Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós–Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Ideais perfeitos de codimensão 2 em três variáveis

Cássio Anderson Feitosa

João Pessoa – PB
Março de 2019

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós–Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Ideais perfeitos de codimensão 2 em três variáveis

por

Cássio Anderson Feitosa

sob a orientação do

Prof. Dr. Ricardo Burity Croccia Macedo

João Pessoa – PB
Março de 2019

Catalogação na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

F311i Feitosa, Cássio Anderson.
Ideais perfeitos de codimensão 2 em três variáveis / Cássio Anderson Feitosa. - João Pessoa, 2019.
65 f.

Orientação: Ricardo Burity Croccia Macedo.
Dissertação (Mestrado) - UFPB/Ciências Exatas.

1. Matemática. 2. Matriz de Hilbert-Burch. 3. Invariante do caos. 4. Álgebra de Rees. 5. Fibra especial. I. Macedo, Ricardo Burity Croccia. II. Título.

UFPB/BC CDU 51(043)

Elaborado por Gracilene Barbosa Figueiredo - CRB-15/794

ATA DA SESSÃO PÚBLICA DE DEFESA DE DISSERTAÇÃO DE MESTRADO DO ALUNO CÁSSIO ANDERSON FEITOSA, CANDIDATO AO TÍTULO DE MESTRE EM MATEMÁTICA NA ÁREA DE ÁLGEBRA.

Aos 29 (vinte e nove) dias do mês de março do ano de dois mil e dezenove, às 10:00 horas, na Sala de Multimídia do Departamento de Matemática, do Centro de Ciências Exatas e da Natureza – CCEN, da Universidade Federal da Paraíba – UFPB, reuniram-se em caráter de solenidade pública, os membros da comissão designada para avaliar **Cássio Anderson Feitosa**, candidato ao grau de Mestre em Matemática, na área de Álgebra. Foram componentes da Banca Examinadora, os professores Ricardo Burity Croccia Macedo (Orientador) - Doutor em Matemática, Cleto Brasileiro Miranda Neto - Doutor em Matemática, André Vinícius Santos Dória - Doutor em Matemática, sendo o primeiro e o segundo integrantes do corpo docente da UFPB, e o terceiro integrante do corpo docente da UFS. Dando início aos trabalhos, o Presidente da Banca, Ricardo Burity Croccia Macedo, após declarar os objetivos da reunião, apresentou o candidato a quem concedeu a palavra para que dissertasse, oral e sucintamente, sobre o tema apresentado, intitulado "Ideais perfeitos de codimensão 2 em três variáveis**"**. Após discorrer sobre o referido tema, o candidato foi arguido pelos examinadores na forma regimental. Ato contínuo, passou a comissão, em caráter secreto, a proceder à avaliação e julgamento do trabalho, concluindo por atribuir-lhe o conceito **Aprovado**. Em face da aprovação, declarou a Presidente achar-se o avaliado legalmente habilitado a receber o Grau de Mestre em Matemática, cabendo a Universidade Federal da Paraíba, providências como de direito, à expedição do Diploma a que o mesmo fez jus. Nada mais havendo a tratar, eu, Roseli Agapito da Silva Guedes, na qualidade de secretária, lavrei a Ata, que submeto a aprovação da Comissão Examinadora.

João Pessoa, 29 de março de 2019

Banca Examinadora:

Ricardo Burity Croccia Macedo Ricardo Burity C. Macedo

Cleto Brasileiro Miranda Neto Cleto Brasileiro Miranda Neto

André Vinícius Santos Dória André V. S. Dória

Dedico este trabalho primeiramente à minha mãe por todo o apoio. E ao meu grande amigo, professor e incentivador Prof. Severino Cirino (in memorian).

Agradecimentos

À Deus por me dar plenas condições de realizar este trabalho.

À minha mãe e meu irmão pelo apoio incondicional e sempre estarem comigo. Ao meu pai pela educação dada. À toda minha família.

Ao meu orientador neste trabalho, Prof. Dr. Ricardo Burity Croccia Macedo pela confiança depositada, disponibilidade, atenção e conhecimento compartilhado.

Aos meus colegas, pelos momentos compartilhados. Em particular, aos meus colegas do Milênio. À minha amiga Mariana. À Dayane, pela parceria nos estudos.

À todos os professores do DM-UFPB, em especial àqueles que tive maior contato durante o mestrado: Miriam, Jaqueline, Adriano, Flank, Jamilson, dentre outros.

À minha namorada, Tharine, que me acompanhou ao longo deste trabalho.

Agradeço também aos integrantes da banca Prof. Dr. Aron Simis e Prof. Dr. Cleto Miranda Neto pela disponibilidade.

Resumo

Neste trabalho estudaremos propriedades de ideais de codimensão 2 gerados por menores maximais de uma $n \times (n-1)$ matriz φ com entradas lineares no anel de polinômios $k[x, y, z]$, sendo k um corpo. Especificamente sobre a luz da definição de invariante do caos da matriz φ, exploraremos propriedades da álgebra de Rees e da fibra especial de ideais dessa classe, em especial no caso em que o invariante do caos é igual a 1.

Palavras-chave: matriz de Hilbert-Burch, invariante do caos, álgebra de Rees, fibra especial.

Abstract

In this work, we will study properties of ideals of codimension 2 generated by maximals minors of a $n \times (n-1)$ matrix φ with linear entries in the polynomial ring $k[x, y, z]$, with k a field. Specifically, on the light of the chaos invariant of the matrix φ, we will explore properties of the Rees algebra and special fiber of ideals of this class, especially in the case where the chaos invariant is equal to 1.

Keywords: Hilbert-Burch matrix, chaos invariant, Rees algebra, special fiber.

Sumário

Notações

A seguir, listamos algumas notações utilizadas neste trabalho.

Notações	**Significado**
k	Corpo algebricamente fechado
$\mathcal{R}_A(I)$	Álgebra de Rees do ideal $I \subseteq A$.
$\mu(M)$	Número mínimo de geradores de um módulo M.
$\mathrm{ht}(I)$	Altura do ideal I.
$\mathrm{depth}(M)$	A profundidade de M.
$\mathrm{dh}(M)$	Dimensão homológica de um módulo M.
$\dim(A)$	Dimensão de Krull do anel A.
$\mathcal{F}(I)$	Fibra Especial do ideal I.
$\deg(p)$	Grau do polinômio p.
$M_{m\times n}(A)$	Matriz $m \times n$ com entradas no anel A.
$\mathcal{V}(I)$	Variedade definida pelo ideal I.
$\mathcal{I}(V)$	Ideal de definição da variedade projetiva V.
$Z(M)$	Divisores de zero de M.
$\mathrm{Ass}(I)$	Conjunto dos primos associados de I.
$\mathrm{Min}(I)$	Conjunto dos primos minimais de I.
$H(M,n)$	Função de Hilbert de M.
$P_M(n)$	Polinômio de Hilbert de M.
$P(M,t)$	Série de Hilbert de M.
$\lambda(M)$	Comprimento de M.
$e(M)$	Multiplicidade de M.
$\mathrm{rk}_A(\varphi)$	Rank da matriz φ com entradas no anel A.
$\mathrm{GL}_{m\times n}(k)$	Conjunto das matrizes invertíveis $m \times n$ com entradas em k.

Introdução

Sejam A um anel noetheriano e $I \subset A$ um ideal. Ao ideal I existem duas importantes estruturas algébricas associadas: a álgebra de Rees de I, $\mathcal{R}_A(I)$, e a fibra especial de I, $\mathcal{F}(I)$. A álgebra de Rees conecta a Álgebra Comutativa e a Geometria Algébrica, uma vez que $\mathrm{Proj}(\mathcal{R}_A(I))$ é o *blow-up* do espectro de A ao longo do subesquema definido por I. Do ponto de vista algébrico, estas álgebras são muito exploradas no que diz respeito a propriedades como normalidade ou, por exemplo, ser Cohen-Macaulay, aspecto este, atrelado a busca por determinar cotas para alguns invariantes algébricos e relacioná-las com características importantes que refletem em propriedades do ideal, por exemplo, ao longo deste trabalho mostramos que se a fibra especial de um ideal homogêneo I é Cohen-Macaulay, então o número de redução de I coincide com a regularidade de Castelnuovo-Mumford da fibra especial de I.

No contexto específico deste trabalho, sejam k um corpo algebricamente fechado e φ uma matriz $n \times (n-1)$ tal que suas entradas são formas lineares em $k[x, y, z]$. Suponhamos que o ideal I gerado pelos menores maximais de φ tem altura 2. Ideais nestas condições, gerados por menores maximais, possuem muitas propriedades conhecidas, por exemplo, pelo Teorema de Hilbert-Burch sabemos que I é perfeito, em particular, o anel quociente A/I é Cohen-Macaulay. Nosso objetivo nesta dissertação é, com o auxílio do conceito de invariante do caos associado a matriz φ (definido no capítulo 3), obter mais propriedades acerca do ideal I, da sua álgebra de Rees e sua fibra especial. Além disso, a definição de invariante do caos associado a possibilidade de trabalhar com a matriz φ em um formato melhor estruturado contribuirão para garantir que o mapa racional definido pelos menores maximais de φ de $\mathbb{P}^2$ na sua imagem é birracional.

Este trabalho tem como base fundamental o artigo intitulado *Linearly presented perfect ideals of codimension 2 in three variables* ([7]) dos autores A. Doria, Z. Ramos e A. Simis. Um importante diferencial na abordagem do artigo referido para trabalhos anteriores na literatura é que não se faz hipóteses genéricas (condição (G_d)) sobre os ideais em questão. A seguir detalharemos o conteúdo de cada capítulo desta dissertação:

No *Capítulo* 1, apresentamos as principais ferramentas algébricas e teoremas que serão usados ao longo do texto, priorizando os resultados que serão úteis no trabalho.

Iniciamos o capítulo 1 fazendo um breve resumo sobre a álgebra de Rees e a fibra especial de um ideal. Logo após, expomos alguns resultados sobre ideais determinantais e suas principais propriedades. Em seguida, abordamos o conceito de regularidade de Castelnuovo-Mumford de um módulo graduado M e sua relação com resoluções livres minimais e com a série de Hilbert de M. Finalizamos o Capítulo 1 estudando matrizes 1-genéricas e um tipo de variedade chamada *normal scroll* racional.

No *Capítulo* 2, ainda com caráter preliminar, apresentamos a matriz jacobiana dual da aplicação racional definida pelos geradores de I. Esta matriz permite-nos determinar a birracionalidade de aplicações racionais e terá aplicação em um dos principais teoremas do capítulo 3. Iniciamos o capítulo 2 com a definição de aplicação racional entre variedades projetivas, definimos o que é a matriz jacobiana dual de uma aplicação racional e enunciamos um critério de birracionalidade apresentado no artigo intitulado *A characteristic free criterion of birationality* [6] pelos autores de A. Doria, S. Hassanzadeh e A. Simis. Em seguida, mostramos como obter a matriz jacobiana dual explicitamente para o caso particular de formas lineares. Terminamos o capítulo 2 mostrando como comporta-se a matriz jacobiana dual ao efetuarmos operações elementares em suas colunas e mudanças lineares de variáveis.

No *Capítulo* 3, procuramos obter informações acerca de alguns invariantes algébricos relacionados ao ideal I definido no contexto do título do artigo base da dissertação e explorar algumas álgebras associadas a I, por exemplo, a álgebra de Rees e a fibra especial de I. Nesse capítulo introduzimos o conceito de invariante do caos de uma matriz e como este invariante contribui para descrever o ideal I e suas álgebras, permitindo descrever condições para que a álgebra de Rees ou a fibra especial sejam Cohen-Macaulay. Analisaremos ainda como o invariante do caos influencia em alguns invariantes algébricos como o número mínimo de geradores e profundidade.

Capítulo 1

Miscelânea

Apresentaremos neste capítulo os principais resultados que fornecerão suporte teórico ao desenvolvimento deste trabalho. De modo geral, a teoria exposta a seguir pode ser encontrada em livros clássicos de Álgebra Comutativa ou Geometria Algébrica, como por exemplo, [3], [8], [10], [16].

Importante ressaltar que ao longo de todo este trabalho, A será um anel comutativo com unidade e k denotará um corpo algebricamente fechado.

1.1 Álgebra de Rees e fibra especial

Nesta seção apresentaremos as definições básicas sobre a álgebra de Rees de um ideal que serão necessárias para o restante do texto. A álgebra de Rees e a fibra especial desempenharão papéis essenciais no capítulo 3, sendo os principais objetos de estudo em dois dos teoremas mais importantes provados nesta dissertação. Esta seção é baseada na referência [20].

Sejam A um anel e $I \subseteq A$ um ideal de A. A *álgebra de Rees* de I é definida como o anel

$$\mathcal{R}_A(I) := A + It + I^2t^2 + \cdots + I^nt^n + \cdots \subseteq A[t],$$

sendo t uma variável sobre A. Podemos notar que $\mathcal{R}_A(I)$ é uma A-álgebra standard graduada

Quando I é finitamente gerado, isto é, $I = (f_1, \ldots, f_n)$, existe um homomorfismo sobrejetor natural do anel de polinômios $A[t_1, \ldots, t_n]$ em $\mathcal{R}_A(I)$ dado por

$$\begin{array}{ccc} A[t_1, \ldots, t_n] & \xrightarrow{\psi} & \mathcal{R}_A(I) \\ p(t_1, \ldots, t_n) & \longmapsto & p(f_1t, \ldots, f_nt). \end{array}.$$

O núcleo deste homomorfismo denotaremos por $\mathcal{J}$. O ideal homogêneo $\mathcal{J}$ é chamado de *ideal de apresentação de* $\mathcal{R}_A(I)$ com relação a $f_1, \dots, f_n$. Em outras palavras, $\mathcal{J}$ é o conjunto de todas as relações polinomiais de $f_1, \dots, f_n$ com coeficientes em A.

A *álgebra simétrica* de I, denotada por $\mathcal{S}_A(I)$, é a A-álgebra definida pelo quociente

$$\mathcal{S}_A(I) := \frac{T(I)}{J}$$

onde $T(I) := \bigoplus T^i(I)$, é a *álgebra tensorial* de I, sendo $T^i(I)$ o A-módulo $T^i(I) := \underbrace{I \otimes \cdots \otimes I}_{i}$ e $J := (\{a \otimes b - b \otimes a \mid a, b \in I\})$ ideal bilateral. Note que trata-se de uma álgebra comutativa. Como I é finitamente gerado e $I = \mathcal{S}_A(I)_1$ gera $\mathcal{S}_A(I)$ como A-álgebra, existe um homomorfismo sobrejetor de A-álgebras

$$\beta : A[t_1, \dots, t_n] \longrightarrow \mathcal{S}_A(I).$$

O núcleo deste homomorfismo, $\mathrm{Ker}(\beta)$, é chamado de *ideal de apresentação* da álgebra simétrica de I, note que geradores para $\mathrm{Ker}(\beta)$ são obtidos através de apresentações livre de I. Segue que

$$\mathcal{S}_A(I) \simeq \frac{A[t_1, \dots, t_n]}{\mathrm{Ker}(\beta)}.$$

Explicitamente, o ideal $\mathrm{Ker}(\beta)$ é gerado pelo conjunto das formas lineares

$$\left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i t_i \mid \sum_{i=1}^{n} a_i f_i = 0 \text{ e } a_i \in A \right\}.$$

Decorre então a inclusão $\mathrm{Ker}(\beta) \subseteq \mathcal{J}$, ou seja, o ideal de apresentação da álgebra simétrica é subconjunto do ideal de apresentação da álgebra de Rees. Desta forma, é possível induzir um mapa

$$\mathcal{S}_A(I) \simeq \frac{A[t_1, \dots, t_n]}{\mathrm{Ker}(\beta)} \overset{\alpha}{\to} \frac{A[t_1, \dots, t_n]}{\mathcal{J}} \simeq \mathcal{R}(I).$$

Um ideal I é *de tipo linear* se α é um isomorfismo.

Quando $(A, \mathfrak{m})$ é um anel local noetheriano, um outro anel associado a I que terá papel fundamental neste trabalho é a *fibra especial de* I, denotada por $\mathcal{F}(I)$ e definida pelo quociente

$$\mathcal{F}(I) := \frac{\mathcal{R}_A(I)}{\mathfrak{m}\mathcal{R}_A(I)}.$$

A dimensão de Krull de $\mathcal{F}(I)$ será denotada por $\ell(I)$ e chamada de *analytic spread de* I. Alguns invariantes algébricos do ideal I que usaremos ao longo deste trabalho se relacionam da seguinte maneira:

$$\mathrm{ht}(I) \leq \ell(I) \leq \min\{\mu(I), \dim(A)\}.$$

Neste texto, diremos que I tem *analytic spread máximo* quando $\ell(I) = \dim(A)$.

1.2 Ideais Determinantais

Nesta seção apresentaremos um resumo sobre uma classe específica de ideais, os chamados *ideais determinantais*. Os ideais determinantais estão no centro deste trabalho e, por isto, convém conhecer algumas de suas propriedades algébricas. Mais especificamente, apresentaremos estimativas já conhecidas para a altura e grade de tais ideais e garantias de que, em certas condições, os ideais determinantais são ideais perfeitos.

Para um aprofundamento maior sobre a teoria de ideais determinantais, recomendamos, por exemplo, a referência [4].

Seja $U = (u_{ij})$ uma matriz $m \times n$ com entradas em um anel A. Dados os inteiros $a_1 < \cdots < a_r \in \{1, \ldots, m\}$ e $b_1 < \cdots < b_r \in \{1, \ldots, n\}$, definimos como um *r-ésimo menor* de U, denotado por $[a_1, \ldots, a_r \,|\, b_1, \ldots, b_r]$, o determinante

$$[a_1, \ldots, a_r \,|\, b_1, \ldots, b_r] := \det \begin{bmatrix} u_{a_1 b_1} & \cdots & u_{a_1 b_r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{a_r b_1} & \cdots & u_{a_r b_r} \end{bmatrix}$$

isto é, o determinante da matriz quadrada formada pelas linhas $a_1, \ldots, a_r$ e pelas colunas $b_1, \ldots, b_r$ de U. Se $r > \min\{m, n\}$, convencionamos $[a_1, \ldots, a_r \,|\, b_1, \ldots, b_r] = 0$. Note ainda que $[a_1, \ldots, a_r \,|\, b_1, \ldots, b_r] \in A$.

Dado um inteiro $r \in \{1, \ldots, \min\{m, n\}\}$, denotamos por $I_r(U)$ o ideal gerado por todos os *r-menores* de U, isto é,

$$I_r(U) = \left(\left\{ [a_1, \ldots, a_r \,|\, b_1, \ldots, b_r] \;\middle|\; \begin{array}{c} a_1 < \cdots < a_r \in \{1, \ldots, m\} \\ b_1 < \cdots < b_r \in \{1, \ldots, n\} \end{array} \right\} \right) \subseteq A.$$

Se $r = 0$ convencionamos $I_0(U) = A$.

Ideais gerados por menores de uma matriz quadrada são chamados de *ideais determinantais.*

Exemplo 1.1. Sejam A um anel e $U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} \\ u_{41} & u_{42} & u_{43} \end{bmatrix}$ uma matriz com entradas em A. Alguns *2-menores* de U são:

$$[1,4\,|\,2,3] = \det \begin{bmatrix} u_{12} & u_{13} \\ u_{42} & u_{43} \end{bmatrix} = u_{12}u_{43} - u_{13}u_{42}$$

$$[2,3\,|\,1,2] = \det \begin{bmatrix} u_{21} & u_{22} \\ u_{31} & u_{32} \end{bmatrix} = u_{21}u_{32} - u_{22}u_{31}.$$

Assim,

$$I_2(U) \supset (u_{12}u_{43} - u_{13}u_{42}, u_{21}u_{32} - u_{22}u_{31}).$$

No contexto geral, se $n_0 = \min\{m, n\}$, vale observar que a seguinte cadeia de inclusões é válida

$$I_1(U) \supseteq I_2(U) \supseteq I_3(U) \supseteq \cdots \supseteq I_{n_0}(U).$$

De fato, seja $L = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r1} & \dots & a_{rr} \end{bmatrix}$ uma matriz quadrada obtida omitindo-se algumas linhas e colunas de U. Assim, $\det(L)$ é um dos geradores de $I_r(U)$. Usando a expansão de Laplace pela 1ª linha de L, temos que

$$\det L = a_{11}A_{11} - a_{12}A_{12} + \ldots + a_{1r}(-1)^{1+r}A_{1r},$$

onde A_{1j} é o determinante de uma matriz $(r-1) \times (r-1)$ obtida omitindo-se a 1ª linha e a j-ésima coluna de L. Portanto, A_{1j} é um $(r-1)$-menor de U. Deste modo, $A_{11}, \ldots, A_{1r} \in I_{r-1}(U)$ e, portanto, temos que $\det(L) \in I_{r-1}(U)$. Fazendo isso para todos os r-menores de U obtemos que $I_{r-1}(U) \supseteq I_r(U)$.

Uma das propriedades elementares de matrizes é que o determinante de uma matriz quadrada não é alterado se efetuarmos operações elementares em suas linhas ou colunas. Os ideais determinantais se comportam de modo semelhante, em outras palavras, se efetuarmos operações elementares nas linhas ou colunas de U os ideais determinantais não se alteram.

Consideremos uma matriz $U \in M_{m\times n}(A)$. Uma operação elementar nas linhas de U pode ser interpretada como uma multiplicação à esquerda por uma matriz invertível $V \in M_{m\times m}(A)$, e efetuar uma operação elementar nas colunas de U pode ser interpretada como uma multiplicação à direita por uma matriz invertível $W \in M_{n\times n}(A)$.

Portanto, a invariância dos ideais determinantais por operações elementares significa que $I_r(U) = I_r(VUW)$ para todo $r \in \{1, \ldots, \min\{m, n\}\}$.

Como mencionamos no início desta seção, algumas cotas para a altura de ideais do tipo determinantais são conhecidas. Por exemplo, dado $r \in \{1, \ldots, \min\{m, n\}\}$, existem $\binom{m}{r} \cdot \binom{n}{r}$ menores de ordem r de U. Segue imediatamente que

$$\mathrm{ht}(I_r(U)) \leq \mu(I_r(U)) \leq \binom{m}{r} \cdot \binom{n}{r}.$$

Mas esta cota é muito grosseira. De fato, esta cota pode ser melhorada, por exemplo, sabe-se que

$$\mathrm{ht}(I_r(U)) \leq (m - r + 1)(n - r + 1)$$

desde que se tenha $I_r(U) \neq A$. Se $I_r(U) \neq A$ e $I_{r+1}(U) = 0$ (em particular, se $\mathrm{rank}(U) \leq r$), sabe-se também que $\mathrm{ht}(I_r(U)) \leq (m - r) + (n - r) + 1$. [4, Theorem 2.1]

Cotas para o grade também são conhecidas e podem ser relacionadas a perfeição dos ideais determinantais. Consideremos $U \in M_{m \times n}(A)$ e defina $n_0 = \min\{m, n\}$. O ideal $I_{n_0}(U)$ sempre foi objeto de estudo na teoria dos ideais determinantais. Em 1970, Eagon e Hochster mostraram que se $r \in \{1, \ldots, n_0\}$ é tal que $\mathrm{grade}(I_r(U)) = (m - r + 1)(n - r + 1)$, então $I_r(U)$ é um ideal perfeito [14, Theorem 1, Corollary 4]. Este teorema de Eagon e Hochster reúne informações muito importantes para o contexto deste trabalho, por isto concluiremos esta seção reescrevendo este teorema para o caso em que A é Cohen-Macaulay, mais especificamente, o caso em que A é um anel de polinômios:

Teorema 1.1. *Sejam k um corpo e U uma matriz $m \times n$ com entradas no anel de polinômios $A = k[x_1, \ldots, x_s]$. Suponha que $1 \leq r \leq \min\{m, n\}$ é um inteiro tal que $I_r(U)$ é ideal próprio de A e $\mathrm{ht}(I_r(U)) = (m - r + 1)(n - r + 1)$. Então $I_r(U)$ é um ideal perfeito. Em particular, $I_r(U)$ é unmixed e $A/I_r(U)$ é Cohen-Macaulay.*

1.3 Regularidade de Castelnuovo-Mumford

Ao longo de toda esta seção, $(A, \mathfrak{m})$ denotará um anel noetheriano local com o seu ideal maximal $\mathfrak{m}$ e M denotará um A-módulo finitamente gerado. No caso de A ser graduado, $\mathfrak{m}$ denotará o seu ideal irrelevante e M denotará um A-módulo graduado finitamente gerado. Denotaremos o anel residual $A/\mathfrak{m}$ por k.

