

**UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE PRODUÇÃO
CURSO DE GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE PRODUÇÃO**

EWERTON VICTOR PAREDES DA PENHA TEIXEIRA

**UMA META-HEURÍSTICA ITERATED LOCAL SEARCH
PARA O SCHOOL BUS ROUTING PROBLEM**

**JOÃO PESSOA
2020**

EWERTON VICTOR PAREDES DA PENHA TEIXEIRA

**UMA META-HEURÍSTICA ITERATED LOCAL SEARCH PARA O
SCHOOL BUS ROUTING PROBLEM**

Monografia apresentada como trabalho de conclusão
do curso de graduação em Engenharia de Produção,
Departamento de Engenharia de Produção, Centro
de Tecnologia, Universidade Federal da Paraíba.

Orientador: Prof. Dr. Anand Subramanian

JOÃO PESSOA
2020

Catálogo na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

T266m Teixeira, Ewerton Victor Paredes da Penha.
Uma meta-heurística Iterated Local Search para o School
Bus Routing Problem / Ewerton Victor Paredes da Penha
Teixeira. - João Pessoa, 2020.
69 f.

Orientação: Anand Subramanian.
Monografia (Graduação) - UFPB/CT.

1. Roteamento de ônibus escolares. 2. Meta-heurística.
3. Iterated Local Search. I. Subramanian, Anand. II.
Título.

UFPB/BC



UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE PRODUÇÃO

FOLHA DE APROVAÇÃO

Aluno: Ewerton Victor Paredes da Penha Teixeira - 11500467

Título do trabalho: Uma metaheurística *Iterated Local Search* para o *School Bus Routing Problem*

Trabalho de Conclusão do Curso defendido e aprovado em 07/08/2020 pela banca examinadora:

Anand Subramanian

Orientador - Prof. Dr. Anand Subramanian

Hugo Kramer

Examinador interno - Prof. Dr. Hugo Harry Frederico Ribeiro Kramer

Teobaldo Bulhões

Examinador externo - Prof. Dr. Teobaldo Leite Bulhões Júnior

Resumo

O problema de roteamento de ônibus escolares, do inglês *School Bus Routing Problem* (SBRP), consiste em uma variante do Problema de Roteamento de Veículos Capacitados (PRVC) em que há a necessidade de realizar o transporte de estudantes até as escolas. O presente trabalho lida com uma variante do SBRP considerando a seleção das paradas de ônibus adotadas, alocação dos estudantes a essas paradas e realização da roteirização dos veículos considerando uma única escola, objetivando-se diminuição do custo total de roteirização enquanto se obedece restrições de capacidade dos ônibus e distância máxima que os alunos podem caminhar das suas casas até as paradas. É proposto um algoritmo híbrido baseado na meta-heurística *Iterated Local Search* (ILS) com uma formulação de programação linear inteira (PLI). O algoritmo foi testado em 95 instâncias já conhecidas na literatura, obtendo resultados competitivos, bem como melhorando resultados de 10 das 95 instâncias testadas.

Palavras-chave: Roteamento de ônibus escolares; Meta-heurística; *Iterated Local Search*.

Abstract

The School Bus Routing Problem (SBRP) consists on a variant of the Capacitated Vehicle Routing Problem (CVRP) in which there is a need to transport students to schools. The present work deals with a variant of the SBRP in which it is necessary to select the bus stops adopted, allocate students to those stops and perform the routing of vehicles considering a single school, aiming at reducing the total cost of routing while obeying capacity restrictions of the buses and the maximum distance that students can walk from their homes to the stops. An hybrid algorithm based on Iterated Local Search (ILS) with an integer linear programming formulation is proposed. The algorithm was tested in 95 instances already known in the literature, obtaining competitive results, as well as improving results in 10 of the 95 tested instances.

Keywords: School bus routing; Metaheuristics. Iterated Local Search.

Sumário

Lista de Figuras	vi
Lista de Tabelas	vii
1 Introdução	1
1.1 Definição do tema	1
1.2 Justificativa	3
1.3 Objetivos	5
1.3.1 Objetivo geral	5
1.3.2 Objetivos específicos	5
2 Referencial Teórico	6
2.1 Classificação de subproblemas	6
2.1.1 Preparação dos dados	6
2.1.2 Seleção dos pontos de ônibus	7
2.1.3 Geração das rotas dos ônibus	9
2.1.4 Ajuste com os horários das escolas	10
2.1.5 Cronograma das rotas	11
2.1.6 Política estratégica de transporte	11
2.2 Características do <i>School Bus Routing Problem</i>	12
2.2.1 Número de escolas	12
2.2.2 Ambiente de serviço	14
2.2.3 Carregamento misto	14

2.2.4	Escopo do problema	16
2.2.5	Estudantes com necessidades especiais	17
2.2.6	Tipo de frota	18
2.2.7	Objetivos	18
2.2.8	Restrições	20
2.3	Métodos de resolução	21
2.3.1	Heurísticas clássicas	21
2.3.1.1	Heurísticas Construtivas	22
2.3.1.1.1	Algoritmo de Clark e Wright	22
2.3.1.1.2	Heurísticas de duas fases	23
2.3.1.2	Heurísticas de Refinamento	24
2.3.1.2.1	Troca- λ	24
2.3.1.2.2	k-opt	24
2.3.2	Meta-heurísticas	25
2.3.2.1	Algoritmos Genéticos	25
2.3.2.2	Busca Tabu	26
2.3.2.3	GRASP	27
2.3.2.4	<i>Simulated Annealing</i>	28
2.3.2.5	<i>Iterated Local Search</i>	29
2.3.3	Métodos exatos	30
2.4	Trabalhos relacionados	30
3	Descrição do problema	34
4	Metodologia	37
4.1	Algoritmo proposto	37
4.2	Procedimento construtivo	39
4.3	Busca Local	40

4.3.1	Estruturas de vizinhança inter-rota	40
4.3.2	Estruturas de vizinhança intra-rota	41
4.4	Alocação de estudantes	42
4.4.1	Algoritmo guloso	42
4.4.2	Algoritmo exato	44
4.5	Perturbação	45
4.6	Formulação de Programação Linear Inteira	46
5	Resultados computacionais	48
5.1	Instâncias utilizadas	48
5.2	Comparação do HILS com métodos da literatura	49
6	Conclusão	54
	Referências	56

Lista de Figuras

2.1	Esquematização da estratégia LAR	8
2.2	Esquematização da estratégia ARL	8
2.3	Substituição das arestas x_1, x_2, x_3 pelas arestas y_1, y_2, y_3	25

Lista de Tabelas

2.1	Classificação do SBRP a partir de suas características	13
3.1	Notações utilizadas na formulação matemática	35
5.1	Resultados computacionais	50
5.2	Instâncias com soluções melhoradas comparadas com o B&P	52
5.3	Instâncias com soluções melhoradas em relação a MH	53
5.4	Instâncias com soluções piores	53

Capítulo 1

Introdução

1.1 Definição do tema

O Problema de Roteamento de Veículos (PRV) é um dos problemas mais estudados dentro da pesquisa operacional. De forma geral, esse tipo de problema envolve a determinação de rotas visando a obtenção de um custo mínimo para coleta e/ou entrega de mercadorias para um conjunto de clientes, em que veículos partem de um ou mais depósitos de origem, podendo o problema estar sujeito a restrições adicionais. Assim, esse tipo de problema possui grande ocorrência e importância na área de logística, conforme pontuado por Arenales et al. (2015).

Nesse sentido, o problema de roteamento de ônibus escolares, do inglês *School Bus Routing Problem* (SBRP), está intimamente relacionado com o PRV em que os primeiros trabalhos sobre o problema remontam do fim da década de 60, com o trabalho de Newton e Thomas (1969). Assim, o SBRP consiste em planejar rotas para frotas de ônibus escolares que necessitam buscar os estudantes em uma série de paradas de ônibus pré-definidas e deixá-los em suas respectivas escolas. Então, percebe-se que o SBRP pode ser definido como um caso especial do PRV, em que os estudantes (clientes) são servidos por uma frota de ônibus (veículos). Ainda, como os ônibus possuem capacidade limitada, o SBRP torna-se um caso especial do Problema de Roteamento de Veículos Capacitados (PRVC), que é conhecidamente NP-Difícil.

De forma geral, o SBRP possui um grande número de variantes, com variações nos subproblemas tratados, quantidade de escolas a serem atendidas, o ambiente de serviço (urbano ou rural), tipo de frota de ônibus, objetivos do problema e as suas restrições. Ellegood et al. (2019) apresentam a descrição e possibilidades para cada uma das categorias mencionadas que são abordadas com mais detalhes na Seção 2 do presente trabalho.

Entre os subproblemas constituintes do SBRP presentes na literatura, dois deles serão tratados: seleção das paradas de ônibus e geração das rotas dos ônibus escolares.

O primeiro subproblema lida com a seleção das paradas de ônibus que serão utilizadas e/ou colocadas para atender os estudantes, geralmente obtidas a partir de uma lista de paradas de ônibus candidatas. Nesse sentido, alguns aspectos podem ser levados em consideração: qualidade da localidade em que as paradas de ônibus serão posicionadas, características dessas paradas, distância percorrida pelos estudantes até as paradas, entre outros. Assim, esse subproblema possui o intuito de selecionar as paradas de ônibus a serem utilizadas, bem como alocar os estudantes às paradas selecionadas. Já o segundo subproblema consiste na geração e determinação das rotas propriamente ditas, isto é, o percurso que será percorrido pelos ônibus escolares buscando os estudantes nas paradas de ônibus e deixando-os em suas escolas, sendo este tipo de problema o principal foco do conhecido PRV e, conseqüentemente, do SBRP.

Em suma, o problema de roteamento de ônibus escolares com a seleção de paradas de ônibus busca planejar um cronograma adequado para uma frota de ônibus escolares que recolhem os alunos de um conjunto de vários pontos de ônibus e os entregam à escola satisfazendo restrições como capacidade máxima dos ônibus, tempo máximo de percurso dos alunos e distância máxima de caminhada até os pontos de ônibus. Assim, o problema possui três questões fundamentais: determinar o conjunto de pontos de ônibus a serem visitados, determinar para cada aluno a parada de ônibus que ele deve se dirigir e determinar as rotas que se encontram ao longo das paradas escolhidas, para que a distância total percorrida seja minimizada.

Ademais, o presente trabalho lidará com esses problemas em que os estudantes deverão ser deixados em uma única escola, por uma frota homogênea, isto é, todos os ônibus possuem a mesma capacidade, sendo o objetivo a minimização da distância total percorrida pela frota. Além disso, as seguintes restrições serão consideradas: capacidade dos ônibus e a distância máxima que os estudantes podem caminhar até as paradas de ônibus.

A partir do exposto, surge a seguinte pergunta: **como selecionar e alocar estudantes a paradas de ônibus para posterior roteirização dos ônibus escolares, visando minimização da distância total percorrida, além de respeitar restrições de distância caminhada pelos alunos e capacidade dos veículos?**

1.2 Justificativa

Na gestão da distribuição, decisões estratégicas relacionadas à localização de plantas, armazéns e depósitos, decisões táticas sobre o tamanho e mix da frota, decisões operacionais relacionadas ao roteamento e programação de veículos têm um impacto significativo no custo de entrega de bens e serviços aos clientes e manutenção de um nível satisfatório de serviço. (FLEURY, 2000)

Devido a restrições de capital, não é possível realocar instalações e modificar o tamanho e mix da frota com frequência. Consequentemente, a seleção de rotas de veículos é um problema importante na adaptação às mudanças nas condições do mercado em muitas operações, como supermercados, lojas de departamento, entrega de pacotes, coleta e entrega de carga, entrega de jornais, visitas de manutenção preventiva, entre outras. Nesse sentido, o mesmo raciocínio se aplica ao sistemas de transporte escolar ao redor do mundo.

As empresas de ônibus escolares possuem uma responsabilidade muito importante: garantir todos os dias que os estudantes saiam de suas casas e cheguem em suas escolas, assim como retornem para seus lares posteriormente, tudo isso de forma segura. Este é um processo que requer um trabalho em equipe e tecnologia, como o uso de rastreadores em ônibus escolares, com motoristas bem qualificados e verificados, ônibus de boa qualidade, todos juntos para garantir o bem-estar dos usuários.

As escolas, por outro lado, têm uma quantidade limitada de ônibus disponíveis para lhe atenderem, e é necessário que estes veículos sejam roteirizados para garantir o uso ideal. Dessa forma as escolas e/ou prestadores de serviço de transporte escolar podem vir a possuir uma análise abrangente do tempo e o combustível gastos em média, a melhor rota e o número de viagens por ônibus escolar.

Esses dados podem ser analisados e agendar os horários de ônibus da melhor maneira possível, planejando a rota para economizar tempo e combustível. Rotas curtas significam que os estudantes chegam em casa mais rapidamente, dinheiro gasto em combustível será economizado e faz com que haja um tempo ocioso mínimo para os ônibus e os motoristas.

Nesse sentido, um melhor sistema de gerenciamento de ônibus com motoristas treinados significa que as rotas de ônibus podem ser planejadas de uma maneira melhor. Conforme apontado por Ferreira et al. (2020) e Goulart, Morais e Vieira (2019), as condições dos ônibus escolares podem afetar adversamente a vida acadêmica dos alunos. Portanto, um melhor planejamento da rota beneficia estes estudantes que virão a passar

menos tempo no percurso até a escola. Além disso, ao conhecer o horário e rotas dos ônibus, é possível fazer um planejamento com os horários dos alunos de uma maneira melhor. Isso significa melhor gerenciamento do tempo, o que proporcionará aos alunos uma melhor fluidez acadêmica.

Cada escola funciona com um orçamento anual restrito, incluindo um orçamento para o sistema de transporte escolar. Desde uma melhor alocação de recursos para os ônibus, garantindo rotas mais curtas para economizar combustível, além de otimização de rotas e agendamento oportuno de manutenção de veículos, existem inúmeros benefícios financeiros para a adoção de um planejamento adequado da maneira que é feita o transporte de estudantes.

Nesse sentido, como áreas escolares enfrentam demandas crescentes de estudantes, cada centavo investido deve ser utilizado da maneira mais eficiente possível. Os custos de transporte possuem grande impacto dentro de uma cadeia de distribuição. Assim, encontrar maneiras de reduzir custos desnecessários faz-se essencial.

Algoritmos de roteamento podem permitir que os responsáveis pelo planejamento do transporte escolar calculem as possibilidades de viagens de maneiras que não são possíveis apenas por seres humanos, possibilitando diminuição em custos operacionais como pontuado por Fleming (2019).

Aumentando-se a eficiência por meio da automação, há, consequentemente, economia de dinheiro em combustível, ônibus e motoristas. Além disso, o fator segurança assume um papel fundamental que não pode ser deixado de lado. Além do roteamento dos veículos, a seleção das paradas levaria em consideração aquelas que possuísem o melhor acesso para os estudantes.

Além disso, o problema também pode ser visualizado em empresas em que há a disponibilização de ônibus para realizar a coleta de seus funcionários e levá-los até seu local de trabalho. Assim, tais empresas devem observar a disposição da localização das residências de seus colaboradores de modo a perceber os melhores locais para disposição de pontos em que os ônibus devem passar para realizar a coleta dos trabalhadores, quantidade de ônibus necessários, entre outros fatores, de modo a minimizar os custos envolvidos neste transporte.

Nesse cenário, também podem ocorrer características semelhantes ao SBRP, como alocação de funcionários a paradas, limitação da capacidade dos ônibus, limitação das distâncias que os funcionários podem percorrer até as paradas de ônibus, busca pela minimização total da distância percorrida pela frota de ônibus, entre outras. Assim,

percebe-se a importância do problema em empresas que buscam minimizar os custos envolvidos no transporte de seus funcionários.

Por fim, apesar de parecer simples, o planejamento do transporte escolar pode vir a possuir um caráter único que varia de localidade para localidade. Assim, uma variedade de fatores deve ser considerada no planejamento, incluindo a extensão da rota, o número de alunos atendidos em cada parada e a quantidade de bairros transitórios em determinadas localidades dentro de uma única rota.

1.3 Objetivos

1.3.1 Objetivo geral

Propor um algoritmo heurístico para solucionar o *School Bus Routing Problem* (SBRP), considerando os subproblemas de seleção de pontos de ônibus e geração das rotas.

1.3.2 Objetivos específicos

- Resolver o subproblema de seleção de paradas de ônibus e alocação de estudantes.
- Resolver o subproblema de geração de rotas de ônibus escolares.
- Implementar método(s) construtivo(s) para geração de soluções iniciais.
- Implementar heurísticas de refinamento para melhoria das soluções iniciais obtidas.
- Utilizar instâncias já conhecidas na literatura para testar a qualidade do algoritmo.
- Comparar os resultados obtidos com resultados encontrados na literatura.

Capítulo 2

Referencial Teórico

A presente seção busca apresentar os principais conceitos sobre o *School Bus Routing Problem* (SBRP), bem como elucidar os principais métodos utilizados para resolver as possíveis variantes do problema já apresentados na literatura. O SBRP vem sendo estudado desde o fim da década de 60, com a publicação de Newton e Thomas (1969), possuindo uma vasta quantidade de trabalhos acerca das variantes do problema. Com o intuito de abordar tais publicações, o presente trabalho utiliza como base as revisões realizadas por Park e Kim (2010) e Ellegood et al. (2019), que apresentaram de maneira completa as características envolvidas no SBRP. Em seguida, serão apresentados trabalhos relacionados que utilizaram como estudo variantes similares a apresentada aqui.

2.1 Classificação de subproblemas

Ambos os trabalhos citados como base para o presente referencial teórico consideram cinco subproblemas que compõem o SBRP. Park e Kim (2010) consideram a proposta de Desrosiers et al. (1981), que afirmaram que o SBRP pode ser resolvido a partir da resolução dos seguintes subproblemas: preparação dos dados, seleção dos pontos de ônibus, geração das rotas dos ônibus, ajuste com os horários das escolas e o cronograma das rotas. Ellegood et al. (2019) utilizam esta mesma classificação, omitindo a etapa de preparação de dados e acrescentando um último subproblema trabalhado mais recentemente na literatura, que considera políticas estratégicas de transporte.

2.1.1 Preparação dos dados

Este subproblema consiste em preparar os dados de entrada para os demais subproblemas do SBRP. Em geral, é considerado um conjunto de dados que contempla as seguintes

características: estudantes, escolas, veículos e uma matriz de origem e destino. Além disso, a rede viária também é especificada.

