



Universidade Federal da Paraíba

Centro de Tecnologia

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica

-Mestrado-Doutorado-

**ANÁLISE HÍBRIDA DA MAGNETOHIDRODINÂMICA LAMINAR
EM UM ESCOAMENTO COM ENTRADA TIPO DEGRAU**

por

Gustavo Elia Assad

*Tese de Doutorado apresentada à Universidade Federal da Paraíba para
obtenção do Título de Doutor.*

João Pessoa – Paraíba

Dezembro, 2021

GUSTAVO ELIA ASSAD

**ANÁLISE HÍBRIDA DA MAGNETOHIDRODINÂMICA LAMINAR
EM UM ESCOAMENTO COM ENTRADA TIPO DEGRAU**

Tese de doutorado apresentada ao curso de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal da Paraíba, em cumprimento às exigências para obtenção do Título de Doutor.

Orientador: prof. Dr. João Alves de Lima

Coorientador: prof. Dr. Carlos Antônio Cabral dos Santos

João Pessoa – Paraíba

Dezembro, 2021

A844a Assad, Gustavo Elia.

Análise híbrida da magnetohidrodinâmica laminar em um escoamento com entrada tipo degrau / Gustavo Elia Assad. - João Pessoa, 2021.
157 f.

Orientação: João Alves de Lima.

Coorientação: Carlos Antônio Cabral dos Santos.

Tese (Doutorado) - UFPB/CT/PPGEM.

1. Engenharia mecânica. 2. Magnetohidrodinâmica (MHD). 3. Equações de Navier-Stokes. 4. Transformação Integral (GIT). 5. Backward-facing step. I. Lima, João Alves de. II. Santos, Carlos Antônio Cabral dos. III. Título.

UFPB/BC

CDU 621(043)

**ANÁLISE HÍBRIDA DA MAGNETOHIDRODINÂMICA LAMINAR
EM UM ESCOAMENTO COM ENTRADA TIPO DEGRAU**

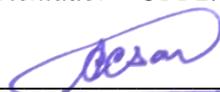
por

Gustavo Elia Assad

Tese aprovada em 28 de dezembro de 2021


Prof. Dr. João Alves de Lima

Orientador – UFPB/CT



Prof. Dr. Carlos Antônio Cabral dos Santos

Coorientador – UFPB/CT



Prof. Dr. Abel Cavalcante Lima Filho

Examinador Interno – UFPB/CT



Prof. Dr. João Nazareno Nonato Quaresma

Quaresma

Examinador Externo – UFPA



Prof. Dr. José Maurício Alves de Matos

Gurgel

Examinador Interno – UFPB/CT



Prof. Dr. Emanuel Negrão de Macêdo

Examinador Externo ao UFPA

Dedico esta tese aos meus pais, Mário (*In memoriam*) e Margarida Assad. Jamais chegaria a este ponto se não tivesse herdado este inestimável lastro de educação, no mais amplo sentido da palavra, deixado a mim e meus queridos irmãos (Rodrigo e André). À minha esposa Fabiane e aos meus filhos, Gabriela e João Pedro. Foram tempos difíceis, vocês foram compreensíveis com minhas angústias, impaciências e horas dedicadas. O amor que nos une é nossa espada, nosso escudo, nossa força.

Este trabalho foi escrito em meio a uma terrível pandemia mundial, onde as comunicações ficaram tacanhas e as dificuldades agigantaram-se. Dedico a todos que sofreram com este tenebroso período e que estão conseguindo superar, transformando suas dores e perdas em grandes ensinamentos.

Agradecimentos

Meus mais profundos e sinceros agradecimentos são destinados:

ao Prof. João Alves de Lima pela orientação constante e pelo aporte computacional dado no desenvolvimento do trabalho. Sempre foi uma honra tê-lo como referência em meu desenvolvimento acadêmico de pós-graduação;

ao Prof. Carlos Antônio Cabral dos Santos, pelas discussões e oportunidades propiciadas. Ao longo do processo percebi o quanto dedica-se à pavimentação da estrada de sucesso trilhada por seus discentes;

aos colegas de doutorado: Alan, Fábio, Jarbson, Pedro, Flávio, Márcio e Igor, pela socialização de vitórias, sofrimentos e conquistas. Um agradecimento especial aos companheiros Dhiego e Marinaldo pelas pacientes e contínuas contribuições. Meus amigos, a todos vocês deixo o meu eterno “Muito obrigado!”;

aos meus alunos que, dia após dia, proporcionam-me a oportunidade de aprender, sempre tive a clareza de que ensinar é um ato de profunda aprendizagem. Aos meus bons amigos... Como são importantes os amigos! Sem estes grandes suleadores de minha essência, jamais teria esta grande alegria de viver e lutar por minhas conquistas. Meus queridos, esta alegria é nossa!

Não sei o que posso parecer para o mundo, mas para mim,
pareço de ter sido uma criança brincando à beira-mar,
divertindo-me em descobrir um seixo mais liso ou uma
concha mais bonita que o normal, enquanto o imenso oceano
da verdade jazia sem ser descoberto diante de mim.

Sir Isaac Newton

ANÁLISE HÍBRIDA DA MAGNETOHIDRODINÂMICA LAMINAR EM UM ESCOAMENTO COM ENTRADA TIPO DEGRAU

O presente trabalho visa estudar, através da chamada Técnica da Transformada Integral Generalizada, o desenvolvimento das interações mútuas entre o escoamento de um fluido eletricamente condutor e um campo magnético externamente aplicado (B_0^*) no interior de um canal com degrau de entrada (*backward-facing step*). O perfil de velocidade de entrada é considerado completamente desenvolvido (tornando-se parabólico para o caso em que $Ha=0$) e será afetado pela geometria do canal. Para mostrar o desempenho da presente técnica, os resultados são comparados criticamente com aqueles obtidos através de métodos puramente numéricos, para diferentes valores dos parâmetros que os governam, à guisa de informação: números de Reynolds, Hartman e Reynolds magnéticos, e altura adimensional do degrau, no caso do “step”. Serão apresentadas formulações com problemas de quarta ordem para o campo de velocidade e, em capítulos distintos, formulações com problemas de autovalor de segunda ordem para o campo magnético, ora com uma única equação em termos de uma função escalar magnética (β), ora com dois problemas separados para as componentes ortogonais B_1 e B_2 . Uma comparação entre os resultados obtidos mostra a melhor recuperação das condições de contorno associadas ao problema original.

Palavras-chave: Magnetohidrodinâmica (MHD), Equações de Navier-Stokes, Transformação Integral (GITT), *backward-facing step*.

HYBRID ANALYSIS OF LAMINAR MAGNETOHYDRODYNAMICS OF A FLOW IN BACKWARD-FACING STEP CHANNEL

The present work aims to study the development of the mutual interactions between a flow of an electrically conductive fluid and an externally applied magnetic field (B_0^*) in a backward-facing step channel. The input velocity profile is considered fully developed (and will be parabolic when $Ha=0$) and will be affected by the channel geometry. To show the performance of the present technique, the results are compared critically with those obtained by purely numerical methods, for different values of the parameters that govern them, for information: Reynolds, Hartman and Reynolds numbers, and dimensionless height of the step, in the case of the " backward-facing step". Formulations with fourth-order problems for the velocity field will be presented and, in different chapters, formulations with second-order eigenvalue problems for the magnetic field, sometimes with a single equation in terms of a magnetic scalar function (β), sometimes with two separate problems for the orthogonal components B_1 and B_2 . A comparison between the results obtained shows the best recovery of the boundary conditions associated with the original problem.

Keywords: Magnetohydrodynamics (MHD), Navier-Stokes Equations, Integral Transforms (GITT), backward-facing step.

Lista de Figuras

CAPÍTULO III

- Figura 3.1 Distribuição de densidade de corrente que atravessa uma superfície S , mostrando o vetor normal $d\mathbf{S}$ formando um ângulo θ com a densidade de corrente \mathbf{J} . 35
- Figura 3.2 Esquema de um circuito fechado (C), através do qual o fluxo magnético varia e induz um campo elétrico ao longo do circuito, gerando uma f.em.. 36

CAPÍTULO IV

- Figura 4.1 Esquema do canal de escoamento MHD retangular de placas paralelas, sendo duas condutoras e duas isolantes, submetido a um campo magnético externo, B_0^* . O degrau de entrada pode variar, $0 < qh^* < h^*$. 43

CAPÍTULO V

- Figura 5.1 perfil de escoamento que mostra condições de contorno homogêneas na direção y , onde aplicar-se-ão os problemas de autovalor auxiliar. 54
- Figura 5.2 (a) Perfil da componente longitudinal e (b) transversal da velocidade em duas posições axiais distintas do canal com degrau de entrada, para $Re=800$ e $Ha=0$. 72
- Figura 5.3 Linhas de corrente no interior do canal para $Re = 100$, $Rem = 1$: a) $Ha = 0$, b) $Ha = 5$, c) $Ha = 10$, d) $Ha = 20$ 73
- Figura 5.4 desenvolvimento do perfil da componente longitudinal da velocidade, para $Rem=1$, $Re=100$ e $Ha = 0, 10$ e 20 . 75
- Figura 5.5 desenvolvimento da componente vertical da velocidade, para $Rem=1$, $Re=100$ e $Ha = 0, 10$ e 20 . 75
- Figura 5.6 desenvolvimento da componente horizontal do campo magnético, para $Rem=1$, $Re=100$ e $Ha = 0, 10$ e 20 . 76

Figura 5.7	desenvolvimento da componente vertical do campo magnético, para $Rem=1$, $Re=100$ e $Ha = 0, 10$ e 20 .	76
Figura 5.8	representação ampliada da componente vertical do campo magnético para $Rem=1$, $Re=100$ e $Ha = 20$.	76
Figura 5.9	desenvolvimento da componente horizontal da força de Lorentz, para $Rem=1$, $Re=100$ e $Ha = 0, 10$ e 20 .	78
Figura 5.10	desenvolvimento da componente horizontal da força de Lorentz, para $Rem=1$, $Re=100$ e $Ha = 0, 10$ e 20 .	78
Figura 5.11	desenvolvimento da densidade de corrente, para $Rem=1$, $Re=100$ e $Ha = 0, 10$ e 20 .	78
Figura 5.12	desenvolvimento da componente longitudinal da velocidade, para $Re = 20$, $Ha = 2$ e diferentes Rem .	79
Figura 5.13	desenvolvimento da componente vertical da velocidade, para $Re = 20$, $Ha = 2$ e diferentes Rem .	79
Figura 5.14	função escalar magnética (β) para $Ha=2$, $Re=20$ e $Rem=10, 25$ e 50	80
Figura 5.15	desenvolvimento da componente horizontal do campo magnético, para $Re = 20$, $Ha = 2$ e diferentes Rem .	81
Figura 5.16	desenvolvimento da componente vertical do campo magnético, para $Re = 20$, $Ha = 2$ e diferentes Rem .	81
Figura 5.17	desenvolvimento da componente horizontal da força de Lorentz, para $Re = 20$, $Ha = 2$ e diferentes Rem .	82
Figura 5.18	desenvolvimento da componente vertical da força de Lorentz, para $Re = 20$, $Ha = 2$ e diferentes Rem .	82
Figura 5.19	desenvolvimento da densidade de corrente, para $Re = 20$, $Ha = 2$ e diferentes Rem	82

CAPÍTULO VI

Figura 6.1	Vorticidade para $X=7$ e $X=15$ comparando resultados de Gartling (1990) e o presente trabalho	102
Figura 6.2	Perfil de velocidade para $x=5$, $Re=20$, $Ha=2$ e $Rem=25$, comparando resultados do capítulo 5 com o do 6.	103
Figura 6.3	Componente longitudinal da velocidade na linha central do canal para $Re=100$, $Ha=100$ e $Rem=1$, comparando resultados do capítulo 5 com o do 6.	103
Figura 6.4	Comportamento da componente longitudinal do campo magnético para $x=1$, $Ha=2$, $Re=20$ e $Rem=10$, comparando resultados do capítulo 5 com o do 6.	104
Figura 6.5	Evolução das variáveis independentes transformadas (η) utilizadas no presente trabalho e por Wang(1963).	105
Figura 6.6	Comparação do perfil de velocidade para diversas posições ao longo do canal, entre Assad (2016) e o presente trabalho (Cap. 6), para $Ha=2$, $Re=20$ e $Rem=10$.	106
Figura 6.7	Comparação do desenvolvimento da componente vertical de velocidade para diversas posições ao longo do canal entre Assad (2016) e o presente trabalho (Cap. 6), para $Ha=2$, $Re=20$ e $Rem=10$.	106
Figura 6.8	Comparação do desenvolvimento da componente longitudinal da velocidade ao longo da linha central do canal, entre Assad (2016) e o presente trabalho (Cap. 6), para $Re=20$, $Rem=10$ e $Ha=2$.	107
Figura 6.9	Comparação do desenvolvimento da componente horizontal do campo magnético para diversas posições ao longo do canal, entre Assad (2016) e o presente trabalho (Cap. 6), para $Ha=2$, $Re=20$ e $Rem=10$.	107
Figura 6.10	Comparação do desenvolvimento da componente horizontal do campo magnético para diversas posições ao longo do canal, entre Assad (2016) e o presente trabalho (Cap. 6), para $Ha=20$, $Re=20$ e $Rem=10$.	108
Figura 6.11	Concordância nos valores da componente horizontal do campo magnético, entre Assad (2016) e o presente trabalho (Cap. 6), para $Ha=20$, $Re=20$ e $Rem=10$, quando se faz, na presente formulação, $B1$ x Ha .	108
Figura 6.12	Desenvolvimento da componente longitudinal da velocidade, para $Re = 20$, $Ha = 2$ e diferentes Rem .	109

Figura 6.13	Desenvolvimento da componente vertical da velocidade, para $Re = 20$, $Ha = 2$ e diferentes Rem .	110
Figura 6.14	Desenvolvimento da componente horizontal do campo magnético (B1), para $Re = 20$, $Ha = 2$ e diferentes Rem .	110
Figura 6.15	Desenvolvimento da componente vertical do campo magnético (B2), para $Re = 20$, $Ha = 2$ e diferentes Rem .	111
Figura 6.16	Desenvolvimento da magnitude do campo magnético total, para $Re = 20$, $Ha = 2$ e diferentes Rem .	111
Figura 6.17	Desenvolvimento da densidade de corrente, para $Re = 20$, $Ha = 2$ e diferentes Rem .	112
Figura 6.18	Desenvolvimento da componente horizontal da força de Lorentz volumétrica, para $Re = 20$, $Ha = 2$ e diferentes Rem .	112
Figura 6.19	Desenvolvimento da componente vertical da força de Lorentz volumétrica, para $Re = 20$, $Ha = 2$ e diferentes Rem .	113
Figura 6.20	Desenvolvimento da componente longitudinal da velocidade, para $Re = 100$, $Rem = 1$ e diferentes Ha .	114
Figura 6.21	Desenvolvimento da componente vertical da velocidade, para $Re = 100$, $Rem = 1$ e diferentes Ha .	114
Figura 6.22	Desenvolvimento da componente horizontal do campo magnético, para $Re = 100$, $Rem = 1$ e diferentes Ha .	115
Figura 6.23	Desenvolvimento da componente vertical do campo magnético, para $Re = 100$, $Rem = 1$ e diferentes Ha .	115
Figura 6.24	Desenvolvimento do campo magnético total, para $Re = 100$, $Rem = 1$ e diferentes Ha .	115
Figura 6.25	Desenvolvimento da densidade de corrente, para $Re = 100$, $Rem = 1$ e diferentes Ha .	116
Figura 6.26	Desenvolvimento da componente longitudinal da força de Lorentz, para $Re = 100$, $Rem = 1$ e diferentes Ha .	116

Figura 6.27	Desenvolvimento da componente vertical da força de Lorentz, para $Re = 100$, $Rem = 1$ e diferentes Ha .	116
-------------	---	-----

CAPÍTULO VII

Figura 7.1	Representação do perfil do duto irregular com perfis de velocidade completamente desenvolvido que se adapta a cada posição longitudinal do canal	117
------------	--	-----

Lista de Tabelas

CAPÍTULO II

Tabela 2.1	Resumo, em ordem cronológica e descritos após esta tabela, dos trabalhos em MHD relevantes a esta tese.	27
------------	---	----

CAPÍTULO III

Tabela 3.1	Equações de Maxwell	37
Tabela 3.2	Resumo das Equações do Eletromagnetismo aplicadas à MHD	38

CAPÍTULO V

Tabela 5.1	Transformação do sistema de ordem superior para um de 1 ^a . ordem.	59
Tabela 5.2	Análise de convergência em diferentes posições ao longo do canal para $Re = 20$, $Ha = 2$, $E_z = -Ha$ e diferentes valores de Reynolds magnético ($Re_m = 10, 25$ e 50)	68
Tabela 5.3	Análise de convergência em diferentes posições ao longo do canal para $Re = 100$, $Re_m = 1$ e diferentes valores de Hartmann, ($Ha = -E_z = 0, 10$ e 20)	69

CAPÍTULO VI

Tabela 6.1	Transformação do sistema de ordem superior para um de 1 ^a . ordem.	95
Tabela 6.2	Análise de convergência em diferentes posições ao longo do canal para $Re = 20$, $Ha = 2$, $E_z = -\frac{Ha}{2}$ e diferentes valores de Reynolds magnético ($Re_m = 10, 25$ e 50)	99
Tabela 6.3	Análise de convergência em diferentes posições ao longo do canal para $Re = 100$, $Re_m = 1$, $E_z = -\frac{Ha}{2}$ e diferentes valores de Hartmann, ($Ha = 0, 10$ e 20)	100

Tabela 6.4	Valores comparativos da componente longitudinal da velocidade para $x=3.33314$	101
Tabela 6.5	Valores comparativos da componente longitudinal da velocidade para $x=7.50000$	101
Tabela 6.6	Valores comparativos para a velocidade (u) na linha central do canal	102

Lista de Siglas e Abreviaturas

BVPFD	Sub-rotina do IMSL para avaliação de sistemas de EDOs do tipo valor de contorno
CFD	Dinâmica dos Fluidos Computacional (sigla da expressão em inglês <i>Computational Fluid Dynamics</i>)
DRBEM	Sigla da expressão em inglês <i>Dual Reciprocity Boundary Element Method</i>
EDO	Acrônimo de Equação Diferencial Ordinária
FDM	Método das Diferenças Finitas (sigla da expressão em inglês <i>Finite Difference Method</i>)
FEM	Método dos Elementos Finitos (sigla da expressão em inglês <i>Finite Element Method</i>)
<i>fem</i>	Força eletromotriz
GITT	Técnica da Transformada Integral Generalizada (sigla da expressão em inglês <i>Generalized Integral Transform Technique</i>)
IMSL	Biblioteca numérica do Fortran (acrônimo para o nome em inglês <i>International Mathematical and Statistical Library</i>)
LRBFCM	Sigla da expressão em inglês <i>Local Radial Basis Function Collocation Method</i>
MHD	Magnetohidrodinâmica
N-S	Navier-Stokes
OHAM	Método assintótico de homotopia ótima (Sigla da expressão em inglês <i>optimal homotopy asymptotic method</i>)
QDAGS	Sub-rotina do IMSL para avaliação de integrais por quadratura gaussiana
TOKAMAK	Câmara Toroidal Magnética (acrônimo para o nome do dispositivo Russo <i>toroidal'naya kamera s magnitnymi katushkami</i>)
ZBREN	Sub-rotina do IMSL para obtenção de raízes de equações transcendentais

Lista de Símbolos

CAPÍTULO II

ε	Força eletromotriz
π	Número π
φ	Vazão
σ	Condutividade elétrica do meio
ρ	Resistividade elétrica do meio ou densidade de cargas
μ_0	Permeabilidade magnética do meio (vácuo)
ϕ	Fluxo do campo magnético
ε_0	Permissividade elétrica do meio (vácuo)
τ_m	Tempo de amortecimento magnético
ρ	Massa específica do fluido
λ_m	Difusividade magnética
ν	Viscosidade cinemática
μ	Viscosidade absoluta ou dinâmica

CAPÍTULO IV

ψ	Função escalar para o campo de velocidade, função corrente
β	Função escalar para o campo magnético, função magnética

CAPÍTULO V

$\psi_F(y)$	Campo de função corrente filtrado
$\beta_F(y; x)$	Campo de função magnética filtrado
μ_i	Autovalor associado ao campo de função corrente
α_i	Autovalor associado ao campo de função magnética

CAPÍTULO VI

$\psi_F(y)$	Campo de função corrente filtrado
$B_{1F}(y)$	Campo magnético horizontal filtrado
$B_{2F}(y)$	Campo magnético vertical filtrado
μ_i	Autovalor associado ao campo de função corrente
α_i	Autovalor associado ao campo magnético B_1
β_i	Autovalor associado ao campo magnético B_2

Sumário

CAPÍTULO I: INTRODUÇÃO.....	23
1. INTRODUÇÃO	24
1.1. BREVE HISTÓRICO DA MHD	24
1.2. APLICAÇÕES DA MHD.....	24
1.3. MOTIVAÇÃO	26
1.4. OBJETIVOS	27
1.4.1. OBJETIVO GERAL	27
1.4.2. OBJETIVOS ESPECÍFICOS	27
CAPÍTULO II: REVISÃO DA LITERATURA.....	29
2. REVISÃO DA LITERATURA: ESTADO DA ARTE	30
2.1. TÉCNICA DA TRANSFORMADA INTEGRAL GENERALIZADA.....	30
2.2. ESCOAMENTO MAGNETOHIDRODINÂMICO EM CANAIS	32
CAPÍTULO III: FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA.....	40
3. EQUAÇÕES FUNDAMENTAIS PARA A MHD.....	41
3.1. EQUAÇÕES DO ELETROMAGNETISMO	41
3.1.1. A LEI DE OHM.....	41
3.1.2. A LEI DE AMPÈRE	41
3.1.3. A LEI DE INDUÇÃO DE FARADAY	42
3.1.3. A FORÇA DE LORENTZ VOLUMÉTRICA	43
3.1.4. EQUAÇÕES DE MAXWELL.....	43
3.2. EQUAÇÃO DO TRANSPORTE DO CAMPO MAGNÉTICO.....	45
3.3. EQUAÇÃO DE NAVIER-STOKES	46
CAPÍTULO IV: ESCOAMENTO LAMINAR MHD – <i>BACKWARD-FACING STEP FLOW</i>.....	37
4. GEOMETRIA, CONDIÇÕES DE CONTORNO E MODELAGEM MATEMÁTICA	43
4.1. MODELAGEM MATEMÁTICA.....	43
4.1.2. FORMULAÇÃO EM FUNÇÃO CORRENTE	47
CAPÍTULO V: FORMULAÇÃO EM TERMOS DE ψ E β COM PROBLEMAS DE AUTOVALOR DE 4ª. E 2ª. ORDEM.	37
5. EQUAÇÕES DE GOVERNO	50

5.1. APLICAÇÃO DA GITT.....	51
5.1.1. FILTRAGEM DOS CAMPOS	51
5.1.2. PROBLEMA DE AUTOVALOR AUXILIAR.....	53
5.1.3. TRANSFORMAÇÃO INTEGRAL DOS CAMPOS.....	57
5.2. ALGORÍTIMO COMPUTACIONAL.....	62
5.3. RESULTADOS.....	67
5.3.1. ANÁLISE DE CONVERGÊNCIA.....	68
5.3.2. COMPARAÇÃO COM RESULTADOS DA LITERATURA	72
5.3.3. ACOPLAMENTO MAGNETOHIDRODINÂMICO.....	72
CAPÍTULO VI: FORMULAÇÃO EM TERMOS DE Ψ, B_1 E B_2 COM PROBLEMAS DE AUTOVALOR DE 4ª. E 2ª. ORDEM.	78
6. EQUAÇÕES DE GOVERNO	84
6.1. APLICAÇÃO DA GITT.....	85
6.1.1. FILTRAGEM DOS CAMPOS	86
6.1.2. PROBLEMA DE AUTOVALOR PARA OS CAMPOS B_1 E B_2	87
6.1.3. TRANSFORMAÇÃO INTEGRAL.....	88
6.2. ALGORÍTIMO COMPUTACIONAL.....	92
6.3. RESULTADOS.....	97
6.3.1. ANÁLISE DE CONVERGÊNCIA.....	97
6.3.2. COMPARAÇÃO COM RESULTADOS DA LITERATURA	102
6.3.3. ACOPLAMENTO MAGNETOHIDRODINÂMICO.....	108
CAPÍTULO VII: CONCLUSÕES E SUGESTÕES	93
7. CONCLUSÕES E SUGESTÕES.....	114
7.1. CONCLUSÕES	114
7.2. SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS	116
7.2.1. SOLUÇÃO COM DOIS PROBLEMAS DE AUTOVALOR DE 4ª. ORDEM E USO DE FUNÇÕES ESCALARES (ψ E β).....	116
7.2.2. ESCOAMENTO LAMINAR MHD EM DUTOS DE GEOMETRIA VARIÁVEL.....	117
I. INTRODUÇÃO À FORMULAÇÃO: PERFIL DE VELOCIDADE.....	117
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	122
APÊNDICE A	129
REGIÃO DE CAMPOS COMPLETAMENTE DESENVOLVIDOS NA ENTRADA E SAÍDA DO CANAL DE PLACAS PARALELAS.	129
A.I. CAMPO DE VELOCIDADE	129
A.II. CAMPO MAGNÉTICO.....	135

APÊNDICE B	139
CONDIÇÕES DE CONTORNO PARA O CAMPO MAGNÉTICO.....	139
B.I. CASO GERAL.....	139
B.II. CONDIÇÕES DE CONTORNO NO PRESENTE TRABALHO	142
APÊNDICE C	145
TEMPOS DE DIFUSÃO E DE AMORTECIMENTO MAGNÉTICO, NÚMERO DE REYNOLDS MAGNÉTICO E TEOREMA DE ALFVÈN.....	145
C.I. TEMPO DE DIFUSÃO MAGNÉTICA.....	145
C.II. TEMPO DE AMORTECIMENTO MAGNÉTICO	146
C.III. O NUMERO DE REYNOLDS MAGNÉTICO	147
C.IV. TEOREMA DE ALFVÉN	147

CAPÍTULO I:
INTRODUÇÃO

1. INTRODUÇÃO

1.1. BREVE HISTÓRICO DA MHD

A magnetohidrodinâmica, ou MHD, é dedicada ao estudo das interações mútuas entre o escoamento de fluidos condutores (elétricos e/ou iônicos) e campos de indução magnética presentes na região do escoamento. Mas quando nasce a MHD? Admitindo que se trata de uma interação de duas vias, o efeito do campo sobre o escoamento e o inverso, a famosa experiência de Michael Faraday, em Janeiro de 1832, na ponte de Waterloo em Londres, onde se imergia eletrodos no rio Tâmesa a fim de determinar o movimento de marés (LIPSCOMB,2014), não pode ser considerado um experimento MHD, uma vez que o efeito dinâmico do campo no movimento é insignificante e foi negligenciado. A mesma negação pode ser aplicada às muitas tentativas iniciais de se entender o geomagnetismo que, *grosso modo*, não tratava do efeito mutuo do campo magnético sobre o fluido condutor férnico que se colocava ao redor do núcleo externo da Terra que, por sua vez, mantido pelas forças de Coriolis, é a fonte do geomagnetismo. Este modelo é embasado pela teoria cinemática do dínamo, onde a velocidade do fluido é prescrita e não afetada pelo campo magnético (MOLOKOV *et al*, 2007). Desta forma, o precursor da MHD é o sueco Hannes Olof Gosta Alfvén (1908-1995), ele argumentava que se um plasma (o fluido ionizado) permeia o espaço, ele poderia carregar correntes elétricas capazes de criar um campo magnético galáctico e interagir com outros campos de indução magnéticos presentes no espaço. Com essa discussão, ele, como professor da Universidade de Uppsala (Suécia), iniciou uma nova disciplina que mais tarde seria chamada de magnetohidrodinâmica (MHD). Alfvén ainda descreveu teorias sobre tempestades magnéticas, auroras boreais, manchas solares e formas de ondas de choque eletromagnéticas que se propagam em um plasma, ondas essas conhecidas como ondas de Alfvén. Essa descoberta, que foi um triunfo da teoria sobre o experimento, foi feito durante a Segunda Guerra Mundial (ULRICH & STEINER, 1989). Isso marca o nascimento do MHD e deu a Alfvén o prêmio Nobel em 1970.

1.2. APLICAÇÕES DA MHD

Não é de hoje que a manifestação de MHD se faz presente em fenômenos naturais e em aplicações de engenharia. Na astrofísica, como o espaço é ocupado por um número

muito vasto de partículas carregadas na presença de campos magnéticos e a hipótese do contínuo pode ser aplicada, a MHD manifesta-se através das interações entre tais campos e este *continuum* de cargas em movimento. A geofísica moderna se vale da MHD para análise de interação de fluidos condutores e campos magnéticos presentes no interior e ao redor de corpos massivos como a Terra. Os engenheiros fazem uso dos princípios magnetohidrodinâmicos no projeto de trocadores de calor, bombas e medidores de vazão; na solução de problemas de propulsão, controle e reentrada de veículos espaciais; no projeto de sistemas de radar e comunicação (CRAMER & PAI, 1973). A expectativa do controle da fusão termonuclear através do confinamento de plasma por campos magnéticos, simulando reações solares, também acompanha as principais aplicações da MHD, como promessa de resolver boa parte do problema da escassez energética mundial. A busca por maior eficiência e maior controle na produção de aço, alumínio e superligações de alto desempenho levou a uma revolução na aplicação da MHD para processar a metalurgia, através de agitação, amortecimento e desestabilização de interfaces entre líquidos (DAVIDSON, 1999). Por fim, a MHD pode ser aplicada à medicina, um campo magnético apropriado pode ser usado para a melhora de problemas associados a fluxos peristálticos que provocam trombos no sangue e estão relacionados ao movimento do bolo alimentar no trato gastrointestinal. Tal campo também pode ser usado no bombeamento sanguíneo e na redução de temperatura de tecidos (RASHIDI *et al*, 2017).

A MHD reúne as teorias eletromagnéticas e da mecânica dos fluidos para descrever, matematicamente e fisicamente, a interação mútua entre o escoamento e os campos de indução magnética impostos. Na MHD clássica, onde os fluidos, tipicamente líquidos condutores, são considerados neutros e como a densidade de cargas nas equações de Maxwell deve estar associada ao excesso de cargas, que não é grande, a corrente de deslocamento pode ser desprezada. Não obstante, para interações macroscópicas e tipicamente lentas, também são desprezadas correções relativísticas, efeitos quânticos e, ainda, a massa, a energia e o momento linear são conservados. Tais aproximações podem ser encontradas na literatura, com em (DAVIDSON, 2001) e (CRAMER & PAI, 1973). Desta forma, o acoplamento das equações dá-se através da densidade de corrente e da lei de Ohm generalizada.

1.3. MOTIVAÇÃO

O eletromagnetismo é uma área da Física que lida com os efeitos e interações de cargas elétricas, estáticas ou não, no seu entorno. A mecânica dos fluidos estuda o comportamento físico de fluidos em movimento (ou estáticos), envolvendo as forças que influenciam este comportamento e seus efeitos dinâmicos, como trabalho e variação da quantidade de movimento. Já a MHD une estas duas áreas quando um fluido condutor de eletricidade escoar na presença de um campo magnético, gerando um efeito cruzado entre escoamento e campo magnético. Esta tese é motivada por esta grande área, propiciando o estudo de formulações mais completas da equação de Navier-Stokes (momento linear) e da equação de transporte do campo magnético que é baseada nas equações de Maxwell para o eletromagnetismo. Como tais equações não apresentam soluções puramente analíticas, aplica-se a Técnica da Transformada Integral Generalizada (G.I.T.T. – sigla em inglês) que é uma técnica híbrida, numérico analítica, baseada no método de separação de variáveis, muito importante no desenvolvimento deste trabalho e de outros aqui citados. A geometria de um canal de placas paralelas com um degrau de entrada é muito difundida e importante para a comparação da técnica aqui empregada com outros métodos numéricos conhecidos na literatura. A formulação com problemas de autovalor de ordens distintas para o campo magnético, também fomentam esta escrita, no que diz respeito à análise de resultados, implementação e custo computacional.

1.4. OBJETIVOS

1.4.1. OBJETIVO GERAL

O presente trabalho tem como objetivo geral analisar o comportamento do campo de velocidade e do campo magnético em escoamentos magnetohidrodinâmicos laminares de fluidos condutores, incompressíveis no interior de canais com degrau de entrada (*backward-facing step*). A solução dar-se-á, de forma híbrida, numérico-analítica, através do uso da Técnica da Transformada Integral Generalizada (GITT, sigla associada a expressão em inglês *Generalized Integral Transform Technique*) aplicada às equações de governo: equação de N-S e equação do transporte do campo magnético.

1.4.2. OBJETIVOS ESPECÍFICOS

Os objetivos específicos podem ser enumerados a seguir:

- i) Analisar a influência de parâmetros como o número de Hartmann, o número de Reynolds e o número de Reynolds magnético, sobre os campos de velocidade e magnético. O número de Reynolds magnético a dissipação e o amortecimento magnético, bem como, o teorema de Alfvén para o congelamento das linhas de campo em relação ao escoamento, são mostrados no Apêndice C, desta tese;
- ii) Fazer o desenvolvimento de análises híbridas, numérico-analíticas, da interação mútua entre o escoamento do fluido condutor e os campos magnéticos envolvidos na região do escoamento, caracterizando a análise magnetohidrodinâmica do problema. O objetivo será buscado com a aplicação da Técnica da Transformada Integral Generalizada (GITT) nas equações que governam o escoamento do fluido condutor: formulação completa de Navier-Stokes e equação do transporte do campo magnético;
- iii) Fazer um comparativo entre duas formulações distintas, que são mostradas nos Capítulos 5 e 6, indicando que a deste último retoma corretamente as condições de contorno impostas na região de desenvolvimento do escoamento, dificuldade esta encontrada no Cap. 5 e resolvida, portanto, no Cap. 6;
- iv) Mostrar a robustez da GITT, divulgando seu potencial de solução para problemas com solução não meramente analíticas, uma vez que a maioria das produções atuais se dão através de métodos numéricos (CFD) e análise de camada limite do escoamento;

- v) Comparar todos os resultados dos problemas com resultados presentes na literatura consagrada para fins de *benchmarking*;
- vi) Oferecer um novo viés para o tratar de problemas associados a escoamentos laminares sobre o controle ou influência do campo de indução magnética, deixando um aporte genuíno para pesquisas futuras na área.

CAPÍTULO II:
REVISÃO DA LITERATURA

2. REVISÃO DA LITERATURA: ESTADO DA ARTE

2.1. TÉCNICA DA TRANSFORMADA INTEGRAL GENERALIZADA

A conhecida Técnica da Transformada Integral Generalizada (GITT) é uma evolução natural do método de separação de variáveis para sistemas de EDPs. A metodologia de separação de variáveis apresenta certas limitações que restringe sua aplicação para resolver algumas equações onde se apresentam não-homogeneidades nas suas condições de contorno ou, como exemplo, termos de geração que aparecem em equações diferenciais de condução do calor. A GITT, proporciona soluções de natureza híbridas, numérico-analíticas, para problemas de convecção-difusão, entre outras, cuja transformação integral resulte em sistemas de equações diferenciais ordinárias acopladas, ou cujos problemas auxiliares são complexos do ponto de vista computacional. Não obstante, essa natureza híbrida é particularmente interessante para fins de *benchmarking*, fazendo uso de um controle automático de erros, a solução mantém as mesmas características de uma análise puramente analítica (COTTA & MIKHAILOV, 2001).

A GITT tem origem intimamente ligada ao trabalho de Ozisik e Murray (1974), sobre a solução de problemas difusivos com coeficientes variáveis nas condições de contorno, onde, se observou a capacidade de se fornecer soluções analíticas aproximadas a uma faixa muito maior de problemas. Desde então, a GITT ganhou robustez no sentido de estender as ideias do procedimento de transformação integral para classes diferentes de problemas, tanto lineares, quanto não-lineares. Um trabalho completo e sistemático sobre GITT é apresentado em Cotta (1993) e, revisões e atualizações posteriores do progresso da técnica, encontram-se em Cotta (1998) e Santos *et al.* (2001). Assad (2016) complementa a revisão da literatura e utiliza a formulação bidimensional das equações de Navier-Stokes, na formulação em função corrente, para escoamento em regime permanente, acoplada à equação de transporte do campo magnético, com solução dada via GITT. Em um estudo sobre um escoamento MHD com transferência de calor e massa de um biofluido em um canal de placas paralelas, Miyagawa *et al.* (2017) utilizam a GITT para a solução dos campos de velocidade, concentração e temperatura.

A pretexto de informação, a ampla gama de aplicações da técnica, pode ser agrupada nas seguintes classes, segundo Cotta (1998) e Perez-Guerrero (1995):

- Problemas com coeficientes variáveis nas condições de contorno, onde aplicam-se a problemas condutivos com número de Biot dependente do tempo, convecção forçada em dutos aletados externamente, etc.
- Problemas com coeficientes variáveis nas equações governantes, aplicados a análise transiente de aletas com dissipação dependente do tempo, desenvolvimento simultâneo de velocidade e temperatura dentro de canais, etc,
- Problemas que apresentam contornos variáveis, aplicados a problemas de contorno móvel, tais como fusão/solidificação, ablação e oxidação; domínio de forma irregular com respeito ao sistema de coordenadas considerado, como no caso da transferência de calor em trocadores com dutos triangulares, trapezoidais, hexagonais, etc.
- Problemas que envolvem dificuldade na solução do problema auxiliar, com aplicações em convecção forçada interna em regimes transiente e periódico, transferência de calor em escoamentos com condução axial, convecção em dutos retangulares, problemas conjugados de transferência de calor, trocadores de calor bitubulares, etc.
- Problemas não-lineares caracterizados pela presença de equações cujos termos fonte e/ou condições de contorno dependam da função escalar a ser obtida, aplicados a condução de calor com condutividade térmica variável, condições de contorno com troca radiante, solução das equações de camada limite para regimes laminar e turbulento, e as equações de Navier-Stokes.

Na última categoria, se encontra a maioria dos problemas na engenharia, particularmente na mecânica dos fluidos e transferência de calor, que podem ser citados: condução de calor com condutividade térmica variável, solução das equações da camada limite e solução das equações de Navier-Stokes (COTTA, 1992; LIMA, 1995; LIMA, 2000).

Neste trabalho serão resolvidos alguns problemas de MHD via GITT e os passos a serem seguidos para a aplicação da técnica, em cada um dos mesmos, são enumerados a seguir.

1. Escolha de um problema auxiliar apropriado.
2. Solução do problema auxiliar e obtenção das autofunções, autovalores, normas e das propriedades de ortogonalidade.
3. Descrição das funções escalares como uma expansão das autofunções oriundas do problema auxiliar. Determinação do par transformada/inversa.
4. Transformação integral do sistema de equações diferenciais parciais originais, aplicando-se a fórmula da transformada em todos os termos das equações originais, seguida da fórmula de inversão nos termos não transformáveis. Obtendo-se, assim, um sistema diferencial ordinário acoplado na variável independente restante.
5. Truncamento do sistema diferencial ordinário infinito e solução do sistema restante, por procedimentos numéricos bem estabelecidos disponíveis em pacotes de sub-rotinas, para obtenção dos campos transformados com precisão prescrita.
6. Obtenção das funções escalares originais, fazendo-se uso da fórmula analítica de inversão.

2.2. ESCOAMENTO MAGNETOHIDRODINÂMICO EM CANAIS

Será mostrada a seguir uma revisão dos trabalhos mais relevantes, sob o ponto de vista comparativo com este compêndio, sobre o estudo de escoamentos magnetohidrodinâmicos (MHD) e seus tipos de solução. Vários estudos teóricos foram desenvolvidos na análise desse tipo de problema, onde a maioria adota solução lastreada em métodos puramente numéricos. A Tabela 2.1 indica, em resumo, o tipo de escoamento, a metodologia de solução e a geometria associada ao escoamento. Mostra-se, também, se o trabalho considera os campos magnéticos induzidos por efeito cruzado do escoamento sobre o campo. O parâmetro que indica o quão forte esta interação se manifesta é o número de Reynolds magnético (Re_m). Este parâmetro é o análogo do número de Reynolds (clássico), ele é dado pela razão entre os efeitos de indução (ou advecção) do campo magnético e os efeitos difusivos ($Re_m = \frac{UL}{\lambda_m} \sim \frac{\text{advecção ou indução}}{\text{difusão}}$, U e L são escalas de velocidade e comprimento características e λ_m é a difusividade magnética). Assim, quando Re_m é alto, as linhas de campo são arrastadas pelo escoamento e quando é baixo, efeitos difusivos

dominam, amortecendo o movimento e transformando energia cinética de escoamento em calor (efeito Joule e dissipação viscosa).

Após a tabela encontra-se um breve resumo de cada trabalho.

Tabela 2.1: Resumo, em ordem cronológica e descritos após esta tabela, dos trabalhos em MHD relevantes a esta tese.

Trabalho	Escoamento	Metodologia de Solução	Geometria do canal	Influência cruzada sobre o campo ($Rem \gg 0$)
Wang e Longwell (1964)	Laminar	FDM	Placas paralelas	Não
Brandt e Gillis (1966)	Laminar	FDM	Placas paralelas	Sim
Aparecido (1988)	Laminar	GITT	Dutos Irregulares	Não
Gartling (1990)	Laminar	FDM	<i>Backward-facing step</i>	Não
Perez-Guerrero (1995)	Laminar	GITT	Placas paralelas, <i>Backward-facing step</i> e dutos irregulares	Não
Lee & Choi (2001)	Turbulento	FDM	Placas paralelas	Sim
Barkley <i>et al</i> (2002)	Laminar	FEM	<i>Backward-facing step</i>	Não
Abbassi e Nasshalla (2006)	Laminar	FEM	<i>Backward-facing step</i>	Não
Lima <i>et al.</i> (2007)	Laminar	GITT	Placas paralelas	Não
Bozkaya e Tezer-Sezgin (2010)	Laminar	DRBEM	Cavidade Quadrada e <i>Backward-facing step</i>	Não
Rêgo (2010) e Lima e Rêgo (2013)	Laminar	GITT	Placas paralelas	Não
Aoki (2011)	Laminar	FEM	Placas paralelas	Não
Pekmen e Tezer-Sezgin (2013)	Laminar	DRBEM	Cavidade e <i>backward-facing step</i>	Sim

Jelena (2014)	Laminar	Transformadas de Hankel Fourier	Placas paralelas e tubos, ambos com abertura circular	Não
Mramor <i>et al</i>	Laminar	LRBFCM	<i>backward-facing step</i>	Não
Selimefendigil e Öztop (2015)	Laminar	FEM	<i>backward-facing step</i>	Não
Pontes (2015)	Laminar	GITT	Placas paralelas	Não
Assad (2016)	Laminar	GITT	Placas paralelas	Sim
Karimi e Kinyua (2017)	Turbulento	FDM	Placas paralelas	Não
Sa'adAldin e Qatanani (2017)	Laminar	FEM	Placas paralelas	Não
Odero <i>et al</i> (2017)	Laminar	FDM	Placas paralelas	Não
Hamid, et al. (2018)	Laminar	FDM	Placas paralelas	Não
Aliy e Kishan (2019)	Laminar	OHAM	Escoamento sobre placa de espessura variável	Não
Mobadersani e Rezavand (2020)	Laminar	FDM	<i>backward-facing step</i>	Não

Wang e Longwell (1960) publicam um artigo que se utiliza do método de diferenças finitas para analisar o escoamento laminar, não MHD, em um canal de placas paralelas, tomando dois casos para o perfil de velocidade na entrada: um uniforme e outro parabólico. Os resultados são comparados com outros trabalhos que utilizam a formulação em camada limite.

Brandt e Gillis (1966) publicam um dos trabalhos pioneiros na solução do problema da entrada hidrodinâmica na presença de um campo magnético, considerando as equações de Navier-Stokes (N-S). A solução se desenvolveu através do emprego de diferenças finitas e foi material de comparação de resultados *benchmark* para o trabalho desenvolvido por Assad (2016) na solução do escoamento MHD com as equações de N-S via GITT.

Aparecido (1988), utiliza a GITT para a solução de problemas de difusão em geometrias arbitrárias bi e tridimensionais. O estudo do escoamento laminar se desenvolve em dutos retos com seção transversal na forma de triângulo retângulo, trapezoidal e

hexagonal. Resolve-se também a convecção laminar forçada em dutos retangulares e triangulares submetidos a condições de contorno do primeiro tipo.

Gartling (1990), utilizou o método de elementos finitos para resolver o problema do *backward-facing step*, discretizando o domínio com diferentes números e tamanhos de elementos do tipo biquadrático. A solução numérica foi feita usando o código NACHOS II (código de elementos finitos para escoamentos incompressíveis), o qual é baseado numa formulação de Galerkin. A verificação dos resultados foi feita através do programa FIDAP, o qual é também baseado no método de elementos finitos. Em todos os casos foi empregada a formulação em variáveis primitivas das equações de Navier-Stokes.

Perez-Guerrero (1995) descreve o desenvolvimento do escoamento laminar em canais de geometria arbitrária, resolvendo as equações de Navier-Stokes na formulação de função corrente, através da GITT, descreve o caso do *backward-facing step* através da GITT, mostrando a robustez da técnica, através de resultados *benchmark* na literatura da época, sendo estes, mais coerentes sob à luz da física, do que os resultados obtidos através de métodos estritamente numéricos. O autor ainda mostra, no capítulo IV, uma excelente revisão dos principais trabalhos associados ao problema do “degrau” descritos até a data da defesa de sua tese.

Lee & Choi (2001) estudam o escoamento MHD turbulento, em um canal de placas paralelas e para baixos números de Reynolds magnético. Campos magnéticos uniformes são aplicados em direções paralelas ao escoamento ou transversais a ele. A solução se dá através de métodos de diferenças finitas e os resultados são comparados com outros artigos e livros presentes na ampla literatura e escritos à época.

Barkley et al (2002), fazem a análise tridimensional de instabilidades ocorridas no fluxo ao passar pelo degrau de entrada. A formulação de N-S é empregada e a solução é feita através de métodos numéricos associados a escolha de malhas refinadas sobre a geometria do canal e as instabilidades geradas pelo degrau. Não se trata de um escoamento MHD e a GITT não foi aplicada, como será feito neste trabalho.

Abbassi e Nasshalla (2006), estudam o escoamento laminar MHD através do *backward-facing step*. Mostram que o aumento do campo magnético reduz a zona de recirculação e os efeitos sobre o campo de velocidade, mas, não mostram o efeito cruzado

sobre o campo magnético e resolvem através de uma versão de métodos de elementos finitos sobre o volume de controle.

Lima *et al.* (2007) resolvem o problema do escoamento MHD transiente em um canal de placas paralelas porosas e móveis, acrescido de transferência de calor para o fluido newtoniano adotado, utilizando-se a GITT. Não resolvendo a influência cruzada do escoamento sobre o campo.

Bozkaya e Tezer-Sezgin (2010), utilizam formulação através de problemas de contorno de reciprocidade dupla (cuja sigla em inglês é DRBEM) acoplados a um método numérico implícito, tipo “backward” de integração no tempo, para a solução das equações do escoamento MHD incompressível. As equações de função corrente e de indução magnética, que são do tipo de Poisson, resolvidos usando DRBEM com a solução fundamental da equação de Laplace. As aplicações são dadas para o escoamento MHD, em uma cavidade quadrada e para o *backward-facing step*. A solução desta última é dada em termos do campo de velocidade, da vorticidade, da densidade de corrente e do campo magnético, para valores crescentes do número de Hartmann.

