



Universidade Federal da Paraíba  
Centro de Informática  
Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática e Computacional

UM ESTUDO DO DIAGRAMA DE VORONOI PARA DOIS PONTOS  
GERADORES ESPECÍFICOS COM UM OBSTÁCULO CIRCULAR

Rafael Pereira de Lima

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática e Computacional, UFPB, da Universidade Federal da Paraíba, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Modelagem Matemática e Computacional.

Orientadores: Sérgio de Carvalho Bezerra  
Ana Flávia Uzêda dos Santos  
Macambira

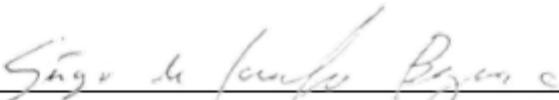
João Pessoa  
Junho de 2021

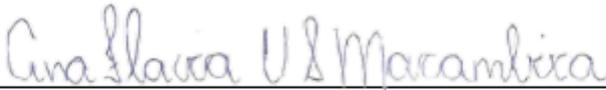
UM ESTUDO DO DIAGRAMA DE VORONOI PARA DOIS PONTOS  
GERADORES ESPECÍFICOS COM UM OBSTÁCULO CIRCULAR

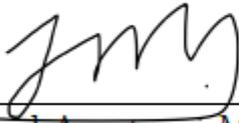
Rafael Pereira de Lima

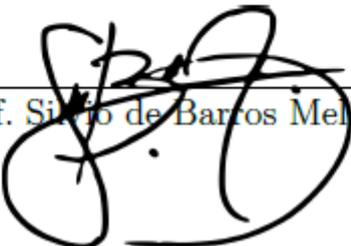
DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO PROGRAMA DE  
PÓS-GRADUAÇÃO EM MODELAGEM MATEMÁTICA E COMPUTACIONAL  
(PPGMMC) DO CENTRO DE INFORMÁTICA DA UNIVERSIDADE FEDERAL  
DA PARAÍBA COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A  
OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS EM MODELAGEM  
MATEMÁTICA E COMPUTACIONAL.

Examinada por:

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Sérgio de Carvalho Bezerra, D.Sc.

  
\_\_\_\_\_  
Profa. Ana Flávia Uzêda dos Santos Macambira, D.Sc.

  
\_\_\_\_\_  
Prof. José Miguel Aroztegui Massera, D.Sc.

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Silvio de Barros Melo, D.Sc.

JOÃO PESSOA, PB – BRASIL  
JUNHO DE 2021

**Catálogo na publicação**  
**Seção de Catalogação e Classificação**

L732e Lima, Rafael Pereira de.

Um estudo do diagrama de Voronoi para dois pontos geradores específicos com um obstáculo circular / Rafael Pereira de Lima. - João Pessoa, 2021.

67 f. : il.

Orientação: Sérgio de Carvalho Bezerra, Ana Flávia Uzêda dos Santos Macambira.

Dissertação (Mestrado) - UFPB/CI.

1. Geometria. 2. Diagrama do Voronoi. 3. Distância euclidiana. 4. Grafo de visibilidade. I. Bezerra, Sérgio de Carvalho. II. Macambira, Ana Flávia Uzêda dos Santos. III. Título.

UFPB/BC

CDU 514(043)

*Aos meus pais.*

# Agradecimentos

Aos meus pais, João Inácio de Lima e Maurina Pereira da Silva, por sempre incentivarem meus estudos e se esfoçarem em garantir a possibilidade de prosseguimento nos mesmos.

Aos meus orientadores, Sergio de Carvalho Bezerra e Ana Flávia Uzeda dos Santos Macambira, por toda a valiosa e imprescindível ajuda ao longo deste trabalho.

Aos professores José Miguel Aroztegui Massera e Silvio de Barros Melo por participarem da banca, e a todos os outros professores do programa de pós graduação em modelagem matemática e computacional, que contribuíram de alguma forma para a minha formação e para que eu superasse mais essa etapa de minha vida.

Aos meus companheiros do curso de mestrado, os quais tive a oportunidade de estudar junto, seja em alguma disciplina ou em grupos de estudo, que se mostraram importantíssimos para que eu conseguisse vencer as etapas anteriores e chegar até aqui na concretização desse título.

Resumo da Dissertação apresentada ao PPGMMC/CI/UFPB como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

UM ESTUDO DO DIAGRAMA DE VORONOI PARA DOIS PONTOS  
GERADORES ESPECÍFICOS COM UM OBSTÁCULO CIRCULAR

Rafael Pereira de Lima

Junho/2021

Orientadores: Sérgio de Carvalho Bezerra

Ana Flávia Uzêda dos Santos Macambira

Programa: Modelagem Matemática e Computacional

Neste trabalho, estudamos conceitos relacionados ao diagrama de Voronoi, uma estrutura de dados geométrica importante na solução de problemas de proximidade. Sua construção se dá pela comparação entre pontos dispostos em um certo espaço e pontos específicos, chamado de sítios ou pontos geradores. Pontos que se encontram a mesma distância de dois sítios vizinhos compõe a fronteira do diagrama. Existem algoritmos que permitem construir esse diagrama quando é inserido obstáculos poligonais entre os sítios. Porém, esses algoritmos não servem para quando esses obstáculos possuem outros formatos. Nesse sentido, propomos um algoritmo computacional para determinar a fronteira do diagrama de Voronoi quando se tem um obstáculo circular entre dois pontos geradores dispostos no espaço plano  $\mathbb{R}^2$ .

Abstract of Dissertation presented to PPGMMC/CI/UFPB as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.)

A STUDY OF THE VORONOI DIAGRAM FOR TWO SPECIFIC  
GENERATING POINTS WITH A CIRCULAR OBSTACLE

Rafael Pereira de Lima

June/2021

Advisors: Sérgio de Carvalho Bezerra

Ana Flávia Uzêda dos Santos Macambira

Program: Computational Mathematical Modelling

In this work, we study concepts related to the Voronoi diagram, an important geometric data structure for solving proximity problems. Its construction takes place by comparing points arranged in a certain space and specific points, called the sites or generating points. Points that are the same distance from two neighboring sites make up the border of the diagram. There are algorithms that allow to build this diagram when polygonal obstacles are inserted between the sites. However, these algorithms are not useful when these obstacles have other formats. In this sense, we propose a computational algorithm to determine the boundary of the Voronoi diagram when there is a circular obstacle between two generating points arranged in the flat space  $\mathbb{R}^2$ .

# Sumário

<b>Lista de Figuras</b>	<b>ix</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
1.1 Objetivos . . . . .	2
1.2 Justificativa . . . . .	2
1.3 Estrutura do trabalho . . . . .	3
<b>2 Revisão Bibliográfica</b>	<b>4</b>
2.1 Teoria dos Grafos . . . . .	4
2.1.1 Grafos planares e grafos duais . . . . .	8
2.1.2 Grafos de visibilidade . . . . .	11
2.2 Diagrama de Voronoi . . . . .	11
2.2.1 Diagrama de Voronoi no plano . . . . .	14
2.2.2 Aplicações do diagrama de Voronoi e Triângulação de Delaunay	21
2.3 Diagrama de Voronoi por meio de grafos . . . . .	26
<b>3 Método e Resultados</b>	<b>29</b>
3.1 Diagrama de Voronoi com obstáculos circulares . . . . .	29
3.2 Diagrama de Voronoi gerado por dois pontos geradores específicos e com um obstáculo circular centrado na origem $O = (0,0)$ e de raio $r = 1$ . . . . .	30
3.3 Pseudocódigo . . . . .	46
<b>4 Conclusões</b>	<b>52</b>
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>54</b>
<b>A Código</b>	<b>57</b>

# Lista de Figuras

1.1	Sítios, Semiplanos e Diagrama de Voronoi Simples(Sem obstáculos). . .	1
1.2	Os pontos $p_1$ e $p_2$ estão separados por um obstáculo. Neste caso, não é possível ligá-los diretamente por uma linha reta. . . . .	2
2.1	As sete pontes de Königsberg em 1736 e o respectivo "multigrafo". . .	4
2.2	Grafo desconexo com $n = 17$ vértices e $m = 22$ arestas. . . . .	5
2.3	Cruzamento de arestas. . . . .	6
2.4	Grafo conexo e desconexo. . . . .	8
2.5	Grafos dos 5 sólidos platônicos: tetraedro, cubo, octaedro, dodecaedro e icosaedro. . . . .	9
2.6	Grafo $K_5$ . . . . .	9
2.7	Grafo $G$ e seu respectivo grafo dual $G'$ . . . . .	10
2.8	Grafo dual. . . . .	11
2.9	Grafo de visibilidade. . . . .	12
2.10	Fecho convexo. . . . .	13
2.11	Diagrama de Voronoi. . . . .	15
2.12	Diagrama de Voronoi através da interseção de semiplanos. . . . .	16
2.13	Diagrama de Voronoi para 2 geradores. . . . .	16
2.14	Semiplano $H(p_i, p_j)$ que contém o ponto gerador $p_i$ . . . . .	17
2.15	Diagrama de Voronoi para 3 geradores. . . . .	17
2.16	Círculo vazio máximo de um ponto arbitrário em relação a um conjunto de pontos $S$ . . . . .	18
2.17	Círculos vazios máximos num diagrama de Voronoi. Pontos em três casos: interior a uma região, sobre uma aresta e coincidente com um vértice. . . . .	19
2.18	(A) Triangulação versus (B) Triangulação de Delaunay. . . . .	23
2.19	Triangulação de uma figura em diferentes resoluções. . . . .	24
2.20	A dualidade entre o Diagrama de Voronoi para pontos de um conjunto e a Triangulação de Delaunay. . . . .	26
2.21	Grafo de um Diagrama de Voronoi. . . . .	27

3.1	Diagrama de Voronoi para os pontos $p_1$ e $p_2$ sem obstáculo entre eles.	31
3.2	Pontos da fronteira do diagrama que são visíveis a $p_1$ e $p_2$ .	32
3.3	Representação de um ponto da fronteira para dois geradores específicos cujo segmento que os ligam passa pelo centro de um círculo.	33
3.4	Coordenadas do ponto $p$ .	34
3.5	Representação do ponto $g$ .	35
3.6	Regiões de análise.	40
3.7	Ponto $z$ acima da reta $r_2$ .	41
3.8	Grafo de proximidade para a situação em que o ponto $u$ enxerga $p_2$ .	45
3.9	Grafo de proximidade para a situação em que o ponto $u$ não enxerga $p_2$ .	45
3.10	Diagrama de Voronoi para $a = 2$ e $b = -10$ .	49
3.11	Diagrama de Voronoi para $a = 2$ e $b = -8$ .	49
3.12	Diagrama de Voronoi para $a = 2$ e $b = -5$ .	50
3.13	Diagrama de Voronoi para $a = 2$ e $b = -4$ .	50
3.14	Diagrama de Voronoi para $a = 2$ e $b = -2$ .	51

# Capítulo 1

## Introdução

O diagrama de Voronoi é uma estrutura de dados geométrica importante para a solução de problemas de proximidade. Seu uso é bastante difundido nas áreas de ciências exatas aplicadas como, por exemplo, na computação gráfica. Seu princípio é, basicamente, comparar distâncias entre os pontos de um dado espaço e alguns pontos específicos, chamados de pontos geradores ou conhecidos também como sítios e então determinar quais destes pontos do dado espaço encontram-se mais próximo de um gerador ou de outro. O diagrama de Voronoi pode ser construído comparando as distâncias entre os pontos da região e os sítios ou ainda pela interseção entre semiplanos, usando para isso uma métrica adequada como, por exemplo, a euclidiana. O conjunto dos pontos da região que se encontram mais próximos de um gerador do que outro forma o que se chama célula de Voronoi. As células de Voronoi, no espaço plano, possuem o formato de polígonos convexos, também denominados de polígonos de Thiessen. Um polígono convexo, de acordo DOLCE e POMPEO [7], “é aquele em que a reta determinada por dois vértices consecutivos quaisquer deixa todos os demais vértices num mesmo semiplano dos dois que ela determina”.

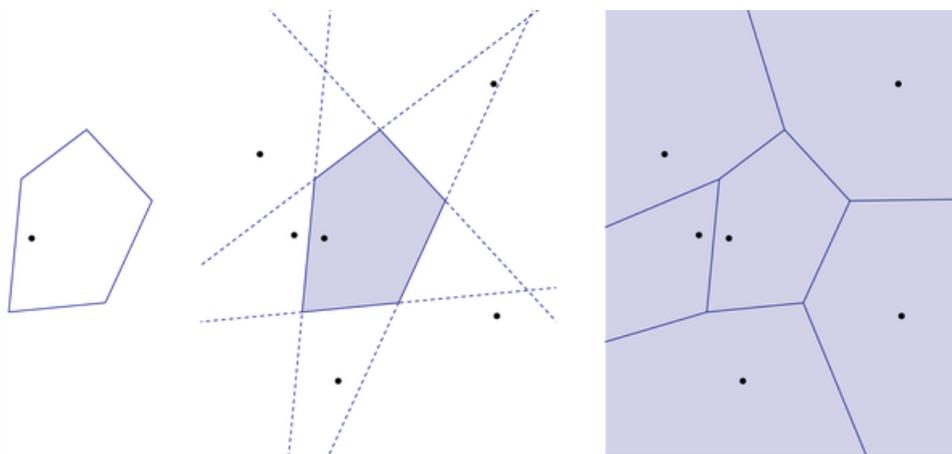


Figura 1.1: Sítios, Semiplanos e Diagrama de Voronoi Simples(Sem obstáculos).

Fonte: SILVA [24]

Ao utilizar a distância euclidiana na construção de um Diagrama de Voronoi, obtido a partir de um determinado espaço plano, é possível estabelecer o menor caminho entre dois pontos localizados neste espaço. Entretanto, quando se tem um obstáculo pode não ser possível ligar dois pontos pertencentes à região do Diagrama de Voronoi por uma reta. Neste caso é necessária a utilização de uma nova estratégia para encontrar o menor caminho entre dois pontos separados por um obstáculo.

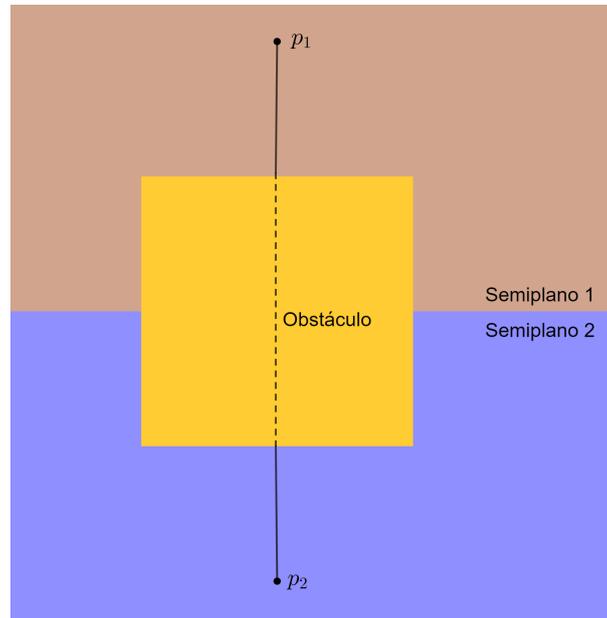


Figura 1.2: Os pontos  $p_1$  e  $p_2$  estão separados por um obstáculo. Neste caso, não é possível ligá-los diretamente por uma linha reta.

Fonte: Próprio Autor

## 1.1 Objetivos

O objetivo geral deste trabalho é discutir situações em que a fronteira do diagrama de Voronoi sofre uma certa “deformidade” proveniente da inserção de obstáculos entre os pontos geradores do espaço em questão.

Mais especificamente, este trabalho apresenta como objetivo, fornecer um algoritmo para encontrar o diagrama de Voronoi para uma situação onde se tem dois pontos geradores específicos no plano, separados por um obstáculo em formato circular de raio  $r \in \mathbb{R}$ . Em especial, trataremos do caso quando o raio tem módulo 1.

## 1.2 Justificativa

Uma das diversas aplicações para o diagrama de Voronoi pode ser encontrada na robótica. Em um mundo cada vez mais tecnológico, os robôs tornam-se protagonistas de importantes papéis. Uma das funções que esses robôs podem desempenhar

é caminhar em terrenos tendo que desviar de obstáculos. Uma forma de um robô poder caminhar sem ter que esbarrar em um obstáculo é seguir um trajeto formado pela fronteira de um diagrama de Voronoi, onde os sítios representariam tais obstáculos.

Com base na bibliografia consultada pôde-se observar que é conhecida a maneira no qual o diagrama de Voronoi é construído ao se deparar com obstáculo poligonal. Quando o obstáculo é formado por um polígono, adicionamos os vértices deste polígono, calculamos o grafo de visibilidade e depois encontramos o menor caminho a partir de um algoritmo como o Dijkstra. No entanto, não encontramos na literatura resultados para o caso de obstáculo circular. Como não sabemos ao certo como se dá a construção do diagrama de Voronoi para este caso, então nos motivamos a buscar respostas para esta situação.

## 1.3 Estrutura do trabalho

- **Cápítulo 1**

Apresenta um introdução ao tema que será abordado ao longo de toda a dissertação, mostrando qual o objetivo da mesma, a justificativa, além de como o trabalho é estruturado.

- **Cápítulo 2**

Aborda uma revisão acerca de alguns conceitos pertinentes para ao entendimento do diagrama de Voronoi, como por exemplo, o conceito de Grafos e sua ligação com o diagrama de Voronoi.

- **Capítulo 3**

É discutido como se comporta a fronteira do Diagrama de Voronoi quando se tem obstáculo poligonais envolvido no espaço plano. Em seguida, partimos para o estudo de como é esse comportamento da fronteira do diagrama quando o obstáculo é circular. Especificamente, falamos do caso para dois pontos geradores específicos separados por um obstáculo em formato circular.

- **Capítulo 4**

São feitas algumas considerações finais, além de apresentarmos algumas sugestões para possíveis trabalhos futuros.

# Capítulo 2

## Revisão Bibliográfica

### 2.1 Teoria dos Grafos

De acordo com FEOFILOFF, P., KOHAYAKAWA, Y. e Y.WAKABAYASHI, a teoria dos grafos estuda objetos combinatórios - os grafos - que são um bom modelo para muitos problemas em vários ramos da matemática, da informática, da engenharia e da indústria. Já segundo SILVA [24] a teoria dos grafos é um ramo da matemática que estuda as relações entre os objetos de um determinado conjunto através de estruturas abstratas chamadas grafos. A origem da teoria dos grafos, em geral, é atribuída ao problema das pontes de Königsberg (cidade da Prússia que atualmente se chama Kaliningrado). Parte desta cidade localizava-se em duas ilhas do rio Pregel as quais estavam ligadas às margens e uma à outra através de 7 pontes, conforme a Figura 2.1.

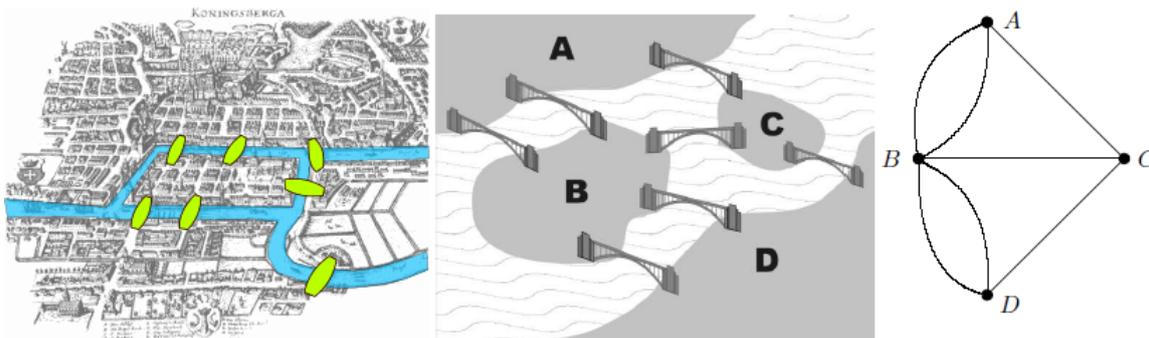


Figura 2.1: As sete pontes de Königsberg em 1736 e o respectivo "multigrafo".  
Fonte: CARDOSO [3] e GIUȘCĂ [12].

Königsberg possuía duas pequenas ilhas cortadas pelo Rio Pregel que, na época, tinha seis pontes ligando-as às margens e uma outra ponte fazendo a ligação entre as duas ilhas. Por volta de 1735, os moradores de Königsberg se perguntaram se seria possível cruzar as sete pontes passando uma única vez por cada uma e retornando ao

ponto de partida. Na época, quem decifrou o problema foi o matemático Leonhard Euler, revelando ser impossível tal façanha.

Para resolver o problema das pontes, Euler eliminou os detalhes geométricos do problema, como o comprimento das pontes, a sua forma e o tamanho das ilhas, descartando assim, tudo que era irrelevante ao problema, focando somente no que importava. Dessa forma, ele acabou representando o problema pelo que hoje chamamos de *grafo*. Na Figura 2.1 é possível observar o esquema usado por Euler.

De acordo com FEOFILOFF [9] grafo é um conceito moderno, que não existia na época do Euler. A palavra grafo, e o seu uso generalizado para a resolução de problemas, só surgiram a partir do século 19 por outros matemáticos, tais como Kirchhoff, Cayley e Hamilton . Segundo FEOFILOFF [9] um grafo é algo muito simples, um desenho no qual temos alguns pontos e linhas ligando pares de pontos. De maneira formal podemos invocar a definição a seguir encontrada em CARDOSO [3].

