



Universidade Federal da Paraíba
Centro de Informática
Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática e Computacional

DINÂMICA DO SARAMPO EM POPULAÇÕES PARCIALMENTE
IMUNIZADAS

Carlos Augusto dos Santos

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática e Computacional, UFPB, da Universidade Federal da Paraíba, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Modelagem Matemática e Computacional.

Orientador: Ana Paula Pintado Wyse

João Pessoa
Janeiro de 2021

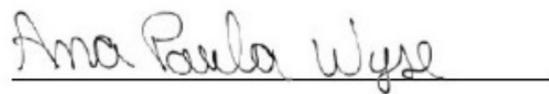
Ata da Sessão Pública de Defesa de Dissertação de Mestrado de CARLOS AUGUSTO DOS SANTOS, candidato ao título de Mestre em Matemática Computacional, na Área de Modelagem Matemática e Computacional, realizada no dia 22 de janeiro de 2021.

1 Aos vinte e dois dias do mês de janeiro do ano de dois mil e vinte um, às dez horas, por meio de
2 videoconferência, reuniram-se os membros da Banca Examinadora constituída para julgar o
3 Trabalho Final do Sr. **CARLOS AUGUSTO DOS SANTOS**, vinculado a Universidade Federal da
4 Paraíba sob a matrícula nº 20171029308, candidato ao grau de Mestre em “*Modelagem*
5 *Matemática e Computacional*”, na linha de pesquisa “*Modelagem e Simulação de Sistemas*”, do
6 Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática e Computacional. A comissão
7 examinadora foi composta pelos professores Ana Paula Pintado Wyse, Orientadora e Presidente da
8 Banca, José Miguel Aroztegui Massera, Examinador Interno ao Programa, Thiago José Machado,
9 Examinador Interno ao Programa, e Juarez dos Santos Azevedo, Examinador Externo à Instituição
10 (UFBA). Dando início aos trabalhos, a Professora Ana Wyse, Presidente da Banca, cumprimentou
11 os presentes, comunicou aos mesmos a finalidade da reunião e passou a palavra ao candidato para
12 que o mesmo fizesse, oralmente, a exposição do trabalho de dissertação intitulado “*Dinâmica do*
13 *Sarampo em Populações Parcialmente Imunizadas*”. Concluída a exposição, o candidato foi
14 arguido pela Banca Examinadora que emitiu o seguinte parecer: “**aprovado**”. Do ocorrido, eu,
15 Gean Paulo Pereira Maurício de Barros, Secretário do Programa de Pós-Graduação em Modelagem
16 Matemática e Computacional (PPGMMC), lavrei a presente ata que vai assinada por mim e pelos
17 membros da Banca Examinadora.

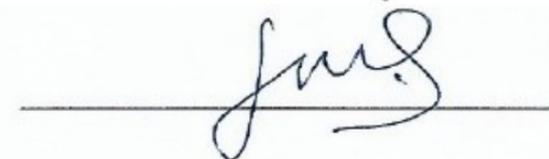
João Pessoa, 22 de janeiro de 2021.

Gean Paulo Pereira Maurício de Barros
Secretário do PPGMMC
SIAPE 2326476

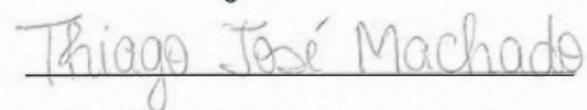
Prof.ª Dr.ª Ana Paula Pintado Wyse
Orientadora (PPGMMC)



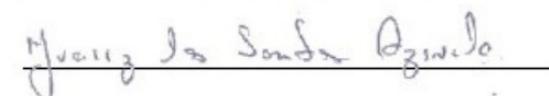
Prof. Dr. José Miguel Aroztegui Massera
Examinador Interno ao Programa (PPGMMC)



Prof. Dr. Thiago José Machado
Examinador Interno ao Programa (PPGMMC)



Prof. Dr. Juarez dos Santos Azevedo
Examinador Externo à Instituição (UFBA)



DINÂMICA DO SARAMPO EM POPULAÇÕES PARCIALMENTE
IMUNIZADAS

Carlos Augusto dos Santos

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO PROGRAMA DE
PÓS-GRADUAÇÃO EM MODELAGEM MATEMÁTICA E COMPUTACIONAL
(PPGMMC) DO CENTRO DE INFORMÁTICA DA UNIVERSIDADE FEDERAL
DA PARAÍBA COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A
OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS EM MODELAGEM
MATEMÁTICA E COMPUTACIONAL.

Examinada por:

Prof. Ana Paula Pintado Wyse, D.Sc.

Prof. José Miguel Aroztegui Massera, D.Sc.

Prof. Thiago Jose Machado, D.Sc.

Prof. Juarez dos Santos Azevedo, D.Sc.

JOÃO PESSOA, PB – BRASIL
JANEIRO DE 2021

Catálogo na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

S237d Santos, Carlos Augusto dos.

Dinâmica do sarampo em populações parcialmente
imunizadas / Carlos Augusto dos Santos. - João Pessoa,
2021.

84 f. : il.

Orientação: Ana Paula Pintado Wyse.

Dissertação (Mestrado) - UFPB/CI/PPGMMC.

1. Modelagem matemática. 2. Sarampo. 3. Controle ótimo.
I. Wyse, Ana Paula Pintado. II. Título.

UFPB/BC

CDU 519.67(043)

A minha mãe Rilza Carmem Santos.

Agradecimentos

Em primeiro lugar agradeço a Deus que me possibilitou chegar até aqui. A todos meus familiares que me deram apoio durante todo esse trajeto e de um modo especial a minha mãe Rilza Carmem Santos, que sempre esteve ao meu lado me dando apoio em meio a todos os meus objetivos de vida.

A Prof(a) Ana Paula que aceitou meu convite para orientar-me nesta dissertação e por todos os ensinamentos transmitidos durante as disciplinas cursadas no programa. A todos os meus amigos da graduação e as amizades construídas durante o decorrer do mestrado, amizades que guardarei sempre na minha lembrança. De um modo especial, a um grande amigo que partiu para a eternidade, Renê Von Brown, você faz parte dessa conquista.

Resumo

Neste trabalho serão apresentados aspectos epidemiológicos do sarampo e da sua modelagem matemática através de modelos compartimentais. A vacinação e a terapia sintomática serão utilizados como controladores da disseminação da doença. Para isso será formulado e resolvido um problema de controle ótimo com o objetivo de aumentar a população imunizada e reduzir os custos de aplicação de controle. A solução desse problema será obtida da equação de Riccati. As simulações numéricas ilustram a efetividade do controle.

Abstract

In this work, epidemiological aspects of measles and its mathematical modeling will be presented using compartmental models. Vaccination and symptomatic therapy will be used to control the spread of the disease. For that, an optimal control problem will be formulated and solved with the aim of increasing the immunized population and reducing the costs of applying control. The solution to this problem will be obtained from the Riccati equation. The numerical simulations illustrate the effectiveness of the control.

Sumário

Lista de Figuras	x
Lista de Tabelas	xi
1 Introdução	1
2 Sarampo: uma doença preocupante no cenário mundial	4
2.1 Principais características clínicas do sarampo	4
2.2 Complicações do sarampo	6
2.3 Diagnóstico do sarampo	6
2.4 Tratamento e prevenção	7
2.5 Situação epidemiológica no Brasil 2019-2020	8
3 Modelos matemáticos de sarampo	10
3.1 Conceitos básicos em epidemiologia	11
3.1.1 Compartimentos do modelo	11
3.1.2 Parâmetros epidemiológicos	11
3.2 Modelagem Matemática do Sarampo	12
4 Teoria do controle ótimo	21
4.1 Problema de controle ótimo	21
4.2 Problema variacional básico	24
4.2.1 Tempo final fixo e estado final fixo	24
4.3 Multiplicadores de Lagrange	27
4.4 Extremo de funcionais com condições	29
4.5 Aproximação variacional para sistemas de controle ótimo	32
4.5.1 Problema do custo terminal	32
4.6 Controle linear quadrático	40
4.6.1 Formulação do problema	40
4.6.2 Regulador quadrático linear de tempo finito	41

5	Controle ótimo em um modelo de sarampo	46
5.1	Controle ótimo do sarampo	47
5.1.1	Existência e unicidade da solução para o modelo SEIR	48
5.1.2	Estabilidade do equilíbrio livre da doença	50
5.2	Dinâmica do sarampo com vacinação	54
5.3	Dinâmica do sarampo com vacinação e terapia	60
6	Conclusão	65
	Referências Bibliográficas	66
A	Programas em linguagem Python	70

Lista de Figuras

1.1	Estratégias de controle de sarampo no Brasil desde os anos 60 até 1997.	1
1.2	Incidência anual e cobertura vacinal em menores de 1 ano de idade.	2
2.1	Exantema	5
2.2	Sinais de Koplik ou manchas de Koplik	5
2.3	Distribuição dos casos de sarampo por semana epidemiológica do início do exantema e classificação final, semanas epidemiológicas 1 a 48, Brasil, 2020	9
3.1	Diagrama do modelo compartimental SEIR proposto em [6].	14
3.2	Modelo SEIR com controles vacinação (u) e tratamento (v), proposto em [5].	16
3.3	Modelo compartimental de ação da vacina proposto em [11].	18
3.4	Previsões de modelos computacionais da incidência anual de sarampo com a estrutura populacional da Índia.	19
4.1	Incremento ΔJ e a primeira variação δJ do funcional J	23
4.2	Tempo final fixo e sistema de estado com extremidade fixa	25
4.3	Condição de ponto final com um limite móvel $\theta(t)$	38
5.1	Dinâmica das populações na ausência de controle, com condições iniciais $S(0) = 0,99$, $E(0) = 0$, $I(0) = 0,01$, $R(0) = 0$.	54
5.2	Dinâmica das populações na ausência de controle, com condições iniciais $S(0) = 0,90$, $E(0) = 0,10$, $I(0) = 0$, $R(0) = 0$.	54
5.3	Dinâmica das populações na presença de controle via vacinação, com condições iniciais $S(0) = 0,99$, $E(0) = 0$, $I(0) = 0,01$, $R(0) = 0$.	59
5.4	Dinâmica das populações na presença de controle via vacinação, com condições iniciais $S(0) = 0,90$, $E(0) = 0,10$, $I(0) = 0$, $R(0) = 0$.	59
5.5	Dinâmica das populações com vacinação e terapia, com condições iniciais $S(0) = 0,7$, $E(0) = 0$, $I(0) = 0,3$, $R(0) = 0$.	64
5.6	Dinâmica das populações com vacinação e terapia, com condições iniciais $S(0) = 0,8$, $E(0) = 0$, $I(0) = 0,2$, $R(0) = 0$.	64

Lista de Tabelas

5.1	Coeficientes do modelo obtidos de [5].	53
-----	--	----

Capítulo 1

Introdução

O Sarampo é considerado uma das doenças mais transmissíveis do mundo, e tem ressurgido no cenário mundial trazendo a tona surtos que já não ocorriam há décadas em virtude das ações de combate ao vírus. A vacina contra o sarampo é segura e eficaz, e foi introduzida no Brasil na década de 1960, tendo sido importada de forma esporádica para utilização na rede pública por governos estaduais. A vacinação gratuita vem sendo oferecida regularmente na rede pública de saúde desde 1992, ano em que foi implantado o Plano Nacional de Eliminação do Sarampo, cujo êxito pode ser visto na Figura 1.1.

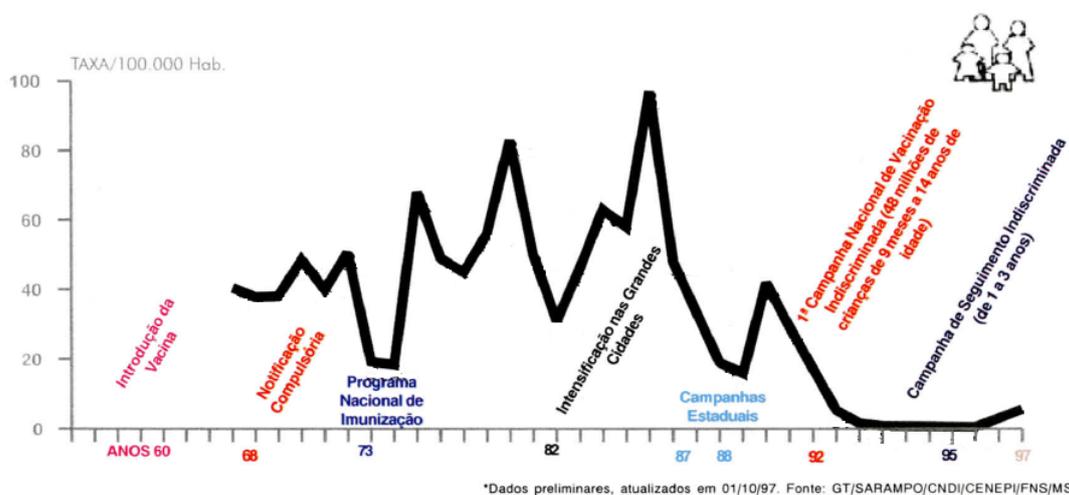


Figura 1.1: Estratégias de controle de sarampo no Brasil desde os anos 60 até 1997.
Fonte: Domingues et al. (1997)

A Figura 1.1 [16] mostra a evolução dos casos de sarampo desde a década de 60, pontuando os principais marcos no controle da doença tais como introdução da vacinação no país, notificação compulsória a partir de 1968, criação do Programa Nacional de Imunizações em 1973, intensificação da vacinação nas grandes cidades na década de 80, campanhas estaduais de vacinação em 1987 no Estado de São Paulo e em 1988 no Paraná até que em 1992 é implantado o Plano Nacional de

Eliminação do Sarampo, que teve como meta a extinção da doença. Desde então campanhas regulares de vacinação tem ocorrido em todo o território nacional. O atual calendário de vacinação do Ministério da Saúde do Brasil inclui duas doses de vacina para sarampo associada a proteção para outros vírus. A primeira dose da vacina tríplice viral (sarampo, caxumba e rubéola) é aplicada aos 12 meses de idade e uma segunda dose da vacina tetra viral (sarampo, caxumba, rubéola e varicela) aos 15 meses de idade. A Figura 1.2 [16] mostra a evolução dos casos de sarampo em menores de 1 ano, juntamente com a cobertura vacinal, onde é possível perceber o êxito do Plano Nacional de Eliminação do Sarampo ao atingir a meta de 90% de vacinação.

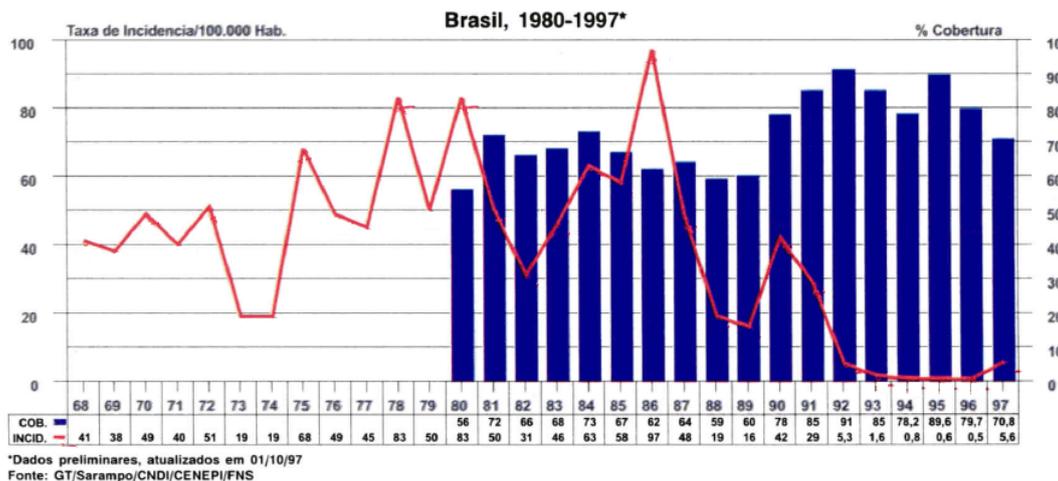


Figura 1.2: Incidência anual e cobertura vacinal em menores de 1 ano de idade.
Fonte: Domingues et al. (1997)

O vírus do sarampo se reproduz rapidamente no nariz e na garganta de uma criança ou adulto infectado. Assim, uma pessoa infectada ao tossir, espirrar ou até mesmo falar, espalha gotículas com o vírus no ar, que pode ser absorvido por outras pessoas. De acordo com o Ministério da Saúde [4], um indivíduo com o vírus pode transmitir para aproximadamente 90% de indivíduos próximos que não estejam imunizados. Por meio da vacina o sarampo pode ser evitado mas, atualmente, a cobertura atual da vacina no mundo não é apropriada para impedir surtos. Isto por que em muitos países as pessoas deixam de se vacinar.

A recomendação da Organização Pan-Americana da Saúde (OPAS) é de que os países das Américas mantenham a taxa de cobertura vacinal em 95% com duas doses da vacina. Esta é a forma mais eficaz para manter uma população livre do sarampo, chamada de imunidade coletiva ou, popularmente, imunidade de rebanho, ela impede a circulação do vírus caso ele venha a ser introduzido na região.

De acordo com dados da Organização Mundial da Saúde (OMS) e dos Centros para Controle e Prevenção de Doenças (CDC) dos Estados Unidos, pouco mais de 140 mil pessoas no mundo morreram em consequência do sarampo em 2018,

em sua maior parte bebês e crianças. Estima-se que os maiores casos de sarampo ocorreram na África Subsaariana, em países como República Democrática do Congo, Madagascar, Libéria, Somália e Ucrânia. Nesses países, o índice de crianças que não se vacinam é muito alto e está associado, em grande parte, a informações falsas que são apresentadas em redes sociais, a desconfiança da população e, principalmente, as carências nos sistemas de saúde dos países mais necessitados.

Em 2016, o Brasil recebeu o certificado de eliminação da circulação do vírus do sarampo pela OMS, declarando a região das Américas livre do sarampo, no entanto em 2017 foi encontrado em circulação o genótipo do vírus (D8), na Venezuela, e nos anos subsequentes o número de casos foi crescendo. Em um balanço trimestral divulgado pelo Ministério da Saúde em 25 de setembro de 2019, publicado no site Agência Brasil [2], o Brasil havia registrado 4.507 casos confirmados de sarampo em 19 estados, o que significa um crescimento de 13% em relação ao acompanhamento ocorrido na semana epidemiológica 26 a 37 de 2019 [9]. Os dados mostram que os mais atingidos foram as crianças de 1 a 4 anos. Em uma de suas declarações, Seth Berkley, o CEO (Chief Executive Officer) da Gavi Alliance (Aliança Global para Vacinas e Imunização), ressaltou que *“é uma tragédia que o mundo esteja vendo um rápido aumento de casos e mortes por uma doença facilmente evitável com uma vacina”*.

Com a reintrodução de doenças como o sarampo em regiões onde a erradicação já havia sido exitosa, estudos começaram a ser desenvolvidos com a finalidade de encontrar ferramentas que possam auxiliar no entendimento dos fatores que definem os padrões de transmissão de doenças e determinar estratégias ótimas de solução. Uma das ferramentas mais eficazes nesses estudos é a modelagem matemática, que tem o objetivo de descrever casos reais através de modelos matemáticos que, depois de interpretados, podem ser utilizados para auxiliar os órgãos governamentais na tomada de decisões.

Capítulo 2

Sarampo: uma doença preocupante no cenário mundial

O sarampo é uma das doenças mais preocupantes no mundo e tem se alastrado por vários continentes. Na Europa foram relatados diversos casos da doença entre adolescentes e adultos. Segundo a Sociedade Brasileira de Pediatria (SBP)[7] foram mais de 21 mil casos em 2017, incluindo 35 mortes. O motivo de todo esse aumento é a baixa nas taxas de cobertura vacinal. O Brasil não está fora dessa realidade, e vem enfrentando um surto de sarampo desde fevereiro de 2018. De acordo com a Secretaria de Vigilância em Saúde (SVS), o estado mais atingido foi o de São Paulo, que desde abril de 2019 enfrenta um grande surto de sarampo, registrando até dezembro desse mesmo ano 16.090 casos confirmados. Neste capítulo comentaremos sobre os aspectos desse vírus, bem como sobre alguns estudos realizados.

2.1 Principais características clínicas do sarampo

O sarampo é considerado como uma das doenças mais contagiosas já vistas, sendo causada por um vírus da família *Paramixoviridae*, gênero *Morbillivirus*. Ela pode ser transmitida de forma direta, através das secreções nasofaríngeas expelidas pelo espirro, tosse ou até mesmo pela fala e respiração, por isso a facilidade de contágio da doença. Também é possível haver a contaminação através de gotículas com partículas do vírus, que podem permanecer no ar por tempo suficiente para o contágio, especialmente em ambientes fechados.

Podemos dizer que os sintomas básicos do sarampo são a tosse, febre (na maioria da vezes acima de $40^{\circ}C$), corrimento nasal (espirros, secreções e obstrução do nariz), erupções na pele (mais conhecida como vermelhidão) e conjuntivite.

Geralmente esses sintomas começam a se desenvolver entre dez e doze dias depois que uma pessoa foi infectada e duram de sete a dez dias. Depois de três a cinco dias,

a pessoa infectada apresenta um exantema (ou rash cutâneo) que é o surgimento de manchas vermelhas no corpo como ilustrado na Figura 2.1.



Figura 2.1: Exantema

Fonte: <<https://g1.globo.com/se/sergipe/noticia/2019/09/20/sergipe-tem-13-casos-suspeitos-de-sarampo-em-investigacao.ghtml>>

O exantema se inicia atrás das orelhas e, em seguida, se espalha para o resto do corpo. Após dois ou três dias do início dos sintomas, a pessoa infectada pode apresentar uma manifestação clínica conhecida como sinais de Koplik ou manchas de Koplik como na Figura 2.2.



Figura 2.2: Sinais de Koplik ou manchas de Koplik

Fonte: <<https://enfermagempiaui.com.br/sarampo-entenda-a-doenca/>>

Os sinais de koplik são pequenos pontos brancos, que ficam localizados na mucosa da boca, uma região que fica próximo aos molares [7]. Além disso a pessoa infectada pode apresentar mal estar, diarreia, anorexia e linfadenopatia. Geralmente os mais afetados são as crianças, as gestantes, os desnutridos e os portadores de imunodeficiências.