Os dados dos estudantes consistem na localização de suas residências, as escolas de destino e o tipo de estudante, que busca averiguar se o estudante possui algum tipo de necessidade especial. Os dados das escolas geralmente consideram a localização de cada escola e o tempo inicial e final que os ônibus podem chegar nelas.

Já os dados dos veículos contemplam a localização de origem e o tipo de cada ônibus, levando em consideração a variação de capacidade que pode haver entre diferentes tipos de veículos, bem como características que permitam que os ônibus possam transportar alunos com necessidades especiais ou não.

O presente estudo trabalha com instâncias já conhecidas na literatura, sendo utilizadas inicialmente por Schittekat et al. (2013).

2.1.2 Seleção dos pontos de ônibus

Este subproblema tem como objetivo selecionar um conjunto de pontos de ônibus e atribuir cada estudante a cada um destes pontos pré-selecionados. Essa seleção geralmente acontece a partir de uma lista de pontos candidatos previamente aprovados.

Os pontos candidatos para seleção geralmente atendem um conjunto de aspectos que podem ser baseados em características da rede viária, segurança para os alunos aguardarem os ônibus, espaço para os estudantes, características das rotas, distância das residências dos alunos para os pontos de ônibus e assim por diante.

Dessa forma, alguns dados são necessários para formulação desse tipo de problema. Entre eles, têm-se: informações acerca de localidades aceitáveis, do ponto de vista regulamentário, para posicionamento de pontos de ônibus, lista de potenciais candidatos, localidade das residências dos estudantes, escola de cada um dos estudantes, uma matriz de distância entre as residências dos alunos para os pontos de ônibus e informações acerca do máximo que um aluno pode caminhar até chegar em uma parada de ônibus.

Esse tipo de problema geralmente é tratado juntamente com o subproblema de geração das rotas dos ônibus, como pode ser observado nos trabalhos de Schittekat et al. (2013), Kinable, Spieksma e Berghe (2014), Leksakul et al. (2017) e Faraj et al. (2014). Em sua pesquisa, Ellegood et al. (2019) apontam 17 trabalhos que resolvem o problema de seleção de pontos de ônibus juntamente com a roteirização desses veículos.

Soluções heurísticas conhecidas na literatura para resolução do problema geralmente consistem em duas, conforme Park e Kim (2010): *Location-Allocation-Routing* (LAR) e *Allocation-Routing-Location* (ARL). O primeiro método consiste em primeiramente determinar o conjunto de pontos de ônibus para atribuir a eles os estudantes para que, por fim, seja criada a demanda para geração das rotas. Nota-se que a geração desses pontos pode não ser a ótima para o subproblema de roteamento dos veículos, podendo gerar rotas subutilizadas, por exemplo. A Figura 2.1 ilustra a estratégia LAR.

Já o método ARL consiste em realizar o agrupamento de estudantes em *clusters* levando em consideração a capacidade dos veículos para que posteriormente seja feita a seleção de pontos de ônibus a partir destes *clusters* e, por fim, o roteamento dos ônibus. Essa estratégia pode ser observada na Figura 2.2. Os trabalhos de Chapleau, Ferland e Rousseau (1985) e Bowerman, Hall e Calamai (1995) são exemplos que utilizaram esta estratégia.

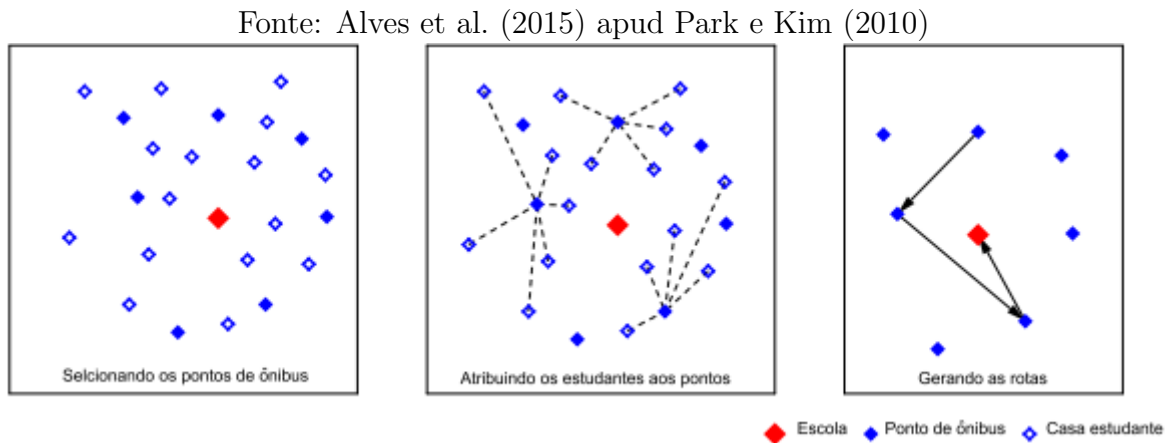


Figura 2.1: Esquemática da estratégia LAR

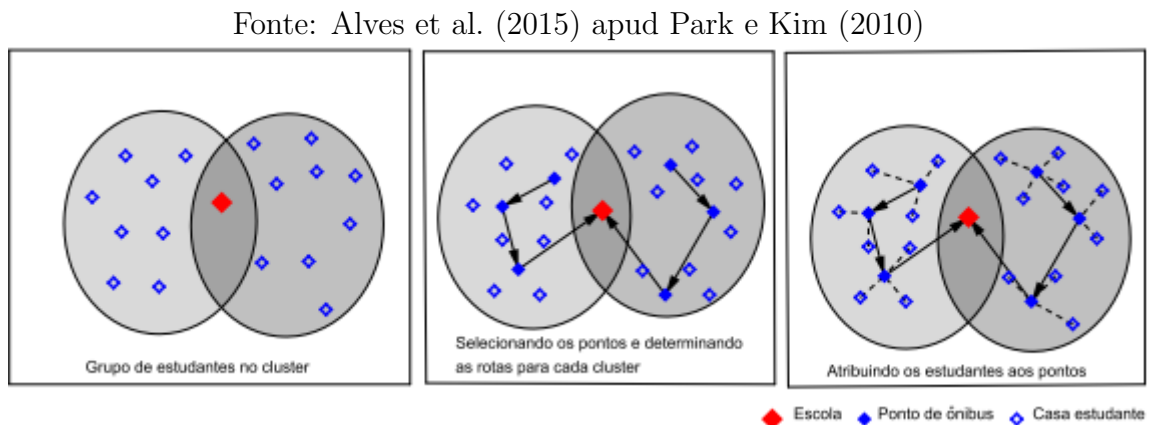


Figura 2.2: Esquemática da estratégia ARL

Como mencionado, o problema de seleção de pontos de ônibus geralmente é trabalhado de forma conjunta com o problema de roteirização dos veículos. De forma geral, o problema de seleção é resolvido previamente ao roteamento, pois a localização dos pontos de ônibus assim como a quantidade de alunos alocados para cada um deles são dados de entrada para o problema de roteirização. Entretanto, em alguns casos o subproblema de seleção de pontos de ônibus é omitido e eles são considerados fixos. Isso acontece, por exemplo, no trabalho de Arias-Rojas, Jiménez e Montoya-Torres (2012), em que os pontos de ônibus são agrupados em *clusters* e atribuídos aos ônibus e cada *cluster* é posteriormente resolvido como um problema do caixeiro viajante.

Em contrapartida, trabalhos como os de Sarubbi et al. (2016) e Galdi e Thebpanya (2016) estudam o subproblema de seleção de pontos de ônibus de forma isolada, sendo o primeiro trabalho considerando apenas uma única escola e o segundo múltiplas escolas.

2.1.3 Geração das rotas dos ônibus

Este subproblema é considerado o mais importante dentro da literatura do SBRP. Ele consiste em elaborar o caminho que deve ser percorrido pelos veículos pelos pontos de ônibus e escolas em que os estudantes devem ser deixados. Em sua pesquisa, Ellegood et al. (2019) observaram que 60 de 64 trabalhos publicados acerca do SBRP consideraram o problema de roteamento de veículos. Como exceção, há os já citados trabalhos de Sarubbi et al. (2016) e Galdi e Thebpanya (2016), que estudam o problema de seleção de pontos de ônibus isoladamente, o trabalho de Kim, Kim e Park (2012) que considera apenas o ajuste com os horários das escolas e o trabalho de Ellegood, Campbell e North (2015) que trata apenas de políticas estratégicas de transporte.

No subproblema de roteamento, há na literatura uma diferenciação entre rotas e viagens realizadas pelos ônibus. Uma viagem se inicia com o ônibus vazio em um determinado ponto de origem, posteriormente visitando os pontos de ônibus para coleta dos alunos e finaliza em um ponto em que todos os alunos foram deixados em suas respectivas escolas em que o ônibus ficará vazio novamente. Assim, percebe-se que cada viagem pode ter pontos de origem e destino diferentes. Para cada viagem subsequente, a origem consiste no ponto de destino da viagem anterior. Dessa forma, um ônibus pode fazer diferentes viagens em um turno (devido a diferentes horários das escolas, por exemplo) e uma rota poderá ser uma única viagem ou um conjunto de viagens ligadas entre si.

Como formas de resolução deste subproblema, Bodin e Berman (1979) classificaram os algoritmos utilizados em dois tipos de abordagens: “*route first, cluster second*” e “*cluster*

first, route second". O primeiro método consiste em gerar uma rota a partir de um algoritmo baseado no problema do caixeiro viajante que considera todos os pontos de ônibus. Em seguida, essa rota é particionada considerando as restrições específicas do problema tratado. Newton e Thomas (1969) e Bodin e Berman (1979) utilizaram este método. Já o segundo método consiste em agrupar os estudantes em *clusters* e fazer com que cada um desses *clusters* se torne uma rota satisfazendo as restrições do problema, como pode ser observado nos trabalhos de Dulac, Ferland e Forgues (1980) e Laporte e Semet (2002). Ainda, Alves et al. (2015) citam quatro formas de planejamento que podem ser utilizadas:

1. *ônibus dedicado para o cluster*: cada ônibus é designado para buscar os estudantes de um *cluster* e deixá-los em suas escolas.
2. *ônibus dedicado para escola*: os ônibus são designados para as escolas e devem buscar nos pontos apenas os alunos desta determinada escola
3. *conexão com um terminal*: consiste em uma combinação das duas primeiras estratégias, em que os ônibus são designados a *clusters* e uma rota é feita até um terminal. Deste terminal, novas rotas são traçadas até as escolas.
4. *estratégias híbridas*: consiste em estratégias que combinam as demais estratégias citadas.

2.1.4 Ajuste com os horários das escolas

Na grande maioria dos estudos, os tempos de chegada e saída nas escolas são considerados restrições dos problemas. No entanto, em alguns casos, esses tempos são considerados variáveis de decisão em que busca-se encontrar os tempos ótimos para que haja uma maximização no número de rotas que podem ser realizadas por um mesmo ônibus. Bodin (1983) e Desrosiers et al. (1986) são exemplos de estudos que lidam com este subproblema. Fügenschuh (2009) também trabalhou com este subproblema, permitindo a troca de alunos entre rotas.

Mais recentemente, Mandujano, Giesen e Ferrer (2012) e Bertsimas, Delarue e Martin (2018) também consideraram o problema de ajuste com os horários das escolas. O primeiro considera uma versão do subproblema que busca determinar quais escolas de uma determinada região devem permanecer abertas.

É importante observar que este subproblema necessita de informações de roteamento dos ônibus já existente ou obtidos a partir da resolução do subproblema de geração de rotas descrito anteriormente.

2.1.5 Cronograma das rotas

O subproblema do cronograma das rotas consiste em determinar um tempo exato de fim e início de cada rota de modo que uma cadeia sucessiva de rotas possa ser executada por um mesmo ônibus. Esse tipo de problema encontra-se bastante presente na literatura especialmente quando os problemas trabalhados se referem a múltiplas escolas em que os tempos das rotas podem ser delimitados pela restrição de janelas de tempo que envolvem o tempo de chegada e saída nas escolas e o tempo de chegada e saída em cada ponto de ônibus levando em consideração o tempo necessário para que os estudantes consigam embarcar nos veículos. Nesse sentido, fatores que influenciam o tempo de embarque e desembarque surgem como essenciais nesse tipo de problema, que pode ser observado nos trabalhos de Campbell, North e Ellegood (2015) e Caceres, Batta e He (2017).

Alguns dados necessários para resolução deste subproblema podem incluir matrizes de distância e tempo entre os pontos de ônibus, os padrões de horário de carregamento de coleta e entrega dos estudantes, as janelas de tempo de entrega para cada escola, conjunto de rotas estabelecidas, entre outros. Tais dados podem ser provenientes de operações já estabelecidas ou da solução de outros subproblemas do SBRP. Por isso, este tipo de subproblema geralmente é trabalhado de forma conjunta com o de roteamento.

2.1.6 Política estratégica de transporte

A maioria dos trabalhos que tratam do SBRP preocupam-se em resolver problemas para uma configuração específica de transporte, aplicações práticas ou instâncias já conhecidas na literatura. Entretanto, este subproblema trata de análises estratégicas mais abrangentes e generalistas sobre as políticas do SBRP.

Ellegood, Campbell e North (2015), por exemplo, demonstraram como uma política de carregamento misto, isto é, permitir que estudantes de escolas diferentes embarquem em um mesmo ônibus, reduz a distância total percorrida quando a distância entre as escolas em questão é menor que um certo valor de criticidade. Alguns dados de entrada utilizados foram o número de estudantes por escola, número de pontos de ônibus, proporção compartilhada destes pontos entre os estudantes de escolas distintas, capacidade do

ônibus e o tamanho da região de estudo.

2.2 Características do *School Bus Routing Problem*

O SBRP é dividido na literatura em diversas classificações, de acordo com alguns critérios de acordo com a Tabela 2.1, estabelecidos nos trabalhos de Park e Kim (2010) e Ellegood et al. (2019). Esta seção dedica-se a abordar essas características.

2.2.1 Número de escolas

O número de escolas em um problema de roteamento de ônibus escolares pode se referir a uma única escola ou múltiplas. Na prática, os problemas geralmente lidam com situações em que há múltiplas escolas para se entregar os estudantes. Entretanto, na literatura há uma vasta gama de trabalhos que lidam com problemas baseados em uma única escola, como é o caso dos estudos de Schittekat et al. (2013) e Kinable, Spijksma e Berghe (2014).

Neste tipo de situação, os métodos de resolução para problemas que lidam com uma única escola tendem a ser similares ao clássico problema de roteamento de veículos, em que os veículos partem de um depósito, percorrem seus clientes e retornam para o depósito em questão. Analogamente, no SBRP o ônibus parte de um ponto de origem, podendo este variar entre a escola ou um depósito, percorre os pontos de ônibus coletando os estudantes e entrega-os na escola em questão.

Quando o problema é baseado em múltiplas escolas, há na literatura dois métodos de resolução, de acordo com Spada, Bierlaire e Liebling (2005). São eles:

1. Baseado na escola: Um conjunto de rotas é gerado para cada escola que são atribuídas a uma frota de ônibus. A partir disso, refina-se a solução para adequá-la as janelas de tempo de cada escola. Neste tipo de resolução, não é permitido que um ônibus transporte estudantes de escolas distintas, isto é, não é permitido um carregamento misto e cada ônibus deve transportar alunos de uma única escola.
2. Baseado na residência do estudante: Introduzido primeiramente no trabalho de Braca et al. (1997), este método consiste em inserir um ponto de ônibus em uma rota por vez. Quando este é inserido, a escola correspondente a este ponto também deve ser introduzida na rota. Neste método, o carregamento misto é permitido e um ônibus pode transportar alunos de escolas distintas.

Tabela 2.1: Classificação do SBRP a partir de suas características

Características	Descrição
Subproblemas	1. Preparação dos dados 2. Seleção dos pontos de ônibus 3. Geração das rotas dos ônibus 4. Ajuste com os horários das escolas 5. Cronograma das rotas 6. Política estratégica de transporte
Número de escolas	1. Única 2. Múltipla
Ambiente de serviço	1. Urbano 2. Rural
Carregamento misto	1. Permitido 2. Não permitido
Escopo do problema	1. Manhã 2. Tarde 3. Manhã e Tarde
Alunos com necessidades especiais	1. Considerados 2. Não considerados
Tipo de frota	1. Homogênea 2. Heterogênea
Objetivos	1. Número de ônibus utilizados 2. Tempo ou distância total do veículo 3. Tempo ou distância total do deslocamento do aluno 4. Distância total de caminhada do aluno 5. Comprimento máximo da rota 6. Balanceamento de alocação de alunos 7. Paradas de ônibus compartilhadas 8. Utilização da capacidade 9. Custo total 10. Compatibilidade da viagem 11. Segurança 12. Número de transferências 13. Número de paradas
Restrições	1. Capacidade do veículo 2. Tempo máximo do percurso 3. Janela de tempo das escolas 4. Tempo ou distância de caminhada máxima 5. Menor tempo de coleta 6. Menor quantidade de alunos para criação de rota 7. Tempo de transferência 8. Janela de tempo de parada 9. Máximo de paradas por rota 10. Chance de superlotação 11. Chance de atraso

Fonte: Adaptado de Ellegood et al. (2019)

2.2.2 Ambiente de serviço

O ambiente em que ocorre o transporte dos estudantes até as escolas pode ser variado e tende a assumir importante relevância no SBRP. Na literatura, classifica-se o tipo de ambiente em urbano ou rural.

Em áreas urbanas geralmente se assume que os estudantes deixam suas residências para caminharem até os pontos de ônibus e, assim, serem transportados até a escola. Já em ambientes rurais, o número de estudantes tende a ser menor e os ônibus costumam buscá-los em suas próprias residências. Dessa forma, o subproblema de seleção de pontos de ônibus não possui a mesma relevância em ambientes rurais quando se comparado com ambientes urbanos, em que os estudantes possuem acesso a uma rede de estradas mais densa e segura para que possam caminhar de suas casas até uma parada de ônibus compartilhada.