Rêgo (2010) e Lima e Rêgo (2013) empregaram a GITT para analisar o problema do desenvolvimento simultâneo do escoamento MHD com transferência de calor em um canal de placas paralelas mantidas a temperatura constante, iguais ou diferentes. Naquele estudo, o escoamento podia entrar no canal sob um perfil uniforme ou parabólico de velocidade. Ainda não resolvendo a influência cruzada do escoamento sobre o campo.

Aoki (2011) mostra a construção e operação de um dispositivo MHD, um canal de placas paralelas preenchido com fluido eletrolítico, conhecido como macrobomba. O escoamento se desenvolve na presença de campos magnético e elétrico externos e é resolvido numericamente, pelo acoplamento das equações de Navier-Stokes e de Maxwell.

Pekmen e Tezer-Sezgin (2013), utilizam formulação através de problemas de contorno de reciprocidade dupla (cuja sigla em inglês é DRBEM) para resolver escoamento não uniforme, laminar de um de um fluido viscoso, incompressível, eletricamente condutor em canais, tipo cavidade e *backward-facing step*, sob o efeito de um campo magnético aplicado e força de empuxo. As equações MHD são acopladas com a equação da energia, devido à transferência de calor, por meio da aproximação de Boussinesq. Então as equações

bidimensionais completas da MHD e em termos de parâmetros adimensionais são escritas em termos de função corrente, temperatura, potencial magnético, a densidade de corrente e a vorticidade são resolvidas usando DRBEM com o método implícito de Euleir com integração no tempo para trás. Os resultados são fornecidos para vários valores de parâmetros dos números de Reynolds (Re), número de Reynolds magnético (Rem), número de Hartmann (Ha) e número de Rayleigh (Ra).

Jelena (2014) resolve analiticamente o problema de um canal de placas paralelas e tubular sob ação de um campo magnético muito forte, paralelo e transversal ao escoamento, usando a aproximação de Oseen e as transformadas de Fourier e de Hankel. Além disso, soluções assintóticas para números de Hartmann elevados são obtidas.

Mramor et al (2014) desenvolvem este artigo na intenção de estender o Método (numérico) de Colocação de Base Radial Local (sigla em inglês LRBFCM) para resolver o problema do escoamento *backward-facing step* laminar, bidimensional e incompressível sob influência da força de Lorentz. As equações de N-S estão associadas a uma força de corpo dada pela ação de um campo magnetostático, externamente imposto. O escoamento é analisado sob a influência de números de Reynolds (Re) variando de 300 a 800, o número de Hartmann (Ha) variando de 0 a 100, e para um número de Reynolds magnético Re_m baixo.

Pontes (2015) faz análise do escoamento com transferência de calor com formulação matemática dos modelos dada em termos de função corrente, obtida a partir das equações de Navier-Stokes e da equação da energia. As hipóteses adotadas são de regime permanente, escoamento laminar e incompressível e propriedades físicas constantes. Admite-se também que o campo magnético externo, aplicado na direção normal ao escoamento, permanece uniforme, não sendo, dessa forma, influenciado por nenhum efeito magnético interno.

Selimefendigil e Öztop (2015) fazem um estudo numérico de convecção forçada de um escoamento laminar de um nanofluido em uma geometria de *backward-facing step* para diferentes ângulos de inclinação do campo magnético. A parede inferior do degrau e a altura do mesmo são aquecidos isotermicamente e as outras paredes do canal são consideradas adiabáticas. O método dos elementos finitos foi usado para resolver as equações governantes. A influência do número de Reynolds (entre 20 e 200), do número de Hartmann (entre 0 e 50) e fração volumétrica sólida da nanopartícula fluida (entre 0 e 0,04) no

escoamento e a transferência de calor são investigados numericamente para diferentes ângulos de orientação do campo magnético.

Assad (2016) utiliza a formulação bidimensional das equações de Navier-Stokes, na formulação em função corrente, para escoamento em regime permanente, acoplada à equação de transporte do campo magnético, com solução dada via GITT. Resolve a influência cruzada do campo de velocidade sobre o magnético mas não envolve análise de turbulência nem inclui a solução da equação da energia.

Karimi e Kinyua (2017) resolvem, através do método de diferenças finitas, o problema do escoamento MHD transiente, com turbulência, em um canal de placas paralelas sem influência cruzada sobre o campo magnético.

Sa'adAldin e Qatanani (2017) utilizam um escoamento MHD transiente em um canal de placas paralelas, onde o fluido condutor elétrico escoar através de um meio poroso e o efeito Hall é levado em consideração. O modelo matemático é resolvido através de métodos numéricos que visam, no problema estudado, mostrar que o método de elementos finitos leva a resultados mais precisos do que os obtidos pelo método de diferenças finitas.

Odero et al (2017) utilizam o escoamento transiente de um fluido condutor incompressível sobre uma placa infinita e porosa, na presença de um campo magnético transversal e com condições de contorno aplicadas a uma superfície convectiva. A solução numérica é dada através do método de diferenças finitas e o trabalho visa contribuir com um aprofundamento sobre formas alternativas de armazenamento de energia térmica.

Hamid, et al. (2018), examinam o transporte de calor e massa em um escoamento MHD não transiente de um nanofluido de Williamson em um canal permeável com fonte de calor / dissipador. A influência do empuxo e dos efeitos da radiação térmica também são considerados para o modelo. Uma simulação numérica é realizada para obter a solução do sistema não linear de equações governantes através de um esquema de diferenças finitas de Crank-Nicolson. Campos magnéticos induzidos não são considerados.

Aliy e Kishan (2019), investigam o impacto do campo elétrico na camada limite de um escoamento MHD, de um nanofluido de Williamson, sobre uma superfície aquecida com espessura variável. As EDPs governantes foram convertidos para as EDOs correspondentes

usando transformações de similaridade adequadas. As EDOs convertidas são resolvidas analiticamente usando um método OHAM (Optimal Homotopy Asymptotic Method). A OHAM é uma técnica semi-analítica que é direcionada para se aplicar em diferentes tipos de problemas, reduz o custo computacional e a existência de quaisquer parâmetros pequenos ou grandes não é significativa. Marinca et al. (2009) introduziram o conceito básico deste método com a publicação supra-referenciada.

Mobadersani e Rezavand (2020), estudam os efeitos da magnetohidrodinâmicos no escoamento de nanofluidos usando o modelo de fluidos bifásicos de Buongiorno. Devido à utilização do modelo de duas fases, nanopartículas variáveis concentração e propriedades do nanofluido são consideradas. Termoforese e difusividades brownianas são calculados em dispersão de partículas. Efeitos do número de Reynolds, fração de volume de partícula, número de Reynolds magnético e de Hartmann são estudados nas características de transferência de calor e do escoamento do fluido. O método de elementos finitos residual ponderado de Galerkin foi utilizado na solução.

CAPÍTULO III:
FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

3. EQUAÇÕES FUNDAMENTAIS PARA A MHD

3.1. EQUAÇÕES DO ELETROMAGNETISMO

Neste subitem serão apresentadas de forma imediata, sem demonstrações prévias, uma vez que estas podem ser encontradas na ampla literatura, as principais leis do eletromagnetismo a serem utilizadas nas formulações matemáticas do presente trabalho, com as devidas simplificações inerentes à magnetohidrodinâmica.

3.1.1. A LEI DE OHM

A corrente dentro de um meio material resulta da resposta das partículas carregadas deste meio às forças a elas aplicadas; em geral, interessa a resposta a um campo elétrico. Essa resposta (relação entre \vec{J} e \vec{E}) depende da natureza do meio material, sendo por isso denominada de equação constitutiva. Para uma grande variedade de materiais isotrópicos líquidos e sólidos, a lei de Ohm (formulada em 1826, por analogia com a lei da condução do calor) é dada por:

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \quad (3.1)$$

onde a constante de proporcionalidade σ , característica intrínseca do material, é a condutividade elétrica do material dada pelo inverso da resistividade $\left(\sigma = \frac{1}{\rho}\right)$.

3.1.2. A LEI DE AMPÈRE

Quando não se consideram campos elétricos variáveis com o tempo, a lei de Ampère nos diz que a integral de linha sobre um caminho fechado do campo magnético B , ou a circulação do vetor campo magnético, produzido por correntes é proporcional à corrente líquida que atravessa a superfície limitada pelo caminho de integração, vulgo curva amperiana (Γ). A lei de Ampère permite calcular o campo magnético a

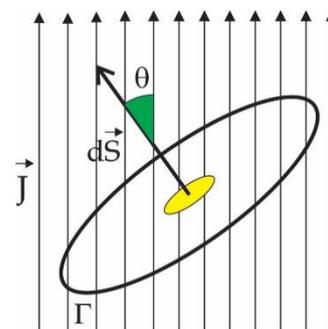


Figura 3.1 - Distribuição de densidade de corrente que atravessa uma superfície S , mostrando o vetor normal $d\vec{S}$ formando um ângulo θ com a densidade de corrente J .

partir de uma distribuição de densidade de corrente elétrica e pode ser escrita na forma integral como é mostrado na Eq. 3.2, associada à Figura 3.1.

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \int_s \vec{J} \cdot d\vec{S} \quad (3.2)$$

Fazendo uso do teorema de Stokes, a lei de Ampère pode ser escrita na forma diferencial, como mostra a Eq. 3.3.

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \quad (3.3)$$

3.1.3. A LEI DE INDUÇÃO DE FARADAY

Uma das leis mais significantes para o advento da geração de energia elétrica, sobretudo das correntes alternadas, a lei de Faraday estabelece que quando há uma variação de fluxo magnético (ϕ) através de um circuito fechado (C), por exemplo, uma espira de área A e elemento de área definido por um vetor normal ($\hat{n} dA = d\vec{A}$), provoca-se o aparecimento de uma força eletromotriz induzida, cuja intensidade é dada pela Eq. (3.4). Um esquema da variação do fluxo através de um circuito (C), é mostrado na Fig. (3.2).

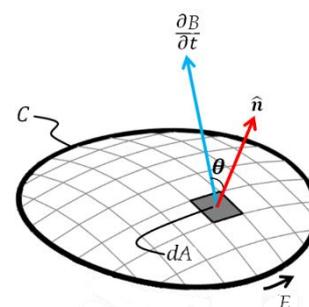


Figura 3.2: Esquema de um circuito fechado (C), através do qual o fluxo magnético varia e induz um campo elétrico ao longo do circuito, gerando uma f.em..

$$\varepsilon = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A} \quad (3.4)$$

Ainda, analogamente à lei de Ampère, tomando a circulação do vetor campo elétrico induzido ao longo do circuito fechado e fazendo uso do teorema de Stokes, a lei de Faraday na forma diferencial é escrita como na Eq. (3.5)

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt} \quad (3.5)$$

3.1.3. A FORÇA DE LORENTZ VOLUMÉTRICA

No âmbito da MHD, o interesse é na força global agindo sobre o meio, não nas forças sobre partículas individuais. Desta forma considerando um escoamento onde uma fração de massa dm do fluido, de volume dV e de carga dq , possui velocidade \vec{u} e que o escoamento está submetido a um campo magnético \vec{B} , a força de Lorentz é dada por:

$$d\vec{F} = dq(\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B})$$

Se a densidade de cargas do fluido é ρ , então $dq = \rho dV$ e a força de Lorentz por unidade de volume (\vec{F}_V), começa a ser escrita assim:

$$\frac{d\vec{F}}{dV} = \vec{F}_V = \rho\vec{E} + \rho\vec{u} \times \vec{B}$$

Como a relação $\rho\vec{u} = \vec{J}$ é uma ubiquidade eletrodinâmica, a versão volumétrica da força de Lorentz é dada pela Equação (3.6).

$$\vec{F}_V = \rho\vec{E} + \vec{J} \times \vec{B} \quad (3.6)$$

Não obstante, na MHD de metais líquidos, o tempo de relaxação das cargas é muito pequeno (da ordem de 10^{-18} s) e as cargas rapidamente se dispersam no fluido. Isto faz com que a densidade de cargas seja desprezível e, a reboque, o termo $\rho\vec{E}$ também (DAVIDSON, 2001). Assim, a força de Lorentz volumétrica para MHD é, finalmente, escrita na Eq. (3.7).

$$\vec{F}_V = \vec{J} \times \vec{B} \quad (3.7)$$

3.1.4. EQUAÇÕES DE MAXWELL

As propriedades dos campos eletromagnéticos podem ser descritas por um conjunto de quatro equações, as chamadas equações de Maxwell. Duas destas equações são

exatamente as leis de Gauss para os campos elétricos e magnéticos¹ e a terceira é a lei de Faraday (EISEBERG; LERNER, 1982, v. 4, p.70). A quarta é uma percepção maxwelliana de que havia uma inconsistência na lei de Ampère para o caso de correntes não contínuas (ASSAD, 2016), o que levou-o a demonstrar a existência da chamada corrente de deslocamento de Maxwell. A lei de Ampère generalizada ou a lei de Ampère-Maxwell é mostrada diretamente na forma integral pela Eq. (3.8) e, na forma diferencial, pela Eq. (3.9).

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \int_A \left(\mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\vec{E}}{dt} \right) \cdot d\vec{A} \quad (3.8)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\vec{E}}{dt} \quad (3.9)$$

Uma rápida comparação com as formas das equações da lei de Ampère, Eqs. (3.2) e (3.3), vê-se que a densidade de corrente de deslocamento de Maxwell (J_d) dada pelo termo

$$\vec{J}_d = \epsilon_0 \frac{d\vec{E}}{dt}. \quad (3.10)$$

Assim, as equações de Maxwell podem ser organizadas conforme a Tabela 3.1 abaixo:

Tabela 3.1 – Equações de Maxwell

EQUAÇÕES DE MAXWELL		
Forma Integral	Forma Diferencial	Equação
$\phi_E = \int_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\epsilon_0}$	$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$	Lei de Gauss para o campo elétrico
$\phi_B = \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$	$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$	Lei de Gauss para o campo Magnético
$\oint_c \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{d\phi_B}{dt}$	$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	Lei de Indução de Faraday
$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 (I + I_d) = \mu_0 I + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\phi}{dt}$	$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$	Lei de Ampère-Maxwell

¹ A discussão sobre a lei de Gauss pode ser encontrada em Tipler (2006, v. 2, p. 43), entre outras bibliografias.

Agora, aplicando a divergência em ambos os membros da densidade de corrente de deslocamento de Maxwell, Eq. (3.10), e utilizando a lei de Gauss para o campo elétrico, tem-se:

$$\nabla \cdot \vec{J}_d = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (3.11)$$

Entretanto, como já citado, na MHD de metais líquidos, o termo $\frac{\partial \rho}{\partial t}$ é desprezível e, conseqüentemente, a corrente de deslocamento também. Esta é uma aproximação clássica em MHD.

Desta forma, em resumo, as equações do eletromagnetismo na forma diferencial para escoamentos de fluidos condutores submetidos a campos magnéticos, ficam finalmente escritas, após simplificações, conforme a Tabela 3.2 a seguir.

Tabela 3.2 – Resumo das Equações do Eletromagnetismo aplicadas à MHD

EQUAÇÕES DO ELETROMAGNETISMO APLICADAS À MHD		
$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	Lei de indução de Faraday	(3.12)
$\vec{F}_v = \vec{J} \times \vec{B}$	Força de Lorentz volumétrica	(3.13)
$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$	Lei de Ampère	(3.14)
$\vec{J} = \sigma (\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B})$	Lei de Ohm ²	(3.15)
$\nabla \cdot \vec{B} = 0$	Lei de Gauss para o campo Magnético ³	(3.16)

3.2. EQUAÇÃO DO TRANSPORTE DO CAMPO MAGNÉTICO

Combinando as leis de Ohm, Faraday e Ampère obtém-se a equação que relaciona o campo magnético (\vec{B}) com o campo de escoamento (\vec{u}).

² O termo $(\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B})$ representa o campo elétrico efetivo (DAVIDSON, 2001)..

³ Esta lei evidencia o comportamento solenoidal do campo magnético.

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\nabla \times \vec{E} = -\nabla \times \left[\left(\frac{\vec{J}}{\sigma} \right) - \vec{u} \times \vec{B} \right] = \nabla \times \left(\vec{u} \times \vec{B} - \nabla \times \frac{\vec{B}}{\mu_0 \sigma} \right)$$

Tomando a identidade vetorial $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) - \nabla^2 \vec{B}$, acrescida da lei de Gauss para o campo magnético ($\nabla \cdot \vec{B} = 0$), a equação acima simplifica-se para:

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \nabla \times (\vec{u} \times \vec{B}) + \lambda_m \nabla^2 \vec{B} \quad (3.17)$$

onde $\lambda_m = (\mu_m \sigma)^{-1}$ é denominada de difusividade magnética. Observe-se o forte acoplamento entre o campo do escoamento e o campo magnético, caracterizando a interação de duas vias entre os dois campos. Condições de contorno e condições iniciais devem ser especificadas para o campo magnético, de maneira a se estabelecer a solução de cada problema (SHERCLIFF, 1965). Como toda difusividade, λ_m tem como unidade, no sistema internacional, m^2/s .

3.3. EQUAÇÕES DE CONTINUIDADE E DE NAVIER-STOKES

Campos magnéticos, como qualquer outra força de campo/corpo, atuam em todo ponto do escoamento, de maneira que seu efeito é diretamente incluído através de um termo adicional de força por unidade de volume, a força de Lorentz volumétrica (Eq. 3.13). Assim, levando em conta tal força de corpo, as equações da continuidade e de Navier-Stokes (componentes da quantidade de movimento), para um fluido incompressível com propriedades físicas constantes são escritas como (BATCHELOR, 2000):

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0 \quad (3.19 a)$$

$$\frac{D\vec{V}}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\nabla^2\vec{V} + \frac{(\vec{J}\times\vec{B})}{\rho} \quad (3.19 \text{ b})$$

Onde $\frac{D\vec{V}}{Dt}$ representa a derivada material, $-\frac{1}{\rho}\nabla p$ representa a força de pressão por unidade de massa, $\nu\nabla^2\vec{V}$ representa a força viscosa por unidade de massa e $\frac{(\vec{J}\times\vec{B})}{\rho}$ representa a força de campo (elétrico e magnético) por unidade de massa.

CAPÍTULO IV:
ESCOAMENTO LAMINAR MHD – *BACKWARD-*
FACING STEP FLOW

4. GEOMETRIA, CONDIÇÕES DE CONTORNO E MODELAGEM MATEMÁTICA

Neste problema⁴ a análise do problema MHD dá-se em um canal de placas paralelas, onde as placas horizontais são isolantes e as verticais são condutoras onde serão colocados eletrodos para: medição de tensões, imposição de corrente ou ligação de uma carga resistiva. Há a imposição de um campo magnético externo e vertical, \vec{B}_0^* , e o escoamento se desenvolve longitudinalmente (na direção de x^*). Colocando um degrau de entrada variável é possível estudar os problemas clássicos do canal de placas paralelas e o “backward-facing step” com mesma formulação. A Figura 4.1, indica a geometria do canal e condições de contorno, que serão mostradas adiante, em termos de variáveis dimensionais. No interior do canal, por se tratar de um escoamento MHD, há um efeito recíproco entre o campo magnético e o escoamento.

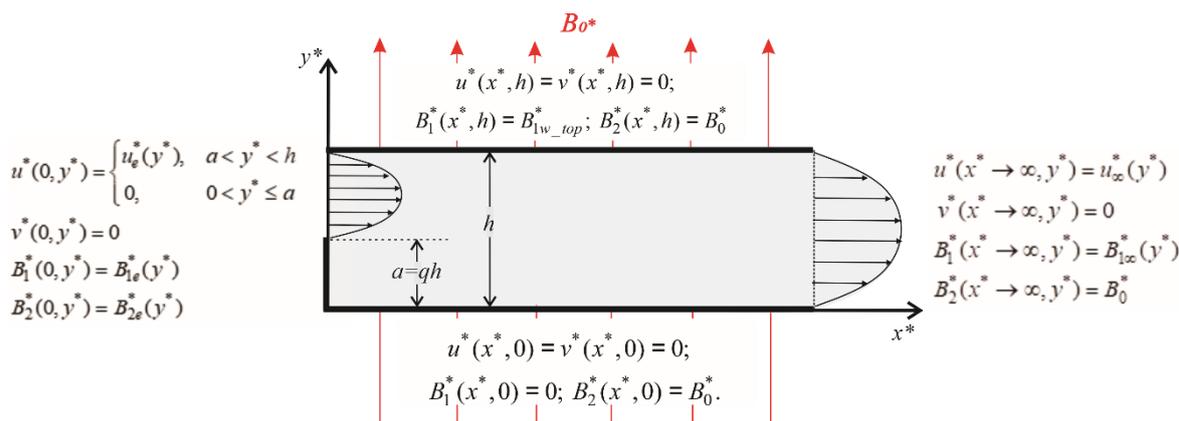


Figura 4.1: Esquema do canal de escoamento MHD retangular de placas paralelas, sendo duas condutoras e duas isolantes, submetido a um campo magnético externo, B_0^* . O degrau de entrada pode variar, $0 \leq qh^* < h^*$.

4.1. MODELAGEM MATEMÁTICA

Para descrever o modelo matemático, as seguintes hipóteses simplificadoras são consideradas:

- a) Efeitos secundários de borda desprezíveis ($h^* \ll w^*$, as placas verticais não interferem

⁴ Deste ponto em diante “*” é incluído para se enaltecer o fato de que as variáveis estão escritas na forma DIMENSIONAL e, não forma ADIMENSIONAL, será omitido.

no escoamento na porção central do canal);

b) O degrau de entrada possui uma altura que varia de acordo com um parâmetro q ($0 \leq q < 1$). Sendo assim, a altura do degrau, denominada de “ $a=qh$ ” é variável no seguinte intervalo: $0 \leq a = qh^* < h^*$;

c) O escoamento é bidimensional, incompressível, laminar e permanente (o vetor velocidade é descrito por duas componentes $\vec{V}^* = \vec{V}^*(x^*, y^*) = u_x^*(x^*, y^*)\hat{i} + u_y^*(x^*, y^*)\hat{j}$). O interesse concentra-se no plano de simetria do canal (plano x-y) e considera-se que as correntes induzidas no eixo z^* não provocam movimento do fluido nesta direção ($u_z^* = 0$). Não obstante, os perfis de entrada e de saída são considerados completamente desenvolvidos;

d) O campo magnético externo é uniforme e tem mesmo sentido de y^* ($\vec{B}_{Ext}^* = B_0^* \hat{j}$);

e) No interior do canal são induzidos campos magnéticos bidimensionais, de tal forma que, $\vec{B}_{Ind}^* = \vec{B}_{Ind}^*(x^*, y^*) = \vec{B}_x^*(x^*, y^*)\hat{i} + \vec{B}_y^*(x^*, y^*)\hat{j}$. Desta maneira, o campo magnético resultante interno é dado pela superposição dos campos induzido e externo:

$$\vec{B}^* = \vec{B}_{Ext}^* + \vec{B}_{Ind}^* = B_0^* \hat{j} + [\vec{B}_x^*(x^*, y^*)\hat{i} + \vec{B}_y^*(x^*, y^*)\hat{j}] = B_1^*(x^*, y^*)\hat{i} + B_2^*(x^*, y^*)\hat{j} \quad (4.1a)$$

$$B_1^*(x^*, y^*) = B_x^*(x^*, y^*) \quad (4.1b)$$

$$B_2^*(x^*, y^*) = B_0^* + B_y^*(x^*, y^*) \quad (4.1c)$$

f) Todo campo elétrico imposto é uniforme e tem mesmo sentido de z^* ($\vec{E}^* = E_z^* \hat{k}$);

g) O efeito Hall e o deslizamento de íons não são considerados na lei de Ohm, ou seja, correntes axiais, devido ao efeito da curvatura de trajetórias de elétrons e íons em um campo magnético, não são consideradas. Então, não são induzidas componentes de velocidade na direção transversal (SUTTON & SHERMAN, 2006);

h) Todos os efeitos térmicos serão negligenciados, o escoamento se dá sob temperatura constante.

Para o processo de adimensionalização das equações, no intuito simplificar o processo de solução das equações governantes, os seguintes grupos adimensionais são empregados:

$$\begin{aligned}
x &= \frac{x^*}{h} & y &= \frac{y^*}{h} & u &= \frac{u^*}{U_e} & v &= \frac{v^*}{U_e} \\
q &= \frac{a}{h} & p &= \frac{P^* - P_e^*}{\rho \bar{U}_e^2} & B_x &= \frac{B_x^*}{B_0^*} & B_y &= \frac{B_y^*}{B_0^*} \\
B_1 &= \frac{B_1^*}{B_0^*} = B_x & B_2 &= \frac{B_2^*}{B_0^*} = B_y + Ha & E_z &= \frac{E_z^*}{U_e B_0^*} & J_z &= \frac{J_z^*}{\sigma U_e B_0^*} \\
\text{Re} &= \frac{\bar{U}_e h}{\nu} & Ha &= B_0^* h \left(\frac{\sigma}{\mu} \right)^{1/2} & \text{Re}_m &= \mu_m \sigma \bar{U}_e h = \frac{\bar{U}_e h}{\lambda_m} & & (4.2 \text{ a-o})
\end{aligned}$$

Nesses grupos, \bar{U}_e e P_e^* indicam, respectivamente, a velocidade média e a pressão média do escoamento na entrada do canal. Para a física estudada, Ha é o número de Hartmann, Re é o número de Reynolds, Re_m é o número de Reynolds magnético, λ_m é a difusividade magnética e E_z é o campo elétrico imposto nos eletrodos do canal.

A partir dos grupos adimensionais anteriores, obtém-se as equações governantes em termos de variáveis primitivas adimensionais. Então, levando-se em conta as hipóteses simplificadoras, as equações de continuidade, de Navier-Stokes (3.19a-b) e a equação do transporte do campo magnético (3.17) podem ser reescritas em termos bidimensionais, por:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (4.3)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - \frac{1}{\text{Re}} J_z B_2 \quad (4.4)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + \frac{1}{\text{Re}} J_z B_1 \quad (4.5)$$

$$0 = \frac{\partial}{\partial y} (u B_2 - v B_1) + \frac{1}{\text{Re}_m} \left(\frac{\partial^2 B_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B_1}{\partial y^2} \right) \quad (4.6)$$

$$0 = -\frac{\partial}{\partial x} (u B_2 - v B_1) + \frac{1}{\text{Re}_m} \left(\frac{\partial^2 B_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B_2}{\partial y^2} \right) \quad (4.7)$$

Ainda, o vetor densidade de corrente (Lei de Ohm) escrito por:

$$\vec{J} = \vec{E} + \vec{V} \times \vec{B} = J_z \hat{k} \quad (4.8 \text{ a})$$

$$J_z = (E_z + u B_2 - v B_1) \quad (4.8 \text{ b})$$

E, também, pela Lei de Ampère:

$$\vec{J} = \frac{1}{\text{Re}_m} \vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{1}{\text{Re}_m} \left(\frac{\partial B_2}{\partial x} - \frac{\partial B_1}{\partial y} \right) \hat{k} \equiv J_z \hat{k} \quad (4.9 \text{ a})$$

$$J_z = \frac{1}{\text{Re}_m} \left(\frac{\partial B_2}{\partial x} - \frac{\partial B_1}{\partial y} \right) \quad (4.9 \text{ b})$$

Na forma adimensional, as condições de contorno na entrada e na saída do canal são mostradas a seguir.

$$x=0 \begin{cases} u(0, y) = \begin{cases} u_e(y), & a < y < h \\ 0, & 0 < y \leq a \end{cases} \\ v(0, y) = 0 \\ B_1(0, y) = B_{1e}(y) \\ B_2(0, y) = B_{2e}(y) \end{cases} ; \quad x \rightarrow \infty \begin{cases} u(x \rightarrow \infty, y) = u_\infty(y) \\ v(x \rightarrow \infty, y) = 0 \\ B_1(x \rightarrow \infty, y) = B_{1\infty}(y) \\ B_2(x \rightarrow \infty, y) = B_{2\infty}(y) \end{cases} \quad (4.10 \text{ a-h})$$

Enquanto que as condições de contorno nas placas dielétricas são:

$$y=0 \begin{cases} u(x, 0) = 0 \\ v(x, 0) = 0 \\ B_1(x, 0) = 0 \\ B_2(x, 0) = Ha \end{cases} ; \quad y=1 \begin{cases} u(x, 1) = 0 \\ v(x, 1) = 0 \\ B_1(x, 1) = B_{1w_top} \\ B_2(x, 1) = Ha \end{cases} \quad (4.11 \text{ a-h})$$

Algumas observações rápidas devem ser ressaltadas:

Na entrada (x=0):

- O escoamento é paralelo e horizontal: $v(0, y) = 0$ e $u(0, y) = u_e(y)$;

- As componentes do campo total, resultado da superposição do campo imposto e induzido, seguem perfis dependentes de y : $B_1(0, y) = B_{1e}(y)$ e $B_2(0, y) = B_{2e}(y)$;

Na saída ($x \rightarrow \infty$):

- Os campos de velocidade e magnético estão completamente desenvolvidos, isto é, não sofrem variações com a coordenada x $\left(\frac{\partial}{\partial x} = 0\right)$. Vide Eqs. (4.10 e-h).

- Diferentemente da componente vertical do campo de velocidade (que é nula), a componente vertical do campo magnético é diferente de zero, devido a existência perene de um campo imposto superposta a um induzido nesta direção: $B_2(x \rightarrow \infty, y) = B_{2\infty}(y)$;

Nos contornos ($y=0$ e $y=1$):

- Há condição de não deslizamento do fluido: $u(x, 0) = 0$ e $u(x, 1) = 0$;

- As placas são impermeáveis: $v(x, 0) = 0$ e $v(x, 1) = 0$;

- O campo magnético é perpendicular à placa isolante inferior, mas, não necessariamente, perpendicular à placa superior. Devido à densidade de corrente transversal ao escoamento, uma componente horizontal do campo pode ser induzida rente à placa superior (B_{1wc}):
 $B_1(x, 0) = 0$ e $B_2(x, 0) = 1$; $B_1(x, 1) = B_{1wc}$ e $B_2(x, 1) = 1$;

Não obstante, apesar de a formulação acima estar completa, as características do campo magnético não serão determinadas através das Eqs. (4.6 e 4.7), em vez disso, emprega-se a alternativa utilizada por Brandt e Gillis (1966), que obtém uma equação de governo para o campo magnético através da igualdade entre as leis de Ohm e de Ampère, Eqs. (4.8b e 4.9b):

$$E_z + u B_2 - v B_1 = \frac{1}{\text{Re}_m} \left(\frac{\partial B_2}{\partial x} - \frac{\partial B_1}{\partial y} \right) \quad (4.12)$$

4.1.2. FORMULAÇÃO EM FUNÇÃO CORRENTE

Uma das dificuldades na solução das Equações (4.4) e (4.5) está no desconhecimento do campo de pressões nos contornos. Fazendo uso de uma função escalar, neste caso, a

conhecida função corrente para o campo de velocidade (ψ) que, além de eliminar os termos associados à pressão, facilita a visualização das linhas de corrente do escoamento, reduz o número de equações a serem resolvidas e aumenta as taxas numéricas de convergência em relação aos problemas resolvidos em termos de variáveis primitivas (PIMENTEL, 1993) e (SANTOS *et al*, 2001). Tendo em vista que o campo magnético apresenta características similares ao campo de velocidade, uma variável semelhante à função corrente também pode ser empregada para a descrição desse campo, a função magnética (β) (ASSAD,2016).

A seguir, mostram-se as equações das transformações em termos das funções escalares.

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (4.13 \text{ a, b})$$

$$B_1 = \frac{\partial \beta}{\partial y}, \quad B_2 = -\frac{\partial \beta}{\partial x} \quad (4.14 \text{ a, b})$$

Nos capítulos seguintes, apresentaremos duas formulações diferentes para a solução do problema do campo de velocidade e do campo magnético: i) uma em termos de ψ e β com problemas de autovalor de 4^a. e 2^a. ordem, respectivamente; ii) e outra uma em termos de ψ , B_1 e B_2 com problemas de autovalor de 4^a para ψ e dois de 2^a. ordem para B_1 e B_2 , respectivamente.

CAPÍTULO V:

**FORMULAÇÃO EM TERMOS DE ψ E β COM
PROBLEMAS DE AUTOVALOR DE 4^a. E 2^a. ORDEM.**

5. EQUAÇÕES DE GOVERNO

Para determinar a equação do campo de velocidade em termos de função corrente, faz-se uso das transformações acima (Eqs. (4.13 e 4.14)) junto com uma manipulação algébrica das Equações (4.3 a 4.5) e Equações (4.8b e 4.9b), tal qual feito por Assad (2016, p. 85), obtendo-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial y} \left(\frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 \psi}{\partial x \partial y^2} \right) - \frac{\partial \psi}{\partial x} \left(\frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 \psi}{\partial y \partial x^2} \right) = \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \psi}{\partial y^4} \right) - \\ \frac{1}{\text{Re Re}_m} \left[\frac{\partial \beta}{\partial x} \left(\frac{\partial^3 \beta}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 \beta}{\partial y^3} \right) \right] + \frac{1}{\text{Re Re}_m} \left[\frac{\partial \beta}{\partial y} \left(\frac{\partial^3 \beta}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 \beta}{\partial x \partial y^2} \right) \right] \end{aligned} \quad (5.1)$$

Para determinar a equação de governo do campo magnético, utilizam-se as transformações dadas nas Eqs. (4.13 e 4.14) junto à equação da continuidade (Eq. (4.3)) aplicados na Eq. (4.12), obtendo-se:

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \beta}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \beta}{\partial y} = \frac{1}{\text{Re}_m} \left(\frac{\partial^2 \beta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \beta}{\partial y^2} \right) + E_z \quad (5.2)$$

Então, nessas novas variáveis, o sistema de equações acima é associado às seguintes condições de contorno:

i) para a entrada e saída do canal:

$$x = 0 \quad \left\{ \begin{aligned} \psi(0, y) = \begin{cases} \psi_e(y) \equiv g_e(y) = \int_q^y u_e(y) dy, & q < y < 1 \\ 0, & 0 < y \leq q \end{cases} \\ \frac{\partial \psi}{\partial x}(0, y) = 0 \\ \beta(0, y) = h_e(y) = \int_q^y B_{1e}(y) dy \end{aligned} \right. \quad (5.3 \text{ a-c})$$

$$x \rightarrow \infty \quad \left\{ \begin{aligned} \psi(x \rightarrow \infty, y) = \psi_\infty(y) \equiv g_\infty(y) = \int_0^y u_\infty(y) dy \\ \frac{\partial \psi}{\partial x}(x \rightarrow \infty, y) = 0 \\ \beta(x \rightarrow \infty, y) = \beta_\infty(x \rightarrow \infty, y) = -Ha x_\infty + h_\infty(y), \quad h_\infty(y) = \int_0^y B_{1\infty}(y) dy \end{aligned} \right. \quad (5.3 \text{ d-f})$$

ii) nas placas dielétricas, inferior e superior:

$$y = 0 \begin{cases} \psi(x, 0) = 0 \\ \frac{\partial \psi}{\partial y}(x, 0) = 0 \\ \beta(x, 0) = -Ha x \end{cases} \quad (5.4 \text{ a-c})$$

$$y = 1 \begin{cases} \psi(x, 1) = 1 - q \\ \frac{\partial \psi}{\partial y}(x, 1) = 0 \\ \beta(x, 1) = h_{\infty}(y) - Ha x \end{cases} \quad (5.4 \text{ d-f})$$

O desenvolvimento para a determinação das condições de contorno, em especial, relativas à região dos campos completamente desenvolvidos (u_{∞} , ψ_{∞} , β_{∞}), é demonstrado em detalhes no Apêndice A deste trabalho.

5.1. APLICAÇÃO DA GITT.

Para a aplicação da GITT seguem-se os passos citados do capítulo 2, na seção 2.1. Tais procedimentos serão aplicados nos próximos problemas e, por esta razão, este texto informativo será suprimido nas demais aplicações deste trabalho.

5.1.1. FILTRAGEM DOS CAMPOS

Sob à luz da GITT, não é benvinda a não homogeneidade na condição de contorno em relação à placa superior (Eq. 5.4d). Para solucionar o entrevero matemático e melhorar a performance computacional, propõe-se a aplicação dos seguintes filtros, trabalhos anteriores (MACHADO e COTTA 1995; SILVA, 1994; PIMENTEL, 1993; SANTOS *et al.*, 2001; RÊGO, 2010 e PONTES, 2015) atestam a eficácia da técnica de filtragem.

$$\psi(x, y) = \psi_H(x, y) + \psi_F(y) \quad (5.5)$$

$$\beta(x, y) = \beta_H(x, y) + \beta_F(y; x) \quad (5.6)$$

O índice H representa o campo filtrado, isto é, homogeneizado, a ser avaliado com a transformação integral. Já o índice F está associado à expressão dos filtros. Para a função corrente o filtro empregado é a solução dos campos completamente desenvolvido do escoamento ($\psi_F(y) = \psi_\infty(y)$). Por outro lado, para o campo de função magnética, o filtro empregado é uma expressão que satisfaz a solução do campo magnético na região completamente desenvolvida apenas para posições longitudinais muito distantes da entrada do canal, tendo como parâmetro a posição local ao longo dele, $\beta_F(y; x) \neq \beta_\infty(x_\infty, y)$. Os filtros são escritos como:

$$\psi_F(y) = \psi_\infty(y) = g_\infty(y)$$

$$\beta_F(y; x) = h_\infty(y) - x$$

Onde $g_\infty(y)$ e $h_\infty(y)$ são integralmente mostrados no Apêndice A deste trabalho.

Substituindo as Equações (5.5 e 5.6) nas Equações governantes (5.1 e 5.2), e nas condições de contorno (Eqs 5.3 e 5.4), obtém-se:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \psi_H}{\partial y} + \frac{d\psi_\infty}{dy} \right) \left(\frac{\partial^3 \psi_H}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 \psi_H}{\partial x \partial y^2} \right) - \frac{\partial \psi_H}{\partial x} \left(\frac{\partial^3 \psi_H}{\partial y^3} + \frac{d^3 \psi_\infty}{dy^3} + \frac{\partial^3 \psi_H}{\partial y \partial x^2} \right) = \\ \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^4 \psi_H}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \psi_H}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \psi_H}{\partial y^4} + \frac{d^4 \psi_\infty}{dy^4} \right) - \\ \frac{1}{\text{Re Re}_m} \left[\left(\frac{\partial \beta_H}{\partial x} + \frac{\partial \beta_F}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial^3 \beta_H}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 \beta_H}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 \beta_F}{\partial y^3} \right) \right] + \\ \frac{1}{\text{Re Re}_m} \left[\left(\frac{\partial \beta_H}{\partial y} + \frac{\partial \beta_F}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial^3 \beta_H}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 \beta_H}{\partial x \partial y^2} \right) \right] \end{aligned} \quad (5.7)$$

$$\left(\frac{\partial \psi_H}{\partial y} + \frac{d\psi_\infty}{dy} \right) \left(\frac{\partial \beta_H}{\partial x} + \frac{\partial \beta_F}{\partial x} \right) - \frac{\partial \psi_H}{\partial x} \left(\frac{\partial \beta_H}{\partial y} + \frac{\partial \beta_F}{\partial y} \right) = \frac{1}{\text{Re}_m} \left(\frac{\partial^2 \beta_H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \beta_H}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \beta_F}{\partial y^2} \right) + E_z \quad (5.8)$$

Com as condições de contorno, na entrada e saída do canal, dadas por:

$$x=0 \begin{cases} \psi_H(0, y) = \begin{cases} q < y < 1: & \psi_H(0, y) = \psi_e(y) - \psi_F(y) = g_e(y) - g_\infty(y) \\ 0 < y \leq q: & 0 \end{cases} \\ \frac{\partial \psi_H}{\partial x}(0, y) = 0 \\ \beta_H(0, y) = \beta_e(y) - \beta_F(y) = h_e(y) - h_\infty(y) \end{cases} \quad (5.9 \text{ a-c})$$

$$x \rightarrow \infty \begin{cases} \psi_H(x \rightarrow \infty, y) = 0 \\ \frac{\partial \psi_H}{\partial x} \Big|_{x \rightarrow \infty} = 0 \\ \beta_H(x \rightarrow \infty, y) = 0 \end{cases} \quad (5.9 \text{ d-f})$$

e nas placas dielétricas:

$$y=0 \begin{cases} \psi_H(x, 0) = 0 \\ \frac{\partial \psi_H}{\partial y}(x, 0) = 0 \\ \beta_H(x, 0) = 0 \end{cases} ; \quad y=1 \begin{cases} \psi_H(x, 1) = 0 \\ \frac{\partial \psi_H}{\partial y}(x, 1) = 0 \\ \beta_H(x, 1) = 0 \end{cases} \quad (5.10 \text{ a-f})$$

Assim, o problema encontra-se reformulado e com condições de contorno homogêneas para a solução do problema auxiliar que é visto a seguir. Na Fig. 5.1 é mostrado o perfil de escoamento com as condições de contorno após aplicação de funções escalares e filtros.

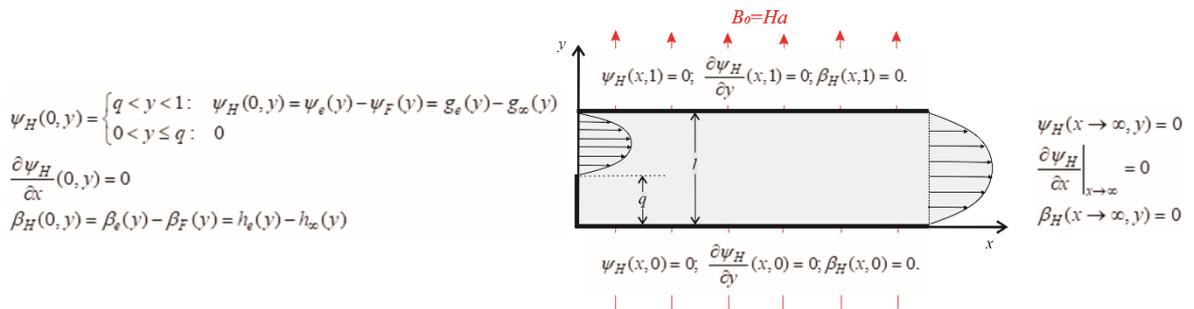


Figura 5.1: perfil de escoamento que mostra condições de contorno homogêneas na direção y , onde aplicar-se-ão os problemas de autovalor auxiliar.

5.1.2. PROBLEMA DE AUTOVALOR AUXILIAR

Observando as características homogêneas do sistema (5.10) na direção "y", escolhem-se os problemas de autovalor nesta direção.

D) PROBLEMA DE AUTOVALOR PARA O CAMPO DE FUNÇÃO CORRENTE.

Um problema de autovalor associado à versão linear homogênea do sistema composto pelas Eqs. (5.7), (5.9) e (5.10), detalhadamente discutido por Perez-Guerrero (1991) e já empregado na solução das equações de Navier-Stokes via GITT por vários autores (*e.g.*: Perez-Guerrero e Cotta (1995, 1996) e Assad (2016)).

$$\frac{d^4 \tilde{Y}_i(y)}{dy^4} = \mu_i^4 \tilde{Y}_i(y) \quad (5.11)$$

Com condições de contorno remodeladas para:

$$y=0 \begin{cases} \tilde{Y}_i(0) = 0 \\ \frac{d\tilde{Y}_i}{dy}(0) = 0 \end{cases} ; \quad y=1 \begin{cases} \tilde{Y}_i(1) = 0 \\ \frac{d\tilde{Y}_i}{dy}(1) = 0 \end{cases} \quad (5.12 \text{ a-d})$$

A solução (autofunções) desse problema auxiliar é dada por:

$$\tilde{Y}_i(y) = \begin{cases} \frac{\cos\left[\mu_i\left(y-\frac{1}{2}\right)\right]}{\cos\left(\frac{\mu_i}{2}\right)} - \frac{\cosh\left[\mu_i\left(y-\frac{1}{2}\right)\right]}{\cosh\left(\frac{\mu_i}{2}\right)} & \text{para } i = 1,3,5, \dots \\ \frac{\sin\left[\mu_i\left(y-\frac{1}{2}\right)\right]}{\sin\left(\frac{\mu_i}{2}\right)} - \frac{\sinh\left[\mu_i\left(y-\frac{1}{2}\right)\right]}{\sinh\left(\frac{\mu_i}{2}\right)} & \text{para } i = 2,4,6, \dots \end{cases} \quad (5.13)$$

A partir das condições de contorno, Eqs. (5.12.a-d), os autovalores são as soluções da equação transcendental (obtidas com o uso da sub-rotina ZBREN (IMSL, 1989)):

$$\tanh\left(\frac{\mu_i}{2}\right) = \begin{cases} -\tan\left(\frac{\mu_i}{2}\right) & \text{para } i = 1,3,5, \dots \\ +\tan\left(\frac{\mu_i}{2}\right) & \text{para } i = 2,4,6, \dots \end{cases} \quad \text{ou} \quad \cos \mu_i \cosh \mu_i = 1 \quad (5.14)$$

Observa-se que a segunda equação, apresentada em (5.14), é numericamente mais fácil de ser avaliada.

As autofunções apresentam a propriedade de serem autonormalizadas, isto é, a sua propriedade de ortogonalidade é tal que:

$$\int_0^1 \tilde{Y}_i(y) \tilde{Y}_j(y) dy = \begin{cases} N_i = 1 & ; & i = j \\ 0 & ; & i \neq j \end{cases} \quad (5.15)$$

Admitindo-se que a função corrente $\psi_H(x,y)$ pode ser construída como uma expansão de autofunções e como já estão definidas as autofunções, os autovalores e a norma, o par transformada integral/inversa é, então, definido como:

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\psi}_{Hi}(x) = \int_0^1 \tilde{Y}_i(y) \psi_H(x,y) dy \quad \text{transformada integral} \\ \psi_H(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{Y}_i(y) \bar{\psi}_{Hi}(x) \quad \text{inversa} \end{array} \right. \quad (5.16)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\psi}_{Hi}(x) = \int_0^1 \tilde{Y}_i(y) \psi_H(x,y) dy \quad \text{transformada integral} \\ \psi_H(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{Y}_i(y) \bar{\psi}_{Hi}(x) \quad \text{inversa} \end{array} \right. \quad (5.17)$$

Pode-se, agora, prosseguir com a transformação integral do problema diferencial original, operando-se com $\int_0^1 \tilde{Y}_i(y) dy$ em ambos os lados da equação (5.7) e na condição de contorno de entrada (Eq. 5.9a,b) e de saída (Eq. 5.9d,e).

II) PROBLEMA DE AUTOVALOR PARA O CAMPO DE FUNÇÃO MAGNÉTICA.

Sob o lastro do trabalho de Özisik (1993), que apresenta o problema de autovalor apropriado para fundamentar a construção da função escalar original (neste caso β) como uma expansão em autofunções de base ortogonal (MIYAGAWA *et al*, 2017). O problema auxiliar na direção y , para o campo de função magnética, associado a Eq. (5.8) é dado por:

$$\frac{d^2 H_i(y)}{dy^2} = -\alpha_i^2 H_i(y) \quad (5.18)$$

Onde \tilde{H}_i é a autofunção normalizada e os autovalores são dados por α_i .