O sarampo hoje é considerado uma doença mortal no mundo e vale lembrar que não existe um tratamento específico. A vacinação em crianças é a melhor forma de prevenção.

2.2 Complicações do sarampo

As complicações mais comuns do sarampo são a otite média aguda, as infecções respiratórias, diarreia e doenças neurológicas. De acordo com a SBP [7] o grupo de maior risco de ocorrência de complicações do sarampo são as crianças com idade inferior a cinco anos, adultos com mais de 20 anos, grávidas, pessoas com leucemia e HIV. Até mesmo as crianças saudáveis podem ter complicações seríssimas, sendo necessário internação.

As complicações sistêmicas acontecem durante o período do exantema, embora a encefalite possa aparecer depois do 20^o dia. A encefalite (inchaço no cérebro) aguda, que aparece com muita raridade em portadores de sarampo, geralmente provoca lesões cerebrais para vida toda. As estimativas são de que aconteçam uma ou duas mortes a cada 1.000 crianças infectadas pelo sarampo, devido às complicações respiratórias e neurológicas.

Vale destacar que pode ocorrer, ainda que raramente, a *Panencefalite Esclerosante Subaguda*, conhecida como PESA, uma doença do sistema nervoso central, que deteriora o comportamento cognitivo e intelectual e pode vir acompanhada de crises convulsivas; normalmente acontece entre sete e dez anos depois de o indivíduo ser infectado pelo vírus.

2.3 Diagnóstico do sarampo

Realizar o diagnóstico clinicamente é extremamente importante para confirmar a suspeita de sarampo. Segundo a SBP [7] esse diagnóstico é feito na fase aguda da doença através de técnicas sorológicas para detectar a presença de anticorpos IgM no sangue, específicos contra o sarampo.

Para se detectar a presença de anticorpos, são utilizadas as seguintes técnicas sorológicas:

- Inibição da hemaglutinação para IgG;
- Imunofluorescência, para IgM e IgG;
- Ensaio imunoenzimático (ELISA), para IgM e IgG – utilizado pela rede laboratorial de saúde pública no Brasil.

Os anticorpos IgM podem aparecer um mês após o surgimento do exantema. Em alguns casos raros a IgM não é detectada até os três primeiros dias do início do exantema, mas após esse período pode elevar-se e assim permanecer por aproximadamente seis semanas. A IgG pode subir por até 14 dias após o aparecimento do exantema. Os anticorpos IgG podem aparecer na fase aguda da doença e geralmente são encontrados anos depois da infecção. Para a IgG também podem aparecer resultados falso-negativos nos primeiros dias depois do aparecimento do exantema.

É muito importante a coleta de amostras de sangue em casos suspeitos de sarampo principalmente entre os primeiros dias de aparecimento do exantema. Amostras coletadas depois do 28^o dia já não são tão boas, mas ainda podem ser enviadas para análise.

Também é importante a análise molecular para se verificar o genótipo do vírus do sarampo. O genótipo é utilizado para fazer um mapeamento das vias de transmissão do sarampo. Com ele é possível fazer a distinção entre um caso importado de um autóctone e direcionar a política a ser adotada para prevenção naquele momento.

2.4 Tratamento e prevenção

Até o momento não existe tratamento específico para o sarampo. A recomendação da OMS é a aplicação da vitamina A em todas as crianças com sarampo e uso de antitérmicos para aliviar os sintomas. A vitamina A mostrou-se eficaz ao reduzir as taxas de morbidade¹ e mortalidade.

A OMS recomenda aplicar a vitamina A em duas doses, uma no mesmo dia do diagnóstico e outra no dia seguinte. De acordo com o Ministério da Saúde em seu *Guia de Vigilância* [10] as doses sugeridas seriam:

- Para crianças menores de seis meses - 50.000 Unidades Internacionais (U.I) por via oral;
- Para crianças entre seis e doze meses - 100.000 Unidades Internacionais (U.I) por via oral;
- Para crianças maiores de doze meses - 200.000 Unidades Internacionais (U.I) por via oral;

Para se recuperarem do sarampo, algumas crianças precisam de quatro a oito semanas. Infecções como diarreia, pneumonia e otite média devem ser cuidadas de acordo com os protocolos estabelecidos pelo Ministério da Saúde.

¹Refere-se aos indivíduos, dentro da mesma população, que adquirem doenças num certo intervalo de tempo. A morbidade serve para mostrar o comportamento das doenças e dos agravos à saúde na população.

Há mais de 50 anos a vacina contra o sarampo está em uso, sendo a única forma de se combater a doença. Juntamente com campanhas de imunização em localidades com altos índices de sarampo, o Ministério da Saúde [10] recomenda o uso rotineiro da vacina contra o sarampo para indivíduos de 12 meses até 29 anos de idade. São recomendadas duas doses da vacina tríplice viral em crianças de 5 a 9 anos de idade que não foram vacinadas no período recomendado. A depender da situação vacinal, também podem ser aplicadas duas doses da tríplice viral em pessoas entre 10 a 29 anos de idade e uma dose da tríplice viral em pessoas de 30 a 49 anos de idade.

O Ministério da Saúde [10] recomenda que menores de 6 meses, imunocomprometidos, casos suspeitos e gestantes não recebam a vacina contra o sarampo. No caso das gestantes, algumas delas apresentam uma redução da imunidade, deixando o sistema imunológico mais frágil e, por isso, a vacina ao invés de ajudar no combate a doença pode vir a desencadeá-la.

2.5 Situação epidemiológica no Brasil 2019-2020

De acordo com a Secretária de Vigilância em Saúde, em seu boletim epidemiológico [3], iniciou-se em fevereiro de 2019 uma nova onda de transmissões do sarampo a partir de indivíduos advindos de Israel e Noruega. O boletim epidemiológico [3] também registrou o espalhamento do vírus para 23 estados com novas manifestações de transmissão.

Com essa disseminação do vírus, o ano de 2019 encerrou-se notificando 64.765 casos suspeitos de sarampo com confirmação de 18.203 casos. Em 2019 ocorreram 15 mortes no Brasil, sendo 14 no estado de São Paulo e uma em Pernambuco, entre eles 6 eram crianças menores de 1 ano de idade que não estavam vacinadas. Devido a esse cenário, em outubro de 2019 iniciou-se uma campanha nacional de vacinação que teve como foco crianças de 6 meses a 5 anos de idade e adultos de 20 a 29 anos de idade.

De acordo com o Ministério da Saúde em seu boletim epidemiológico publicado em dezembro de 2020 [1], 16.602 casos suspeitos de sarampo foram notificados, com confirmação de 8.356 (50,3%), destes 5.539 (66,3%) por critério laboratorial e 2.817 (33,7%) por critério clínico epidemiológico. Esses dados estão representados na Figura 2.3, assim como casos investigados e descartados. Percebe-se um crescimento nas notificações até a semana epidemiológica 3, com uma pequena redução entre as semanas epidemiológicas 4 e 6.

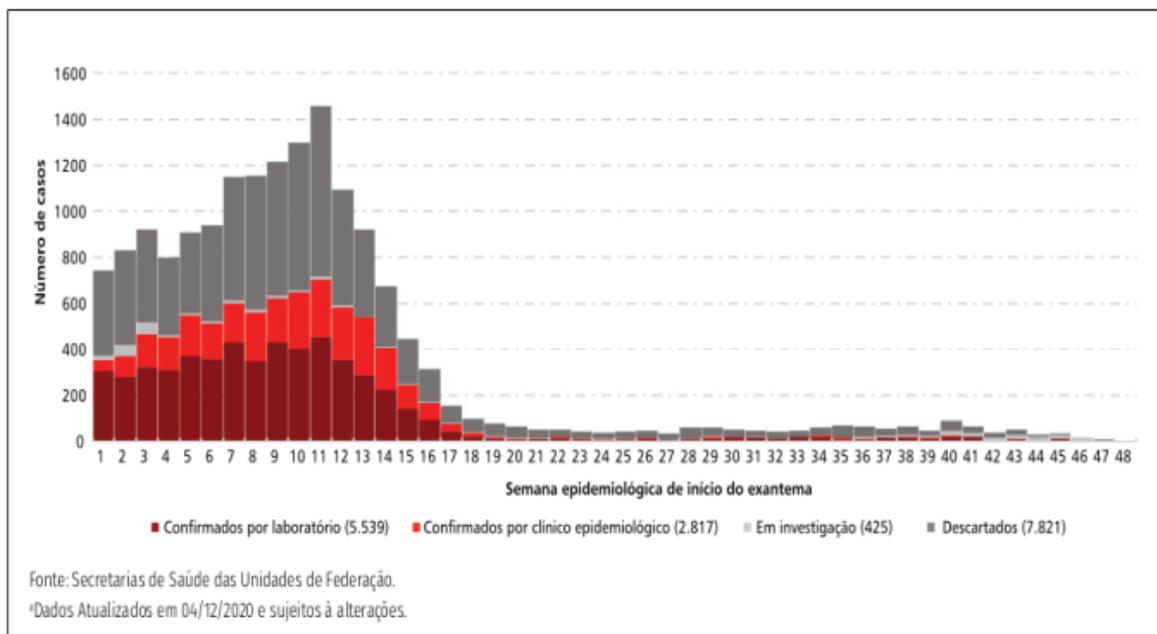


Figura 2.3: Distribuição dos casos de sarampo por semana epidemiológica do início do exantema e classificação final, semanas epidemiológicas 1 a 48, Brasil, 2020

Fonte: Secretária de Vigilância em Saúde - Ministério da Saúde, 2020.

De janeiro até dezembro de 2020 foram registrados sete óbitos por sarampo, sendo um no estado de São Paulo, um no Rio de Janeiro e cinco no Pará. Devido a este quadro, o Ministério da Saúde vem buscando intensificar a luta contra o sarampo, elaborando medidas para controlar o vírus, entre elas estão: localizar os casos da doença, campanhas para conscientizar a população e atualização do cartão de vacina. Todas essas ações devem envolver a comunidade, assim como trabalhadores da área de saúde e educação, escolas, alunos, e também empresas governamentais e não governamentais para conscientizar a população sobre a importância da vacinação.

Capítulo 3

Modelos matemáticos de sarampo

O grande objetivo das políticas públicas de saúde é tentar reduzir as taxas de mortalidade por sarampo, uma doença altamente contagiosa e que tem se espalhado pelo mundo todo. Apesar da notável queda em virtude da vacinação, o índice de mortalidade ainda permanece alto em muitos lugares. Nos países com grande índices de sarampo, somente uma dose é aplicada frequentemente, já a segunda é oferecida através de atividades suplementares de imunização (ASI), ou seja, campanhas nacionais periódicas de vacinação realizadas pela OPAS (Organização Pan-Americana da Saúde). Essas atividades contribuíram na redução de mortes, pela doença, em todo o mundo.

Grandes avanços no combate à transmissão do vírus foram percebidos nas Américas através da vacinação e da utilização das ASI. A mesma tática foi utilizada na África subsaariana obtendo uma significativa diminuição nas taxas de mortalidade na última década. Assim, é importante avaliar estratégias ótimas que possam ser executadas para conter a doença.

Os modelos matemáticos são uma representação simplificada de como uma infecção se propaga em uma população ao longo do tempo. Eles têm desempenhado um importante papel na sociedade, através deles é que organizações e governos desenvolvem estratégias de controle e eliminação de doenças infecciosas. Vários modelos foram introduzidos na literatura acadêmico-científica envolvendo diversos fatores na dinâmica do sarampo, como estratégias de vacinação, o fenômeno da coinfeção do sarampo, estrutura etária, parâmetros sazonais e modelos de mobilidade humana (dinâmica de metapopulações) para descrever a propagação da doença. A maioria dos autores, além das simulações também examina o comportamento qualitativo de seu modelo: pontos de equilíbrio, números básicos de reprodução, estabilidade local e global e análise de bifurcação.

A seguir apresentamos conceitos básicos em epidemiologia e três artigos que, através de modelos matemáticos, estudaram a dinâmica de transmissão do sarampo sob diferentes comportamentos.

3.1 Conceitos básicos em epidemiologia

3.1.1 Compartimentos do modelo

Nos modelos matemáticos em epidemiologia as populações se dividem em um certo número de compartimentos ou classes. Cada compartimento representa as características em que cada população se encontra de acordo com o avanço da doença. A escolha dos compartimentos a serem inseridos no modelo dependerá dos traços da doença que está sendo modelada e da finalidade do modelo.

Os compartimentos mais utilizados na modelagem epidemiológica são:

- Suscetíveis(S): representa os indivíduos que não tem imunidade ao agente infeccioso, logo podem se infectar facilmente se forem expostos a doença.
- Expostos(E): representa indivíduos que foram infectados mas que ainda não transmitem a doença.
- Infectados(I): representa os indivíduos que adquiriram a doença, podendo transmitir aos suscetíveis.
- Recuperados(R): representa indivíduos imunes à doença e, por isso, não influenciam na dinâmica de transmissão da doença.

Os indivíduos após se contaminarem, entram no período latente que representa o período em que se possui menor chance de transmitir a doença. Durante este tempo, os indivíduos são classificados como expostos. Já o período que se estende entre o início da infecção e a aparição dos sintomas é chamado de período de incubação. Em doenças com período latente muito curto, é comum o compartimento dos expostos ser suprimido.

3.1.2 Parâmetros epidemiológicos

- Número reprodutivo básico (R_0): É o número médio de infecções secundárias produzidas por um caso típico de infecção, durante o período infeccioso, em uma população onde todos são suscetíveis. Por exemplo, se $R_0 = 15$ para sarampo em uma região, então esperaríamos que um novo caso de sarampo produzisse, em média, 15 novos casos secundários (assumindo que todos ao redor do caso sejam suscetíveis). Se $R_0 > 1$ podemos prever uma epidemia;
- Número reprodutivo efetivo (R): O número de reprodução efetivo pode ser estimado pelo produto do número reprodutivo básico pela fração da população hospedeira que é suscetível. Então $R = R_0 \frac{S(t)}{N(t)}$. Por exemplo, se $R_0 = 15$ para

o sarampo onde metade da população está imune, então $R = 7,5$. Sob essas circunstâncias, um único caso de sarampo produziria uma média de 7,5 novos casos. Para eliminar com sucesso uma doença de uma população, precisamos ter $R < 1$;

- **Imunidade de rebanho:** Ocorre quando uma proporção significativa da população foi vacinada ou está imune por algum outro mecanismo, resultando em proteção para indivíduos suscetíveis (por exemplo, os não vacinados). É mais difícil para as doenças se espalharem entre indivíduos se um grande número já estiver imune, pois a cadeia de infecção é quebrada. O limite de imunidade de rebanho é a proporção de uma população que precisa ser imune para que uma doença infecciosa se torne estável nessa comunidade. Se isso for alcançado, por exemplo, por meio de imunização, cada caso leva a um único novo caso ($R = 1$) e a infecção se tornará estável na população. Se o limite para imunidade de rebanho for ultrapassado, então $R < 1$ e o número de casos de infecção diminui. Esta é uma medida importante usada no controle de doenças infecciosas e programas de imunização e erradicação. A imunidade de rebanho é medida como $HIT = 1 - \frac{1}{R_0}$.

3.2 Modelagem Matemática do Sarampo

Desde que foi introduzido pela primeira vez por Kermack e McKendrick em 1927, vários modelos compartimentais foram originados para compreender a dinâmica de muitas doenças. Modelos do tipo SIS (susceptível - infectado - susceptível), por exemplo, são comumente usados para descrever a propagação da gripe ou outras doenças respiratórias [20, 31, 32], pois em tais doenças os indivíduos têm um período de imunidade temporário muito curto após serem infectados, voltando rapidamente a categoria de suscetíveis. Quando a imunidade é permanente ou muito longa, utiliza-se o modelo do tipo SIR (susceptível - infectado - recuperado). Modelos do tipo SEIR (susceptível - exposto - infectado - recuperado) são geralmente usados para modelar doenças que possuem um longo período de incubação e um longo período de imunidade, esses modelos podem descrever adequadamente a dinâmica da tuberculose [26, 24, 27], por exemplo.

Uma adaptação do modelo SIR para o sarampo com um período de incubação foi discutida em [12] e [21]. Em 2012, Bakare, Adekunle e Kadiri [12] descreveram a dinâmica do sarampo usando o seguinte modelo:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dS}{dt} = \lambda - \frac{\beta SI}{N} - \mu S \\ \frac{dE}{dt} = \frac{\beta SI}{N} - (\sigma + \mu)E \\ \frac{dI}{dt} = \sigma E - (\gamma + \mu)I \\ \frac{dR}{dt} = \gamma I - \mu R, \end{array} \right. \quad (3.1)$$

onde N é a população total, λ é a taxa de natalidade, β é a taxa de contatos, σ é a taxa de exposto para infeccioso, γ é a taxa de recuperação e μ é a taxa de mortalidade. Esse modelo descreve a dinâmica de população mista homogênea, com dinâmica vital, na presença do vírus do sarampo. A transmissão ocorre quando há contato efetivo de uma pessoa suscetível (S) com uma infectada (I). Esses indivíduos suscetíveis entram na população exposta (E), o que significa que foram infectados, mas não podem transmitir a doença. Ao final do período latente, o indivíduo entra na população infectada (I), passando a ser um agente transmissor. Passado o período de transmissibilidade, os indivíduos ingressam na população recuperada, composta por aqueles que possuem imunidade permanente à doença.

Nesse artigo, uma análise qualitativa mostrou condições para que a doença se estabeleça na população, com base no número reprodutivo básico. Em 2013, Momoh, Ibrahim, Uwanta [21] também desenvolveram um modelo semelhante ao sistema (3.1), considerando o teste e a terapia de sarampo em indivíduos expostos, a fim de avaliar o impacto dessas pessoas na dinâmica de transmissão da doença. Para isso foi adicionada uma transição direta do compartimento de exposto para o de recuperados como consequência de testes e terapia contra o agravamento do sarampo. Nesse artigo, foi feita uma análise qualitativa dos pontos de equilíbrio do sistema e, com base em simulações numéricas, foi mostrado o quanto o teste e a terapia do sarampo em indivíduos expostos afetarão os ganhos de imunidade permanentes. O impacto da vacinação não foi discutido em [12] e [21].

Adaptações do modelo SEIR para o sarampo envolvendo a vacinação tem sido amplamente discutidas na literatura. Em 2006, O. M. Tessa [28] já adotava um modelo semelhante ao sistema (3.1), mas levando em conta crianças vacinadas.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dS}{dt} = b(1-p)N - \frac{\beta SI}{N} - \mu S \\ \frac{dE}{dt} = \frac{\beta SI}{N} - (\sigma + \mu)E \\ \frac{dI}{dt} = \sigma E - (\gamma + \mu + \delta)I \\ \frac{dR}{dt} = bpN + \gamma I - \mu R, \end{array} \right. \quad (3.2)$$

onde N é a população total, b é a taxa de natalidade, p é a proporção de pessoas vacinadas com sucesso no nascimento, β é a taxa de contatos, σ é a taxa de exposto para infeccioso, γ é a taxa de recuperação, μ é a taxa de mortalidade e δ (taxa de mortalidade devido ao sarampo). Como a maioria das mães foi infectada, dada a dinâmica do modelo, o autor excluiu a incidência vertical da doença porque os anticorpos IgG são herdados das mães e fornecem imunidade passiva temporária contra a infecção do sarampo até que as crianças completem nove meses de idade. Este modelo assume que a vacinação bem-sucedida terá 100% de eficácia contra o sarampo. Na análise qualitativa do modelo foi considerado o número reprodutivo efetivo, já que a dinâmica se passa em uma população parcialmente suscetível. Os autores mostram que uma segunda oportunidade da vacinação aumenta a imunidade de rebanho em situações onde a cobertura vacinal é mais baixa.

Em 2015, Pang et al. [6] usaram modelo semelhante ao sistema (3.2) ignorando o número de mortes por sarampo. Eles estudaram a estabilidade do equilíbrio e verificaram a existência de uma condição de bifurcação de Hopf no ponto de equilíbrio endêmico. Neste artigo, o efeito da estratégia de vacinação de 1 dose contra o sarampo com eficácia de 100% é investigado. Os autores usaram o modelo para simular os dados de casos de sarampo nos EUA de 1951 a 1962, mostrando os surtos periódicos de sarampo em seu modelo sem considerar a força sazonal. O efeito da vacinação foi medido a partir da análise de sensibilidade do número reprodutivo básico em relação aos parâmetros que o compõe. O diagrama compartimental do modelo desenvolvido nesse estudo está representado na Figura 3.1:

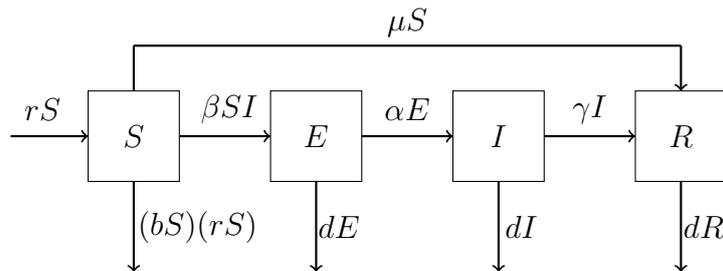


Figura 3.1: Diagrama do modelo compartimental SEIR proposto em [6].

O diagrama mostra os quatros compartimentos do modelo SEIR, e o fluxo, representados pelas setas, por meio do qual os indivíduos transitam entre os compartimentos. Os parâmetros para descrever o modelo são o r (taxa de crescimento da população suscetível), que foi assumido um crescimento logístico¹, $1/b$ (capacidade suporte da população suscetível na ausência de infecção), β (taxa de contatos), μ (taxa de cobertura vacinal do suscetível), d (taxa de mortalidade natural), α (taxa de exposto para infeccioso) e γ (taxa de recuperação dos indivíduos infectados). O modelo foi formulado matematicamente como:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dS}{dt} = rS(1 - bS) - \beta SI - \mu S \\ \frac{dE}{dt} = \beta SI - (d + \alpha)E \\ \frac{dI}{dt} = \alpha E - (d + \delta)I \\ \frac{dR}{dt} = \delta I + \mu S - dR. \end{array} \right. \quad (3.3)$$

A finalidade desse estudo desenvolvido em [6] foi encontrar um método ideal de vacinação para impossibilitar a disseminação do sarampo. Por essa razão, foram usadas técnicas de controle ótimo para obter a melhor taxa ótima de vacinação de indivíduos suscetíveis. A taxa de vacinação é então uma variável de controle e o objetivo foi minimizar o funcional a seguir

$$\min J(\mu) = \min_{0 \leq \mu(t) \leq r} \int_0^T [z(t) + \frac{\tau}{2} \mu^2(t)] dt \quad (3.4)$$

onde T indica o período de vacinação, τ é um parâmetro de ponderação positivo, μ é a taxa de cobertura vacinal e $z(t)$ é uma forma adimensionalizada da variável $I(t)$ que representa o número de indivíduos infecciosos.

