

**Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática**

Ação de Grupos Algébricos

Carlos Edilon Ferreira da Silva

**JOÃO PESSOA – PB
MARÇO DE 2021**

**Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática**

Ação de Grupos Algébricos

por

Carlos Edilon Ferreira da Silva

**sob a orientação do
Prof Dr. Ugo Bruzzo**

**João Pessoa – PB
Março de 2021**

ATA DA SESSÃO PÚBLICA DE DEFESA DE DISSERTAÇÃO DE MESTRADO DO ALUNO CARLOS EDILON FERREIRA DA SILVA, CANDIDATO AO TÍTULO DE MESTRE EM MATEMÁTICA NA ÁREA DE ÁLGEBRA.

Aos 30 (trinta) dias do mês de março de dois mil e vinte e um, às 16:30 horas, por meio da ferramenta virtual “Zoom”, pelo link:

<https://sisso-it.zoom.us/j/98746702126?pwd=cEp5eXpIT1g3VkZOSXd5WFAydDJldz09>,

conforme indicado na Portaria nº 90/GR/REITORIA/UFPB de 17 de março de 2020, que dispõe sobre as medidas de prevenção e adequação de funcionamento da Universidade Federal da Paraíba às determinações oficiais referentes a emergência de saúde pública decorrente do Coronavírus (COVID-19), e suas alterações, reuniram-se em caráter de solenidade pública, os membros da comissão designada para avaliar **Carlos Edilon Ferreira da Silva**, candidato ao grau de Mestre em Matemática, na área de **Álgebra**. Foram componentes da Banca Examinadora, os professores Ugo Bruzzo (Orientador), Ricardo Burity Croccia Macedo, Abdelmoubine Amar Henni, todos os membros Doutores em Matemática, sendo o primeiro e o segundo integrantes do corpo docente da UFPB, e o terceiro integrante do corpo docente da UFSC. Dando início aos trabalhos, o Presidente da Banca, Ugo Bruzzo, após declarar os objetivos da reunião, apresentou o candidato a quem concedeu a palavra para que dissertasse, oral e sucintamente, sobre o tema apresentado, intitulado “**Ações de grupos algébricos**”. Após discorrer sobre o referido tema, o candidato foi arguido pelos examinadores na forma regimental. Ato contínuo, passou a comissão, em caráter secreto, a proceder à avaliação e julgamento do trabalho, concluindo por atribuir-lhe o conceito **Aprovado**. Em face de aprovação, declarou o Presidente achar-se o avaliado legalmente habilitado a receber o Grau de Mestre em Matemática, cabendo a Universidade Federal da Paraíba, providências como de direito, à expedição do Diploma a que o mesmo fez jus. Nada mais havendo a tratar, eu, Roseli Agapito da Silva Guedes, na qualidade de secretária, lavrei a Ata, que submeto à aprovação da Comissão Examinadora.

João Pessoa, 30 de março de 2021.

Banca Examinadora:

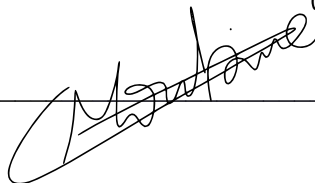
Ugo Bruzzo _____



Ricardo Burity Croccia Macedo _____

Ricardo Burity C. Macedo

Abdelmoubine Amar Henni _____



Catálogo na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

S571a Silva, Carlos Edilon Ferreira da.
Ação de grupos algébricos / Carlos Edilon Ferreira
da Silva. - João Pessoa, 2021.
40 f.

Orientação: Ugo Bruzzo.
Dissertação (Mestrado) - UFPB/CCEN.

1. Grupo algébrico afins. 2. Variedade algébrica
afins. I. Bruzzo, Ugo. II. Título.

UFPB/BC

CDU 512.74(043)

Ação de Grupos Algébricos

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Paraíba, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Álgebra.

COMISSÃO EXAMINADORA:

Prof. Dr. Ugo Bruzzo - UFPB (Orientador)

Prof. Dr. Ricardo Burity Croccia Macedo - UFPB (Interno)

Prof. Dr. Abdelmoubine Amar Henni - UFSC (Externo)

Resumo

Neste trabalho, a partir da geometria algébrica básica, apresentaremos a construção de grupos algébricos afins. Descrevemos os conceitos de ação de grupos algébricos sobre variedades algébricas afins e a linearização de grupos algébricos.

Palavras-chave: variedade algébrica afim, grupo algébrico afim, ação de grupos algébricos.

Abstract

In this work, starting from basic algebraic geometry, we will present the notion of affine algebraic groups. The action of algebraic groups on affine varieties and linearization of algebraic groups are described.

Keywords: algebraic affine variety, affine algebraic group, action of algebraic group.

Sumário

1	Variedades Algébricas Afins	4
1.1	Variedade Algébrica Afim	4
1.2	Variedade Afim Irredutível	8
1.3	Teorema dos Zeros de Hilbert	11
2	Morfismos	14
2.1	Morfismo de variedades Algébricas Afins	14
2.2	Anel Local	17
2.3	Feixes	18
2.4	Dimensão	21
3	Linearização Grupos Algébricos Afins	24
3.1	Grupos Algébricos Afins	24
3.2	Ação de Grupos	29
3.3	Ação de Grupos Algébricos	31
3.4	Translação de Função	33
3.5	Linearização de Grupos Algébricos Afins	33
	Referências Bibliográficas	35

Notações

$\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ - Anel de polinômios sobre o corpo $\mathbb{K}$ nas indeterminadas $x_1, \dots, x_n$.

$\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$ - Espaço afim n dimensional.

$\mathcal{I}(X)$ - Ideal de definição de X .

$\sqrt{I}$ - Radical do ideal I .

$\overline{X}$ - Fecho de X .

$A[X]$ - Anel de coordenadas de X .

$A(X)$ - Corpo das funções racionais de X .

f^* - Comorfismo do morfismo f .

$\mathcal{O}_p$ - Anel local do ponto p .

$\dim X$ - Dimensão de X .

$\text{codim}_x Y$ - Codimensão de Y em X .

G_0 - Componente identidade.

$\text{Ker}(\varphi)$ - Núcleo de φ .

$\text{Im}(\varphi)$ - Imagem de φ .

$GL(V)$ - Grupo dos automorfismos do espaço vetorial V .

V^* - Espaço dual.

Introdução

A teoria de grupos algébricos afins de Borel-Chevalley (conforme desenvolvido por Borel, Tits e outros) possibilitou um progresso significativo em diversas áreas: grupos de Lie Semissimples e aritmética de subgrupos, grupos p -ádicos, grupos lineares clássicos, grupo simples finitos, etc. Infelizmente, o assunto não foi tão acessível quanto deveria ser, em parte devido ao fundo bastante substancial em geometria algébrica assumido por Chevalley (1906-1984) e Armand Borel (1923-2003).

Para os propósitos deste trabalho, assumiremos conhecimento prévio de conceitos de álgebra comutativa a fim de compreender as propriedades de grupos algébricos afins, esta dissertação tem como objetivo estudar as propriedades de grupos algébricos afins a partir dos conceitos de geometria algébrica seguindo a trajetória construída por James Humphreys em [Humphreys], que por sua vez é a referência bibliográfica principal que dá suporte a esse texto.

No primeiro capítulo descrevemos variedades algébricas afins n dimensionais vistas como subconjuntos de zeros de uma quantidade finita de polinômios sobre um espaço afim n -dimensional, descrevendo suas principais propriedades. Mostra-se também a relação entre ideais do anel de polinômios $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ e variedades algébricas afins.

Na primeira seção do segundo capítulo, elaboramos uma relação entre conjuntos algébricos afins que é chamada de morfismo. A partir disso, podemos elaborar um conceito mais geral que são as variedades, para este fim, teremos como pré-requisito os conceitos de anel local e feixes que são abordados nas seções subsequentes. Por conseguinte, no capítulo três, desenvolvemos o conceito de grupo algébrico afim visto como um conjunto que tem estrutura de grupo e de variedade algébrica afim. Na parte final, faremos um primeiro estudo da ação de grupos algébricos sobre variedades algébricas.

Capítulo 1

Variedades Algébricas Afins

1.1 Variedade Algébrica Afim

Este capítulo tem o objetivo de descrever as variedades algébricas afins como conjunto de soluções de sistemas de equações polinomiais. Ao longo desse texto, $\mathbb{K}$ representará um corpo algebricamente fechado.

Definição 1.1. *O espaço afim n dimensional é definido por*

$$\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n = \mathbb{A}^n = \{(a_1, \dots, a_n) ; a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}\}.$$

Simplesmente, $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$ é o conjunto $\mathbb{K}^n = \mathbb{K} \times \dots \times \mathbb{K}$ sem a estrutura de espaço vetorial.

Definição 1.2. *Um subconjunto X de $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$ é dito uma **variedade algébrica afim** ou **variedade algébrica** se é conjunto solução de um sistema de equações polinomiais, isto é, $f_1, \dots, f_m \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$, onde cada polinômio $f_1, \dots, f_m \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$.*

Pelo Teorema da Base de Hilbert, todo ideal em $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ é finitamente gerado. Seja $I = \langle f_1, \dots, f_m \rangle \subset \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$, pode-se escrever

$$X = V(I) = \{p \in \mathbb{A}^n / f_j(p) = 0, j = 1, \dots, m\}.$$

Assim, uma variedade algébrica afim está associada a um ideal no anel de polinômios. Quando $m = 1$, isto é, $I = (f)$ é um ideal principal, dizemos que $X = V(f)$ é uma hipersuperfície definida por f . Se, além disso, $f = a_0 + a_1x_1 + \dots + a_nx_n$ dizemos que $X = V(f)$ é um hiperplano.

Exemplo 1.

- a) $X = V(y - x^2)$ é uma variedade afim formada pelos pontos de $\mathbb{R}^2$ que são zeros de todos os polinômios de $(y - x^2)$.

- b) $X = V(x^2 + y^2 - 1)$.
- c) Seja $M_n(\mathbb{K})$ o conjunto das matrizes de ordem n e coeficientes em $\mathbb{K}$. Podemos associar esse conjunto ao espaço afim $\mathbb{A}^{n^2}$. O subconjunto das matrizes inversíveis é chamado de *grupo linear geral* e é denotado por $GL_n(\mathbb{K})$, essas matrizes de ordem n tem o determinante não nulo. Como o determinante é uma função polinomial nas entradas da matriz, $GL_n(\mathbb{K})$ é o complementar da variedade afim formada pelas matrizes cujo determinante é nulo.

Proposição 1. *São válidas as seguintes propriedades de variedades afins:*

- a) *Sejam $I \subseteq J \subseteq \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ ideais, então $V(J) \subseteq V(I)$;*
- b) *Se $p = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{A}_k^n$, então $\{p\} = V(x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n)$;*
- c) *$\emptyset = V(\langle 1 \rangle)$ e $\mathbb{A}^n = V(\langle 0 \rangle)$;*
- d) *Se $\{X_\alpha\}_{\alpha \in L}$ é uma família de variedades algébricas afins dentro do mesmo espaço afim, então $\bigcap_{\alpha \in L} X_\alpha$ é uma variedade algébrica afim.*
- e) *Se $X_1, \dots, X_r \subseteq \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$ são variedades algébricas afins dentro do mesmo espaço afim, então $\bigcup_{i=1}^r X_i$ é uma variedade algébrica afim.*

Demonstração:

- a) Seja a um elemento de $V(J)$, então $f(a) = 0$ para todo elemento de J , em particular, $g(a) = 0$ para todo elemento $g \in I \subset J$;
- b) Escrevendo $p = (a_1, \dots, a_n)$, temos que p é um zero de todos os polinômios do ideal $\mathfrak{M} = \langle x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n \rangle$.
- c) De fato, para $p(x_1, \dots, x_n) = 1$ não existe $a \in \mathbb{A}^n$ tal que $P(a) = 0$. A segunda igualdade é óbvia;
- d) Seja $\{X_\alpha\}_{\alpha \in L}$ uma família de variedades algébricas onde $X_\alpha = V(I_\alpha)$, $\forall \alpha \in L$, sendo $I_\alpha \subseteq \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ um ideal.

$$\text{Afirmação: } \bigcap_{\alpha \in L} X_\alpha = V\left(\sum_{\alpha \in L} I_\alpha\right).$$

Como cada ideal $I_\alpha \subseteq \sum_{\alpha \in L} I_\alpha$ tem-se pelo item a) dessa proposição que $V\left(\sum_{\alpha \in L} I_\alpha\right) \subseteq V(I_\alpha) = X_\alpha, \forall \alpha \in L$, ou seja,

$$V\left(\sum_{\alpha \in L} I_\alpha\right) \subseteq \bigcap_{\alpha \in L} X_\alpha.$$

Agora, sejam $p \in \bigcap_{\alpha \in L} X_\alpha$ e $f \in \sum_{\alpha \in L} I_\alpha$. Daí existe $s > 0$ tal que

$$f = f_{\alpha_1} + \cdots + f_{\alpha_s} \text{ com } f_{\alpha_i} \in I_{\alpha_i}, \forall i.$$

Assim,

$$f(p) = f_{\alpha_1}(p) + \cdots + f_{\alpha_s}(p) = 0$$

já que $p \in \bigcap X_\alpha \subseteq X_{\alpha_i}$.

e) É suficiente provar para duas variedades $X = V(I)$ e $Y = V(J)$ com I, J ideais de $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$.