Em suma, o ambiente rural possui os seguintes aspectos em relação ao urbano, conforme Chen et al. (1990): menor densidade populacional, maior distância percorrida por rota, menor número de estudantes por veículo, mais paradas por rota, menor quantidade de rotas alternativas, entre outros. Por outro lado, ambientes urbanos possuem ruas mais amplas, providas com calçadas e limites de velocidade mais restritos que garantem mais segurança aos estudantes. Além disso, devido a maior densidade populacional e consequente maior número de estudantes, há uma maior quantidade de alunos que residem em distâncias favoráveis de paradas de ônibus que permite com que eles caminhem até elas. Ainda devido a maior densidade de estudantes, os ônibus tendem a atingir sua capacidade máxima com menos paradas, como pode ser observado nos trabalhos de Bodin e Berman (1979) e Bowerman, Hall e Calamai (1995). Neste último, os autores optaram por não utilizar a restrição de tempo máximo que um estudante pode ficar dentro do ônibus, pois a capacidade do veículo tende a ser atingida muito antes deste tempo ser alcançado.

2.2.3 Carregamento misto

O carregamento misto se refere à permissão de alunos de diferentes escolas em um mesmo ônibus ao mesmo tempo, isto é, a existência de veículos que transportam alunos para diferentes escolas. Essa permissão geralmente tende a aumentar a flexibilidade nas rotas e reduzir os custos de transporte, conforme Braca et al. (1997). Ainda, quando não ocorre esta permissão, o problema se resume a um problema de únicas cargas em que cada escola possui ônibus exclusivos que transportam seus alunos. A desvantagem

da não permissão de carregamento misto incide em que as rotas não são tão eficientes, pois uma mesma parada de ônibus será visitada múltiplas vezes por ônibus diferentes até que todos os estudantes de escolas distintas daquela parada sejam coletados. Ainda, há a possibilidade de ônibus passarem por paradas que não contenham estudantes que possam ser coletados por eles. Por outro lado, carregamentos mistos podem acarretar em maior tempo de espera pelos estudantes e maior tempo de transporte devido a viagens adicionais entre escolas.

Trabalhos como os de Bodin e Berman (1979), Chen, Kallsen e Snider (1988) e Spada, Bierlaire e Liebling (2005) discutem problemas que lidam com o carregamento misto. Braca et al. (1997) foram os primeiros a propor um algoritmo dedicado a carregamentos mistos, em que eles adaptaram a heurística de localização de Bramel e Simchi-Levi (1995) que havia sido desenvolvida para resolução do PRVC. A abordagem consiste em verificar dois vértices consecutivos em um percurso e analisar se um ponto de ônibus pode ser inserido entre eles, se a escola de destino desse ponto não estiver inclusa na rota então também é determinada a melhor posição de inserção para a escola. Em seguida, um conjunto de rotas é atualizado através da inserção de um ponto para a rota que resulta na menor distância total do percurso.

Além disso, Ellegood et al. (2019) pontuam quatro tipos de carregamento misto. São eles:

1. Tradicional: Consiste em entregar todos os estudantes em suas escolas visitando várias escolas durante uma viagem. É o modo de carregamento misto mais comum na literatura, podendo ser encontrados nos trabalhos de Ellegood, Campbell e North (2015), Lima et al. (2016), Spada, Bierlaire e Liebling (2005), Chen et al. (1990) e Braca et al. (1997). Este tipo de carregamento tende a possuir mais benefícios em grandes áreas escolares, em que paradas de ônibus costumam ser compartilhadas por diferentes estudantes de diversas escolas e níveis estudantis, conforme pode ser visto em Ellegood, Campbell e North (2015).
2. Coleta e entrega: Consiste na combinação de realizar a coleta dos estudantes para levá-los até as escolas e coletá-los nas escolas para levá-los até em casa. Esta estratégia pode acarretar em redução da distância percorrida e quantidade de ônibus necessária para realizar o transporte, conforme Miranda et al. (2018).
3. Interescolar: Neste tipo, os ônibus visitam apenas uma escola em que todos os estudantes são deixados, inclusive aqueles que não estudam em tal escola. Lá, eles

aguardam até que haja uma quantidade suficiente de estudantes para preencherem um ônibus. Então, eles são levados diretamente até sua escola. Esta estratégia encontra-se presente nos trabalhos de Desrosiers et al. (1986), Chen et al. (1990), Russell e Morrel (1986) e Yao et al. (2016). Este último sugere que o tipo interescolar é efetivo quando há uma grande quantidade de alunos a serem transportados.

4. Transbordo: Neste tipo, os estudantes são transferidos de um ônibus para outro durante a viagem. Aqui, há a permissão de que, durante uma viagem, os ônibus a façam com um carregamento misto e em seu decorrer passem a adotar um carregamento destinado a uma única escola. Por exemplo, Bögl, Doerner e Parragh (2015) permitem que dois ônibus A e B, destinados às escolas C e D respectivamente, realizem coleta de estudantes de ambas as escolas. Em seguida, os ônibus se encontram em um ponto de transferência em que os estudantes que se encontram no ônibus equivocado são trocados. Já Oluwadare, Oguntuyi e Nwaiwu (2018) permitem que estudantes sejam coletados por mais de um ônibus para chegarem em suas escolas, isto é, o estudante pode ser coletado em uma parada de ônibus X, sair do ônibus na parada Y e aguardar por um outro veículo.

2.2.4 Escopo do problema

O escopo do problema se refere ao turno em que o transporte de estudantes é realizado: manhã, tarde ou ambos. De forma genérica, os estudantes são buscados pelos ônibus durante a manhã e entregues em suas escolas. No turno da tarde, são buscados em suas escolas e deixados nas paradas de ônibus. Neste cenário, Braca et al. (1997) afirma que os problemas destinados à manhã tendem a ser mais complicados por conta das janelas de tempo mal distribuídas nas escolas e o maior tráfego. Assim, estudos que lidam com problema no turno da manhã são mais comuns.

Bodin e Berman (1979), entretanto, propuseram um método simples para resolução de problemas no turno da tarde em que a sequência dos pontos de ônibus seriam uma réplica da sequência realizada no turno da manhã ou em ordem reversa com o intuito de minimizar o tempo de viagem. Ellegood et al. (2019) trataram sua pesquisa focando em problemas no turno da manhã, afirmando que problemas no turno da tarde podem ser lidados de maneira similar tratando as viagens em ordem reversa àquela realizada durante a manhã. Por fim, Bookbinder e Edwards (1990) trabalharam com um problema que busca lidar com o planejamento de transporte de estudantes com atividades especiais realizadas em ambos os turnos, como natação, arte e atividades extracurriculares em geral.

2.2.5 Estudantes com necessidades especiais

Transportar estudantes com necessidades especiais é, em sua essência, uma tarefa com diversas peculiaridades que a distingue do transporte de alunos sem qualquer tipo de necessidade especial. Primeiramente, assume-se como premissa que as pessoas com necessidades especiais são buscadas pelos ônibus em suas próprias residências e não em pontos de ônibus específicos. Além disso, há maiores restrições no que tange o tempo em que esses alunos podem ficar dentro de um veículo até chegarem as suas escolas. Por fim, como há uma grande variabilidade no que diz respeito ao tipo de necessidade que cada estudante pode possuir, cada um deles deve ser tratado de uma maneira específica, isto é, cada estudante deve ser alocado a um ônibus que seja capaz de atender sua necessidade.

Na literatura, poucos trabalhos lidaram com esta característica. Russell e Morrel (1986) propuseram uma solução para o problema a partir da construção de uma solução inicial baseada no algoritmo de economia de Clark e Wright, realizando a melhora da solução por um algoritmo 3-opt e por um método proposto em Russell (1977) utilizado para resolver uma das variantes do problema do caixeiro viajante. Como neste tipo de problema o número de escolas a serem visitadas tende a ser muito grande, devido a grande variedade de estudantes, os autores desenvolveram um sistema de transporte em que os ônibus buscam os alunos e viajam para um dos dois locais de transporte em que há as escolas com maior número de estudantes a serem levados. Chegando lá, os alunos que pertencem às escolas são descarregados e o restante é realocado para os ônibus. Neste sistema, o número de escolas a serem visitadas é limitada a duas e tende a ser eficaz para gerar rotas mais compactas e reduzir o número de visitas a escolas em algumas das rotas.

Braca et al. (1997) discutiram de forma breve esta característica do SBRP, apresentando a situação da cidade de Nova Iorque, em que de um total de 125.000 estudantes que utilizam ônibus para chegarem até as escolas, 40.000 deles (32%) apresentam algum tipo de necessidade especial. Apesar disso, eles propuseram um método de roteamento que considerava apenas estudantes sem qualquer tipo de necessidade especial. Ripplinger (2005) considerou a presença de estudantes com necessidades especiais em ambientes rurais e discutiu duas opções para inclusão destes alunos. Na primeira, há uma distinção entre alunos com necessidades especiais e aqueles que não possuem em que os problemas são resolvidos de forma separada. Na segunda opção, é considerado um planejamento de roteirização para ambos os tipos de estudantes.

2.2.6 Tipo de frota

O tipo de frota varia conforme a capacidade dos ônibus, isto é, se todos os ônibus possuírem a mesma capacidade, a frota é dita homogênea, caso contrário, ela é considerada heterogênea. Entretanto, outras características podem ser consideradas ao se avaliar o tipo de frota, como custos fixos e variáveis e tempo máximo de condução. Neste sentido, a frota será homogênea quando os veículos possuírem estas características iguais e heterogênea caso contrário.

Newton e Thomas (1974) assumiram que todos os ônibus possuem exatamente a mesma capacidade. Entretanto, esta capacidade estava sujeita a alterações devido a políticas únicas adotadas por cada escola, isto é, cada uma delas possuía sua regulamentação quanto ao grau de lotação dos ônibus e se seria permitido que estudantes fossem transportados em pé quando todos os assentos estivessem ocupados.

Bowerman, Hall e Calamai (1995) estudaram um problema em que todos os ônibus possuem a mesma capacidade. Entretanto, na maioria dos estudos, cada assento é equivalente a um estudante. Neste, há uma variabilidade associada em que cada estudante ocupa um espaço diferente relacionado a um assento, isto é, um aluno criança que ainda está frequentando as primeiras séries na escola, tende a ocupar um espaço menor que um aluno mais avançado. Assim, ônibus com a mesma capacidade poderiam transportar um número diferente de estudantes.

Em geral, em zonas rurais as frotas são consideradas homogêneas, pois a capacidade dos ônibus tende a não ser atingida e o tempo máximo de condução dos estudantes é a principal restrição do problema. Com relação às escolas, problemas que consideram uma única escola tendem a assumir um tipo de frota homogêneo, sendo os trabalhos de Siqueira et al. (2016), Faraj et al. (2014) e Sales et al. (2018) exceções a isto. Por outro lado, é comum encontrar na literatura, para problemas com múltiplas escolas, ambos os tipos de frota.

2.2.7 Objetivos

Bowerman, Hall e Calamai (1995) e Li e Fu (2002) classificaram os critérios de avaliação de um serviço proposto por Savas (1978) a partir dos objetivos almejados nas variantes do SBRP, conforme segue:

- **A eficiência** consiste na razão entre o nível de serviço oferecido e o custo necessário

para oferecê-lo. Para um nível de serviço fixo, a eficiência geralmente é determinada pelos seus custos. Em um SBRP, os custos associados geralmente são: o custo necessário para manter um ônibus por um ano letivo e o custo variável com a distância percorrida. Nesse sentido, uma solução que busque a minimização de ônibus utilizados e distância total percorrida atendem o critério da eficiência.

- A **eficácia** é medida considerando o quão bem a demanda é atendida. Um sistema de ônibus escolares deve ser capaz de atender todos os estudantes que necessitam dele mantendo um nível de serviço adequado. A eficácia pode, então, ser medida por meio do tempo total de percurso, tempo e/ou distância que os estudantes devem caminhar até os pontos de ônibus e assim por diante.
- A **equidade** considera a imparcialidade do serviço. Soluções que atendem a este critério são aquelas em que há um balanceamento no carregamento de estudantes e tempo de viagem adequados. Soluções que visam apenas minimização de custo visando apenas eficiência geralmente tendem a deixar este critério de lado. Portanto, ao se planejar um serviço, a equidade deve ser considerada juntamente com a eficiência e a eficácia.

Conforme mencionado previamente, o subproblema de geração de rotas para os ônibus costuma ser o mais abordado na literatura. Como principal objetivo, surge a minimização de custo a partir de um bom planejamento das rotas a serem geradas. Para tal, muitos aspectos podem ser considerados, como minimização do número de ônibus utilizados e minimização da distância total percorrida. Ellegood et al. (2019) menciona que de 64 publicações acerca do SBRP, 49 objetivavam minimizar a distância total percorrida e 28 o número de ônibus utilizados, considerando trabalhos que possuíam múltiplos objetivos.

Chalkia et al. (2016) utilizaram um modelo para minimizar a distância total percorrida em que uma penalização baseada em um fator de segurança para cada rodovia utilizada era aplicada. Minocha e Tripathi (2014) objetivavam maximizar a utilização da capacidade dos ônibus em que, para um número fixo de estudantes, consiste em minimizar o número de ônibus utilizados. Campbell, North e Ellegood (2015) considera a minimização tanto do número de ônibus utilizados, quanto da distância total percorrida. Caceres, Batta e He (2017) consideram, como objetivo primário, a minimização de ônibus utilizados com posterior minimização da distância total percorrida através de métodos heurísticos.

Ellegood et al. (2019) pontuam que, de 64 trabalhos acerca do SBRP, 15 deles consideram problemas com dois objetivos baseado em função de custo total. Destes 15, 14 utilizam

um custo fixo por ônibus utilizado, variando em custos baseados em tempo ou distância de viagem, como em Lima et al. (2016) e Mandujano, Giesen e Ferrer (2012). Outros trabalhos consideram a distância total caminhada pelos estudantes, como em Riera-Ledesma e Salazar-González (2013), ou o tempo total de deslocamento do estudantes, como em Bertsimas, Delarue e Martin (2018).

Quando o subproblema de seleção de pontos de ônibus é considerado, três objetivos principais são considerados: minimização da distância de caminhada dos alunos como no trabalho de Riera-Ledesma e Salazar-González (2013), minimização do número de pontos de ônibus utilizados como mostrado em Galdi e Thebpanya (2016) e minimização de pontos de ônibus compartilhados como em Bögl, Doerner e Parragh (2015). Além disso, alguns trabalhos buscam a melhora da equidade entre viagens por meio da minimização do comprimento total das rotas, como em Pacheco et al. (2013).

2.2.8 Restrições

Várias restrições são consideradas na literatura sobre o SBRP, conforme pode ser observado na Tabela 2.1. Algumas delas foram listadas primeiramente nos trabalhos de Braca et al. (1997) e Spada, Bierlaire e Liebling (2005), listadas a seguir:

- *Capacidade do veículo*: Consiste no limitante superior do número de estudantes em um veículo.
- *Tempo máximo do percurso*: Consiste no tempo máximo que um estudante pode permanecer dentro do ônibus até chegar na escola.
- *Janela de tempo das escolas*: Consiste no intervalo de tempo que os ônibus podem chegar em uma determinada escola.
- *Tempo e/ou distância de caminhada máxima*: Consiste no tempo e/ou distância que não pode ser ultrapassado para que o estudante saia de sua casa e chegue até o ponto de ônibus.
- *Limite máximo de alunos por ponto de ônibus*
- *Número mínimo de alunos para se criar uma rota*

Mais recentemente, algumas outras restrições foram incorporadas na literatura, são elas, conforme Ellegood et al. (2019): tempo de transferência, janela de tempo de parada,

máximo de paradas por rota, chance de superlotação e chance de atraso. Considerando o transbordo de estudantes, a restrição de tempo de transferência é utilizada para garantir que haja uma sincronização das rotas, levando em consideração o tempo máximo que um ônibus pode esperar pelo outro para realizar a transferência de estudantes. Já a restrição de janela de tempo de parada busca balancear o tempo de percurso de cada estudante, de modo que este tempo não exceda um certo limite de tempo que levaria o estudante para sair do ponto de ônibus diretamente para sua escola.

Riera-Ledesma e Salazar-González (2013) consideraram as restrições de número máximo de paradas por rota, tempo máximo de percurso e número mínimo de estudantes por rota para garantir que houvesse um balanço de carregamento de estudantes por rota. O potencial de baixa utilização de capacidade motivou Caceres, Batta e He (2017) a considerar a demanda estocástica com restrições que explicam a chance de superlotação e chance de atraso.

2.3 Métodos de resolução

2.3.1 Heurísticas clássicas

As heurísticas clássicas formam a base de muitas abordagens existentes para solucionar o subproblema de geração de rotas de ônibus. Como este subproblema é um tipo de roteamento de veículos capacitados (PRVC), as heurísticas presentes na literatura para resolvê-lo são similares às heurísticas empregadas no PRVC. Aqui, as heurísticas clássicas aplicadas ao subproblema de geração de rotas de ônibus do SBRP serão abordadas como heurísticas de construção ou de refinamento.

As heurísticas de construção são usadas para criar soluções viáveis iniciais, e as heurísticas de refinamento são usadas para perturbar soluções (rotas ou viagens de ônibus), conforme orientado pelos critérios do problema, de forma a encontrar soluções melhores a que foi inicialmente obtida.

No subproblema de geração de rotas de ônibus, o método de economia baseado nos métodos de inserção de Clarke e Wright (1964) e abordagens de duas fases são usadas para a construção de rotas. Os métodos de melhoria serão categorizados como intra-rota ou inter-rota. O subproblema de seleção de paradas de ônibus é abordado por meio de heurísticas de duas fases, em que se considera inicialmente este subproblema para posterior roteirização ou vice-versa.