**Definição 2.1.1** *Um grafo  $G$  é um par de conjuntos  $(V, E)$ , tal que  $V = V(G) = \{v_1, \dots, v_n\}$  é o conjunto dos vértices e  $E = E(G)$  é o conjunto das arestas, a cada uma das quais corresponde um subconjunto de  $V(G)$  de cardinalidade 2, i.e.,  $E(G) = \{e_1, \dots, e_m\}$ , com  $e_k = \{v_{ki}, v_{kj}\}$ ; para  $k \in \{1, \dots, m\}$  e  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ .*

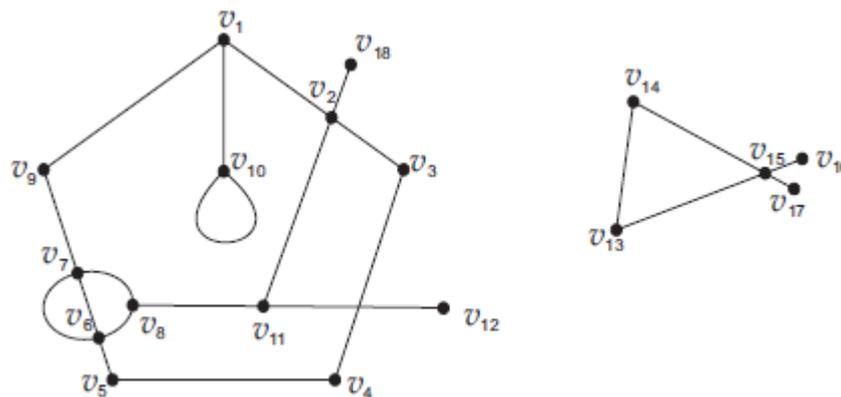


Figura 2.2: Grafo desconexo com  $n = 17$  vértices e  $m = 22$  arestas.  
Fonte: PAMPLONA [20]

No caso do problema das pontes, o grafo de Euler tinha quatro vértices: um representando uma das margens do rio, outro, a outra margem e mais dois representando as duas ilhas. Assim, o grafo tinha quatro vértices e sete arestas, que representavam as pontes. O desafio era partir de um dos quatro vértices, passear pelas sete arestas e retornar ao vértice de origem. Euler notou que ao atravessar um vértice, são gastos exatamente duas arestas, uma para entrar no vértice e outra para sair. Com isso, cada vértice deveria ter grau (que é o número de arestas que incidem

no vértice) par de arestas. Porém, os vértices do grafo das pontes de Königsberg possuem grau ímpar e, portanto, o problema não tem solução.

A ideia de grafos serve de modelo para uma gama de problemas práticos, seja na indústria, na informática, ou na engenharia. Um deles tem a ver com o desafio enfrentado pelos carteiros. O carteiro parte da sede dos correios, percorre as ruas para fazer as entregas e volta ao seu posto de trabalho. Ele realiza um percurso diariamente para entregar as cartas e é preciso que ele passe por uma mesma rua o menor número de vezes possível. Na coleta de lixo temos um problema semelhante. O caminhão tem que sair do depósito, percorrer o seu trajeto com o mínimo de repetição de ruas.

Uma vez entendido o conceito básico de grafo e sua importância, mostraremos algumas definições, que serão úteis no decorrer do texto, baseadas nas referências [1], [3], [8], [13], [20] e [24].

**Definição 2.1.2** (*Diagrama*): Um diagrama é uma representação gráfica para o grafo.

Podem existir infinitos diagramas para representar um mesmo grafo.

**Definição 2.1.3** (*Cruzamento de arestas*): Um cruzamento de arestas é a intersecção de duas arestas no diagrama de um grafo, sem que haja um vértice na intersecção. Um cruzamento, às vezes, pode ser eliminado desenhando-se outro diagrama para o grafo.

**Exemplo 2.1.1** As arestas  $(v_1, v_3)$  e  $(v_1, v_4)$  se cruzam no diagrama da esquerda.

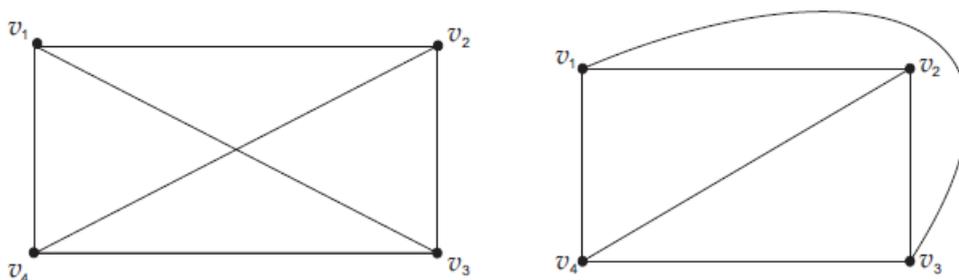


Figura 2.3: Cruzamento de arestas.  
Fonte: PAMPLONA [20]

**Definição 2.1.4** (*Incidência*): Uma aresta é dita incidente a um vértice  $v$ , quando essa aresta está ligada a  $v$ .

**Definição 2.1.5** (*Vértices adjacentes*): Dois vértices são adjacentes quando estão ligados por uma mesma aresta.

**Definição 2.1.6** (*Arestas adjacentes*): Duas arestas são adjacentes quando compartilham um mesmo vértice.

**Definição 2.1.7** (*Ordem de um grafo*): A ordem de um grafo  $G$  é dada pelo número de vértices de  $G$ . Pode-se representar o número de vértices de  $G$  por  $|V|$ .

**Definição 2.1.8** (*Passeio ou percurso*): Um passeio ou percurso é uma sequência alternada finita de vértices e arestas da forma

$$v_0, e_1, v_1, e_2, \dots, v_{k-1}, e_k, v_k$$

começando e terminando com vértices tais que  $v_{i-1}$  e  $v_i$  são os vértices terminais da aresta  $e_i$ ,  $1 \leq i \leq k$ .

**Definição 2.1.9** (*Cadeia, trilha ou trajeto*): Uma cadeia, trilha ou trajeto é um passeio sem arestas repetidas. Entretanto, pode haver vértices repetidos.

**Definição 2.1.10** (*Caminho*): Um caminho é um passeio sem vértices repetidos.

**Definição 2.1.11** (*Circuito*): Um circuito é um trajeto fechado, ou seja, onde o vértice final coincide com o inicial.

**Definição 2.1.12** (*Ciclo*): Um ciclo é um circuito onde os vértices inicial e final são os únicos que coincidem.

Portanto, concluímos que todo ciclo é um circuito, mas nem todo circuito é um ciclo.

**Definição 2.1.13** (*Grafo finito e infinito*): Um grafo é dito finito quando possui ordem finita. Caso contrário, é dito infinito.

**Definição 2.1.14** (*Grafo conexo e desconexo*): Um grafo é conexo se existir um caminho entre qualquer par de vértices. Caso contrário, é desconexo.

**Definição 2.1.15** (*Grafo Completo*) Um grafo completo é aquele onde todo par de vértices é ligado por uma aresta. Um grafo completo com  $n$  vértices é chamado  $K_n$ .

**Definição 2.1.16** (*Comprimento de um Caminho*): O comprimento de um caminho é o número de arestas do grafo.

**Definição 2.1.17** (*Distância entre dois vértices*): A distância entre dois vértices, denotada por  $d(v_1, v_2)$ , corresponde ao caminho de menor comprimento capaz de ligar  $v_1$  a  $v_2$ . Caso não haja nenhum caminho conectando dois vértices quaisquer, então dizemos que a distância entre eles é infinita.

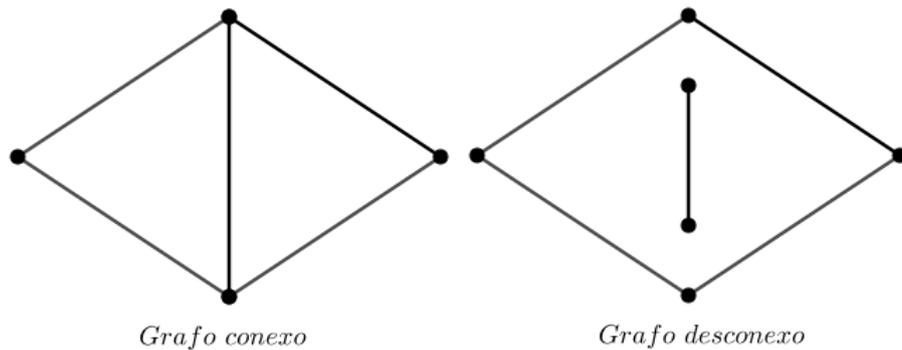


Figura 2.4: Grafo conexo e desconexo.  
 Fonte: Próprio autor.

É importante, em muitas aplicações, desenhar grafos com certas restrições. Por isso, abordaremos agora o conceito de alguns tipos de grafos como os grafos planares, que são aqueles desenhados no plano sem que haja cruzamento de arestas. E também falaremos dos grafos de visibilidade, que podem ser utilizados para encontrar caminhos euclidianos mais curtos em um conjunto de obstáculos poligonais no plano.

### 2.1.1 Grafos planares e grafos duais

De acordo com JURKIEWICZ [13], quando um grafo admite uma representação gráfica em que as arestas só se encontram, possivelmente, nos vértices a que são incidentes o chamamos de *grafo planar*. Em outras palavras e, conforme WILSON [25], podemos redesenhá-lo em um papel de tal forma que as arestas não se cruzem. Nem sempre é possível encontrar uma representação planar para um grafo.

Na figura 2.5 podemos ver alguns exemplos de grafos planares que representam os poliedros platônicos.

Uma representação gráfica de um grafo com pelo menos um ciclo, separa o plano em regiões delimitadas por suas arestas. Chamamos essas regiões de *faces*. Além disso, também consideramos a região exterior ao grafo, que não é limitada por suas arestas, como uma face do grafo. Dizemos que uma face é finita se sua região possuir área finita, caso contrário, a face é infinita.

Para grafos planares, vale a relação de Euler para poliedros convexos.

**Teorema 2.1.1** *Num grafo planar conexo vale a relação  $f + v - a = 2$ . Onde  $f$  é o número de faces,  $v$  o de vértices e  $a$  o número de arestas.*

**Demonstração:** Ver JURKIEWICZ [13].

Segundo JURKIEWICZ [13] podemos acrescentar arestas a um grafo planar sempre que uma porção do plano estiver limitada por um ciclo de comprimento

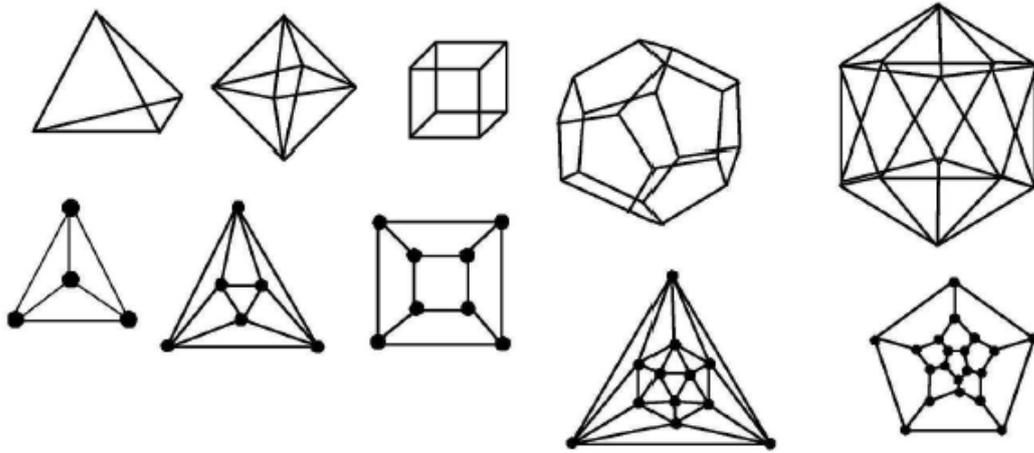


Figura 2.5: Grafos dos 5 sólidos platônicos: tetraedro, cubo, octaedro, dodecaedro e icosaedro.

Fonte: JURKIEWICZ [13].

maior do que 3 e, com isso, um *grafo maximal planar* (grafo ao qual não podemos acrescentar arestas sem comprometer a sua planaridade) tem uma representação composta por ciclos de comprimento 3. Assim, uma outra relação importante é estabelecida, conforme a vemos a seguir.

**Teorema 2.1.2** *Num grafo planar conexo  $G$  vale que  $a \leq 3v - 6$ , onde  $a$  representa o número de arestas de  $G$  e  $v$  indica o número de vértices. A igualdade vale se  $G$  é maximal planar.*

**Demonstração:** Ver JURKIEWICZ [13].

Este teorema nos dá outra demonstração de que  $K_5$  não é planar. De fato,  $K_5$  não obedece à relação acima:  $10 > 3 \cdot 5 - 6$ . Todos os grafos completos com mais do que 4 vértices também não obedecem a tal relação.

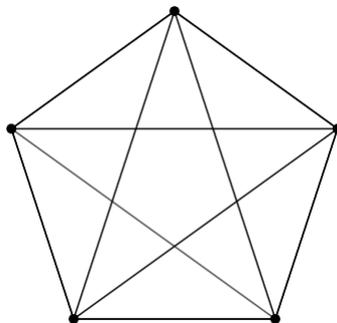


Figura 2.6: Grafo  $K_5$ .  
Fonte: Próprio autor.

Temos ainda dois resultados importantes acerca da planaridade dos grafos.

De acordo com CARDOSO [3], JURKIEWICZ [13] e ainda, SILVA [24], a partir de um grafo simples planar  $G$ , podemos construir o que chamamos de *grafo dual*  $G'$  fazendo o seguinte procedimento:

1. A cada face de  $G$  faz-se corresponder um vértice de  $G'$ , incluindo a face externa;
2. A cada aresta  $a \in A(G)$  (conjunto das arestas de  $G$ ) faz-se corresponder uma aresta que liga duas faces (vértices de  $V(G')$ ) vizinhas, cruzando a aresta  $a$ .

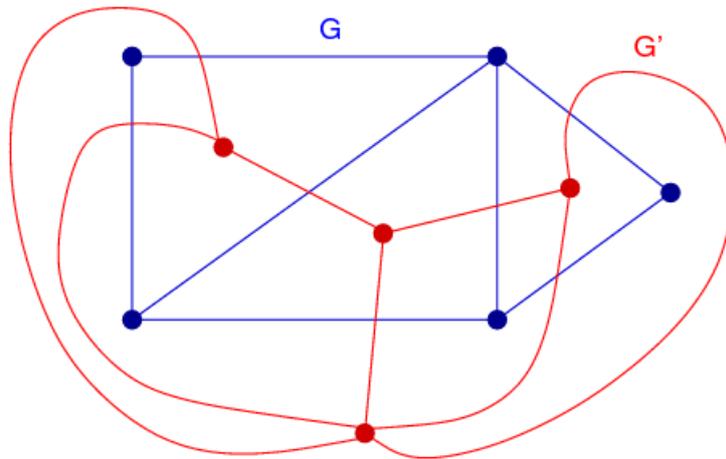


Figura 2.7: Grafo  $G$  e seu respectivo grafo dual  $G'$ .  
Fonte: MAKSIM [15].

Os sólidos platônicos apresentados na Figura 2.5 são bons exemplos de grafos duais. O cubo é o dual do octaedro, o icosaedro é o dual do dodecaedro e o tetraedro é o dual dele mesmo (autodual). Esses duais correspondem aos duais da geometria clássica. A Figura 2.8 mostra a correspondência entre as faces do cubo e os vértices do octaedro.

De acordo com CARDOSO [3], através do teorema a seguir, podemos dizer que o dual do dual de  $G$  é o próprio grafo  $G$ .

**Teorema 2.1.3** *Dado  $G$  um grafo planar e seu respectivo dual  $G'$ , podemos dizer que:*

1.  $G'$  é conexo;
2. Se  $G$  é conexo, então  $(G')' = G$ .

**Demonstração:** Ver CARDOSO [3].

De acordo com SILVA [24], se um grafo dual  $G'$  é finito então o grafo  $G$  também deve ser finito. Além disso, se um grafo  $G$  é planar então seu dual  $G'$  também o é.

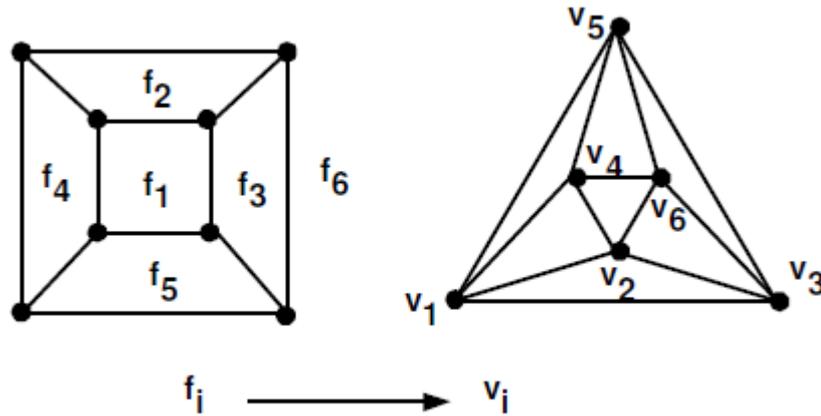


Figura 2.8: Grafo dual.  
 Fonte: JURKIEWICZ [13]

## 2.1.2 Grafos de visibilidade

Um *grafo de visibilidade* no plano euclidiano é aquele que apresenta algumas de suas partes, como vértices e arestas, encobertas por obstáculos poligonais. Os vértices do grafo de visibilidade representam os pontos de observação, de onde é possível enxergar outros pontos de observação, e cada aresta representa uma conexão direta (por um segmento de reta) entre eles. De acordo com LIMA [14] os grafos de visibilidade são usados para se calcular caminhos de distância euclidiana mínima dentro de um ambiente com obstáculos.

Considerando o conjunto  $P' = P \cup \{s, t\}$ , onde  $P$  é o conjunto dos vértices dos obstáculos poligonais e  $s$  e  $t$  são dois pontos dispostos no plano que contém os obstáculos, e o conjunto  $A$  de arestas formado pelos segmentos de retas que unem os pontos do conjunto  $P'$ , podemos definir o grafo de visibilidade  $Gvis(P', A)$ .

A Figura 2.9 nos apresenta um grafo de visibilidade onde temos em vermelho as arestas do grafo, em verde os vértices dos polígonos e em preto,  $s$ ,  $t$  e a região interior dos polígonos.

## 2.2 Diagrama de Voronoi

De acordo com MESQUITA [16], o diagrama de Voronoi se configura como uma das mais importantes estruturas na geometria computacional que, em linhas gerais, armazena informações sobre elementos que estão mais próximos de determinado ponto. Por exemplo, imagine que uma determinada cidade possui diversos postos de saúde e que estes deverão estender a área de atendimento as famílias das casas que se encontram mais próximas desses postos. Dessa forma, o conjunto das casas localizadas a mesma distância de dois ou mais pontos de saúde formam um diagrama

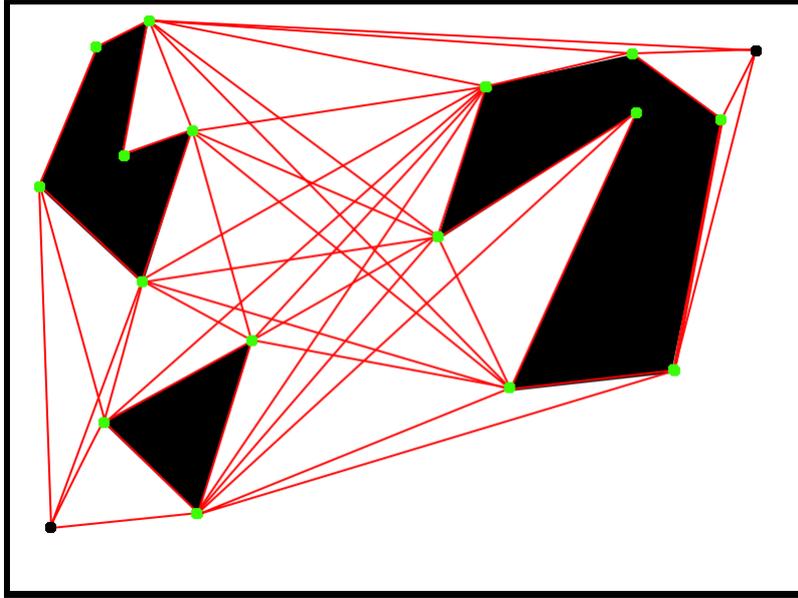


Figura 2.9: Grafo de visibilidade.  
 Fonte: LIMA [14].

de Voronoi.

Em SILVA [24] nos é apresentado ainda que se trata de uma estrutura de dados geométrica com uso tanto na computação gráfica quanto em outros campos de aplicação envolvendo a resolução de problemas de proximidade. Tal diagrama é caracterizado pelo fato de poder capturar a estrutura espacial de um dado conjunto de informações comumente representado por pontos e distância entre os mesmos por meio de linhas retas.

Segundo Okabe *et al.*(1992), conforme menciona CARNASCIALI [4] René Descartes já trazia em seu trabalho *Le Monde de Mr Descartes* (escrito entre 1629 e 1633) e a Parte III do livro *Principia Philosophiae*, que foram publicados em 1644, o uso de diagramas semelhantes aos que hoje denominamos por Voronoi ao demonstrar a disposição do Sistema Solar e seus arredores.

Conforme aponta CARNASCIALI [4], os primeiros resultados que trouxeram o diagrama de Voronoi formado pela união de polígonos convexos foram apresentados pelos matemáticos Lejeune Dirichlet e Georges Voronoi, em 1850 e 1908, respectivamente, quando Dirichlet apresentou o conceito do diagrama para duas e três dimensões e Voronoi o generalizou para  $n$  dimensões. Devido a grande contribuição desses dois matemáticos, o conceito ficou conhecido tanto por Tesselação de Dirichlet como também por diagrama de Voronoi.