As condições de contorno, já homogeneizadas, são remodeladas para:

$$H_i(0) = H_i(1) = 0 \quad (5.19)$$

Onde a solução (autofunções) desse problema auxiliar é dada por:

$$H_i(y) = \text{sen}(\alpha_i y) \quad (5.20)$$

Diante das condições de contorno (Eq. 5.19) e da Eq. (5.20), tem-se os seguintes autovalores:

$$\alpha_i = i\pi, \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (5.21)$$

Assim, as autofunções mostram a seguinte propriedade de ortogonalidade:

$$\int_0^1 H_i(y) H_j(y) dy = \begin{cases} M_i & ; \quad i = j \\ 0 & ; \quad i \neq j \end{cases} \quad (5.22)$$

A norma associada a estas autofunções é avaliada por:

$$M_i = \int_0^1 H_i^2(y) dy = \int_0^1 \text{sen}^2(i\pi y) dy = \frac{1}{2} \quad (5.23)$$

Por questões de simplicidade, é empregada uma autofunção autonormalizada, definida como:

$$\tilde{H}_i(y) = \frac{H_i(y)}{\sqrt{M_i}} = \sqrt{2} \text{sen}(\alpha_i y) \quad (5.24)$$

Admitindo-se que a função magnética $\beta_H(x, y)$ pode ser construído como uma expansão de autofunções e como já estão definidas as autofunções, os autovalores e a norma, o par transformada integral/inversa é, então, definido como:

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\beta}_i(x) = \int_0^1 \tilde{H}_i(y) \beta_H(x, y) dy \quad \text{transformada integral} \\ \beta_H(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{H}_i(y) \bar{\beta}_i(x) \quad \text{inversa} \end{array} \right. \quad (5.25)$$

$$\left. \begin{array}{l} \beta_H(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{H}_i(y) \bar{\beta}_i(x) \quad \text{inversa} \end{array} \right\} \quad (5.26)$$

Pode-se, agora, prosseguir com a transformação integral do problema diferencial original, operando-se com $\int_0^1 \tilde{H}_i(y) dy$ em ambos os lados da equação (5.8) e nas condições de contorno de entrada e saída (Eq. 5.9 c,f).

5.1.3. TRANSFORMAÇÃO INTEGRAL DOS CAMPOS

Tendo-se estabelecido o par transformada-inversa e havendo sido definidas a autofunção e as propriedades de ortogonalidade do problema de autovalor escolhido para os diversos campos, pode-se, agora, prosseguir com a transformação integral do problema diferencial original.

D) TRANSFORMAÇÃO INTEGRAL DO CAMPO DE VELOCIDADE.

Operando-se com $\int_0^1 \tilde{Y}_i(y) dy$ em ambos os lados da equação (5.7),

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \tilde{Y}_i(y) \left[\left(\frac{\partial \psi_H}{\partial y} + \frac{d\psi_\infty}{dy} \right) \left(\frac{\partial^3 \psi_H}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 \psi_H}{\partial x \partial y^2} \right) - \frac{\partial \psi_H}{\partial x} \left(\frac{\partial^3 \psi_H}{\partial y^3} + \frac{d^3 \psi_\infty}{dy^3} + \frac{\partial^3 \psi_H}{\partial y \partial x^2} \right) \right] dy = \\ & \int_0^1 \tilde{Y}_i(y) \left[\frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^4 \psi_H}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \psi_H}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \psi_H}{\partial y^4} + \frac{d^4 \psi_\infty}{dy^4} \right) \right] dy + \\ & \int_0^1 \tilde{Y}_i(y) \left\{ -\frac{1}{\text{Re Re}_m} \left[\left(\frac{\partial \beta_H}{\partial x} + \frac{\partial \beta_F}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial^3 \beta_H}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 \beta_H}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 \beta_F}{\partial y^3} \right) - \left(\frac{\partial \beta_H}{\partial y} + \frac{\partial \beta_F}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial^3 \beta_H}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 \beta_H}{\partial x \partial y^2} \right) \right] \right\} dy \end{aligned} \quad (5.27)$$

Isto posto, após uso da fórmula de inversão, da propriedade de ortogonalidade das autofunções e das condições de contorno e, finalmente, das características do campo do escoamento completamente desenvolvido, o sistema resultante de quarta ordem para o campo de função corrente filtrada transformada é mostrado a seguir.

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left[A_{ijk}^{\psi} \left(\frac{d^3 \bar{\psi}_{Hj}}{dx^3}(x) \bar{\psi}_{Hk}(x) - \frac{d\bar{\psi}_{Hj}}{dx}(x) \frac{d^2 \bar{\psi}_{Hk}}{dx^2}(x) \right) + (B_{ijk}^{\psi} - E_{ijk}^{\psi}) \frac{d\bar{\psi}_{Hj}}{dx}(x) \bar{\psi}_{Hk}(x) \right] + \\
& \sum_{j=1}^{\infty} \left[C_{ij\infty}^{\psi} \frac{d^3 \bar{\psi}_{Hj}}{dx^3}(x) + (D_{ij\infty}^{\psi} - F_{ij\infty}^{\psi}) \frac{d\bar{\psi}_{Hj}}{dx}(x) - \frac{2}{\text{Re}} G_{ij}^{\psi} \frac{d^2 \bar{\psi}_{Hj}}{dx^2}(x) \right] + \\
& \frac{1}{\text{Re Re}_m} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} I_{ijk}^{\psi} \left[\frac{d\bar{\beta}_{Hj}}{dx}(x) \frac{d^2 \bar{\beta}_{Hk}}{dx^2}(x) - \frac{d^3 \bar{\beta}_{Hj}}{dx^3}(x) \bar{\beta}_{Hk}(x) + (\alpha_j^2 - \alpha_k^2) \frac{d\bar{\beta}_{Hj}}{dx}(x) \bar{\beta}_{Hk}(x) \right] + \\
& \frac{1}{\text{Re Re}_m} \sum_{j=1}^{\infty} \left[J_{ijF}^{\psi} \frac{d\bar{\beta}_{Hj}}{dx}(x) + K_{ijF}^{\psi} \left(\frac{d^2 \bar{\beta}_{Hj}}{dx^2}(x) - \alpha_j^2 \bar{\beta}_{Hj}(x) \right) + M_{ijF}^{\psi} \left(\alpha_j^2 \frac{d\bar{\beta}_{Hj}}{dx}(x) - \frac{d^3 \bar{\beta}_{Hj}}{dx^3}(x) \right) \right] = \\
& \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{d^4 \bar{\psi}_{Hi}}{dx^4}(x) + \mu_i^4 \bar{\psi}_{Hi}(x) + H_{i\infty}^{\psi} - \frac{L_{iFF}^{\psi}}{\text{Re}_m} \right)
\end{aligned} \tag{5.28}$$

De maneira similar, as condições de contorno de entrada e saída (Eqs. 5.9 a, b, d, e) são igualmente transformadas:

$$\begin{cases} \bar{\psi}_{Hi}(0) = \bar{g}_i = \int_0^1 \tilde{Y}_i(y) \psi_H(0, y) dy = \int_0^1 \tilde{Y}_i(y) [g_e(y) - g_{\infty}(y)] dy \\ \left. \frac{d\bar{\psi}_{Hi}}{dx} \right|_{x=0} = 0 \end{cases} \tag{5.29 a, b}$$

$$\begin{cases} \bar{\psi}_{Hi}(x \rightarrow \infty) = 0 \\ \left. \frac{d\bar{\psi}_{Hi}}{dx} \right|_{x=\infty} = 0 \end{cases} \tag{5.30 a, b}$$

O termo $\frac{d^3 \bar{\beta}_{Hj}}{dx^3}(x)$, da Equação (5.28), será desenvolvido no final da próxima seção,

que faz menção à transformação integral do campo magnético.

Os coeficientes⁵ que aparecem na Equação (5.28), resultantes do processo de transformação integral, são definidos como⁶:

$$\begin{aligned}
 A_{ijk}^{\psi} &= \int_0^1 \tilde{Y}_i(y) \tilde{Y}_j(y) \tilde{Y}_k'(y) dy & B_{ijk}^{\psi} &= \int_0^1 \tilde{Y}_i(y) \tilde{Y}_j''(y) \tilde{Y}_k'(y) dy \\
 C_{ij\infty}^{\psi} &= \int_0^1 \tilde{Y}_i(y) \tilde{Y}_j(y) \frac{d\psi_{\infty}(y)}{dy} dy & D_{ij\infty}^{\psi} &= \int_0^1 \tilde{Y}_i(y) \tilde{Y}_j''(y) \frac{d\psi_{\infty}(y)}{dy} dy \\
 E_{ijk}^{\psi} &= \int_0^1 \tilde{Y}_i(y) \tilde{Y}_j(y) \tilde{Y}_k'''(y) dy & F_{ij\infty}^{\psi} &= \int_0^1 \tilde{Y}_i(y) \tilde{Y}_j(y) \frac{d^3\psi_{\infty}(y)}{dy^3} dy \\
 G_{ij}^{\psi} &= \int_0^1 \tilde{Y}_i(y) \tilde{Y}_j''(y) dy & H_{i\infty}^{\psi} &= \int_0^1 \tilde{Y}_i(y) \frac{d^4\psi_{\infty}(y)}{dy^4} dy \\
 I_{ijk}^{\psi} &= \int_0^1 \tilde{Y}_i(y) \tilde{H}_j(y) \tilde{H}_k'(y) dy & J_{ijF}^{\psi} &= \int_0^1 \tilde{Y}_i(y) \tilde{H}_j(y) \frac{\partial^3 \beta_F(y; x)}{\partial y^3} dy \\
 K_{ijF}^{\psi} &= \int_0^1 \tilde{Y}_i(y) \tilde{H}_j'(y) \frac{\partial \beta_F(y; x)}{\partial x} dy & L_{iFF}^{\psi} &= \int_0^1 \tilde{Y}_i(y) \frac{\partial \beta_F(y; x)}{\partial x} \frac{\partial^3 \beta_F(y; x)}{\partial y^3} dy \\
 M_{ijF}^{\psi} &= \int_0^1 \tilde{Y}_i(y) \tilde{H}_j(y) \frac{\partial \beta_F(y; x)}{\partial y} dy
 \end{aligned}$$

Equações (5.31 a-m)

⁵ Os índices sobrescritos nos coeficientes, ψ , β e T , são usados para diferenciar os coeficientes utilizados nas respectivas equações filtradas transformadas de campo de função corrente, função magnética e de temperatura.

⁶ Nos integrandos, o apóstrofe (') denota diferenciação em relação à coordenada transversal y .

II) TRANSFORMAÇÃO INTEGRAL DO CAMPO MAGNÉTICO.

Operando-se com $\int_0^1 \tilde{H}_i(y) dy$ em ambos os lados da equação (5.8),

$$\begin{aligned} \int_0^1 \tilde{H}_i(y) \left[\left(\frac{\partial \psi_H}{\partial y} + \frac{d\psi_\infty}{dy} \right) \left(\frac{\partial \beta_H}{\partial x} + \frac{\partial \beta_F}{\partial x} \right) - \frac{\partial \psi_H}{\partial x} \left(\frac{\partial \beta_H}{\partial y} + \frac{\partial \beta_F}{\partial y} \right) \right] dy = \\ \int_0^1 \tilde{H}_i(y) \left[\frac{1}{\text{Re}_m} \left(\frac{\partial^2 \beta_H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \beta_H}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \beta_F}{\partial y^2} \right) + E_z \right] dy \end{aligned} \quad (5.32)$$

Isto posto, após uso da fórmula de inversão, da propriedade de ortogonalidade das autofunções e da condição de contorno e, finalmente, das características do campo magnético para o escoamento completamente desenvolvido, o sistema resultante de segunda ordem para o campo de função magnética filtrada transformada, é mostrado a seguir.

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_{ijk}^\beta \frac{d\bar{\beta}_{Hj}}{dx}(x) \bar{\psi}_{Hk}(x) - E_{ijk}^\beta \bar{\beta}_{Hj}(x) \frac{d\bar{\psi}_{Hk}}{dx}(x) \right) + \sum_{j=1}^{\infty} \left(B_{ijF}^\beta \bar{\psi}_{Hj}(x) - F_{ijF}^\beta \frac{d\bar{\psi}_{Hj}}{dx}(x) \right) + \\ \sum_{j=1}^{\infty} C_{ij\infty}^\beta \frac{d\bar{\beta}_{Hj}}{dx}(x) = \frac{1}{\text{Re}_m} \left(\frac{d^2 \bar{\beta}_{Hi}}{dx^2}(x) - \alpha_i^2 \bar{\beta}_{Hi}(x) + G_{iF}^\beta(x) \right) + H_i^\beta E_z - D_{i\infty F}^\beta \end{aligned} \quad (5.33)$$

Com a condição de contorno na entrada transformada para:

$$\bar{\beta}_{Hi}(0) = \bar{h}_i = \int_0^1 \tilde{H}_i(y) [h_e(y) - h_\infty(y)] dy \quad \text{com} \quad i = 1, \dots, \infty \quad (5.34)$$

$$\bar{\beta}_{Hi}(x \rightarrow \infty) = 0 \quad \text{com} \quad i = 1, \dots, \infty \quad (5.35)$$

Os coeficientes que aparecem na Equação (5.33), resultantes do processo de transformação integral, são definidos como:

$$A_{ijk}^\beta = \int_0^1 \tilde{H}_i(y) \tilde{H}_j(y) \tilde{Y}_k'(y) dy \quad B_{ijF}^\beta = \int_0^1 \tilde{H}_i(y) \tilde{Y}_j'(y) \frac{\partial \beta_F}{\partial x}(y; x) dy$$

$$\begin{aligned}
C_{ij\infty}^\beta &= \int_0^1 \tilde{H}_i(y) \tilde{H}_j(y) \frac{d\psi_\infty}{dy}(y) dy & D_{i\infty F}^\beta &= \int_0^1 \tilde{H}_i(y) \frac{d\psi_\infty}{dy}(y) \frac{\partial \beta_F}{\partial x}(y; x) dy \\
E_{ijk}^\beta &= \int_0^1 \tilde{H}_i(y) \tilde{H}'_j(y) \tilde{Y}_k(y) dy & F_{iF}^\beta &= \int_0^1 \tilde{H}_i(y) \tilde{Y}_j(y) \frac{\partial \beta_F}{\partial y}(y; x) dy \\
G_{iF}^\beta &= \int_0^1 \tilde{H}_i(y) \frac{\partial^2 \beta_F}{\partial y^2}(y; x) dy & H_i^\beta &= \int_0^1 \tilde{H}_i(y) dy
\end{aligned}$$

Equações (5.36 a-h)

Conforme dito anteriormente, o termo $\frac{d^3 \bar{\beta}_{Hj}}{dx^3}(x)$ da Equação (5.28), é obtido a partir da transformação integral do termo $\frac{\partial^3 \beta_H}{\partial x^3}(x)$ e este, por sua vez, é obtido da derivação da equação da função escalar magnética (Eq. 5.8), isolando-se nela o termo $\frac{\partial^2 \beta_H}{\partial x^2}$, conforme mostrado a seguir.

$$\frac{\partial^2 \beta_H}{\partial x^2} = \text{Re}_m \left[\left(\frac{\partial \psi_H}{\partial y} + \frac{d\psi_\infty}{dy} \right) \left(\frac{\partial \beta_H}{\partial x} + \frac{\partial \beta_F}{\partial x} \right) - \frac{\partial \psi_H}{\partial x} \left(\frac{\partial \beta_H}{\partial y} + \frac{\partial \beta_F}{\partial y} \right) \right] - \left(\frac{\partial^2 \beta_H}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \beta_F}{\partial y^2} \right) - \text{Re}_m E_z \quad (5.37)$$

Assim,

$$\frac{\partial^3 \beta_H}{\partial x^3} = \text{Re}_m \left(\frac{\frac{\partial^2 \psi_H}{\partial x \partial y} \frac{\partial \beta_H}{\partial x} + \frac{\partial^2 \psi_H}{\partial x \partial y} \frac{\partial \beta_F}{\partial x} + \frac{\partial \psi_H}{\partial y} \frac{\partial^2 \beta_H}{\partial x^2} + \frac{d\psi_\infty}{dy} \frac{\partial^2 \beta_H}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi_H}{\partial x^2} \frac{\partial \beta_H}{\partial y} - \frac{\partial \psi_H}{\partial x} \frac{\partial^2 \beta_H}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \psi_H}{\partial x^2} \frac{\partial \beta_F}{\partial y} - \frac{1}{\text{Re}_m} \frac{\partial^3 \beta_H}{\partial x \partial y^2} \right) \quad (5.38)$$

Aplicando a transformada integral, $\int_0^1 \tilde{H}_j(y) \frac{\partial^3 \beta_H}{\partial x^3}(x) dy$, sobre a equação acima, tem-se:

se:

$$\begin{aligned}
\frac{d^3 \bar{\beta}_{Hj}}{dx^3} = & \operatorname{Re}_m \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\begin{array}{l} A_{jmn}^{\beta} \left(\frac{d \bar{\beta}_{Hm}}{dx}(x) \frac{d \bar{\psi}_{Hn}}{dx}(x) + \frac{d^2 \bar{\beta}_{Hm}}{dx^2}(x) \bar{\psi}_{Hn}(x) \right) - \\ E_{jmn}^{\beta} \left(\frac{d \bar{\beta}_{Hm}}{dx}(x) \frac{d \bar{\psi}_{Hn}}{dx}(x) + \bar{\beta}_{Hm}(x) \frac{d^2 \bar{\psi}_{Hn}}{dx^2}(x) \right) \end{array} \right] + \\
& \operatorname{Re}_m \sum_{m=1}^{\infty} \left(B_{jmF}^{\beta} \frac{d \bar{\psi}_{Hm}}{dx}(x) - F_{jmF}^{\beta} \frac{d^2 \bar{\psi}_{Hm}}{dx^2}(x) \right) + \operatorname{Re}_m \sum_{m=1}^{\infty} C_{jm\infty}^{\beta} \frac{d^2 \bar{\beta}_{Hm}}{dx^2}(x) + \alpha_j^2 \frac{d \bar{\beta}_{Hj}}{dx}(x)
\end{aligned} \tag{5.39}$$

Os coeficientes indicados na Equação (5.39) são:

$$\begin{aligned}
A_{jmn}^{\beta} &= \int_0^1 \tilde{H}_j(y) \tilde{H}_m(y) \tilde{Y}_n'(y) dy & B_{jmF}^{\beta} &= \int_0^1 \tilde{H}_j(y) \tilde{Y}_m'(y) \frac{\partial \beta_F}{\partial x}(y; x) dy \\
C_{jm\infty}^{\beta} &= \int_0^1 \tilde{H}_j(y) \tilde{H}_m(y) \frac{d \psi_{\infty}}{dy}(y) dy & E_{jmn}^{\beta} &= \int_0^1 \tilde{H}_j(y) \tilde{H}_m'(y) \tilde{Y}_n(y) dy \\
F_{jmF}^{\beta} &= \int_0^1 \tilde{H}_j(y) \tilde{Y}_m(y) \frac{\partial \beta_F}{\partial y}(y; x) dy
\end{aligned} \tag{Equações (5.40 a-e)}$$

Deve-se observar que os coeficientes acima (Eqs. 5.40 a-e) já foram definidos nas Equações 5.36, devendo-se apenas alterar os índices.

5.2. ALGORÍTIMO COMPUTACIONAL

Como o sistema de EDOs composto pelas Eqs. (5.28) e (5.33), não apresenta soluções estritamente analíticas, procedimentos numéricos devem ser implementados. Não obstante, soluções exatas para este sistema implicariam em se resolver um sistema infinito de equações, gerando ônus computacional altíssimo, impossibilitando o processo. Uma característica importante do método é a garantia de convergência das soluções para ordens crescentes de truncamento nas séries. Então, é possível que, para um determinado número de termos nas séries, a solução já apresente um número de algarismos significativos não mais variáveis, convergidos para um certo número de termos nas expansões. Desta forma, diz-se que o método da transformada integral é um método de precisão controlada na ordem de truncamento dessas expansões e, tal ordem, é determinada durante o processo de solução,

avaliando-se caso a caso. Este procedimento gera resultados satisfatórios que se assemelham, para um determinado grau de precisão, aos obtidos por soluções puramente analíticas.

Assim, truncam-se as respectivas equações transformadas de função corrente e função magnética, para ordens $N\psi$ e $N\beta$, que podem ser diferentes para cada expansão. Assim, omitindo a dependência dos campos transformados em relação à x para fins de simplificação, o sistema resultante, em conjunto com suas condições de contorno, torna-se:

$$\begin{aligned}
\frac{d^4 \bar{\psi}_{Hi}}{dx^4}(x) = & \operatorname{Re} \sum_{j=1}^{N\psi} \sum_{k=1}^{N\psi} \left[A_{ijk}^{\psi} \left(\frac{d^3 \bar{\psi}_{Hj}}{dx^3} \bar{\psi}_{Hk} - \frac{d\bar{\psi}_{Hj}}{dx} \frac{d^2 \bar{\psi}_{Hk}}{dx^2} \right) + (B_{ijk}^{\psi} - E_{ijk}^{\psi}) \frac{d\bar{\psi}_{Hj}}{dx} \bar{\psi}_{Hk} \right] + \\
& \operatorname{Re} \sum_{j=1}^{N\psi} \left[C_{ij\infty}^{\psi} \frac{d^3 \bar{\psi}_{Hj}}{dx^3} + (D_{ij\infty}^{\psi} - F_{ij\infty}^{\psi}) \frac{d\bar{\psi}_{Hj}}{dx} - \frac{2}{\operatorname{Re}} G_{ij}^{\psi} \frac{d^2 \bar{\psi}_{Hj}}{dx^2} \right] + \\
& \frac{1}{\operatorname{Re}_m} \sum_{j=1}^{N\beta} \sum_{k=1}^{N\beta} I_{ijk}^{\psi} \left[\frac{d\bar{\beta}_{Hj}}{dx} \frac{d^2 \bar{\beta}_{Hk}}{dx^2} - \frac{d^3 \bar{\beta}_{Hj}}{dx^3} \bar{\beta}_{Hk} + (\alpha_j^2 - \alpha_k^2) \frac{d\bar{\beta}_{Hj}}{dx} \bar{\beta}_{Hk} \right] + \\
& \frac{1}{\operatorname{Re}_m} \sum_{j=1}^{N\beta} \left[J_{ijF}^{\psi} \frac{d\bar{\beta}_{Hj}}{dx} + K_{ijF}^{\psi} \left(\frac{d^2 \bar{\beta}_{Hj}}{dx^2} - \alpha_j^2 \bar{\beta}_{Hj} \right) + M_{ijF}^{\psi} \left(\alpha_j^2 \frac{d\bar{\beta}_{Hj}}{dx} - \frac{d^3 \bar{\beta}_{Hj}}{dx^3} \right) \right] \\
& - \left(\mu_i^4 \bar{\psi}_{Hi} + H_{i\infty}^{\psi} - \frac{L_{iFF}^{\psi}}{\operatorname{Re}_m} \right)
\end{aligned} \tag{5.41 a}$$

$$\begin{cases} \bar{\psi}_{Hi}(0) = \bar{g}_i = \int_0^1 \tilde{Y}_i(y) [g_e(y) - g_{\infty}(y)] dy, & \bar{\psi}_{Hi}(x \rightarrow \infty) = 0 \\ \left. \frac{d\bar{\psi}_{Hi}}{dx} \right|_{x=0} = 0, & \left. \frac{d\bar{\psi}_{Hi}}{dx} \right|_{x \rightarrow \infty} = 0 \end{cases} \quad \text{com } i = 1, \dots, N\psi$$

(5.41 b)

$$\frac{d^2 \bar{\beta}_{Hi}}{dx^2}(x) = \operatorname{Re}_m \left(\sum_{j=1}^{N\beta} \sum_{k=1}^{N\psi} \left(A_{ijk}^{\beta} \frac{d\bar{\beta}_{Hj}}{dx} \bar{\psi}_{Hk} - E_{ijk}^{\beta} \bar{\beta}_{Hj} \frac{d\bar{\psi}_{Hk}}{dx} \right) + \sum_{j=1}^{N\psi} \left(B_{ijF}^{\beta} \bar{\psi}_{Hj} - F_{ijF}^{\beta} \frac{d\bar{\psi}_{Hj}}{dx} \right) + \sum_{j=1}^{N\beta} C_{ij\infty}^{\beta} \frac{d\bar{\beta}_{Hj}}{dx} - \left(H_i^{\beta} E_z - D_{i\infty F}^{\beta} \right) \right) + \alpha_i^2 \bar{\beta}_{Hi} - G_{iF}^{\beta} \tag{5.42 a}$$

$$\begin{aligned}\bar{\beta}_{Hi}(0) &= \bar{h}_i = \int_0^1 \tilde{H}_i(y) [h_e(y) - h_\infty(y)] dy, \\ \bar{\beta}_{Hi}(x \rightarrow \infty) &= 0 \quad \text{com} \quad i=1, \dots, N\beta\end{aligned}\tag{5.42 b}$$

Observa-se que as condições de contorno na saída do canal estão especificadas no infinito. Este imbróglho é reduzido admitindo-se uma posição suficientemente distante da entrada do canal, ao ponto de se tratar o escoamento como completamente desenvolvido. Para se determinar o truncamento ideal do domínio, ainda indeterminado, torna-se indispensável resolver-se iterativamente o problema, levando-se em conta as condições de contorno em outras posições e para se constatar se a convergência das soluções foi atingida nas regiões de interesse.

Esta dificuldade é facilmente contornada pelo presente método, por uma transformação da variável independente x , redefinindo o domínio de $[0, \infty)$ a $[0, 1]$. Para isso, recomenda a seguinte transformação (PEREZ-GUERRERO, 1993):

$$\eta = 1 - e^{-cx}\tag{5.43}$$

Onde c é um parâmetro de compressão de escala, escolhido de maneira tal que o comportamento numérico da solução seja o mais suave possível.

O uso da transformação do domínio é completado ao definir-se:

$$\frac{d\eta}{dx} = c(1 - \eta)\tag{5.44}$$

Agora, o problema a ser resolvido seria dado pelas Eqs. (5.41) e (5.42), associadas às transformações de domínio (Eqs. (5.43) e (5.44)), com condições de contorno especificadas em $\eta = 1$.

A solução numérica deste sistema será obtida através de algoritmos bem estabelecidos e testados, disponíveis em bibliotecas de sub-rotinas matemáticas, como o IMSL (1989). O IMSL possui a sub-rotina BVFPD para a solução de problemas diferenciais ordinários não lineares com condições de contorno em dois pontos, que apresentam comportamento “stiff”. (PEREZ-GUERRERO, 1993, p.20).

Essa rotina resolve problemas do tipo:

$$\underline{X}' = f(x, \underline{X}) \text{ com } x \in [a, b] \quad (5.45 \text{ a})$$

$$g_{bc} [\underline{X}(a), \underline{X}(b)] = 0 \quad (5.45 \text{ b})$$

Seu algoritmo é baseado na rotina PASVA3, descrito em Pereyra (1978), e faz uma discretização sobre uma malha não uniforme, que é escolhida adaptativamente para conseguir um erro local aproximadamente o mesmo em qualquer posição, mantendo-se um controle de erro global automático. O sistema algébrico não-linear resultante é resolvido mediante o método de Newton generalizado.

Para fazer uso da DBVPFD é necessário reescrever o sistema de quarta e segunda ordem como um sistema de primeira ordem. Para isso, admite-se o vetor $\underline{X}(\eta)$, cujo tamanho será $4N\psi + 2N\beta$, tal que:

$$X = \left\{ \bar{\psi}_{Hi}, \frac{d\bar{\psi}_{Hi}}{dx}, \frac{d^2\bar{\psi}_{Hi}}{dx^2}, \frac{d^3\bar{\psi}_{Hi}}{dx^3}, \bar{\beta}_{Hj}, \frac{d\bar{\beta}_{Hj}}{dx} \right\}_{4N\psi+2N\beta}; \quad \begin{cases} i = 1, 2, \dots, N\psi \\ j = 1, 2, \dots, N\beta \end{cases} \quad (5.46)$$

Tabela 5.1 – Transformação do sistema de ordem superior para um de 1ª. ordem.

VETOR X	DERIVADAS de 1ª ORDEM – Vetor X' Sub-rotina da BVPFD
$X_i = \bar{\psi}_{Hi}$	$i = 1, 2, 3, \dots, N\psi$
$X_{N\psi+i} = \frac{d\bar{\psi}_{Hi}}{dx} = \frac{dX_i}{dx} = \frac{dX_i}{d\eta} \left(\frac{d\eta}{dx} \right)$	$\Rightarrow \frac{dX_i}{d\eta} = X_{N\psi+i} / \left(\frac{d\eta}{dx} \right)$
$X_{2N\psi+i} = \frac{d^2\bar{\psi}_{Hi}}{dx^2} = \frac{dX_{N\psi+i}}{dx} = \frac{dX_{N\psi+i}}{d\eta} \left(\frac{d\eta}{dx} \right)$	$\Rightarrow \frac{dX_{N\psi+i}}{d\eta} = X_{2N\psi+i} / \left(\frac{d\eta}{dx} \right)$
$X_{3N\psi+i} = \frac{d^3\bar{\psi}_{Hi}}{dx^3} = \frac{dX_{2N\psi+i}}{dx} = \frac{dX_{2N\psi+i}}{d\eta} \left(\frac{d\eta}{dx} \right)$	$\Rightarrow \frac{dX_{2N\psi+i}}{d\eta} = X_{3N\psi+i} / \left(\frac{d\eta}{dx} \right)$ (5.79 d)
$\frac{d^4\bar{\psi}_{Hi}}{dx^4} = \frac{dX_{3N\psi+i}}{dx} = \frac{dX_{3N\psi+i}}{d\eta} \left(\frac{d\eta}{dx} \right)$	$\Rightarrow \frac{dX_{3N\psi+i}}{d\eta} = \mathbf{Eq. (5.47)} / \left(\frac{d\eta}{dx} \right)$
$X_{4N\psi+j} = \bar{\beta}_{Hj}$	$j = 1, 2, 3, \dots, N\beta$

$X_{4N\psi+N\beta+j} = \frac{d\bar{\beta}_{Hj}}{dx} = \frac{dX_{4N\psi+j}}{dx} = \frac{dX_{4N\psi+j}}{d\eta} \left(\frac{d\eta}{dx} \right)$	$\Rightarrow \frac{dX_{4N\psi+j}}{d\eta} = X_{4N\psi+N\beta+j} / \left(\frac{d\eta}{dx} \right)$
$\frac{d^2\bar{\beta}_{Hj}}{dx^2} = \frac{dX_{4N\psi+N\beta+j}}{dx} = \frac{dX_{4N\psi+N\beta+j}}{d\eta} \left(\frac{d\eta}{dx} \right)$	$\Rightarrow \frac{dX_{4N\psi+N\beta+j}}{d\eta} = \mathbf{Eq. (5.48)} / \left(\frac{d\eta}{dx} \right)$

Em termos dos elementos do vetor $\underline{X}(\eta)$, as Eqs. (5.41) a (5.42) são reescritas como:

$$\begin{aligned}
\frac{d^4\bar{\psi}_{Hi}}{dx^4}(x) = & \operatorname{Re} \sum_{j=1}^{N\psi} \sum_{k=1}^{N\psi} \left[A_{ijk}^{\psi} (X_{3N\psi+j} X_k - X_{N\psi+j} X_{2N\psi+k}) + (B_{ijk}^{\psi} - E_{ijk}^{\psi}) X_{N\psi+j} X_k \right] + \\
& \operatorname{Re} \sum_{j=1}^{N\psi} \left[C_{ij\infty}^{\psi} X_{3N\psi+j} + (D_{ij\infty}^{\psi} - F_{ij\infty}^{\psi}) X_{N\psi+j} - \frac{2}{\operatorname{Re}} G_{ij}^{\psi} X_{2N\psi+j} \right] + \\
\frac{1}{\operatorname{Re}_m} \sum_{j=1}^{N\beta} \sum_{k=1}^{N\beta} & I_{ijk}^{\psi} \left[X_{4N\psi+N\beta+j} \frac{d^2\bar{\beta}_{Hk}}{dx^2} - \frac{d^3\bar{\beta}_{Hj}}{dx^3} X_{4N\psi+k} + (\alpha_j^2 - \alpha_k^2) X_{4N\psi+N\beta+j} X_{4N\psi+k} \right] + \\
\frac{1}{\operatorname{Re}_m} \sum_{j=1}^{N\beta} & \left[J_{ijF}^{\psi} X_{4N\psi+N\beta+j} + K_{ijF}^{\psi} \left(\frac{d^2\bar{\beta}_{Hj}}{dx^2} - \alpha_j^2 X_{4N\psi+j} \right) + M_{ijF}^{\psi} \left(\alpha_j^2 X_{4N\psi+N\beta+j} - \frac{d^3\bar{\beta}_{Hj}}{dx^3} \right) \right] \\
& - \left(\mu_i^4 X_i + H_{i\infty}^{\psi} - \frac{I_{iFF}^{\psi}}{\operatorname{Re}_m} \right) \quad , \quad i = 1, 2, 3, \dots, N\psi
\end{aligned} \tag{5.47}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d^2\bar{\beta}_{Hi}}{dx^2}(x) = & \operatorname{Re}_m \left(\sum_{j=1}^{N\beta} \sum_{k=1}^{N\psi} (A_{ijk}^{\beta} X_{4N\psi+N\beta+j} X_k - E_{ijk}^{\beta} X_{4N\psi+j} X_{N\psi+k}) + \right. \\
& \left. \sum_{j=1}^{N\psi} (B_{ijF}^{\beta} X_j - F_{ijF}^{\beta} X_{N\psi+j}) + \sum_{j=1}^{N\beta} C_{ij\infty}^{\beta} X_{4N\psi+N\beta+j} - \right. \\
& \left. (H_i^{\beta} E_z - D_{i\infty F}^{\beta}) \right) + \alpha_i^2 X_{4N\psi+i} - G_{iF}^{\beta} \tag{5.48} \\
& , \quad i = 1, 2, 3, \dots, N\beta
\end{aligned}$$

Onde,

$$\begin{aligned}
\frac{d^3\bar{\beta}_{Hj}}{dx^3}(x) = & \operatorname{Re}_m \sum_{m=1}^{N\beta} \sum_{n=1}^{N\psi} \left[A_{jmn}^{\beta} \left(X_{4N\psi+N\beta+m} X_{N\psi+n} + \frac{d^2\bar{\beta}_{Hm}}{dx^2} X_n \right) - \right. \\
& \left. E_{jmn}^{\beta} (X_{4N\psi+N\beta+m} X_{N\psi+n} + X_{4N\psi+m} X_{2N\psi+n}) \right] + \\
& \operatorname{Re}_m \left(\sum_{m=1}^{N\psi} (B_{jmF}^{\beta} X_{N\psi+m} - F_{jmF}^{\beta} X_{2N\psi+m}) + \sum_{m=1}^{N\beta} C_{jm\infty}^{\beta} \frac{d^2\bar{\beta}_{Hm}}{dx^2} \right) + \alpha_j^2 X_{4N\psi+N\beta+j}
\end{aligned} \tag{5.49}$$

Da mesma forma reescreve-se as condições de contorno, iniciando primeiramente com as condições de contorno na entrada do canal (*LEFT*) e depois na saída do canal (*RIGHT*):

$$\begin{aligned} X_{LEFT}(i) &= \bar{g}_i, & i &= 1, 2, 3, \dots, N\psi \\ X_{LEFT}(NV+i) &= 0, & i &= 1, 2, 3, \dots, N\psi \\ X_{LEFT}(4NV+i) &= \bar{h}_i, & i &= 1, 2, 3, \dots, N\beta \end{aligned} \quad (5.50 \text{ a})$$

$$\begin{aligned} X_{RIGHT}(i) &= 0, & i &= 1, 2, 3, \dots, N\psi \\ X_{RIGHT}(NV+i) &= 0, & i &= 1, 2, 3, \dots, N\psi \\ X_{RIGHT}(4NV+i) &= 0, & i &= 1, 2, 3, \dots, N\beta \end{aligned} \quad (5.50 \text{ b})$$

5.3. RESULTADOS

Para o desenvolvimento do sistema infinito de equações diferenciais acopladas, Eqs. (5.41) e (5.42), um programa computacional na linguagem Fortran 90 foi escrito e implementado em um computador Intel Xeon 3.7 GHz. Para a obtenção de resultados numéricos, as expansões foram truncadas em uma ordem finita de termos $N = N\psi = N\beta$ e um critério relativo de erro de 10^{-4} foi imposto para a análise de convergência das funções escalares transformadas. Do pacote de sub-rotinas científicas IMSL (2010), foi utilizada a DVFPD, que é uma sub-rotina especialmente apropriada para resolver sistemas rígidos (“*stiffs*”) de equações diferenciais ordinárias, como as que no presente trabalho se apresentam. Quando não explicitado no texto, os resultados mostrados foram obtidos fazendo-se $N=40$ ou $N=20$ que apresentaram ordem suficiente para garantia da convergência de todos os campos, para as várias situações analisadas. Os coeficientes integrais, apresentados nas Eqs. (5.31), (5.36) e (5.40), foram obtidos numericamente através de quadratura Gaussiana com o uso da sub-rotina DQAGS (IMSL, 2010). Um critério relativo de erro de 10^{-12} foi usado em cada coeficiente.

5.3.1. ANÁLISE DE CONVERGÊNCIA

Em análises híbridas, como as que se apresentam no presente trabalho, a taxa de convergência corresponde à precisão com que uma determinada série/expansão representa a solução até que um número preestabelecido de algarismos significativos seja atingido (critério de erro), dizendo-se então que, neste ponto, houve convergência. Deve-se aumentar gradativamente a ordem de truncamento das séries/expansões até que o critério de convergência seja atingido. Deste modo, a fim de evidenciar a natureza híbrida da metodologia aplicada, é mostrado um estudo do comportamento de convergência dos campos anteriormente citados, em diferentes posições longitudinais ao longo do canal.

Nas tabelas a seguir, são mostradas duas variáveis adicionais ao lado de cada número de Reynolds magnético ou de Hartmann, a saber, c e i_adap . c é o fator de escala utilizado na transformação de domínio, dada pelas Eqs. (5.43) e (5.44). i_adap é um “flag” utilizado no código computacional que informa se o procedimento adaptativo de solução numérica é empregado ($i_adap = 1$) ou não ($i_adap = 0$).

Primeiramente, a análise de convergência é feita para a componente longitudinal da velocidade na linha central do canal, $u_c(x)$, para o gradiente de velocidade na parede superior, $\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=1} \equiv f_x \frac{Re}{2}$ ⁷ e, finalmente, para a variação do valor da função escalar magnética (entre a parede superior e a linha central do canal), normalizada pelo número de Reynolds magnético adotado, $\frac{\Delta\beta}{Re_m} = \frac{\beta(x,0.5) - \beta(x,1)}{Re_m}$, em diferentes posições ao longo do canal e diferentes parâmetros físicos.

As Tabelas 5.2 e 5.3 ilustram, respectivamente, a análise de convergência dessas variáveis para as situações em que: i) $Re = 20$, $Ha = 2$ com diferentes valores do número de Reynolds magnético ($Re_m = 10, 25$ e 50); e ii) $Re = 100$, $Re_m = 1$ com diferentes valores do número de Hartmann ($Ha = 0, 10$ e 20).

⁷ O termo f_x é conhecido fator de atrito local ou fator de Fanning e sua descrição pode ser encontrada, por exemplo, no Apêndice B de Assad (2016).

Tabela 5.2: análise de convergência em diferentes posições ao longo do canal para $Re = 20$, $Ha = 2$, $E_z = -Ha$ e diferentes valores de Reynolds magnético ($Re_m = 10, 25$ e 50)

$Re_m = 10$ ($c = 0,3 - i_{adap} = 1$)															
x	$u_c(x)$					$\left \frac{\partial u}{\partial y} \right _{y=1} \equiv f_x Re/2$					$\frac{\Delta\beta(x)}{Re_m} \times 10^4$				
N	0.1	0.2	0.3	0.4	x_∞	0.1	0.2	0.3	0.4	x_∞	0.1	0.2	0.3	0.4	x_∞
5	0.314	0.455	0.572	0.657	0.738	10.98	10.04	8.623	7.160	3.194	1.121	36.96	87.92	139.6	302.5
10	0.276	0.451	0.577	0.662	0.738	11.56	10.14	8.487	6.965	3.194	0.0895	37.65	89.34	141.0	302.5
20	0.274	0.451	0.577	0.662	0.738	11.58	10.15	8.475	6.948	3.194	0.0661	37.64	89.28	141.0	302.5
40	0.273	0.451	0.577	0.662	0.738	11.59	10.15	8.464	6.931	3.194	0.0426	37.63	89.23	141.0	302.5
$Re_m = 25$ ($c = 0,3 - i_{adap} = 1$)															
5	0.317	0.453	0.571	0.657	0.738	10.98	10.03	8.612	7.149	3.194	-16.39	1.043	35.64	74.82	302.5
10	0.275	0.449	0.575	0.662	0.738	11.55	10.12	8.469	6.949	3.194	-17.09	2.393	37.47	76.40	302.5
20	0.273	0.449	0.575	0.662	0.738	11.56	10.13	8.450	6.922	3.194	-17.18	2.385	37.46	76.40	302.5
40	0.273	0.449	0.575	0.662	0.738	11.93	10.16	8.464	6.931	3.194	-17.17	2.387	37.46	76.40	302.5
$Re_m = 50$ ($c = 0,1 - i_{adap} = 1$)															
5	0.315	0.451	0.569	0.651	0.738	10.97	10.02	8.606	7.145	3.194	-18.74	-8.536	15.02	41.79	302.5
10	0.274	0.447	0.573	0.668	0.738	11.55	10.11	8.462	6.942	3.194	-18.91	-6.493	17.27	43.49	302.5
20	0.271	0.447	0.573	0.661	0.738	11.56	10.13	8.442	6.916	3.194	-18.87	-6.454	17.27	43.48	302.5
40	0.271	0.449	0.573	0.661	0.738	11.57	10.13	8.438	6.910	3.194	-18.87	-6.453	17.27	43.48	302.5

Tabela 5.3: análise de convergência em diferentes posições ao longo do canal para $Re = 100$, $Re_m = 1$ e diferentes valores de Hartmann, ($Ha = -E_z = 0, 10$ e 20)

$Ha = 0$ ($c = 0,1 - i_{adap} = 1$)															
$N \backslash x$	$u_c(x)$					$\left \frac{\partial u}{\partial y} \right _{y=1} \equiv f_x Re/2$					$\frac{\Delta\beta(x)}{Re_m} \times 10^4$				
	0.1	0.2	0.3	0.4	x_∞	0.1	0.2	0.3	0.4	x_∞	0.1	0.2	0.3	0.4	x_∞
10	0.216	0.337	0.435	0.519	0.750	11.73	10.84	9.874	8.846	3.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
15	0.214	0.337	0.435	0.519	0.750	11.71	10.85	9.852	8.797	3.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
20	0.214	0.338	0.435	0.519	0.750	11.69	10.85	9.837	8.779	3.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
50	0.214	0.338	0.435	0.519	0.750	11.67	10.84	9.824	8.767	3.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
$Ha=10$ ($c = 0,2 - i_{adap} = 1$)															
10	0.233	0.379	0.494	0.583	0.617	12.55	12.01	10.90	9.568	6.249	80.88	291.6	528.8	748.8	945.8
15	0.232	0.379	0.493	0.582	0.617	12.75	12.24	11.04	9.646	6.249	80.47	291.7	528.8	748.8	945.8
20	0.232	0.379	0.493	0.582	0.617	12.80	12.28	11.03	9.626	6.249	80.48	291.6	528.7	748.7	945.8
50	0.232	0.379	0.493	0.582	0.617	12.89	12.35	11.07	9.652	6.249	80.48	291.6	528.7	748.7	945.8
$Ha=20$ ($c = 0,2 - i_{adap} = 1$)															
10	0.262	0.414	0.502	0.545	0.555	15.49	16.42	15.57	13.98	11.11	75.47	368.6	648.8	849.3	11111.1
15	0.259	0.411	0.499	0.544	0.555	16.37	17.49	16.28	14.38	11.11	75.44	368.7	648.9	849.7	11111.1
20	0.259	0.411	0.499	0.544	0.555	16.52	17.53	16.23	14.31	11.11	75.41	368.6	648.9	849.7	11111.1
50	0.259	0.411	0.499	0.544	0.555	16.93	17.85	16.44	14.43	11.11	75.40	368.6	648.9	849.7	11111.1

A partir destes dados, pode-se observar, claramente, as elevadas taxas de convergência para as funções selecionadas, obtidas com a abordagem da transformada integral (GITT). Os seguintes comentários acerca das influências dos números de Reynolds magnético e de Hartmann, pautados nessas tabelas, são efetuados a seguir.

- Para o caso da componente longitudinal da velocidade no cetro do canal (u_c), observa-se uma elevada taxa de convergência, ocorrendo para $N = 10$, no terceiro algarismo significativo, para os valores de $x \geq 0.3$ ao longo do canal e os diversos números de Re_m e Ha . Posições próximas da entrada estão sujeitas a efeitos de borda e sofrem pequenas variações numéricas na entrada do canal. Obviamente, as variações de Re_m não modificam os valores de u_c ao longo do canal. Entretanto, embora não afete a convergência da expansão, a elevação de Ha mostra, claramente, uma diminuição do valor de u_c para as respectivas posições ao longo do canal, indicando um forte acoplamento magnetohidrodinâmico.
- Para o gradiente de velocidade na parede superior, $\left(\left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=1} \equiv \frac{f_x Re}{2} \right)$, observa-se uma convergência que ocorre para $x \geq 0.2$, também, terceiro algarismo significativo. De modo geral, a convergência na entrada do canal é mais lenta, devido ao uso do filtro da região do escoamento completamente desenvolvido e da descontinuidade da função corrente nesta região. Nota-se que quando $Re_m = 50$, há uma modificação na convergência dos valores do gradiente de velocidade que passa a ser a partir do segundo algarismo significativo.
- Para a variação do valor da função escalar magnética, $\left(\frac{\Delta\beta(x)}{Re_m} \right)$, observa-se uma convergência para $x \geq 0.2$ no terceiro algarismo significativo. Para $Re_m = 25$ ou $Re_m = 50$, a convergência se dá para $x \geq 0.2$, na mesma quantidade de algarismos significativos. Deve-se, ainda, notar que quando $Ha = 0$ não há acoplamento MHD o que faz com que $\Delta\beta(x) = 0$, claramente visto na Tabela 5.3.

5.3.2. COMPARAÇÃO COM RESULTADOS DA LITERATURA

Para validar o código computacional, o caso a seguir mostra que a física por trás do escoamento não-MHD com geometria associada ao *backward-facing step* que apresenta zona de recirculação com separação e recolamento, também é avaliada corretamente com o método da GITT, aqui utilizado. As Figuras 5.2a e 5.2b ilustram os perfis das componentes longitudinal e vertical da velocidade, respectivamente, através do canal para $x = 7$ e 15. Os resultados são apresentados para $Re = 800$ e $Ha = 0$.