2.3.1.1 Heurísticas Construtivas

2.3.1.1.1 Algoritmo de Clark e Wright

Na literatura, muitos trabalhos consideram heurísticas construtivas baseadas no algoritmo de economia proposto inicialmente por Clarke e Wright (1964). Este algoritmo consiste na junção de rotas e no cálculo da economia conseguida a partir destas junções. Desse modo, a partir de duas rotas $(0, \dots, i, \dots, 0)$ e $(0, \dots, j, \dots, 0)$ busca-se criar uma nova rota $(0, \dots, i, j, \dots, 0)$ por meio do cálculo de economia propiciado pela Equação 2.1, onde c_{0i} e c_{0j} representam as distâncias entre o ponto de partida, possivelmente uma escola, e o pontos de ônibus i e j , c_{ij} é a distância entre os dois pontos e s_{ij} representa a economia de deslocamento entre os dois pontos.

$$s_{ij} = c_{0i} + c_{0j} - c_{ij} \quad (2.1)$$

O algoritmo possui duas fases distintas. A primeira fase consiste em calcular todas as economias de rotas e ordená-las de forma decrescente a partir da Equação 2.1, considerando $i, j = 1, \dots, n$, em que n é o número total de pontos em que os ônibus devem passar. Feito isso, o algoritmo prossegue para a construção das rotas, que pode ser feita de duas maneiras distintas:

- **Construção em Paralelo:** Percorre-se a lista de economias na ordem, procurando vértices $i - j$ que, quando considerados, as rotas que visitam este dois vértices são combinadas, de modo que o vértice j é visitado imediatamente após o vértice i , caso esta conexão possa ser feita sem quebrar conexões feitas anteriormente e sem estourar a capacidade do veículo. Neste método, todas as rotas são construídas no mesmo instante.
- **Construção Sequencial:** Considerando cada rota $(0, i, \dots, j, 0)$, encontra-se a melhor economia propiciada pelo vértice que será inserido na rota. Insere-se este vértice, e inicia-se o processo novamente para a mesma rota que está sendo construída, até que não haja mais possibilidades de inserção, isto é, qualquer nova inserção irá contrariar as restrições do problema. Vale salientar que cada rota é construída por vez.

Trabalhos que consideram o subproblema de geração de rotas de ônibus geralmente utilizam a construção em paralelo. Schittekat et al. (2013) utilizaram um método de construção baseado neste algoritmo, com seleção aleatória por meio de um algoritmo GRASP,

mais detalhes na Seção 2.4. Russell e Morrel (1986) mostram inicialmente como várias escolas de destino podem ser consideradas neste algoritmo de economia, enquanto Campbell, North e Ellegood (2015) mostram cálculos adicionais de economia necessários ao considerar o carregamento misto. Dulac, Ferland e Forgues (1980) sugerem que muitas rotas de ônibus escolares não começam na escola e fornecem cálculos de economia alternativos, considerando esta possibilidade.

2.3.1.1.2 Heurísticas de duas fases

O problema é decomposto em duas fases distintas, sendo elas o agrupamento dos vértices que compõem as paradas de ônibus e a outra consiste na roteirização propriamente dita. Essas heurísticas ainda são divididas em *cluster first, route second* e *route first, cluster second*. Alguns desses algoritmos são brevemente abordados a seguir.

O primeiro deles consiste no algoritmo de Gillet e Miller, ou algoritmo de varredura. O método consiste em dispor os vértices a serem visitados, assim como os pontos de partida dos veículos, em um plano cartesiano. Partindo do ponto de origem, define-se um eixo de rotação e o ônibus que adotará os pontos a serem visitados. A partir desse eixo, inicia-se a rotação no plano assim como o agrupamento de vértices a serem visitados.

A medida que a rotação acontece e os pontos de ônibus são incluídos no agrupamento, algumas questões são levantadas: o ônibus em questão possui capacidade para transportar os alunos daquele ponto? O tempo gasto para o ônibus chegar no ponto selecionado excederá a janela de tempo? Há, naquele ponto, estudantes que irão para a escola que o ônibus em questão está indo?

Uma vez agrupados esses pontos, bem como definido os pontos que cada ônibus irá atender, as rotas são otimizadas para cada veículo considerando um problema de roteirização de veículos capacitados.

Outros algoritmos conhecidos na literatura são os algoritmos de Fisher e Jaikumar (1981), e o de Bramel e Simchi-Levi (1995). Ambos são algoritmos que primeiro realizam a clusterização de vértices a serem visitados para posterior roteirização.

Conforme mencionado anteriormente, o problema de seleção de paradas de ônibus geralmente é solucionado a partir de estratégias de *Location-Allocation-Routing* (LAR) ou *Allocation-Routing-Location* (ARL). A primeira consiste em alocar estudantes às paradas de ônibus para gerar demanda para posterior roteirização. A segunda, consiste em agrupar estudantes levando em consideração a capacidade dos ônibus e em seguida selecionar

paradas de ônibus dentro desses agrupamentos para rotear os veículos, conforme pode ser visto em Chapleau, Ferland e Rousseau (1985) e Bowerman, Hall e Calamai (1995). Por fim, Schittekat et al. (2013) introduziu uma terceira estratégia, a *Location - Routing - Allocation*, em que um conjunto de paradas de ônibus é selecionado para cada estudante, realizando a roteirização para minimizar a distância total percorrida e, enfim, aloca os estudantes às paradas de ônibus.

2.3.1.2 Heurísticas de Refinamento

Na literatura acerca do SBRP, os trabalhos abordam heurísticas de refinamento que se classificam em intra-rota e inter-rota. No primeiro método, vértices que compõem a rota são manipulados dentro desta mesma rota, isto é, não há possibilidade de um vértice que está na rota 1 ir para rota 2, por exemplo. Já em heurísticas de refinamento inter-rota, vértice são manipulados de forma que pontos que pertencem a uma rota migram para rotas diferentes. A seguir, alguns destes métodos são classificados, conforme Ellegood et al. (2019).

2.3.1.2.1 Troca- λ

Esta heurística, inicialmente proposta por Osman (1993), consiste em trocar trechos de rotas entre um par de rotas pré-selecionado. Considerando um conjunto de rotas $R = (R_a, R_b, R_c, \dots, R_v)$, seleciona-se duas rotas como R_b e R_c e dois subconjuntos de vértices pertencentes a cada uma destas rotas, S_b e S_c . A partir disto, duas novas rotas R'_b e R'_c são criadas, gerando um novo conjunto de rotas $R' = (R_a, R'_b, R'_c, \dots, R_v)$, conforme segue:

$$R'_b = (R_b \setminus S_b) \cup S_c$$

$$R'_c = (R_c \setminus S_c) \cup S_b$$

O tamanho de cada subconjunto é determinado pela parâmetro λ . Entretanto, vale salientar que há variantes na literatura em que nesta heurística de refinamento o tamanho dos subconjuntos que serão trocados podem assumir tamanhos diferentes.

2.3.1.2.2 k-opt

Esta heurística consiste em modificar uma rota por meio da substituição de k arestas por outras k arestas de tal forma que se alcance um resultado melhor que o anterior, ou

seja, a minimização da distância total percorrida.

Seja T a rota ser melhorada. A cada iteração do algoritmo, serão buscados conjuntos de arestas $X = (x_1, \dots, x_k)$ e $Y = (y_1, \dots, y_k)$ de tal forma que as arestas X serão substituídas pelas arestas Y , buscando o refinamento da solução. A Figura 2.3 demonstra um movimento 3-opt.

Fonte: Helsgaun (2006)

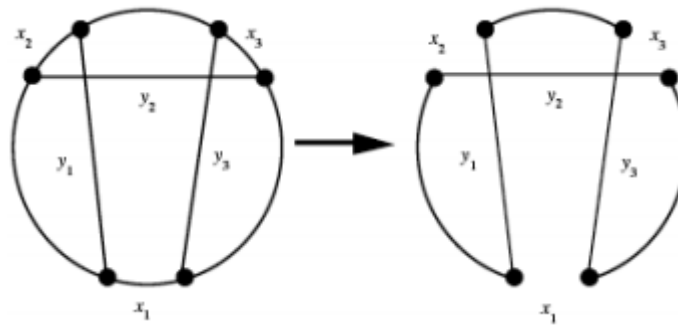


Figura 2.3: Substituição das arestas x_1, x_2, x_3 pelas arestas y_1, y_2, y_3

2.3.2 Meta-heurísticas

2.3.2.1 Algoritmos Genéticos

São meta-heurísticas que se baseiam em processo da evolução, utilizando conceitos como mutação, seleção, propagação de genes e sobrevivência dos indivíduos melhores adaptados. A ideia parte do princípio que indivíduos melhores adaptados ao ambiente em que vivem possuem características genéticas melhores e tendem a passar essas características para seus descendentes. Por outro lado, indivíduos com características genéticas desfavoráveis tendem a desaparecer.

Assim, algoritmos genéticos partem de uma população inicial, composta por indivíduos que, nesse caso, são soluções para o problema em questão. Cada uma dessas soluções, chamadas aqui de cromossomos, possuem alelos que são componentes destas soluções e estão associados a valores que estes componentes podem assumir na solução. De modo a procurar por melhores soluções, um mecanismo de reprodução é aplicado na população em que cada indivíduo pertencente a ela é avaliado a partir de uma função que fará o julgamento de aptidão de cada uma das soluções que compõem a população. As melhores soluções são aquelas com melhores valores de aptidão.

Partindo de uma população $s = (s_1, s_2, s_3, \dots, s_n)$ inicia-se um procedimento iterativo

para criar uma nova população $s_{t+1} = (s_1^{t+1}, s_2^{t+1}, s_3^{t+1}, \dots, s_n^{t+1})$ a partir de uma população anteriormente obtida na iteração t . Para criação desta nova população, a população anteriormente obtida na iteração t passa por processos de reprodução e/ou mutação. Dois indivíduos da população são escolhidos para iniciar a reprodução através da recombinação dos genes que os compõem gerando novos indivíduos que irão compor a população s_{t+1} . Já a operação de mutação consiste em alterar de forma aleatória um segmento dos genes que compõem estes indivíduos. Estas operações são feitas com uma certa probabilidade de ocorrência, onde a operação de recombinação acontece com probabilidade alta, em torno de 80%, enquanto a operação de mutação tende a ocorrer em probabilidade muito mais baixa, como algo em torno de 2%. Após isto, os indivíduos da nova população que está sendo formada são selecionados em definitivo para compor a população. Esta seleção pode ser feita de maneira aleatória ou considerando o nível de aptidão de cada uma das soluções que compõem a nova população.

Crítérios de parada para os algoritmos genéticos são o número de populações geradas ou quando não há melhora no resultado obtido após uma certa quantidade de iterações. Assim, constituem os principais parâmetros do algoritmo: tamanho da população, probabilidade de ocorrência de recombinação, probabilidade de ocorrência de mutação e número de iterações que podem ser feitas sem melhora da solução.

2.3.2.2 Busca Tabu

A Busca Tabu consiste em um método que explora o espaço de soluções propiciados por uma determinada vizinhança N . Juntamente com uma estratégia de armazenamento de soluções já encontradas, a Busca Tabu busca escapar de ótimos locais.

Assim, partindo de uma solução s , a cada iteração o algoritmo irá explorar um subconjunto da vizinhança $N(s)$. A melhor solução s' deste subconjunto irá se tornar a nova solução corrente, não importando se ela possui um valor $f(s')$ pior que $f(s)$, ou seja, $f(s) < f(s')$ quando se trata de um problema de minimização. A partir do armazenamento de um conjunto de soluções já visitadas, a Lista Tabu, é possível evitar que o algoritmo repita soluções previamente encontradas e evita-se a repetição de ótimos locais. Para implementação desta meta-heurística em problemas de roteamento de ônibus escolares, ver Spada, Bierlaire e Liebling (2005) e Pacheco e Martí (2006).

2.3.2.3 GRASP

A meta-heurística GRASP, do inglês *Greedy Randomized Adaptative Search Procedure*, consiste em um método iterativo que é dividido em duas fases: construção de uma solução e uma busca local em que é procurado um ótimo local para a solução previamente gerada. Assim, ao fim das iterações, é retornada a melhor solução encontrada. O Algoritmo 2.1 ilustra o bloco principal de um procedimento GRASP.

Algoritmo 2.1 GRASP

```

1: procedimento GRASP( $g, s, I_{Max}, \alpha$ )
2:    $f^* \leftarrow \infty$ 
3:   para  $k \leftarrow 1, \dots, I_{max}$  faça
4:      $s \leftarrow Construc\tilde{a}o(g, \alpha)$ 
5:      $s \leftarrow BuscaLocal(s)$ 
6:     se  $f(s) \leq f^*$  então
7:        $s^* \leftarrow s$ 
8:        $f^* \leftarrow f(s)$ 
9:    $s \leftarrow s^*$ 
10:  retorne  $s^*$ 

```

Na fase de construção, uma solução é construída de forma iterativa. A cada iteração, uma lista de elementos candidatos é atualizada com os elementos remanescentes, isto é, aqueles que ainda faltam ser colocados na solução que está sendo construída. Nesta fase, uma função gulosa g controla os benefícios dos elementos que estão sendo inseridos e, a cada iteração, esses benefícios são atualizados por conta da inserção de novos elementos na solução.

Além disso, cada elemento inserido na solução é selecionado de forma aleatória a partir de um subconjunto da lista de elementos candidatos composta pelos melhores elementos a serem selecionados. Na literatura, é comum este subconjunto ser conhecido como Lista de Candidatos Restrita (LCR). Tanto o nível de gulosidade, quanto o de aleatoriedade, é controlado pelo parâmetro $\alpha \in [0, 1]$, em que $\alpha = 0$ representa soluções completamente gulosas e $\alpha = 1$ soluções completamente aleatórias. O Algoritmo 2.2 apresenta a fase de construção do GRASP.

Por fim, a etapa de busca local utiliza-se de uma certa vizinhança N para realizar uma busca na solução inicial obtida com o intuito de melhorá-la. O Algoritmo 2.3 ilustra esta etapa. Vale mencionar que a exemplificação da meta-heurística GRASP feita tem como base um problema de minimização.

Faraj et al. (2014) utilizam o GRASP com uma fase de construção de rotas a partir de

Algoritmo 2.2 Fase de Construção GRASP

```

1: procedimento CONSTRUÇÃO GRASP( $g, \alpha$ )
2:    $s \leftarrow \emptyset$ 
3:   Inicializa lista de elementos candidatos (LEC)
4:   enquanto  $LEC \neq \emptyset$  faça
5:      $g(t_{min}) = \min\{g(t) \mid t \in LEC\}$ 
6:      $g(t_{max}) = \max\{g(t) \mid t \in LEC\}$ 
7:      $LCR = \{t \in LEC \mid g(t) \leq g(t_{min}) + \alpha(g(t_{max}) - g(t_{min}))\}$ 
8:     Seleciona de maneira aleatória um elemento  $t \in LCR$ 
9:      $s \leftarrow s \cup t$ 
10:    Atualiza LEC
11:  retorne  $s$ 

```

Algoritmo 2.3 Etapa de Busca Local

```

procedimento BUSCA LOCAL GRASP( $s$ )
  enquanto  $s$  não for o ótimo local faça
    Encontre  $s' \in N(s)$  com  $f(s') < f(s)$ 
     $s \leftarrow s'$ 
  retorne  $s$ 

```

uma heurística construtiva baseada no vizinho mais próximo. Em seguida, as rotas geradas são melhoradas por meio de um movimento 2-opt. Siqueira et al. (2016) implementaram uma meta-heurística GRASP para o subproblema de geração de rotas, considerando frota heterogênea, com restrições de janela de tempo e capacidade, cujo objetivo é minimizar a distância total percorrida. Schittekat et al. (2013) implementaram uma meta-heurística GRASP com *Variable Neighborhood Descent*, que consiste em um método de aprimoramento de soluções em que o espaço de soluções é explorado por meio de um conjunto de estruturas de vizinhança N , com o intuito de minimizar a distância total percorrida pelos ônibus com restrição de capacidade.

2.3.2.4 Simulated Annealing

Esta meta-heurística consiste em uma técnica de busca local com base probabilística. A partir de uma solução inicial s qualquer, um vizinho s' é gerado a cada iteração. Tratando-se de um problema de minimização, o vizinho s' é aceito se a variação $\Delta = f(s') - f(s)$ for menor que zero. Caso contrário, a solução s' pode ser aceita com uma probabilidade de $e^{-\Delta/T}$, em que T é o parâmetro da meta-heurística que regula a aceitação de soluções piores.

A temperatura T assume inicialmente um valor elevado que, ao passar das iterações, é diminuído de forma gradual através de um fator de resfriamento α , de tal forma que

$T_c \leftarrow \alpha \times T_{c-1}$, onde c é o número da iteração e $\alpha \in (0, 1)$. Assim, ao passar das iterações, a probabilidade de serem aceitas soluções com valores piores vai diminuindo. Por outro lado, ao permitir a aceitação de tais soluções, a meta-heurística diminui a chance de não ficar presa em ótimos locais.

Na literatura, Chen et al. (2015) utilizaram esta meta-heurística para um problema de minimização de ônibus utilizados e minimização da distância total percorrida em instâncias previamente trabalhadas por Park e Kim (2010) e Bögl, Doerner e Parragh (2015). Spada, Bierlaire e Liebling (2005) usaram o *Simulated Annealing* em um subproblema de geração de rotas cujo objetivo foca em serviço ao cliente.

2.3.2.5 Iterated Local Search

A metheurística *Iterated Local Search* (ILS) baseia-se no princípio de que uma busca local pode alcançar melhores soluções quando são geradas novas soluções de partida a partir de um método de perturbação. No ILS, quatro procedimentos são considerados, são eles: geração da solução inicial; busca local; perturbação, que consiste em um movimento que irá perturbar determinada solução s com o intuito de melhorar a busca local e escapar dos ótimos locais e, por fim, o procedimento de critério de aceitação que irá decidir em que solução a perturbação irá ser aplicada. Esta meta-heurística pode ser visualizada no Algoritmo 2.4.

Algoritmo 2.4 *Iterated Local Search*

```

1: procedimento ILS
2:    $s_0 \leftarrow GeracaoSolucaoInicial()$ 
3:    $s \leftarrow BuscaLocal(s_0)$ 
4:   enquanto Critérios de parada não são alcançados faça
5:      $s' \leftarrow Perturbacao(s, historico)$ 
6:      $s'' \leftarrow BuscaLocal(s')$ 
7:      $s* \leftarrow CriterioAceitacao(s', s'', historico)$ 
8:   retorne  $s*$ 

```

Lima et al. (2016) implementaram um procedimento ILS para um problema de geração de rotas de ônibus escolares com aceitação de carregamento misto e frota heterogênea para minimização do custo total. Lima et al. (2017) desenvolveram quatro versões de um ILS para um problema multi-objetivo com carregamento misto e frota heterogênea.