Afirmção: $X \cup Y = V(IJ)$.

De fato, como $IJ \subseteq I$ e $IJ \subseteq J$, tem-se pelo item (a) que $X = V(I) \subseteq V(IJ)$ e $Y = V(J) \subseteq V(IJ)$. Logo $X \cup Y \subseteq V(IJ)$. Reciprocamente, seja $p \in V(IJ)$ e suponha que $p \notin V(J)$. Sejam também $f \in I$ e $g \in J$ tal que $g(p) \neq 0$. Desse modo, $fg \in IJ$, logo $0 = (fg)(p) = f(p) \cdot g(p)$. Portanto, $f(p) = 0$.

■

Note que no item b) da proposição acima $\frac{\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]}{\mathfrak{M}} \cong \mathbb{K}$.

Definição 1.3. Definimos a **topologia de Zariski** em $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$ onde os fechados são os subconjuntos de $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$ que são variedades algébricas afins.

Exemplo 2. Vamos considerar a topologia de Zariski na variedade afim $\mathbb{A}^1$. Todo ideal em $\mathbb{K}[x]$ é principal, então toda variedade algébrica é o conjunto de raízes de um único polinômio. Sendo $\mathbb{K}$ um corpo algebricamente fechado, todo polinômio não nulo pode ser escrito como $f(x) = c(x - a_1) \cdots (x - a_n)$. Sendo assim $V(f) = \{a_1, \dots, a_n\}$. Dessa maneira, as variedades algébricas em $\mathbb{A}^1$ são os subconjuntos finitos e todo o espaço (pois $\mathbb{A}^1 = V(0)$). Portanto, os conjuntos abertos são o conjunto vazio e os complementares dos subconjuntos finitos.

Definição 1.4. Seja $X \subseteq \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$ uma variedade afim. O **ideal de definição** de X é o conjunto

$$\mathcal{I}(X) = \{f \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n] / f(p) = 0, \forall p \in X\}$$

Proposição 2. O ideal de definição de uma variedade algébrica é um ideal radical.

Demonstração: Seja $f \in \sqrt{\mathcal{I}(X)}$, daí existe $s > 0$ tal que $f^s \in \mathcal{I}(X)$. Assim,

$$\begin{aligned} f^s(p) = 0 \quad \forall p \in X &\Rightarrow f(p)^s = 0 \quad \forall p \in X \\ &\Rightarrow f(p) = 0 \\ &\Rightarrow f \in \sqrt{\mathcal{I}(X)}. \end{aligned}$$

■

Proposição 3. São válidas as seguintes propriedades sobre ideal de definição de variedades afins:

- a) Se $X \subseteq Y \subset \mathbb{A}^n$, então $\mathcal{I}(Y) \subseteq \mathcal{I}(X)$;
- b) $\mathcal{I}(X \cup Y) = \mathcal{I}(X) \cap \mathcal{I}(Y)$;
- c) $\mathcal{I}(\emptyset) = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ e $\mathcal{I}(\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n) = (0)$;
- d) Se $X \subseteq \mathbb{A}^n$, então $V(\mathcal{I}(X)) = X$

Demonstração:

- a) É trivial.
- b) Se $f \in \mathcal{I}(X \cup Y) \Leftrightarrow f(p) = 0 \quad \forall p \in X \cup Y \Leftrightarrow f(p) = 0 \quad \forall p \in X \text{ e } \forall p \in Y \Leftrightarrow f \in \mathcal{I}(X) \text{ e } f \in \mathcal{I}(Y) \Leftrightarrow f \in \mathcal{I}(X) \cap \mathcal{I}(Y)$.
- c) Por vacuidade tem-se $\mathcal{I}(\emptyset) = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$. O fato de $\mathbb{K}$ ser algebricamente fechado implica que $\mathbb{K}$ é infinito, logo $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$ também é infinito. Faremos indução sobre n . Seja $f \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ um polinômio de se anula em todos os pontos de A^n . Se $n = 1$, f é um polinômio em uma indeterminada com uma quantidade infinita de raízes em $\mathbb{A}^1$. Consequentemente $f = 0$. Suponha que a hipótese seja válida para todo inteiro positivo menor do que n . Decomponha

$$f = \sum_{i=0}^d f_i(x_1, \dots, x_{n-1})x_n^i$$

onde $f_i \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_{n-1}]$, para todo $i \in \{0, 1, \dots, d\}$ onde d é o grau de f . Como $f(a) = 0$ para todo $a \in \mathbb{A}^n$ e $f_i(b) = 0$ para todo $b \in \mathbb{A}^{n-1}$, por hipótese de indução $f_i = 0$ para todo i e consequentemente $f = 0$.

d) $X \subseteq V(\mathcal{I}(X))$ de imediato. Por outro lado, $X = V(I)$ para algum ideal $I \subset \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ e $I \subset \mathcal{I}(X) \Rightarrow V(\mathcal{I}(X)) \subset V(I) = X$.

■

O item (d) da proposição acima nos garante um mapa injetor $X \xrightarrow{\mathcal{I}} \mathcal{I}(X)$ que a cada variedade algébrica X associa um ideal radical $\mathcal{I}(X)$ em $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$. O Teorema dos Zeros de Hilbert, que será visto mais a frente, nos garante uma correspondência biunívoca.

Proposição 4. *Toda variedade algébrica afim é escrita como uma interseção finita de hipersuperfícies.*

Demonstração: Seja $X \subset \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$ uma variedade algébrica afim. Daí $X = V(I)$, sendo $I \subset \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ um ideal. Como $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ é Noetheriano, pelo Teorema da Base de Hilbert, tem-se que I é finitamente gerado. Isto é, $I = \langle f_1, \dots, f_s \rangle$, com $f_1, \dots, f_s \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$. Assim,

$$X = V(\langle f_1, \dots, f_s \rangle) = V((f_1) + (f_2) + \dots + (f_s)) = V(f_1) \cap V(f_2) \cap \dots \cap V(f_s).$$

■

Lema 1. *Toda família não vazia de variedades algébricas afins admite um menor elemento no sentido de inclusão.*

Demonstração: Seja $\{X_\alpha\}_{\alpha \in L} := X$ uma família não vazia de variedades algébricas afins. Desta forma podemos considerar uma família de ideais em $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ dada por $Y := \{\mathcal{I}(X_\alpha)\}_{\alpha \in L}$. Como $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ é Noetheriano, existe $\beta \in L$ tal que $\mathcal{I}(X_\beta)$ é um ideal maximal. Suponha que exista X_γ tal que $X_\gamma \subseteq X_\beta$. Então $\mathcal{I}(X_\beta) \subseteq \mathcal{I}(X_\gamma) \Rightarrow \mathcal{I}(X_\beta) = \mathcal{I}(X_\gamma) \Rightarrow V(\mathcal{I}(X_\beta)) = V(\mathcal{I}(X_\gamma)) \Rightarrow X_\beta = X_\gamma$.

■

Um espaço topológico que satisfaz a condição de cadeia ascendentes em abertos é chamado de *Noetheriano*.

1.2 Variedade Afim Irredutível

Definição 1.5. *Um subconjunto não vazio Y de um espaço topológico X é dito **redutível** se pode ser expresso como união $Y = Z \cup W$ de dois subconjuntos fechados próprios. Do contrário, Y é dito **irredutível**.*

Evidentemente, todo espaço irredutível é conexo, mas não vale a recíproca. De fato, o conjunto $V(x_1x_2) \subset \mathbb{A}^2$ é conexo, mas não é irredutível.

Exemplo 3. O espaço $\mathbb{A}^1$ é irredutível, pois seus conjuntos fechados próprios são finitos e $\mathbb{A}^1$ é infinito (porque $\mathbb{K}$ é algebricamente fechado, logo infinito).

Definimos o **fecho** de um conjunto $X \subset \mathbb{A}^n$, denotado por $\overline{X}$, como sendo a interseção de todas as variedades algébricas afins que contém X .

Proposição 5. Seja X um espaço topológico não vazio. São equivalentes:

- a) X é um espaço topológico irredutível.
- b) Todo par de abertos não vazios de X tem interseção não vazia.
- c) Todo aberto não vazio em X é denso em X .

Demonstração:

- a) $\Rightarrow$ b) Sejam $A, B \subset X$ subconjuntos abertos não vazios em X e suponhamos que $A \cap B = \emptyset$. Assim, temos que $A^c \cup B^c = X$. como X é irredutível, sem perda de generalidade suponha que $A^c = X$, logo $A = \emptyset$ que é um absurdo.
- b) $\Rightarrow$ c) Seja A um aberto não vazio com $\overline{A} \subsetneq X$. Como $\overline{A}$ é fechado, segue que $(\overline{A})^c$ é aberto próprio de X . Por hipótese, $(\overline{A})^c \cap A \neq \emptyset$. Seja $b \in (\overline{A})^c \cap A \neq \emptyset$, então $b \in A$ e $b \notin \overline{A}$, mas $A \subset \overline{A}$ que é uma contradição.
- c) $\Rightarrow$ a) Suponhamos por absurdo que existam F_1 e F_2 dois fechados próprios de X com $X = F_1 \cup F_2$. Tome $A = X \setminus F_1$, então $\overline{A} \subset F_2 \subsetneq X$ o que é uma contradição.

■

Proposição 6. Seja X um espaço topológico.

- a) Um subespaço Y (com a topologia induzida) de um espaço topológico X é irredutível se, e somente se, $\overline{Y}$ é irredutível.
- b) Se $\varphi : X \longrightarrow X'$ é contínua e X irredutível, então $\varphi(X)$ é irredutível.

Demonstração:

- a) Pela proposição anterior, Y é irredutível se e somente se a interseção de quaisquer dois abertos $A' \cap Y, B' \cap Y$ de Y é não vazia, ou seja, Y é irredutível se, e somente se a interseção de quaisquer dois abertos de X intersecta Y . Analogamente vale para $\overline{Y}$. Por outro lado, dado qualquer aberto A de X , temos que $A \cap Y \neq \emptyset$ se, e somente se, $A \cap \overline{Y} \neq \emptyset$.

- b) Sejam U, V abertos em X' tais que $U \cap \varphi(X) \neq \emptyset$ e $V \cap \varphi(X) \neq \emptyset$, devemos mostrar que $U \cap V \cap \varphi(X) \neq \emptyset$. De fato, $\varphi^{-1}(U)$ e $\varphi^{-1}(V)$ são abertos não vazios em X , pois φ é contínua. Logo $\varphi^{-1}(U) \cap \varphi^{-1}(V) \neq \emptyset$, pois X é irredutível, consequentemente $U \cap V \cap \varphi(X)$ é não vazio.

■

Podemos restringir a definição de subconjunto redutível para variedades algébricas afins. Dizemos que uma variedade algébrica afim é redutível quando pode ser expressa como união de dois subconjuntos próprios que também são variedades algébricas afins. Do contrário, a variedade é dita irredutível.