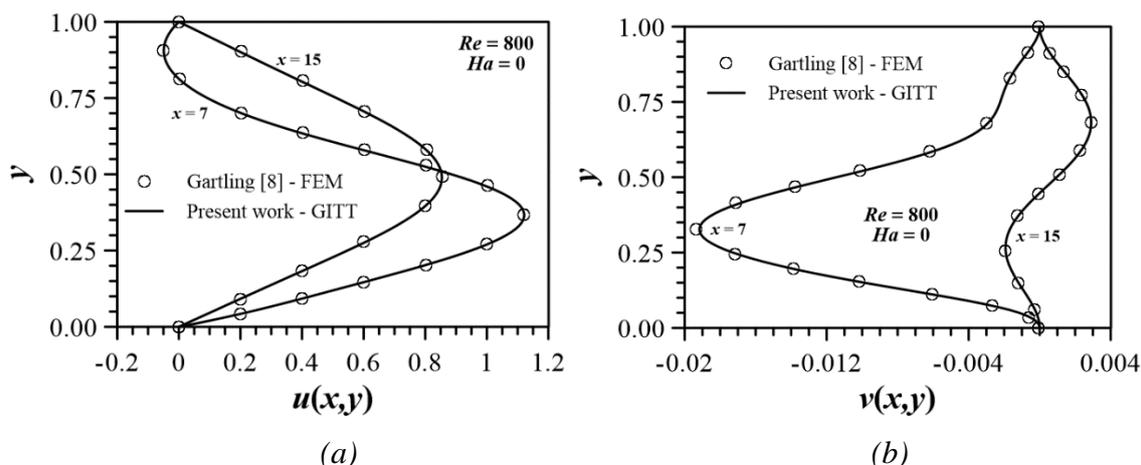


Figura 5.2: (a) Perfil da componente longitudinal e (b) transversal da velocidade em duas posições axiais distintas do canal com degrau de entrada, para $Re=800$ e $Ha=0$.

Em relação às posições de separação e recolamento do escoamento nas paredes inferior e superior, os resultados estão de acordo com os dados de Gartling (1990). Na parede inferior, o comprimento da primeira região de recirculação é obtido como 6,095 e, na parede superior, os pontos de separação e recolamento são 4,885 e 10,479, respectivamente, ainda de acordo com a referência anterior.

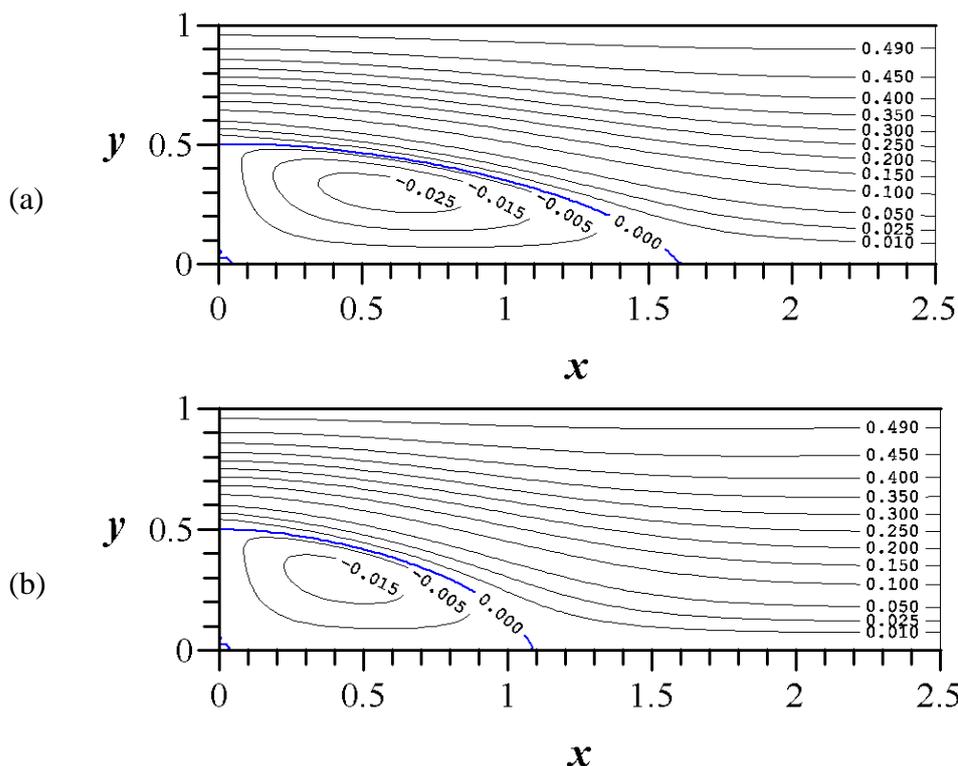
5.3.3. ACOPLAMENTO MAGNETOHIDRODINÂMICO

Nesta seção, faz-se uma análise de características dos campos magnético e de velocidade, bem como da densidade de corrente e da força de Lorentz, para diversos valores dos parâmetros inerentes ao acoplamento entre os estes campos. Aqui daremos ênfase aos números de Reynolds magnético e de Hartmann cujas influências serão mostradas em separado e com gráficos superpostos para uma melhor visualização.

O número de Hartmann, Ha , é o parâmetro adimensional que governa o comportamento do escoamento em relação às forças impostas pelo campo magnético. Assim, quanto maior for o número de Hartmann, mais intensas serão as forças magnéticas sobre o escoamento. Por outro lado, o número de Reynolds magnético, Re_m , é o parâmetro que governa o comportamento do campo magnético frente as forças advectivas do escoamento. Assim, quanto maior for o número de Reynolds magnético, mais “arrastadas/advectadas” serão as linhas de campo magnético.

a) influência do número de Hartmann

Os perfis mostrados na Figura 5.3 ilustram a forte influência do número de Hartmann na zona de recirculação e no comprimento de recolamento. Os resultados são apresentados para $Re=100$ e $Re_m=1$



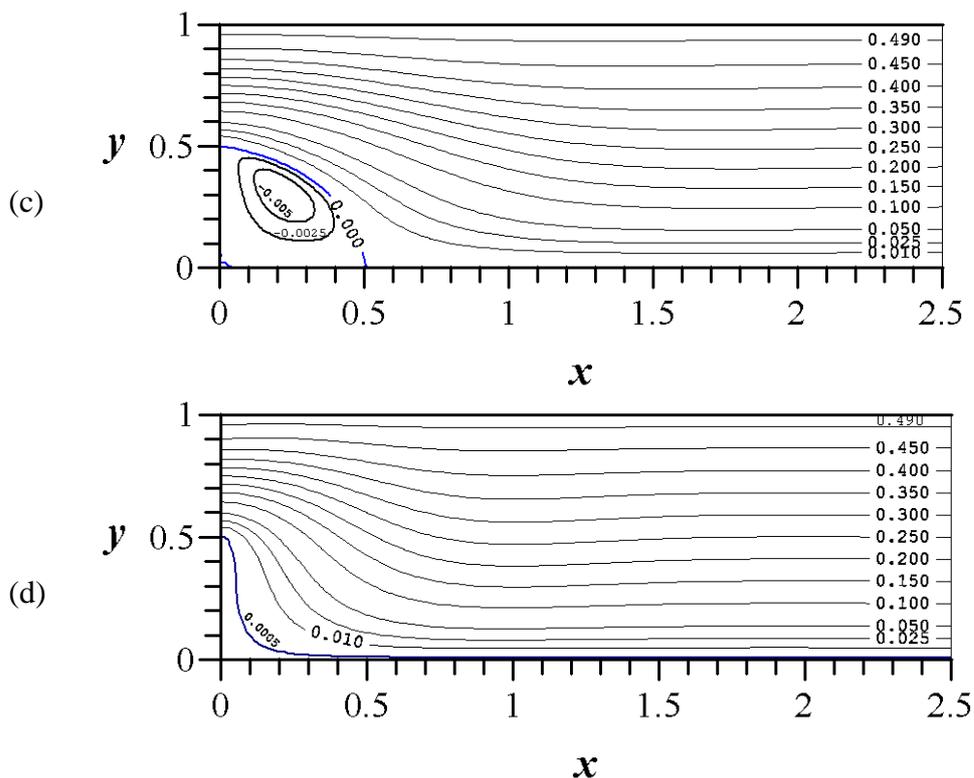


Figura 5.3: Linhas de corrente no interior do canal para $Re = 100$, $Rem = 1$: a) $Ha = 0$, b) $Ha = 5$, c) $Ha = 10$, d) $Ha = 20$

A evolução das linhas de corrente mostradas na Figura 5.3 mostram que quanto maior for o número de Hartmann, maior é o efeito do campo magnético sobre o escoamento, ou seja, quanto maior for o número de Hartmann, menor é a zona de recirculação, diminuindo a distância de recolamento tornando-a mais de três vezes menor quando faz-se Ha evoluir de 0 a 20, por exemplo.

As linhas de corrente mostradas acima podem ser visualizadas de outra forma através da evolução das componentes horizontal e vertical da velocidade. As Figuras 5.4 e 5.5 mostram, respectivamente o comportamento de $u(x,y)$ e $v(x,y)$ em diversas posições ao longo do canal. Na Fig. 5.4 vemos que o perfil mais empistonado dá-se para números de Hartmann mais elevados ($Ha=20$) enquanto que para $Ha=0$ vemos um perfil parabólico, como esperado, se formar na saída do canal. Na Fig. 5.5 vemos o comportamento da componente vertical da velocidade que sofre variações mais acentuadas para posições próximas do degrau de entrada e influenciadas pela recirculação. Não obstante, observa-se que para números de Hartmann mais elevados esta componente sofre variações de maior amplitude mas o escoamento torna-se completamente desenvolvido mais rapidamente, também.

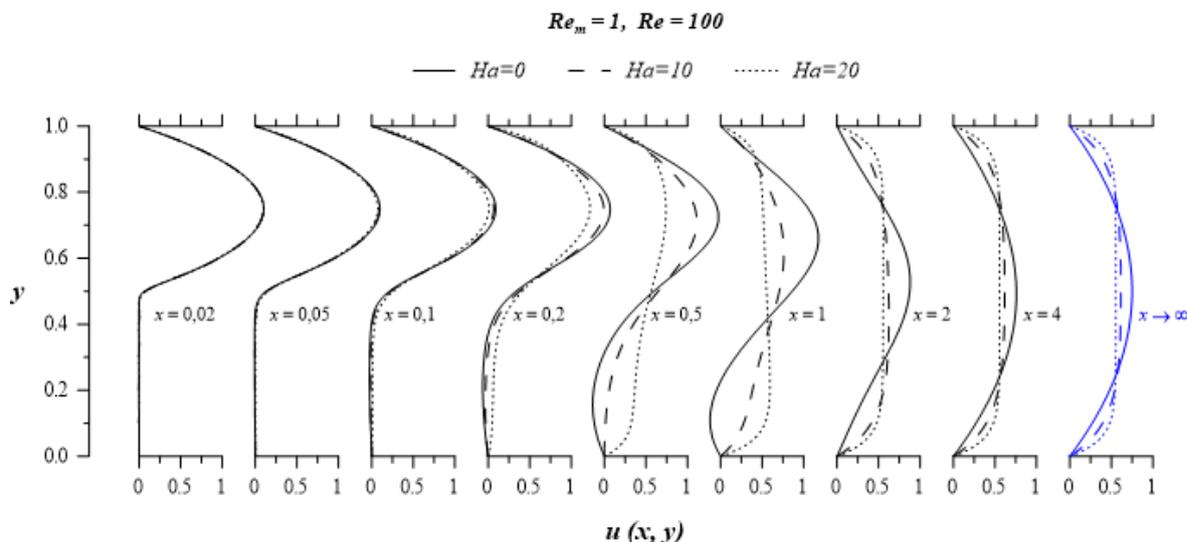


Figura 5.4: desenvolvimento do perfil da componente longitudinal da velocidade, para $Re_m=1, Re=100$ e $Ha = 0, 10$ e 20 .

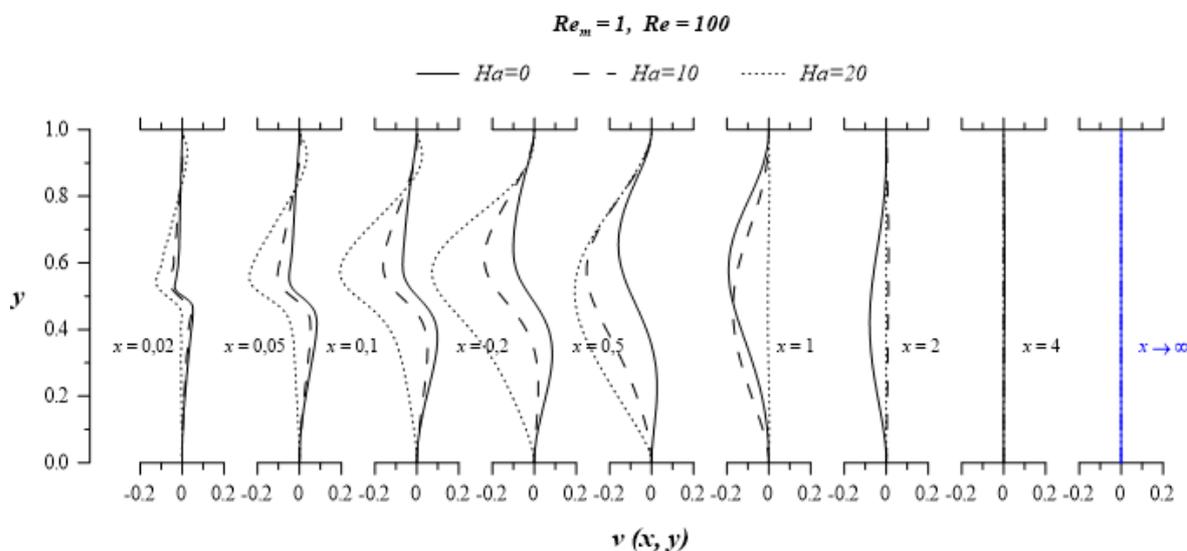


Figura 5.5: desenvolvimento da componente vertical da velocidade, para $Re_m=1, Re=100$ e $Ha = 0, 10$ e 20 .

As Figuras 5.6 e 5.7 mostram a evolução das componentes horizontal e vertical do campo magnético para um número de Reynolds magnético igual a 1. Mesmo que relativamente baixo para que se observe a advecção do campo magnético, basta que tenhamos um $Ha > 0$ e percebemos que se inicia o efeito cruzado entre campo e escoamento, característica fundamental da magnetohidrodinâmica. Ao passo que Ha cresce, observamos o efeito se acentua e pode mais facilmente ser observado nas posições $0.05 \leq x \leq 0.5$. Para que se observe a influência mais acentuada na região posterior ao degrau, a Figura 5.8 indica, de forma ampliada o efeito da zona de recirculação sobre a componente vertical do campo magnético para um valor típico de $Ha=20$.

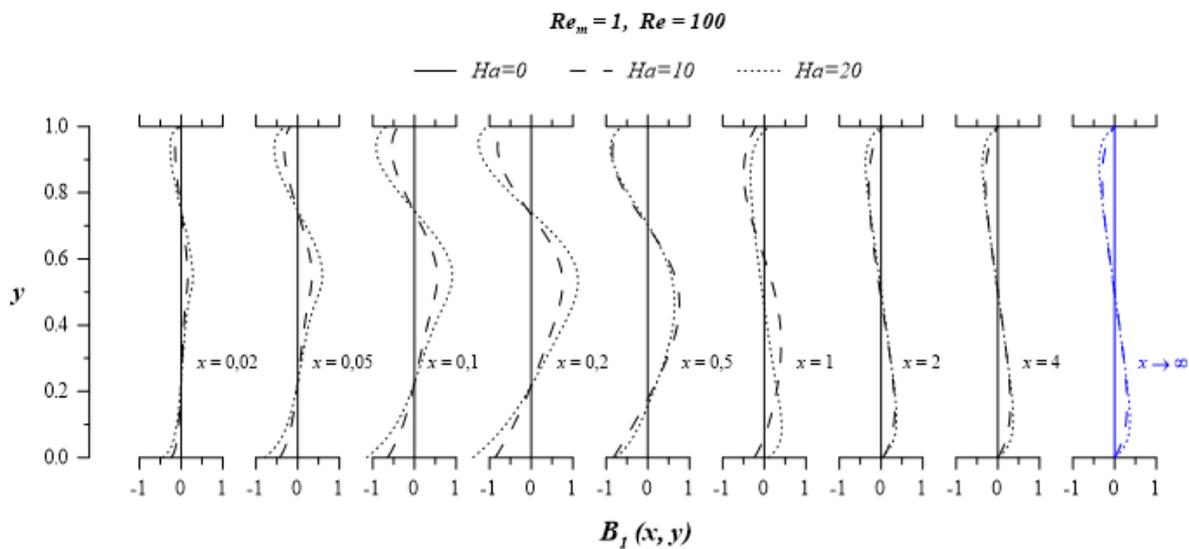


Figura 5.6: desenvolvimento da componente horizontal do campo magnético, para $Re_m=1$, $Re=100$ e $Ha = 0, 10$ e 20 .

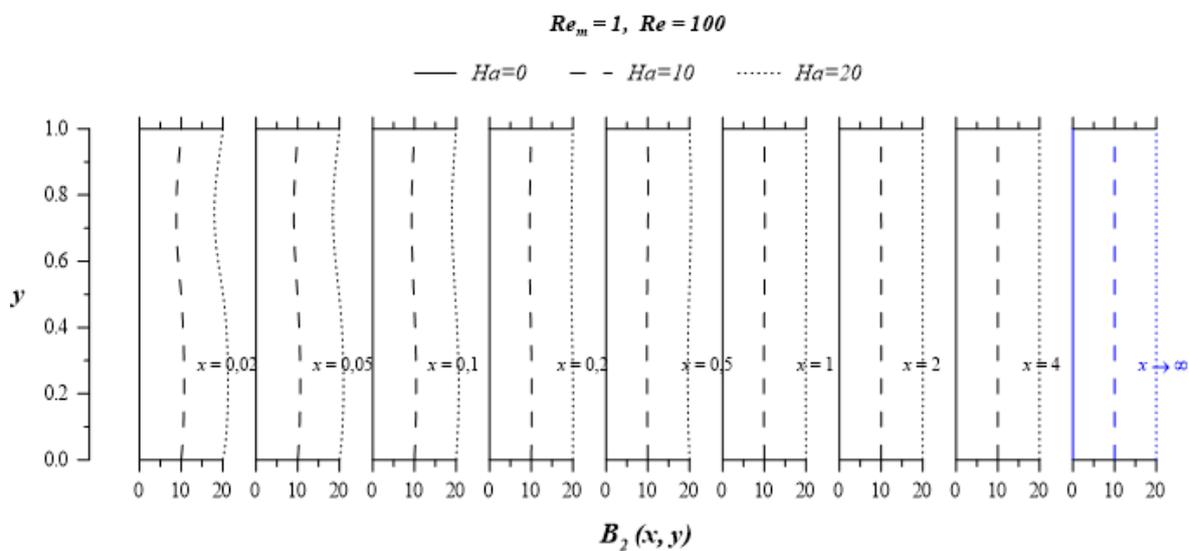


Figura 5.7: desenvolvimento da componente vertical do campo magnético, para $Re_m=1$, $Re=100$ e $Ha = 0, 10$ e 20 .

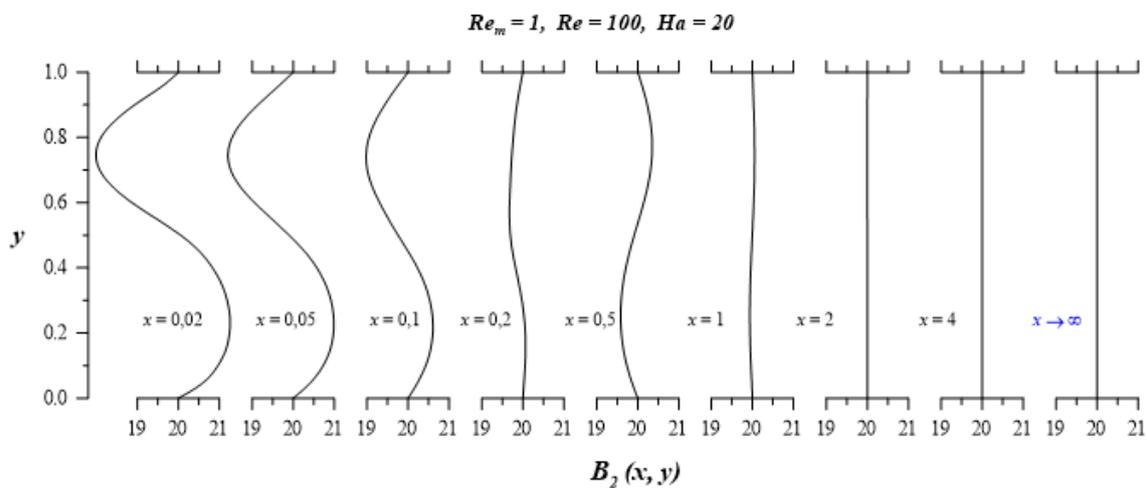


Figura 5.8: representação ampliada da componente vertical do campo magnético para $Re_m=1$, $Re=100$ e $Ha = 20$.

Um ponto importante a ser levado em consideração é que o problema de autovalor empregado nesta metodologia (Eq. (5.18)) é, também, uma equação diferencial de 2ª. ordem e não recupera as 4 condições de contorno necessárias (duas para a componente horizontal e duas para a componente vertical do campo magnético) à solução das equações de transporte do campo magnético (Eqs.(4.6 e 4.7)). Foi observado que, após aplicação da GITT, o valor da componente horizontal do campo magnético nas placas ($B_I(x,0)$ e $B_I(x,1)$), divergia do valor imposto nas condições de contorno e, após aplicação de fórmulas de inversão, não havia recuperação de tais condições. Este resultado é nitidamente visto nas figuras que plotam a evolução da componente B_I (e.g. Fig. 5.6). Sendo assim, nos próximos dois capítulos estamos propondo duas formulações diferentes que recuperariam satisfatoriamente as condições e resolveria o imbróglgio mostrado acima.

Nas Figuras 5.9 a 5.11, observaremos a influência do número de Hartmann sobre a força de Lorentz e sobre a densidade de corrente. É importante salientar que, se as componentes u e v da velocidade são afetadas por alterações no número de Hartmann, as demais variáveis dependentes do escoamento, a saber, J_z e F_x serão afetadas. Observando o comportamento de J_z , e F_x , nas Figuras 5.9 e 5.11, vê-se um comportamento enantiomorfo, justificado pela expressão adimensional, $F_x = -\frac{1}{Re} J_z B_2$, da componente horizontal da força de Lorentz volumétrica (vista no último termo da Eq. 4.4). Mais explicitamente, como $B_2 = Ha$ e $Re = 100$, então, $F_x = -\frac{J_z Ha}{100}$. Para a densidade de corrente, o comportamento espelhado se justifica através da equação da lei de Ohm (Eq. 4.9b) que, com a pequena variação de $v(x,y)$ visto na Fig. 5.5, $J_z \propto Ez + uB_2$. Como $B_2 = Ha$ e $E_z = -Ha/2$ (condição de medidor de vazão e devido à geometria de entrada do canal: vide Apêndice A), então, $J_z \sim Ha \left(u - \frac{1}{2} \right)$. Comportamento que pode ser observado na comparação entre as Figuras 5.4 e 5.11.

A componente vertical da força de Lorentz (F_y), vista na Fig. 5.10, é diretamente relacionada à componente horizontal do campo magnético por, $F_y = J_z B_1 / Re$ (vide Eq. 4.5). Nota-se que F_y sofre perturbações na entrada do canal devido a devido ao comportamento de B_I influenciado pela recirculação.

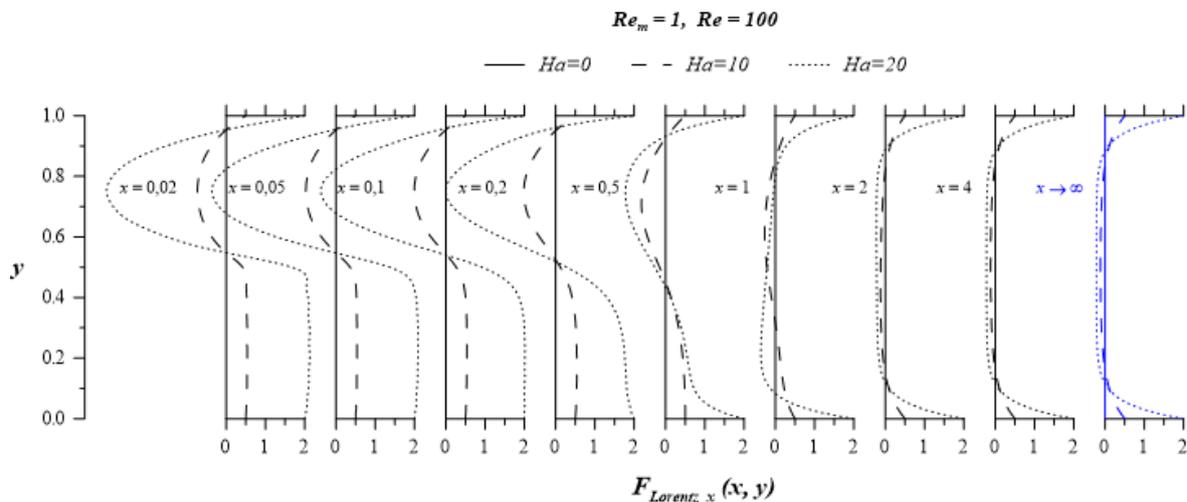


Figura 5.9: desenvolvimento da componente horizontal da força de Lorentz, para $Re_m=1$, $Re=100$ e $Ha = 0, 10$ e 20 .

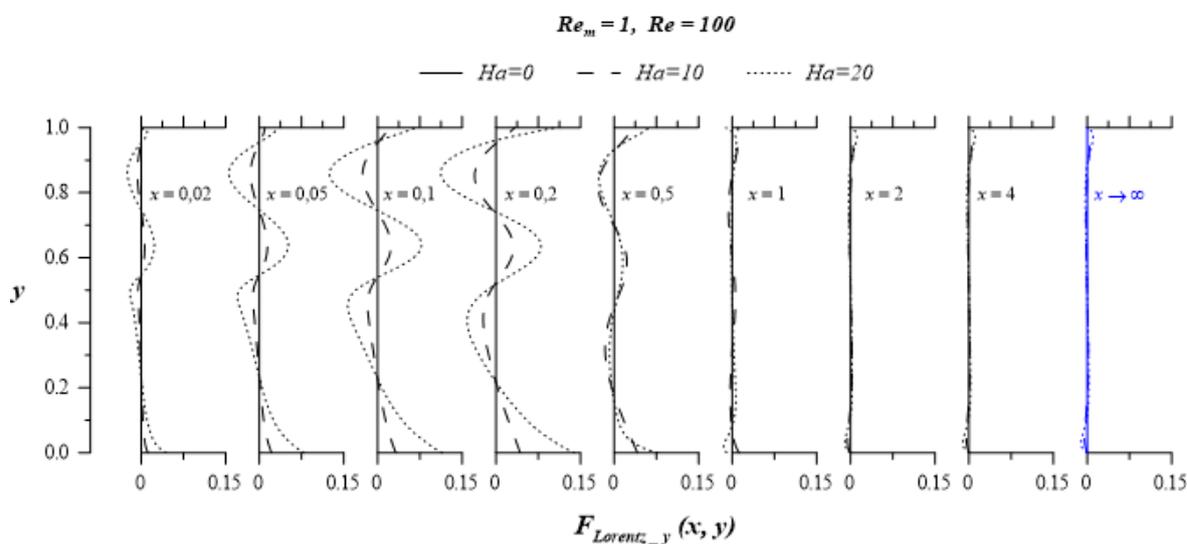


Figura 5.10: desenvolvimento da componente horizontal da força de Lorentz, para $Re_m=1$, $Re=100$ e $Ha = 0, 10$ e 20 .

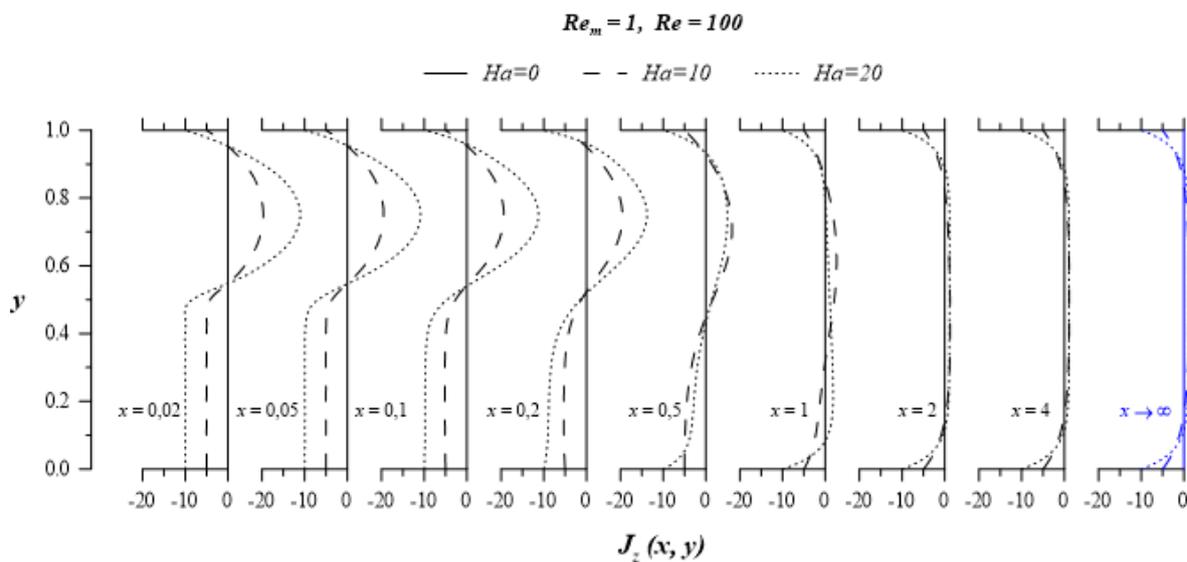


Figura 5.11: desenvolvimento da densidade de corrente, para $Re_m=1$, $Re=100$ e $Ha = 0, 10$ e 20 .

b) influência do número de Reynolds magnético

Para observar a influência do número de Reynolds magnético sobre escoamento e como ele afeta crescentemente o campo magnético, as figuras a seguir mostrarão o comportamento das componentes de velocidade, das componentes do campo magnético, das componentes da força de Lorentz, da densidade de corrente e da função escalar magnética para diferentes valores desse parâmetro, mantendo-se fixos $Re=20$ e $Ha=2$.

Observa-se que, quando Ha é pequeno ($Ha=2$), o perfil de velocidade, visualizado principalmente pelo comportamento da componente longitudinal da velocidade, não é afetado pelo número de Reynolds magnético. As Figuras 5.12 e 5.13 mostram uma superposição de três curvas, de $u(x, y)$ e $v(x, y)$, para os três diferentes valores de Re_m , indicando que elas são idênticas.

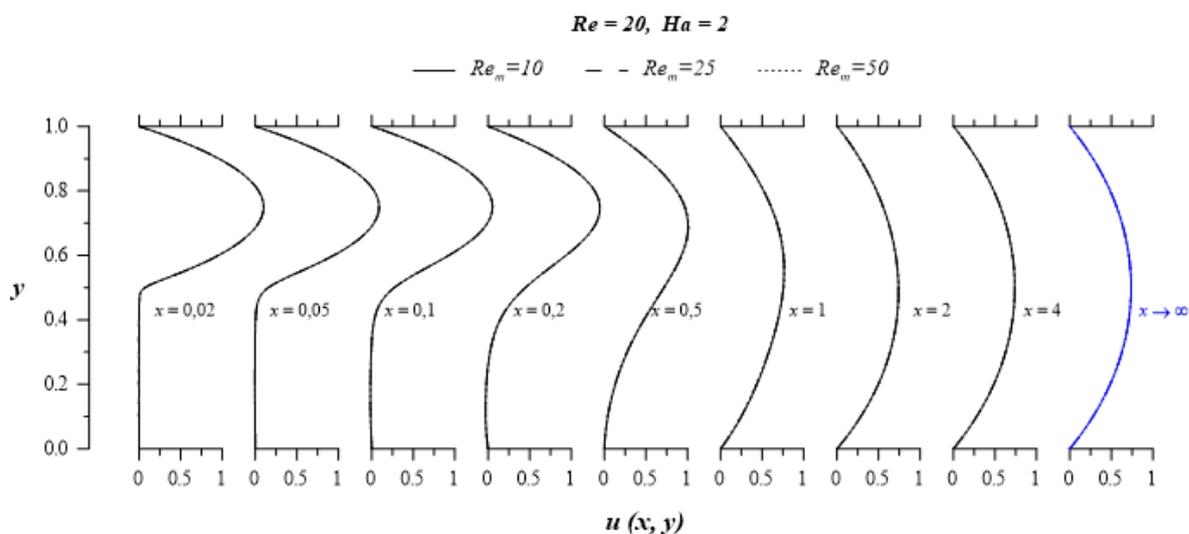


Figura 5.12: desenvolvimento da componente longitudinal da velocidade, para $Re = 20$, $Ha = 2$ e diferentes Re_m .

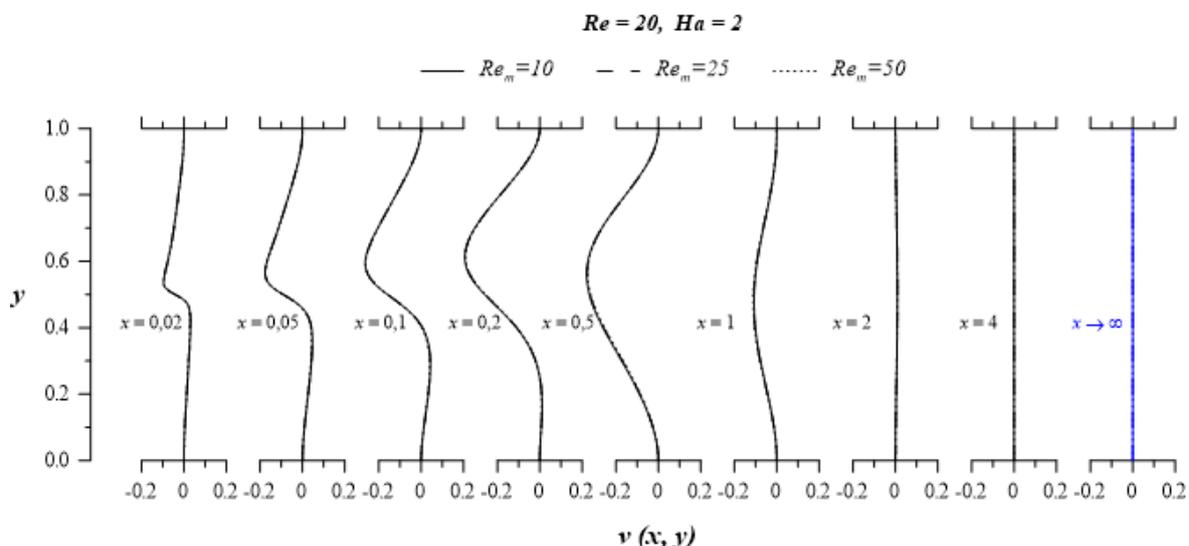


Figura 5.13: desenvolvimento da componente vertical da velocidade, para $Re = 20$, $Ha = 2$ e diferentes Re_m .

Na Fig. 5.14, é possível confirmar que, ao passo que Re_m cresce, as linhas de campo, visualizadas através da função magnética, são “arrastadas” pelo escoamento, mostrando forte acoplamento para $Re_m = 50$ e um baixo acoplamento para $Re_m = 10$. Na região de recirculação, as linhas de campo sofrem inflexões devido à vorticidade do campo de velocidade e depois mostram-se congeladas junto ao escoamento.

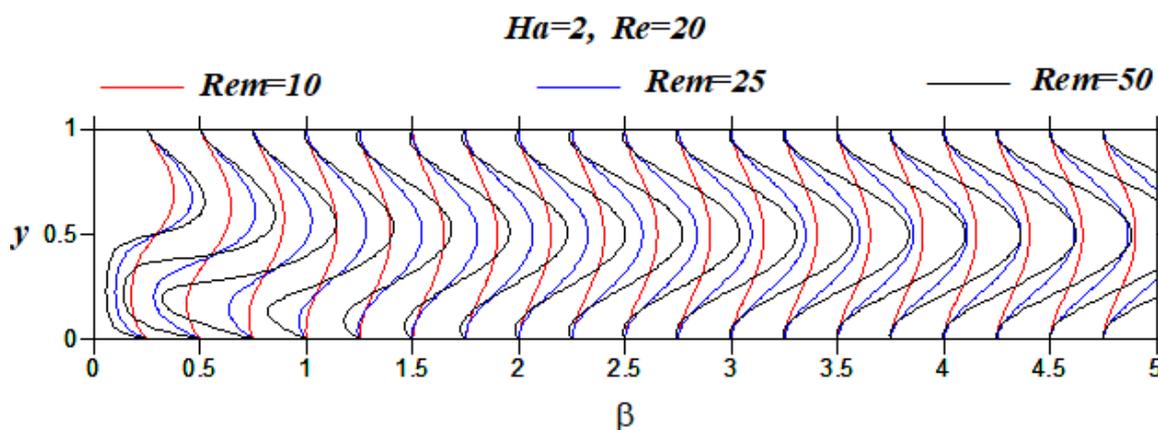


Figura 5.14: função escalar magnética (β) para $Ha=2$, $Re=20$ e $Rem=10$, 25 e 50

Nas Figuras 5.15 e 5.16 mostra-se o desenvolvimento das componentes do campo magnético. Na Figura 5.15 vê-se que B_1 sofre variações mais intensas para maiores números de Reynolds magnéticos, mostrando que a indução magnética é maior quanto maior for o valor deste parâmetro. Para $x=0.5$ observa-se uma forte indução indicando intensas variações de velocidade nesta região também (vide Fig. 5.12). A Fig. 5.16 mostra o comportamento da componente vertical do campo magnético, é importante lembrar que o campo magnético imposto tem é dado por $B_0=Ha=2$ e que, na região do escoamento completamente desenvolvido ($v=0$) não há campo induzido na vertical. Nota-se que na região de recirculação o campo vertical sofre intensas variações para Rem elevados.

Mais uma vez deve-se observar que a componente B_1 não está sendo reproduzida corretamente nas placas, a menos para a região de escoamento completamente desenvolvido. Problema supracitado no texto associado à Figura 5.6 e cujo retificação na formulação é proposta nos próximos capítulos.

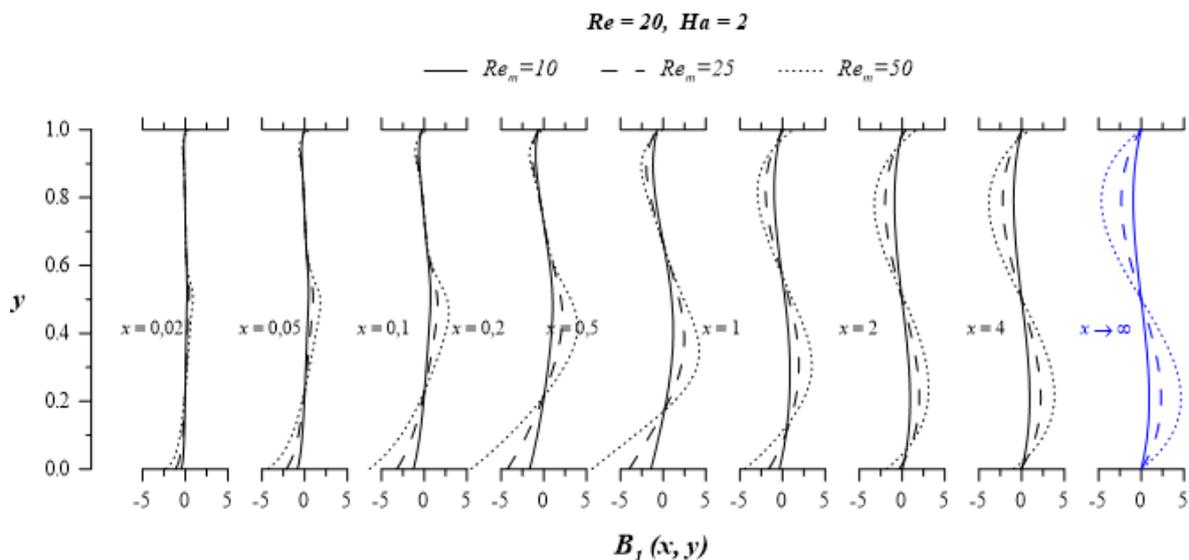


Figura 5.15: desenvolvimento da componente horizontal do campo magnético, para $Re = 20$, $Ha = 2$ e diferentes Re_m .

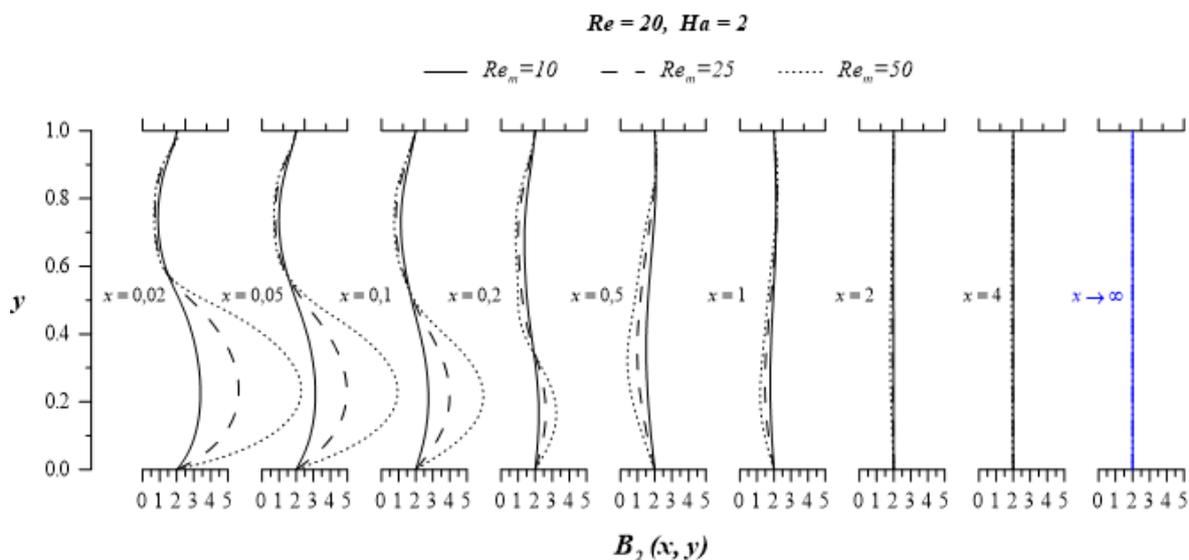


Figura 5.16: desenvolvimento da componente vertical do campo magnético, para $Re = 20$, $Ha = 2$ e diferentes Re_m .

Nas Figuras 5.17 a 5.19, observaremos a influência do número de Reynolds magnético sobre a força de Lorentz e sobre a densidade de corrente. É importante salientar que, se as componentes u e v da velocidade não são afetadas por alterações no número de Reynolds magnético e $Ha=2$. Entretanto, a densidade de corrente, o campo magnético e, portanto, suas componentes, sofrem uma influência crescente com o número de Reynolds magnético. Este efeito combinado gera diferenças entre esta análise e aquela feita para as Figuras 5.9 a 5.11. O comportamento espelhado entre J_z e F_x ainda é observado, mas o aumento do número de Reynolds magnético provoca efeitos intensos em B_2 e F_x , na entrada, e B_1 e F_y , na saída.

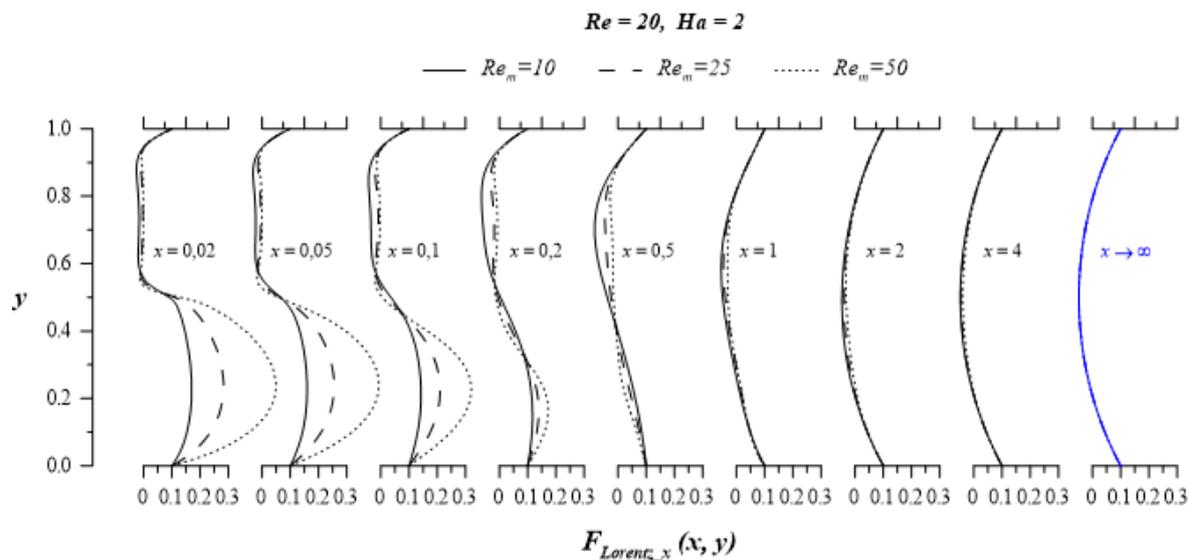


Figura 5.17: desenvolvimento da componente horizontal da força de Lorentz, para $Re = 20$, $Ha = 2$ e diferentes Re_m .

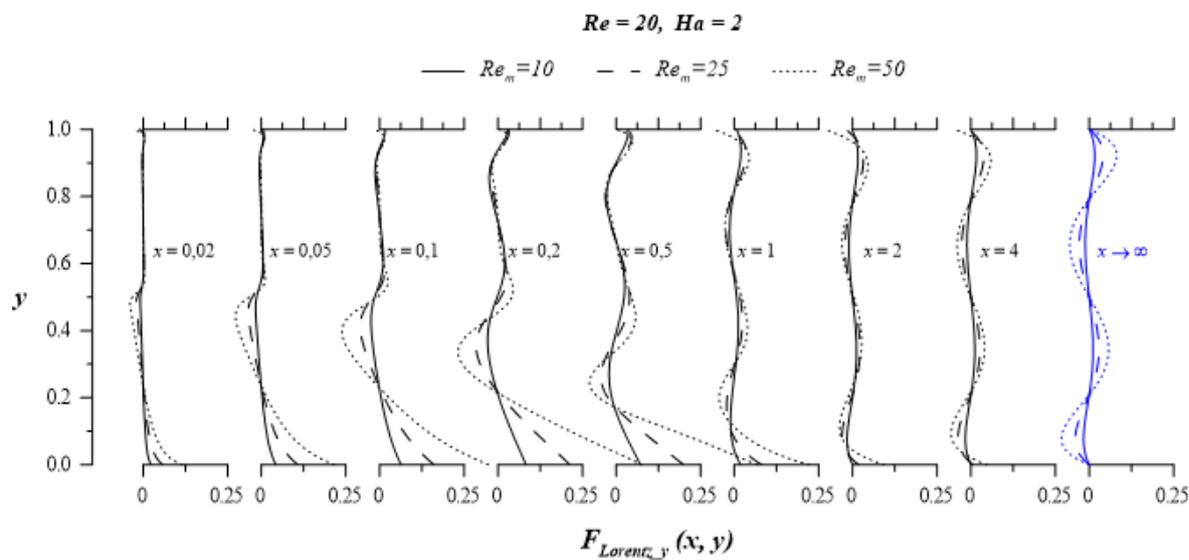


Figura 5.18: desenvolvimento da componente vertical da força de Lorentz, para $Re = 20$, $Ha = 2$ e diferentes Re_m .