Algumas informações importantes sobre um A-módulo M podem ser obtidas conhecendo-se uma resolução livre de M. Por exemplo, se $(A, \mathfrak{m})$ é um anel local, caso em que resoluções projetivas são resoluções livres, o Teorema de Auslander-Buchsbaum relaciona os conceitos de dimensão homológica e profundidade de M com a profundidade do anel A, se $\mathrm{dh}(M) < +\infty$

$$\mathrm{dh}(M) + \mathrm{depth}(M) = \mathrm{depth}(A).$$

Nesta seção introduziremos o conceito de *resolução livre minimal* de um A-módulo M finitamente gerado. O primeiro ponto que torna útil este conceito é o fato de a dimensão homológica de M, quando finita, ser atingida em resoluções livres minimais. Tendo uma resolução livre graduada minimal de M introduziremos o conceito de *regularidade de Castelnuovo-Mumford* de M, um importante invariante algébrico que independe da noção de Série de Hilbert de M, mas, como exibiremos no Teorema 1.3, tais conceitos relacionam-se, permitindo-nos obter a regularidade de M a partir da Série de Hilbert de M. Por fim, concluiremos a seção mostrando que a regularidade também nos fornece informações sobre a função de Hilbert de M e a partir de que valor a função de Hilbert se torna polinomial. A referência principal desta seção é [10].

Iniciaremos definindo o que é uma resolução minimal de um módulo, conceito necessário para definirmos a regularidade de um módulo.

Definição 1.1. Sejam $(A, \mathfrak{m})$ um anel local e M um A-módulo finitamente gerado. Uma resolução livre de M

$$\mathcal{F} : \cdots \stackrel{\alpha_i}{\to} F_i \stackrel{\alpha_{i-1}}{\to} F_{i-1} \to \cdots \to F_1 \stackrel{\alpha_0}{\to} F_0 \stackrel{\epsilon}{\to} M \to 0 \tag{1.1}$$

é chamada de *minimal* se $\mathrm{Im}(\alpha_n) \subseteq \mathfrak{m}F_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Equivalentemente, $\mathcal{F}$ é uma resolução minimal de M se, e somente se, para cada $i \geq 0$, a aplicação α_{i-1} levar base de F_i em um conjunto minimal de geradores de $\mathrm{Im}(\alpha_{i-1})$. De fato, notemos que $\mathcal{F}$ é minimal se, e somente se, o mapa induzido $\frac{F_{i+1}}{\mathfrak{m}F_{i+1}} \stackrel{\alpha'_i}{\to} \frac{F_i}{\mathfrak{m}F_i}$ é nulo para todo $i \geq 0$. Consideremos a sequência exata $F_{i+1} \stackrel{\alpha_i}{\to} F_i \stackrel{\alpha_{i-1}}{\to} \mathrm{Im}(\alpha_{i-1}) \to 0$. Então a sequência

$$\frac{F_{i+1}}{\mathfrak{m}F_{i+1}} \stackrel{\alpha'_i}{\to} \frac{F_i}{\mathfrak{m}F_i} \stackrel{\alpha'_{i-1}}{\to} \frac{\mathrm{Im}(\alpha_{i-1})}{\mathfrak{m}\ \mathrm{Im}(\alpha_{i-1})} \to 0 \tag{1.2}$$

é exata. Mas, uma vez que α'_{i-1} é sobrejetora, então α'_i ser nulo equivale a α'_{i-1} ser k-isomorfismo, ou seja, levar base em base. Pelo lema de Nakayama, um subconjunto de $\mathrm{Im}(\alpha_{i-1})$ é um conjunto minimal de geradores se, e somente se, a projeção deste subconjunto em $\frac{\mathrm{Im}(\alpha_{i-1})}{\mathfrak{m}\ \mathrm{Im}(\alpha_{i-1})}$ é uma base. Portanto, α'_{i-1} é um isomorfismo se, e somente se, α_{i-1} leva base em conjunto minimal de geradores. Em particular,

$$\dim_{A/\mathfrak{m}}\left(\frac{F_i}{\mathfrak{m}F_i}\right) = \dim_{A/\mathfrak{m}}\left(\frac{\mathrm{Im}(\alpha_{i-1})}{\mathfrak{m}\ \mathrm{Im}(\alpha_{i-1})}\right).$$

Pelo lema de Nakayama, temos então que $\mu(F_i) = \mu(\mathrm{Im}(\alpha_{i-1}))$.

Um módulo pode ter várias resoluções livres minimais, no entanto, o número mínimo de geradores de cada F_i na resolução não se altera, isto é, se $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ são duas resoluções livre minimais de M, então $\mu(F_i) = \mu(G_i)$ para todo $i \geq 0$ ([16, Proposition 1.10]) Na verdade, mais ainda, existe um isomorfismo de complexos $\mathcal{F} \to \mathcal{G}$ que induz o mapa identidade em M ([10, Theorem 1.6]), e quando M é graduado, o isomorfismo entre os complexos também é graduado.

Para cada $i \geq 0$, o número mínimo de geradores de F_i, denotado por $\beta_i := \mu(F_i)$, é chamado de *i-ésimo número de Betti*. Uma vez que $\mu(F_i) = \mu(G_i)$ para quaisquer duas resoluções minimais $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ de M, então os números de Betti são invariantes do módulo.

A partir deste ponto consideraremos o anel de polinômios $A = k[x_1, \ldots, x_r]$ standard graduado, com k um corpo, $\mathfrak{m} = (x_1, \ldots, x_r)$ seu ideal irrelevante e M um A-módulo graduado finitamente gerado. Buscaremos obter a série de Hilbert de M a partir de uma resolução livre minimal graduada.

Consideremos uma resolução livre graduada de M:

$$\mathcal{F} : \cdots \xrightarrow{\alpha_i} F_i \xrightarrow{\alpha_{i-1}} F_{i-1} \to \cdots \to F_1 \xrightarrow{\alpha_0} F_0 \xrightarrow{\epsilon} M \to 0. \tag{1.3}$$

Como cada F_i é um A-módulo livre graduado, podemos escrever $F_i = \bigoplus_{j=1}^{\beta_i} A(-a_{ij})$ para todo $i \geq 0$, onde os a_{ij}'s são os *shift's* necessários para que os homomorfismos α_i sejam graduados para todo $i \geq 0$. Mais especificamente, $A(-a_{ij})$ é o anel A com uma nova graduação $(A(-a_{ij}))_n := A_{n-a_{ij}}$ e a_{ij} é o grau do j-ésimo gerador de F_i. Como resoluções livres minimais são invariantes a menos de isomorfismos de complexos, os números a_{ij} também independem da resolução livre minimal considerada.

A série de Hilbert pode ser obtida a partir dos *shift's* de uma resolução livre minimal graduada de M. Com efeito, uma resolução livre minimal graduada de M pode ser escrita como

$$\mathcal{F} : \cdots \xrightarrow{\alpha_i} \bigoplus_{j=1}^{\beta_i} A(-a_{ij}) \xrightarrow{\alpha_{i-1}} \bigoplus_{j=1}^{\beta_{i-1}} A(-a_{(i-1)j}) \to \cdots \xrightarrow{\alpha_0} \bigoplus_{j=1}^{\beta_0} A(-a_{0j}) \xrightarrow{\epsilon} M \to 0. \tag{1.4}$$

Como A é regular, então M tem dimensão homológica finita. Podemos considerar uma resolução de M da forma

$$0 \to \bigoplus_{j=1}^{\beta_m} A(-a_{mj}) \overset{\alpha_{m-1}}{\to} \cdots \overset{\alpha_0}{\to} \bigoplus_{j=1}^{\beta_0} A(-a_{0j}) \overset{\epsilon}{\to} M \to 0.$$

A série de Hilbert é aditiva, portanto,

$$P(M,t) = \sum_{i=0}^{m} (-1)^i P(F_i,t) = \sum_{i=0}^{m} (-1)^i P\left(\bigoplus_{j=1}^{\beta_i} A(-a_{ij}), t \right).$$

Como $P(A(-a_{ij}),t) = t^{a_{ij}} P(A,t)$, então, para cada $i \in \{0,\ldots,m\}$, temos que

$$P(F_i,t) = P\left(\bigoplus_{j=1}^{\beta_i} A(-a_{ij}), t \right) = \sum_{j=1}^{\beta_i} P(A(-a_{ij}),t) = \sum_{j=1}^{\beta_i} t^{a_{ij}} P(A,t).$$

Pela igualdade $P(A,t) = 1/(1-t)^r$, obtemos que

$$P(M,t) = \frac{S_M(t)}{(1-t)^r}, \tag{1.5}$$

onde $S_M(t) = \sum\limits_{i=0}^{m} \sum\limits_{j=1}^{\beta_i} (-1)^i t^{a_{ij}}$, que é a série de Hilbert de M em função dos *shift's* da resolução livre.

Definiremos agora o conceito de *regularidade de M*. Como constataremos a seguir, a regularidade de um módulo graduado é definida em função dos *shift's* de uma resolução livre minimal graduada que, por sua vez, permite-nos obter a série de Hilbert em forma racional. No Teorema 1.3 verificaremos que a regularidade de M é igual ao grau de $S_M(t)$ somado a sua dimensão homológica.

Consideremos uma resolução graduada livre minimal de M como em (1.3). Para cada $i \geq 0$, seja b_i o maior grau entre os geradores de F_i. Dado $p \in \mathbb{Z}$, dizemos que M é *p-regular* se $b_i - i \leq p$ para todo $i \geq 0$. Definimos a *regularidade de M* (ou *regularidade de Castelnuovo-Mumford*), denotado por $\mathrm{reg}(M)$, como o mínimo dos $p \in \mathbb{Z}$ tal que M é p-regular. Equivalentemente,

$$\mathrm{reg}(M) = \max_i \{b_i - i\} = \max_{i,j} \{a_{ij} - i\}. \tag{1.6}$$

Tomando uma resolução de M como em (1.4), temos que $b_i = \max\limits_j \{a_{ij}\}$ para todo $i \geq 0$. Dizemos ainda que $\sup\{b_i \mid i \geq 0\} = \sup\limits_{i,j}\{a_{ij}\}$ é *o maior shift na resolução de M*.

Para determinar a regularidade de M tendo uma resolução livre minimal, basta analisarmos a cauda da resolução, mais formalmente, [2, Proposition 1.1] nos fornece:

Proposição 1.2. Sejam $A = k[x_1, \ldots, x_r]$ um anel de polinômios e M um A-módulo graduado finitamente gerado. Defina $r_0 = r - \dim(M)$. Então, para qualquer resolução livre minimal de M, temos que

$$b_0 < b_1 < \cdots < b_{r_0}.$$

Em particular, $b_{r_0} - r_0 \geq b_i - i$ para todo $0 \leq i \leq r_0$. Portanto,

$$\operatorname{reg}(M) = \max\{b_i - i;\ i \geq r_0\}.$$

Demonstração. [2, Proposition 1.1]. □

No caso em que M é Cohen-Macaulay podemos melhorar ainda mais este resultado e conectar a regularidade de M diretamente com a expressão da série de Hilbert em (1.5).

Teorema 1.3. *Sejam $A = k[x_1, \ldots, x_r]$ um anel de polinômios e M um A-módulo graduado finitamente gerado, Cohen-Macaulay, e*

$$\mathcal{F} : 0 \to \bigoplus_j A(-a_{mj}) \overset{\alpha_{m-1}}{\to} \cdots \overset{\alpha_0}{\to} \bigoplus_j A(-a_{0j}) \overset{\epsilon}{\to} M \to 0$$

uma resolução livre minimal de M com $m = \operatorname{dh}(M)$. Então

$$\operatorname{reg}(M) = \deg(S_M(t)) - m = b_m - m.$$

Demonstração. De fato, como M é Cohen-Macaulay, então $r_0 = r - \dim(M) = \dim(A) - \operatorname{depth}(M) = \operatorname{dh}(M) = m$, a penúltima igualdade sendo por Auslander-Buchsbaum. Pela proposição anterior, temos que $\operatorname{reg}(M) = b_m - m$ e $b_0 < \cdots < b_m$. Consequentemente, $b_m > a_{ij}$ para todo $0 \leq i \leq m-1$ e todo j. Desta maneira, o maior valor entre os a_{ij}, com i e j variando, ocorre somente entre os valores a_{mj}, com j variando. Assim, $\deg(S_M(t)) = \deg(\sum_j (-1)^m t^{a_{mj}}) = \max_j\{a_{m,j}\} = b_m$. □

Segue ainda do teorema acima que o maior *shift* na resolução de M, nas hipóteses do teorema, é atingido na cauda da resolução, isto é, o maior shift é $b_m = \deg(S_M(t))$.

Quando $M := \mathcal{F}(I)$ é a fibra especial de um ideal $I \subseteq A = k[x_1, \ldots, x_r]$ homogêneo e $\mathcal{F}(I)$ é Cohen-Macaulay, conhecendo-se a série de Hilbert da fibra especial em sua forma racional reduzida, conhecemos o número de redução de I, como mostra-nos a proposição abaixo.

Proposição 1.4. Seja $I \subseteq A = k[x_1, \ldots, x_r]$ um ideal homogêneo tal que sua fibra especial $\mathcal{F}(I)$ é Cohen-Macaulay. Se a série de Hilbert de $\mathcal{F}(I)$ é

$$P(\mathcal{F}(I), t) = \frac{1 + h_1 t + \ldots + h_s t^s}{(1-t)^d},$$

onde $h_s \neq 0$ e $d = \dim(\mathcal{F}(I)) =: \ell(I)$, então $r(I) = s$.

Demonstração. [21, Proposition 1.85.] □

Finalizaremos esta seção mostrando mais uma aplicação da noção de regularidade que foi definida ao longo desta seção.

Seja $H(M, n) := \lambda(M_n)$ a função de Hilbert do A-módulo graduado $M = \bigoplus\limits_{n=0}^{\infty} M_n$. Sabe-se que a função de Hilbert torna-se polinomial para n suficientemente grande. Surge então a pergunta "quão grande este n precisa ser para a função de Hilbert se tornar polinomial?". Seja então $P_M(n)$ o polinômio de Hilbert de M. Conhecendo-se a regularidade de M e sua profundidade, obtemos uma resposta precisa para esta pergunta.

Proposição 1.5. Seja M um $k[x_1, \ldots, x_r]$-módulo graduado finitamente gerado e Cohen-Macaulay. Seja $n_0 := \inf\{n \mid H(M, s) = P_M(s), \forall\, s \geq n\}$ o menor inteiro para o qual $H(M, n)$ passa a coincidir com o polinômio de Hilbert. Então

$$n_0 = 1 - \operatorname{depth}(M) + \operatorname{reg}(M).$$

Demonstração. [10, Corollary 4.8] □

1.4 Normal Scroll Racional

Na Seção 1.2 apresentamos algumas estimativas para a altura de ideais do tipo determinantais e propriedades que dependiam da altura de tais ideais. Nesta seção estudaremos o conceito de matriz 1-genérica e propriedades sobre seus ideais determinantais. Por exemplo, em matrizes 1-genéricas cujas entradas são formas lineares, é possível determinar a altura do ideal determinantal gerado pelos menores maximais e garantir que este ideal é primo.

Seja U uma matriz $m \times n$ tal que suas entradas são formas lineares em $k[x_0, \ldots, x_s]$. Para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, denotaremos por $L_i := [u_{i,1} \ \cdots \ u_{i,n}]$ a i-ésima linha de U. Uma *linha generalizada* de U é uma matriz linha obtida por combinação k-linear das linhas de U, isto é, uma matriz linha da forma

$$L = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i L_i = \left[\begin{array}{ccc} \sum_{i=1}^{m} \lambda_i u_{i,1} & \cdots & \sum_{i=1}^{m} \lambda_i u_{i,n} \end{array} \right] \tag{1.7}$$

tal que $\lambda_i \in k$ para todo $i \in \{1, \ldots, m\}$ e $\lambda_i \neq 0$ para algum i. De modo análogo define-se uma *coluna generalizada*. Por fim, uma *entrada generalizada de U* é qualquer combinação k-linear, com coeficientes não todos nulos, das entradas de uma linha generalizada.

Consideremos a linha generalizada L em (1.7). Então uma entrada generalizada de U pode ser escrita como

$$v = \sum_{j=1}^{n} \gamma_j \left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i u_{i,1} \right) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \left(\sum_{j=1}^{n} \gamma_j u_{i,j} \right) \tag{1.8}$$

com $\gamma_j \in k$ para todo $j \in \{1, \ldots, n\}$ e $\gamma_j \neq 0$ par algum j. Observemos que a matriz coluna

$$C = \left[\begin{array}{ccc} \sum_{j=1}^{n} \gamma_j u_{1,j} & \cdots & \sum_{j=1}^{n} \gamma_j u_{m,j} \end{array} \right]^T = \sum_{j=1}^{n} \gamma_j C_j$$

é uma coluna generalizada de U, onde $C_j = \left[\begin{array}{ccc} u_{1,j} & \cdots & u_{m,j} \end{array} \right]^T$ é a j-ésima coluna de U. Portanto, a definição de entrada generalizada independe se tomarmos combinações das entradas de linhas generalizadas ou colunas generalizadas.

Dizemos que a matriz U é *1-genérica* se toda entrada generalizada de U é não nula. O conceito de matriz 1-genérica pode ser generalizado para matrizes ℓ-genéricas com ℓ um inteiro não negativo. Para maiores referências, consultar [9]. A proposição seguinte sobre matrizes genéricas pode ser encontrada em um contexto mais geral, para matrizes ℓ-genéricas, em [9, Proposition 1.3].

Proposição 1.6. Sejam U uma matriz $m \times n$ de formas lineares em $k[x_0, \ldots, x_s]$ e $\langle I_1(U) \rangle \subseteq k[x_0, \ldots, x_s]$ o espaço vetorial gerado pelas entradas de U. Se U é 1-genérica, então

$$\dim(\langle I_1(U) \rangle) \geq m + n - 1.$$

Neste texto abordaremos apenas as matrizes 1-genéricas. Equivalentemente, U é 1-genérica se toda linha (coluna) generalizada possuir entradas linearmente independentes. A seguir apresentaremos outra equivalência que será útil no Capítulo 3.

Proposição 1.7. Seja U uma matriz $m \times n$ tal que suas entradas são formas lineares em $k[x_0, \ldots, x_s]$. Então U é 1-genérica se, e somente se, para quaisquer matrizes $V \in \mathrm{GL}_m(k)$ e $W \in \mathrm{GL}_n(k)$ a matriz VUW não tem entrada nula.

Demonstração. Uma linha generalizada L como em (1.7) é obtida como o produto de matrizes $L := \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & \lambda_m \end{bmatrix} \cdot U$, com $(\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \in k^m \backslash \{0\}$. Portanto, uma entrada generalizada de U como em (1.8) é obtida como o produto de matrizes

$$v = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & \lambda_m \end{bmatrix} \cdot U \cdot \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{bmatrix} \tag{1.9}$$

onde $(\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \in k^m \backslash \{0\}$ e $(\gamma_1, \ldots, \gamma_m) \in k^n \backslash \{0\}$.

Suponha que existem matrizes $V \in \mathrm{GL}_m(k)$ e $W \in \mathrm{GL}_n(k)$ tais que $VUW = (z_{i,j})$ tem uma entrada nula. Sejam z_{i_0,j_0} uma das entradas nulas de VUW, L_{i_0} a i_0-ésima linha de V e C_{j_0} a j_0-ésima coluna de W. O elemento z_{i_0,j_0} é obtido como $L_{i_0} \cdot U \cdot C_{j_0}$. Como V e W são invertíveis, então L_{i_0} e C_{i_0} são matrizes não nulas. Portanto, z_{i_0,j_0} é uma entrada generalizada de U. Segue que U não é 1-genérica.

Reciprocamente, suponhamos que U não é 1-genérica. Então existem $\lambda := (\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \in k^m \backslash \{0\}$ e $\gamma := (\gamma_1, \ldots, \gamma_m) \in k^n \backslash \{0\}$ tais que a entrada generalizada

$$v = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & \lambda_m \end{bmatrix} \cdot U \cdot \begin{bmatrix} \gamma_1 & \cdots & \gamma_n \end{bmatrix}^T$$

é nula. Consideremos uma base $\{\lambda = v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ de k^m contendo λ e $\{\gamma = w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ uma base de k^n contendo γ. Então a matriz $V \in \mathrm{GL}_m(k)$ tal que sua i-ésima linha é o vetor v_i para todo $i \in \{1, \ldots, m\}$, e a matriz $W \in \mathrm{GL}_n(k)$ tal que sua j-ésima coluna é w_j para todo $j \in \{1, \ldots, n\}$, são tais que VUW possui uma entrada nula, mais especificamente, o primeiro elemento da primeira linha. $\square$

No Teorema 1.1 era necessário conhecermos a altura do ideal determinantal $I_r(U)$ para que pudéssemos descrever algumas de suas propriedades. Em geral, esta altura não é conhecida nem mesmo no caso extremo $r = \min\{m, n\}$. Contudo, o teorema seguinte nos mostra que em matrizes 1-genéricas tem-se $\mathrm{ht}(I_m(U)) = n - m + 1$.

Teorema 1.8. *Seja U uma matriz $m \times n$ de formas lineares em $A := k[x_0, \ldots, x_s]$, onde $m \leq n$ e k é um corpo algebricamente fechado. Se U é uma matriz 1-genérica, então $I_m(U)$ é um ideal primo e $\mathrm{ht}(I_m(U)) = n - m + 1$. Em particular, $R/I_m(U)$ é domínio Cohen-Macaulay.*

Demonstração. [10, Theorem 6.4]. $\square$

Uma classe particular de matrizes 1-genéricas que será útil para nosso trabalho são as *matrizes catalecticantes* (ou *matrizes de Hankel*). Uma matriz catalecticante é uma matriz $W = (w_{ij})$ tal $w_{i,j+1} = w_{i+1,j}$ para todo i e j.

O resultado seguinte afirma que matrizes catalecticantes cujas entradas são variáveis sobre um corpo k são matrizes 1-genéricas. A demonstração pode ser encontrada em [10, Proposition 6.3].