Proposição 7. *Seja $X \subsetneq \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$ uma variedade algébrica afim. X é irredutível se, e somente se, o ideal de definição $\mathcal{I}(X)$ é primo.*

Demonstração: Se X é redutível, então existe uma decomposição própria $X = Y \cup Z$ com $Y \subsetneq X$ e $Z \subsetneq X$ subvariedades. Por isso,

$$\mathcal{I}(X) \subsetneq \mathcal{I}(Y) \text{ e } \mathcal{I}(X) \subsetneq \mathcal{I}(Z).$$

Assim, existem $f \in \mathcal{I}(Y) \setminus \mathcal{I}(X)$ e $g \in \mathcal{I}(Z) \setminus \mathcal{I}(X)$. Logo $fg \in \mathcal{I}(Y)\mathcal{I}(Z) \subseteq \mathcal{I}(Y) \cap \mathcal{I}(Z) = \mathcal{I}(Y \cup Z) = \mathcal{I}(X)$ o que implica que $\mathcal{I}(X)$ não é primo.

Reciprocamente, se $\mathcal{I}(X)$ não é um ideal primo, então existem $f, g \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ tais que $fg \in \mathcal{I}(X)$, mas $f, g \notin \mathcal{I}(X)$. Temos que

$$\langle f.g \rangle \subseteq \mathcal{I}(X) \Rightarrow X = V(\mathcal{I}(X)) \subset V(\langle f.g \rangle) = V(\langle f \rangle) \cup V(\langle g \rangle).$$

Isso implica que $X = (X \cap V(\langle f \rangle)) \cup (X \cap V(\langle g \rangle))$. Note ainda que as subvariedades $X \cap V(\langle f \rangle)$ e $X \cap V(\langle g \rangle)$ são subconjuntos próprios de X . Portanto X é redutível.

■

Teorema 1. *Toda variedade algébrica afim é escrita como uma união finita de variedades algébricas afins irredutíveis.*

Demonstração: Seja

$$\mathcal{F} = \{X \subset \mathbb{A}^n / X \text{ não pode ser escrita como união finita de variedades irredutíveis}\}.$$

Suponhamos por absurdo que $\mathcal{F} \neq \emptyset$, daí pelo Lema [1](#), $\mathcal{F}$ admite elemento minimal. Seja $X = \min \mathcal{F}$, em particular X é redutível. Isto é, existem Y e Z subconjuntos próprios de X que são variedades algébricas afins tais que $X = Y \cup Z$. Pela minimalidade de X , as variedades Y e Z não pertencem a $\mathcal{F}$. Sendo assim, $Y = Y_1, \dots, Y_r$ e $Z = Z_1, \dots, Z_s$ com Y_i

e Z_j variedades algébricas irredutíveis, para $i = 1, \dots, r$ e $j = 1, \dots, s$. Consequentemente $X = (\bigcup_{i=1}^r Y_i) \cup (\bigcup_{j=1}^s Z_j)$ que é uma contradição. Logo $\mathcal{F} = \emptyset$. ■

A expressão $X = \bigcup_{i=1}^r X_i$ fornecida pelo teorema anterior é uma decomposição de X em componentes irredutíveis X'_i s. tal decomposição pode ser sempre tomada satisfazendo

$$X \not\subseteq \bigcup_{i \neq j} X_i.$$

1.3 Teorema dos Zeros de Hilbert

Os resultados seguintes serão enunciados como preparação para o teorema dos zeros de Hilbert.

Definição 1.6. Uma extensão de corpos $K \subseteq L$ é **algébrica** se, para cada $\alpha \in L$, existe polinômio $f(t) \in \mathbb{K}[t]$ não constante tal que $f(\alpha) = 0$

Lema 2. Seja $K \subseteq L$ uma extensão de corpos tal que L é finitamente gerado como K -álgebra, ou seja, existem $a_1, \dots, a_n$ satisfazendo $L = K[a_1, \dots, a_n]$, então $K \subseteq L$ é algébrica.

Por Exemplo $K = \mathbb{R} \subset \mathbb{C} = L$. Note que $\mathbb{C} = \mathbb{R}[i]$. Pelo lema, tem-se que $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ é algébrica. De fato, dado $z = a + bi \in \mathbb{C}$, considere o polinômio $f_z(t) = (t - a)^2 + b^2$. Temos $f_z(z) = (bi)^2 + b^2 = 0$.

Observação 1.

- 1) Se $\mathbb{K}$ é um corpo algebricamente fechado e $\mathbb{K} \subseteq L$ é uma extensão algébrica de corpos, então $\mathbb{K} = L$.
- 2) Dado um ponto $p = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$, sempre podemos associá-lo a um ideal maximal $\mathfrak{M}_p = \langle x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n \rangle \subset \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$. De fato, basta notar que a aplicação $\phi : \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n] \rightarrow \mathbb{K}$ definida por $\phi(f(x_1, \dots, x_n)) = f(a_1, \dots, a_n)$ é um homomorfismo de anéis sobrejetor cujo núcleo é $\mathfrak{M}_p$. Pelo teorema do isomorfismo, temos o desejado.

Proposição 8. Seja $\mathbb{K}$ um corpo algebricamente fechado. Se $\mathfrak{M} \subset \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ é um ideal maximal, então existe $p \in \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$ tal que $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_p$

Demonstração: Considere o corpo $L = \frac{\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]}{\mathfrak{M}}$. Daí $\mathbb{K} \subseteq L$ é uma extensão de corpos. Note ainda que $L = \mathbb{K}[a_1, \dots, a_n]$, sendo $a_i = \overline{x_i}$. Portanto, pelo lema [2], $\mathbb{K} \subseteq L$ é algébrica. Mas, como $\mathbb{K}$ é algebricamente fechado, tem-se pela observação [1] que $\mathbb{K} = L$. Logo $\overline{x_i} = \overline{a_i} \in \mathbb{K}$, $i = 1, \dots, n$. Portanto $x_i - a_i \in \mathfrak{M}$ para cada i . Consequentemente $\langle x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n \rangle \subseteq \mathfrak{M}$. Pelo item 2 da Observação [1], temos que $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_p$, onde $p = (a_1, \dots, a_n)$. ■

Corolário 1 (Teorema dos Zeros de Hilbert versão fraca). *Seja $\mathbb{K}$ um corpo algebricamente fechado. Se $I \subsetneq \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ é um ideal, então $V(I) \neq \emptyset$.*

Demonstração: Se $I \subsetneq \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$, então, existe um ideal maximal $\mathfrak{M} \subset \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ que contém I . Como $\mathbb{K}$ é algebricamente fechado, pela proposição 8, $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_p$, para algum $p \in \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$. Portanto

$$I \subseteq \mathfrak{M}_p \Rightarrow \{p\} = V(\mathfrak{M}_p) \subseteq V(I).$$

Logo $V(I) \neq \emptyset$. ■

Teorema 2 (Hilbert Nullstellensatz). *Seja $\mathbb{K}$ um corpo algebricamente fechado. Se $X = V(I) \subseteq \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$ é uma variedade algébrica afim, então $\mathcal{I}(X) = \sqrt{I}$.*

Demonstração: Considere $h \in \sqrt{I}$, então existe $s > 0$ tal que $h^s \in I$. Seja $p \in X = V(I)$ arbitrário. Logo $(h^s)(p) = 0 \Rightarrow (h(p))^s = 0 \Rightarrow h(p) = 0 \Rightarrow h \in \mathcal{I}(X)$. Por outro lado, tome $g \in \mathcal{I}(X)$. Pelo Teorema da Base de Hilbert, considere $I = \langle f_1, \dots, f_r \rangle \subset A = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$. Considere o ideal $J = \langle f_1, \dots, f_r, t.g - 1 \rangle \subset A[t]$, onde t é uma indeterminada sobre A . Considere também a variedade correspondente $V(J) \subset \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^{n+1}$.

Afirmção: $V(J) = \emptyset$. Suponhamos, por absurdo, que $V(J) \neq \emptyset$. Daí considere $q = (b_1, \dots, b_n, b) \in V(J)$. Em particular, $f_j(q) = 0 ; j = 1, \dots, r \Rightarrow f_j(b_1, \dots, b_n) = 0 ; j = 1, \dots, r \Rightarrow (b_1, \dots, b_n) \in V(I) = X \xrightarrow{g \in \mathcal{I}(X)} g(b_1, \dots, b_n) = 0$. Além disso, $q \in V(J) \Rightarrow (tg - 1)(q) = 0 \Rightarrow (tg - 1)(b_1, \dots, b_n, b) = 0 \Rightarrow b.g(b_1, \dots, b_n) - 1 = 0 \Rightarrow -1 = 0$ que é um absurdo. Portanto $V(J) = \emptyset$

Pelo Teorema dos Zeros de Hilbert versão fraca, temos que $J = A[t]$. Sendo assim, existem $H_1, \dots, H_r, G \in A[t]$ tais que

$$1 \in J \Rightarrow 1 = \sum_{i=1}^r H_i f_i + G(tg - 1). \quad (1.1)$$

Considere o homomorfismo de anéis:

$$\varphi : A[t] = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n, t] \longrightarrow \mathbb{K}(x_1, \dots, x_n)$$

que mapeia $x_i \mapsto x_i$ e $t \mapsto 1/g$. Aplicando φ em 1.1, temos

$$1 = \frac{\overline{H_1} f_1}{g^{n_1}} + \frac{\overline{H_2} f_2}{g^{n_2}} + \dots + \frac{\overline{H_r} f_r}{g^{n_r}} \left(\frac{1}{g} \cdot g - 1 \right)$$

Onde cada $\overline{H_i} \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$. Sendo assim, $g^n \in \langle f_1, \dots, f_r \rangle = I$, para n suficientemente grande. Portanto $g \in \mathcal{I}(X)$. ■

Observação 2.

Podemos considerar as seguintes associações biunívocas:

$\{\text{Variedades algébricas afins em } \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n\} \leftrightarrow \{\text{ideais radicais em } \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]\}.$

$\{\text{Variedades algébricas afins irredutíveis em } \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n\} \leftrightarrow \{\text{ideais primos em } \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]\}.$

$\{\text{Hipersuperfícies irredutíveis em } \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n\} \leftrightarrow \{\text{polinômios irredutíveis em } \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]\}.$

$\{\text{Pontos em } \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n\} \leftrightarrow \{\text{ideais maximais em } \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]\}.$

Capítulo 2

Morfismos

2.1 Morfismo de variedades Algébricas Afins

Se $f, g \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ são dois polinômios que definem a mesma função em $\mathbb{A}^n$, isto é, $f(x) = g(x) \forall x \in \mathbb{A}^n$, então

$$f - g \in \mathcal{I}(\mathbb{A}^n) = \mathcal{I}(V(0)) = \sqrt{(0)} = (0)$$

e conseqüentemente $f = g$ em $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$. Mais geralmente, se X é uma variedade afim, dois polinômios $f, g \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ definem a mesma função polinomial em X se e somente se $f - g \in \mathcal{I}(X)$. Assim, o anel quociente $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]/\mathcal{I}(X)$ pode ser pensado como o anel das funções polinomiais em X . Essa nota justifica as próximas definições.

Definição 2.1. *Seja $X \subset \mathbb{A}^n$ uma variedade afim. Uma função $f : X \rightarrow \mathbb{K}$ é **regular** se existe um polinômio $F \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ tal que $f(x) = F(x)$ para todo $x \in X$.*

Funções regulares são contínuas na topologia de Zariski. De fato, considere f uma função regular de uma variedade afim $X \subset \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$. Como variedades afins próprias de $\mathbb{K} = \mathbb{A}^1$ são conjuntos finitos de pontos, basta notar que para cada $a \in \mathbb{A}^1$, temos

$$f^{-1}(a) = \{x \in X; f(x) = a\} = X \cap V(f - a).$$

Definição 2.2. *Seja $X \subset \mathbb{A}^n$ uma variedade afim. O anel quociente $A[X] := \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]/\mathcal{I}(X)$ é o anel de coordenadas de X ou anel das funções regulares de X .*

Observação 3. *Vale notar que o anel de coordenadas de uma variedade afim é uma $\mathbb{K}$ -álgebra finitamente gerada e reduzida, ou seja, não há elementos nilpotentes, pelo fato de $\mathcal{I}(X)$ ser um ideal radical. Além disso, $A[X]$ é um domínio se e somente se X é irredutível, de acordo com a proposição 7. $A[X]$ também pode ser interpretado como a $\mathbb{K}$ -álgebra das funções regulares em X . Por outro lado, se A é uma $\mathbb{K}$ -álgebra finitamente gerada e*

reduzida, então A é o anel de coordenadas de alguma variedade algébrica afim. Quando $A[X]$ é um domínio, podemos também considerar o corpo de frações, denotado por $A(X)$, e chamá-lo de **corpo das funções racionais** de X .