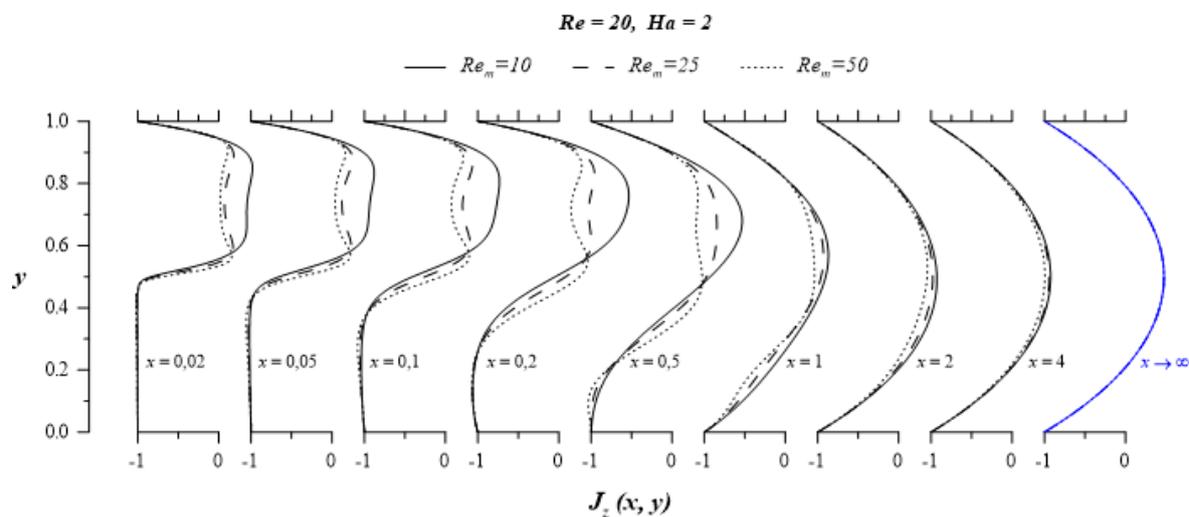


Figura 5.19: desenvolvimento da densidade de corrente, para $Re = 20$, $Ha = 2$ e diferentes Re_m .

CAPÍTULO VI:

FORMULAÇÃO EM TERMOS DE ψ , B_1 E B_2 COM
PROBLEMAS DE AUTOVALOR DE 4^a. E 2^a. ORDEM.

6. EQUAÇÕES DE GOVERNO

Um meio de gerar uma formulação que recupera as quatro condições de contorno necessárias (duas para a componente horizontal e duas para a componente vertical do campo magnético) é trabalhar com dois problemas de autovalor de 2ª ordem, um para B_1 e outro para B_2 , além do problema de 4ª. ordem já conhecido para o campo de velocidade. Então, aqui propomos, como desenvolvimento do trabalho, esta formulação alternativa para aplicação da G.I.T.T., gerando resultados numéricos satisfatórios e que substitua a Eq. (5.2), como já dito no capítulo anterior.

Assim, derivando-se a Eq. (4.4) com respeito a y e a Eq. (4.5) com respeito a x , fazendo-se uso da equação da continuidade (Eq. (4.3)), da definição da densidade de corrente advinda da lei de Ampère (Eq. 4.9) e da definição de função corrente (Eqs. (4.13)), escreve-se o comportamento do campo de velocidade da seguinte forma, em função de ψ , B_1 , e B_2 ⁸:

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \left(\frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 \psi}{\partial x \partial y^2} \right) - \frac{\partial \psi}{\partial x} \left(\frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 \psi}{\partial y \partial x^2} \right) = \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \psi}{\partial y^4} \right) - \frac{Ha^2}{\text{Re Re}_m} \left[B_2 \left(\frac{\partial^2 B_2}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 B_1}{\partial y^2} \right) - B_1 \left(\frac{\partial^2 B_1}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 B_2}{\partial x^2} \right) \right] \quad (6.1)$$

Usando o conceito de função corrente (Eqs. (4.13)) em uma manipulação das Eqs (4.6) e (4.7), obtém-se, para as equações dos campos B_1 e B_2 , as seguintes expressões:

$$0 = \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} B_2 + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial B_2}{\partial y} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} B_1 + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial B_1}{\partial y} + \frac{1}{\text{Re}_m} \left(\frac{\partial^2 B_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B_1}{\partial y^2} \right) \quad (6.2)$$

⁸ Nesta formulação ainda foi utilizado o grupo adimensional $B_2 = \frac{B_2^*}{B_0^*} = B_y + 1$, diferente de Assad (2006) e do capítulo anterior.

$$0 = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} B_1 + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial B_1}{\partial x} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} B_2 + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial B_2}{\partial x} - \frac{1}{\text{Re}_m} \left(\frac{\partial^2 B_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B_2}{\partial y^2} \right) \quad (6.3)$$

As condições de contorno abaixo completam a formulação. Na entrada e na saída do canal:

$$x = 0 \quad \begin{cases} \psi(0, y) = \begin{cases} \psi_e(y) \equiv g_e(y) = \int_q^y u_e(y) dy, & q < y < 1 \\ 0, & 0 < y \leq q \end{cases} \\ \frac{\partial \psi}{\partial x}(0, y) = 0 \\ B_1(0, y) = B_{1e}(y) \\ B_2(0, y) = B_{2e}(y) \end{cases} \quad (6.4 \text{ a-d})$$

$$x \rightarrow \infty \quad \begin{cases} \psi(x \rightarrow \infty, y) = \psi_\infty(y) \equiv g_\infty(y) = \int_0^y u_\infty(y) dy \\ \frac{\partial \psi}{\partial x}(x \rightarrow \infty, y) = 0 \\ B_1(x \rightarrow \infty, y) = B_{1\infty}(y) \\ B_2(x \rightarrow \infty, y) = B_{2\infty}(y) \end{cases} \quad (6.4 \text{ e-h})$$

Nas placas dielétricas, inferior e superior:

$$y = 0 \quad \begin{cases} \psi(x, 0) = 0 \\ \frac{\partial \psi}{\partial y}(x, 0) = 0 \\ B_1(x, 0) = 0 \\ B_2(x, 0) = 1 \end{cases} \quad y = 1 \quad \begin{cases} \psi(x, 1) = 1 - q \\ \frac{\partial \psi}{\partial y}(x, 1) = 0 \\ B_1(x, 1) = B_{1w_top} \\ B_2(x, 1) = 1 \end{cases} \quad (6.5 \text{ a-h})$$

6.1. APLICAÇÃO DA GITT.

Para a aplicação da GITT seguem-se os passos citados do capítulo 2, na seção 2.1., conforme feito nos capítulos anteriores.

6.1.1. FILTRAGEM DOS CAMPOS

A seguir, apresenta-se o filtro mostrado na Eq. (5.5), para a função corrente, e dois outros filtros associados aos campos B_1 e B_2 .

$$\psi(x, y) = \psi_H(x, y) + \psi_F(y) \quad (6.6)$$

$$B_1(x, y) = B_{1H}(x, y) + B_{1F}(y) \quad (6.7)$$

$$B_2(x, y) = B_{2H}(x, y) + B_{2F}(y) \quad (6.8)$$

Aplicando estes filtros nas Eqs. (6.1 – 6.5), as equações para ψ , B_1 e B_2 , bem como suas condições de contorno, ficam reescritas, respectivamente, da seguinte forma:

$$\left[\left(\frac{\partial \psi_H}{\partial y} + \frac{d\psi_F}{dy} \right) \left(\frac{\partial^3 \psi_H}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 \psi_H}{\partial x \partial y^2} \right) - \frac{\partial \psi_H}{\partial x} \left(\frac{\partial^3 \psi_H}{\partial y^3} + \frac{d^3 \psi_F}{dy^3} + \frac{\partial^3 \psi_H}{\partial x^2 \partial y} \right) \right] = \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^4 \psi_H}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \psi_H}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \psi_H}{\partial y^4} + \frac{d^4 \psi_F}{dy^4} \right) - \quad (6.9)$$

$$\frac{Ha^2}{\text{Re Re}_m} \left[\begin{aligned} & (B_{1H} + B_{1F}) \left(\frac{\partial^2 B_{2H}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 B_{1H}}{\partial x \partial y} \right) \\ & + (B_{2H} + B_{2F}) \left(\frac{\partial^2 B_{2H}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 B_{1H}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 B_{1F}}{\partial y^2} \right) \end{aligned} \right]$$

$$0 = \left(\frac{\partial^2 \psi_H}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi_F}{\partial y^2} \right) (B_{2H} + B_{2F}) + \left(\frac{\partial \psi_H}{\partial y} + \frac{\partial \psi_F}{\partial y} \right) \frac{\partial B_{2H}}{\partial y} + \frac{\partial^2 \psi_H}{\partial x \partial y} (B_{1H} + B_{1F}) + \frac{\partial \psi}{\partial x} \left(\frac{\partial B_{1H}}{\partial y} + \frac{\partial B_{1F}}{\partial y} \right) + \frac{1}{\text{Re}_m} \left(\frac{\partial^2 B_{1H}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B_{1H}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 B_{1F}}{\partial y^2} \right) \quad (6.10)$$

$$0 = \frac{\partial^2 \psi_H}{\partial x \partial y} (B_{2H} + B_{2F}) + \left(\frac{\partial \psi_H}{\partial y} + \frac{\partial \psi_F}{\partial y} \right) \frac{\partial B_{2H}}{\partial x} + \frac{\partial^2 \psi_H}{\partial y^2} (B_{1H} + B_{1F}) + \frac{\partial \psi_H}{\partial x} \frac{\partial B_{1H}}{\partial x} - \frac{1}{\text{Re}_m} \left(\frac{\partial^2 B_{2H}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B_{2H}}{\partial y^2} \right) \quad (6.11)$$

Com condições de contorno remodeladas para:

Entrada do canal

$$x = 0 \left\{ \begin{array}{l} \psi_H(0, y) = \begin{cases} \psi_e(y) - \psi_F(y) \equiv g_e(y) - g_\infty(y), & q < y < 1 \\ 0, & 0 < y \leq q \end{cases} \\ \frac{\partial \psi_H}{\partial x}(0, y) = 0 \\ B_{1H}(0, y) = -B_{1\infty}(y) \\ B_{2H}(0, y) = -B_{2\infty}(y) \end{array} \right. \quad (6.12 \text{ a-d})$$

$$x \rightarrow \infty \left\{ \begin{array}{l} \psi_H(x \rightarrow \infty, y) = \psi_\infty(y) - \psi_F(y) = 0 \\ \frac{\partial \psi_H}{\partial x}(x \rightarrow \infty, y) = 0 \\ B_{1H}(x \rightarrow \infty, y) = B_{1\infty}(y) - B_{1F}(y) = 0 \\ B_{2H}(x \rightarrow \infty, y) = B_{2\infty}(y) - B_{2F}(y) = 0 \end{array} \right. \quad (6.12 \text{ e-h})$$

Placas Dielétricas

$$y = 0 \left\{ \begin{array}{l} \psi_H(x, 0) = 0 \\ \frac{\partial \psi_H}{\partial y}(x, 0) = 0 \\ B_{1H}(x, 0) = 0 \\ B_{2H}(x, 0) = 0 \end{array} \right. \quad y = 1 \left\{ \begin{array}{l} \psi_H(x, 1) = 0 \\ \frac{\partial \psi_H}{\partial y}(x, 1) = 0 \\ B_{1H}(x, 1) = 0 \\ B_{2H}(x, 1) = 0 \end{array} \right. \quad (6.13 \text{ a-h})$$

6.1.2. PROBLEMA DE AUTOVALOR PARA OS CAMPOS B_1 E B_2

Enfatiza-se que, nesta seção, como o problema de autovalor ainda é de 4^a. ordem para o campo de velocidade e ainda se utilizam problemas de 2^a. ordem para as componentes do campo magnético, seguem-se os problemas (com suas respectivas soluções) apresentados nas Eqs. (5.13) e (5.18). Chama-se a atenção para a nomenclatura associada às componentes do campo magnético, onde denotaremos a autofunção normalizada de \tilde{C}_i com autovalores α_i , quando associados à solução do campo B_1 , com análogos \tilde{H}_i e β_i correspondentes ao campo B_2 , uma vez que os problemas de autovalor são equivalentes e de segunda ordem.

Admitindo-se que a que os campos $B_1(x, y)$ e $B_2(x, y)$ podem ser construído como uma expansão de autofunções e como já estão definidas as autofunções, os autovalores e a norma, os pares transformada integral/inversa são, então, definidos como:

$$\text{Campo } B_1 : \begin{cases} \bar{B}_{1H}(x) = \int_0^1 \tilde{C}_i(y) B_{1H}(x, y) dy & \text{transformada integral} & (6.14a) \\ B_{1H}(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{C}_i(y) \bar{B}_{1H}(x) & \text{inversa} & (6.14b) \end{cases}$$

$$\text{Campo } B_2 : \begin{cases} \bar{B}_{2H}(x) = \int_0^1 \tilde{H}_i(y) B_{2H}(x, y) dy & \text{transformada integral} & (6.15a) \\ B_{2H}(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{H}_i(y) \bar{B}_{2H}(x) & \text{inversa} & (6.15b) \end{cases}$$

Pode-se, agora, prosseguir com a transformação integral do problema diferencial original, operando-se com $\int_0^1 \tilde{C}_i(y) dy$ e com $\int_0^1 \tilde{H}_i(y) dy$ em ambos os lados das Eqs. (6.10) e (6.11) e nas condições de contorno mostradas na Eq. (6.12).

6.1.3. TRANSFORMAÇÃO INTEGRAL

Com o par transformada-inversa, definidas a autofunção e as propriedades de ortogonalidade do problema de autovalor escolhido para os diversos campos e, finalmente, das características dos campos para o escoamento completamente desenvolvido, o sistema resultante de quarta ordem para o campo de função corrente e de segunda ordem para as componentes do campo magnético B_1 e B_2 , filtrado e transformado, é mostrado a seguir.

I) TRANSFORMAÇÃO INTEGRAL DO CAMPO DE VELOCIDADE.

Conforme o problema de autovalor de quarta ordem, já mostrado nos capítulos 5 e 6, operando-se com $\int_0^1 \tilde{Y}_i(y) dy$ em ambos os lados da equação (6.9), tem-se:

$$\frac{d^4 \bar{\psi}_{Hi}}{dx^4}(x) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Re} \left[\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_{ijk}^{\psi} \left(\frac{d^3 \bar{\psi}_{Hj}}{dx^3}(x) \bar{\psi}_{Hk}(x) - \frac{d \bar{\psi}_{Hj}}{dx}(x) \frac{d^2 \bar{\psi}_{Hk}}{dx^2}(x) \right) \right. \right. \\ \left. \left. + (B_{ijk}^{\psi} - E_{ijk}^{\psi}) \left(\frac{d \bar{\psi}_{Hj}}{dx}(x) \bar{\psi}_{Hk}(x) \right) \right) \right] + \\ \sum_{j=1}^{\infty} \left(C_{ijF}^{\psi} \frac{d^3 \bar{\psi}_{Hj}}{dx^3}(x) + (D_{ijF}^{\psi} - F_{ijF}^{\psi}) \frac{d \bar{\psi}_{Hj}}{dx}(x) - \frac{2}{\text{Re}} G_{ij}^{\psi} \frac{d^2 \bar{\psi}_{Hj}}{dx^2}(x) \right) \right] + \\ \left[\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} M_{ijk}^{\psi} \bar{B}_{2Hj}(x) \frac{d \bar{B}_{2Hk}}{dx}(x) - \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} J_{ijk}^{\psi} \bar{B}_{1Hj}(x) \frac{d \bar{B}_{1Hk}}{dx}(x) \right] \\ \left. + \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left[I_{ijk}^{\psi} \left(\bar{B}_{1Hj}(x) \frac{d^2 \bar{B}_{2Hk}}{dx^2}(x) + \alpha_j^2 \bar{B}_{1Hj}(x) \bar{B}_{2Hk}(x) \right) \right] \right] \\ \frac{Ha^2}{\text{Re}_m} \left[\sum_{j=1}^{\infty} \left(O_{ijF}^{\psi} \frac{d \bar{B}_{2Hj}}{dx}(x) - N_{ijF}^{\psi} \bar{B}_{2Hj}(x) + K_{ijF}^{\psi} \frac{d^2 \bar{B}_{2Hj}}{dx^2}(x) \right) \right] \\ \left. - \sum_{j=1}^{\infty} \left(L_{ijF}^{\psi} \frac{d \bar{B}_{1Hj}}{dx}(x) - \alpha_j^2 P_{ijF}^{\psi} \bar{B}_{1Hj}(x) \right) - Q_{iFF} \right] \\ -H_{iF} - \mu_i^4 \bar{\psi}_{Hi}(x) \end{array} \right\} \quad (6.16)$$

De maneira similar, as condições de contorno de entrada e saída (Eqs. 6.12 a, b, e, f) são igualmente transformadas:

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\psi}_{Hi}(0) = \bar{g}_i = \int_0^1 \tilde{Y}_i(y) \psi_H(0, y) dy = \int_0^1 \tilde{Y}_i(y) [g_e(y) - g_{\infty}(y)] dy \\ \left. \frac{d \bar{\psi}_{Hi}}{dx} \right|_{x=0} = 0 \end{array} \right. \quad (6.17 \text{ a, b})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\psi}_{Hi}(x \rightarrow \infty) = 0 \\ \left. \frac{d \bar{\psi}_{Hi}}{dx} \right|_{x=\infty} = 0 \end{array} \right. \quad (6.18 \text{ a, b})$$

Os coeficientes que aparecem na Equação (6.16), resultantes do processo de transformação integral, são definidos como:

$$\begin{aligned}
A_{ijk}^{\psi} &= \int_0^1 \tilde{Y}_i(y) \tilde{Y}_j(y) \tilde{Y}_k'(y) dy & B_{ijk}^{\psi} &= \int_0^1 \tilde{Y}_i(y) \tilde{Y}_j''(y) \tilde{Y}_k'(y) dy \\
C_{ij\infty}^{\psi} &= \int_0^1 \tilde{Y}_i(y) \tilde{Y}_j(y) \frac{d\psi_F(y)}{dy} dy & D_{ij\infty}^{\psi} &= \int_0^1 \tilde{Y}_i(y) \tilde{Y}_j''(y) \frac{d\psi_F(y)}{dy} dy \\
E_{ijk}^{\psi} &= \int_0^1 \tilde{Y}_i(y) \tilde{Y}_j(y) \tilde{Y}_k'''(y) dy & F_{ij\infty}^{\psi} &= \int_0^1 \tilde{Y}_i(y) \tilde{Y}_j(y) \frac{d^3\psi_F(y)}{dy^3} dy \\
G_{ij}^{\psi} &= \int_0^1 \tilde{Y}_i(y) \tilde{Y}_j'''(y) dy & H_{iF}^{\psi} &= \int_0^1 \tilde{Y}_i(y) \frac{d^4\psi_F(y)}{dy^4} dy \\
I_{ijk}^{\psi} &= \int_0^1 \tilde{Y}_i(y) \tilde{C}_j(y) \tilde{H}_k'(y) dy & J_{ijk}^{\psi} &= \int_0^1 \tilde{Y}_i(y) \tilde{C}_j(y) \tilde{C}_k'(y) dy \\
K_{ijF}^{\psi} &= \int_0^1 \tilde{Y}_i(y) \tilde{H}_j(y) B_{1F}(y) dy & L_{ijF}^{\psi} &= \int_0^1 \tilde{Y}_i(y) \tilde{C}_j'(y) B_{1F}(y) dy \\
M_{ijk}^{\psi} &= \int_0^1 \tilde{Y}_i(y) \tilde{H}_j(y) \tilde{H}_k'(y) dy & N_{ijF}^{\psi} &= \int_0^1 \tilde{Y}_i(y) \tilde{H}_j(y) \frac{d^2 B_{1F}(y)}{dy^2} dy \\
O_{ijF}^{\psi} &= \int_0^1 \tilde{Y}_i(y) \tilde{H}_j'(y) B_{2F}(y) dy & P_{ijF}^{\psi} &= \int_0^1 \tilde{Y}_i(y) \tilde{C}_j(y) B_{2F}(y) dy \\
Q_{iFF}^{\psi} &= \int_0^1 \tilde{Y}_i(y) B_{2F}(y) \frac{d^2 B_{1F}(y)}{dy^2} dy & &
\end{aligned}$$

Equações (6.19 a-q)

II) TRANSFORMAÇÃO INTEGRAL DO CAMPO MAGNÉTICO.

Operando-se com $\int_0^1 \tilde{B}_{xi}(y) dy$ em ambos os lados das Equações (6.10) e (6.11) e de

modo análogo ao campo de velocidade, tem-se os seguintes resultados para B_1 e B_2 :

$$\frac{d^2 \bar{B}_{1Hi}}{dx^2}(x) = -\text{Re}_m \left\{ \begin{aligned} & \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left(G_{ijk}^{B1} + I_{ijk}^{B1} \right) \left(\frac{d\bar{\psi}_{Hj}}{dx}(x) \bar{B}_{1Hk}(x) \right) + \\ & \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_{ijk}^{B1} + E_{ijk}^{B1} \right) \left(\bar{\psi}_{Hj}(x) \bar{B}_{2Hk}(x) \right) \\ & + \sum_{j=1}^{\infty} \left[B_{ijF}^{B1} \bar{\psi}_{Hj}(x) + \left(H_{ijF}^{B1} + J_{ijF}^{B1} \right) \frac{d\bar{\psi}_{Hj}}{dx}(x) \right] \\ & + \sum_{j=1}^{\infty} \left[\left(C_{ijF}^{B1} + F_{ijF}^{B1} \right) \bar{B}_{2Hj}(x) \right] + D_{iFF}^{B1} \end{aligned} \right\} + \alpha_i^2 \bar{B}_{1Hj}(x) - K_{iF}^{B1} \quad (6.20)$$

$$\frac{d^2 \bar{B}_{2Hi}}{dx^2}(x) = \text{Re}_m \left\{ \begin{aligned} & \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} A_{ijk}^{B2} \left(\frac{d\bar{\psi}_{Hj}}{dx}(x) \bar{B}_{2Hk}(x) + \bar{\psi}_{Hj}(x) \frac{d\bar{B}_{2Hj}}{dx}(x) \right) + \\ & \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} D_{ijk}^{B2} \left(\frac{d^2 \bar{\psi}_{Hj}}{dx^2}(x) \bar{B}_{1Hk}(x) + \frac{d\bar{\psi}_{Hj}}{dx}(x) \frac{d\bar{B}_{1Hk}}{dx}(x) \right) \\ & + \sum_{j=1}^{\infty} \left[B_{ijF}^{B2} \frac{d\bar{\psi}_{Hj}}{dx}(x) + E_{ijF}^{B2} \frac{d^2 \bar{\psi}_{Hj}}{dx^2}(x) \right] + \sum_{j=1}^{\infty} \left[C_{ijF}^{B2} \frac{d\bar{B}_{2Hj}}{dx}(x) \right] \end{aligned} \right\} + \beta_i^2 \bar{B}_{2Hj}(x) \quad (6.21)$$

As condições de contorno na entrada e na saída (Eq. (6.12 c,d,g,h) filtradas e transformadas são:

$$\begin{cases} \bar{B}_{H1}(0, y) = -\bar{h}_{1i} = -\int_0^1 \tilde{B}_{1i}(y) B_{1F}(0, y) dy \\ \bar{B}_{H2}(0, y) = -\bar{h}_{2i} = -\int_0^1 \tilde{B}_{2i}(y) B_{2F}(0, y) dy \end{cases} \quad (6.22 \text{ a, b})$$

$$\begin{cases} \bar{B}_{H1}(x \rightarrow \infty, y) = 0 \\ \bar{B}_{H2}(x \rightarrow \infty, y) = 0 \end{cases} \quad (6.23 \text{ a, b})$$

Os coeficientes que aparecem nas Equações (6.20) (6.21), resultantes do processo de transformação integral, são definidos como:

Equação de B_l

$$\begin{aligned} A_{ijk}^{B1} &= \int_0^1 \tilde{C}_i(y) \tilde{Y}_j''(y) \tilde{H}_k(y) dy & B_{ijF}^{B1} &= \int_0^1 \tilde{C}_i(y) \tilde{Y}_j''(y) B_{2F}(y) dy \\ C_{ijF}^{B1} &= \int_0^1 \tilde{C}_i(y) \tilde{H}_i(y) \frac{d^2 \psi_F(y)}{dy^2} dy & D_{iFF}^{B1} &= \int_0^1 \tilde{C}_i(y) \frac{\partial^2 \psi_F}{\partial y^2}(y) B_{2F}(y) dy \\ E_{ijk}^{B1} &= \int_0^1 \tilde{C}_i(y) \tilde{Y}_j'(y) \tilde{H}_k'(y) dy & F_{ijF}^{B1} &= \int_0^1 \tilde{C}_i(y) \tilde{H}_j'(y) \frac{\partial \psi_F}{\partial y}(y) dy \\ G_{ijk}^{B1} &= \int_0^1 \tilde{C}_i(y) \tilde{Y}_j'(y) \tilde{C}_k(y) dy & H_{ijF}^{B1} &= \int_0^1 \tilde{C}_i(y) \tilde{Y}_j'(y) B_{1F}(y) dy \\ I_{ijk}^{B1} &= \int_0^1 \tilde{C}_i(y) \tilde{Y}_j(y) \tilde{C}_k'(y) dy & J_{ijF}^{B1} &= \int_0^1 \tilde{C}_i(y) \tilde{Y}_j(y) \frac{dB_{1F}(y)}{dy} dy \\ K_{iF}^{B1} &= \int_0^1 \tilde{C}_i(y) \frac{d^2 B_{1F}(y)}{dy^2} dy & & \end{aligned} \quad (6.24 \text{ a-k})$$

Equação de B_2

$$\begin{aligned}
 A_{ijk}^{B2} &= \int_0^1 \tilde{H}_i(y) \tilde{Y}_j'(y) \tilde{H}_k(y) dy & B_{ijF}^{B2} &= \int_0^1 \tilde{H}_i(y) \tilde{Y}_j'(y) B_{2F}(y) dy \\
 C_{ijF}^{B2} &= \int_0^1 \tilde{H}_i(y) \tilde{H}_j(y) \frac{\partial \psi_F}{\partial y}(y) dy & D_{ijk}^{B2} &= \int_0^1 \tilde{H}_i(y) \tilde{Y}_j(y) \tilde{C}_k(y) dy \\
 E_{ijF}^{B2} &= \int_0^1 \tilde{H}_i(y) \tilde{Y}_j(y) B_{1F}(y) dy & & (6.25 \text{ a-e})
 \end{aligned}$$

6.2. ALGORÍTIMO COMPUTACIONAL

De modo análogo aos capítulos anteriores, trunca-se as expansões dadas nas Eqs. (6.16), (6.20) e (6.21) para ordens $N\psi$, $N1$ e $N2$, o sistema resultante, em conjunto com suas condições de contorno, torna-se:

$$\frac{d^4 \bar{\psi}_{Hi}}{dx^4}(x) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Re} \left[\sum_{j=1}^{N\psi} \sum_{k=1}^{N\psi} \left(A_{ijk}^{\psi} \left(\frac{d^3 \bar{\psi}_{Hj}}{dx^3}(x) \bar{\psi}_{Hk}(x) - \frac{d \bar{\psi}_{Hj}}{dx}(x) \frac{d^2 \bar{\psi}_{Hk}}{dx^2}(x) \right) \right) + \right. \\ \left. + (B_{ijk}^{\psi} - E_{ijk}^{\psi}) \left(\frac{d \bar{\psi}_{Hj}}{dx}(x) \bar{\psi}_{Hk}(x) \right) \right] + \\ \left[\sum_{j=1}^{N\psi} \left(C_{ijF}^{\psi} \frac{d^3 \bar{\psi}_{Hj}}{dx^3}(x) + (D_{ijF}^{\psi} - F_{ijF}^{\psi}) \frac{d \bar{\psi}_{Hj}}{dx}(x) - \frac{2}{\text{Re}} G_{ij}^{\psi} \frac{d^2 \bar{\psi}_{Hj}}{dx^2}(x) \right) \right] \\ \\ \left[\left(\sum_{j=1}^{N2} \sum_{k=1}^{N2} M_{ijk}^{\psi} \bar{B}_{2Hj}(x) \frac{d \bar{B}_{2Hk}}{dx}(x) - \sum_{j=1}^{N1} \sum_{k=1}^{N1} J_{ijk}^{\psi} \bar{B}_{1Hj}(x) \frac{d \bar{B}_{1Hk}}{dx}(x) \right) \right. \\ \left. + \sum_{j=1}^{N1} \sum_{k=1}^{N2} \left[I_{ijk}^{\psi} \left(\bar{B}_{1Hj}(x) \frac{d^2 \bar{B}_{2Hk}}{dx^2}(x) + \alpha_j^2 \bar{B}_{1Hj}(x) \bar{B}_{2Hk}(x) \right) \right] \right] \\ \\ \frac{Ha^2}{\text{Re}_m} \left[\sum_{j=1}^{N2} \left(O_{ijF}^{\psi} \frac{d \bar{B}_{2Hj}}{dx}(x) - N_{ijF}^{\psi} \bar{B}_{2Hj}(x) + K_{ijF}^{\psi} \frac{d^2 \bar{B}_{2Hj}}{dx^2}(x) \right) \right. \\ \left. - \sum_{j=1}^{N1} \left(L_{ijF}^{\psi} \frac{d \bar{B}_{1Hj}}{dx}(x) - \alpha_j^2 P_{ijF}^{\psi} \bar{B}_{1Hj}(x) \right) - Q_{iFF} \right] \\ \\ -H_{iF} - \mu_i^4 \bar{\psi}_{Hi}(x) \end{array} \right\} \quad (6.26)$$

$$\frac{d^2 \bar{B}_{1Hi}}{dx^2}(x) = -\text{Re}_m \left\{ \begin{aligned} & \sum_{j=1}^{N\psi} \sum_{k=1}^{N1} (G_{ijk}^{B1} + I_{ijk}^{B1}) \left(\frac{d\bar{\psi}_{Hj}}{dx}(x) \bar{B}_{1Hk}(x) \right) + \\ & \sum_{j=1}^{N\psi} \sum_{k=1}^{N2} (A_{ijk}^{B1} + E_{ijk}^{B1}) (\bar{\psi}_{Hj}(x) \bar{B}_{2Hk}(x)) \\ & + \sum_{j=1}^{N\psi} \left[B_{ijF}^{B1} \bar{\psi}_{Hj}(x) + (H_{ijF}^{B1} + J_{ijF}^{B1}) \frac{d\bar{\psi}_{Hj}}{dx}(x) \right] \\ & + \sum_{j=1}^{N2} \left[(C_{ijF}^{B1} + F_{ijF}^{B1}) \bar{B}_{2Hj}(x) \right] + D_{iFF}^{B1} \end{aligned} \right\} + \alpha_i^2 \bar{B}_{1Hj}(x) - K_{iF}^{B1} \quad (6.27)$$

$$\frac{d^2 \bar{B}_{2Hi}}{dx^2}(x) = \text{Re}_m \left\{ \begin{aligned} & \sum_{j=1}^{N\psi} \sum_{k=1}^{N2} A_{ijk}^{B2} \left(\frac{d\bar{\psi}_{Hj}}{dx}(x) \bar{B}_{2Hk}(x) + \bar{\psi}_{Hj}(x) \frac{d\bar{B}_{2Hj}}{dx}(x) \right) + \\ & \sum_{j=1}^{N\psi} \sum_{k=1}^{N1} D_{ijk}^{B2} \left(\frac{d^2 \bar{\psi}_{Hj}}{dx^2}(x) \bar{B}_{1Hk}(x) + \frac{d\bar{\psi}_{Hj}}{dx}(x) \frac{d\bar{B}_{1Hk}}{dx}(x) \right) \\ & + \sum_{j=1}^{N\psi} \left[B_{ijF}^{B2} \frac{d\bar{\psi}_{Hj}}{dx}(x) + E_{ijF}^{B2} \frac{d^2 \bar{\psi}_{Hj}}{dx^2}(x) \right] + \sum_{j=1}^{N2} \left[C_{ijF}^{B2} \frac{d\bar{B}_{2Hj}}{dx}(x) \right] \end{aligned} \right\} + \beta_i^2 \bar{B}_{2Hj}(x) \quad (6.28)$$

Com condições de contorno,

$$\left\{ \begin{aligned} & \bar{\psi}_{H_i}(0) = \bar{g}_i = \int_0^1 \tilde{Y}_i(y) [g_e(y) - g_s(y)] dy, & \bar{\psi}_{H_i}(x \rightarrow \infty) = 0 \\ & \left. \frac{d\bar{\psi}_{H_i}}{dx} \right|_{x=0} = 0, & \left. \frac{d\bar{\psi}_{H_i}}{dx} \right|_{x \rightarrow \infty} = 0 \\ & \bar{B}_{H1}(0, y) = -\bar{h}_{1i} = - \int_0^1 \tilde{C}_i(y) B_{1F}(0, y) dy, & \bar{B}_{H1}(x \rightarrow \infty, y) = 0 \\ & \bar{B}_{H2}(0, y) = -\bar{h}_{2i} = - \int_0^1 \tilde{H}_i(y) B_{2F}(0, y) dy, & \bar{B}_{H2}(x \rightarrow \infty, y) = 0 \end{aligned} \right. \quad \text{com } i = 1, \dots, \begin{cases} N\psi \\ N1 \\ N2 \end{cases} \quad (6.29 \text{ a-d})$$

Admitindo-se a transformação de domínio e sua derivada vista nos capítulos anteriores,

$$\eta = 1 - e^{-cx} \quad \text{e} \quad \frac{d\eta}{dx} = c(1 - \eta),$$

o problema a ser resolvido seria dado pelas Eqs. (6.26), (6.27) e (6.28), associadas a estas transformações de domínio, com condições de contorno especificadas em $\eta = 1$.

Então, para a elaboração do algoritmo computacional, procede-se conforme o capítulo anterior, fazendo uso da sub-rotina DBVPFD do IMSL, reescrevendo o sistema de quarta ordem como um sistema de primeira ordem. Para isso, admite-se o vetor $\underline{X}(\eta)$, cujo tamanho será $4N\psi + 2N1 + 2N2$, tal que:

$$X = \left\{ \begin{array}{l} \bar{\psi}_{Hi}, \frac{d\bar{\psi}_{Hi}}{dx}, \frac{d^2\bar{\psi}_{Hi}}{dx^2}, \frac{d^3\bar{\psi}_{Hi}}{dx^3}, \\ \bar{B}_{1Hj}, \frac{d\bar{B}_{1Hj}}{dx}, \bar{B}_{2Hk}, \frac{d\bar{B}_{2Hk}}{dx} \end{array} \right\}_{4N\psi+2N1+2N2} ; \begin{cases} i = 1, 2, \dots, N\psi \\ j = 1, 2, \dots, N1 \\ k = 1, 2, \dots, N2 \end{cases} \quad (6.30)$$

Tabela 6.1 – Transformação do sistema de ordem superior para um de 1ª. ordem.

VETOR X	DERIVADAS de 1ª ORDEM – Vetor X' Sub-rotina da BVPFD
$X_i = \bar{\psi}_{Hi}$	$i = 1, 2, 3, \dots, N\psi$
$X_{N\psi+i} = \frac{d\bar{\psi}_{Hi}}{dx} = \frac{dX_i}{dx} = \frac{dX_i}{d\eta} \left(\frac{d\eta}{dx} \right)$	$\Rightarrow \frac{dX_i}{d\eta} = X_{N\psi+i} / \left(\frac{d\eta}{dx} \right)$
$X_{2N\psi+i} = \frac{d^2\bar{\psi}_{Hi}}{dx^2} = \frac{dX_{N\psi+i}}{dx} = \frac{dX_{N\psi+i}}{d\eta} \left(\frac{d\eta}{dx} \right)$	$\Rightarrow \frac{dX_{N\psi+i}}{d\eta} = X_{2N\psi+i} / \left(\frac{d\eta}{dx} \right)$
$X_{3N\psi+i} = \frac{d^3\bar{\psi}_{Hi}}{dx^3} = \frac{dX_{2N\psi+i}}{dx} = \frac{dX_{2N\psi+i}}{d\eta} \left(\frac{d\eta}{dx} \right)$	$\Rightarrow \frac{dX_{2N\psi+i}}{d\eta} = X_{3N\psi+i} / \left(\frac{d\eta}{dx} \right)$
$\frac{d^4\bar{\psi}_{Hi}}{dx^4} = \frac{dX_{3N\psi+i}}{dx} = \frac{dX_{3N\psi+i}}{d\eta} \left(\frac{d\eta}{dx} \right)$	$\Rightarrow \frac{dX_{3N\psi+i}}{d\eta} = \mathbf{Eq. (6.31)} / \left(\frac{d\eta}{dx} \right)$
$X_{4N\psi+j} = \bar{B}_{1Hj}$	$j = 1, 2, 3, \dots, N1$
$X_{4N\psi+N1+j} = \frac{d\bar{B}_{1Hj}}{dx} = \frac{dX_{4N\psi+j}}{dx} = \frac{dX_{4N\psi+j}}{d\eta} \left(\frac{d\eta}{dx} \right)$	$\Rightarrow \frac{dX_{4N\psi+j}}{d\eta} = X_{4N\psi+N1+j} / \left(\frac{d\eta}{dx} \right)$
$\frac{d^2\bar{B}_{1Hj}}{dx^2} = \frac{dX_{4N\psi+N1+j}}{dx} = \frac{dX_{4N\psi+N1+j}}{d\eta} \left(\frac{d\eta}{dx} \right)$	$\Rightarrow \frac{dX_{4N\psi+N1+j}}{d\eta} = \mathbf{Eq. (6.33)} / \left(\frac{d\eta}{dx} \right)$
$X_{4N\psi+2N1+k} = \bar{B}_{2Hk}$	$k = 1, 2, 3, \dots, N2$

$X_{4N\psi+2N1+N2+k} = \frac{d\bar{B}_{2Hj}}{dx} = \frac{dX_{4N\psi+2N1+k}}{dx}$ $X_{4N\psi+2N1+N2+k} = \frac{dX_{4N\psi+2N1+k}}{d\eta} \left(\frac{d\eta}{dx} \right)$	$\Rightarrow \frac{dX_{4N\psi+2N1+k}}{d\eta} = X_{4N\psi+2N1+N2+k} \left/ \left(\frac{d\eta}{dx} \right) \right.$
$\frac{d^2 \bar{B}_{2Hk}}{dx^2} = \frac{dX_{4N\psi+2N1+N2+k}}{dx} = \frac{dX_{4N\psi+2N1+N2+k}}{d\eta} \left(\frac{d\eta}{dx} \right)$	$\Rightarrow \frac{dX_{4N\psi+2N1+N2+k}}{d\eta} = \mathbf{Eq. (6.34)} \left/ \left(\frac{d\eta}{dx} \right) \right.$

Em termos dos elementos do vetor $\underline{X}(\eta)$, as Eqs. (6.26) a (6.29) são reescritas como:

Campo de velocidade

$$\frac{d^4 \bar{\psi}_{Hi}}{dx^4}(x) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Re} \left[\sum_{j=1}^{N\psi} \sum_{k=1}^{N\psi} \left(A_{ijk}^{\psi} (X_{3N\psi+j} X_k - X_{N\psi+j} X_{2N\psi+k}) + (B_{ijk}^{\psi} - E_{ijk}^{\psi}) (X_{N\psi+j} X_k) \right) + \right. \\ \left. \sum_{j=1}^{N\psi} \left(C_{ijF}^{\psi} X_{3N\psi+j} + (D_{ijF}^{\psi} - F_{ijF}^{\psi}) X_{N\psi+j} - \frac{2}{\text{Re}} G_{ij}^{\psi} X_{2N\psi+j} \right) \right] + \\ \\ \frac{Ha^2}{\text{Re}_m} \left[\left(\sum_{j=1}^{N2} \sum_{k=1}^{N2} M_{ijk}^{\psi} X_{4N\psi+2N1+j} X_{4N\psi+2N1+N2+k} - \sum_{j=1}^{N1} \sum_{k=1}^{N1} J_{ijk}^{\psi} X_{4N\psi+j} X_{4N\psi+N1+k} \right) \right. \\ \left. + \sum_{j=1}^{N1} \sum_{k=1}^{N2} \left[I_{ijk}^{\psi} \left(X_{4N\psi+j} \frac{d^2 \bar{B}_{2Hk}}{dx^2}(x) + \alpha_j^2 X_{4N\psi+j} X_{4N\psi+2N1+k} \right) \right] \right] \\ \\ + \sum_{j=1}^{N2} \left(O_{ijF}^{\psi} X_{4N\psi+2N1+N2+j} - N_{ijF}^{\psi} X_{4N\psi+2N1+j} + K_{ijF}^{\psi} \frac{d^2 \bar{B}_{2Hj}}{dx^2}(x) \right) \\ \\ - \sum_{j=1}^{N1} \left(L_{ijF}^{\psi} X_{4N\psi+N1+j} - \alpha_j^2 P_{ijF}^{\psi} X_{4N\psi+j} \right) - Q_{iFF} \\ \\ - H_{iF} - \mu_i^4 X_i \end{array} \right\} \quad (6.31)$$

Com as condições de contorno para o campo de velocidade remodeladas para:

$$X_{LEFT}(i) = \bar{g}_i \quad , \quad i = 1, 2, 3, \dots, N\psi \quad (6.32 \text{ a,b})$$

$$X_{LEFT}(NV+i) = 0 \quad , \quad i = 1, 2, 3, \dots, N\psi$$

$$X_{RIGHT}(i) = 0 \quad , \quad i = 1, 2, 3, \dots, N\psi$$

$$X_{RIGHT}(NV+i) = 0 \quad , \quad i = 1, 2, 3, \dots, N\psi \quad (6.32 \text{ c,d})$$

Campo de magnético B₁

$$\frac{d^2 \bar{B}_{1Hi}}{dx^2}(x) = -\text{Re}_m \left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^{N\psi} \sum_{k=1}^{N1} (G_{ijk}^{B1} + I_{ijk}^{B1}) (X_{N\psi+j} X_{4N\psi+k}) + \\ \sum_{j=1}^{N\psi} \sum_{k=1}^{N2} (A_{ijk}^{B1} + E_{ijk}^{B1}) (X_j X_{4N\psi+2N1+k}) \\ + \sum_{j=1}^{N\psi} [B_{ijF}^{B1} X_j + (H_{ijF}^{B1} + J_{ijF}^{B1}) X_{N\psi+j}] \\ + \sum_{j=1}^{N2} [(C_{ijF}^{B1} + F_{ijF}^{B1}) X_{4N\psi+2N1+j}] + D_{iFF}^{B1} \end{array} \right\} + \alpha_i^2 X_{4N\psi+j} - K_{iF}^{B1} \quad (6.33)$$

Campo de magnético B₂

$$\frac{d^2 \bar{B}_{2Hi}}{dx^2}(x) = \text{Re}_m \left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^{N\psi} \sum_{k=1}^{N2} A_{ijk}^{B2} (X_{N\psi+j} X_{4N\psi+2N1+k} + X_j X_{4N\psi+2N1+N2+k}) + \\ \sum_{j=1}^{N\psi} \sum_{k=1}^{N1} D_{ijk}^{B2} (X_{2N\psi+j} X_{4N\psi+k} + X_{N\psi+j} X_{4N\psi+N1+k}) \\ + \sum_{j=1}^{N\psi} (B_{ijF}^{B2} X_{N\psi+j} + E_{ijF}^{B2} X_{2N\psi+j}) + \sum_{j=1}^{N2} (C_{ijF}^{B2} X_{4N\psi+2N1+N2+j}) \end{array} \right\} + \beta_i^2 X_{4N\psi+2N1+i} \quad (6.34)$$

Com as condições de contorno para o campo magnético remodeladas para:

$$\begin{aligned} X_{LEFT}(4NV+i) &= -\bar{h}_{1i} \quad , & i &= 1,2,3,\dots,N1 \\ X_{LEFT}(4NV+2N1+i) &= -\bar{h}_{2i} \quad , & i &= 1,2,3,\dots,N2 \end{aligned} \quad (6.35 \text{ a,b})$$

$$\begin{aligned} X_{RIGHT}(4NV+i) &= 0 \quad , & i &= 1,2,3,\dots,N1 \\ X_{RIGHT}(4NV+2N1+i) &= 0 \quad , & i &= 1,2,3,\dots,N2 \end{aligned} \quad (6.35 \text{ c,d})$$

6.3. RESULTADOS

O intento deste capítulo é mostrar que, usando dois problemas de autovalor de segunda ordem para as componentes do campo magnético B_1 e B_2 , sem uso função escalar magnética (como foi feito no capítulo 5), recuperaríamos corretamente os valores associados às condições de contorno do campo magnético nas paredes. Por isso, nosso foco é mostrar que a estratégia deu certo com esta nova formulação e apresentar, principalmente, o comportamento do campo magnético para os diferentes parâmetros adimensionais envolvidos.

Assim, com as mesmas configurações computacionais anteriores (linguagem de programação, computador, pacote de sub-rotinas, erro relativo, etc.), os resultados numéricos foram obtidos com o truncamento das expansões em uma ordem finita de termos $N = N_\psi = NB_1 = NB_2$.

6.3.1. ANÁLISE DE CONVERGÊNCIA

A fim de evidenciar a natureza híbrida da metodologia aplicada, é mostrado um estudo do comportamento de convergência em diferentes posições longitudinais ao longo do canal. Para um comparativo com a formulação do capítulo anterior, são incluídas linhas nas tabelas para dois números de autovalores diferentes ($N=10$ e $N=20$) com os resultados mostrados nas Tabelas 5.2 e 5.3.

Nas tabelas a seguir, ainda são mostradas as duas variáveis adicionais ao lado de cada número de Reynolds magnético ou de Hartmann, a saber, c e i_adap . c é o fator de escala utilizado na transformação de domínio, dada pelas Eqs. (6.31), (6.33) e (6.34). i_adap é um “flag” utilizado no código computacional que informa se o procedimento adaptativo de solução numérica é empregado ($i_adap = 1$) ou não ($i_adap = 0$). Também é indicada a altura do degrau de entrada ($q=0$, sem *step*; $q=0.5$, com *step*).

Primeiramente, a análise de convergência é feita para a componente longitudinal da velocidade na linha central do canal, $u_c(x)$, para o gradiente de velocidade na parede superior, $\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=1}$ e, finalmente, para a magnitude da força de Lorentz na linha central do canal, $F_{Lorentz_c}(x)$.

