\hat{S}}. \tag{4.84}$$

O próximo passo seria encontrar a forma do operador $\hat{S}$, tal que a exponencial $e^{i\hat{S}}$ separe as soluções com energia positiva e negativa [89]. Foldy e Wolthuysen sugeriram que

$$\hat{S} = \frac{-i}{2mc}\hat{\beta}\hat{\alpha}\cdot\hat{p} \quad \omega\left(\frac{p}{mc}\right) \tag{4.85}$$

onde ω é função do operador p/mc. Como $\hat{S}$ deve comutar com H, temos

$$\hat{H}' = e^{i\hat{S}}\hat{H}e^{-i\hat{S}} = e^{2i\hat{S}}\hat{H}. \tag{4.86}$$

Se expandimos $e^{2i\hat{S}}$ em série de Taylor [3], lembrando que $\hat{S}$ é dado por (4.85), e organizamos a expansão como uma função de senos e cossenos [4], a equação (4.86) é reescrita como

$$\hat{H}' = \left[\cos\left(\frac{p}{mc}\omega\right) + \hat{\beta}\frac{\hat{\alpha}\cdot\hat{p}}{p}\text{sen}\left(\frac{p}{mc}\omega\right)\right]\hat{H}, \tag{4.87}$$

substituindo a hamiltoniana da partícula livre, $\hat{H} = c\hat{\alpha}\cdot\hat{p} + \hat{\beta}mc^2$, e usando $\left(\hat{\beta}\hat{\alpha}\cdot\hat{p}\right)^2 = -p^2$, obtemos

$$\hat{H}' = \hat{\beta}\left[mc^2\cos\left(\frac{p}{mc}\omega\right) + cp \quad \text{sen}\left(\frac{p}{mc}\omega\right)\right] + \frac{\hat{\alpha}\cdot\hat{p}}{p}\left[cp \quad \cos\left(\frac{p}{mc}\omega\right) - mc^2\text{sen}\left(\frac{p}{mc}\omega\right)\right]. \tag{4.88}$$

Já foi dito que nosso objetivo é remover os operadores ímpares. Portanto, veremos qual a forma do operador ω para que isso aconteça. Escrevendo o termo que multiplica o operador $\hat{\alpha}\cdot\hat{p}$ como

$$cp \quad \cos\left(\frac{p}{mc}\omega\right) - mc^2\text{sen}\left(\frac{p}{mc}\omega\right) = cp \quad \cos\left(\frac{p}{mc}\omega\right)\left[1 - \frac{mc}{p}\text{tg}\left(\frac{p}{mc}\omega\right)\right], \tag{4.89}$$

[3] Devemos lembrar que a exponencial expandida em Série de Taylor é $e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$.

[4] Sendo a função seno e a cosseno em Série de Taylor dadas, respectivamente, por: $senx = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}$ e $cosx = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}$.

podemos verificar que escolhendo ω como

$$\omega = \frac{mc}{p}\text{tg}^{-1}\left(\frac{p}{mc}\right), \tag{4.90}$$

elimina-se o termo contendo o operador $\hat{\alpha}\cdot\hat{p}$ da hamiltoniana transformada $\hat{H}'$. De modo que, a equação (4.88) se reduz a:

$$\hat{H}' = \hat{\beta}\left[mc^2\cos\left(\frac{p}{mc}\omega\right) + cp \quad \text{sen}\left(\frac{p}{mc}\omega\right)\right]. \tag{4.91}$$

Para finalizar, usamos as seguintes relações trigonométricas

$$\text{arctg}x = \text{arc sen}\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right) \tag{4.92}$$

reescrevemos a hamiltoniana como

$$\hat{H}' = \hat{\beta}\left[mc^2\frac{mc}{\sqrt{p^2+m^2c^2}} + \frac{cp^2}{\sqrt{p^2+m^2c^2}}\right]$$

$$\hat{H}' = \hat{\beta}c\sqrt{p^2+m_0^2c^2} \tag{4.93}$$

que é o resultado obtido para a solução da partícula livre. Desta forma, a equação (4.82) possui soluções de energias positivas para as componentes superiores e energias negativas para as componentes inferiores. ψ' é dividido em componentes superiores e inferiores [118]

$$\psi' = \varphi' + \chi' \tag{4.94}$$

onde

$$\varphi' = \left(\frac{1+\beta}{2}\right)\psi' \quad \text{e} \quad \chi' = \left(\frac{1-\beta}{2}\right)\psi', \tag{4.95}$$

de modo que a equação (4.82) é dividida em duas

$$\begin{aligned} E_p\varphi' &= i\frac{\partial\varphi'}{\partial t} \\ -E_p\chi' &= i\frac{\partial\chi'}{\partial t}. \end{aligned} \tag{4.96}$$

De maneira explicita, temos que [86]

$$\frac{1+\beta}{2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \frac{1-\beta}{2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{4.97}$$

4.2.2 A Transformação de Foldy-Wolthuysen na presença de um campo externo

A situação física a ser considerada agora é a partícula de Dirac interagindo com um campo externo, a exemplo do campo eletromagnético. Na presença de interação não é possível remover os operadores ímpares através de uma única transformação canônica, mas podemos conseguir isto através de uma sequência de transformações. De modo geral, podemos notar que o hamiltoniano pode sempre ser escrito na forma

$$\hat{H} = \hat{\beta}mc^2 + \hat{\epsilon} + \hat{\mathcal{O}} \tag{4.98}$$

onde $\hat{\epsilon}$ está relacionado ao operador par e $\hat{\mathcal{O}}$ ao operador ímpar [5]. A transformação geral proposta é dada pelo operador hermitiano $\hat{S}$

$$\hat{S} = \frac{-i}{2mc^2}\hat{\beta}\hat{\mathcal{O}}. \tag{4.99}$$

Note que $\hat{S}$ deve ser "pequeno"para podermos fazer uma expansão em série de potencias. Usando (4.86) e considerando potências da ordem de $1/m^2$ no hamiltoniano, obtemos [86]

$$\hat{H}' = \hat{\beta}mc^2+\hat{\epsilon}+\frac{\hat{\beta}}{2mc^2}\hat{\mathcal{O}}^2-\frac{1}{8m^2c^4}\left[\hat{\mathcal{O}},\left[\hat{\mathcal{O}},\hat{\epsilon}\right]+\frac{\partial\hat{\mathcal{O}}}{\partial t}\right]-\frac{1}{2mc^2}\hat{\beta}\frac{\partial\hat{\mathcal{O}}}{\partial t}+\frac{\hat{\beta}}{2mc^2}\left[\hat{\mathcal{O}},\hat{\epsilon}\right]-\frac{1}{3m^2c^4}\hat{\mathcal{O}}^3+... \tag{4.100}$$

onde usamos o fato que $\hat{\beta}$ comuta com todos os operadores pares e anti-comuta com todos os operadores ímpares.

O produto de dois operadores pares ou dois ímpares é um operador par e o produto de um par com um ímpar é um operador ímpar.

Vamos aplicar isto para uma partícula interagindo com um campo eletromagnético externo. Cuja hamiltoniana é

$$\hat{H} = \hat{\beta}mc^2 + c\hat{\alpha}\cdot\left(\hat{p}-\frac{e}{c}\vec{A}\right)+eV(r),$$
$$\hat{H} = \hat{\beta}mc^2 + \hat{\mathcal{O}} + \hat{\epsilon}. \tag{4.101}$$

Comparando as duas equações, definimos de $\hat{\mathcal{O}} = c\hat{\alpha}\cdot\left(\hat{p}-\frac{e}{c}\vec{A}\right)$ e $\hat{\epsilon} = eV(r)$, onde $V(r)$ é o potencial Coulombiano. Analogamente ao que foi feito para a partícula livre, introduzimos uma transformação do tipo (4.86) no objetivo dos operadores ímpares serem

[5] A escolha dessas letras é decorrendo destas palavras escritas na língua inglesa, even e odd

eliminados. Onde S tem a mesma forma que (4.99). Expandindo $\hat{H}'$ em séries de potências de $1/mc^2$ e restringindo os termos para ordens $1/m^3c^6$, temos que [86, 87]

$$\hat{H}' = \hat{H} + i\left[\hat{S},\hat{H}\right] - \frac{1}{2}\left[\hat{S},\left[\hat{S},\hat{H}\right]\right] - \frac{i}{6}\left[\hat{S},\left[\hat{S},\left[\hat{S},\hat{H}\right]\right]\right] + \frac{1}{24}\left[\hat{S},\left[\hat{S},\left[\hat{S},\left[\hat{S},\hat{H}\right]\right]\right]\right] + ... \tag{4.102}$$

Usando as seguintes relações

$$\hat{\beta}\hat{\mathcal{O}} = -\hat{\mathcal{O}}\hat{\beta} \quad \text{e} \quad \hat{\beta}\hat{\epsilon} = \hat{\epsilon}\hat{\beta} \tag{4.103}$$

somos capazes de calcular os comutadores de $\hat{S}$ com $\hat{H}$ na equação (4.102), de maneira que esta equação é reescrita como [86]

$$\begin{aligned}\hat{H}' &\equiv \hat{\beta}\left(mc^2 + \frac{1}{2mc^2}\hat{\mathcal{O}}^2 - \frac{1}{8m^3c^6}\hat{\mathcal{O}}^4\right)\\ &+ \hat{\epsilon} - \frac{1}{8m^2c^4}\left[\hat{\mathcal{O}},\left[\hat{\mathcal{O}},\hat{\epsilon}\right]\right] + \frac{1}{2mc^2}\hat{\beta}\left[\hat{\mathcal{O}},\hat{\epsilon}\right] - \frac{1}{3m^2c^4}\hat{\mathcal{O}}^3\\ &- \frac{1}{48m^3c^6}\hat{\beta}\left[\hat{\mathcal{O}},\left[\hat{\mathcal{O}},\left[\hat{\mathcal{O}},\hat{\epsilon}\right]\right]\right]\end{aligned} \tag{4.104}$$

ou ainda

$$\hat{H}' \equiv \hat{\beta}mc^2 + \hat{\epsilon}' + \hat{\mathcal{O}}'. \tag{4.105}$$

onde

$$\hat{\epsilon}' = \hat{\beta}\left(\frac{1}{2mc^2}\hat{\mathcal{O}}^2 - \frac{1}{8m^3c^6}\hat{\mathcal{O}}^4\right) + \hat{\epsilon} - \frac{1}{8m^2c^4}\left[\hat{\mathcal{O}},\left[\hat{\mathcal{O}},\hat{\epsilon}\right]\right] \tag{4.106}$$

e

$$\hat{\mathcal{O}}' = \frac{1}{2mc^2}\hat{\beta}\left[\hat{\mathcal{O}},\hat{\epsilon}\right] - \frac{1}{3m^2c^4}\hat{\mathcal{O}}^3 - \frac{1}{48m^3c^6}\hat{\beta}\left[\hat{\mathcal{O}},\left[\hat{\mathcal{O}},\left[\hat{\mathcal{O}},\hat{\epsilon}\right]\right]\right]. \tag{4.107}$$

Note que não eliminamos todos os operadores ímpares. Precisamos, portanto, realizar outra transformação. De acordo com a forma geral do operador $\hat{S}$, dado por (4.99), temos que o operador dessa segunda transformação é

$$\hat{S}' = \frac{-i}{2mc^2}\hat{\beta}\hat{\mathcal{O}}'. \tag{4.108}$$

Ao substituir $\mathcal{O}'$ em $\hat{S}'$, temos que o ultimo termo de $\mathcal{O}'$ é desprezado pois torna-se da ordem de $1/m^4c^8$. Deste modo que temos uma segunda hamiltoniana

$$\hat{H}'' = e^{i\hat{S}'}\left(\hat{H}' - i\frac{\partial}{\partial t}\right)e^{-i\hat{S}'}, \tag{4.109}$$

considerando apenas os termos até a ordem $(1/mc^2)^3$, obtemos

$$\hat{H}'' = \hat{\beta}mc^2 + \hat{\epsilon}' + \frac{1}{2mc^2}\hat{\beta}\left[\hat{\mathcal{O}}',\hat{\epsilon}'\right] \tag{4.110}$$

$$\hat{H}'' = \hat{\beta}mc^2 + \hat{\epsilon}' + \hat{\mathcal{O}}'' \tag{4.111}$$

onde $\hat{\mathcal{O}}''$ é da ordem de $1/m^2c^4$. Realizando uma terceira transformação, eliminamos $\hat{\mathcal{O}}''$

$$\hat{S}'' = \frac{-i}{2mc^2}\hat{\beta}\hat{\mathcal{O}}''. \tag{4.112}$$

que implica na seguinte hamiltoniana $\hat{H}'''$:

$$\hat{H}''' = \hat{\beta}mc^2 + \hat{\epsilon}'. \tag{4.113}$$

Desprezando os termos de ordem proporcional à $1/m^3c^6$, finalmente temos

$$\hat{H}''' = \hat{\beta}mc^2 + \hat{\beta}\left(\frac{1}{2mc^2}\hat{\mathcal{O}}^2 - \frac{1}{8m^3c^6}\hat{\mathcal{O}}^4\right) + \hat{\epsilon} - \frac{1}{8m^2c^4}\left[\hat{\mathcal{O}}, \left[\hat{\mathcal{O}}, \hat{\epsilon}\right]\right] \equiv \hat{H}_{FW}. \tag{4.114}$$