Definição 2.3. Sejam $X \subset \mathbb{A}^n$ uma variedade algébrica afim e $f \in A[X]$. O conjunto $U_f := \{x \in X; f(x) \neq 0\}$ é chamado de **aberto principal**.

U_f é um subconjunto aberto, pois é o complemento do subconjunto fechado $V(f)$. O conjunto $Gl_n(\mathbb{K})$ visto no exemplo 1 é um aberto principal de $\mathbb{A}^{n^2}$.

Proposição 9. Sejam $X = \mathbb{A}^n$ e $f \in A(\mathbb{A}^n)$. Então U_f é uma variedade algébrica afim em $\mathbb{A}^{n+1}$.

Demonstração: Pensando em $\mathbb{A}^{n+1}$ como $\mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^1$ e definindo $g \in A(\mathbb{A}^{n+1})$ como $g = ft - 1$. Então $V(g) \subset \mathbb{A}^{n+1}$ é uma variedade algébrica afim por definição. Por outro lado, $V(g) \simeq U_f$ via projeção $\pi : \mathbb{A}^{n+1} \rightarrow \mathbb{A}^n$. ■

Definição 2.4. Sejam $X \subset \mathbb{A}^n$ e $Y \subset \mathbb{A}^m$ variedades afins, uma função $\varphi : X \rightarrow Y$ é um **morfismo** se existem $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_m \in A[X]$ tais que

$$\varphi(x) = (\psi_1(x), \dots, \psi_m(x)).$$

para todo $x \in X$.

Definição 2.5. Um isomorfismo de variedades algébricas afins é um morfismo $f : X \rightarrow Y$ tal que existe um morfismo $g : Y \rightarrow X$ de modo que $f \circ g = Id_Y$ e $g \circ f = Id_X$, onde Id_X e Id_Y são as funções identidades em X e Y respectivamente. X e Y são ditos isomorfos quando existe um isomorfismo de variedades entre eles.

Exemplo 4.

- (a) Toda função regular é um morfismo em $\mathbb{A}^1$.
- (b) Tome $X = V(x_1 + x_2 - x_3)$ e $Y = V(x_1^2 - x_2^2 + x_3)$ hipersuperfícies de $\mathbb{A}^3$. Consideramos o morfismo $\varphi : \mathbb{A}^3 \rightarrow \mathbb{A}^3$ definido por $\varphi(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3(\alpha_2 - \alpha_1))$. Para cada $x \in X$, temos que

$$\varphi(x) = \varphi(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3(\alpha_2 - \alpha_1)) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_2^2 - \alpha_1^2) \in Y.$$

Deste modo, φ induz um morfismo $\varphi|_X : X \rightarrow Y$.

Note que um morfismo $\varphi : X \rightarrow Y$ é contínuo nas topologias de Zariski envolvidas. De fato, se $Z \subset Y$ é um conjunto de zeros de funções polinomiais f_i em Y , então $\varphi^{-1}(Z)$ é um conjunto de zeros de funções polinomiais $f_i \circ \varphi$ em X . Essa nota justifica a seguinte proposição.

Proposição 10. *Seja $\varphi : X \rightarrow Y$ um morfismo de variedades algébricas afins. Se X é irredutível, então $\varphi(X) \subset Y$ é irredutível.*

Proposição 11. *Sejam $X \subset \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$ e $Y \subset \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^m$ variedades algébricas afins. Então: X e Y são isomorfos como variedades algébricas afins se, e somente se, $A[X] = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]/\mathcal{I}(X)$ e $A[Y] = \mathbb{K}[y_1, \dots, y_m]/\mathcal{I}(Y)$ são isomorfos como $\mathbb{K}$ -álgebras.*

Demonstração: Considere $f : X \rightarrow Y$ um morfismo, $X \subset \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$, $Y \subset \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^m$, ou seja, $f = (f_1, \dots, f_m)$ com $f_i \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ para $i = 1, \dots, m$. Veremos que f induz um homomorfismo de K -álgebras $f^* : A[Y] \rightarrow A[X]$ e definido por $\bar{p} \mapsto f^*(\bar{p}) = \overline{p(f(x))}$.

f^* está bem definido. Dados $p, q \in \mathbb{K}[y_1, \dots, y_m]$ tais que $\bar{p} = \bar{q} \in A[Y] \Leftrightarrow p - q \in \mathcal{I}(Y) \Leftrightarrow (p - q)(y) = 0, \forall y \in Y$, em particular $(p - q)(f(x)) = 0 \forall x \in X$. Logo $\overline{pf} = \overline{qf}$ em $A[X]$.

A correspondência $f \mapsto f^*$ é um funtor contravariante. É notável que o morfismo identidade sobre uma variedade algébrica afim X é levado ao homomorfismo identidade sobre $A[X]$. Agora, se X, Y e Z são variedades algébricas afins tais que existem $f : X \rightarrow Y$ e $g : Y \rightarrow Z$ morfismos, então $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$. Como consequência, temos que se X é isomorfo a Y como conjunto algébrico, então seus anéis de coordenadas são isomorfos como $\mathbb{K}$ -álgebras. Por outro lado, seja $\varphi : A(Y) \rightarrow A(X)$, então existe um único morfismo $f : X \rightarrow Y$ tal que $\varphi = f^*$. De fato, considere $f_i \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ tal que $\overline{f_i} = \varphi(\overline{y_i})$ em $A[X]$, onde $\overline{y_i}$ são os geradores da $\mathbb{K}$ -álgebra $A[Y]$ para $i = 1, \dots, m$. Assim definimos m polinômios de modo que possamos definir $f : X \rightarrow \mathbb{A}^m$ com $f = (f_1, \dots, f_m)$. Observe que f está unicamente determinada pela definição de cada f_i . Para verificar que $f(X) \subset Y$, seja $p \in \mathcal{I}(Y)$, então $\overline{p(y_1, \dots, y_m)} = 0$ em $A[Y]$, mas como φ é um homomorfismo então $p(\varphi(\overline{y_1}), \dots, \varphi(\overline{y_m})) = 0$. Portanto $p \circ f \in \mathcal{I}(X)$. ■

Definição 2.6. *Seja $f : X \rightarrow Y$ um morfismo de variedades algébricas afins. Chamamos de **comorfismo** de f a função $f^* : A[Y] \rightarrow A[X]$ definida por $f^*(g) = g \circ f$.*

Observação 4.

Sabe-se que existe um epimorfismo $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n] \rightarrow A[X]$ que induz uma bijeção entre os ideais de $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ que contém $\mathcal{I}(X)$ e os ideais de $A[X]$. Essa bijeção também preserva ideais radicais, primos e maximais. Assim, podemos reformular a observação 2 do seguinte modo: fixado $X \subset \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$, existem correspondências bijetivas

$$\{\text{Variedades algébricas afins em } X\} \leftrightarrow \{\text{ideais radicais em } A[X]\};$$

$$\{\text{Variedades algébricas afins irredutíveis em } X\} \leftrightarrow \{\text{ideais primos em } A[X]\};$$

$\{\text{Pontos em } X\} \leftrightarrow \{\text{ideais maximais em } A[X]\}.$

Proposição 12. *Seja $f : X \rightarrow Y$ um morfismo de variedades algébricas afins. Então $f(X)$ é denso em Y se, e somente se o comorfismo f^* é injetor.*

Demonstração: Seja A a imagem de $I(\overline{f(X)})$ em $A[Y]$. Note que se $\bar{p} \in \text{Ker}(f^*)$, então $f^*\bar{p} = 0 \Leftrightarrow p(f_1(x), \dots, f_m(x)) = 0 \forall x \in X \Leftrightarrow p(y) = 0 \forall y \in f(X) \Leftrightarrow p(y) = 0 \forall y \in \overline{f(X)}$. Desse modo, $\text{Ker}(f^*) = A$ e como f^* é injetor temos que $0 = \text{Ker}(f^*) = A$, ou seja, $\overline{f(X)} = Y$. ■

Proposição 13 (Propriedade universal). *Sejam X e Y variedades afins, $\pi_X : X \times Y \rightarrow X$, $\pi_Y : X \times Y \rightarrow Y$ os morfismos de projeção. Então para toda variedade afim Z , morfismos $f_X : Z \rightarrow X$ e $f_Y : Z \rightarrow Y$, existe um único morfismo $f : Z \rightarrow X \times Y$ tal que $f_X = \pi_X \circ f$ e $f_Y = \pi_Y \circ f$.*

Demonstração: O único modo de se obter as relações $f_X = \pi_X \circ f$ e $f_Y = \pi_Y \circ f$ é considerar a função $f : Z \rightarrow X \times Y$, $z \mapsto (f_X(z), f_Y(z))$ que é um morfismo. ■

Observe que a propriedade universal do produto de variedades algébricas afins corresponde exatamente a propriedade universal do produto tensorial usando a tradução entre morfismos de variedades afins e homomorfismos de $\mathbb{K}$ -álgebras. Consequentemente o anel de coordenadas $A[X \times Y]$ é simplesmente o produto tensorial $A[X] \otimes_{\mathbb{K}} A[Y]$.

Proposição 14. *Sejam $X \subset \mathbb{A}^n$ e $Y \subset \mathbb{A}^m$ duas variedades afins irredutíveis. Então $X \times Y$ é uma variedade afim irredutível em $\mathbb{A}^{n+m}$.*

Demonstração: Segue do fato que uma variedade afim é irredutível se e somente se seu anel de coordenadas é um domínio integral, e do fato que o produto tensorial de duas $\mathbb{K}$ -álgebras integrais é um domínio integral integral. ■

2.2 Anel Local

Sejam X uma variedade afim irredutível e um ponto $p \in X$. Consideramos o homomorfismo

$$\varepsilon_p : A[X] \rightarrow \mathbb{K}, \quad f \mapsto f(p).$$

Seja $A(X)$ o corpo das funções racionais de X . O conjunto

$$\mathcal{O}_p := \{x \in A(X); x = a/b \text{ para } a, b \in A[X] \text{ e } \varepsilon_p(b) \neq 0\} \subseteq A(X)$$

é um subanel de $A(X)$ contendo $A[X]$. É possível estender ε_p canonicamente par um homomorfismo $\tilde{\varepsilon}_p : \mathcal{O}_p \rightarrow \mathbb{K}$ considerando $\tilde{\varepsilon}_p(x) := \varepsilon_p(a)/\varepsilon_p(b)$ para $x = a/b \in \mathcal{O}_p$.

Proposição 15. *O anel $\mathcal{O}_p$ como definido acima é um anel local.*

Demonstração: Mostraremos que existe um único ideal maximal dado por $\mathfrak{M}_p := \text{Ker}(\tilde{\varepsilon}_p) \subset \mathcal{O}_p$. De fato, se $x \in \mathcal{O}_p$ tal que $\tilde{\varepsilon}_p(x) \neq 0$, então, escrevendo $x = a/b$, temos que $\varepsilon_p(a) \neq 0$ e $\varepsilon_p(b) \neq 0$, então existe $x^{-1} \in \mathcal{O}_p$. Assim, todo elemento que não é uma unidade em $\mathcal{O}_p$ está em $\mathfrak{M}_p$. ■

Definição 2.7. *O anel $\mathcal{O}_p$ é chamado de **anel local do ponto p em X** .*

Os anéis locais de uma variedade afim irredutível X realmente determinam $A[X]$ (portanto, determina X), como mostra a seguinte proposição.

Proposição 16. *Se X é uma variedade afim irredutível, então $A[X] = \bigcap_{p \in X} \mathcal{O}_p$.*

Demonstração: Seja $f \in \bigcap_{p \in X} \mathcal{O}_p$ e considere o ideal $I = \{a \in A[X]; af \in A[X]\}$. Suponha que $I \neq A[X]$, então existe algum $p \in X$ tal que $I \subseteq \text{Ker}(\varepsilon_p)$. Por outro lado, para um $f \in \mathcal{O}_p$, então existe algum $b \in I$ tal que $\varepsilon_p(b) \neq 0$ o que é uma contradição. Assim, temos que $1 \in I$ e consequentemente $f \in A[X]$. ■

Definição 2.8. *Seja X uma variedade afim irredutível. Para cada aberto não vazio $U \subset X$, O conjunto $\mathcal{O}_X(U)$ formado por todas as funções que são regulares em U .*

Note que $\mathcal{O}_X(U) = \bigcap_{x \in U} \mathcal{O}_x$.

