

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Um estudo sobre a curvatura escalar
e curvatura média de ordem superior
de hipersuperfícies tipo-espaço em
espaços-tempos GRW

Paulo Vicente Correia de Moura

João Pessoa – PB
Março de 2022

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Um estudo sobre a curvatura escalar e curvatura média de ordem superior de hipersuperfícies tipo-espaço em espaços-tempos GRW

por

Paulo Vicente Correia de Moura

sob a orientação do

Prof. Dr. Márcio Silva Santos

João Pessoa – PB
Março de 2022

Catálogo na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

M929e Moura, Paulo Vicente Correia de.

Um estudo sobre a curvatura escalar e curvatura média de ordem superior de hipersuperfícies tipo-espaço em espaços-tempos GRW / Paulo Vicente Correia de Moura. - João Pessoa, 2022.
108 f.

Orientação: Márcio Silva Santos.
Dissertação (Mestrado) - UFPB/CCEN.

1. Matemática. 2. Espaço-tempo Robertson-Walker generalizado. 3. Curvatura de ordem superior. 4. Curvatura escalar. 5. Fórmulas integrais tipo-Minkowski. I. Santos, Márcio Silva. II. Título.

UFPB/BC

CDU 51(043)

Um estudo sobre a curvatura escalar e curvatura média de ordem superior de hipersuperfícies tipo-espaço em espaços-tempos GRW

por

Paulo Vicente Correia de Moura 

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Paraíba como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Geometria

Aprovada em 25 de março de 2022.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Fábio Reis dos Santos – UFPE

(Examinador Externo)

Prof. Dr. Henrique Fernandes de Lima – UFCG

(Examinador Interno)

Prof. Dr. Márcio Silva Santos – UFPB

(Orientador)

¹O autor foi bolsista do CNPq durante a elaboração desta dissertação.

À minha família.

Agradecimentos

A Deus, por me permitir chegar até aqui.

A meus pais, Vicente Correia de Moura e Maria de Lourdes Moura, por toda educação e carinho fornecido no decorrer de toda minha, vida formando meu caráter, pelos bons conselhos e apoio me ajudando manter a calma inúmeras vezes em momentos de estresse e ansiedade.

Ao meu orientador, professor e amigo, Márcio Silva Santos, por ter me dado a honra de se seu orientando, além de toda paciência, compreensão e conhecimento fornecido para a realização deste trabalho.

Aos professores da Universidade Regional do Cariri-URCA, a qual tive o imenso prazer e orgulho de ter sido aluno da Licenciatura em Matemática, especialmente aos professores Ricardo Rodrigues de Carvalho, por ter se disponibilizado a dar um curso de Análise na Reta com o intuito de preparar a minha turma para seleção do mestrado, Paulo César Cavalcante de Oliveira, pela oportunidade de participar dos encontros do PIBIC como bolsista voluntário e toda ajuda no primeiro contato com a teoria dos números e ao professor Antonio Edinardo de Oliveira, um grande amigo que me deu a oportunidade de ser seu orientando através do PIBIC na área de Geometria Diferencial, fazendo com que eu tomasse interesse pela mesma.

A todos os professores do PPGMAT-UFPB, pelo conhecimento matemático que me permitiu chegar até aqui. Principalmente ao professor Fagner Dias Araruna, por solucionar diversos problemas burocráticos que apareceram no decorrer deste curso, desempenhando seu papel de coordenador com maestria.

A minha a minha amiga e companheira Monique Marques Matias de Oliveira, por todo amor, compreensão e incentivo que me deu em diversos momentos de dificuldades, sem ela não teria conseguido chegar até aqui, pois esteve sempre ao meu lado me dando forças par conseguir concluir essa etapa tão importante de minha carreira.

A meus amigos do período de graduação, Gabriel Barbosa, Gildson Domingos, Valdete Sampaio, Sandro Santos, Lucas Machado, Luiz Felipe e Philippe Rodrigues, por diversas vezes terem me fornecido hospedagem e bons conselhos.

Aos colegas e amigos da UFPB. Em especial aos que me acompanham desde a graduação, Joice Saraiva, Alessandro Fernandes. Singularmente ao meu amigo conterrâneo Matheus Evangelista que motivou em momentos bastante delicados no meu período de graduação.

Aos meus amigos e professores da cidade de Altaneira-CE, Reginaldo Venâncio e Paulo Robson, por terem sido exemplos de excelentes profissionais na área da educação e servido de espelho para minha formação docente. Carlos Renir e sua avó Francisca Francelino que cuidou de mim como um filho, que me abrigaram em casa durante todo o período de graduação, evitando, assim, viagens noturnas para zona rural, que é onde resido.

À minha madrinha Fátima Pereira Souza e meu amigo Cícero Herlandio Ferreira, por estarem sempre ao lado e terem me dado força no momento mais difícil da minha vida, sem eles nunca teria chegado tão longe.

Ao CNPq pelo apoio financeiro.

Resumo

Neste trabalho, obtemos novos resultados para que uma hipersuperfície tipo-espaço imersa em um espaço-tempo Robertson-Walker generalizado (GRW) seja um slice, sob hipótese de curvatura média de ordem superior. Para isso, calculamos o operador L_k atuando na função altura h e na função $\langle N, K \rangle$. Utilizando a fórmula encontrada para o operador L_k atuando na função altura, conseguimos desenvolver as sucessivas fórmulas integrais tipo-Minkowski para hipersuperfícies tipo-espaço compactas imersas em um espaço-tempo GRW, que são ferramentas essenciais para obter e estender resultados de unicidades para tais hipersuperfícies no GRW. Em um segundo momento fazemos um estudo sobre a curvatura escalar de hipersuperfícies tipo-espaço imersas em um espaço-tempo GRW arbitrário e, em seguida, aplicamos os resultados obtidos para entender o comportamento da curvatura escalar de hipersuperfícies tipo-espaço imersa em espaços-tempos GRW mais específicos, como os Einstein e parabólicos.

Palavras-chave: Espaço-tempo Robertson-Walker generalizado; curvatura de ordem superior; curvatura escalar; fórmulas integrais tipo-Minkowski.

Abstract

In this work, we obtain new results for a space-like hypersurface immersed in a generalized Robertson-Walker spacetime (GRW) to be a slice, under the assumption of higher-order average curvature. For this, we calculate the operator L_k acting on the height function h and on the function $\langle N, K \rangle$. Using the formula found for the operator L_k acting on the height function, we were able to develop successive Minkowski-type integral formulas for compact space-like hypersurfaces immersed in a GRW spacetime, which are essential tools to obtain and extend results from uniqueness to such hypersurfaces in the GRW. In a second moment, we study the scalar curvature of space-like hypersurfaces immersed in an arbitrary GRW space-time and then apply the results obtained to understand the behavior of the scalar curvature of space-like hypersurfaces immersed in space-time. More specific GRWs, like the Einsteins and Parabolics.

Keywords: Generalized Robertson-Walker space-time; higher order curvature; scalar curvature; Minkowski-type integral formulas.

Sumário

Introdução	2
1 Preliminares	6
1.1 Variedades semi-Riemannianas	6
1.2 Conexão de Levi-Civita	8
1.3 Alguns operadores diferenciáveis	9
1.4 Curvatura de uma variedade semi-Riemanniana	10
1.5 Espaços-tempos Robertson-Walker generalizados	12
1.6 Subvariedades semi-Riemannianas	18
1.7 As transformações de Newton e seus operadores diferenciáveis associados	23
2 Unicidade de hipersuperfícies tipo-espaço com curvatura média de ordem superior constante em espaços-tempos GRW	41
2.1 O operador L_k atuando na função altura	41
2.2 Primeiras aplicações	46
2.3 Fórmulas de Minkowski para hipersuperfícies em espaços-tempos GRW	52
2.4 Umbilicidade de hipersuperfícies em espaços-tempos RW	61
2.5 Operador L_k atuando na função $\langle N, K \rangle$	68
2.6 Umbilicidade de hipersuperfícies em espaços-tempos GRW	76
3 Curvatura escalar de hipersuperfícies tipo-espaço em Espaços-tempos GRW	82
3.1 Convenções	82
3.2 Alguns Resultados	86
3.3 Espaços-tempos Einstein GRW	90
3.4 Espaço-tempo em estado estacionário	93
3.5 Espaços-tempos GRW espacialmente parabólicos	97
Referências Bibliográficas	99