2.3.3 Métodos exatos

Alguns trabalhos que lidam com o subproblema de geração de rotas de ônibus utilizam métodos exatos, como geração de colunas, planos de corte e modelos de programação inteira. Embora esses métodos possam resolver problemas de maneira otimizada, a dificuldade do subproblema de geração de rotas de ônibus aumenta drasticamente os tempos computacionais. Portanto, os pesquisadores tendem a usar conjuntos de dados relativamente menores ao aplicar métodos exatos.

Kumar e Jain (2015) formularam o subproblema de geração de rota de ônibus com um modelo baseado em atribuição e o resolveram usando um procedimento *Branch and Bound*. Santana e Carvajal (2015) utilizaram geração de colunas para minimizar a distância total percorrida com paradas de ônibus agrupadas utilizando o algoritmo de Shin e Han (2012).

Kim, Kim e Park (2012) compararam três métodos de solução para solucionar os subproblemas de geração e roteamento de rotas de ônibus: MIP, *Branch and Bound* e uma heurística. Os algoritmos encontraram soluções semelhantes nos conjuntos de dados menores, com a heurística com melhor desempenho à medida que as instâncias do problema aumentam.

Schittekat et al. (2013) apresentaram um MIP para os subproblemas de seleção e geração de rotas de ônibus para minimizar a distância total percorrida com restrições de capacidade dos ônibus. Martínez e Viegas (2011) desenvolveram um método de solução MILP de duas fases para os subproblemas de seleção de parada de ônibus e geração de rotas. A primeira fase é baseada em um problema de p-mediana capacitado para minimizar a distância total percorrida pelos estudantes sujeito a uma restrição de distância de caminhada máxima. A segunda fase usou uma formulação de fluxo de veículos para resolver a geração de rotas de ônibus com o objetivo de minimizar os custos fixos e variáveis. Kinable, Spieksma e Berghe (2014) resolvem os problemas de seleção e geração de rotas de ônibus para uma única escola usando um procedimento de geração de colunas, e os resultados computacionais mostram uma melhoria em relação às soluções encontradas em Schittekat et al. (2013).

2.4 Trabalhos relacionados

Arias-Rojas, Jiménez e Montoya-Torres (2012) trabalharam com um problema real de uma escola na Colômbia. A instância real conta com um total de 398 possíveis paradas de ônibus e 521 estudantes, com uma frota de 11 ônibus com capacidade máxima de 54

estudantes. Os autores trabalharam o problema em duas fases: inicialmente, desenvolveram um procedimento heurístico para realizar a clusterização das paradas de ônibus, adotando um método de ordenação de pontos de coleta, realizada pela manhã, e entrega, realizada no turno da tarde. As paradas de ônibus foram ordenadas conforme sua localização geográfica, iniciando-se de norte ao sul e depois do oeste ao leste. A alocação é feita em seguida de forma consecutiva, respeitando a capacidade dos ônibus e permitindo que cada parada seja visitada somente uma vez por cada veículo. Os autores também não permitiram a passagem dos ônibus por avenidas principais da cidade, como uma forma de evitar trânsitos intensos. Após a fase de seleção das paradas de ônibus, a roteirização de cada cluster é feita a partir da implementação de uma meta-heurística colônia de formigas. Os autores apresentaram uma redução de 8,21% da distância total percorrida durante a manhã, e de 21,4% durante a tarde.

Eldrandaly e Abdallah (2012) realizaram um estudo para uma escola do Egito, considerando um total de 13 paradas de ônibus e 120 estudantes, considerando a capacidade de cada ônibus igual a 28 estudantes. Os autores desenvolveram um método baseado em fases: a clusterização das paradas de ônibus, uma meta-heurística de colônia de formigas para geração das rotas e, por fim, ocorre o refinamento destas rotas por uma heurística 3-opt. A clusterização é realizada com base na distância euclidiana de cada parada até a escola de destino e na capacidade dos veículos, isto é, inicialmente ocorre o cálculo das distâncias para cada parada de ônibus, que são ordenadas de forma crescente. Enquanto houver paradas para serem alocadas em um *cluster*, o método prossegue as alocando respeitando a restrição de capacidade dos veículos. Por fim, cada cluster é roteirizado e a rota é refinada.

Díaz-Parra et al. (2013) utilizaram a variante do SBRP que considera uma única escola em ambiente urbano, durante a manhã, sem carregamento misto em que estudantes com necessidades especiais não são considerados, frota homogênea com objetivo de minimizar a distância total percorrida e o número de paradas de ônibus utilizadas. Eles propuseram um algoritmo genético para um conjunto de instâncias com 200 pontos de ônibus disponíveis, utilizando um algoritmo de p-medianas para clusterização destes pontos.

Pacheco e Martí (2006) trabalharam com um problema real de roteirizar ônibus escolares em áreas rurais na Espanha. Os autores lidaram com dois objetivos distintos: minimização da quantidade total de ônibus utilizados e do tempo total de deslocamento dos estudantes. Os autores apresentam diferentes métodos construtivos seguidos de um procedimento de Busca Tabu.

Pacheco et al. (2013) propuseram um procedimento de Busca Tabu com implementação de movimentos intra-rota, como troca de segmentos que compõem uma rota, e inter-rota, como a inserção de segmentos de uma rota em outra ou o cruzamento de segmentos destas rotas. Os autores compararam os resultados obtidos com os resultados performados por um Algoritmo Genético.

Faraj et al. (2014) usaram um conjunto completo de dados reais de uma área rural brasileira contendo uma amostra de 944 alunos, 23 escolas e toda a malha viária de uma cidade de população de 280.000 habitantes ocupando uma área de 2.348 km^2 . Foram propostos um modelo de programação linear inteira mista e um algoritmo GRASP para resolver o problema de roteamento. Na fase de construção do algoritmo, uma técnica gulosa e aleatória fornece soluções viáveis onde cada solução viável é iterativamente construída, um elemento de cada vez utilizando a conhecida heurística do vizinho mais próximo. A fase de busca local utiliza dois métodos de busca. Inicialmente, uma heurística de troca-2 é aplicada para melhorar a solução da primeira fase. Em seguida, é usado um algoritmo de inserção em que cada novo elemento é inserido em todas as possíveis posições, deslocando elementos vizinhos. Os resultados mostraram que o GRASP atinge resultados competitivos quando comparados com o modelo proposto, enquanto o modelo não consegue encontrar soluções viáveis para instâncias muito grandes.

Lima et al. (2016) desenvolveram uma meta-heurística com *Variable Neighbourhood Descent* e *Iterated Local Search* para geração de rotas de ônibus com carregamento misto e uma frota heterogênea com o objetivo de minimizar os custos totais para área rural brasileira. Os autores utilizaram quatro vizinhanças distintas: *one point move*, que realoca uma parada de ônibus em uma posição diferente na solução podendo ser aplicada intra e inter-rotas; *two point move*, que troca um nó de aluno de uma rota por outro de uma rota diferente; *cross-exchange*, que remove um arco de duas rotas diferentes e reconecta os nós envolvidos, interligando as cabeças e as caudas e a vizinhança 2-opt que remove um arco de duas rotas diferentes e reconecta os nós envolvidos, interligando as cabeças e as caudas.

Lima et al. (2017) consideraram o problema de roteirização de ônibus escolares com frota heterogênea e carregamento misto com um total de três objetivos: minimização do tempo total de viagem dos estudantes, balanceamento das rotas e minimização dos custos totais. Os autores propuseram 4 versões de um algoritmo *Iterated Local Search*.

Schittekat et al. (2013) geraram instâncias artificiais acerca do SBRP considerando frota homogênea, uma única escola e restrição de capacidade. Os autores consideraram

os subproblemas de seleção de pontos de ônibus e geração das rotas, levando em conta três decisões: determinar o conjunto de paradas a visitar, determinar para cada aluno que parada(s) de ônibus ele deve andar e determinar rotas que se estendem ao longo das paradas escolhidas, de modo que a distância total percorrida seja dimensionada. Os autores propuseram um modelo de programação inteira mista e uma heurística GRASP com VND. A meta-heurística faz uso do modelo matemático para resolver o subproblema de alocação de estudantes às paradas uma vez que as rotas são dadas. Assim, os autores foram os primeiros a apresentar na literatura a estratégia *location-routing-allocation* em que primeiro são identificados os pontos de ônibus viáveis para cada aluno e em seguida as rotas são elaboradas para minimizar a distância total da viagem considerando apenas os locais viáveis e, finalmente, atribui os alunos aos locais selecionados.

Kinable, Spieksma e Berghe (2014) resolveram os subproblemas de seleção de ponto de ônibus e geração de rotas de ônibus para uma única escola usando um procedimento de geração de colunas, e os resultados computacionais mostram uma melhoria em relação as soluções encontradas em Schittekat et al. (2013). Entre as 95 instâncias utilizadas, 26 instâncias tiveram seus limites melhorados e foram encontrados melhores soluções para 9 instâncias. Enquanto Schittekat et al. (2013) obtiveram soluções ótimas para 43 instâncias, Kinable, Spieksma e Berghe (2014) encontram a solução ótima para 68.

Capítulo 3

Descrição do problema

A presente seção busca apresentar a descrição do *School Bus Routing Problem* considerando frota homogênea, única escola e com restrição de capacidade e distância máxima percorrida pelos estudantes até as paradas, que é a variante do SBRP objeto de estudo do presente trabalho. Nesse sentido, tem-se como referência o modelo proposto por Schittekat et al. (2013) considerando a variante abordada.

A formulação matemática a seguir, proposta por Schittekat et al. (2013), considera o problema de roteamento de ônibus escolares considerando uma única escola para um único tipo de aluno sendo transportado por ônibus de capacidades iguais. Assim, percebe-se que o problema constitui uma generalização do problema de roteamento de veículos.

O problema pode ser definido da seguinte forma: seja V um conjunto de paradas de ônibus, incluindo a escola v_0 , com uma distância c_{ij} para cada par ordenado (i, j) de paradas, e S o conjunto de estudantes. Para cada estudante $s \in S$, tem-se um conjunto $V_s \subseteq V$ que representa as paradas de ônibus que o estudante s pode ser alocado. Uma frota de ônibus com capacidade C para cada veículo é disponibilizada para realizar a coleta dos estudantes e deixá-los na escola. Assim, as rotas serão formadas por uma sequência de paradas de ônibus finalizando na escola, com os estudantes alocados a paradas de ônibus inseridas em uma rota sendo buscados pelo ônibus que percorre tal rota. Dessa forma, o problema consiste em encontrar uma alocação viável de estudantes a paradas de ônibus e realizar a roteirização dos veículos de forma que a capacidade de cada um dos ônibus seja respeitada, cada estudante seja coletado por um ônibus e a distância total das rotas seja minimizada.

Dada a descrição do problema, as notações utilizadas no modelo descrito em Schittekat et al. (2013) podem ser visualizadas na Tabela 3.1.

Tabela 3.1: Notações utilizadas na formulação matemática

Dados	
C	Capacidade do ônibus
V	Conjunto de possíveis paradas de ônibus, com $ V = n$
E	Conjunto de arcos entre paradas de ônibus
S	Conjunto de estudantes
c_{ij}	Custo de percorrer o arco da parada i para j
s_{il}	1 se o estudante l pode alcançar a parada i , 0 caso contrário
$i = 0$	Índice da escola
Variáveis de decisão	
x_{ijk}	1 se o ônibus k atravessa o arco de i até j , 0 caso contrário
y_{ik}	1 se o ônibus k passa pela parada i , 0 caso contrário
z_{ilk}	1 se o estudante l é pego pelo ônibus k na parada i , 0 caso contrário

Fonte: Schittekat et al. (2013)

$$\text{Min} \sum_{i \in V} \sum_{j \in V} c_{ij} \sum_{k=1}^n x_{ijk} \quad (3.1)$$

sujeito a

$$\sum_{j \in V} x_{ijk} = \sum_{j \in V} x_{jik} = y_{ik} \quad \forall i \in V, k = 1, \dots, n \quad (3.2)$$

$$\sum_{i,j \in Q} x_{ijk} \leq |Q| - 1 \quad \forall Q \subseteq V \setminus \{v_0\}, \forall k \quad (3.3)$$

$$\sum_{k=1}^n y_{ik} \leq 1 \quad \forall i \in V \setminus \{0\} \quad (3.4)$$

$$\sum_{k=1}^n z_{ilk} \leq s_{il} \quad \forall l \in S, \forall i \in V \quad (3.5)$$

$$\sum_{i \in V} \sum_{l \in S} z_{ilk} \leq C \quad k = 1, \dots, n \quad (3.6)$$

$$z_{ilk} \leq y_{ik} \quad \forall i, l, k \quad (3.7)$$

$$\sum_{i \in V} \sum_{k=1}^n z_{ilk} = 1 \quad \forall l \in S \quad (3.8)$$

$$y_{ik} \in \{0, 1\} \quad \forall i \in V, k = 1, \dots, n \quad (3.9)$$

$$x_{ijk} \in \{0, 1\} \quad \forall i, j \in V, i \neq j, k = 1, \dots, n \quad (3.10)$$

$$z_{ilk} \in \{0, 1\} \quad \forall i, j \in V, i \neq j, l \in S \quad (3.11)$$

A função objetivo 3.1 minimiza a distância total percorrida por todos os ônibus. As

restrições 3.2 impõem que, se a parada de ônibus i for visitada pelo ônibus k , então um arco deve ser atravessado pelo ônibus k entrando na parada i e saindo da parada i , enquanto as restrições 3.3 impõem a conectividade da rota realizada pelo ônibus k . Essas restrições servem como restrições de eliminação de subrotas. As restrições 3.4 garantem que cada parada seja visitada apenas uma vez, exceto a parada correspondente à escola. As restrições 3.5 garantem que cada aluno seja pego em uma parada que ele pode alcançar. As restrições 3.6 garantem que a capacidade dos ônibus não sejam ultrapassadas. As restrições 3.7 impõem que o aluno l não seja apanhado na parada i se o ônibus k não visitar esta parada. As restrições 3.8 fazem com que cada aluno seja recolhido uma única vez. As restrições 3.9 - 3.11 exigem que todas as variáveis de decisão sejam binárias.

Capítulo 4

Metodologia

4.1 Algoritmo proposto

O algoritmo proposto é baseado no *Iterated Local Search* (ILS), explicado anteriormente, como abordado em Subramanian (2012), que também incorpora um procedimento exato com uma formulação de programação linear inteira, conforme Seção 4.5. O algoritmo HILS (*Hybrid Iterated Local Search*) consiste em realizar buscas locais de maneira iterativa após a construção de uma solução inicial. A busca local aqui utilizada consiste em um método de refinamento que visa explorar a solução previamente construída por meio da aplicação de movimentos de estruturas de vizinhança, aceitando apenas soluções melhores que a corrente. O procedimento de busca local é melhor detalhado na Seção 4.3.

Após o procedimento de busca local, o algoritmo executa perturbações na solução refinada obtida. Esses movimentos de perturbação ocorrem, então, quando o algoritmo encontra um ótimo local. Assim, essas perturbações possuem como objetivo fazer com que o algoritmo consiga escapar destes ótimos locais para que, na próxima iteração, a busca local seja feita de forma eficaz.

Durante esse procedimento, as rotas geradas são armazenadas logo após a busca local. Esse armazenamento ocorre para que, ao fim do algoritmo, seja resolvida a formulação de programação linear inteira (PLI) com o intuito de se obter a melhor combinação de rotas para que se tenha o menor custo possível.

Dessa forma, o algoritmo tem dois parâmetros principais, que são o número de reinicializações (I_{Max}), que indica o número de vezes que o algoritmo será executado, e o número máximo de iterações da busca local (I_{ILS}), que corresponde ao número máximo de iterações do ILS consecutivas sem melhora na solução.

As primeiras linhas têm a função de inicializar uma solução vazia e o valor de sua função objetivo (linhas 2 e 3), assim como o *pool* de rotas (linha 4) que será utilizado no modelo de PLI. Na linha 5 inicia-se o laço de *restarts* do algoritmo, em que a cada iteração uma nova solução inicial é gerada. Nas linhas 9-16 temos o laço principal do algoritmo. A cada iteração é realizada uma busca local (linha 10) e novas rotas são adicionadas ao *pool* de rotas (linha 11). Caso a busca local traga melhora a função objetivo, a nova solução é armazenada como melhor solução da busca local (linhas 12-13). Aqui, é importante notar que, caso um novo ótimo local seja encontrado, acontece uma reinicialização da iteração corrente do ILS (linha 14). Após a busca local, a melhor solução armazenada é então perturbada e atribuída a solução corrente (linha 15) e o processo continua a partir da linha 9. Caso a melhor solução ao fim da busca local seja melhor do que a solução corrente, a solução corrente é atualizada (linhas 18-19). Ao fim das reinicializações, é chamado então o modelo de programação linear inteira (linha 20), que encontra a melhor composição de rotas com base no *pool* de rotas, e tal solução é então retornada (linha 21).

Algoritmo 4.1 HILS

```

1: procedimento HILS( $I_{\text{Max}}, I_{\text{ILS}}, v, T_0, \alpha$ )
2:    $s^* \leftarrow \emptyset$ 
3:    $f^* \leftarrow \infty$ 
4:    $\text{PoolRotas} \leftarrow \emptyset$ 
5:   para  $i \leftarrow 1, \dots, I_{\text{Max}}$  faça
6:      $s \leftarrow \text{geraSoluc\c{a}oInicial}()$ 
7:      $s' \leftarrow s$ 
8:      $\text{IterILS} \leftarrow 0$ 
9:     enquanto  $\text{IterILS} \leq I_{\text{ILS}}$  faça
10:       $s \leftarrow \text{RVND}(s)$ 
11:       $\text{PoolRotas} \leftarrow \text{AtualizaPoolRotas}(s, \text{PoolRotas})$ 
12:      se  $f(s) < f(s')$  então
13:         $s' \leftarrow s$ 
14:         $\text{IterILS} \leftarrow 0$ 
15:         $s \leftarrow \text{Perturba}(s')$ 
16:         $\text{IterILS} \leftarrow \text{IterILS} + 1$ 
17:      se  $f(s') < f(s^*)$  então
18:         $s^* \leftarrow s'$ 
19:         $f^* \leftarrow f(s')$ 
20:     $s^* \leftarrow \text{PLI}(\text{PoolRotas}, s^*)$ 
21:  retorne  $s^*$ 

```

4.2 Procedimento construtivo

O procedimento construtivo possui como fundamento construir uma solução utilizando elemento por elemento. A forma de escolher o elemento que será colocado de cada vez na solução depende da função de avaliação adotada no processo. Assim, os elementos serão ordenados conforme a função adotada que irá estimar o benefício da inserção de cada elemento na solução, em que apenas um elemento será colocado por vez.