2.3 Feixes

Definição 2.9. *Um **pré-feixe** de anéis $\mathcal{F}$ em um espaço topológico X satisfaz as seguintes condições:*

- i) *Para cada aberto $U \subset X$ existe um anel $\mathcal{F}(U)$;*
- ii) *Para cada inclusão $U \subset V$ de abertos em X , existe um homomorfismo de anéis $\rho_{V,U} : \mathcal{F}(V) \rightarrow \mathcal{F}(U)$ chamado de restrição (pensemos nesse item como a restrição usual de funções em subconjuntos);*
- iii) $\mathcal{F}(\emptyset) = 0$
- iv) $\rho_{U,U}$ é a identidade em $\mathcal{F}(U)$ para todo U ;

v) Para quaisquer inclusão $U \subset V \subset W$ de abertos em X temos $\rho_{V,U} \circ \rho_{W,V} = \rho_{W,U}$

Os Elementos de $\mathcal{F}(U)$ são chamados de *seções de $\mathcal{F}$ sobre U* . Um pré-feixe $\mathcal{F}$ é chamado de **feixe de anéis** se satisfaz a seguinte propriedade de colagem: Se $U \subset X$ é um conjunto aberto, $\{U_i, i \in I\}$ uma cobertura aberta de U e $\varphi_i \in \mathcal{F}(U_i)$ seções para todo i de modo que $\varphi_i|_{U_i \cap U_j} = \varphi_j|_{U_i \cap U_j}$ para todo $i, j \in I$, então existe um único $\varphi \in \mathcal{F}(U)$ tal que $\varphi|_{U_i} = \varphi_i$ para todo i .

Exemplo 5.

- a) Seja X uma variedade afim. Então os anéis $\mathcal{O}_X(U)$ de funções regulares em abertos $U \subset X$ junto com a usual restrição de função formam um feixe $\mathcal{O}_X$ em X . É suficiente analisar localmente em cada componente irredutível X_i de X e observar que o anel local $\mathcal{O}_p$ de $p \in X_i$ está bem determinado.
- b) Similarmente, em $X = \mathbb{R}^n$ os anéis $\mathcal{F}(U) = \{\varphi : U \rightarrow \mathbb{R} \text{ contínuas}\}$ para subconjuntos abertos $U \subset X$ formam um feixe $\mathcal{F}$ em X com a restrição usual de função. De modo análogo podemos considerar em X os feixes de funções diferenciáveis e funções analíticas.
- c) Para $X = \mathbb{R}^n$, seja $\mathcal{F}(U) = \{\varphi : U \rightarrow \mathbb{R} \text{ função constante}\}$ com a restrição usual de função. $\mathcal{F}$ é um pré-feixe, mas não é um feixe. Sejam U_1 e U_2 dois abertos não vazios e disjuntos de X , e sejam $\varphi_1 \in \mathcal{F}(U_1)$ e $\varphi_2 \in \mathcal{F}(U_2)$ funções constantes com diferentes valores. Então φ_1 e φ_2 coincidem trivialmente em $U_1 \cap U_2 = \emptyset$, mas não há função constante em $U = U_1 \cup U_2$ cuja restrição em ambos U_1 é φ_1 e em U_2 é φ_2 . Consequentemente $\mathcal{F}$ não satisfaz a propriedade de colagem. Observe, no entanto, que obteríamos um feixe se considerássemos funções localmente constantes em vez de constantes.

Definição 2.10. Seja $\mathcal{F}$ um pré-feixe em um espaço topológico X . Fixado um ponto $a \in X$, considere o par (U, φ) com U uma vizinhança aberta de a e $\varphi \in \mathcal{F}(U)$. Considere a relação de equivalência

$$(U, \varphi) \sim (U', \varphi') \Leftrightarrow \exists V \subset X \text{ aberto, tal que } a \in V \subset U \cap U' \text{ e } \varphi|_V = \varphi'|_V.$$

O conjunto quociente determinado pela relação é chamado de **talo** $\mathcal{F}_a$ de $\mathcal{F}$ em a . Os elementos de $\mathcal{F}_a$ são chamados de **germes** de $\mathcal{F}$ em a .

Os anéis locais $\mathcal{O}_p$ de uma variedade afim irredutível são os germes do feixe $\mathcal{O}_X$.

Definição 2.11. Uma **pré-variedade** é um espaço topológico Noetheriano X munido de uma estrutura de feixe $\mathcal{O}_X$ de funções com valores em $\mathbb{K}$, tal que X é a união finita de subconjuntos abertos U_i , chamados de **abertos afins**, cada um isomorfo a uma variedade afim quando considerado a restrição do feixe de funções $\mathcal{O}_X|_{U_i}$.

Definição 2.12. Uma pré-variedade é chamada de **variedade** se satisfaz o axioma de Hausdorff, a diagonal $\Delta_X = \{(x, x); x \in X\}$ é fechada em $X \times X$.

Definição 2.13. Uma função $\varphi : X \rightarrow Y$ é um **morfismo de pré-variedades** se preserva a estrutura essencial de X , sua topologia e seu feixe de funções, ou seja, se respeita as duas condições:

- 1) φ é contínua.
- 2) Se $V \subset Y$ é aberto e $U = \varphi^{-1}(V)$, então $f \circ \varphi \in \mathcal{O}_X(U)$, para qualquer $f \in \mathcal{O}_Y(V)$.

Note que quando consideramos X e Y variedades algébricas afins, a definição acima coincide com a definição de morfismo para variedades algébricas afins. De fato, φ é um morfismo de variedades algébricas afins X em Y se e somente se $g \circ \varphi \in A[X] \forall g \in A[Y]$, de acordo com a definição [2.6](#).

Proposição 17. Sejam $\varphi, \psi : X \rightarrow Y$ um morfismo de pré-variedades e suponha que Y é uma variedade.

- a) O gráfico de φ $\text{graf} \varphi = \{(x, \varphi(x)) : x \in X\}$ é fechado em $X \times Y$.
- b) O conjunto $\{x \in X; \varphi(x) = \psi(x)\}$ é fechado em X .
- c) Se φ, ψ coincidem em um subconjunto denso de X , então $\varphi = \psi$.

Demonstração:

- a) Considere o morfismo $(\varphi, id) : X \times Y \rightarrow Y \times Y$, $(x, y) \mapsto (\varphi(x), y)$. Como Y é uma variedade, então Δ_Y é fechado e consequentemente $\text{graf} \varphi = (\varphi, id)^{-1}(\Delta_Y)$ é fechado.
- b) $\{x \in X; \varphi(x) = \psi(x)\}$ é a imagem inversa da diagonal Δ_Y pelo morfismo $X \rightarrow Y \times Y$, $x \mapsto (\varphi(x), \psi(x))$ que é fechado pois Y é uma variedade.
- c) $\{x \in X; \varphi(x) = \psi(x)\}$ coincide com X , pois é fechado de acordo com o item (b) e denso por hipótese.

■

2.4 Dimensão

Definição 2.14. *Seja X um espaço topológico não vazio.*

- a) *A dimensão de X , $\dim X \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ é o supremo sobre todos $n \in \mathbb{N}$ tal que existe uma cadeia*

$$\emptyset \neq Y_0 \subsetneq Y_1 \subsetneq \cdots \subsetneq Y_n \subset X$$

de comprimento n de subconjuntos fechados irredutíveis $Y_1, \dots, Y_n$ de X .

- b) *Se $Y \subset X$ é um subconjunto não vazio, fechado e irredutível a **codimensão** $\text{codim}_X Y$ de Y em X é o supremo sobre n tal que existe uma cadeia*

$$Y \subset Y_0 \subsetneq Y_1 \subsetneq \cdots \subsetneq Y_n \subset X$$

formada por fechados irredutíveis $Y_1, \dots, Y_n$ de X que contêm Y .

Exemplo 6.

- a) Se X é uma variedade afim finita, então $\dim X = 0$. De fato, desde que pontos são fechados em X todos os subconjuntos de X serão fechados, assim todos os subconjuntos fechados irredutíveis de X serão formados por um único ponto. Assim, existe somente cadeias de comprimento 0 de subconjuntos fechados irredutíveis de X .
- b) Se $X = \{a, b\}$ é um espaço topológico de modo que $\emptyset, \{a\}$ e X são subconjuntos fechados, X tem dimensão 1, pois $\{a\} \subsetneq X$ é uma cadeia de comprimento 1 de subconjuntos irredutíveis de X .
- c) O espaço afim $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^1$ tem dimensão 1. De fato, como todo ideal em $\mathbb{K}[x]$ é principal, temos que se X é uma variedade afim, então $X = V(I)$, com $I = \langle f \rangle \subset \mathbb{K}[x]$. Logo toda cadeia maximal de variedades afins irredutíveis de $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^1$ é $\{a\} \subsetneq \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^1$ para qualquer $a \in \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^1$.
- d) O espaço afim $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$ tem pelo menos dimensão n , pois a cadeia

$$V(x_1, \dots, x_n) \subsetneq V(x_2, \dots, x_n) \subsetneq \cdots \subsetneq V(x_n) \subsetneq V(0) = \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$$

de variedades irredutíveis tem comprimento n .

Essa definição de dimensão pode ser dada em termos da álgebra comutativa: como subvariedades afins irredutíveis de uma variedade afim X correspondem exatamente a ideais primos em $A[X]$, de acordo com a observação 4. Assim, a dimensão de X é o maior inteiro

positivo n tal que existe uma cadeia $I_0 \supsetneq I_1 \supsetneq \dots \supsetneq I_n$ de ideais primos de $A[X]$.

Sabemos também que se X é uma variedade afim irredutível e considere $\mathbb{K} \subset A(X)$ a extensão de corpos finitamente gerada sobre $\mathbb{K}$. A dimensão de X é igual ao grau de transcendência de $A(X)$ sobre $\mathbb{K}$. Simbolicamente $\dim X = \text{grtr}_{\mathbb{K}} A(X)$. Desse modo, a dimensão de uma variedade afim é sempre finita. Em particular, $\dim \mathbb{A}^n = \text{grtr}_{\mathbb{K}} A(\mathbb{A}^n) = n$.

Definição 2.15. A *dimensão de uma variedade algébrica afim* $X = X_1 \cup \dots \cup X_r$ é $\dim X = \max\{\dim X_1, \dots, \dim X_r\}$ onde $X_1, \dots, X_r$ são as componentes irredutíveis de X .

As pré-variedades foram definidas como colagem de variedades afins. Quando consideramos um aberto afim U de uma variedade X , o corpo de frações $A(X) = A(U)$. Desse modo, pode-se definir a dimensão de uma variedade para qualquer aberto afim $U \subset X$.

Proposição 18. *Sejam X e Y variedades algébricas afins irredutíveis.*

- a) $\dim(X \times Y) = \dim X + \dim Y$.
- b) Se $Y \subset X$, então $\dim X = \dim Y + \text{codim}_X Y$, Em particular, $\text{codim}_X \{a\} = \dim X$ para todo ponto $x \in X$.

Demonstração: [ref. Gathmann, Andreas. Algebraic Geometry]. ■

Observação 5. A condição de um espaço topológico X ser Noetheriano não garante que sua dimensão seja finita. Por exemplo, considere $X = \mathbb{N}$ com a topologia (exceto $\emptyset$ e X) onde os subconjuntos $Y_n = \{0, \dots, n\}$, para $n \in \mathbb{N}$, são fechados. X é Noetheriano, mas tem cadeias $Y_0 \subsetneq Y_1 \subsetneq \dots \subsetneq Y_n$ de subconjuntos fechados e irredutíveis de comprimento arbitrário.