Introdução

O estudo de hipersuperfícies tipo-espaço com curvatura de ordem superior constante imersas em variedades semi-Riemannianas, vem crescendo muito no decorrer das últimas décadas, atraindo pesquisadores da Matemática e Física. Uma classe importante das variedades semi-Riemannianas, a qual iremos abordar neste trabalho, são os espaços-tempos Robertson-Walker generalizados (GRW), que nada mais são do que um produto torcido $-I \times_f M^n$, com folha $I \subset \mathbb{R}$, fibra M^n e função torção f munida da métrica $\langle, \rangle = -\langle, \rangle_I + f\langle, \rangle_M$. Do ponto de vista físico, o estudo de hipersuperfícies imersas em espaços-tempos GRW são utilizados para diversas questões da relatividade geral, tais como, folheações de espaços-tempos, mudança de fases de contração e expansão e problema de Cauchy para equação de Einstein. Além de estar intimamente relacionado a diversos problemas da relatividade geral como teorema da massa positiva e a desigualdade de Penrose, onde o conhecimento de todo espaço-tempo não se faz necessário. Do ponto de vista matemático, o interesse se aplica a resultados de rigidez como a classificação de hipersuperfícies, sob hipóteses de compacticidade e sinal da curvatura média de ordem k que veremos ao longo deste trabalho. Dentre eles, damos destaque a [Montiel [22], Teorema 5] que é uma ferramenta imprescindível para caracterização das hipersuperfícies aqui estudadas, tal teorema afirma que

Seja Σ , $n \geq 2$, uma hipersuperfície tipo-espaço compacta imersa de forma totalmente umbílica com curvatura de ordem superior constante em um espaço-tempo M^{n+1} com campo vetorial tipo-tempo conforme fechado obedecendo a condição de convergência nula. Então Σ é uma folha da foliação $\mathcal{F}(X)$; ou M^{n+1} é localmente um espaço-tempo de Sitter e Σ é uma hiperesfera redonda totalmente umbílica; ou localmente M^{n+1} é um produto semi-Riemanniano $\mathbb{R}_1^2 \times Q^{n-1}$ imerso como $\gamma \times I_{Q^{n-1}}$, onde γ é uma reta tipo-espaço no plano de Lorentz \mathbb{R}_1^2 .

Uma questão básica sobre este assunto é a unicidade de hipersuperfícies tipo-espaço de curvatura média constante imersas em determinados espaços-tempos (veja [9] e [4]), motivando assim um interesse na unicidade de hipersuperfícies tipo-espaço com curvatura de ordem superior constante que engloba o caso anterior (curvatura de primeira ordem) e o caso de segunda ordem que está fortemente relacionado com o conceito de curvatura

escalar que veremos de maneira mais detalhada no capítulo 3. Em 1995 Aliás, juntamente com Romero e Sánchez (vide [9]) deram início ao estudo de hipersuperfícies tipo-espaço em espaços-tempos GRW, que estendem os espaços-tempos clássicos de Robertson-Walker (RW) para incluir os casos em que a fibra não tem curvatura seccional constante, o este estudo se baseia sob a seguinte indagação:

“Em que condições uma hipersuperfície tipo-espaço completa de curvatura média constante em um espaço-tempo Robertson-Walker generalizado é um slice totalmente umbílico?”

Para realizar este estudo, foi necessário determinar quando essas hipersuperfícies tipo-espaço são compactas, a partir daí é obtido que todas essas hipersuperfícies compactas em espaços-tempos (necessariamente espacialmente fechados) mostram-se totalmente umbílicas, exceto em casos muito excepcionais, impondo que o espaço tempo GRW satisfaça a chamada *Condição de Convergência Tipo Tempo*. Em outras palavras, eles descobriram que, quando o espaço ambiente obedece à chamada condição de convergência tipo-tempo, então toda hipersuperfície compacta tipo-espaço com curvatura média constante deve ser totalmente umbílica e, exceto em casos muito excepcionais, deve ser um slice tipo-espaço.

Neste trabalho faremos o estudo sobre a unicidade e curvatura escalar de hipersuperfícies tipo-espaço compactas imersas em espaços-tempos GRW. Como pode ser visto em [9, Proposição 3.2], se um espaço-tempo admite uma hipersuperfície tipo-espaço compacta, então ele é espacialmente fechado, isto é, sua fibra M^n é compacta. Observe que considerando um espaço-tempo GRW espacialmente fechado $-I \times_f M^n$, a família de slices $M_t^n = \{t\} \times M^n$ estabelece uma folheação de $-I \times_f M^n$ compactas totalmente umbílicas com curvatura média constante $H(t) = \frac{f'(t)}{f(t)}$, de maneira mais geral, a k -ésima curvatura média é dada por $H_k(t) = \left(\frac{f'(t)}{f(t)}\right)^k$. Tendo o conhecimento de resultados tão fortes a respeito de tais hipersuperfícies, é compreensível indagar:

“Sob quais condições uma hipersuperfície tipo-espaço compacta com curvatura média de ordem superior constante imersa em um espaço-tempo GRW é um slice tipo-espaço?”

No trabalho feito por Aliás, Romero e Sánchez [7], a chamada condição de convergência nula (CCN) é suficiente para garantir que uma hipersuperfície tipo-espaço deve ser totalmente umbílica, não apenas em espaços tempos GRW, mas em um âmbito mais geral, para espaços-tempos Conformemente Estacionários (CS) munido com um campo de vetores conforme tipo-tempo que é um auto-campo do tensor do operador de Ricci. Dando continuidade a este estudo, Montiel, em [22], classificou as hipersuperfícies totalmente umbílicas com curvatura média constante, mostrando que as únicas hipersuperfícies tipo-espaço compactas que satisfazem a condição de convergência nula são os slices tipo-espaço, exceto o caso em que o espaço-tempo é um espaço de Sitter e a hipersuperfície é uma

esfera redonda umbílica.

Em todos os trabalhos citados anteriormente, uma ferramenta primordial para o desenvolvimento dos mesmos foram as chamadas fórmulas de Minkowski. O uso de integrais tipo-Minkowski foi utilizado por Montiel [20] para obter resultados de unicidades de hipersuperfícies tipo-espaço com curvatura média constante no espaço de Sitter e continuado por Álias, Romero e Sánchez em [9] e [8] para hipersuperfícies de curvatura média constante em espaços-tempos GRW, de maneira mais geral para espaços-tempos CS. Para o estudo de hipersuperfícies com curvatura média constante, somente a primeira e segunda fórmula de Minkowski se fazem necessárias, porém, para realizar o estudo de hipersuperfícies tipo-espaço de curvatura média de ordem superior constante é preciso ter entendimento do que seriam as sucessivas fórmulas de Minkowski, e para isso, são necessários cálculos não triviais envolvendo o tensor de Ricci e a derivada covariante do ambiente, a menos claro que se suponha que o ambiente seja Einstein ou que tenha curvatura seccional constante.

Para desenvolvimento da teoria que aqui apresentaremos, utilizaremos as chamadas transformações de Newton P_k e seus operadores diferenciáveis de segunda ordem L_k , para estender os resultados de unicidades de hipersuperfícies de [1], [4] e [22] onde se considera que o espaço ambiente tem curvatura seccional constante.

No capítulo 1, estabeleceremos notações e apresentaremos resultados introdutórios que serão utilizados ao longo deste trabalho. Enunciaremos a definição de uma variedade Riemanniana, seguida de alguns exemplos clássicos da mesma, o conceito de conexão de uma variedade semi-Riemanniana e os operadores diferenciáveis, sendo eles, gradiente, Hessiano e Laplaciano. Logo após, definiremos o tensor curvatura de uma variedade semi-Riemanniana e apresentaremos algumas de suas propriedades, abordaremos a definição de curvatura seccional, tensor de Ricci e curvatura escalar. Também apresentaremos a definição de espaço-tempo Robertson-Walker generalizado e alguns exemplos de tal espaço, um breve comentário sobre orientação temporal e segunda forma fundamental. Dando sequência, definiremos a curvatura média de ordem superior de uma hipersuperfície, as transformações de Newton, onde provaremos algumas de suas propriedades relacionadas a curvatura média de ordem superior e lemas importantes, enunciaremos a definição do operador diferenciável de segunda ordem L_k e algumas de suas propriedades elípticas.

No Capítulo 2, iremos deduzir uma fórmula para o operador L_k atuando na função altura h (Lema 2.1.5), que será uma ferramenta essencial na demonstração dos nossos teoremas. Em seguida, com as fórmulas encontradas para o operador L_k atuando na função altura, faremos algumas aplicações para as mesmas. Como primeira aplicação, utilizamos tais fórmulas para obter uma limitação do máximo e mínimo do quociente $\frac{H_{k+1}}{H_k}$, seguido do Teorema 2.2.3 que nos dá uma condição para que uma hipersuperfície compacta

tipo-espaço imersa em \overline{M} seja um slice tipo-espaço, que é o teorema principal desta seção. Dando continuidade, daremos a definição da condição de convergência nula (CCN), o estudo e desenvolvimento das fórmulas de Minkowski para espaços-tempos GRW, que será nossa ferramenta principal para estender [22, Teorema 8] para o caso de hipersuperfícies imersas em um espaço-tempo RW que obedece a condição de convergência nula e também versões dos teoremas [22, Teorema 5] voltadas para o caso de curvatura média de ordem superior. Em seguida faremos o estudo do operador L_k atuando na função $\langle N, K \rangle$, onde obtemos uma fórmula bastante rústica para mesma, e a partir daí, dedicamos o restante da seção para aperfeiçoar esta fórmula. Por fim, utilizaremos a fórmula $L_0 = \Delta$ para obter novamente o [22, Teorema 6] e estendê-lo para o caso de curvatura média de ordem superior, dessa vez, sob a chamada condição de convergência nula forte (CCNF).