Proposição 1.9. Sejam $x_0, \ldots, x_r$ variáveis sobre um corpo k e d um inteiro tal que $1 \leq d < r$. Então a matriz

$$U_{r,d} := \begin{bmatrix} x_0 & x_1 & \cdots & x_{r-d} \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_{r-d+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_d & x_{d+1} & \cdots & x_r \end{bmatrix}$$

é 1-genérica.

Da proposição acima, obtemos que matrizes da forma

$$U_{r,1} := \begin{bmatrix} x_0 & x_1 & \cdots & x_{r-d} \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_{r-d+1} \end{bmatrix}$$

são 1 genéricas.

As matrizes da forma $U_{r,1}$ serão necessárias para definirmos um tipo de variedade projetiva chamada *Normal Scroll Racional*, que terá aplicação no Teorema 3.13.

Fixe inteiros não negativos $a_1, \ldots, a_d$ e defina $D = \sum_{i=1}^{d} a_i$ e $N = D + d - 1$. Denotaremos as coordenadas homogêneas de $\mathbb{P}^N$ por

$$x_{1,0}, \ldots, x_{1,a_1}, \quad x_{2,0}, \ldots, x_{2,a_2}, \quad \ldots, \quad x_{i,0} \ldots, x_{i,a_i}, \quad \ldots, \quad x_{d,0}, \ldots, x_{d,a_d}.$$

Consideremos a matriz U definida por

$$U(a_1, \ldots, a_d) := \left[\begin{array}{ccc|ccc|c|ccc} x_{1,0} & \cdots & x_{1,a_1-1} & x_{2,0} & \cdots & x_{2,a_2-1} & \cdots & x_{d,0} & \cdots & x_{d,a_d-1} \\ x_{1,1} & \cdots & x_{1,a_1} & x_{2,1} & \cdots & x_{2,a_2} & \cdots & x_{d,1} & \cdots & x_{d,a_d} \end{array}\right].$$

Os blocos em que $U(a_1, \ldots, a_d)$ está dividida são matrizes catalecticantes da forma $U_{r,1}$, portanto, cada bloco é uma matriz 1-genérica. A matriz $U(a_1, \ldots, a_d)$ também é 1-genérica. De fato, uma linha generalizada de U é da forma

$$\alpha \begin{bmatrix} x_{1,0} & \cdots & x_{d,a_d-1} \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} x_{1,1} & \cdots & x_{d,a_d} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha x_{1,0} + \beta x_{1,1} & \cdots & \alpha x_{d,a_d-1} + \beta x_{d,a_d} \end{bmatrix}$$

com $\alpha, \beta \in k$ e pelo menos um deles não nulo. Uma entrada generalizada de

$U(a_1, \ldots, a_d)$ é da forma

$$\sum_{j=0}^{a_1-1} \lambda_{1,j}(\alpha x_{1,j} + \beta x_{1,j+1}) + \cdots + \sum_{j=0}^{a_d-1} \lambda_{d,j}(\alpha x_{d,j} + \beta x_{d,j+1}).$$

com $\lambda_{i,j} \in k$ e pelo menos um deles não nulo. As parcelas na soma acima envolvem variáveis distintas e representam, individualmente, uma entrada generalizada de cada um dos blocos de Hankel de $U(a_1, \ldots, a_d)$. Assim, nenhuma entrada generalizada de U pode ser nula e, portanto, $U(a_1, \ldots, a_d)$ é 1-genérica.

A matriz $U(a_1, \ldots, a_d)$ é 1-genérica, então podemos aplicar o Teorema 1.8 e concluir que $I_2(U(a_1, \ldots, a_d))$ é um ideal primo. Decorre que a variedade definida pelos menores 2×2 de $U(a_1, \ldots, a_d)$ é uma variedade projetiva, chamada de *Normal Scroll Racional* e denotada por $S(a_1, \ldots, a_d)$. Em outras palavras,

$$S(a_1, \ldots, a_d) := \mathcal{V}(I_2(U)).$$

Concluímos esta seção enunciando um teorema que afirma que matrizes 1-genéricas $2 \times r$ admitem matriz conjugada da forma $U(a_1, \ldots, a_d)$.

Teorema 1.10. *Sejam $x_0, \ldots, x_n$ as coordenadas homogêneas de $\mathbb{P}^n$ e U uma matriz $2 \times r$ de formas lineares em $\mathbb{P}^n$. Então existe uma sequência de inteiros $a_1, \ldots, a_d$, com $d = n - r$, tal que U é conjugada à uma matriz da forma*

$$\widetilde{U} := \left[\begin{array}{ccc|ccc|c|ccc} x_0 & \cdots & x_{a_1-1} & x_{a_1+1} & \cdots & x_{a_2-1} & \cdots & x_{a_d+1} & \cdots & x_{n-1} \\ x_1 & \cdots & x_{a_1} & x_{a_1+2} & \cdots & x_{a_2} & \cdots & x_{a_d+2} & \cdots & x_n \end{array}\right].$$

Demonstração. Ver a generalização de [12, Proposition 9.12] na própria referência. $\square$

Capítulo 2

O critério da jacobiana dual para birracionalidade

Um dos principais resultados deste trabalho está relacionado a birracionalidade de uma aplicação racional que definiremos mais adiante. Para aplicações racionais definidas por um conjunto de formas de mesmo grau, existe uma teoria sobre como verificar a birracionalidade de tal aplicação racional. Neste capítulo, apresentaremos um critério devido a Dória, Hassanzadeh e Simis, que pode ser encontrado na referência [6].

2.1 A Matriz Jacobiana Dual e Um Critério de Birracionalidade

Um interesse particular em Geometria Algébrica é saber quando aplicações racionais são birracionais. Aplicações birracionais nos permitem transpor propriedades entre as variedades, pois alguns invariantes algébricos se preservam quando temos uma aplicação birracional.

Seja k um corpo. Se V é uma variedade projetiva, denotaremos seu ideal de definição por $\mathcal{I}(V)$ e o seu anel de coordenadas homogênas por $\mathbf{A}(V)$.

Sejam $A := k[x_0, \ldots, x_n]$ o anel de polinômios em $n+1$ variáveis e $V \subseteq \mathbb{P}^n_k$ uma variedade projetiva. Uma *aplicação racional* $\mathfrak{F} : V \to \mathbb{P}^m_k$ é um conjunto ordenado $\boldsymbol{f} := \{f_0, \ldots, f_m\} \subseteq \mathbf{A}(V)$ de formas de mesmo grau, não todas identicamente nulas. Chamamos $\boldsymbol{f}$ de um *representante* de $\mathfrak{F}$ e denotamos $\mathfrak{F} = [f_0 : \ldots : f_m]$. Denotemos por $W \subseteq \mathbb{P}^m_k$ a imagem de $\mathfrak{F}$, W é uma variedade. Se existir aplicação racional $\mathfrak{G} : W \to \mathbb{P}^n_k$ tal que sua imagem é V, e $\mathfrak{F} \circ \mathfrak{G}$ e $\mathfrak{G} \circ \mathfrak{F}$ são aplicações identidades de W e V, respectivamente, então dizemos que $\mathfrak{F}$ é uma aplicação *birracional* sobre sua imagem.

Queremos saber quando uma aplicação racional $\mathfrak{F} : V \dashrightarrow \mathbb{P}_k^m$ que tem como representante $\boldsymbol{f} = \{f_0, \ldots, f_m\}$ é birracional sobre sua imagem. Para isto, precisamos construir a chamada *matriz jacobiana dual de* $\mathfrak{F}$.

Uma aplicação racional pode admitir mais de um representante. Se $\boldsymbol{g} = \{g_0, \ldots, g_m\}$ é outro representante de $\mathfrak{F}$, temos que $f_i - g_i \in \mathcal{I}(V)$ para todo $i \in \{0, \ldots, m\}$. Porém, é possível obter uma relação mais interessante entre $\boldsymbol{f}$ e $\boldsymbol{g}$. Os representantes de $\mathfrak{F}$ se relacionam da seguinte forma: $\boldsymbol{f} = \{f_0, \ldots, f_m\}$ e $\boldsymbol{g} = \{g_0, \ldots, g_m\}$ são formas de mesmo grau representantes de $\mathfrak{F}$ se, e somente se,

$$\operatorname{rk} \begin{bmatrix} f_0 & f_1 & \cdots & f_{m-1} & f_m \\ g_0 & g_1 & \cdots & g_{m-1} & g_m \end{bmatrix} = 1 \text{ sobre } \mathbf{A}(V).$$

De fato, se $\boldsymbol{f}$ e $\boldsymbol{g}$ representam $\mathfrak{F}$, então $[f_0(a) : \ldots : f_m(a)] = [g_0(a) : \ldots : g_m(a)]$ para todo $a \in V$. Assim, para cada $a \in V$ existe $\lambda_a \in k/\{0\}$ tal que $f_j(a) = \lambda_a g_j(a)$ para $j = 0, \ldots, m$. Desta forma, dados $i, j \in \{0, \ldots, m\}$, temos

$$(f_i g_j - f_j g_i)(a) = \lambda_a (g_i g_j)(a) - \lambda_a (g_j g_i)(a) = 0.$$

Logo,

$$f_i g_j - f_j g_i \equiv 0 \in \mathbf{A}(V),\ \forall\, i, j \in \{0, \ldots, m\}. \tag{2.1}$$

Temos então que o rank não pode ser 2. E o rank não pode ser 0 já que não pode ocorrer de $f_0, \ldots, f_m, g_0, \ldots, g_m \in \mathcal{I}(V)$ pois estamos no espaço projetivo.
Reciprocamente, suponha que o rank da matriz seja 1. Então para quaisquer $i, j \in \{0, \ldots, m\}$ temos que

$$f_i g_j - f_j g_i = \det \begin{bmatrix} f_i & f_j \\ g_i & g_j \end{bmatrix} = 0 \in \mathbf{A}(V). \tag{2.2}$$

Consideremos $a \in \mathbf{A}_k^n$. Fixe $i_0 \in \{0, \ldots, m\}$ tal que $f_{i_0}(a) \neq 0$. Então,

$$g_j(a) = \left(\frac{g_{i_0}(a)}{f_{i_0}(a)} \right) f_j(a),\ \forall\ j \in \{0, \ldots, m\}.$$

Note que $g_{i_0}(a) \neq 0$, pois caso contrário teríamos $f_{i_0}(a) g_j(a) = f_j(a) g_{i_0}(a) = 0$ para todo $j = 0, \ldots, m$, o que é impossível pois existe j_0 tal que $g_{j_0}(a) \neq 0$. Basta tomar $\lambda_a = \left(\dfrac{g_{i_0}(a)}{f_{i_0}(a)} \right) \neq 0$ e temos então que $\boldsymbol{f}$ e $\boldsymbol{g}$ representam a mesma $\mathfrak{F}$.

Dando continuidade ao nosso propósito, observemos que existe um homomorfismo natural de A-álgebras graduadas $A[t_0, \ldots, t_m]$ e $\mathcal{R}_A(\boldsymbol{f})$ dado por

$$\begin{array}{rccc} \xi : & A[t_0, \ldots, t_m] & \longrightarrow & \mathcal{R}_A(\boldsymbol{f}) \\ & t_i & \longmapsto & f_i t. \end{array} \tag{2.3}$$

Para definir a matriz jacobiana dual fraca precisaremos analisar o núcleo deste homomorfismo. Comecemos notando que $\mathrm{Ker}(\xi)$ independe do representante de $\mathfrak{F}$ escolhido. De fato, seja $\boldsymbol{g}$ outro representante de $\mathfrak{F}$ e $\xi' : A[t_0, \ldots, t_m] \to \mathcal{R}_A(\boldsymbol{g})$ homomorfismo definido semelhante a (2.3). Sabemos que $\mathrm{Ker}(\xi)$ é um ideal homogêneo, então seja $h \in \mathrm{Ker}(\xi)$ um gerador homogêneo de grau d. Temos que

$$f_0^d h(g_0 t, \ldots, g_m t) = h(f_0 g_0 t, \ldots, f_0 g_m t) \overset{2.2}{=} h(g_0 f_0 t, \ldots, g_0 f_m t) = g_0^d h(f_0 t, \ldots, f_m t) = 0,$$

o que nos fornece $h(g_0 t, \ldots, g_m t) = 0$, isto é, $h \in \mathrm{Ker}(\xi')$. Portanto, $\mathrm{Ker}(\xi) \subseteq \mathrm{Ker}(\xi')$. A inclusão contrária é feita da mesma maneira.

Seja $\mathfrak{I}$ o núcleo de ξ. Como $A[t_0, \ldots, t_m]$ é uma k-álgebra bigraduada, então $\mathfrak{I}$ admite uma bigraduação $\mathfrak{I} = \bigoplus_{(p,q) \in \mathbb{N}^2} \mathfrak{I}_{(p,q)}$. Nosso interesse é, em particular, pelas biformas de grau $(0, q)$ com $q \geq 1$ (ou seja, os elementos de $\mathfrak{I}_{(0,*)}$), e pelas biformas de grau $(1, q)$ com $q \geq 1$ (isto é, os elementos de $\mathfrak{I}_{(1,*)}$). Uma vez que $\mathfrak{I}_{(0,*)}$ pode ser visto como o conjunto das relações polinomiais de $\boldsymbol{f}$ em $k[t_0, \ldots, t_m]$, temos o isomorfismo $\frac{k[t_0,\ldots,t_m]}{\mathfrak{I}_{(0,*)} k[t_0,\ldots,t_m]} \simeq k[\boldsymbol{f}]$.

Seja $\mathfrak{a}_1 = \mathcal{I}(V)_1$. Consideremos $p_1, \ldots, p_s \in A[t_0, \ldots, t_m]$ tais que $\{\overline{p_1}, \ldots, \overline{p_s}\}$ gera minimamente $\mathfrak{I}_{(1,*)}$ e seja $\{\ell_1, \ldots, \ell_r\} \subset \mathfrak{a}_1$ uma base de $\mathfrak{a}_1$ como k-espaço vetorial. A matriz jacobiana dos polinômios $\{\ell_1, \ldots, \ell_r, p_1, \ldots, p_s\}$

$$B := \begin{bmatrix} \frac{d\ell_1}{dx_0} & \frac{d\ell_1}{dx_2} & \cdots & \frac{d\ell_1}{dx_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{d\ell_r}{dx_0} & \frac{d\ell_r}{dx_2} & \cdots & \frac{d\ell_r}{dx_n} \\ \frac{dp_1}{dx_0} & \frac{dp_1}{dx_2} & \cdots & \frac{dp_1}{dx_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{dp_s}{dx_0} & \frac{dp_s}{dx_2} & \cdots & \frac{dp_s}{dx_n} \end{bmatrix} \tag{2.4}$$

considerando as entradas como elementos de $\frac{k[y_0,\ldots,y_m]}{\mathfrak{I}_{(0,*)} k[t_0,\ldots,t_m]}$, é chamada de *matriz jacobiana dual* associada ao conjunto de geradores $\{p_1, \ldots, p_s\}$.

O rank de B, chamado de *posto jacobiano dual de* $\mathfrak{F}$ e denotado por $\mathrm{jdrk}(\mathfrak{F})$, é essencial para verificar a birracionalidade de $\mathfrak{F}$. De fato, o Lema 2.3 de [6] nos diz que se B' é outra matriz jacobiana dual associado a outro conjunto de geradores minimais de $\mathfrak{I}_{(1,*)}$, então $\mathrm{rk}(B) = \mathrm{rk}(B')$. O Teorema 2.18 da mesma referência nos fornece o seguinte critério de birracionalidade e uma maneira de determinar a inversa:

Teorema 2.1 (critério de birracionalidade)**.** *Sejam $V \subseteq \mathbb{P}^n$ uma variedade com $\dim(\mathbf{A}(V)) \geq 1$ e $\boldsymbol{f} \subseteq \frac{k[x_0,\ldots,x_n]}{\mathcal{I}(V)}$ um representante de uma aplicação racional $\mathfrak{F} : V \dashrightarrow \mathbb{P}^m_k$. Então são equivalentes:*

(a) $\mathfrak{F}$ é birracional sobre sua imagem;

(b) $\mathrm{jdrk}(\mathfrak{F}) \geq n$.

Além disso, se $\mathfrak{F}$ é birracional sobre sua imagem e B é uma matriz jacobiana dual de $\mathfrak{F}$, então a inversa de $\mathfrak{F}$ é definida por qualquer $(n+1)$-upla $[\Delta_0 : \ldots : \Delta_n]$ onde os Δ_i's são n-menores, a menos de sinal, de qualquer submatriz de B de tamanho $n \times (n+1)$ e posto n sobre $\dfrac{k[t_0,\ldots,t_m]}{\mathfrak{I}_{(0,*)}k[t_0,\ldots,t_m]}$.

Na prática, a minimalidade dos geradores de $\mathfrak{I}_{(1,*)}$ não é essencial para podermos aplicar o teorema (2.1), isto é, podemos procurar elementos de $\mathfrak{I}_{(1,*)}$, construir uma submatriz da jacobiana dual como descrito acima e verificar o rank esperado. Esta observação pode facilitar a aplicação do teorema acima pois tira a necessidade da minimalidade do conjunto de geradores, exploraremos mais sobre na seção 2.2.

Exemplo 2.1. Sejam $A = \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]$, $V = Z(x_0) \subseteq \mathbb{P}^2$ e $\mathfrak{F} : V \dashrightarrow \mathbb{P}$ definida por $f_0 = x_1$ e $f_1 = x_2$. Consideremos o homomorfismo

$$\begin{array}{rccc} \xi : & A[y_0, y_1] & \longrightarrow & \mathcal{R}_A(\boldsymbol{f}) \\ & y_i & \longmapsto & f_i t \end{array}$$

e procuremos geradores para $\mathfrak{I}_{(1,*)} \subseteq \mathfrak{I}$, onde $\mathfrak{I} = \mathrm{Ker}(\xi)$. Um elemento de $\mathfrak{I}_{(1,1)}$ é da forma $w = (\alpha_0 x_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)y_0 + (\beta_0 x_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2)y_1$ com $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{C}$. Então,

$$0 = \xi(w) = (\alpha_0 x_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)x_1 t + (\beta_0 x_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2)x_2 t.$$

Cancelando a variável t e agrupando as variáveis x_0, x_1 e x_2, obtemos a igualdade

$$0 = \alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2 + \beta_1 = \beta_0 = \beta_2.$$

Então, se considerarmos $\alpha_2 = 1 = -\beta_1$, temos que $p_1 := x_2 y_0 - x_1 y_1 \in \mathfrak{I}_{(1,1)}$. Por outro lado, pelo Teorema dos Zeros de Hilbert, temos que $\mathcal{I}(V) = \mathcal{I}(Z(x_0)) = \sqrt{(x_0)} = (x_0)$. Assim, $\mathfrak{a}_1 = \{\alpha x_0 \mid \alpha \in \mathbb{C}\}$. Podemos tomar $\ell_1 = x_0$. Uma matriz jacobiana dual de $\mathfrak{F}$ é

$$B = \begin{bmatrix} \dfrac{d\ell_1}{dx_0} & \dfrac{d\ell_1}{dx_1} & \dfrac{d\ell_1}{dx_2} \\ \dfrac{dp_1}{dx_0} & \dfrac{dp_1}{dx_1} & \dfrac{dp_1}{dx_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -y_1 & y_0 \end{bmatrix}.$$

Uma vez que $y_1 \notin \mathfrak{I} = \operatorname{Ker}(\xi)$, então $y_1 \neq 0 \in \frac{k[y_0,y_1]}{\mathfrak{I}_{(0,*)}k[y_0,y_1]}$, ou equivalentemente, $\det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -y_1 \end{bmatrix} \neq 0$. Portanto, $\operatorname{jdrk}(\mathfrak{F}) = \operatorname{rk}(B) = 2$. Pelo Teorema 2.1, $\mathfrak{F}$ é birracional sobre sua imagem $\mathbb{P}^1$ e sua inversa é dada pelos 2-menores de B (com devido ajuste de sinal): $[0 : y_1 : y_2]$.

Ainda no contexto do Teorema 2.1, seja $\mathfrak{G}$ a inversa de $\mathfrak{F}$ e $\boldsymbol{g} = \{g_0, \ldots, g_n\}$ um representante de $\mathfrak{G}$. Então $\boldsymbol{g}$ satisfaz

$$[g_0(f_0, \ldots, f_m), \ldots, g_n(f_0, \ldots, f_m)] \equiv [x_0, \ldots, x_n],$$

portanto, existe uma única forma $D \in k[x_0, \ldots, x_n]$, a menos de produto por escalar não nulo, tal que

$$g_i(f_0, \ldots, f_m) = Dx_i, \quad \forall\, i \in \{0, \ldots, n\}. \tag{2.5}$$

A forma D acima é chamada de *fator de inversão* de $\mathfrak{G}$ com respeito a $\boldsymbol{g}$. Esta forma nos permite obter informações sobre as potências simbólicas de I como mostra de [19, Proposição 1.4]:

Proposição 2.2. Sejam $\mathfrak{F} : \mathbb{P}^n \longrightarrow \mathbb{P}^m$ uma aplicação birracional sobre sua imagem e $\boldsymbol{f} = \{f_0, \ldots, f_m\}$ um representante de $\mathfrak{F}$, onde $f_0, \ldots, f_m \in k[x_0, \ldots, x_n]$ são formas de mesmo grau (pelo menos 2). Seja D o fator de inversão relativo a um representante $\boldsymbol{g} = \{g_0, \ldots, g_n\}$ da inversa $\mathfrak{G}$. Suponha ainda que $(x_0, \ldots, x_n) \notin \operatorname{Ass}(R/I)$. Então $D \in I^{(d')} \backslash I^{d'}$, onde d' é o grau das formas $g_{i's}$.

Demonstração. Como cada g_i é uma forma de grau d', então cada $g_i(f_0, \ldots, f_m)$ é um elemento de $I^{d'}$. O fator de inversão D satisfaz $g_i(f_0, \ldots, f_m) = Dx_i$ para todo $i \in \{0, \ldots, n\}$, logo, D pertence ao condutor de (x_i) em $I^{d'}$. Então $D \in I^{d'} : (x_i)$ para $i \in \{0, \ldots, n\}$, consequentemente, $D \in I^{d'} : (x_0, \ldots, x_n)$.

Sejam $P_1, \ldots, P_s$ os primos associados de R/I. Como $(x_0, \ldots, x_n)$ não é primo associado de R/I, então pelo *lema da esquiva*, $(x_0, \ldots, x_n) \not\subseteq P_1 \cup \cdots \cup P_s$. Portanto, existe $h \in (x_0, \ldots, x_n) \backslash (P_1 \cup \ldots \cup P_s)$. Como $D \in I^{d'} : (x_0, \ldots, x_n)$, segue que $hD \in I^{d'}$. Como h não está em nenhum primo associado de R/I, então pela definição de potência simbólica, temos que $D \in I^{(d')}$.

Sabendo que I é gerado por formas de grau d, então $I^{d'}$ é gerado por formas de grau

dd'. Por outro lado, da igualdade $g_i(f_0, \ldots, f_m) = Dx_i$ obtemos que o grau de D é $\mathrm{grau}(g_i(f_0, \ldots, f_m)) - \mathrm{grau}(x_i) = dd' - 1 < dd'$. Logo, $D \in I^{(d')} \backslash I^{d'}$. $\square$

Aplicações birracionais neste contexto geral se tornam interessantes pois nos permitem obter outras informações acerca do ideal I, mais especificamente, sobre a fibra especial de I. A proposição abaixo, que é uma releitura de [11, Lemma 1.1] nos mostra isto.