Proposição 19. *Seja X uma variedade irredutível, Y um subconjunto fechado próprio de X . Então $\dim Y < \dim X$.*

Demonstração: Sem perda de generalidade, considere X uma variedade afim de dimensão d e Y uma subvariedade afim irredutível e própria de X . Seja P o ideal de definição de Y . Uma base de transcendência para $A(X)$ pode ser obtida em $A[X]$ e uma base de transcendência para $A(Y)$ pode ser obtida em $A[Y]$. Suponhamos que $\dim Y \geq d$ e considere $x_1, \dots, x_d \in A[X]$ algebricamente independentes tais que suas imagens $\overline{x_1}, \dots, \overline{x_d}$ sejam também algebricamente independentes em $A[X]/P$. Considere agora um polinômio não nulo $f \in P$. Como $\dim X = d$, existe uma relação polinomial $g(f, x_1, \dots, x_d) = 0$, onde $g(T_0, T_1, \dots, T_d) \in \mathbb{K}[T_0, \dots, T_n]$ onde $\mathbb{K}[T_0, \dots, T_n]$ é, neste caso, o anel de polinômios nas indeterminadas $T_0, \dots, T_n$. Como $f \neq 0$, podemos assumir que T_0 não divide todos os monômios em $g(T_0, T_1, \dots, T_d)$, isto é, $h(T_1, \dots, T_d) = g(0, T_1, \dots, T_d)$ é não nulo. Isso implica que $h(\overline{x_1}, \dots, \overline{x_d}) = 0$ o que é um absurdo, pois contradiz o fato de $\overline{x_1}, \dots, \overline{x_d}$ serem algebricamente independentes. ■

Corolário 2. *Seja X uma variedade afim irredutível, Y um subconjunto fechado irredutível de codimensão 1. Então Y é uma componente de $V(f)$ para algum $f \in A[X]$.*

Demonstração: Como a codimensão de Y é 1, então $Y \subsetneq X$. Daí, existe um polinômio $f \in A[X] \setminus \{0\}$ que anula Y , dessa forma $Y \subset V(f) \subsetneq X$. Seja Z uma componente irredutível de $V(f)$ que contém Y . Pela proposição anterior, $\dim Y \geq \dim Z < \dim X$. Como a codimensão de Y é 1, $\dim Y = \dim Z$ e, pela proposição anterior, $Y = Z$. ■

Proposição 20. *Todas as componentes irredutíveis de uma hipersuperfície em $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$ tem codimensão 1.*

Demonstração:

Sem perda de generalidade, assuma $X = V(p)$, onde $p(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ é um polinômio irredutível e que a variável x_n figure em $p(x_1, \dots, x_n)$. Considere t_i a restrição de x_i , para cada $i = 1, \dots, n$, de modo que $A(X) = K(t_1, \dots, t_n)$. Afirmamos que $t_1, \dots, t_{n-1}$ são algebricamente independentes sobre $\mathbb{K}$. Do contrário, existe uma relação polinomial $g(t_1, \dots, t_{n-1}) = 0$, neste caso g anula X e como $\mathcal{I}(X) = (\langle p \rangle)$, $g \in \langle p \rangle$. O que é um absurdo, pois x_n figura em p , mas não figura em g . ■

A proposição acima pode ser generalizada para variedades afins arbitrárias pelo seguinte teorema.

Teorema 3. *Sejam X uma variedade afim irredutível, $f \in A[X]$ não nulo e não constante e Y uma componente irredutível de $V(f)$. Então Y tem codimensão 1 em X .*

Demonstração: Humphreys, James. Página 27. ■

Capítulo 3

Lienarização Grupos Algébricos Afins

3.1 Grupos Algébricos Afins

Serão apresentadas definição e propriedades sobre grupos algébricos afins. A estrutura seguida será o [Humphreys].

Definição 3.1. *Um grupo algébrico afim é um conjunto G munido de uma estrutura de grupo e de variedade algébrica afim, onde as operações $m : G \times G \rightarrow G$, $i : G \rightarrow G$ que associam $(x, y) \mapsto m(x, y) = xy$ e $x \mapsto i(x) = x^{-1}$, respectivamente, são morfismos de variedades afins.*

Observe que o fato da inversa ser um morfismo implica que ela é um homeomorfismo bijetor, pois $i(g^{-1}) = g$, $\forall g \in G$.

Translações por um elemento $y \in G$, $x \mapsto xy$ são automorfismos de variedades afins. Segue diretamente do fato da multiplicação ser um morfismo de variedades e a translação $x \mapsto xy^{-1}$ é a inversa.

Exemplo 7.

- Considere o espaço afim $\mathbb{A}^n$ como grupo aditivo com adição coordenada a coordenada no corpo $\mathbb{K}$. Dessa forma, $\mathbb{A}^n$ é um grupo algébrico. De fato, a operação $m(x, y) = x + y$, $\forall x \in \mathbb{A}^n$ é uma função polinomial, e a inversa $i(x) = -x$, $\forall x \in \mathbb{A}^n$ também é. A identidade desse grupo algébrico é $e = (0, \dots, 0) \in \mathbb{A}^n$. Quando $n = 1$, o grupo algébrico $\mathbb{A}^1$ é chamado de grupo aditivo e denotado por G_a .
- $\mathbb{A}^1 \setminus \{0\}$ é um grupo algébrico. Para ver isso, considere $\mathbb{A}^1 \setminus \{0\}$ como grupo cuja operação interna é de multiplicação sobre $\mathbb{K}$. Visto da proposição 9, $\mathbb{A}^1 \setminus \{0\}$ é isomorfo a variedade afim $X = V(\langle xy - 1 \rangle) \subset \mathbb{A}^2$ a multiplicação e a inversa são funções polinomiais sobre $\mathbb{K}$. Esse grupo algébrico é chamado de grupo multiplicativo e denotado por G_m .

- c) O grupo linear geral $Gl_n(\mathbb{K})$ é um grupo algébrico. Pela proposição 9, $Gl_n(\mathbb{K})$ tem uma estrutura de variedade afim, pois é isomorfo a $X = V(x_0 \det - 1) \subset \mathbb{A}^{n^2+1}$, onde x_0 é uma indeterminada em $\mathbb{K}[x_0, x_{11}, \dots, x_{nn}]$ e $\det$ é uma função polinomial sobre $\mathbb{A}^{n^2}$. As operações de multiplicação e inversa são funções polinomiais com entradas em $\mathbb{K}$, logo são morfismos.
- d) Um subgrupo fechado de um grupo algébrico é um grupo algébrico. Sejam G um grupo algébrico e H um subgrupo de G . Naturalmente, H já tem uma estrutura de grupo e o fato de ser um fechado, garante que é uma variedade afim. Sendo assim, a operação interna que define o grupo H é herdada de G que por sua vez é um morfismo de variedades, assim como a inversa também é uma restrição da inversa de G que é um morfismo.
- e) O produto direto $G \times G'$ de grupos algébricos é um grupo algébrico. A multiplicação no produto direto é a estrutura de produto de grupos e a estrutura de variedade algébrica afim segue da proposição 14. Note que o espaço afim n dimensional pode ser visto como produto direto de n cópias de G_a .
- f) Considere os conjuntos $Sl_n(\mathbb{K})$ das matrizes cujo determinante é igual a um. $D_n(\mathbb{K})$ das matrizes diagonais, $T_n(\mathbb{K})$ das matrizes triangulares superiores, $U_n(\mathbb{K})$ das matrizes triangulares inferiores cujos determinantes são diferentes de zero. Esses conjuntos são subconjuntos fechados de $Gl_n(\mathbb{K})$.

Proposição 21. *Seja G um grupo algébrico. Afirmamos que há uma única componente irredutível de G que possui o elemento identidade e .*

Demonstração: Seja $X_1, \dots, X_k \subseteq G$. todas as componentes irredutíveis de G contendo a identidade. Como cada X_i , $i = 1, \dots, k$ é irredutível, então $X_1 \times \dots \times X_k$ também é irredutível. Como a multiplicação é associativa e também é um morfismo de grupos algébricos, então $X_1 \dots X_k \subseteq G$. Sendo assim, $X_1 \dots X_k$ é igual a um X_i , para algum $i = 1, \dots, k$. Por outro lado, $X_1 \dots X_k$ contém X_j para todo $j = 1, \dots, k$, logo $X_j \subseteq X_i = X_1 \dots X_k$. Assim, a única componente irredutível contendo a identidade é X_i . ■

Denote por G_0 essa única componente irredutível que contém o elemento identidade, chamada por **componente identidade**.

Proposição 22. *Seja G um grupo algébrico.*

- (i) G_0 é um subgrupo normal de G e tem índice finito em G ;
- (ii) O conjunto das classes laterais de G_0 é idêntico ao conjunto de componentes irredutíveis e o conjunto de componentes conexas de G .

(iii) *Todo subgrupo fechado de índice finito em G contém G_0 .*

Demonstração:

- (i) Para cada $g \in G_0$, o conjunto $g^{-1}.G_0$ é uma componente irredutível de G que contém e , pois $e = g^{-1}g$ e as translações são morfismos de variedades, sendo assim $g^{-1}.G_0 = G_0$ e consequentemente $g^{-1} \in G_0$. Pelo mesmo argumento é fácil ver que para quaisquer $g, h \in G_0$ tem-se $gh \in G_0$ e $gG_0g^{-1} = G_0$. Nessas condições G_0 é um subgrupo normal de G . Agora note que as classes laterais (direita ou esquerda) de G_0 são as translações de G_0 , logo cada classe lateral de G_0 é uma componente irredutível de G . Como G é uma variedade afim, então há uma quantidade finita de componente irredutível. Portanto há uma quantidade finita de classes laterais de G_0 .
- (ii) As classes laterais de G_0 são as componentes irredutíveis de G e a união dessas classes laterais cobrem G . Como as classes laterais também são disjuntas, elas também são as componentes conexas de G .
- (iii) Se H for um subgrupo de G com índice finito, então cada uma das suas finitas classes laterais à esquerda também são fechadas. Logo a união finita $\bigcup_{g \notin H} gH$ também é fechada. H deve ser aberto, pois é o complemento dessa união de classes que é fechada. Consequentemente as classes laterais de H particionam G em uma união finita de abertos. Mais especificamente, particiona G_0 em uma união finita de conjuntos abertos. Como G_0 é conexo e H contém a identidade, segue que $G_0 \subset H$.

■

A partir de agora vamos nos referir a um grupo algébrico como **conexo** quando $G = G_0$. diz-se também que G_0 é a **componente conexa da identidade**.

Exemplo 8.

- a) Todo espaço afim é conexo, pois são irredutíveis. $G_a(\mathbb{K})$ também é conexo.
- b) Note que um grupo algébrico cuja variedade algébrica é isomorfo a um aberto principal também é conexo, pois como o aberto é denso, seu fecho (espaço afim) é irredutível e , consequentemente, o aberto principal também é irredutível.

Há outros exemplos de grupos algébricos que são conexos, mas para verificar isso será necessário outra ferramenta.

Lema 3. *Sejam U, V dois subconjuntos abertos e densos de um grupo algébrico G . Então $G = U.V$.*

Demonstração: Como a inversão é um isomorfismo de grupos algébricos, V^{-1} também é um subconjunto aberto. Assim como a translação também é um isomorfismo, ou seja, gV^{-1} é um aberto e denso em G , para qualquer $g \in G$. Sendo assim, U deve ser isomorfo a algum gV^{-1} , para $g \in G$. Daí, para todo $g \in G$, existem $u \in U$ e $v \in V$ tais que $gv^{-1} = u$. ■

Definição 3.2. Se X é um espaço topológico. Um subconjunto Z de X é dito **localmente fechado** se Z é a interseção de um subconjunto aberto e outro subconjunto fechado de X . Diz-se também que Z é **construtível** se Z for uma união finita de conjuntos localmente fechados dito.

Proposição 23. Se $\varphi : X \rightarrow Y$ é um morfismo de variedades. Então φ leva conjuntos construtíveis em conjuntos construtíveis. Em particular, $\varphi(X)$ é construtível.

Demonstração: [Humphreys], J.. ■

Proposição 24. Seja H um subgrupo de um grupo algébrico G .

- a) Então $\overline{H}$ é um subgrupo algébrico de G .
- b) Se H é construtível, então $H = \overline{H}$.