Tabela 6.2: análise de convergência em diferentes posições ao longo do canal para $Re = 20$, $Ha = 2$, $E_z = -\frac{1}{2}$ e diferentes valores de Reynolds magnético ($Re_m = 10, 25$ e 50)

$Re_m = 10$ ($c = 0,6 - i_{adap} = 0, q=0.5$)															
$N \backslash x$	$u_c(x)$					$\left \frac{\partial u}{\partial y} \right _{y=1}$					$10^3 \times F_{Lorentz_c}(x)$				
	0.1	0.2	0.3	0.4	x_∞	0.1	0.2	0.3	0.4	x_∞	0.1	0.2	0.3	0.4	x_∞
5	0.314	0.457	0.577	0.663	0.738	10.96	10.01	8.590	7.128	3.194	3.446	5.094	5.830	5.362	119.1
10	0.276	0.453	0.581	0.669	0.738	11.53	10.09	8.445	6.929	3.194	3.091	5.204	5.911	5.360	11.91
10	0.276	0.451	0.577	0.662	0.738	11.56	10.14	8.487	6.965	3.194	FORMULAÇÃO ANTERIOR				
15	0.275	0.453	0.581	0.669	0.738	11.53	10.10	8.431	6.909	3.194	3.141	5.207	5.949	5.373	11.91
20	0.274	0.453	0.581	0.669	0.738	11.53	10.10	8.424	6.900	3.194	3.135	5.264	5.946	5.372	11.91
20	0.274	0.451	0.577	0.662	0.738	11.58	10.15	8.475	6.948	3.194	FORMULAÇÃO ANTERIOR				
$Re_m = 25$ ($c = 0,4 - i_{adap} = 0, q=0.5$)															
5	0.314	0.457	0.577	0.664	0.738	10.98	10.01	8.585	7.114	3.194	4.505	7.097	9.238	10.47	11.91
10	0.277	0.453	0.581	0.669	0.738	11.54	10.09	8.426	6.899	3.194	4.158	7.595	10.07	11.19	11.91
10	0.275	0.449	0.575	0.662	0.738	11.55	10.12	8.469	6.949	3.194	FORMULAÇÃO ANTERIOR				
15	0.274	0.453	0.581	0.669	0.738	11.53	10.09	8.410	6.879	3.194	4.251	7.805	10.22	11.28	11.91
20	0.274	0.453	0.581	0.669	0.738	11.53	10.09	8.403	6.870	3.194	4.236	7.789	10.21	11.27	11.91
20	0.273	0.449	0.575	0.662	0.738	11.56	10.13	8.450	6.922	3.194	FORMULAÇÃO ANTERIOR				
$Re = 50$ ($c = 0,5 - i_{adap} = 1, q=0.5$)															
5	0.314	0.457	0.577	0.664	0.738	10.98	10.01	8.585	7.114	3.194	4.505	7.097	9.238	10.47	11.91
10	0.277	0.453	0.581	0.669	0.738	11.54	10.09	8.426	6.899	3.194	4.158	7.595	10.07	11.19	11.91
10	0.275	0.449	0.575	0.662	0.738	11.55	10.12	8.469	6.949	3.194	FORMULAÇÃO ANTERIOR				
15	0.274	0.453	0.581	0.669	0.738	11.53	10.09	8.410	6.879	3.194	4.251	7.805	10.22	11.28	11.91
20	0.274	0.453	0.581	0.669	0.738	11.53	10.09	8.403	6.870	3.194	4.236	7.789	10.21	11.27	11.91
20	0.273	0.449	0.575	0.662	0.738	11.56	10.13	8.450	6.922	3.194	FORMULAÇÃO ANTERIOR				

Tabela 6.3: análise de convergência em diferentes posições ao longo do canal para $Re = 100$, $Re_m = 1$, $E_z = -\frac{1}{2}$ e diferentes valores de Hartmann, ($Ha=0, 10$ e 20)

$Ha=0$ ($c = 0,1 - i_{adap} = 0, q=0.5$)															
$N \backslash x$	$u_c(x)$					$\left \frac{\partial u}{\partial y} \right _{y=1}$					$F_{Lorentz_c}(x)$				
	0.1	0.2	0.3	0.4	x_∞	0.1	0.2	0.3	0.4	x_∞	0.1	0.2	0.3	0.4	x_∞
5	0.272	0.353	0.432	0.504	0.750	10.95	10.48	9.824	9.035	3.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
10	0.216	0.337	0.435	0.519	0.750	11.73	10.84	9.874	8.846	3.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
10	0.216	0.337	0.435	0.519	0.750	11.73	10.84	9.874	8.846	3.000	FORMULAÇÃO ANTERIOR				
15	0.214	0.337	0.435	0.519	0.750	11.71	10.85	9.852	8.797	3.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
20	0.214	0.337	0.435	0.519	0.750	11.69	10.85	9.837	8.779	3.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
20	0.214	0.338	0.435	0.519	0.750	11.69	10.85	9.837	8.779	3.000	FORMULAÇÃO ANTERIOR				
$Ha=10$ ($c = 0,2 - i_{adap} = 0, q=0.5$)															
5	0.282	0.397	0.493	0.569	0.617	11.52	10.82	10.29	9.836	6.249	0.741	1.242	1.244	0.875	1.166
10	0.232	0.381	0.496	0.582	0.617	11.57	11.28	11.03	10.52	6.249	0.802	1.264	1.234	0.822	1.166
10	0.233	0.379	0.494	0.583	0.617	12.55	12.01	10.90	9.568	6.249	FORMULAÇÃO ANTERIOR				
15	0.230	0.383	0.497	0.582	0.617	11.31	11.64	11.32	10.67	6.249	0.814	1.261	1.232	0.823	1.166
20	0.232	0.384	0.497	0.582	0.617	11.66	11.89	11.42	10.72	6.249	0.812	1.260	1.232	0.823	1.166
20	0.232	0.379	0.493	0.582	0.617	12.80	12.28	11.03	9.626	6.249	FORMULAÇÃO ANTERIOR				
$Ha=20$ ($c = 0,3 - i_{adap} = 0, q=0.5$)															
5	0.312	0.505	0.631	0.687	0.555	13.52	12.38	12.63	13.49	11.11	0.727	1.105	0.874	0.346	0.555
10	0.269	0.483	0.622	0.680	0.555	11.46	13.18	15.13	16.12	11.11	0.785	1.132	0.890	0.366	0.555
10	0.262	0.414	0.502	0.545	0.555	15.49	16.42	15.57	13.98	11.11	FORMULAÇÃO ANTERIOR				
15	0.269	0.489	0.623	0.677	0.555	10.46	14.36	16.13	16.83	11.11	0.796	1.125	0.890	0.378	0.555
20	0.274	0.491	0.623	0.677	0.555	11.79	15.17	16.51	17.09	11.11	0.793	1.122	0.890	0.378	0.555
20	0.259	0.411	0.499	0.544	0.555	16.52	17.53	16.23	14.31	11.11	FORMULAÇÃO ANTERIOR				

Com os resultados mostrados, percebe-se uma convergência mais aguçada para pontos pouco mais distantes da entrada do canal onde os efeitos de borda são menos influentes.

Tabela 6.2

- Para o caso da componente longitudinal da velocidade no cetro do canal (u_c), observa-se uma boa taxa de convergência, ocorrendo para $N = 10$, no terceiro dígito, para os valores de $x \geq 0.2$ ao longo do canal com os diferentes números de Reynolds magnéticos. Posições próximas da entrada estão sujeitas a efeitos de borda e sofrem pequenas variações numéricas na entrada do canal. Nesta região, a recirculação próxima ao *step*, o descolamento e o recolamento também provocam variações próximas às placas superior e inferior. Observa-se que o número de Reynolds magnético não afeta o desenvolvimento do campo de velocidade. Um comparativo entre as formulações deste capítulo e do anterior (linha preta) mostram boa concordância entre as duas formulações, principalmente para $N=20$;

- Para o gradiente de velocidade $\left(\left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=1} \right)$, observa-se uma convergência muito boa,

alcançada para $N=10$ no terceiro dígito para $x \geq 0.2$. De modo geral, a convergência na entrada do canal é mais lenta, devido ao uso do filtro da região do escoamento completamente desenvolvido e da descontinuidade da função corrente nesta região. Ainda, se comparando os resultados encontrados para os dois capítulos com formulações distintas (Cap. 5 e 6), observa-se uma excelente concordância para $Ha=2$ e diferentes Re_m ;

- Para a magnitude da força de Lorentz na linha central do canal, na intenção de se observar o efeito do escoamento sobre o campo com um pequeno valor de Re_m , os valores estão multiplicados por 10^{-3} . Para esta variável, observa-se uma convergência para $x \geq 0.2$ no terceiro dígito (quinta casa decimal pois os valores estão “ampliados”). A força de Lorentz é dependente, principalmente, do produto vetorial entre a velocidade e o campo magnético, então, é uma variável interessante de análise de convergência pois depende do desenvolvimento de ambos os campos.

Tabela 6.3

- Para o caso da componente longitudinal da velocidade no cetro do canal (u_c), observa-se que a convergência sofre uma forte influência do número de Hartmann, tornando-se mais difícil ao passo que ele cresce. Ainda assim, o valor da velocidade na linha central já apresenta convergência no terceiro dígito para $x \geq 0.3$ e $N=10$. Mesmo com Ha mais elevados, o que afeta fortemente o escoamento, na região central do escoamento, observamos uma boa concordância entre os resultados encontrados nos dois capítulos (Cap. 5 e 6);
- Para o gradiente de velocidade $\left(\left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=1} \right)$ na parede superior, a convergência se mostra muito sensível ao número de Hartmann e é alcançada satisfatoriamente para pontos mais distantes da entrada do canal. Neste caso, devido às modificações nos contornos, para Ha mais elevados, observamos uma diferença sensível entre as duas formulações sugeridas.
- Para a magnitude da força de Lorentz na linha central do canal, a convergência se mostra melhor para este termo, atingindo convergência no terceiro dígito para $x \geq 0.2$ e $N=15$.

6.3.2. COMPARAÇÃO COM RESULTADOS DA LITERATURA

Para validação do código computacional utilizado na formulação, no capítulo anterior, nas Figuras 5.2a e 5.2b, foram ilustrados os perfis das componentes longitudinal e vertical da velocidade, respectivamente, para duas posições distintas ($x=7$ e $x=15$), mostrando para fins de *benchmark*, a robustez da GITT. Como temos uma nova formulação neste capítulo 6,

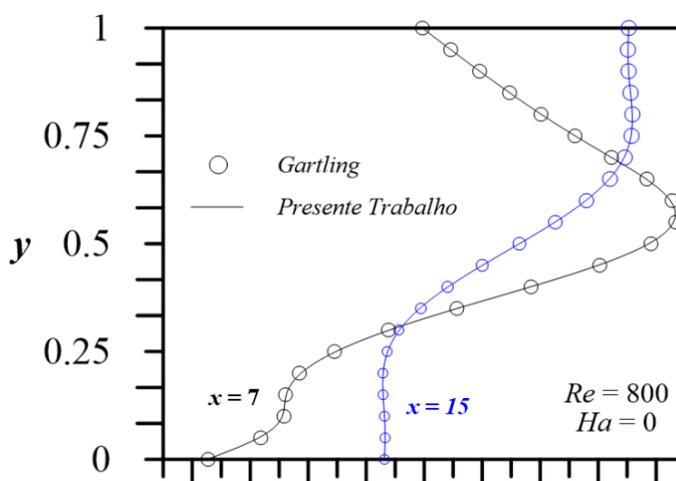


Figura 6.1: vorticidade para $X=7$ e $X=15$ comparando resultados de Gartling (1990) e o presente trabalho.

revisitamos Gartling (1990) e reproduzimos na Figura 6.1 o gráfico que mostra a vorticidade (ω) nas duas posições acima citadas. Esta figura mostra que os resultados encontrados validam a presente formulação mostrando a eficácia da G.I.T.T.. Para mostrar validação com $Ha \neq 0$ é mostrada a Figura 6.2 que indica a total concordância do perfil de velocidade, para $x=0,5$, $Ha=2$, $Re=20$ e $Re_m=25$, entre a formulação do capítulo anterior (com a função escalar magnética β) e a deste capítulo (com as duas componentes B_1 e B_2). A Figura 6.3 ainda mostra o comportamento da componente longitudinal da velocidade na linha central do canal, para $Re=100$, $Ha=10$ e $Re_m=1$, mostrando uma satisfatória concordância entre os resultados das duas formulações.

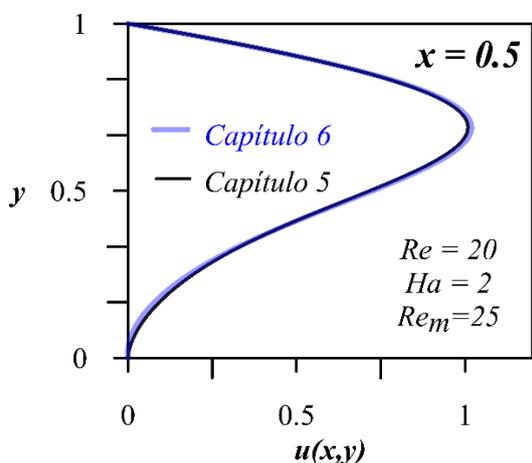


Figura 6.2: perfil de velocidade para $x=0,5$, $Re=20$, $Ha=2$ e $Re_m=25$, comparando resultados do capítulo 5 com o do 6.

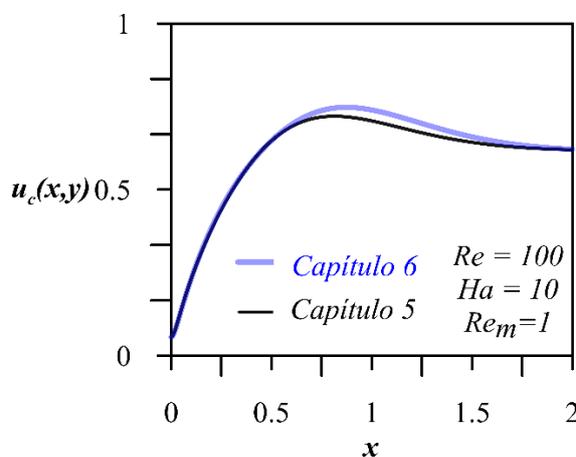


Figura 6.3: componente longitudinal da velocidade na linha central do canal para $Re=100$, $Ha=10$ e $Re_m=1$, comparando resultados do capítulo 5 com o do 6.

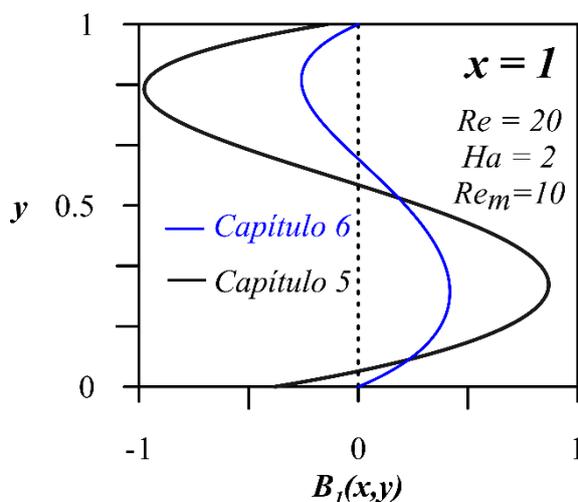


Figura 6.4: comportamento da componente longitudinal do campo magnético para $x=1$, $Ha=2$, $Re=20$ e $Re_m=10$, comparando resultados do capítulo 5 com o do 6.

Para o caso do campo magnético, a intenção é mostrar a perfeita recuperação das condições de contorno, não atendidas no capítulo 5, agora obtidas neste capítulo. Obviamente, não deve haver uma concordância no comportamento de $B_l(x,y)$, no desenvolvimento do escoamento. A Figura 6.4 mostra que a componente longitudinal do campo magnético ora apresenta o comportamento correto nos contornos, para nova formulação. Nela, vê-se o

comportamento de $B_l(x,y)$ para $x=1$, $Ha=2$, $Re=20$ e $Re_m=10$, nas duas formulações.

Ainda, para revalidar o código computacional, o caso a seguir mostra que a física por trás do escoamento não-MHD em um canal de placas paralelas sem degrau e com perfil uniforme na entrada, também é avaliada corretamente com o método da GITT, aqui utilizado. Duas referências são utilizadas na comparação: i) Wang e Longwell (1963) que se utilizam de métodos puramente numéricos e comparam, assim como este trabalho, com ii) Schlichting (1960) que descreve através de camada limite os resultados para o escoamento laminar em um canal de placas paralelas. As Tabelas 6.4 e 6.5 mostram, respectivamente, o comparativo entre valores da componente longitudinal da velocidade (u), entre a linha central ($y=0.5$) e as proximidades da parede inferior ($y=0.25$), em duas posições distintas ao longo do canal ($x=3.33314$ e $x=7.50000$).

Tabela 6.4: valores comparativos da componente longitudinal da velocidade para $x=3.33314$

y	Schlichting (Boundary Layer)	Wang (FDM)	Assad (GITT)
0.025	0.172	0.171	0.174
0.05	0.332	0.331	0.338
0.1	0.619	0.618	0.588
0.15	0.858	0.855	0.821
0.2	1.041	1.040	1.011
0.25	1.175	1.171	1.158
0.3	1.265	1.259	1.264
0.35	1.317	1.311	1.335
0.4	1.336	1.340	1.380
0.45	1.346	1.353	1.400
0.5	1.347	1.357	1.407

Tabela 6.5: valores comparativos da componente longitudinal da velocidade para $x=7.50000$

y	Schlichting (Boundary Layer)	Wang (FDM)	Assad (GITT)
0.025	0.156	0.154	0.148
0.05	0.302	0.298	0.288
0.1	0.568	0.564	0.546
0.15	0.797	0.793	0.772
0.2	0.969	0.965	0.966
0.25	1.143	1.140	1.129
0.3	1.261	1.259	1.260
0.35	1.347	1.347	1.361
0.4	1.404	1.406	1.433
0.45	1.436	1.440	1.475
0.5	1.446	1.451	1.488

Ainda, para fins de comparação e validação do código computacional os resultados de Wang e Longwell (1963), para valores da velocidade na linha central do canal, são comparados com o presente trabalho mostrando valores comparativos satisfatórios. Vide Tabela 6.6.

Tabela 6.6: valores comparativos para a velocidade (u) na linha central do canal

x	$\eta_{Assad} = 1 - e^{-cx}$	$\eta_{Wang} = 1 - (1 + cx)^{-1}$	u_{C_Assad}	u_{C_Wang}
1.19	0.112	0.588	1.219	1.231
2.588	0.228	0.756	1.363	1.324
5.175	0.404	0.861	1.464	1.413

Para que o domínio de posições longitudinais seja modificado de $[0, \infty)$ para $[0, 1]$ que ajuda iterativamente na convergência das séries, transformações da variável independente x são comumente apresentadas na literatura. A Tabela 6.6 mostra a transformação adotada neste trabalho e a adotada por Wang (1963) para três posições distintas, onde c é um parâmetro de compressão de escala, escolhido de maneira tal que o comportamento numérico da solução seja o mais suave possível.

O gráfico da Figura 6.5 mostra uma comparação entre as transformações de domínio adotadas neste trabalho e aquela adotada por Wang (1963) com $c=1.2$, valor este utilizado pelo famoso trabalho utilizado na comparação. O resultado indica que a transformação do presente trabalho faz com que o domínio seja mais rapidamente convergido para $\eta=1$ em pontos distantes da entrada do canal, mostrando que a transformação reduz a quantidade de pontos na malha, agilizando o processo de convergência. Salienta-se, ainda, que parâmetros de contração mais elevados fazem a variável independente transformada (η) deslocar-se mais rapidamente para 1.

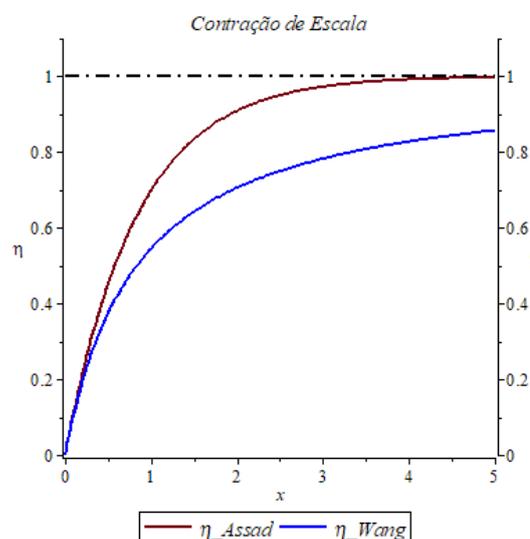


Figura 6.5: evolução das variáveis independentes transformadas (η) utilizadas no presente trabalho e por Wang (1963).

Por fim, fazemos uma comparação com a formulação feita por Assad (2016), que utiliza um canal de placas paralelas (sem degrau de entrada) e que aplica formulação

semelhante à do capítulo anterior, em termos de Ψ e β , utilizando um perfil de entrada uniforme de velocidade. Neste caso, fazemos $q=0$ na presente formulação, eliminando, assim, o degrau de entrada e geramos resultados comparativos que serão mostrados a seguir.

As Figuras 6.6 a 6.8 mostram, respectivamente, os resultados superpostos encontrados por Assad (2016) e Assad (2021) (presente capítulo) para a evolução das componentes horizontal da velocidade, vertical da velocidade e horizontal do campo, magnético, em diversas posições ao longo do canal, utilizando-se $Ha=2$, $Re=20$ e $Rem=10$. As Figuras 6.6 e 6.7 mostram uma excelente concordância nos resultados, com pequenas variações para $x=0,2$ e $x=0,5$. Estes resultados também são perfeitamente compatíveis com os encontrados por Brandt e Gillis (1966), uma vez que Assad (2016) fez comparações para os mesmos valores de parâmetros adimensionais supracitados para fins de *benchmarking*.

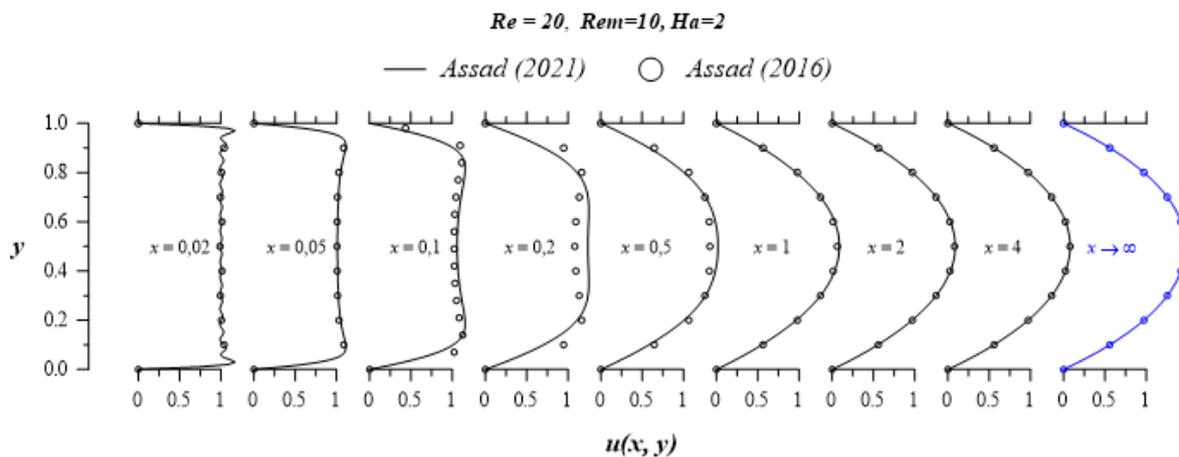


Figura 6.6: comparação do perfil de velocidade para diversas posições ao longo do canal, entre Assad (2016) e o presente trabalho (Cap. 6), para $Ha=2$, $Re=20$ e $Rem=10$.

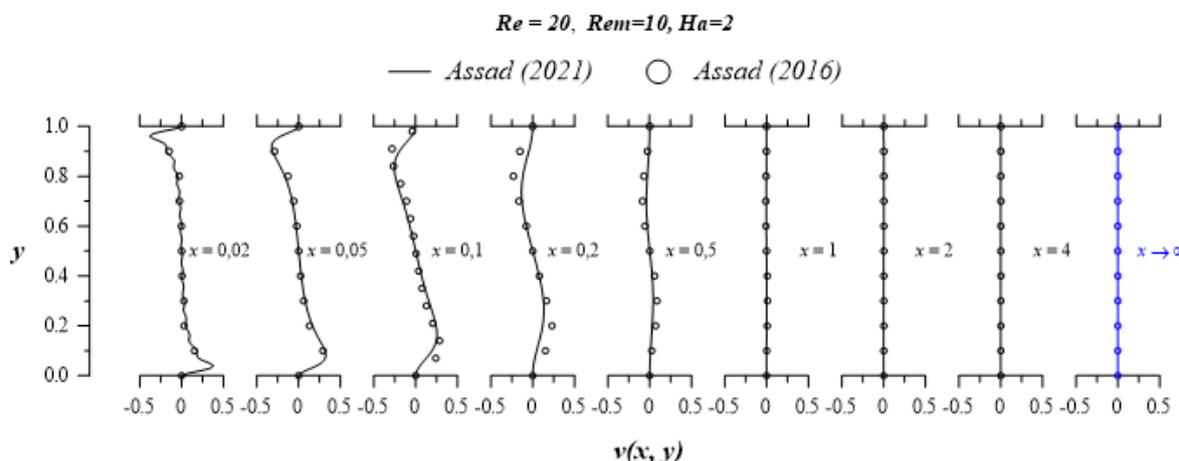


Figura 6.7: comparação do desenvolvimento da componente vertical de velocidade para diversas posições ao longo do canal entre Assad (2016) e o presente trabalho (Cap. 6), para $Ha=2$, $Re=20$ e $Rem=10$.

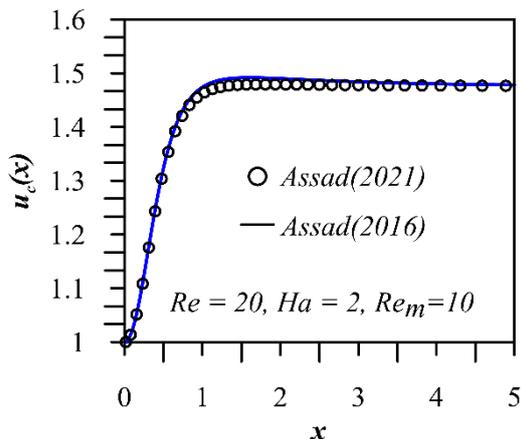


Figura 6.8: comparação do desenvolvimento da componente longitudinal da velocidade ao longo da linha central do canal, entre Assad (2016) e o presente trabalho (Cap. 6), para $Re=20$, $Re_m=10$ e $Ha=2$.

A Figura 6.8 mostra uma excelente concordância entre os resultados comparados nas duas formulações, com os parâmetros adimensionais indicados, evidenciando a robustez da formulação deste capítulo, ainda se comparada com a solução puramente numérica (método de diferenças finitas) utilizado por Brandt e Gillis (1966) e confrontado por Assad (2016).

A Figura 6.9 mostra a evolução da componente horizontal do campo magnético para diversas posições ao longo do canal. Se faz mister observar

que, com a presente formulação, não mais observamos, como já foi dito, a discordância do valor de B_1 nas paredes do canal. Não obstante, as diferenças encontradas neste desenvolvimento, sobretudo nas amplitudes valoradas para esta variável, devem-se à mudança do grupo adimensional de B_2 ($B_2|_{Assad(2016)} = B_y + Ha$ e $B_2|_{Assad(2021)} = B_y + 1$).

Para melhor compreensão, tome-se a Equação (A.36) do Apêndice A que lida do escoamento completamente desenvolvido. Na presente formulação, fazendo-se $q=0$, a Equação (A.36) torna-se $B_1(x \rightarrow \infty, y)|_{Assad(2021)} = -Re_m [g_\infty(y) - y]$, enquanto que, em Assad (2016),

$B_1(x \rightarrow \infty, y)|_{Assad(2016)} = -Re_m Ha [g_\infty(y) - y]$, ou seja, $B_{1\infty}|_{Assad(2016)} = Ha B_{1\infty}|_{Assad(2021)}$.

Nitidamente esta implicação também afetará o desenvolvimento de B_1 para posições intermediárias.

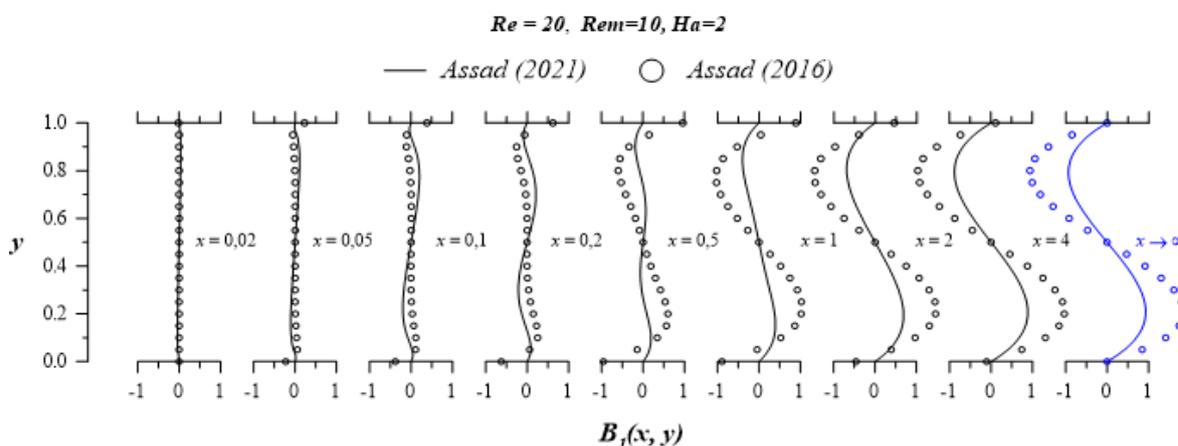


Figura 6.9: comparação do desenvolvimento da componente horizontal do campo magnético para diversas posições ao longo do canal, entre Assad (2016) e o presente trabalho (Cap. 6), para $Ha=2$, $Re=20$ e $Re_m=10$.

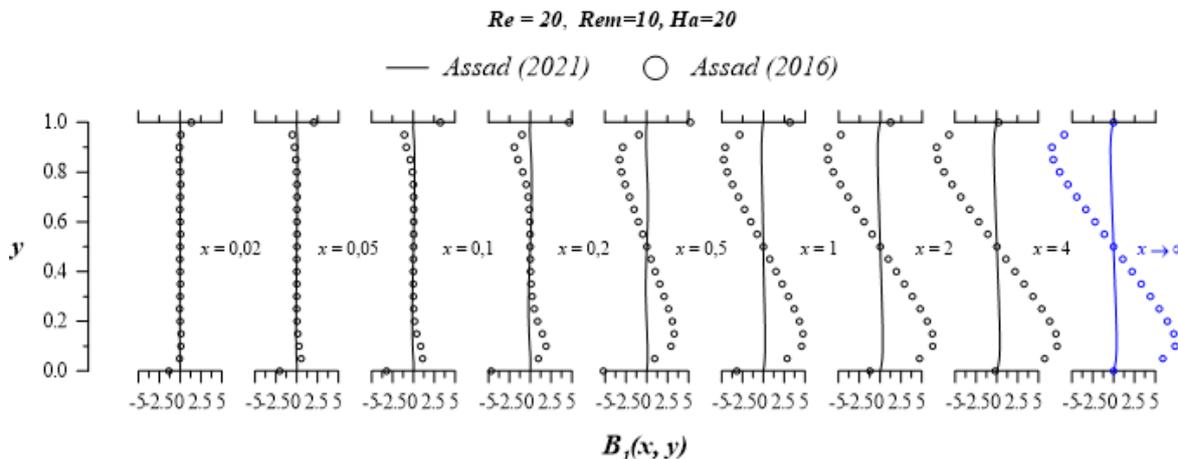


Figura 6.10: comparação do desenvolvimento da componente horizontal do campo magnético para diversas posições ao longo do canal, entre Assad (2016) e o presente trabalho (Cap. 6), para $Ha=20$, $Re=20$ e $Rem=10$.

Se tomarmos a Figura 6.10, que mostra o desenvolvimento de B_1 para $Re=20$, $Rem=10$ e $Ha=20$, com uma comparação com Assad (2016), ver-se-á que as amplitudes diferem ainda mais. Para evidenciar ainda que os comportamentos seriam comparáveis, a Figura 6.11 mostra um detalhe na superposição dos valores de B_1 , nas duas formulações, na região de escoamento completamente desenvolvido, multiplicando-se os valores $B_1|_{Assad(2021)}$ por Ha , evidenciando que, de fato,

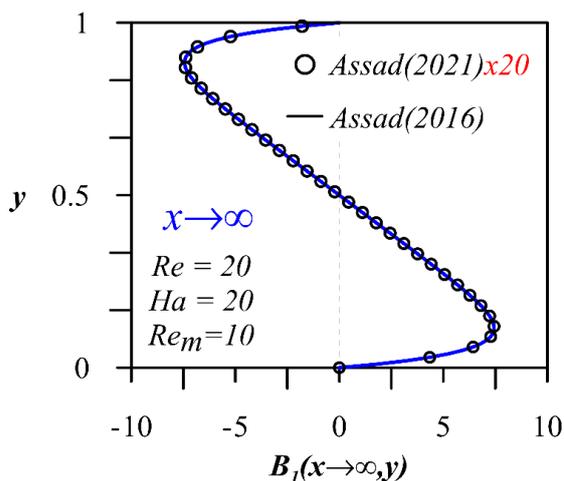


Figura 6.11: concordância nos valores da componente horizontal do campo magnético, entre Assad (2016) e o presente trabalho (Cap. 6), para $Ha=20$, $Re=20$ e $Rem=10$, quando se faz, na presente formulação, $B_1 \times Ha$.

$$B_1(x \rightarrow \infty, y)|_{Assad(2016)} = Ha B_1(x \rightarrow \infty, y)|_{Assad(2021)}.$$

6.3.3. ACOPLAMENTO MAGNETOHIDRODINÂMICO

Conforme visto nas figuras do capítulo anterior e reiterando que o escopo deste capítulo é mostrar que as condições de contorno do campo são satisfatoriamente recuperadas com a formulação dada pelas Eqs. (6.1) a (6.5) e posteriormente transformadas nas Eqs. (6.31) a (6.36), mostraremos: i) a influência do número de Reynolds magnético sobre o

escoamento, uma vez que é este parâmetro adimensional que mostra o efeito advectivo do escoamento sobre o campo magnético (*i.e.* suas componentes); ii) a influência do número de Hartmann sobre o escoamento, uma vez que é este parâmetro adimensional que mostra o efeito advectivo do campo sobre o escoamento (*i.e.* suas componentes).

Para observar a influência do número de Reynolds magnético sobre escoamento e como ele afeta crescentemente o campo magnético, as figuras a seguir mostrarão o comportamento das componentes de velocidade, do campo magnético, da força de Lorentz e da densidade de corrente para diferentes valores desse parâmetro ($Re_m=10, 25$ e 50), mantendo-se fixos $Re=20$ e $Ha=2$.

Influência de Re_m

Observa-se que, o perfil de velocidade (mostrado através de suas componentes) não é afetado por Re_m . As Figuras 6.12 e 6.13 mostram uma superposição de três curvas, de $u(x, y)$ e $v(x, y)$, para os três diferentes valores de Re_m , indicando que elas são idênticas.

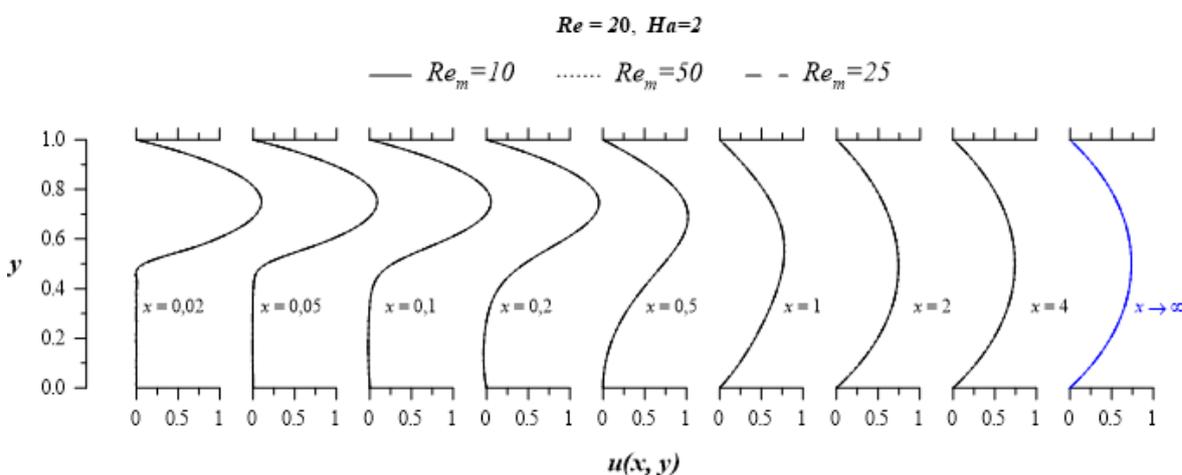


Figura 6.12: desenvolvimento da componente longitudinal da velocidade, para $Re = 20, Ha = 2$ e diferentes Re_m .

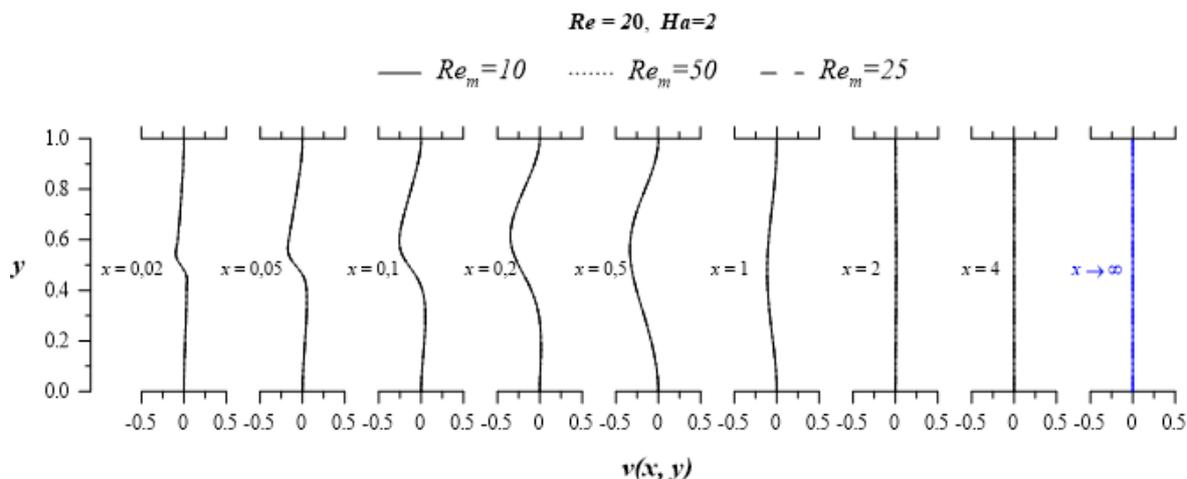


Figura 6.13: desenvolvimento da componente vertical da velocidade, para $Re = 20$, $Ha = 2$ e diferentes Re_m .

As Figuras 6.14 e 6.15 são de suma importância para ver o efeito da formulação com dois problemas de autovalor para as respectivas componentes do campo magnético B_1 e B_2 . Elas mostram que, mesmo no desenvolvimento, as condições de contorno são reproduzidas corretamente nas paredes: $B_1(x, 0) = B_1(x, 1) = 0$ e $B_2(x, 0) = B_2(x, 1) = 1$, o que retifica o problema encontrado com a formulação anterior. Vê-se, claramente, que quanto maior for Re_m , maior é a influência do escoamento sobre o campo magnético. Percebe-se, ainda, pela Fig. 6.12, que o desenvolvimento do campo é mais rápido para números de Reynolds magnéticos maiores.

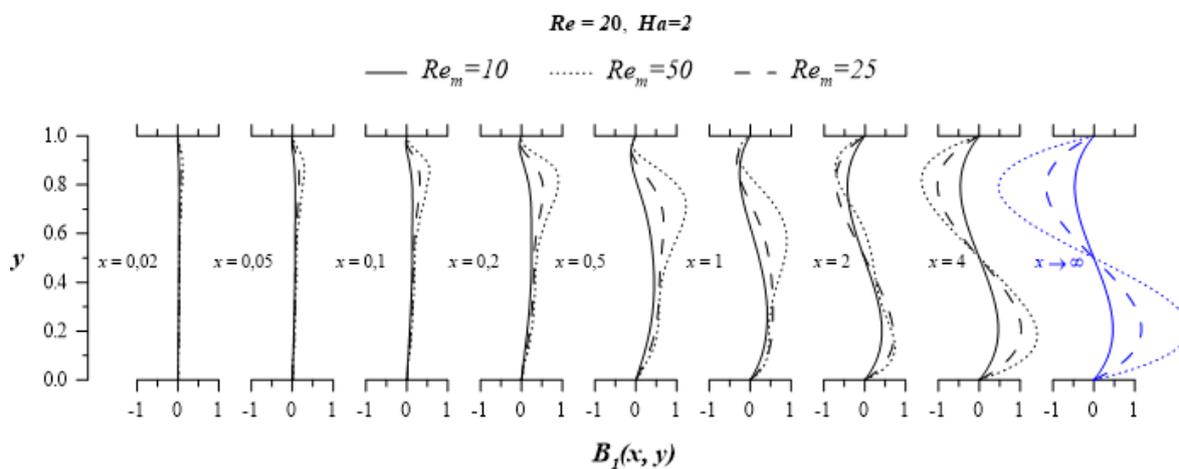


Figura 6.14: desenvolvimento da componente horizontal do campo magnético (B_1), para $Re = 20$, $Ha = 2$ e diferentes Re_m .

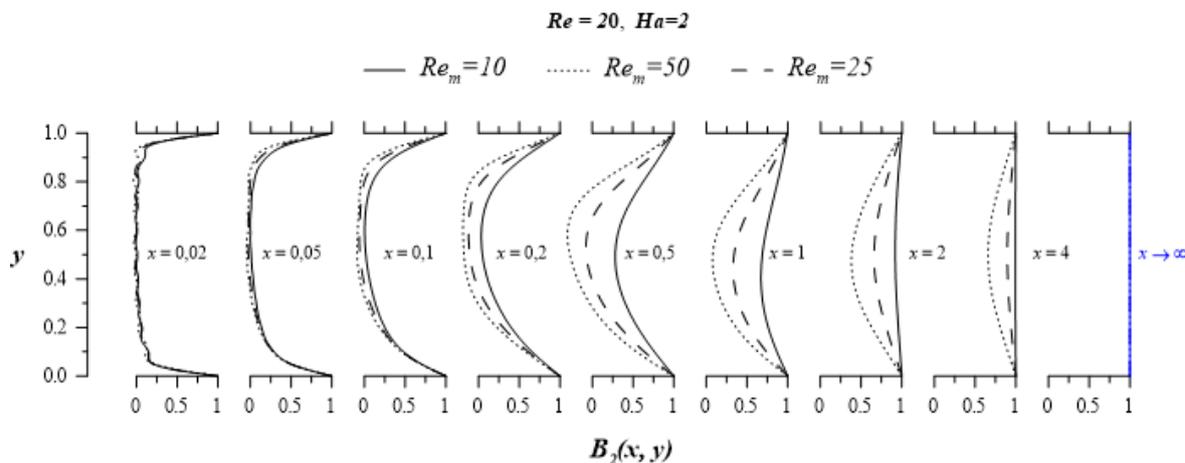


Figura 6.15: desenvolvimento da componente vertical do campo magnético (B_2), para $Re = 20$, $Ha = 2$ e diferentes Re_m .

A Figura 6.16 mostra o comportamento da magnitude do campo magnético total (soma de suas componentes). Vê-se mais uma vez que as condições de contorno são integralmente respeitadas e, ainda, que quando a componente horizontal sobre inversão de sentido (região central do canal), o campo magnético total coincide com sua componente vertical. Esta figura também ratifica que quanto maior for o número de Reynolds magnético mais rapidamente o campo fica completamente desenvolvido. Note-se ainda que $B(x, y)$ não representa o desenvolvimento da linha de campo magnético mas da intensidade do campo total em cada posição ao longo do canal.

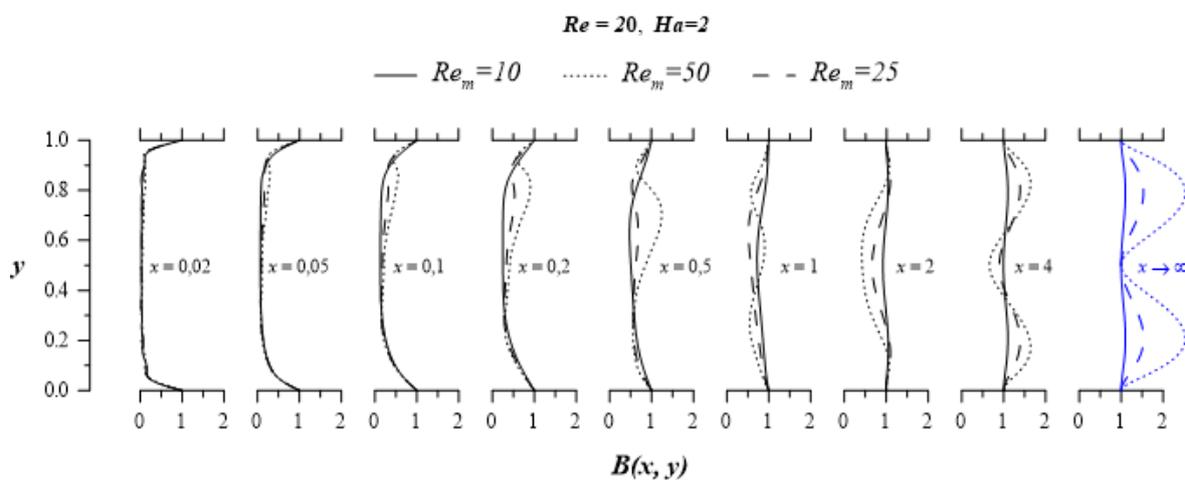


Figura 6.16: desenvolvimento da magnitude do campo magnético total, para $Re = 20$, $Ha = 2$ e diferentes Re_m .

Nas Figuras 6.17 a 6.19, observaremos a influência do número de Reynolds magnético sobre a força de Lorentz e sobre a densidade de corrente. É importante salientar que, se as componentes u e v da velocidade não são afetadas por alterações de Re_m .

Observando o comportamento da densidade de corrente na Figura 6.14, pautado na expressão da lei de Ohm (Eq. 4.9b), $J_z = E_z + uB_2 - vB_1$, tomando $E_z = -0.5$ (vide Apêndice A, na Eq. (A.38) com $B_{1_Top} = 0$), vê-se que a densidade de corrente, de fato, assume o valor de $-E_z$ nas placas devido à condição de não deslizamento do fluido condutor e admite um padrão que segue $u(x,y)$ na região de escoamento completamente desenvolvido.