Substituindo os valores de $\hat{\mathcal{O}}$ e $\hat{\epsilon}$ podemos calcular $\hat{H}_{FW}$ explicitamente. Para isso, usamos a seguinte relação:

$$\left(\vec{\alpha}\cdot\vec{A}\right)\left(\vec{\alpha}\cdot\vec{B}\right) = \vec{A}\cdot\vec{B} + i\hat{\Sigma}\cdot\left(\vec{A}\times\vec{B}\right).; \tag{4.115}$$

Com isso, temos que a hamiltoniana de Foudy-Wouthuysen é dada por

$$\begin{aligned}
\hat{H}_{FW} &= \hat{\beta}\left[mc^2 + \frac{1}{2m}\left(\hat{p} - \frac{e}{c}\vec{A}\right)^2 - \frac{1}{8m^3c^6}\hat{p}^4\right] \\
&- \frac{e\hbar}{2mc}\hat{\beta}\hat{\Sigma}\cdot\vec{B} + eV - \frac{1}{8m^2c^4}e\hbar^2c^2\vec{\nabla}\cdot\vec{E} \\
&- \frac{i}{8m^2c^4}e\hbar^2c^2\hat{\Sigma}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{E}\right) - \frac{e\hbar}{4m^2c^2}\hat{\Sigma}\cdot\left(\vec{E}\times\vec{p}\right).
\end{aligned} \tag{4.116}$$

Analisando cada termo da equação acima temos o seguinte: O primeiro termo, entre colchetes, descreve o aumento da massa relativística; o segundo, a energia de dipolo magnético e o terceiro, a energia eletrostática; o quarto termo o qual para um núcleo puntiforme é escrito como [89, 86, 118]

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 4\pi\rho \tag{4.117}$$

é chamado termo de Darwin; os dois últimos termos derivam da interação spin-órbita. Supondo um potencial estático, temos que $\vec{\nabla}\times\vec{E} = 0$, e

$$\hat{\Sigma}\cdot\left(\vec{E}\times\vec{p}\right) = -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial r}\hat{\Sigma}\cdot(\vec{r}\times\vec{p}) = -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial r}\left(\hat{\Sigma}\cdot\vec{L}\right), \tag{4.118}$$

desse modo, reescrevemos este termo como

$$\hat{H}_{SO} = \frac{e\hbar}{4m^2c^2}\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial r}\left(\hat{\Sigma}\cdot\vec{L}\right), \tag{4.119}$$

o qual, usando $(\hbar/2)\,\hat{\sigma} = \vec{S}$, pode ainda ser escrito como

$$\hat{H}_{SO} = \frac{e}{2m^2c^2}\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial r}\left(\vec{S}\cdot\vec{L}\right). \tag{4.120}$$

Esta interação é responsável pela separação de estados que possuem mesmo momento angular orbital, mas momento angular total diferente [86] e que vamos estudar na seção (5.2) do próximo capítulo.

4.3 A equação de Dirac no espaço-tempo curvo

É de nosso interesse agora escrever a equação de Dirac, a qual é dada por

$$(i\hbar\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - mc)\,\psi = 0, \tag{4.121}$$

para o espaço-tempo curvo. E isso não significa simplesmente trocar a diferencial parcial pela derivada covariante de Levi-Civita na equação acima, pois esta não é uma equação de campo tensorial. Precisamos lembrar de alguns conceitos importantes do espaço-curvo.

Calcular a derivada de um campo implica comparar o campo em pontos do espaço próximos. Por exemplo, no caso de um campo vetorial, comparamos dois vetores definidos em dois pontos vizinhos. Acontece que, como os pontos são diferentes os vetores pertencem a espaços tangentes diferentes e para podermos compará-los, a variedade (o espaço) deve estar dotado de uma conexão afim (Γ). Com a conexão afim é possível, então, definir a derivada covariante do vetor, a qual é dada pela soma da derivada parcial com o termo estabelecido pela conexão afim:

$$\nabla_c X^a = \partial_c X^a + \Gamma^a_{bc} X^b. \tag{4.122}$$

A equação de Dirac no espaço-tempo de Minkowski envolve a derivada parcial do espinor ψ. Assim para escrevermos a equação de Dirac no espaço curvo, é necessário definir a derivada covariante do espinor, o que, evidentemente, requer o conceito de conexão espinorial, que permite comparar espinores associados a pontos vizinhos da variedade. Com essa finalidade precisamos de uma discussão preliminar.

A covariância de Lorentz da equação de Dirac pode ser transferido ao caso da geometria pseudo-Riemanniana localmente, pois localmente o espaço é aproximadamente plano e as leis da Teoria da Relatividade Restrita são válidas. Em qualquer ponto x introduzimos um espaço tangente pseudo-Euclidiano. Para este espaço tangente

escolhemos a base tétrada $e_{\mu}^{(a)}(x)$, com $a = 0, 1, 2, 3$. As tétradas relacionam um sistema de coordenadas qualquer (rotulados pelos índices gregos) a um sistema de coordenadas Minkowskiano local (rotulados por índices latinos), da seguinte forma [90]

$$g_{\mu\nu} = e_{\mu}^{(a)} e_{\nu}^{(b)} \eta_{ab}, \tag{4.123}$$

ou equivalente

$$\eta_{ab} = g_{\mu\nu} e_{(a)}^{\mu} e_{(b)}^{\nu}, \tag{4.124}$$

onde $g_{\mu\nu}$ é a métrica associada ao espaço-tempo nesse dado sistema de coordenadas.

Admitindo que $e_{\mu}^{(a)}(x)$ tem uma inversa $e_{(a)}^{\mu}(x)$, temos as seguintes relações

$$e_{(a)}^{\mu} e_{\nu}^{(a)} = \delta_{\nu}^{\mu} \quad \text{e} \quad e_{\mu}^{(a)} e_{(b)}^{\mu} = \delta_{b}^{a}. \tag{4.125}$$

Qualquer outro vetor pode ser escrito em termos das componentes dessa base tétrada. Para um vetor geral V, por exemplo, temos

$$V^{a} = e_{\mu}^{(a)} V^{\mu} \tag{4.126}$$

onde V^{a} e V^{μ} são as componentes de um vetor V na base local e coordenada, respectivamente. De modo análogo, escrevemos as matrizes de Dirac em um sistema de coordenadas arbitrário

$$\gamma^{\mu} = e_{(a)}^{\mu} \gamma^{a} \tag{4.127}$$

onde γ^{a} é a matriz no espaço-tempo de Minkowski. Usando (4.127) obtemos a relação de anti-comutação

$$\begin{aligned} \{\gamma^{\mu}, \gamma^{\nu}\} &= \gamma^{\mu}\gamma^{\nu} + \gamma^{\nu}\gamma^{\mu} \\ &= e_{(a)}^{\mu} \gamma^{a} e_{(b)}^{\nu} \gamma^{b} + e_{(b)}^{\nu} \gamma^{b} e_{(a)}^{\mu} \gamma^{a} \\ &= e_{(a)}^{\mu} e_{(b)}^{\nu} \left\{\gamma^{a}, \gamma^{b}\right\} \\ &= 2g^{\mu\nu}, \end{aligned} \tag{4.128}$$

onde $g^{\mu\nu}$ é a inversa de $g_{\mu\nu}$.

Feito isto, podemos agora retomar a discussão sobre a derivada covariante do espinor. Considerando a conexão espinorial Γ_{α}, podemos escrever:

$$\nabla_{\alpha}\psi(x) = \partial_{\alpha}\psi(x) + \Gamma_{\alpha}\psi(x). \tag{4.129}$$

Para identificarmos Γ_α, precisamos conhecer como o termo de conexão espinorial Γ_α se transforma sob transformações de Lorentz locais. Vimos, anteriormente, na equação (4.34) que o espinor se transforma conforme a seguinte equação:

$$\psi(x) \to \psi'(x) = S\left(\Lambda\left(x\right)\right)\psi(x) \tag{4.130}$$

a qual, em termos de componentes é escrita como

$$\psi^a(x) \to \psi'^a(x) = S^a_b\left(\Lambda\left(x\right)\right)\psi^b(x). \tag{4.131}$$

Agora, vamos requerer que a derivada covariante do espinor seja um espinor. Assim, sob uma transformação de Lorentz, a derivada se transforma como:

$$\nabla_\alpha \psi'^a = S^a_b\left(\Lambda\left(x\right)\right)\nabla_\alpha \psi^b \tag{4.132}$$

de onde segue que Γ_α se transforma da seguinte maneira [87, 47]

$$\Gamma'^a_{\alpha b} = S^a_b \Gamma^d_{\alpha f}\left(S^{-1}\right)^f_b - \left(\partial_\alpha S^a\right)_d\left(S^{-1}\right)^d_b, \tag{4.133}$$

ou, escrevendo de forma compacta [47],

$$\Gamma'_\alpha = S\Gamma_\alpha S^{-1} - \left(\partial_\alpha S\right)S^{-1}. \tag{4.134}$$

Este resultado nos garante que a derivada covariante de um espinor se transforma como um espinor sob transformações de Lorentz. É possível verificar que a equação (4.134) é satisfeita pela conexão espinorial [91]

$$\Gamma_\alpha = \frac{-i}{4}\sigma^{ab}e^\nu_{(a)}(x)\nabla_\alpha e_{(b)\nu}(x), \tag{4.135}$$

onde $\sigma^{ab} = (i/2)\left[\gamma^a, \gamma^b\right]$, $\nabla_\alpha e_{(b)\nu}$ é derivada covariante de Levi-Civita da tétrada, dada por

$$\nabla_\alpha e_{(b)\nu}(x) = \partial_\alpha e_{(b)\nu}(x) - \Gamma^\lambda_{\nu\alpha}e_{(b)\lambda}(x), \tag{4.136}$$

onde

$$\Gamma^\lambda_{\nu\alpha} = \frac{1}{2}g^{\lambda\theta}(x)\left(\partial_\alpha g_{\nu\theta}(x) + \partial_\nu g_{\alpha\theta}(x) - \partial_\theta g_{\nu\alpha}(x)\right). \tag{4.137}$$

Com isto, podemos escrever a equação de Dirac no espaço curvo como segue

$$\left[i\hbar e^\mu_{(c)}\gamma^c\left(\partial_\mu + \Gamma_\mu\right) - mc\right]\psi(x) = 0 \tag{4.138}$$

com Γ_μ dado por (4.135). Esta conexão é compatível com a métrica e tem torção nula.

Partícula de Dirac em um campo gravitacional esfericamente simétrico

Como aplicação da equação de Dirac no espaço curvo, no próximo capítulo estudaremos a influência do campo gravitacional produzido pelo próton no comportamento de um elétron no átomo de hidrogênio. Em primeira aproximação, é razoável supor que o próton produz um campo gravitacional estático com simetria esférica. O elemento de linha do espaço estático esfericamente simétrico pode ser expresso, em coordenadas isotrópicas, da seguinte forma:

$$ds^2 = -w^2 dt^2 + v^2 \delta_{ij} dx^i dx^j \tag{4.139}$$

onde w e v são funções que dependem apenas da coordenada radial r. A assinatura da métrica considerada aqui é $(-,+,+,+)$.

Como a métrica é diagonal, temos que os únicos elementos não nulos do tensor métrico são $g_{00} = -w^2$ e $g_{ij} = v^2 \delta_{ij}$. Com isso, usamos a relação (4.123) e encontramos que as componentes não nulas da base tetrada são

$$e_0^{\hat{0}} = w \tag{4.140}$$

$$e_i^{\hat{j}} = v\delta_i^j; \tag{4.141}$$

devemos estar atentos ao fato que as componentes de índices gregos são abaixados e levantados pelo tensor métrico $g_{\mu\nu}$ e as de índices latinos, pela métrica de Minkowski.

Dando continuidade, usando a equação (4.137), podemos calcular as componentes não nulas do termo de conexão de Levi-Civita, os quais são dados por

$$\begin{gathered} \Gamma_{i0}^0 = \tfrac{1}{2w^2}\partial_i\left(w^2\right) \\ \Gamma_{00}^i = \tfrac{1}{2v^2}\partial_i\left(w^2\right) \\ \Gamma_{kl}^i = \tfrac{1}{2v^2}\delta^{ij}\left[\partial_l\left(\delta_{kj}v^2\right) + \partial_k\left(\delta_{lj}v^2\right) - \partial_j\left(\delta_{kl}v^2\right)\right] \end{gathered} \tag{4.142}$$

Com estes resultados somos capazes de calcular os termos de conexão espinorial temporal e espacial, respectivamente

$$\Gamma_0 = -\frac{1}{awv}\hat{\alpha}\cdot\vec{\nabla}\left(w^2\right) \tag{4.143}$$

$$\Gamma_i = -\frac{i}{4v^2}\hat{\Sigma}\times\vec{\nabla}\left(v^2\right), \tag{4.144}$$

para chegar a esses resultados, usamos o seguinte: $2i\hat{\alpha}\cdot\vec{\nabla}\left(v^2\right) = \hat{\alpha}\cdot\left[\hat{\sigma}\times\vec{\nabla}\left(v^2\right)\right]$, $\sigma^{\hat{0}\hat{i}} = i\alpha^i$, $\sigma^{\hat{i}\hat{i}} = 0$ e $\sigma_{ij} = \epsilon_{ijk}\sigma^k$. Isto vem da relação $\sigma^{ab} = (i/2)\left[\sigma^a, \sigma^b\right]$.