De acordo com Okabe *et al.*(1992), como é citado por CARNASCIALI [4], além da matemática, duas outras áreas tiveram contribuições dos estudos derivados do diagrama de Voronoi. A primeira área a aplicar tais estudos foi a Meteorologia, quando, em 1911, Alfred H. Thiessen usou o diagrama para fazer uma estimativa

mais precisa das médias de precipitação de chuva por regiões. A segunda, foi no campo da Mineralogia, quando aplicou-se os métodos do diagrama de Voronoi e passou-se a usar informações obtidas por meios da perfuração de solos para estimar reserva de depósitos de minério em determinadas regiões.

Ainda de acordo com Okabe(1992 apud CARNASCIALI [4]), além da Meteorologia e Mineralogia, os diagramas de Voronoi estiveram presentes nas áreas de Cristalografia e Química, ao mesmo tempo que foram utilizados para determinar áreas de fronteiras entre centros comerciais.

Segundo SILVA [24], o diagrama de Voronoi compõe uma das mais importantes estruturas da Geometria Computacional ao lado do Fecho Convexo, uma vez que ambos os conceitos possuem todas as informações necessárias sobre a proximidade de um conjunto de pontos. O Fecho Convexo é usado tanto na geração de outras estruturas como na construção de algoritmos mais complexos. A autora ainda observa que para ilustrar o seu conceito para um conjunto  $S$  de pontos, a imagem de um elástico (a fronteira do fecho) colocado ao redor de pregos (pontos) dispostos sobre uma tábua (o plano) é comumente usada nos livros de Geometria Computacional como ilustra a Figura 2.10. Este conceito pode ser estendido para três ou mais dimensões.

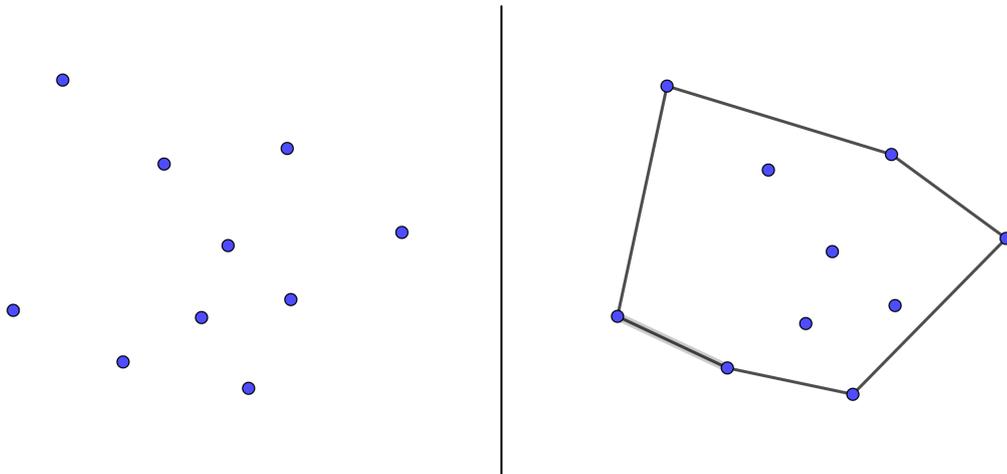


Figura 2.10: Fecho convexo.  
Fonte: Próprio autor.

Conforme FIGUEIREDO e CARVALHO [10], uma definição formal para o fecho convexo de um conjunto de pontos é a seguinte:

**Definição 2.2.1** *Considere*

$$S = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$$

um conjunto de pontos. O menor conjunto convexo que contém  $S$ , denotado por  $Conv(S)$  é dado por:

$$Conv(S) = \{\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 + \dots + \lambda_n p_n; \lambda_i \geq 0 \text{ e } \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1\}.$$

Isto é,  $Conv(S)$  é o conjunto de todas as combinações convexas de elementos de  $S$ . Geometricamente, o Fecho Convexo é um polígono convexo cujos vértices são um subconjunto de  $S$  e que contém todos os pontos de  $S$ .

### 2.2.1 Diagrama de Voronoi no plano

De acordo com o que é colocado em SILVA [22], considerando um conjunto finito  $S = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$  de dois ou mais pontos distintos no plano euclidiano, chamados sítios, geradores ou ainda centróides, e associando cada localização do plano ao ponto  $p_i \in S$  mais próximo, com respeito à distância euclidiana, formam-se estruturas geométricas cuja união denominamos diagrama de Voronoi no Plano. As regiões formadas a partir da união de todos os pontos mais próximo de cada  $p_i \in S$  são chamadas de Polígonos, Células ou ainda Regiões de Voronoi.

Conforme também SILVA [24] apresenta, essas estruturas diz respeito ao particionamento do plano em polígonos convexos de interiores disjuntos associados a um conjunto de pontos em que cada região é formada por pontos do plano que estão mais próximos do ponto  $p_i \in S$  que a gera do que de qualquer ponto  $p_j \in S$ . Ao conjunto de pontos de  $S$  é dado o nome de conjunto de pontos geradores. Assim, dado um conjunto de pontos geradores no plano, o diagrama de Voronoi relativo à este conjunto é uma subdivisão deste plano em regiões formadas pelos pontos do plano que estão mais próximos a cada um dos pontos geradores.

A Figura 2.11 mostra um exemplo de diagrama de Voronoi em uma região plana para um conjunto  $S = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$  de pontos.

Formalmente, podemos apresentar a definição do diagrama de Voronoi Planar posta em SILVA [24]:

**Definição 2.2.2** *Seja  $S = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$  com  $n \geq 2$ , um conjunto finito de pontos em  $\mathbb{R}^2$ , chamados sítios ou geradores.*

*Particione o plano atribuindo a cada um de seus pontos  $p_i$  o sítio mais próximo. Todos os pontos associados a  $p_i$  formam um polígono convexo representado por  $V(p_i)$  ou  $V_i$  chamado célula, região ou polígono de Voronoi relativo à  $p_i$  de  $S$  e definido por:*

$$V_i = \{p \in \mathbb{R}^2; d(p_i, p) \leq d(p_j, p); i, j = 1 \dots n\}$$

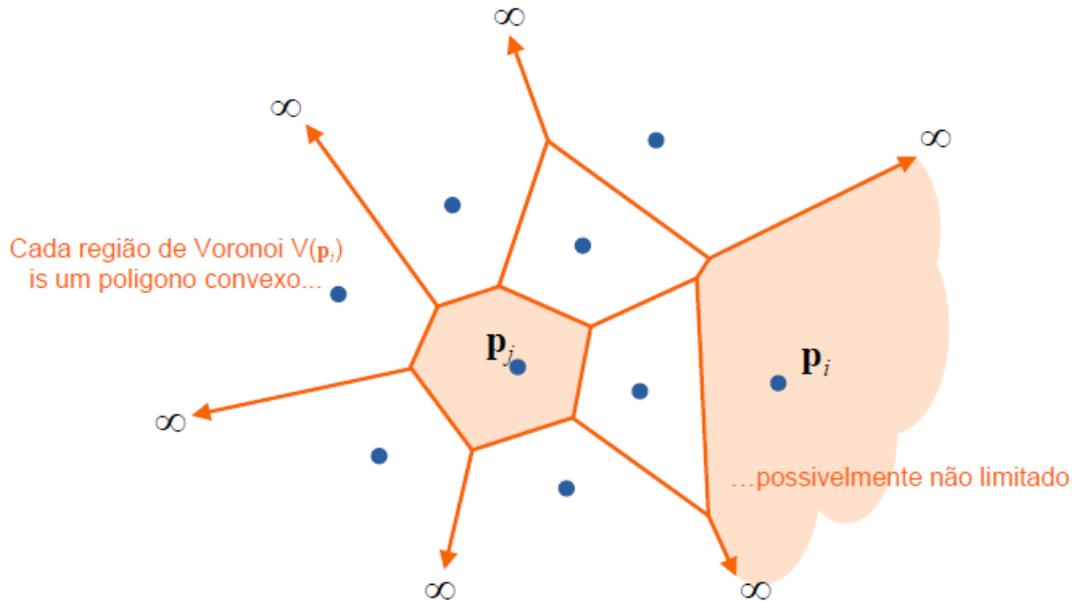


Figura 2.11: Diagrama de Voronoi.  
 Fonte: MONTENEGRO [17]

onde  $d$  denota a distância euclidiana em  $\mathbb{R}^2$ . Ao conjunto definido por:

$$Vor(S) = \{V_1, V_2, \dots, V_n\} = \{V(p_1), V(p_2), \dots, V(p_n)\}$$

chama-se diagrama de Voronoi.

É comum também definir o diagrama de Voronoi como sendo formado pelo conjunto de pontos do plano que se encontram equidistantes a dois ou mais pontos  $p_i \in S$ . Neste contexto, entende-se por diagrama de Voronoi o conjunto formado pelos segmentos de reta que compõem os lados dos polígonos convexos. Neste trabalho, adotaremos esses segmentos como sendo a fronteira do diagrama de Voronoi.

De acordo com SILVA [24], é possível obter o diagrama de Voronoi através da interseção de semiplanos conforme pode ser visto na Figura 2.12. A interseção de um conjunto de  $n$  semi-planos

$$H = \{h_1, h_2, \dots, h_n\}$$

em  $n$  dimensões, dá origem a uma região convexa.

Na prática, SILVA [24] apresenta que o resultado destas interseções resulta em um polítopo convexo limitado de dimensão  $n$ . Em outras palavras, quer dizer que trata-se de um fecho convexo de um número finito de pontos no espaço euclidiano.

Neste contexto, à medida que se aumenta o número de pontos geradores a construção do diagrama de Voronoi se torna cada vez mais evidente. Se considerarmos,

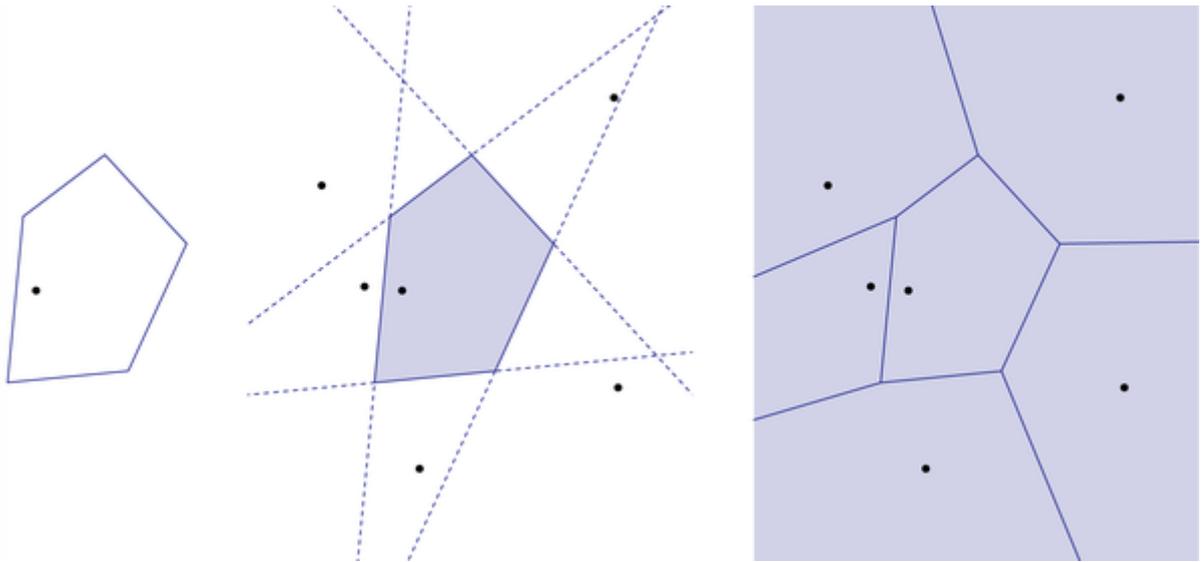


Figura 2.12: Diagrama de Voronoi através da interseção de semiplanos.

Fonte: SILVA [24]

por exemplo, apenas dois pontos geradores distintos  $p_1$  e  $p_2$ , teremos o diagrama representado na Figura 2.13 onde  $B(p_1; p_2)$ , cujos pontos são equidistantes a  $p_1$  e a  $p_2$ , é a reta mediatriz ao segmento  $\overline{p_1 p_2}$ .

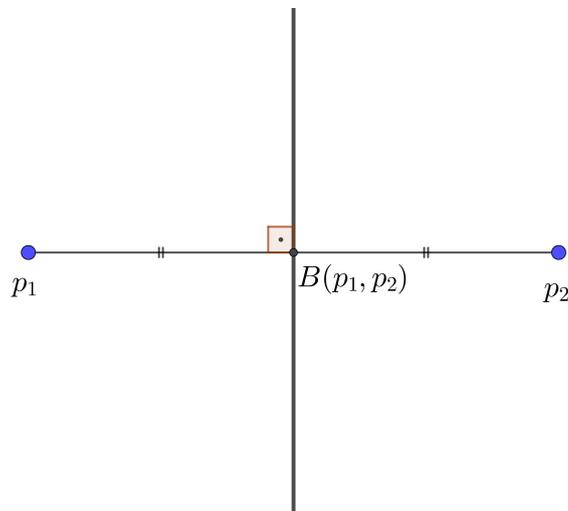


Figura 2.13: Diagrama de Voronoi para 2 geradores.

Fonte: Adaptado de SILVA [24]

Portanto, dados dois pontos distintos  $p_i$  e  $p_j$  no plano, o conjunto dos pontos mais próximos a  $p_i$  do que de  $p_j$  forma o semiplano, denotado por  $H(p_i, p_j)$ , que contém  $p_i$  definido pela mediatriz  $B(p_i, p_j)$  conforme pode ser visto na Figura 2.14. Este semiplano é definido por:

$$H(p_i, p_j) = \{p \in \mathbb{R}^2; d(p, p_i) \leq d(p, p_j) \text{ para } i \neq j\}.$$

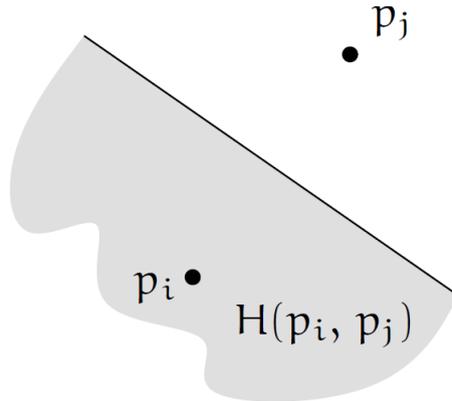


Figura 2.14: Semi-plano  $H(p_i, p_j)$  que contém o ponto gerador  $p_i$ .  
 Fonte: Adaptado de BARBA *et al.* [2]

e o semi-plano que contém  $p_j$  será denotado por  $H(p_j, p_i)$ .

Estendendo esta ideia para três geradores, por exemplo,  $p_1, p_2$  e  $p_3$ , o Diagrama de Voronoi é formado pelas mediatrizes do triângulo  $p_1p_2p_3$  partindo do seu circuncentro, como pode ser observado na Figura 2.15.

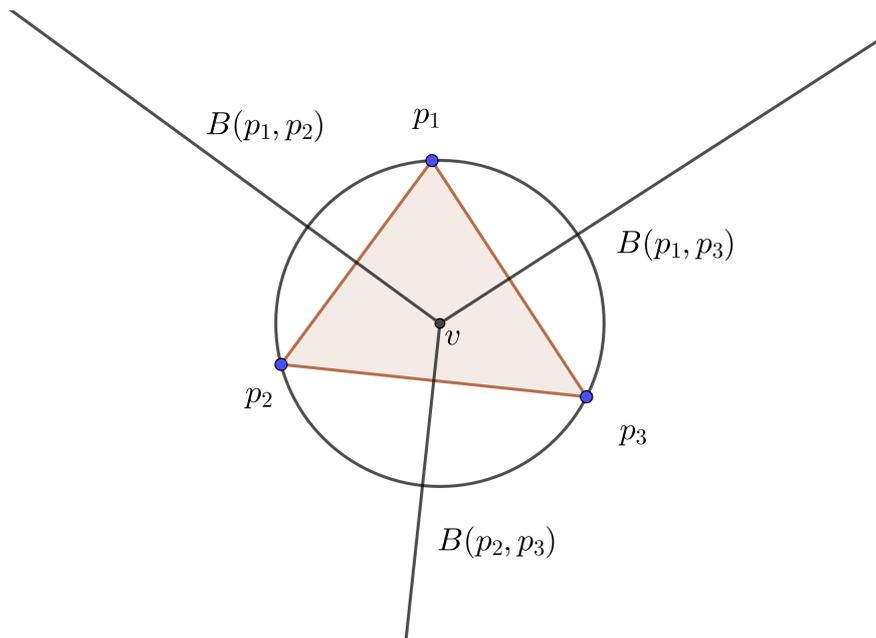


Figura 2.15: Diagrama de Voronoi para 3 geradores.  
 Fonte: Próprio Autor.

Generalizando essa ideia para uma quantidade  $n$  de geradores chegamos a construção do diagrama de Voronoi, como podemos observar na Figura 2.12. Dessa forma, para obtermos o polígono de Voronoi de  $p_i$ , denotado por  $V(p_i)$ , é necessário combinarmos todos os semi-planos  $H(p_i, p_j)$ , com  $i \neq j$ , e assim, temos que:

$$V(p_i) = \bigcap_{i \neq j} H(p_i, p_j).$$

Como os semiplanos são convexos, então, por definição de convexidade, não existe segmento de reta que una dois pontos de tais semiplanos que contenham pontos não pertencentes a eles. Com isso, de acordo com MONTENEGRO [17], temos que a interseção de conjuntos convexos é também um conjunto convexo, e conseqüentemente, qualquer polígono de Voronoi  $V(p_i)$ , fruto da interseção de  $n - 1$  semiplanos, também é convexo.

No diagrama de Voronoi, conforme SILVA [24], as arestas são determinadas pelos pontos da região do plano que se encontram exatamente a mesma distância entre dois pontos geradores, já os vértices são os pontos do plano que estão exatamente a mesma distância entre três pontos geradores. Dois pontos geradores  $p_i, p_j \in S$  de polígonos que compartilhem uma mesma aresta, são ditos pontos geradores vizinhos.

Uma forma de caracterizar as arestas e os vértices de um diagrama de Voronoi é por meio dos círculos vazios máximos assim como é apresentado em DINIS [6]:

**Definição 2.2.3** *Dado um ponto  $p \notin S$  qualquer, o círculo vazio máximo de  $p$  em relação ao conjunto  $S$ , designado por  $C_S(p)$ , é dado pelo maior círculo centrado no ponto  $p$  e que não contém nenhum ponto de  $S$  em seu interior. (Ver Figura 2.16)*

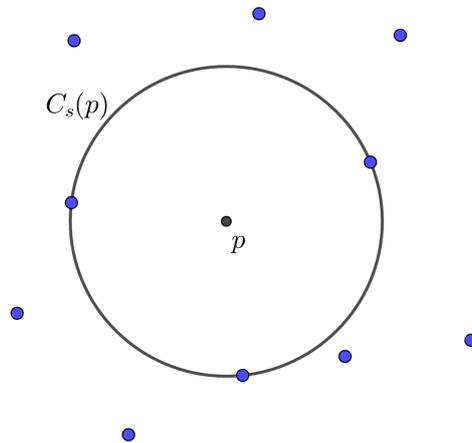


Figura 2.16: Círculo vazio máximo de um ponto arbitrário em relação a um conjunto de pontos  $S$ .

Fonte: Adaptado de DINIS [6].

Dessa forma, um círculo vazio máximo contém pelo menos um ponto de  $S$  em sua fronteira. Na Figura 2.15, consideramos o ponto  $p$  como o ponto  $v$  que é um dos vértices do diagrama de Voronoi. Como consequência dessa definição, temos, de acordo com DINIS [6], as seguintes propriedades:

1. Um ponto  $p$  pertence ao interior de  $V(p_i)$  se, e somente se,  $C_S(p)$  apenas contém o gerador  $p_i$  na sua fronteira.
2. Um ponto  $p$  pertence a uma aresta de  $Vor(S)$  se, e somente se,  $C_S(p)$  contém exatamente dois geradores na sua fronteira.
3.  $V(p_i)$  e  $V(p_j)$  partilham uma aresta se existe um ponto  $p$  tal que  $C_S(p)$  apenas contém  $p_i$  e  $p_j$  na sua fronteira.
4. Um ponto  $p$  é um vértice de  $Vor(S)$  se, e somente se,  $C_S(p)$  contém três ou mais geradores na sua fronteira.

Temos, portanto, de acordo com DINIS [6] que, o número de arestas que incidem num vértice é denominado de *grau* de um vértice. Esse número de arestas incidentes num vértice equivale ao número de locais na fronteira do respectivo círculo vazio máximo onde se encontram pontos geradores. Vértices com grau superior a três são ditos *vértices múltiplos*.

Estas propriedades podem ser vistas na Figura 2.17. A propriedade dos círculos vazios máximos permite conhecer as arestas e os vértices do diagrama de Voronoi.

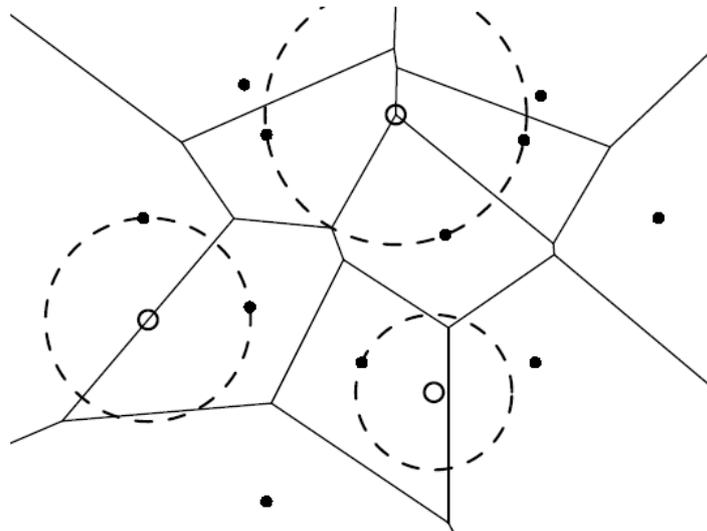


Figura 2.17: Círculos vazios máximos num diagrama de Voronoi. Pontos em três casos: interior a uma região, sobre uma aresta e coincidente com um vértice.

