

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS SOCIAIS APLICADAS
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS

CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

Erik Oliveira da Silva

Fórmula de Taylor e Aplicações de Derivadas

Rio Tinto – PB
Dezembro de 2021

Erik Oliveira da Silva

Fórmula de Taylor e Aplicações de Derivadas

Trabalho Monográfico apresentado à Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Carlos Alberto Gomes de Almeida

Rio Tinto – PB
Dezembro de 2021

Catálogo na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

S586f Silva, Erik Oliveira da.
 Fórmula de Taylor e Aplicações de Derivadas / Erik
 Oliveira da Silva. – Rio Tinto, 2021.
 62f. : il.

Orientação: Carlos Alberto Gomes de Almeida.
Monografia (Graduação) – UFPB/CCAÉ.

1. Fórmula de Taylor. 2. Aplicação de derivadas. 3.
Função Polinomial. 4. Polinômio de Taylor. I. Almeida,
Carlos Alberto Gomes de. II. Título.

UFPB/CCAÉ

CDU 51(043.2)

Elaborado por LUIZA PEREIRA NUNES - CRB-936/15

Erik Oliveira da Silva

Fórmula de Taylor e Aplicações de Derivadas

Trabalho Monográfico apresentado à Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Carlos Alberto Gomes de Almeida

Aprovado em 03 de dezembro de 2021.

Banca Examinadora:



Prof. Dr. Claudemir Fidelis Bezerra Júnior - UFCG



Prof. Dr. José Laudelino de Menezes Neto - UFPB



Prof. Dr. Carlos Alberto Gomes de Almeida - UFPB

Orientador

Dedicatória

*A minha avó materna Severina Maria
de Conceição (em memória).*

Agradecimentos

Agradeço, antes de tudo, a Deus por ter me abençoado, dado coragem, determinação, força, sabedoria e saúde para superar as adversidades que surgiram ao longo da minha jornada e por ter me permitido chegar até aqui.

Aos meus familiares, em especial aos meus pais, Marcelo Oliveira e Maria do Carmo e ao meu irmão Hélio Oliveira, que sempre me apoiaram, incentivaram e ajudaram, cada um à sua maneira, em todos os momentos da minha vida, dando suporte por todos esses anos na busca por meus objetivos.

A todos os meus professores, pelas correções e ensinamentos que me proporcionaram apresentar um melhor desempenho no meu processo de formação ao longo do curso. Em especial ao meu orientador, o professor Carlos Alberto, a quem tenho grande respeito e admiração, pela sua contribuição na realização deste trabalho.

Aos membros da banca, os professores Claudemir Fidelis e José Laudelino, por terem aceitado o desafio de serem avaliadores do meu trabalho e pelas contribuições significativas que foram sugeridas.

Aos meus amigos e colegas que conheci no curso, em especial aos guerreiros do grupo TTT, que compartilharam comigo momentos de alegrias, conquistas, decepções e resenhas. Esses momentos, foram fundamentais para que a nossa jornada pudesse ter sido mais amena e divertida.

À minha amiga e irmã que o curso me proporcionou, Bárbara Lindolfo, pela amizade sincera, pelo apoio e pelos momentos de estudos que contribuíram no meu crescimento e evolução.

À Universidade Federal da Paraíba (UFPB) – Campus IV pelo ambiente propício à evolução e crescimento. Também agradeço a instituição pelo apoio financeiro, tanto nos projetos de iniciação científica quanto nas bolsas de assistência estudantil, fatores cruciais para minha permanência nos projetos e principalmente no curso.

Por fim, a todas as pessoas, incluindo as que não citei, mas que de uma alguma forma contribuíram na minha formação e me ajudaram a acreditar em mim eu quero deixar um agradecimento eterno.

“Consagre ao Senhor tudo o que você faz, e os seus planos serão bem-sucedidos.”

Provérbios 16:3

Resumo

O presente trabalho tem como tema a Fórmula de Taylor e aplicações de derivadas. A partir deste tema objetivou-se, portanto, realizar um estudo bibliográfico sobre a Fórmula de Taylor, apresentando algumas aplicações dessa fórmula na própria matemática. Inicia-se com um breve contexto histórico sobre a origem da Fórmula de Taylor. Na sequência apresenta-se uma breve revisão das principais definições e resultados importantes para o estudo da teoria envolvida no tema. Em seguida, aborda-se a Fórmula de Taylor através da aproximação local de uma função diferenciável por uma função afim, como motivação inicial. Depois da definição dos polinômios de Taylor de Ordens 1 e 2, generaliza-se a Fórmula de Taylor através da definição do Polinômio de Taylor de Ordem n . Diante disso, verifica-se a existência de um erro cometido entre o valor obtido pela fórmula e o valor real da função, que pode ser estimado em termos da derivada de ordem $n + 1$ da função por meio do Teorema da Fórmula de Taylor com resto de Lagrange. Ao estimar esse erro, percebe-se que ele vai ficando suficientemente menor quando utilizamos polinômios de ordens cada vez maiores. Por fim, mostra-se algumas aplicações da Fórmula de Taylor, como a aproximação local de funções, representação de funções através do Polinômio de Maclaurin de Ordem n , provar que o número de Euler é irracional e demonstrar um critério para determinar máximos e mínimos de funções.

Palavras-chave: Fórmula de Taylor. Aplicação de derivadas. Função Polinomial. Polinômio de Taylor.

Abstract

The theme of this work is the Taylor formula and applications of derivatives. From this theme, the objective was, therefore, to carry out a bibliographical study on the Taylor formula, presenting some applications of this formula in mathematics itself. It begins with a brief historical background on the origin of the Taylor Formula. Consequently, a brief review of the main definitions and important results for the study of the theory involved in the theme is presented. Then, Taylor's formula is approached through the local approximation of a function derivable by an affine function, as initial motivation. After defining the Taylor polynomials of Orders 1 and 2, the Taylor Formula is generalized by defining the Taylor Polynomial of Order n . Therefore, it is verified the existence of an error made between the value obtained by the formula and the real value of the function, which can be estimated in terms of the derivative of order $n + 1$ of the function utilizing Taylor's Formula Theorem with the remainder of Lagrangian. When estimating this error, it can be seen that it gets smaller enough when we use polynomials with higher and higher orders. Finally, we show some applications of the Taylor formula, such as the local approximation of functions, representation of functions through the Maclaurin Polynomial of Order n , proving that the Euler number is irrational and demonstrates a criterion for determining maxima and minima of functions.

Keywords: Taylor's Formula. Application of derivatives. Polynomial function. Taylor's Polynomial.

Conteúdo

Introdução	1
1 Apontamentos históricos	3
1.1 Origem da Fórmula de Taylor	3
1.2 Quem foi Brook Taylor	4
1.3 Taylor x Bernoulli	6
1.4 Fórmula de Maclaurin	6
2 Fundamentos	8
2.1 Funções	8
2.1.1 Funções polinomiais	9
2.1.2 Outras funções elementares	10
2.1.3 Pontos mínimos, máximos e inflexão de uma função	13
2.2 Continuidade e limite de funções	13
2.2.1 Continuidade de funções	14
2.2.2 Limite de funções	16
2.3 Derivadas	18
2.4 Teoremas de Rolle, do Valor Médio e de Cauchy	21
3 Fórmula de Taylor e Aplicações de Derivadas	24
3.1 Aproximação local de uma função diferenciável por uma função afim	24
3.2 Polinômio de Taylor de Ordem 1	26
3.3 Polinômio de Taylor de Ordem 2	29
3.4 Polinômio de Taylor de Ordem n	31
3.4.1 Polinômio de Taylor com resto de Lagrange	32
4 Aplicações	35
4.1 Aproximação local de funções	35
4.2 Polinômio de Maclaurin de Ordem n	38

4.3	O número de Euler	39
4.4	Critério para determinar máximos e mínimos de funções	41
5	Considerações Finais	43
	Referências Bibliográficas	46
	Apêndices	
A	Resultados Básicos	48

Introdução

O século XVII ficou conhecido por ser um período em que houve um expressivo desenvolvimento da matemática, principalmente por conta da descoberta do cálculo realizada por Isaac Newton e Gottfried Wilhelm Leibniz, de forma independente. Essa descoberta mudou o rumo das pesquisas matemáticas da época. Eves [3] conta que devido a ampla e surpreendente aplicabilidade do cálculo, apoiado pela geometria analítica, atraiu um grande número de pesquisadores em matemática. Assim, o século seguinte foi marcado pela exploração dessas novas áreas de pesquisa, como também dos recentes e poderosos métodos que o cálculo proporcionou naquele período e que se estende até os dias atuais.

Dentre os estudos nas áreas de pesquisas matemáticas exploradas no século XVIII, está o estudo de expansão de funções em séries de potências realizado pelo matemático inglês Brook Taylor. Em 1715, Taylor publicou no livro *Methodus Incrementorum Directa et Inversa*, a série de Taylor é um método utilizado para representar funções infinitamente diferenciáveis em séries de potências nas vizinhanças de um certo ponto. Essa série, também pode ser representada por uma fórmula analítica finita que utiliza um polinômio mais um termo de resto para aproximar localmente funções diferenciáveis.

Tal método, que é o nosso objeto de estudo, ficou conhecido nos dias de hoje como Fórmula de Taylor. O nosso principal objetivo neste trabalho foi realizar um levantamento bibliográfico sobre a Fórmula de Taylor, apresentando algumas aplicações dessa fórmula na própria matemática.

Organizamos nosso trabalho em cinco capítulos. No primeiro capítulo apresentamos um breve contexto histórico dos principais trabalhos em expansão de funções em séries de potências nos quais os resultados eram semelhantes ao do matemático que deu origem à Fórmula de Taylor, explicamos quem foi o matemático inglês Brook Taylor e seu atrito com Johann Bernoulli, por conta de um possível plágio da série de Taylor, como relata Jones [6]. Traremos também, quem foi o matemático Colin Maclaurin que têm o nome conectado a um caso particular da Série de Taylor.

No segundo capítulo apresentaremos uma breve revisão das principais definições e resultados do Cálculo, que julgamos importantes para o estudo da teoria envolvida na

Fórmula de Taylor, como também suas aplicações. Assim, abordamos os conceitos e exemplos de funções, continuidade e limite de funções, derivadas e os Teoremas de Rolle, do Valor Médio e de Cauchy.

Trazemos no capítulo 3, a aproximação local de uma função diferenciável por uma função afim, como uma forma de motivação inicial da Fórmula de Taylor que consiste nessa ideia de aproximação de funções por meio de polinômios em volta de um certo ponto. Para isso, basta a função ser derivável neste ponto. Na sequência definimos os polinômios de ordem 1 e 2 da Fórmula de Taylor, onde vemos a existência de um erro cometido entre o valor obtido pela fórmula e o valor real da função, que vai ficando suficientemente menor quando utilizamos um polinômio de ordem maior. Por fim, generalizamos a Fórmula de Taylor através da definição do Polinômio de Taylor de Ordem n . Também enunciamos e demonstramos, neste capítulo, o Teorema da Fórmula de Taylor com resto de Lagrange que serve para estimar o erro cometido quando utilizamos o polinômio de ordem n da Fórmula de Taylor em termos da derivada de ordem $n + 1$ da função.

No quarto capítulo, abordamos algumas aplicações da Fórmula de Taylor na própria matemática. Assim, utilizamos a fórmula para aproximar localmente funções e representar funções através do Polinômio de Maclaurin de Ordem n . Além disso, mostraremos duas aplicações com o número de Euler e uma aplicação para obter um critério para determinar máximos e mínimos de funções.

Para o quinto e último capítulo trazemos as considerações finais do nosso trabalho.

Por fim, acrescentamos um apêndice onde demonstramos alguns resultados contidos no Capítulo 3, objetivando ampliar o conhecimento do leitor interessado no tema.

Capítulo 1

Apontamentos históricos

Apresentaremos neste capítulo um breve apontamento histórico das origens da conhecida atualmente como Fórmula de Taylor, explicamos quem foi o matemático inglês Brook Taylor e seu atrito com Johann Bernoulli, por conta de um possível plágio da série de Taylor, como relata Jones [6]. Mostraremos também, quem foi o matemático Colin Maclaurin que têm o nome conectado a um caso particular da Série de Taylor. As referências das informações apresentadas aqui foram os livros de Boyer [2] e Eves [3] e os trabalhos de Jones [6], O'Connor e Robertson [8, 9].

1.1 Origem da Fórmula de Taylor

Mesmo que tenha ficado conhecida como a Série de Taylor, a expansão de funções em séries de potências, segundo O'Connor e Robertson [8] não se deve dar a impressão que Brook Taylor foi o primeiro a descobrir esse resultado. Historiadores [2, 3, 8] relatam que matemáticos como Madhava (século XV), James Gregory (1638-1675), Nicolaus Mercator (1620-1687), Johann Bernoulli (1667-1748), Abraham de Moivre (1667-1754), além dos ilustres Isaac Newton (1642-1727) e Gottfried Leibniz (1646-1716), descobriram variantes independentes da série de Taylor.

Por volta de quatro décadas anteriores a publicação do livro *Methodus Incrementorum Directa et Inversa* escrita por Taylor contendo a série geral que hoje leva seu nome, o escocês James Gregory já tinha conhecimento da sua forma geral. De acordo com Boyer [2], através de um processo equivalente ao de derivação sucessiva, Gregory teria descoberto a série de Taylor, caso tivesse expressado sua obra de forma analítica ao invés de utilizar uma abordagem essencialmente geométrica. Ele também conhecia as séries de Maclaurin para $\tan x$, $\sec x$, $\arctan x$ e $\operatorname{arcsec} x$, entretanto apenas a série para $\arctan x$, foi intitulada em seu nome. Essa expansão em série vinculada a James Gregory, também

teria sido difundida pelo matemático Madhava no século quinze no sudoeste da Índia, de acordo com Boyer [2].

Provavelmente durante sua passagem na Itália em 1663, Gregory estudou expansões de funções em séries de potências e processos infinitos, daí aprendido, segundo Boyer [2] que a área sob a curva $y = 1/(1 + x^2)$, desde $x = 0$ até $x = x$, é $\arctan x$; e uma divisão simples converte $1/(1 + x^2)$ em $1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots$. Dessa maneira, chegou ao resultado atualmente conhecido como série de Gregory

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1 + x^2} = \arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$$

Quase que no mesmo período e de modo semelhante à série alcançada por Gregory, o dinamarquês Nicolaus Mercator, que vivia em Londres publicou na segunda parte do livro *Logarithmotechnia* em 1668, uma fórmula de aproximação de logaritmos por série. Boyer [2] informa que da obra de Gregório de St. Vincent (1584-1667), sabia-se que a área sob a hipérbole $y = 1/(1 + x)$, desde $x = 0$ até $x = x$, é $\ln(1 + x)$. Assim, utilizando o método de divisão de Gregory e integração, obtemos a chamada série de Mercator

$$\int_0^x \frac{dx}{1 + x} = \int_0^x (1 - x + x^2 - x^3 + \dots) dx = \ln(1 + x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

1.2 Quem foi Brook Taylor

Figura 1.1: Brook Taylor



Fonte: O'Connor e Robertson [8]

Nascido no condado de Middlesex na Inglaterra em 1685, Brook Taylor (Fig.1.1) é oriundo de família pertencente a nobreza e por conta disso teve bons educadores desde cedo. De acordo com sua biografia feita por O'Connor e Robertson [8], seu pai era um

disciplinador estrito e cultural interessado em pintura e música. Isso implicou no “amor” de Taylor em ambas as áreas, vindo a aplicar suas habilidades matemáticas nesses campos mais tarde em sua vida.