Assim, multiplicando, pela esquerda, a equação de Dirac (4.138) por $\hbar c e_0^{\hat{0}} \gamma^{\hat{0}}$, e lembrando que $\gamma^{\hat{0}} = \beta$, $\gamma^{\hat{i}} = \beta\alpha^i$ e $\partial_0 = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}$, obtemos, para esta métrica, a seguinte equação

$$\begin{aligned} i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} &= \left[\frac{i\hbar c}{4wv}\hat{\alpha}\cdot\vec{\nabla}\left(w^2\right) - i\hbar c\frac{w}{v}\hat{\alpha}\cdot\vec{\nabla}\right. \\ &\quad \left. -i\,\hbar c\frac{w}{2v^3}\hat{\alpha}\cdot\vec{\nabla}\left(v^2\right) + G\left(r\right)\beta mc^2 + \beta mc^2\right]\psi\left(x\right), \end{aligned} \tag{4.145}$$

onde $G(r) = w - 1$. Esta equação representa a forma mais geral da equação de Dirac no espaço tempo curvo para um sistema esfericamente simétrico e estático. Para resolvê-la é necessário especificar as funções w^2 e v^2.

Um detalhe importante é que a hamiltoniana precisa ser hermitiana para que possua autovalores reais e assim, tenha significado físico. Para isto, a seguinte condição deve ser satisfeita [91]

$$\langle H\rangle = \int d^3x\sqrt{g}\phi^\dagger(x)H\psi(x) = \left\langle H^\dagger\right\rangle, \tag{4.146}$$

onde g é o determinante de g_{ij} e as funções $\phi(x)$ e $\psi(x)$ são estados da partícula.

Por uma transformação conveniente de H, podemos suprimir o termo $\sqrt{g}$ da integral acima. Com isso, poderemos calcular os valores médios dos operadores usando a medida do espaço-plano, o que para nós é mais conveniente. Para isto, usando uma transformação Θ inversível ($\Theta^{-1}\Theta = 1$), definimos uma nova hamiltoniana:

$$\bar{H} = \Theta H \Theta^{-1}. \tag{4.147}$$

Assim, $\left\langle \bar{H}\right\rangle$ será dado por:

$$\left\langle \bar{H}\right\rangle = \int d^3x\bar{\phi}^\dagger\bar{H}\bar{\psi}. \tag{4.148}$$

Nessa representação o estado ψ é levado no estado $\bar{\psi} = \Theta\psi$.

Assim, (4.148) pode ser reescrita como:

$$\left\langle \bar{H}\right\rangle = \int d^3x\Theta^2\phi^\dagger H\psi. \tag{4.149}$$

Para que $\langle H\rangle = \left\langle \bar{H}\right\rangle$, temos que impor que $\Theta^2 = \sqrt{g}$, ou seja, $\Theta = v^{3/2}$. Assim, usando (4.147), temos de maneira explicita, que a hamiltoniana procurada é dada por:

$$\bar{H} = \frac{i\hbar c}{4wv}\hat{\alpha}\cdot\vec{\nabla}\left(w^2\right) + i\hbar c\frac{w}{4v^3}\hat{\alpha}\cdot\vec{\nabla}\left(v^2\right) - i\hbar c\frac{w}{v}\hat{\alpha}\cdot\vec{\nabla} + G\left(r\right)\beta mc^2 + \beta mc^2. \tag{4.150}$$

Essa hamiltoniana é a mais geral possível para a equação de Dirac no espaço-tempo curvo com geometria estática esfericamente simétrica. No próximo capítulo estudaremos

a hamiltoniana (4.150) para certas funções w^2 e v^2 especificadas, que descrevem o campo gravitacional gerado pelo próton.

Capítulo 5

Testes espectroscópicos

Estudamos no primeiro capítulo do presente trabalho a existência de teorias que prevêem o fortalecimento do campo gravitacional em curtas distâncias, como as teorias de dimensões extras. Motivados por essas teorias, obtivemos novos limites empíricos para o desvio da gravidade padrão, em escala de comprimento atômico, utilizando recentes medidas da espectroscopia do átomo de hidrogênio [101], os quais serão apresentados aqui. O capítulo está organizado como segue: na primeira seção, trazemos limites extraídos da transição $1S-3S$, os quais foram comparados com prévios limites do Hélio antiprotônico; na segunda seção, os limites obtidos tem origem nos efeitos do acoplamento spin-órbita gravitacional na transição $2P_{1/2}-2P_{3/2}$ do hidrogênio. Veremos que essa transição pode ser utilizada como um teste de um potencial pós-Newtoniano no domínio atômico.

5.1 Vínculos espectroscópicos extraídos da transição $1S-3S$

Os limites empíricos mais fortes de desvio do campo gravitacional em um certo intervalo de comprimento, próximo a escala Angstrom, impostos pela espectroscopia atômica, até onde sabemos, são determinados pela análise de transições no hélio antiprotônico ($\bar{p}He^{+}$) [100, 96].

Nesta parte inicial do capítulo, investigaremos possíveis desvios do potencial Newtoniano gravitacional na escala atômica usando novos dados da espectroscopia do hidrogênio. Nosso objetivo é comparar os limites para os parâmetros de Yukawa determinados pela espectroscopia do Hidrogênio com os estabelecidos pelo Hélio

antiprotônico [101].

5.1.1 O Hélio antiprotônico

Primeiramente vamos conhecer um pouco desse átomo exótico. O Hélio antiprotônico é composto de um núcleo de Hélio com um antipróton substituindo um dos dois elétrons do hélio natural. Este átomo foi descoberto cerca de 25 anos atrás, nas instalações do acelerador KEK, no Japão, em um experimento no qual a substituição antiprotônica ocorre quando os antiprótons são colocados em um alvo de Hélio liquido [102]. Essa mudança de um dos dois elétrons por um antipróton altera a interação gravitacional do átomo, entre o antipróton e o núcleo, tornando-a cerca de duas mil vezes maior do que entre o núcleo e o elétron, devido a massa do antipróton ser aproximadamente 1836 vezes maior do que a do elétron ($m_p \sim 1836 m_e$). Por este motivo, o Hélio antiprotônico pode ser visto como um sistema adequado para a investigação do comportamento da gravidade no domínio atômico.

Uma vez que a distância relativa entre o núcleo e o antipróton, que depende do inverso da massa do antipróton, pode ser muito menor que o tradicional raio Bohr ($a_0 \simeq 0.5$ Å), podemos pensar que existe outra vantagem ao considerar o Hélio antiprotônico, que é a possibilidade de investigar a interação gravitacional em um intervalo de comprimento de cerca de milésimos de Angstrom. No entanto, neste ponto, encontramos um aspecto negativo. Esses átomos exóticos são geralmente destruídos em picossegundos por mecanismos de aniquilação matéria-antimatéria dos antiprótons com o núcleo, quando esses se encontram muito próximos um do outro [103]. Logo, não há possibilidade de estudar a espectroscopia desse átomo com a presente tecnologia.

Por outro lado, em uma fração de átomos de Hélio antiprotônicos sintetizados em laboratório, o antipróton se encontra em um estado de Rydberg com alto número quântico principal n e alto momento angular l, $n \sim l+1$ [103]. Em estados com $n \sim 40$, a distância média do antipróton para o núcleo é de aproximadamente a_0. Com isso, os antiprótons nesses estados quase não se sobrepõem ao núcleo e como consequência tem seu tempo de vida aumentado para a ordem de microssegundos. Desta forma, esses estados de Rydberg podem ser investigados por espectroscopia de laser.

As frequências de transição entre esses estados metaestáveis foram medidos usando uma frequência óptica de femtossegundos em conjunto com um laser amplificado por pulso

de onda contínua, pelo Desacelerador Antiprotônico do CERN[1], com precisão da ordem de 10^{-9} [103, 104]. Baseado em cálculos da eletrodinâmica quântica, esses resultados experimentais foram comparados com os cálculos teóricos [105], verificando um acordo preciso entre eles [106]. Estes resultados impõem limites nos valores que os parâmetros α e λ podem assumir. Por exemplo, em 1σ nível de confiança , $\alpha < 10^{28}$ para $\lambda \sim 1$Å[100].

5.1.2 Calculando novos vínculos

Como já foi mencionado, nosso objetivo, neste momento, é comparar limites, para os parâmetros de Yukawa, determinados pela espectroscopia do átomo de hidrogênio com aqueles já estabelecidos pelo Hélio antiprotônico. Embora a interação gravitacional entre elétron e próton no átomo de Hidrogênio seja muito menor do que a interação gravitacional entre antipróton-núcleo no ($\bar{p}He^{+}$), os dados espectroscópios disponíveis do hidrogênio são muito mais precisos. Por exemplo, o valor experimental para a frequência de transição $1S-2S$ medido por [107] foi de $f^{exp}_{1S-2S} = 2466061413187035(10)$Hz, onde o erro de $\delta_{exp} = 10$Hz corresponde a uma precisão relativa da ordem de 10^{-14}. Se o valor teórico f^{th}_{1S-2S}, previsto pela QED, tivesse uma incerteza da mesma ordem de magnitude, o acordo entre eles colocaria uma restrição muito mais forte para o parâmetro de Yukawa. Contudo, o valor experimental para a frequência de transição $1S-2S$ é o valor mais preciso do conjunto de dados empregado para determinar os valores de certas constantes espectroscópicas fundamentais, como a constante de Rydberg (Ver tabela XVIII da referência [64]). Obviamente, o valor calculado para essa transição não deve ser visto como um valor teórico, pois as previsões teóricas dependem destas constantes [108].

Por este motivo, vamos considerar a transição $1S-3S$. Nas mais recentes medidas desta frequência de transição f^{exp}_{1S-3S}, a precisão relativa alcançada é da ordem de 10^{-12} [109]. O valor teórico calculado em [108] é da mesma ordem. Embora essa medida, f^{exp}_{1S-3S}, não seja tão precisa quanto f^{exp}_{1S-2S}, existe uma vantagem em usá-la, que é o fato do valor isolado da frequência de transição $1S-3S$ não pertencer aos dados utilizados nos ajustes de mínimo quadrado dos valores das constantes fundamentais recomendados pelo CODATA-2002 [110], os quais foram empregados na referência [108] para calcular a

[1]CERN é a Organização Europeia para a Pesquisa Nuclear. É o maior laboratório de física de partículas do mundo, localizado em Meyrin, na região da Genebra

frequência de transição.

Para esta transição $1S-3S$, temos que a frequência teórica [108] e experimental [109] são, respectivamente:

$$f^{th}_{1S-3S} = 2922743278671.6(1.4)\text{kHz}, \tag{5.1}$$

$$f^{exp}_{1S-3S} = 2922743278671.5(2.6)\text{kHz}. \tag{5.2}$$

O valor entre parênteses representa a incerteza. Admitindo que as incertezas teórica e experimental são independentes, temos que o erro combinado é

$$\delta f = \sqrt{\delta^2_{th} + \delta^2_{exp}} \simeq 3.0\text{kHz}. \tag{5.3}$$

Está claro que a previsão teórica f^{th}_{1S-3S} concorda bem com a frequência medida f^{exp}_{1S-3S} dentro do erro combinado. Portanto, qualquer nova interação hipotética, a exemplo da modificação na interação gravitacional, não deve introduzir correções para a frequência de transição em uma quantidade Δf maior que o erro δf. A condição $\Delta f < \delta f$ impõe certos limites empíricos para os parâmetros de Yukawa, α e λ.

A suposta correção, Δf, que a modificação da gravidade fornece à transição $1S-3S$ pode ser calculada pelo método perturbativo. A nova interação gravitacional entre o próton e elétron é descrita, na ordem principal, pela Hamiltoniana $H^{(0)}_G = m_e\varphi$, onde φ é o potencial gravitacional modificado, produzido pelo próton, dado por

$$\varphi = \frac{-Gm}{r}\left(1 + \alpha e^{-r/\lambda}\right). \tag{5.4}$$

A Hamiltoniana $H^{(0)}_G$ deve ser considerada com um pequeno termo da Hamiltoniana atômica. De acordo com o formalismo de perturbação, em primeira ordem, esta nova interação diminuirá a energia de cada estado ψ por uma quantidade $\left\langle H^{(0)}_G \right\rangle$, que é igual ao valor médio de $H^{(0)}_G$ no estado ψ. Deste modo, a interação gravitacional mudará a energia do estado $1S$ e $3S$ em diferentes quantidades, aumentando o hiato de energia entre estes estados. Isto implica uma correção da frequência de transição, que em primeira ordem de aproximação, é dada por:

$$\Delta f = \frac{\left\langle H^{(0)}_G \right\rangle_{3S} - \left\langle H^{(0)}_G \right\rangle_{1S}}{h}, \tag{5.5}$$

onde $h = 6.62607015 \times 10^{-34}$J/Hz é a constante de Planck [111]. O valor esperado destas duas quantidades dependem da função radial do átomo de hidrogênio para o estado $3S$,

R_{30}, e para o estado $1S$, R_{10}, os quais são dados respectivamente por:

$$R_{30} = \frac{2}{3\sqrt{3a_0^3}}\left(1 - \frac{2r}{3a_0} + \frac{2r^2}{27a_0^2}\right)e^{-r/3a_0}, \tag{5.6}$$

$$R_{10} = \frac{2}{\sqrt{a_0^3}}e^{-r/a_o}. \tag{5.7}$$

Os vínculos são encontrados impondo-se a condição de que $\Delta f < \delta f$. Na figura 5.1, mostramos os limites obtidos para os parâmetros de Yukawa para esta condição. Podemos ver que esses novos limites são um pouco mais fortes do que aqueles obtidos da espectroscopia do Hélio antiprotônico. Para $\lambda = 1$Å, por exemplo, os dados mostram que $\alpha < 1.7 \times 10^{27}$ para 1σ nível de confiança.