Fonte: DINIS [6].

Existem algumas propriedades relativas ao diagrama de Voronoi apontadas em FIGUEIREDO e CARVALHO [10], onde segundo os autores, para obtê-las de maneira mais simples, se faz necessário enxergar o diagrama como um grafo planar para assim obter tais propriedades.

De acordo com FIGUEIREDO e CARVALHO [10], uma primeira observação a ser feita é que cada aresta do grafo é um segmento de uma mediatriz definida por dois pontos geradores  $p_i$  e  $p_j$  de  $S$ , pois, cada aresta desse grafo representa um conjunto de pontos equidistantes de dois pontos geradores  $p_i$  e  $p_j$  de  $S$ , ou seja, que são comuns a dois polígonos de Voronoi,  $V_i$  e  $V_j$ . Com isso, é possível obter os seguintes resultados:

**Teorema 2.2.1** *Os polígonos de Voronoi correspondentes a um par de pontos  $p_i$  e  $p_j$  de  $S$  possuem uma aresta comum se, e somente se, existe um círculo contendo  $p_i$  e  $p_j$  e tal que todos os demais pontos sejam exteriores a este círculo.*

**Demonstração:** Ver FIGUEIREDO e CARVALHO [10] e SILVA [24].

De acordo com FIGUEIREDO e CARVALHO [10] o próximo resultado garante que Se o gerador  $p_i$  estiver na fronteira do fecho convexo de  $S$ , então  $V_i$  é ilimitado. Podemos observar um exemplo desse tipo de diagrama de Voronoi na Figura 2.11.

**Teorema 2.2.2** *Um polígono de Voronoi  $V_i$  é ilimitado se, e somente se, o ponto correspondente  $p_i$  pertence à fronteira do fecho convexo de  $S$ .*

**Demonstração:** Ver FIGUEIREDO e CARVALHO [10].

Ainda conforme FIGUEIREDO e CARVALHO [10], o resultado a seguir estabelece uma relação bijetiva entre o centro do círculo que contém três geradores na sua fronteira e os vértices do diagrama de Voronoi.

**Teorema 2.2.3** *Todo vértice  $v$  de  $Vor(S)$  é comum a pelo menos três polígonos de Voronoi e é centro de um círculo  $C_s(v)$  definido pelos pontos de  $S$  correspondentes aos polígonos que se encontram em  $v$ . Além disso,  $C_s(v)$  não contém nenhum outro ponto de  $S$ .*

**Demonstração:** Ver FIGUEIREDO e CARVALHO [10].

Além disso, ainda de acordo com o teorema anterior e a partir de FIGUEIREDO e CARVALHO [10], considerando os subconjuntos  $T_1, T_2, \dots, T_t$  de  $S$  que determinam círculos vazios, é possível determinar o diagrama de Voronoi. Assim, cada um dos subconjuntos  $T_k$  é formado por três ou mais pontos cocirculares de  $S$  tais que o círculo  $C_S(T_k)$  não contém nenhum outro elemento de  $S$ . Se quatro pontos quaisquer não são cocirculares então um dos conjuntos  $T_k$  contém exatamente três elementos de  $S$ . Portanto, as arestas de  $Vor(S)$  são os segmentos de mediatrizes correspondentes a pontos consecutivos em algum dos  $T_k$ .

No diagrama de Voronoi, de acordo com SILVA [24] cada elemento de  $S$  está associado a uma de suas faces, fazendo com que o grafo dual de  $Vor(S)$  seja um

grafo planar em que os vértices são os pontos pertencentes a  $S$  e as arestas representam os pares de elementos de  $S$  cujos polígonos de Voronoi são vizinhos, ou seja, são consecutivos em algum  $T_k$ .

Conforme SILVA [24], o diagrama obtido representando estas arestas pelos segmentos de reta que ligam os elementos respectivos de  $S$  é chamado de diagrama de Delaunay de  $S$  e denotado por  $Del(S)$ .

A seguir é apresentado um resultado que, de acordo com FIGUEIREDO e CARVALHO [10], garante que sempre haja a dualidade entre os grafos do diagrama de Voronoi e da triangulação de Delaunay.

**Teorema 2.2.4** *Seja  $S = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$  um conjunto de pontos do plano e seja  $\{T_k\}$  a família de subconjuntos de  $S$  que determinam círculos vazios. Então:*

1. *O diagrama de Delaunay, obtido ligando os pontos consecutivos em algum  $T_k$ , é uma realização do grafo planar (portanto, é uma realização do grafo dual de  $Vor(S)$ ).*
2. *As arestas correspondentes a cada  $T_k$  delimitam uma região convexa  $R_k$ ; estas regiões possuem interiores disjuntos dois a dois e sua união é o fecho convexo de  $S$ .*
3. *As regiões  $R_k$  são exatamente as faces limitadas do diagrama planar determinado por  $Del(S)$ .*
4. *Se  $S$  satisfaz a condição de quatro pontos quaisquer nunca serem cocirculares, então as regiões  $R_k$  determinam uma triangulação do fecho convexo de  $S$ , conhecida como triangulação de Delaunay determinada por  $S$ .*

**Demonstração:** Ver FIGUEIREDO e CARVALHO [10].

## 2.2.2 Aplicações do diagrama de Voronoi e Triângulação de Delaunay

Dentre as aplicações dos diagramas de Voronoi, uma que se destaca é a que serve como estrutura básica de dados para resolver problemas de proximidade. Por se mostrar bastante útil, os diagramas de Voronoi têm despertado interesses de estudiosos que buscam aprimorar seu uso, incorporando novas estratégias e a possibilidades para se trabalhar com objetos móveis em tempo real. A seguir, elencamos algumas situações apontadas por MESQUITA [16] em que o diagrama de Voronoi se faz presente:

- Pontos mais próximos: dado um conjunto de pontos  $S = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$  e um ponto de consulta  $p$  é possível determinar o ponto de  $S$  que encontra-se mais próximo de  $p$  calculando o diagrama de Voronoi associado a  $S$  e, em seguida, determinando a célula de Voronoi que contém o ponto  $p$ .
- Morfologia computacional: algumas das operações mais importantes na morfologia, segundo MESQUITA [16] é o “crescimento” e o “esvaziamento” de formas. Nesse contexto, pode-se fazer uma analogia da operação de “crescer” em um conjunto de pontos com o “fogo se espalhando na grama” a partir de pontos iniciais. Os pontos em que os focos de fogo se encontram estão sobre o diagrama de Voronoi dos pontos.
- Localização de serviços: se um objetivo para abrir uma empresa é que ela se localize o mais distante possível de uma concorrente, então o diagrama de Voronoi pode ser um grande aliado nesse caso, uma vez que os vértices do diagrama de Voronoi são justamente os pontos que se encontram mais distante dos sítios adjacentes. A ideia então é abrir a empresa justamente nesse vértice.
- Planejamento de trajetórias com máxima segurança: um robô deve se mover em torno de um conjunto de obstáculos e para minimizar a possibilidade de colisões, ele deve estar o mais longe possível desses obstáculos, que pode ser representados pelos sítios dos diagramas de Voronoi. Para tanto, faz-se com que o robô se mova pelas arestas do diagrama de Voronoi em questão.
- <http://www.ics.uci.edu/~eppstein/gina/scot.drysdale.html>: apresenta diversas aplicações em áreas distintas como: arqueologia, astronomia, biologia, ecologia, cartografia, cristalografia, química, geografia, geologia, marketing, matemática, metalurgia, meteorologia, medicina, fisiologia, estatística e análise de dados, zoologia.

Na computação gráfica uma importante aplicação do diagrama de Voronoi a se destacar é a *Triangulação de Delaunay*.

De modo geral, conforme SILVA [24], uma triangulação é uma forma de organizar pontos de um espaço em simplexes (que é uma generalização do conceito de triângulos para dimensões maiores), sendo triângulos o modo particular quando se trata do espaço plano. Na Figura 2.18, vemos que a triangulação de um conjunto de pontos é uma subdivisão do plano determinado por um conjunto maximal de arestas que não se cruzam. Portanto, dado um conjunto  $S$  de pontos, várias triangulações podem ser feitas. Uma triangulação  $T$  de um conjunto  $S$  de pontos é dita uma triangulação de Delaunay e denotada por  $Del(S)$ , se para cada triângulo em  $T$ , a circunferência que o circunscreve não contém nenhum outro ponto de  $S$  além dos três

pontos que formam o triângulo. Na Figura 2.18, vemos a representação de dois tipos de triangulações, incluindo a de Delaunay, para um mesmo conjunto de pontos.

A triangulação de Delaunay, que recebe esse nome em homenagem ao matemático russo Boris Delaunay que a estabeleceu em 1934, tem, segundo SILVA [24], a propriedade de, entre todas as triangulações, maximizar o menor de todos os ângulos internos dos triângulos.

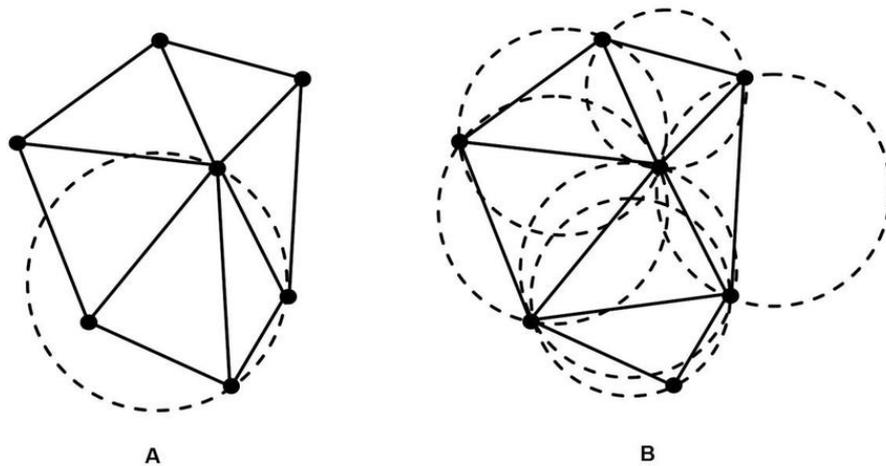


Figura 2.18: (A) Triangulação versus (B) Triangulação de Delaunay.  
 Fonte: GAMBA *et al.* [11].

Conforme SILVA [24], a partir da amostra de dados referentes a algumas variáveis físicas como a altitude, temperatura ou índice de chuvas de uma localidade, é possível traçar um panorâma para toda uma região de interesse. Nesse contexto, a triangulação de Delaunay pode ser um grande aliado, uma vez que os pontos representariam tais localidades.

Segundo OLIVEIRA [19], uma malha triangular representa, na computação gráfica, um tipo de malha poligonal formada por triângulos ligados por arestas ou vértices comuns.

A partir da definição de triangulação de Delaunay e da Figura 2.18 (B), observamos que nesse tipo de triangulação a conexão dos pontos é baseada em um único critério: círculos vazios. Portanto, quando consideramos quatro ou mais pontos contido em um mesmo círculo, não garantimos a unicidade da triangulação de Delaunay pois, os triângulos que dividem tal polígono satisfazem a condição Delaunay, uma vez que os círculos destes triângulos tem interiores vazios. Sendo assim, a triangulação de Delaunay é única para um dado conjunto  $S$  de pontos desde que não existam quatro ou mais pontos cocirculares em  $S$ . Segundo SILVA [23], esta unicidade é importante para a codificação de imagens, uma vez que, neste processo, apenas as posições e os vértices devem ser considerados para construção da triangulação. Na Figura 2.19, vemos um exemplo de imagem, com diferentes resoluções, obtida por

meio desse procedimento.

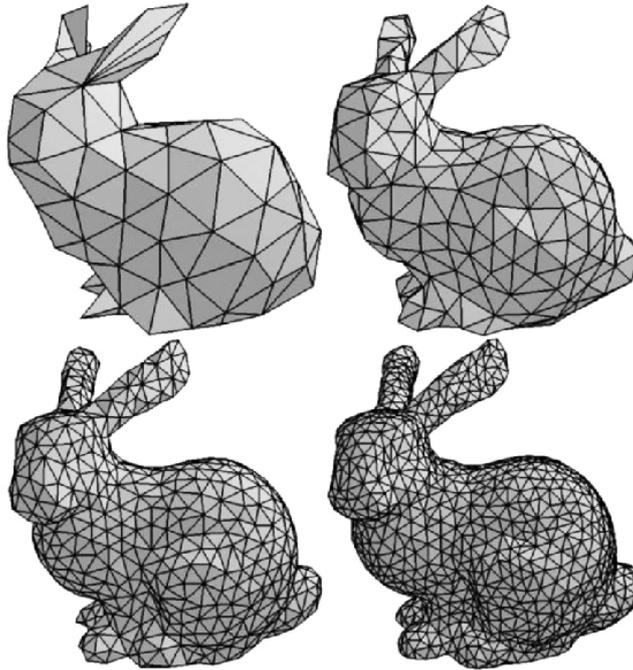


Figura 2.19: Triangulação de uma figura em diferentes resoluções.  
Fonte: ZACHAR *et al.* [26].

De acordo com SILVA [24], o processamento de imagens se dá pela representação por meio computacional de objetos concretos através de elementos geométricos. Dessa forma, admite-se como entrada uma imagem que, após processada, produz outra na saída. Nesse contexto, podemos dizer que a triangulação de Delaunay funciona como uma estratégia de decompor um certo domínio em triângulos, respeitando suas características geométricas.

Conforme SILVA [24], a captura de imagens se dá por um processo de interpolação semelhante às técnicas de integração ao segmentar a área sob a curva produzida por uma função, fazendo com que se tenha uma melhor qualidade da imagem capturada. No caso do processo envolvido na integral, os fragmentos são retângulos ou trapézios, já na triangulação de Delaunay, a região interna do polígono é particionada em triângulos. Nestes casos, a função imagem é aproximada em cada ponto por um processo de interpolação gerando triângulos o mais equiláteros possíveis, pois a existência de triângulos com ângulos muito agudos poderiam diminuir a qualidade do resultado da aproximação.

O esquema de interpolação, segundo FIGUEIREDO e CARVALHO [10], estende uma função  $f$  para uma função imagem  $F$ , linear por partes, cujo valor em cada ponto  $p_i$  é igual a  $f(p_i)$  e, seguindo essa linha, a ideia é estabelecer, dado um conjunto  $S = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$  de pontos pertencentes a  $\mathbb{R}^2$  e valores reais,  $f(p_i), i, \dots, n$ , o

fecho convexo de  $S$  como a união de triângulos que formem um complexo simplicial de dimensão 2, ou seja, triângulos cuja a interseção de dois deles não disjuntos seja um vértice ou um lado comum a eles. Uma vez obtidos estes triângulos, dado  $p \in \text{conv}(S)$ , determinamos um triângulo  $p_i p_j p_k$  contendo  $p$ , de forma que

$$p = \lambda_1 p_i + \lambda_2 p_j + \lambda_3 p_k$$

(onde os números não negativos  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  e  $\lambda_3$  são as coordenadas baricêntricas de  $p$  em relação ao triângulo  $p_i p_j p_k$ ) e obtemos função imagem:

$$F(p) = \lambda_1 f(p_i) + \lambda_2 f(p_j) + \lambda_3 f(p_k).$$

Com isso, segundo SILVA [24], as coordenadas baricêntricas de cada um dos triângulos da triangulação de Delaunay poderão servir como dados de armazenamento suficientes para a codificação de imagens.

O esquema de interpolação consiste em resolver o problema como o de um dado conjunto  $S$  de pontos no plano, obter a triangulação do  $\text{Conv}(S)$  cujo conjunto de vértices seja  $S$ . No entanto, ao contrário do caso unidimensional, esse problema não possui uma solução única. Porém, é possível demonstrar algumas propriedades gerais a respeito das triangulações de  $\text{Conv}(S)$  a partir do seguinte resultado, obtido em SILVA [24].

**Teorema 2.2.5** *Dado um conjunto  $S = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$  de pontos do plano, se nem todos os pontos forem colineares, então toda triangulação  $S$  possui exatamente  $(2k + h - 2)$  triângulos e  $(3k + 2h - 3)$  arestas, onde  $h$  o número de vértices em  $\text{conv}(S)$  e  $k$  é o número de vértices que estão no interior de  $\text{conv}(S)$ .*

**Demonstração:** Ver SILVA [24].

Conforme SILVA [24] aponta, de acordo com PREPARATA e SHAMOS [21] e OKABE *et al.* [18], existe uma dualidade entre os diagramas de Voronoi e o processo de triangulação de Delaunay, ou seja, um pode ser construído a partir outro e vice-versa. Na Figura 2.20 podemos ver uma ilustração de como se comporta a dualidade entre a triangulação de Delaunay (linha contínua) que está disposta sobre o diagrama de Voronoi (linha tracejada).

Tanto o diagrama de Voronoi quanto a triangulação de Delaunay são utilizadas em situações em que há a necessidade de particionar o plano a partir de um conjunto de pontos. Comparando tais diagramas, representados na Figura 2.20, notamos que os sítios do diagrama de Voronoi correspondem aos vértices dos triângulos da triangulação de Delaunay e os vértices dos polígonos de Voronoi correspondem aos baricentros dos triângulos da triangulação de Delaunay. Além disso, os lado de

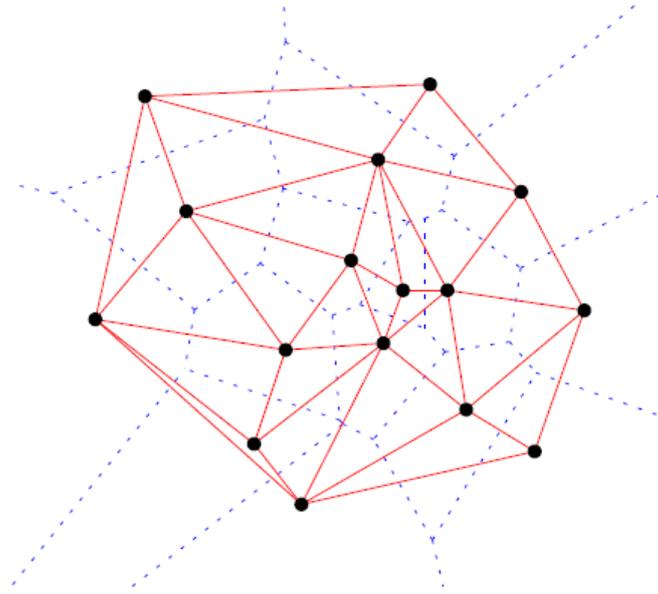


Figura 2.20: A dualidade entre o Diagrama de Voronoi para pontos de um conjunto e a Triangulação de Delaunay.

Fonte: BARBA *et al.* [2] .

cada um dos triângulos na triangulação de Delaunay, ligam os polígonos de Voronoi adjacentes.

Esse também pode ser considerado um problema de otimização:

1. Dados  $n$  pontos distintos, encontrar a partir deles outros  $n$  pontos para que os triângulos tenham seus ângulos maximizados.
2. (Malha de elementos finitos) Dado um polígono convexo  $P$  com fronteira fixa, formada pelo feixe convexo de  $n$  pontos, encontrar a posição dos pontos interiores para que o ângulo dos triângulos seja maximizado.

## 2.3 Diagrama de Voronoi por meio de grafos

De acordo com SILVA [24] o diagrama de Voronoi é formado por polígonos, que são constituídos por sequências de arestas e vértices que identificam um grafo. Para a autora, os grafos são estruturas simples e eficientes que estão presentes na vida das pessoas.

Os grafos constituem, segundo SILVA [24], uma estrutura de modelagem simples e flexível e representam praticamente uma linguagem intermediária entre o humano e o computador, pois admite uma representação visual ao ser humano a qual pode ser representada por estruturas de dados no computador. Tais características mostram como esse modelo é importante. Em vista disto, apresentaremos como um diagrama de Voronoi pode ser simplificado e representado através de um grafo.

Considerando  $Vor(S) = \{V_1, V_2, \dots, V_n\}$  o diagrama de Voronoi relativo ao conjunto finito de pontos  $S$ , buscamos representar este diagrama através da estrutura de armazenamento de dados que constitui um grafo  $G$ .

Baseado em DINIS [6], vamos fazer a ligação entre a teoria dos grafos e os diagramas de Voronoi, segundo o qual, adicionando um ponto no “infinito” como ponto extremo de todas as arestas, como mostra a Figura 2.21, obtemos um grafo planar  $Vor(S)$ .

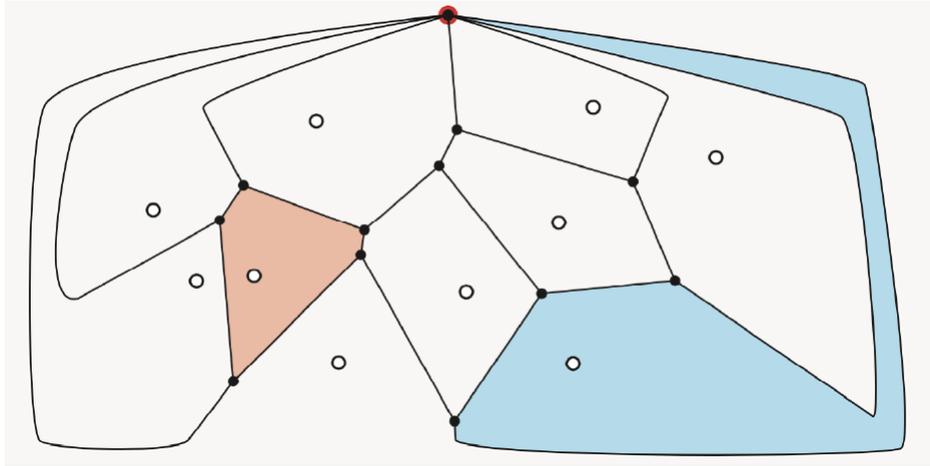


Figura 2.21: Grafo de um Diagrama de Voronoi.  
Fonte: CELES [5] .