Eves [3] conta que Taylor revelou desde muito cedo grande potencial matemático. Graduou-se no St. John’s College da Universidade de Cambridge em 1709, nesse período já havia escrito seu primeiro artigo importante, embora não publicado antes de 1714 segundo O’Connor e Robertson [8]. Foi membro da Royal Society, chegando a ser secretário no ano de 1714, porém renunciou aos 34 anos de idade a fim de dedicar mais tempo para escrever, conforme Eves [3].

O’Connor e Robertson [8] relatam que o período durante o qual Taylor foi secretário da Royal Society marca o que deve ser considerado seu tempo mais matematicamente produtivo. Nesse intervalo de tempo, dois livros foram publicados, em 1715 o *Methodus Incrementorum Directa et Inversa* e em 1719 o *Linear Perspective*, que são de extrema importância na História da Matemática. No *Linear Perspective*, Boyer [2] cita que Taylor deu o primeiro enunciado geral do princípio dos pontos de desaparecimento. Contudo, seu nome atualmente é quase exclusivamente lembrado por sua ligação com a série

$$f(x+a) = f(a) + f'(a)x + f''(a)\frac{x^2}{2!} + f'''(a)\frac{x^3}{3!} + \cdots + f^{(n)}(a)\frac{x^n}{n!} + \cdots ,$$

contida em seu livro *Methodus Incrementorum Directa et Inversa*. Essa série, segundo Eves [3], foi aplicada por Taylor em 1717 na solução aproximada de equações. Porém, não teve o reconhecimento pleno da sua importância até 1755, quando Euler a aplicou ao seu cálculo diferencial e ficou um pouco mais conhecida, no momento em que Lagrange usou a série com um resto como base de sua teoria das funções.

De acordo com Boyer [2] o *Methodus Incrementorum* continha também várias outras partes familiares do cálculo, que não foram reconhecidas como relevantes na época. São elas: fórmulas relacionando a derivada de uma função com a derivada da função inversa, soluções singulares de equações diferenciais e uma tentativa de achar uma equação para a corda vibrante. Esse último provavelmente difundida através da paixão de Taylor pela música.

O’Connor e Robertson [8] escreveram que um estudo da vida e obra de Brook Taylor revelou que sua contribuição para o desenvolvimento da matemática foi substancialmente maior do que o apego de seu nome a um teorema. Embora breve e complicado de acompanhar, seu trabalho abordou um número surpreendente de conceitos importantes, que foram inicialmente desenvolvidos, entretanto Taylor não conseguiu leva-los mais adiante. O’Connor e Robertson [8] acrescentam que é lamentável que a saúde, as preocupações familiares e a tristeza, além de outros fatores intransponíveis, incluindo o domínio dos pais, restringiram a parte matematicamente produtiva de sua curta vida.

Taylor morreu em 1731, em Somerset House na cidade de Londres capital da Inglaterra.

1.3 Taylor x Bernoulli

Mesmo que entre os séculos XVII e XVIII as discussões sobre séries infinitas estivessem em alta, possibilitando a Taylor consultar diversas fontes para o desenvolvimento de seus trabalhos, historiadores apontam que ele foi o primeiro a publicar explicitamente e de forma geral a série de Taylor, no seu livro *Methodus*. Entretanto ocorreu uma controvérsia, da série de Taylor ser ou não um plágio da série

$$\int ydx = yx - \frac{x^2}{2!} \frac{dy}{dx} + \frac{x^3}{3!} \frac{d^2y}{dx^2} - \dots$$

do matemático suíço Johann Bernoulli no ano de 1694. De acordo com Jones [6], o alemão Alfred Pringsheim (1850-1941), mostrou que é possível derivar a série de Taylor da série de Bernoulli através de algumas mudanças de variáveis, além disso, a proposição XI do Teorema IV do trabalho de Taylor, é diretamente equivalente à fórmula de integração de Bernoulli. Porém, não há indícios de que Taylor cometeu plágio, como também de Bernoulli ter utilizado a generalidade da série do inglês.

Jones [6], informa que Taylor e Bernoulli trocaram farpas em outro episódio através de debates nos jornais e cartas. Naquela ocasião, Taylor que de acordo com Boyer [2] era um entusiástico admirador de seu compatriota Newton, havia lançado um desafio para matemáticos não ingleses com um problema de integração. Bernoulli, ligado diretamente a Leibniz, apontou que o alemão havia resolvido esse desafio na revista científica alemã *Acta Eruditorum*. Além de frases acaloradas nos debates entre Bernoulli e Taylor, Jones [6] conta que rendeu até uma aposta de cinquenta guinéus (moeda em circulação na época).

1.4 Fórmula de Maclaurin

Assim como Taylor, outro nome que segundo Eves [3] é bastante familiar a todos os que já cursaram, ou cursam, o cálculo básico da graduação, por conta da sua fórmula de expansão de funções em séries de potências, é o escocês Colin Maclaurin (Fig. 1.2).

Considerado um dos mais importantes matemáticos britânicos da geração depois de Newton, Maclaurin nasceu em 1698 na Escócia e com onze anos de idade entrou na Universidade de Glasgow. Quatro anos mais tarde graduou-se defendendo publicamente uma tese sobre a gravidade. Aos dezenove anos tornou-se professor no Marischal College de Aberdeen. Boyer [2] diz que depois de 1719, quando Taylor abandonou a pesquisa matemática, o jovem Maclaurin estava apenas começando sua fecunda carreira. Desse modo, antes dos vinte e um anos, Maclaurin começou a contribuir com artigos no *Philosophical Transactions*, vindo a publicar em 1720 dois tratados sobre curvas, *Geometrica Organica* e *De Linearum Geometricarum Proprietatibus*. Em 1725 tornou-se professor assistente de matemática da Universidade de Edimburgo e tempo depois transformou-se o professor titular da cátedra. Ele faleceu no ano de 1746 em Edimburgo, na Escócia.

Figura 1.2: Colin Maclaurin



Fonte: O'Connor e Robertson [9]

O'Connor e Robertson [9] citam que Maclaurin atualmente é lembrado pela Fórmula da Soma de Euler-Maclaurin, pelo Teste Integral da Convergência Maclaurin-Cauchy, descoberto por ele 50 anos antes de Cauchy nascer, além de ter sido o primeiro a descobrir o paradoxo de Cramer na interseção das curvas. Mas, apesar dessas contribuições notáveis, seu nome ficou marcado pela conexão com uma série publicada no seu trabalho sobre a teoria dos fluxos, quando Maclaurin tinha 44 anos de idade. Eves [3] cita que Maclaurin escreveu nessa publicação a primeira exposição lógica e sistemática do método dos fluxos de Newton como uma réplica aos ataques feitos pelo bispo George Berkeley (1685- 1753), aos princípios do cálculo. Tal trabalho, publicado em 1742 intitulado de *Treatise of Fluxions*, contém a chamada série de Maclaurin, que nada mais é senão um caso particular da Série de Taylor para $a = 0$,

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2!} + f'''(0)\frac{x^3}{3!} + \cdots + f^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!} + \cdots .$$

Diferente de outros trabalhos já citados, O'Connor e Robertson [9] informam que a série de Maclaurin não foi uma ideia descoberta independentemente do resultado mais geral de Taylor, pois Maclaurin reconhece a contribuição de Taylor e do jacobita James Stirling (1692-1770). Esse último, publicou explicitamente essa série em 1730 no seu *Methodus Differentialis*, que contia também contribuições significativas ao estudo da convergência de séries infinitas, interpolação e funções especiais definidas por séries. Entretanto, ele é mais conhecido pela fórmula aproximada para $n!$, conta Boyer [2].

Capítulo 2

Fundamentos

Neste capítulo apresentamos uma breve revisão das principais definições e resultados do Cálculo que julgamos importantes para o estudo da teoria envolvida na Fórmula de Taylor e suas aplicações. Os conceitos preliminares contidos aqui são: funções, continuidade e limite de funções, derivadas de funções e os Teoremas de Rolle, do Valor Médio e de Cauchy. Eles podem ser encontrados em qualquer livro de Cálculo, porém neste capítulo utilizamos como referências os livros de Apostol [1], Flemming e Gonçalves [4], Guidorizzi [5], Lima [7], e Simmons [10]. Inicialmente apresentaremos as principais funções abordadas em um curso de cálculo.

2.1 Funções

Uma função f é uma terna $(A, B, a \rightarrow b)$, em que A e B são dois conjuntos e $a \rightarrow b$, uma regra que nos permite associar a cada elemento $a \in A$ a um único $b \in B$. O conjunto A chamado de o domínio de f indicado por D_f , logo $A = D_f$, já o conjunto B é denominado contradomínio de f .

A notação $f(a)$ (lê-se “ f de a ”) é utilizada para indicar o único elemento b do contradomínio B que está associado ao elemento $a \in D_f$. Diremos que $f(a)$ é o valor que f assume em a ou então o valor que a função f associa ao elemento a .

Utilizamos a notação $f : A \rightarrow B$ (lê-se “ f de A em B ”) para indicar uma função f de domínio A e contradomínio B . Logo, uma função de uma variável real a valores reais é uma função de variável real $f : A \rightarrow B$, em que A e B são subconjuntos de $\mathbb{R}$.

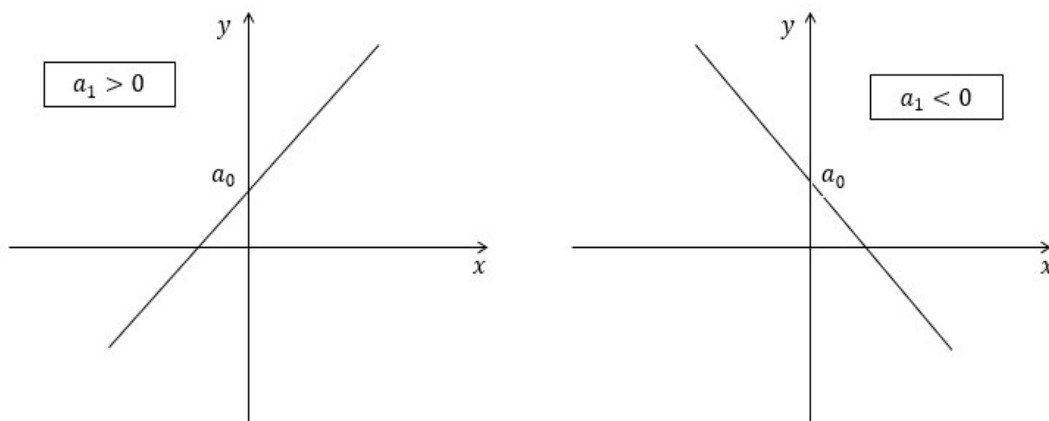
2.1.1 Funções polinomiais

Uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$ onde $a_n \neq 0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$ são números reais fixos, denomina-se função polinomial de grau n ($n \in \mathbb{N}$).

Como podemos observar a função polinomial consiste em um somatório finito de termos, compostos pelo produto dos coeficientes angulares $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ que devem ser diferentes de zero com a variável de f elevada a um número natural. Desta forma, para calcularmos o valor de uma função polinomial basta apenas realizarmos operações aritméticas básicas, principalmente a adição e a multiplicação usuais em $\mathbb{R}$. Vejamos alguns exemplos a seguir:

Exemplo 2.1.1 (Função afim.) Uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = a_0 + a_1x$, $a_1 \neq 0$, a_0 e a_1 constantes reais, é uma função polinomial do primeiro grau. Seu gráfico é uma reta não paralela aos eixos coordenados que passa pelo ponto $(0, a_0)$. A função polinomial do primeiro grau é crescente se $a_1 > 0$ e decrescente se $a_1 < 0$. (Fig. 2.1). Quando $a_0 = 0$ teremos um caso especial dessa função (função linear).

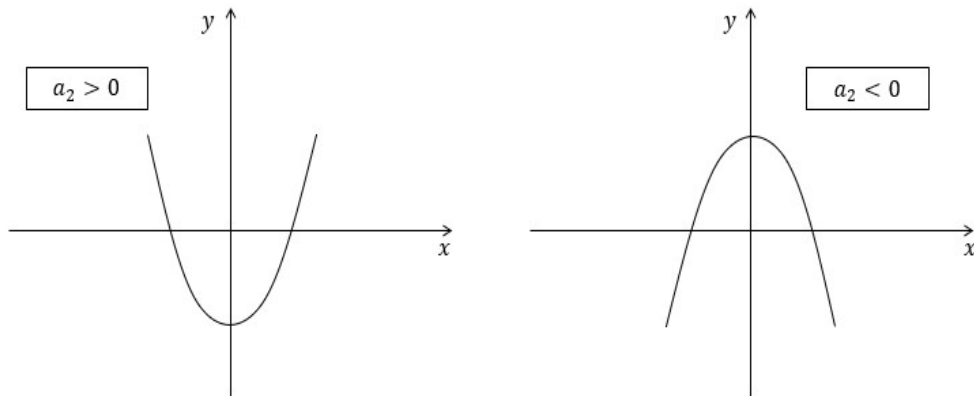
Figura 2.1: Gráfico da função afim



Fonte: Arquivo pessoal

Exemplo 2.1.2 (Função quadrática.) Uma função polinomial do segundo grau é uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$, onde a_0, a_1, a_2 são constantes reais, com $a_2 \neq 0$. Seu gráfico é representado por uma parábola com eixo vertical que se abre para cima ou para baixo de acordo com o sinal apresentado pela constante a_2 , conforme a constante $a_2 > 0$ ou $a_2 < 0$ (Fig. 2.2).

Figura 2.2: Gráfico da função quadrática



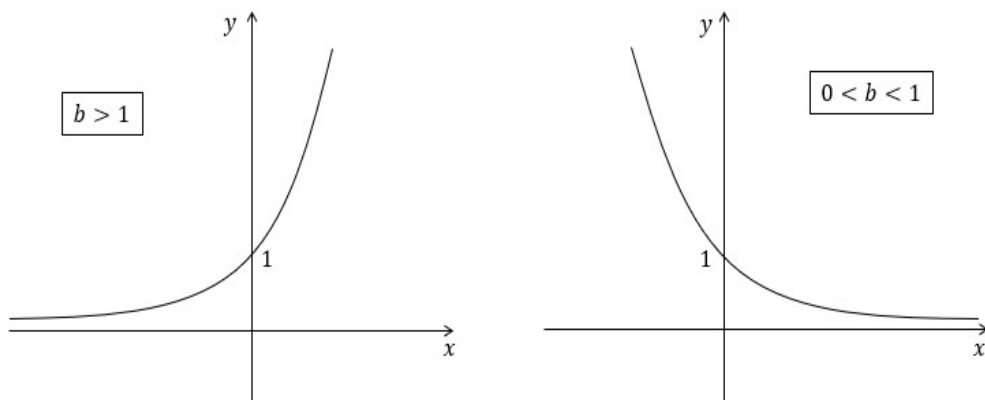
Fonte: Arquivo pessoal

2.1.2 Outras funções elementares

Nesta seção veremos outros exemplos de funções elementares que aparecem cotidianamente no ensino do Cálculo. O conhecimento dessas funções é importante para o nosso estudo, pois iremos aplicar a Fórmula de Taylor para calcular os valores dessas funções em volta de determinados pontos em que a utilização de métodos convencionais são complicados ou insuficientes para calcular tais valores. Assim, apresentaremos alguns exemplos das principais funções transcendentais que são exponenciais, logarítmicas e trigonométricas.

Exemplo 2.1.3 (Função exponencial.) Uma função exponencial de base b é uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = b^x$, sendo b uma constante real, onde $0 < b \neq 1$. Seu gráfico (Fig. 2.3) é representado por uma curva que intercepta o eixo Oy no ponto $(0, 1)$ e está acima do eixo Ox , pois $f(x) = b^x > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. A função exponencial é crescente se $b > 1$ e decrescente se $0 < b < 1$.