Aqui, o procedimento consiste na criação uma lista de candidatos (LC) que representa as paradas não pertencentes a solução. Então as paradas de ônibus são inseridas em rotas baseado em um de dois critérios escolhido aleatoriamente no início do procedimento, sendo eles o critério do vizinho mais próximo, e o critério da inserção mais barata. Esses critérios buscam minimizar uma função $g(k)$ para calcular o custo de inserção.

No critério da inserção mais barata, adiciona-se, a cada passo, uma parada de ônibus $k \in LC$ ainda não visitada entre as paradas i e j cujo custo de inserção $g(k)$ dado pela fórmula abaixo seja a menor possível.

$$g(k) = c_{ik} + c_{kj} - c_{ij} \quad (4.1)$$

No critério do vizinho mais próximo, adiciona-se a cada etapa a parada $k \in LC$ ainda não visitada cuja distância a uma parada de ônibus i seja a menor possível, conforme a função $g(k)$ abaixo.

$$g(k) = c_{ik} \quad (4.2)$$

Dessa forma, as paradas são iterativamente inseridas em rotas através desse processo. Entretanto, além dos critérios de inserção adotados, foram adotadas duas maneiras para construção das rotas: a construção em paralelo e a construção sequencial, que foram descritas na Seção 2.3.1.1.1. Assim como os critérios de inserção, estes modos de construção também são selecionados de maneira aleatória.

Por fim, como verificação da viabilidade de inserção, um processo de alocação guloso de estudantes é aplicado, conforme mostrado posteriormente na Seção 4.4. Assim, o procedimento de construção termina quando uma solução viável é encontrada, ou seja, uma solução em que cada estudante está alocado a exatamente uma parada.

4.3 Busca Local

O método *Variable Neighborhood Descent* proposto inicialmente por Hansen, Mladenović e Pérez (2008) consiste em um método de refinamento de uma solução através da aplicação de estruturas de vizinhança de forma a explorar o espaço de soluções viáveis, aceitando as soluções que melhorem a solução atual do problema. Em suma, o método requer uma determinada solução s , uma função objetivo f a ser melhorada e um conjunto de vizinhanças dado por $N = \{N^1, N^2, N^3, \dots, N^n\}$.

O método empregado no presente trabalho consiste no *Random Variable Neighborhood Descent* (RVND) como proposto em Subramanian (2012), que utiliza uma ordenação aleatória dos movimentos de vizinhança que serão utilizados na busca. Foram considerados dois grupos de estruturas de vizinhança: estruturas inter-rota e estruturas intra-rota. No primeiro grupo, os movimentos são executados entre rotas de veículos distintos, enquanto que no segundo os movimentos são executados dentro de uma rota de um mesmo veículo.

A busca ocorre da seguinte maneira: uma estrutura de vizinhança inter-rota é selecionada de forma aleatória e, caso haja melhora na solução, todas as estruturas de vizinhança inter-rota serão reconsideradas para uma nova seleção, caso contrário, a estrutura é eliminada e parte-se para uma nova seleção de vizinhança inter-rota considerando as estruturas remanescentes. A cada melhora proveniente de um movimento de vizinhança inter-rota, é realizada uma busca considerando as estruturas de vizinhança intra-rota da mesma maneira que ocorre a busca inter-rota.

4.3.1 Estruturas de vizinhança inter-rota

Foram implementados um total de cinco movimentos inter-rota, descritos abaixo. É importante considerar que, ao realizar esses movimentos, seja verificada a questão da restrição da capacidade dos ônibus escolares de modo que o movimento a ser executado não ultrapasse a capacidade dos veículos.

Essa verificação é feita analisando a quantidade de estudantes em determinada parada que, caso seja transferida para rota de um outro veículo, ultrapasse a capacidade dele. Caso isso ocorra e, assim, o movimento se torne inviável, outro procedimento é utilizado em que há a realocação dos estudantes conforme descrito na Seção 4.4. Se nenhum dos métodos tornar a execução do movimento viável, ele não será executado.

1. **Shift(1,0)** — $N^{(1)}$: Uma parada k é transferida de uma rota r_1 a uma rota r_2 .

2. **Shift(2,0)** — $N^{(2)}$: Um bloco de duas paradas consecutivas k e l é transferido de uma rota r_1 para outra rota r_2 .
3. **Swap(1,1)** — $N^{(3)}$: Uma parada k de r_1 é permutada por uma parada l de r_2 .
4. **Swap(2,1)** — $N^{(4)}$: Um bloco de duas paradas consecutivas k e l de r_1 é permutado por uma parada k' de r_2 .
5. **Swap(2,2)** — $N^{(5)}$: Um bloco de duas paradas consecutivas k e l de r_1 é permutado por outro bloco de duas paradas consecutivas k' e l' de r_2 .

4.3.2 Estruturas de vizinhança intra-rota

Foram utilizados um total de sete movimentos intra-rota. Um movimento intra-rota só será aplicado sempre que ocorrer uma melhora alcançada previamente por um movimento inter-rota. Chama-se atenção a dois movimentos específicos do SBRP: *Remove* e *Replace*. Quando estes movimentos são executados, é necessário realizar uma verificação de viabilidade da solução, conforme descrito abaixo. Quanto aos demais movimentos, já conhecidos na literatura do PRVC, não há a necessidade de realizar essa verificação, visto que eles implicarão apenas em uma mudança na ordenação de paradas dentro de uma rota já estabelecida.

1. **Swap** — $N^{(1)}$: Duas paradas de uma mesma rota são trocadas.
2. **2-opt** — $N^{(2)}$: Dois arcos de uma rota são removidos e ela é reconstruída de forma invertida.
3. **Reinsertion** — $N^{(3)}$: Uma parada de uma rota é retirada de sua posição e inserida em outra.
4. **Or-opt2** — $N^{(4)}$: Semelhante à $N^{(3)}$, mas realocando-se um par de paradas adjacentes.
5. **Or-opt3** — $N^{(5)}$: Semelhante à $N^{(3)}$, mas realocando-se três paradas adjacentes.
6. **Remove** — $N^{(6)}$: Uma parada é removida de uma rota. Para verificar a viabilidade da solução após a operação, é necessário realizar o procedimento de alocação de estudantes como visto na Seção 4.4.
7. **Replace** — $N^{(7)}$: Uma parada de uma rota é permutada com uma parada que não está sendo utilizada. Assim como a vizinhança $N^{(6)}$, é necessário realizar o procedimento de alocação de estudantes para verificar a viabilidade do movimento.

4.4 Alocação de estudantes

Para que uma solução do problema seja viável, é preciso que as rotas que a compõem possuam uma disposição dos estudantes nas paradas de ônibus disponíveis de maneira tal que cada um destes estudantes esteja posicionado a apenas uma parada. Além disso, também é preciso respeitar a restrição de que cada um dos ônibus não tenha sua capacidade máxima ultrapassada. Para tal, uma solução para este problema foi a utilização da combinação de um algoritmo guloso com um algoritmo exato, este baseado no problema de fluxo máximo.

Considerando uma rede direcionada, que possui uma origem e um destino, em que cada arco possui uma distância não-negativa associada, o objetivo do problema é obter o fluxo máximo nesta rede. Exemplos de aplicações deste problema são a maximização de fluxo de uma rede de suprimentos a partir dos fornecedores até os clientes e a maximização de um fluxo de veículos por meio de uma rede de transporte.

Assim, dado um grafo $G(V, E)$ onde cada aresta u, v possui uma capacidade máxima $c(u, v)$, o objetivo é maximizar o fluxo máximo f associado ao grafo, sujeito a limitações do problema tratado. O método proposto para alocação de estudantes, utilizando uma aplicação baseada neste problema, é detalhada a seguir.

4.4.1 Algoritmo guloso

O algoritmo guloso utilizado é semelhante ao proposto por Niasar et al. (2017), em que eles utilizaram um procedimento heurístico que funciona da seguinte forma: cada estudante deve ser alocado para apenas uma parada em potencial com base na acessibilidade desta parada, ou seja, não deve ultrapassar a distância máxima permitida que o aluno pode caminhar até ela. Assim, para auxiliar nessa decisão, uma lista de paradas cuja distância a pé não é maior que a distância máxima permitida é gerada em um estágio preliminar.

A lista de alunos é, então, classificada de acordo com uma ordem crescente do número de paradas permitidas. A heurística começa inicialmente a alocar alunos do topo da lista até a primeira parada disponível a uma distância acessível. A lista de alunos é explorada sequencialmente. Essa regra simples permite que alunos críticos com apenas uma ou poucas paradas permitidas sejam designados primeiro.

Assim, o algoritmo empregado aqui utiliza um princípio semelhante, em que os alunos com menor quantidade de parada disponíveis são alocados primeiro. Caso haja mais

de uma parada disponível para o aluno, ele é alocado para a parada mais próxima. O procedimento é ilustrado no Algoritmo 4.2, e faz uso das seguintes estruturas auxiliares:

- `ParadaUsada[]` — Informa se uma determinada parada está sendo usada em alguma rota.
`ParadaUsada[3] = true` indica que a parada 3 está sendo utilizada em alguma rota, por exemplo.
- `RotaDaParada[]` — Indica em que rota determinada parada está sendo usada.
`RotaDaParada[5] = 3` indica que a parada 5 está sendo utilizada na rota 3.
- `ParadasPossiveis[][]` — Armazena as paradas que cada estudante consegue alcançar, segundo o parâmetro de máxima distância permitida que é dado pela instância a ser resolvida. Este vetor é ordenado baseado na quantidade de paradas que cada estudante é capaz de alcançar. O estudante 1, por exemplo, teria menos paradas disponíveis que o estudante 200. Além disso, para cada estudante, o array é ordenado da parada mais próxima para a mais distante.
`ParadasPossiveis[3][1]`, representa a parada mais próxima que o estudante 3 pode alcançar, por exemplo.

O Algoritmo 4.2 possui como parâmetros de entrada a quantidade de rotas, a quantidade de estudantes, e a capacidade máxima de carga. O primeiro passo consiste em inicializar o vetor de coleta (linha 2), que indica para cada rota a quantidade de estudantes nela alocados, assim como inicializar a variável que indica quantos estudantes foram alocados (linha 3).

O laço principal (linha 4) itera sobre todos os estudantes, e por cada parada que possa ser alcançada (linha 5) por tal estudante. Devido à forma como o vetor *ParadasPossiveis* é ordenado, estudantes com menos paradas alcançáveis são alocados primeiro. A cada iteração é verificado se a parada está sendo usada, assim como se ainda existe capacidade restante na rota para que o estudante possa ser alocado a tal parada (linha 7). Caso tais restrições sejam atendidas, o estudante é alocado à parada, a coleta da rota aumenta em 1, e o algoritmo volta para a linha 4 para iterar pelas paradas possíveis de um novo estudante (linhas 7-10). Se a quantidade de estudantes alocados for igual a quantidade de estudantes totais, indicando que nenhum estudante ficou sem ser alocado, o procedimento retorna verdadeiro, indicando que tal composição de rotas é viável (linha 12), e falso caso contrário (linha 17).

Algoritmo 4.2 AlocaçãoGulosaDeEstudantes

```

1: procedimento ALOCAÇÃOGULOSADEESTUDANTES(Rotas, Estudantes, Capacidade)
2:   Inicializa array de Coleta[Rotas] com todos os itens iguais a 0
3:   EstudantesAlocados  $\leftarrow$  0
4:   para  $i \leftarrow 1, \dots, \text{Estudantes}$  faça
5:     para cada parada  $j \in \text{ParadasPossiveis}[i]$  faça
6:       rota  $\leftarrow$  RotaDaParada[ $j$ ]
7:       se ParadaUsada[ $j$ ] = true e Coleta[rota] < Capacidade então
8:         Coleta[rota]  $\leftarrow$  Coleta[rota] + 1
9:         EstudantesAlocados  $\leftarrow$  EstudantesAlocados + 1
10:      Vai para a linha 4
11:   se EstudantesAlocados = Estudantes então
12:     retorne verdadeiro
13:   senão
14:     retorne falso

```

4.4.2 Algoritmo exato

Conforme mencionado, no algoritmo guloso a ordem de alocação de estudantes é predeterminada baseado em prioridades com relação a acessibilidade das paradas aos alunos, de modo que estudantes com um menor número de prioridades possuem prioridade de alocação com relação aos outros. Por conta disso, pode acontecer de não haver parada disponível para alguns alunos da lista. Por consequência, a alocação de estudantes em instâncias mais complexas pode não ser resolvida mesmo nos casos em que uma alocação viável exista. Dessa forma, foi observado que a interação entre estudantes, paradas e rotas pode ser modelado como uma rede de fluxo.

Uma rede de fluxo é um grafo dirigido $G = (V, E)$, onde V é o conjunto de vértices, e E é o conjunto de arestas, que possui vértices de origem (s) e destino (t). Cada aresta $(u, v) \in E$ possui um valor de capacidade $c(u, v)$ que representa o fluxo máximo que pode fluir por tal aresta. Dada uma rede de fluxo, o fluxo $f(u, v)$ em G é uma função que satisfaz duas restrições, de capacidade e conservação de fluxo, respectivamente:

$$0 \leq f(u, v) \leq c(u, v) \quad u, v \in V$$

$$\sum_{u \in V} f(u, v) = \sum_{u \in V} f(v, u) \quad v \in V \setminus \{s, t\}$$

Dada tal definição, o problema de fluxo máximo busca maximizar a taxa de fluxo de um vértice s a um vértice t , através de uma rede de fluxo. Dessa forma, foi possível modelar uma rede de fluxo que trata os estudantes como itens que devem fluir de s a

t . Caso o fluxo que saia de s não seja o mesmo que entre em t , isso significa que não há um fluxo de s a t para todos os estudantes, logo não existe alocação de estudantes viável. Caso contrário, todos os estudantes conseguem fluir de s a t , indicando que existe alocação viável.

Para resolução do problema modelado, foi usada uma implementação do algoritmo *push-relabel* proposto por Goldberg e Tarjan (1988). Tal solução foi então anexada ao Algoritmo 4.2 mostrado resultando no Algoritmo 4.3. Em casos que o algoritmo guloso não é capaz de achar uma alocação de estudantes viável, o algoritmo exato é utilizado. Caso o algoritmo exato falhe em achar uma alocação viável, só então é mostrado que para tal composição de rotas, não existe alocação de estudantes viável.

Com o intuito de deixar o algoritmo mais rápido, evitando a chamada do algoritmo exato em toda execução, foi utilizado um procedimento de "aprendizado". Para que o algoritmo guloso não solucione o problema de alocação, uma determinada quantidade de estudantes deve ficar não-allocada. Foi observado então que existe uma correlação entre a quantidade de estudantes que não foram alocados, e possibilidade de que o algoritmo exato encontre uma alocação viável. Então, por uma iteração do HILS, foi mantido uma contagem média da quantidade de estudantes que não foram alocados que resultaram em uma solução viável obtida pelo algoritmo exato, que foi chamada de *Corte*.

Dessa forma, em iterações posteriores, o algoritmo exato só é utilizado em situações que a quantidade de estudantes não alocados for menor ou igual a esse valor de *Corte*, como visto no Algoritmo 4.3, na linha 15.

4.5 Perturbação

Lourenço, Martin e Stützle (2003) pontuam que a perturbação é fundamental para que a solução não fique estagnada em ótimos locais. Assim, a perturbação é necessária para que uma solução de boa qualidade seja transformada em um bom ponto de partida para se realizar a busca local e, assim, os ótimos locais são evitados. Nesse sentido, em oposição aos movimentos realizados na busca local, os movimentos de perturbação não possuem como objetivo a melhoria da solução. Dois movimentos de perturbação foram empregados, conforme segue:

- Multiple-Swap(1,1): São realizados múltiplos movimentos Swap(1,1) aleatoriamente.
- Multiple-Shift(1,1): São realizados múltiplos movimentos Shift(1,1) de forma alea-

Algoritmo 4.3 AlocaçãoDeEstudantes

```

1: procedimento ALOCAÇÃODEESTUDANTES(Rotas, Estudantes, Capacidade, Corte)
2:   Inicializa array de Coleta[Rotas] com todos os itens iguais a 0
3:   EstudantesAlocados  $\leftarrow$  0
4:   para  $i \leftarrow 1, \dots, \text{Estudantes}$  faça
5:     para cada parada  $j \in \text{ParadasPossiveis}[i]$  faça
6:        $\text{rota} \leftarrow \text{RotaDaParada}[j]$ 
7:       se  $\text{ParadaUsada}[j] = \text{true}$  e  $\text{Coleta}[\text{rota}] < \text{Capacidade}$  então
8:          $\text{Coleta}[\text{rota}] \leftarrow \text{Coleta}[\text{rota}] + 1$ 
9:          $\text{EstudantesAlocados} \leftarrow \text{EstudantesAlocados} + 1$ 
10:      Vai para a linha 4
11:   se EstudantesAlocados = estudantes então
12:     retorne verdadeiro
13:   senão
14:     se EstudantesAlocados  $\leq$  Corte então
15:       algoritmoExato()
16:     senão
17:       retorne falso

```

tória. Nesse movimento, uma parada k é transferida de uma rota r_1 para uma rota r_2 , e uma parada l é transferido de uma rota r_2 para uma rota r_1 , sendo inseridas em posições aleatórias.

A cada iteração do ILS, um desses movimentos é escolhido de forma aleatória.

4.6 Formulação de Programação Linear Inteira

Ao fim das reinicializações do algoritmo, o modelo de programação linear inteira é chamado de modo que seja encontrada a melhor composição de rotas com base no *pool* de rotas estabelecido ao longo da execução do algoritmo. Assim, o modelo explicado a seguir utiliza o conjunto de soluções obtidas pelo ILS para produzir uma solução de melhor qualidade.