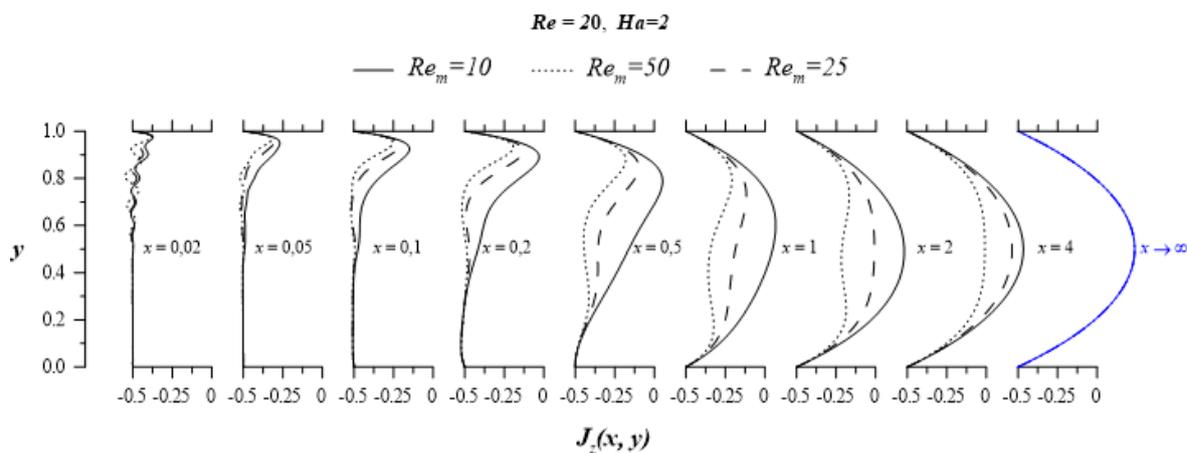


Figura 6.17: desenvolvimento da densidade de corrente, para $Re = 20$, $Ha = 2$ e diferentes Re_m .

Na Figura 6.15, observamos o comportamento da componente horizontal da força de Lorentz volumétrica (F_x). Para melhor compreensão de sua evolução, tome-se a expressão adimensional, $F_x = -\frac{1}{Re} J_z B_2$, desta componente (vista no último termo da Eq. 4.4). O sinal negativo provoca um espelhamento entre J_z , e F_x na região do escoamento completamente desenvolvido. Os efeitos de borda acabam influenciando a entrada do canal nas mais diversas variáveis.

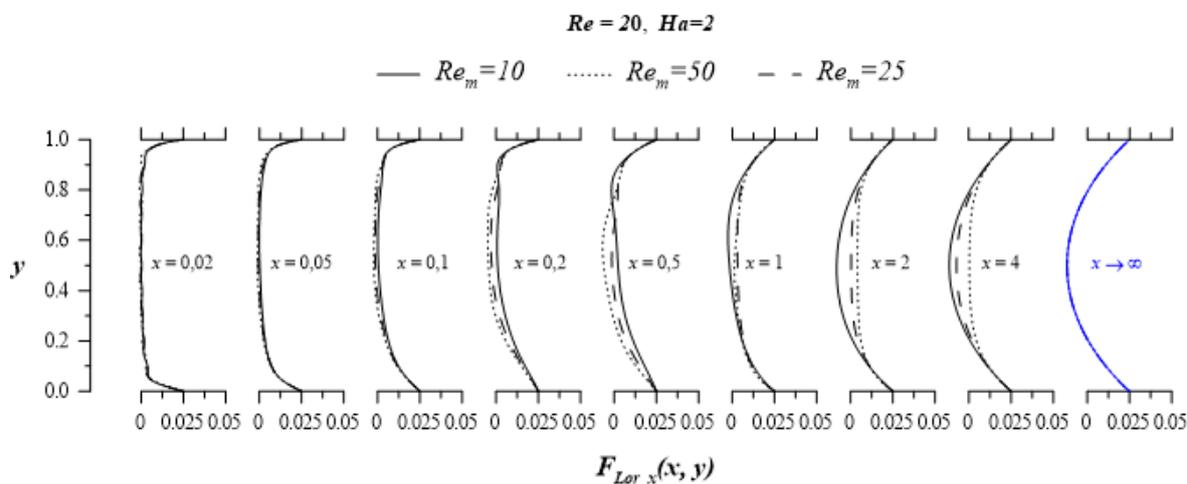


Figura 6.18: desenvolvimento da componente horizontal da força de Lorentz volumétrica, para $Re = 20$, $Ha = 2$ e diferentes Re_m .

Por último, a Figura 6.19 representa o comportamento da componente vertical da força de Lorentz volumétrica (F_y) cuja equação é diretamente relacionada à componente horizontal do campo magnético por, $F_y = J_z B_1 / Re$ (vide Eq. 4.5). O comportamento sinusoidal de F_y na região do escoamento completamente desenvolvido deve-se à superposição do efeito parabólico de J_z com a oscilação de B_1 . Percebe-se ainda a forte influência do número de Reynolds magnético sobre variáveis dependentes das componentes do campo magnético, mesmo que a escala tenha sido ampliada para visualização dos efeitos.

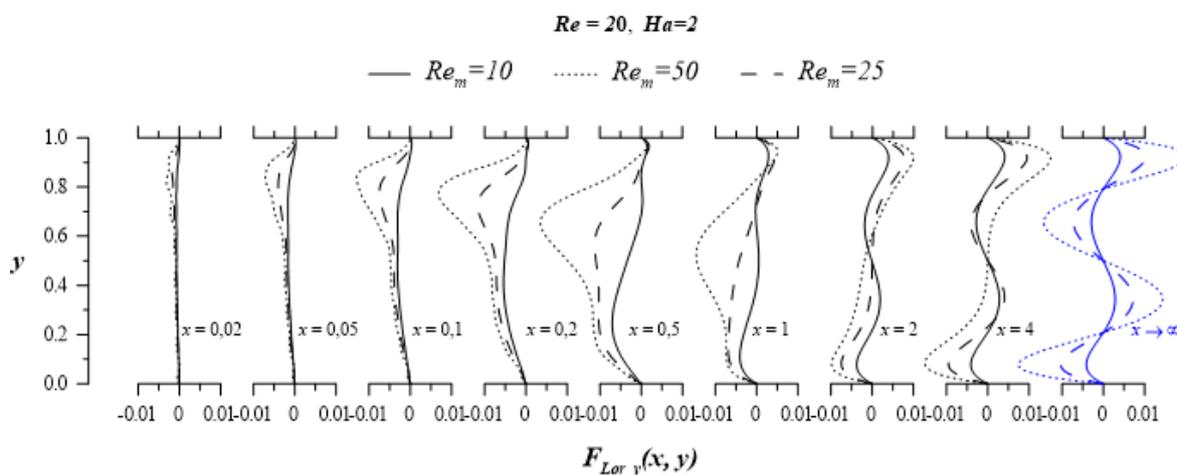


Figura 6.19: desenvolvimento da componente vertical da força de Lorentz volumétrica, para $Re = 20$, $Ha = 2$ e diferentes Re_m .

Influência de Ha

As Figuras 6.20 e 6.21 mostram os respectivos desenvolvimentos das componentes horizontal e vertical da velocidade, mostrando a forte influência do campo magnético sobre o escoamento quando o número de Hartmann cresce. Para valores mais elevados deste parâmetro observa-se um perfil mais empistonado (*plug-flow*), tornando-se completamente desenvolvido para $x=2$. Quanto maior for o número de Hartmann, menor é a zona de recirculação ($u < 0$), diminuindo a distância de recolamento. Vide Fig. 6.20 em $x=1$.

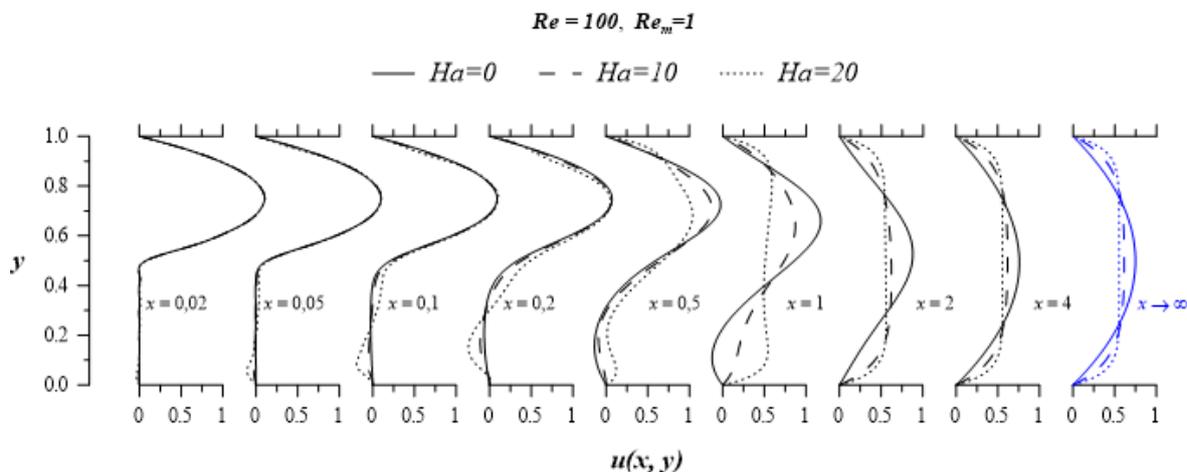


Figura 6.20: desenvolvimento da componente longitudinal da velocidade, para $Re = 100$, $Re_m = 1$ e diferentes Ha .

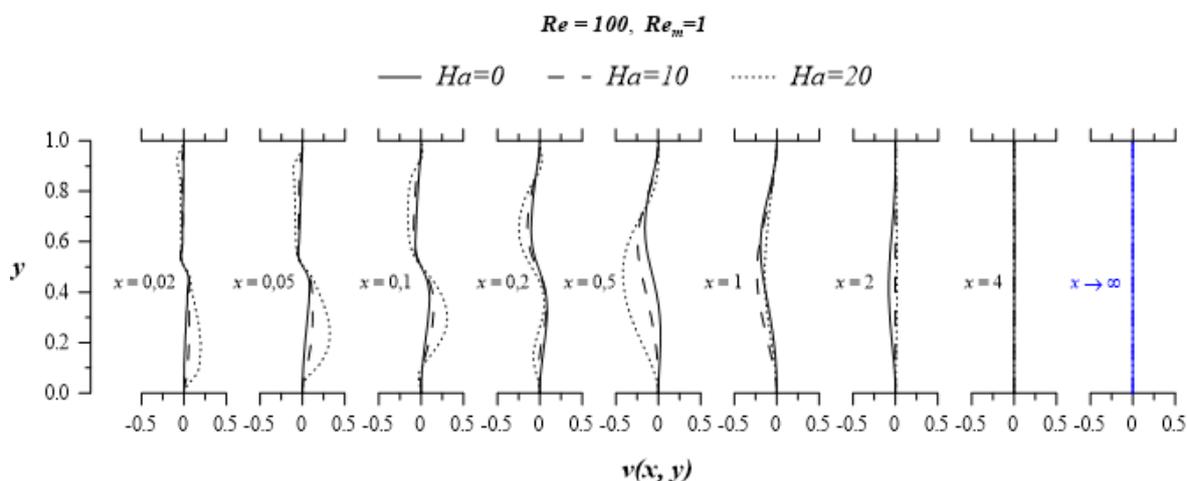


Figura 6.21: desenvolvimento da componente vertical da velocidade, para $Re = 100$, $Re_m = 1$ e diferentes Ha .

As Figuras 6.22 a 6.24 mostram os respectivos desenvolvimentos das componentes horizontal e vertical do campo magnético bem como a intensidade total do campo. Nelas podemos observar que quando $Ha=0$ não há campo induzido e mesmo que $Ha \neq 0$ ($Ha=10, 20$), o campo sofre a mesma influência para os diferentes valores deste parâmetro, uma vez que $Re_m=1$ para todos eles. Observe-se, ainda, que o campo total (B) segue o comportamento de B_2 pois $B_1 \approx 0$. Vide Figura 6.21.

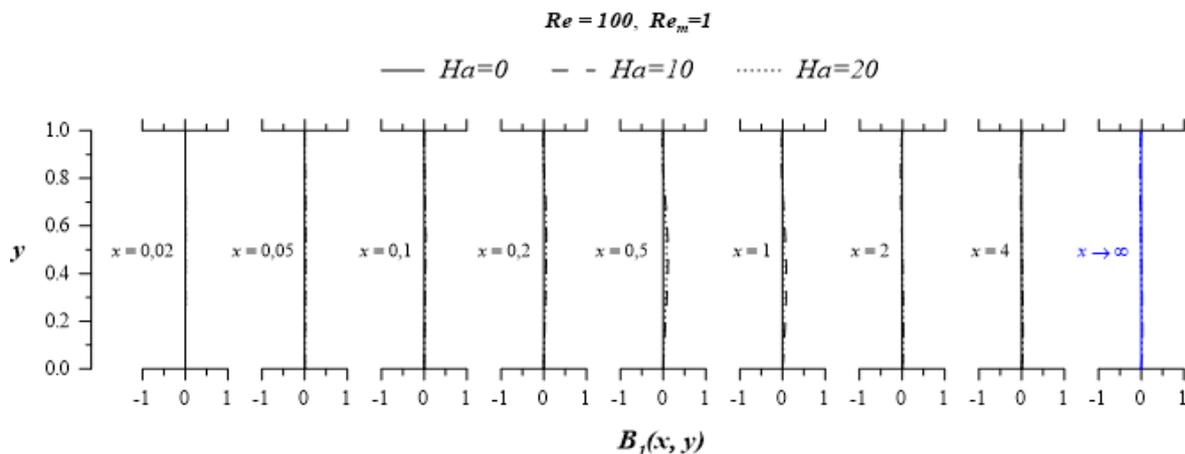


Figura 6.22: desenvolvimento da componente horizontal do campo magnético, para $Re = 100$, $Re_m = 1$ e diferentes Ha .

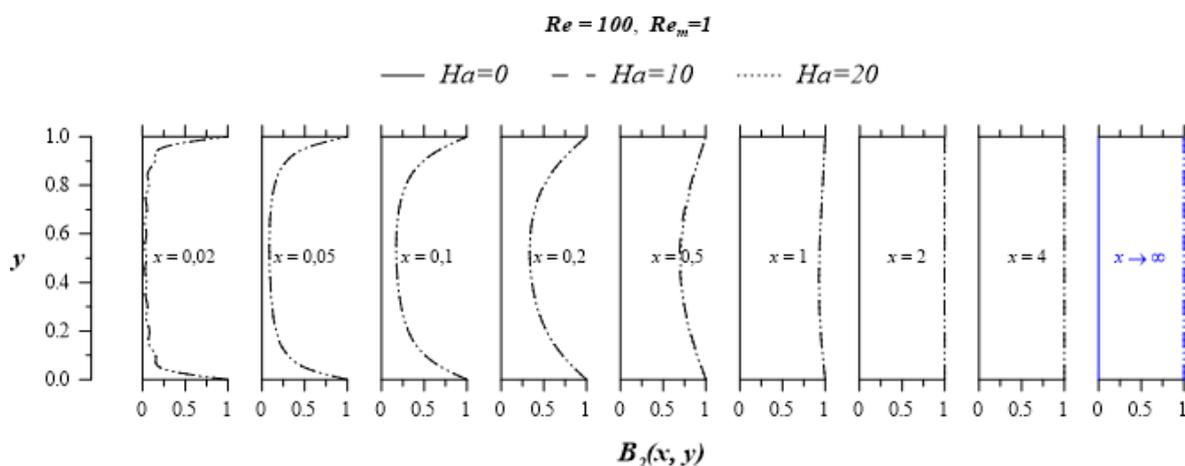


Figura 6.23: desenvolvimento da componente vertical do campo magnético, para $Re = 100$, $Re_m = 1$ e diferentes Ha .

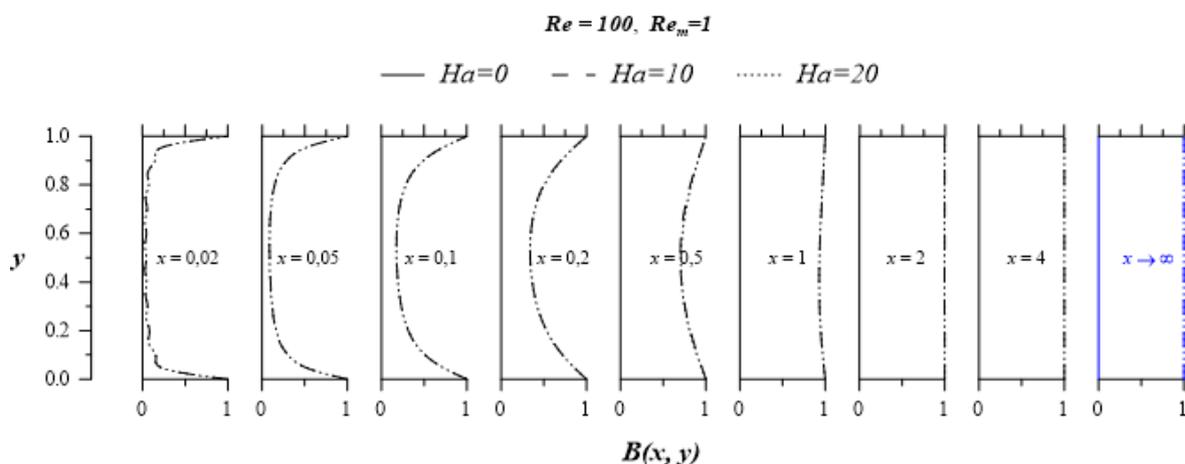


Figura 6.24: desenvolvimento do campo magnético total, para $Re = 100$, $Re_m = 1$ e diferentes Ha .

Nas Figuras 6.25 e 6.26 observa-se um comportamento enantiomorfo que se justifica pela expressão da força de Lorentz na direção x dada por $F_x = -\frac{J_z B_2}{Re}$, salientando-se que para

$Ha=0$ não há campo induzido e, portanto não há interação eletromagnética. Na Figura 6.24 vê-se que $F_y = \frac{J_z B_1}{Re} \approx 0$ pois $B_1 \approx 0$.

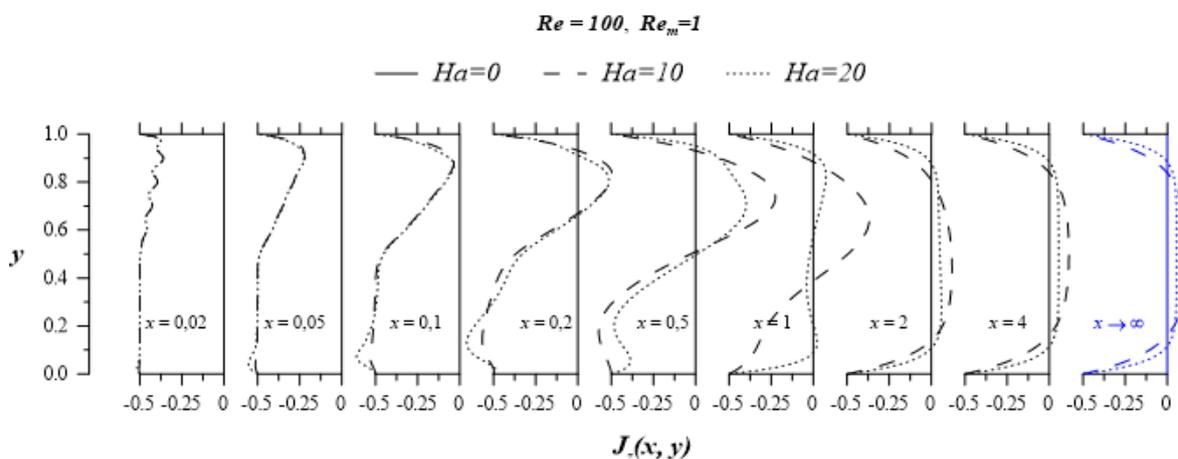


Figura 6.25: desenvolvimento da densidade de corrente, para $Re = 100, Re_m = 1$ e diferentes Ha .

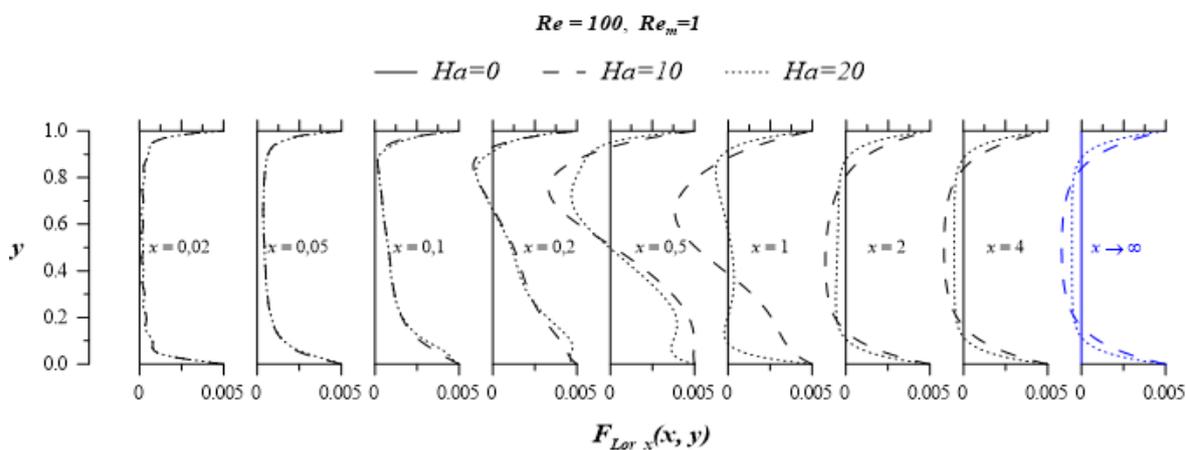


Figura 6.26: desenvolvimento da componente longitudinal da força de Lorentz, para $Re = 100, Re_m = 1$ e diferentes Ha .

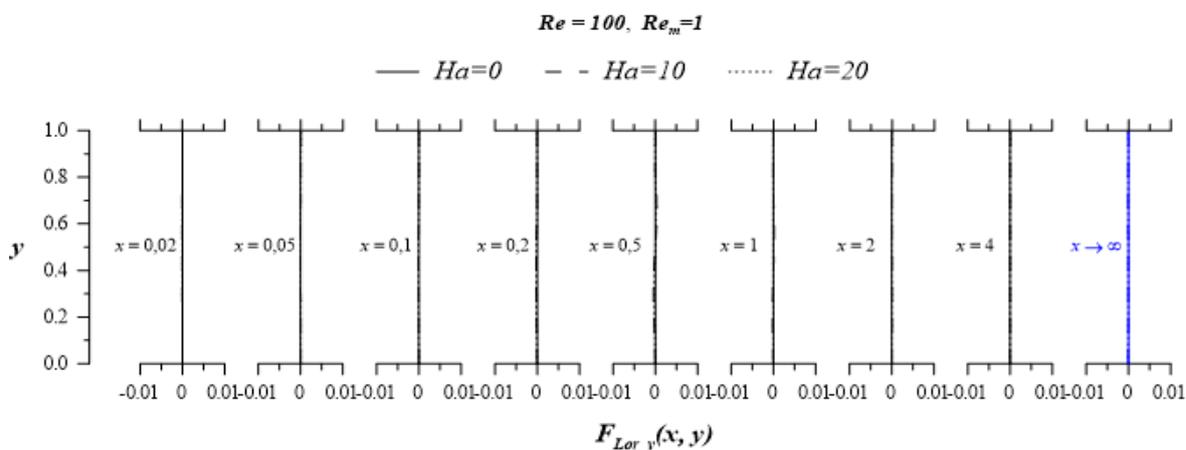


Figura 6.27: desenvolvimento da componente vertical da força de Lorentz, para $Re = 100, Re_m = 1$ e diferentes Ha .

CAPÍTULO VII:
CONCLUSÕES E SUGESTÕES

7. CONCLUSÕES E SUGESTÕES

7.1. CONCLUSÕES

Neste trabalho foi trazida à pauta a análise magnetohidrodinâmica (interação mútua escoamento/campo de indução magnética) que se desenvolve no interior de um canal de placas paralelas com um degrau de entrada (*backward-facing step*) ao se aplicar um campo de indução magnético transversal ao canal. O fluido (condutor de eletricidade, newtoniano, incompressível) ao entrar no canal, sob um perfil parabólico (perfil adotado neste texto), pode ter seu desenvolvimento afetado pelo campo e vice-versa, a depender dos parâmetros adimensionais correlatos: números de Hartmann e de Reynolds magnético. A força de Lorentz volumétrica é a responsável por este efeito cruzado entre os campos. Correntes elétricas podem ser induzidas no interior do fluido, gerando campos induzidos que se superpõem ao campo previamente imposto, observando-se a interação dinâmica de duas vias entre a mecânica dos fluidos e o eletromagnetismo. A formulação bidimensional na forma completa de Navier-Stokes foi abordada escrevendo-se o campo de velocidade em termos de função corrente (ψ). Já para o campo magnético: i) no capítulo 5, utilizou-se uma função escalar magnética (β), análoga à função corrente e duas opções para o campo magnético; no capítulo 6, utilizou-se uma formulação em termos das componentes ortogonais do campo magnético, B_1 e B_2 . Assim, para uma solução híbrida, numérica-analítica, do sistema de equações, aplicou-se a já bem fundamentada Técnica da Transformada Integral Generalizada (sigla em inglês: GITT) que já se mostrou uma ferramenta bastante robusta para a solução de certas classes de problemas da natureza físico-matemática.

As análises de convergência das expansões associadas ao campo de velocidade e ao campo magnético mostram o quão eficaz é a GITT, para fins de “*benchmarking*”. Um comparativo entre as formulações, mostrado no capítulo 6, mostrou que as formulações apresentadas têm uma boa taxa de convergência, têm desenvolvimento equânime nas variáveis comparadas, com uma variação sensível para o gradiente de velocidade na parede superior do canal, sobretudo, para números de Hartmann elevados. Os resultados e figuras apresentados, são comparados com resultados consolidados da ampla literatura, mostrando que os códigos computacionais desenvolvidos podem ser aplicados em outras geometrias e casos da magnetohidrodinâmica, como a imposição de campos magnéticos variáveis e/ou

transversais, correntes elétricas previamente geradas no escoamento, produzindo, como exemplo, bombas e válvulas MHD, além de medidores de vazão, caso aplicado no presente trabalho, onde não há fonte de tensão ligadas às placas laterais, extraíndo ou impondo correntes elétricas.

Por fim, a contribuição do presente trabalho apresenta-se na utilização da GITT para a solução do escoamento MHD em um canal de placas paralelas com um degrau de entrada onde mostra-se a interação cruzada entre o campo magnético imposto e o escoamento, o que verdadeiramente caracteriza a MHD. Tais resultados são uma evolução natural do trabalho desenvolvido por Assad (2016), apresentando resultados para o “*backward-facing step*” e, na observância de que o problema de autovalor empregado nesta metodologia, mostrada no capítulo 5, com uma equação diferencial de 2^a. ordem para o campo magnético, não recuperava as 4 condições de contorno necessárias (duas para a componente horizontal e duas para a componente vertical do campo magnético) à solução das equações de transporte do campo magnético. Isto posto, uma nova formulação foi escrita no capítulo 6, com dois problemas de autovalor de 2^a ordem, um para B_1 e outro para B_2 , além do problema de 4^a. ordem já conhecido para o campo de velocidade, recuperando perfeitamente as condições de contorno desejadas. Validada com a literatura, esta formulação completa a análise MHD sugerida, constituindo o epítome deste texto.

7.2. SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

7.2.1. SOLUÇÃO COM DOIS PROBLEMAS DE AUTOVALOR DE 4ª. ORDEM E USO DE FUNÇÕES ESCALARES (ψ E β).

O problema de autovalor empregado na metodologia do capítulo 5 (Eq. (5.18)) é uma equação diferencial de 2ª. ordem e não recupera as 4 condições de contorno necessárias (duas para a componente horizontal e duas para a componente vertical do campo magnético) à solução das equações de transporte do campo magnético (Eqs.(4.6 e 4.7)). Foi observado que, após aplicação da GITT, o valor da componente horizontal do campo magnético nas placas ($B_1(x,0)$ e $B_1(x,1)$), divergia do valor imposto nas condições de contorno e, após aplicação de fórmulas de inversão, não havia recuperação de tais condições. O impasse foi resolvido no capítulo 6 mas sugere-se que uma outra via de solução com dois problemas de autovalor de 4ª. Ordem de modo a mostrar, mais uma vez a robustez da G.I.T.T e recuperar satisfatoriamente as condições de contorno empregadas. De modo que, uma sugestão para trabalho futuro e substituir-se a Eq. (5.2) por uma que atenda as condições acima.

Desta forma, a formulação de Brandt e Gillis (1966) em termos da função escalar magnética será substituída por outra que utilize as duas equações governantes originais do campo magnético (Eqs. (4.6) e (4.7)). Isto pode ser resolvido de modo análogo ao que foi feito para as equações de governo do campo de velocidade. Assim, com o campo magnético, deriva-se a Eq. (4.6) com respeito a y e a Eq. (4.7) com respeito a x, quando então, fazendo-se uso da equação da continuidade (Eq. 4.3) e das transformações mostradas nas Eqs (4.13) e (4.14), chega-se ao seguinte resultado que irá substituir a Eq. (5.2):

$$\begin{aligned}
 -\frac{\partial \psi}{\partial y} \left(\frac{\partial^3 \beta}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 \beta}{\partial x \partial y^2} \right) + \frac{\partial \psi}{\partial x} \left(\frac{\partial^3 \beta}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 \beta}{\partial x^2 \partial y} \right) + \left(\frac{\partial \beta}{\partial y} - \frac{\partial \beta}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 \psi}{\partial x \partial y^2} \right) \\
 + 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial^2 \beta}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \beta}{\partial x^2} \right) = -\frac{1}{\text{Re}_m} \left(\frac{\partial^4 \beta}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \beta}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \beta}{\partial y^4} \right)
 \end{aligned} \tag{8.1}$$

Agora, é proceder com filtragem (caso entenda-se que vale a pena) e transformação integral das equações governantes.

7.2.2. ESCOAMENTO LAMINAR MHD EM DUTOS DE GEOMETRIA VARIÁVEL

Muitos são os trabalhos presentes na ampla literatura estudam problemas associados a dutos irregulares e apresentam solução através de métodos numéricos tradicionais (FEM ou FDM). Sob a forma de conhecimento, o V Congresso da *International Association for Hydraulic Research* (IAHR), realizado em Roma em 1982, especificou um problema teste com um duto de geometria complexa e 15 grupos propuseram diferentes soluções para o problema, elevando, para os estudiosos da área, o patamar de importância desta geometria. A GITT começa a ser aplicada nesta geometria com os trabalhos de Perez-Guerrero (1995) e Aparecido (1988) mas os fluidos não estão sob efeito cruzado de um campo magnético imposto, ou seja, não são escoamentos magnetohidrodinâmicos.

I. INTRODUÇÃO À FORMULAÇÃO: PERFIL DE VELOCIDADE

Considera-se agora um duto cujas paredes são definidas por uma geometria arbitrária, identificada pelas funções que descrevem o contorno, $y_1(x)$ e $y_2(x)$, dentro do qual escoa um fluido newtoniano condutor em regime laminar permanente. Um campo magnético externo será imposto ao escoamento e será considerada a interação MHD e, portanto, recíproca entre o escoamento e o campo. Para maior generalidade da formulação do problema, assume-se que não existe simetria com relação à linha de centro do duto como descrito na figura 7.1.

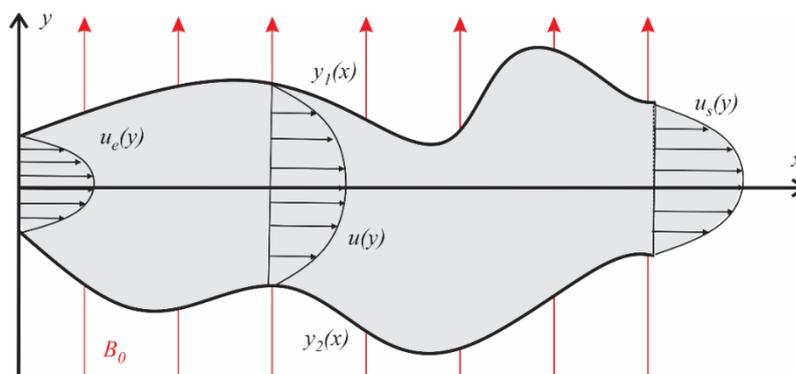


Figura 7.1: representação do perfil do duto irregular com perfis de velocidade completamente desenvolvidos que se adapta a cada posição longitudinal do canal

Neste caso as seguintes hipóteses simplificadoras são adotadas:

- escoamento bidimensional;
- escoamento incompressível
- propriedades do fluido constantes;
- fluido newtoniano;
- o campo magnético imposto é vertical;
- impermeabilidade e não deslizamento das paredes do duto;
- perfil parabólico de entrada.
- considera-se que em cada posição ao longo do duto se tem um perfil de velocidades desenvolvido, o qual vai se adaptando à irregularidade do canal. (PEREZ-GUERRERO, 1995)

O estudo deste modelo está em desenvolvimento e, para embasar-se no problema, foi desenvolvido o perfil de velocidade completamente desenvolvido sem influência do campo magnético ($Ha=0$). Para tanto a equação da componente horizontal do campo de velocidade, é mostrada abaixo na sua forma dimensional e já com as simplificações do escoamento completamente desenvolvido:

$$0 = -\frac{\partial P^*_{\infty}}{\partial x^*} + \mu \frac{d^2 u^*_{\infty}}{dy^{*2}} \quad (8.2)$$

Integrando uma vez na direção y:

$$0 = \mu \frac{du^*_{\infty}}{dy^*} - y^* \frac{\partial P^*_{\infty}}{\partial x^*} + C_1 \quad (8.3)$$

Integrando outra vez na direção y:

$$0 = \mu u^*_{\infty} - \frac{y^{*2}}{2} \frac{\partial P^*_{\infty}}{\partial x^*} + C_1 y^* + C_2 = 0 \quad (8.4)$$

Substituindo as condições de não deslizamento na Eq. (B3):

$$i) \quad u^*_{\infty}(y^*_1(x^*)) = 0$$

$$-\frac{y_1^*(x^*)^2}{2} \frac{\partial P_\infty^*}{\partial x^*} + C_1 y_1^*(x^*) + C_2 = 0 \quad (8.5)$$

$$\text{ii) } u_\infty^*(y_2^*(x^*)) = 0$$

$$-\frac{y_2^*(x^*)^2}{2} \frac{\partial P_\infty^*}{\partial x^*} + C_1 y_2^*(x^*) + C_2 = 0 \quad (8.6)$$

Igualando as Eqs. (B4) e (B5), resulta em:

$$C_1 = \frac{1}{2} \frac{\partial P_\infty^*}{\partial x^*} (y_2^*(x^*) - y_1^*(x^*)) \quad (8.7)$$

Substituindo a Eq. (B6) na Eq. (B5):

$$C_2 = -\frac{(y_1^*(x^*)y_2^*(x^*))}{2} \frac{\partial P_\infty^*}{\partial x^*} \quad (8.8)$$

Agora, substituindo as Eqs (B6) e (B7) na Eq. (B3):

$$u_\infty^*(y^*) = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial P_\infty^*}{\partial x^*} (y_1^*(x^*) - y^*)(y_2^*(x^*) - y^*) \quad (8.9)$$

Para o cálculo da velocidade média, $U_m^* = \frac{\int_{y_1^*(x^*)}^{y_2^*(x^*)} u_\infty^*(y^*) dy^*}{\int_{y_1^*(x^*)}^{y_2^*(x^*)} dy^*}$, tem-se, após a integração

da Eq. (B8) e das devidas simplificações algébricas:

$$U_m^* = -\frac{1}{12\mu} \frac{\partial P_\infty^*}{\partial x^*} (y_2^*(x^*) - y_1^*(x^*))^2 \quad (8.10)$$

Agora, adimensionalizando o perfil de velocidade dado pela Eq. (8.8) com a velocidade

média na entrada do canal, $\frac{u_\infty^*(y^*)}{U_{me}^*}$:

$$\frac{u_{\infty}^*(y^*)}{U_{me}^*} = \frac{\frac{1}{2\mu} \frac{\partial P_{\infty}^*}{\partial x^*} (y_1^*(x^*) - y^*)(y_2^*(x^*) - y^*)}{-\frac{1}{12\mu} \frac{\partial P_{\infty}^*}{\partial x^*} \Big|_e (y_2^*(0) - y_1^*(0))^2}$$

Observando que $y_2^*(0) - y_1^*(0) = h$, onde h é a altura do canal na entrada e tomando os seguintes grupos adimensionais,

$$x = \frac{x^*}{h} \quad y = \frac{y^*}{h} \quad u = \frac{u^*}{U_e} \quad p = \frac{P^* - P_e^*}{\rho U_e^2}$$

$$Re = \frac{\bar{U}_e h}{\nu}$$

tem-se:

$$u_{\infty}(x, y) = -6 \frac{\frac{\partial P_{\infty}}{\partial x}}{\frac{\partial P_{\infty}}{\partial x} \Big|_e} (y_1(x) - y)(y_2(x) - y) \quad (8.11)$$

Tomando os mesmos grupos adimensionais supracitados para adimensionalizar a Eq. (8.8) e a Eq. (8.9), tem-se:

$$u_{\infty}(x, y) = \frac{Re}{2} \frac{\partial P_{\infty}}{\partial x} (y_1(x) - y)(y_2(x) - y) \quad (8.12)$$

$$U_m(x) = \frac{U_m^*}{U_{me}^*} = -\frac{Re}{12} \frac{\partial P_{\infty}}{\partial x} (y_2(x) - y_1(x))^2 \quad (8.13)$$

Igualando as Eqs. (8.11) e (8.10), encontra-se o gradiente de pressão na entrada do canal:

$$\frac{\partial P_{\infty}}{\partial x} \Big|_e = -\frac{12}{Re} \quad (8.14)$$

Note-se que, é possível observar o valor óbvio da velocidade média na entrada do canal, ($U_{me}=1$) com a Eq. (8.12) e com $y_2(0) - y_1(0) = 1$. Assim, através do princípio da conservação da massa, escreve-se:

$$U_{me} h_e = U_{ms} h_s = U_{mx} h_x = \text{constante} = 1$$

Logo, para uma posição longitudinal qualquer, onde $y_2(x) - y_1(x) = h_x$, tem-se:

$$U_m(x) = \frac{1}{y_2(x) - y_1(x)} \quad (8.15)$$

Então, igualando-se as Eqs (8.14) e (8.12), encontra-se o gradiente de pressão em uma posição longitudinal qualquer do canal:

$$\frac{\partial P_\infty}{\partial x} = -\frac{12}{\text{Re}} (y_2(x) - y_1(x))^{-3} = -\frac{12}{\text{Re}(h(x))^3} \quad (8.16)$$

Finalmente, substituindo-se a Eq. (8.15) na Eq. (8.11):

$$u_\infty(x, y) = 6 \frac{(y_1(x) - y)(y_2(x) - y)}{(y_2(x) - y_1(x))^3} = 6 \frac{(y_1(x) - y)(y_2(x) - y)}{(h(x))^3} \quad (8.17)$$

Nota: se $y_1(x)=0$ e $y_2(x)=1$, obviamente o perfil recai sobre o do canal de placas paralelas ($u(y)=6y(1-y)$).

Os próximos passos consistem em se incluir efeitos magnéticos e completar a formulação em função corrente e posterior aplicação dos devidos filtros (caso julgue-se necessário) para que a GITT possa ser devidamente aplicada.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ABBASSI, H., & NASSRALLAH, S. **MHD flow and heat transfer in a backward-facing step**. International Communications in Heat and Mass Transfer. p. 231-237, 2006

ALIY, G. & KISHAN, N. **Optimal Homotopy Asymptotic Solution for Cross-Diffusion Effects on Slip Flow and Heat Transfer of Electrical MHD Non-Newtonian Fluid Over a Slendering Stretching Sheet**. International Journal of Applied and Computational Mathematics, 2019, 5: 80. <https://doi.org/10.1007/s40819-019-0679-y>.

ALIY, G., KISHAN, N. **Effect of Electric Field on MHD Flow and Heat Transfer Characteristics of Williamson Nanofluid over a Heated Surface with Variable Thickness. OHAM Solution**. Journal of Advances in Mathematics and Computer Science, p. 1-23. 2019.

AOKI, L. P. **Estudo do efeito magnetohidrodinâmico em um eletrólito a partir do uso de um dispositivo ejetor eletromagnético**. Dissertação de Mestrado - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2011.

APARECIDO, J. B. **Transformada integral generalizada no escoamento laminar e transferência de calor em dutos retilíneos de geometria arbitrária**. Tese de Doutorado – Instituto Tecnológico da Aeronáutica, São José dos Campos, São Paulo, 1988.

ARPACI, V. S., LARSEN, P. S. **Convection heat transfer**. 1st. Ed. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, 1984.

ASSAD, G. E. **Análise híbrida da interação mútua escoamento/campo magnético na região de entrada de um canal de placas paralelas**. Dissertação de Mestrado – UFPB, CEAR, João Pessoa, Paraíba, 2016.

ASSAD, G. E., LIMA, J.A., PONTES, F.A., MACÊDO, E. N., QUARESMA, J. N. N. **Hybrid analysis of the mutual interaction between flow and magnetic fields inside a**

parallel-plate channel (16th Brazilian of Thermal Sciences and Engineering, november, 07-10th, Vitoria-ES, Brazil, 2016).

BARKLEY, D., GOMES, M., & HENDERSON, R. **Three-dimensional instability in flow over a backward-facing step**. Journal of Fluid Mechanics. p.167-190, 2002.

BATCHELOR, G. K. **An Introduction to Fluid Dynamics**. Cambridge: Cambridge University Press. 2000.

BOZKAYA, N, TEZER-SEZGIN, M. **The DRBEM solution of incompressible MHD flow equations**. International Journal for Numerical Methods in Fluids, vol 67, pp. 1264-1282, 2011.

BOZKAYA, N.; TEZER-SEZGIN, M. **The DRBEM solution of incompressible MHD flow equations**. International journal for numerical methods in fluids. *Int. J. Numer. Meth. Fluids* 2011; 67:1264–1282. Published online 27 September 2010 in Wiley Online Library

BRANDT, A.; GILLIS, J. **Magnetohydrodynamic Flow in the Inlet Region of a Straight Channel**, The Physics of Fluids, vol. 9, no 4, p. 690-699, 1966.

COTTA, R. M., & MIKHAILOV, M. D. **Hybrid Approaches in Convective**. In: Convective Heat transfer in Ducts. Rio de Janeiro, Rio de Janeiro E-papers Serviços Editoriais, 2001, vol. 1, p. 17-38.

COTTA, R.M. **Computational Integral Transform Approach in nonlinear Diffusion and Convection -Diffusion Problems**. Laboratório di Engenharia Nuclear di Montecuccolino, série Scientifica Lin-1202 (Invited Lecture), Università Degli Studi di Bologna, Itália, Jul., 1992.

COTTA, R.M. **The Integral Transform Method in Thermal and Fluid**. Science and Engineering, Begell House Inc, NY, USA, 1998.

CRAMER, K. R., & PAI, S. **Magnetofluid Dynamics for Engineers and Applied Physicists**. Washington, D.C. Scripta Publishing Company, 1973.

DAVIDSON, P. A. **An introduction to magnetohydrodynamics**. New York. Cambridge University Press, 2001.

DAVIDSON, P. A. **Magnetohydrodynamics in materials processing**. In: Annual Review of Fluid Mechanics, p. 273-300, Jan, 1999.

EISEBERG, R. M.; LERNER, L. S. **FÍSICA fundamentos e aplicações**. São Paulo: McGraw-Hill do Brasil. vol.4, 1982

GARTLING, D. K. **A test problem for outflow boundary conditions – flow over a backward-facing step**. International Journal for Numerical Methods in Fluids, vol 11, pp. 953-967, 1990.

GRIFFITHS, D. J. **Eletrodinâmica**. 3.Ed. São Paulo: Pearson Addison Wesley, 2011.

PEREZ-GUERRERO, J. S. P. **Solução das Equações de Navier- Stokes em Formulação de Função Corrente via Transformação Integral**. Dissertação de Mestrado, UFRJ, COPPE. Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 1991.

PEREZ-GUERRERO, J. S. P. **Transformação Integral das Equações de Navier-Stokes para Escoamento Laminar em Canais de Geometria Bidimensional Arbitrária**. Tese de Doutorado. UFRJ, COPPE. Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 1995.

PEREZ-GUERRERO, J.S. & COTTA, R.M. **Benchmark Integral Transform Results for Flow over a Backward-Facing Step**. Computers and Fluids, vol. 25, no 5, pp. 540-572, 1996.

PEREZ-GUERRERO, J.S. & COTTA, R.M. **Integral Transform Solution of Developing Laminar Duct Flow in Navier-Stokes Formulation**. International Journal for Numerical Methods in Fluids, vol. 20, no 11, pp. 1203-1213, 1995.

HAMID, M., *et al.*, **Numerical study of unsteady MHD flow of Williamson nanofluid in a permeable channel with heat source/sink and thermal radiation**. Eur. Phys. J. Plus, 2018. DOI 10.1140/epjp/i2018-12322-5.

JACKSON, J. D. **Classical electrodynamics**. 2. ed. New York: John Wiley & Sons, 832 p., 1975.

JELENA, L. **Analytical solutions of magnetohydrodynamical problems on a flow of conducting fluid in the entrance region of channels in a strong magnetic field**. Riga.:

Faculty of Computer Science and Information Technology. Riga Technical University. 2014.

KARIMI, K. J., & KINYUA, D. K. **Hydromagnetic Turbulent Flow Between Two Parallel**. In: Science Journal of Applied Mathematics and Statistics, pp. 31-40, 2017.

KUNDU, P. K.. **Fluid Mechanics**. San Diego, USA. Academic Press, 1990.

LEE, D. & CHOI, H. **Magnetohydrodynamic turbulent flow in a channel at low magnetic Reynolds number**. In: Journal of Fluid Mechanics, vol. 439, pp. 367-394. New York. Cambridge University Press, 2001.

LIMA, J. A. **Escoamento Turbulento em Canais de Placas Planas e Paralelas: Análise via Transformada Integral e Modelos Algébricos e K-L de Turbulências**. João Pessoa (PB): UFPB/CT/CPGEM, 2000.

LIMA, J. A. **Solução das Equações de Navier-Stokes médias para Escoamento Turbulento via Transformação Integral**. Dissertação de Mestrado. Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, PEM/COPPE/UFRJ, 1995.

LIMA, J. A., ASSAD, G. E., & PAIVA, H. S. **A Simple Approach to Analyze the Fully Developed Two-Phase Magnetoconvection Type Flows in Inclined Parallel-Plate Channels**. In: Latin American Applied Research. p.93-98, 2016.

LIMA, J. A., QUARESMA, J., & MACÊDO, E. **Integral transform analysis of MHD flow and heat transfer in parallel-plates channels**. In: International Communications in Heat and Mass Transfer. p. 420-431, 2007.

LIMA, J., & RÊGO, M. **On the integral transform solution of low-magnetic MHD flow and heat transfer in the entrance region of a channel**. In: International Journal of Non-Linear Mechanics. p. 25-39. 2013.