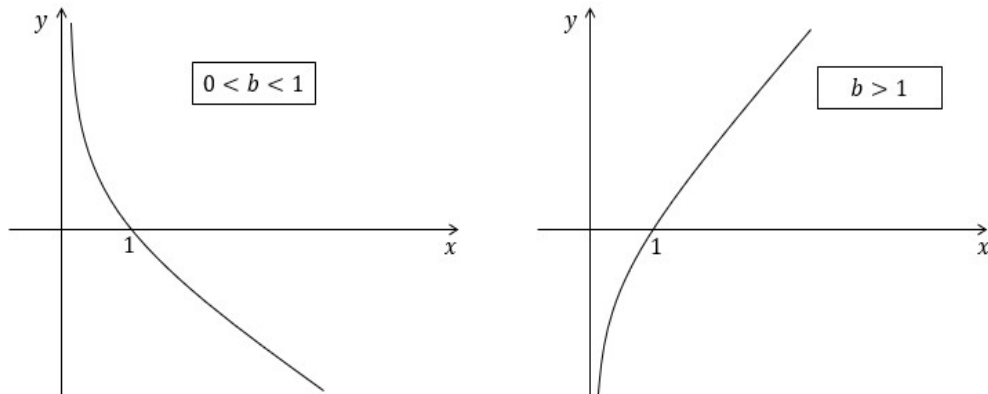
Figura 2.3: Gráfico da função exponencial



Fonte: Arquivo pessoal

Exemplo 2.1.4 (Função logarítmica.) Uma função logarítmica de base b é uma função $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \log_b x$, sendo b uma constante real, onde $0 < b \neq 1$. Seu gráfico (Fig. 2.4) é representado por uma curva que corta o eixo Ox no ponto $(1, 0)$ e está à direita do eixo Oy , pois o domínio da função logarítmica são os números reais positivos, isto é, $x > 0$. A função logarítmica é crescente se $b > 1$ e decrescente se $0 < b < 1$.

Figura 2.4: Gráfico da função logarítmica

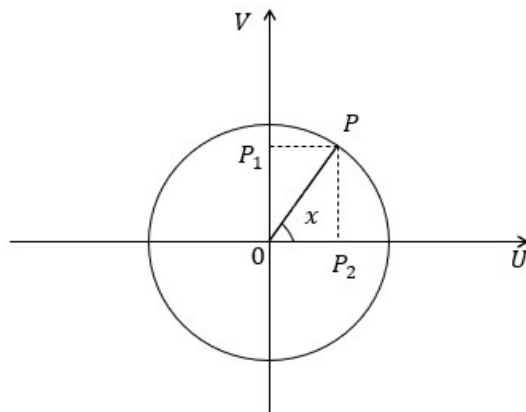


Fonte: Arquivo pessoal

A função logarítmica $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \log_b x$ e a função exponencial $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ definida por $g(x) = b^x$; $0 < b \neq 1$, são funções inversas uma da outra. Ao compor f e g obtemos a função identidade, pois ela é a função resultante da composição de duas funções inversas.

Exemplo 2.1.5 (Função Seno.) Seja $x \in \mathbb{R}$. Marcamos um ângulo com medida x radianos na circunferência unitária com centro na origem (Fig. 2.5). Seja P o ponto de interseção do lado terminal do ângulo x , com essa circunferência.

Figura 2.5: Gráfico da função quadrática



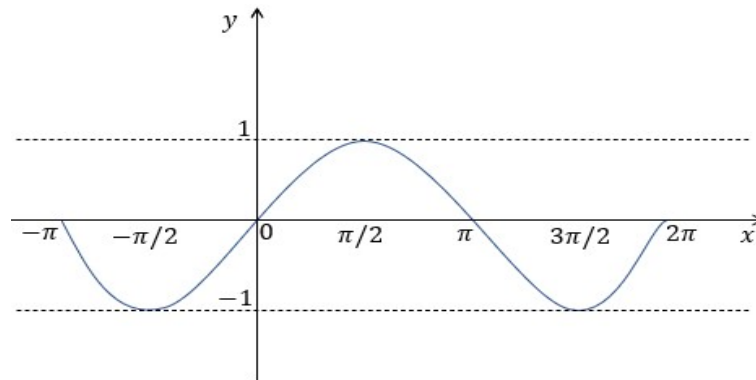
Fonte: Arquivo pessoal

Denominamos seno de x a ordenada $\overline{OP_1}$ do ponto P em relação ao sistema $U0V$.

Definimos a função seno como a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \text{sen}x$. O domínio dessa função são os números reais e o conjunto imagem é o intervalo $[-1, 1]$. Ela é uma função periódica com período 2π , já que $\text{sen}(x + 2\pi) = \text{sen}x$.

O gráfico da função seno (Fig. 2.6), chamado de senóide, é crescente em alguns intervalos e decrescente em outros. Por exemplo, nos intervalos $] -\pi/2, \pi/2[$ e $]3\pi/2, 2\pi[$ a função é crescente. Já nos intervalos $] -\pi, -\pi/2[$ e $] \pi/2, 3\pi/2[$ ela é decrescente.

Figura 2.6: Gráfico da função seno



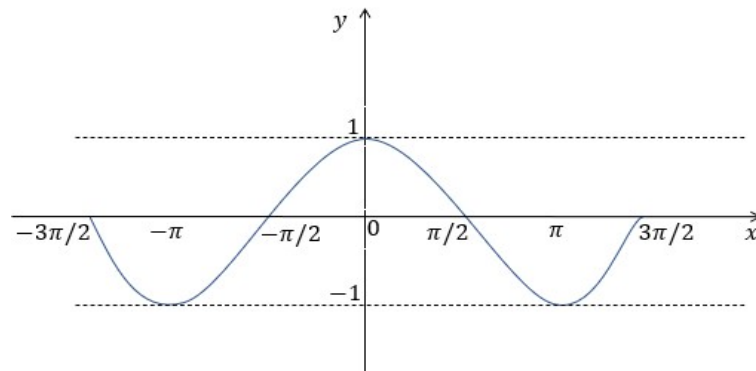
Fonte: Arquivo pessoal

Exemplo 2.1.6 (Função cosseno.) Denominamos cosseno de x , $x \in \mathbb{R}$, a abscissa $\overline{OP_2}$ do ponto P em relação ao sistema $U0V$ (Fig. 2.5).

Definimos a função cosseno como a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \text{cos}x$. O domínio da função cosseno são os números reais e o conjunto imagem é o intervalo $[-1, 1]$. Ela é uma função periódica com período 2π , já que $\text{cos}(x + 2\pi) = \text{cos}x$.

O gráfico da função cosseno (Fig. 2.7), denominado de cossenóide, é decrescente em alguns intervalos e em outros crescente. Por exemplo, nos intervalos $] -3\pi/2, -\pi[$ e $]0, \pi[$ a função é decrescente. Já nos intervalos $] -\pi, 0[$ e $] \pi, 3\pi/2[$ ela é crescente.

Figura 2.7: Gráfico da função cosseno



Fonte: Arquivo pessoal

2.1.3 Pontos mínimos, máximos e inflexão de uma função

Nesta seção, abordaremos os pontos de mínimos relativos, máximos relativos e de inflexão de uma função. Inicialmente apresentaremos as definições desses pontos conforme o livro de Guidorizzi [5] e em seguida mostraremos o seus comportamentos graficamente.

Uma função f tem um mínimo relativo em c , se existir um intervalo aberto $]a, b[$, contendo c , tal que $f(c) \leq f(x) \forall x \in]a, b[\cap D_f$.

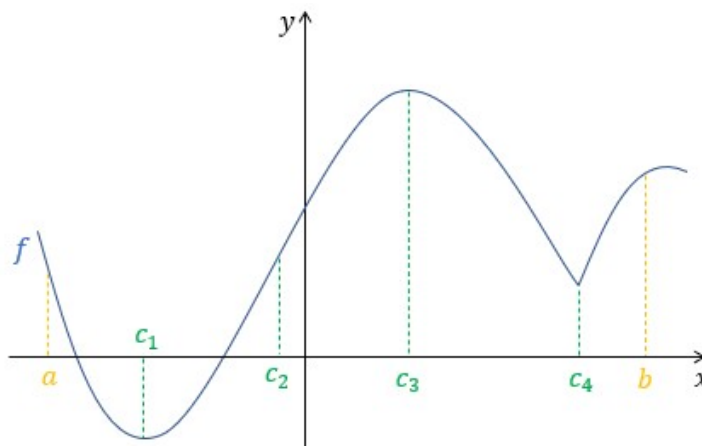
Uma função f tem um máximo relativo em c , se existir um intervalo aberto $]a, b[$, contendo c , tal que $f(c) \geq f(x) \forall x \in]a, b[\cap D_f$.

Um ponto $P(c, f(c))$ do gráfico de uma função contínua é chamado um ponto de inflexão, se existir um intervalo $]a, b[$ contendo c , tal que uma das seguintes situações ocorra:

- (i) f é côncava para cima em $]a, c[$ e côncava para baixo em $]c, b[$;
- (ii) f é côncava para baixo em $]a, c[$ e côncava para cima em $]c, b[$.

O Gráfico 2.8 nos mostra uma função f , onde assinalamos pontos de abscissas c_1 , c_2 , c_3 e c_4 contidas no intervalo $]a, b[$. Os valores de $f(c_1)$ e $f(c_4)$ são mínimos relativos, $f(c_3)$ é máximo relativo e o ponto de abscissa c_2 é de inflexão.

Figura 2.8: Gráfico de máximos relativos, mínimos relativos e de inflexão de uma função



Fonte: Arquivo pessoal

2.2 Continuidade e limite de funções

Apresentaremos, nesta seção, uma definição formal dos conceitos de continuidade e limite de funções, após cada definição analisaremos seus significados geométricos abordando algumas situações de existência desses conceitos e por fim traremos as principais propriedades e teoremas estudados em cada conceito.

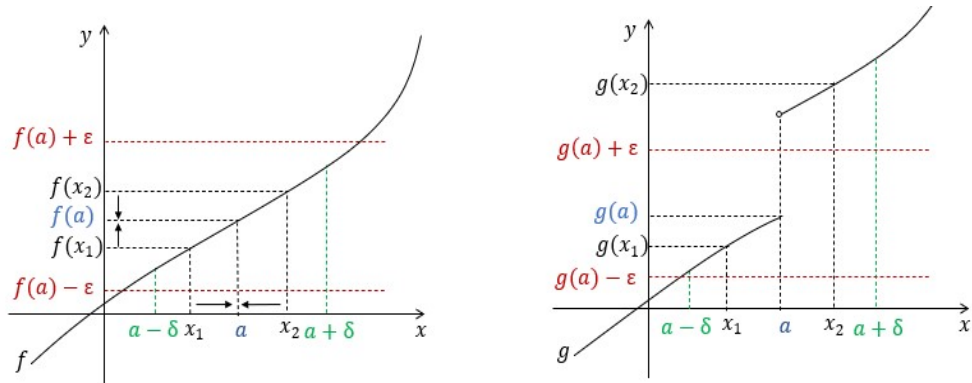
2.2.1 Continuidade de funções

Uma função real $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, definida no conjunto $X \subset \mathbb{R}$, diz-se contínua no ponto $a \in X$ quando para todo $\varepsilon > 0$ dado, existe $\delta > 0$ tal que, para todo $x \in D_f$ e $|x - a| < \delta$ impliquem $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Diz-se que f é uma função real contínua em X se f for contínua em todo $a \in X$, ou simplesmente f é uma função contínua.

Sejam f e g funções reais, cujo os gráficos estão na Fig. 2.9, e sejam a e x pontos pertencentes ao domínio dessas funções.

Figura 2.9: Gráficos de situações da continuidade de funções



Fonte: Arquivo pessoal

Observe na Fig. 2.9 que f e g se comportam de formas distintas em a . O gráfico de f não apresenta “salto” em a . Verifique que quando x aproxima-se de a , tanto pela direita quanto pela esquerda, os valores $f(x)$ se aproximam de $f(a)$. Nesse sentido, quanto mais próximo x estiver de a , mais próximo estará $f(x)$ de $f(a)$.

Logo, a função f aplicada na abscissa “ a ” satisfaz a condição de que para todo $\varepsilon > 0$ dado, existe $\delta > 0$, que depende de ε , tal que $f(x)$ permanece entre $f(a) - \varepsilon$ e $f(a) + \varepsilon$ quando x percorre o intervalo $]a - \delta, a + \delta[$, com x no domínio de f , ou seja, para todo $\varepsilon > 0$ dado, existe $\delta > 0$, que depende de ε , tal que, para todo $x \in D_f$, $a - \delta < x < a + \delta \Rightarrow f(a) - \varepsilon < f(x) < f(a) + \varepsilon$ ou $|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Portanto, pela definição de função contínua apresentada, quando isso ocorre dizemos que f é uma função contínua em a .

Entretanto, observem que o mesmo não ocorre com a função g em a . O gráfico de g apresenta “salto” em a . Assim, para $\varepsilon > 0$ dado, não existe $\delta > 0$ que torne verdadeira a afirmação de que para todo $x \in D_f$, $|x - a| < \delta \Rightarrow |g(x) - g(a)| < \varepsilon$, pois para qualquer $\delta > 0$ que se tome, quando x percorre o intervalo $]a - \delta, a + \delta[$, $g(x)$ não permanece entre $g(a) - \varepsilon$ e $g(a) + \varepsilon$. Nesse caso, dizemos que g é uma função descontínua no ponto a .

Exemplo 2.2.1 Vejamos alguns exemplo de função contínua. Uma função polinomial $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é continua para todo número real. As funções $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definidas

por $f(x) = \operatorname{sen} x$ e $f(x) = \operatorname{cos} x$ são contínuas para todo $x \in \mathbb{R}$. A função exponencial $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$ é contínua em todo $x \in \mathbb{R}$.

Vamos trazer algumas propriedades operatórias importantes das funções contínuas. As demonstrações de tais propriedades podem ser consultadas em Guidorizzi [5].

Se as funções $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ são contínuas no ponto $a \in X$, então

- (i) $f + g$ é contínua em a ;
- (ii) $f - g$ é contínua em a ;
- (iii) $f \cdot g$ é contínua em a ;
- (iv) f/g é contínua em a , desde que $g(a) \neq 0$.
- (v) $f \circ g$ é contínua em a , caso f seja contínua em $g(a)$.

No estudo da continuidade de funções definidas em intervalos é importante comentar sobre seus principais resultados, que serão apresentados à seguir:

- a) Se f é uma função contínua em c e $f(c) \neq 0$, então existe $\delta > 0$ tal que f tem o mesmo sinal de $f(c)$ no intervalo $(c - \delta, c + \delta)$. Essa propriedade das funções contínuas é chamada de conservação do sinal. Assim, se f contínua em c e $f(c) > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $c - \delta < x < c + \delta \Rightarrow f > 0$. De maneira análoga, se f contínua em c e $f(c) < 0$, então existe $\delta > 0$ tal que $c - \delta < x < c + \delta \Rightarrow f < 0$.
- b) Se a função $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ for contínua e $f(a)$ e $f(b)$ tiverem sinais contrários, então existirá pelo menos um c em $[a, b]$ tal que $f(c) = 0$. Tal resultado é conhecido como teorema do anulamento ou de Bolzano. Ele afirma que se uma função contínua num intervalo fechado de extremidades a e b assume valores de sinais opostos, então em algum momento o valor será nulo dentro deste intervalo, ou seja, existirá um c entre a e b em que $f(c) = 0$.
- c) Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ for uma função contínua e D um número real entre $f(a)$ e $f(b)$, então existirá pelo menos um c em $[a, b]$ tal que $f(c) = D$. Esse resultado é uma consequência imediata do teorema de Bolzano, nomeado de teorema do valor intermediário. Ele nos diz que todos os valores compreendidos entre $f(a)$ e $f(b)$ serão atingidos pelo menos uma vez no intervalo $[a, b]$.
- d) Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ for contínua, então existirão x_1 e x_2 em $[a, b]$ tais que $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$ para todo x em $[a, b]$. Isto é, se f for contínua no intervalo fechado $[a, b]$, então existe x_1 e x_2 em $[a, b]$ tais que $f(x_1)$ é o valor mínimo e $f(x_2)$ é o valor máximo de f em $[a, b]$. Esse resultado é reconhecido por Teorema de Weierstrass para valores extremos de funções contínuas.