Ainda em 2015, Stephen [17] modificou o modelo SEIR, adicionando compartimentos para os indivíduos vacinados e considerando a vacinação de 2 doses para bebês e imigrantes. Nesse modelo a imunidade permanente é conferida apenas aos indivíduos que receberam as 2 doses e um estudo qualitativo mostrou condições para um equilíbrio livre da doença e a influência do contato entre indivíduos sobre o número reprodutivo básico e efetivo. Os autores recomendam, com base nesse estudo, tratamento precoce, minimização do contato com indivíduos infectados e exercícios de vacinação em massa.

No estudo realizado por Onyejekwe e Kebede, em 2015 [5], os autores formularam para um modelo SEIR um problema de controle ótimo submetido a vacinação e

¹O crescimento logístico refere-se a uma população que poderá crescer até um limite máximo, a partir do qual tende a se estabilizar.

tratamento como controles. A meta foi buscar a combinação ideal de estratégias de vacinação e tratamento de suporte que diminuam o custo da execução das duas interferências. O problema foi resolvido utilizando o princípio do Máximo de Pontryagin [13] para determinar os níveis ótimos dos dois controles. O diagrama mostrando o fluxo dos indivíduos entre os compartimentos está representado na Figura 3.2:

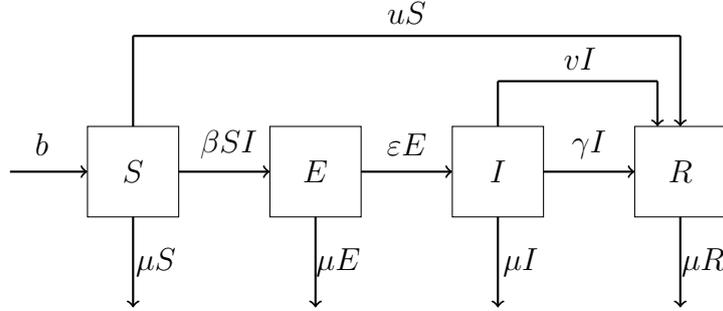


Figura 3.2: Modelo SEIR com controles vacinação (u) e tratamento (v), proposto em [5].

onde b é a taxa média de natalidade, β é a taxa de contatos, μ é a taxa média de mortalidade, ε é a taxa de latência, γ é a taxa de recuperação, u é a controle através da vacinação e v controle através do tratamento de suporte. Com base nas variáveis e parâmetros do diagrama, foram formuladas as equações diferenciais que regem o modelo de transmissão do sarampo.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dS}{dt} = b - \beta SI - \mu S - uS \\ \frac{dE}{dt} = \beta SI - (\varepsilon + \mu)E \\ \frac{dI}{dt} = \varepsilon E - (\gamma + \mu + v)I \\ \frac{dR}{dt} = \gamma I - \mu R + uS + vI. \end{array} \right. \quad (3.5)$$

O objetivo foi minimizar o funcional (3.6), dado o número de indivíduos infectados e expostos e, com isso, aumentando o número de indivíduos recuperados usando as variáveis de controle u e v

$$J(u, v) = \int_0^T \left(A_1 E + A_2 I + \frac{1}{2} B_1 u^2 + \frac{1}{2} B_2 v^2 \right) dt, \quad (3.6)$$

sujeito as equações diferenciais (3.5) e ao conjunto de controle U definido como

$$U = \{(u(t), v(t)) | 0 \leq u \leq u_{max} < 1, 0 \leq v \leq v_{max} < 1 \ t \in [0, T]\}, \quad (3.7)$$

onde u_{max} é o valor máximo possível para u e v_{max} é o valor máximo possível para

v uma vez que estamos tratando de recursos limitados, A_1 e A_2 são constantes cujo objetivo é manter um equilíbrio no tamanho de E e I , as constantes positivas B_1 e B_2 representam, respectivamente, os pesos relativos relacionados ao custo da vacinação e ao custo do tratamento de suporte e o intervalo $[0, T]$ representa o período de controle.

Em 2018, Peter et al. [25] propôs um modelo matemático da dinâmica da doença do sarampo com vacinação, considerando o número total de pessoas no compartimento R recuperadas naturalmente ou devido à vacinação. Neste modelo foi admitido período de incubação suficientemente curto de forma a ser suprimido da dinâmica. Os indivíduos vacinados ainda poderiam estar infectados com sarampo, os indivíduos que foram expostos ou infectados poderiam obter imunidade permanente. Através de simulações numéricas, os autores mostraram que a vacinação pode reduzir significativamente o número de infectados e o estudo qualitativo mostrou condições para o equilíbrio livre da doença e para o equilíbrio endêmico.

Devido ao fato de que o sarampo afeta principalmente as crianças e que estas são o objetivo nas campanhas de vacinação, muitos autores optam por descrever a dinâmica do sarampo em uma população através de modelos de estrutura etária. Em 1985, David W. Tudor [29] foi um dos pioneiros na implementação do modelo SIRS para estrutura etária envolvendo vacinação. Neste artigo também foram discutidas questões a respeito do ponto de equilíbrio e da estabilidade local. A aplicação desse modelo ao sarampo indica que os níveis de imunização necessários para reduzir a incidência para índices próximos de zero podem não ser tão altos como previam estudos que consideram a mistura homogênea da população.

Um estudo mais recente considerando estrutura etária, desenvolvido por Verget et al. em 2015 [11], teve a finalidade de examinar os benefícios e malefícios entre a cobertura vacinal de rotina e a cobertura das ASI, juntamente com a periodicidade inter-ASI² para obter o controle do sarampo. Foram selecionados alguns países com maior quantidade de mortalidade pela doença no mundo e estimou-se a melhor programação de possíveis ASI's, utilizando-se de um modelo compartimental dinâmico de transmissão do sarampo chamado DynaMICE (Mecanismo Dinâmico de Cálculo da Imunização do Sarampo), um modelo fixo por idade de transmissão da infecção em indivíduos vacinados e não vacinados. A Figura 3.3 nos mostra o diagrama do modelo desenvolvido em [11]:

²Intervalos de tempo para aplicação das atividades suplementares de imunização

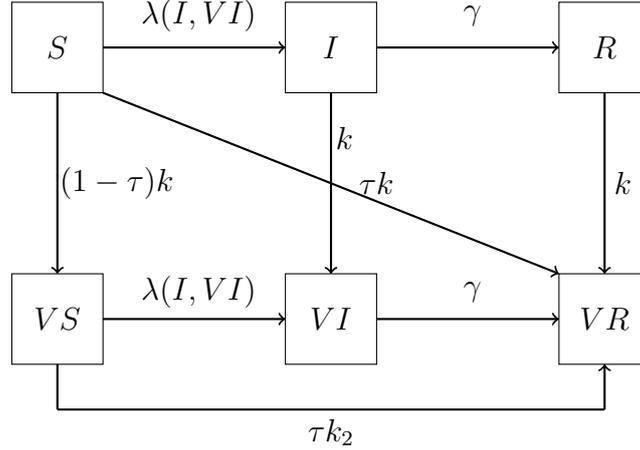


Figura 3.3: Modelo compartimental de ação da vacina proposto em [11].

onde além dos já citados S , I e R temos a inclusão dos compartimentos VS (vacinados suscetíveis), VI (vacinados infectados) e VR (vacinados recuperados); $k(t, a)$ é a cobertura da vacina contra sarampo para indivíduos vacinados pela primeira vez no ano t na idade a , podendo ser através de imunização de rotina ou por ASI (em ambos os casos $a < 1$); $k_2(t, a)$ é a cobertura da vacina contra o sarampo para indivíduos vacinados pela segunda vez no ano t na idade a , somente através das ASI (nesse caso $a < 1$); $\tau(a)$ é a eficácia da vacina contra sarampo (85% para a primeira dose ao vacinar antes de um ano de idade, 95% após um ano de idade e 98% para duas doses); $\lambda(I, VI)$ representa a força da infecção.

Matematicamente, o modelo é representado por:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial a} = -\lambda S - k(t, a)S \\ \frac{\partial I}{\partial t} + \frac{\partial I}{\partial a} = \lambda S - \gamma I - k(t, a)I \\ \frac{\partial R}{\partial t} + \frac{\partial R}{\partial a} = \gamma I - k(t, a)R \\ \frac{\partial VS}{\partial t} + \frac{\partial VS}{\partial a} = -\lambda VS + (1 - \tau)k(t, a)S - \tau k_2(t, a)VS \\ \frac{\partial VI}{\partial t} + \frac{\partial VI}{\partial a} = \lambda VS + k(t, a)I - \gamma VI \\ \frac{\partial VR}{\partial t} + \frac{\partial VR}{\partial a} = \gamma VI + \tau k(t, a)S + \tau k_2(t, a)VS. \end{array} \right. \quad (3.8)$$

Esse modelo foi simulado por um período de 100 anos com vacinação de rotina, onde nos últimos 50 anos foi adotada não só a vacinação de rotina como também as ASI, com o objetivo de conseguir um equilíbrio pós-vacinal. Na Figura 3.4 são mostrados os resultados dessa simulação onde foram utilizados dados particulares de cada país (por exemplo, cobertura vacinal da primeira dose do sarampo), para explorar a frequência potencial das ASI. Foi definido que o sarampo seria contro-

lado se sua ocorrência permanecesse abaixo de 1 por 100.000 indivíduos em toda a população.

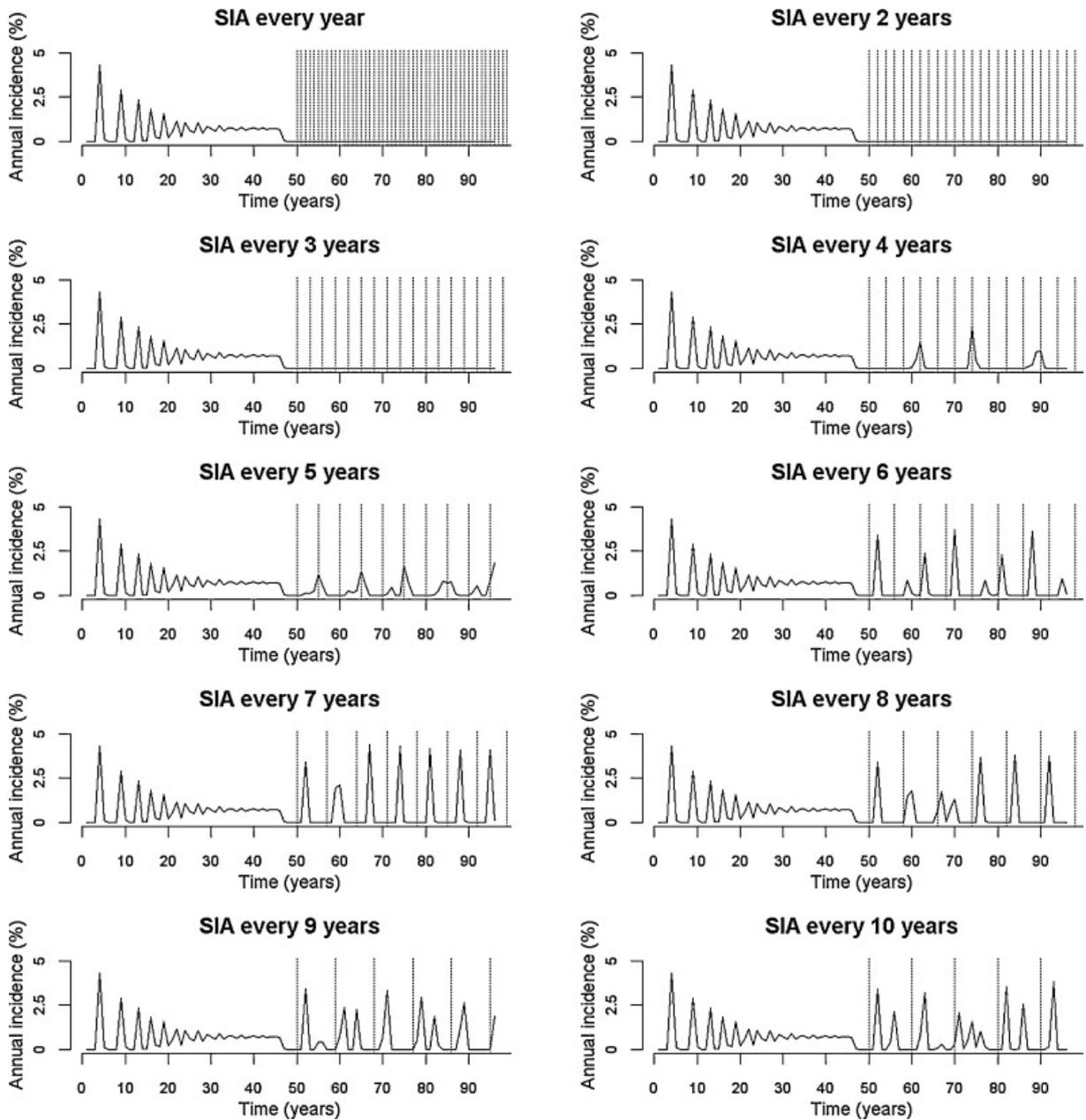


Figura 3.4: Previsões de modelos computacionais da incidência anual de sarampo com a estrutura populacional da Índia.

Fonte: <<https://ars.els-cdn.com/content/image/1-s2.0-S0264410X14016077-gr2.jpg>>

As ASI são destacadas por uma linha vertical pontilhada. Após sua inserção, em intervalos de tempo de um a dez anos, percebe-se uma modificação no número de indivíduos infectados. Quando o período inter-ASI é maior que três anos, vemos um reaparecimento do sarampo (ocorrência de picos de incidência após o ano 50) e, quanto menor a frequência das ASI, maior o ressurgimento da doença. Mas, um período médio inter-ASI de três anos ou menos, é considerável para controlar o

sarampo, ou seja, nenhuma ocorrência de picos de incidência após o ano 50.

Com isso, a conclusão desse estudo nos mostra que a implementação de uma única atividade suplementar de imunização, não será o suficiente para controlar a transmissão do sarampo em nenhum dos países selecionados com alta carga da doença. Por outro lado, ASI frequentes com grandes graus de cobertura vacinal, são uma excelente estratégia para impedir surtos de sarampo.

Alguns estudos também consideram que o sarampo apresenta uma dinâmica sazonal. Em 2018, J. Huang et al. [18] analisou o comportamento dinâmico de um modelo do tipo SEIR e o utilizou para simular dados mensais sobre casos de sarampo na China. Nesse modelo foi considerada força de infecção sazonal ($\beta(t)$), conforme o modelo (3.9):

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dS}{dt} = A(1 - p) - \beta(t)IS - \mu S \\ \frac{dE}{dt} = \beta(t)IS - (\sigma + \mu)E \\ \frac{dI}{dt} = \sigma E - (\gamma + \mu)I \\ \frac{dR}{dt} = Ap + \gamma I - \mu R, \end{array} \right. \quad (3.9)$$

onde A é a taxa de natalidade humana, p é a taxa de vacinação humana, μ é a taxa de mortalidade natural, σ é a taxa de latência e γ taxa de recuperação. Nesse estudo também foi realizada análise de sensibilidade do número reprodutivo básico em relação aos parâmetros que o compõe, mostrando que o sarampo pode ser controlado e eventualmente erradicado pelo aumento das taxas de imunização, melhorando o gerenciamento dos programas de vacinação e conscientizando a população sobre a gravidade da doença.

Neste Capítulo discutimos brevemente alguns modelos que foram introduzidos na literatura, considerando diversos autores. Além desses, há vários outros modelos considerando variações e adequações as diversas situações em que se queira aplicá-los. No Capítulo 5 discutiremos mais detalhadamente o modelo (3.5) desenvolvido em [5] e formularemos um problema de controle ótimo em malha fechada para este modelo.

Capítulo 4

Teoria do controle ótimo

Na elaboração de um problema de controle ótimo deve-se considerar três importantes elementos: primeiro, um funcional, representando o que queremos maximizar ou minimizar, segundo, um sistema de equações algébricas ou diferenciais que tem o objetivo de modelar a dinâmica do problema a cada instante de tempo e, por último, as condições de contorno que nos oferecem os estados inicial e final. Assim, neste capítulo, apresentamos resultados importantes da teoria de controle ótimo baseados em [22] que servirão como suporte para nosso problema.

4.1 Problema de controle ótimo

Definição 4.1. *De acordo com [19] um funcional J é uma regra de correspondência que associa a cada função x em uma certa classe Ω , um único número real. O conjunto Ω é chamado domínio de um funcional e o conjunto de números reais associados com as funções em Ω é chamado de conjunto imagem do funcional.*

O domínio de um funcional é uma classe de funções. Intuitivamente, pode-se dizer que um funcional é uma “função de uma função”.

Exemplo 4.1 Seja a função $x(t) = 3t^2 + 1$, então

$$J(x(t)) = \int_0^1 (3t^2 + 1)dt = 2 \quad (4.1)$$

J é a área sob a curva $x(t)$. Se $v(t)$ é a velocidade de um veículo, teríamos

$$J(v(t)) = \int_{t_0}^{t_f} v(t)dt \quad (4.2)$$

que seria o caminho percorrido pelo veículo.

□

Definição 4.2 O incremento de um funcional J , denotado por ΔJ , é definido por

$$\Delta J = J(x(t) + \delta x(t)) - J(x(t)), \quad (4.3)$$

onde $\delta x(t)$ é chamado de *variação da função* $x(t)$. O incremento ΔJ também pode ser escrito como $\Delta J(x(t), \delta x(t))$ para enfatizar que depende das funções $x(t)$ e $\delta x(t)$.

Exemplo 4.2 Encontrar o incremento do funcional

$$J = \int_{t_0}^{t_f} [3x^2(t) + 1] dt \quad (4.4)$$

O incremento de J é dado por

$$\begin{aligned} \Delta J &= J(x(t) + \delta x(t)) - J(x(t)), \\ \Delta J &= \int_{t_0}^{t_f} [3(x(t) + \delta x(t))^2 + 1] dt - \int_{t_0}^{t_f} [3x^2(t) + 1] dt, \\ \Delta J &= \int_{t_0}^{t_f} [6x(t)\delta x(t) + 3(\delta x(t))^2] dt. \end{aligned} \quad (4.5)$$

□

Expandindo o termo $J(x(t) + \delta x(t))$ de (4.3), em série de Taylor, obtemos

$$\begin{aligned} \Delta J &= J(x(t)) + \frac{\partial J}{\partial x} \delta x(t) + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 J}{\partial x^2} (\delta x(t))^2 + \dots - J(x(t)) \\ &= \frac{\partial J}{\partial x} \delta x(t) + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 J}{\partial x^2} (\delta x(t))^2 + \dots \\ &= \delta J + \delta^2 J + \dots, \end{aligned} \quad (4.6)$$

onde,

$$\delta J = \frac{\partial J}{\partial x} \delta x(t) \quad e \quad \delta^2 J = \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 J}{\partial x^2} (\delta x(t))^2 \quad (4.7)$$

são chamadas, respectivamente, de *primeira variação* (ou *variação*) e *segunda variação* do funcional J . A variação δJ de um funcional J é a parte *linear* (em $\delta x(t)$) do incremento ΔJ . A relação entre o incremento e a primeira variação de um funcional é exibida na Figura 4.1.

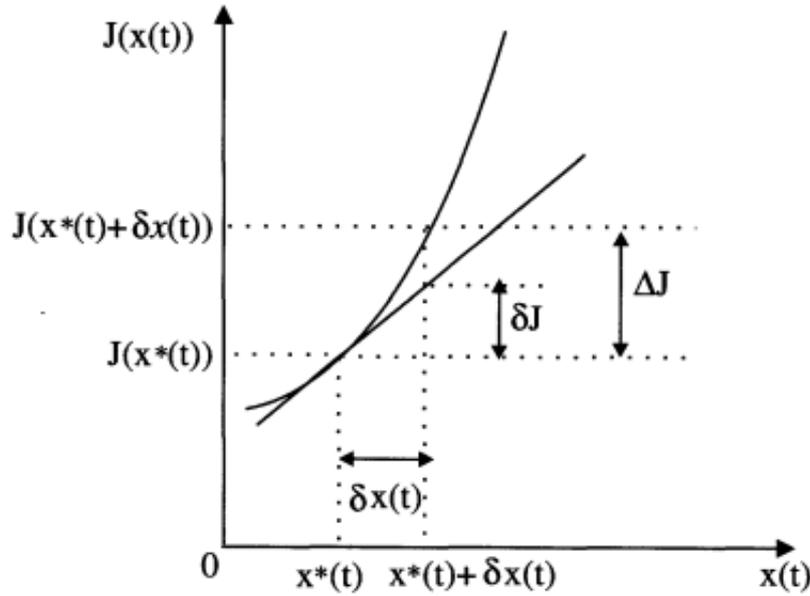


Figura 4.1: Incremento ΔJ e a primeira variação δJ do funcional J
 Fonte: NAIDU, 2003, p.24

Exemplo 4.3 Avaliar a variação do funcional

$$J(x(t)) = \int_{t_0}^{t_f} [3x^2(t) + 2x(t) + 6] dt \quad (4.8)$$

Inicialmente, calculamos o incremento. Portanto,

$$\Delta J = J(x(t) + \delta x(t)) - J(x(t)),$$

$$\Delta J = \int_{t_0}^{t_f} [3(x(t) + \delta x(t))^2 + 2(x(t) + \delta x(t)) + 6] - [3x^2(t) + 2x(t) + 6] dt,$$

$$\Delta J = \int_{t_0}^{t_f} [6x(t)\delta x(t) + 3(\delta x(t))^2 + 2\delta x(t)] dt. \quad (4.9)$$

Tomando os termos de primeira ordem, obtemos a (primeira) variação do funcional

$$\delta J(x(t), \delta x(t)) = \int_{t_0}^{t_f} (6x(t) + 2)\delta x(t) dt. \quad (4.10)$$

□

Definição 4.3 Um funcional J com domínio Ω tem um extremo relativo (máximo ou mínimo) em x^* ($*$ indica a condição ótima) se existe um $\varepsilon > 0$ tal que, para todas as funções $x \in \Omega$ que satisfaçam $|x - x^*| < \varepsilon$, o incremento de J tem o mesmo sinal.