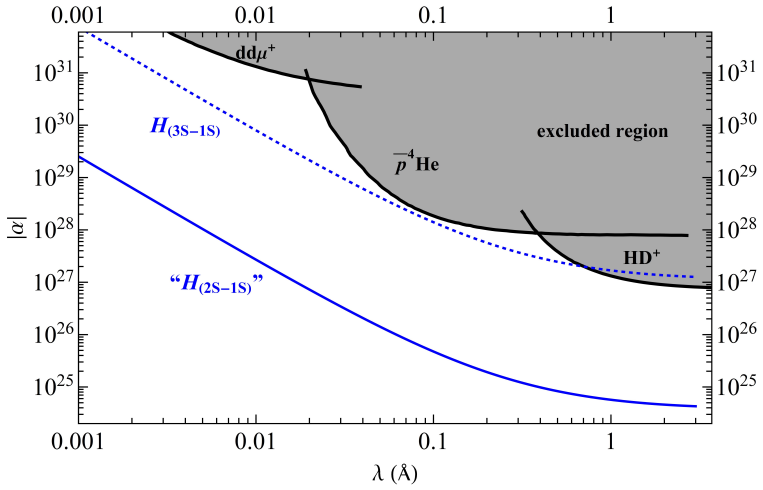

Figura 5.1: Os limites obtidos aqui (linha H_{1S-3S}), para desvios do potencial Newtoniano, através da espectroscopia do átomo de hidrogênio na transição dos estados $1S - 3S$ são comparados com outros limites espectroscópicos já existentes para os seguintes átomos: $dd\mu^+$, $\bar{p}He^+$ e HD^+, tais dados foram extraídos da referência [100]. A curva H_{1S-2S} é apenas uma linha de referência que mostra quão forte a espectroscopia do hidrogênio poderia ser usando-se a incerteza experimental da transição $1S - 2S$.

Observe que, de acordo coma a figura 5.1, para $\lambda < 0.6$Å, o limite imposto por H_{1S-3S} é mais forte do que outros limites espectroscópicos, que incluem vínculos empíricos determinados pela espectroscopia do $dd\mu^+$ (que é uma molécula exótica formada por dois deuterons e um múon) e também pelo HD^+, molécula ionizada formada por um hidrogênio e um deutério.

A frequência de transição $1S-3S$ que usamos na nossa análise é uma das medidas mais precisas da espectroscopia do hidrogênio, perdendo somente para a transição $1S-2S$

[109]. Baseado nestas duas frequências de transição é possível inferir o raio de carga do próton. A referência [109] traz este valor como sendo $r_P = 0.877(13)$fm, o qual está em acordo com o valor recomendado pelo CODATA-2014 ($r_p = 0.8751(61)$fm) [112] e discorda em 2.8σ do valor deduzido por meio da espectroscopia do hidrogênio muônico [60, 61]. Se pretendemos obter uma analise espectroscópica menos dependente do raio do próton, torna-se mais conveniente recorrer aos estados de Rydberg [109].

Efeitos das dimensões ocultas foram estudados em certos estados de Rydberg. Na referência [113], por exemplo, esses efeitos foram estudados através de um modelo de potencial gravitacional modificado por meio de uma parametrização da lei de potência; e mais recentemente, na referência[114], estes estados foram considerados com o objetivo de restringir interações não-padrão usando a parametrização de Yukawa. Conforme esperado, os limites mais fortes são encontrados em uma escala de comprimento além do raio de Bohr, uma vez que os estados de Rydberg possuem um grande número quântico principal. O resultado obtido na referência [114] está muito próximo do nosso, o qual admitindo uma precisão relativa da ordem de 10^{-12} nos níveis de energia, verificou que a intensidade de uma da nova interação deve ser menor que 10^{28} para $\lambda > 10^{-9}$m. Eles também consideraram os estados de Rydberg combinados com dados de outras transições; o resultado é compatível com o nosso: o limite de α é quase da ordem de 10^{27} num alcance de 10^{-10}m a 10^{-7}m para um nível de confiança de 95%.

Uma vez que o principal objetivo deste trabalho é usar novos dados da espectroscopia de hidrogênio para colocar restrições independentes nos desvios da gravidade padrão, até aqui consideramos apenas restrições espectroscópicas. No entanto, também é interessante comparar essas restrições com os limites empíricos impostos por fontes de diferentes naturezas. Na Figura 5.2, além das restrições espectroscópicas, incluimos outros limites empíricos estabelecidos por dados com origens distintas, como colisores de partículas [96], Efeito Casimir, balança de torção e experimento Lunar Laser Ranging, entre outros.

Observe na figura 5.2 que cada limite se destaca em diferentes escalas de comprimento. Como podemos ver, nosso resultado para a frequência de transição $1S-3S$ é superado pelo vínculo dos colisores para um curto valor de λ e pelo HD^+, para $\lambda > 0.6$ Å. Devemos também destacar que os limites obtidos por experimentos de espalhamento de neutrons, trazidos em [94], são mais fortes do que os limites espectroscópicos.

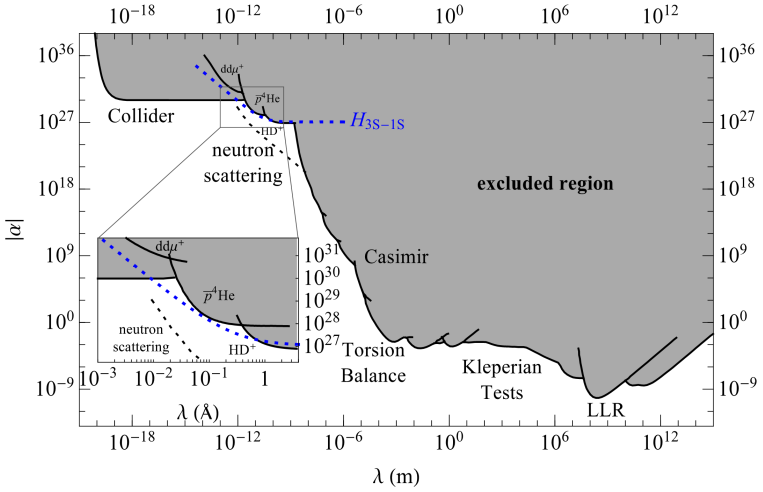

Figura 5.2: Nesta figura, comparamos os limites espectroscópicos para os parâmetros de Yukawa obtidos neste trabalho através da frequência de transição $1S-3S$, os quais estão representados pela linha pontilhada, com limites empíricos determinados por origens diferentes.

5.2 Vínculos espectroscópicos extraídos da transição $2P_{1/2} - 2P_{3/2}$

Aqui, inspirados no experimento MTV-G, investigamos efeitos gravitacionais na precessão de spin de um elétron que é encontrado em um estado atômico, adotando a perspectiva quântica. Para isto, consideramos a equação de Dirac no espaço-tempo curvo, de onde discutimos a influência do acoplamento spin-órbita gravitacional na separação fina entre os estados $2P_{1/2}$ e $2P_{3/2}$. Veremos que essa análise não impõe limites empíricos apenas aos desvios do potencial newtoniano, mas na verdade nos permite investigar a influência de um potencial pós-newtoniano associado aos componentes espaciais da métrica na escala de comprimento atômico.

5.2.1 O experimento MTV-G

A sigla MTV-G é derivada das iniciais de " Polarímetro **M**ott para experimentos de **T**-**V**iolação " (Polarímetro Mott [2] é o dispositivo experimental utilizado para medir estados de polarização dos elétrons e T-Violação se refere à simetria de inversão temporal). Enquanto a letra G se refere a **G**ravidade. A inserção da gravidade no experimento MTV

[2]Mott foi um físico britânico

está ligada ao objetivo deste experimento: investigar a possibilidade de um forte campo gravitacional ao redor do núcleo atômico, através da medida de precessão do spin de um elétron, como uma nova abordagem na busca por dimensões extras [95].

O polarímetro Mott é um dispositivo cujo funcionamento se baseia num espalhamento semelhante ao de Rutherford, no entanto, utiliza elétrons em vez de partículas alfa; tal espalhamento recebe o nome de espalhamento Mott. A escolha pelo uso de elétrons se dá pelo fato deles não interagirem através da força forte. Isso permite que os mesmos penetrem o núcleo atômico, o que nos fornece informações importantes sobre a estrutura nuclear. Este espalhamento permite a separação dos dois estados de spin de um feixe de elétrons e é usado principalmente para medir a polarização do spin.

Mott, em 1929, se questionava sobre como os efeitos do spin do elétron poderiam ser detectados experimentalmente de maneira direta. Baseado no Principio da Incerteza, ele mostrava a impossibilidade dessa observação utilizando um aparato tipo Stern-Gerlach (SG), que mede o spin do elétron indiretamente através de átomos sob a ação de um campo magnético não uniforme. O experimento SG detecta o spin de um átomo. Enquanto Mott gostaria de detectar o spin de um elétron "isolado", não como parte de um átomo ou íon. Mott propôs então que o momento magnético de spin do um elétron livre poderia ser detectado por um experimento de duplo espalhamento, conforme esquematizado na figura 5.3. A proposta de Mott está baseada na assimetria esquerda-direita provocada pelo acoplamento spin-órbita. Isso pode ser ilustrado com o seguinte argumento. O acoplamento spin-órbita, que foi considerado com mais detalhes no capítulo anterior e será tratado nas próximas seções, é proporcional ao produto interno entre o spin ($\vec{S}$) da partícula e o seu momento angular orbital ($\vec{L}$). Devido a esse acoplamento a hamiltoniana que descreve o espalhamento do elétron com átomo conterá um termo proporcional a $\vec{S}\cdot\vec{L}$ (ver equação (4.120). Assim, suponha que o elétron está num estado com, digamos, spin para cima (em relação ao plano de espalhamento - ver figura 5.3). O resultado do espalhamento dependerá do lado de incidência do elétron em relação ao núcleo, isto é, se o elétron se aproxima pela direita ou pela esquerda, já que numa situação, $\vec{L}$ será paralelo a $\vec{S}$ e na outra $\vec{L}$ será antiparalelo. Assim, num caso a hamiltoniana H_{SO} será positiva, no outro negativa.

Atualmente, os polarímetros baseados no espalhamento de Mott (ou, mais simplesmente, nos polarímetros de Mott) são amplamente utilizados em física atômica

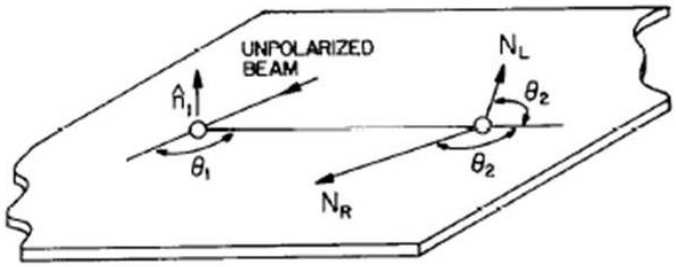

Figura 5.3: Esta figura retirada da referência [115] representa o esquema de um experimento de duplo espalhamento, no qual um feixe de elétrons não polarizados é inicialmente espalhado por núcleos com alto número atômico Z em um feixe ou folha-alvo. Devido à interação spin-órbita, a dispersão de grandes ângulos ($\theta \gtrsim 90°$) do primeiro alvo produz elétrons com uma significativa polarização de spin transversal ao plano de espalhamento. A dispersão desses elétrons polarizados do segundo alvo resulta em uma assimetria de espalhamento esquerda-direita, novamente devido à interação spin-órbita, que é proporcional à polarização induzida pela primeira dispersão.

e molecular, de estado sólido, nuclear e de alta energia [115]. Frequentemente, em experimentos de espalhamento de elétrons, usa-se folha de ouro por três motivos: esse material possui alto número atômico, não é reativo [3] e pode ser facilmente transformado em filme fino, o que reduz o espalhamento múltiplo.

No caso do MTV-G, temos que o aparato experimental consiste de uma fonte de radiação Sr^{90} [4], uma folha de espalhamento primário, um polarímetro Mott, uma folha de espalhamento secundário e uma câmara de rastreamento de elétrons [95]. Os elétrons emitidos da fonte de radiação beta possuem polarização natural em sua direção longitudinal. A ideia é que o spin do elétron sofre um efeito de precessão decorrente da precessão geodésica gravitacional, além da precessão eltromagnética dominante. Essa precessão provocada na folha de espalhamento primária é examinada pelo dispositivo MTV ao verificar a assimetria do espalhamento secundário.

É interessante mencionar que a precessão geodésica de um corpo macroscópico girante viajando em um espaço-tempo curvado pela presença do campo gravitacional da Terra foi medido pelo satélite da NASA Gravity Probe B em 2011. Os dados estão de

[3] Dizer que um elemento não é reativo significa que ele não forma uma camada de óxido.

[4] Isotopo radioativo do Estôncio que emite radiação beta de alta energia

acordo com a previsão da Relatividade Geral.

O experimento MTV-G foi realizado em TRIUMF em 2011 e teve como resultado um novo vínculo para α [95], como mostrado na figura 5.5.