Proposição 2.3. Seja $\mathfrak{F} : V \to \mathbb{P}^m$ como no início desta seção. Se $W \subseteq \mathbb{P}^m$ é a imagem de $\mathfrak{F}$, então $\mathcal{F}(I) \simeq \mathbf{A}(W)$ como k-álgebras graduadas, em particular

$$\ell(I) = \dim(V) + 1. \tag{2.6}$$

Demonstração. Uma vez que os elementos de $\mathfrak{I}_{(0,*)}$ não possuem as variáveis x_i, podemos ver $\mathfrak{I}_{(0,*)}$ como subconjunto de $k[t_0, \ldots, t_m]$. Deste ponto de vista, note que $\mathfrak{I}_{(0,*)}k[t_0, \ldots, t_m] = \mathcal{I}(W)$. Isto decorre de $\mathfrak{F}$ ser sobrejetiva, pois dado $h \in k[t_0, \ldots, t_m]$, temos que

$$h \in \mathcal{I}(W) \iff h(W) = \{0\} \iff h(f_0, \ldots, f_m) = 0 \iff h \in \mathfrak{I}_{(0,*)}k[t_0, \ldots, t_m].$$

Desta maneira, temos que

$$\mathbf{A}(W) := \frac{k[t_0, \ldots, t_m]}{\mathcal{I}(W)} = \frac{k[t_0, \ldots, t_m]}{\mathfrak{I}_{(0,*)}k[t_0, \ldots, t_m]}.$$

Além disso, por definição de $\mathfrak{I}_{(0,*)}$, podemos ver que $\mathfrak{I}_{(0,*)}k[t_0, \ldots, t_m]$ é formado por todas as relações polinomiais de $\boldsymbol{f}$ sobre k. Segue então naturalmente o isomorfismo

$$\frac{k[t_0, \ldots, t_m]}{\mathfrak{I}_{(0,*)}k[t_0, \ldots, t_m]} \simeq k[f_0, \ldots, f_m].$$

Precisamos ainda do seguinte isomorfismo obtido pela própria definição de fibra especial:

$$k[f_0, \ldots, f_m] \simeq \frac{\mathcal{R}_R(I)}{\mathfrak{m}\mathcal{R}_R(I)} =: \mathcal{F}(I).$$

Pelas expressões acima concluímos que $\mathcal{F}(I) \simeq \mathbf{A}(W)$. Disto e do fato que $\dim(W) = \dim(V)$ pois V e W são birracionais, segue que

$$\ell(I) := \dim(\mathcal{F}(I)) = \dim(\mathbf{A}(W)) = \dim(W) + 1 = \dim(V) + 1.$$

$\square$

2.2 A Jacobiana Dual de uma aplicação definida por menores de uma matriz

Um dos principais teoremas deste trabalho trata sobre aplicações racionais determinada pelos $(n-1)$-menores de uma matriz cujas entradas são formas lineares. Mostraremos nesta seção como calcular explicitamente uma submatriz jacobiana dual de tal aplicação racional que no contexto do trabalho será suficiente para garantir a birracionalidade da aplicação racional.

Seja $A = k[x_1, \ldots, x_r]$ para $r \geq 1$ fixado. Seja $\varphi \in M_{n\times(n-1)}(A)$ tal que suas entradas são formas lineares. Defina ainda $I := I_{n-1}(\varphi)$ e suponhamos que $\text{grade}(I) = 2$. O *Teorema de Hilbert Burch* ([10, Theorem 3.2] ou [3, Theorem 1.4.17]) nos diz que I tem apresentação livre da forma

$$0 \longrightarrow A^{n-1} \xrightarrow{\varphi} A^n \xrightarrow{\zeta} I \longrightarrow 0. \tag{2.7}$$

Se $I = (f_1, \ldots, f_n)$, onde f_i é o $(n-1)$-menor de φ obtido ao omitir a i-ésima linha de φ podemos considerar A^n e A^{n-1} com as bases canônicas, e φ a matriz com respeito a estas bases.

Observação 2.1. Como a sequência em (2.7) é exata, então $\text{Im}(\varphi) = \text{Ker}(\zeta) = \text{Syz}(I)$, o *módulo de sizígias* do ideal I. Sejam C_i a i-ésima coluna de φ, e_i o i-ésimo vetor da base canônica de A^{n-1} visto como vetor coluna. Observemos que $C_i = \varphi \cdot e_i = \varphi(e_i) \in \text{Im}(\varphi) = \text{Syz}(I)$. Em outras palavras, cada coluna de φ é sizígia de I. Além disso, $I_1([t_1 \ \cdots \ t_n] \cdot \varphi) \subseteq A[t_1, \ldots, t_n]$ é o ideal de apresentação da álgebra simétrica de I.

Observemos que cada f_i é uma forma em A de grau $n-1$. Assumamos que $f_1, \ldots, f_n$ não possuem raiz em comum em $A\backslash\{0\}$. Consideremos a aplicação racional $\mathfrak{F} : \mathbb{P}^{r-1} \dashrightarrow \mathbb{P}^{n-1}$ que tem representante $\boldsymbol{f} = \{f_1, \ldots, f_n\}$. Para fins práticos, denotemos

$$\varphi = \begin{bmatrix} p_{1,1} & \cdots & p_{1,n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n,1} & \cdots & p_{n,n-1} \end{bmatrix}.$$

Como foi observado em (2.1), as colunas de φ geram sizígias de I, ou seja,

$$\sum_{i=1}^{n} p_{i,1} f_i = \cdots = \sum_{i=1}^{n} p_{i,n-1} f_i = 0.$$

Considerando as variáveis $t_1, t_2, \ldots, t_n$ como em (2.3), temos que

$$\left\{\sum_{i=1}^{n} p_{i,1}t_i, \quad \sum_{i=1}^{n} p_{i,2}t_i, \quad \ldots, \quad \sum_{i=1}^{n} p_{i,n-1}t_i\right\} \subseteq \mathcal{I}_{(1,1)} \subseteq \mathcal{I}_{(1,*)}.$$

Então, a matriz

$$B = \begin{bmatrix} \sum\limits_{i=1}^{n}\left(\dfrac{dp_{i,1}}{dx_1}\right)t_i & \ldots & \sum\limits_{i=1}^{n}\left(\dfrac{dp_{i,1}}{dx_r}\right)t_i \\ \sum\limits_{i=1}^{n}\left(\dfrac{dp_{i,2}}{dx_1}\right)t_i & \ldots & \sum\limits_{i=1}^{n}\left(\dfrac{dp_{i,2}}{dx_r}\right)t_i \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \sum\limits_{i=1}^{n}\left(\dfrac{dp_{i,n-1}}{dx_1}\right)t_i & \ldots & \sum\limits_{i=1}^{n}\left(\dfrac{dp_{i,n-1}}{dx_r}\right)t_i \end{bmatrix} \tag{2.8}$$

pode ser vista como submatriz da matriz jacobiana dual de $\mathfrak{F}$. Uma forma prática de lembrar da matriz acima é pensar que a entrada (i,j) de B é determinada pela i-ésima coluna de φ tomando a derivada em relação à variável x_j.

A forma como obtemos a matriz em (2.8) é prática para estudar a birracionalidade da aplicação racional $\mathfrak{F}$ e determinar representantes para a aplicação racional inversa de $\mathfrak{F}$. Para fins teóricos, apresentamos abaixo uma caracterização desta submatriz jacobiana que será muito útil ao longo deste trabalho.

Seja C a única matriz $r \times (n-1)$ com entradas em $k[t_1, \ldots, t_n]$ que satisfaz a igualdade

$$\begin{bmatrix} t_1 & \cdots & t_n \end{bmatrix} \cdot \varphi = \begin{bmatrix} x_1 & \cdots & x_r \end{bmatrix} C. \tag{2.9}$$

Denotemos $C = (c_{i,j})$. Da igualdade acima, temos que

$$\begin{bmatrix} t_1 & \cdots & t_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_{1,j} \\ \vdots \\ p_{n,j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & \cdots & x_r \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_{1,j} \\ \vdots \\ c_{r,j} \end{bmatrix} \tag{2.10}$$

para todo $j \in \{1, \ldots, n-1\}$. Como $p_{q,j}$ é uma forma linear em $k[x_1, \ldots, x_r]$ para quaisquer $1 \leq q \leq n$ e $1 \leq j \leq n-1$, então podemos escrever $p_{q,j} = \sum\limits_{i=1}^{r}\left(\frac{dp_{q,j}}{dx_i}\right)x_i$. A igualdade (2.10) fornece-nos:

$$\sum_{q=1}^{n} p_{q,j}t_q = \sum_{i=1}^{r} c_{i,j}x_i.$$

Como $\sum\limits_{q=1}^{n} p_{q,j}t_q = \sum\limits_{q=1}^{n}\sum\limits_{i=1}^{r}\left(\frac{dp_{q,j}}{dx_i}\right)x_it_q = \sum\limits_{i=1}^{r}\left(\sum\limits_{q=1}^{n}\left(\frac{dp_{q,j}}{dx_i}\right)t_q\right)x_i$, segue que $c_{i,j} = \sum\limits_{s=1}^{n}\frac{dp_{s,j}}{dx_i}t_s$.

Comparando com a matriz em (2.8), temos que C é a transposta de B. Além disso, verifica-se que $C = B^T$ satisfaz (2.9). Concluímos que se C é uma matriz satisfazendo (2.9), então sua transposta C^T é uma submatriz da jacobiana dual de $\mathfrak{F}$.

Concluiremos este capítulo descrevendo como comporta-se a submatriz jacobiana dual B de $\mathfrak{F}$ ao efetuarmos operações elementares nas colunas de φ ou realizarmos uma mudança linear de variáveis em $A = k[x_0, \ldots, x_n]$.

Consideremos uma matriz $W \in \mathrm{GL}_{n-1}(k)$ e seja $\widetilde{\varphi} = \varphi \cdot W$. A matriz B^T satisfaz a equação (2.9), portanto,

$$[t_1 \quad \cdots \quad t_n] \cdot \widetilde{\varphi} = [x_1 \quad \cdots \quad x_r](B^T W).$$

Assim, $W^T B = (B^T W)^T$ é uma submatriz jacobiana dual referente à $\widetilde{\varphi}$. Seja $L \in \mathrm{GL}_r(k)$ e consideremos a mudança linear de variáveis determinada por L. Sejam $(x'_1, \ldots, x'_r)$ as novas variáveis, isto é,

$$L \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_r \end{pmatrix}.$$

Pela igualdade acima decorre que $[x_1 \quad \cdots \quad x_r] = [x'_1 \quad \cdots \quad x'_r](L^{-1})^T$. Seja $\overline{\varphi}$ a matriz φ nas novas variáveis $(x'_1, \ldots, x'_r)$. Então $\overline{\varphi}$ satisfaz

$$[t_1 \quad \cdots \quad t_n] \cdot \overline{\varphi} = \left([x'_1 \quad \cdots \quad x'_r](L^{-1})^T\right) B^T.$$

Segue que $BL^{-1} = ((L^{-1})^T B^T)^T$ é uma submatriz da jacobiana dual referente à $\overline{\varphi}$. Reunindo as duas observações acima, concluimos que a submatriz jacobiana dual referente à $\overline{\varphi}W$ é $W^T BL^{-1}$.

Capítulo 3

Álgebra de Rees e Fibra especial de um ideal determinantal

Os principais resultados deste trabalho, os quais abordaremos neste capítulo, estão relacionados à álgebra de Rees e a fibra especial de um ideal determinantal I definido pelos menores maximais de uma matriz φ de entradas lineares em $R := k[x, y, z]$. Mais especificamente, observaremos como se comportam tais álgebras com relação a propriedades importantes como, por exemplo, ser Cohen-Macaulay, tendo como ponto central a definição do *invariante do caos* associado a matriz φ.

Ao longo deste capítulo, k denotará um corpo algebricamente fechado. Como de costume na literatura, diremos que um ideal primo P é associado de I, se $P \in \operatorname{Ass}(R/I)$.

3.1 Resultados gerais

Abordaremos nesta primeira seção resultados variados, conectando diversos conceitos algébricos e, inclusive, um geométrico. Isto nos fornecerá uma noção de como o conceito de invariante do caos pode ser útil. Além disso, introduziremos as principais definições usadas ao longo do capítulo e abordaremos alguns invariantes algébricos que serão essenciais para o restante do trabalho.

3.1.1 Invariante do Caos

Começaremos apresentando o conceito de invariante do caos de uma matriz φ com entradas lineares em $R := k[x, y, z]$ e como esse invariante influencia, por exemplo, na Cohen-Macaulaycidade da álgebra de Rees e da fibra especial do ideal $I := I_{n-1}(\varphi)$.

Sejam $R = k[x, y, z]$ um anel de polinômios em três variáveis e $\varphi \in M_{n\times(n-1)}(R)$ uma matriz cujas entradas são formas lineares em R. No decorrer de todo este capítulo, denotaremos por I o ideal $I_{n-1}(\varphi) \subseteq R$. Para os nossos propósitos, suponhamos que $\mathrm{ht}(I_1(\varphi)) = 3$ e $\mathrm{ht}(I_{n-1}(\varphi)) = 2$.

De modo geral, dado um anel local $(A, \mathfrak{m})$ (ou graduado standard sobre um corpo), dizemos que um ideal $J \subseteq A$ é perfeito se a dimensão homológica de A/J sobre A é finita igual à codimensão de I, isto é, se $\mathrm{dh}(A/J) = \mathrm{ht}(J)$. Sabe-se que se A é Cohen-Macaulay e $\mathrm{dh}(A/I) < \infty$, então I é perfeito se, e somente se, A/J é Cohen-Macaulay. No caso em que A é um anel regular e J tem codimensão 2, o teorema de Hilbert-Burch afirma que J é perfeito se, e somente se, A/J tem resolução livre mínima da forma

$$0 \to A^m \xrightarrow{\varphi} A^{m+1} \to A \to A/J \to 0$$

e J é gerado pelos menores máximos de φ. A matriz ψ é a matriz de apresentação do ideal J com respeito a estes geradores.

Segue do exposto no parágrafo anterior que o ideal $I := I_{n-1}(\varphi)$ é um ideal perfeito, em particular, A/I é Cohen-Macaulay. Como todo ideal perfeito é unmixed, ou seja, todos os primos associados tem a mesma altura, segue que $\mathrm{ht}(P) = 2$ para todo $P \in \mathrm{Ass}(I) = \mathrm{Min}(I)$.

Na seção sobre ideais determinantais observamos que os ideais $I_1(\varphi), I_2(\varphi), \ldots I_{n-1}(\varphi)$ estão em cadeia, mais precisamente:

$$I_1(\varphi) \supseteq I_2(\varphi) \supseteq \cdots \supseteq I_{n-1}(\varphi) = I. \tag{3.1}$$

Deste modo, suas respectivas alturas também estão em cadeia:

$$3 = \mathrm{ht}(I_1(\varphi)) \geq \mathrm{ht}(I_2(\varphi)) \geq \cdots \geq \mathrm{ht}(I_{n-1}(\varphi)) = 2.$$

Seja $P \in \mathrm{Min}(I)$. Suponhamos que $P \in \mathrm{Min}(I_r(\varphi))$ para algum $1 \leq r \leq n-2$. Então

$$2 = \mathrm{ht}(P) \geq \mathrm{ht}(I_r(\varphi)) \geq \mathrm{ht}(I_{r+1}(\varphi)) \geq \cdots \geq \mathrm{ht}(I_{n-1}(\varphi)) = 2.$$

Assim, $P \supseteq I_r(\varphi) \supseteq I_{r+1}(\varphi) \supseteq \cdots \supseteq I_{n-1}(\varphi)$ e suas alturas são iguais. Logo, $P \in \bigcap_{j=r}^{n-1} \mathrm{Min}(I_j(\varphi))$. Isto mostra que se $P \notin \mathrm{Min}(I_r(\varphi))$, então P também não é minimal sobre nenhum dos ideais $I_{r-1}(\varphi), \ldots, I_1(\varphi)$. Esta observação motiva a seguinte definição:

Definição 3.1. Seja $\varphi \in M_{n\times(n-1)}(R)$ uma cujas entradas são formas lineares em R. Consideremos o ideal $I := I_{n-1}(\varphi)$ e seja $P \in \mathrm{Min}(I)$. O único inteiro $1 \leq u_P \leq n-2$ tal que $P \in \mathrm{Min}(I_{u_P+1}) \setminus \mathrm{Min}(I_{u_P})$ é chamado de *invariante do caos de φ em P*.

Notemos que, de fato, u_P é pelo menos 1, pois $\mathrm{ht}(P) = 2 < 3 = \mathrm{ht}(I_1(\varphi))$. Desta forma, P não pode ser primo minimal de $I_1(\varphi)$. De modo mais geral, se $P \in \mathrm{Min}(I)$ mas $P \notin \mathrm{Min}(I_r(\varphi))$, então $u_p \geq r$.

A definição acima tem um aspecto local. Na definição abaixo apresentamos uma versão global para o invariante do caos.

Definição 3.2. Seja $\varphi \in M_{n\times(n-1)}(R)$ uma matriz cujas entradas são formas lineares em R. Consideremos o ideal $I := I_{n-1}(\varphi)$ e suponhamos que $\mathrm{ht}(I_1(\varphi)) = 3$ e $\mathrm{ht}(I_{n-1}(\varphi)) = 2$. O *invariante do caos de* φ é o inteiro $1 \leq u(\varphi) \leq n-2$ unicamente determinado tal que

$$\mathrm{ht}(I_r(\varphi)) = \begin{cases} 3, & 1 \leq r \leq u(\varphi) \\ 2, & u(\varphi)+1 \leq r \leq n-1. \end{cases} \tag{3.2}$$

Por simplicidade, denotaremos $u := u(\varphi)$.

Pela cadeia de desigualdades (3.1.1), a definição acima está bem posta. Além disso, a definição de invariante do caos é invariante por conjugação de φ. De fato, operações elementares nas linhas e nas colunas não alteram os ideais determinantais. Além do mais, mudança linear de variáveis preserva a altura de ideais.

Como era de se esperar, existe uma relação entre as versões local e global do invariante do caos. Esta relação é determinada pela proposição seguinte.

Proposição 3.1. Seja $\varphi \in M_{n\times(n-1)}(R)$ uma matriz cujas entradas são formas lineares em R. Consideremos o ideal $I := I_{n-1}(\varphi)$ e suponhamos que $\mathrm{ht}(I_1(\varphi)) = 3$ e $\mathrm{ht}(I_{n-1}(\varphi)) = 2$. Então

$$u(\varphi) = \min\{u_P \mid P \in \mathrm{Ass}(I)\}. \tag{3.3}$$

Demonstração. Seja $P \in \mathrm{Min}(I)$. Suponhamos, por absurdo, que $u > u_P$. Então $\mathrm{ht}(I_{u_P+1}(\varphi)) = 3$. Mas, por definição de u_P, temos que P deveria pertencer a $\mathrm{Min}(I_{u_P+1}(\varphi))$, absurdo pois $\mathrm{ht}(P) = 2$. Portanto, $u_P \geq u$ para todo primo associado P de I. Seja $Q \in \mathrm{Min}(I_{u+1}(\varphi))$ tal que $\mathrm{ht}(Q) = \mathrm{ht}(I_{u+1}(\varphi)) = 2$. Como $I \subseteq I_{u+1}(\varphi) \subseteq Q$ e $\mathrm{ht}(I) = \mathrm{ht}(Q)$, então $Q \in \mathrm{Min}(I)$. Além disso, $Q \notin \mathrm{Min}(I_u(\varphi))$ devido à altura de $I_u(\varphi)$ ser 3, então, pela definição de u_Q, temos que $u_Q = u$. Portanto, $\min\{u_P \mid P \in \mathrm{Ass}(I)\} = u$. □

A partir do invariante do caos de φ podemos obter informações acerca da localização de I em seus primos associados.

Lema 3.2. Seja $R := k[x, y, z]$ e φ uma matriz $n \times (n-1)$ cujas entradas são formas lineares em R tal que $I_1(\varphi) = (x, y, z)$ e $\mathrm{ht}(I) = 2$. Seja P um primo associado de I. Então

(a) O *rank* de φ sobre R/P é u_P.

(b) $\mu(I_P) = n - u_P$.

(c) $I_P \subseteq P_P^{n-u_P-1}$.

Demonstração. Primeiramente, notemos que $I_{u_P}(\varphi) \nsubseteq P$. De fato, suponhamos que $I_{u_P}(\varphi) \subseteq P$. Então $\mathrm{ht}(I_{u_P}(\varphi)) \leq 2$. Por outro lado, sabe-se que $\mathrm{ht}(I_{u_P}(\varphi)) \in \{2, 3\}$. Então temos que $\mathrm{ht}(I_{u_P}) = 2 = \mathrm{ht}(P)$. Como P é ideal primo contendo $I_{u_p}(\varphi)$ e estes ideais possuem alturas iguais, então $P \in \mathrm{Min}(I_{u_P})$, absurdo pela definição de u_P.

(a) Como $I_{u_P} \nsubseteq P$, existe um u_P-menor de φ não pertencente a P. Então este u_P-*menor* é não nulo em R/P e, portanto, o rank de φ sobre R/P é pelo menos u_P. Reciprocamente, pela definição de u_P, temos que $P \in \mathrm{Min}(I_{u_P+1}(\varphi))$, então, $P \supseteq I_{u_P+1}$. Isto significa que todos os (u_P+1)-menores de φ no quociente R/P são nulos. Decorre que $\mathrm{rk}_{R/P}(\varphi) \leq u_P$.

(b) Seja $S := R_P/P_P$ corpo. Pelo lema de Nakayama, temos que

$$\mu(I_P) = \dim_S \left(\frac{I_P}{P_P I_P} \right) = \mu \left(\frac{I_P}{P_P I_P} \right) = \mu \left(\frac{I_P}{(PI)_P} \right).$$

Como $\frac{I_P}{(PI)_P} \simeq \left(\frac{I}{PI}\right)_P$, então

$$\mu(I_P) = \mu \left(\left(\frac{I}{pI} \right)_P \right).$$

Por outro lado, $\mu\left(\left(\frac{I}{PI}\right)_P\right) = n - \mathrm{rk}_S(\varphi)$ e $\mathrm{rk}_S(\varphi) = \mathrm{rk}_{R/P}(\varphi)$. Por (a), temos que $\mathrm{rk}_{R/P}(\varphi) = u_P$, logo,

$$\mu(I_P) = \mu \left(\left(\frac{I}{PI} \right)_P \right) = n - \mathrm{rk}_S(\varphi) = n - \mathrm{rk}_{R/P}(\varphi) = n - u_P.$$

(c) Por (a), existe um u_p-*menor* de φ que não pertence a P. Consideremos que $\eta = [a_1, \ldots, a_{u_P} \,|\, b_1, \ldots, b_{u_P}]$ é este u_p-*menor* e definamos $t := u_p$. Permutando linhas e colunas, φ toma a forma

$$\varphi = \left[\begin{array}{ccc|c} v_{a_1,b_1} & \cdots & v_{a_1,b_t} & \\ \vdots & \ddots & \vdots & Z \\ v_{a_t,b_1} & \cdots & v_{a_t,b_t} & \\ \hline & X & & Y \end{array} \right],$$

onde X, Y, Z são matrizes $(n-u_P)\times u_P$, $(n-u_P)\times(n-1-u_P)$ e $u_P\times(n-1-u_P)$, respectivamente, com entradas em $k[x,y,z]$. Localizando em P:

$$\varphi_P = \left[\begin{array}{ccc|c} \frac{v_{a_1,b_1}}{1} & \cdots & \frac{v_{a_1,b_t}}{1} & \\ \vdots & \vdots & \vdots & Z_P \\ \frac{v_{a_t,b_1}}{1} & \cdots & \frac{v_{a_t,b_t}}{1} & \\ \hline & X_P & & Y_P \end{array}\right]. \tag{3.4}$$

A submatriz de ordem u_P destacada acima tem determinante $\frac{\eta}{1}$, que é invertível em R_P pois $\eta \notin P$. Portanto, essa submatriz de φ_P é invertível. Através de operações elementares nas linhas e colunas, obtemos uma matriz da forma

$$\varphi_P = \left[\begin{array}{c|c} \mathbb{I}_{u_P} & 0 \\ \hline 0 & \psi \end{array}\right],$$

onde $\mathbb{I}_{u_P}$ é a matriz identidade $u_P\times u_P$ e ψ é uma matriz $(n-u_P)\times(n-u_P-1)$, ambas com entradas em R_P.