LIPSCOMBE, G. **Water Under the Bridge**. In: Journal of Physics Special Topics. Department of Physics and Astronomy. Nov. 2014.

MACHADO, H.A.; COTTA, R.M. **Integral Transform Method, for Boundary Layer Equations in Simultaneous Heat and Fluids Flow Problems.** International Journal for Numerical Methods in Heat and Fluid Flow, vol. 5, pp 225-237. 1995.

MARINCA V, HERISANU N, BOTA C, MARICA B. **An optimal homotopy asymptotic method applied to the steady flow of fourth-grade fluid past a porous plate.** Appl Math Lett. P. 245–251. 2009.

MIYAGAWA, H. K., CURCINO, I. V., PONTES, F. A., PONTES, P. C., QUARESMA, J. N. N. **Solução via GITT do escoamento MHD com Transferência de Calor e Massa de um Biofluido em um Canal de Placas Paralelas.** XII Congresso Brasileiro de Engenharia Química em Iniciação Científica. UFSCar – São Carlos, SP. Jul, 2017.

MOBADERSANI, S., REZAVAND, A. **MHD effect on Nanofluid Flow and Heat transfer in Backward-Facing Step using two-phase Model.** AUT Journal of Mechanical Engineering, 4(1), 51-66. doi: 10.22060/ajme.2019.14843.5747, 2020.

MOLOKOV, S., MOREAU, R., & MOFFATT, H. K. **Magnetohydrodynamics, Historical Evolution and Trends.** Dordrecht, Netherland: Springer, 2007

MRAMOR, K., VERTNIK, R., ŠARLER, B., 2014. **Simulation of laminar backward facing step flow under magnetic field with explicit local radial basis function collocation method.** Eng. Anal. Boundary Elem. 49, 37–47. <https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2014.04.013>.

NELSON, O. R., MEDEIROS, J. R. **Assim na Terra como no céu: a teoria do dínamo como uma ponte entre o geomagnetismo e o magnetismo estelar.** Revista Brasileira de Ensino de Física, v. 34, n. 4, 2012.

ODERO, I. O., MANYONGE, W. A., & BITOK, J. K. **Unsteady MHD Flow over an Infinte Porous Plate Subjected to Convective Surface Boundary Conditions.** In: International Journal of Contemporary Mathematical Sciences, p. 1-12, 2017.

ÖZISIK, M. N. **Heat Conduction,** John Wiley & Sons, New York, 1993.

ÖZISIK, M.N. & MURRAY, R.L. **On the Solution of Linear Diffusion Problems with Variable Boundary Condition Parameters.** ASME Journal of Heat Transfer, vol. 96, Series C, no 1, p. 48-51, 1974.

PEKMEN, B., TEZER-SEZGIN, M. **Numerical solution of buoyancy MHD flow with magnetic potential,** In. J. Heat Mass Transfer 71, p. 172-182, 2013.

PEREYRA, V. **Pasva3: An adaptive finite difference fortran program for first order nonlinear, ordinary boundary problems.** Lec. Notes in Comp. Science, 76, Springer-Verlag, Berlin, p. 67-88, 1978.

PIMENTEL, L. **Simulação do Escoamento Turbulento em dutos via Modelo Algébrico de Turbulência e Transformação Integral.** Dissertação de Mestrado. Rio de Janeiro, Rio de Janeiro. MPEM/COPPE/UFRJ, 1993

PONTES, F. **Escoamento Magnetohidrodinâmico com Transferência de Calor em Canais de Placas Planas: Uma Abordagem via Transformação Integral.** Dissertação de Mestrado. Belém: Instituto de Tecnologia. Universidade Federal do Pará. Dep. Química, 2015.

RASHIDI, S., ESFAHANI, J. A., & MASKANIYAN, M. **Applications of magnetohydrodynamics in biological systems-a review on the numerical studies.** In: Journal of Magnetism and Magnetic Materials. Oct., 2017.

RÊGO, M. G. **Análise da magnetohidrodinâmica com transferência de calor em canais de placas paralelas via transformação integral.** Dissertação de Mestrado. Natal, Rio Grande do Norte. Instituto de Tecnologia. Universidade Federal do Rio Grande do Norte, 2010.

SA'ADALDIN, A., & QATANANI, N. (2017, Jun 14). **Finite Element Solution of an Unsteady MHD Flow through Porous Medium between Two Parallel Flat Plates.** In: Journal of Applied Mathematics. Jun/14, p. 6, 2017.

SANTOS, C.A.C.; QUARESMA, J.N.N. & LIMA, J.A. **Convective heat transfer in ducts: the integral transform approach,** 348 p., E-Papers, ABCM Mechanical sciences series, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 2001.

SCHLICHTING, H., ZAMM,14,368 (1934).

SCHLICHTING, H. **BOUNDARY LAYER THEORY**, 4th ed., p. 168. McGrawHill, New York (1960).

SELIMEFENDIGIL, F., ÖZTOP, H. F. **Influence of inclination angle of magnetic field on mixed convection of nanofluid flow over a backward facing step and entropy generation**, *Advanced Powder Technology* (2015), <http://dx.doi.org/10.1016/j.appt.2015.10.002>

SHERCLIFF, J. **A Textbook of Magnetohydrodynamics**. London,UK. Pergamon Press. 1965.

SUTTON, G., & SHERMAN, A. **Engineering Magnetohydrodynamics**. New York (USA). Dover Publications, Inc, Mineola. 2006.

TIPLER, Paul A.; MOSCA, Gene, **Física para Cientistas e Engenheiros - Vol. 2, 5a ed.** Rio de Janeiro: LTC, 2006.

ULRICH, T., & STEINER, E. **Magnetic field effects in chemical kinetics and related**. Chem Ver, 1989.

WANG, Y.L. AND LONGWELL, P.A. (1964), **Laminar flow in the inlet section of parallel plates**. *AICHE J.*, 10: 323-329, (1964). <https://doi.org/10.1002/aic.690100310>

APÊNDICE A

REGIÃO DE CAMPOS COMPLETAMENTE DESENVOLVIDOS NA ENTRADA E SAÍDA DO CANAL DE PLACAS PARALELAS.

A.I. CAMPO DE VELOCIDADE

Como o escoamento, na entrada e na saída, é considerado completamente desenvolvido (abaixo usa-se o subscrito “ ∞ ” para representar esta característica), ou seja, $u = u_\infty$, $v = 0$, $p = p_\infty$, $J_z = J_{z\infty}$, $B_1 = B_{1\infty}$, $B_2 = B_{2\infty}$ e $\frac{\partial}{\partial x} = 0$, a equação da componente horizontal do campo de velocidade (Eq. 4.4), bem como a lei de Ohm (Eq. 4.10b) são reduzidas, respectivamente para:

$$0 = -\frac{\partial P_\infty}{\partial x} + \frac{1}{\text{Re}} \frac{d^2 u_\infty}{dy^2} - \frac{Ha^2}{\text{Re}} J_{z\infty} B_{2\infty} \quad (\text{A.1})$$

$$J_{z\infty} = \bar{E}_{z\infty} + B_{2\infty} u_\infty \quad (\text{A.2})$$

Nota: será demonstrado no início da seção A.II que a componente vertical do campo magnético total na situação de escoamento completamente desenvolvido é $B_{2\infty}(y)=1$ (Eq. (A.26)). Este resultado será colocado nas soluções da seção A.I sem mais restrições.

Substituindo a Eq. (A.2) na Eq. (A.1) e considerando a nota acima, chega-se a seguinte EDO:

$$A \frac{d^2 u_e(y)}{dy^2} + u_e(y) = B \quad (\text{A.3})$$

Com os coeficientes $A = -\frac{1}{Ha^2}$ e $B = -\left(\frac{\text{Re}}{Ha^2} \frac{\partial P_\infty}{\partial x} + E_{z\infty}\right)$.

ENTRADA DO CANAL

Considerando que o escoamento vem desenvolvido em um duto de entrada com altura que vai de $y=q$ até $y=1$, na entrada do canal temos as seguintes condições de contorno baseadas na condição de não deslizamento (aqui será usado o subscrito “e” para representar esta região):

$$\begin{cases} u_e(x, q) = 0 \\ u_e(x, 1) = 0 \end{cases} \quad (\text{A.4 a,b})$$

Agora, solução da Equação (A.3), satisfazendo as condições de contorno associadas a região de entrada é dada por:

$$u_e(y) = \begin{cases} \frac{(1-q) \left\{ -1 + \cosh \left[\frac{1}{2} Ha(1+q-2y) \right] \operatorname{sech} \left[\frac{1}{2} Ha(-1+q) \right] \right\}}{- (1-q) + \frac{2 \tanh \left[\frac{1}{2} Ha(1-q) \right]}{Ha}}, & Ha \neq 0 \\ \frac{6(q-y)(y-1)}{(q-1)^2}, & Ha = 0 \end{cases} \quad (\text{A.5 a,b})$$

FUNÇÃO CORRENTE (FUNÇÃO $g_e(y)$)

A função corrente é encontrada a partir de $u = \frac{\partial \psi}{\partial y}$ e, portanto,

$$\int_0^{\psi} d\psi = \int_q^y u_e(y') dy' = \psi(y) \equiv g_e(y). \text{ Assim,}$$

$$\psi_e(y) = \begin{cases} \frac{\left\{ \begin{aligned} &Ha(y-q) - \tanh \left[\frac{1}{2} Ha(1-q) \right] \\ &+ \operatorname{sech} \left[\frac{1}{2} Ha(1-q) \right] \sinh \left[\frac{1}{2} Ha(1+q-2y) \right] \end{aligned} \right\}}{Ha - \frac{2}{(1-q)} \tanh \left[\frac{1}{2} Ha(1-q) \right]}, & Ha \neq 0 \\ -\frac{(q-y)^2(-3+q+2y)}{(-1+q)^2}, & Ha = 0 \end{cases} \quad (\text{A.6 a,b})$$

A vazão é obtida por, $\psi(1) = \int_q^1 u_e(y) dy$, assim:

$$\psi(1) = 1 - q \quad (\text{A.7})$$

- **Derivada Primeira Função Corrente** $\psi_e'(y) \equiv u_e(y)$

Da definição da componente longitudinal de velocidade (Eq. (A.5a)):

$$\psi_e'(y) = \begin{cases} \frac{(1-q) \left\{ -1 + \cosh \left[\frac{1}{2} Ha(1+q-2y) \right] \operatorname{sech} \left[\frac{1}{2} Ha(-1+q) \right] \right\}}{- (1-q) + \frac{2 \tanh \left[\frac{1}{2} Ha(1-q) \right]}{Ha}}, & Ha \neq 0 \\ \frac{6(q-y)(y-1)}{(q-1)^2}, & Ha = 0 \end{cases} \quad (\text{A.8a,b})$$

- **Derivada Segunda da Função Corrente** $\psi_e''(y) \equiv u_e'(y)$

$$\psi_e''(y) = \begin{cases} \frac{Ha(-1+q) \operatorname{sech} \left[\frac{1}{2} Ha(-1+q) \right] \sinh \left[\frac{1}{2} Ha(1+q-2y) \right]}{-1+q + \frac{2 \tanh \left[\frac{1}{2} Ha(1-q) \right]}{Ha}}, & Ha \neq 0 \\ \frac{6(1+q-2y)}{(-1+q)^2}, & Ha = 0 \end{cases} \quad (\text{A.9a,b})$$

- **Derivada Terceira da Função Corrente** $\psi_e'''(y) \equiv u_e''(y)$

$$\psi_e'''(y) = \begin{cases} \frac{Ha^3(-1+q) \cosh \left[\frac{1}{2} Ha(1+q-2y) \right] \operatorname{sech} \left[\frac{1}{2} Ha(-1+q) \right]}{Ha(-1+q) + 2 \tanh \left[\frac{1}{2} Ha(1-q) \right]}, & Ha \neq 0 \\ \frac{12}{(-1+q)^2}, & Ha = 0 \end{cases} \quad (\text{A.10a,b})$$

- **Derivada Quarta da Função Corrente** $\psi_e''''(y) \equiv u_e''''(y)$

$$\psi_e''''(y) = \begin{cases} \frac{Ha^4(-1+q) \operatorname{sech}\left[\frac{1}{2}Ha(-1+q)\right] \sinh\left[\frac{1}{2}Ha(1+q-2y)\right]}{Ha(-1+q) + 2 \tanh\left[\frac{1}{2}Ha(1-q)\right]}, & Ha \neq 0 \\ 0, & Ha = 0 \end{cases} \quad (\text{A.11a,b})$$

DERIVADA DO CAMPO DE PRESSÃO $\left(\frac{\partial P_e}{\partial x}\right)$

Manipulando a solução da EDO representada na Eq. (A.3), encontra-se que:

$$\frac{\partial P_e}{\partial x} = cte = \begin{cases} -\frac{1}{\operatorname{Re}} \left\{ HaE_z + \frac{Ha^3(-1+q)}{Ha(-1+q) + 2 \tanh\left[\frac{1}{2}Ha(1-q)\right]} \right\}, & Ha \neq 0 \\ -\frac{12}{(1-q)^2 \operatorname{Re}}, & Ha = 0 \end{cases} \quad (\text{A.12a,b})$$

SAÍDA DO CANAL

Considerando o escoamento completamente desenvolvido na saída do canal, cuja altura varia de $y=0$ até $y=1$, de modo análogo à entrada tem-se (aqui será usado o subscrito “s” para representar esta região):

$$\begin{cases} u_s(x, 0) = 0 \\ u_s(x, 1) = 0 \end{cases} \quad (\text{A.13a,b})$$

Agora, solução da Equação (A.3), satisfazendo as condições de contorno associadas a região de saída é dada por:

$$u_s(y) = \begin{cases} (1-q) \frac{\left[1 - \cosh(Hay) + \sinh(Hay) \tanh\left(\frac{Ha}{2}\right)\right]}{1 - \frac{2}{Ha} \tanh\left(\frac{Ha}{2}\right)}, & Ha \neq 0 \\ 6(q-1)(y^2 - y), & Ha = 0 \end{cases} \quad (\text{A.14 a,b})$$

FUNÇÃO CORRENTE (FUNÇÃO $g_s(y)$)

A função corrente é encontrada a partir de $u = \frac{\partial \psi}{\partial y}$ e, portanto,

$$\int_0^y d\psi = \int_0^y u_s(y') dy' = \psi(y) \equiv g_s(y). \text{ Assim,}$$

$$\psi_s(y) = \begin{cases} \frac{(1-q) \left[\sinh(Hay) + (1 - \cosh(Hay)) \tanh\left(\frac{Ha}{2}\right) - Hay \right]}{\left(2 \tanh\left(\frac{Ha}{2}\right) - Ha \right)}, & Ha \neq 0 \\ (1-q)(3y^2 - 2y^3), & Ha = 0 \end{cases} \quad (\text{A.15 a,b})$$

A vazão é obtida por, $\psi(1) = \int_0^1 u_s(y) dy$, assim:

$$\psi(1) = 1 - q \quad (\text{A.16})$$

Este resultado é esperado pois confirma a conservação da massa entre a entrada e a saída do canal.

- Derivada Primeira Função Corrente $\psi'_s(y) \equiv u_s(y)$

Da definição da componente longitudinal de velocidade (Eq. (A.14a)):

$$\psi'_s(y) = \begin{cases} (1-q) \frac{\left[1 - \cosh(Hay) + \sinh(Hay) \tanh\left(\frac{Ha}{2}\right)\right]}{1 - \frac{2}{Ha} \tanh\left(\frac{Ha}{2}\right)}, & Ha \neq 0 \\ 6(q-1)(y^2 - y), & Ha = 0 \end{cases} \quad (\text{A.17a,b})$$

- **Derivada Segunda da Função Corrente** $\psi_s''(y) \equiv u_s'(y)$

$$\psi_s''(y) = \begin{cases} Ha^2(-1+q) \frac{\left[\sinh(Hay) - \cosh(Hay) \tanh\left(\frac{Ha}{2}\right) \right]}{\left[Ha - 2 \tanh\left(\frac{Ha}{2}\right) \right]}, & Ha \neq 0 \\ 6(1-q)(1-2y), & Ha = 0 \end{cases} \quad (\text{A.18a,b})$$

- **Derivada Terceira da Função Corrente** $\psi_s'''(y) \equiv u_s''(y)$

$$\psi_s'''(y) = \begin{cases} \frac{Ha^3(-1+q) \cosh\left[\frac{1}{2}(Ha - 2Hay)\right] \operatorname{sech}\left(\frac{Ha}{2}\right)}{Ha - 2 \tanh\left(\frac{Ha}{2}\right)}, & Ha \neq 0 \\ -12(1-q), & Ha = 0 \end{cases} \quad (\text{A.19a,b})$$

- **Derivada Quarta da Função Corrente** $\psi_s''''(y) \equiv u_s'''(y)$

$$\psi_s''''(y) = \begin{cases} \frac{Ha^4(-1+q) \left[\sinh(Hay) - \cosh(Hay) \tanh\left(\frac{Ha}{2}\right) \right]}{Ha - 2 \tanh\left(\frac{Ha}{2}\right)}, & Ha \neq 0 \\ 0, & Ha = 0 \end{cases} \quad (\text{A.20a,b})$$

DERIVADA DO CAMPO DE PRESSÃO $\left(\frac{\partial P_s}{\partial x}\right)$

Manipulando a solução da EDO representada na Eq. (A.3), associada às condições de contorno da saída do canal, encontra-se que:

$$\frac{\partial P_s}{\partial x} = cte = \begin{cases} -\frac{Ha}{\operatorname{Re}} \left[E_z - \frac{Ha^2(1-q)}{\left(Ha - 2 \tanh\left(\frac{Ha}{2}\right) \right)} \right], & Ha \neq 0 \\ -\frac{12}{\operatorname{Re}}(1-q), & Ha = 0 \end{cases} \quad (\text{A.21a,b})$$

A.II. CAMPO MAGNÉTICO

Com as mesmas considerações feitas e mesmas notações de índice para o campo de velocidade completamente desenvolvido, as equações de transporte do campo magnético (Eqs. (4.6) e (4.7)) ficam simplificadas para:

$$0 = \frac{d}{dy} (u_{\infty} B_{2,\infty}) + \frac{1}{\text{Re}_m} \frac{d^2 B_{1,\infty}}{dy^2} \quad (\text{A.22})$$

$$0 = \frac{1}{\text{Re}_m} \frac{d^2 B_{2,\infty}}{dy^2} \quad (\text{A.23})$$

ENTRADA DO CANAL

Para a entrada do canal temos as seguintes condições de contorno, que são devidamente discutidas no Apêndice B e estão listadas abaixo:

$$\begin{cases} B_{1e}(x, q) = 0 \\ B_{1e}(x, 1) = B_{1w_top_e} \end{cases} \quad (\text{A.24a,b})$$

e

$$\begin{cases} B_{2e}(x, q) = 1 \\ B_{2e}(x, 1) = 1 \end{cases} \quad (\text{A.25a,b})$$

A solução da Eq. (A.23), sujeita às condições de contorno, resulta, após integração:

$$B_{2e}(y) = 1 \quad (\text{A.26})$$

E, como consequência, $\frac{dB_{2e}(y)}{dy} = \frac{dB_{2e}(y)}{dx} = 0$

Assim, conclui-se que, na região de escoamento completamente desenvolvido, na entrada (ou na saída) do canal, não existe componente vertical do campo magnético induzido (B_y), pois:

$$B_{2e}(y) = 1 = B_{ye}(y) + 1 \quad \Rightarrow \quad B_{ye}(y) = 0 \quad (\text{A.27})$$

Agora, substituindo-se a Eq. (A.26) na Eq. (A.22), resulta, após integração e uso das condições de contorno:

$$B_{1e}(y) = -\text{Re}_m \left[g_e(y) - (y - q) \right] + B_{1w_top_e} \left(\frac{y - q}{1 - q} \right) \quad (\text{A.28})$$

Onde $g_e(y) = \int_q^y u_e(y') dy'$ e é indicado na Eq. (A.6).

AVALIAÇÃO DE $B_{1w_top_e}$:

Da igualdade entre as leis de Ohm (Eq. (4.10b)) e de Ampère (Eq. (4.11b)) com as simplificações dadas para o escoamento completamente desenvolvido, associado ao resultado mostrado na Eq. (A.26), tem-se:

$$E_{ze} + u_e(y) = -\frac{1}{\text{Re}_m} \frac{dB_{1e}(y)}{dy} \quad (\text{A.29})$$

Agora, derivando-se a Eq. (A.28) com respeito a y e substituindo-se o resultado encontrado na Eq. (A.29), encontra-se:

$$B_{1w_top_e} = -\text{Re}_m (1 - q) (\bar{E}_x + 1) \quad (\text{A.30})$$

FUNÇÃO MAGNÉTICA β

Das relações entre a função escalar para campo magnético e as componentes do campo magnético na região completamente desenvolvida, $B_{1e} = \frac{\partial \beta_e}{\partial y}$ e $B_{2e} = -\frac{\partial \beta_e}{\partial x}$, e empregando-se as Eqs. (A.26) e (A.28) obtém-se:

$$\beta_e = h_e(y) - x \quad (\text{A.31})$$

No processo de desenvolvimento da Eq. (A.31) a função $h(y)$ é definida na entrada por, $h_e(y) = \int_q^y B_{1e}(y') dy'$. Assim, fazendo uso das Eqs. (A.6), (A.28) e (A.30), tem-se:

$$\beta_e(y) = \begin{cases} \frac{-\frac{Re_m}{2}(\bar{E}_{ze} + 1)(q - y)^2 + \frac{Re_m}{Ha} \left[(-1 + q) \left(-1 + \cosh\left(\frac{Ha}{2}(1 + q - 2y)\right) \operatorname{sech}\left(\frac{Ha}{2}(1 - q)\right) \right) \right] + Ha(q - y)(y - 1) \tanh\left(\frac{Ha}{2}(-1 + q)\right)}{Ha(-1 + q) + 2 \tanh\left[\frac{Ha}{2}(1 - q)\right]} - x_e, & Ha \neq 0 \\ -\frac{Re_m}{2}(y - q)^2 \left(1 + \bar{E}_{ze} - \frac{(1 - y)^2}{(1 - q)^2} \right), & Ha = 0 \end{cases} \quad (A.32a,b)$$

SAÍDA DO CANAL

Para a saída do canal temos as seguintes condições de contorno:

$$\begin{cases} B_{1s}(x, 0) = 0 \\ B_{1s}(x, 1) = B_{1w_top_s} \end{cases} \quad (A.33a,b)$$

e

$$\begin{cases} B_{2s}(x, 0) = 1 \\ B_{2s}(x, 1) = 1 \end{cases} \quad (A.34a,b)$$

A solução da Eq. (A.23), sujeita às condições de contorno da saída, ainda resulta, após integração:

$$B_{2s}(y) = 1 \quad (A.35)$$

Resultado e consequências totalmente análogas ao ocorrido na entrada.

Agora, substituindo-se a Eq. (A.35) na Eq. (A.22), após integração e uso das condições de contorno, resulta em:

$$B_{1s}(y) = -\text{Re}_m [g_s(y) - y(1-q)] + B_{1w_top_s} y \quad (\text{A.36})$$

Onde $g_s(y) = \int_0^y u_s(y') dy'$ e é indicado na Eq. (A.15).

AVALIAÇÃO DE $B_{1w_top_s}$:

Da igualdade entre as leis de Ohm (4.10b) e de Ampère (4.11b) com as simplificações dadas para o escoamento completamente desenvolvido, associado ao resultado mostrado na Eq. (A.36), tem-se:

$$\bar{E}_{zs} + u_s(y) = -\frac{1}{\text{Re}_m} \frac{dB_{1s}(y)}{dy} \quad (\text{A.37})$$

Agora, derivando-se a Eq. (A.37) com respeito a y e substituindo-se o resultado encontrado na Eq. (A.29), encontra-se:

$$B_{1w_top_s} = -\text{Re}_m [\bar{E}_{zs} + (1-q)] \quad (\text{A.38})$$

FUNÇÃO MAGNÉTICA β

Tomando-se, diretamente, a Eq. (31) para a saída do canal:

$$\beta_s = h_s(y) - x \quad (\text{A.39})$$

A função $h(y)$ é definida na entrada por, $h_s(y) = \int_0^y B_{1s}(y') dy'$. Assim, fazendo uso das Eqs. (A.6), (A.37) e (A.38), e inserindo-se os resultados na Eq. (A.31):

$$\beta_s(y) = \begin{cases} \frac{(1-q) \frac{\text{Re}_m}{Ha} \left(1 + \frac{Ha^2 y^2}{2} - \cosh(Hay) + (-Hay + \sinh(Hay)) \tanh\left(\frac{Ha}{2}\right) \right)}{Ha - 2 \tanh\left(\frac{Ha}{2}\right)} - \frac{\text{Re}_m E_{zs} y^2}{2} - x_s, & Ha \neq 0 \\ -\frac{\text{Re}_m}{2} y^2 [(1-q)(2-y)y + \bar{E}_{zs}], & Ha = 0 \end{cases} \quad (\text{A.40a,b})$$

APÊNDICE B

CONDIÇÕES DE CONTORNO PARA O CAMPO MAGNÉTICO

B.I. CASO GERAL

Para iniciar a discussão sobre o tema, é importante notar que pode haver descontinuidade de campos (magnéticos e elétricos) na interface de separação entre dois meios materiais (mesmo que ordinários: lineares, homogêneos e isotrópicos), pois as susceptibilidades (elétrica e magnética) podem variar apreciavelmente de um material para outro. Neste ponto, o escopo se debruça sobre o campo magnético e abaixo discutir-se-ão as condições de contorno para as componentes do campo magnético na interface entre dois meios distintos.

Então, tome-se a relação entre o campo magnético total \mathbf{B} e o campo auxiliar \mathbf{H} .

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \quad (\text{B1})$$

Onde \mathbf{B} é o campo magnético total associado às correntes de magnetização e as correntes livres, \mathbf{H} é o chamado “campo magnético auxiliar”, é a parcela de \mathbf{B} que está associada às correntes livres (aquelas que se pode controlar, ligando e desligando uma bateria por exemplo) e \mathbf{M} é a parcela de \mathbf{B} que está associada às correntes de magnetização, é a chamada magnetização do meio. Uma excelente abordagem sobre as diferenças entre cada um e as terminologias adequadas pode ser encontrada em Griffiths (2011, p.286).

Em meios lineares a magnetização é proporcional ao campo auxiliar, de modo que, quando o campo é “desligado” a magnetização desaparece, isto ocorre nos meios paramagnéticos e diamagnéticos e na maioria dos materiais⁹, desde que o campo não seja tão forte (Griffiths, 2011). Assim, com essa relação linear a magnetização é proporcional ao campo auxiliar e dada por:

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H} \quad (\text{B2})$$

⁹ Em meios ferromagnéticos (não lineares), de modo geral, a magnetização \mathbf{M} deve ser expressa por uma função não linear de \mathbf{H} ($\mathbf{M}=\mathbf{f}(\mathbf{H})$).

Onde χ_m é a susceptibilidade magnética e é uma grandeza adimensional que fornece a tendência de um material de interagir e distorcer um campo magnético aplicado. Ela é positiva em paramagnetos e negativas em diamagnetos. Seus valores típicos são em torno de 10^{-5} (e.g.: $\chi_{Hg} = -2,8 \cdot 10^{-5}$).

Então, substituindo a Eq. (B2) na Eq. (B1) resulta em;

$$\vec{B} = \mu_0 (1 + \chi_m) \vec{H} \quad (\text{B3})$$

ou

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad (\text{B4})$$

Onde μ é a permeabilidade magnética do meio e μ_0 é a permeabilidade magnética do espaço livre e, ainda, $\mu_r = \left(\frac{\mu}{\mu_0} \right) = (1 + \chi_m)$ é chamada de permeabilidade relativa.

Aplicando a divergência em ambos os membros da equação (B1) e levando em conta a característica solenoidal do campo magnético ($\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$), tem-se:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{H} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{M} \quad (10) \quad (\text{B5})$$

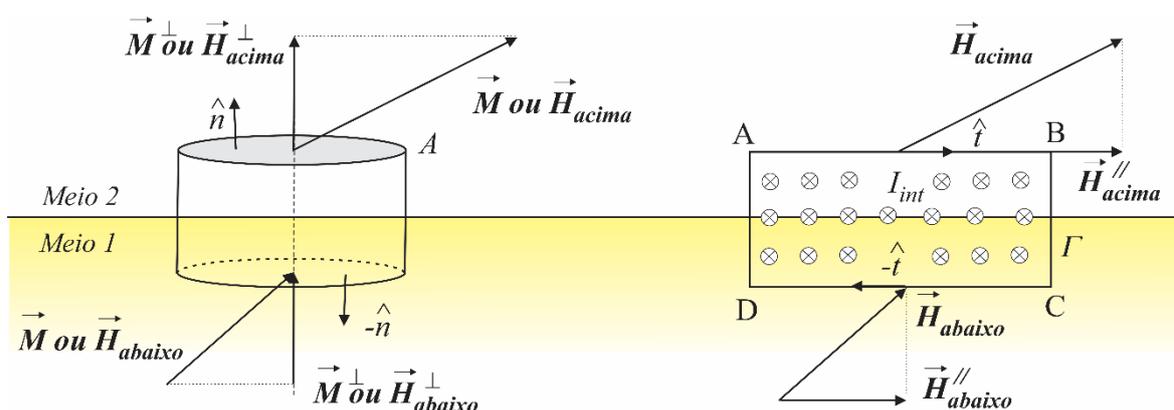


Figura B1: esquema para determinação das condições de contorno do campo magnético com aplicações da lei de Gauss à esquerda e da lei de Ampère à direita.

¹⁰ Note-se que a divergência do campo auxiliar não é necessariamente nula como ocorre para o campo magnético **B**.

Assim, tomando-se uma superfície em forma de caixa de pílulas muitíssimo fina e de área da base A , mostrado à esquerda na Figura (B1), que atravesse a interface entre os dois meios, após aplicar-se o teorema da divergência de Gauss, tem-se que:

$$\vec{H}_{abaixo} \cdot (-\hat{n})A + \vec{H}_{acima} \cdot (\hat{n})A = -\left[\vec{M}_{abaixo} \cdot (-\hat{n})A + \vec{M}_{acima} \cdot (\hat{n})A \right]$$

Assim,

$$H_{abaixo}^{\perp} - H_{acima}^{\perp} = -(M_{abaixo}^{\perp} - M_{acima}^{\perp}) \quad (\text{B6})$$

Ou, ainda, fazendo uso da Eq. (B2) e da definição de permeabilidade relativa:

$$\mu_{r,abaixo} H_{abaixo}^{\perp} = \mu_{r,acima} H_{acima}^{\perp} \quad (\text{B7})$$

Ou, para os casos de baixa susceptibilidade magnética:

$$B_{abaixo}^{\perp} = B_{acima}^{\perp} \quad (\text{B8})$$

Estes resultados mostram que a componente vertical do campo magnético \mathbf{B} é contínua na interface entre os meios.

Agora, aplicando-se a lei de Ampère para o campo auxiliar \mathbf{H} (fruto de correntes livres), sobre a curva ABCD, onde $\overline{BC} = \overline{DA} \approx 0$ e $\overline{AB} = \overline{CD} = L$, (as contribuições sobre os lados BC e DA serão negligenciadas, considerando-se um curva retangular de espessura infinitesimal), mostrada, também, à direita da Figura B1, tem-se:

$$\oint_{\Gamma} \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = I_{int}$$

$$\int_A^B \vec{H}_{acima} \cdot \hat{t} d\ell + \int_C^D \vec{H}_{abaixo} \cdot (-\hat{t}) d\ell = I_{int} \quad \therefore \quad \vec{H}_{acima}^{\parallel} L - \vec{H}_{abaixo}^{\parallel} L = I_{int}$$

Assim, considerando a corrente total livre no interior da curva amperiana (ABCD) por unidade de comprimento (L), $i_{Superficial} = \frac{I_{int}}{L}$, tem-se:

$$\vec{H}_{acima}^{\parallel} - \vec{H}_{abaixo}^{\parallel} = i_{Superficial}$$

Usando a relação dada na Eq. (B4), podemos relacionar o campo total:

$$\frac{\vec{B}_{acima}^{\parallel}}{\mu_{acima}} - \frac{\vec{B}_{abaixo}^{\parallel}}{\mu_{abaixo}} = i_{Superficial} \quad (B9)$$

ou

$$\frac{\vec{B}_{acima}^{\parallel}}{\mu_{r,acima}} - \frac{\vec{B}_{abaixo}^{\parallel}}{\mu_{r,abaixo}} = \mu_0 i_{Superficial} \quad (B10)$$

Este resultado mostra que, se existirem correntes livres de superfície, a componente tangencial do campo magnético é descontínua na interface de separação entre os meios

B.II. CONDIÇÕES DE CONTORNO NO PRESENTE TRABALHO

No presente trabalho, são impostas as seguintes condições:

- i) as placas inferior e superior são isolantes, não ferromagnéticas (de baixa susceptibilidade magnética: $\chi_m \sim 10^{-5}$) e, portanto, as correntes de superfície serão desprezadas e as permeabilidades magnéticas se aproximam da permeabilidade magnética do espaço livre ($\mu \approx \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{Tm/A}$);
- ii) o fluido de trabalho é condutor mas não é magnético (eg.: mercúrio, $\chi_{Hg} = -2,8 \cdot 10^{-5}$), de baixa susceptibilidade magnética, então,

$$\mu_{Placas} \approx \mu_{Fluido} \approx \mu_0.$$

Com estas considerações, pode-se definir o comportamento das componentes do campo magnético do meio externo ao canal à placa isolante, da placa ao fluido, da placa inferior à superior e, por fim, desta ao meio externo.

Componente Normal:

A Equação (B8) garante a continuidade da componente normal do campo magnético desde o meio externo às placas inferior e superior. Assim, para qualquer posição do escoamento ou fora dele:

$$B_2(x, q) = B_2(x, 0) = B_2(x, l) = B_0 = l \quad (\text{B11})$$

Componente Tangencial:

A Equação (B10) juntamente com as condições impostas no início da seção BII, garantem que, se o campo é externo é vertical, não tendo correntes livres de superfície e como as permeabilidades dos meios envolvidos se aproximam da permeabilidade do espaço livre (μ_0), então, entre o meio externo e a face interna da placa inferior em contato com o fluido, a componente tangencial/horizontal é contínua e nula. Assim,

$$B_1(x, q) = B_1(x, 0) = 0 \quad (\text{B12})$$

Agora, vai ser determinada a evolução da componente horizontal do campo, desde a placa inferior até a placa superior e, para tanto, deve-se, mais uma vez, aplicar a lei de circuitação de Ampère sobre uma curva retangular muito fina que vai desde a placa inferior a uma altura qualquer no interior do canal (note que a orientação da curva se opõe ao sentido da densidade de corrente no escoamento desta tese). Vide a Figura B2.

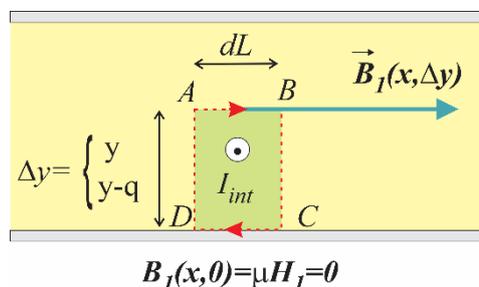


Figura B2: lei de Ampère aplicada em um fino retângulo no interior do canal para determinação da componente horizontal do campo ($B(y)$).

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = -\mu I_{int} \quad \text{ou} \quad \oint \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = -I_{int}$$

Após integração da lei de Ampère, como o elemento de área é muito fino, as contribuições nos lados DA e BC se cancelam e, como não há componente horizontal do campo em CD, sobra apenas a contribuição longitudinal do campo no lado AB. Assim, em variáveis dimensionais, $B_1^* dL^* = -\mu I_{int}^*$. Agora, após processo de adimensionalização, tem-se:

$$B_1(y)dL = -Re_m i_{int} \quad (B.13)$$

SAÍDA DO CANAL

Sendo esta, a nossa região de interesse para a avaliação do campo corrente elétrica e sua densidade, combinando as Eqs. (A.36) e (A.38) e substituindo na Eq. (B.13), temos:

$$i(y) = (g_s(y) + \bar{E}_{zs} y) dL \quad (B.14)$$

De modo que $i(I) \equiv i_{Total}$. Então:

$$i_{Total} = [\bar{E}_{zs} + (1-q)] dL \quad (B.15)$$

Se tomarmos o elemento de área de Fig. B2 como sendo $dA=ydL$, na Eq. (B.13), temos:

$$-\frac{1}{Re_m} \frac{B_1(y)}{y} = \frac{i_{int}}{dA} \quad (B.16)$$

Podemos, então, definir i_{int}/dA como sendo um valor médio móvel para a densidade de corrente, assim, tomando a Eq. (A.36) outra vez, temos:

$$\bar{J}_z(y) = \frac{g_s(y)}{y} + \bar{E}_{zs} \quad (B.17)$$

Podemos, em outro viés, tomar a lei de Ampère (Eq. (4.11b) ou a lei de Ohm (Eq. (4.10b), com a simplificação para o escoamento completamente desenvolvido $\left(\frac{d}{dx} = 0 \text{ e } v = 0\right)$, encontrando, em ambas, o seguinte resultado para a densidade de corrente ($J_z(y)$):

$$J_z(y) = u_s(y) + \bar{E}_{zs} \quad (B.18)$$

Para finalizar, podemos encontrar um valor médio fixo para a densidade de corrente aplicando-se o teorema fundamental do cálculo à Eq. (B.18), tomando a Eq. (A.16) e encontrando:

$$\bar{J}_{zs} = (1-q) + \bar{E}_{zs} \quad (B.19)$$

APÊNDICE C

TEMPOS DE DIFUSÃO E DE AMORTECIMENTO MAGNÉTICO, NÚMERO DE REYNOLDS MAGNÉTICO E TEOREMA DE ALFVÈN

C.I. TEMPO DE DIFUSÃO MAGNÉTICA

Invoque-se, do capítulo 3, a Equação (3.17) do transporte do campo Magnético, considerando-se a difusividade magnética ($\lambda_m = \frac{1}{\mu\sigma}$) como constante no espaço:

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \nabla \times (\vec{u} \times \vec{B}) + \lambda_m \nabla^2 \vec{B} \quad (3.17)$$

Desta forma, para um fluido em repouso, observa-se que a taxa de variação do campo deve-se, exclusivamente à difusão:

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \lambda_m \nabla^2 \vec{B} \quad (C1)$$

Isto nos diz que uma condição inicial para o campo decai com um tempo de difusão dado por:

$$\tau_D = \frac{L^2}{\lambda_m} = L^2 \mu \sigma \quad (C2)$$

Onde L é um comprimento característico da variação espacial de B . Segundo Jackson (1975), este tempo é da ordem de 1s para uma esfera de cobre de 1cm de raio, da ordem de 10^4 anos para o núcleo fundido da Terra e da ordem de 10^{10} anos para um campo magnético típico no Sol.

Este tempo é muito importante no estudo de regenerações de campos magnéticos em escalas cósmicas. A origem dos campos magnéticos podem estar associadas ao processo de criação se este tempo for compatível com a própria criação. Podem sofrer regenerações se forem menores que a idade de um determinado planeta. A chamada Teoria dos Dínamos estuda estes processos e pode ser clarificada em Nelson e Medeiros (2012).

C.II. TEMPO DE AMORTECIMENTO MAGNÉTICO

Considerando um fluido condutor, homogêneo, eletricamente neutro na presença de campos elétricos e magnéticos. Assim, tomando equação da força resultante sobre um elemento de fluido, a equação de N-S na forma diferencial (Eq. (3.19b)) fica remodelada para:

$$\frac{D\vec{V}}{Dt} = \frac{\vec{F}}{\rho} + \frac{(\vec{J} \times \vec{B})}{\rho} \quad (C3)$$

Onde \vec{F} é a soma de todas as contribuições não eletromagnéticas. Como $\vec{J} = \sigma(\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B})$, que está na Eq. (3.15), tem-se:

$$\frac{D\vec{V}}{Dt} = \frac{\vec{F}}{\rho} + \frac{\sigma}{\rho} \left[(\vec{E} \times \vec{B}) - (\vec{B} \times \vec{u}) \times \vec{B} \right] \quad (C4)$$

Observe-se que, de modo simplificado, em termos de análise dimensional, pode-se definir que os termos em colchetes na Eq. (C4) estão associados a velocidades, a saber:

$$\frac{(\vec{B} \times \vec{u}) \times \vec{B}}{B^2} \equiv \vec{w} \quad \text{e} \quad \frac{(\vec{E} \times \vec{B})}{B^2} \equiv \vec{u}_\perp \quad (C5a,b)$$

Onde \vec{w} é pode ser interpretada como a velocidade das linhas de campo, arrastadas pelo fluido, e \vec{u}_\perp é a velocidade do fluido perpendicular ao campo. Assim, a Eq. (C4), fica dada por:

$$\frac{D\vec{V}}{Dt} = \frac{\vec{F}}{\rho} + \frac{B^2 \sigma}{\rho} (\vec{u}_\perp - \vec{w}) \quad (C6)$$

A partir desta equação, observamos que a velocidade longitudinal do escoamento, decai a partir de um valor inicial até \vec{u}_\perp em um intervalo de tempo definido como o Tempo de Amortecimento Magnético, dado por:

$$\tau_A = \frac{\rho}{\sigma B^2} \quad (C7)$$

C.III. O NUMERO DE REYNOLDS MAGNÉTICO

O número de Reynolds magnético é um parâmetro adimensional, que representa o quanto o campo magnético induzido pode alterar o imposto. Quando este número é grande ($Re_m \gg 1$) significa que a influência de um sobre o outro é muito intensa, e as linhas de campo magnético parecem se mover como elásticos congelados no fluido condutor em escoamento. O congelamento do campo magnético faz com que seja previsível uma configuração magnética futura a partir de uma no presente, sendo, portanto, fundamental na compreensão de fenômenos fluidodinâmicos.

Quando o número de Reynolds magnético é pequeno ($Re_m \ll 1$) significa que a velocidade de escoamento \mathbf{u} tem pouca influência sobre o campo magnético imposto. O campo induzido é muito menor que o indutor. O campo magnético tem natureza dissipativa e não elástica, amortecendo o movimento e transformando energia cinética de escoamento em calor (efeito Joule e dissipação viscosa).

O número de Reynolds magnético é definido como sendo a razão entre os termos convectivo e difusivo, da equação da indução, ou do transporte do campo magnético (Eq. 3.17). Desta forma:

$$Re_m = \frac{|\nabla \times (\vec{u} \times \vec{B})|}{|\lambda_m \nabla^2 \vec{B}|} \approx \frac{LV}{\lambda_m} \quad (C8)$$

C.IV. TEOREMA DE ALFVÉN

Considerando um fluido com condutividade grande (difusividade pequena) o suficiente para que o segundo termo do segundo membro da Eq. (3.17) seja desprezível, tem-se:

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \nabla \times (\vec{u} \times \vec{B}) \quad (C9)$$

Bem como, por ilustração, a Lei de Ohm ($\vec{J} = \sigma(\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B})$) também pode ser reescrita por:

$$\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B} = \vec{0} \quad (\text{C10})$$

Antes de iniciar a demonstração e suas consequências, deve-se lembrar da lei de indução de Faraday:

$$\frac{d\vec{B}}{dt} = -\vec{\nabla} \times \vec{E} \quad (\text{C11})$$

Considere-se, pois, o fluxo de campo magnético através de uma espira (C) que envolve uma superfície S e que se move com o fluido no escoamento.

$$\phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad (\text{C12})$$

A taxa de variação do fluxo na superfície pode ser fragmentada em duas partes. A primeira é devido a variação da Intensidade de \vec{B} através da superfície de integração. Então:

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)_1 = \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \quad (\text{C13})$$

A segunda é devido ao movimento da espira com fluido. Veja a figura abaixo.

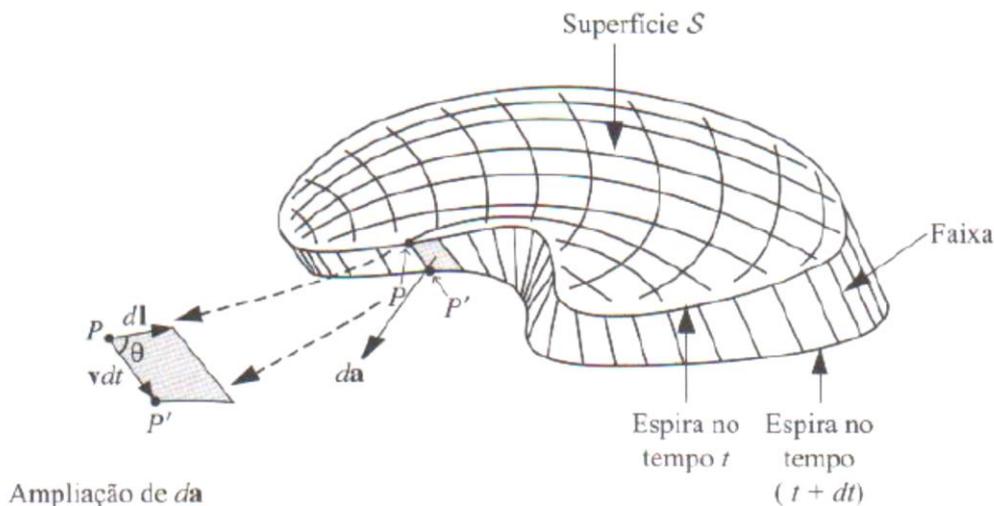


Figura: Espira que se move em repouso em relação ao fluido com detalhe da transformação do vetor elemento de área lateral em um produto vetorial.

Após um intervalo de tempo dt a curva descreve uma faixa lateral que provoca um aumento do fluxo devido ao “crescimento” da faixa lateral mostrada na figura. Então, esta segunda contribuição é dada por:

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)_2 = \int_{\text{Faixa}} \vec{B} \cdot \frac{d\vec{a}}{dt} \quad (\text{C14})$$

Observe, na figura, que $d\vec{a} = (\vec{v} \times d\vec{\ell}) dt$, então, temos uma integral de linha:

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)_2 = \int_C \vec{B} \cdot (\vec{v} \times d\vec{\ell}) = \int_C (\vec{B} \times \vec{v}) \cdot d\vec{\ell} \quad (\text{C15})$$

Aplicando o teorema de Stokes:

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)_2 = \int_S \nabla \times (\vec{B} \times \vec{v}) \cdot d\vec{S} \quad (\text{C16})$$

Como $\vec{B} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{B}$:

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)_2 = -\int_S \nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{S} \quad (\text{C17})$$

Assim, a taxa de variação total do fluxo do campo magnético através da espira em movimento é dada pelas contribuições das Eqs. (C13) e (C16). Então:

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)_{\text{Total}} = \int_S \left(\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} - \nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}) \right) \cdot d\vec{S} \quad (\text{C18})$$

Substituindo a Eq. (C9) na Eq. (C18), chega-se à conclusão matemática do teorema de Alfvén:

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)_{\text{Total}} = 0 \quad (\text{C19})$$

Este resultado mostra que não há variação de fluxo magnético através da espira que se move com escoamento, ou seja, em fluido com elevada condutividade, resistividade ou difusividade baixa, as linhas de campo magnético parecem mover-se com o fluido,

congeladas em relação a ele. Para números de Reynolds elevados o teorema de Alfvén é inerente às observações de deformações nas linhas de campo magnético.