5.2.2 Acoplamento spin-órbita gravitacional

Já é de nosso conhecimento, que em teorias de espaço curvo, um vetor paralelamente transportado ao longo de um caminho fechado ao retornar ao ponto inicial, sua direção final não coincide necessariamente com a orientação original. Diante disto, se consideramos uma partícula elementar em movimento num campo gravitacional, esperamos que, de acordo com a Teoria da Relatividade Geral, seu spin sofrerá uma precessão. Tal efeito foi investigado pelo experimento MTV-G. Alguns resultados foram obtidos para uma descrição clássica da precessão geodésica do spin [95]. No entanto, sabemos que o spin da partícula é uma grandeza quântica. Portanto, a precessão do spin deve ser tratada no formalismo da mecânica quântica.

Vamos voltar um pouco ao que foi visto no capítulo anterior. Após encontrar a equação de Dirac no espaço curvo, obtivemos a hamiltoniana (4.150) que descreve o comportamento de uma partícula de teste em um espaço-tempo estático e com simetria esférica. Como vimos, em coordenadas isotrópicas, a métrica sob essas condições é descrita pelo seguinte elemento de linha

$$ds^2 = -c^2 w^2 dt^2 + v^2 \delta_{ij} dx^i dx^j, \tag{5.8}$$

Aqui estamos interessados em estudar o campo gravitacional produzido pelo próton, que em uma primeira aproximação, é estático e esfericamente simétrico. Portanto, pode ser descrito pela métrica (5.8).

No regime de campo fraco, as funções v e w podem ser expressas em termos de potenciais gravitacionais como:

$$w = 1 + \frac{\varphi}{c^2} \quad \text{e} \quad v = 1 - \frac{\tilde{\varphi}}{c^2}. \tag{5.9}$$

Onde φ e $\tilde{\varphi}$ são os potenciais produzidos pelo próton.

Como estamos investigando modificações no campo gravitacional no domínio atômico, consideramos que os potenciais φ e $\tilde{\varphi}$ podem ser diferentes, ou mais precisamente, que o parâmetro de Yukawa $\tilde{\alpha}$, associado ao potencial $\tilde{\varphi}$ não é necessariamente igual a

α, o qual foi visto na equação (3.1), diferentemente da Teoria da Relatividade Geral que considera $\varphi = \tilde{\varphi}$.

Observe que o potencial $\tilde{\varphi}$, decorrente da função escalar v, está relacionado a curvatura da seção espacial do espaço-tempo de acordo com o ponto de vista geométrico. A possibilidade desse potencial ser diferente do potencial Newtoniano é incorporada no formalismo de parametrização pós-Newtoniana (Formalismo PPN).

O formalismo PPN surgiu por volta do ano 1964, num cenário em que os físicos se questionavam sobre a veracidade da Relatividade Geral. Os experimentos gravitacionais que buscavam provar essa teoria podem ser divididos em duas classes: os experimentos que testam a fundação da teoria da gravitação, isto é, verificam se a gravitação é fenômeno do espaço-tempo curvo (teorias desse tipo são chamadas de ″ teoria métrica ″); e os que testam teorias métrica da gravidade, a exemplo da Relatividade Geral e da Teoria de Brans-Dicke, que diferem quanto ao valor de certos parâmetros chamados de pós-Newtoniano. Esse formalismo foi idealizado com três objetivos: analisar experimentos gravitacionais do sistema solar; descobrir e analisar novos testes da teoria gravitacional e, por fim, analisar teorias métricas alternativas da gravitação [97].

O parâmetro $\tilde{\alpha}$ que estamos investigando aqui pode ser relacionado com um certo parâmetro PPN. Considerando um potencial $\tilde{\varphi}$ com parametrização tipo Yukawa, podemos escrevê-lo como $\tilde{\varphi} = GM/r\,(1+\tilde{\alpha})$ no limite de $r \ll \lambda$. Assim, podemos concluir que, esse fator $(1+\tilde{\alpha})$ se relaciona ao parâmetro γ do formalismo PPN [97]. Limites empíricos para o parâmetro do formalismo PPN γ são extraídos, por exemplo, no domínio astrofísico, dos experimentos de atraso temporal e deflexão da luz [99]. Experimentos recentes, com a ajuda da nave espacial Cassini, encontraram $\gamma = 1 + (2.1 \pm 2.3) \times 10^{-5}$ [98], ao estudar o comportamento das ondas de rádio sobre a influência do campo gravitacional do Sol. Esse limite é compatível com o previsto pela Relatividade Geral ($\gamma = 1$).

Veremos ao final desta seção que esse parâmetro $\tilde{\alpha}$ pode ser investigado em um domínio atômico através do estudo da influência do acoplamento spin-órbita gravitacional na estrutura fina do átomo.

Usando a transformação de Foldy-Wouthuysen, vista no capítulo anterior, é possível escrever a hamiltoniana de Dirac eliminando os operadores ímpares, o que resulta em uma sequência de correções para a equação de Dirac. Como explicado no capítulo anterior, na aproximação de $1/m^2c^4$ a hamiltoniana é dada por (4.114).

A fim de obtermos o acoplamento spin-órbita, vamos aplicar o formalismo de Foldy-Wouthuysen à equação de Dirac no espaço curvo.

Substituindo as expressões para w e v (5.9) na hamiltoniana (4.150), temos que, no limite de campo fraco, essa equação é reescrita como:

$$\begin{aligned} H &= \frac{i\hbar c}{4}\left(1+\frac{\tilde{\varphi}-\varphi}{c^2}\right)\vec{\alpha}\cdot\vec{\nabla}\left(1+\frac{2\varphi}{c^2}\right)+\frac{i\hbar c}{4}\left(1+\frac{3\tilde{\varphi}+\varphi}{c^2}\right)\vec{\alpha}\cdot\vec{\nabla}\left(1-\frac{2\tilde{\varphi}}{c^2}\right) \\ &\quad -i\hbar c\left(1+\frac{\tilde{\varphi}+\varphi}{c^2}\right)\vec{\alpha}\cdot\vec{\nabla}+\hat{\beta}m\varphi+\hat{\beta}mc^2. \end{aligned} \tag{5.10}$$

As referências [92, 91, 93] trazem uma representação mais conveniente para a hamiltoniana em primeira ordem dos potenciais gravitacionais, dada por

$$H=\hat{\beta}mc^2+\hat{\beta}m\varphi+\frac{c}{2}\left\{\mathcal{F},\hat{\alpha}\cdot\vec{p}\right\} \tag{5.11}$$

onde $\mathcal{F}=w/v=1+\left(\varphi+\tilde{\varphi}\right)/c^2$.

Seguindo o formalismo de Foldy-Wouthuysen, vamos escrever essa equação na forma:

$$H=\hat{\beta}mc^2+\hat{\mathcal{O}}+\hat{\epsilon} \tag{5.12}$$

onde definimos o operador ímpar (que contém os termos com a matriz α) como:

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{O}} &= \frac{c}{2}\left\{1+\frac{\varphi+\tilde{\varphi}}{c^2},\vec{\alpha}\cdot\vec{p}\right\} \\ &= c\left[\vec{\alpha}\cdot\vec{p}-\frac{i\hbar}{2c^2}\left(\vec{\alpha}\cdot\vec{\nabla}\varphi+\vec{\alpha}\cdot\vec{\nabla}\tilde{\varphi}\right)+\frac{\varphi+\tilde{\varphi}}{c^2}\vec{\alpha}\cdot\vec{p}\right], \end{aligned} \tag{5.13}$$

e o operador par

$$\hat{\epsilon}=\hat{\beta}m\varphi. \tag{5.14}$$

Como explicado no capítulo anterior, na aproximação de ordem $(1/mc^2)^2$, o procedimento de Foldy-Woythuysen nos leva a hamiltoniana (4.116). Portanto, para obtê-la explicitamente no nosso presente caso, devemos calcular os termos $\hat{\mathcal{O}}^2$ e $\left[\hat{\mathcal{O}},\left[\hat{\mathcal{O}},\hat{\epsilon}\right]\right]$. O operador $\hat{\mathcal{O}}^2$ é dado por por:

$$\hat{\mathcal{O}}^2=c^2\vec{p}^2+2\left(\varphi+\tilde{\varphi}\right)\vec{p}^2-2i\hbar\left(\vec{\nabla}\varphi\cdot\vec{p}+\vec{\nabla}\tilde{\varphi}\cdot\vec{p}\right)+\hat{\Sigma}\cdot\left(\vec{\nabla}\varphi\times\vec{p}+\vec{\nabla}\tilde{\varphi}\times\vec{p}\right). \tag{5.15}$$

Calculando, agora, o comutador $\left[\hat{\mathcal{O}},\hat{\epsilon}\right]$, temos

$$\left[\hat{\mathcal{O}},\hat{\epsilon}\right]=cm\hat{\beta}\left(i\hbar\vec{\alpha}\cdot\vec{\nabla}\varphi-2\varphi\vec{\alpha}\cdot\vec{p}\right), \tag{5.16}$$

por conseguinte, o cálculo do comutador $\left[\hat{\mathcal{O}},\left[\hat{\mathcal{O}},\hat{\epsilon}\right]\right]$ resulta em

$$\left[\hat{\mathcal{O}},\left[\hat{\mathcal{O}},\hat{\epsilon}\right]\right]=c^2m\hat{\beta}\left[-4i\hbar\vec{\nabla}\varphi\cdot\vec{p}+2\hbar\hat{\Sigma}\cdot\left(\vec{\nabla}\varphi\cdot\vec{p}\right)+4\varphi\vec{p}^2\right]. \tag{5.17}$$

Para chegar nessas expressões utilizamos a identidade (4.115).

Substituindo esse conjunto de resultados na hamiltoniana de Foldy-Wouthuysen (4.114), obtemos a seguinte hamiltoniana:

$$\begin{aligned} H &= \hat{\beta}\left\{mc^2 + m\varphi + \frac{\vec{p}^2}{2m} + \frac{1}{mc^2}\left(\frac{\varphi}{2} + \tilde{\varphi}\right)\vec{p}^2\right. \\ &- \left.\frac{i\hbar}{mc^2}\left(\vec{\nabla}\tilde{\varphi} + \frac{1}{2}\vec{\nabla}\varphi\right)\cdot\vec{p} + \frac{\hbar}{2mc^2}\left[\hat{\Sigma}\cdot\left(\vec{\nabla}\tilde{\varphi}\times\vec{p}\right) + \frac{1}{2}\hat{\Sigma}\cdot\left(\vec{\nabla}\varphi\times\vec{p}\right)\right]\right\}. \end{aligned} \tag{5.18}$$

O primeiro termo está relacionado à energia de repouso do elétron; o segundo, à energia potencial usual da interação gravitacional elétron-próton; os outros termos correspondem à energia cinética e às correções quânticas relativísticas. Reescrevendo o último termo, utilizando o fato que $\vec{S} = \frac{\hbar}{2}\vec{\sigma}$, onde $\vec{\Sigma} = 1\vec{\sigma}$, temos que ele resulta em:

$$H_{Gso} = \frac{1}{mc^2}\frac{1}{r}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial r}\right)\vec{S}\cdot\vec{L}, \tag{5.19}$$

onde $\vec{S}$ é o operador de spin e $\vec{L}$ é o momento angular orbital da partícula. Este é chamado termo de interação spin-órbita gravitacional, no qual focaremos nossa atenção de agora em diante. Esse termo, no regime clássico, é responsável pela precessão geodésica do eixo do giroscópio no espaço-tempo curvo [93, 116, 117].

Em [117], Schiff mostra que a dinâmica do spin de uma partícula se movendo em campo gravitacional fraco, medido por um observador co-móvel é governado pela equação

$$\frac{d\vec{S}}{dt} = \left[\left(\frac{1}{2} + \gamma\right)\frac{GM}{mc^2r^3}\vec{L}\right]\times\vec{S}, \tag{5.20}$$

assumindo que $\varphi = \tilde{\varphi}/\gamma = -GM/r$. A análise do experimento MTV-G foi feita baseada nesta equação, considerando $\gamma = 1$. Portanto, sem fazer qualquer distinção entre potenciais newtoniano e pós-newtoniano.

Neste nosso trabalho, um dos objetivos foi estudar o efeito do acoplamento spin-órbita gravitacional nos níveis de energia do hidrogênio. Sabemos que o elétron, no átomo, é encontrado em um estado ligado devido à interação eletromagnética com o próton. Esta interação também estabelece um acoplamento spin-órbita, de natureza elétrica, o qual, conforme a equação (4.120) , pode ser escrito como um termo da hamiltoniana da seguinte maneira

$$H_{Eso} = \frac{-q}{2m^2c^2}\frac{1}{r}\frac{d\phi_E}{dr}\left(\vec{S}\cdot\vec{L}\right), \tag{5.21}$$

onde $-q$ é a carga do elétron e ϕ_E é o potencial elétrico produzido pelo próton no espaço-curvo.

Se um espaço-tempo é descrito por uma métrica do tipo (5.8), temos que as equações do campo elétrico podem ser escritas do mesmo modo que as equações de Maxwell definidas no espaço plano, porém com uma nova permissividade elétrica $\epsilon = \epsilon_0 v/w$ [116, 120]. De modo que o potencial elétrico com simetria esférica, em primeira ordem de aproximação, tem sua equação modificada da seguinte maneira:

$$\frac{d\phi_E}{dr} = \frac{-q}{4\pi\epsilon r^2} = \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\left(1 + \frac{\varphi}{c^2} + \frac{\tilde{\varphi}}{c^2}\right). \tag{5.22}$$

O que nos mostra que a curvatura do espaço-tempo modifica o potencial elétrico. Substituindo esta equação na hamiltoniana (5.21), notamos que, através dessa correção do potencial elétrico, o campo gravitacional pode influenciar indiretamente o acoplamento spin-órbita atômico.