Para mais detalhes das propriedades, exemplos e teoremas comentados nesta seção podem ser consultadas nos livros de Apostol [1] e Guidorizzi [5].

2.2.2 Limite de funções

Sejam $X \subset \mathbb{R}$, $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ uma função real e $a \in D_f$ ou um ponto de extremidade do domínio de f . Dizemos que f tem limite L , em a , se, para todo $\varepsilon > 0$ dado, existir um $\delta > 0$ tal que, sempre que $x \in D_f$ e $0 < |x - a| < \delta$, teremos $|f(x) - L| < \varepsilon$. O número L quando existe é único e será indicado por $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$.

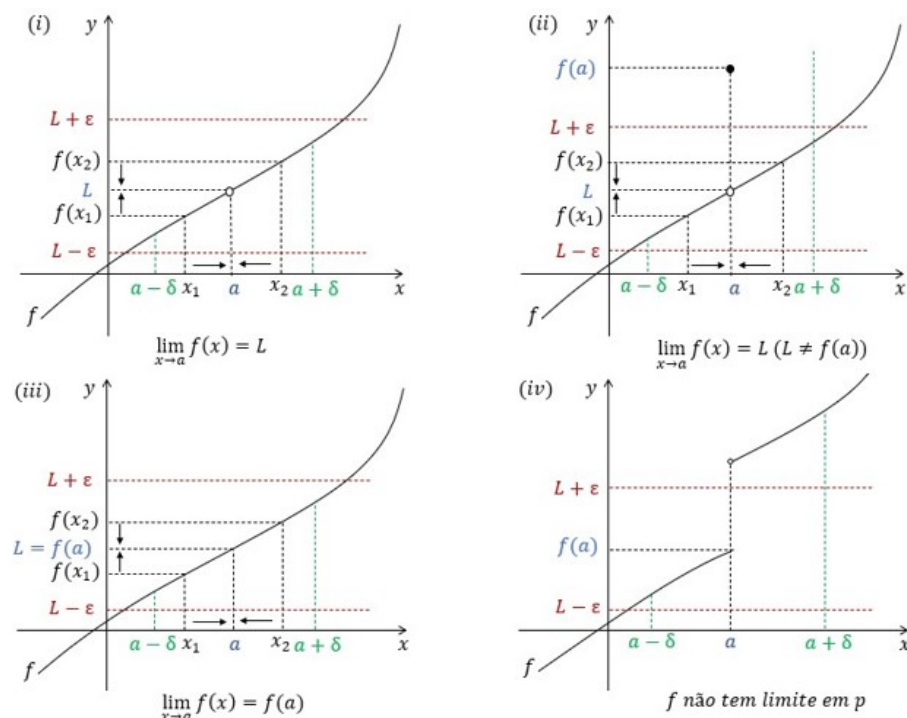
Assim,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0; \forall x \in D_f, 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Observe que a restrição $0 < |x - a|$ significa que x tem que ser diferente de a . O limite de f em a não depende do valor que f assume em a (caso f esteja definida em a), mas sim dos valores que f assume nos pontos próximos de a . Quando estivermos interessados no limite L de f em a , basta olharmos para valores que $f(x)$ assume em x suficientemente próximo de a .

Sejam f uma função real e a um ponto do D_f ou extremidade de um dos intervalos que compõem o domínio de f . Vejamos algumas situações de existência do limite de funções na Fig.2.10.

Figura 2.10: Gráficos de situações da existência do limite de funções



Fonte: Arquivo pessoal

Na situação (i), f não está definida em a , porém existe L que satisfaz a condição de existência do limite.

Em (ii), f está definida em a , mas não é contínua em a , entretanto existe L satisfazendo a condição da existência do limite. Observem que neste caso é fundamental $x \neq a$, se não houvesse essa restrição $f(x)$ não permaneceria no intervalo $]L - \varepsilon, L + \varepsilon[$ quando x percorre o intervalo $]a - \delta, a + \delta[$.

Já na situação (iii), f é contínua em a , assim $L = f(a)$ e também satisfaz a propriedade da existência do limite. Logo, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Por fim, na situação (iv), não existe L que satisfaça a propriedade da existência de limite no ponto a . Portanto, diz-se neste caso que f não tem limite em a .

Ao compararmos as definições de limites e continuidade de uma função $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ definida em um ponto $a \in X$, teremos que f é contínua em $a \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Vejamos algumas propriedades do limite de funções.

Sejam as funções $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in D_f$ ou um ponto de extremidade de um intervalo que compõe D_f e k uma constante real qualquer. Se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ e $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$, então

$$(i) \lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm g(x)] = L \pm M;$$

$$(ii) \lim_{x \rightarrow a} kf(x) = kL;$$

$$(iii) \lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = L \cdot M;$$

$$(iv) \lim_{x \rightarrow a} [f(x)/g(x)] = L/M, \text{ desde que } M \neq 0;$$

$$(v) \lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^n = L^n, \text{ para qualquer inteiro positivo } n;$$

$$(vi) \lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L}, \text{ se } \lim_{x \rightarrow a} f(x) > 0 \text{ e } n \text{ inteiro ou se } \lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq 0 \text{ e } n \text{ é um inteiro positivo ímpar.}$$

Para os interessados nas demonstrações dessas propriedades, podem encontrá-las nos livros de Apostol [1] e Guidorizzi [5].

Exemplo 2.2.2 Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função polinomial, tem-se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$, para qualquer $a \in \mathbb{R}$.

Exemplo 2.2.3 Sejam as funções $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definidas por $f(x) = \sin x$ e $g(x) = \cos x$. Temos para todo $a \in \mathbb{R}$ que

$$\lim_{x \rightarrow a} \sin x = \sin[\lim_{x \rightarrow a} x] = \sin a \quad e \quad \lim_{x \rightarrow a} \cos x = \cos[\lim_{x \rightarrow a} x] = \cos a.$$

Exemplo 2.2.4 Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a função exponencial, $f(x) = e^x$ temos para todo número real que, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = e^x = e^{\lim_{x \rightarrow a} x} = e^a$.

Um teorema bastante útil quando não sabemos o limite de uma função ou não conseguimos determiná-lo facilmente é o teorema do Confronto ou Sanduíche como é mais conhecido. Nesse teorema, se os valores de uma função h estiverem limitados entre os valores de outras duas funções f e g , com $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$, para todo $x \neq a \in X$ e $a \in X$ ou um ponto de extremidade de um intervalo que compõe o domínio de f , então o $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = L$. Assim, podemos obter o valor do limite de h indiretamente aplicando o teorema do Confronto, pois os valores de h estão “espremidos” entre os valores de f e g .

Para mais especificidades desse teorema e sua prova verificar as obras de Flemming e Gonçalves [4] ou Guidorizzi [5].

2.3 Derivadas

Iniciaremos essa seção com uma interpretação geométrica do conceito de derivada de uma função, na sequência apresentaremos uma definição rigorosa e suas principais regras de derivação.

Sejam $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ uma função real e $a \in D_f$. Podemos dizer que uma das noções mais importantes da Matemática é o limite

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

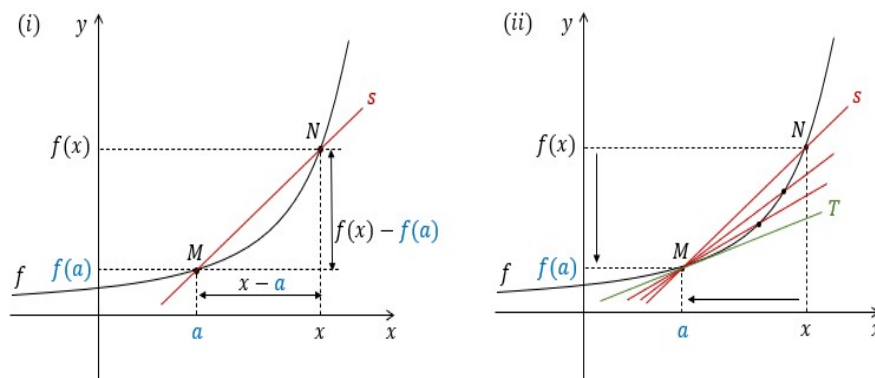
Este limite aparece de forma natural quando queremos definir a reta tangente ao gráfico de f no ponto $(a, f(a))$.

O quociente

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

é o coeficiente angular da reta s que passa pelos pontos $M = (a, f(a))$ e $N = (x, f(x))$ do gráfico de $f(x)$, conforme (i) da Fig. 2.11.

Figura 2.11: Gráficos do significado geométrico da derivada de uma função



Fonte: Arquivo pessoal

Observe em (ii) ainda na Fig. 2.11 que quando x se aproxima de a o valor de $f(x)$ vai se aproximando do valor de $f(a)$, tornando o ponto N cada vez mais próximo de M . Além disso, o coeficiente angular de s tende a $f'(a)$ (lê-se f linha de a), onde $f'(a)$ é uma notação utilizada para indicar o valor do limite

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Nesse sentido, à medida que x vai se aproximando de a , a reta s vai tendendo para a posição da reta T de equação

$$f(x) - f(a) = f'(a)(x - a).$$

Logo, a reta T é denominada reta tangente ao gráfico de f , no ponto $(a, f(a))$ e $f'(a)$ é o coeficiente angular de T .

Depois dessa interpretação geométrica podemos então definir o que é a derivada de uma função.

Sejam $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ uma função real e $a \in D_f$. A derivada da função f no ponto a indicada por $f'(a)$ é o limite

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Este limite pode ou não existir. Caso exista e for real, dizemos que f é derivável no ponto a . Assim, a derivada da função f no ponto a é o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de f , no ponto $(a, f(a))$.

Dizemos que f é uma função derivável ou diferenciável em $X \subset D_f$ quando f for derivável em cada ponto $a \in X$. Além disso, obtemos uma nova função nomeada de função derivada de f , denotada por f' , que associa todo ponto $x \in D_{f'}$ a uma imagem $f'(x) \in \mathbb{R}$.

Uma função pode ser contínua em um ponto sem ser derivável neste ponto.

Exemplo 2.3.1 A função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = |x|$, não é derivável em $a = 0$, pois nesse ponto o gráfico dessa função apresenta um “bico”. Logo significa que a reta tangente a função $f(x) = |x|$ não está definida no ponto $a = 0$, entretanto ela é uma função contínua nesse ponto.

Assim, continuidade não implica em diferenciabilidade, no entanto derivabilidade implica em continuidade. Logo, se a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ for derivável em a , então f será contínua em a . A demonstração desse fato pode ser verificada em Fleming e Gonçalves [4].

Vejamos alguns exemplos das principais regras de derivação que são importantes para o estudos de derivadas de funções e especificamente para o nosso estudo, pois iremos aplicar

essas regras para obter o polinômio da Fórmula de Taylor. Tais regras nos permitem determinar as derivadas das funções sem a necessidade de aplicar a definição de derivada.

Exemplo 2.3.2 (Derivada de uma constante.) Se k é uma constante real e $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ uma função derivável em $a \in D_f$, definida por $f(a) = k$ para todo a , então $f'(a) = 0$.

Exemplo 2.3.3 (Regra da potência.) Se n é um número inteiro positivo e $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ uma função derivável em $a \in D_f$, definida por $f(a) = a^n$, então $f'(a) = n \cdot a^{n-1}$.

Exemplo 2.3.4 (Derivada da função exponencial.) Se $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ uma função derivável, definida por $f(x) = b^x$, ($b > 0$ e $b \neq 1$) então $f'(x) = b^x \ln b$ ($b > 0$ e $b \neq 1$).

Exemplo 2.3.5 (Derivada da função logarítmica.) Se $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ uma função derivável, definida por $f(x) = \log_b x$, ($b > 0$ e $b \neq 1$) então $f'(x) = \frac{1}{x} \log_b$, ($b > 0$ e $b \neq 1$).

Exemplo 2.3.6 Para as funções trigonométricas são válidas as fórmulas de derivação:

- a) se $f(x) = \operatorname{sen} x$, então $f'(x) = \operatorname{cos} x$ (Derivada da função seno.);
- b) se $f(x) = \operatorname{cos} x$, então $f'(x) = -\operatorname{sen} x$ (Derivada da função cosseno.);
- c) se $f(x) = \operatorname{tg} x$, então $f'(x) = \operatorname{sec}^2 x$ (Derivada da função tangente.);

Exemplo 2.3.7 Vejamos as propriedades operacionais das derivadas de funções. Se $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ forem deriváveis no ponto $a \in D_f$ e k uma constante real. Então as funções $k \cdot f$, $f \pm g$, $f \cdot g$, f/g também serão deriváveis no ponto a , com:

- (i) $(k \cdot f)'(a) = k \cdot f'(a)$ (Derivada do produto de uma constante por uma função.);
- (ii) $(f \pm g)'(a) = f'(a) \pm g'(a)$ (Derivada de uma soma / Derivada de uma diferença.);
- (iii) $(f \cdot g)'(a) = f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a)$ (Derivada de um produto.);
- (iv) $(f/g)'(a) = \frac{f'(a) \cdot g(a) - f(a) \cdot g'(a)}{[g(a)]^2}$ (Derivada de um quociente.).

A seguir apresentamos um teorema interessante em derivadas denominado “regra da cadeia”. Nesse teorema, a função composta $y = g[f(x)]$ pode ser derivada, decompondo-a em funções mais simples $y = g(u)$ e $u = f(x)$. Daí, usando as derivadas hipoteticamente mais simples dessas funções determinar a derivada da função composta.

Teorema 2.3.8 (Regra da cadeia.) Sejam $y = g(u)$ e $u = f(x)$ duas funções deriváveis, isto é, as derivadas dy/du e du/dx existem, então a função composta $y = g[f(x)]$ tem derivada que é dada por:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \quad \text{ou} \quad y'(x) = g'(u) \cdot f'(x).$$

A demonstração desse teorema pode ser consultada em Flemming e Gonçalves [4] ou em Lima [7].

As demais demonstrações dos exemplos, como também as outras regras de derivação que não estão contidas nesta seção podem ser consultadas nos trabalhos de Flemming e Gonçalves [4], Guidorizzi[5], Lima [7] e Simmons [10]. Para os leitores mais curiosos, Flemming e Gonçalves [4] ainda traz na página 158 uma tabela geral de derivadas contendo um conjunto de todas as fórmulas de derivação obtidas.

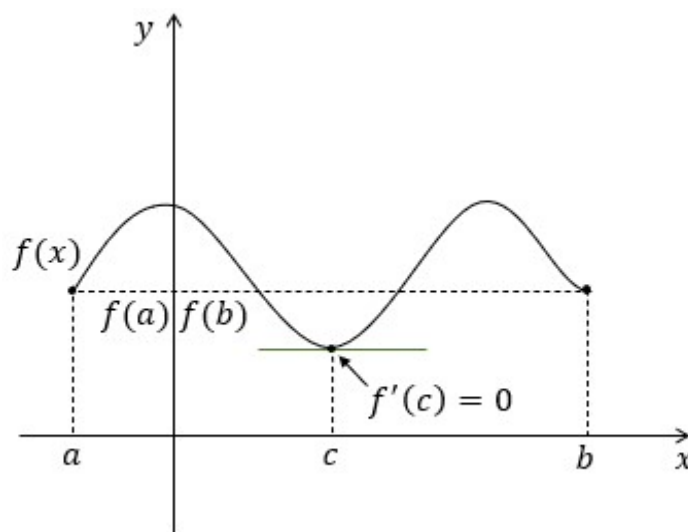
2.4 Teoremas de Rolle, do Valor Médio e de Cauchy

Nesta seção, enunciaremos e faremos as interpretações geométricas de três teoremas aplicáveis as funções deriváveis. Esses teoremas são: de Rolle, do Valor Médio e de Cauchy. As demonstrações dos teoremas enunciados nesta seção podem ser consultadas em Apostol [1]. Iniciaremos analisando o Teorema de Rolle.