Em outras palavras, se $\Delta J = J(x) - J(x^*) \geq 0$, x^* é um mínimo relativo; se $\Delta J = J(x) - J(x^*) \leq 0$, x^* é um máximo relativo.

Se estas condições forem satisfeitas para ε suficientemente grande, então $J(x^*)$ é um máximo ou mínimo absoluto ou global.

A seguir, mostraremos dois importantes resultados que serão utilizados na busca de candidatos a extremos de funcionais. As provas destes resultados podem ser encontradas em [19, 22].

Lema 4.1 *Se a função $g(t)$ é contínua em $[t_0, t_f]$ e*

$$\int_{t_0}^{t_f} g(t)\delta x(t)dt = 0 \quad (4.11)$$

para toda função $\delta x(t)$ contínua no intervalo $[t_0, t_f]$, então a função $g(t)$ deve ser zero em todo intervalo $[t_0, t_f]$. Este resultado é conhecido como **Lema Fundamental do Cálculo Variacional**.

Teorema 4.1 *Para $x^*(t)$ ser candidato a um ótimo, a (primeira) variação de J deve ser zero em $x^*(t)$, ou seja, $\delta J(x^*(t), \delta x(t)) = 0$ para todo $\delta x(t)$ admissível¹. Este teorema é conhecido como **Teorema Fundamental do Cálculo Variacional**.*

4.2 Problema variacional básico

4.2.1 Tempo final fixo e estado final fixo

Nesse caso, tempo e estado são fixados a priori. As condições iniciais são conhecidas.

Seja $x(t)$ uma função escalar com primeiras derivadas contínuas. O problema é encontrar uma função ótima $x^*(t)$ para a qual o funcional

$$J(x(t)) = \int_{t_0}^{t_f} V(x(t), \dot{x}(t), t)dt \quad (4.12)$$

tenha ótimo relativo, satisfazendo as restrições

$$\begin{cases} x(t_0) = x_0 \\ x(t_f) = x_f \end{cases} \quad (4.13)$$

¹Respeita a classe de funções consideradas (por exemplo, funções contínuas), bem como possíveis restrições (por exemplo, $x(t_0)$, $x(t_f)$ fixados, implica $\delta x(t_0) = \delta x(t_f) = 0$).

onde t_0 (tempo inicial), x_0 (estado inicial), t_f (tempo final) e x_f (estado final).

A seguir, listamos uma sequência de passos envolvidos na busca de soluções ideais para o sistema de estado com extremidade fixa.

1. *Assumir um ótimo;*
2. *Variações e incrementos;*
3. *Primeira variação (ou variação);*
4. *Teorema fundamental do cálculo variacional;*
5. *Equação Euler-Lagrange.*

1. Assumir um ótimo: Seja $x^*(t)$ um ótimo atingido para a função $x(t)$. Nesse caso existem $x_a(t)$ funções admissíveis tais que $x_a(t) = x^*(t) + \delta x(t)$ sejam próximas a $x^*(t)$, onde $\delta x(t)$ é a variação de $x(t)$, como mostra a Figura 4.2. A função $x_a(t)$ deve satisfazer as condições de contorno:

$$\begin{cases} x_a(t_0) = x_0 \\ x_a(t_f) = x_f \end{cases} \quad (4.14)$$

e, portanto, é necessário que

$$\delta x(t_0) = \delta x(t_f) = 0. \quad (4.15)$$

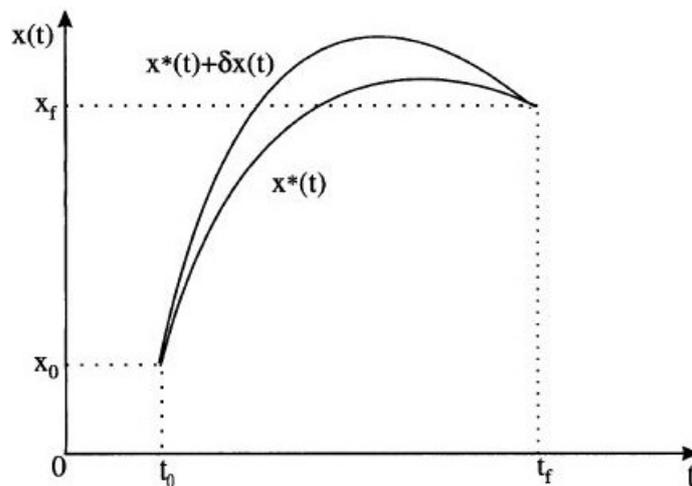


Figura 4.2: Tempo final fixo e sistema de estado com extremidade fixa
 Fonte: NAIDU, 2003, p.29

2. Variações e incrementos:

$$\begin{aligned}\Delta J(x^*(t), \delta x(t)) &= J(x^*(t) + \delta x(t), \dot{x}^*(t) + \delta \dot{x}(t), t) - J(x^*(t), \dot{x}^*(t), t) = \\ &= \int_{t_0}^{t_f} V(x^*(t) + \delta x(t), \dot{x}^*(t) + \delta \dot{x}(t), t) dt - \int_{t_0}^{t_f} V(x^*(t), \dot{x}^*(t), t) dt\end{aligned}\quad (4.16)$$

onde,

$$\dot{x}(t) = \frac{d}{dt}[x(t)], \quad \delta \dot{x}(t) = \frac{d}{dt}[\delta x(t)]\quad (4.17)$$

Expandindo V do primeiro funcional de (4.16), em série de Taylor, em torno de $x^*(t)$ e $\dot{x}^*(t)$ temos

$$\begin{aligned}\Delta J &= \int_{t_0}^{t_f} \left[V(x^*(t), \dot{x}^*(t), t) + \overbrace{\frac{\partial V(x^*(t), \dot{x}^*(t), t)}{\partial x} \delta x(t) + \frac{\partial V(x^*(t), \dot{x}^*(t), t)}{\partial \dot{x}} \delta \dot{x}(t)}^{\delta J} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2!} \left\{ \frac{\partial^2 V(\dots)}{\partial x^2} (\delta x(t))^2 + \frac{\partial^2 V(\dots)}{\partial \dot{x}^2} (\delta \dot{x}(t))^2 + 2 \frac{\partial^2 V(\dots)}{\partial x \partial \dot{x}} \delta x(t) \delta \dot{x}(t) \right\} \right. \\ &\quad \left. + \dots - V(x^*(t), \dot{x}^*(t), t) \right] dt\end{aligned}\quad (4.18)$$

3. Primeira variação (ou variação): Considerando os termos lineares obtemos a primeira variação

$$\delta J(x^*(t), \delta x(t)) = \int_{t_0}^{t_f} \left[\overbrace{\frac{\partial V(x^*(t), \dot{x}^*(t), t)}{\partial x} \delta x(t)}^I + \overbrace{\frac{\partial V(x^*(t), \dot{x}^*(t), t)}{\partial \dot{x}} \delta \dot{x}(t)}^{II} \right] dt\quad (4.19)$$

Integrando II por partes, obtemos

$$\int_{t_0}^{t_f} \left(\frac{\partial V}{\partial \dot{x}} \right)_* \delta \dot{x}(t) dt = \left[\left(\frac{\partial V}{\partial \dot{x}} \right)_* \delta x(t) \right] \Big|_{t_0}^{t_f} - \int_{t_0}^{t_f} \delta x(t) \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial V}{\partial \dot{x}} \right)_* dt.\quad (4.20)$$

Todas as curvas admissíveis devem passar pelos pontos $(t_0, x(t_0))$ e $(t_f, x(t_f))$ logo, $\delta x(t_0) = \delta x(t_f) = 0$, então $\left[\left(\frac{\partial V}{\partial \dot{x}} \right)_* \delta x(t) \right] \Big|_{t_0}^{t_f} = 0$.

Assim,

$$\delta J(x^*(t), \delta x(t)) = \int_{t_0}^{t_f} \left[\left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)_* \delta x(t) - \delta x(t) \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial V}{\partial \dot{x}} \right)_* \right] dt.$$

Evidenciando $\delta x(t)$ no integrando obtemos:

$$\delta J(x^*(t), \delta x(t)) = \int_{t_0}^{t_f} \left[\left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)_* - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial V}{\partial \dot{x}} \right)_* \right] \delta x(t) dt. \quad (4.21)$$

4. Teorema fundamental do cálculo variacional: Pelo Teorema 4.1, temos que $\delta J(x^*(t), \delta x(t)) = 0$, assim

$$\int_{t_0}^{t_f} \left[\left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)_* - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial V}{\partial \dot{x}} \right)_* \right] \delta x(t) dt = 0. \quad (4.22)$$

5. Equação Euler-Lagrange: Aplicando o Lema 4.1, chegamos a Equação de Euler-Lagrange

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)_* - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial V}{\partial \dot{x}} \right)_* = 0, \quad \forall t \in [t_0, t_f]. \quad (4.23)$$

4.3 Multiplicadores de Lagrange

O método dos multiplicadores de Lagrange permite encontrar extremos (máximos e mínimos) de uma função de uma ou mais variáveis sujeitas a uma ou mais restrições.

Por exemplo, para obter o extremo de uma função $f(x_1, x_2)$ sujeita a condição (ou restrição)

$$g(x_1, x_2) = 0. \quad (4.24)$$

Para tal método, definimos a função de Lagrange ou Lagrangiano do problema de otimização como:

$$L(x_1, x_2, \lambda) = f(x_1, x_2) + \lambda g(x_1, x_2), \quad (4.25)$$

onde λ é o *multiplicador de Lagrange* a ser determinado. Usando (4.24) no Lagrangiano (4.25), temos

$$L(x_1, x_2, \lambda) = f(x_1, x_2) \quad (4.26)$$

e a condição necessária para extremo é

$$df = dL = 0 \quad (4.27)$$

e, nesse caso,

$$dL = df + \lambda dg = 0, \quad (4.28)$$

onde

$$\begin{cases} df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 \\ dg = \frac{\partial g}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial g}{\partial x_2} dx_2. \end{cases} \quad (4.29)$$

Assim,

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x_1} + \lambda \frac{\partial g}{\partial x_1} \right] dx_1 + \left[\frac{\partial f}{\partial x_2} + \lambda \frac{\partial g}{\partial x_2} \right] dx_2 = 0. \quad (4.30)$$

Vamos escolher dx_1 como diferencial independente e assim dx_2 torna-se um diferencial dependente. Em seguida vamos tomar λ com o objetivo de fazer com que um dos coeficientes de dx_1 ou dx_2 em (4.30) seja zero. Por exemplo, se deixarmos λ assumir o valor λ^* , isto torna o coeficiente do diferencial dependente dx_2 igual a zero, ou seja,

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} + \lambda^* \frac{\partial g}{\partial x_2} = 0. \quad (4.31)$$

Com o resultado (4.31), a equação (4.30) se reduz a

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x_1} + \lambda \frac{\partial g}{\partial x_1} \right] dx_1 = 0. \quad (4.32)$$

Para que (4.32) seja satisfeito para todo dx_1 , seu coeficiente deve ser igual a zero, isto é

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} + \lambda^* \frac{\partial g}{\partial x_1} = 0. \quad (4.33)$$

De (4.25) temos

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0, \quad (4.34)$$

nos fornecendo a relação (4.24). Combinando os resultados de (4.33), (4.31) e (4.34) temos

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial x_1} + \lambda^* \frac{\partial g}{\partial x_1} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial x_2} = \frac{\partial f}{\partial x_2} + \lambda^* \frac{\partial g}{\partial x_2} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = g(x_1^*, x_2^*) = 0 \end{cases} \quad (4.35)$$

Teorema 4.2 *Considere os extremos de uma função contínua $f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ sujeita as condições*

$$\begin{cases} g_1(\mathbf{x}) = g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ g_2(\mathbf{x}) = g_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ g_m(\mathbf{x}) = g_m(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \end{cases} \quad (4.36)$$

onde f e \mathbf{g} têm derivadas parciais contínuas, e $m < n$. Sejam $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ os multiplicadores de Lagrange correspondente às condições dadas tal que o Lagrangiano aumentado é

$$L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = f(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{g}(\mathbf{x}), \quad (4.37)$$

onde $\boldsymbol{\lambda}^T$ é a transposta de $\boldsymbol{\lambda}$. Os valores ótimos \mathbf{x}^* e $\boldsymbol{\lambda}^*$ são as soluções do sistema composto por $n + m$ equações

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} + \boldsymbol{\lambda}^T \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\lambda}} = \mathbf{g}(\mathbf{x}) = 0. \end{cases} \quad (4.38)$$

4.4 Extremo de funcionais com condições

Consideremos um funcional com 2 variáveis. Considere a extremização do índice de desempenho dado pelo funcional

$$J(x_1(t), x_2(t), t) = \int_{t_0}^{t_f} V(x_1(t), x_2(t), \dot{x}_1(t), \dot{x}_2(t), t) dt \quad (4.39)$$

sujeito a condição

$$g(x_1(t), x_2(t), \dot{x}_1(t), \dot{x}_2(t)) = 0 \quad (4.40)$$

condições fixas

$$\begin{aligned}x_1(t_0) &= x_{10}; & x_2(t_0) &= x_{20} \\x_1(t_f) &= x_{1f}; & x_2(t_f) &= x_{2f}\end{aligned}\tag{4.41}$$

Vamos resolver esse problema nos passos a seguir.

1. *Lagrangiano;*
2. *Variações e incrementos;*
3. *Primeira variação;*
4. *Teorema fundamental do cálculo variacional;*
5. *Lema fundamental do cálculo variacional;*
6. *Equação Euler-Lagrange.*

1. **Lagrangiano:** Formar um funcional aumentado que chamaremos Lagrangiano

$$\begin{aligned}L(x_1(t), x_2(t), \dot{x}_1(t), \dot{x}_2(t), \lambda(t), t) &= V(x_1(t), x_2(t), \dot{x}_1(t), \dot{x}_2(t), t) \\ &+ \lambda g(x_1(t), x_2(t), \dot{x}_1(t), \dot{x}_2(t))\end{aligned}\tag{4.42}$$

2. **Variações e incrementos:**

$$\begin{aligned}x_i(t) &= x_i^*(t) + \delta x_i(t), & \dot{x}_i(t) &= \dot{x}_i^*(t) + \delta \dot{x}_i(t), & i &= 1, 2 \\ \Delta J &= J(x_i^*(t) + \delta x_i(t), \dot{x}_i^*(t) + \delta \dot{x}_i(t), t) - J(x_i^*(t), \dot{x}_i^*(t), t)\end{aligned}\tag{4.43}$$

3. **Primeira variação:** Usando expansão em Série de Taylor em torno de δx_i e $\delta \dot{x}_i$ e retendo os termos lineares obtemos

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_f} \left[\left(\frac{\partial L}{\partial x_1} \right)_* \delta x_1(t) + \left(\frac{\partial L}{\partial x_2} \right)_* \delta x_2(t) + \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} \right)_* \delta \dot{x}_1(t) + \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} \right)_* \delta \dot{x}_2(t) \right] dt.\tag{4.44}$$

Usando integração por partes, temos

$$\begin{aligned}\int_{t_0}^{t_f} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} \right)_* \delta \dot{x}_1(t) dt &= \int_{t_0}^{t_f} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} \right)_* \frac{d}{dt} [\delta x_1(t)] dt \\ &= \int_{t_0}^{t_f} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} \right)_* d[\delta x_1(t)]\end{aligned}$$

$$= \left[\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} \right)_* \delta x_1(t) \right] \Big|_{t_0}^{t_f} - \int_{t_0}^{t_f} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} \right)_* \delta x_1(t) dt. \quad (4.45)$$

Considerando as variações

$$\delta x_1(t_0) = \delta x_2(t_0) = \delta x_1(t_f) = \delta x_2(t_f) = 0 \quad (4.46)$$

obtemos

$$\int_{t_0}^{t_f} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} \right)_* \delta \dot{x}_1(t) dt = - \int_{t_0}^{t_f} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} \right)_* \delta x_1(t) dt. \quad (4.47)$$

Usando raciocínio análogo, obtemos

$$\int_{t_0}^{t_f} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} \right)_* \delta \dot{x}_2(t) dt = - \int_{t_0}^{t_f} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} \right)_* \delta x_2(t) dt. \quad (4.48)$$

Substituindo (4.47) e (4.48) em (4.44), temos

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_f} \left[\left(\frac{\partial L}{\partial x_1} \right)_* - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} \right)_* \right] \delta x_1(t) dt + \int_{t_0}^{t_f} \left[\left(\frac{\partial L}{\partial x_2} \right)_* - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} \right)_* \right] \delta x_2(t) dt. \quad (4.49)$$

4. Teorema Fundamental do Cálculo Variacional: Para a existência do ótimo, $\delta J = 0$, logo

$$\int_{t_0}^{t_f} \left[\left(\frac{\partial L}{\partial x_1} \right)_* - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} \right)_* \right] \delta x_1(t) dt + \int_{t_0}^{t_f} \left[\left(\frac{\partial L}{\partial x_2} \right)_* - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} \right)_* \right] \delta x_2(t) dt = 0. \quad (4.50)$$

5. Lema Fundamental do Cálculo Variacional: O Lema nos permite concluir que

$$\left(\frac{\partial L}{\partial x_1} \right)_* - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} \right)_* = 0 \quad (4.51)$$

$$\left(\frac{\partial L}{\partial x_2} \right)_* - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} \right)_* = 0 \quad (4.52)$$

6. Equação de Euler-Lagrange:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\partial L}{\partial x_1} \right)_* - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} \right)_* = 0 \\ \left(\frac{\partial L}{\partial x_2} \right)_* - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} \right)_* = 0 \\ \left(\frac{\partial L}{\partial \lambda} \right)_* - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\lambda}} \right)_* = 0 \end{array} \right. \quad (4.53)$$

O sistema precisou ser completado com equações referentes aos multiplicadores de Lagrange para existência de solução. Este resultado pode ser generalizado para um sistema de n -ésima ordem. Para isso considere a extremização de um funcional

$$J = \int_{t_0}^{t_f} V(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t), t) dt, \quad (4.54)$$

onde $\mathbf{x}(t)$ é um vetor de estado de dimensão n , sujeito as condições

$$g_i(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t), t) = 0; \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (4.55)$$

e com condições de contorno fixas $\mathbf{x}(0)$ e $\mathbf{x}(t_f)$. Nesse caso, obtemos a Equação de Euler-Lagrange

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}} \right)_* - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \right)_* = 0 \\ \left(\frac{\partial L}{\partial \lambda} \right)_* - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\lambda}} \right)_* = 0. \end{array} \right. \quad (4.56)$$

4.5 Aproximação variacional para sistemas de controle ótimo

4.5.1 Problema do custo terminal

O índice de desempenho pode assumir três formas. A forma mais genérica é retratada na forma do Problema de Bolza, apresentada na equação (4.58), onde a primeira parcela se refere ao estado final do processo, chamado termo de Mayer, e a outra está relacionada ao desempenho ao longo da trajetória do sistema, chamado termo de Lagrange. Vamos considerar o sistema

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) \quad (4.57)$$

com índice de desempenho

$$J(\mathbf{u}(t)) = S(\mathbf{x}(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} V(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) dt \quad (4.58)$$

e condições de contorno

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad \mathbf{x}(t_f) \text{ e } t_f \text{ livre} \quad (4.59)$$

onde \mathbf{x} e \mathbf{u} tem dimensões, respectivamente, n e r . Vejamos que

$$\int_{t_0}^{t_f} \frac{dS(\mathbf{x}(t), t)}{dt} dt = S(\mathbf{x}(t), t) \Big|_{t_0}^{t_f} = S(\mathbf{x}(t_f), t_f) - S(\mathbf{x}(t_0), t_0). \quad (4.60)$$

Usando essa informação em (4.58), obtemos

$$J(\mathbf{u}(t)) = \int_{t_0}^{t_f} \frac{dS(\mathbf{x}(t), t)}{dt} dt + S(\mathbf{x}(t_0), t_0) + \int_{t_0}^{t_f} V(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) dt, \quad (4.61)$$

que pode ser reescrito como

$$J(\mathbf{u}(t)) = \overbrace{\left[\int_{t_0}^{t_f} V(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) + \frac{dS(\mathbf{x}(t), t)}{dt} \right] dt}^{J_2(\mathbf{u}(t))} + S(\mathbf{x}(t_0), t_0), \quad (4.62)$$

onde

$$J_2(\mathbf{u}(t)) = \int_{t_0}^{t_f} V(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) dt + S(\mathbf{x}(t_f), t_f) - S(\mathbf{x}(t_0), t_0). \quad (4.63)$$

Como $S(\mathbf{x}(t_0), t_0)$ é fixo, otimizar J é equivalente a otimizar J_2 ; entretanto, o custo ótimo dos dois índices J e J_2 é diferente. Nosso interesse é encontrar o controle ótimo, feito isso podemos determinar o custo ótimo do índice de desempenho original J ao invés de J_2 . Note que

$$\frac{d[S(\mathbf{x}(t), t)]}{dt} = \left(\frac{\partial S}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \dot{\mathbf{x}}(t) + \frac{\partial S}{\partial t} \quad (4.64)$$

O procedimento está ilustrado nas etapas a seguir:

1. *Assumir as condições ótimas;*
2. *Variações de controles e vetores de estado;*

3. *Multiplicadores de Lagrange;*

4. *Lagrangiano;*

5. *Primeira variação;*

6. *Condição para extremo;*

7. *Hamiltoniano.*

1. *Assumir as condições ótimas:* Vamos assumir que existam ótimos $\mathbf{x}^*(t)$ e $\mathbf{u}^*(t)$ para estado e controle, respectivamente. Então

$$J(\mathbf{u}^*(t)) = \int_{t_0}^{t_f} \left[V(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t), t) + \frac{dS(\mathbf{x}^*(t), t)}{dt} \right] dt$$

$$\dot{\mathbf{x}}^*(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t), t) \quad (4.65)$$

2. *Variações de controles e vetores de estado:* Considere as variações (perturbações) nos vetores de estado e controle

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}^*(t) + \delta\mathbf{x}(t); \quad \mathbf{u}(t) = \mathbf{u}^*(t) + \delta\mathbf{u}(t). \quad (4.66)$$