No capítulo 3, faremos o estudo da curvatura escalar de hipersuperfícies imersas em espaços-tempos GRW. Primeiramente, definiremos a função ângulo hiperbólico ϕ , seguida das definições de hipersuperfícies máximas, operador de Weingarten de um slice e sua curvatura média. Em sequência utilizamos a equação de Gauss e o tensor de Ricci para obter uma fórmula de curvatura escalar para uma hipersuperfície tipo-espaço imersa em um espaço-tempo GRW. Feito isso, como uma consequência da igualdade obtida para curvatura escalar, sob a condição convergência nula provamos o Teorema 3.2.1 que nos dá uma limitação inferior para curvatura escalar, onde a mesma atinge a igualdade somente sob algumas condições específicas. Em seguida, fazemos a observação 3.2.3 que sob algumas hipóteses razoavelmente simples sobre a função torção f , nos permite obter informações sobre a existência de hipersuperfícies máximas que são slices tipo-espaço. Dando sequência, apresentamos mais alguns corolários para casos particulares como a fibra ser Ricci flat, ou ainda, tomando um subconjunto de Σ , onde $H^2 \leq \frac{f'^2}{f^2}$. E como parte final, utilizaremos os teoremas, corolários obtidos e resultados tipo-Liouville para entender o comportamento da curvatura escalar de hipersuperfícies em espaços tempos GRW mais específicos, como o espaço Einstein de Sitter, espaço-tempo em estado estacionário (Steady state spacetime) e espaços tempos espacialmente parabólicos.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo iremos apresentar resultados e notações que serão imprescindíveis para o desenvolvimento deste trabalho. Omitiremos muitas das demonstrações devido a extensão do trabalho. Caso o leitor tenha interesse em se aprofundar nas definições e resultados aqui apresentados recomendamos a leitura das referências [25], [31], [22],

1.1 Variedades semi-Riemannianas

Neste primeiro momento, iremos definir o conceito de variedade semi-Riemanniana seguido das definições de sua conexão e curvatura. Veremos também a definição de um espaço-tempo Robertson-Walker generalizado, além das transformações de Newton e seus operadores diferenciáveis associados.

Definição 1.1.1. *Seja $(\overline{M}, \langle, \rangle)$ uma variedade diferenciável munido com um tensor métrico $g = \langle, \rangle$. O índice ν de g_p é a maior dimensão de um subespaço $\sigma \subset T_p\overline{M}$ tal que, a restrição $g_p|_{\sigma \times \sigma}$ é negativa definida, ou seja, para todo $v \in \sigma - \{0\}$ tem-se $g(v, v) < 0$.*

Definição 1.1.2. *Um tensor métrico g em uma variedade diferenciável \overline{M} é um $(0,2)$ -tensor covariante e simétrico, tal que, para cada $p \in \overline{M}$ a aplicação bilinear simétrica g_p em cada espaço tangente $T_p\overline{M}$ é não degenerada, e tem índice ν constante em \overline{M} , ou seja, o índice ν de g_p não depende de p . Uma variedade semi-Riemanniana \overline{M} é um par (\overline{M}, g) , onde \overline{M} é uma variedade diferenciável e g um tensor métrico de índice constante sobre \overline{M} .*

O valor constante do índice ν de g_p de uma variedade semi-Riemanniana \overline{M} é chamado *índice de \overline{M}* , logo $0 \leq \nu \leq \dim(\overline{M})$. Se $\nu = 0$, então \overline{M} é uma variedade Riemanniana e para cada $p \in M$ g_p é um produto interno em $T_p\overline{M}$. Caso $\nu = 1$ e $n \geq 2$, dizemos que \overline{M} é uma variedade Lorentz, como veremos no Exemplo [1.1.3](#).

1. Preliminares

A partir daqui, denotaremos $g = \langle, \rangle$, assim, para vetores $u, v \in T_p \overline{M}$, temos $g_p(u, v) = \langle u, v \rangle \in \mathbb{R}$, e $g(X, Y) = \langle X, Y \rangle$ para campos de vetores tangentes.

Exemplo 1.1.3. Sejam $0 \leq \nu \leq n + 1$ um inteiro positivo, $\overline{M} = \mathbb{R}^{n+1}$ e $(x^1, x^2, \dots, x^{n+1})$ o sistema de coordenadas usuais de \mathbb{R}^{n+1} . Considere o tensor métrico definido por

$$\langle u_p, v_p \rangle = - \sum_{i=1}^{\nu} u^i v^i + \sum_{j+\nu=1}^{n+1} u^j v^j, \quad (1.1)$$

onde $u_p = \sum u^i \partial_i$ e $v_p = \sum v^i \partial_i$. Se $\nu = 0$ então

$$\langle u_p, v_p \rangle = - \sum_{i=1}^0 u^i v^i + \sum_{j+0=1}^{n+1} u^j v^j$$

logo,

$$\langle u_p, v_p \rangle = \sum_{j=1}^{n+1} u^j v^j,$$

assim, \mathbb{R}^{n+1} munido com esta métrica nos dá a variedade Riemanniana chamada de espaço Euclidiano $(n+1)$ -dimensional. Se $\nu = 1$ e $n \geq 2$ temos

$$\langle u_p, v_p \rangle = -u^1 v^1 + \sum_{j=2}^{n+1} u^j v^j \quad (1.2)$$

e dizemos que $(\overline{M}, \langle, \rangle)$ é uma variedade de Lorentz (também chamada de espaço de Lorentz-Minkowski $(n+1)$ -dimensional), a qual denotaremos por \mathbb{R}_1^{n+1} . Em todo caso, se $0 \leq \nu \leq n + 1$, então $\overline{M} = \mathbb{R}^{n+1}$ munido com o tensor métrico aqui definido nos dá uma variedade semi-Riemanniana \mathbb{R}_ν^{n+1} .

Definição 1.1.4. Sejam $(\overline{M}, \langle, \rangle)$ uma variedade semi-Riemanniana e X um campo de vetores tangentes à \overline{M} . Dizemos que X é;

- (i) *tipo-espaço*, se $\langle X, X \rangle > 0$ ou $X = 0$;
- (ii) *tipo-tempo*, se $\langle X, X \rangle < 0$;
- (iii) *nulo*, se $\langle X, X \rangle = 0$ e $X \neq 0$.

Se \overline{M} for uma variedade Lorentziana e $\langle X, X \rangle = 0$ para $X \neq 0$, então dizemos que X é *tipo-luz*.

1.2 Conexão de Levi-Civita

Dada uma variedade semi-Riemanniana \overline{M} , considere os campos de vetores X e Y definidos em \overline{M} . Nesta seção, queremos calcular a taxa de variação de X na direção de Y_p , para cada $p \in \overline{M}$. No espaço Euclidiano, fazemos isso naturalmente calculando a derivada de um campo em relação a outro.

Definição 1.2.1. *Sejam u^1, u^2, \dots, u^{n+1} coordenadas naturais de \mathbb{R}_ν^{n+1} . Se X e Y são campos de vetores em \mathbb{R}_ν^{n+1} , onde $X = \sum X^i \partial_i$, definimos o vetor*

$$D_Y X = \sum_{i=1}^{n+1} Y(X^i) \partial_i \quad (1.3)$$

como a derivada covariante de X na direção de Y .

Perceba que, pelo fato da definição acima utilizar coordenadas distintas de \mathbb{R}_ν^{n+1} , não é evidente como fazer o mesmo para variedades semi-Riemannianas quaisquer, tendo isso em mente, iniciaremos apenas postulando suas propriedades. No que veremos adiante, $\mathcal{X}(\overline{M})$ denota o conjunto dos campos de vetores tangentes a \overline{M} de classe C^∞ e $C^\infty(\overline{M})$ denota o anel das funções reais de classe C^∞ definidas em \overline{M} .

Definição 1.2.2. *Sejam $X, Y, Z \in \mathcal{X}(\overline{M})$ e $f, g \in C^\infty(\overline{M})$. Uma conexão $\overline{\nabla}$ em uma variedade \overline{M} é uma função*

$$\overline{\nabla} : \mathcal{X}(\overline{M}) \times \mathcal{X}(\overline{M}) \longrightarrow \mathcal{X}(\overline{M})$$

satisfazendo :

(i) $\overline{\nabla}_{fX+gY} Z = f \overline{\nabla}_X Z + g \overline{\nabla}_Y Z;$

(ii) $\overline{\nabla}_X (Y + Z) = \overline{\nabla}_X Y + \overline{\nabla}_X Z ;$

(iii) $\overline{\nabla}_X (fZ) = f \overline{\nabla}_X Z + X(f)Z.$

Dizemos que $\overline{\nabla}_X Z$ é a derivada covariante de Z na direção de X em relação a conexão $\overline{\nabla}$.