Vamos comparar a ordem de magnitude da contribuição indireta do campo gravitacional, em (5.21), com a contribuição direta, dada por (5.19), para a estrutura fina do estado P. Substituindo (5.22) em (5.21) e escrevendo o potencial φ na sua forma explicita, em termos de r, em ambas as hamiltonianas H_{Gso} e H_{Eso}, temos:

$$H_{Eso}^{(G)} \sim \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 m^2 c^4}\frac{\alpha GM}{r^4}e^{-r/\lambda}\left(\vec{S}\cdot\vec{L}\right) \tag{5.23}$$

$$H_{Gso} \sim \frac{1}{mc^2}\left(1 + \frac{r}{\lambda}\right)\frac{\alpha GM}{r^3}e^{-r/\lambda}\left(\vec{S}\cdot\vec{L}\right), \tag{5.24}$$

consideramos aqui só o termo de Yukawa e por questão de simplicidade, assumimos que $\tilde{\alpha} = \alpha$. Extraindo a média das hamiltonianas para o estado $2P$, obtemos a seguinte relação:

$$\left\langle H_{Eso}^{(G)}\right\rangle \sim \frac{q^2/4\pi\epsilon_0 a_0}{mc^2}\left(\frac{\lambda}{\lambda + a_0}\right)\langle H_{Gso}\rangle, \tag{5.25}$$

observe que o coeficiente é proporcional a razão entre a energia do estado fundamental do hidrogênio e a energia de repouso do elétron, que é da ordem de 10^{-5}. Ele depende também da relação entre λ e a_0 que é menor que 1 para todo λ. Isso significa que essa contribuição vinda de $H_{Eso}^{(G)}$ é 10^{-5} vezes menor que a contribuição vinda de H_{Gso}. Por este motivo a ignoramos no que segue.

O acoplamento spin-órbita eletromagnético é responsável por uma separação fina dos níveis de energia com o mesmo momento angular l, tal como o estado $2P_{1/2}$ e $2P_{3/2}$, por exemplo [21]. Da mesma forma, o acoplamento spin-órbita gravitacional, considerado aqui como uma interação fraca em relação a hamiltoniana H_{Eso}, causará uma mudança adicional nesses estados.

Na referência [64], objetivando testar as previsões teóricas da eletrodinâmica quântica (QED), o Comitê de Dados para Ciência e Tecnologia (CODATA), através de precisos cálculos teóricos, determinou explicitamente as frequências de transições entre os níveis com número quântico principal $n = 2$ para o hidrogênio. A frequência de transição entre $2P_{1/2}$ e $2P_{3/2}$ encontrada foi a seguinte:

$$f^{the}_{2P_{1/2}-2P_{3/2}} = 10969041.571(41)\text{KHz}, \tag{5.26}$$

este cálculo foi feito usando valores para as constantes fundamentais obtidas pelo método dos mínimos quadrados com dados espectroscópicos do hidrogênio e deutério, mas excluindo valores experimentais das transições $2S_{1/2} - 2P_{1/2}$ e $2P_{3/2} - 2S_{1/2}$, que são os itens $A39$, $A40.1$ e $A40.2$ da tabela XVIII da referência [64].

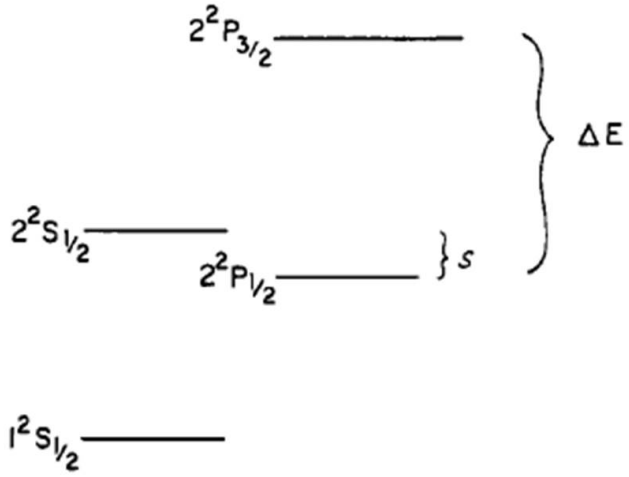

Figura 5.4: Diagrama dos níveis de energia para os níveis do hidrogênio $n = 1$ e $n = 2$. O intervalo de Lamb-Shift $(2S_{1/2} - 2P_{1/2})$ e de estrutura fina $(2P_{1/2} - 2P_{3/2})$, são denotados, respectivamente por s e ΔE [119].

Por sua vez, para obter o resultado experimental desta frequência de transição, vamos considerar as medidas entre os estados $2S_{1/2} - 2P_{1/2}$ [119] e $2S_{1/2} - 2P_{3/2}$ [68]. A medida para o Lamb-Shift $(2S_{1/2} - 2P_{1/2})$ foi 1057.845(9)MHz e para a transição $2S_{1/2} - 2P_{3/2}$ foi 9911.200(12)MHz. Deste modo, o valor experimental para o intervalo de estrutura fina $(2P_{1/2} - 2P_{3/2})$ é dado pela soma destes dois valores (ver figura 5.4):

$$f^{exp}_{2P_{1/2}-2P_{3/2}} = 10969045(15)\text{KHz}, \tag{5.27}$$

Observe que o valor teórico e experimental coincidem dentro do erro combinado $\delta f = \sqrt{0.041^2 + 15^2} = 15\text{kHz}$. Por este motivo, a contribuição vinda da interação spin-órbita gravitacional Δf_{so} não pode exceder esse valor do erro δf.

Cálculo de Δf_{so}

A contribuição da interação spin-órbita gravitacional, Δf_{so}, para a frequência de transição $2P_{1/2} - 2P_{3/2}$ é dada por:

$$\Delta f_{so} = \frac{\Delta E_{Gso}}{h} = \frac{\langle H_{GSO}\rangle_{2P_{1/2}} - \langle H_{GSO}\rangle_{2P_{3/2}}}{h}, \tag{5.28}$$

onde o valor médio da hamiltoniana H_{Gso} no estado n, l é:

$$\langle H_{GSO}\rangle_{n,l} = \frac{1}{mc^2}\left\langle \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(\frac{\varphi}{2} + \tilde{\varphi}\right)\right\rangle_{n,l}\left\langle \vec{S}\cdot\vec{L}\right\rangle. \tag{5.29}$$

A média $\langle\rangle_{n,l}$ é calculada com respeito a solução radial da equação de Schrödinger, $R_{n,l}(r)$, para estados com número quântico principal n e momento angular orbital l. Como estamos considerando, neste trabalho, a variação de energia entre os níveis $2P_{1/2} - 2P_{3/2}$, no qual $n = 2$ e $l = 1$, o valor médio é calculado usando a função radial $R_{21}(r)$,

$$R_{21}(r) = \frac{1}{\sqrt{24a_0^3}}\frac{r}{a_0}e^{-r/2a_0}. \tag{5.30}$$

Já o valor médio $\left\langle \vec{S}\cdot\vec{L}\right\rangle$ pode ser avaliado separadamente. Para isso devemos lembrar que os operadores $\vec{S}$ e $\vec{L}$ não comutam mais com a hamiltoniana devido o efeito de interação spin-órbita. Mas, por outro lado, o momento angular total se conserva, $\vec{J} = \vec{S} + \vec{L}$, o que nos permite utilizar a base do momento angular total ($|j, m, l, s\rangle$) para rotular os estados estacionários. Assim, partindo da definição $\vec{J} = \vec{S} + \vec{L}$ (ver 4.53), é conveniente escrever:

$$\vec{S}\cdot\vec{L} = \frac{1}{2}\left(J^2 - L^2 - S^2\right). \tag{5.31}$$

Portanto, na base citada, temos:

$$\left\langle \vec{S}\cdot\vec{L}\right\rangle = \frac{1}{2}\left[j\left(j+1\right) - l\left(l+1\right) - s\left(s+1\right)\right]. \tag{5.32}$$

Segue, então, que na transição $2P_{3/2} - 2P_{1/2}$, a contribuição vinda do operador $\vec{S}\cdot\vec{L}$ será $\left\langle \vec{S}\cdot\vec{L}\right\rangle_{2P_{3/2}-2P_{1/2}} = (3/2)\,\hbar^2$.

Considerando, na equação (5.29), que os potenciais φ e $\tilde{\varphi}$ são do tipo Yukawa e desconsiderando o termo $-GMm/r$, o qual gera uma correção gravitacional usual, temos que a interação spin-órbita leva a seguinte mudança na frequência de transição [5]:

$$\Delta f_{so} = \frac{GM}{hc^2}\left(\frac{\alpha}{2}+\tilde{\alpha}\right)\left[\frac{1}{24a_0^3}\frac{\lambda^2}{(a_0+\lambda)^2}+\frac{1}{12a_0^2}\frac{\lambda^2}{(a_0+\lambda)^3}\right]\frac{3}{2}\hbar^2 \tag{5.34}$$

Vamos discutir as implicações da condição $\Delta f_{so} < \delta f$ no caso da transição $2P_{1/2} - 2P_{3/2}$. A expressão (5.34) indica que a contribuição gravitacional da interação spin-órbita na espectroscopia depende de uma combinação linear do potencial Newtoniano e do potencial $\tilde{\varphi}$. Portanto, as analises espectroscópicas devem colocar vínculos empíricos no parâmetro misto $\left(\frac{\alpha}{2}+\tilde{\alpha}\right)$. No entanto, levando em conta os limites do parâmetro α previamente estabelecidos por nossos vínculos da transição $1S-3S$, podemos verificar que a contribuição do potencial φ na transição $2P_{1/2} - 2P_{3/2}$ é menor do que o erro experimental. Portanto, podemos negligenciar a contribuição deste potencial na expressão (5.34). Concluímos que a analise da influência da interação spin-órbita gravitacional na estrutura fina dos estados é, na verdade, um teste de potencial Pós-Newtoniano $\tilde{\varphi}$ no domínio atômico.

Vinculamos estas quantidades em um gráfico de $\left(\frac{\alpha}{2}+\tilde{\alpha}\right)$ em função de λ, como mostra a figura (5.5). Podemos ver que, para $\lambda > 1.5\times10^{-3}$Å, os limites determinados pela transição $2P_{1/2} - 2P_{3/2}$ são mais fortes do que os limites empíricos colocados pelo experimento MTV-G. Em particular, para $\lambda = 1$Å, encontramos $\tilde{\alpha} < 2.1\times10^{33}$, que é mais forte que o limite imposto pelo MTV-G por quatro ordens de magnitude.

[5]Para resolver as integrais da coordenada radial fizemos uso da seguinte propriedade de integração:

$$I(k,p) = \int_0^\infty r^k e^{-pr/a_0}dr = k!\left(\frac{a_0}{p}\right)^{k+1} \tag{5.33}$$

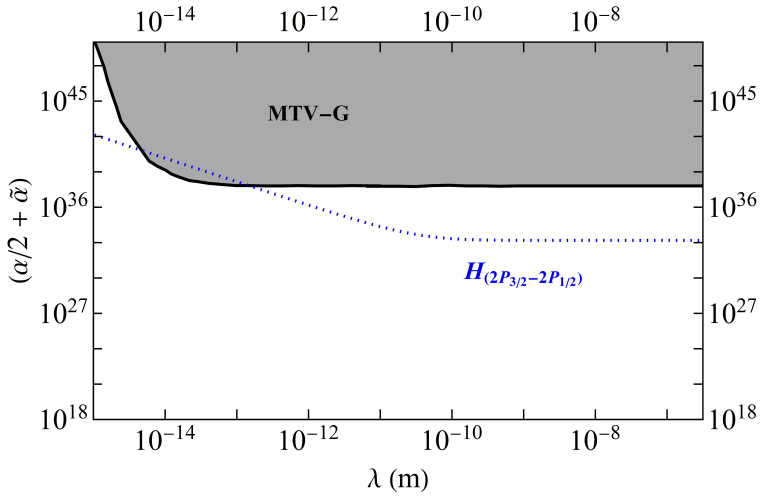

Figura 5.5: A linha pontilhada é extraída da análise da influência do acoplamento spin-órbita gravitacional para a separação dos estados $2P_{1/2}$ e $2P_{3/2}$ do hidrogênio. Ela configura um limite empírico para o parâmetro $\left(\frac{\alpha}{2}+\tilde{\alpha}\right)$, onde $\tilde{\alpha}$ está relacionado ao parâmetro γ do formalismo PPN.

Conclusões

Tendo feito uma revisão sobre modelos de dimensões extras e focado nossa atenção no modelo ADD, vimos que neste modelo o universo observável é uma 3-Brana (onde os campos do modelo padrão estão confinados) imerso em um espaço de dimensão superior, à qual apenas a gravidade tem acesso. Neste cenário, o potencial gravitacional recupera seu comportamento quadrimensional para distâncias maiores que R (raio de compactação), enquanto que, por outro lado, para distâncias menores o potencial gravitacional é amplificado em comparação com a gravidade padrão.

Vários modelos, tais como modelos de dimensões extras e algumas teorias $F(R)$, prevêem uma correção exponencial para o potencial Newtoniano em um domínio além de uma dada escala de comprimento. Por esse motivos, adotamos a parametrização de Yukawa para expressar essas modificações da gravidade.