Logo, a equação de estado (4.57) e o índice de desempenho J_2 (4.63) são

$$\dot{\mathbf{x}}^*(t) + \delta\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}^*(t) + \delta\mathbf{x}(t), \mathbf{u}^*(t) + \delta\mathbf{u}(t), t)$$

$$J(\mathbf{u}(t)) = \int_{t_0}^{t_f + \delta t_f} \left[V(\mathbf{x}^*(t) + \delta\mathbf{x}(t), \mathbf{u}^*(t) + \delta\mathbf{u}(t), t) + \frac{dS}{dt} \right] dt \quad (4.67)$$

3. *Multiplicadores de Lagrange:* Vamos construir o índice de desempenho aumentado na condição ótima.

$$J_a(\mathbf{u}^*(t)) = \int_{t_0}^{t_f} \left[V(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t), t) + \left(\frac{\partial S}{\partial \mathbf{x}} \right)_*^T \dot{\mathbf{x}}^*(t) + \left(\frac{\partial S}{\partial t} \right)_* \right. \\ \left. + \boldsymbol{\lambda}^T(t) \{ \mathbf{f}(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t), t) - \dot{\mathbf{x}}^*(t) \} \right] dt \quad (4.68)$$

e em outra condição perturbada temos

$$J_a(\mathbf{u}(t)) = \int_{t_0}^{t_f + \delta t_f} [V(\mathbf{x}^*(t) + \delta\mathbf{x}(t), \mathbf{u}^*(t))$$

$$\begin{aligned}
& + \delta \mathbf{u}(t), t) + \left(\frac{\partial S}{\partial \mathbf{x}} \right)_*^T [\dot{\mathbf{x}}^*(t) + \delta \dot{\mathbf{x}}(t)] + \left(\frac{\partial S}{\partial t} \right)_* \\
& + \boldsymbol{\lambda}^T(t) [\mathbf{f}(\mathbf{x}^*(t) + \delta \mathbf{x}(t), \mathbf{u}^*(t) + \delta \mathbf{u}(t), t) - \{\dot{\mathbf{x}}^*(t) + \delta \dot{\mathbf{x}}(t)\}] dt \quad (4.69)
\end{aligned}$$

4. *Lagrangiano*: O Lagrangiano na condição ótima é dado por

$$\begin{aligned}
L = L(\mathbf{x}^*(t), \dot{\mathbf{x}}^*(t), \mathbf{u}^*(t), \boldsymbol{\lambda}(t), t) = V(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t), t) + \left(\frac{\partial S}{\partial \mathbf{x}} \right)_*^T \dot{\mathbf{x}}^*(t) + \frac{\partial S}{\partial t} \\
+ \boldsymbol{\lambda}^T(t) \{\mathbf{f}(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t), t) - \dot{\mathbf{x}}^*(t)\} \quad (4.70)
\end{aligned}$$

e em outra condição é

$$L^\delta = L^\delta(\mathbf{x}^*(t) + \delta \mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}^*(t) + \delta \dot{\mathbf{x}}(t), \mathbf{u}^*(t) + \delta \mathbf{u}(t), \boldsymbol{\lambda}(t), t) \quad (4.71)$$

$$\begin{aligned}
L^\delta = V(\mathbf{x}^*(t) + \delta \mathbf{x}(t), \mathbf{u}^*(t) + \delta \mathbf{u}(t), t) + \left(\frac{\partial S}{\partial \mathbf{x}} \right)_*^T [\dot{\mathbf{x}}^*(t) + \delta \dot{\mathbf{x}}(t)] + \left(\frac{\partial S}{\partial t} \right)_* \\
+ \boldsymbol{\lambda}^T(t) [\mathbf{f}(\mathbf{x}^*(t) + \delta \mathbf{x}(t), \mathbf{u}^*(t) + \delta \mathbf{u}(t), t) - \{\dot{\mathbf{x}}^*(t) + \delta \dot{\mathbf{x}}(t)\}]. \quad (4.72)
\end{aligned}$$

Com isso, os índices de desempenho $J_a(\mathbf{u}^*)$ e $J_a(\mathbf{u})$ ficam

$$J_a(\mathbf{u}^*(t)) = \int_{t_0}^{t_f} L(\mathbf{x}^*(t), \dot{\mathbf{x}}^*(t), \mathbf{u}^*(t), \boldsymbol{\lambda}(t), t) dt = \int_{t_0}^{t_f} L dt \quad (4.73)$$

$$J_a(\mathbf{u}(t)) = \int_{t_0}^{t_f + \delta t_f} L^\delta dt = \int_{t_0}^{t_f} L^\delta dt + \int_{t_f}^{t_f + \delta t_f} L^\delta dt. \quad (4.74)$$

Usando o teorema do valor médio para integrais e a expansão em série de Taylor retendo somente os termos lineares, temos

$$\int_{t_f}^{t_f + \delta t_f} L^\delta dt = L^\delta \Big|_{t_f} \delta t_f \quad (4.75)$$

$$L^\delta \Big|_{t_f} \delta t_f = L(\mathbf{x}^*(t_f) + \delta \mathbf{x}(t_f), \dot{\mathbf{x}}^*(t_f) + \delta \dot{\mathbf{x}}(t_f), \mathbf{u}^*(t_f) + \delta \mathbf{u}(t_f), \boldsymbol{\lambda}(t_f), t_f) \delta t_f \quad (4.76)$$

Em Taylor, expandimos L^δ em torno de δ :

$$\approx \left\{ L + \left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}} \right)_*^T \delta \mathbf{x}(t) + \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \right)_*^T \delta \dot{\mathbf{x}}(t) + \left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{u}} \right)_*^T \delta \mathbf{u}(t) \right\} \Big|_{t_f} \delta t_f \approx L \Big|_{t_f} \delta t_f \quad (4.77)$$

5. Primeira variação: Definimos o incremento ΔJ e usamos expansão em série de Taylor retendo somente os termos lineares, com isso obtemos a primeira variação δJ :

$$\Delta J = J_a(\mathbf{u}(t)) - J_a(\mathbf{u}^*(t)) \quad (4.78)$$

$$\Delta J = \int_{t_0}^{t_f} L^\delta dt + L \Big|_{t_f} \delta t_f - \int_{t_0}^{t_f} L dt \quad (4.79)$$

$$\Delta J = \int_{t_0}^{t_f} (L^\delta - L) dt + L \Big|_{t_f} \delta t_f. \quad (4.80)$$

Expandindo L^δ em série de Taylor, obtemos

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_f} \left\{ L + \left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}} \right)_*^T \delta \mathbf{x}(t) + \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \right)_*^T \delta \dot{\mathbf{x}}(t) + \left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{u}} \right)_*^T \delta \mathbf{u}(t) - L \right\} dt + L \Big|_{t_f} \delta t_f. \quad (4.81)$$

A expressão $\int_{t_0}^{t_f} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \right)_*^T \delta \dot{\mathbf{x}}(t) dt$ é equivalente a $\int_{t_0}^{t_f} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \right)_*^T \frac{d}{dt} [\delta \mathbf{x}(t)] dt$. Integrando esta última por partes, temos

$$\int_{t_0}^{t_f} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \right)_*^T \frac{d}{dt} [\delta \mathbf{x}(t)] dt = \left[\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \right)_*^T \delta \mathbf{x}(t) \right] \Big|_{t_0}^{t_f} - \int_{t_0}^{t_f} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \right)_* \right]^T \delta \mathbf{x}(t) dt. \quad (4.82)$$

Como $\mathbf{x}(t_0)$ é fixo, então $\delta \mathbf{x}(t_0) = 0$. Agora usando (4.82) em (4.81) obtemos

$$\begin{aligned} \delta J = \int_{t_0}^{t_f} \left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}} \right)_*^T \delta \mathbf{x}(t) dt + \left[\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \right)_*^T \delta \mathbf{x}(t) \right] \Big|_{t_0}^{t_f} - \int_{t_0}^{t_f} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \right)_* \right]^T \delta \mathbf{x}(t) dt \\ + \int_{t_0}^{t_f} \left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{u}} \right)_*^T \delta \mathbf{u}(t) dt, \end{aligned} \quad (4.83)$$

que pode ser reescrito como

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_f} \left[\left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}} \right)_* - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \right)_* \right]^T \delta \mathbf{x}(t) dt + \int_{t_0}^{t_f} \left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{u}} \right)_*^T \delta \mathbf{u}(t) dt$$

$$+ \left[\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \right)_*^T \delta \mathbf{x}(t) \right] \Big|_{t_f} + L \Big|_{t_f} \delta t_f. \quad (4.84)$$

6. Condição para extremo: De acordo com o Teorema 4.1 a condição para extremo é que $\delta J = 0$. Em um sistema de controle como (4.57), $\delta \mathbf{u}(t)$ é a variação de controle independente e $\delta \mathbf{x}(t)$ é a variação de estado dependente. Primeiramente escolhemos $\boldsymbol{\lambda}(t) = \boldsymbol{\lambda}^*(t)$ e L^* tal que o coeficiente de variação dependente $\delta \mathbf{x}(t)$ em (4.84) seja nulo. Com isso, obtemos a Equação Euler-Lagrange.

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}} \right)_* - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \right)_* = 0. \quad (4.85)$$

Como a variação de controle independente $\delta \mathbf{u}(t)$ é arbitrária, o seu coeficiente de variação em (4.84) deve ser zero. Isto é

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{u}} \right)_* = 0. \quad (4.86)$$

Por fim a primeira variação (4.84) se reduz a

$$L^* \Big|_{t_f} \delta t_f + \left[\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \right)_*^T \delta \mathbf{x}(t) \right] \Big|_{t_f} = 0. \quad (4.87)$$

Note que o sistema (4.57) pode ser escrito em termos do Lagrangiano (4.70) na condição ótima L como

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\lambda}} \right)_* = 0 \quad (4.88)$$

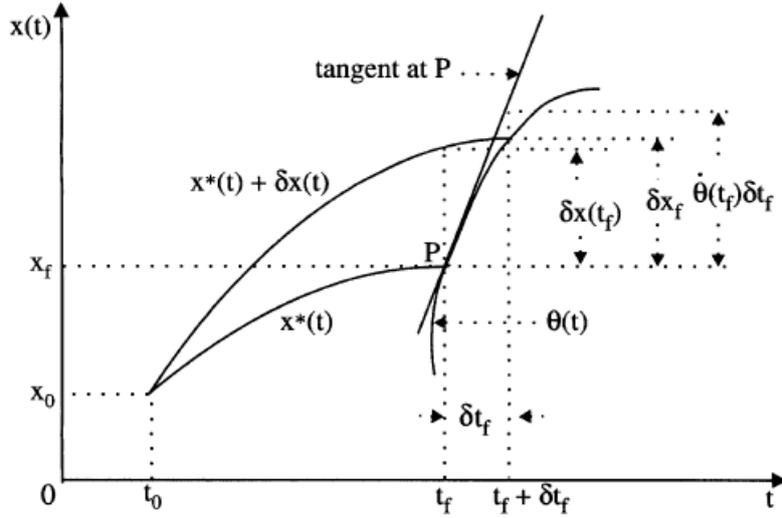


Figura 4.3: Condição de ponto final com um limite móvel $\theta(t)$

Fonte: NAIDU, 2003, p.63

Para transformar a expressão contendo $\delta \mathbf{x}(t)$ em (4.87) em uma expressão contendo $\delta \mathbf{x}_f$ (Figura 4.3), vamos aproximar a declividade de $\dot{\mathbf{x}}^*(t) + \delta \dot{\mathbf{x}}(t)$ em t_f por

$$\dot{\mathbf{x}}^*(t_f) + \delta \dot{\mathbf{x}}(t_f) \approx \frac{\delta \mathbf{x}_f - \delta \mathbf{x}(t_f)}{\delta t_f}, \quad (4.89)$$

que pode ser reescrito como

$$\delta \mathbf{x}_f = \delta \mathbf{x}(t_f) + \{\dot{\mathbf{x}}^*(t_f) + \delta \dot{\mathbf{x}}(t_f)\} \delta t_f. \quad (4.90)$$

e retendo somente os termos lineares em δ na relação (4.90), temos

$$\delta \mathbf{x}(t_f) = \delta \mathbf{x}_f - \dot{\mathbf{x}}^*(t_f) \delta t_f \quad (4.91)$$

Usando essa relação na condição de contorno (4.87) temos a condição de contorno geral em termos do Lagrangiano

$$L^* \Big|_{t_f} \delta t_f + \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \right)^T \Big|_{*t_f} [\delta \mathbf{x}_f - \dot{\mathbf{x}}^*(t_f) \delta t_f] = 0 \quad (4.92)$$

que pode ser escrita como

$$\left[L^* - \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \right)^T \dot{\mathbf{x}}^*(t) \right]_{*t_f} \delta t_f + \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \right)^T \Big|_{*t_f} \delta \mathbf{x}_f = 0. \quad (4.93)$$

7. Hamiltoniano: Definimos o Hamiltoniano H^* (função H de Pontryagin) na condição ótima como

$$H^* = V(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t), t) + \boldsymbol{\lambda}^{*T}(t)\mathbf{f}(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t), t), \quad (4.94)$$

onde

$$H^* = H^*(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t), \boldsymbol{\lambda}^*(t), t).$$

Então, o Lagrangiano L^* em termos do Hamiltoniano H^* é

$$L^* = L^*(\mathbf{x}^*(t), \dot{\mathbf{x}}^*(t), \mathbf{u}^*(t), \boldsymbol{\lambda}^*(t), t),$$

o que implica

$$L^* = H^*(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t), \boldsymbol{\lambda}^*(t), t) + \left(\frac{\partial S}{\partial \mathbf{x}}\right)_*^T \dot{\mathbf{x}}^*(t) + \left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)_* - \boldsymbol{\lambda}^{*T}(t)\dot{\mathbf{x}}^*(t). \quad (4.95)$$

Usando o Lagrangiano (4.95) em (4.86), (4.85) e (4.88) e notando a função custo terminal, $S = S(\mathbf{x}(t), t)$, temos as equações de controle, estado e coestado expressas em termos do Hamiltoniano. Assim, para o controle ótimo $\mathbf{u}^*(t)$, a equação (4.86) torna-se

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{u}}\right)_* = 0 \quad \longrightarrow \quad \left(\frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}}\right)_* = 0 \quad (4.96)$$

para o estado ótimo $\mathbf{x}^*(t)$, a equação Euler-lagrange (4.85) resulta em

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}}\right)_* - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L^*}{\partial \dot{\mathbf{x}}}\right)_* = 0 \quad (4.97)$$

o que leva a

$$\left(\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}\right)_* + \left(\frac{\partial^2 S}{\partial \mathbf{x}^2}\right)_*^T \dot{\mathbf{x}}^*(t) + \left(\frac{\partial^2 S}{\partial \mathbf{x} \partial t}\right)_* - \frac{d}{dt} \left\{ \left(\frac{\partial S}{\partial \mathbf{x}}\right)_*^T - \boldsymbol{\lambda}^*(t) \right\} = 0 \quad (4.98)$$

isto implica

$$\left(\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}\right)_* = -\dot{\boldsymbol{\lambda}}^*(t) \quad (4.99)$$

e para o coestado

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\lambda}}\right)_* = 0 \quad \longrightarrow \quad \left(\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\lambda}}\right)_* = \dot{\mathbf{x}}^*(t) \quad (4.100)$$

Finalmente, usando a equação (4.95) na condição de contorno (4.93) temos

$$\begin{aligned} \left[H^* + \left(\frac{\partial S}{\partial \mathbf{x}} \right)_*^T \dot{\mathbf{x}}^* + \left(\frac{\partial S}{\partial t} \right)_* - \boldsymbol{\lambda}^{*T} \dot{\mathbf{x}}^* - \left[\left(\frac{\partial S}{\partial \mathbf{x}} \right)_*^T - \boldsymbol{\lambda}^{*T} \right] \dot{\mathbf{x}}^* \right]_{t_f} \delta t_f + \\ + \left[\left(\frac{\partial S}{\partial \mathbf{x}} \right)_*^T - \boldsymbol{\lambda}^{*T} \right]_{t_f} \delta \mathbf{x}_f = 0 \end{aligned} \quad (4.101)$$

o que implica

$$\left[H^* + \left(\frac{\partial S}{\partial t} \right)_* \right]_{t_f} \delta t_f + \left[\left(\frac{\partial S}{\partial \mathbf{x}} \right)_* - \boldsymbol{\lambda}^*(t) \right]_{t_f}^T \delta \mathbf{x}_f = 0 \quad (4.102)$$

Essa é a condição de contorno geral para o sistema de ponto final livre em termos do Hamiltoniano.

4.6 Controle linear quadrático

O *regulador linear quadrático* (LQR) é um controlador ótimo de ampla utilização, com diversas aplicações. De acordo com [14], com o sistema inicialmente deslocado do equilíbrio, ele retornará ao estado de equilíbrio de forma a minimizar um determinado índice de desempenho. Os ganhos relacionados aos estados para obter a lei de controle são alcançados através da solução da equação algébrica de Riccati.

4.6.1 Formulação do problema

Considere um sistema linear

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t) \quad (4.103)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}(t)\mathbf{x}(t) \quad (4.104)$$

com índice de desempenho

$$\begin{aligned} J(\mathbf{u}(t)) = J(\mathbf{x}(t_0), \mathbf{u}(t), t_0) = \frac{1}{2} [\mathbf{z}(t_f) - \mathbf{y}(t_f)]^T \mathbf{F}(t_f) [\mathbf{z}(t_f) - \mathbf{y}(t_f)] \\ + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \left([\mathbf{z}(t_f) - \mathbf{y}(t_f)]^T \mathbf{Q}(t) [\mathbf{z}(t) - \mathbf{y}(t)] + \mathbf{u}^T(t) \mathbf{R}(t) \mathbf{u}(t) \right) dt \end{aligned} \quad (4.105)$$

onde, $\mathbf{x}(t)$ é o *vetor de estado*, $\mathbf{y}(t)$ *vetor de saída*, $\mathbf{z}(t)$ *vetor de saída desejada*, $\mathbf{u}(t)$ *vetor de controle*, $\mathbf{e}(t) = \mathbf{z}(t) - \mathbf{y}(t)$ é o *vetor erro*, $\mathbf{A}(t)$ é a *matriz de estado* $n \times n$, $\mathbf{B}(t)$ é a *matriz de controle* $n \times r$ e $\mathbf{C}(t)$ é a *matriz de saída* $m \times n$. Assumimos que

o controle $\mathbf{u}(t)$ é sem restrições, $0 < m \leq r \leq n$, e todos os estados e(ou) saídas são completamente mensuráveis²

A matriz $\mathbf{Q}(t)$ é chamada *matriz de erro ponderado*, nesse caso a integral da expressão $\frac{1}{2}\mathbf{e}(t)^T\mathbf{Q}(t)\mathbf{e}(t)dt$ deve ser pequena e não negativa, portanto, $\mathbf{Q}(t)$ deve ser semidefinida positiva. A matriz $\mathbf{R}(t)$ é chamada *matriz de controle ponderado*, sua natureza quadrática $\frac{1}{2}\mathbf{u}(t)^T\mathbf{R}(t)\mathbf{u}(t)$ indica um alto custo para maior controle. Como esse custo deve ser positivo, $\mathbf{R}(t)$ será definida positiva. E a matriz $\mathbf{F}(t_f)$ é chamada de *matriz custo terminal*, que deve ser semidefinida positiva. Ela garante que o erro seja o menor possível no tempo final t_f .

4.6.2 Regulador quadrático linear de tempo finito

O objetivo é manter o estado $\mathbf{x}(t)$ próximo de zero durante um período de interesse (ou seja, $\mathbf{z}(t) = 0$ e $\mathbf{C}(t) = I$). Considere

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t) \quad (4.106)$$

com um custo funcional

$$J(\mathbf{u}) = J(\mathbf{x}(t_0), \mathbf{u}(t), t_0)$$

$$J(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^T(t_f)\mathbf{F}(t_f)\mathbf{x}(t_f) + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f} [\mathbf{x}^T(t)\mathbf{Q}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{u}^T(t)\mathbf{R}(t)\mathbf{u}(t)]dt,$$

Escrevendo em forma matricial temos

$$J(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^T(t_f)\mathbf{F}(t_f)\mathbf{x}(t_f) + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f} [\mathbf{x}^T(t)\mathbf{u}^T(t)] \begin{bmatrix} \mathbf{Q}(t) & 0 \\ 0 & \mathbf{R}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{u}(t) \end{bmatrix} dt. \quad (4.107)$$

Nesse caso, o estado desejado é $\mathbf{z}(t) = 0$ e portanto, $\mathbf{e}(t) = 0 - \mathbf{x}(t)$, implicando num sistema regulador de estado. Para encontrarmos a solução ótima de um controle linear quadrático usaremos o procedimento de Pontryagin seguindo os passos abaixo.

1. Hamiltoniano: Com a definição Hamiltoniana dada por (4.94), junto com o índice de desempenho (4.107), formulamos o Hamiltoniano da seguinte forma

$$H(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \boldsymbol{\lambda}(t)) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^T\mathbf{Q}(t)\mathbf{x}(t) + \frac{1}{2}\mathbf{u}^T(t)\mathbf{R}(t)\mathbf{u}(t) + \boldsymbol{\lambda}^T(t)[\mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t)],$$

²São funções que apresentam comportamento suficientemente simples para que se possa desenvolver uma teoria de integração.

$$(4.108)$$

onde $\boldsymbol{\lambda}(t)$ é o vetor de coestado (multiplicador de Lagrange).

2. Controle ótimo: Obtemos o controle ótimo $\mathbf{u}^*(t)$ usando a equação (4.96) como

$$\left(\frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} \right)_* = 0 \Rightarrow \mathbf{R}(t)\mathbf{u}^*(t) + \mathbf{B}^T(t)\boldsymbol{\lambda}^*(t) = 0, \quad (4.109)$$

o que nos leva a

$$\mathbf{u}^*(t) = -\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}^T(t)\boldsymbol{\lambda}^*(t). \quad (4.110)$$

Como $\mathbf{R}(t)$ é definida positiva então existe a inversa $\mathbf{R}^{-1}(t)$.