Além disso, ψ tem entradas em P_P. Com efeito, admitamos que uma das entradas de ψ tem um elemento $\frac{r}{s}\notin P_P$, que podemos supor que está na posição $(u_P+1)\times(u_p+1)$

$$\varphi_P = \left[\begin{array}{c|cc} \mathbb{I} & \mathbf{0} & \\ \hline \mathbf{0} & \frac{r}{s} & \cdots \\ & \vdots & \ddots \end{array}\right].$$

Temos que $\overline{\left(\frac{r}{s}\right)} \neq 0 \in R_P/P_P$. Portanto, a matriz quadrada de ordem $(u_P+1)\times(u_P+1)$ com entradas em R_P/P_P

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathbb{I} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \overline{\left(\frac{r}{s}\right)} \end{array}\right]$$

é uma submatriz de φ com entradas no quociente R_P/P_P que tem determinante $\overline{\left(\frac{r}{s}\right)} \neq 0$, o que é impossível pois $\mathrm{rk}_{R_P/P_P}(\varphi) = \mathrm{rk}_{R/P}(\varphi) = u_P < u_P+1$.

Um $(n-1)$-menor de φ_P é obtido escolhendo-se uma linha de φ_P, omitindo-a e calculando o determinante. Podemos observar que omitindo qualquer uma das u_P primeiras linhas, o $(n-1)$-menor gerado é 0. Assim, ao omitirmos a (u_P+j)-ésima linha de φ_P, com $1\le j\le n-u_P$, obtemos que

$$I_P = \left(\left\{\det\left[\begin{array}{c|c} \mathbb{I} & 0 \\ \hline 0 & \psi_j \end{array}\right] \,\middle|\, 1\le j\le n-u_P\right\}\right),$$

onde ψ_j é a matriz obtida de ψ ao omitirmos a j-ésima linha. Temos que

$$\det \left[\begin{array}{c|c} \mathbb{I} & 0 \\ \hline 0 & \psi_j \end{array}\right] = \det \psi_j \in P_P^{n-u_P-1}$$

pois as entradas de ψ_j são elementos de P_P. Portanto, $I_p \subseteq P_P^{n-u_P-1}$.

□

Se $I = (f_1, \ldots, f_n)$, as formas lineares que geram I definem uma aplicação racional $\mathfrak{F} := [f_1, \ldots, f_n]$ de $\mathbb{P}^2$ em $\mathbb{P}^{n-1}$. Sob algumas hipóteses bastante razoáveis, podemos mostrar que $\mathfrak{F}$ é uma aplicação birracional sobre sua imagem. O invariante do caos desempenha um papel fundamental na demonstração deste fato.

Teorema 3.3. *Seja φ uma matriz $n \times (n-1)$ tal que suas entradas são formas lineares no anel polinomial $R := k[x, y, z]$. Suponhamos que $\operatorname{ht}(I_1(\varphi)) = 3$ e que $\operatorname{ht}(I) = 2$. Então*

(a) Se $I = (f_1, \ldots, f_n)$, onde $f_1, \ldots, f_n$ são os (n-1)-menores de φ, então a aplicação racional

$$\begin{array}{rccc} \mathfrak{F}: & \mathbb{P}^2 & \longrightarrow & \mathbb{P}^{n-1} \\ & [a:b:c] & \longmapsto & [f_1(a,b,c), \ldots, f_n(a,b,c)] \end{array}$$

é birracional sobre sua imagem.

(b) I tem analytic spread máximo, isto é, $\ell(I) = 3$.

(c) Se $\mathfrak{G} : \operatorname{Im}(\mathfrak{F}) \to \mathbb{P}^2$ é a aplicação racional inversa de $\mathfrak{F}$ definida em (a), então $\mathfrak{G}$ é definida por formas de grau 2.

(d) $\operatorname{depth}(R/I^2) = 0$.

Demonstração. Note que, a menos de conjugação, a matriz φ é da forma

$$\varphi = \left[\begin{array}{ccc|c} x + p_{1,1} & & & \\ & \ddots & & \\ & & x + p_{u,u} & \\ \hline & & & \\ \end{array}\right] \tag{3.5}$$

onde as entradas em branco e $p_{1,1}, \ldots, p_{u,u}$ são formas lineares em $k[y, z]$. Com efeito, pelo menos uma das entradas de φ é da forma $ax + by + cz$ com $a \neq 0$, pois caso contrario teríamos $I_1(\varphi) \subseteq (y,z)$ e $\mathrm{ht}(I_1(\varphi)) \leq \mathrm{ht}(y,z) = 2$, absurdo. Então φ tem matriz conjugada da forma

$$\varphi = \left[\begin{array}{c|c} x+p_{1,1} & \\ \hline & \varphi_1 \end{array}\right].$$

Se $\mathrm{ht}(I_2(\varphi)) = 2$, então $u = 1$ e terminamos. Se $\mathrm{ht}(I_2(\varphi)) = 3$, então pelo menos uma das entradas de φ_1 tem entrada com a variável x. De fato,

$$I_2(\varphi) = \left(\left\{ \begin{vmatrix} x+p_{1,1} & p_{1,j} \\ p_{i,1} & \alpha_{i,j}x + p_{i,j} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} p_{i,1} & \alpha_{i,j}x+p_{i,j} \\ p_{g,1} & \alpha_{g,j}x+p_{g,j} \end{vmatrix}; \begin{array}{c} 2 \leq i,g \leq n \\ 2 \leq j \leq n-1 \end{array} \right\}, I_2(\varphi_1) \right).$$

Se nenhuma entrada de φ_1 tivesse a variável x, ou seja, $\alpha_{i,j} = 0$ para quaisquer i e j, então teríamos $I_2(\varphi) \subseteq (y,z)$, absurdo pois $\mathrm{ht}(I_2(\varphi)) = 3$. Então φ tem conjugada da forma

$$\varphi = \left[\begin{array}{cc|c} x+p_{1,1} & & \\ & x+p_{2,2} & \\ \hline & & \varphi_2 \end{array}\right].$$

Se $\mathrm{ht}(I_3(\varphi)) = 2$, então $u = 2$ e terminamos. Se $\mathrm{ht}(I_3(\varphi)) = 3$, podemos repetir o argumento acima, de modo que podemos concluir que φ tem uma conjugada como em (3.5).

Considerando φ como em (3.5), temos que toda submatriz $(u+1)\times(u+1)$ de φ tem uma linha com todas as entradas em (y,z), portanto, $I_{u+1}(\varphi) \subseteq (y,z)$ e $I_u(\varphi) \nsubseteq (y,z)$. Como $\mathrm{ht}(I_{u+1})(\varphi) = 2$, então $(y,z) \in \mathrm{Min}(I_{u+1}(\varphi)) \setminus \mathrm{Min}(I_u(\varphi))$. Denotando $P := (y,z)$, temos que $u = u_P$.

(a) Para calcular a matriz jacobiana dual de $\mathfrak{F}$ precisamos encontrar geradores para o ideal $\mathfrak{J}_{(1,*)}$, como definido no capítulo 2. Seja $\mathcal{R}_R(I) \simeq \frac{k[t_1,\ldots,t_n]}{\mathcal{J}}$ a álgebra de Rees de I. Como observamos no capítulo 2, uma submatriz da jacobiana dual de $\mathfrak{F}$ tem a forma

$$B = \begin{bmatrix} t_1 & \ell_{1,2} & \ell_{1,3} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ t_u & \ell_{u,2} & \ell_{u,3} \\ 0 & \ell_{u+1,2} & \ell_{u+1,3} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ell_{n-1,2} & \ell_{n-1,3} \end{bmatrix}, \tag{3.6}$$

onde $\ell_{i,2} := \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{dp_{j,i}}{dy}\right) t_j$ e $\ell_{i,3} := \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{dp_{j,i}}{dz}\right) t_j$ são formas linear em $k[t_1,\ldots,t_n]$.

Seja B^T a transposta de B. A matriz B^T satisfaz a igualdade matricial

$$[t_1 \;\; t_2 \;\; \ldots \;\; t_n] \cdot \varphi = [x \;\; y \;\; z] \cdot B^T. \tag{3.7}$$

Uma vez que $u < n-1$, faz sentido considerar o elemento $\ell_{u+1,2}$. Pelo critério de birracionalidade (Teorema 2.1), para mostrarmos que $\mathfrak{F}$ é birracional basta encontrarmos uma submatriz de B de rank 2 módulo $\mathfrak{I}_{(0,*)} \subseteq R[t_1, \ldots, t_n]$, ideal também definido no capítulo 2. Consideremos então a submatriz

$$\theta' = \begin{bmatrix} t_u & \ell_{u,2} \\ 0 & \ell_{u+1,2} \end{bmatrix}.$$

Notemos que $\ell_{u+1,2} \neq 0$. De fato, caso contrário, teríamos

$$\frac{dp_{1,u+1}}{dy} = \cdots = \frac{dp_{n,u+1}}{dy} = 0,$$

ou seja, a $(u+1)$-ésima coluna de φ seria múltiplo de z e, portanto, $I \subseteq (z)$. Mas isto é um absurdo pois $\mathrm{ht}(I) = 2 > 1 = \mathrm{ht}(z)$. Como $f_1, \ldots, f_n$ são k-linearmente independentes, então nem t_u nem $\ell_{u+1,2}$ estão em $\mathfrak{I}_{(0,*)}$. Como $\mathfrak{I}_{(0,*)}$ é ideal primo de $R[t_1, \ldots, t_n]$, então $t_u \cdot \ell_{u+1,2} \notin \mathcal{I}_{(0,*)}$. Portanto,

$$\det \begin{bmatrix} t_u & \ell_{u,2} \\ 0 & \ell_{u+1,2} \end{bmatrix} \notin \mathcal{I}_{(0,*)}.$$

Desta forma, $\mathrm{rk}(\theta')$ sobre $\dfrac{R[t_1, \ldots, t_n]}{\mathcal{I}_{(0,*)}R[t_1, \ldots, t_n]}$ é 2. Consequentemente, o rank da matriz jacobiana dual é 2.

(b) Como $V = \mathbb{P}^2$, então por (2.3), temos trivialmente

$$\ell(I) = \dim(\mathbb{P}^2) + 1 = 3 = \dim(R).$$

(c) Pelo Teorema 2.1, temos que um representante para a inversa $\mathfrak{G}$ pode ser dado pelos 2-menores de qualquer submatriz 2×3 de rank 2 sobre $\dfrac{k[t_1, \ldots, t_n]}{\mathfrak{I}_{(0,*)}k[t_1, \ldots, t_n]}$. A matriz θ' do item (a) tem rank 2, logo, podemos tomar a matriz

$$\begin{bmatrix} t_u & \ell_{u,2} & \ell_{u,3} \\ 0 & \ell_{u+1,2} & \ell_{u+1,3} \end{bmatrix}.$$

Um representante para a inversa é então dado pelos determinantes 2×2 desta matriz que, claramente, são formas de grau 2.

(d) Seja D o fator de inversão de $\mathfrak{F}$ relativo a algum representante da inversa de $\mathfrak{F}$. Na **Proposição** 2.2, observamos que $D \in R\backslash I^2$ e que $\{Dx, Dy, Dz\} \subseteq I^2$. Portanto, em R/I^2 temos que $\overline{D} \neq 0$ e $\overline{D}x = \overline{D}y = \overline{D}z = \overline{0}$, isto é, $(x, y, z) \subseteq Z(R/I^2)$. Segue então que $\operatorname{depth}(R/I^2) = 0$.

$\square$

Teorema 3.4. *Seja φ uma matriz $n \times (n-1)$ tal que suas entradas são formas lineares no anel de polinômios $R = k[x, y, z]$. Suponhamos que $\operatorname{ht}(I_1(\varphi)) = 3, \operatorname{ht}(I) = 2$. Consideremos $u := u(\varphi)$. Então:*

(a) Se $n \geq 2(u+1)$, existe ideal primo $Q \subseteq R$ tal que

$$\{Q\} = \operatorname{Min}(I_{u+1}(\varphi)) = \operatorname{Min}(I_{u+2}(\varphi)) = \cdots = \operatorname{Min}(I_{n-(u+2)}(\varphi)) = \operatorname{Min}(I_{n-(u+1)}(\varphi)).$$

(b) Se $P \in \operatorname{Min}(I)$ é tal que $P \neq Q$, então

$$\begin{cases} u_p & \geq n - (u+1) \\ \mu(I_p) & \leq u + 1. \end{cases}$$

Demonstração.

(a) Seja $Q \in \operatorname{Min}(I)$ tal que $u = u_Q$. Então $Q \in \operatorname{Min}(I_{u+1}(\varphi))$. Como

$$I = I_{n-1}(\varphi) \subseteq \cdots \subseteq I_{n-(u+1)}(\varphi) \subseteq \cdots \subseteq I_{u+1}(\varphi)$$

e Q é primo minimal dos ideais nos extremos, então Q é primo minimal de todo ideal da cadeia. Naturalmente, Q é o candidato a ser o único primo minimal afirmado no teorema. A menos de conjugação, podemos supor $Q = (y, z)$ e considerar φ como na demonstração do item (c) do **Lema** (3.2). Seja $J \subseteq I_{n-(u+1)}(\varphi)$ o ideal gerado pelos menores maximais da matriz

$$\begin{bmatrix} Z \\ Y \end{bmatrix}.$$

Notemos que $I \subseteq J$. De fato, seja f_i um gerador de I, determinado por um $(n-1)$-menor de φ. Ao calcular f_i, expandimos o determinante via Laplace pela primeira coluna. Fazendo isso iteradamente para todos os subdeterminantes que aparecerem, em algum momento chegaremos aos geradores de J.

As entradas da matriz que geram J são formadas por elementos do ideal $Q = (y, z)$, então $J \subseteq (y, z)$. Observemos também que $Q \in \mathrm{Min}(J)$ pois $I \subseteq J \subseteq Q$ e Q é primo minimal de I. Podemos notar ainda que Q é o único primo minimal de J. Segue então que J tem altura 2 e Q é o único primo minimal de $I_{n-(u+1)}$. Seguindo o mesmo raciocínio para $I_{n-(u+2)}(\varphi), \ldots, I_{u+1}(\varphi)$, concluímos que Q é o único primo minimal de $I_{n-(u+2)}(\varphi), \ldots, I_{u+1}(\varphi)$.

(b) Se P é primo minimal de I mas $P \neq Q$, então, por (a), $P \notin \mathrm{Min}(I_{n-(u+1)}(\varphi))$. Decorre então que $u_p \geq n - (u + 1)$. Pelo **Lema** (3.2) temos que

$$\mu(I_P) = n - u_P \leq n - (n - (u + 1)) = u + 1.$$

$\square$

Os nossos próximos resultados buscam obter relações sobre a álgebra de Rees, a Fibra especial e o número de redução do ideal I. Por exemplo, mostraremos que $r(I) \leq \ell(I)$ é equivalente à função de Hilbert $H(\mathcal{F}(I), t)$ coincidir com o polinômio de Hilbert para todo $t \geq 0$.

A próxima proposição, que é um pouco mais geral e não exige que I seja ideal determinantal, nos diz que $r(I) = \mathrm{reg}(\mathcal{F}(I))$ se $\mathcal{F}(I)$ é Cohen-Macaulay.

Proposição 3.5. Seja $J \subseteq A := k[x_0, \ldots, x_r]$ um ideal homogêneo tal que sua fibra especial $\mathcal{F}(J)$ é Cohen-Macaulay. Então $r(J) = \mathrm{reg}(\mathcal{F}(J))$.

Demonstração. Seja $n = \mu(J)$ e $J = (f_1, \ldots, f_n)$. Consideremos o homomorfismo sobrejetor dado por $A[t_1, \ldots, t_n] \to \mathcal{R}_A(J)$, onde $t_1, \ldots, t_n$ são variáveis sobre A e $t_i \mapsto f_i t$. Então

$$\mathcal{F}(J) := \frac{\mathcal{R}_A(J)}{\mathfrak{m}\mathcal{R}_A(J)} \simeq k[f_1, \ldots, f_n],$$

que naturalmente tem estrutura de $S := k[t_1, \ldots, t_n]$-módulo graduado.

Pelo teorema de Hilbert-Serre, a série de Hilbert de $\mathcal{F}(J)$ pode ser escrito como

$$P(\mathcal{F}(J), t) = \frac{h(t)}{(1 - t)^d}, \tag{3.8}$$

com $d = \dim(\mathcal{F}(J)) = \ell(J)$. A **Proposição** 1.4 nos fornece $r(J) = \deg(h(t))$. Por outro lado, dado que a fibra especial é Cohen-Macaulay, temos que $\ell(J) = \dim(\mathcal{F}(J)) = \mathrm{depth}(\mathcal{F}(J))$. Por Auslander-Buchsbaum, temos que

$$\mathrm{dh}(\mathcal{F}(J)) = \mathrm{depth}(S) - \mathrm{depth}(\mathcal{F}(J)) = n - \ell(I).$$

Seja $m := n - \ell(I) = \mathrm{dh}(\mathcal{F}(J))$. Então, $\mathcal{F}(J)$ admite resolução minimal da forma

$$\mathcal{F} : 0 \to \bigoplus_j S(-a_{mj}) \overset{\alpha_m}{\to} \cdots \overset{\alpha_1}{\to} \bigoplus_j S(-a_{0j}) \overset{\alpha_0}{\to} \mathcal{F}(J) \to 0. \tag{3.9}$$

Assim, a série de Hilbert de $\mathcal{F}(J)$ admite representação como na **Proposição** 1.5:

$$P(\mathcal{F}(J), t) = \frac{S_{\mathcal{F}(J)}(t)}{(1-t)^n}, \text{ onde } S_{\mathcal{F}(J)}(t) = \sum_{s,j} (-1)^s t^{a_{sj}}.$$

Comparando com (3.8), temos que $\dfrac{h(t)}{(1-t)^d} = \dfrac{S_{\mathcal{F}(J)}(t)}{(1-t)^n}$. Logo, $r(J) = \deg(h(t)) = \deg(S_{\mathcal{F}(J)}(t)) + d - n = \deg(S_{\mathcal{F}(J)}(t)) + \ell(J) - n = \deg(S_{\mathcal{F}(J)}(t)) - m$. Para concluirmos, basta usar o Teorema 1.3, que afirma que $\mathrm{reg}(\mathcal{F}) = \deg(S_{\mathcal{F}(J)}(t)) - m$. □

Como corolário, obtemos que se a diferença entre $\ell(J)$ e $r(J)$ é no mínimo 1, então a função de Hilbert coincide com o polinômio de Hilbert para $t \geq 0$.

Corolário 3.6. Seja $J \subseteq k[x_0, \ldots, x_r]$ um ideal homogêneo tal que $\mathcal{F}(J)$ é Cohen-Macaulay. Consideremos ainda $n := \mu(J)$ e uma resolução de J como em (3.9). Então as condições abaixo são equivalentes:

(a) $r(J) \leq \ell(J) - 1$;

(b) O maior shift na resolução minimal graduada de $\mathcal{F}(J)$ sobre $S = k[t_1, \ldots, t_n]$ é no máximo $n - 1$;

(c) A função de Hilbert $H(\mathcal{F}(J), t)$, coincide com o polinômio de Hilbert $P_{\mathcal{F}(J)}(t)$ para todo $t \geq 0$.

Demonstração. Seja α o maior shift na resolução livre minimal de $\mathcal{F}(J)$. Pelo Teorema 1.3, temos que $\alpha = \deg(S_{\mathcal{F}(J)}(t))$, e pela proposição anterior temos que $r(J) = \alpha - m$, onde $m = n - \ell(J)$. Assim,

$$\alpha = r(J) + m = n + (r(J) - \ell(J)) \leq n - 1.$$

Isto justifica que (a) é equivalente a (b).

Para mostrarmos que (a) equivale a (c), notemos que pelo Teorema 1.5, o menor valor para o qual a função de Hilbert de $\mathcal{F}(J)$ passa a coincidir com o polinômio de Hilbert de $\mathcal{F}(J)$ é $s = 1 - \mathrm{depth}(\mathcal{F}(J)) + \mathrm{reg}(\mathcal{F}(J))$. Uma vez que a fibra é Cohen-Macaulay, então

$$s = 1 - \dim(\mathcal{F}(J)) + \mathrm{reg}(\mathcal{F}(J) = 1 - \ell(J) + \mathrm{reg}(\mathcal{F}(J))$$

e atrelando à proposição anterior que diz que $r(J) = \operatorname{reg}(\mathcal{F}(J))$, temos que

$$s = 1 - \ell(J) + \operatorname{reg}(\mathcal{F}(J)) = (r(J) - \ell(J)) + 1 \leq 0$$

Isto conclui a demonstração. $\square$

O teorema final desta seção nos dirá que, sob certas restrições, a condição da fibra especial e da álgebra de Rees de um ideal $I \subseteq k[x,y,z]$ serem Cohen-Macaulay está intimamente relacionado ao número de redução de I. Para isto, vamos precisar dos três resultados seguintes.

Proposição 3.7. Seja $I \subseteq R := k[x,y,z]$ um ideal homogêneo gerado unicamente em grau s e I_s o conjunto dos elementos de grau s em I tal que $\dim(k[I_s]) = 3$. Se $\mathcal{R}_R(I)$ é Cohen-Macaulay, então $k[I_s]$ também é Cohen-Macaulay.

Demonstração. [18, Proposition 3.10] $\square$

Teorema 3.8. *Sejam R um anel local Cohen-Macaulay e $I \subset R$ um ideal de R satisfazendo:*

(1) I é unmixed e $\operatorname{depth}(R/I) \neq \operatorname{depth}(R/I^2)$.

(2) $\max\{r(I_P) \mid I \subseteq P, \operatorname{ht}(P) = \operatorname{ht}(I)\} \leq 1$.

(3) $\ell(I) = \operatorname{ht}(I) + 1 \geq 3$.

(4) $r(I) \leq 2$.

Então

$$\operatorname{depth}(\mathcal{R}_R(I)) = \min\{\operatorname{depth}(R/I), \operatorname{depth}(R/I^2) + 1\} + \operatorname{ht}(I) + 1.$$

Demonstração. [5, Theorem. 5.12]. $\square$

O teorema seguinte é decorrente de [15, Theorem 2.1].