Consideremos  $n, n_e, n_v$  e  $n_c$  o número de pontos geradores, o número de arestas, o número de vértices e o número de polígonos de Voronoi limitados de um diagrama de Voronoi  $Vor(S)$ , respectivamente.

Assim como apresentamos no **Teorema 2.1.1** o resultado que relaciona o número de faces, vértices e arestas de um grafo planar, apresentamos aqui o mesmo resultado para os diagramas de Voronoi, uma vez que o modelamos como um grafo planar. A partir disso, podemos estabelecer um outro resultado que diz respeito ao número de arestas e vértices em um diagrama de Voronoi.

**Teorema 2.3.1** *Para um diagrama de Voronoi com um número de pontos geradores maior ou igual a 2, temos:*

$$n_e \leq 3n - 6, n_v \leq 2n - 5.$$

**Demonstração:** De acordo com o **Teorema 2.1.1** em um grafo planar, simples e conexo com  $f$  regiões (faces),  $v$  vértices e  $e$  arestas, temos

$$v - e + f = 2.$$

Porém, de acordo com SILVA [24], como a princípio o diagrama de Voronoi não é propriamente um grafo, então não podemos aplicar esta fórmula diretamente, uma vez que  $Vor(S)$  tem arestas semi-infinitas. Então, para contornar esta situação, acrescenta-se um vértice  $v_1$  no “infinito” ao conjunto dos vértices e considera-se que todas as arestas semi-infinitas de  $Vor(S)$  estão ligadas a este vértice.

Dessa forma, obtemos um grafo planar conexo e podemos então aplicar a Fórmula de Euler apresentada no **Teorema 2.1.1**. Com isso, num diagrama de Voronoi, temos:

$$(n_v + 1) - n_e + n = 2.$$

Assim, cada aresta desse grafo aumentado tem exatamente dois vértices e adicionando o grau de todos os vértices obtemos o dobro do número de arestas, uma vez que o grau de um vértice corresponde ao número de arestas que nele incidem. Como cada vértice, incluindo  $v_1$ , tem no mínimo grau três, então temos:

$$2n_e \geq 3(n_v + 1)$$

sendo,

$$n_v \geq \frac{1}{2}(n - n_c) + 1, n_e \leq 3n_v - n_c - 3;$$

e considerando  $S$  ainda com mais de 3 elementos.

Por fim, juntando estas inequações e a Fórmula de Euler equivalente para o diagrama de Voronoi, obtemos:

$$n_e \leq 3n - 6, n_v \leq 2n - 5.$$

□

# Capítulo 3

## Método e Resultados

### 3.1 Diagrama de Voronoi com obstáculos circulares

Os diagramas de Voronoi permitem uma subdivisão de uma superfície plana em polígonos convexos de interiores disjuntos associados a um conjunto de pontos a fim de estabelecer relações de proximidade. Sua construção depende apenas das distâncias, que pode ser a euclidiana, a serem determinadas entre os pontos de um dado espaço e os pontos geradores de um conjunto  $S$ . Aqui, consideramos a construção do diagrama com obstáculos circulares e pontos  $p_1 = (0, a), p_2 = (0, b)(a > 1, b < -1$  e  $a < -b)$ .

O fato do diagrama de Voronoi poder ser definido em função da distância euclidiana nos faz pensar que, no contexto da distância a ser adotada ser a euclidiana, sempre há possibilidade de ligarmos dois sítios quaisquer do plano apenas por uma linha reta. Na prática isso nem sempre é válido. A partir do momento que tomamos uma região com obstáculos circulares entre a linha reta que une uma origem e um destino, pode-se concluir que exista uma maneira de contorná-los. É nessa situação que nos deparamos ao tratar de problemas com obstáculos circulares. Dessa forma, iremos definir o problema para um diagrama de Voronoi obtido a partir de uma superfície com obstáculos circulares. Para isso, consideremos,

$$S = \{p_1, p_2, \dots, p_n\},$$

com  $n \geq 2$ , um conjunto finito de  $n$  pontos em  $\mathbb{R}^2$  chamados sítios ou geradores. Consideremos também:

$$\Theta = \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k\}$$

com  $k \geq 1$ , um conjunto com  $k$  regiões fechadas que representam os obstáculos circulares que, por sua vez, não podem ser transpostos diretamente. Assumiremos que estes obstáculos circulares não podem ser sobrepostos, isto é,

$$\theta_i \cap \theta_j = \emptyset, i \neq j,$$

e também que os pontos de  $S$  não podem situar-se sobre tais obstáculos circulares, ou seja,

$$\{p_i\} \cap \theta_j = \emptyset, \forall j.$$

Além disso, dados dois pontos de  $S$ , o segmento que liga estes pontos não deve atravessar o interior do obstáculo circular.

O caso geral consiste em encontrar o diagrama de Voronoi com  $n$  pontos e  $k$  obstáculos circulares. Neste trabalho, nós tratamos o caso  $n = 2$  e  $k = 1$ .

### 3.2 Diagrama de Voronoi gerado por dois pontos geradores específicos e com um obstáculo circular centrado na origem $O = (0, 0)$ e de raio $r = 1$

O objetivo é implementar computacionalmente o algoritmo que estabelece, por meio da comparação de distâncias entre pontos, a fronteira do diagrama de Voronoi para dois pontos geradores específicos dispostos no plano  $\mathbb{R}^2$  com um obstáculo circular, centrado na origem e de raio 1. Com a comparação de distâncias entre pontos do plano e os pontos geradores espera-se encontrar um diagrama com uma certa distorção se comparado com o caso em que os pontos geradores não estariam separados por obstáculo. Para tanto, admitamos  $d_{mc}$  como sendo a distância do caminho mais curto entre dois pontos  $p_i$  e  $p_j$ , com  $i \neq j$ , pertencentes a  $S$  e que são visíveis entre si. Caso não haja obstáculos entre esses pontos  $d_{mc}$  é dada diretamente pela distância euclidiana. No entanto, se houver um obstáculo circular entre tais pontos se faz necessário o uso de artifícios algébricos para que  $d_{mc}$  seja determinada.

Consideremos, para isto, os pontos  $p_1 = (0, a)$  e  $p_2 = (0, b)$  pertencentes a  $S$ . Consideremos ainda que exista um círculo  $C$  de raio 1, centrado na origem  $O = (0, 0)$ , cuja equação é dada por  $x^2 + y^2 = 1$ .

No caso de obtermos o diagrama de Voronoi para dois pontos, por exemplo,  $p_1$  e  $p_2$ , sem obstáculo, temos que a sua fronteira fica definida pela mediatriz ortogonal ao segmento de reta  $\overline{p_1 p_2}$ , denotada por  $M(p_1, p_2)$ .

Ou seja, no caso de não haver obstáculo entre os pontos  $p_1$  e  $p_2$  a fronteira fica definida pela reta

$$y = \frac{a + b}{2}$$

conforme a Figura 3.1, obtida diretamente pela distância euclidiana entre os pontos

da fronteira e os pontos geradores.

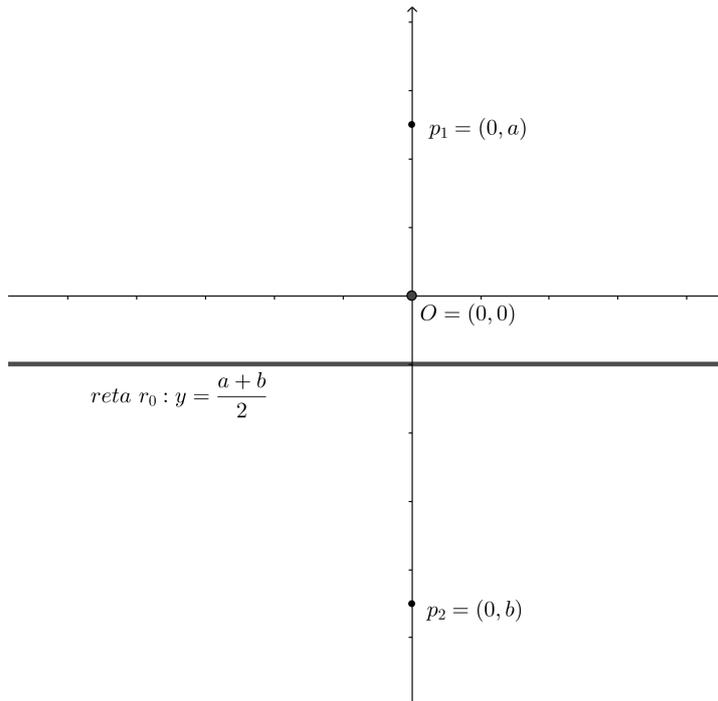


Figura 3.1: Diagrama de Voronoi para os pontos  $p_1$  e  $p_2$  sem obstáculo entre eles.  
Fonte: Próprio autor.

Agora, vejamos o que ocorre se tivermos um obstáculo circular centrado na origem. Para tanto, vamos analisar primeiro o que ocorre quando os pontos da fronteira são visíveis a  $p_1$  e  $p_2$ , ou seja, para o caso quando é possível traçar uma reta de  $p_1$  para  $p_2$  sem que a reta intersecte o círculo. Neste caso,  $d_{mc}$  também é dado diretamente pela distância euclidiana entre os tais pontos da fronteira e os pontos geradores. Já no caso de os pontos geradores não serem visíveis entre si, então o segmento de reta que liga tais pontos devem cruzar o círculo, portanto, não é possível determinar  $d_{mc}$  apenas pela distância euclidiana. Assim, se faz necessário uma análise diferente para contornar este obstáculo.

Em SILVA [24] temos, detalhadamente, nas páginas 31 à 33, o procedimento quando o obstáculo possui um formato poligonal. Porém, no caso do obstáculo ser formado por um círculo, vemos que precisamos definir os pontos deste círculo que podemos adicionar para determinar a Fronteira do diagrama de Voronoi.

Observando os pontos dispostos à esquerda do círculo notamos que se diminuirmos os valores das abcissas desses pontos, nos afastando do círculo, a partir de uma certa abscissa teremos os pontos da fronteira sobre a reta mediatriz  $y = (a+b)/2$  que são visíveis a  $p_1$  e  $p_2$  e que estão a uma mesma distância, conforme é possível ver na Figura 3.2. Por outro lado, se aumentarmos a abscissa dos pontos localizados sobre a reta mediatriz, nos aproximando cada vez mais do círculo, ainda pela esquerda, a fronteira começa a mudar e, nesse caso, a distância entre o ponto  $u = (x, y)$  da

fronteira e o ponto  $p_1$  vai depender de pontos específicos, que aqui vamos denominar de  $p$  e  $q$ , localizados sobre a circunferência do obstáculo circular, enquanto que a distância de  $u$  à  $p_2$ , dependendo do caso, pode ser dada diretamente pela distância euclidiana ou pode depender de pontos específicos, que chamaremos de  $h$  e  $g$ , também localizados sobre a circunferência do obstáculo circular.

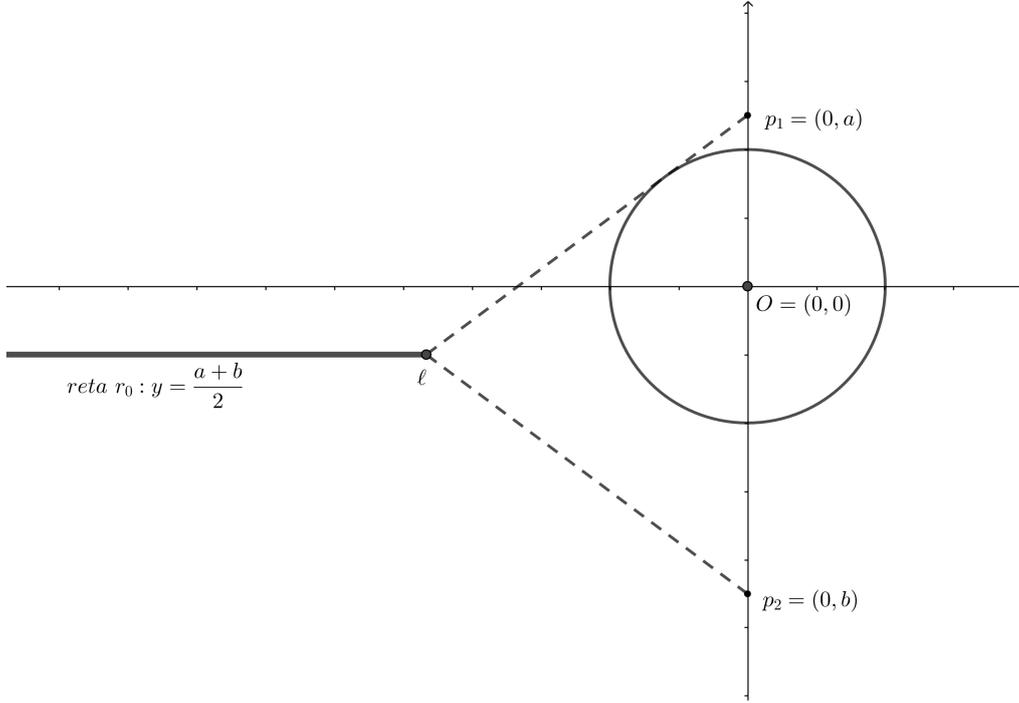


Figura 3.2: Pontos da fronteira do diagrama que são visíveis a  $p_1$  e  $p_2$ .  
Fonte: Próprio autor.

Para determinarmos as coordenadas do ponto  $p$ , devemos observar que este ponto é definido pelas propriedades:

$$\langle \overrightarrow{p_1 p}, \overrightarrow{0 p} \rangle = 0 \text{ e } \|\overrightarrow{0 p}\| = 1.$$

Isto significa que  $p$  não necessariamente deve ser o ponto da circunferência mais próximo de  $p_1$ , mas o ponto pelo qual o segmento de reta que liga  $p$  a  $p_1$  tangencie este círculo, como pode ser visto na Figura 3.3.

Apresentaremos agora, importantes proposições em relação aos pontos  $p$ ,  $q$ ,  $h$  e  $g$ .

Sejam  $p_1 = (0, a)$ ,  $p_2 = (0, b)$  ( $a > 1$ ,  $b < -1$  e  $a < -b$ ).

**Proposição 3.2.1** *Sejam os pontos  $p$  e  $g$ , os quais pertencem ao círculo unitário com abcissas negativas. Além disso, os vetores  $\overline{Op}$  e  $\overline{pp_1}$  são ortogonais e os vetores  $\overline{Og}$  e  $\overline{gp_2}$  também o são. Então:*

$$\begin{aligned}
p &= \left( -\sqrt{1 - \frac{1}{a^2}}, \frac{1}{a} \right) & g &= \left( -\sqrt{1 - \frac{1}{b^2}}, \frac{1}{b} \right) \\
d(p, p_1) &= \sqrt{a^2 - 1} & d(g, p_2) &= \sqrt{b^2 - 1}.
\end{aligned} \tag{3.1}$$

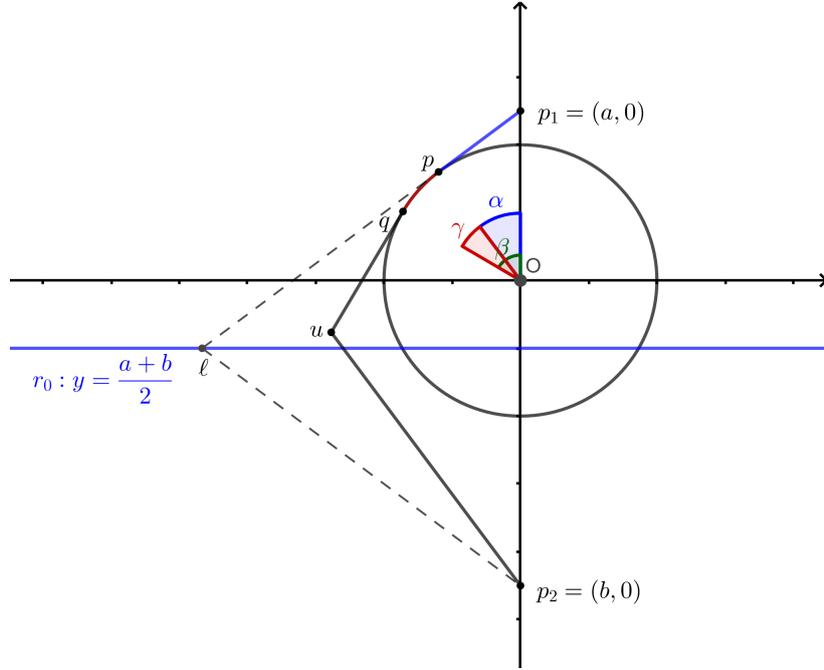


Figura 3.3: Representação de um ponto da fronteira para dois geradores específicos cujo segmento que os ligam passa pelo centro de um círculo.

Fonte: Próprio autor.

### Demonstração:

Temos que  $p_1 = (0, a)$ . Considerando o ângulo  $\alpha = \widehat{pOp_1}$ , como na Figura 3.3 e supondo  $p = (\sin \alpha, \cos \alpha)$  com  $\pi/2 < \alpha < \pi$ , como ilustrado na Figura 3.4. Observamos que as coordenadas de  $p$  são tais que  $\langle \vec{p_1p}, \vec{Op} \rangle = 0$ .

Sejam  $\vec{Op} = (\sin \alpha, \cos \alpha)$  e  $\vec{p_1p} = (\sin \alpha, \cos \alpha - a)$ . Então, temos que:

$$\begin{aligned}
\langle \vec{p_1p}, \vec{Op} \rangle &= \langle (\sin \alpha, \cos \alpha - a), (\sin \alpha, \cos \alpha) \rangle \\
&= \sin^2 \alpha + \cos \alpha (\cos \alpha - a) \\
&= \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - a(\cos \alpha) \\
&= (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) - a(\cos \alpha) \\
&= 1 - a \cos \alpha
\end{aligned}$$

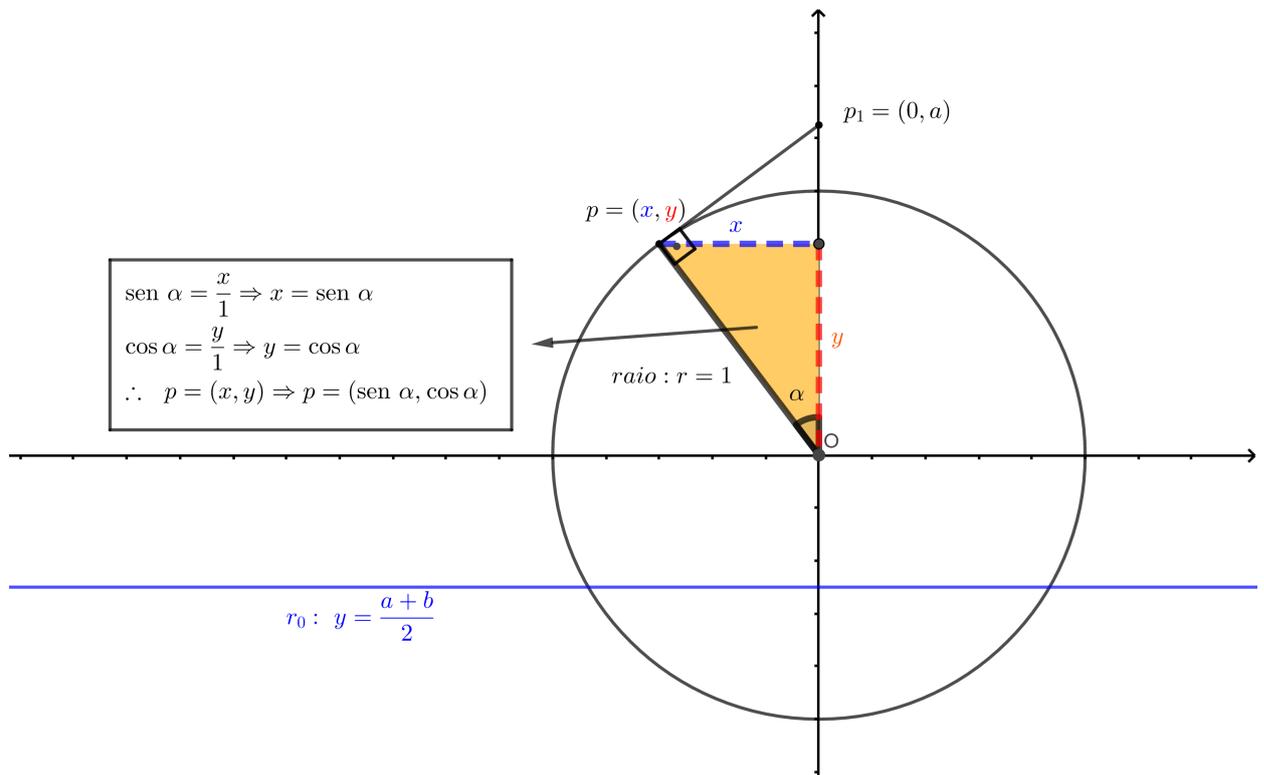


Figura 3.4: Coordenadas do ponto  $p$ .  
Fonte: Próprio autor.