3. Sistemas de estado e coestado: As equações de estado e coestado, obtidas de acordo com (4.99) e (4.100), resultam em

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}^*(t) = \left(\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} \right)_* = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}^*(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}^*(t) \\ \dot{\boldsymbol{\lambda}}^*(t) = -\left(\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\lambda}} \right)_* = -\mathbf{Q}(t)\mathbf{x}^*(t) - \mathbf{A}^T(t)\boldsymbol{\lambda}^*(t). \end{cases} \quad (4.111)$$

Substituímos a equação de controle (4.110) na equação de estado do sistema (4.111) e assim obtemos o sistema Hamiltoniano de equações

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}^*(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}^*(t) - \mathbf{B}(t)\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}^T(t)\boldsymbol{\lambda}^*(t) \\ \dot{\boldsymbol{\lambda}}^*(t) = -\mathbf{Q}(t)\mathbf{x}^*(t) - \mathbf{A}^T(t)\boldsymbol{\lambda}^*(t), \end{cases} \quad (4.112)$$

ou

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}^*(t) \\ \dot{\boldsymbol{\lambda}}^*(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}(t) & -\mathbf{B}(t)\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}^T(t) \\ -\mathbf{Q}(t) & -\mathbf{A}^T(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}^*(t) \\ \boldsymbol{\lambda}^*(t) \end{bmatrix}. \quad (4.113)$$

A condição geral de contorno (4.102) é retratada aqui como

$$\left[H^* + \frac{\partial S}{\partial t} \right]_{t_f} \delta t_f + \left[\left(\frac{\partial S}{\partial \mathbf{x}} \right)_* - \boldsymbol{\lambda}^*(t) \right]_{t_f}^T \delta \mathbf{x}_f = 0 \quad (4.114)$$

sendo t_f fixo, então $\delta t_f = 0$ e a condição de contorno geral se resume a

$$\left(\frac{\partial S}{\partial \mathbf{x}}\right)_* - \boldsymbol{\lambda}^*(t) = 0 \Rightarrow \boldsymbol{\lambda}^*(t_f) = \left(\frac{\partial S}{\partial \mathbf{x}(t_f)}\right)_* \Rightarrow \boldsymbol{\lambda}^*(t_f) = \mathbf{F}(t_f)\mathbf{x}^*(t_f) \quad (4.115)$$

4. *Laço fechado:* Vamos buscar uma relação entre $\mathbf{x}(t)$ e $\boldsymbol{\lambda}(t)$ fazendo

$$\boldsymbol{\lambda}^*(t) = \mathbf{P}(t)\mathbf{x}^*(t), \quad (4.116)$$

onde $\mathbf{P}(t)$ ainda está para ser determinada. Substituindo (4.116) em (4.110), temos

$$\mathbf{u}^*(t) = -\mathbf{R}(t)^{-1}\mathbf{B}^T(t)\mathbf{P}(t)\mathbf{x}^*(t). \quad (4.117)$$

Diferenciando a relação (4.116) com relação a t

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}}^*(t) = \dot{\mathbf{P}}(t)\mathbf{x}^*(t) + \mathbf{P}(t)\dot{\mathbf{x}}^*(t). \quad (4.118)$$

Usando as equações (4.117) e (4.116), respectivamente, no estado e coestado do sistema (4.111) obtemos as equações

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}^*(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}^*(t) - \mathbf{B}(t)\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}^T(t)\mathbf{P}(t)\mathbf{x}^*(t) \\ \dot{\boldsymbol{\lambda}}^*(t) = -\mathbf{Q}(t)\mathbf{x}^*(t) - \mathbf{A}^T(t)\mathbf{P}(t)\mathbf{x}^*(t). \end{cases} \quad (4.119)$$

A Substituição de (4.118) em (4.119) nos fornece

$$\begin{aligned} -\mathbf{Q}(t)\mathbf{x}^*(t) - \mathbf{A}^T(t)\mathbf{P}(t)\mathbf{x}^*(t) &= \dot{\mathbf{P}}(t)\mathbf{x}^*(t) + \\ \mathbf{P}(t) [\mathbf{A}(t)\mathbf{x}^*(t) - \mathbf{B}(t)\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}^T(t)\mathbf{P}(t)\mathbf{x}^*(t)] &\Rightarrow \\ \left[\dot{\mathbf{P}}(t) + \mathbf{P}(t)\mathbf{A}(t) + \mathbf{A}^T(t)\mathbf{P}(t) + \mathbf{Q}(t) - \mathbf{P}(t)\mathbf{B}(t)\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}^T(t)\mathbf{P}(t) \right] \mathbf{x}^*(t) &= 0 \end{aligned} \quad (4.120)$$

Percebe-se que ao introduzir a equação (4.118), o coestado $\boldsymbol{\lambda}^*(t)$ foi eliminado. A matriz $\mathbf{P}(t)$ não depende do estado inicial, sendo assim a equação (4.120) será válida para quaisquer valores de $\mathbf{x}^*(t)$. Logo $\mathbf{P}(t)$ deve satisfazer a equação diferencial

$$\dot{\mathbf{P}}(t) + \mathbf{P}(t)\mathbf{A}(t) + \mathbf{A}^T(t)\mathbf{P}(t) + \mathbf{Q}(t) - \mathbf{P}(t)\mathbf{B}(t)\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}^T(t)\mathbf{P}(t) = 0. \quad (4.121)$$

Essa equação é chamada de *equação diferencial de Riccati*. A matriz $\mathbf{P}(t)$ é a *matriz dos coeficientes de Riccati* ou *matriz de Riccati*.

Se $\dot{\mathbf{P}}(t) = 0$ então temos a *equação algébrica de Riccati*

$$\mathbf{P}(t)\mathbf{A}(t) + \mathbf{A}^T(t)\mathbf{P}(t) + \mathbf{Q}(t) - \mathbf{P}(t)\mathbf{B}(t)\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}^T(t)\mathbf{P}(t) = 0. \quad (4.122)$$

Comparando a condição de contorno geral (4.115) e a equação de Riccati (4.116), temos a condição final em $\mathbf{P}(t)$ como

$$\boldsymbol{\lambda}^*(t_f) = \mathbf{P}(t_f)\mathbf{x}^*(t_f) = \mathbf{F}(t_f)\mathbf{x}^*(t_f) \quad (4.123)$$

o que implica

$$\mathbf{P}(t_f) = \mathbf{F}(t_f) \quad (4.124)$$

Toda a teoria apresentada até o momento está relacionada a sistemas lineares. A seguir apresentamos um teorema que nos fornece condições para que a teoria de controle ótimo para sistemas lineares possa ser aplicada a sistemas não lineares.

Teorema 4.3 (Rafikov e Balthazar) *Se existem matrizes $Q(t)$ e $R(t)$, definidas positiva, sendo Q simétrica, de modo que a função*

$$l(y) = y^T Q y - h^T(y) P y - y^T P h(y) \quad (4.125)$$

é definida positiva, então o controle

$$u = -R^{-1} B^T P(t) y \quad (4.126)$$

é ótimo, no sentido de que transfere o sistema não linear

$$\frac{dy}{dt} = A(t)y + h(y) + Bu, \quad y(0) = y_0 \quad (4.127)$$

de um estado inicial para o estado final

$$y(t_f) = 0 \quad (4.128)$$

minimizando o funcional

$$J = \int_0^{t_f} [l(y) + u^T R u] dt, \quad (4.129)$$

onde a matriz simétrica $P(t)$, definida positiva $\forall t \in [0, t_f]$ é a solução da equação diferencial de Riccati:

$$\dot{P} + PA + A^T P - PBR^{-1}B^T P + Q = 0 \quad (4.130)$$

satisfazendo a condição final

$$P(t_f) = 0. \quad (4.131)$$

Além disso, com o controle (4.126), existe uma vizinhança $\theta_0 \subset \theta, \theta \subset R^n$, da origem que, $y_0 \in \theta_0$, a solução $y(t) = 0, t \geq 0$, do sistema controlado (4.127) é localmente assintoticamente estável, e $J_{min} = y_0^T P(0)y_0$.

Finalmente, se $\theta = R^n$, então a solução $y(t) = 0, t \geq 0$, do sistema controlado (4.127) é globalmente assintoticamente estável.

■

A demonstração deste teorema pode ser encontrada em [8].

Corolário 4.1 *Se o intervalo de tempo é infinito e as matrizes A, B, Q e R são matrizes com elementos constantes, então a matriz definida positiva P é a solução da equação matricial algébrica não-linear de Riccati*

$$PA + A^T P - PBR^{-1}B^T P + Q = 0. \quad (4.132)$$

Capítulo 5

Controle ótimo em um modelo de sarampo

Neste capítulo formulamos um problema de minimização funcional quadrática em tempo infinito da população infectada. Duas técnicas para o controle da disseminação do sarampo serão considerados para se obter a melhor estratégia: vacinação e tratamento. Diferentes cenários são analisados combinando os esforços de controle do sarampo mencionados, a fim de fornecer diretrizes para avaliar a melhor política a ser adotada.

A teoria do controle ótimo é um campo da Matemática bastante utilizado no controle de doenças infecciosas. Foi inicialmente elaborada por engenheiros com a finalidade de regular a dinâmica de sistemas mecânicos. Essa teoria preocupa-se com as alterações dependentes do tempo (dinâmica) de sistemas complexos e como eles podem ser controlados através de *feedback*¹ ou controle com realimentação. No capítulo anterior apresentamos o Teorema 4.3, proposto por Rafikov e Balthazar [8], que apresenta um método para encontrar o controle ótimo linear *feedback*. É este o Teorema que será utilizado para obtermos estratégias ótimas de vacinação e tratamento.

¹Um sistema de controle de *feedback* tem sua saída controlada usando sua medição como um sinal de *feedback*. Este é comparado com um sinal de referência para gerar um erro que é filtrado por um controlador para produzir a entrada de controle do sistema.

5.1 Controle ótimo do sarampo

Consideremos o modelo SEIR (suscetível, exposto, infectado e recuperado) proposto em [5] para descrever a dinâmica de transmissão do sarampo em uma população homoganeamente distribuída em uma região de interesse. Na ausência de controle, as taxas de variação das populações ao longo do tempo são descritas pelo seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = b - \beta SI - \mu S \\ \frac{dE}{dt} = \beta SI - (\varepsilon + \mu)E \\ \frac{dI}{dt} = \varepsilon E - (\gamma + \mu)I \\ \frac{dR}{dt} = \gamma I - \mu R \end{cases} \quad (5.1)$$

onde $S(t)$ é a população suscetível, $E(t)$ é a população exposta, $I(t)$ é a população infecciosa e $R(t)$ é a população recuperada, assumida para ter imunidade permanente ao sarampo. Este modelo assume que a população total $N(t)$ é constante, isto é, $N = S(t) + E(t) + I(t) + R(t)$. De acordo com os autores [5], a rápida urbanização e diversificação econômica justificam que as taxas de nascimentos b e mortes μ sejam assumidas iguais em muitos países em desenvolvimento. Os indivíduos infecciosos se movem para o compartimento de recuperados a uma taxa constante γ , e os indivíduos latentes se movem para o compartimento dos infecciosos a uma taxa constante ε , assim $1/\gamma$ mede a duração média do período infeccioso e $1/\varepsilon$ mede a duração média do período latente.

Cada indivíduo na população tem igual probabilidade de contato com um indivíduo doente, com uma taxa de contato β . Assim, um indivíduo infectado contacta de maneira efetiva βN outros indivíduos por unidade de tempo, isto significa que a taxa de contato é proporcional ao tamanho total da população. A fração de contatos por um indivíduo infeccioso com um suscetível é S/N . Com isso, o número de novas infecções por indivíduo infeccioso por unidade de tempo é $\beta N(S/N)$, levando a taxa de incidência da doença $I\beta N(S/N) = \beta SI$.

Nesse modelo não é assumida mortalidade significativa para o sarampo, por isso indivíduos de todos os compartimentos estão sujeitos a uma mesma taxa de mortalidade μ , onde $1/\mu$ é a expectativa média de vida das pessoas na região de interesse.

Como o objetivo do modelo é avaliar a dinâmica de uma população humana, podemos verificar que as variáveis de estado $S(t)$, $E(t)$, $I(t)$ e $R(t)$ permanecem não negativas para condições iniciais não negativas. Consideremos a região biológica factível $\Omega = (S, E, I, R) \in \mathbb{R}_+^4 : N \Rightarrow \frac{b}{\mu}$.

Definição 5.1 Um conjunto Ω , no Espaço de Estados, é dito ser positivamente invariante se

$$\forall x(t_0) \in \Omega \Rightarrow x(t) \in \Omega, \forall t \geq t_0. \quad (5.2)$$

Lema 5.1 A região Ω é positivamente invariante.

Prova: Adicionando as equações do sistema (5.1) obtemos a taxa de variação da população total $N(t)$, dada por

$$\frac{dN}{dt} = b - \mu N. \quad (5.3)$$

Quando $N(t) = \frac{b}{\mu}$ temos que $\frac{dN}{dt} = 0$, assim, a população N é limitada por $\frac{b}{\mu}$.

Resolvendo a equação acima, obtemos $N(t) = \frac{b}{\mu} + (N(0) - \frac{b}{\mu})e^{-\mu t}$; particularmente, se $N(0) = \frac{b}{\mu}$ então $N(t) = \frac{b}{\mu}$ para todo $t > 0$. Logo, a região Ω é positivamente invariante e atrai todas as soluções em \mathbb{R}_+^4 .

■

5.1.1 Existência e unicidade da solução para o modelo SEIR

A validade e autenticidade de um modelo matemático depende se o sistema de equações tem uma solução e ela é única. Nesta seção, usando a condição de Lipschitz, verificaremos a existência e unicidade de solução para o sistema de equações (5.1).

Consideremos o sistema de equações lineares abaixo

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(t, x_1, \dots, x_n) \\ \dot{x}_2 = f_2(t, x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ \dot{x}_n = f_n(t, x_1, \dots, x_n) \end{cases} \quad (5.4)$$

escrevendo-o em forma compacta, temos

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \quad (5.5)$$

Assim, de acordo com o sistema (5.1) temos:

$$\begin{aligned}
f_1 &= b - \beta SI - \mu S \\
f_2 &= \beta SI - (\varepsilon + \mu)E \\
f_3 &= \varepsilon E - (\gamma + \mu)I \\
f_4 &= \gamma I - \mu R.
\end{aligned} \tag{5.6}$$

Teorema 5.1 (Derrick e Grossman, 1976): *Se Ω denota a região*

$$|t - t_0| \leq a, \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| \leq 1, \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n), \quad \mathbf{x}_0 = (x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}) \tag{5.7}$$

e supondo que $\mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ satisfaça a condição de Lipschitz

$$\|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| \leq k\|x_1 - x_2\| \tag{5.8}$$

sempre que os pares (t, x_1) e (t, x_2) pertencem a Ω , onde k é uma constante positiva. Então, existe uma constante $\delta \geq 0$ tal que existe uma única solução vetorial contínua $x(t)$ do sistema (5.4) no intervalo $|t - t_0| \leq \delta$.

É importante observar que a condição (5.8) é satisfeita pela exigência de que $\partial f_i / \partial x_j$, $i, j = 1, 2, \dots$ serem contínuas e limitadas em Ω .

■

A prova deste resultado pode ser encontrada em [23].

Teorema 5.2 *A solução do modelo (5.6) com as condições iniciais $S(0) \geq 0$, $E(0) \geq 0$, $I(0) \geq 0$, $R(0) \geq 0$ existe e é única em \mathbb{R}_+^4 para todo $t \geq 0$.*

Prova. Seja o sistema (5.6)

$$\begin{aligned}
f_1 &= b - \beta SI - \mu S \\
f_2 &= \beta SI - (\varepsilon + \mu)E \\
f_3 &= \varepsilon E - (\gamma + \mu)I \\
f_4 &= \gamma I - \mu R
\end{aligned} \tag{5.9}$$

É possível verificar que $\partial f_i / \partial x_j$ são contínuas e $|\partial f_i / \partial x_j| < \infty$ para $i, j = 1, 2, 3, 4$ onde $x_1 = S$, $x_2 = E$, $x_3 = I$ e $x_4 = R$. De acordo com o Teorema (5.8), o sistema (5.9) tem uma solução única.

■

5.1.2 Estabilidade do equilíbrio livre da doença

Um sistema em equilíbrio estável não muda com o decorrer do tempo sob pequenas perturbações. Na epidemiologia, há dois tipos de pontos de equilíbrio: equilíbrio livre da doença e equilíbrio endêmico.

- Se o ponto de equilíbrio tem população infecciosa igual a zero ($I^* = 0$), significa que a doença foi extinta, chamamos essa condição de **equilíbrio livre da doença**.
- Se $I^* > 0$ a doença permanece na população, nesse caso chamamos de **equilíbrio endêmico**.

Assumindo a taxa de variação de cada população no sistema (5.1) igual a zero, obtemos o equilíbrio livre da doença $P_0 = \left(\frac{b}{\mu}, 0, 0, 0\right)$ e o ponto de equilíbrio endêmico $P_1 = (S^*, E^*, I^*, R^*)$.

Para examinar a estabilidade local do equilíbrio livre de doenças P_0 avaliamos a matriz Jacobiana nesse ponto $P_0 = \left(\frac{b}{\mu}, 0, 0, 0\right)$, dada por

$$\mathcal{J}(P_0) = \begin{bmatrix} -\mu & 0 & -\frac{\beta b}{\mu} & 0 \\ 0 & -\varepsilon - \mu & \frac{\beta b}{\mu} & 0 \\ 0 & \varepsilon & -\gamma - \mu & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & -\mu \end{bmatrix} \quad (5.10)$$

Proposição 5.1 P_0 é um ponto de equilíbrio localmente assintoticamente estável.

Prova.

$$|\mathcal{J}(P_0) - \lambda I| = \begin{bmatrix} -\mu - \lambda & 0 & -\frac{\beta b}{\mu} & 0 \\ 0 & -\varepsilon - \mu - \lambda & \frac{\beta b}{\mu} & 0 \\ 0 & \varepsilon & -\gamma - \mu - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & -\mu - \lambda \end{bmatrix}. \quad (5.11)$$

Os autovalores de $\mathcal{J}(P_0)$ são

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \lambda_2 = -\mu, \\ \lambda_3 &= \frac{-\sqrt{\mu}\sqrt{4b\varepsilon\beta + \varepsilon^2\mu - 2\varepsilon\gamma\mu + \gamma^2\mu} - \varepsilon\mu - \gamma\mu - 2\mu^2}{2\mu}, \\ \lambda_4 &= \frac{\sqrt{\mu}\sqrt{4b\varepsilon\beta + \varepsilon^2\mu - 2\varepsilon\gamma\mu + \gamma^2\mu} - \varepsilon\mu - \gamma\mu - 2\mu^2}{2\mu},\end{aligned}\tag{5.12}$$

o que implica que o ponto de equilíbrio livre da doença P_0 é um ponto localmente assintoticamente estável. Com isso provamos a proposição. ■

Quando trabalhamos com um modelo cuja dinâmica é simplificada a apenas dois compartimentos, suscetíveis e infectados, R_0 é apenas o produto da taxa de infecção (β) e o período médio da infecção ($1/\gamma$). Entretanto, para modelos com mais estágios de infecciosidade (por exemplo, expostos e infecciosos), é necessário definir o R_0 de uma forma mais geral. Para isso usamos a abordagem da *matriz próxima geração* introduzida por Diekmann et al. (1990) [15].

De acordo com Driessche e J. Watmough [30] a matriz próxima geração, é denotada por

$$K = FV^{-1}\tag{5.13}$$

onde $F = [\frac{\partial \mathcal{F}_i(x_0)}{\partial x_j}]$ e $V = [\frac{\partial \mathcal{V}_i(x_0)}{\partial x_j}]$ são os jacobianos das matrizes de transmissão e transição, respectivamente, calculados no equilíbrio livre da doença, isto é, em $x_0 = (0, 0)$. Os termos \mathcal{F}_i e \mathcal{V}_i são, respectivamente, as taxas de aparecimento de novas infecções no compartimento i , e transferência de indivíduos para o compartimento i .

O número básico de reprodução (R_0) é dado pelo maior autovalor ou raio espectral da matriz próxima geração, ou seja, o número de todos os indivíduos infecciosos na próxima geração

$$R_0 = \rho(K) = \rho(FV^{-1}),\tag{5.14}$$

onde ρ é o raio espectral da matriz FV^{-1} .

Seja $X(t)$ o vetor de estado da doença. Esse vetor é o compartimento dos expostos e infecciosos do sistema (5.1) sendo denotado por $X = (E, I)^T$. Sendo assim os estados podem ser descritos como:

$$\begin{cases} \frac{dE}{dt} = \beta SI - (\varepsilon + \mu)E \\ \frac{dI}{dt} = \varepsilon E - (\gamma + \mu)I \end{cases} \quad (5.15)$$

Os compartimentos E (transição) e I (transmissão) são usados para determinação do R_0 . A partir do sistema (5.15) obtemos as matrizes

$$\mathcal{F} = \begin{bmatrix} \beta SI \\ 0 \end{bmatrix} \quad e \quad \mathcal{V} = \begin{bmatrix} (\varepsilon + \mu)E \\ (\gamma + \mu)I - \varepsilon E \end{bmatrix} \quad (5.16)$$

Com isso podemos encontrar as matrizes Jacobianas F e V no ponto de equilíbrio livre da doença $P_0 = (b/\mu, 0, 0, 0)$. Como estamos considerando apenas os compartimentos E e I , calculamos os jacobianos no ponto $X_0 = (0, 0)$. Temos então

$$F = \mathcal{J}\mathcal{F}(X_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial(\beta SI)}{\partial E} & \frac{\partial(\beta SI)}{\partial I} \\ \frac{\partial(0)}{\partial E} & \frac{\partial(0)}{\partial I} \end{bmatrix}_{(0,0)} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\beta b}{\mu} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.17)$$

e de forma similar

$$V = \mathcal{J}\mathcal{V}(X_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial((\varepsilon + \mu)E)}{\partial E} & \frac{\partial((\varepsilon + \mu)E)}{\partial I} \\ \frac{\partial((\gamma + \mu)I - \varepsilon E)}{\partial E} & \frac{\partial((\gamma + \mu)I - \varepsilon E)}{\partial I} \end{bmatrix}_{(0,0)} = \begin{bmatrix} (\varepsilon + \mu) & 0 \\ -\varepsilon & (\gamma + \mu) \end{bmatrix} \quad (5.18)$$

Portanto, as matrizes F e V são

$$F = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\beta b}{\mu} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} (\varepsilon + \mu) & 0 \\ -\varepsilon & (\gamma + \mu) \end{bmatrix}, \quad (5.19)$$

com V^{-1} dada por

$$V^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\varepsilon + \mu} & 0 \\ \frac{\varepsilon}{(\varepsilon + \mu)(\gamma + \mu)} & \frac{1}{\gamma + \mu} \end{bmatrix}. \quad (5.20)$$

Logo a matriz da próxima geração do sistema (5.1) é

$$K = FV^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\beta \varepsilon b}{\mu(\varepsilon + \mu)(\gamma + \mu)} & \frac{\beta b}{\mu(\gamma + \mu)} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.21)$$

Por fim, obtemos R_0 que é dado pelo autovalor de maior magnitude, ou raio espectral da matriz de próxima geração

$$R_0 = \frac{\beta \varepsilon b}{\mu(\varepsilon + \mu)(\gamma + \mu)} \quad (5.22)$$

Este resultado nos diz que os indivíduos exposto $\varepsilon/\mu(\varepsilon + \mu)$, tornam-se infecciosos e entram em contato com β suscetíveis durante o período de infecciosidade $1/(\gamma + \mu)$, resultando em uma nova exposição.