Teorema 3.9. *Seja $(A, \mathfrak{m})$ um anel local Cohen-Macaulay de dimensão $d > 0$ com corpo residual infinito. Seja J um ideal $\mathfrak{m}$-primário. O comprimento de R/I^t pode ser escrito na forma*

$$\lambda(R/I^t) = e_0\binom{t+d-1}{d} - e_1\binom{n+d-2}{d-1} + \cdots + (-1)^d e_d$$

para $n \gg 0$. Se $e_0 - e_1 = \lambda(R/I)$, então para toda redução minimal $x_1, \ldots, x_d$ de J temos que $J^2 = J(x_1, \ldots, x_d), e_2 = \cdots e_d = 0$ e $HS_J(t) := \lambda(R/J^t)$ é uma função polinomial para todo $t \geq 1$. Reciprocamente, se existem $x_1, \ldots, x_d \in J$ tais que $J^2 = J(x_1, \ldots, x_d)$, então $e_0 - e_1 = \lambda(R/I)$.

Por fim, o teorema final desta seção.

Teorema 3.10. *Seja* $R := k[x, y, z]$ *e* φ *uma matriz* $n \times (n-1)$ *cujas entradas são formas lineares em* R *tal que* $I_1(\varphi) = (x, y, z)$ *e* $\mathrm{ht}(I) = 2$*. Se* $r(I_P) \leq 1$ *para todo primo associado* P *de* I*, então as seguintes condições são equivalentes:*

(i) $r(I) \leq 2$.

(ii) A álgebra de Rees $\mathcal{R}_R(I)$ *é Cohen-Macaulay.*

(iii) A fibra especial $\mathcal{F}(I)$ *é Cohen-Macaulay.*

Demonstração.
$(i) \Rightarrow (ii)$ Suponhamos que $r(I) \leq 2$. Mostraremos que as hipóteses do Teorema 3.8 são satisfeitas. Pelo Teorema 3.3 temos que $\ell(I) = 3$ e $\mathrm{depth}(R/I^2) = 0$. Além disso, uma vez que R é Cohen-Macaulay e I é perfeito, então R/I é Cohen-Macaulay, logo,

$$\mathrm{depth}(R/I) = \dim(R/I) = \dim(R) - \mathrm{ht}(I) = 3 - 2 = 1 \neq \mathrm{depth}(R/I^2).$$

Como I é unmixed, as condições (1) e (3) do Teorema 3.8 são satisfeitas.

Para verificar a condição (2), seja $P \in \mathrm{Spec}(R)$ tal que $I \subseteq P$ e $\mathrm{ht}(P) = \mathrm{ht}(I)$. Então $P \in \mathrm{Min}(I) \subseteq \mathrm{Ass}(I)$. Pela hipótese do teorema, temos que $r(I_P) \leq 1$. A condição (4) segue da hipótese (i). Portanto, pelo Teorema 3.8 e sabendo que $\dim(\mathcal{R}_R(I)) = \dim(R) + 1 = 4$, temos que

$$\mathrm{depth}(\mathcal{R}_R(I)) = \min\{\mathrm{depth}(R/I), \mathrm{depth}(R/I^2)+1\}+\mathrm{ht}(I)+1 = 1+2+1 = \dim(\mathcal{R}_R(I)).$$

Provamos assim que $\mathcal{R}_R(I)$ é Cohen-Macaulay.

$(ii) \Rightarrow (iii)$. A fibra especial $\mathcal{F}(I)$ é isomorfa a k-álgebra $k[f_1, \ldots, f_n]$. Pelo Teorema 3.3, $\dim(\mathcal{F}(I)) = 3$. Na notação da **Proposição** 3.7, temos que $k[I_{n-1}] = k[f_1, \ldots, f_n]$. Logo, $\dim(k[I_{n-1}]) = \dim(k[f_1, \ldots, f_n]) = \dim(\mathcal{F}(I)) = 3$. Segue da **Proposição** 3.7 que $k[I_{n-1}]$ é Cohen-Macaulay, consequentemente, $\mathcal{F}(I)$ é Cohen-macaulay.

$(iii) \Rightarrow (i)$. Para mostrarmos que $r(I) \leq 2$, ou seja, que $r(I) \leq \ell(I) - 1$, mostraremos que a condição (c) do **Corolário** 3.6 é satisfeita.

Seja P um primo associado de I. Inicialmente, mostremos que I_P é P_P-primário. Com efeito,

$$\mathrm{Ass}(I_P) = \{Q_P \mid P \supseteq Q \in \mathrm{Ass}(I)\}.$$

Como I é Cohen-Macaulay, então $\mathrm{Ass}(I) = \mathrm{Min}(I)$. Decorre imediatamente que $\mathrm{Ass}(I_P) = \{Q_P \mid P \supseteq Q \in \mathrm{Ass}(I)\} = \{P_P\}$. Portanto I_P é P_P-primário. Como R_P/P_P é infinito, então I_P admite redução minimal. Como I_P é P_P-primário, toda redução minimal de I_P é gerada por $\dim(R_P) = \mathrm{ht}(P) = 2$ elementos, em particular, existem $x_1, x_2 \in I$ tais $I^{r(I_P)+1} = I^{r(I_P)}(x_1, x_2)$, ou seja, $I^2 = I(x_1, x_2)$. Pelo Teorema 3.9, temos que $HS_{I_P}(t) := \lambda(R_P/I_P^t)$ é uma função polinomial para todo $t \geq 1$.

Seja $e(M)$ a multiplicidade de um R-módulo graduado M. Aplicando [17, Theorem 14.7] para o anel R, o R-módulo R/I^t e o ideal $\mathfrak{m}$, temos que

$$e(R/I^t) = \sum_{P \in \mathrm{Min}(I)} \lambda\left(\left(\frac{R}{I^t}\right)_P\right) e(R/P) = \sum_{P \in \mathrm{Min}(I)} \lambda\left(\frac{R_P}{I_P^t}\right) e(R/P).$$

Pela exatidão da sequência estrutural de R-módulos $0 \to P \to R \to R/P \to 0$, temos que $e(R/P) = e(R) - e(P)$. Como R é um anel regular, então $e(R) = 1$, decorre que

$$e(R/I^t) = \sum_{P \in \mathrm{Min}(I)} \lambda(R_P/I_P^t) = \sum_{P \in \mathrm{Min}(I)} HS_{I_P}(t).$$

Então $e(R/I^t)$ é polinomial para todo $t \geq 1$. Como $\mathcal{F}(I) \simeq \frac{R}{\mathfrak{m}} \oplus \frac{I}{\mathfrak{m}I} \oplus \frac{I^2}{\mathfrak{m}I^2} \oplus \cdots$, segue do lema de Nakayama que

$$H(\mathcal{F}(I), t) := \lambda\left(\frac{I^t}{\mathfrak{m}I^t}\right) = \dim_k\left(\frac{I^t}{\mathfrak{m}I^t}\right) = \mu(I^t).$$

Além disso,

$$\mu(I^t) = \binom{\mu(I)t + 1}{2} - e(R/I^t).$$

Como $e(R/I^t)$ é polinomial para todo $t \geq 1$ e $\binom{\mu(I)t+1}{2}$ é um polinômio em t, segue que $\mu(I^t)$ é um uma função polinomial para $t \geq 1$ e o mesmo vale para

$$H(\mathcal{F}(I), t) = \binom{\mu(I)t + 1}{2} - \sum_{P \in \mathrm{Min}(I)} \lambda(R_P/I_P^t). \tag{3.10}$$

Portanto, $H(\mathcal{F}(I), t)$ coincide com $P_{\mathcal{F}(I)}(t)$ para todo $t \geq 1$. $\square$

3.2 Propriedades da jacobiana dual

Como vimos, a matriz jacobiana dual foi essencial para determinar a birracionalidade de uma aplicação racional definida pelos $(n-1)$-menores de uma matriz $n \times (n-1)$ de entradas lineares. Nesta seção exploraremos um pouco mais a submatriz jacobiana dual B obtida na seção anterior. Adicionando a hipótese de $u = u(\varphi) = 1$, mostraremos que $\mathcal{R}_R(I)$ é Cohen-Macaulay e normal. Para isto, precisaremos obter propriedades sobre a transposta da jacobiana dual e uma submatriz particular.

Sejam $R := k[x, y, z]$ e $\varphi \in M_{n\times(n-1)}(R)$ uma matriz tal que suas entradas são formas lineares em R e $I := I_{n-1}(\varphi)$ um ideal de R. Suponhamos que $I = (f_1, \ldots, f_n)$, onde cada f_i é uma forma de grau $n-1$ em R para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$. Consideremos ainda a aplicação racional $\mathfrak{F} : \mathbb{P}^2 \longrightarrow \mathbb{P}^{n-1}$ determinada por $p \mapsto [f_1(p) : \cdots : f_n(p))]$. Consideremos a submatriz B da jacobiana dual de $\mathfrak{F}$ determinada em (3.6) . Então B^T tem a forma

$$B^T = \begin{bmatrix} t_1 & t_2 & \cdots & t_u & 0 & \cdots & 0 \\ \ell_{1,2} & \ell_{2,2} & \cdots & \ell_{u,2} & \ell_{u+1,2} & \cdots & \ell_{n-1,2} \\ \ell_{1,3} & \ell_{2,3} & \cdots & \ell_{u,3} & \ell_{u+1,3} & \cdots & \ell_{n-1,3} \end{bmatrix}. \tag{3.11}$$

Uma submatriz notável de B^T é a matriz $B' := \begin{bmatrix} \ell_{u+1,2} & \cdots & \ell_{n-1,2} \\ \ell_{u+1,3} & \cdots & \ell_{n-1,3}. \end{bmatrix}$, que é a parte da jacobiana dual referente ao lado direito da matriz φ exibida no Teorema 3.3 e que, pelo mesmo teorema, não tem entrada nula. Veremos agora dois resultados envolvendo B' e seus menores maximais.

Proposição 3.11. A matriz $B' := \begin{bmatrix} \ell_{u+1,2} & \cdots & \ell_{n-1,2} \\ \ell_{u+1,3} & \cdots & \ell_{n-1,3} \end{bmatrix}$ é 1-genérica.

Demonstração. Pela Proposição 1.7, basta mostrarmos que $VB'W$ não tem entradas nulas para quaisquer que sejam as matrizes $V \in \mathrm{GL}_2(k)$ e $W \in \mathrm{GL}_{n-1-u}(k)$.

Suponhamos que existem matrizes $V \in \mathrm{GL}_2(k)$ e $W \in \mathrm{GL}_{n-1-u}(k)$ tais que $VB'W$ tem alguma entrada nula. Consideremos as matrizes

$$\widetilde{V} := \left[\begin{array}{c|c} 1 & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & V \end{array}\right] \in \mathrm{GL}_3(k) \qquad \text{e} \qquad \widetilde{W} := \left[\begin{array}{c|c} \mathbb{I}_u & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & W \end{array}\right] \in \mathrm{GL}_{n-1}(k),$$

onde $\mathbb{I}_u$ é a matriz identidade $u \times u$. Notemos que

$$\widetilde{V}B^T = \left[\begin{array}{c|c} 1 & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & V \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{cccc|c} t_1 & t_2 & \cdots & t_u & \mathbf{0} \\ \hline \ell_{1,2} & \ell_{2,2} & \cdots & \ell_{u,2} & \\ \ell_{1,3} & \ell_{2,3} & \cdots & \ell_{u,3} & B' \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} t_1 & \cdots & t_u & \mathbf{0} \\ \hline & \Omega & & VB' \end{array}\right],$$

onde

$$\Omega = V \cdot \begin{bmatrix} \ell_{1,2} & \ell_{2,2} & \cdots & \ell_{u,2} \\ \ell_{1,3} & \ell_{2,3} & \cdots & \ell_{u,3} \end{bmatrix}.$$

Portanto,

$$\widetilde{V}B^T\widetilde{W} = \left[\begin{array}{ccc|c} t_1 & \cdots & t_u & \mathbf{0} \\ \hline & \Omega & & VB' \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c|c} \mathbb{I}_u & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & W \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} t_1 & \cdots & t_u & \mathbf{0} \\ \hline & \Omega & & VB'W \end{array}\right]. \tag{3.12}$$

Consideremos a mudança linear de variáveis em $R = k[x, y, z]$ determinada pela matriz $(\widetilde{V}^{-1})^T$, e sejam $\overline{\varphi}$ a matriz φ nas novas variáveis e B_0 a submatriz jacobiana dual relativa à $\overline{\varphi}\widetilde{W}$. No capítulo 2 mostramos que $B_0 = \widetilde{W}^T B((\widetilde{V}^{-1})^T)^{-1} = (\widetilde{V}B^T\widetilde{W})^T$. Assim, temos que

$$B_0 = \left[\begin{array}{c|cc} t_1 & \widetilde{\ell}_{1,2} & \widetilde{\ell}_{1,3} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ t_u & \widetilde{\ell}_{u,2} & \widetilde{\ell}_{u,3} \\ \hline \mathbf{0} & \multicolumn{2}{c}{VB'W} \end{array}\right],$$

onde $\widetilde{\ell}_{i,j}$ são formas lineares em $k[t_1, \ldots, t_n]$ para todo $i \in \{1, \ldots, u\}$ e $j \in \{2, 3\}$. Notemos que $u = u(\varphi) = u(\overline{\varphi}\widetilde{W})$. Usando a mesma notação que B para B_0, temos que a matriz B_0' é a matriz $VB'W$. Por hipótese, $VB'W$ tem uma entrada nula, portanto, a matriz $\overline{\varphi}\widetilde{W}$ tem uma coluna dependendo somente de uma das novas variáveis y' ou z'. Consequentemente, $I_{n-1}(\overline{\varphi}\widetilde{W}) \subseteq (y')$ ou $I_{n-1}(\overline{\varphi}\widetilde{W}) \subseteq (z')$, um absurdo pois $\overline{\varphi}\widetilde{W}$ é uma matriz conjugada à φ. □

O corolário abaixo segue diretamente de B' ser 1-genérica e do Teorema 1.8.

Corolário 3.12. O ideal $I_2(B')$ é primo, Cohen-Macaulay e

$$\mathrm{ht}(I_2(B')) = (n - 1 - u) - 2 + 1 = n - u - 2.$$

Teorema 3.13. *O anel $\frac{k[t_1,\ldots,t_n]}{I_2(B')}$ é isomorfo ao anel de coordenadas homogêneas de um normal scroll racional em $\mathbb{P}^{n-1}$ de dimensão $u+1$. Em particular, o anel de coordenadas homogêneas do normal scroll racional é um domínio Cohen-Macaulay.*

Demonstração. A matriz B' é uma matriz $2 \times (n - 1 - u)$ e 1-genérica. Pelo Teorema 1.10, existem inteiros não negativos $a_1, \ldots, a_u$ tais que a matriz B' admite uma matriz conjugada da forma

$$\widetilde{B'} = \left[\begin{array}{ccc|ccc|c|ccc} x_0 & \cdots & x_{a_1-1} & x_{a_1+1} & \cdots & x_{a_2-1} & \cdots & x_{a_u+1} & \cdots & x_{n-2} \\ x_1 & \cdots & x_{a_1} & x_{a_1+2} & \cdots & x_{a_2} & \cdots & x_{a_u+2} & \cdots & x_{n-1} \end{array}\right].$$

Pelo Teorema 1.8, o ideal $I_2(\widetilde{B'})$ é primo e define um normal scroll racional $V =$

$\mathcal{V}(I_2(\widetilde{B'}))$. Seja $\mathbf{A}(V)$ o anel de coordenadas homogêneas de V. Então

$$\mathbf{A}(V) := \frac{k[x_0, \ldots, x_{n-1}]}{\mathcal{I}(V)} = \frac{k[x_0, \ldots, x_{n-1}]}{\mathcal{I}(\mathcal{V}(I_2(\widetilde{B'})))} = \frac{k[x_0, \ldots, x_{n-1}]}{\sqrt{I_2(\widetilde{B'})}} = \frac{k[x_0, \ldots, x_{n-1}]}{I_2(\widetilde{B'})},$$

a penúltima igualdade devido ao teorema dos Zeros de Hilbert e a última igualdade devido a $I_2(\widetilde{B'})$ ser primo. Como $\widetilde{B'}$ foi obtida de B' por conjugação, então

$$\frac{k[t_1, \ldots, t_n]}{I_2(B')} \simeq \frac{k[x_0, \ldots, x_{n-1}]}{I_2(\widetilde{B'})} = \mathbf{A}(V).$$

Como V é uma variedade projetiva. então $\dim(V) = \mathbf{A}(V) - 1$. Portanto, temos que

$$\begin{aligned} \dim(V) &= \dim(\mathbf{A}(V)) - 1 = \dim\left(\frac{k[t_1, \ldots, t_n]}{I_2(B')}\right) - 1 \\ &= n - \mathrm{ht}(I_2(B')) - 1 \\ &= n - (n - u - 2) - 1 \\ &= u + 1. \end{aligned}$$

Portanto, $\mathbf{A}(V)$ é um domínio Cohen-Macaulay. □

3.2.1 Caso particular: $u(\varphi) = 1$

Nosso objetivo será concluir este trabalho apresentando e demonstrando alguns resultados, para o caso $u = 1$, envolvendo as localizações de I em seus primos associados, a Cohen-Macaulaycidade da fibra especial e da álgebra de Rees de I.

Apresentamos dois lemas técnicos que serão usados na demonstração do teorema principal.

Lema 3.14. Sejam $m \geq 1$ um inteiro e M uma matriz de entradas lineares em $k[y, z]$ tal que $\det(M) \neq 0$. Então M é conjugada a uma matriz $\widetilde{M}$ da forma

$$\widetilde{M} = \left[\begin{array}{c|ccc} y & \alpha_2 z & \cdots & \alpha_m z \\ \hline \mathbf{0} & & M' & \end{array}\right]$$

onde M' tem entradas lineares em $k[y, z]$, $\det(M') \neq 0$ e $\alpha_i \in k$ para todo i.

Demonstração. Seja $M = (m_{ij})$ onde $m_{ij} = a_{ij}y + b_{ij}z$ com $a_{ij}, b_{ij} \in k$. Podemos escrever $M = yA + zB$ onde A e B são matrizes $m \times m$ com entradas em k, definidas por $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$.

O determinante de M, $\det(M)$, é uma forma não nula nas variáveis y e z. Consideremos $(a, b) \in k^2$ raiz de $\det(M)$ tal que $b \neq 0$. A existência do par (a, b) se justifica da seguinte maneira: Seja $\det(M) = p_t(z)y^t + \cdots + p_1(z)y + p_0(z) \in k[y, z]$. Como

$\det(M) \not\equiv 0$, então $p_t(z) \not\equiv 0$. Logo, existe $b \neq 0$ tal que $p_t(b) \neq 0$. Como k é algebricamente fechado, existe $a \in k$ tal que a é raiz do polinômio $p_t(b)y^n + \cdots + p_1(b)y + p_0(b) \in k[y]$. Assim, $\det(M)(a, b) = 0$ com $b \neq 0$.

Denotemos por $M(a, b)$ a matriz M aplicada no ponto (a, b):

$$M(a,b) = \begin{bmatrix} a_{11}a + b_{11}b & a_{12}a + b_{12}b & \ldots & a_{1m}a + b_{1m}b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}a + b_{m1}b & a_{m2}a + b_{m2}b & \ldots & a_{mm}a + b_{mm}b \end{bmatrix}.$$

Como $\det(M(a, b)) = \det(M)(a, b) = 0$, temos que $M(a, b)$ tem colunas k-linearmente dependentes. Sejam $C_1, \ldots, C_m$ as colunas de $M(a, b)$. Existem $r_1, \ldots, r_m \in k$, não todos nulos, tais que $r_1C_1 + \ldots + r_mC_m = [0 \;\; 0 \;\; \ldots \;\; 0]^t$. Definamos $v := [r_1, \ldots, r_m] \in k^m \backslash \{0\}$. Desta forma, temos que $(aA + bB) \cdot v = M(a, b) \cdot v = [0 \;\; 0 \;\; \ldots \;\; 0]^t$, ou seja,

$$\left(-\frac{a}{b}\right) Av = Bv. \tag{3.13}$$

Tomando uma base de k^m contendo v, digamos $\{v, v_2, \ldots, v_m\}$, e olhando cada vetor como matriz coluna, consideremos a matriz $T := [v \;\; v_2 \;\; \ldots \;\; v_m]$. Sejam C_A a primeira coluna de AT e C_B a primeira coluna de BT. Completando a matriz coluna $[v]$ para obter $[v \;\; v_2 \;\; \ldots \;\; v_m]$, segue da equação (3.13) a igualdade:

$$\left(-\frac{a}{b}\right) C_A = C_B. \tag{3.14}$$

Por outro lado, tendo que $M = yA + zB$, segue que $MT = yAT + zBT$, em particular, se C_M é a primeira coluna de MT, então

$$C_M = yC_A + zC_B = yC_A + z\left(-\frac{a}{b}\right) C_A = \left(y - \frac{a}{b}z\right) C_A. \tag{3.15}$$

Se $C_A \neq [0 \; \ldots \; 0]^t$, então MT é da forma

$$\left[\begin{array}{c|c} \left(y - \frac{a}{b}z\right) c_1 & \\ \vdots & X \\ \left(y - \frac{a}{b}z\right) c_m & \end{array}\right] \tag{3.16}$$

onde $c_1, \ldots, c_m \in k$ e X é uma matriz $m \times (m-1)$ com entradas em $k[y, z]$. Sem perda de generalidade, podemos supor $c_1 \neq 0$. Operando com linhas e colunas, obtemos uma matriz conjugada à M da forma

$$MT = \left[\begin{array}{c|ccc} (y - \frac{a}{b}z)c_1 & \alpha_2 z & \cdots & \alpha_m z \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & M' & \\ 0 & & & \end{array}\right].$$

Por fim, fazendo a mudança de variável $k[y,z] \to k[y,z], y \mapsto \frac{y}{c_1} + \frac{a}{b}z, z \mapsto z$, obtemos uma matriz conjugada à M da forma

$$\widetilde{M} = \left[\begin{array}{c|ccc} y & \alpha_2 z & \cdots & \alpha_m z \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & M'' & \\ 0 & & & \end{array}\right]. \tag{3.17}$$

Sabendo que $\det(M) \neq 0$, obtemos que $0 \neq \det(\widetilde{M}) = y \cdot \det(M'')$. Portanto, $\det(M'') \neq 0$.

Se na equação (3.15) tivéssemos $C_A = [0 \ \cdots \ 0]^t$, então na primeira coluna de MT, C_M, só apareceria a variável z e, uma vez que $\det(MT) \neq 0$, pelo menos uma das entradas de C_M é não nula. Basta então considerarmos a mudança de variáveis simétrica $z \mapsto y$ e $y \mapsto z$, fazer operações elementares nas linhas e colunas e obteremos $\widetilde{M}$ como em (3.17). □

Lema 3.15. Seja k um corpo algebricamente fechado. Dado um inteiro $m \geq 1$ e M uma matriz $m \times m$ com entradas lineares em $k[y,z]$, definamos C como a única matriz $2 \times m$ de entradas lineares no anel de polinômios $k[t_1, \ldots, t_m]$ satisfazendo a igualdade

$$[t_1 \ \ t_2 \ \ \cdots \ \ t_m] \cdot M = [y \ \ z] \cdot C.$$

Se $\det(M) \neq 0$ e $I_{m-1}(M)$ é (y,z)-primário, então $I_2(C)$ tem *codimensão esperada* $m - 2 + 1 = m - 1$.