Baseado nisto, nesta tese, procuramos por modificações do potencial Newtoniano no domínio atômico utilizando precisos dados da espectroscopia do hidrogênio, especificamente da frequência de transição $1S-3S$ recentemente medida. Obtemos limites mais fortes do que muitos limites impostos pela espectroscopia de átomos exóticos, tal como o Hélio antiprotônico, o qual usamos para comparar com nossos resultados. Embora a interação gravitacional entre próton e elétron seja cerca de duas mil vezes mais fraca do que a interação antipróton-núcleo, a precisão da espectroscopia do hidrogênio é alta o suficiente para determinar um melhor limite para desvios do potencial newtoniano na escala de compactação $\lambda < 0.6$ Å.

Além disso, investigamos efeitos gravitacionais não-padrão na separação fina dos estados $2P_{1/2} - 2P_{3/2}$. Estes estados possuem o mesmo número quântico principal e o mesmo momento angular orbital, e, por isso, a diferença de energia entre eles é determinada principalmente pelo acoplamento spin-órbita.

Vimos que o experimento MTV-G explora esta interação por meio do fenômeno da

precessão do spin, num processo de colisão do elétron com um núcleo pesado. A abordagem preliminar é feita com base na descrição clássica da dinâmica do spin. No entanto, como o spin de uma partícula elementar é uma grandeza quântica, tratamos, aqui, a precessão do spin induzido pelo campo gravitacional no formalismo da mecânica quântica. Fizemos isto usando a equação de Dirac no espaço-curvo para estudar a influência do campo gravitacional produzido pelo próton sobre o elétron no átomo de hidrogênio. Vimos que o termo de interação spin-órbita gravitacional tem a contribuição de dois potenciais (φ e $\tilde{\varphi}$), relacionados, respectivamente, ao potencial Newtoniano e Pós-Newtoniano os quais não são necessariamente iguais em teorias métricas diferentes da Teoria da Relatividade Geral. De modo que, torna-se importante enfatizar que observamos que a análise da transição $2P_{1/2} - 2P_{3/2}$ corresponde a um teste de um potencial Pós-Newtoniano, o qual está relacionado ao parâmetro γ do formalismo PPN, no domínio atômico.

Os limites empíricos determinados nesta análise são mais fracos do que o limite obtido da transição $1S - 3S$. Por outro lado, vimos que para $\lambda > 1.5 \times 10^{-3}$Å, os limites empíricos para o potencial Pós-Newtoniano determinados pelos dados espectroscópicos são mais fortes do que aqueles obtidos do experimento MTV-G.

Gostaríamos agora de mencionar algumas perspectivas. Um recente medida da frequência de transição $2S - 4P$ foi determinada com uma precisão de 4.3kHz para a divisão entre os estados $4P_{3/2}$ e $4P_{1/2}$ [121]. Em princípio, essa medida mais precisa poderia ser usada para estabelecer uma melhor restrição para o potencial pós-newtoniano.

Outra perspectiva para testar modificações da gravitação na escala de comprimento atômico é considerar a espectroscopia de átomos ou íons mais pesados, especialmente a do elemento Hélio cujas transições estão sendo medidas com uma precisão relativa da ordem de 10^{-12} [122], e , por esse motivo, estão sendo usados para investigar nova física no domínio microscópico [123].

Por fim, gostaríamos de destacar que uma suposta interação gravitacional modificada afetaria o ″isotope shift″ das transições atômicas. Visto que isotopos são elementos químicos com mesmo número de prótons, mas com massas diferentes, podemos considerar que essa mudança de massa de um isótopo para outro resultaria em modificações no potencial gravitacional Newtoniano. Portanto, aproveitando o arcabouço teórico bem estudado da espectroscopia, bem como as medições de precisão das frequências correspondentes, poderíamos, a partir desse método complementar, estabelecer novas

restrições para a intensidade de interações gravitacionais não-padrão no domínio atômico.

Referências Bibliográficas

[1] OVERDUIN, J.M.; WESSON, P.S. **Kaluza-Klein gravity**.Physics Reports, Volume 283, Issues 5−6, 1997, Pages 303-378.

[2] DUFF, M.J. ; NILSSON, B.E.W.; POPE, C.N. **Kaluza-Klein supergravity**. Physics Reports, Volume 130, Issues 1−2 1986, Pages 1-142.

[3] ALMEIDA, R. S. **Aspectos gerais da Teoria de Kaluza-Klein e mecanismo de compactificação**. Dissertação (Mestrado em Física), Universidade Federal do Ceará, 2016.

[4] KALUZA, T. arXiv:1803.08616v1 [physics.hist-ph]

[5] CUNHA, D. C. N. **Unificação geométrica das interações fundamentais**. Dissertação (Mestrado em Física). Instituto de física da Universidade de Brasília, 2013.

[6] KAKU, M. **Quantum Field Theory**: A modern introduction. Oxford University Press, 1993.

[7] D'INVERNO, R. **Introducing Einstein's Relativity**. Oxford University Press, 1992.

[8] CARMELI, M. **Group Theory and General Relativity**. McGraw-Hill, 1977.

[9] ISAKSSON, E. ; KESKINEN, R. Gunnar Nordstrom 1881-1923. In: Arkhimedes. 1981; Vol. 33, No. 2. pp. 71-84.

[10] KLEIN, O. **Quantum Theory and Five-Dimensional Relativity**. Zeit. f. Physik 37 (1926)895.

[11] O. B. Klein. **Quantentheorie und fiftdimensionale Relativistcstheorie** , Zeit. fur Phys, 37, (1926) 895-906.

[12] Boas, M. L. , **Mathematical Methods in physical Sciences**. Wiley, New York, 1966.

[13] HAMED, N. A.; DIMOPOULO, S.; DVALI, G. **The hierarchy problem and new dimensions at a millimeter**, Physics Letters B, Volume 429, Issues 3-4, 1998, Pages 263-272,

[14] HAMED, N. A.; DIMOPOULO, S.; DVALI, G. **Phenomenology, astrophysics and cosmology of theories with submillimeter dimensions and TeV scale quantum gravity**, Phys. Rev. D 59, 086004 (1999)

[15] RUBAKOV, V.A.; SHAPOSHNIKOV, M.E. **Extra space-time dimensions: Towards a solution to the cosmological constant problem**. Physics Letters B, Volume 125, Issues 2-3, 1983, Pages 139-143.

[16] RUBAKOV, V.A.; SHAPOSHNIKOV, M.E. **Do we live inside a domain wall?**. Physics Letters B, Volume 125, Issues 2-3, 1983, Pages 136-138.

[17] RUBAKOV, V. A. **Large and infinite extra dimensions**: An Introduction. Phys. Usp. 44 (2001) 871

[18] LIU, Yu-Xiao; ZHAO, Li; DUAN, Yi-Shi. **Localization of Fermions on a String-like Defect**. Jan 2007. 12 pp. Published in JHEP 0704 (2007) 097

[19] AQUINO, P. M.. **Física além do Modelo Padrão em teorias de dimensões extras**. Dissertção (Mestrado em Ciêcias). Instituto de física, São Paulo, 2007.

[20] NETO, J. B.. **MECÂNICA NEWTONIANA, LAGRANGIANA E HAMILTONIANA**. Editora livraria da física, 2ª ed. 2013.

[21] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, and F. Laloe. **Quantum Mechanics**. Wiley, New York, 1977.

[22] ZEE, A. **Quantum field theory in a Nutshell**. Princeton University Press, 2010.

[23] ZWIEBACH,B. **A First Course in String Theory**. Cambridge Universty Press, 2004.

[24] ROCHA, J. M.; DAHIA, F. L. M. **Um estudo da lei do inverso do quadrado de Newton e sua correção provocada por dimensões extras**

[25] RANDALL, L.; SUNDRUM, R. **A Large mass hierarchy from a small extra dimension**. Phys. Rev. Lett. 83, 3370 (1999)

[26] RANDALL, L.; SUNDRUM, R. **An Alternative to compactification**. Phys. Rev. Lett. 83, 4690 (1999)

[27] SILVA, A. A. **Um Estudo Sobre Dimensões Extras**. Dissertação (mestrado em física). Universidade Federal de Campina Grande, 2009.

[28] ARFKEN, G. B.; WEBER, H. J. **Mathematical Methods for Physicists**. Academic Press, fifth edition, 2001.

[29] SUNDRUM, R. **Effective field theory for a three-brane universe**. Phys. Rev. D . 59, 085009 (1999)

[30] MAXIME, G. **The Randall-Sundrum Model**. 2006

[31] JUNIOR, R. I. O. **Modelos de Randall Sundrum e Estabilização do Raio da Dimensão Extra**. Dissertação (Mestrado em Física), Universidade Federal do Ceará, 2017.

[32] HOYLE, C. D.; SCHMIDT, U.; HECKEL, B. R. ; et. al. **Submillimeter Test of the Gravitational Inverse-Square Law: A Search for ?Large? Extra Dimensions**. Phys. Rev. Lett. 86, 1418 . Published 19 February 2001

[33] LIU, M. Y. Z.; HAN, Z. H.; WANG, Y.C., et. al. **Preliminary limits on deviation from the inverse-square law of gravity in the solar system**: A power-law parameterization. 2014.

[34] DUFFIN, R. J. **Yukawan potential theory, Journal of Mathematical Analysis and Applications**. Volume 35, Issue 1, 1971, Pages 105-130.

[35] FARIAS, C. A. F. **Estudo do potencial de Yukawa no limite termodinâmico e relaxação para estados quasi-estacionário**. Monografia (conclusão do curso de Bacharelado em Física), Instituto de Física da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2016.

[36] LONG, G. C.; CHANG, H.; PRICE, J.. **Experimental status of gravitational-strength forces in the sub-centimeter regime**. Nucl. Phys. B529, 23 (1999).

[37] PRIETO, V. A. **Submillimeter Test of the Gravitational Inverse-Square Law Using a Superconducting Diferential Accelerometer**. Dissertation (requirements for the degree of Doctor of Philosophy), Faculty of the Graduate School of the University of Maryland, 2007.

[38] **The Eöt-Wash Group: Laboratory Tests of Gravitational and sub-Gravitational Physics**. Disponível em: https://www.npl.washington.edu/eotwash/. Acessado em 14 de agosto de 2019

[39] KAPNER, D. J.; COOK, T. S.; ADELBERGER, E. G.; et. al. **Tests of the gravitational inverse-square law below the dark-energy length scale**. Phys. Rev. Lett. 98 (2007) 021101.

[40] ADELBERGER, E. G.; GUNDLACH, J. H.; HECKEL, B. R.; et. al.**Torsion balance experiments: A low-energy frontier of particle physics**. Prog. Part. Nucl. Phys. 62 (2009) 102.

[41] YAO, W. M.; et al. **Review of Particle Physics**. J. Phys. G 33, 1 (2006).

[42] STELLE, K. S. **Classical Gravity with Higher Derivatives**. Gen. Rel. Grav. 9 (1978) 353.

[43] NEWMAN, R. **Prospects for terrestrial equivalence principle tests with a cryogenic torsion pendulum**. Classical and Quantum Gravity. 18. 2407.(2001)

[44] LONG, J. C.; CHAN, H. W.; CHURNSIDE, A. B. , et al. **Upper limits to submillimiter-range forces from extra space-time dimensions**. Nature 421 (2003), 922-925.

[45] CHIAVERINI, J.; SMULLIN, S. J.; GERACI, A. A., et al. **New experimental constraints on nonNewtonian forces below 100 microns**. Phys. Rev. Lett. **90** (2003) 151101

[46] CULLEN, S.; PERELSTEIN, M. **SN1987A constraints on large compact dimensions**. Phys. Rev. Lett. **83** (1999) 268

[47] SPINELLY, J. P. S. **Efeitos Quânticos e Clássicos Associados a Defeitos topológicos Gravitacionais**. Tese (Doutorado em Física), Universidade Federal da Paraíba, 2003.

[48] FAIRBAIN, M. **Cosmological constraints on large extra dimensions**. Phys. Lett. B **508** (2001) 335

[49] DAHIA, F.; LEMOS, A. S. **Constraints on extra dimensions from atomic spectroscopy**. Phys. Rev. D **94** (2016) no.8, 084033

[50] LUO, F.; LIU, H. **Exploring extra dimensions in spectroscopy experiments**. Chin. Phys. Lett. **23** (2006) 2903

[51] GANG, L.Z.; NI, W. T.; PATON, A.P. **Extra dimensions and atomic transition frequencies**. Chin. Phys. B **17** (2008) 70

[52] LI, Z.; CHEN, X. **Can Large Extra Dimensions Solve the Proton Radius Puzzle?**. arXiv:1303.5146 [hep-ph].

[53] WANG, L. B.; NI, W. T. **Proton radius puzzle and large extra dimensions**. Mod. Phys. Lett. A **28** (2013) 1350094

[54] WAN-PING,Z.; PENG, Z.; HAO-XUE, Q. **Detecting extra dimensions by Hydrogen-like atoms**. Open Physics, 13(1)(2014), pp. -. Retrieved 7 Sep. 2019, from doi:10.1515/phys-2015-0011

[55] SALUMBIDES, E. J.; SCHELLEKENS, A. N.; GATO-RIVERA, B.; et al. **Constraints on extra dimensions from precision molecular spectroscopy**. New J. Phys. **17** (2015) no.3, 033015

[56] GIUDICE, G. F.; RATTAZZI, R.; WELLS, J. D. **Quantum gravity and extra dimensions at high-energy colliders**. Nucl. Phys. B **544** (1999) 3

[57] BEZERRA, V. B. ; KLIMCHITSKAYA, G. L. ; MOSTEPANENKO, V. M.; ROMERO, C. **Constraints on non-Newtonian gravity from measuring the Casimir force in a configuration with nanoscale rectangular corrugations** Phys. Rev. D 83, 075004 , 2011.