Para darmos tal definição, é preciso garantir que em cada variedade semi-Riemanniana exista uma única conexão munida com mais duas propriedades adicionais da conexão natural em \mathbb{R}_ν^{n+1} . Condições estas que são dadas no seguinte resultado também chamado de “Milagre da Geometria Semi-Riemanniana” que pode ser encontrado em [25, Teorema 3.11].

Teorema 1.2.3 (Levi-Civita). *Em uma variedade semi-Riemanniana \overline{M} existe uma única conexão $\overline{\nabla}$ tal que*

(i) $[X, Y] = \overline{\nabla}_X Y - \overline{\nabla}_Y X;$

(ii) $X\langle Y, Z \rangle = \langle \overline{\nabla}_X Y, Z \rangle + \langle Y, \overline{\nabla}_X Z \rangle, \forall X, Y, Z \in \mathcal{X}(\overline{M}).$

$\overline{\nabla}$ é chamada a conexão de Levi-Civita de \overline{M} é caracterizada pela fórmula de Koszul

$$2\langle \overline{\nabla}_X Y, Z \rangle = X\langle Y, Z \rangle + Y\langle Z, X \rangle - Z\langle X, Y \rangle - \langle X, [Y, Z] \rangle + \langle Y, [Z, X] \rangle + \langle Z, [X, Y] \rangle. \quad (1.4)$$

1.3 Alguns operadores diferenciáveis

Nesta seção iremos definir os conceitos de gradiente, Hessiano, divergente e Laplaciano para uma variedade semi-Riemanniana \overline{M} . O referencial E_1, \dots, E_{n+1} sempre denotará um referencial ortonormal em \overline{M} .

Definição 1.3.1. *Seja $f \in C^\infty(\overline{M})$. O gradiente de f , $\overline{\nabla}f$, é um campo vetorial metricamente equivalente a diferencial df .*

Assim

$$\langle \overline{\nabla}f, X \rangle = df(X) = X(f), \forall X \in \mathcal{X}(\overline{M}).$$

Em termos de um referencial ortonormal podemos escrever

$$\sum_{i=1}^{n+1} \epsilon_i \langle \overline{\nabla}f, E_i \rangle E_i, \quad (1.5)$$

onde $\epsilon_i = \langle E_i, E_i \rangle$.

Definição 1.3.2. *Dado um campo vetorial $X \in \mathcal{X}(\overline{M})$ definimos a divergência do campo X como a função $divX : \overline{M} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por*

$$divX = tr(Y(p) \rightarrow \overline{\nabla}_Y X(p)), p \in \overline{M}.$$

Em termos de um referencial ortonormal podemos escrever

$$divX = \sum_{i=1}^{n+1} \epsilon_i \langle \overline{\nabla}_{E_i} X, E_i \rangle.$$

Definição 1.3.3. *Seja $f : \overline{M} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável. O hessiano de f , $\overline{\nabla}^2 f$, é o campo tensorial $\overline{\nabla}^2 f : \mathcal{X}(\overline{M}) \times \mathcal{X}(\overline{M}) \rightarrow \mathcal{X}(\overline{M})$ dado por*

$$\overline{\nabla}^2 f(X, Y) = \langle \overline{\nabla}_X (\overline{\nabla}f), Y \rangle.$$

Definição 1.3.4. *Seja \bar{M} uma variedade semi-Riemanniana. Definimos o operador Laplaciano, $\Delta : C^\infty(\bar{M}) \rightarrow C^\infty(\bar{M})$ por $\Delta f = \text{tr}(\bar{\nabla}^2 f)$, $\forall f \in C^\infty(M)$. Observe que o Laplaciano também pode ser visto da seguinte maneira:*

$$\begin{aligned} \Delta f &= \sum_{i=1}^{n+1} \epsilon_i \langle \bar{\nabla}^2 f(E_i), E_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} \epsilon_i \langle \bar{\nabla}_{E_i}(\bar{\nabla} f), E_i \rangle \\ &= \text{div}(\bar{\nabla} f). \end{aligned}$$

1.4 Curvatura de uma variedade semi-Riemanniana

Nesta seção iremos definir o tensor curvatura de uma variedade semi-Riemanniana, que na prática mede o quanto uma variedade deixa de ser Euclidiana.

Definição 1.4.1. *Seja \bar{M} uma variedade semi-Riemanniana. O tensor curvatura \bar{R} de \bar{M} é a aplicação*

$$\bar{R} : \mathcal{X}(\bar{M}) \times \mathcal{X}(\bar{M}) \times \mathcal{X}(\bar{M}) \rightarrow \mathcal{X}(\bar{M})$$

dada por $\bar{R}(X, Y, Z) = \bar{\nabla}_{[X, Y]}Z - [\bar{\nabla}_X, \bar{\nabla}_Y]Z$. Fixando os campos $X, Y \in \mathcal{X}(\bar{M})$ definimos o operador curvatura

$$\bar{R} : \mathcal{X}(\bar{M}) \rightarrow \mathcal{X}(\bar{M})$$

dado por $\bar{R}(X, Y)Z = \bar{R}(X, Y, Z)$. Se o tensor curvatura é identicamente nulo dizemos que \bar{M} é uma variedade flat.

Perceba que, pelo fato do tensor curvatura ser definido em termos da conexão da variedade semi-Riemanniana, temos que o mesmo é linear em cada entrada em relação a soma e linear em relação a funções pertencentes ao anel $C^\infty(M)$. Além disso, o operador curvatura satisfaz as seguintes propriedades (Para maiores detalhes veja [25] Proposição 3.36).

Proposição 1.4.2. *Sejam $X, Y, Z, W \in \mathcal{X}(\bar{M})$, então*

- (i) $\bar{R}(X, Y)Z + \bar{R}(Y, Z)X + \bar{R}(Z, X)Y = 0$;
- (ii) $\langle \bar{R}(X, Y)Z, W \rangle = -\langle \bar{R}(Y, X)Z, W \rangle$;
- (iii) $\langle \bar{R}(X, Y)Z, W \rangle = -\langle \bar{R}(X, Y)W, Z \rangle$;
- (iv) $\langle \bar{R}(X, Y)Z, W \rangle = \langle \bar{R}(Z, W)X, Y \rangle$.

A seguir iremos definir o conceito de curvatura seccional de uma variedade semi-Riemanniana \overline{M} que está essencialmente relacionado ao operador curvatura.

Definição 1.4.3. *Sejam \overline{M} uma variedade semi-Riemanniana e $p \in \overline{M}$. Considere um subespaço não-degenerado $\sigma \subset T_p\overline{M}$. Denominamos o número*

$$\overline{K}(x, y) = \frac{\langle \overline{R}(x, y)x, y \rangle}{|x|^2|y|^2 - \langle x, y \rangle^2}$$

como a curvatura seccional de σ em p , onde $\{x, y\}$ é uma base de σ .

Vale salientar que a curvatura seccional não depende da base $\{x, y\}$ escolhida para σ (veja [31] Lema 1.8).

Definição 1.4.4. *Considere a aplicação multilinear $F : \mathcal{X}(\overline{M})^4 \rightarrow \mathbb{R}$. Se F satisfaz todos os itens da proposição 1.4.2 dizemos que F é tipo-curvatura.*

Note que, por definição e considerando que $\sigma = \text{span}\{x, y\}$ é um plano não degenerado, se $F(x, y, x, y) = 0$ para todo $x, y \in \sigma$ então $F \equiv 0$.

Lema 1.4.5. *Sejam $\sigma = \text{span}\{x, y\}$ um plano não degenerado e F uma função tipo-curvatura em $T_p(\overline{M})$ tal que*

$$\overline{K}(x, y) = \frac{F(x, y, x, y)}{|x|^2|y|^2 - \langle x, y \rangle^2}.$$

Então

$$\langle \overline{R}(x, y)z, w \rangle = F(x, y, z, w)$$

para todos $x, y, z, w \in T_p\overline{M}$.

Demonstração. Defina $B(x, y, z, w) = F(x, y, z, w) - \langle \overline{R}(x, y)z, w \rangle$. Não é difícil verificar que $B(x, y, z, w)$ satisfaz todos os itens da proposição 1.4.2, isto é, $B(x, y, z, w)$ é tipo curvatura. Sendo $\sigma = \text{span}\{x, y\}$ um plano não degenerado, temos que $B(x, y, x, y) = 0$. Logo, considerando o comentário feito anteriormente sobre aplicações tipo-curvatura, temos $B \equiv 0$, e conseqüentemente $F(x, y, z, w) = \langle \overline{R}(x, y)z, w \rangle$. ■

Abordaremos agora o conceito de curvatura seccional constante de uma variedade semi-Riemanniana \overline{M} .