Teorema 2.4.1 (de Rolle.) Se f for uma função contínua em todos os pontos de um intervalo fechado $[a, b]$, derivável em cada ponto do intervalo aberto $]a, b[$ e $f(a) = f(b)$, então existe pelo menos um c em $]a, b[$ tal que $f'(c) = 0$.

O significado geométrico do Teorema de Rolle está representado na figura 2.12. O teorema simplesmente afirma que a curva da função $f(x)$ admite pelo menos uma reta tangente paralela ao eixo Ox em algum ponto entre a e b .

Figura 2.12: Gráfico da interpretação geométrica do teorema de Rolle



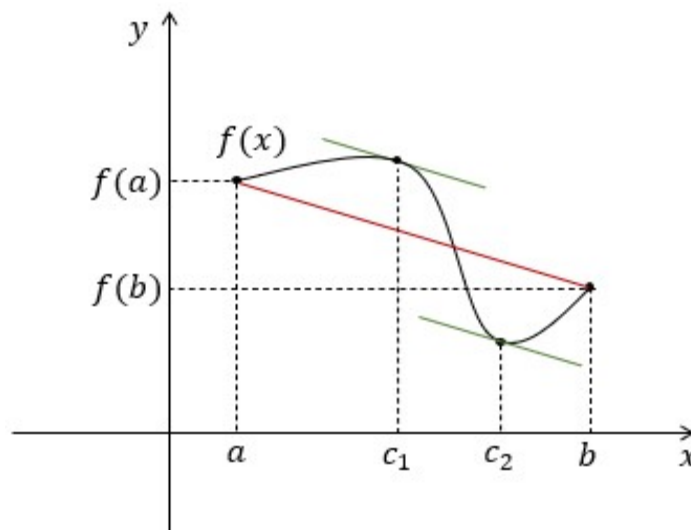
Fonte: Arquivo pessoal

Teorema 2.4.2 (do Valor Médio.) Se f é uma função contínua no intervalo fechado $[a, b]$, tendo derivada em todo o ponto do intervalo aberto $]a, b[$, então existe pelo menos um c em $]a, b[$ tal que

$$f(a) - f(b) = f'(c)(b - a).$$

Geometricamente, o Teorema do Valor Médio determina que existe pelo menos um ponto entre a e b onde a reta tangente à curva da função $f(x)$ é paralela à corda que une os pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$. Na figura 2.13 observe que existem dois pontos com esta propriedade.

Figura 2.13: Gráfico da interpretação geométrica do teorema do Valor Médio



Fonte: Arquivo pessoal

Teorema 2.4.3 (de Cauchy.) Se f e g forem duas funções contínuas no intervalo fechado $[a, b]$ e deriváveis no intervalo aberto $]a, b[$, então existe pelo menos um c em $]a, b[$ tal que

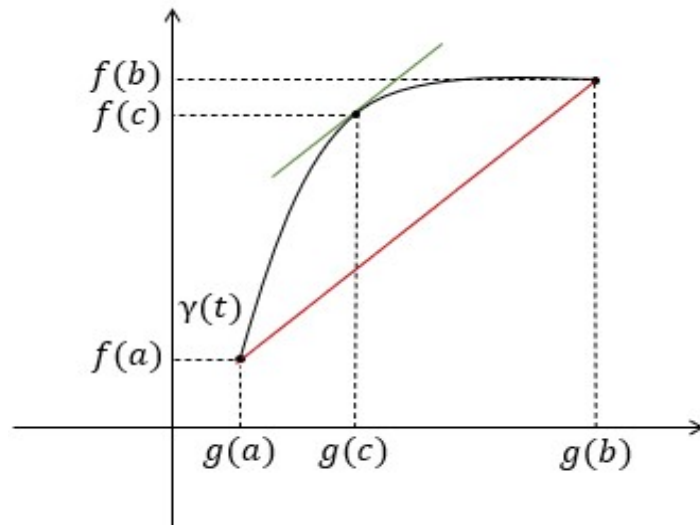
$$g'(c)[f(b) - f(a)] = f'(c)[g(b) - g(a)]$$

ou

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}, \quad \text{se } g(b) \neq g(a) \text{ e } g'(c) \neq 0.$$

Para compreendermos a interpretação geométrica desse teorema precisamos definir uma curva em $\mathbb{R}^2$ cuja função é definida por $\gamma(t) = (g(t), f(t))$, ou seja, a cada t pertencente a um intervalo $[a, b]$ associa um ponto $(g(t), f(t))$ em $\mathbb{R}^2$, em que f e g são funções reais definidas em $[a, b]$. Assim, o Teorema de Cauchy estabelece que, se f e g forem duas funções contínuas em $[a, b]$ e deriváveis em $]a, b[$, então existe pelo menos um ponto entre $g(a)$ e $g(b)$ em que a reta tangente à curva da função $\gamma(t)$ é paralela ao segmento de reta que une os pontos $(g(a), f(a))$ e $(g(b), f(b))$ (Fig. 2.14). Teorema do Valor Médio é um caso particular do Teorema de Cauchy para $g(x) = x$.

Figura 2.14: Gráfico da interpretação geométrica do teorema de Cauchy



Fonte: Arquivo pessoal

O Teorema de Cauchy será aplicado nas demonstrações dos Teoremas 3.2.1, 3.3.1 e 3.4.1 do erro cometido na aproximação de funções pela Fórmula de Taylor contidos no Capítulo 3.

Capítulo 3

Fórmula de Taylor e Aplicações de Derivadas

Tendo em vista que a utilização de métodos tradicionais são complicados ou até mesmo insuficientes para determinar o valor de funções como as trigonométricas, exponenciais e logarítmicas em certos pontos, a aproximação polinomial de funções torna-se uma ferramenta interessante para calcular os valores desses pontos. Os polinômios são funções fáceis de serem trabalhadas, pois o cálculo dos seus valores podem ser obtidos através de um número finito de adições e multiplicações.

Neste capítulo veremos que a Fórmula de Taylor consiste nessa ideia de aproximação de funções por meio de polinômios em volta de um certo ponto. Para isso, basta a função ser derivável neste ponto. Assim, também veremos a existência de um erro cometido entre o valor obtido pelo Polinômio de Taylor e o valor real da função, que vai ficando suficientemente menor quando utilizamos polinômio de ordens cada vez maiores.

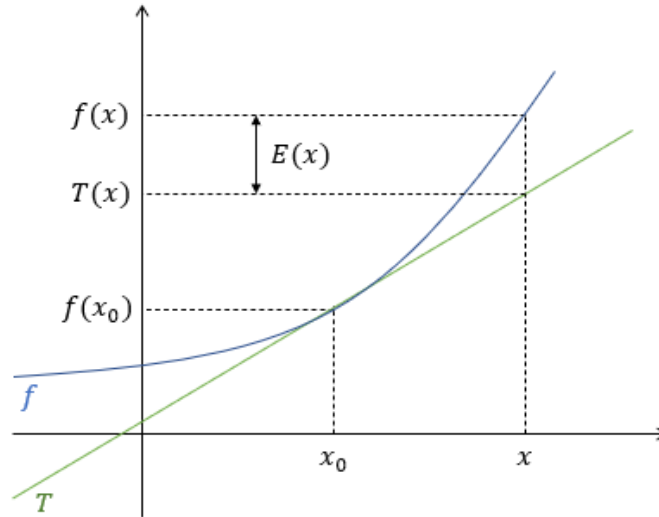
O capítulo está baseado nos trabalhos de Apostol [1], Guidorizzi [5] e Lima [7]. Iniciaremos estudando a aproximação local de uma função diferenciável por uma função afim, como uma forma de motivação inicial da Fórmula de Taylor.

3.1 Aproximação local de uma função diferenciável por uma função afim

Seja $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função derivável em x_0 , onde I é um intervalo aberto e $x_0 \in I$, e seja T uma função dada por $T(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$. Ou seja, T é a soma do valor real da f calculada em x_0 com o produto entre a derivada de f no ponto x_0 e a diferença entre x e x_0 .

O gráfico de T é a reta tangente ao gráfico de f em $(x_0, f(x_0))$, logo a $f'(x_0)$ é o coeficiente angular dessa reta.

Figura 3.1: Gráfico da aproximação local por uma função afim



Fonte: Arquivo pessoal

O Gráfico 3.1 nos diz que para cada valor de $x \in D_f$ próximo de x_0 , temos entre o valor exato da f no ponto x e o valor da função T também calculado em x , uma função denominada de $E(x)$ que é o erro se comete na aproximação de f por T .

Assim, a função f será igual a soma das funções T e $E(x)$ para valores de x pertencentes ao domínio de f , como podemos observar na Equação 3.1.

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + E(x), x \in D_f. \quad (3.1)$$

Reescrevendo essa expressão em função do erro $E(x)$ temos que,

$$E(x) = f(x) - [f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)].$$

Observe que, $E(x)$ é a subtração do valor real da f com a expressão da $T(x)$ no ponto x_0 , ambas funções contínuas, pois $f(x)$ é derivável em x_0 e $T(x)$ é uma função polinomial de primeiro grau, logo $E(x)$ também é contínua.

Como o limite de uma função contínua é o seu valor no ponto,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} E(x) = E(x_0).$$

Substituindo $x = x_0$ em $E(x)$ temos, $E(x_0) = f(x_0) - f(x_0) - f'(x_0)(x_0 - x_0) = 0$. Portanto,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} E(x) = 0.$$

Assim, quanto mais próximos os valores de x chegarem de x_0 os valores da $E(x)$ vão diminuindo, isto é, o erro é cada vez menor.

Além disso, para $x \neq x_0$,

$$\frac{E(x)}{x - x_0} = \frac{f(x) - [f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)]}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0).$$

Desse modo, podemos analisar que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{E(x)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) = f'(x_0) - f'(x_0) = 0.$$

Esse fato nos diz que: quando $x \rightarrow x_0$, o erro $E(x)$ tende a zero mais rapidamente que $(x - x_0)$, ou seja, para valores de x cada vez mais próximos de x_0 o erro de aproximação cometido é extremamente menor que a diferença entre x e x_0 .

A função $T(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ é a única função afim que goza da propriedade de o erro $E(x)$ tender a zero mais rapidamente que $(x - x_0)$. Seja $S(x) = f(x_0) + m(x - x_0)$ uma função afim qualquer passando por $(x_0, f(x_0))$ tal que $f(x) = f(x_0) + m(x - x_0) + E_m(x)$, $x \in D_f$ uma função derivável em que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{E_m(x)}{x - x_0} = 0.$$

Assim,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{E_m(x)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - m = f'(x_0) - m,$$

para que o $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{E_m(x)}{x - x_0} = 0$, necessariamente $m = f'(x_0)$.

Desse resultado concluímos que, se f for derivável em x_0 , $T(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ é a função afim que melhor aproxima localmente a função f em torno de x_0 .

3.2 Polinômio de Taylor de Ordem 1

A função $T(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ é uma função polinomial de grau no máximo 1, caso a $f'(x_0) \neq 0$ será de grau 1. Na seção anterior provamos que, se uma função f for derivável em um ponto x_0 a função afim $T(x)$ é a melhor aproximação local de f em torno de x_0 . Dessa forma, $T(x)$ é o polinômio de grau no máximo 1 que melhor aproxima localmente a f em volta de x_0 .

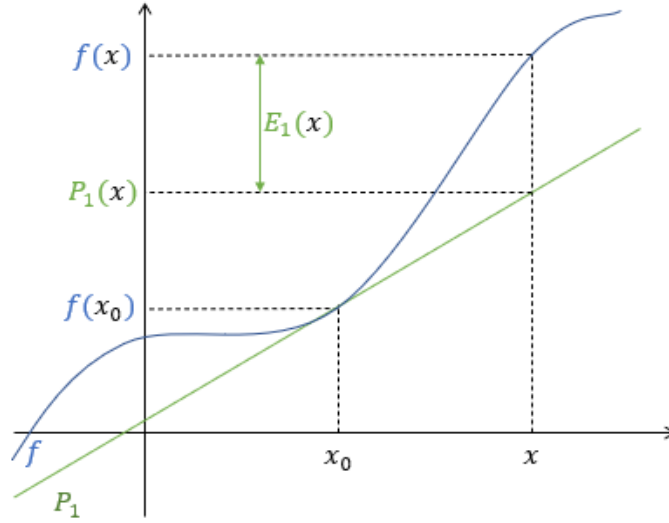
Consequentemente, para uma função $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ derivável em $x_0 \in I$, o polinômio de grau 1

$$P_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

é denominado de Polinômio de Taylor de Ordem 1 de f em torno de x_0 .

Nesse sentido, observando o Gráfico 3.2, o Polinômio de Taylor de Ordem 1 é exata-

Figura 3.2: Gráfico da aproximação local pelo P_1 de Taylor



Fonte: Arquivo pessoal

mente a reta tangente ao gráfico de f no ponto $(x_0, f(x_0))$, definida por $T(x)$.

Vejamos, seja $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função derivável em x_0 , onde I é um intervalo aberto e $x_0 \in I$, e seja $P_1(x) = a(x - x_0) + b$ um polinômio de grau 1, sendo a e b constantes reais com $a \neq 0$, tal que $P_1(x_0) = f(x_0)$ e $P'_1(x_0) = f'(x_0)$.

Ao calcularmos $P_1(x_0)$ temos que,

$$P_1(x_0) = b, \text{ como } P_1(x_0) = f(x_0) \quad \Rightarrow \quad b = f(x_0).$$

Derivando $P_1(x)$ obtemos, $P'_1(x) = a$.

Logo,

$$P'_1(x_0) = a, \text{ já que } P'_1(x_0) = f'(x_0) \quad \Rightarrow \quad a = f'(x_0).$$

Assim, substituído os valores de a e b em $P_1(x)$ concluímos que

$$P_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Essa expressão, como vimos anteriormente corresponde a $T(x)$, portanto $P_1(x) = T(x)$.

Embora o Polinômio de Taylor de Ordem 1 seja uma boa aproximação local de uma função f em volta de x_0 , vimos na Equação 3.1 a existência de um erro que vamos chamá-lo de $E_1(x)$. Tal erro pode ser estimado em termos da segunda derivada de f , como veremos no teorema a seguir.

Teorema 3.2.1 *Seja $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ derivável até a segunda ordem no intervalo I e sejam $x, x_0 \in I$. Então, existe pelo menos um $\bar{x}$ no intervalo aberto de extremos x e x_0 tal que*

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + E_1(x),$$

sendo

$$E_1(x) = \frac{f''(\bar{x})}{2}(x - x_0)^2.$$

Demonstração. Sabemos que $E_1(x) = f(x) - [f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)]$.

Assim, para $x = x_0$

$$E_1(x_0) = f(x_0) - [f(x_0) + f'(x_0)(x_0 - x_0)] = f(x_0) - f(x_0) = 0$$

e derivando $E_1(x)$ observando que $f(x_0)$ e $f'(x_0)$ são constantes, temos

$$E_1'(x) = f'(x) - f'(x_0)$$

para $x = x_0$

$$E_1'(x) = f'(x_0) - f'(x_0) = 0$$

Seja $h(x) = (x - x_0)^2 \Rightarrow h'(x) = 2(x - x_0)$; segue que $h(x_0) = 0$ e $h'(x_0) = 0$.