Igualando este resultado a zero, obtemos

$$\cos \alpha = \frac{1}{a}.$$

A partir do valor do cosseno de  $\alpha$  encontrado e considerando a identidade trigonométrica

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1,$$

obtemos também o valor do seno de  $\alpha$ :

$$\sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \frac{1}{a^2}}$$

Portanto, as coordenadas do ponto  $p$  são dadas por:

$$p = \left( -\sqrt{1 - \frac{1}{a^2}}, \frac{1}{a} \right).$$

Aqui, a opção da abscissa negativa se dá pelo fato de escolhermos o ponto do lado esquerdo do círculo, como ilustrado na Figura 3.3.

Agora, vamos descobrir  $d(p, p_1) = \sqrt{a^2 - 1}$ . Para tanto, notamos que, a partir

do quadrado da distância euclidiana calculada  $d(p, p_1)$ , obtemos,

$$\begin{aligned} d^2(p, p_1) &= \left( \sqrt{1 - \frac{1}{a^2}} \right)^2 + \left( a - \frac{1}{a} \right)^2 \\ d^2(p, p_1) &= 1 - \frac{1}{a^2} + a^2 - 2 \cdot a \cdot \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} \\ d^2(p, p_1) &= -1 + a^2 \\ d(p, p_1) &= \sqrt{a^2 - 1} \end{aligned}$$

De maneira análoga, conforme a Figura 3.5, chegamos as coordenadas do ponto  $g$ , bem como, a distância  $d(g, p_2)$ .

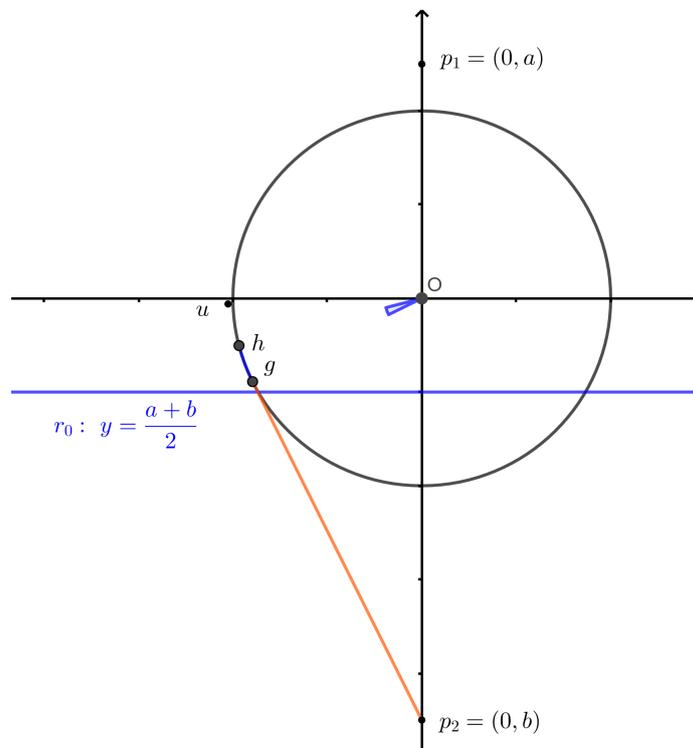


Figura 3.5: Representação do ponto  $g$ .  
Fonte: Próprio autor.

□

**Proposição 3.2.2** *Sejam  $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$  e  $q, h$  pontos do círculo unitário, tais que,  $\overline{Oq}$  e  $\overline{uq}$  são ortogonais e  $\overline{Oh}$  e  $\overline{uh}$  também o são. Então:*

$$\begin{aligned}
q &= \left( \frac{x + |y| \sqrt{x^2 + y^2 - 1}}{x^2 + y^2}, -\sqrt{1 - \left( \frac{x + |y| \sqrt{x^2 + y^2 - 1}}{x^2 + y^2} \right)^2} \right) \\
h &= \left( \frac{x - |y| \sqrt{x^2 + y^2 - 1}}{x^2 + y^2}, -\sqrt{1 - \left( \frac{x - |y| \sqrt{x^2 + y^2 - 1}}{x^2 + y^2} \right)^2} \right)
\end{aligned} \tag{3.2}$$

**Demonstração:** Considere o ângulo  $\beta = \widehat{qOp_1}$ , na Figura 3.3. Suponha que  $q = (\sin \beta, \cos \beta)$ , com  $\pi/2 < \beta < \pi$  e observe que as coordenadas de  $q$  são tais que  $\langle \vec{uq}, \vec{0q} \rangle = 0$ .

Sejam  $\vec{0q} = (\sin \beta, \cos \beta)$  e  $\vec{uq} = (\sin \beta - x, \cos \beta - y)$ . Então, temos que:

$$\begin{aligned}
\langle \vec{uq}, \vec{0q} \rangle &= \langle (\sin \beta - x, \cos \beta - y), (\sin \beta, \cos \beta) \rangle \\
&= \sin \beta (\sin \beta - x) + \cos \beta (\cos \beta - y) \\
&= \sin^2 \beta - x \sin \beta + \cos^2 \beta - y \cos \beta \\
&= 1 - (x \sin \beta + y \cos \beta) \\
&= 1 - (x \sin \beta + y \cos \beta).
\end{aligned}$$

Igualando o resultado obtido a zero obtemos:

$$1 = x \sin \beta + y \cos \beta.$$

Usando a identidade trigonométrica

$$\sin^2 \beta + y \cos^2 \beta = 1,$$

obtemos a expressão do valor do cosseno de  $\beta$ :

$$\cos \beta = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \beta}.$$

Então, a partir do valor do cosseno de  $\beta$ , obtemos a expressão:

$$1 - x \sin \beta = \pm y \sqrt{1 - \sin^2 \beta}.$$

Elevando toda a expressão ao quadrado, obtemos a equação do 2º grau:

$$(x^2 + y^2) \sin^2 \beta - 2x \sin \beta + (1 - y^2) = 0$$

cuja solução fornece

$$\begin{aligned}
 \sin \beta &= \frac{2x \pm \sqrt{4[x^2 - (x^2 + y^2)(1 - y^2)]}}{2(x^2 + y^2)} \\
 &= \frac{x \pm \sqrt{x^2 - x^2 + x^2y^2 - y^2 + y^4}}{x^2 + y^2} \\
 &= \frac{x \pm \sqrt{x^2y^2 - y^2 + y^4}}{x^2 + y^2} \\
 &= \frac{x \pm |y| \sqrt{x^2 - 1 + y^2}}{x^2 + y^2}
 \end{aligned}$$

Portanto, a abscissa do ponto  $q$  é dada por:

$$x_q = \frac{x \pm |y| \sqrt{x^2 + y^2 - 1}}{x^2 + y^2}.$$

Usando novamente o cosseno de  $\beta$ , obtemos:

$$\begin{aligned}
 \cos \beta &= \pm \sqrt{1 - \sin^2 \beta} \\
 &= \pm \sqrt{1 - \left( \frac{x \pm |y| \sqrt{x^2 - 1 + y^2}}{x^2 + y^2} \right)^2}.
 \end{aligned}$$

Concluimos, então, que a ordenada do ponto  $q$  é dada por:

$$y_q = \pm \sqrt{1 - \left( \frac{x \pm |y| \sqrt{x^2 + y^2 - 1}}{x^2 + y^2} \right)^2}$$

Os sinais das coordenadas do ponto  $q$  são escolhidos de acordo com a sua posição à esquerda do círculo, como ilustrado na Figura 3.3. Portanto,

$$q = \left( \frac{x + |y| \sqrt{x^2 + y^2 - 1}}{x^2 + y^2}, -\sqrt{1 - \left( \frac{x \pm |y| \sqrt{x^2 + y^2 - 1}}{x^2 + y^2} \right)^2} \right)$$

E, de maneira análoga, obtemos as coordenadas de  $h$ , tomando como referência o que está ilustrado na Figura 3.5.  $\square$

Um ponto importante na construção do diagrama é o ponto  $\ell$  que pertence à reta que liga os pontos  $p_1$  e  $p$  cuja ordenada é  $y = (a + b)/2$ , como podemos observar na Figura 3.3. O ponto  $\ell$  é a interseção da mediatriz com a reta  $\overline{pp_1}$ ,  $\ell$  se aproxima do círculo a medida que  $a$  aumenta, se  $a$  for para infinito,  $\ell$  tende para  $(-1, (a + b)/2)$ . Tal ponto, corresponde ao ponto de mudança na fronteira do diagrama separando a

parte pertencente a reta  $y = \frac{a+b}{2}$  e a parte não linear.

**Proposição 3.2.3** *As coordenadas do ponto  $\ell$  definido acima são:*

$$\ell = \left( \sqrt{1 - \frac{1}{a^2}} \left( \frac{b-a}{2}, a - \frac{1}{a} \right), \frac{a+b}{2} \right)$$

**Demonstração:**

Seja  $p = \left( -\sqrt{1 - \frac{1}{a^2}}, a \right)$  e  $p_1 = (0, a)$  e o vetor diretor  $\overrightarrow{pp_1} = \left( \sqrt{1 - \frac{1}{a^2}}, a - \frac{1}{a} \right)$ . A equação paramétrica da reta  $r_2(t)$  que passa pelo vetor diretor  $\overrightarrow{pp_1}$  e o ponto  $p_1$  é

$$r_2(t) = \left( \sqrt{1 - \frac{1}{a^2}}, a - \frac{1}{a} \right) t + (0, a).$$

Portanto, as coordenadas paramétricas são:

$$x(t) = \left( \sqrt{1 - \frac{1}{a^2}} \right) t \text{ e } y(t) = \left( a - \frac{1}{a} \right) t + a$$

Igualando a coordenada  $y(t) = \left( a - \frac{1}{a} \right) t + a$  da reta  $r_2(t)$  com a coordenada  $y$  da reta  $r_0 : y = \frac{a+b}{2}$ , temos:

$$\left( a - \frac{1}{a} \right) t + a = \frac{a+b}{2} \Rightarrow \left( a - \frac{1}{a} \right) t = \frac{b-a}{2} \Rightarrow t = \frac{\frac{b-a}{2}}{a - \frac{1}{a}}$$

Substituindo o valor de  $t$  em  $x(t)$ , temos:

$$x_0 = \sqrt{1 - \frac{1}{a^2}} \left( \frac{b-a}{2}, a - \frac{1}{a} \right)$$

Concluimos, portanto, que as coordenadas de  $\ell$  são:

$$\ell = \left( \sqrt{1 - \frac{1}{a^2}} \left( \frac{b-a}{2}, a - \frac{1}{a} \right), \frac{a+b}{2} \right)$$

□

Dependendo de qual região do plano está o ponto  $u$  esses pontos  $q$  e  $h$  tem

uma influência ou não no diagrama de Voronoi. Conforme a Figura 3.6 considere  $R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, R_6$  as regiões definidas por:

$$\begin{aligned}
R_1 &= \{u = (x, y) \in \mathbb{R}^2, \text{ tais que } , x < -1, 0 < y < 1\} \\
R_2 &= \{u = (x, y) \in \mathbb{R}^2, \text{ tais que } , -1 < x < 0, 0 < y < 1, x^2 + y^2 > 1\} \\
R_3 &= \{u = (x, y) \in \mathbb{R}^2, \text{ tais que } , x < -1, -1 < y < 0\} \\
R_4 &= \{u = (x, y) \in \mathbb{R}^2, \text{ tais que } , -1 < x < 0, -1 < y < 0, x^2 + y^2 > 1\} \\
R_5 &= \{u = (x, y) \in \mathbb{R}^2, \text{ tais que } , x < -1, y < -1\} \\
R_6 &= \{u = (x, y) \in \mathbb{R}^2, \text{ tais que } , -1 < x < 0, y < -1\}
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Considere também as retas

$$\begin{aligned}
r_0 &: \text{reta } y = \frac{a+b}{2} \\
r_1 &: \text{reta que passa pelos pontos: } p_2 \text{ e } g \\
r_2 &: \text{reta que passa pelos pontos: } p_1 \text{ e } p
\end{aligned} \tag{3.4}$$

**Proposição 3.2.4** *Considere  $\ell \in r_0 \cap r_2 \cap r_3$  tal que  $\ell = \left(x_0, \frac{a+b}{2}\right)$ . Os pontos da reta  $r_0$  com abscissas  $x \leq x_0$  pertencem ao diagrama de Voronoi.*

**Demonstração:** Sabemos que se não existisse obstáculo, os pontos da fronteira do diagrama de Voronoi pertenceriam todos à reta  $r_0$ . Como  $r_2$  é tangente ao círculo, então  $\ell \in r_0 \cap r_2$  é o ponto mais próximo do círculo pela esquerda que é visível a  $p_1$  e a  $p_2$ . Logo,  $d(\ell, p_1) = d(\ell, p_2)$ , e, portanto, pertence ao diagrama. Com isso, todo  $x \leq x_0$  também é visível a  $p_1$  e  $p_2$ , ou seja,  $d(x, p_1) = d(x, p_2)$  pertencendo, portanto, ao diagrama.  $\square$

O ponto  $\ell$  é um ponto de grande importância, pois é o que pertence ao diagrama de Voronoi e está mais próximo do círculo pela esquerda, de modo a enxergar  $p_1$  e  $p_2$ .

Como veremos na proposição a seguir, uma quarta reta também tem um papel fundamental:

$$r_3 := \text{reta que passa pelos pontos } p_2 \text{ e } \ell. \tag{3.5}$$

**Proposição 3.2.5** *O diagrama de Voronoi, obtido a partir de uma superfície com obstáculos, está contido na região delimitada pelas retas  $r_2$  e  $r_3$ .*

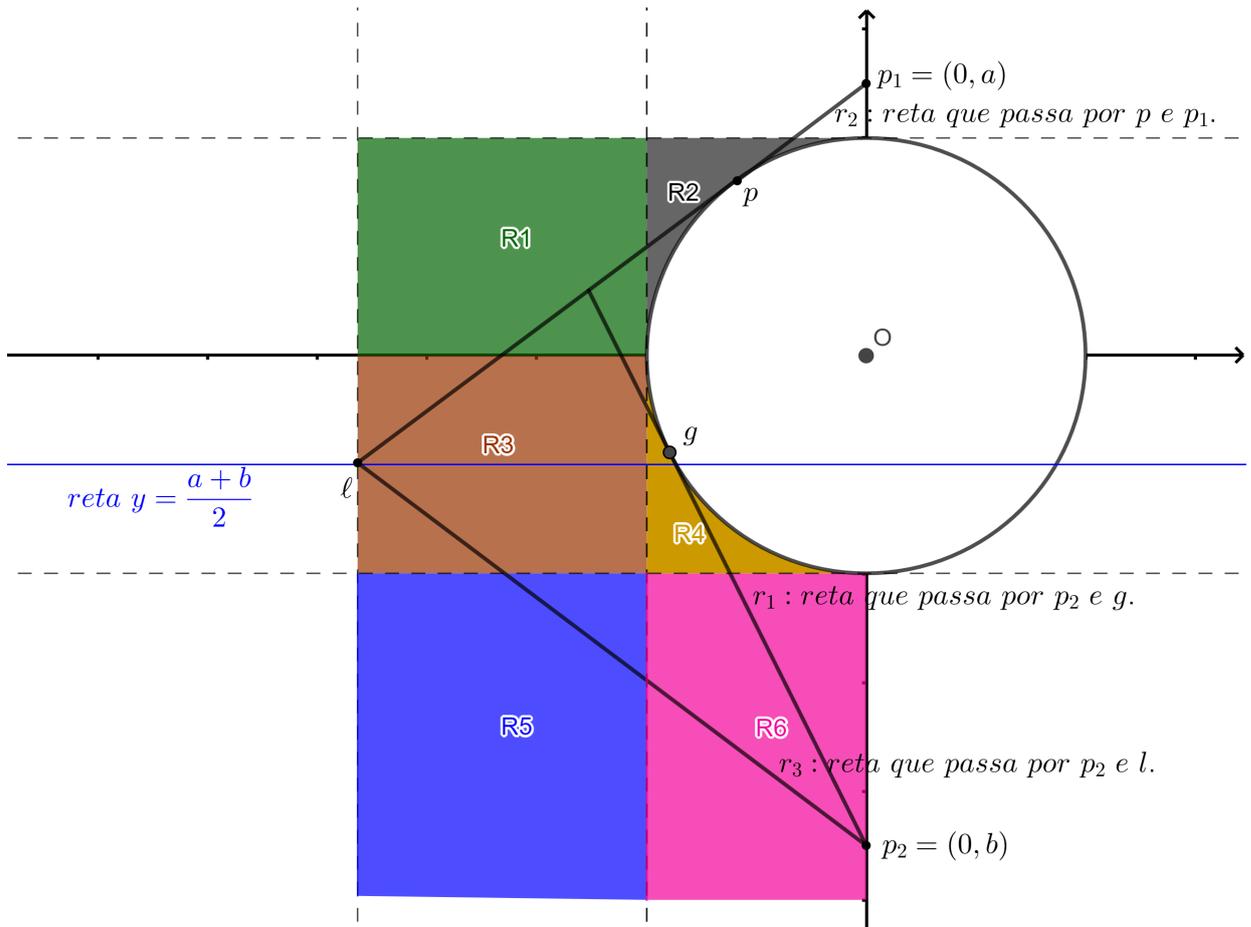


Figura 3.6: Regiões de análise.  
 Fonte: Próprio Autor.

**Demonstração:**

Sabemos que o ponto  $\ell$  é o ponto que pertence ao diagrama de Voronoi e está mais próximo do círculo pela esquerda, de modo a enxergar  $p_1$  e  $p_2$ . Portanto, qualquer ponto à direita de  $\ell$  não enxergaria  $p_1$  ou  $p_2$ . Suponhamos que exista um ponto  $z$ , acima de  $r_2$  que pertença ao diagrama e enxergue o ponto  $p_1$ , ou seja, fora da região delimitada pelas retas  $r_2$  e  $r_3$ . Formamos, assim, dois triângulos retângulos, o  $zz_1p_1$  e o  $zz_1p_2$  com mesma altura  $d(z, z_1)$ , como mostra a Figura 3.7, onde  $z_1$  é um ponto em cima do eixo  $y$ .

Como  $z_1$  está acima da reta  $r_0$ , logo,  $d(z_1, p_1) < d(z_1, p_2)$ . Com isso, pelo Teorema de Pitágoras, temos que,  $d(z, p_1) < d(z, p_2)$ . Porém,  $d(z, p_1)$  é a distância do segmento  $\overline{zp_1}$  que não corta o círculo e  $d(z, p_2)$  é menor que a distância entre  $z$  e  $p_2$  levando em consideração também o arco de círculo. Digamos que a distância de  $z$  à  $p_2$  considerando o arco de círculo seja  $d_a(z, p_2)$ . Então, temos

$$d(z, p_1) < d(z, p_2) < d_a(z, p_2).$$

O que é absurdo, pois teríamos  $d(z, p_1) \neq d_a(z, p_2)$ .

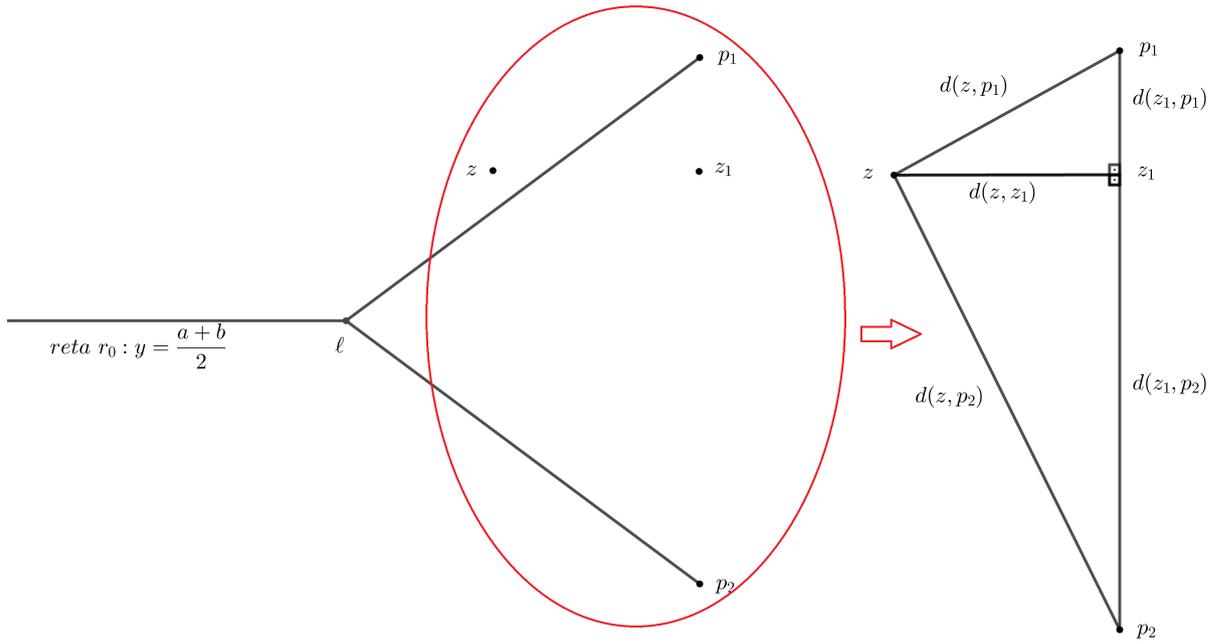


Figura 3.7: Ponto  $z$  acima da reta  $r_2$

Fonte: Próprio Autor.