As simulações numéricas do modelo (5.1) com os coeficientes da Tabela 5.1 são apresentadas nas Figura 5.1 e 5.2.

Símbolos	Descrição	Valores
b	Taxa média de natalidade	0,002
μ	Taxa média de mortalidade	0,002
ε	Taxa de latência	1/12
γ	Taxa de recuperação	1/6
β	Taxa de transmissão	1,204
$1/\varepsilon$	Período latente médio	12
$1/\gamma$	Período infeccioso médio	6

Tabela 5.1: Coeficientes do modelo obtidos de [5].

As Figuras 5.1 e 5.2 mostram a dinâmica das populações na ausência da vacinação. Os indivíduos suscetíveis (não vacinados) rapidamente se dirigem para a classe exposta, por isso percebemos um aumento significativo nos indivíduos expostos. Há também um aumento nos recuperados, isso ocorre porque o sarampo é uma doença recuperável, independente de vacina ou tratamento, o organismo naturalmente reage para combater a virulência. Nesse caso obtivemos $R_0 = 7$.

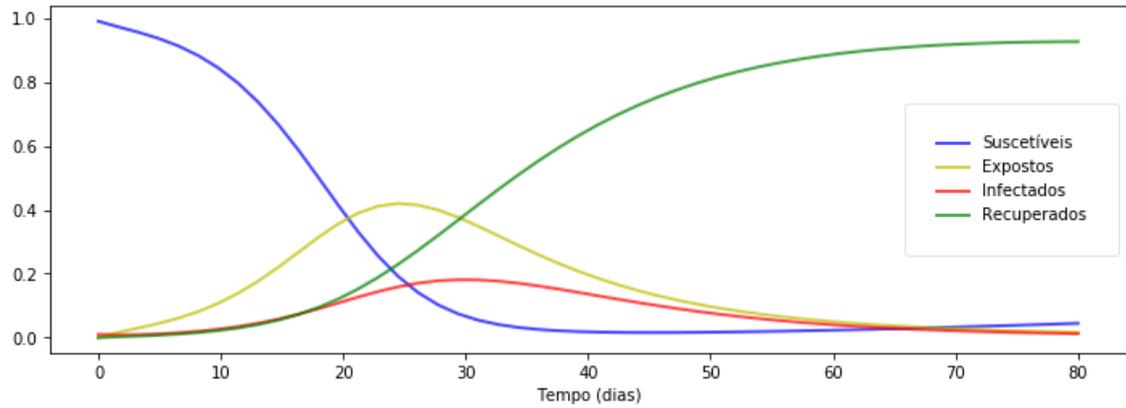


Figura 5.1: Dinâmica das populações na ausência de controle, com condições iniciais $S(0) = 0,99$, $E(0) = 0$, $I(0) = 0,01$, $R(0) = 0$.

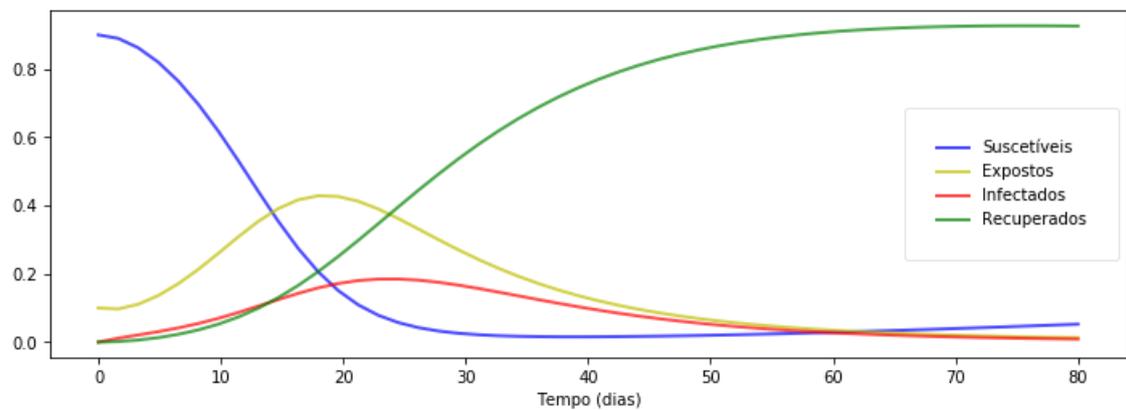


Figura 5.2: Dinâmica das populações na ausência de controle, com condições iniciais $S(0) = 0,90$, $E(0) = 0,10$, $I(0) = 0$, $R(0) = 0$.

5.2 Dinâmica do sarampo com vacinação

Nesta seção introduziremos uma estratégia de controle para o sarampo, a vacinação, através da formulação de um problema de controle ótimo. O sistema dinâmico (5.1) com controle tem a forma:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = b - \beta SI - \mu S - U \\ \frac{dE}{dt} = \beta SI - (\varepsilon + \mu)E \\ \frac{dI}{dt} = \varepsilon E - (\gamma + \mu)I \\ \frac{dR}{dt} = \gamma I - \mu R + U, \end{cases} \quad (5.23)$$

onde $U = U(S(t)) \in [0, 1]$ é o controle que representa a proporção de indivíduos suscetíveis a serem vacinados por unidade de tempo. Por simplicidade, o modelo não

assume um compartimento de vacinados, como a imunização conferida pela vacina é permanente, estes indivíduos migram para o compartimento de recuperados. Além disso, o modelo pressupõe que os indivíduos sejam vacinados antes de contraírem a doença, isto é, enquanto ainda se encontram no compartimento S .

A função de controle U consiste em duas partes

$$U = u^* + u, \quad (5.24)$$

onde u^* é o controle constante que mantém a população no estado desejado e u é o controle *feedback*, que estabiliza o sistema no estado estacionário desejado. Esse estado desejado satisfaz as seguintes equações:

$$\begin{aligned} b - \beta S^* I^* - \mu S^* + u^* &= 0 \\ \beta S^* I^* - (\varepsilon + \mu) E^* &= 0 \\ \varepsilon E^* - (\gamma + \mu) I^* &= 0 \\ \gamma I^* - \mu R^* &= 0 \end{aligned} \quad (5.25)$$

A partir da primeira equação do sistema (5.23) obtemos o valor da densidade de suscetíveis.

$$S^* = \frac{b}{\beta I^* + \mu + u} \quad (5.26)$$

Da segunda equação do sistema (5.23) obtemos o valor da densidade de expostos.

$$E^* = \frac{\beta S^* I^*}{\varepsilon + \mu} \quad (5.27)$$

A partir da terceira equação do sistema (5.23) obtemos a densidade de infectados.

$$I^* = \frac{\varepsilon E^*}{\gamma + \mu} \quad (5.28)$$

Da última equação do sistema (5.23) obtemos o valor da densidade de recuperados.

$$R^* = \frac{\gamma I^* + u S^*}{\mu} \quad (5.29)$$

E, por fim, obtemos da primeira equação de (5.23) o valor do controle constante u^*

$$u^* = \beta S^* I^* + \mu S^* - b \quad (5.30)$$

Em alguns casos o estado estacionário desejado (S^*, E^*, I^*, R^*) do sistema (5.23) controlado por u^* pode ser instável. Nesse caso, o controle de *feedback* u pode ser feito de modo que o estado desejado se torne assintoticamente estável.

Então, o problema do controle ótimo consiste em encontrar a função de controle u que transfere o sistema (5.23) do estado inicial $y(0) = y_0$ ao estado final $y(\infty) = 0$, e minimiza o funcional:

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} [y^T Q y + u^T R u] dt, \quad (5.31)$$

onde

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S - S^* \\ E - E^* \\ I - I^* \\ R - R^* \end{bmatrix}, \quad u = U - u^*, \quad (5.32)$$

Minimizar o funcional J significa reduzir a diferença entre a trajetória real e a trajetória desejada e, ao mesmo tempo, minimizar os custos de controle, levando em conta as penalidades impostas às variáveis de estado e controle através das matrizes Q e R .

Substituindo (5.32) em (5.23) obtemos:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d(y_1 + S^*)}{dt} = b - \beta(y_1 + S^*)(y_3 + I^*) - \mu(y_1 + S^*) - u(y_1 + S^*) \\ \frac{d(y_2 + E^*)}{dt} = \beta(y_1 + S^*)(y_3 + I^*) - (\varepsilon + \mu)(y_2 + E^*) \\ \frac{d(y_3 + I^*)}{dt} = \varepsilon(y_2 + E^*) - (\gamma + \mu)(y_3 + I^*) \\ \frac{d(y_4 + R^*)}{dt} = \gamma(y_3 + I^*) - \mu(y_4 + R^*) + u(y_1 + S^*). \end{array} \right. \quad (5.33)$$

Sendo (S^*, E^*, I^*, R^*) um estado estacionário, seus valores são constantes. Obtemos assim o sistema perturbado (5.34), que descreve a taxa de variação da diferença entre a trajetória real do sistema e a trajetória desejada.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dy_1}{dt} = b - \beta y_1 y_3 - \beta y_1 I^* - \beta y_3 S^* - \beta S^* I^* - \mu y_1 - \mu S^* - u y_1 - u S^* \\ \frac{dy_2}{dt} = \beta y_1 y_3 + \beta y_1 I^* + \beta y_3 S^* + \beta S^* I^* - \varepsilon y_2 - \varepsilon E^* - \mu y_2 - \mu E^* \\ \frac{dy_3}{dt} = \varepsilon y_2 + \varepsilon E^* - \gamma y_3 - \gamma I^* - \mu y_3 - \mu I^* \\ \frac{dy_4}{dt} = \gamma y_3 + \gamma I^* - \mu y_4 - \mu R^* + u y_1 + u S^*. \end{array} \right. \quad (5.34)$$

Esse sistema se apresenta na forma

$$\frac{dy}{dt} = Ay + h(y) + Bu, \quad (5.35)$$

onde as matrizes A e B são

$$A = \begin{bmatrix} -\beta I^* - \mu & 0 & -\beta S^* & 0 \\ \beta I^* & -\varepsilon - \mu & \beta S^* & 0 \\ 0 & \varepsilon & -\gamma - \mu & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & -\mu \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (5.36)$$

e o vetor $h(y)$ tem a forma:

$$h(y) = \begin{bmatrix} b - \beta y_1 y_3 - \beta S^* I^* - \mu S^* - u S^* \\ \beta y_1 y_3 + \beta S^* I^* - \varepsilon E^* - \mu E^* \\ \varepsilon E^* - \gamma I^* - \mu I^* \\ \gamma I^* - \mu R^* - u S^* \end{bmatrix}. \quad (5.37)$$

O controle de *feedback* u pode ser encontrado aplicando o Teorema 4.3, apresentado no Capítulo 4. De acordo com esse teorema, podemos encontrar o controle de *feedback* linear

$$u = -R^{-1} B^T P y \quad (5.38)$$

que minimiza o funcional

$$J(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \int_0^\infty [\mathbf{x}^T(t) \mathbf{Q} \mathbf{x}(t) + \mathbf{u}^T(t) \mathbf{R} \mathbf{u}(t)] dt,$$

onde P é uma matriz simétrica, definida positiva, obtida da solução da equação algébrica de Riccati

$$PA + A^T P - PBR^{-1}B^T P + Q = 0 \quad (5.39)$$

e Q e R são matrizes simétricas, sendo Q semi-definida positiva e pondera as variáveis de estado e R definida positiva e pondera as variáveis de controle.

Segundo o Teorema 4.3, o sistema dinâmico perturbado (5.34) controlado pelo controle de *feedback* linear u é assintoticamente estável e, portanto, o sistema (5.23), controlado por (5.24) tende para o estado estacionário desejado (S^*, E^*, I^*, R^*) .

Agora, estabilizando (5.23) no estado estacionário $(0, 0, 0, 1)$, o sistema (5.34) resulta em

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = b - \beta y_1 y_3 - y_1(\mu + u) \\ \frac{dy_2}{dt} = \beta y_1 y_3 - (\varepsilon + \mu)y_2 \\ \frac{dy_3}{dt} = \varepsilon y_2 - (\gamma + \mu)y_3 \\ \frac{dy_4}{dt} = \gamma y_3 - \mu(y_4 + 1) + u y_1 \end{cases} \quad (5.40)$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \frac{dy_1}{dt} \\ \frac{dy_2}{dt} \\ \frac{dy_3}{dt} \\ \frac{dy_4}{dt} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\varepsilon - \mu & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & -\gamma - \mu & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & -\mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} + \\ &\begin{bmatrix} b - \beta y_1 y_3 \\ \beta y_1 y_3 \\ 0 \\ -\mu \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u. \end{aligned} \quad (5.41)$$

Para os parâmetros ε , μ e γ da Tabela (5.1) obtemos a matriz A dada por

$$A = \begin{bmatrix} -0,002 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0,085 & 0 & 0 \\ 0 & 0,083 & -0,168 & 0 \\ 0 & 0 & 0,166 & -0,002 \end{bmatrix}.$$

Escolhendo:

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad R = [1]$$

obtemos:

$$P = \begin{bmatrix} 125,3530 & 117,8478 & 123,4919 & 124,6469 \\ 117,8478 & 122,8291 & 119,7648 & 117,8519 \\ 123,4919 & 119,7648 & 126,5263 & 123,5668 \\ 124,6469 & 117,8519 & 123,5668 & 125,3530 \end{bmatrix}$$

da solução da equação de Riccati (5.39) usando a função LQR do Python.

Finalmente, concluímos que a função de controle u de (5.38) tem a seguinte forma:

$$u = 0.7061y_1 - 0.0041y_2 - 0.0749y_3 - 0.7061y_4. \quad (5.42)$$

A função de controle (5.42) é projetada para conduzir a trajetória do sistema (5.23) para o estado estacionário desejado (S^*, E^*, I^*, R^*) , como mostram as Figuras 5.3 e 5.4.

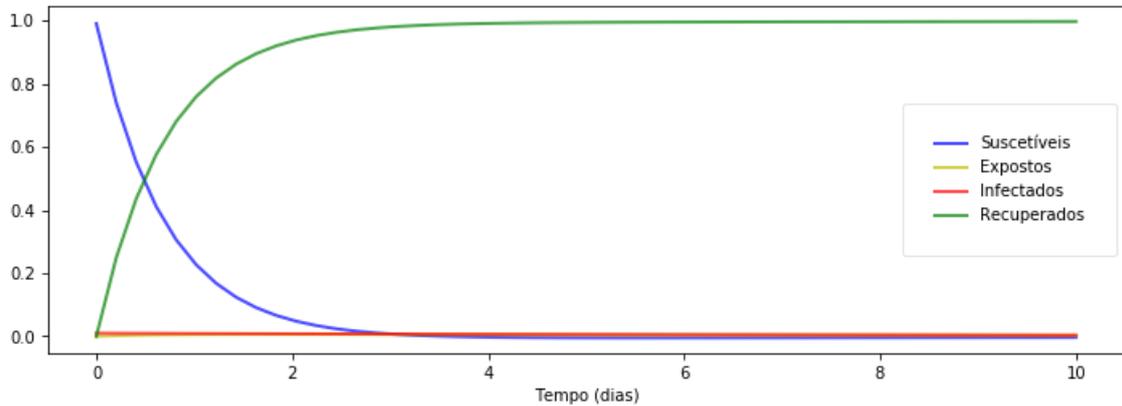


Figura 5.3: Dinâmica das populações na presença de controle via vacinação, com condições iniciais $S(0) = 0,99$, $E(0) = 0$, $I(0) = 0,01$, $R(0) = 0$.

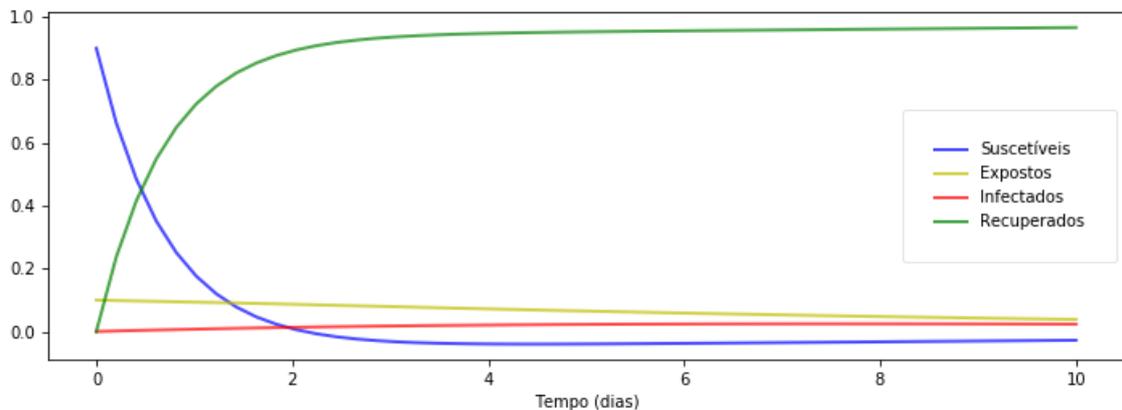


Figura 5.4: Dinâmica das populações na presença de controle via vacinação, com condições iniciais $S(0) = 0,90$, $E(0) = 0,1$, $I(0) = 0$, $R(0) = 0$.

Comparando as Figuras 5.1 e 5.2, com as Figuras 5.3 e 5.4 podemos perceber que na ausência de vacinação a população reduz a infecciosidade em quase 80 dias, através da recuperação dos infectados, enquanto que na presença de vacinação a doença foi eliminada em 4 dias. Obviamente a simulação foi realizada considerando uma população fechada e imunização imediata conferida a vacina. Em termos práticos ambos os prazos se estendem pois há efeitos migratórios e um período de retardo na imunização que foram suprimidos no modelo estudado.

5.3 Dinâmica do sarampo com vacinação e terapia

Na seção anterior introduzimos uma estratégia de controle para o sarampo, com vacinação. Nesta seção além da vacina, também inserimos a terapia que, ao reduzir os sintomas atua como um amenizador da infecciosidade.

O sistema dinâmico (5.1) com controles via vacinação e terapia sintomática tem a forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dS}{dt} = b - \beta SI - \mu S - U \\ \frac{dE}{dt} = \beta SI - (\varepsilon + \mu)E \\ \frac{dI}{dt} = \varepsilon E - (\gamma + \mu)I - V \\ \frac{dR}{dt} = \gamma I - \mu R + U + V \end{array} \right. \quad (5.43)$$

As funções de controle U e V são formadas por

$$U = u^* + u \quad (5.44)$$

$$V = v^* + v, \quad (5.45)$$

onde u^* e v^* são os controles constantes que mantêm a população no estado desejado e u e v são os controles *feedback* que estabilizam o sistema no estado estacionário desejado. Esse estado desejado satisfaz as seguintes equações

$$\begin{aligned} b - \beta S^* I^* - \mu S^* - u^* &= 0 \\ \beta S^* I^* - (\varepsilon + \mu)E^* &= 0 \\ \varepsilon E^* - (\gamma + \mu)I^* - v^* &= 0 \\ \gamma I^* - \mu R^* + u^* + v^* &= 0 \end{aligned} \quad (5.46)$$

A partir da primeira equação do sistema (5.43) obtemos o valor da densidade de suscetíveis

$$S^* = \frac{b - u^*}{\beta I^* + \mu}. \quad (5.47)$$

Da segunda equação do sistema (5.43) obtemos o valor da densidade de expostos

$$E^* = \frac{\beta S^* I^*}{\varepsilon + \mu}. \quad (5.48)$$

A partir da terceira equação do sistema (5.43) obtemos a densidade de infectados

$$I^* = \frac{\varepsilon E^* - v^*}{\gamma + \mu}. \quad (5.49)$$

Da última equação do sistema (5.43) obtemos o valor da densidade de recuperados

$$R^* = \frac{\gamma I^* + u^* + v^*}{\mu}. \quad (5.50)$$

E, por fim, obtemos da primeira equação de (5.43) o valor do controle constante v^*

$$v^* = \varepsilon E^* - (\gamma + \mu) I^* \quad (5.51)$$

ou

$$v^* = \mu R^* - \gamma I^* - u^*. \quad (5.52)$$

Agora, o problema do controle ótimo consiste em encontrar as funções de controle u e v que transferem o sistema (5.43) do estado inicial $y(0) = y_0$ ao estado final $y(\infty) = 0$, e minimizam o funcional:

$$J = \frac{1}{2} \int_0^\infty [y^T Q y + z^T R z] dt, \quad (5.53)$$

onde $z^T = [u \ v]$ e y define o desvio entre a trajetória real e a trajetória desejada para o sistema. As novas variáveis que representam essa perturbação, bem como os desvios relacionados aos controles são dados por:

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S - S^* \\ E - E^* \\ I - I^* \\ R - R^* \end{bmatrix}, \quad u = U - u^*, \quad v = V - v^* \quad (5.54)$$

Substituindo (5.54) em (5.43) obtemos:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d(y_1 + S^*)}{dt} = b - \beta(y_1 + S^*)(y_3 + I^*) - \mu(y_1 + S^*) - u(y_1 + S^*) \\ \frac{d(y_2 + E^*)}{dt} = \beta(y_1 + S^*)(y_3 + I^*) - (\varepsilon + \mu)(y_2 + E^*) \\ \frac{d(y_3 + I^*)}{dt} = \varepsilon(y_2 + E^*) - (\gamma + \mu)(y_3 + I^*) - v(y_3 + S^*) \\ \frac{d(y_4 + R^*)}{dt} = \gamma(y_3 + I^*) - \mu(y_4 + R^*) + u(y_1 + S^*) + v(y_3 + S^*) \end{array} \right. \quad (5.55)$$

Como (S^*, E^*, I^*, R^*) é um estado estacionário, seus valores são constantes, o que nos leva ao sistema perturbado (5.56):

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dy_1}{dt} = b - \beta y_1 y_3 - y_1(\mu + u) \\ \frac{dy_2}{dt} = \beta y_1 y_3 - (\varepsilon + \mu)y_2 \\ \frac{dy_3}{dt} = \varepsilon y_2 - (\gamma + \mu + v)y_3 \\ \frac{dy_4}{dt} = (\gamma + v)y_3 - \mu(y_4 + 1) + u y_1 \end{array} \right. \quad (5.56)$$

que pode ser escrito na forma matricial

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \frac{dy_1}{dt} \\ \frac{dy_2}{dt} \\ \frac{dy_3}{dt} \\ \frac{dy_4}{dt} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\varepsilon - \mu & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & -\gamma - \mu & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & -\mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} + \\ &\begin{bmatrix} b - \beta y_1 y_3 \\ \beta y_1 y_3 \\ 0 \\ -\mu \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (5.57)$$

Esse sistema se apresenta na forma

$$\frac{dy}{dt} = Ay + h(y) + Bz. \quad (5.58)$$

Os controles de *feedback* u e v podem ser encontrados aplicando o Teorema

4.3, apresentado no Capítulo 4. De acordo com esse teorema, podemos encontrar o controle de *feedback* linear

$$z = -R^{-1}B^T P y \quad (5.59)$$

que minimiza o funcional (5.53), onde $z^T = [u \ v]$ e P é obtida da equação algébrica de Riccati (5.39).