Definição 1.4.6. *Dizemos que uma variedade semi-Riemanniana \overline{M} tem curvatura seccional constante se a função curvatura seccional \overline{K} é constante.*

Como veremos mais adiante, um assunto que será bastante abordado no decorrer trabalho é o conceito de variedade de curvatura seccional constante. Sabendo disto, o próximo resultado nos dá uma fórmula para \overline{R} quando \overline{K} é constante.

Corolário 1.4.7. *Se \overline{M} tem curvatura seccional constante κ , então*

$$\overline{R}(x, y)z = \overline{\kappa}(\langle x, z \rangle y - \langle y, z \rangle x).$$

Demonstração. Defina $F(x, y, z, w) = \overline{\kappa}(\langle x, z \rangle \langle y, w \rangle - \langle y, z \rangle \langle x, w \rangle)$. Note que F satisfaz todos os itens da Proposição [1.4.2](#), ou seja, F é tipo-curvatura. Pelo modo como definimos F , temos

$$F(x, y, x, y) = \overline{\kappa}(|x|^2|y|^2 - \langle x, y \rangle^2),$$

então sendo $\sigma = \text{span}\{x, y\}$ um plano não degenerado obtemos

$$\overline{K} = \overline{\kappa} = \frac{F(x, y, x, y)}{|x|^2|y|^2 - \langle x, y \rangle^2}$$

logo, pelo Lema [1.4.5](#), temos $F(x, y, z, w) = \langle \overline{R}(x, y)z, w \rangle$ e, portanto,

$$\overline{R}(x, y)z = \overline{\kappa}(\langle x, z \rangle y - \langle y, z \rangle x).$$

■

Definição 1.4.8. *Sejam \overline{M} uma variedade semi-Riemanniana $(n+1)$ -dimensional e E_1, \dots, E_{n+1} um referencial ortonormal de \overline{M} . A aplicação $\overline{Ric} : \mathcal{X}(\overline{M}) \times \mathcal{X}(\overline{M}) \rightarrow C^\infty(\overline{M})$ dada por*

$$\overline{Ric}(X, Y) = \sum_{i=1}^{n+1} \epsilon_i \langle \overline{R}(X, E_i)Y, E_i \rangle,$$

é denominada curvatura do tensor de Ricci.

Dizemos que uma variedade semi-Riemanniana \overline{M} é Einstein se $\overline{Ric} = \overline{c}\langle, \rangle$ para algum $\overline{c} \in \mathbb{R}$.

Definição 1.4.9. *Seja \overline{M} uma variedade semi-Riemanniana $(n+1)$ -dimensional. Definimos a curvatura escalar \overline{S} de \overline{M} como o traço do tensor curvatura de Ricci, isto é,*

$$\overline{S} = \text{tr}(\overline{Ric}).$$

1.5 Espaços-tempos Robertson-Walker generalizados

Nesta seção, iremos apresentar algumas definições e resultados clássicos de espaços-tempos Robertson-Walker generalizados, os quais serão utilizados ao longo desta dis-

sertação. Faremos também um breve comentário a respeito do operador de Weingarten juntamente com o conceito de curvaturas principais

Definição 1.5.1. *Sejam M^n uma variedade Riemanniana n -dimensional, e seja I uma variedade 1-dimensional (um círculo ou intervalo aberto de \mathbb{R}). Vamos denotar por $-I \times_f M^n$ a variedade produto $I \times M^n$ $(n+1)$ -dimensional munida da métrica Lorentziana*

$$\langle , \rangle = -dt^2 + f^2(t)\langle , \rangle_M,$$

onde $f > 0$ é uma função suave em I e \langle , \rangle_M representa a métrica Riemanniana em M^n , ou seja, $-I \times_f M^n$ é um produto torcido Lorentziano com base Lorentziana $(I, -dt^2)$ e fibra Riemanniana $(M^n, \langle , \rangle_M)$ e função torção f .

Vamos nos referir a $-I \times_f M^n$ como espaço-tempo Roberson-Walker generalizado, e quando a fibra Riemanniana M^n tiver curvatura seccional constante iremos nos referir a tal espaço simplesmente por espaço-tempo Robertson-Walker (RW). A seguir, daremos exemplos clássicos de espaços-tempos desse tipo. (Para mais detalhes recomendamos a leitura de [31], [22] e [25].)

Exemplo 1.5.2 (Espaço-Tempo de Sitter). O conjunto dado por

$$\mathbb{S}_1^{n+1} = \{x \in \mathbb{R}_1^{n+2} \mid \langle x, x \rangle = 1\}$$

é uma variedade semi-Riemanniana completa e conexa denominada *espaço de Sitter* que possui curvatura seccional constante igual a 1. De acordo com a referência [31] o espaço de Sitter admite o modelo GRW

$$\mathbb{S}_1^{n+1} = -\mathbb{R} \times_{\cosh(t)} \mathbb{S}^n$$

onde \mathbb{S}^n é a esfera n -dimensional de raio unitário do espaço Euclidiano.

Exemplo 1.5.3. *Considere a variedade de Lorentz \mathbb{R}_1^{n+1} com métrica*

$$\langle u, v \rangle = -u^1 v^1 + \sum_{i=1}^n u^i v^i.$$

Não é difícil ver que \mathbb{R}_1^{n+1} pode ser dada pelo produto torcido $-\mathbb{R} \times_f \mathbb{R}^n$, onde $f \equiv 1$. Tendo em vista que a curvatura seccional de \mathbb{R}^n é zero, temos que \mathbb{R}_1^{n+1} tem curvatura seccional constante igual a zero.

Exemplo 1.5.4 (Steady State Space). *Considere o espaço-tempo de Sitter visto anteriormente e a $\mathbb{L}^{n+2} - \{0\}$ um vetor tipo-tempo não nulo, apontando para o passado, temos*

assim que, $\langle a, a \rangle = 0$ e $\langle a, e_0 \rangle > 0$. Definimos o espaço em estado estacionário (Steady State Space) como a região aberta do espaço-tempo de Sitter dada por

$$\mathcal{H}^{n+1} = \{p \in \mathbb{S}^{n+1} \mid \langle p, a \rangle > 0\}.$$

Na realidade, tomando a aplicação $\omega : \mathcal{H}^{n+1} \rightarrow -\mathbb{R} \times_{e^t} \mathbb{R}^n$ dada por

$$\omega(x) = \left(\log(\langle x, a \rangle), \frac{x - \langle x, a \rangle b - \langle x, b \rangle a}{\langle x, a \rangle} \right),$$

onde $\langle a, b \rangle = 1$ é possível mostrar que \mathcal{H}^{n+1} é isométrico ao espaço $-\mathbb{R} \times_{e^t} \mathbb{R}^n$ (veja [31]). No Capítulo 3, faremos um comentário deste espaço e sua relação com o princípio cosmológico.

Exemplo 1.5.5 (Einstein-de Sitter). O espaço-tempo GRW, Einstein-de Sitter, satisfaz é dado como o produto torcido $\mathcal{E} = -(0, \infty) \times_{t^{1/3}} \mathbb{R}^3$, dotado da métrica Lorentziana

$$\langle , \rangle = -dt^2 + (t^{1/3})^2(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2).$$

O espaço-tempo Einstein-de Sitter, assim como steady state space, satisfaz o princípio cosmológico.

Como o nosso estudo é feito somente dentro de espaços-tempos GRW, iremos apresentar a seguir duas propriedade relacionadas ao tensor curvatura do ambiente GRW. Estas propriedades nos permitem expressar o tensor curvatura do ambiente em relação ao tensor curvatura da folha $(I, -dt^2)$ e de sua fibra (M, \langle , \rangle_M) . Na verdade, as duas proposições a seguir decorrem de propriedades mais gerais onde a folha não é necessariamente um subconjunto de \mathbb{R} . O leitor pode encontrar mais detalhes em [25, Proposição 7.42], se atentando ao fato da métrica utilizada.

Proposição 1.5.6. Sejam \bar{R} e R_M os tensores de curvatura de \bar{M} e M^n respectivamente. Então dados $U, V \in \mathcal{X}(\bar{M})$, temos

$$\begin{aligned} \bar{R}(U, V)W &= R_M(U^*, V^*)W^* + ((\log f)')^2(\langle U, W \rangle V - \langle V, W \rangle U) \\ &+ (\log f)'' \langle W, \partial_t \rangle (\langle V, \partial_t \rangle U - \langle U, \partial_t \rangle V) \\ &- (\log f)'' (\langle V, \partial_t \rangle \langle U, W \rangle - \langle U, \partial_t \rangle \langle V, W \rangle) \partial_t, \end{aligned} \quad (1.6)$$

onde $U^* = (d\pi_M)(U)$ e $V^* = (d\pi_M)(V)$ são as projeções sobre a fibra M^n .