□

Para se determinar o diagrama de Voronoi, existem alguns casos os quais dependem da relação entre os valores de  $a$  e de  $b$ . Seja  $c = \left(\frac{a+b}{2}\right)$ . Assim,

**Proposição 3.2.6** *Se  $c < -1$  então a parte não linear do diagrama de Voronoi obtido a partir de uma superfície com obstáculo circular, centrado na origem, inicia-se na região  $R_5$ . Caso  $-1 < c < 0$  então a parte não linear do diagrama de Voronoi inicia-se na região  $R_3$*

**Demonstração:** A proposição é verdadeira pela própria definição das regiões  $R_3$  e  $R_5$ . □

Agora, vamos determinar as distâncias que determinam as geodésicas<sup>1</sup>. Seja  $F$  a função que calcula o comprimento da geodésica entre  $u$  e  $p_1$  e subtrai do comprimento da geodésica que liga  $u$  a  $p_2$ . Estamos interessados nos pontos  $u$ , tais que,  $F = 0$  (pontos do diagrama obtido a partir de uma superfície com obstáculos).

Assim, para cada região de interesse, vamos identificar os pontos  $q$  e  $h$ .

<sup>1</sup>Caminho mais curto entre dois pontos em um espaço tridimensional. No nosso caso, refere-se ao caminho mais curto, onde não necessariamente é uma reta, que une os pontos  $u$  da fronteira e os pontos  $p_1$  e  $p_2$ .

**Proposição 3.2.7** *Se  $u = (x, y) \in R_1$ . Então, dividimos  $R_1$  em duas subregiões:*

$$\begin{aligned} R_{1,1} &= \{ \text{o ponto } u \in R_1 \text{ e fica abaixo da reta } r_1 \} \\ R_{1,2} &= \{ \text{o ponto } u \in R_1 \text{ e fica acima da reta } r_1 \}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

- Se  $u \in R_{1,1}$

$$\begin{aligned} F_{1,1} &= \text{dist}(u, q) + \text{dist}(q, p) + \text{dist}(p, p_1) - \text{dist}(u, p_2) \\ F'_{1,1} &= \text{dist}(u, q)' + \text{dist}(q, p)' - \text{dist}(u, p_2)' \end{aligned} \quad (3.7)$$

- Se  $u \in R_{1,2}$

$$\begin{aligned} F_{1,2} &= \text{dist}(u, q) + \text{dist}(q, p) + \text{dist}(p, p_1) - \text{dist}(u, h) - \\ &\quad - \text{dist}(h, g) - \text{dist}(g, p_2) \\ F'_{1,2} &= \text{dist}(u, q)' + \text{dist}(q, p)' - \text{dist}(u, h)' - \text{dist}(h, g)'. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Onde  $F'$  é a derivada de primeira ordem de  $F$ , assim como  $d(x, y)'$  é a derivada de primeira ordem de  $d(x, y)$ , no qual  $x, y$  representam os pontos  $p_1, p, q, h, g$  e  $p_2$ .<sup>2</sup>

### Demonstração:

1º caso ( $R_{1,1}$ ): Se  $u$  pertence a região  $R_1$  e está abaixo da reta  $r_1$ , então o ponto  $u$  enxerga o ponto  $p_2$ . Neste caso, para o cálculo do comprimento das geodésicas não existe o ponto  $h$ , apenas o ponto  $q$ . Portanto, para que haja  $F = 0$ , consideramos somente as distâncias  $\text{dist}(u, q)$ ,  $\text{dist}(q, p)$ ,  $\text{dist}(p, p_1)$  e  $\text{dist}(u, p_2)$ . Ou seja, neste caso, em relação a região  $R_{1,1}$  para pontos  $u$  da fronteira do diagrama de Voronoi que se encontram abaixo da reta  $r_1$ , a função  $F$  escreve-se como

$$F_{1,1} = \text{dist}(u, q) + \text{dist}(q, p) + \text{dist}(p, p_1) - \text{dist}(u, p_2).$$

2º Caso ( $R_{1,2}$ ): Se  $u$  pertence a região  $R_1$  e está acima da reta  $r_1$ , então o ponto  $u$  não enxerga  $p_1$  nem enxerga  $p_2$ . Dessa forma, para o cálculo do comprimento da geodésica considera-se tanto um ponto  $q$  quanto um ponto  $h$ , sendo o ponto  $q$  pertencente ao 2º quadrante do plano cartesiano e o ponto  $h$  pertencente ao 3º quadrante. Com isso, para que haja  $F = 0$ , consideramos as distâncias  $\text{dist}(u, q)$ ,  $\text{dist}(q, p)$ ,  $\text{dist}(p, p_1)$ ,  $\text{dist}(u, h)$ ,  $\text{dist}(h, g)$  e  $\text{dist}(g, p_2)$ . Ou seja, neste caso, em relação a região  $R_{1,2}$  para pontos  $u$  da fronteira do diagrama de Voronoi

---

<sup>2</sup>O uso da função derivada facilita o cálculo das distâncias no algoritmo computacional.

que se encontram acima da reta  $r_1$ , a função  $F$  escreve-se como

$$F_{1,2} = \text{dist}(u, q) + \text{dist}(q, p) + \text{dist}(p, p_1) - \text{dist}(u, h) - \text{dist}(h, g) - \text{dist}(g, p_2).$$

**Proposição 3.2.8** *A fronteira do Diagrama nunca toca  $R_2$ .*

**Demonstração:** De fato, o ponto de  $R_2$  que está mais próximo de  $p_2$  é  $(-1, 0)$  e a distância dele para  $p_2$  é maior que a distância para  $p_1$ , pois  $a < -b$ .  $\square$

**Proposição 3.2.9** *Se  $u = (x, y) \in R_3$ . Então, dividimos  $R_3$  em duas subregiões:*

$$\begin{aligned} R_{3,1} &= \{ \text{o ponto } u \in R_3 \text{ e fica abaixo da reta } r_1 \} \\ R_{3,2} &= \{ \text{o ponto } u \in R_3 \text{ e fica acima da reta } r_1 \}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

- Se  $u \in R_{3,1}$

$$\begin{aligned} F_{3,1} &= \text{dist}(u, q) + \text{dist}(q, p) + \text{dist}(p, p_1) - \text{dist}(u, p_2) \\ F'_{1,1} &= \text{dist}(u, q)' + \text{dist}(q, p)' - \text{dist}(u, p_2)' \end{aligned} \quad (3.10)$$

- Se  $u \in R_{3,2}$

$$\begin{aligned} F_{3,2} &= \text{dist}(u, q) + \text{dist}(q, p) + \text{dist}(p, p_1) - \text{dist}(u, h) - \\ &\quad - \text{dist}(h, g) - \text{dist}(g, p_2) \\ F'_{1,2} &= \text{dist}(u, q)' + \text{dist}(q, p)' - \text{dist}(u, h)' - \text{dist}(h, g)'. \end{aligned} \quad (3.11)$$

**Demonstração:**

1º Caso ( $R_{3,1}$ ): Se  $u$  pertence a região  $R_3$  e está abaixo de  $r_1$ , então  $u$  consegue enxergar  $p_2$  e  $q$  está no 2º quadrante.

2º Caso  $R_{3,2}$ : Se  $u$  pertence a região  $R_3$  e está acima de  $r_1$ , então  $q$  está no 2º quadrante e  $h$  no 3º.  $\square$

Agora, nós vamos olhar para a região  $R_4$ . Nós temos três situações, de fato subdividimos  $R$  em três regiões:

$$\begin{aligned} R_{4,1} &= \{ \text{o ponto } u \in R_4 \text{ e fica abaixo da reta } r_1 \}, \\ R_{4,2} &= \{ \text{o ponto } u \in R_4 \text{ fica acima da reta } r_1 \text{ e não ver } p_2 \}, \\ R_{4,3} &= \{ \text{o ponto } u \in R_4 \text{ fica acima da reta } r_1 \text{ e ver o ponto } p_2 \}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

**Proposição 3.2.10** Nesta proposição definimos as expressões de  $F$  e  $F'$  para pontos  $u \in R_4$ .

- Se  $u = (x, y) \in R_{4,1}$ . Então,

$$\begin{aligned} F_{4,1} &= \text{dist}(u, q) + \text{dist}(q, p) + \text{dist}(p, p_1) - \text{dist}(u, p_2) \\ F'_{4,1} &= \text{dist}(u, q)' + \text{dist}(q, p)' - \text{dist}(u, p_2)' \end{aligned} \quad (3.13)$$

- Se  $u = (x, y) \in R_{4,2}$ . Então,

$$\begin{aligned} F_{4,2} &= \text{dist}(u, q) + \text{dist}(q, p) + \text{dist}(p, p_1) - \text{dist}(u, h) - \text{dist}(h, g) - \text{dist}(g, p_2) \\ F'_{4,2} &= \text{dist}(u, q)' + \text{dist}(q, p)' - \text{dist}(u, h)' - \text{dist}(h, g)'. \end{aligned} \quad (3.14)$$

- Se  $u = (x, y) \in R_{4,3}$ . Então,

$$\begin{aligned} F_{4,3} &= \text{dist}(u, q) + \text{dist}(q, p) + \text{dist}(p, p_1) - \text{dist}(u, p_2) \\ F'_{4,3} &= \text{dist}(u, q)' + \text{dist}(q, p)' - \text{dist}(u, p_2)' \end{aligned} \quad (3.15)$$

**Demonstração:** Em  $R_5$ , tanto  $q$  quanto  $h$  possuem ordenadas negativas.

1º Caso ( $R_{4,1}$ ): Entre  $q$  e  $h$  tomamos o ponto que possui a maior ordenada. Como  $q$  é o ponto que está mais próximo de  $p$ , logo, ele é o que em maior ordenada.

2º Caso ( $R_{4,2}$ ): Neste caso, usamos os pontos  $q$  e  $h$ .

□

Na sequência, vamos estudar a região:

**Proposição 3.2.11** Se  $u = (x, y) \in R_5$ . Então,

$$\begin{aligned} F_5 &= \text{dist}(u, q) + \text{dist}(q, p) + \text{dist}(p, p_1) - \text{dist}(u, p_2) \\ F'_5 &= \text{dist}(u, q)' + \text{dist}(q, p)' - \text{dist}(u, p_2)' \end{aligned} \quad (3.16)$$

**Demonstração:** Se  $u$  pertence a região  $R_5$ , então ele enxerga  $p_2$ . Logo, usamos apenas o ponto  $q$ . □

Agora, região  $R_6$ .

**Proposição 3.2.12** Se  $u = (x, y) \in R_6$ . Então,

$$\begin{aligned} F_6 &= \text{dist}(u, h) + \text{dist}(h, p) + \text{dist}(p, p_1) - \text{dist}(u, p_2) \\ F'_6 &= \text{dist}(u, h)' + \text{dist}(h, p)' - \text{dist}(u, p_2)' \end{aligned} \quad (3.17)$$

**Demonstração:** Se  $u$  pertence a região  $R_6$ , então ele enxerga  $p_2$ . Agora, precisamos verificar se usamos  $q$  ou  $h$ . Como  $u$  está no 3º quadrante, então a ordenada deve ser a negativa e mais próxima de  $p_2$ . Logo, usamos  $h$ .  $\square$

Nas figuras a seguir podemos ver como ficam os 'grafos de visibilidade' que aqui, para a nossa situação, denominaremos por *grafos de proximidade*, uma vez que alguns vértices, apesar de próximos, não se enxergam. Nestes grafos, os vértices de cores diferentes representam informações de proximidade.

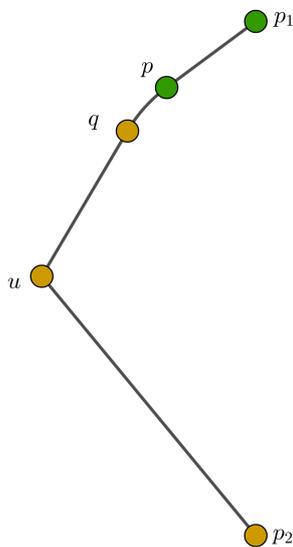


Figura 3.8: Grafo de proximidade para a situação em que o ponto  $u$  enxerga  $p_2$

Proprio autor.

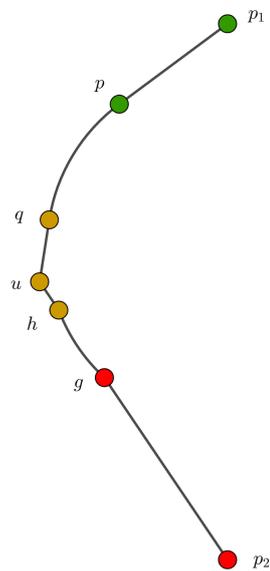


Figura 3.9: Grafo de proximidade para a situação em que o ponto  $u$  não enxerga  $p_2$

Proprio autor.

### 3.3 Pseudocódigo

---

Algorithm 1 Diagrama de Voronói para os pontos  $a$  e  $b$  separados por um obstáculo circular.

---

```

1: procedure ENTRE COM  $a$  E  $b$ , ( $a < -b$ ) ▷  $a, b \in \mathbb{R}^2$ 
2:   read  $a$ ;
3:   read  $b$ ;
4:   círculo = FALSO
5:    $c = \frac{a+b}{2}$ ;
6:    $x_0 = \sqrt{1 - \frac{1}{a^2} \left( \frac{b-a}{a-\frac{b}{2}} \right)}$ ;
7:   if  $c < -1$  then
8:     região = 5; ▷ Pois,  $\ell$  pertence a  $R_5$ , onde  $\ell = (x_0, \frac{a+b}{2})$ .
9:   end if
10:  if  $c > -1$  then
11:    região = 31; ▷ Pois,  $\ell$  pertence a  $R_{3,1}$ .
12:     $t = \frac{-x_0}{0.01}$ ; ▷ n° de pontos do diagrama se não toca o círculo.
13:  end if
14:  círculo = FALSO;
15:   $i = 0$ ;
16:  while  $i < t$  and círculo = FALSO do
17:     $i = i + 1$ ;
18:     $x_i = x_0 + i(0.01)$ ;
19:     $x_{novo} = \text{VERDADEIRO}$ 
20:    if região = 11 and  $x_{novo} = \text{VERDADEIRO}$  then
21:       $y_i = \text{ZERO}(F_{1,1}(x_i))$ ;
22:      if  $(x_{i+1}, \hat{y}_{j+1}) \in R_{1,1}$  then ▷  $\hat{y}$  é uma estimativa para o próximo  $y_{i+1}$ .
23:        região = 11;
24:      end if
25:      if  $(x_{i+1}, \hat{y}_{j+1}) \in R_{1,2}$  then
26:        região = 12
27:      end if
28:      if  $(x_{i+1}, \hat{y}_{j+1}) \in R_{3,1}$  then
29:        região = 31;
30:      end if
31:       $x_i \text{ novo} = \text{FALSO}$ ;
32:    end if
33:    if região = 12 and  $x_i \text{ novo} = \text{VERDADEIRO}$  then
34:       $y_i = \text{ZERO}(F_{1,2}(x_i))$ ;
35:      if  $(x_{i+1}, \hat{y}_{j+1}) \in R_{1,2}$  then
36:        região = 12;
37:      end if
38:      if  $(x_{i+1}, \hat{y}_{j+1}) \in R_{3,2}$  then
39:        região = 32;
40:      end if
41:       $x_i \text{ novo} = \text{FALSO}$ ;
42:    end if
43:    if região = 31 and  $x_i \text{ novo} = \text{VERDADEIRO}$  then
44:       $y_i = \text{ZERO}(F_{3,1}(x_i))$ ;
45:      if  $(x_{i+1}, \hat{y}_{j+1}) \in R_{1,1}$  then
46:        região = 11;
47:      end if
48:      if  $(x_{i+1}, \hat{y}_{j+1}) \in R_{3,1}$  then
49:        região = 31;
50:      end if
51:      if  $(x_{i+1}, \hat{y}_{j+1}) \in R_{3,2}$  then
52:        região = 32;
53:      end if
54:      if  $(x_{i+1}, \hat{y}_{j+1}) \in R_{4,1}$  then
55:        região = 41;
56:      end if
57:      if  $(x_{i+1}, \hat{y}_{j+1}) \in R_5$  then
58:        região = 5;
59:      end if
60:       $x_i \text{ novo} = \text{FALSO}$ ;
61:    end if

```

```

62:   if região = 32 and  $x_i$  novo = VERDADEIRO then
63:      $y_i$  = ZERO( $F_{3,2}(x_i)$ );
64:     if  $(x_{i+1}, \hat{y}_{j+1}) \in R_{3,2}$  then
65:       região = 32;
66:     end if
67:     if  $(x_{i+1}, \hat{y}_{j+1}) \in R_{4,2}$  then
68:       região = 42;
69:     end if
70:      $x_i$  novo = FALSO;
71:   end if
72:   if região = 42 and  $x_i$  novo = VERDADEIRO then
73:      $y_i$  = ZERO( $F_{4,2}(x_i)$ );
74:     if  $(x_{i+1}, \hat{y}_{j+1}) \in R_{4,2} \Rightarrow$  then
75:       região = 42;
76:     end if
77:     if  $(x_{i+1}, \hat{y}_{j+1}) \in R_{4,1}$  then
78:       região = 41;
79:     end if
80:     if  $(x_{y+1}, \hat{y}_{i+1})$  pertence ao interior do círculo then
81:       círculo = VERDADEIRO;
82:     end if
83:      $x_i$  novo = FALSO;
84:   end if
85:   if região = 41 and  $x_i$  novo = VERDADEIRO then
86:      $y_i$  = ZERO( $F_{4,1}(x_i)$ );
87:     if  $(x_{i+1}, \hat{y}_{j+1}) \in R_{4,1}$  then
88:       região = 41;
89:     end if
90:     if  $(x_{i+1}, \hat{y}_{j+1}) \in R_{4,3}$  then
91:       região = 43;
92:     end if
93:     if  $(x_{i+1}, \hat{y}_{j+1}) \in R_{6,1}$  then
94:       região = 61;
95:     end if
96:      $x_i$  novo = FALSO;
97:   end if
98:   if região = 5 and  $x_i$  novo = VERDADEIRO then
99:      $y_i$  = ZERO( $F_5(x_i)$ );
100:    if  $(x_{i+1}, \hat{y}_{j+1}) \in R_5$  then
101:      região = 5;
102:    end if
103:    if  $(x_{i+1}, \hat{y}_{j+1}) \in R_{6,1}$  then
104:      região = 61;
105:    end if
106:     $x_i$  novo = FALSO;
107:   end if
108:   if região = 61 and  $x_i$  novo = VERDADEIRO then
109:      $y_i$  = ZERO( $F_{6,1}(x_i)$ );
110:     if  $(x_{i+1}, \hat{y}_{j+1}) \in R_{6,1}$  then
111:       região = 61;
112:     end if
113:     if  $(x_{i+1}, \hat{y}_{j+1}) \in R_{6,2}$  then
114:       região = 62;
115:     end if
116:      $x_i$  novo = FALSO;
117:   end if
118:   if região = 43 and  $x_i$  novo = VERDADEIRO then
119:      $y_i$  = ZERO( $F_{4,3}(x_i)$ );
120:     if  $(x_{i+1}, \hat{y}_{j+1}) \in R_{4,3}$  then
121:       região = 43;
122:     end if
123:     if  $(x_{i+1}, \hat{y}_{j+1}) \in R_{6,2}$  then
124:       região = 62;
125:     end if

```

```

126:         if  $(x_{y+1}, \hat{y}_{i+1})$  pertence ao interior do círculo then
127:             círculo = VERDADEIRO;
128:         end if
129:     end if
130:     if região = 62 and  $x_{i\ novo}$  = VERDADEIRO then
131:          $y_i$  = ZERO( $F_{6,2}(x_i)$ );
132:     end if
133: end while
134: return  $z = ((x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_i, y_i))$  ▷ Pontos da fronteira.
135: print  $z$ 
136: end procedure

```

---

O objetivo do algoritmo é detectar em quais regiões e subregiões se encontram as ordenadas que anulam a função. Para isso, é feita uma busca em cada subregião e nas subregiões imediatamente vizinhas, até serem analisadas todas as subregiões. Inicialmente, então, entramos com valores para as ordenadas  $a$  e  $b$  dos respectivos pontos  $p_1$  e  $p_2$  e, em seguida, é calculado os valores de  $c$  e  $x_0$ , que estão em função de  $a$  e  $b$ . Além disso, declaramos uma variável ‘círculo’ como sendo FALSO que indica que o ponto da fronteira encontra fora do círculo. A partir do valor de  $c$ , sabemos se a parte não linear da fronteira do diagrama se iniciará na região 5 ou na região 3,1. O  $t$  nos diz a quantidade de pontos  $x_i$ , no eixo das abscissas, que devemos nos deslocar até o círculo, ou seja, indica a quantidade de vezes em que o laço ‘while’ será executado no algoritmo. Quanto maior for o  $t$ , em valor absoluto, mais preciso será a descrição da fronteira. Com um valor incremental inicial  $i = 0$ , iniciamos a execução do laço. Enquanto tivermos  $i < t$  e o círculo=FALSO o algoritmo percorrerá as regiões do triângulo. Fazendo  $x_{novo}$  =VERDADEIRO, analisamos cada região, onde a primeira é a região 1,1. Se região=11 e  $x_{novo}$  =VERDADEIRO então buscamos o valor de  $y_i$  para o qual a função  $F_{1,1}$  se anula. Então verificamos se o ponto da fronteira  $(x_{i+1}, y_{j+1})$  pertence a região  $R_{1,1}$ ,  $R_{1,2}$  ou  $R_{1,3}$  guardando o valor na variável ‘região’ como sendo 11, 12 ou 13, respectivamente, e então feito isso, o valor do  $x_{novo}$  passa a ser igual a FALSO, o que faz com que o algoritmo saia do primeiro ‘if’ e então guarda novamente o valor da variável  $x_{novo}$  como sendo VERDADEIRO, e assim, busque entrar na respectiva região de acordo com o valor que fora guardado, ou seja,  $R_{1,1}$ ,  $R_{1,2}$  ou  $R_{1,3}$ . O algoritmo vai procedendo de maneira análoga em cada região até encontrar todos os pontos  $(x_i, y_i)$  da fronteira do diagrama de Voronoi.