Temos

$$\frac{E_1(x)}{h(x)} = \frac{E_1(x) - E_1(x_0)}{h(x) - h(x_0)}.$$

Como $E_1(x)$ e $h(x)$ são funções deriváveis pelo teorema de Cauchy, existe $\bar{x}_1$ no intervalo de extremos x_0 e x tal que

$$\frac{E_1(x)}{h(x)} = \frac{E_1'(\bar{x}_1)}{h'(\bar{x}_1)}.$$

Tendo em vista que $E_1'(x_0) = h'(x_0) = 0$

$$\frac{E_1(x)}{h(x)} = \frac{E_1'(\bar{x}_1) - E_1'(x_0)}{h'(\bar{x}_1) - h'(x_0)}.$$

Novamente, pelo teorema de Cauchy, existe $\bar{x}$ no intervalo aberto de extremos x_0 e x tal que

$$\frac{E_1(x)}{h(x)} = \frac{E_1''(\bar{x})}{h''(\bar{x})}.$$

Como $E_1''(x) = f''(x)$ e $h''(x) = 2$

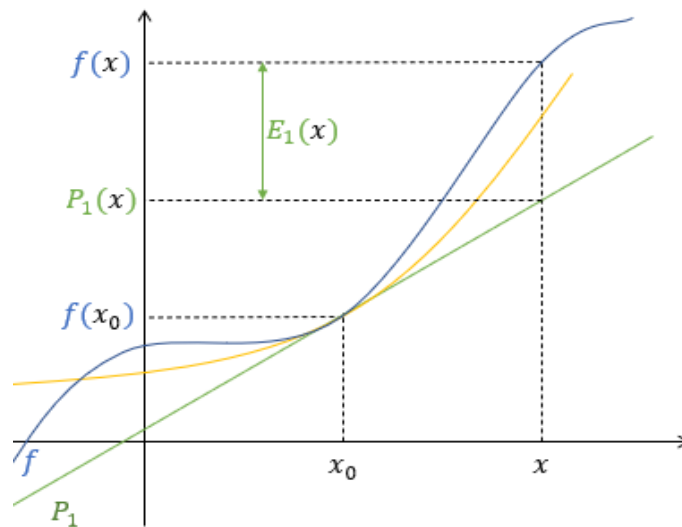
$$\frac{E_1(x)}{h(x)} = \frac{f''(\bar{x})}{2} \Rightarrow E_1(x) = \frac{f''(\bar{x})}{2}(x - x_0)^2$$

para algum $\bar{x}$ no intervalo aberto de extremos x_0 e x . ■

3.3 Polinômio de Taylor de Ordem 2

Observamos no Polinômio de Taylor de Ordem 1, de f em torno de x_0 , que o valor do $P_1(x_0) = f(x_0)$ e o valor da $P'_1(x_0) = f'(x_0)$. Assim, para valores de x cada vez mais próximos de x_0 o P_1 de Taylor é uma boa aproximação de f . Porém, na aproximação de funções em que seus gráficos expressam alguma curvatura o P_1 de Taylor, por ser a reta tangente ao gráfico de f em $(x_0, f(x_0))$, não acompanha a concavidade da curvatura destas funções.

Figura 3.3: Gráfico da aproximação local por um polinômio de segunda ordem



Fonte: Arquivo pessoal

Diante disso, iremos determinar outra função polinomial com as mesmas características do Polinômio de Taylor de Ordem 1, onde sua concavidade tenha o mesmo sentido da função f em torno de x_0 .

Seja $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função derivável até a segunda ordem em x_0 , em que I é um intervalo aberto e $x_0 \in I$. Pretendemos encontrar um $P_2(x) = a(x - x_0)^2 + b(x - x_0) + c$, de grau no máximo 2, que tenha em comum com f o valor em x_0 , o valor da primeira derivada em x_0 e o valor da segunda derivada em x_0 . Ou seja, queremos determinar um $P_2(x)$ de grau no máximo 2, tal que

$$P_2(x_0) = f(x_0), P'_2(x_0) = f'(x_0) \quad e \quad P''_2(x_0) = f''(x_0).$$

Calculando $P_2(x_0)$ temos

$$P_2(x_0) = c, \text{ como } P_2(x_0) = f(x_0) \quad \Rightarrow \quad c = f(x_0).$$

Ao derivarmos $P_2(x)$ devemos ter

$$P'_2(x) = 2a(x - x_0) + b \quad e \quad P''_2(x) = 2a.$$

Dai,

$$P_2'(x_0) = b, \text{ sendo } P_2'(x_0) = f'(x_0) \Rightarrow b = f'(x_0)$$

e

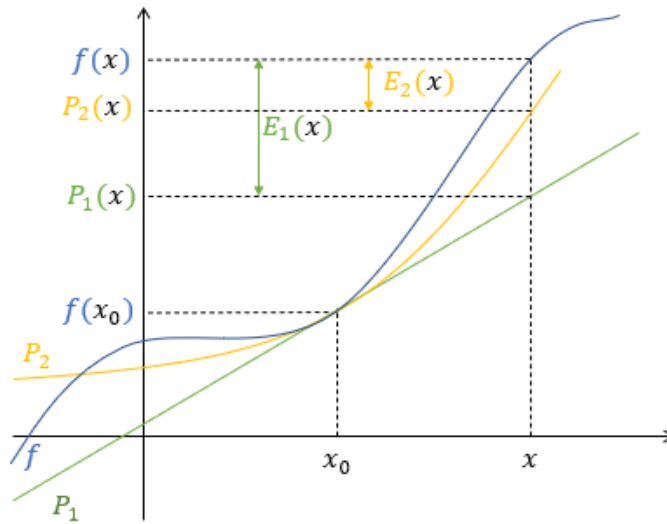
$$P_2''(x_0) = 2a, \text{ como } P_2''(x_0) = f''(x_0) \Rightarrow 2a = f''(x_0) \text{ ou } a = \frac{1}{2}f''(x_0).$$

Portanto o polinômio procurado é

$$P_2(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2. \quad (3.2)$$

O Polinômio 3.2 é denominado Polinômio de Taylor de Ordem 2 em volta de x_0 .

Figura 3.4: Gráfico da aproximação local pelo P_2 de Taylor



Fonte: Arquivo pessoal

Observe no gráfico 3.4 que f e P_2 admitem a mesma reta tangente em $(x_0, f(x_0))$. Dado que $P_2''(x_0) = f''(x_0)$, para valores de x próximos de x_0 , os gráficos de f e P_2 apresentam concavidades com o mesmo sentido, se $f''(x_0) \neq 0$ e f'' for contínua em x_0 . Além disso, observe que, para valores de x suficientemente próximos de x_0 , o Polinômio de Taylor de Ordem 2 aproxima melhor de f do que o Polinômio de Taylor de Ordem 1.

Seja P_2 o Polinômio de Taylor de Ordem 2 de f em volta de x_0 . Para cada x pertencente ao domínio de f e seja $E_2(x)$ o erro cometido na aproximação de $f(x)$ por $P_2(x)$. Assim, para todo $x \in D_f$,

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + E_2(x)$$

ou

$$E_2(x) = f(x) - [f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2].$$

Derivando $E_2(x)$ observando que $f(x_0)$ e $f'(x_0)$ são constantes, temos

$$E_2'(x) = f'(x) - [f'(x_0) + f''(x_0)(x - x_0)]$$

$$E_2''(x) = f''(x) - f''(x_0)$$

$$E_2'''(x) = f'''(x).$$

Portanto, para $x = x_0$

$$E_2(x_0) = E_2'(x_0) = E_2''(x_0) = 0.$$

Ainda que o P_2 de Taylor seja uma aproximação melhor da f em torno de x comparando com o P_1 de Taylor existe um erro $E_2(x)$ nessa aproximação. Veremos no próximo teorema que $E_2(x)$ pode ser mensurado em termos da terceira derivada de f .

Teorema 3.3.1 *Seja $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ derivável até a terceira ordem no intervalo I e sejam $x, x_0 \in I$. Então, existe pelo menos um $\bar{x}$ no intervalo aberto de extremos x e x_0 tal que*

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + E_2(x),$$

sendo

$$E_2(x) = \frac{f'''(\bar{x})}{3!}(x - x_0)^3.$$

Demonstração. Consultar o apêndice. ■

3.4 Polinômio de Taylor de Ordem n

Seja $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida no intervalo I e n vezes derivável no ponto $x_0 \in I$. O Polinômio de Taylor de Ordem n da função f em torno de x_0 é

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^n(x_0)}{n!}(x - x_0)^n. \quad (3.3)$$

Isto é o polinômio de grau máximo n cujas derivadas de ordem $\leq n$ em $P_n(x_0)$ coincidem com as derivadas de mesma ordem de f no ponto x_0 , isto é $P_n^{(i)}(x_0) = f^{(i)}(x_0)$, $i = 0, 1, \dots, n$. Isso garante que P_n e a função f em x_0 tenham a mesma reta tangente, concavidades com mesmo sentido, taxa de variação e assim por diante.

O Polinômio P_n de f em torno de x_0 é o único polinômio de grau no máximo n que aproxima localmente f em volta de x_0 de modo que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{E_n(x)}{(x - x_0)^n} = 0,$$

ou seja, o erro $E_n(x)$ tende a zero mais rapidamente que $(x - x_0)^n$, quando x se aproxima de x_0 . Esse resultado pode ser verificado no apêndice.

Em um primeiro momento a expressão em 3.3 do Polinômio de Taylor de Ordem n causa estranheza, principalmente aos leitores iniciantes nessa teoria. Porém, o polinômio de Taylor de ordem n em um determinado ponto x_0 da função f , nada mais é que uma função polinomial, na qual realizamos o somatório dos seus termos para calcular o seu valor. Assim, a Fórmula de Taylor de ordem n trata-se da adição da função aplicada no ponto x_0 , isto é, $f(x_0)$ somada com a derivada $f'(x_0)$ e multiplicada pela diferença $x - x_0$ somado com a derivada segunda $f''(x_0)$, multiplicada pelo $x - x_0^2$ dividido pelo $2!$ e assim sucessivamente para f''', f'''' até a chegar ao enésimo termo, ou seja, na derivada $f^{(n)}(x_0)$ multiplicada pelo $x - x_0^n$ dividido pelo mesmo índice da derivada em fatorial $n!$. A única condição necessária para a aplicação da Fórmula de Taylor é que a função f seja n vezes derivável no ponto x_0 pertencente ao intervalo I .

3.4.1 Polinômio de Taylor com resto de Lagrange

Assim como nos polinômios de ordens 1 e 2 de Taylor, também podemos estimar o erro $E_n(x)$, cometido quando fazemos a aproximação de f pelo Polinômio de Taylor de Ordem n em torno de x_0 , em termos da derivada de ordem $n + 1$ de f , como veremos no Teorema da Fórmula de Taylor com resto de Lagrange 3.4.1.

Antes disso, faz-se necessário verificar que: seja P_n o Polinômio de Taylor de Ordem n , de f em torno de x_0 e seja $E_n(x)$ o erro cometido na aproximação local de f por P_n . Para todo $x \in D_f$,

$$f(x) = P_n(x) + E_n(x)$$

reescrevendo em função do erro temos,

$$E_n(x) = f(x) - P_n(x)$$

isto é,

$$E_n(x) = f(x) - [f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^n(x_0)}{n!}(x - x_0)^n].$$

Derivando $n+1$ vezes a expressão $E_n(x)$ e observando que $f(x_0)$ e $f'(x_0)$ são constantes, devemos ter

$$E'_n(x) = f'(x) - [f'(x_0) + f''(x_0)(x - x_0) + \cdots + \frac{f^n(x_0)}{n-1!}(x - x_0)^{n-1}]$$

$$E''_n(x) = f''(x) - [f''(x_0) + \cdots + \frac{f^n(x_0)}{n-2!}(x - x_0)^{n-2}]$$

$\vdots$

$$E_n^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) - f^{(n)}(x_0)$$

$$E_n^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x).$$

Em $x = x_0$, temos

$$E_n(x_0) = E'_n(x_0) = E''_n(x_0) = \cdots = E_n^{(n)}(x_0) = 0.$$

Esse resultado nos diz que no ponto x_0 , a função $E_n(x)$ e suas derivadas até a n -ésima são iguais a zero. Além disso, a $E_n^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x)$.

Teorema 3.4.1 (*Fórmula de Taylor com resto de Lagrange.*) *Seja f derivável até a ordem $n+1$ no intervalo I e sejam $x, x_0 \in I$. Então existe pelo menos um $\bar{x}$ no intervalo aberto de extremos x e x_0 tal que*

$$f(x) = P_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(\bar{x})}{(n+1)!}(x-x_0)^{(n+1)}$$

onde

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

Demonstração. Temos,

$$E_n(x_0) = E'_n(x_0) = E''_n(x_0) = \cdots = E_n^{(n)}(x_0) = 0 \quad e \quad E_n^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x).$$

Seja $h(x) = (x-x_0)^{n+1}$, derivando essa função até a $h^{(n+1)}(x)$, obtemos

$$h'(x) = (n+1)(x-x_0)^n$$

$$h''(x) = (n+1)n(x-x_0)^{n-1}$$

$$\vdots$$

$$h^{(n)}(x) = (n+1)n \cdots 3 \cdot 2(x-x_0)$$

$$h^{(n+1)}(x) = (n+1)n \cdots 2 \cdot 1 = (n+1)!$$

Para $x = x_0$, segue que $h(x_0) = h'(x_0) = h''(x_0) = \cdots = h^{(n)}(x_0) = 0$.

Vejamos que

$$\frac{E_n(x)}{h(x)} = \frac{E_n(x) - E_n(x_0)}{h(x) - h(x_0)}.$$

Como $E(x)$ e $h(x)$ são funções deriváveis pelo teorema de Cauchy, existe $\bar{x}_1$ entre x_0 e x tal que

$$\frac{E_n(x)}{h(x)} = \frac{E'_n(\bar{x}_1)}{h'(\bar{x}_1)}.$$

Temos

$$\frac{E_n(x)}{h(x)} = \frac{E'_n(\bar{x}_1) - E'_n(x_0)}{h'(\bar{x}_1) - h'(x_0)}.$$

Novamente, pelo teorema de Cauchy, existe $\bar{x}_2$ no intervalo aberto de extremos x_0 e x_1 tal que

$$\frac{E_n(x)}{h(x)} = \frac{E''_n(\bar{x}_2)}{h''(\bar{x}_2)}.$$

Sabendo que $E''_n(x_0) = E'''_n(x_0) = \dots = E^{(n)}_n(x_0) = 0 = h''(x_0) = h'''(x_0) = \dots = h^{(n)}(x_0)$, podemos repetir esse mesmo argumento uma quantidade n vezes. Assim

$$\frac{E_n(x)}{h(x)} = \frac{E^{(n)}_n(\bar{x}_n) - E^{(n)}_n(x_0)}{h^{(n)}(\bar{x}_n) - h^{(n)}(x_0)}.$$

Outra vez pelo teorema de Cauchy existe um $\bar{x}$ no intervalo aberto de extremos x_0 e $\bar{x}_n$ tal que

$$\frac{E_n(x)}{h(x)} = \frac{E^{(n+1)}_n(\bar{x})}{h^{(n+1)}(\bar{x})}.$$

Como

$$E^{(n+1)}_n(\bar{x}) = f^{(n+1)}(\bar{x}) \quad e \quad h^{(n+1)}(\bar{x}) = (n+1)!,$$

logo

$$\frac{E_n(x)}{h(x)} = \frac{f^{(n+1)}(\bar{x})}{(n+1)!} \quad \Rightarrow \quad E_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\bar{x})}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1},$$

para algum $\bar{x}$ no intervalo aberto de extremos x_0 e x . ■

Uma consequência imediata do Teorema da Fórmula de Taylor com resto de Lagrange é o corolário à seguir.