Demonstração. Sejam U, V e $W \in \mathcal{X}(\bar{M})$ onde $U = U^* - \langle U, \partial_t \rangle \partial_t$, $V = V^* - \langle V, \partial_t \rangle \partial_t$ e

$W = W^* - \langle W, \partial_t \rangle \partial_t$ são suas respectivas decomposições. Então

$$\begin{aligned}
 \overline{R}(U, V)W &= \overline{R}(U^* - \langle U, \partial_t \rangle \partial_t, V^* - \langle V, \partial_t \rangle \partial_t)(W^* - \langle W, \partial_t \rangle \partial_t) \\
 &= [\overline{R}(U^*, V^*) - \langle V, \partial_t \rangle \overline{R}(U^*, \partial_t) - \langle U, \partial_t \rangle \overline{R}(\partial_t, V^*) + \langle U, \partial_t \rangle \overline{R}(\partial_t, \partial_t)] (W \\
 &\quad - \langle W, \partial_t \rangle \partial_t) \\
 &= \overline{R}(U^*, V^*)W - \langle W, \partial_t \rangle \overline{R}(U^*, V^*) \partial_t - \langle V, \partial_t \rangle \overline{R}(U^*, \partial_t)W \\
 &\quad + \langle V, \partial_t \rangle \langle W, \partial_t \rangle \overline{R}(U^*, \partial_t) \partial_t - \langle U, \partial_t \rangle \overline{R}(\partial_t, V^*)W + \langle U, \partial_t \rangle \langle W, \partial_t \rangle \overline{R}(\partial_t, V^*) \partial_t \\
 &\quad + \langle U, \partial_t \rangle \overline{R}(\partial_t, \partial_t)W - \langle U, \partial_t \rangle \langle W, \partial_t \rangle \overline{R}(\partial_t, \partial_t) \partial_t. \tag{1.7}
 \end{aligned}$$

Por [25, Proposição 7.42], temos

(i) $\overline{R}(U^*, V^*) \partial_t = 0$

(ii) $\overline{R}(U^*, \partial_t)W^* = \langle U^*, W^* \rangle \frac{f''}{f} \partial_t = (\langle U, W \rangle + \langle U, \partial_t \rangle \langle W, \partial_t \rangle) \frac{f''}{f} \partial_t$

(iii) $\overline{R}(U^*, \partial_t) \partial_t = -\frac{f''}{f} (U + \langle U, \partial_t \rangle \partial_t)$

(iv) $\overline{R}(\partial_t, V^*)W^* = -\langle V^*, W^* \rangle \frac{f''}{f} \partial_t = -(\langle V, W \rangle + \langle V, \partial_t \rangle \langle W, \partial_t \rangle) \frac{f''}{f} \partial_t$

(v) $\overline{R}(\partial_t, V^*) \partial_t = \frac{f''}{f} V^* = \frac{f''}{f} (V + \langle V, \partial_t \rangle \partial_t)$

(vi) $\overline{R}(\partial_t, \partial_t) = 0$

(vii) $\overline{R}(U^*, V^*)W^* = R_M(U^*, V^*)W^* + \left(\frac{f''}{f}\right)^2 [(\langle U, W \rangle + \langle U, \partial_t \rangle \langle W, \partial_t \rangle)V^* - (\langle V, W \rangle + \langle V, \partial_t \rangle \langle W, \partial_t \rangle)U^*].$

Substituindo cada uma das fórmulas em (1.7) e fazendo todos os cálculos obtemos o resultado desejado

$$\begin{aligned}
 \overline{R}(U, V)W &= R_M(U^*, V^*)W^* + ((\log f)')^2 (\langle U, W \rangle V - \langle V, W \rangle U) \\
 &\quad + (\log f)'' \langle W, \partial_t \rangle (\langle V, \partial_t \rangle U - \langle U, \partial_t \rangle V) \\
 &\quad - (\log f)'' (\langle V, \partial_t \rangle \langle U, W \rangle - \langle U, \partial_t \rangle \langle V, W \rangle) \partial_t.
 \end{aligned}$$

■

Proposição 1.5.7. *Sejam \overline{Ric} e Ric_M os tensores de Ricci de \overline{M} e M^n respectivamente. Então dados $U, V \in \mathcal{X}(\overline{M})$, temos*

$$\begin{aligned}
 \overline{Ric}(U, V) &= Ric_M(U^*, V^*) + (n((\log f)')^2 + (\log f)'') \langle U, V \rangle \\
 &\quad - (n-1)(\log f)'' \langle U, \partial_t \rangle \langle V, \partial_t \rangle, \tag{1.8}
 \end{aligned}$$

onde $U^* = (d\pi_M)(U)$ e $V^* = (d\pi_M)(V)$ são as projeções sobre a fibra M^n .

Demonstração. Considere as decomposições $U = U^* - \langle U, \partial_t \rangle \partial_t$, $V = V^* - \langle V, \partial_t \rangle \partial_t$ dos campos U e V respectivamente. Então, temos

$$\begin{aligned} \overline{Ric}(U, V) &= \overline{Ric}(U^* - \langle U, \partial_t \rangle \partial_t, V^* - \langle V, \partial_t \rangle \partial_t) \\ &= \overline{Ric}(U^*, V^*) - \langle V, \partial_t \rangle \overline{Ric}(\partial_t, U^*) - \langle U, \partial_t \rangle \overline{Ric}(\partial_t, V^*) + \\ &\quad + \langle U, \partial_t \rangle \langle V, \partial_t \rangle \overline{Ric}(\partial_t, \partial_t). \end{aligned}$$

Por [25, Corolário 7.43] (caso o leitor queira uma fórmula mais direta veja [29, Seção 2]) temos,

$$\begin{aligned} \overline{Ric}(U, V) &= Ric_M(U^*, V^*) + \left(\frac{f''}{f} + n \frac{f'}{f^2} - \frac{f'^2}{f^2} \right) \langle U^*, V^* \rangle + \langle U, \partial_t \rangle \langle V, \partial_t \rangle \left(-n \frac{f''}{f} \right) \\ &= Ric_M(U^*, V^*) + \left(\frac{f''}{f} + n \frac{f'}{f^2} - \frac{f'^2}{f^2} \right) \langle U + \langle U, \partial_t \rangle \partial_t, V + \langle V, \partial_t \rangle \partial_t \rangle + \\ &\quad + \langle U, \partial_t \rangle \langle V, \partial_t \rangle \left(-n \frac{f''}{f} \right) \\ &= Ric(U^*, V^*) + \left(\frac{f''}{f} + n \frac{f'}{f^2} - \frac{f'^2}{f^2} \right) (\langle U, V \rangle + 2 \langle U, \partial_t \rangle \langle V, \partial_t \rangle - \langle U, \partial_t \rangle \langle V, \partial_t \rangle) \\ &\quad + \langle U, \partial_t \rangle \langle V, \partial_t \rangle \left(-n \frac{f''}{f} \right) \\ &= Ric_M(U^*, V^*) + \left(\frac{f''}{f} + n \frac{f'}{f^2} - \frac{f'^2}{f^2} \right) \langle U, V \rangle \\ &\quad + \left(\frac{f''}{f} + n \frac{f'}{f^2} - \frac{f'^2}{f^2} \right) \langle U, \partial_t \rangle \langle V, \partial_t \rangle - \langle U, \partial_t \rangle \langle V, \partial_t \rangle \left(n \frac{f''}{f} \right) \\ &= Ric_M(U^*, V^*) + \left(\frac{f''}{f} + n \frac{f'}{f^2} - \frac{f'^2}{f^2} \right) \langle U, V \rangle + \\ &\quad + \langle U, \partial_t \rangle \langle V, \partial_t \rangle \left(\frac{f''}{f} + n \frac{f'}{f^2} - \frac{f'^2}{f^2} - n \frac{f''}{f} \right) \\ &= Ric_M(U^*, V^*) + \left(\frac{f''}{f} + n \frac{f'}{f^2} - \frac{f'^2}{f^2} \right) \langle U, V \rangle + \\ &\quad + \langle U, \partial_t \rangle \langle V, \partial_t \rangle \left(\frac{f'^2}{f^2} (n-1) - \frac{f''}{f} (n-1) \right) \\ &= Ric(U^*, V^*) + \left(\frac{f''}{f} + n \frac{f'}{f^2} - \frac{f'^2}{f^2} \right) \langle U, V \rangle - (n-1) \langle U, \partial_t \rangle \langle V, \partial_t \rangle \left(\frac{f''}{f} - \frac{f'^2}{f^2} \right) \\ &= Ric(U^*, V^*) + (n((\log f)')^2 + (\log f)'') \langle U, V \rangle - (n-1) (\log f)'' \langle U, \partial_t \rangle \langle V, \partial_t \rangle. \end{aligned}$$

■

Observação 1.5.8. Quando $\overline{M} = -I \times_f M^n$ é um espaço-tempo GRW (com fibra M^n necessariamente conexa), \overline{M} é Einstein com $\overline{Ric} = \bar{c} \langle, \rangle$ e $\bar{c} \in \mathbb{R}$ se, e somente se, a fibra

(M, \langle, \rangle_M) tem curvatura de Ricci constante c e a função torção f satisfaz as equações diferenciais

$$\frac{f''}{f} = \frac{\bar{c}}{n} \quad e \quad \frac{\bar{c}(n-1)}{n} = \frac{c + (n-1)(f')^2}{f^2}$$

o que acarreta $(n-1)(\log f)'' = \frac{c}{f^2}$.