Demonstração. Faremos indução em m. Para $m = 1$, temos que $I_0(M) = k[y,z]$ é $(y,z)-$primário e $I_2(C) = (0)$ tem codimensão $0 = m - 1$.

Suponhamos que o lema é válido para algum $m - 1$ com $m \geq 2$. Sejam M uma matriz $m \times m$ e C uma matriz $2 \times m$ como no enunciado do lema. Consideremos as matrizes $\widetilde{M}$ e M' como no **Lema** (3.14).

Um dos geradores de $I_{m-1}(\widetilde{M})$ é $\det(M')$ e os outros geradores são elementos do ideal $I_{m-2}(M')$. Uma vez que $\det(M') = I_{m-1}(M') \subseteq I_{m-2}(M')$, temos que $I_{m-1}(\widetilde{M}) \subseteq I_{m-2}(M')$. Como $I_{m-1}(M)$ é $(y,z)-$primário, $I_{m-1}(\widetilde{M})$ também é (y,z)-

primário. Obtemos então que

$$(y,z) = \sqrt{I_{m-1}(\widetilde{M})} \subseteq \sqrt{I_{m-2}(M')}.$$

Pela maximalidade do ideal (y,z) ocorre a igualdade. Assim, $I_{m-2}(M')$ é (y,z)-primário. Então, por hipótese de indução, o lema vale para M'.

Seja $\widetilde{C}$ a única matriz $2 \times m$ com entradas lineares em $k[t_1, \ldots, t_n]$ satisfazendo a igualdade

$$[t_1 \ \cdots \ t_m] \cdot \widetilde{M} = [y \ \ z] \cdot \widetilde{C}. \tag{3.18}$$

Temos que $\widetilde{C}^T$ é a matriz jacobiana de $\widetilde{M}$, portanto,

$$\widetilde{C} = \begin{bmatrix} t_1 & \lambda_{1,2} & \cdots & \lambda_{1,m} \\ 0 & \lambda_{2,2} + \alpha_2 t_1 & \cdots & \lambda_{2,m} + \alpha_m t_1 \end{bmatrix}, \tag{3.19}$$

onde $\lambda_{i,j} \in k[t_2, \ldots, t_m]$. Como $\widetilde{C}$ é conjugada à C, é suficiente mostrarmos que $\mathrm{ht}(I_2(\widetilde{C})) = m - 1$.

Mostraremos que as formas lineares $\lambda_{2,2} + \alpha_2 t_1, \ldots, \lambda_{2,m} + \alpha_m t_1$ são linearmente independentes sobre k. Suponhamos, por absurdo, que estas formas lineares são k-linearmente dependentes. Sem perda de generalidade, podemos supor que existem $c_3, \ldots, c_m \in k$ não todos nulos tais que $\lambda_{2,2} + \alpha_2 t_1 = \sum_{i=3}^{m} c_i(\lambda_{2,i} + \alpha_i t_1)$. Consideremos a matriz invertível

$$D = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \multirow{2}{*}{$\mathbf{0}$} \\ 0 & 1 & \\ \hline 0 & -c_3 & \\ \vdots & \vdots & \mathbb{I}_{m-2} \\ 0 & -c_m & \end{array}\right]$$

onde $\mathbb{I}_{m-2}$ é a matriz identidade $(m-2) \times (m-2)$ com entradas em k. Então

$$\widetilde{D} := \widetilde{C}D = \begin{bmatrix} t_1 & \widetilde{\lambda}_{1,2} & \lambda_{1,3} & \cdots & \lambda_{1,m} \\ 0 & 0 & \lambda_{2,3} + \alpha_3 t_1 & \cdots & \lambda_{2,m}\alpha_m t_1 \end{bmatrix},$$

onde $\widetilde{\lambda}_{1,2} \in k[t_2, \ldots, t_m]$. A matriz $\widetilde{D}$ é conjugada a $\widetilde{C}$. Desta maneira, a matriz $N := \widetilde{M}D$ satisfaz a igualdade

$$[t_1 \ \cdots \ t_m] \cdot N = [y \ \ z] \cdot \widetilde{D}$$

e é conjugada à M. O zero na primeira coluna de $\widetilde{D}$ nos mostra que a primeira coluna de N é livre da variável z, assim como o zero na segunda coluna de $\widetilde{D}$ diz que a segunda coluna de N também é livre da variável z. Deste modo, $I_{m-1}(N) \subseteq (y)$. Mas N é conjugada M, logo, $I_{m-1}(N)$ é $(y,z)-$primário, contrariando a inclusão $I_{m-1}(N) \subseteq (y)$. Concluimos que $\{\lambda_{2,2}+\alpha_2 t_1, \ldots, \lambda_{2,m}+\alpha_m t_1\}$ é um conjunto linearmente independentes sobre k

Consideremos agora a matriz $C' := \begin{bmatrix} \lambda_{1,2} & \cdots & \lambda_{1,m} \\ \lambda_{2,2} & \cdots & \lambda_{2,m} \end{bmatrix}$. Pela igualdade (3.18) e (3.19), obtemos a igualdade

$$[t_2 \ \cdots \ t_m] \cdot M' = [y \ \ z] \cdot C'.$$

Como $\det(M') \neq 0$, então a hipótese de indução vale para M'. Aplicando a hipótese indutiva, obtemos que $\mathrm{ht}(I_2(C')) = (m-1)-1 = m-2$.

Determinemos a altura de $I_2(\widetilde{C})$. Seja $P \subseteq k[t_1, \ldots, t_m]$ um ideal primo que contém $I_2(\widetilde{C})$. Como $\{t_1(\lambda_{2,2}+\alpha_2 t_1), \ldots, t_1(\lambda_{2,m}+\alpha_m t_1)\} \subseteq I_2(\widetilde{C}) \subseteq P$, então $\{\lambda_{2,2}+\alpha_2 t_1, \ldots, \lambda_{2,m}+\alpha_m t_1\} \subseteq P$ ou $t_1 \in P$. Se $\{\lambda_{2,2}+\alpha_2 t_1, \ldots, \lambda_{2,m}+\alpha_m t_1\} \subseteq P$, então $\mathrm{ht}(P) \geq m-1$ pois as formas lineares são linearmente independentes. Por outro lado, observemos que $\lambda_{1,i}(\lambda_{2,j}+\alpha_j t_1) - \lambda_{1,j}(\lambda_{2,i}+\alpha_i t_1) \in I_2(\widetilde{C}) \subseteq P$ para quaisquer $i,j \in \{2,\ldots,m\}$. Assim, se $t_1 \in P$, então $\lambda_{1,i}\lambda_{2,j} - \lambda_{1,j}\lambda_{2,i} \in P$ para quaisquer $i,j \in \{2,\ldots,m\}$, isto é, $I_2(C') \subseteq P$. Portanto, P contém o ideal gerado por t_1 e $I_2(C')$. Dado que $I_2(C')$ é gerado por formas de grau 2 nenhuma delas contendo a variável t_1, segue que t_1 é um não divisor de zero de $I_2(C')$. Portanto, $\mathrm{ht}(P) \geq \mathrm{ht}(I_2(C'), t_1) = \mathrm{ht}(I_2(C'))+1 = m-2+1 = m-1$. Como isto vale para todo ideal primo contendo $I_2(\widetilde{C})$, então

$$\mathrm{ht}(I_2(\widetilde{C})) = \inf\{\mathrm{ht}(P) \mid P \supseteq I_2(\widetilde{C}), P \text{ primo}\} \geq m-1.$$

Para obter a desigualdade inversa, notemos que $I_2(\widetilde{C})$ é gerado por formas lineares de grau 2, portanto, não possui elemento de grau menor que 2. Assim, se por absurdo tivéssemos $\mathrm{ht}(I_2(\widetilde{C})) = m$, então este ideal seria maximal em $k[t_1, \ldots, t_m]$ e, portanto, deveria ser da forma $I_2(\widetilde{C}) = (t_1 - b_1, \ldots, t_m - b_m)$ o que iria contradizer a observação sobre $I_2(\widetilde{C})$ não possuir elemento de grau 1. □

Quando o invariante do caos é 1, segue do **Corolário** 3.12 que $\mathrm{ht}(I_2(B')) = n-3$. Como $I_2(B') \subseteq I_2(B)$, temos que $\mathrm{ht}(I_2(B)) \geq \mathrm{ht}(I_2(B')) = n-3$. Veremos agora o valor preciso da altura de $I_2(B)$ quando $u = 1$.

Proposição 3.16. Seja $\varphi \in M_{n\times(n-1)}(R)$ uma matriz de entradas lineares em R tal que $\mathrm{ht}(I_1(\varphi)) = 3$ e $\mathrm{ht}(I_{n-1}(\varphi)) = 2$. Se B é a matriz jacobiana dual exibida em 3.11 e $u(\varphi) = 1$, então $\mathrm{ht}(I_2(B)) = n-1$.

Demonstração. Quando $u = 1$, a matriz φ toma a forma

$$\varphi = \left[\begin{array}{c|ccc} x + p_{1,1} & p_{1,2} & \cdots & p_{1,n-1} \\ \hline p_{2,1} & p_{2,2} & \cdots & p_{2,n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n,1} & p_{n,2} & \cdots & p_{n,n-1} \end{array}\right],$$

onde $p_{i,j}$ é uma forma linear em $k[y,z]$ para todo $1 \leq i \leq n$ e $1 \leq j \leq n$. Podemos escrever φ na forma $\varphi = \left[\begin{array}{cccc} x + p_{1,1} & p_{1,2} & \cdots & p_{1,n-1} \\ \hline & & M & \end{array}\right]$. Seja C a única matriz com entradas lineares em $k[t_2, \ldots, t_n]$ satisfazendo

$$[t_2 \quad \cdots \quad t_n] \cdot M = [y \quad z] \cdot C. \tag{3.20}$$

Como $\det(M)$ é o $(n-1)$-menor de φ obtido omitindo-se a primeira linha de φ, então $\det(M)$ é um dos geradores minimais de I. Segue que $\det(M) \neq 0$.

Notemos que $I \subseteq I_{n-2}(M)$. De fato, um dos geradores de I é $\det(M) = I_{n-1}(M) \subseteq I_{n-2}(M)$. Os outros geradores de I são determinantes de matrizes da forma

$$W = \left[\begin{array}{cccc} x + p_{1,1} & p_{1,2} & \cdots & p_{1,n-1} \\ \hline & & N & \end{array}\right],$$

onde N é uma submatriz $(n-2) \times (n-1)$ de M. Expandindo o determinante de W usando a 1ª linha, obtemos que $\det(W) \subseteq I_{n-2}(N) \subseteq I_{n-2}(M)$.

A cadeia de inclusões $I \subseteq I_{n-2}(M) \subseteq (y,z)R$ implica que $\mathrm{ht}(I_{n-2}(M)) = 2$ em $R = k[x,y,z]$. Sejam $I_{n-2}(M) = (g_1, \ldots, g_r)$ e denotemos $J := (g_1, \ldots, g_r)k[y,z] \subseteq k[y,z]$. Mostraremos que J é (y,z)-primário.

Caso 1: $\mathrm{ht}(J)) = 2$.

Inicialmente notemos que se $J \subseteq (y,z)$ é um ideal homogêneo em $k[y,z]$, então (y,z) é o único ideal maximal que contém J. Seja $J = \bigcap_{i=1}^{s} Q_i$ uma decomposição primária minimal de J e consideremos $P_i := \sqrt{Q_i} \in \mathrm{Ass}(k[y,z]/J)$, $i = 1, \ldots, s$. Então

$$2 = \dim(k[y,z]) \geq \mathrm{ht}(P_i) \geq \mathrm{ht}(J) = 2, \quad i \in \{1, \ldots, s\}.$$

Como P_i é ideal primo de altura 2 em um anel de dimensão 2, então P_i é ideal maximal para cada $i = 1, \ldots, s$. Mas (y,z) é o único ideal maximal que contém J, então $P_i = (y,z)$ para todo $i = 1, \ldots, s$. Decorre que $s = 1$ e $\mathrm{Ass}(k[y,z]/J) = \{P_1\} = \{(y,z)\}$.

Caso 2: $\mathrm{ht}(J) = 1$.

Seja $Q \in \mathrm{Spec}(k[y,z])$ tal que $J \subseteq Q$ e $\mathrm{ht}(Q) = 1$. Como $k[x,y]$ é um Domínio de Fatoração Única, segue que Q é um ideal principal. Seja $Q = (q(y,z))$ onde $q(y,z) \in$

$k[y,z]$. Então $I_{n-2}(M) \subseteq q(y,z)k[x,y,z] \subseteq k[x,y,z]$, um absurdo pois $I_{n-2}(M)$ tem altura 2 em $k[x,y,z]$.

Aplicando o Lema 3.15 para as matrizes M e C com $m = n-1$, temos que $\mathrm{ht}(I_2(C)) = n-2$. Como $I_2(C)$ é gerado por formas lineares em $k[t_2,\ldots,t_n]$, segue que a variável t_1 é um elemento regular sobre $I_2(C)$. Assim,

$$\mathrm{ht}(I_2(C),t_1) = \mathrm{ht}(I_2(C)) + 1 = n-1.$$

Pela equação 3.20, a matriz C é uma submatriz jacobiana dual associada a M. Temos então que

$$\begin{aligned} C &= \begin{bmatrix} 0 & \sum\limits_{j=2}^{n}\left(\dfrac{dp_{j,1}}{dy}\right)t_j & \sum\limits_{j=2}^{n}\left(\dfrac{dp_{j,1}}{dz}\right)t_j \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \sum\limits_{j=2}^{n}\left(\dfrac{dp_{j,n-1}}{dy}\right)t_j & \sum\limits_{j=2}^{n}\left(\dfrac{dp_{j,n-1}}{dz}\right)t_j \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & \ell_{1,2} - \left(\dfrac{dp_{1,1}}{dy}\right)t_1 & \ell_{1,3} - \left(\dfrac{dp_{1,1}}{dz}\right)t_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ell_{n-1,2} - \left(\dfrac{dp_{n-1,2}}{dy}\right)t_1 & \ell_{n-1,3} - \left(\dfrac{dp_{n-1,3}}{dz}\right)t_1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Seja D a submatriz de B^T definida por

$$D := \begin{bmatrix} \ell_{1,2} & \ell_{2,2} & \cdots & \ell_{u,2} & \ell_{u+1,2} & \cdots & \ell_{n-1,2} \\ \ell_{1,3} & \ell_{2,3} & \cdots & \ell_{u,3} & \ell_{u+1,3} & \cdots & \ell_{n-1,3} \end{bmatrix}.$$

Os geradores de $I_2(C)$ são da forma

$$\begin{vmatrix} \ell_{i,2} & \ell_{j,2} \\ \ell_{i,3} & \ell_{j,3} \end{vmatrix} + Lt_1.$$

onde $L \in k[t_1,\ldots,t_n]$. Logo, $(I_2(C),t_1) \subseteq (I_2(D),t_1)$. Reciprocamente, $(I_2(D),t_1) \subseteq (I_2(C),t_1)$. Portanto, $\mathrm{ht}(I_2(D),t_1) = \mathrm{ht}(I_2(C),t_1) = n-1$.

Consideremos o conjunto $\mathcal{L} := \{\ell_{2,2},\ldots,\ell_{2,n-1},\ell_{2,3},\ldots,\ell_{n-1,3}\}$ formado pelas entradas da matriz

$$B' = \begin{bmatrix} \ell_{2,2} & \cdots & \ell_{2,n-1} \\ \ell_{2,3} & \cdots & \ell_{3,n-1} \end{bmatrix},$$

que pela **Proposição** 3.11 é uma matriz 1-genérica. Pela **Proposição** 1.6, temos que o subespaço vetorial $\langle\mathcal{L}\rangle \subseteq k[t_1,\ldots,t_n]$ gerado por $\mathcal{L}$ satisfaz $\dim_k(\langle\mathcal{L}\rangle) \geq (n-2)+2-1 = n-1$. Como ideais gerados por formas lineares são primos, então $(\mathcal{L})$ é um ideal primo e $\mathrm{ht}((\mathcal{L})) = \dim_k(\langle\mathcal{L}\rangle) \geq n-1$.

Os menores 2×2 da matriz jacobiana dual B associada a φ

$$B = \begin{bmatrix} t_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \ell_{1,2} & \ell_{2,2} & \cdots & \ell_{u,2} & \ell_{u+1,2} & \cdots & \ell_{n-1,2} \\ \ell_{1,3} & \ell_{2,3} & \cdots & \ell_{u,3} & \ell_{u+1,3} & \cdots & \ell_{n-1,3} \end{bmatrix}^T = \left[\begin{array}{cccc} t_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline & & & \\ & D & & \\ & & & \end{array}\right]^T$$

são de três formas possíveis: $\begin{vmatrix} \ell_{i,2} & \ell_{j,2} \\ \ell_{i,3} & \ell_{j,3} \end{vmatrix}$, $\ell_{i,2}t_1$ e $\ell_{j,3}t_1$ com $1 \leq i,j \leq n-1$. Com isto obtemos que $I_2(B) = (I_2(D), t_1\mathcal{L})$.

Por definição do conjunto $\mathcal{L}$, temos que $I_2(D) \subseteq (\mathcal{L})$, então $(I_2(D),\mathcal{L}) = (\mathcal{L})$ e $\mathrm{ht}(I_2(D),\mathcal{L}) = \mathrm{ht}((\mathcal{L})) \geq n-1$. Resumindo os cálculos acima, temos que

$$\mathrm{ht}(I_2(D), t_1) \geq n-1, \qquad \mathrm{ht}(I_2(D),\mathcal{L}) \geq n-1, \qquad I_2(B) = (I_2(D), t_1\mathcal{L}).$$

Todo ideal primo contendo $I_2(B)$ tem que conter $(I_2(D), t_1)$ ou $(I_2(D),\mathcal{L})$. Isto é suficiente para concluirmos que $\mathrm{ht}(I_2(B)) \geq n-1$. Como $I_2(B)$ é gerado por formas de grau 2, então não pode ser um ideal maximal. Logo, $\mathrm{ht}(I_2(B)) = n-1$. □

Sejam $f_1,\ldots,f_n$ os geradores de $I := I_{n-1}(\varphi)$. No capítulo 2 observamos que o ideal de apresentação da álgebra simétrica de I é o ideal $I_1([t_1 \cdots t_n]\cdot\varphi)$, que naturalmente está contido no ideal de apresentação da álgebra de Rees $\mathcal{J}$ de I. Ainda no mesmo capítulo, na **Proposição** 2.3 mostramos que $\mathcal{F}(I) \simeq k[f_1,\ldots,f_n]$. Então existe um homomorfismo sobrejetor $k[t_1,\ldots,t_n] \to \mathcal{F}(I), t_i \mapsto f_i$. O núcleo $\mathcal{Q}$ deste homomorfismo é chamado de *ideal de apresentação de $\mathcal{F}(I)$*. Podemos perceber que $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{I}$. Portanto, $(I_1([t_1 \cdots t_n]\cdot\varphi),\mathcal{Q}) \subseteq \mathcal{I}$. Quando ocorre a igualdade, dizemos que $\mathcal{R}_R(I)$ *é do tipo fibra* (ou que I é do tipo fibra).

Teorema 3.17. *Sejam $R = k[x,y,z]$ um anel de polinômios e $\varphi \in M_{n\times(n-1)}(R)$ uma matriz com entradas lineares em R tal que* $\mathrm{ht}(I) = 2$ *e* $\mathrm{ht}(I_1(\varphi)) = 3$. *Suponhamos que $u(\varphi) = 1$. Então temos que*

(a) Seja Q o único ideal maximal obtido na **Proposição** *3.4 (a) tal que*

$$\{Q\} = \mathrm{Min}(R/I_2(\varphi)) = \cdots = \mathrm{Min}(R/(I_{n-2}(\varphi))).$$

Se P é um primo associado de I diferente de Q, então I_Q é interseção completa.

(b) Consideremos Q como no item acima. Existem $g_1,\ldots,g_r \in Q_Q^{n-2}\backslash Q_Q^{n-1}$ e

$g_{r+1}, \ldots, g_{n-1} \in Q_Q^{n-1} \backslash Q_Q^n$, para algum $r \in \{1, \ldots, n-1\}$, tais que

$$I_Q = (g_1, \ldots, g_r, g_{r+1}, \ldots, g_{n-1}).$$

Além disso, $I_Q = Q_Q^{n-2}$ se, e somente se, $r = n-1$.

(c) A fibra especial $\mathcal{F}(I)$ é isomorfo ao anel de coordenadas homogênas de um normal scroll racional ou de um cone sobre o mergulho de Veronese de $\mathbb{P}^1$. Em particular, $\mathcal{F}(I)$ é Cohen-Macaulay, tem grau minimal e $r(I) \leq 1$.

(d) A álgebra de Rees $\mathcal{R}_R(I)$ é Cohen-Macaulay.

(e) A álgebra de Rees $\mathcal{R}_R(I)$ é do tipo fibra e normal.

Demonstração.

(a) Pela **Proposição** 3.4 (b), temos que $\mu(I_P) \leq 2$. Como P é um ideal primo e contém I, então $\mathrm{ht}(I) \leq \mathrm{ht}(I_P)$. Segue que

$$2 = \mathrm{ht}(I) \leq \mathrm{ht}(I_P) \leq \mu(I_P) \leq 2.$$

Portanto, $\mathrm{ht}(I_P) = 2 = \mu(I_P)$.

(b) Efetuando mudança de variáveis se necessário, podemos supor que $Q = (y, z)$. Como $u = 1$, a matriz φ admite representação

$$\varphi = \left[\begin{array}{c|ccc} x + p_{1,1} & p_{1,2} & \cdots & p_{1,n-1} \\ \hline p_{2,1} & & & \\ \vdots & & H & \\ p_{n,1} & & & \end{array}\right]$$

com $p_{i,j} \in k[y,z]$ para quaisquer $i \in \{1, \ldots, n\}$ e $j \in \{1, \ldots, n-1\}$ e H uma matriz $(n-1) \times (n-2)$ de entradas lineares em $k[y,z]$. Para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, seja f_i o i-ésimo gerador de I obtido omitindo-se a i-ésima linha de φ. Usando o teorema de Laplace para calcular $f_1, \ldots, f_n$ usando sempre a primeira coluna, podemos escrever

$$\begin{cases} f_1 &= \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^j p_{j+1,1} \Delta_j \\ f_2 &= (x + p_{1,1})\Delta_1 + D_2 \\ & \vdots \\ f_n &= (x + p_{1,1})\Delta_{n-1} + D_n \end{cases} \tag{3.21}$$

onde Δ_i é o $(n-2)$-menor de H omitindo-se a i-ésima linha de H e $D_{i+1} \in Q^{n-1}$ para todo $i \in \{1, \ldots, n-1\}$. Como $x + p_{1,1} \notin Q$, então $\frac{x+p_{1,1}}{1}$ é uma unidade de R_Q. Mostraremos agora que $f_1/1$ é desnecessário para gerar I_Q.

Lema 3.18. Sejam $X = (x_{i,j})$ uma matriz $n \times (n-1)$ com entradas em um anel A e L_i o menor maximal de X obtido omitindo-se a i-ésima linha de X. Se $x_{1,1}$ é uma unidade de A, então $L_1 \in (L_2, \ldots, L_n)$.