[58] GIUDICE, G. F.; RATTAZZI, R.; WELLS, J. D. **Quantum gravity and extra dimensions at high-energy colliders**. [arXiv:hep-ph/9811291]

[59] POHL, R.; ANTOGNINI, A.; KOTTMANN, F. **The size of the proton**. Nature 466, 213 (2010).

[60] ANTOGNINI, A.; NEZ, F.; SCHUHMANN, K. et al. **Proton Structure from the Measurement of 2S-2P Transition Frequencies of Muonic Hydrogen**. Science 339, 417 (2013).

[61] ANTOGNINI, A.; KOTTMANN, F.; BIRABEN, F. et al, **Theory of the 2S-2P Lamb shift and 2S hyperfine splitting in muonic hydrogen**. Annals of Physics, Volume 331, p. 127-145 (2013).

[62] LEMOS, A. S. **Efeitos das Dimensões Extras em Sitemas Atômicos e o Problema do Raio do Próton**. Tese (Obtenção do título de doutor em física) - Departamento de física da Universidade Federal da Paraíba, 2018.

[63] DAHIA, F.; LEMOS, A. S. **Is the proton radius puzzle evidence of extra dimensions?**. Eur. Phys. J. C. **76** (2016) n 8, 435.

[64] MOHR, P.J.; TAYLOR, B.N.; NEWELL, D.B. **CODATA recommended values of the fundamental physical constants: 2010**. Rev. Modern Phys. 84, 1527 (2012).

[65] PARTHEY, C.G.; MATVEEV, A.; ALNIS, J.; et al. **Improved Measurement of the Hydrogen** $1S - 2S$ **Transition Frequency**. Phys. Rev. Lett. 107, 203001 (2011)

[66] BEAUVOIR, B. ; SCHWOB, C.; ACEF, O. ; et al. **Metrology of the hydrogen and deuterium atoms: Determination of the Rydberg constant and Lamb shifts**, Eur. Phys. J. D 12, 61(2000).

[67] LUNDEEN, S. R.; PIPKIN, F. M. **Measurement of the Lamb Shift in Hydrogen,** $n = 2$ Phys. Rev. Lett. 46, 232 (1981)

[68] HAGLEY, E.W.; PIPKIN, F.M.. **Separated oscillatory field measurement of hydrogen** $2S_{1/2} - 2P_{3/2}$ **fine structure interval** Phys. Rev. Lett. 72, 1172 (1994).

[69] SCHWOB, C.; JOZEFOWSKI, L.; DE BEAUVOIR, B.; et al. **Optical Frequency Measurement of the** $2S - 12D$ **Transitions in Hydrogen and Deuterium: Rydberg Constant and Lamb Shift Determinations**. Phys. Rev. Lett. 82, 4960 (1999).

[70] FISCHER, M.; KOLACHEVSKY, N.; ZIMMERMANN, M. et al. **New Limits on the Drift of Fundamental Constants from Laboratory Measurements**. Phys. Rev. Lett. 92 (2004) 230802.

[71] SICK, I. **On the rms-radius of the proton**. Phys. Lett. B 576, 62 (2003).

[72] BLUNDEN, P.G.; SICK, I. **Proton radii and two-photon exchange**. Phys. Rev. C 72, 057601 (2005).

[73] BERNAUER, J. C.; ACHENBACH, P.; AYERBE GAYOSO, C. et al. **High-Precision Determination of the Electric and Magnetic Form Factors of the Proton** Phys.Rev. Lett. 105, 24200 (2010).

[74] JENTSCHURA, U. D. **Lamb Shift in Muonic Hydrogen. II. Analysis of the Discrepancy of Theory and Experiment**. Annals Phys. **326** (2011) 516

[75] BRAX, P.; BURRAGE, C. **Atomic precision tests and light scalar couplings**. Phys. Rev. D 83, 035020 (2011).

[76] ONOFRIO, R. **Proton radius puzzle and quantum gravity at the Fermi scale**. Europhys.Lett. 104, 20002 (2013).

[77] AAD, G.; et al. [ATLAS Collaboration] **Search for dark matter candidates and large extra dimensions in events with a photon and missing transverse momentum in** pp **collision data at** $\sqrt{s} = 7$ **TeV with the ATLAS detector**. Phys. Rev. Lett. **110** (2013) no.1, 011802

[78] PINTO, M. V. C.; FARINA, C; TORT, A. **O Efeito Casimir**. Revista Brasileira de Ensino de Física, vol. 22, no. 1, Março, 2000.

[79] H. Casimir, **On the Attraction Between Two Perfectly Conducting Plates**, Indag. Math. **10** (1948), 261-263.

[80] CRUZ, M. B. ; DE MELLO, E.R. BEZERRA ; PETROV, A.YU. **Fermionic Casimir effect in a field theory model with Lorentz symmetry violation**. PHYSICAL REVIEW D , v. 99, p. 1-8, 2019.

[81] LANDSBERG, G. **Searches for Extra Spatial Dimensions with the CMS Detector at the LHC**. Mod. Phys. Lett. A **30** (2015) no.15, 1540017

[82] KHACHATRYAN, V.; et al. [CMS Collaboration]. **Search for new phenomena in monophoton final states in proton-proton collisions at $\sqrt{s}$ = 8 TeV** Phys. Lett. B **755** (2016) 102

[83] KLEIN, O. Z Phys. 41,407(1927).

[84] GORDON,W. Z Phys.40,117(1926).

[85] DIRAC, P. A. M. **The Quantum Theory of the Electron**. Proc. R. Soc. Lond. A (1928) 117.

[86] GREINERW, W. **Relativistic Quantum Mechanics: Wave equations**, Springer, 2000.

[87] BJORKEN,J .D. ; DRELLS.D. **Relativistic Quantum Mechanics**. Mc Graw-Hill Book Company.

[88] **Mar de Dirac**. Disponível em : https://umsaberdiferente.wordpress.com/tag/mar-de-dirac/. Acessado em 09 de outubro de 2019.

[89] STRANGE,P. **Relativistic Quantum Mechanics**. First Edition. Cambridge University Press.

[90] CARROL, S. **SPACETIME AND GEOMETRY**. An introduction to General Relativity. Addison Wesley, 2004.

[91] FISCHBACH, E.; FREEMAN, B. S.; CHENG, W.-K. **General-relativistic effects in hydrogenic systems**. Phys. Rev. D 23, 2157, Phys. Rev. D 24, 1702 (1981)

[92] JENTSCHURA, U. D.; NOBLE, J. H. **Nonrelativistic limit of the Dirac-Schwarzschild Hamiltonian: Gravitational Zitterbewegung and gravitational spin-orbit coupling**. Phys. Rev. A 88, 022121 Published 23 August 2013

[93] SILENKO, A.J.;TERYAEV, O.V. **Semiclassical limit for Dirac particles interacting with a gravitational field** . Phys.Rev. D 71 (2005) 064016

[94] NESVIZHEVSKY, V.V.; PIGNOL, G.; PROTASOV, K.V.. **Neutron scattering and extra-short-range interactions**. PHYSICAL REVIEW D 77, 034020 (2008)

[95] TANAKA, S.; NAKAYAA, Y.; NINOMIYAA, K. **MTV-G Experiment: Probing Non-Standard Strong Gravitational Field at Nuclear Scale Using Geodetic Precession**. Physics of Particles and Nuclei, 2014, Vol. 45, No. 1, pp. 237?240.

[96] MURATA, J.;TANAKA, S.. **A review of short-range gravity experiments in the LHC era**. Class. Quantum Grav. 32 (2015) 033001 (32pp)

[97] WILL, C. M. **Theory and experiemnt in gravitational physics**. Cambridge University Press, 1993.

[98] BERTOTTI, B.; LESS, L. TORTORA, P. A. **A test of general relativity using radio links with the Cassini spacecraft**. Nature, volume 425, pages 374-376 (2003).

[99] WEINBERG, S. **Gravitational and Cosmology: Principles and Applications of General Theory od Relativity.** wiley, 1ed. 2001

[100] SALUMBIDES, E.J. ; UBACHS, W. ; KOROBOV, V.I. **Bounds on fifth forces at the sub-Ålength scale**. Journal of Molecular Spectroscopy, Volume 300, 2014, Pages 65-69,

[101] LEMOS, A. S.; LUNA, G. C.; MACIEL, E.; DHAIA, F. **Spectroscopic tests for short-range modi. . . cations of Newtonian and post-Newtonian potentials**. Class.Quant.Grav. 36 (2019) no.24, 245021

[102] IWASAKI, M. NAKAMURA, S. N.; SHIGAKI, K. **Discovery os Antiproton Trapping by Long-Lived Metastable States in Liquid Helium**. Physical Review Letters, vol 67, 10, 1991.

[103] HORI, M.; SÓTÉR, A.; BARNA, D. **Two-photon laser spectroscopy of antiprotonic helium and the antiproton-to-electron mass ratio**. Nature volume 475, pages 484?488(2011)

[104] HORI, M.; DAX, A.; EADES, J. **Determination of the Antiproton-to-Electron Mass Ratio by Precision Laser Spectroscopy of $\bar{p}He^+$**. Physical Review Letters, **96**, 243401 (2006)

[105] KOROBOV, V. I. **Metastable states in the antiprotonic helium atom decaying via Auger transitions**. Physical Review A **67**, 062501, 2003.

[106] NEXVIZHEVSKY, V.V.; PROTASOV, K. V. **Constraints on non-Newtonian gravity from the experiment on neutron quantum states in the Earth?s gravitational field**. Class.Quant.Grav. 21 (2004) 4557-4566

[107] PARTHEY, C. G.; MATVEEV, A. ;ALNIS, J. et al. **Improved Measurement of the Hydrogen 1S?2S Transition Frequency**.Physical Review Letters, **107**, 203001 (2011).

[108] JENTSCHURA, U. D.; KOTOCHIQOVA, S.; LE BIGOT, E. O.; et al. **Precise Calculation of Transition Frequencies of Hydrogen and Deuterium Based on a Least-Squares Analysis**. Physical Review Letters, 95, 163003 (2005)

[109] FLEURBAET, H.; GALTIER, S.; THOMAS, S.; et al. **New Measurement of the 1S ? 3S Transition Frequency of Hydrogen: Contribution to the Proton Charge Radius Puzzle**. Physical Review Letters, 120, 183001 (2018).

[110] MOHR, P.J.; TAYLOR, B. N. **CODATA recommended values of the fundamental physical constants: 2002**. Reviews of modern physivs, vol. 77, january 2005.

[111] **CODATA Internationally recommended 2018 values of the Fundamental Physical Constants**. Disponível em: https://physics.nist.gov/cuu/Constants/. Acessado em 19 de dezembro de 2019.

[112] MOHR, P. J.; NEWELL, D. B.; TAYLOR, B. N. **CODATA recommended values of the fundamental physical constants: 2014**. Rev. Mod. Phys. 88, 035009 (2016)

[113] MACIEL, E. B. **Um estudo sobre a influência da interação gravitacional nos estados de Rydberg no cenário de dimensões extras**. Tese (doutorado em física). Universidade Federal da Paraíba, 2018.

[114] JONES, M. P. A.; POTVLIEGE, R.M.; SPANNOWSKY, M. **Probing new physics using Rydberg states of atomic hydrogen**. arXiv:1909.09194 [hep-ph]

[115] GAY, T.; DUNNING,F. **Mott electron polarimetry. Review of Scientific Instruments**. (1992) 63. 1635 - 1651. 10.1063/1.1143371.

[116] FISCHBACH, E.; FREEMAN, B. S.; CHENG, W.-K. **General-relativistic effects in hydrogenic systems**. Phys. Rev. D 23, 2157, Phys. Rev. D 24, 1702 (1981)

[117] SCHIFF, L. I. **Possible New Experimental Test of General Relativity Theory**. Phys. Rev. Lett. 4, 215. 1960

[118] FOULDY, L. L.; WOUTHUYSEN, S. A.**On the Dirac Theory of Spin 1/2 Particles and Its Non-Relativistic Limit**. Phys. Rev. 78, 29. 1950

[119] LUNDEEN, S; PIPKIN, F. **Separated Oscillatory Field Measurement of the Lamb Shift in H, n = 2**. Metrologia. 22. 9. 10.1088/0026-1394/22/1/003 (2005).

[120] DHAIA, F.; MACIEL, E.; LEMOS, A.S. **Rydberg states of hydrogenlike ions in a braneworld model**. Eur. Phys. J. C **78** (2018) no.6, 526

[121] BAYER, A.; MAISENBACHER, L.; MATVEEV, A. et al. **The Rydberg constant and proton size from atomic hydrogen**. Science 358, 79–85 (2017).

[122] RANGELINK, R. J. VAN DE WERF, Y.; NOTERMANS, R. P.M.J.W.; et al. **Precision spectroscopy of helium in a magic wavelength optical dipole trap**. Nature Physics volume 14, pages 1132–1137 (2018).

[123] PACHUCKI, K.; PATKOS, V. ; YEROKHIN, V. A. **Testing fundamental interactions on the helium atom**. Phys. Review A 95, 062510 (2017).