Com efeito, seja $\bar{M} = -I \times_f M$ um espaço-tempo GRW Einstein com $\bar{Ric} = \bar{c}\langle, \rangle$ e considere a equação (1.8), então

$$\begin{aligned} Ric_M(X^*, Y^*) &= \bar{Ric}(X^*, Y^*) - [n((\log f)')^2 + (\log f)'']\langle X^*, Y^* \rangle \\ &= \bar{c}\langle X^*, Y^* \rangle - \left[\frac{f''}{f} + (n-1)\frac{f'^2}{f^2} \right] \langle X^*, Y^* \rangle \\ &= \left[\bar{c} - \frac{f''}{f} - (n-1)\frac{f'^2}{f^2} \right] \langle X^*, Y^* \rangle. \end{aligned}$$

como $\bar{Ric}(\partial_t, \partial_t) = -n\frac{f''}{f}$, obtemos que $\bar{c} = n\frac{f''}{f}$ e logo,

$$Ric_M(X^*, Y^*) = \left[n\frac{f''}{f} - \frac{f''}{f} - (n-1)\frac{f'^2}{f^2} \right] \langle X^*, Y^* \rangle \quad (1.9)$$

$$= \left[(n-1)\frac{f''}{f} - (n-1)\frac{f'^2}{f^2} \right] \langle X^*, Y^* \rangle \quad (1.10)$$

$$= (n-1)(\log f)'' f^2 \langle X^*, Y^* \rangle_M. \quad (1.11)$$

Agora, como a fibra M^n é conexa, consequentemente $(n-1)(\log f)'' f^2$ é constante, ou seja,

$$(n-1)(\log f)'' f^2 = c,$$

onde $c \in \mathbb{R}$, e, portanto $Ric_M = c$. Veja ainda que

$$\begin{aligned} \left[(n-1)\frac{f''}{f} - (n-1)\frac{f'^2}{f^2} \right] f^2 &= \left[\frac{\bar{c}(n-1)}{n} - (n-1)\frac{f'^2}{f^2} \right] f^2 \\ &= c \end{aligned}$$

o que implica,

$$\frac{\bar{c}(n-1)}{n} = \frac{c + (n-1)(f')^2}{f^2}.$$

A recíproca é trivial.

1.6 Subvariedades semi-Riemannianas

Nesta seção apresentaremos a definição imersão isométrica de variedades semi-Riemannianas e alguns resultados e definições decorrentes desta teoria, tais como, segunda forma fundamental, operador forma de uma variedade semi-Riemanniana Σ imersa em \overline{M} e as equações de Gauss e Codazzi. Consideraremos aqui que \overline{M}^m e Σ^n variedades diferenciáveis de dimensão m e n respectivamente, e denotaremos simplesmente por \overline{M} e Σ quando não houver dúvidas sobre a definição das mesmas.

Definição 1.6.1. *Sejam Σ e $(\overline{M}, \langle, \rangle)$ variedades diferenciáveis. Dizemos que a aplicação $\psi : \Sigma \rightarrow \overline{M}$ é uma imersão se a aplicação diferencial $dx_p : T_p\Sigma \rightarrow T_x(p)\overline{M}$ é injetiva para todo $p \in \Sigma$.*

Definição 1.6.2. *Sejam $(\Sigma, \langle, \rangle_\Sigma)$ e $(\overline{M}, \langle, \rangle)$ variedades semi-Riemannianas. Se a aplicação $\psi : \Sigma \rightarrow \overline{M}$ é uma imersão, e*

$$\langle u, v \rangle_\Sigma = \langle dx_p(u), dx_p(v) \rangle$$

dizemos que a imersão é uma imersão isométrica.

Por definição, cada espaço tangente $T_p\Sigma$ é um subespaço não degenerado de $T_p\overline{M}$, e sendo $T_p\Sigma^\perp$ o espaço normal a $T_p\Sigma$ (que por definição também um subespaço não degenerado de $T_p\overline{M}$), podemos expressar o espaço $T_p\overline{M}$ pela soma direta

$$T_p\overline{M} = T_p\Sigma \oplus T_p\Sigma^\perp.$$

Definição 1.6.3. *Sejam \overline{M} uma variedade semi-Riemanniana e $\overline{\nabla}$ sua conexão de Levi-Civita e considere a imersão isométrica $\psi : \Sigma \rightarrow \overline{M}$. Dados $X, Y \in \mathcal{X}(\Sigma)$, temos que $\overline{\nabla}_X Y = (\nabla_X Y)^\top + (\nabla_X Y)^\perp$. Pela unicidade da conexão de Levi-Civita, definimos $(\nabla)^\top$ é a conexão de Levi-Civita de Σ e denotaremos simplesmente por ∇ .*

Definição 1.6.4 (Fórmula de Gauss). *Considere a aplicação $II : \mathcal{X}(\Sigma) \times \mathcal{X}(\Sigma) \rightarrow \mathcal{X}(\Sigma)^\perp$, onde $(\Sigma)^\perp$ denota o conjunto dos campos de vetores normais a Σ . A expressão*

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + II(X, Y)$$

é denominada fórmula de Gauss e a aplicação II é chamada de segunda forma fundamental.

Note que a segunda forma fundamental $II(X, Y) = (\nabla_X Y)^\perp$ é uma medida da diferença entre a conexão Riemanniana de Σ e a conexão Riemanniana de \overline{M} . Na verdade,

a segunda forma fundamental é uma aplicação simétrica e bilinear sobre o anel $C^\infty(\Sigma)$. Através da definição [1.6.4](#) enunciaremos uma expressão bastante útil a respeito das curvaturas de \overline{M} e Σ chamada *equação de Gauss*. A equação de Gauss nos permite expressar o tensor curvatura de Σ em termos do tensor curvatura de \overline{M} e da segunda forma fundamental.

Considere agora os campos de vetores $X \in \mathcal{X}(\Sigma)$ e $N \in \mathcal{X}(\Sigma)^\perp$ e seja $A_N X = -(\overline{\nabla}_X N)^\top$. Então, dado $W \in \mathcal{X}(\Sigma)$

$$\begin{aligned} X\langle N, W \rangle &= \langle \overline{\nabla}_X N, W \rangle + \langle N, \overline{\nabla}_X W \rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

e pela fórmula de Gauss, obtemos

$$\langle A_N X, W \rangle = \langle II(X, W), N \rangle.$$

Chamamos a aplicação $A : \mathcal{X}(\Sigma) \longrightarrow \mathcal{X}(\Sigma)$ dada por

$$A(X, N) = A_N X$$

de *Operador Forma* ou *Operador de Weingarten* da imersão $\psi : \Sigma \longrightarrow \overline{M}$. O operador de Weingarten possui algumas propriedades interessantes, tais como, ser linear sobre o anel $C^\infty(\Sigma)$ e auto adjunto, ou seja,

$$\langle A_N X, W \rangle = \langle X, A_N W \rangle$$

para quaisquer campos $X, W \in \mathcal{X}(\Sigma)$.

Considere componente normal $(\overline{\nabla}_X N)^\perp$ do campo $\overline{\nabla}_X N$ chamada de conexão normal de Σ , a qual denotaremos por ∇^\top . Temos, então, que

$$\begin{aligned} \overline{\nabla}_X N &= (\overline{\nabla}_X N)^\top + (\overline{\nabla}_X N)^\perp \\ &= -A_N X + \nabla_X^\top N. \end{aligned}$$

A expressão acima obtida e denominada *Fórmula de Weingarten*.