Utilizando os valores dos parâmetros ε , μ e γ contidos na Tabela (5.1) a matriz A assume o valor

$$A = \begin{bmatrix} -0,002 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0,085 & 0 & 0 \\ 0 & 0,083 & -0,168 & 0 \\ 0 & 0 & 0,166 & -0,002 \end{bmatrix}$$

Escolhendo:

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

obtemos:

$$P = \begin{bmatrix} 113,0986 & 107,8166 & 112,3270 & 112,3593 \\ 107,8166 & 111,1459 & 108,0951 & 107,8844 \\ 112,3270 & 108,0951 & 113,3999 & 112,5881 \\ 112,3593 & 107,8844 & 112,5881 & 112,9845 \end{bmatrix}$$

da solução da equação de Riccati usando a função LQR do Python. Finalmente, chegamos nas funções de controle u e v :

$$u = 0.7392y_1 - 0.0677y_2 - 0.2610y_3 - 0.6252y_4 \quad (5.60)$$

$$v = -0.0322y_1 + 0.2106y_2 + 0.8118y_3 - 0.3964y_4 \quad (5.61)$$

As Figuras 5.5 e 5.6 mostram a dinâmica das populações na presença da vacinação e terapia.

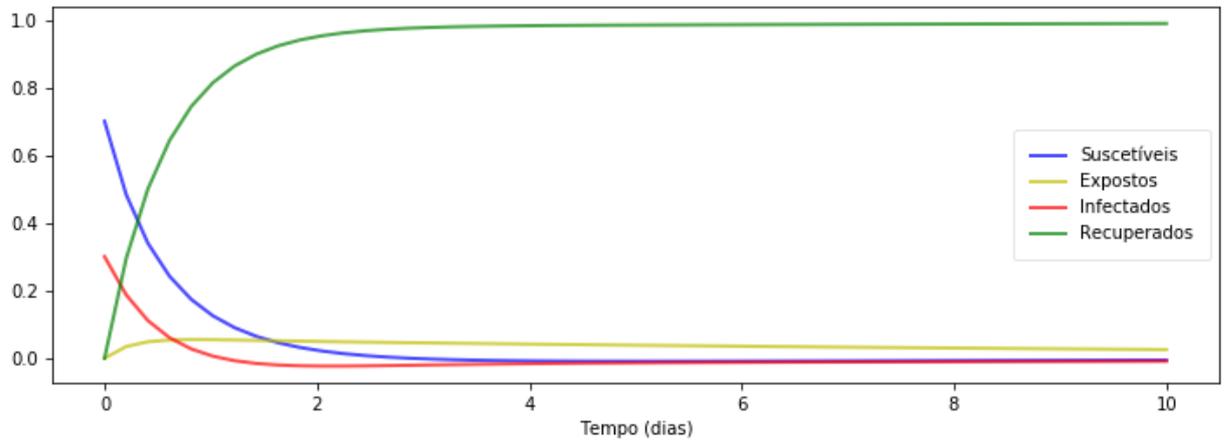


Figura 5.5: Dinâmica das populações com vacinação e terapia, com condições iniciais $S(0) = 0,7$, $E(0) = 0$, $I(0) = 0,3$, $R(0) = 0$.

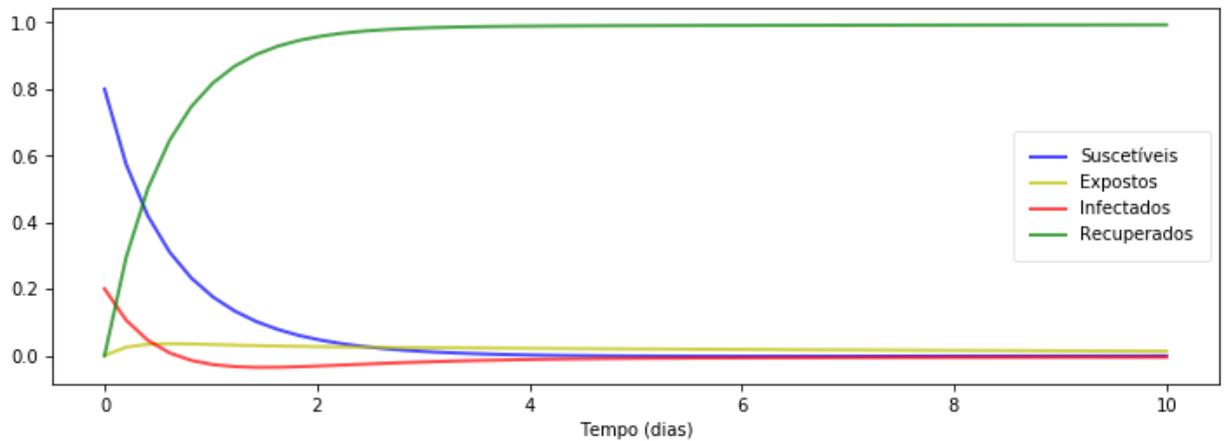


Figura 5.6: Dinâmica das populações com vacinação e terapia, com condições iniciais $S(0) = 0,8$, $E(0) = 0$, $I(0) = 0,2$, $R(0) = 0$.

Ao adotarmos essas duas intervenções (vacina e terapia), percebemos que os indivíduos rapidamente alcançam o estado desejado. Apesar de uma maior proporção de indivíduos apresentarem a infecção no instante inicial, a combinação de vacina e terapia promove uma recuperação em cerca de 4 dias.

Capítulo 6

Conclusão

Neste trabalho foi apresentada uma breve revisão bibliográfica dos principais modelos matemáticos que regem a dinâmica de transmissão do sarampo, bem como características dessa doença. A teoria de controle foi revisada a fim de ser utilizada na formulação de dois problemas de controle ótimo para o sarampo: um deles considerando apenas a vacinação como controlador e outro considerando uma combinação de vacinação e terapia sintomática.

O Teorema 4.3, de Rafikov e Balthazar [8] permitiu a utilização de uma técnica de controle linear para a abordagem de um problema sujeito a um sistema não-linear. Esse problema foi resolvido via equação de Riccati.

As simulações numéricas mostraram a eficácia dos controladores em ambos os problemas, garantindo uma solução ótima no sentido de minimizar a diferença entre a trajetória do sistema sem nenhuma interferência (trajetória real) e a trajetória desejada para o sistema, que é a imunização global, obtida a um custo mínimo sobre os controladores.

Efeitos provenientes de migração merecem um estudo mais aprofundado sobre a dinâmica de transmissibilidade do sarampo, bem como os efeitos produzidos pela interrupção temporária da vacinação. É sabido que em regiões de conflitos, onde a vacinação é suspensa, há uma reincidência de doenças que já haviam sido erradicadas.

Referências Bibliográficas

- [1] BRASIL, 2020, “Ministério da Saúde. Secretaria de Vigilância em Saúde. Boletim epidemiológico Sarampo N49”, Disponível em: <https://www.gov.br/saude/pt-br/media/pdf/2020/dezembro/17/boletim_epidemiologico_svs_49.pdf>.
- [2] AGÊNCIA BRASIL, 2019, “Brasil registra 4.507 casos confirmados de sarampo.” Disponível em: <<http://agenciabrasil.ebc.com.br/saude/noticia/2019-09/brasil-registra-4507-casos-confirmados-de-sarampo>>.
- [3] BRASIL, 2019, “Ministério da Saúde. Secretaria de Vigilância em Saúde. Boletim epidemiológico Sarampo N27”, Disponível em: <<https://antigo.saude.gov.br/images/pdf/2019/setembro/25/BE-sarampo-27-25set19.pdf>>.
- [4] MINISTÉRIO DA SAÚDE, 2020, “Sarampo”, Disponível em: <<https://www.gov.br/saude/pt-br/assuntos/saude-de-a-a-z-1/s/sarampo>>.
- [5] OSELOKA, O., ZEWDIE, E., 2015, “Epidemiological modeling of measles infection with optimal control of vaccination and supportive treatment”, *Applied Mathematics and Computing*, v. 4, n. 4, pp. 264–274.
- [6] PANG, L., RUAN, S., LIU, S., ZHAO, Z., ZHANG, X., 2015, “Transmission dynamics and optimal control of measles epidemics”, *Applied Mathematics and Computing*, v. 256, pp. 131–147.
- [7] SOCIEDADE BRASILEIRA DE PEDIATRIA, 2018, “Guia prático de atualização”, .
- [8] RAFIKOV, M., BALTHAZAR, J.M., VON BREMEN, H.F, 2008, “Mathematical modeling and control of population systems: applications in biological pest control”, *Applied Mathematics and Computing*, v. 200, n. 2, pp. 557–573.
- [9] BRASIL, 2019, “Ministério da Saúde. Secretaria de Vigilância em Saúde. Boletim epidemiológico Sarampo N25”, Disponível em:

<<https://antigo.saude.gov.br/images/pdf/2019/setembro/19/BE-sarampo-25-18set19.pdf>>.

- [10] MINISTÉRIO DA SAÚDE, 2019, “Guia de vigilância em saúde”, .
- [11] VERGUET, S., JOHRI, M., MORRIS, S., LOW, C., JHA, P., JIT, M., 2015, “Measles control using supplementary immunization activities: a mathematical model to inform optimal policies”, *Vaccine*, v. 33, n. 10, pp. 1291–1296.
- [12] BAKARE, E., ADEKUNLE, Y., KADIRI, K., 2012, “Modelling and Simulation of the Dynamics of the Transmission of Measles”, *International Journal of Computer Trends and Technology*, v. 3, pp. 174–178.
- [13] BAUMEISTER, J., LEITÃO, A., 2008, *Introdução à teoria de controle e programação dinâmica*, v. 1. IMPA.
- [14] BURNS, R., 2001, *Advanced control engineering*. Elsevier.
- [15] DIEKMANN, O., HEESTERBEEK, J. A. P., METZ, J. A., 1990, “On the definition and the computation of the basic reproduction ratio R_0 in models for infectious diseases in heterogeneous populations”, *Journal of mathematical biology*, v. 28, n. 4, pp. 365–382.
- [16] DOMINGUES, C. M. A. S., PEREIRA, M. C. C. Q., SANTOS, E. D. D., et al., 1997, “A evolução do sarampo no Brasil e a situação atual”, *Informe Epidemiológico do Sus*, v. 6 (03), pp. 7 – 19. ISSN: 0104-1673. Disponível em: <http://scielo.iec.gov.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0104-16731997000100002&nrm=iso>.
- [17] EDWARD, S., RAYMOND, K., GABRIEL, K., et al., 2015, “A mathematical model for control and elimination of the transmission dynamics of measles”, *Applied and Computational Mathematics*, v. 4, n. 6, pp. 396–408.
- [18] HUANG, J., RUAN, S., WU, X., et al., 2018, “Seasonal transmission dynamics of measles in China”, *Theory in Biosciences*, v. 137, n. 2, pp. 185–195.
- [19] KIRK, D. E., 2004, *Optimal control theory: an introduction*. Courier Corporation.
- [20] MOHTASHEMI, M., SZOLOVITS, P., DUNYAK, J., et al., 2006, “A susceptible-infected model of early detection of respiratory infection outbreaks on a background of influenza”, *Journal of Theoretical Biology*, v. 241, n. 4, pp. 954 – 963. ISSN: 0022-5193. doi: <https://doi.org/10.1016/j.jtbi.2006.04.010>.

1016/j.jtbi.2006.01.031. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022519306000531>>.

- [21] MOMOH, A., IBRAHIM, M., UWANTA, I., et al., 2013, “Mathematical model for control of measles epidemiology”, *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, v. 87, n. 5, pp. 707–717.
- [22] NAIDU, D. S., 2002, *Optimal control systems*. CRC Press.
- [23] N.R. DERRICK, S. G., 1976, *Differential Equation with Applications*. Addison Wesley Publishing Company, Inc. Phillipines.
- [24] OZCAGLAR, C., SHABBEER, A., VANDENBERG, S. L., et al., 2012, “Epidemiological models of Mycobacterium tuberculosis complex infections”, *Mathematical Biosciences*, v. 236, n. 2, pp. 77 – 96. ISSN: 0025-5564. doi: <https://doi.org/10.1016/j.mbs.2012.02.003>. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0025556412000193>>.
- [25] PETER, O., AFOLABI, O., VICTOR, A., et al., 2018, “Mathematical model for the control of measles”, *Journal of Applied Sciences and Environmental Management*, v. 22, n. 4, pp. 571–576.
- [26] SIDE, S., MULBAR, U., SIDJARA, S., et al., 2017, “A SEIR model for transmission of tuberculosis”. v. 1830, p. 020004, 04. doi: 10.1063/1.4980867.
- [27] SYAHRINI, I., HALFIANI, V., YUNI, S. M., et al., 2017, “The epidemic of Tuberculosis on vaccinated population”. In: *Journal of Physics: Conference Series*, v. 890, p. 012017. IOP Publishing.
- [28] TESSA, O. M., 2006, “Mathematical model for control of measles by vaccination”. In: *Proceedings of Mali Symposium on Applied Sciences*, v. 2006, pp. 31–36.
- [29] TUDOR, D. W., 1985, “An age-dependent epidemic model with application to measles”, *Mathematical biosciences*, v. 73, n. 1, pp. 131–147.
- [30] VAN DEN DRIESSCHE, P., WATMOUGH, J., 2002, “Reproduction numbers and sub-threshold endemic equilibria for compartmental models of disease transmission”, *Mathematical Biosciences*, v. 180, n. 1, pp. 29 – 48. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0025556402001086>>.

- [31] WU, C., 2012, “The Optimal Vaccination Rate Based on Structured SI Model”, *Procedia Engineering*, v. 29, pp. 1713 – 1717. ISSN: 1877-7058. doi: <https://doi.org/10.1016/j.proeng.2012.01.200>. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S187770581200210X>. 2012 International Workshop on Information and Electronics Engineering.
- [32] ZHOU, T., ZHANG, W., LU, Q., 2014, “Bifurcation analysis of an SIS epidemic model with saturated incidence rate and saturated treatment function”, *Applied Mathematics and Computation*, v. 226, pp. 288 – 305. ISSN: 0096-3003. doi: <https://doi.org/10.1016/j.amc.2013.10.020>. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0096300313010758>.

Apêndice A

Programas em linguagem Python

Parâmetros iniciais

```
b = 0.002 (Taxa de nascimento);
D = 6.0 (Número de dias que uma pessoa pode espalhar a doença);
gamma = 1/D (Taxa de recuperação);
epsilon = 1/12 (Taxa de latência com período de incubação de 12 dias);
R_0 = 7.0 (Número de casos secundários em uma população totalmente
suscetível);
beta = 1.204 (Taxa de contatos);
mu = 0.002 (Taxa de mortalidade)
t = np.linspace(0, 80) (Intervalo de tempo (em dias))
y0 = S0, E0, I0, R0 (Vetor de condições iniciais)
```

A.1 Modelo SEIR na ausência de controle

Equações diferenciais do modelo SEIR

```
def deriv(y, t, b, beta, epsilon, gamma, mu):
    S, E, I, R = y
    dSdt = b - beta * S * I - mu * S
    dEdt = beta*S*I - epsilon*E - mu*E
    dIdt = epsilon*E - gamma*I - mu*I
    dRdt = gamma*I - mu*R
    return dSdt, dEdt, dIdt, dRdt
```

Integração das equações do modelo SEIR no intervalo de tempo t.

```
ret = odeint(deriv, y0, t, args=(b, beta, epsilon, gamma, mu)) S, E, I, R = ret.T
```

Plote das curvas S(t), E(t), I(t) e R(t)

```
def plotseird(t, S, E, I, R):
```

```

f, ax = plt.subplots(1,1,figsize=(12,4))
ax.plot(t, S, 'b', alpha=0.7, linewidth=2, label='Suscetíveis')
ax.plot(t, E, 'y', alpha=0.7, linewidth=2, label='Expostos')
ax.plot(t, I, 'r', alpha=0.7, linewidth=2, label='Infectados')
ax.plot(t, R, 'g', alpha=0.7, linewidth=2, label='Recuperados')

ax.set_xlabel('Tempo (dias)')

ax.yaxis.set_tick_params(length=4)
ax.xaxis.set_tick_params(length=4)
ax.grid(linestyle='None')
legend = ax.legend(borderpad=2.0)
legend.get_frame().set_alpha(0.5)
for spine in ('top', 'right', 'bottom', 'left'):
    ax.spines[spine].set_visible(True)
plt.show();
plotseird(t, S, E, I, R)

```

A.2 Modelo SEIR na presença de controle via vacinação

Equações diferenciais do modelo SEIR

```

def deriv(y, t, b, beta, epsilon, gamma, mu):
    S, E, I, R = y
    dSdt = b - beta*S*I - mu*S - (-0.002 + 0.7061*S - 0.0041*E - 0.0749*I -
0.7061*(R-1))
    dEdt = beta*S*I - epsilon*E - mu*E
    dIdt = epsilon*E - gamma*I - mu*I
    dRdt = gamma*I - mu*R + (-0.002 + 0.7061*S - 0.0041*E - 0.0749*I -
0.7061*(R-1))
    return dSdt, dEdt, dIdt, dRdt

```

Integração das equações do modelo SEIR no intervalo de tempo t.

```
ret = odeint(deriv, y0, t, args=(b, beta, epsilon, gamma, mu)) S, E, I, R = ret.T
```

Plote das curvas S(t), E(t), I(t) e R(t)

```

def plotseird(t, S, E, I, R):
    f, ax = plt.subplots(1,1,figsize=(12,4))
    ax.plot(t, S, 'b', alpha=0.7, linewidth=2, label='Suscetíveis')
    ax.plot(t, E, 'y', alpha=0.7, linewidth=2, label='Expostos')

```

```

ax.plot(t, I, 'r', alpha=0.7, linewidth=2, label='Infectados')
ax.plot(t, R, 'g', alpha=0.7, linewidth=2, label='Recuperados')

ax.set_xlabel('Tempo (dias)')

ax.yaxis.set_tick_params(length=4)
ax.xaxis.set_tick_params(length=4)
ax.grid(False)
legend = ax.legend(borderpad=2.0)
legend.get_frame().set_alpha(0.5)
for spine in ('top', 'right', 'bottom', 'left'):
    ax.spines[spine].set_visible(True)
plt.show();
plotseird(t, S, E, I, R)

```

A.3 Modelo SEIR na presença de controle via vacinação e terapia sintomática

Equações diferenciais do modelo SEIR

```

def deriv(y, t, b, beta, epsilon, gamma, mu):
    S, E, I, R = y
    dSdt = b - beta*S*I - mu*S - (-0.002 + 0.7392*S - 0.0677*E - 0.2610*I -
0.6252*(R - 1))
    dEdt = beta*S*I - epsilon*E - mu*E
    dIdt = epsilon*E - gamma*I - mu*I - (0 - 0.0322*S + 0.2106*E + 0.8118*I -
0.3964*(R - 1))
    dRdt = gamma*I - mu*R + (-0.002 + 0.7392*S - 0.0677*E - 0.2610*I -
0.6252*(R - 1)) + (0 - 0.0322*S + 0.2106*E + 0.8118*I - 0.3964*(R - 1))
    return dSdt, dEdt, dIdt, dRdt

```

Integração das equações do modelo SEIR no intervalo de tempo t.

```
ret = odeint(deriv, y0, t, args=(b, beta, epsilon, gamma, mu)) S, E, I, R = ret.T
```

Plote das curvas S(t), E(t), I(t) e R(t)

```

def plotseird(t, S, E, I, R):
    f, ax = plt.subplots(1,1,figsize=(12,4))
    ax.plot(t, S, 'b', alpha=0.7, linewidth=2, label='Suscetíveis')
    ax.plot(t, E, 'y', alpha=0.7, linewidth=2, label='Expostos')
    ax.plot(t, I, 'r', alpha=0.7, linewidth=2, label='Infectados')
    ax.plot(t, R, 'g', alpha=0.7, linewidth=2, label='Recuperados')

```

```

ax.set_xlabel('Tempo (dias)')

ax.yaxis.set_tick_params(length=4)
ax.xaxis.set_tick_params(length=4)
ax.grid(False)
legend = ax.legend(borderpad=1.0)
legend.get_frame().set_alpha(0.5)
for spine in ('top', 'right', 'bottom', 'left'):
    ax.spines[spine].set_visible(True)
plt.show();
plotseird(t, S, E, I, R)

```

A.4 Função LQR

```
def lqr(A,B,Q,R):
```

Resolver a equação de Riccati

```
    P = np.matrix(scipy.linalg.solve_continuous_are(A, B, Q, R))
```

Calcular o ganho LQR

```
    K = np.matrix(scipy.linalg.inv(R)*(B.T*P))
```

```
    eigVals, eigVecs = scipy.linalg.eig(A-B*K)
```

```
    return K, P, eigVals
```