Nas figuras a seguir, apresentamos à esquerda do obstáculo circular, a fronteira do diagrama de Voronoi quando o valor de  $a = 2$  e os valores de  $b$  variando entre  $-10, -8, -5, -4, -2$ .

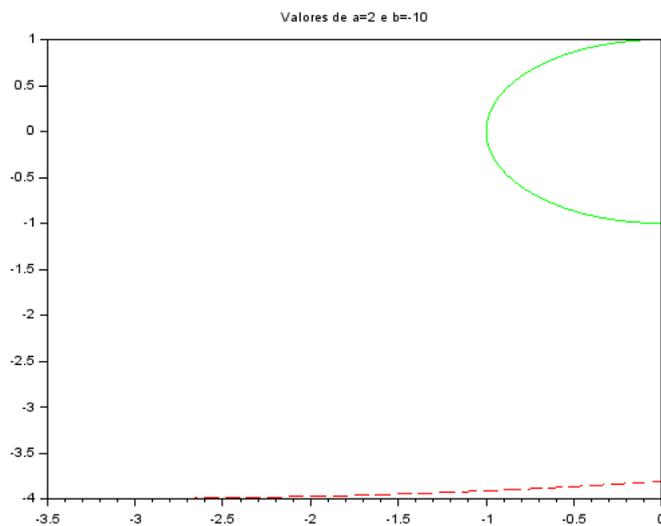


Figura 3.10: Diagrama de Voronoi para  $a = 2$  e  $b = -10$   
Fonte: Próprio autor.

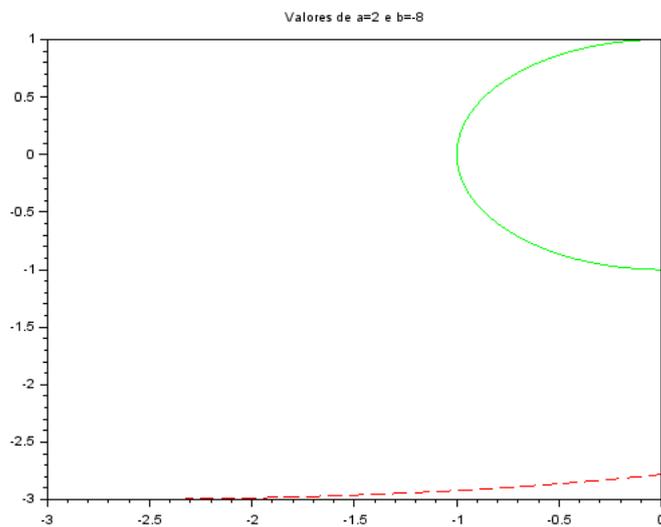


Figura 3.11: Diagrama de Voronoi para  $a = 2$  e  $b = -8$   
Fonte: Próprio autor.

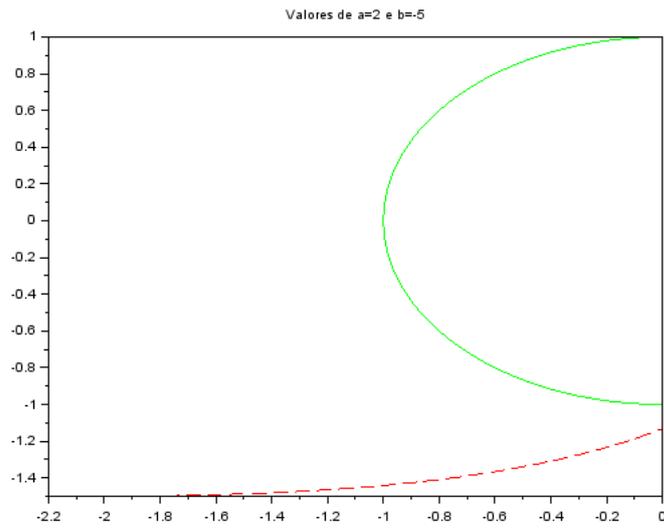


Figura 3.12: Diagrama de Voronoi para  $a = 2$  e  $b = -5$   
 Fonte: Próprio autor.

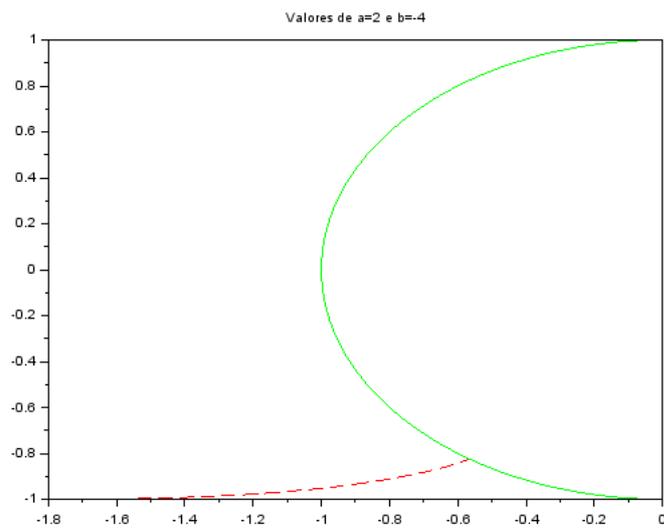


Figura 3.13: Diagrama de Voronoi para  $a = 2$  e  $b = -4$   
 Fonte: Próprio autor.

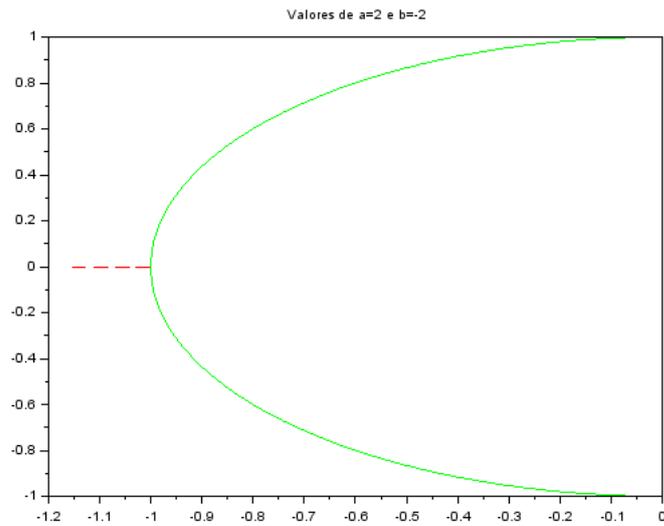


Figura 3.14: Diagrama de Voronoi para  $a = 2$  e  $b = -2$   
 Fonte: Próprio autor.

Podemos ver a partir das imagens que a parte da fronteira do diagrama de Voronoi que fica a esquerda do obstáculo circular apresenta a coordenada  $y$  crescente e que nos casos apresentados, o diagrama não toca o eixo  $x$ .

# Capítulo 4

## Conclusões

O principal objetivo deste trabalho foi propor um algoritmo para determinar a fronteira do diagrama de Voronoi quando esse for formado a partir de dois pontos geradores específicos dispostos no plano  $\mathbb{R}^2$  e com um obstáculo circular entre estes pontos. Para tanto, inicialmente, apresentamos alguns conceitos importantes ao entendimento do estudo em questão, como a teoria de grafos e do diagrama de Voronoi, suas propriedades e algumas de suas principais características.

Buscamos relacionar o diagrama de Voronoi com a teoria dos grafos, em seguida, apresentamos o caso do diagrama quando consideramos obstáculos entre seus pontos geradores. Inicialmente, apresentamos o que ocorre se considerarmos obstáculos poligonais e vimos que nesse caso acrescentamos os vértices do obstáculo poligonal ao conjunto dos pontos geradores, determinamos o grafo de visibilidade e então calculamos a menor distância entre os pontos do espaço plano e os pontos geradores a partir de um algoritmo como o Dijkstra, em seguida, procuramos descrever o que ocorre se considerarmos um obstáculo circular entre dois pontos específicos do plano.

Em nossos estudos, pudemos observar que no caso de obstáculos poligonais o problema podia ser resolvido, basicamente, considerando o tipo de distância utilizada (que no nosso caso foi a euclidiana), a utilização de grafos de visibilidade e de algum algoritmo para se determinar o menor caminho entre os pontos como a exemplo do algoritmo Dijkstra. Contudo, não encontramos na literatura consultada como se dá o caso quando consideramos obstáculos circulares. Estudando este caso, utilizando a distância euclidiana, vimos que o problema já não é tão simples, pois nem sempre é possível calcular diretamente a distância entre dois pontos. Sendo assim, precisamos determinar pontos relevantes que devem ser considerados na busca por encontrar o ponto da fronteira do diagrama.

Nas condições apresentadas neste trabalho, considerando o espaço plano  $\mathbb{R}^2$  e dois pontos geradores específicos em um ambiente bem estruturado(ou seja, onde não existem forças agindo sobre esse ambiente), o diagrama se comporta como uma modelagem de um mapeamento ideal que pode servir, por exemplo, para a navegação

de um robô móvel em busca do menor caminho de um determinado local a outro. Para a obtenção do diagrama, elaboramos um algoritmo escrito em linguagem de programação Scilab.

Como continuação deste trabalho, deixamos como sugestão a determinação da fronteira do diagrama de Voronoi com obstáculos circulares entre dois pontos geradores específicos, porém, em um ambiente com outra configuração, por exemplo, considerando um deslocamento do obstáculo sobre o eixo  $x$ . Também pode ser considerado o caso para mais de dois geradores. Outra sugestão interessante seria considerar este mesmo problema mas desta vez definindo o diagrama de Voronoi no espaço  $\mathbb{R}^3$  e determinar sua fronteira no caso em que entre seus geradores haja alguns obstáculos tais como cubos, esferas, cilindros, entre outros. Por fim, podia se considerar o estudo de casos considerando um outro tipo de métrica, além da euclidiana ou ainda fazer esse estudo da fronteira utilizando equações paramétricas.

# Referências Bibliográficas

- [1] ASSIS, J. S. M., 2016, *Grafos Eulerianos no Ensino Médio*. Dissertação, Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.
- [2] BARBA, L., GÄRTNER, B., HOFFMANN, M., et al., 2017, *Geometry: Combinatorics Algorithms Lecture Notes HS 2017*. Zürich, Department of Computer Science, ETH Zürich Universitätstrasse 6, CH-8092 Zürich, Switzerland.
- [3] CARDOSO, D. M., 2005, *Teoria dos Grafos e Aplicações*. Aveiro, Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro.
- [4] CARNASCIALI, A. M. S., 2010, *Determinação de áreas de abrangência de pontos pelo diagrama de voronoi com obstáculos*. Tese de D.Sc., PPGCG/UFPR, Curitiba, PR, Brasil.
- [5] CELES, W., 2017, *Diagrama de Voronoi-INF2604 - Geometria Computacional*. Disponível em: <https://webserver2.tecgraf.puc-rio.br/celes/docs/inf2604/voronoi.pdf>. Acesso em: 20 de outubro de 2020.
- [6] DINIS, J. C. B., 2013, *Construção e Edição de Diagramas de Voronoi*. Tese de D.Sc., Universidade Nova de Lisboa, Lisboa, Portugal.
- [7] DOLCE, O., POMPEO, J. N., 2013, *Fundamentos de matemática elementar 9: geometria plana*. 9 ed. São Paulo, Atual.
- [8] FEOFILOFF, P., KOHAYAKAWA, Y., Y. WAKABAYASHI, 2004, *Uma Introdução Sucinta à Teoria dos Grafos*. 1 ed. São Paulo, Brasil, II Bienal da SBM.
- [9] FEOFILOFF, P., 2011, *Entenda o enigma das pontes de Königsberg que instigou a geometria: Para resolver o problema, Leonhard Euler criou a Teoria dos Grafos*. Disponível em: <http://redeglobo.globo.com/globociencia/noticia/2011/12/entenda-o-enigma-das-pontes-de-konigsberg-que-instigou-geometria.html>. Acesso em: 08 de março de 2020.

- [10] FIGUEIREDO, L. H., CARVALHO, P. C. P., 1991, *Introdução à Geometria Computacional*. 1 ed. Rio de Janeiro,, Instituto de Matemática Pura e Aplicada.
- [11] GAMBA, C. T. C., JUNIOR, M. C., FERREIRA, C. J., 2017, “O uso de sisemas de informações geográficas na identificação de áreas prioritárias para recuperação e aproveitamento mineral no litoral norte de São Paulo”, *RA’E GA - O Espaço Geografico em Analise*, v. 39, pp. 128–145.
- [12] GIUȘCĂ, B., 2005, *O problema das sete pontes de Königsberg*. Disponível em: [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Königsberg\\_bridges.png](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Königsberg_bridges.png). Acesso em: 08 de março de 2020.
- [13] JURKIEWICZ, S., 2009, *Grafos - Uma Introdução*. Rio de Janeiro, UFRJ.
- [14] LIMA, N. C., *Problemas de deslocamento no plano em geometria computacional*. São Paulo, IME-USP.
- [15] MAKSIM, 2006, *Grafos duais*. Disponível em: <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Dualgraphs.png?uselang=ptfile>. Acesso em: 22 de março de 2020.
- [16] MESQUITA, R. C., 2017, *Geometria Computacional*. Disponível em: <https://www.dca.ufrn.br/pablo/FTP/geom.pdf>. Acesso em: 20 de outubro de 2020.
- [17] MONTENEGRO, A., 2017, *Geometria Computacional*. Disponível em: [http://www.ic.uff.br/anselmo/cursos/GeomComp/slides/GC\\_aula11\(diagramadevoronoi\).pdf](http://www.ic.uff.br/anselmo/cursos/GeomComp/slides/GC_aula11(diagramadevoronoi).pdf). Acesso em: 22 de outubro de 2020.
- [18] OKABE, A., BOOTS, B., SUGIHARA, K., 1992, *Spatial Tessellations. Concepts and Applications of Voronoi Diagrams*. 1 ed. Chichester, New York, Brisbane, Toronto and Singapore, John Wiley and Sons.
- [19] OLIVEIRA, J. P. P. N., 2012, *Método Iterativo para Geração de Malhas Triangulares com Distribuição Uniforme*. Dissertação, Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, SP, Brasil.
- [20] PAMPLONA, D. C., 2008, *Tópicos em Teoria dos Grafos*. Florianópolis, UFSC.
- [21] PREPARATA, F. P., SHAMOS, M. I., 1988, *Computational Geometry: an Introduction*. 2 ed. New York, Springer-Verlag.

- [22] SILVA, A. C. L., 2004, *Estratégia para divisão de áreas de estudo em problemas logísticos - Uso do Diagrama de Voronói com obstáculos*. Tese de D.Sc., Universidade Federal de Santa Catarina, Santa Catarina, SC, Brasil.
- [23] SILVA, L. S., 2005, *Uma Proposta para a Representação Geométrica de Imagens com Aplicação em Segmentação e Compressão*. Dissertação, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, RS, Brasil.
- [24] SILVA, R. C. J., 2019, *Diagrama de Voronoi para Dois Pontos com Um Obstáculo Circular*. Dissertação, PPGMMC/UFPB, João Pessoa, PB, Brasil.
- [25] WILSON, R. J., 1996, *Introduction to Graph Theory*. 4 ed. Harlow, Addison Wesley Longman Limited.
- [26] ZACHAR, J., HORŇÁK, M., NOVAKOVIĆ, P., 2017, *3D Digital recording of archaeological, architectural and artistic heritage*. 1 ed. Ljubljana, University of Ljubljana, Faculty of Arts/Univerza v Ljubljani, Filozofska fakulteta.

# Apêndice A

## Código

O código para a obtenção da fronteira do diagrama de Voronoi na situação proposta foi construído através do Scilab que é um software científico para computação numérica.

---

**Algorithm 2** Diagrama de Voronói para os pontos  $a$  e  $b$  separados por um obstáculo circular.

---

```
1: procedure [root] = DV2Efinal(a, b)           ▷ suponha que  $a < \text{modulo de } b$  e  $a, b \in \mathbb{R}^2$ 
2:   quantpontos = 500;
3:   fase = 0;
4:   circulo = 0;
5:   guarda = 1;
6:   for j = 1/quantpontos do
7:     l(j) = 0;
8:     w(j) = 0;
9:     v(j) = 0;           ▷ Valores de x para o círculo
10:    u(j) = 0;          ▷ Valores de y para o círculo superior
11:    t(j) = 0;          ▷ Valores de y para o círculo inferior
12:  end for
13:  h1 = 1/quantpontos;
14:  for j = 1/quantpontos do
15:    v(j) = -1 + h1 * (j - 1);
16:    u(j) = round(1000 * (sqrt(1 - v(j)^2)))/1000;
17:    t(j) = round(-1000 * (sqrt(1 - v(j)^2)))/1000;
18:  end for
19:  y = (a + b)/2;
20:  x1 = ((b - a)/2) * ((sqrt(1 - 1/a^2))/(a - 1/a));
21:  circulo = 0           ▷ falso
22:  h = (abs(-x1))/quantpontos;
23:  j = 1
24:  while (j < quantpontos)&&(guarda == 1) do
25:    x = x1 + h * j;
26:    l(j) = x;           ▷ valores de x entre x1 e -1.;
27:                       ▷ f = 1;
28:    numinteracao = 0;
29:    quantinteracoes = 15;
30:                       ▷ disp(x);
31:    if (x^2 + y^2 < 1) then circulo = 1; guarda = j;
32:  end if
```

```

33:     while (numinteracao < quantinteracoes)&&(circulo == 0) do
tireifase == 0e|abs(f) < 0.05)
34:         e1 = y;
35:         d1 = x2 + y2 - 1;
36:         e2 = abs(x) * sqrt(d1);
37:         e3 = x2 + y2;
38:         e3prime = 2 * y;
39:         d1prime = 2 * y;
40:         e1prime = 1;
41:         e2prime = (abs(x) * d1prime)/(2 * sqrt(d1));
42:         f1 = (e1 + e2)/(e3);
43:         f2 = (e1 - e2)/(e3);
44:         f1prime = ((e1prime + e2prime) * e3 - (e1 - e2) * e3prime)/((e3)2);
45:         f2prime = ((e1prime - e2prime) * e3 - (e1 - e2) * (e3prime))/((e3)2);
46:         dpp1 = sqrt(a2 - 1);
47:         dgp2 = sqrt(b2 - 1);
48:         s1 = 1 - (f1)2;
49:         s1prime = -2 * f1 * f1prime;
50:         r1 = x + sqrt(s1);
51:         r2 = y - f1;
52:         r2prime = 1 - f1prime;
53:         r1prime = (s1prime)/(2 * sqrt(s1));
54:         l1 = (r1)2 + (r2)2;
55:         l1prime = 2 * r1 * r1prime + 2 * r2 * r2prime;
56:         duq = sqrt(l1);
57:         duqprime = (l1prime)/(2 * sqrt(l1));
58:         m1 = x2 + (y - b)2;
59:         m1prime = 2 * (y - b);
60:         dup2 = sqrt(m1);
61:         dup2prime = (m1prime)/(2 * sqrt(m1));
62:         zprime = sqrt(1 - 1/a2) * (s1prime)/(2 * sqrt(s1)) + (f1prime)/a;
63:         z = sqrt(1 - 1/a2) * sqrt(s1) + (f1)/a;
64:         dpq = acos(z);
65:         dpqprime = (-zprime)/(sqrt(1 - z2));
66:         if fase == 0 then
67:             Fhat = dpp1 + dpq + duq - dup2;
68:             Fhatprime = dpqprime + duqprime - dup2prime;
69:             yplus = y - (Fhat)/(Fhatprime);
70:             y = yplus;
71:         end if
72:         if fase == 1 then
73:             s2 = 1 - (f2)2;
74:             s2prime = -2 * f2 * f2prime;
75:             r3 = x + sqrt(s2);
76:             r4 = y - f2;
77:             r4prime = 1 - f2prime;
78:             r3prime = (s2prime)/(2 * sqrt(s2));
79:             l2 = (r3)2 + (r4)2;
80:             l2prime = 2 * r3 * r3prime + 2 * r4 * r4prime;
81:             duh = sqrt(l2);
82:             duhprime = (l2prime)/(2 * sqrt(l2));
83:             wprime = sqrt(1 - 1/b2) * (s2prime)/(2 * sqrt(s2)) + (f2prime)/b;
84:             w = sqrt(1 - 1/b2) * sqrt(s2) + (f2)/b;
85:             dhg = acos(w);
86:             dhgprime = (-wprime)/(sqrt(1 - w2));
87:             Fhathat = dpp1 + dpq + duq - duh - dhg - dgp2;
88:             Fhathatprime = dpqprime + duqprime - duhprime - dhgprime;
89:             yplus = y - (Fhathat)/(Fhathatprime);
90:             y = yplus;
91:         end if

```

```

92:         if ( $x^2 + y^2 < 1$ ) then
93:             circulo = 1;
94:             guarda = j;
95:         end if
96:         numinteracao = numinteracao + 1;
97:         if ( $y > ((b - 1/b) * x) / (\text{sqrt}(1 - 1/(b^2))) + b$ )&&(y > 1/b) then
98:             fase = 1;
99:         end if
100:        end while
101:        w(j) = round(1000 * y)/1000;
102:        (j) = l(j);
103:        q(j) = w(j);
104:        j = j + 1;
105:    end while
106:    disp(fase);
107:    disp(circulo);
108:    disp(guarda);
109:    plot(p, q, 'r - -');
110:    plot(v, u, 'g -');
111:    plot(v, t, 'g -');
112:    xtitle('Valores de  $a = 2eb = -2'$ );
113:    plot(0, a, 'b :');
114:    plot(0, b, 'b - -');
115:    root = 0;
115: end procedure

```

---

▷ *disp*(*t*);