Demonstração:

- a) Basta mostrar que $\overline{H}$ é um subgrupo, pois já é fechado. Como a inversão é um homeomorfismo, $\overline{H}$ é fechado para aplicação inversa, ou seja, $\overline{H}^{-1} = \overline{H^{-1}} = \overline{H}$. Analogamente, translação por um elemento $x \in H$ é um homeomorfismo. Assim $x\overline{H} = \overline{xH} = \overline{H}$, ou seja, $H\overline{H} \subset \overline{H}$. Por sua vez, se $x \in \overline{H}$, $Hx \subset \overline{H}$, então $\overline{H}x = \overline{Hx} \subset \overline{H}$. Logo $\overline{H}$ é um subgrupo algébrico de G .
- b) Se H é construtível, então "existe um aberto denso $U \subset H$ que também é aberto denso em $\overline{H}$ " (HUMPHREYS, 1998, p. 32). Pelo item anterior, $\overline{U}$ é um subgrupo algébrico de G e pelo lema anterior $\overline{H} = UU$. Como $UU \subset HH = H$, então $\overline{H} \subset H$. Logo $H = \overline{H}$. ■

Corolário 3. Sejam A, B subgrupos fechados de um grupo algébrico G . Se B está contido no normalizador de A , então AB é um subgrupo fechado de G .

Demonstração: Desde que $B \subset N_G(A) = \{g \in G; gAg^{-1} = A\}$, AB é um subgrupo. Como a imagem de $A \times B$ sob o morfismo produto $G \times G \rightarrow G$ é construtível e pelo item (b) da proposição 24, AB é fechado. ■

Definição 3.3. Um *morfismo entre grupos algébricos* X e Y é uma função de X para Y que é um morfismo de variedades algébricas afins e homomorfismo de grupos. Dois grupos algébricos X e Y são ditos *isomorfos* se existir um isomorfismo de variedades $\varphi : X \rightarrow Y$ que também é um isomorfismo de grupos. Um *automorfismo* de X é um isomorfismo de X em X .

Proposição 25. Seja $\varphi : G \rightarrow G'$ um morfismo de grupos algébricos. Então:

- a) $\text{Ker}(\varphi)$ é um subgrupo fechado de G .
- b) $\text{Im}(\varphi)$ é um subgrupo fechado de G' .
- c) $\varphi(G_0) = \varphi(G)_0$.
- d) $\dim(G) = \dim \text{Ker}(\varphi) + \dim(\text{Im} \varphi)$

Demonstração:

- a) segue diretamente do fato de $\text{Ker}(\varphi) = \varphi^{-1}(e_{G'})$ e φ ser contínua.
- b) $\varphi(G)$ é um subgrupo de G' , também é um subconjunto construtível de G' , segundo a proposição 23. Assim $\varphi(G)$ é fechado de acordo com o item b) da proposição anterior.
- c) De acordo com a proposição 22, G_0 é um subgrupo normal, fechado e conexo de G . Consequentemente $\varphi(G_0)$ é conexo, pois φ é contínua. Pelo item b) $\varphi(G_0)$ é fechado. Como G_0 tem índice finito em G e $\varphi(g)\varphi(G_0) = \varphi(gG_0)$ temos que $\varphi(G_0)$ tem índice finito na imagem de φ . Como todo subgrupo fechado de índice finito de um grupo algébrico contém a componente identidade, segue que $\varphi(G_0) = \varphi(G)_0$.
- d) Pelo teorema 4.3 visto em [Humphreys], $\dim(G) - \dim(\varphi(G)) = \dim(\varphi^{-1}(g))$ para algum $g \in \varphi(G)$. Mas todas as fibras $\varphi^{-1}(g)$ tem a dimensão de $\text{Ker}(\varphi)$, tem-se $\dim(G) = \dim \text{Ker}(\varphi) + \dim(\text{Im} \varphi)$.

■

Dado um subconjunto arbitrário M de um grupo algébrico G . Denote por $\mathcal{A}(M)$ a interseção de todos os subgrupos fechados de G que contém M . Esse é o menor subgrupo fechado de G que contém M . Chame-o de **grupo fecho** de M .

Proposição 26. Sejam G um grupo algébrico afim, I um conjunto de índices. Para cada $i \in I$, considere $\{X_i\}_{i \in I}$ e $f_i : X_i \rightarrow G$ famílias de variedades afins irredutíveis e morfismos, respectivamente, tais que o elemento identidade de G está em $Y_i = f_i(X_i)$ para todo $i \in I$. Seja $M = \bigcup_{i \in I} Y_i$. Então:

- a) $\mathcal{A}(M)$ é um subgrupo conexo de G .

- b) Para alguma sequência finita $a = (a_1, \dots, a_n)$ em I , $\mathcal{A}(M) = Y_{a_1}^{e_1} \dots Y_{a_n}^{e_n}$ onde $e_i = \pm 1$.

Demonstração:

- a) Suponha que os morfismos $x \mapsto f_i(x)^{-1}$ de X_i para G também estejam na família de morfismos. Para cada sequência finita $a = (a_1, \dots, a_n)$ em I , considere $Y_a = Y_{a_1}^{e_1} \dots Y_{a_n}^{e_n}$ com $e_1, \dots, e_n = \pm 1$. Como a imagem de variedades afins irredutíveis no produto cartesiano também é irredutível, temos que Y_a é uma variedade afim irredutível pelo morfismo $m \circ (f_{a_1} \times \dots \times f_{a_n})$, sendo m a multiplicação do grupo G , então Y_a é construtível e $\overline{Y}_a$ é uma variedade irredutível contendo e . Usando a condição de maximalidade da componente irredutível G_0 , podemos determinar uma sequência a de modo que $\overline{Y}_a$ seja maximal. Afirmação: Dados $b, c \in I$ sequências finitas, temos que $\overline{Y}_b \overline{Y}_c \subseteq \overline{Y}_{(b,c)}$ onde (b, c) é a sequência por justaposição. De fato, para todo $x \in Y_c$, o mapa contínuo $y \mapsto yx$ mapeia Y_b em $Y_{(b,c)}$ e, conseqüentemente, mapeia $\overline{Y}_b$ em $\overline{Y}_{(b,c)}$, ou seja, $\overline{Y}_b Y_c \subseteq \overline{Y}_{(b,c)}$. Analogamente, pode ser feita a mesma análise para $x \in \overline{Y}_b$ levando Y_c em $\overline{Y}_{(b,c)}$ e também $\overline{Y}_c$ também.

Pelo fato de $\overline{Y}_a$ ser maximal e o elemento neutro e de G está em cada $\overline{Y}_b$, a afirmação acima implica que

$$\overline{Y}_a \subset \overline{Y}_a \overline{Y}_b \subset \overline{Y}_{(b,c)} = \overline{Y}_a$$

para qualquer b . Agora, se $b = a$, então temos $\overline{Y}_a$ fechado para a multiplicação. Escolhendo b tal que $Y_b = Y_a^{-1}$, também temos $\overline{Y}_a$ fechado para inversa. Portanto $\overline{Y}_a$ é um subgrupo fechado de G contendo todos os $Y_i, i \in I$.

- b) Visto que Y_i é construtível, pelo Lema 3 temos que $\overline{Y}_a = Y_a \dot{Y}_a = Y_{(a,a)}$, assim a sequência (a, a) satisfaz (b).

■

3.2 Ação de Grupos

Sejam $(G, *)$ um grupo e X um conjunto. Dizemos que G age em X se existe uma função $\varphi : G \times X \longrightarrow X$ denotada por $\varphi(g, y) = g \cdot y$ tal que

$$(A1) \quad g_1 \cdot (g_2 \cdot y) = (g_1 * g_2) \cdot y, \forall g_1, g_2 \in G \text{ e } y \in X;$$

$$(A2) \quad e \cdot x = x, \forall x \in X.$$

Essas duas condições podem ser interpretadas como requisito de que φ induz um homomorfismo

$$\begin{aligned}\Phi : G &\longrightarrow S_X \\ g &\longmapsto f_g : X \rightarrow X \\ &\quad x \mapsto g \cdot x\end{aligned}$$

onde S_X é o grupo simétrico de X . A terna (G, X, φ) é chamado de **espaço de transformação algébrica**. Dados $x, y \in X$, podemos definir a seguinte relação em X

$$x \sim_\varphi y \Leftrightarrow \exists g \in G; y = g \cdot x.$$

Essa é uma relação de equivalência em X . A classe de equivalência de um elemento $x \in X$ é $G \cdot x = \{g \cdot x; g \in G\}$ chamada de **órbita** de x . Dizemos que G **age transitivamente** em X se $G \cdot y = X$ para algum $y \in X$ arbitrário. Note que G age transitivamente em cada órbita. Denote por X^G o conjunto de todos os **pontos fixos** de G , isto é, pontos de X cuja órbita possui um único elemento.

O conjunto $E_x = \{g \in G; g \cdot x = x\}$ é chamado de **estabilizador** de x em G , é fácil ver E_x é um subgrupo de G . Dado $y \in X$, o mapa órbita $G \rightarrow G \cdot y$ definido por $x \mapsto x \cdot y$ induz uma bijeção $G/E_y \rightarrow G \cdot y$. No caso de $z \in G \cdot y$ é fácil verificar que os estabilizadores E_z e E_y são conjugados, ou seja, $x E_y x^{-1} = E_z$, para algum $x \in G$. Se H é um subgrupo de G , existe uma ação transitiva de G em G/H definida por $yH \mapsto xyH$, onde H é o estabilizador de qualquer classe lateral yH .

Considere agora a ação de G em $X = G$ chamada classe de conjugação $\cdot : G \times G \rightarrow G$ definida por $(g, x) \mapsto g \cdot x = gxg^{-1}$. Para $x \in G$, a órbita de x é chamada **classe de conjugação** de x e denotada por $Cl(x)$; o estabilizador de x é chamado de **centralizador** de x e denotado por $C_x(G) = \{g \in G; gx = xg\}$. Por sua vez, a classe de conjugação define um homomorfismo φ de G em $AutG$ onde $Z(G)$, o centro de G , é o $\ker(\varphi)$ e $\varphi(G)$ é um subgrupo normal de $AutG$. Vale notar também que $x \in Z(G)$ se, e somente se $Cl(x) = \{x\}$ e $C_x(G) = G$.

Seja $\{x_i\}_{i \in I}$ um sistema de representantes para a relação

$$a \sim b \Leftrightarrow \exists g \in G; b = g \cdot a = gag^{-1}.$$

Temos que

$$G = \bigcup_{i \in I} Cl(x_i) = (\bigcup_{x_i \in Z(G)} Cl(x_i)) \bigcup (\bigcup_{x_i \notin Z(G)} Cl(x_i)) = Z(G) \bigcup_{x_i \notin Z(G)} Cl(x_i).$$

G também age em si mesmo como um grupo de **translação à esquerda** (resp. **direita**), via $y \mapsto xy$ (resp. $y \mapsto yx^{-1}$). Essas ações são transitivas e os grupos de estabilizadores são triviais.

3.3 Ação de Grupos Algébricos

Definição 3.4. Se G é um grupo algébrico e X uma variedade. Se um morfismo $\varphi : G \times X \rightarrow X$ de modo que os axiomas (A1) e (A2) de 3.2 são satisfeitos, dizemos que G **age morficamente em X** (ou simplesmente age em X quando não há confusão).

O conjunto $Tran_G(Y, Z) = \{x \in G | x \cdot Y \subset Z\}$ é chamado de **transporte** de Y em Z , onde Y e Z são subconjuntos de X . Finalmente, defina $C_G(Y) = \bigcap_{y \in Y} E_y$ chamado de **centralizador** de Y em G .

Proposição 27. Sejam G um grupo algébrico que age morficamente na variedade X . Considere Y e Z subconjuntos de X com Z fechado. Então:

- a) $Tran_G(Y, Z)$ é subconjunto fechado de G .
- b) Para cada $y \in X$, E_y é um subgrupo fechado de G . Em particular, $C_G(Y)$ é fechado.
- c) O conjunto de pontos fixos $x \in G$ é fechado em X . Em particular, X^G é fechado.
- d) Se G é conexo, G estabiliza cada componente irredutível de X , consequentemente G age trivialmente em X no caso de X ser finito.