Corolário 3.4.2 *Seja f derivável até a ordem $n+1$ no intervalo I e seja $x_0 \in I$. Suponha que existe $M > 0$ tal que, para todo x em I , $|f^{(n+1)}(x)| \leq M$. Prove que, para todo $x_0 \in I$,*

$$|f(x) - P_n(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!} |x - x_0|^{n+1}$$

em que $P_n(x)$ é o Polinômio de Taylor de Ordem n , de f em volta de x_0 .

Demonstração. De acordo com o Teorema 3.4.1, existe $\bar{x}$ no intervalo aberto de extremos x_0 e x tal que,

$$|f(x) - P_n(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(\bar{x})}{(n+1)!} \right| |x - x_0|^{n+1}.$$

Como por hipótese para todo $x \in I$, $|f^{(n+1)}(x)| \leq M$, temos que

$$|f(x) - P_n(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!} |x - x_0|^{n+1}.$$

■

Capítulo 4

Aplicações

Apresentaremos neste capítulo algumas aplicações da Fórmula de Taylor na própria matemática. As referências utilizadas na construção deste capítulo foram os trabalhos de Apostol [1], Guidorizzi [5], Flemming e Gonçalves [4] e Lima [7]. Iniciamos com a aproximação local de funções através da Fórmula de Taylor.

4.1 Aproximação local de funções

Pelo que foi visto nos Capítulos 1 e 3 deste trabalho podemos considerar a aproximação local de funções como a principal aplicação da Fórmula de Taylor. No primeiro capítulo vimos que o próprio Taylor utilizou a fórmula em 1717 com esse intuito. Já no terceiro capítulo, concluímos que quanto maior o grau do polinômio da Fórmula de Taylor melhor será a aproximação local do valor real da função num ponto x_0 e nas suas proximidades.

Com esses argumentos, vamos aplicar a Fórmula de Taylor para aproximar localmente uma função em torno de um ponto x_0 e analisar o erro cometido nesta aproximação.

Exemplo 4.1.1 Determinaremos o Polinômio de Taylor de Ordem 1 da $f(x) = \ln x$ no ponto $x_0 = 1$, e além disso, calcularemos um valor aproximado do $\ln 1,005$ e avaliar o erro $E_1(x)$ cometido na aproximação de $f(x)$ pelo $P_1(x)$.

Temos que $P_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

Derivando $f(x)$ obtemos,

$$f'(x) = \frac{1}{x}.$$

Em $x_0 = 1$,

$$P_1(x) = f(1) + f'(1)(x - 1)$$

e como, $f(1) = 0$ e $f'(1) = 1$, o Polinômio de Taylor de Ordem 1 da $f(x) = \ln x$ no ponto

$x_0 = 1$ é

$$P_1(x) = x - 1.$$

O valor de $f(1,005) \cong P_1(1,005)$.

Assim,

$$P_1(1,005) = 1,005 - 1 = 0,005$$

e

$$f(1,005) \cong P_1(1,005) \Rightarrow \ln 1,005 \cong 0,005.$$

Vamos estimar o erro $E_1(x)$ cometido na aproximação de $f(x)$ pelo $P_1(x)$. Para isso devemos determinar a $f''(x)$.

Sendo

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2},$$

teremos pelo Teorema 3.2.1 que

$$E_1(x) = \frac{f''(\bar{x})}{2}(x - x_0)^2 = -\frac{1}{2\bar{x}^2}(x - x_0)^2, \bar{x} \in]1, x[.$$

Para $x = 1,005$

$$|E_1(1,005)| = \left| -\frac{1}{2\bar{x}^2}(1,005 - 1)^2 \right| = \left| -\frac{1}{2\bar{x}^2}(0,005)^2 \right|, \bar{x} \in]1; 1,005[.$$

Como a $1/ - 2x^2$ é uma função decrescente, o maior valor que $\bar{x}$ pode assumir no intervalo $]1; 1,005[$ é o extremo esquerdo.

Logo podemos dizer que,

$$|E_1(1,005)| < \frac{1}{2}(25 \cdot 10^{-6}) = 12,5 \cdot 10^{-6} = 0,0000125.$$

Portanto, o módulo do erro cometido na aproximação de $\ln 1,005 \cong 0,005$ é inferior a 10^{-4} . Isso significa que o erro $E_1(1,005)$ cometido na aproximação de $f(1,005)$ pelo $P_1(1,005)$ não ocorre antes da quarta casa decimal, ou seja, é certeza que o valor da aproximação está correto até a terceira casa decimal.

Exemplo 4.1.2 Avaliaremos o $\ln 1,005$ de maneira semelhante ao Exemplo 4.1.1, agora utilizando o Polinômio de Taylor de Ordem 2.

Sabemos que o

$$P_2(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2.$$

Derivando $f(x)$ obtemos,

$$f'(x) = \frac{1}{x} \quad e \quad f''(x) = -\frac{1}{x^2}.$$

Para $x_0 = 1$,

$$P_2(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2}(x-1)^2$$

sendo, $f(1) = 0$, $f'(1) = 1$, $f''(1) = -1$, o Polinômio de Taylor de Ordem 2 da $f(x) = \ln x$ em volta $x_0 = 1$ é

$$P_1(x) = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2.$$

Em $x = 1,005$

$$P_2(1,005) = (1,005 - 1) - \frac{1}{2}(1,005 - 1)^2 = 0,005 - 0,0000125 = 0,0049875.$$

Como

$$f(1,005) \cong P_2(1,005) \Rightarrow \ln 1,005 \cong 0,0049875.$$

Para estimar o erro $E(x)$ cometido na aproximação de $f(x)$ pelo $P_2(x)$ precisamos da $f'''(x)$.

Assim,

$$f'''(x) = \frac{2}{x^3}.$$

Pelo Teorema 3.3.1 teremos que

$$E_2(x) = \frac{f'''(\bar{x})}{3!}(x-x_0)^3 = \frac{2}{3 \cdot 2 \cdot 1\bar{x}^3}(x-x_0)^3 = \frac{1}{3\bar{x}^3}(x-x_0)^3, \bar{x} \in]1, x[.$$

Para $x = 1,005$

$$|E_2(1,005)| = \frac{1}{3\bar{x}^3}(1,005-1)^3 = \frac{1}{3\bar{x}^3}(0,005)^3, \bar{x} \in]1; 1,005[.$$

Como $1/\bar{x}^3$ é uma função decrescente, o maior valor que $\bar{x}$ pode assumir no intervalo $]1; 1,005[$ é o extremo esquerdo.

Logo, podemos dizer que

$$|E_2(1,005)| < \frac{1}{3}(125 \cdot 10^{-9}) < 42 \cdot 10^{-9} = 0,000000042.$$

Assim, o módulo do erro cometido na aproximação de $\ln 1,005 \cong 0,0049875$ é inferior a 10^{-7} . Esse fato nos diz que ao utilizar $P_2(1,005)$ na aproximação de $f(1,005)$ em volta do ponto $x_0 = 1$, teremos uma precisão no valor do $\ln 1,005$ até a sétima casa decimal. Desse modo, o $E_2(1,005)$ ocorre depois da sétima casa decimal. Se comparado ao $E_1(1,005)$ estimado no Exemplo 4.1.1, em que o erro ocorre depois da quarta casa decimal, podemos concluir que o $P_2(1,005)$ nos fornece uma melhor aproximação do valor real do $\ln 1,005$ que o $P_1(1,005)$.

4.2 Polinômio de Maclaurin de Ordem n

No primeiro capítulo citamos que um caso especial da Fórmula de Taylor, representada pela série de Taylor para $a = 0$, ficou ligado ao nome do matemático Colin Maclaurin.

Nesta seção, trabalharemos com esse caso particular na fórmula expressa pelo polinômio de Taylor. Assim, o Polinômio de Taylor de Ordem n, de f em volta de $x_0 = 0$, ou seja,

$$P_n(x) = f(0) + f'(0)(x) + \frac{f''(0)}{2!}(x)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}(x)^n$$

é denominado também de Polinômio de Maclaurin de Ordem n, de f .

Uma aplicação interessante do Polinômio de Maclaurin é a representação de funções como veremos à seguir.

Exemplo 4.2.1 Seja $f(x) = \cos x$.

Ao derivar a função f , observemos que, da quinta derivada em diante ocorre uma repetição das derivadas da função $f(x) = \cos x$

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\operatorname{sen} x, & f''(x) &= -\cos x, & f'''(x) &= \operatorname{sen} x, \\ f^4(x) &= \cos x, & f^5(x) &= -\operatorname{sen} x, & f^6(x) &= -\cos x, \dots \end{aligned}$$

assim,

$$f^{(4n+1)}(x) = -\operatorname{sen} x, \quad f^{(4n+2)}(x) = -\cos x, \quad f^{(4n+3)}(x) = \operatorname{sen} x \quad e \quad f^{(4n)}(x) = \cos x.$$

Além disso, o valor da função e suas derivadas calculadas no ponto zero são respectivamente:

$$f(0) = 1, f'(0) = 0, f''(0) = -1, f'''(0) = 0, f^4(0) = 1, f^5(0) = 0, f^6(0) = -1, \dots$$

Logo, as derivadas de ordem ímpar calculadas no ponto zero são todas iguais a 0. Enquanto as derivadas de ordem par são alternadas em -1 e 1 . Ou seja,

$$f^{(2n+1)}(0) = 0 \quad e \quad f^{(2n)}(0) = (-1)^n.$$

Com isso, os termos de ordem ímpar do Polinômio de Maclaurin de Ordem n, de $f(x) = \cos x$ serão nulos.

Devido a esses comentários, concluímos que a função cosseno de x pode ser representada pelo polinômio

$$P_n(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n!}$$

no ponto x_0 .

De maneira análoga podemos dizer que,

$$P_n(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

é o Polinômio de Maclaurin de Ordem n , em $x_0 = 0$ de $f(x) = \text{sen}x$. Devido ocorrer uma repetição das derivadas da função $\text{sen}x$, da quinta derivada em diante,

$$f^{(4n+1)}(x) = \cos x, \quad f^{(4n+2)}(x) = -\text{sen}x, \quad f^{(4n+3)}(x) = -\cos x \quad e \quad f^{(4n)}(x) = \text{sen}x,$$

temos que as derivadas de ordem ímpar calculadas no ponto zero são alternadas em -1 e 1 . Enquanto as derivadas de ordem par são todas nulas. Isto é,

$$f^{(2n+1)}(0) = (-1)^n \quad e \quad f^{(2n)}(0) = 0.$$

Portanto, os termos de ordem par de $P_n(x)$, de $f(x) = \text{sen}x$, são nulos.

4.3 O número de Euler

Nesta seção mostraremos que podemos calcular o número de Euler e com qualquer grau de precisão através da Fórmula de Taylor e provar que e é um número irracional.

Consideremos a função $f(x) = e^x$. As derivadas de $f(x)$ são todas iguais a própria função, isto é,

$$f'(x) = f''(x) = f'''(x) = \dots = f^{(n+1)}(x) = e^x = f(x).$$

Assim, o Polinômio de Taylor de Ordem n , de $f(x) = e^x$ em volta de $x_0 = 0$ é

$$P_n(x) = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots + \frac{1}{n!}x^n.$$

De acordo com o Teorema 3.4.1, no intervalo $[0, x]$, existe $\bar{x}$ tal que

$$e^x - \left(1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots + \frac{1}{n!}x^n\right) = \frac{f^{(n+1)}(\bar{x})}{(n+1)!}x^{(n+1)}.$$

Pelo Corolário 3.4.2, para todo x em $[0, x]$

$$\left| e^x - \left(1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots + \frac{1}{n!}x^n\right) \right| \leq \frac{M}{(n+1)!}x^{n+1}.$$

Toma-se x no intervalo $[0, 1]$ e ao usar a desigualdade $e < 3$, obtemos

$$0 \leq e^x = f^{(n+1)}(x) \leq e < 3.$$

Logo, para qualquer x em $[0, 1]$ tem-se

$$\left| e^x - \left(1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots + \frac{1}{n!}x^n\right) \right| < \frac{3}{(n+1)!}x^{n+1}.$$

Quando aplicamos está estimativa em $x = 1$, podemos calcular o número de Euler e , através da expressão

$$\left| e - \left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} \right) \right| < \frac{3}{(n+1)!}. \quad (4.1)$$

Isto significa que o módulo do erro cometido quando utilizamos a Fórmula de Taylor para calcular o valor de e é menor que $3/(n+1)!$. Deste modo, podemos determinar e com qualquer grau de precisão.

Exemplo 4.3.1 Se desejamos calcular o número de Euler com precisão até a quarta casa decimal, escolhemos um n de maneira que

$$\frac{3}{(n+1)!} < 10^{-5}.$$

Por tentativas, verificamos que basta $n = 8$, pois

$$\frac{3}{9!} < 10^{-5}.$$

Assim, para $n = 8$

$$P_8 = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!} + \frac{1}{8!} = 2,7182787 \dots$$

Portanto, o número de Euler calculado com quatro casas decimais, através da Fórmula de Taylor é $e = 2,7182$.

Outra aplicação interessante é provar por meio da Fórmula de Taylor que o número e é irracional. Para isso, vamos utilizar a expressão 4.1.

Teorema 4.3.2 *O numero e é irracional.*

Demonstração. Faremos a demonstração por contradição. Assim, admitamos que se e fosse racional, logo existiriam inteiros positivos a e b tais que

$$e = \frac{a}{b}.$$

Para todo natural n ,

$$e > 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}$$

e, na expressão 4.1 temos que

$$\left| e - \left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} \right) \right| < \frac{3}{(n+1)!}.$$

Dai, para qualquer natural n ,

$$0 < \frac{a}{b} - \left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right) < \frac{3}{(n+1)!}.$$

Multiplicando por $n!$ obtemos

$$0 < n! \frac{a}{b} - n! \left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right) < n! \frac{3}{(n+1)!}.$$

Para $n > b$ e $n \geq 3$, temos

$$0 < \frac{an!}{b} - \left(n! + n! + \frac{n!}{2!} + \frac{n!}{3!} + \cdots + \frac{n!}{n!}\right) < \frac{3}{n+1} \leq \frac{3}{4}.$$

Como

$$A = \frac{an!}{b}, \quad B = \left(n! + n! + \frac{n!}{2!} + \frac{n!}{3!} + \cdots + \frac{n!}{n!}\right)$$

são dois números inteiros.

Logo, $A - B$ também é um número inteiro estritamente positivo e não superior a $3/4$, o que é impossível.

Portanto, concluímos que e é irracional. ■

4.4 Critério para determinar máximos e mínimos de funções

Usando a Fórmula de Taylor, pode-se demonstrar a Proposição 4.4.1, que nos dá mais um critério para determinação de máximos e mínimos de uma função.

- (i) f é côncava para cima em $]a, c[$ e côncava para baixo em $]c, b[$;
- (ii) f é côncava para baixo em $]a, c[$ e côncava para cima em $]c, b[$.

Proposição 4.4.1 *Seja $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ uma função derivável n vezes e cujas derivadas f' , f'' , $\dots$, $f^{(n)}$ são contínuas em $]a, b[$. Seja $x_0 \in]a, b[$ um ponto crítico de f tal que $f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ e $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Então:*

- (i) *se n é par e $f^{(n)}(x_0) \geq 0$, f tem um mínimo relativo em x_0 ;*
- (ii) *se n é par e $f^{(n)}(x_0) \leq 0$, f tem um máximo relativo em x_0 ;*
- (iii) *se n é ímpar, x_0 é um ponto de inflexão.*

Demonstração. Como $f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0)$ e $f^{(n)}(x_0) \neq 0$, podemos escrever a Fórmula de Taylor com resto de Lagrange da seguinte forma

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + E_n(x_0).$$

Daí,

$$f(x) - f(x_0) = (x - x_0)^n \left[\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + \frac{E_n(x_0)}{(x - x_0)^n} \right].$$

Pela definição de limite, existe $\delta > 0$ tal que, para $x \in]a, b[$ e $0 < |x - x_0| < \delta$ a soma dentro dos colchetes tem o mesmo sinal de $f^{(n)}(x_0)$. Como $x_0 \in]a, b[$, podemos tomar este δ de modo que $|x - x_0| < \delta \Rightarrow x \in]a, b[$.