Seja R o conjunto de rotas, R_i o subconjunto de rotas que contenham determinada parada $i \in V'$, R_k o subconjunto de rotas que atendem o estudante $k \in S$. Definimos y_j como a variável de decisão associada a rota $j \in R$ e c_j seu custo. Considerando a seguinte formulação:

$$\text{Min } \sum_{j \in R} c_j y_j \quad (4.3)$$

sujeito a

$$\sum_{j \in R_i} y_j \leq 1 \quad \forall i \in V', \quad (4.4)$$

$$\sum_{j \in R_k} y_j \geq 1 \quad \forall k \in S, \quad (4.5)$$

$$y_j \in \{0, 1\} \quad \forall j \in R. \quad (4.6)$$

Uma vez que temos as rotas adicionadas ao *pool* de rotas, preenchido no procedimento HILS, podemos utilizar tal formulação para minimizar o custo da solução. A função objetivo (4.3) minimiza a soma dos custos das rotas. As restrições (4.4) garantem que cada parada aparece no máximo uma vez na composição de rotas. As restrições (4.5) garantem que todo estudante será coberto por pelo menos uma rota. Por fim, as restrições (4.6) tornam y_j em uma variável binária.

Capítulo 5

Resultados computacionais

A presente seção apresenta os resultados obtidos a partir da implementação do algoritmo HILS (*Hybrid Iterated Local Search*) e os testes realizados em instâncias já conhecidas na literatura acerca do *School Bus Routing Problem* geradas inicialmente por Schittekat et al. (2013) e também utilizadas por Kinable, Spieksma e Berghe (2014).

Nesse sentido, com o intuito de avaliar os algoritmos e modelos apresentados, experimentos computacionais foram executados em um Intel®Core™i7 com 3.4GHz e 16 GB de memória ram, em um sistema operacional Ubuntu 16.04 com os algoritmos sendo implementados na linguagem de programação C++.

5.1 Instâncias utilizadas

Assim como apresentado, um dos subproblemas do *School Bus Routing Problem* consiste na preparação dos dados a serem utilizados, conforme Park e Kim (2010). Os dados são utilizados como entradas dos subproblemas tratados aqui: seleção dos pontos de ônibus, alocação dos estudantes e roteirização dos ônibus utilizados. Estes dados geralmente apresentam informações como o número e localização de estudantes, escolas, capacidade dos veículos, pontos de ônibus disponíveis, etc.

Conforme mencionado, as instâncias utilizadas para testagem do algoritmo proposto no presente trabalho foram utilizadas inicialmente em Schittekat et al. (2013). Os autores desenvolveram um gerador de instâncias para o SBRP para gerar instâncias para problemas de qualquer tamanho.

Para isso, cinco parâmetros são necessários: o número de paradas de ônibus que podem ser selecionadas (n_p), o número de estudantes por parada (n_s), as coordenadas da

escolas (x_d e y_d) e a distância máxima que um estudante pode caminhar até uma parada de ônibus (w_{max}).

A partir desses parâmetros, as instâncias foram então geradas em um plano euclidiano que é definido por $(0, 0)$ e $(x_{max}$ e $y_{max})$. Inicialmente, os autores geraram n_p paradas de ônibus no plano definido em que as coordenadas (x_i, y_i) de uma parada de ônibus i são distribuídas de maneira uniforme nos intervalos $[w_{max}, x_{max} - w_{max}]$ e $[w_{max}, y_{max} - w_{max}]$, respectivamente. Assim, nenhum estudante é gerado fora do plano estabelecido.

Em seguida, para cada uma das paradas de ônibus geradas, uma quantidade n_s de estudantes são gerados a uma distância máxima de w_{max} da parada. Os autores realizaram esse processo inicialmente a partir da geração de um ângulo $\alpha_j \in [0, 2\pi]$ e uma distância w_j da parada de ônibus para cada estudante j . Então, cada estudante é colocado em coordenadas (x, y) iguais a $(x_i + w_j \cos \alpha_j, y_i + w_j \sin \alpha_j)$.

As instâncias utilizadas no presente trabalho são compostas por 95 das 112 instâncias geradas, conforme o processo descrito anteriormente, e utilizadas em Schittekat et al. (2013) e Kinable, Spieksma e Berghe (2014). Os tamanhos de tais instâncias variam de 5 paradas de ônibus e 25 estudantes a 80 paradas de ônibus e 800 estudantes. Além disso, são consideradas quatro distâncias máximas de caminhada dos estudantes até as paradas: 5, 10, 20 e 40. Esta distância máxima de caminhada determina em grande parte quantas paradas o estudante pode alcançar. Ainda, a capacidade dos ônibus utilizados também é fornecida.

5.2 Comparação do HILS com métodos da literatura

A presente seção compara os resultados obtidos pelo HILS com os resultados da meta-heurística proposta em Schittekat et al. (2013) e o *branch-and-price* proposto em Kinable, Spieksma e Berghe (2014).

O algoritmo executou cada uma das instâncias testadas um total de dez vezes para obtenção dos resultados apresentados. Ainda, os valores dos parâmetros I_{Max} e I_{ILS} do HILS, que correspondem ao número de reinicializações do algoritmo e o número máximo de iterações da busca local sem uma melhora da solução, variam de acordo com o número de paradas de ônibus da instância que está sendo utilizada.

Assim, para um número de paradas de ônibus maior ou igual a 20 foi utilizada a seguinte parametrização, conforme os testes realizados: $I_{Max} = 50$ e $I_{ILS} = 125$. Caso contrário, foi utilizado $I_{Max} = 50$ e $I_{ILS} = 50$.

A Tabela 5.1 evidencia os resultados obtidos pelo HILS de forma geral. As quatro primeiras colunas (ID, n, s, Cap) da tabela representam, respectivamente, a instância testada, a quantidade de paradas disponíveis, a quantidade de estudantes a serem transportados até a escola e a capacidade dos ônibus utilizados. Em seguida, nas duas próximas colunas (HILS média, HILS melhor), são informados a solução média após as dez execuções do algoritmo proposto e a melhor solução obtida. Nas duas próximas colunas (MH, B&P) são informados as melhores soluções obtidas por Schittekat et al. (2013) e Kinable, Spieksma e Berghe (2014). Por fim, nas três últimas colunas (Tempo(s), $Gap_{MH}(\%)$, $Gap_{B\&P}(\%)$) são reportados o tempo de execução do algoritmo HILS, e o *gap* da melhor solução obtida quando comparado aos outros dois métodos. Os valores das soluções que se encontram em negrito representam melhora em relação aos resultados de Schittekat et al. (2013) ou Kinable, Spieksma e Berghe (2014).

A partir dos resultados apresentados com base na comparação com dois trabalhos presentes na literatura do SBRP que trataram o mesmo grupo de instâncias, percebe-se que o HILS mostrou-se eficiente e competitivo quando comparado com os métodos adotados por Schittekat et al. (2013) e Kinable, Spieksma e Berghe (2014).

Quando comparado com a meta-heurística proposta por Schittekat et al. (2013), o algoritmo proposto foi bem sucedido em obter soluções melhores em 18 das 95 instâncias testadas, tendo igualado os resultados obtidos em 75 das outras 77 instâncias, obtendo um *gap* médio de -0.42% .

Além disso, quando comparado com o método exato proposto por Kinable, Spieksma e Berghe (2014), que possui as melhores soluções conhecidas na literatura, o algoritmo proposto obteve soluções melhores em 10 das 95 instâncias, igualando os resultados em outras 83, e obtendo um *gap* médio de -0.24% .

Tabela 5.1: Resultados computacionais

ID	n	s	Cap	HILS média	HILS melhor	MH	B&P	Tempo(s)	$Gap_{MH}(\%)$	$Gap_{B\&P}(\%)$
1	5	25	25	141,01	141,01	141,01	141,01	0,1	0,00	0,00
2	5	25	50	161,62	161,62	161,62	161,62	0,03	0,00	0,00
3	5	25	25	182,14	182,14	182,14	182,14	0,01	0,00	0,00
4	5	25	50	195,8	195,8	195,8	195,8	0,02	0,00	0,00
5	5	25	25	111,65	111,65	111,65	111,65	0,01	0,00	0,00
6	5	25	50	103,18	103,18	103,18	103,18	0,1	0,00	0,00
7	5	25	25	7,63	7,63	7,63	7,63	0,1	0,00	0,00
8	5	25	50	25,64	25,64	25,64	25,64	0,12	0,00	0,00
9	5	50	25	286,68	286,68	286,68	286,68	0,28	0,00	0,00
10	5	50	50	197,2	197,2	197,2	197,2	0,22	0,00	0,00
11	5	50	25	193,55	193,55	193,55	193,55	0,53	0,00	0,00
12	5	50	50	215,86	215,86	215,86	215,86	0,23	0,00	0,00
13	5	50	25	130,53	130,53	130,53	130,53	0,71	0,00	0,00
14	5	50	50	96,26	96,26	96,26	96,26	0,25	0,00	0,00
15	5	50	25	12,89	12,89	12,89	12,89	0,33	0,00	0,00
16	5	50	50	30,24	30,24	30,24	30,24	0,26	0,00	0,00
17	5	100	25	360,35	360,35	360,35	360,35	0,53	0,00	0,00

Tabela 5.1: Continuação

ID	n	s	Cap	HILS média	HILS melhor	MH	B&P	Tempo(s)	Gap _{MH} (%)	Gap _{B&P} (%)
18	5	100	50	304,23	304,23	304,23	304,23	0,39	0,00	0,00
19	5	100	25	294,21	294,21	294,21	294,21	1,41	0,00	0,00
20	5	100	50	229,41	229,41	229,41	229,41	0,32	0,00	0,00
21	5	100	25	134,95	134,95	134,95	134,95	1,17	0,00	0,00
22	5	100	50	144,41	144,41	144,41	144,41	0,75	0,00	0,00
23	5	100	25	58,95	58,95	58,95	58,95	1	0,00	0,00
24	5	100	50	39,44	39,44	39,44	39,44	1,06	0,00	0,00
25	10	50	25	242,85	242,85	242,85	242,85	1,35	0,00	0,00
26	10	50	50	282,12	282,12	282,12	282,12	0,32	0,00	0,00
27	10	50	25	244,54	244,54	244,54	244,54	1,26	0,00	0,00
28	10	50	50	288,33	288,33	288,33	288,33	0,32	0,00	0,00
29	10	50	25	108,98	108,98	108,98	108,98	1,35	0,00	0,00
30	10	50	50	157,48	157,48	157,48	157,48	0,37	0,00	0,00
31	10	50	25	32,25	32,25	32,25	32,25	0,52	0,00	0,00
32	10	50	50	36,66	36,66	36,66	36,66	0,41	0,00	0,00
33	10	100	25	403,18	403,18	403,18	403,18	4,59	0,00	0,00
34	10	100	50	296,53	296,53	296,53	296,53	2,3	0,00	0,00
35	10	100	25	388,87	388,87	388,87	388,87	4,19	0,00	0,00
36	10	100	50	294,8	294,8	294,8	294,8	2,12	0,00	0,00
37	10	100	25	190,39	178,28	178,28	178,28	1,96	0,00	0,00
38	10	100	50	175,96	175,96	175,96	175,96	2,48	0,00	0,00
39	10	100	25	57,5	57,5	57,5	57,5	1,45	0,00	0,00
40	10	100	50	31,89	31,89	31,89	31,89	1,3	0,00	0,00
41	10	200	25	735,27	735,27	735,27	735,27	4,06	0,00	0,00
42	10	200	50	506,06	506,06	512,16	506,06	2,62	-1,21	0,00
43	10	200	25	513	513	513	513	8,93	0,00	0,00
44	10	200	50	475,21	475,21	475,21	475,21	7,89	0,00	0,00
45	10	200	25	347,29	347,29	347,29	347,29	8,48	0,00	0,00
46	10	200	50	217,46	217,46	217,46	217,46	5,81	0,00	0,00
47	10	200	25	102,93	102,93	102,93	102,93	6,34	0,00	0,00
48	10	200	50	55,05	55,05	55,05	55,05	3,17	0,00	0,00
49	20	100	25	507,81	507,81	520,24	507,81	13,32	-2,45	0,00
50	20	100	50	406,65	406,65	420,64	406,65	11,25	-3,44	0,00
51	20	100	25	419,17	419,17	422,21	419,17	31,01	-0,73	0,00
52	20	100	50	360,86	360,86	360,86	360,86	27,07	0,00	0,00
53	20	100	25	246,22	245,17	245,17	245,17	22,15	0,00	0,00
54	20	100	50	185,06	185,06	185,06	185,06	20,6	0,00	0,00
55	20	100	25	52,59	52,52	52,52	52,52	5,78	0,00	0,00
56	20	100	50	19,05	19,05	19,05	19,05	3,61	0,00	0,00
57	20	200	25	875,46	875,46	903,84	875,46	58,38	-3,24	0,00
58	20	200	50	476,05	476,05	485,65	476,05	38,14	-2,02	0,00
59	20	200	25	610,28	606,8	616,93	606,8	57,29	-1,67	0,00
60	20	200	50	462,31	462,31	462,31	462,31	31,87	0,00	0,00
61	20	200	25	375,29	373,21	373,21	373,21	31,1	0,00	0,00
62	20	200	50	253,04	250,75	250,75	250,75	50,77	0,00	0,00
63	20	200	25	93,01	93,01	93,01	93,01	24,04	0,00	0,00
64	20	200	50	45,4	45,4	45,4	45,4	10,3	0,00	0,00
65	20	400	25	1323,35	1323,35	1323,35	1323,35	362,85	0,00	0,00
66	20	400	50	720,83	720,83	733,54	720,83	99,7	-1,76	0,00
67	20	400	25	980,87	975,12	975,12	975,12	285,06	0,00	0,00
68	20	400	50	615,41	614,67	614,67	614,67	224,87	0,00	0,00
69	20	400	25	768,69	763,76	763,76	763,76	121,13	0,00	0,00
70	20	400	50	301,93	298,47	298,47	298,47	128,4	0,00	0,00
71	20	400	25	239,58	239,58	239,58	239,58	151	0,00	0,00
72	20	400	50	84,49	84,49	84,49	84,49	49,07	0,00	0,00
73	40	200	25	808,69	808,69	831,94	831,94	89,03	-2,88	-2,88
74	40	200	50	556,04	555,982	593,35	593,35	119,118	-6,72	-6,72
75	40	200	25	727,66	715,77	728,44	728,44	201,08	-1,77	-1,77
76	40	200	50	475,65	475,64	481,05	481,05	200,37	-1,14	-1,14
77	40	200	25	341,2	339,75	339,75	339,75	103,7	0,00	0,00
78	40	200	50	275,91	273,88	273,88	273,88	218,77	0,00	0,00
79	40	200	25	76,77	76,77	76,77	76,77	29,61	0,00	0,00
80	40	200	50	58,46	58,46	58,46	58,46	25,24	0,00	0,00
81	40	400	25	1347,56	1339,33	1407,05	1394,23	455,37	-5,06	-4,10
82	40	400	50	834,44	834,44	858,8	858,8	166,83	-2,92	-2,92
83	40	400	25	895,97	890,92	891,02	891,02	497,29	-0,01	-0,01
84	40	400	50	746,67	740,48	757,42	757,42	439,9	-2,29	-2,29
85	40	400	25	593,18	586,29	586,29	586,29	430,54	0,00	0,00
86	40	400	50	401,93	401,22	395,95	395,95	197,72	1,31	1,31
87	40	400	25	195,33	195,33	195,33	195,33	188,34	0,00	0,00

Tabela 5.1: Continuação

ID	n	s	Cap	HILS média	HILS melhor	MH	B&P	Tempo(s)	Gap _{MH} (%)	Gap _{B&P} (%)
88	40	400	50	70,77	70,77	70,77	70,77	72,95	0,00	0,00
89	40	800	25	2900,14	2900,14	2900,14	2900,14	1392,68	0,00	0,00
90	40	800	50	1309,76	1309,76	1345,7	1345,7	916,75	-2,74	-2,74
91	40	800	25	2221,32	2200,57	2200,57	2200,57	1293,71	0,00	0,00
92	40	800	50	1025,92	1024,71	1025,16	1025,16	979,83	-0,04	-0,04
93	40	800	25	1407,35	1404,16	1404,16	1404,16	1508,82	0,00	0,00
94	40	800	50	629,24	622,32	616,58	616,58	716,03	0,92	0,92
95	40	800	25	396,92	396,92	396,92	396,92	1686	0,00	0,00

A Tabela 5.2 faz um recorte da Tabela 5.1 apresentando as instâncias em que o HILS apresentou resultados melhores que os apresentados em Kinable, Spieksma e Berghe (2014). Percebe-se que todas as instâncias são grandes, possuindo 40 paradas de ônibus disponíveis, mas que possuem variação do número de estudantes entre 200 e 800, em que o maior *gap* acontece na instância 74, que possui 200 estudantes.

Tabela 5.2: Instâncias com soluções melhoradas comparadas com o B&P

ID	n	s	Cap	HILS	B&P	Gap(%)
73	40	200	25	808,69	831,94	-2,88
74	40	200	50	555,982	593,35	-6,72
75	40	200	25	715,77	728,44	-1,77
76	40	200	50	475,64	481,05	-1,14
81	40	400	25	1339,33	1394,23	-4,1
82	40	400	50	834,44	858,8	-2,92
83	40	400	25	890,92	891,02	-0,01
84	40	400	50	740,48	757,42	-2,29
90	40	800	50	1309,76	1345,7	-2,74
92	40	800	50	1024,71	1025,16	-0,04

Por outro lado, ao analisarmos as soluções em que o HILS possui melhores soluções que a meta-heurística proposta em Schittekat et al. (2013), conforme Tabela 5.3, tem-se que 10 das 18 instâncias possuem um total de 40 paradas de ônibus disponíveis, com variação de estudantes entre 200 e 800. Assim como na comparação com o *branch-and-price*, o maior *gap* acontece na instância 74.

Por fim, a Tabela 5.4 mostra as duas instâncias em que o HILS obteve soluções piores que os métodos aqui comparados. Observa-se que o HILS obteve soluções piores que os outros dois métodos nas instâncias 86 e 94, sendo elas duas das maiores instâncias utilizadas em Schittekat et al. (2013). Tanto a meta-heurística em Schittekat et al. (2013) quanto o *branch-and-price* em Kinable, Spieksma e Berghe (2014) obtiveram soluções iguais, com o HILS apresentando um *gap* de 1,31% e 0,92% para cada uma das instâncias.