Demonstração. Para cada par ordenado $(i,j) \in \{1, \ldots, n\} \times \{1, \ldots, n\}$ com $i \neq j$, seja $L_{(i,j)}$ o $(n-2)$-menor de φ obtido omitindo-se de X: a i-ésima e a j-ésima linha, e a primeira coluna. Naturalmente, $L_{(i,j)} = L_{(j,i)}$. Expandindo os determinantes sempre pela primeira coluna de φ, podemos escrever $L_1, \ldots, L_n$ como

$$\begin{aligned}
L_1 &= x_{2,1}L_{(1,2)} - x_{3,1}L_{(1,3)} + \cdots + (-1)^n x_{n,1}L_{(1,n)} \\
L_2 &= x_{1,1}L_{(2,1)} - x_{3,1}L_{(2,3)} + \cdots + (-1)^n x_{n,1}L_{(2,n)} \\
L_3 &= x_{1,1}L_{(3,1)} - x_{2,1}L_{(3,2)} + x_{4,1}L_{(3,4)} + \cdots + (-1)^n x_{n,1}L_{(3,n)} \\
&\vdots \\
L_n &= x_{1,1}L_{(n,1)} + \cdots + (-1)^{n-1} x_{n,1}L_{(n,n-1)}.
\end{aligned}$$

Verifica-se que

$$L_1 = (x_{2,1}x_{1,1}^{-1})L_2 - \cdots + (-1)^n (x_{n,1}x_{1,1}^{-1})L_n.$$

□

Pelo lema acima e pelo **Lema** 3.2 (b), I_Q é minimamente gerado por $f_2/1, \ldots, f_n/1$. Como $f_1 \neq 0$, então existe $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ tal que $\Delta_i \neq 0$. Para cada $i \in \{1, \ldots, n-1\}$, seja $g_i := \frac{f_{i+1}}{1}$. Reordenando se necessário, podemos supor que

$$\begin{aligned}
G :&= \{i \mid \Delta_i \neq 0\} = \{1, \ldots, r\} \\
G' :&= \{i \mid \Delta_i = 0\} = \{r+1, \ldots, n-1\}.
\end{aligned}$$

Como $\Delta_i, D_i \in Q^{n-2}$, então $g_i \in Q_Q^{n-2}$ para todo i. Notemos que

$$\begin{aligned} g_i \in Q_Q^{n-1} &\iff \exists\, s \in R\backslash Q \text{ tal que } sf_{i+1} \in Q^{n-1} \\ &\iff s(x+p_{1,1})\Delta_i + sD_{i+1} \in Q^{n-1} \\ &\iff s(x+p_{1,1})\Delta_i \in Q^{n-1} \\ &\iff sx\Delta_i \in Q^{n-1} \\ &\iff \Delta_i = 0 \\ &\iff i \in G' \end{aligned}$$

Com isto, temos que $g_1, \ldots, g_r \in Q_Q^{n-2}\backslash Q_Q^{n-1}$ e $g_{r+1}, \ldots, g_{n-1} \in Q_Q^{n-1}$. É suficiente mostrarmos que $g_{r+1}, \ldots, g_{n-1} \notin Q_Q^n$, ou equivalentemente, $D_{r+2}, \ldots, D_n \notin Q^n$. Mas isso é imediato uma vez que D_i é uma forma de grau $n-1$ nas variáveis y e z, portanto, $D_i \notin Q^n$ para todo $i \in \{r+2, \ldots, n\}$.

Para provarmos a segunda parte, comecemos notando que se $I_Q = Q_Q^{n-2}$, então $g_1, \ldots, g_{n-1}$ geram minimamente Q_Q^{n-2} uma vez que $\mu(Q_Q^{n-2}) = n-1$. Como Q_Q^{n-2} é gerado por formas de grau $n-2$, então, entre os geradores de Q_Q^{n-2} não pode haver forma de grau $n-1$. Deste modo, $g_1, \ldots, g_{n-1} \in Q_Q^{n-2}\backslash Q_Q^{n-1}$, ou seja, $r = n-1$.

Por outro lado, consideremos os k-espaços vetoriais $I_Q, Q_Q^{n-2}, R_Q/I_Q$ e R_Q/Q_Q^{n-2}. Temos que $Q_Q^{n-2} = \left(\frac{y^{n-2}}{1}, \frac{y^{n-3}z}{1}, \ldots, \frac{yz^{n-3}}{1}, \frac{z^{n-2}}{1}\right)$ é um k-espaço vetorial de dimensão $n-1$ gerado por formas de grau $n-2$. Analogamente, $I_Q = \left(\frac{f_2}{1}, \ldots, \frac{f_n}{1}\right)$ também é um espaço vetorial sobre k de dimensão $n-1$, pois $f_2, \ldots f_n$ são linearmente independentes sobre k e assim permanecem sob localização. Se $r = n-1$, então as formas $f_2/1, \ldots, f_n/1$ são de grau $n-2$, portanto, podemos considerar a sequência exata

$$0 \longrightarrow \frac{Q_Q^{n-2}}{I_Q} \longrightarrow \frac{R_Q}{I_Q} \longrightarrow \frac{R_Q}{Q_Q^{n-2}} \longrightarrow 0.$$

Obtemos então

$$\dim_k\left(\frac{Q_Q^{n-2}}{I_Q}\right) = \dim_k\left(\frac{R_Q}{I_Q}\right) - \dim_k\left(\frac{R_Q}{Q_Q^{n-2}}\right) = 0.$$

Concluimos então que $Q_Q^{n-2} = I_Q$.

(c) Como I tem analytic spread máximo, então $\dim(\mathcal{F}(I)) = \ell(I) = \dim(R) = 3$. Logo, um ideal de apresentação de $\mathcal{F}(I)$ tem codimensão $\dim(R) - 3 = n-3$. Pela **Proposição** 3.11 e o Teorema 3.13, temos que $\mathcal{F}(I)$ é gerado pelos 2-menores de uma matriz Λ 1-genérica $2 \times (n-2)$ de entradas lineares. Por [12, Proposition 9.4 e Proposition 9.12], a matriz Λ é conjugada a uma matriz Λ' tal que $I_2(\Lambda')$ gera um normal scroll racional ou um cone sobre a curva normal racional standard em $\mathbb{P}^{n-2}$, ambas são variedade de grau mínimo. Portanto, $\mathcal{F}(I)$ é Cohen-Macaulay. Adicionalmente, pela **Proposição** 1.4, temos que $r(I) \leq 1$.

(d) Pelo item(c) acima, sabemos que $\mathcal{F}(I)$ é Cohen-Macaulay. Se mostrarmos que $r(I_P) \leq 1$ para todo primo associado de R/I, seguirá do Teorema 3.10 que $\mathcal{R}_R(I)$ é Cohen-Macaulay.

Se P é um primo associado de I diferente de Q, então pelo item (a), I_P é interseção completa. Portanto, temos que $r(I_P) \leq 1$ e, além disso, pelo Teorema 3.9, $\lambda(R_P \backslash I_P^t)$ é uma função polinomial para todo $t \geq 1$. Assim como no Teorema 3.10, $\mathcal{F}(I)$ é Cohen-Macaulay, então $H(\mathcal{F}(I), t)$ é polinomial para $t \geq 1$ e pela equação (3.10) temos que

$$\lambda(R_Q/I_Q^t) = \binom{nt+1}{2} - H(\mathcal{F}(I), t) - \sum_{P \in \operatorname{Min}(I)} \lambda(R_P/I_P^t).$$

Segue que $\lambda(R_Q/I_Q^t)$ é polinomial para todo $t \geq 1$. Notemos que $\dim(R_Q) = \operatorname{ht}(Q) = 2$, então, podemos escrever

$$\lambda(R_Q/I_Q) = e_0\binom{1+2-1}{2} - e_1\binom{1+2-2}{1} = e_0 - e_1.$$

Pelo Teorema 3.9, temos que $r(I_Q) \leq 1$.

(e) Iniciaremos demonstrando que $\mathcal{I} := \Big(I_1\big([x\ y\ z] \cdot B^T\big), I_2(B')\Big)$ é igual a $\mathcal{J}$, onde $\mathcal{J}$ é o ideal de apresentação da álgebra de Rees $\mathcal{R}_R(I)$. Como $\mathcal{J}$ é um ideal primo de altura

$$\operatorname{ht}(\mathcal{J}) = \dim(R[t_1, \ldots, t_n]) - \dim \mathcal{R}_R(I) = (n+3) - 4 = n-1$$

então é suficiente mostrarmos que $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{J}$ e que $\mathcal{I}$ também um ideal primo de altura $n-1$.

Por (3.7), a matriz B^T satisfaz a equação

$$[t_1\ \cdots\ t_n] \cdot \varphi = [x\ y\ z] \cdot B^T.$$

Então $I_1([x\ y\ z] \cdot B^T) = I_1([t_1\ \cdots\ t_n] \cdot \varphi)$. Como cada coluna de φ é uma sizígia de I, então $I_1([t_1\ \cdots\ t_n] \cdot \varphi) \subseteq \mathcal{J}$.

Seja $\widetilde{B}$ uma submatriz 3×3 de B^T. Ainda por (3.7), temos que $I_1([x\ y\ z] \cdot \widetilde{B}) \subseteq$

$I_1([x\ y\ z] \cdot \widetilde{B}) \subseteq I_1([x\ y\ z] \cdot B^T) \subseteq \mathcal{J}$. Portanto,

$$I_1([x\ y\ z] \cdot \det(\widetilde{B})) \subseteq I_1([x\, y\, z] \cdot \widetilde{B} \cdot \operatorname{adj}(\widetilde{B})) \subseteq \mathcal{J}.$$

Como nenhuma das variáveis x, y, z pertence a $\mathcal{J}$, que é um ideal primo, então $\det(\widetilde{B}) \in \mathcal{J}$. Como $\widetilde{B}$ foi tomada como uma submatriz 3×3 qualquer de B^T, então $I_3(B^T) \subseteq \mathcal{J}$. Notemos que os geradores de $I_3(B^T)$ são da forma

$$\begin{vmatrix} t_1 & 0 & 0 \\ \ell_{1,2} & \ell_{i,2} & \ell_{j,2} \\ \ell_{1,3} & \ell_{j,3} & \ell_{j,3} \end{vmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \ell_{i,2} & \ell_{j,2} & \ell_{r,2} \\ \ell_{i,3} & \ell_{j,3} & \ell_{r,3} \end{vmatrix}$$

com $i, j, r \in \{1, \ldots, n-1\}$. Temos que $t_1 I_2(B') = I_3(B^T) \subseteq \mathcal{J}$. Mas $t_1 \notin \mathcal{J}$, logo, $I_2(B') \subseteq \mathcal{J}$. Concluímos que $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{J}$. Por outro lado, os geradores de $\mathcal{I}$ são da forma

$$t_1 x + \ell_{1,2} y + \ell_{1,3} z, \qquad \ell_{i,2} y + \ell_{i,3} z, \qquad \begin{vmatrix} \ell_{i,2} & \ell_{j,2} \\ \ell_{i,3} & \ell_{j,3} \end{vmatrix}. \tag{3.22}$$

com $i \in \{2, \ldots, n-1\}$. Decorre que $\mathcal{I} = (t_1 x + \ell_{1,2} y + \ell_{1,3} z, I_2(B''))$ onde

$$B'' := \begin{bmatrix} z & \ell_{2,2} & \cdots & \ell_{2,n-1} \\ -y & \ell_{2,3} & \cdots & \ell_{3,n-1} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} z & \\ -y & B' \end{array} \right]. \tag{3.23}$$

A matriz B'' está dividida em dois blocos de Hankel (catalecticantes) independentes, isto é, cada bloco possui variáveis distintas. Então B'' é uma matriz 1-genérica. Pelo Teorema 1.8, segue que $I_2(B'')$ é um ideal primo Cohen-Macaulay de altura $(n-1) - 2 + 1 = n - 2$. Mas $I_2(B'')$ é gerado por formas de grau 2 nas variáveis $y, z, t_1, \ldots, t_n$, então $t_1 x + \ell_{2,1} y + \ell_{3,1} z$ não é divisor de zero de $I_2(B'')$ por causa da variável x. Por conseguinte, $\mathcal{I}$ é Cohen-Macaulay e

$$\operatorname{ht}(\mathcal{I}) = \operatorname{ht}(t_1 x + \ell_{1,2} y + \ell_{1,3} z, I_2(B'')) = \operatorname{ht}(I_2(B'')) + 1 = n - 1.$$

Mostraremos agora que $\frac{R[t_1,\ldots,t_n]}{\mathcal{I}}$ é um anel normal, e assim decorrerá a primalidade de $\mathcal{I}$. Para isto, mostraremos que as condições de Serre (R_1) e (S_2) são válidas para $A := \frac{R[t_1,\ldots,t_n]}{\mathcal{I}}$. Como A é Cohen-Macaulay, segue que S_2 é naturalmente satisfeita. Resta mostrar a condição (R_1). Para isto, usaremos [22, Proposition 3.5.9]. De fato, $\mathcal{I}$ é um ideal Cohen-Macaulay, então por [22, Corollary 2.2.4], $\mathcal{I}$ é unmixed. Em particular, $\mathcal{I}$ é unmixed de altura $n-1$. Provaremos que $\operatorname{ht}(J, \mathcal{I}) \geq (n-1) + 2 = n + 1$, onde J é o ideal jacobiano de $\mathcal{I}$ definido em [22].

Seja Θ a matriz jacobiana de $\mathcal{I}$. Para cada $i, j \in \{2, \dots, n-1\}$, sejam $\lambda_i := \ell_{i,2}y + \ell_{i,3}z$ e $\delta_{i,j} := \ell_{i,2}\ell_{j,3} - \ell_{j,2}\ell_{i,3}$. Por (3.22), a matriz jacobiana de $\mathcal{I}$ tem a forma

$$
\begin{aligned}
\Theta &= \left[\begin{array}{ccc|ccc}
t_1 & \ell_{1,2} & \ell_{1,3} & \frac{d\ell_{1,2}}{dt_1}y + \frac{d\ell_{1,3}}{dt_1}z & \cdots & \frac{d\ell_{1,2}}{dt_n}y + \frac{d\ell_{1,3}}{dt_n}z \\
\frac{d\lambda_2}{dx} & \frac{d\lambda_2}{dy} & \frac{d\lambda_2}{dz} & \frac{d\lambda_2}{t_1} & \cdots & \frac{d\lambda_2}{dt_n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\frac{d\lambda_{n-1}}{dx} & \frac{d\lambda_{n-1}}{dy} & \frac{d\lambda_{n-1}}{dz} & \frac{d\lambda_{n-1}}{t_1} & \cdots & \frac{d\lambda_{n-1}}{dt_n} \\
\hline
\frac{d\delta_{2,3}}{dx} & \frac{d\delta_{2,3}}{dy} & \frac{d\delta_{2,3}}{dz} & \frac{d\delta_{2,3}}{t_1} & \cdots & \frac{\delta_{2,3}}{dt_n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\frac{d\delta_{n-1,n-2}}{dx} & \frac{d\delta_{n-1,n-2}}{dy} & \frac{d\delta_{n-1,n-2}}{dz} & \frac{d\delta_{n-1,n-2}}{t_1} & \cdots & \frac{d\delta_{n-1,n-2}}{dt_n}
\end{array}\right] \\
&= \left[\begin{array}{ccc|ccc}
t_1 & \ell_{1,2} & \ell_{1,3} & \frac{dp_{1,1}}{dy}y + \frac{dp_{1,1}}{dy}z & \cdots & \frac{dp_{1,1}}{dy}y + \frac{dp_{1,1}}{dz}z \\
0 & \ell_{1,2} & \ell_{1,3} & \frac{dp_{1,2}}{dy}y + \frac{dp_{1,2}}{dz}z & \cdots & \frac{dp_{n,2}}{dy}y + \frac{dp_{n,2}}{dz}z \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & \ell_{n-1,2} & \ell_{n-1,3} & \frac{dp_{1,n-1}}{dy}y + \frac{dp_{1,n-1}}{dz}z & \cdots & \frac{dp_{n,n-1}}{dy}y + \frac{dp_{n,n-1}}{dz}z \\
\hline
 & & & \frac{d\delta_{2,3}}{dt_1} & \cdots & \frac{\delta_{2,3}}{dt_n} \\
 & \mathbf{0} & & \vdots & \ddots & \vdots \\
 & & & \frac{d\delta_{n-1,n-2}}{dt_1} & \cdots & \frac{\delta_{n-1,n-2}}{dt_n}
\end{array}\right] \\
&= \left[\begin{array}{c|c}
B & \varphi^T \\
\hline
\mathbf{0} & \Theta'
\end{array}\right].
\end{aligned}
$$

onde Θ' é a matriz jacobiana do ideal $I_2((B')^T) = I_2(B')$. Por definição, $J = I_{n-1}(\Theta)$. É suficiente provarmos que $(I_{n-3}(\Theta') \cdot I_2(B), I_2(B'), I) \subseteq (J, \mathcal{I})$ e que $\mathrm{ht}(I_{n-3}(\Theta') \cdot I_2(B), I_2(B'), I) \geq n+1$.

Inicialmente, notemos que $(I_{n-3}(\Theta') \cdot I_2(B), I_2(B'), I) \subseteq J$. De fato, temos as inclusões $I_2(B') \subseteq (t_1x + \ell_{1,2}y + \ell_{1,3}z, I_2(B')) = \mathcal{I}$ e $I = I_{n-1}(\varphi) \subseteq I_{n-1}(\Theta)$, onde a segunda inclusão decorre de φ^T ser submatriz de Θ. Para verificarmos que $I_{n-3}(\Theta') \cdot I_2(B) \subseteq I_{n-1}(\Theta)$, consideremos D uma submatriz 2×2 de B e F uma submatriz $(n-3) \times (n-3)$ de Θ'. Então existe uma submatriz $(n-1) \times (n-1)$ de Θ da forma

$$
\Gamma = \left[\begin{array}{c|c}
D & E \\
\hline
\mathbf{0} & F
\end{array}\right],
$$

onde E é uma submatriz de φ^T. Como $\det(D) \cdot \det(F)$ é um gerador de $I_{n-3}(\Theta') \cdot I_2(B)$ e $\det(D) \cdot \det(F) = \det(\Gamma) \in I_{n-1}(\Theta)$, segue que $I_{n-3}(\Theta') \cdot I_2(B) \subseteq I_{n-1}(\Theta)$. Isto conclui que $(I_{n-3}(\Theta') \cdot I_2(B), I_2(B'), I) \subseteq (J, \mathcal{I})$. Mostraremos adiante que o ideal $(I_{n-3}(\Theta') \cdot I_2(B), I_2(B'), I)$ tem altura pelo menos $n+1$.

Seja P um ideal primo de $R[t_1, \ldots, t_n]$ contendo $(I_{n-3}(\Theta') \cdot I_2(B), I_2(B'), I)$. Como $I_{n-3}(\Theta') \cdot I_2(B') \subseteq P$, então $I_{n-3}(\Theta') \subseteq P$ ou $I_2(B) \subseteq P$. Se $I_{n-3}(\Theta') \subseteq P$, então P contém o ideal $(I_{n-3}(\Theta'), I_2(B'))$. Pelo **Corolário** 3.12, o ideal $I_2(B')$ tem altura $n-3$. Como Θ' é a matriz jacobiana de $I_2(B')$, então $I_{n-3}(\Theta')$ é o ideal jacobiano de $I_2(B')$. Assim, temos que $\mathrm{ht}(I_{n-3}(\Theta'), I_2(B')) \geq n+1$, portanto, $\mathrm{ht}(P) \geq n+1$.

Por outro lado, se P contém $I_2(B)$, então P contém o ideal $(I, I_2(B))$. Pela **Proposição** 3.16, temos que $\mathrm{ht}(I_2(B)) = n-1$. Como I é gerado por formas nas variáveis x, y, z e $I_2(B)$ é gerado por formas em $t_1, \ldots, t_n$, então $\mathrm{ht}(I_2(B), I) \geq (n-1) + 2 = n+1$. Segue que $\mathrm{ht}(P) \geq n+1$.

Como $\mathrm{ht}(P) \geq n+1$ para todo ideal primo contendo $(I_{n-3}(\Theta') \cdot I_2(B), I_2(B'), I)$, então

$$\mathrm{ht}(I_{n-3}(\Theta') \cdot I_2(B), I_2(B'), I) \geq n+1$$

como queríamos demonstrar.

$\square$

Referências Bibliográficas

[1] Andrade, J. F., & Simis, A., *Tópicos de Álgebra Comutativa*, IMPA (1981).

[2] Bermejo, I., & Gimenez, P., *On Castelnuovo-Mumford Regularity of Projective Curves*, Proceedings of the American Mathematical Society 128 (2000), 1293-1299.

[3] Bruns, W., & Herzog, J., *Cohen Macaulay Rings*, Cambridge University Press (1998).

[4] Bruns, W., & Vetter, U., *Determinantal Rings*, Lecture Notes in Mathematics 1327, Springer-Verlag.

[5] Cortadellas, Z., & Zarzuela, S., *Burch's inequality and the depth of the blow up rings of an ideal*, Journal of Pure and Applied Algebra 157 (2001) 183-204.

[6] Doria, A., & Hassanzadeh, S., & Simis, A., *A characteristic free criterion of birationality*, Advances in Mathematics 230 (2012) 390-413.

[7] Doria, A., & Ramos Z. & Simis, A., *Linearly presented perfect ideals of codimension 2 in three variables*, Journal of Algebra 512 (2018) 216-251.

[8] Eisenbud, D., *Commutative Algebra with a View Toward Algebraic Geometry*, Springer-Verlag

[9] Eisenbud, D., *Linear sections of determinantal varieties*, American Journal of Mathematics 110 (1988), 541-575.

[10] Eisenbud, D., *The Geometry of Syzygies - A second course in Commutative Algebra and Algebraic Geometry*, University of California, Berkeley (2005).

[11] Garrousian, M., & Simis, A., & Tohaneanu, S., *A blowup algebra of hyperplane arrangements*, Algebra & Number Theory (2017).

[12] Harris, J., *Algebraic Geometry - A first course*, Springer-Verlag.

[13] Hartshorne, R., *Algebraic Geometry*, Graduate Texts in Mathematics, Springer.

[14] Hochster, M., & Eagon, J., *A class of of perfect determinantal ideals*, Bulletin of American Mathematical Society 76 (1970), 1026-1029.

[15] Huneke, Craig., *Hilbert functions and symbolic powers*, The Michigan Mathematical Journal. 34. (1987).

[16] Kunz, Ernst, *Introduction to commutative algebra and algebraic geometry*, Basel; Berlin: Birkhäuser (1985)

[17] Matsumura, H., *Commutative ring theory*, Cambridge University Press.

[18] Ramos, Z., & Simis, A., *Homaloidal nets and ideals of fat points II: subhomaloidal nets*, International Journal of Algebra and Computation, Vol. 27 (2017), No. 06, pp. 677-715.

[19] Ramos, Z. & Simis, A., *Symbolic powers of perfect ideals of codimension 2 and birational maps*, Journal of Algebra 413 (2014), 153-197.

[20] Swanson, I., & Huneke, Craig., *Integral Closure of Ideals, Rings, and Modules*, London Mathematical Society, Lecture Note Series 336.

[21] Vasconcelos, W., *Integral Closure*, Springer Monographs in Mathematics.

[22] Villareal, R., *Monomial Algebras*, Marcel Dekker, Inc, New York, Basel.