Demonstração:

- a) Para cada $y \in X$, o mapa órbita $\varphi_y : G \rightarrow X$, $x \mapsto x \cdot y$ é uma composição de $x \mapsto (x, y)$ com o morfismo que define a ação de G em X , logo φ_y é um morfismo. Como y varia em Y , os conjuntos $\varphi_y^{-1}(Z)$ são fechados em G , pois Z é fechado em X , sendo assim $Tran_G(Y, Z) = \bigcap_{y \in Y} \varphi_y^{-1}(Z)$ é fechado.
- b) Como $E_y = Tran_G(\{y\}, \{y\})$, E_y é um subgrupo fechado de G . Consequentemente $C_G(Y)$ também é fechado.
- c) Considere o morfismo $\psi : X \rightarrow X \times X$ definido por $y \mapsto (y, x \cdot y)$. O conjunto de pontos fixos X^x é precisamente a imagem inversa da diagonal $\psi^{-1}(\Delta(X))$ que é fechada em $X \times X$, pois X é uma variedade.
- d) Se G é conexo, seja H o estabilizador em G de uma componente irredutível de X , H é um subgrupo de G e é fechado em G de acordo com o item (a). Como G é conexo e φ um morfismo, G permuta as componentes irredutíveis de X , então H tem índice finito em G . Desse modo, H é um subgrupo fechado de índice finito de G , portanto contém G_0 e mais uma vez como G é conexo, segue que $H = G$.

■

Corolário 4. *Se G é um grupo algébrico e H um subgrupo fechado de G , então $N_G(H)$ e $C_G(H)$ são subgrupos fechados, assim como $C_G(x)$ para $x \in G$. O subgrupo $N_G(H) = \{x \in G, xHx^{-1} = H\}$ chamado de **normalizador** de H em G .*

Demonstração: Para $C_G(H)$ e $C_G(x)$ o resultado vem diretamente do item (b) da proposição anterior quando considerada a ação por conjugação de G em G . Para $N_G(H)$ a afirmação resulta da parte (a) da proposição anterior e de que $N_G(H) = \text{Tran}_G(H, H)$.

■

Definição 3.5. *Seja G um grupo algébrico e V um espaço vetorial. Uma representação racional de G é um morfismo de grupos algébricos $\rho : G \rightarrow GL(V)$. Quando V tem dimensão finita, dizemos que V é um G -módulo.*

Qualquer representação racional $\rho : G \rightarrow GL(V)$ define uma ação $G \times V \rightarrow V$, $g.v = \rho(g)v$.

Observação 6. *Uma representação racional de $GL_n(\mathbb{K})$ é um morfismo $\rho : GL_n(\mathbb{K}) \rightarrow GL(V)$ tal que as entradas das matrizes de $\rho(A)$ são polinômios em a_{ij} , $\frac{1}{\det(A)}$, onde V é um espaço vetorial de dimensão finita.*

Devemos frequentemente usar o fato de que normalizadores, centralizadores e conjunto de pontos fixos são fechados. Órbitas, no entanto, muitas vezes não são fechadas (classe de conjugação em G , por exemplo). pode ser bom enfatizar também que a conexão de normalizadores e centralizadores não deve ser tomada como certa.

Associado a φ temos a dual representação $G \rightarrow GL(V^*)$ onde V^* é o espaço dual. Isso é definido pela seguinte regra: $(x.f)(v) = f(x^{-1}.v)$, onde $f \in V^*, v \in V, x \in G$. Precisamos escrever x^{-1} para garantir que $y.(x.f) = (yx).f$. Se duas bases para V e V^* são escolhidas, torna-se claro imediatamente que a representação dual realmente é uma representação racional de G .

Agora, considere um par de representações $\varphi : G \rightarrow GL(V)$ e $\psi : G \rightarrow GL(W)$. O espaço $V \otimes W$ tem como base todos $v_i \otimes w_j$ com v_i elemento de uma base de V e w_j elemento de uma base de W . Podemos fazer $x \in G$ agir em $V \otimes W$ pela seguinte regra $x.(v_i \otimes w_j) = (x.v_i) \otimes (x.w_j)$ e se estendendo linearmente para um vetor qualquer do produto tensorial. Isso define uma representação racional de G em $GL(V \otimes W)$.

Note que o espaço vetorial $V^* \otimes V$ se identifica naturalmente com o espaço vetorial dos endomorfismos de V , denotado por $\text{End}V$, onde $f \otimes v$ corresponde ao endomorfismo $w \mapsto f(w)v$ de V . Portanto, uma representação racional $G \rightarrow GL(V)$ induz a ação de G em $\text{End}V$. Essa ação mapeia $t \in \text{End}V$ em xtx^{-1} ($x \in G$).

Quando G age em duas variedades X, Y , um morfismo $\varphi : X \rightarrow Y$ é chamado de G -**equivariante** quando $\varphi(z.x) = z.\varphi(x)$ para todo $z \in G, x \in X$. Por exemplo, um subgrupo G de $GL(V)$ age em si mesmo com a multiplicação pela esquerda assim como em V . Se $v \in V$, o mapa órbita resultante $G \rightarrow V$ (mapeia z em $z.v$) é um morfismo G -equivariante.

3.4 Translação de Função

Quando um grupo algébrico G age em uma variedade afim X (por exemplo em si mesma), também obtemos interessantes ações lineares de G na álgebra afim $A[X]$ e alguns de seus subespaços de dimensão finita.

Definição 3.6. *Sejam G um grupo algébrico e X uma variedade afim. Denote por τ_x o comorfismo associado ao morfismo $y \mapsto x^{-1}.y$, com $x \in G$ e $y \in X$. Assim, se $f \in A[X]$, $y \in X$, $(\tau_x f)(y) = f(x^{-1}.y)$. O inverso aparece para garantir que $\tau : G \rightarrow GL(A[X])$, onde $\tau(x) = \tau_x$ é um homomorfismo de grupo. Chamamos de **translação de funções** por x .*

Note que τ_x é na verdade um automorfismo de $\mathbb{K}$ -álgebra de $A[X]$.

Exemplo 9. *Tomando $X = G$, G age em si mesmo pela translação à esquerda (resp. direita) via $y \mapsto xy$ ($y \mapsto yx^{-1}$). O morfismo associado é $y \mapsto x^{-1}y$ (resp. $y \mapsto xy$).*

O morfismo associado introduzido acima são $y \mapsto x^{-1}y$ (resp. $y \mapsto yx$) e seu comorfismo λ_x (resp. ρ_x) é chamado de **translação de função à esquerda** (resp. **direita**) definidos por $\lambda_x f(y) = f(x^{-1}y)$ e $(\rho_x f)(y) = f(yx)$.

Note que $\lambda : G \rightarrow GL(A[G])$ e $\rho : G \rightarrow GL(A[G])$, onde $\lambda(x) = \lambda_x$ e $\rho(x) = \rho_x$ são ambos homomorfismos de grupos. Além disso, λ_x e ρ_y comutam, para quaisquer $x, y \in G$.

Lema 4. *Sejam H um subgrupo fechado de um grupo algébrico G , I um ideal em $A[G]$ que se anula em H . Então $H = \{x \in G | p_x(I) \subset I\}$.*

Demonstração: Sejam $x \in H$ e $f \in I$, então $(\rho_x f) = f(yx) = 0$ para todo $y \in H$, logo $\rho_x f \in I$. Por outro lado, dado se $f \in I$, então $\rho_x f$ se anula em $e \in H$, ou seja, $f(x) = 0$. Daí $x \in H$. ■

3.5 Linearização de Grupos Algébricos Afins

Foi observado que qualquer subgrupo fechado de $GL_n(\mathbb{K})$ é um grupo algébrico afim. O contrário também é verdade como veremos pela construção de um subespaço de dimensão finita de $A[G]$ onde G age por translação.

Proposição 28. *Seja G um grupo algébrico que age morficamente em uma variedade afim X e seja também F um subespaço de dimensão finita de $A[X]$*

- a) *Existe um subespaço de dimensão finita em $A[X]$ que contém F e que é estável sob todas as translações τ_x ($x \in G$)*
- b) *F é estável sob todas as translações τ_x ($x \in G$) se, e somente se, $\varphi^*F \subset A[G] \otimes_{\mathbb{K}} F$, onde $\varphi : G \times X \rightarrow X$ é dado por $\varphi(x, y) = x^{-1}y$.*

Demonstração:

- a) Podemos assumir F é o gerado por um único $f \in A[X]$ (e adicionar até o espaço E depois). Escrevendo (não unicamente) $\varphi^*f = \sum f_i \otimes g_i \in A[G] \otimes A[X]$. Para cada $x \in G, y \in X$, $(\tau_x f)(y) = f(x^{-1}y) = \sum f_i(x)g_i(y)$, consequentemente $\tau_x f = \sum f_i(x)g_i$. As funções g_i geram um subespaço de dimensão finita de $A[X]$ que contém todas as translações de f . Assim o espaço E é gerado por todos os $\tau_x f$.
- b) Se $\varphi^*F \subset A[X] \otimes F$, então a parte (a) mostra que as funções g_i podem ser tomadas em F , ou seja, F é estável sob todos τ_x , ($x \in G$). Por outro lado, seja F estável sob translações e estenda uma base $\{f_i\}$ de F a uma base $\{f_i\} \cup \{g_i\}$ de $A[X]$. Se $\varphi^*f = \sum r_i \otimes f_i + \sum s_j \otimes g_j$, então $\tau_x f = \sum r_i(x)f_i + \sum s_j(x)g_j$. Uma vez que essa última igualdade pertence a F , as funções s_j devem desaparecer de forma idêntica em G (e consequentemente ser 0), ou seja, $\varphi^*F \subset A[G] \otimes F$.

■

Teorema 4. *Seja G um grupo algébrico. Então G é isomorfo a um subgrupo fechado de algum $Gl_n(\mathbb{K})$*

Demonstração: Escolha os geradores $f_1, \dots, f_n$ da álgebra afim $A[G]$. Aplicando a parte (a) da proposição anterior para gerar F dos f_i , podemos encontrar um subespaço de dimensão finita E de $A[G]$ que é estável sob todas as translações ρ_x para $x \in G$. Mudando a notação, podemos assumir que $f_1, \dots, f_n$ é uma base de E (e gera $A[G]$). Se $\varphi : G \times G \rightarrow G$ é dado por $\varphi(x, y) = yx$, usando a parte (b) da proposição anterior para escrever $\varphi^*f_i = \sum_j m_{ij} \otimes f_j$, onde $m_{ij} \in A[G]$. Então $(\rho_x f_i)(y) = f_i(yx) = \sum m_{ij}(x)f_j(y)$, sendo $\rho_x f_i = \sum m_{ij}(x)f_j$. Em outras palavras, a matriz de $\rho_x|E$ relativa a base $f_1, \dots, f_n$ é $(m_{ij}(x)f_j)$. Isso mostra que $\psi : G \rightarrow Gl_n(\mathbb{K})$, $\psi(x) = (m_{ij}(x))$ é um morfismo de grupos algébricos. Observe que $f_i(x) = f_i(ex) = \sum m_{ij}(x)f_j(e)$, ou $f_i = \sum f_j(e)m_{ij}$. Isso mostra que m_{ij} também gera $A[G]$; Em particular, ψ é injetivo. Além disso, o grupo imagem $G' = \psi(G)$ é fechado em $Gl_n(\mathbb{K})$, pois a imagem de um morfismo de grupos algébricos é um subgrupo fechado. Para completar a demonstração, precisamos apenas mostrar que ψ é um isomorfismo de variedades. Mas a restrição a G' das funções coordenadas T_{ij} são levadas por ψ^* ao respectivo m_{ij}

que foi mostrado que geram $A[G]$. Assim, ψ^* é sobrejetiva, consequentemente isso identifica $A[G']$ com $A[G]$. ■

Assim como o teorema de Cayley na teoria dos grupos reduz o estudo de grupos abstratos ao de grupos de permutação, este teorema reduz o estudo de grupos algébricos afins ao de grupos lineares. No entanto, a "arbitrariedade" da representação concreta escolhida nos faz preferir permanecer principalmente no contexto geral. O teorema será útil principalmente como auxílio técnico em certas provas: incorporamos um determinado grupo em um grupo linear geral (como um subgrupo fechado) e, em seguida, exploramos as propriedades especiais de matrizes (por exemplo, comportamento de autovalores).

Referências Bibliográficas

- [Atiyah] Atiyah, M., I. G. Macdonald *Introduction to Commutative Algebra*, Univeristy of Oxford, 1969.
- [Hartshorne] Hartshorne, H., *Algebraic Geometry*, Springer Science Business Media, 1977.
- [Humphreys] Humphreys, James E. *Linear Algebraic Groups*, Springer-Verlag, 1998.
- [Gathmann] Gathmann, Andreas. *Algebraic Geometry*, Class Notes TU Kaiserslautern, 2014.