Tabela 5.3: Instâncias com soluções melhoradas em relação a MH

ID	n	s	Cap	HILS	MH	<i>Gap</i> (%)
42	10	200	50	506,06	512,16	-1,21
49	20	100	25	507,81	520,24	-2,45
50	20	100	50	406,65	420,64	-3,44
51	20	100	25	419,17	422,21	-0,73
57	20	200	25	875,46	903,84	-3,24
58	20	200	50	476,05	485,65	-2,02
59	20	200	25	606,8	616,93	-1,67
66	20	400	50	720,83	733,54	-1,76
73	40	200	25	808,69	831,94	-2,88
74	40	200	50	555,982	593,35	-6,72
75	40	200	25	715,77	728,44	-1,77
76	40	200	50	475,64	481,05	-1,14
81	40	400	25	1339,33	1407,05	-5,06
82	40	400	50	834,44	858,8	-2,92
83	40	400	25	890,92	891,02	-0,01
84	40	400	50	740,48	757,42	-2,29
90	40	800	50	1309,76	1345,7	-2,74
92	40	800	50	1024,71	1025,16	-0,04

Tabela 5.4: Instâncias com soluções piores

ID	n	s	Cap	HILS	MH	B&P	<i>Gap</i> _{MH} (%)	<i>Gap</i> _{B&P} (%)
86	40	400	50	401,22	395,95	395,95	1,31	1,31
94	40	800	50	622,32	616,58	616,58	0,92	0,92

Quanto ao tempo de execução do algoritmo proposto, observa-se um aumento conforme o tamanho e complexidade das instâncias testadas. O maior tempo de execução ocorre na instância 93, que possui um total de 40 opções de paradas de ônibus, 800 estudantes a serem alocados e veículos com uma capacidade de 25 estudantes. Nesta instância, o HILS obteve uma solução em 1508,82 segundos. Nesta instância, a melhor solução obtida pelo HILS foi igual a melhor solução obtida pelos métodos comparados. Como não houve uma disponibilização da configuração das máquinas em que foram testadas as instâncias em Schittekat et al. (2013) e Kinable, Spieksma e Berghe (2014), não é possível realizar uma comparação direta dos tempos de execução dos métodos sendo comparados.

Capítulo 6

Conclusão

O presente trabalho buscou desenvolver um método de resolução que envolve um problema de roteirização de transporte escolar. A relevância do tema surge a partir do momento em que a proposição de alternativas de redução de custos torna-se fundamental para amenizar impactos econômicos que envolvem empresas que atuam no ramo, assim como para proporcionar impactos sociais positivos na vida acadêmica dos estudantes que usufruem do serviço.

Partindo de um referencial teórico completo acerca de todas as vertentes e variantes sobre o *School Bus Routing Problem*, o trabalho aplicou técnicas e conceitos acerca da Pesquisa Operacional almejando resolver uma das variantes do problema abordada na literatura, almejando reduzir custos operacionais referentes a seleção de paradas ônibus, alocação de estudantes e roteirização dos ônibus escolares.

Nesse sentido, foi abordada a variante do SBRP que considera a seleção de paradas de ônibus com alocação de estudantes a essas paradas, obedecendo a restrição de distância máxima a ser percorrida pelos estudantes até elas, para serem entregues a uma única escola por uma frota de ônibus homogênea com limitação de capacidade.

Foi proposta uma meta-heurística *Iterated Local Search* com uma formulação de programação linear inteira para resolver o problema de roteirização dos veículos, assim como um algoritmo guloso aliado a um método exato para tratar o problema de alocação de estudantes.

O algoritmo foi testado em 95 instâncias já conhecidas da literatura acerca do SBRP, demonstrando competitividade com os métodos já conhecidos na literatura, tendo melhorado resultados em 10 das 95 instâncias quando comparado com os resultados de Kinable, Spieksma e Berghe (2014), além de ter obtido melhores resultados em 18 das 95 instâncias

quando comparado com os resultados de Schittekat et al. (2013).

Trabalhos futuros podem acrescentar novas variantes do SBRP para compor o problema, tornando-o mais real e adequado ao dia a dia de estudantes e profissionais que lidam com o transporte escolar. Características como múltiplas escolas, janelas de tempo, tempo de viagem máximo, tempos de coleta e chances de superlotação de veículos podem vir a compor o problema.

Referências

- ALVES, F. S. et al. Problemas de roteamento de veículos aplicados no planejamento logístico do transporte escolar da cidade de coxim-ms. [sn], 2015.
- ARENALES, M. et al. *Pesquisa operacional: para cursos de engenharia*. [S.l.]: Elsevier Brasil, 2015.
- ARIAS-ROJAS, J. S.; JIMÉNEZ, J. F.; MONTOYA-TORRES, J. R. Solving of school bus routing problem by ant colony optimization. *Revista EIA*, Escuela de ingenieria de Antioquia, n. 17, p. 193–208, 2012.
- BERTSIMAS, D.; DELARUE, A.; MARTIN, S. From school buses to start times: Driving policy with optimization. 2018.
- BODIN, L. Routing and scheduling of vehicles and crews, the state of the art. *Comput. Oper. Res.*, v. 10, n. 2, p. 63–211, 1983.
- BODIN, L. D.; BERMAN, L. Routing and scheduling of school buses by computer. *Transportation Science*, INFORMS, v. 13, n. 2, p. 113–129, 1979.
- BÖGL, M.; DOERNER, K. F.; PARRAGH, S. N. The school bus routing and scheduling problem with transfers. *Networks*, Wiley Online Library, v. 65, n. 2, p. 180–203, 2015.
- BOOKBINDER, J. H.; EDWARDS, S. H. School-bus routing for program scheduling. *Computers & Operations Research*, Elsevier, v. 17, n. 1, p. 79–94, 1990.
- BOWERMAN, R.; HALL, B.; CALAMAI, P. A multi-objective optimization approach to urban school bus routing: Formulation and solution method. *Transportation Research Part A: Policy and Practice*, Elsevier, v. 29, n. 2, p. 107–123, 1995.
- BRACA, J. et al. A computerized approach to the new york cityschool bus routing problem. *IIE transactions*, Springer, v. 29, n. 8, p. 693–702, 1997.
- BRAMEL, J.; SIMCHI-LEVI, D. A location based heuristic for general routing problems. *Operations research*, INFORMS, v. 43, n. 4, p. 649–660, 1995.
- CACERES, H.; BATTÀ, R.; HE, Q. School bus routing with stochastic demand and duration constraints. *Transportation science*, INFORMS, v. 51, n. 4, p. 1349–1364, 2017.
- CAMPBELL, J. F.; NORTH, J. W.; ELLEGOOD, W. A. Modeling mixed load school bus routing. In: *Quantitative approaches in logistics and supply chain management*. [S.l.]: Springer, 2015. p. 3–30.
- CHALKIA, E. et al. Safety bus routing for the transportation of pupils to school. *Traffic Safety*, Wiley Online Library, v. 4, p. 283–299, 2016.

- CHAPLEAU, L.; FERLAND, J.-A.; ROUSSEAU, J.-M. Clustering for routing in densely populated areas. *European Journal of Operational Research*, Elsevier, v. 20, n. 1, p. 48–57, 1985.
- CHEN, D.-S. et al. A bus routing system for rural school districts. *Computers & Industrial Engineering*, Elsevier, v. 19, n. 1-4, p. 322–325, 1990.
- CHEN, D.-S.; KALLSEN, H. A.; SNIDER, R. C. School bus routing and scheduling: an expert system approach. *Computers & Industrial Engineering*, Elsevier, v. 15, n. 1-4, p. 179–183, 1988.
- CHEN, X. et al. Exact and metaheuristic approaches for a bi-objective school bus scheduling problem. *PloS one*, Public Library of Science, v. 10, n. 7, 2015.
- CLARKE, G.; WRIGHT, J. W. Scheduling of vehicles from a central depot to a number of delivery points. *Operations research*, Informs, v. 12, n. 4, p. 568–581, 1964.
- DESROSIERS, J. et al. Transcol: a multi-period school bus routing and scheduling system. *TIMS Studies in the Management Sciences*, Elsevier Science Publishers, v. 22, p. 47–71, 1986.
- DESROSIERS, J. et al. *An overview of school busing system*. [S.l.]: Scientific Management of Trans- port Systems, 1981.
- DÍAZ-PARRA, O. et al. Vertical transfer algorithm for the school bus routing problem. In: *Transactions on Computational Science XXI*. [S.l.]: Springer, 2013. p. 211–229.
- DULAC, G.; FERLAND, J. A.; FORGUES, P. A. School bus routes generator in urban surroundings. *Computers & Operations Research*, Elsevier, v. 7, n. 3, p. 199–213, 1980.
- ELDRANDALY, K. A.; ABDALLAH, A. F. A novel gis-based decision-making framework for the school bus routing problem. *Geo-spatial Information Science*, Taylor & Francis, v. 15, n. 1, p. 51–59, 2012.
- ELLEGOOD, W. A.; CAMPBELL, J. F.; NORTH, J. Continuous approximation models for mixed load school bus routing. *Transportation research part B: Methodological*, Elsevier, v. 77, p. 182–198, 2015.
- ELLEGOOD, W. A. et al. School bus routing problem: Contemporary trends and research directions. *Omega*, Elsevier, 2019.
- FARAJ, M. F. et al. A real geographical application for the school bus routing problem. In: IEEE. *17th International IEEE Conference on Intelligent Transportation Systems (ITSC)*. [S.l.], 2014. p. 2762–2767.
- FERREIRA, J. et al. Condições do transporte escolar rural e suas implicações no rendimento dos alunos. Instituto Federal Goiano, 2020.
- FISHER, M. L.; JAIKUMAR, R. A generalized assignment heuristic for vehicle routing. *Networks*, Wiley Online Library, v. 11, n. 2, p. 109–124, 1981.
- FLEMING, S. *This US city put an algorithm in charge of its school bus routes and saved \$5 million*. 2019. <<https://tinyurl.com/y6kfdt7m>>. Acesso em: 22 de Abril de 2020.

- FLEURY, P. F. Conceito de logística integrada e supply chain managment. *Logística Empresarial: A perspectiva brasileira*. São Paulo. Atlas, 2000.
- FÜGENSCHUH, A. Solving a school bus scheduling problem with integer programming. *European Journal of Operational Research*, Elsevier, v. 193, n. 3, p. 867–884, 2009.
- GALDI, M.; THEBPANYA, P. Optimizing school bus stop placement in howard county, maryland: A gis-based heuristic approach. In: *Geospatial Research: Concepts, Methodologies, Tools, and Applications*. [S.l.]: IGI Global, 2016. p. 1660–1676.
- GOLDBERG, A. V.; TARJAN, R. E. A new approach to the maximum-flow problem. *JACM: Journal of the Association for Computer Machinery*, v. 35, n. 4, p. 921–940, 1988.
- GOULART, L. M. L.; MORAIS, A. A. d.; VIEIRA, N. Tempo de permanência no transporte escolar sobre o desempenho estudantil. *Revista Interterritórios*, v. 5, n. 9, 2019.
- HANSEN, P.; MLADENOVIC, N.; PÉREZ, J. A. M. Variable neighbourhood search: methods and applications. *4OR*, Springer, v. 6, n. 4, p. 319–360, 2008.
- HELGAUN, K. *An effective implementation of K-opt moves for the Lin-Kernighan TSP heuristic*. Tese (Doutorado) — Roskilde University. Department of Computer Science, 2006.
- KIM, B.-I.; KIM, S.; PARK, J. A school bus scheduling problem. *European Journal of Operational Research*, Elsevier, v. 218, n. 2, p. 577–585, 2012.
- KINABLE, J.; SPIEKSMAN, F. C.; BERGHE, G. V. School bus routing—a column generation approach. *International Transactions in Operational Research*, Wiley Online Library, v. 21, n. 3, p. 453–478, 2014.
- KUMAR, Y.; JAIN, S. School bus routing based on branch and bound approach. In: IEEE. *2015 International Conference on Computer, Communication and Control (IC4)*. [S.l.], 2015. p. 1–4.
- LAPORTE, G.; SEMET, F. Classical heuristics for the capacitated vrp. In: *The vehicle routing problem*. [S.l.]: SIAM, 2002. p. 109–128.
- LEKSAKUL, K. et al. Heuristic approach for solving employee bus routes in a large-scale industrial factory. *Advanced Engineering Informatics*, Elsevier, v. 32, p. 176–187, 2017.
- LI, L.; FU, Z. The school bus routing problem: a case study. *Journal of the Operational Research Society*, Springer, v. 53, n. 5, p. 552–558, 2002.
- LIMA, F. M. de S. et al. A multi-objective capacitated rural school bus routing problem with heterogeneous fleet and mixed loads. *4OR*, Springer, v. 15, n. 4, p. 359–386, 2017.
- LIMA, F. M. S. et al. A mixed load capacitated rural school bus routing problem with heterogeneous fleet: Algorithms for the brazilian context. *Expert systems with applications*, Elsevier, v. 56, p. 320–334, 2016.
- LOURENÇO, H. R.; MARTIN, O. C.; STÜTZLE, T. Iterated Local Search. In: _____. *Handbook of Metaheuristics*. Boston, MA: Springer US, 2003. p. 320–353. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/0-306-48056-5_11>.

- MANDUJANO, P.; GIESEN, R.; FERRER, J.-C. Model for optimization of locations of schools and student transportation in rural areas. *Transportation research record*, SAGE Publications Sage CA: Los Angeles, CA, v. 2283, n. 1, p. 74–80, 2012.
- MARTÍNEZ, L. M.; VIEGAS, J. M. Design and deployment of an innovative school bus service in lisbon. *Procedia-Social and Behavioral Sciences*, Elsevier, v. 20, p. 120–130, 2011.
- MINOCHA, B.; TRIPATHI, S. Solving school bus routing problem using hybrid genetic algorithm: a case study. In: SPRINGER. *Proceedings of the Second International Conference on Soft Computing for Problem Solving (SocProS 2012), December 28-30, 2012*. [S.l.], 2014. p. 93–103.
- MIRANDA, D. M. et al. A multi-loading school bus routing problem. *Expert Systems with Applications*, Elsevier, v. 101, p. 228–242, 2018.
- NEWTON, R. M.; THOMAS, W. H. Design of school bus routes by computer. *Socio-Economic Planning Sciences*, Elsevier, v. 3, n. 1, p. 75–85, 1969.
- NEWTON, R. M.; THOMAS, W. H. Bus routing in a multi-school system. *Computers & Operations Research*, Elsevier, v. 1, n. 2, p. 213–222, 1974.
- NIASAR, M. S. F. et al. Iterated local search algorithm with strategic oscillation for school bus routing problem with bus stop selection. *IJSOM: International Journal of Supply and Operations Management*, v. 4, n. 1, p. 1–14, 2017.
- OLUWADARE, S. A.; OGUNTUYI, I. P.; NWAIWU, J. C. Solving school bus routing problem using genetic algorithm-based model. *International Journal of Intelligent Systems and Applications*, Modern Education and Computer Science Press, v. 11, n. 3, p. 50, 2018.
- OSMAN, I. H. Metastrategy simulated annealing and tabu search algorithms for the vehicle routing problem. *Annals of operations research*, Springer, v. 41, n. 4, p. 421–451, 1993.
- PACHECO, J. et al. Bi-objective bus routing: an application to school buses in rural areas. *Transportation Science*, INFORMS, v. 47, n. 3, p. 397–411, 2013.
- PACHECO, J.; MARTÍ, R. Tabu search for a multi-objective routing problem. *Journal of the operational research society*, Taylor & Francis, v. 57, n. 1, p. 29–37, 2006.
- PARK, J.; KIM, B. I. The school bus routing problem: A review. *European Journal of operational research*, Elsevier, v. 202, n. 2, p. 311–319, 2010.
- RIERA-LEDESMA, J.; SALAZAR-GONZÁLEZ, J. J. A column generation approach for a school bus routing problem with resource constraints. *Computers & Operations Research*, Elsevier, v. 40, n. 2, p. 566–583, 2013.
- RIPPLINGER, D. Rural school vehicle routing problem. *Transportation Research Record*, SAGE Publications Sage CA: Los Angeles, CA, v. 1922, n. 1, p. 105–110, 2005.
- RUSSELL, R. A. An effective heuristic for the m-tour traveling salesman problem with some side conditions. *Operations Research*, INFORMS, v. 25, n. 3, p. 517–524, 1977.

- RUSSELL, R. A.; MORREL, R. B. Routing special-education school buses. *Interfaces*, INFORMS, v. 16, n. 5, p. 56–64, 1986.
- SALES, L. d. P. A. et al. Memetic algorithm for the heterogeneous fleet school bus routing problem. *Journal of Urban Planning and Development*, American Society of Civil Engineers, v. 144, n. 2, p. 04018018, 2018.
- SANTANA, E. R. L.; CARVAJAL, J. d. J. R. A hybrid column generation and clustering approach to the school bus routing problem with time windows. *Ingeniería*, Universidad Distrital Francisco José de Caldas, v. 20, n. 1, p. 101–117, 2015.
- SARUBBI, J. F. et al. A strategy for clustering students minimizing the number of bus stops for solving the school bus routing problem. In: IEEE. *NOMS 2016-2016 IEEE/IFIP Network Operations and Management Symposium*. [S.l.], 2016. p. 1175–1180.
- SAVAS, E. S. On equity in providing public services. *Management Science*, INFORMS, v. 24, n. 8, p. 800–808, 1978.
- SCHITTEKAT, P. et al. A metaheuristic for the school bus routing problem with bus stop selection. *European Journal of Operational Research*, Elsevier, v. 229, n. 2, p. 518–528, 2013.
- SHIN, K.; HAN, S. A centroid-based heuristic algorithm for the capacitated vehicle routing problem. *Computing and Informatics*, v. 30, n. 4, p. 721–732, 2012.
- SIQUEIRA, V. S. de et al. Implementation of the metaheuristic grasp applied to the school bus routing problem. *International Journal of e-Education, e-Business, e-Management and e-Learning*, IACSIT Press, v. 6, n. 2, p. 137, 2016.
- SPADA, M.; BIERLAIRE, M.; LIEBLING, T. M. Decision-aiding methodology for the school bus routing and scheduling problem. *Transportation Science*, INFORMS, v. 39, n. 4, p. 477–490, 2005.
- SUBRAMANIAN, A. *Heuristic, Exact and Hybrid Approaches for Vehicle Routing Problems*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal Fluminense, 2012.
- YAO, B. et al. A two-stage heuristic algorithm for the school bus routing problem with mixed load plan. *Transportation Letters*, Taylor & Francis, v. 8, n. 4, p. 205–219, 2016.