Então, quando n é par e $f^{(n)}(x_0) \geq 0$, a diferença $f(x) - f(x_0)$ é positiva sempre que $0 < |x - x_0| < \delta$, logo f possui um mínimo relativo no ponto x_0 . Analogamente, se n é par e $f^{(n)}(x_0) \leq 0$, a diferença $f(x) - f(x_0)$ é negativa quando $0 < |x - x_0| < \delta$, portanto f possui um máximo relativo no ponto x_0 .

Finalmente, se n é ímpar, o fator $(x - x_0)^n$ tem o mesmo sinal de $(x - x_0)$, logo a diferença $f(x) - f(x_0)$ muda de sinal juntamente com $(x - x_0)$, portanto f não tem máximo nem mínimo relativo e o ponto x_0 é um ponto de inflexão. ■

Exemplo 4.4.2 Determinar os máximos e mínimos da função $f(x) = x^5 - x^3$.

Temos que $f'(x) = 5x^4 - 3x^2$.

Fazendo $f'(x) = 5x^4 - 3x^2 = 0$, obtemos os pontos críticos que são: $x_1 = 0$, $x_2 = \sqrt{3/5}$ e $x_3 = -\sqrt{3/5}$.

Calculando o valor das derivadas seguintes no ponto $x_1 = 0$, temos:

$$f''(x) = 20x^3 - 6x, \quad f''(0) = 0;$$

$$f'''(x) = 60x^2 - 6, \quad f'''(0) = -6 \neq 0.$$

Como $f'''(0) \neq 0$, concluímos que 0 é um ponto de inflexão.

No ponto $x_2 = \sqrt{3/5}$, temos:

$$f''(x) = 20x^3 - 6x$$

$$f''(\sqrt{3/5}) = 20(3/5)^{3/2} - 6\sqrt{3/5} = \sqrt{3/5}(20 \cdot (3/5) - 6) = 6\sqrt{3/5} > 0.$$

Logo, concluímos que $x_2 = \sqrt{3/5}$ é um ponto de mínimo relativo.

No ponto $x_3 = -\sqrt{3/5}$, temos:

$$f''(x) = 20x^3 - 6x$$

$$f''(-\sqrt{3/5}) = -20(3/5)^{3/2} - 6(-\sqrt{3/5}) = \sqrt{3/5}(-20 \cdot (3/5) + 6) = -6\sqrt{3/5} < 0.$$

Portanto, o ponto $x_3 = -\sqrt{3/5}$ é um ponto de máximo relativo.

Capítulo 5

Considerações Finais

Quando iniciou-se o trabalho de pesquisa constatou-se que o curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal da Paraíba (UFPB) – Campus IV não aborda a teoria da Fórmula de Taylor, apesar da existência de componentes curriculares como as de Cálculo Diferencial e Integral e Introdução à Análise. Esse fato, pode ser justificado pela questão de tempo, que torna-se curto diante de uma extensa ementa das componentes curriculares citadas. Perante esse cenário, se o aluno do curso despertar o interesse de compreender essa teoria, então ele terá de ser autônomo e procurar trabalhos científicos que discutam sobre a Fórmula de Taylor. Durante essa procura, o licenciando em Matemática encontrará dificuldades em encontrar trabalhos que discutam essa temática, devido à escassez de obras produzidas no âmbito nacional. Por conta desses fatores e também pelo interesse pessoal do autor em dar continuidade aos seus estudos em Matemática numa futura pós-graduação, fez-se importante estudar sobre a Fórmula de Taylor e algumas aplicações.

Diante disso, a pesquisa teve como objetivo principal realizar um estudo bibliográfico sobre a Fórmula de Taylor, apresentando algumas aplicações dessa fórmula na própria matemática. Constata-se que tal objetivo foi atendido, porque efetivamente o trabalho conseguiu abordar os principais resultados que envolvem a Fórmula de Taylor e apresentar aplicações dessa fórmula, como a aproximação local de funções, representação de funções através do Polinômio de Maclaurin de Ordem n , provar que o número de Euler é irracional, além de demonstrar um critério para determinar máximos e mínimos de funções.

Nessa pesquisa, também buscou-se especificar o contexto histórico da Fórmula de Taylor. Isso foi realizado no primeiro capítulo com a apresentação de um breve relato histórico sobre a origem da fórmula que recebeu o nome do matemático inglês Brook Taylor.

Outro interesse dessa pesquisa foi construir um material teórico para o estudo da

Fórmula de Taylor e suas aplicabilidades. Esse interesse foi atendido pois conseguiu-se realizar um aprofundamento teórico nessa temática, resultando na formação desse trabalho, em que os resultados obtidos ficarão disponíveis para acesso da comunidade acadêmica interessada.

A pesquisa ocorreu através da análise de obras já realizadas sobre o tema, cujas referências foram apresentadas ao longo do texto. Durante o trabalho verificou-se que a Fórmula de Taylor é uma teoria de 1715 publicada no livro *Methodus Incrementorum Directa et Inversa*, pelo próprio Taylor. Essa fórmula, pode ser representada por séries de potências ou por uma fórmula analítica finita. Neste trabalho, ela foi abordada da segunda maneira. Assim, observou-se que a Fórmula de Taylor é composta por um polinômio somado com um termo chamado de resto. O polinômio é formado pelo valor da função que está sendo estudada no ponto x_0 somado com termos dos quais os coeficientes são as derivadas sucessivas da própria função neste ponto. Enquanto o termo de resto é obtido pela $(n + 1)$ -ésima uma derivada também no ponto x_0 . Percebe-se que esta fórmula é uma aplicação de derivadas sucessivas, portanto para utilizá-la a função deve ser no mínimo $n + 1$ vezes diferenciável no ponto x_0 .

Nota-se que o Polinômio de Taylor de Ordem n é o polinômio de grau máximo n que melhor aproxima localmente a função nas vizinhanças do ponto x_0 , pois ele goza da propriedade do erro tender a zero mais rapidamente que $(x - x_0)^n$, quando x se aproxima de x_0 . Em particular, o Polinômio de Taylor de Ordem 1 é exatamente a reta tangente ao gráfico da função no ponto $(x_0, f(x_0))$.

Outra constatação deste trabalho foi que o termo de resto da Fórmula de Taylor é o erro cometido entre o valor real da função em x_0 e o valor obtido neste ponto quando utiliza-se a fórmula. Observou-se também, que tal erro pode ser estimado por meio do Teorema da Fórmula de Taylor com resto Lagrange. Desse modo, através da aplicação de tal teorema verificou-se que o erro cometido ao calcular o valor da função no ponto x_0 pelo polinômio de Taylor em relação ao valor real da função em x_0 vai diminuindo ao utilizar polinômios de ordens cada vez maiores.

Por fim, apresenta-se algumas aplicações da Fórmula de Taylor na própria Matemática, concluindo, o trabalho.

Para pesquisas futuras sobre o tema recomenda-se abordar a Fórmula de Taylor através de séries de potências, aumentando o leque de possibilidades de apresentar outras aplicações dessa ferramenta espetacular.

Antes de finalizar este capítulo, faz-se importante discorrer sobre a influência do contexto atual sobre as atividades realizadas durante a pesquisa. Deste modo, o contexto pandêmico promoveu mudanças na maneira de se relacionar socialmente, e este foi um grande desafio encontrado na área educacional. Com a Covid-19, teve-se que aprender a estudar de forma diferente e totalmente independente. Com a implementação do ensino remoto, por exemplo, a comunicação em rede tornou-se uma alternativa louvável e um

desafio em todos os aspectos.

Entretanto, as barreiras e dificuldades foram e estão sendo superadas com a valiosa contribuição dos avanços tecnológicos, muitas vezes não favoráveis por conta da fragilidade dos sinais da internet. Acredita-se que essas novas alternativas de ensino farão parte do contexto da educação pós-pandemia e que os líderes do país possam entender que o Brasil está incluído neste cenário.

Bibliografia

- [1] APOSTOL, Tom Mike. **Cálculo I**: cálculo com funções de uma variável, com uma introdução à Álgebra Linear. 2. ed. Rio de Janeiro: Editorial Reverté, v. 1, 1988.
- [2] BOYER, Carl Benjamin. **História da Matemática**. 3. ed. São Paulo: Blucher, 2012.
- [3] EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática**. Campinas: Editora da UNICAMP, 2004.
- [4] FLEMMING, Diva Maria; GONÇALVES, Mirian Buss. **Cálculo A**: funções, limite, derivação e integração. 6. ed. rev. e ampl. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2007.
- [5] GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. **Um Curso de Cálculo**. 5. ed. Rio de Janeiro: LTC, v. 1, 2013.
- [6] JONES, Phillip Sanford. **Taylor, Brook**. *[S. l.]*, 14/05/2018. Disponível em: <https://www.encyclopedia.com/people/science-and-technology/mathematics-biographies/brook-taylor>. Acesso em: 6 ago. 2021..
- [7] LIMA, Elon Lages. **Análise real**: funções de uma variável. 8. ed. Rio de Janeiro: IMPA, v. 1, 2006.
- [8] O'CONNOR, John Joseph; ROBERTSON, Edmund Frederick. **Brook Taylor**. *[S. l.]*, maio 2000. Disponível em: <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Taylor/>. Acesso em: 06 ago. de 2021.
- [9] O'CONNOR, John Joseph; ROBERTSON, Edmund Frederick. **Colin Maclaurin**. *[S. l.]*, maio 2017. Disponível em: <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Maclaurin/>. Acesso em: 06 ago. de 2021.
- [10] SIMMONS, George Finlay. **Cálculo com Geometria Analítica**. 1 ed. São Paulo: Pearson Makron Books, v. 1, 1987.

Apêndices

Apêndice A

Resultados Básicos

Para tornar a leitura do texto principal mais fácil apresentamos aqui alguns resultados utilizados livremente ao longo do nosso trabalho.

Teorema A.1 *Seja $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ derivável até a terceira ordem no intervalo I e sejam $x, x_0 \in I$. Então, existe pelo menos um $\bar{x}$ no intervalo aberto de extremos x e x_0 tal que*

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(\bar{x})}{3!}(x - x_0)^3,$$

sendo

$$E_2(x) = \frac{f'''(\bar{x})}{3!}(x - x_0)^3.$$

Demonstração.

Temos que,

$$E_2(x_0) = E_2'(x_0) = E_2''(x_0) = 0 \quad e \quad E_2'''(x) = f'''(x).$$

Seja

$$h(x) = (x - x_0)^3 \quad \Rightarrow \quad h'(x) = 3(x - x_0)^2 \quad \Rightarrow \quad h''(x) = 6(x - x_0) \quad \Rightarrow \quad h'''(x) = 6 = 3!$$

segue que $h(x_0) = h'(x_0) = h''(x_0) = 0$ e $h'''(x) = 3!$.

Observe que

$$\frac{E_2(x)}{h(x)} = \frac{E_2(x) - E_2(x_0)}{h(x) - h(x_0)}.$$

Como $E_2(x)$ e $h(x)$ são funções deriváveis pelo teorema de Cauchy, existe $\overline{x_1}$ entre x_0 e x tal que

$$\frac{E_2(x)}{h(x)} = \frac{E_2'(\overline{x_1})}{h'(\overline{x_1})}.$$

Temos

$$\frac{E_2(x)}{h(x)} = \frac{E_2'(\overline{x_1}) - E_2'(x_0)}{h'(\overline{x_1}) - h'(x_0)}.$$

Novamente, pelo teorema de Cauchy, existe $\overline{x_2}$ no intervalo aberto de extremos x_0 e x_1 tal que

$$\frac{E_2(x)}{h(x)} = \frac{E_2''(\overline{x_2})}{h''(\overline{x_2})}.$$

Tendo em vista que $E_2''(x_0) = 0 = h''(x_0)$ segue

$$\frac{E_2(x)}{h(x)} = \frac{f''(\overline{x}) - E_2''(x_0)}{h''(\overline{x_2}) - h''(x_0)}$$

Outra vez, pelo teorema de Cauchy, existe $\overline{x}$ entre x_0 e x_2 tal que

$$\frac{E_2(x)}{h(x)} = \frac{E_2'''(\overline{x_2})}{h'''(\overline{x_2})}.$$

Como

$$E_2'''(\overline{x}) = f'''(\overline{x}) \quad e \quad h'''(\overline{x}) = 3!$$

$$\frac{E_2(x)}{h(x)} = \frac{f'''(\overline{x})}{3!} \Rightarrow E_2(x) = \frac{f'''(\overline{x})}{3!}(x - x_0)^3$$

para algum $\overline{x}$ no intervalo aberto de extremos x_0 e x . ■

Teorema A.2 *O Polinômio de Taylor de Ordem n , de f em torno de x_0 é o único polinômio de grau no máximo n que aproxima localmente f em volta de x_0 de modo que*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{E_n(x)}{(x - x_0)^n} = 0,$$

ou seja, o erro $E_n(x)$ tende a zero mais rapidamente que $(x - x_0)^n$, quando x se aproxima de x_0 .

Demonstração. Seja a função $f(x) = f(x_0) + m_1(x - x_0) + m_2(x - x_0)^2 + \cdots + m_n(x - x_0)^n$ em que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{E_m(x)}{(x - x_0)^n} = 0.$$

Vamos mostrar que

$$m_1 = f'(x_0), m_2 = \frac{f''(x_0)}{2!}, \dots, m_n = \frac{f^n(x_0)}{n!}.$$

De fato, de

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{E_n(x)}{(x - x_0)^n} = 0 \quad e \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{E_m(x)}{(x - x_0)^n} = 0$$

segue

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{E_n(x) - E_m(x)}{(x - x_0)^n} = 0$$

e portanto

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{[f'(x_0)(x - x_0) + \dots + \frac{f^n(x_0)}{n!}(x - x_0)^n] - [m_1(x - x_0) + \dots + m_n(x - x_0)^n]}{(x - x_0)^n} = 0$$

uma vez que $E_n(x) - E_m(x)$ é

$$\left[f'(x_0)(x - x_0) + \dots + \frac{f^n(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \right] - [m_1(x - x_0) + \dots + m_n(x - x_0)^n].$$

Segue que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{[f'(x_0) - m_1](x - x_0) + [\frac{f''(x_0)}{2!} - m_2](x - x_0)^2 + \dots + [\frac{f^n(x_0)}{n!} - m_n](x - x_0)^n]}{(x - x_0)^n} = 0$$

daí

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{[f'(x_0) - m_1] + [\frac{f''(x_0)}{2!} - m_2](x - x_0) + \dots + [\frac{f^n(x_0)}{n!} - m_n](x - x_0)^{n-1}}{(x - x_0)^{n-1}} = 0$$

logo $m_1 = f'(x_0)$, para que o limite acima seja igual a zero. Assim,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{[\frac{f''(x_0)}{2!} - m_2](x - x_0) + [\frac{f'''(x_0)}{3!} - m_3](x - x_0)^2 + \dots + [\frac{f^n(x_0)}{n!} - m_n](x - x_0)^{n-1}}{(x - x_0)^{n-1}} = 0$$

Repetindo o argumento acima analogamente $n - 2$ vezes obtemos que

$$m_2 = \frac{f''(x_0)}{2!}, m_3 = \frac{f'''(x_0)}{3!}, \dots, m_{n-1} = \frac{f^{n-1}(x_0)}{(n-1)!} \quad e$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{[\frac{f^n(x_0)}{n!} - m_n](x - x_0)}{(x - x_0)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^n(x_0)}{n!} - m_n = 0$$

Portanto, para que o limite anterior seja zero, necessariamente

$$m_n = \frac{f^n(x_0)}{n!}.$$

■