Proposição 1.6.5. *Seja Σ uma subvariedade semi-Riemanniana de \overline{M} , R e \overline{R} seus respectivos tensores curvatura. Dados $X, Y, Z, W \in \mathcal{X}(\Sigma)$ tem-se,*

$$\langle R(X, Y)Z, W \rangle = \langle \overline{R}(X, Y)Z, W \rangle + \langle II(X, Z), II(Y, W) \rangle - \langle II(X, W), II(Y, Z) \rangle.$$

Demonstração. Por definição, temos

$$\begin{aligned}\bar{R}(X, Y)Z &= \bar{\nabla}_{[X, Y]}Z - [\bar{\nabla}_X, \bar{\nabla}_Y]Z \\ &= \bar{\nabla}_{[X, Y]}Z + \bar{\nabla}_Y\bar{\nabla}_XZ - \bar{\nabla}_X\bar{\nabla}_YZ.\end{aligned}$$

Temos, também, que

$$\begin{aligned}\bar{\nabla}_X\bar{\nabla}_YZ &= \bar{\nabla}_X(\nabla_YZ + II(Z, Y)) \\ &= \bar{\nabla}_X\nabla_YZ + \bar{\nabla}_XII(Z, Y) \\ &= \nabla_X\nabla_YZ + II(X, \nabla_YZ) + \bar{\nabla}_XII(Z, Y) \\ &= \nabla_X\nabla_YZ + II(X, \nabla_YZ) - A_{II(Z, Y)}X + \nabla_X^\perp II(Z, Y)\end{aligned}$$

ou seja

$$-\bar{\nabla}_X\bar{\nabla}_YZ = -\nabla_X\nabla_YZ - II(X, \nabla_YZ) + A_{II(Z, Y)}X - \nabla_X^\perp II(Z, Y)$$

consequentemente

$$\bar{\nabla}_Y\bar{\nabla}_XZ = \nabla_Y\nabla_XZ + II(Y, \nabla_XZ) - A_{II(X, Z)}Y + \nabla_Y^\perp II(X, Z)$$

e, novamente, por definição

$$\bar{\nabla}_{[X, Y]}Z = \nabla_{[X, Y]}Z + II([X, Y], Z)$$

e, obtemos, então, que

$$\begin{aligned}\bar{R}(X, Y)Z &= \nabla_{[X, Y]}Z + II([X, Y], Z) + \nabla_Y\nabla_XZ + II(Y, \nabla_XZ) - A_{II(X, Z)}Y + \\ &+ \nabla_Y^\perp II(X, Z) - \nabla_X\nabla_YZ - II(X, \nabla_YZ) + A_{II(Z, Y)}X - \nabla_X^\perp II(Z, Y) \\ &= R(X, Y)Z - II(X, \nabla_YZ) + II(Y, \nabla_XZ) + A_{II(Y, Z)}X - A_{II(X, Z)}Y + \\ &- \nabla_X^\perp II(Y, Z) + \nabla_Y^\perp II(X, Z) + II([X, Y], Z).\end{aligned}$$

Seja $W \in \mathcal{X}(\Sigma)$, temos que

$$\begin{aligned}\langle \bar{R}(X, Y)Z, W \rangle &= \langle R(X, Y)Z, W \rangle - \langle II(X, \nabla_YZ), W \rangle + \langle II(Y, \nabla_XZ), W \rangle + \\ &+ \langle A_{II(Y, Z)}X, W \rangle - \langle A_{II(X, Z)}Y, W \rangle - \langle \nabla_X^\perp II(Y, Z), W \rangle + \\ &+ \langle \nabla_Y^\perp II(X, Z), W \rangle + \langle II([X, Y], Z), W \rangle.\end{aligned}$$

como a segunda forma fundamental é normal a Σ , enquanto W é um campo tangente,

temos

$$\langle \bar{R}(X, Y)Z, W \rangle = \langle \bar{R}(X, Y)Z, W \rangle + \langle A_{II(Y, Z)}X, W \rangle - \langle A_{II(X, Z)}Y, W \rangle.$$

Porém, como $\langle A_{II(Y, Z)}X, W \rangle = \langle II(X, W), II(Y, Z) \rangle$ e $\langle A_{II(X, Z)}Y, W \rangle$, e portanto

$$\langle R(X, Y)Z, W \rangle = \langle \bar{R}(X, Y)Z, W \rangle + \langle II(X, Z), II(Y, W) \rangle - \langle II(X, W), II(Y, Z) \rangle.$$

■

A seguir, faremos um e um breve comentário sobre orientação temporal e em seguida definiremos conceito de hipersuperfície tipo-espaço.

Seja V um espaço vetorial Lorentziano e considere o conjunto

$$\mathcal{T} = \{u \in V \mid \langle u, u \rangle < 0\}.$$

Para cada $u \in \mathcal{T}$ definimos o conjunto

$$C(u) = \{v \in \mathcal{T} \mid \langle u, v \rangle < 0\},$$

o qual chamamos de *cone temporal* de V contendo u . Agora seja \bar{M} uma variedade Lorentziana e \mathcal{T} uma função em \bar{M} que associa cada ponto $p \in \bar{M}$ a um cone tipo-tempo $\mathcal{T}_p \in T_p\bar{M}$. Se, para cada ponto $p \in \bar{M}$ existe uma vizinhança U de p e $V \in \mathcal{X}(\bar{M})$, onde $V(q) \in \mathcal{T}_q$ para todo $q \in U$, dizemos que \mathcal{T} é diferenciável e que \mathcal{T} é uma orientação temporal de \bar{M} . Quando \bar{M} admite uma orientação temporal dizemos que \bar{M} é temporalmente orientada. Na realidade, uma variedade Lorentziana \bar{M} é temporalmente orientada se, e somente se, existe um campo $K \in \mathcal{X}(\bar{M})$ tipo-tempo globalmente definido em \bar{M} . Um exemplo clássico que podemos dar é o espaço de Lorentz-Minkowski $\mathbb{R}_1^{n+1} = \mathbb{L}^{n+1}$, pois

$$K = \frac{\partial}{\partial t} = (1, 0, \dots, 0)$$

é um campo de vetores globalmente definido em \mathbb{L}^{n+1} .

A partir daqui Σ sempre irá denotar uma hipersuperfície tipo-espaço da variedade de Lorentz \bar{M} , onde \bar{M} sempre denotará o espaço-tempo GRW. Para referências futuras enunciaremos estas considerações na seguinte definição.

Definição 1.6.6. *Sejam $(\Sigma, \langle, \rangle_\Sigma)$ uma variedade Riemanniana e $(\bar{M}, \langle, \rangle)$ um espaço tempo GRW. Se $\psi : \Sigma \rightarrow \bar{M}$ é uma imersão isométrica dizemos que Σ é uma hipersuperfície tipo-espaço. Nesse caso, também denotaremos a métrica de Σ por \langle, \rangle .*

Um resultado ainda mais específico a respeito de orientação temporal pode ser for-

mulado para hipersuperfícies tipo-espaços imersa em uma variedade Lorentziana temporalmente orientada. Este resultado é uma proposição, cuja demonstração pode ser encontrada em [31, Proposição 2.7].

Proposição 1.6.7. *Seja Σ uma hipersuperfície tipo-espaço de uma variedade Lorentziana temporalmente orientada \overline{M}^{n+1} . Então Σ admite um único campo de vetores normais e unitários $N \in \mathcal{X}(\Sigma)^\perp$, na mesma orientação temporal de \overline{M}^{n+1} . Em particular, Σ é orientável.*

Pela proposição anterior, considerando um campo vetorial unitário tipo-tempo globalmente definido em GRW $\partial_t = \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)_{(t,x)}$, onde $(t, x) \in \overline{M}$, temos que existe um único campo de vetores normais unitários N definido em Σ na mesma orientação temporal de ∂_t , e pela desigualdade de *Cauchy-Schwarz* (para vetores tipo-tempo veja [25, Proposição 5.30]), obtemos

$$|\langle \partial_t, N \rangle| \geq |\partial_t| |N| = 1 \Rightarrow \langle \partial_t, N \rangle \leq -1.$$

Iremos nos referir a este campo tipo-tempo normal unitário N como aplicação de Gauss da hipersuperfície Σ .

Como o espaço-tempo GRW tem índice constante igual a 1 (e portanto somente uma direção normal), omitiremos o campo normal N que aparece como subíndice de operador de Weingarten A . Sendo assim, dados $X, Y \in \mathcal{X}(\Sigma)$ pela fórmula de Gauss temos

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y - \langle AX, Y \rangle N.$$

Porém, sendo N um campo tipo-tempo normal unitário, temos que $\langle N, N \rangle = -1$, logo

$$\langle \overline{\nabla}_X N, N \rangle = 0$$

assim, $\overline{\nabla}_X^\perp N = 0$ para todo $X \in \mathcal{X}(\Sigma)$ e nossa fórmula de Gauss se reduz a $\overline{\nabla}_X N = -AX$. Se atentando ao fato que $II(X, Y) = -\langle AX, Y \rangle N$ podemos reescrever a equação de Gauss como

$$R(X, Y)Z = (\overline{R}(X, Y)Z)^\top - \langle AX, Z \rangle AY + \langle AY, Z \rangle AX,$$

e considerando que $(\nabla_X A)Y = \nabla_X (AY) - A(\nabla_X Y)$, temos a seguinte definição:

Definição 1.6.8. *A equação de Codazzi de uma hipersuperfície tipo-espaço imersa em um espaço-tempo ambiente arbitrário é dada por*

$$\langle \overline{R}(X, Y)Z, N \rangle = \langle (\nabla_Y A)X - (\nabla_X A)Y, Z \rangle \quad (1.12)$$

ou equivalentemente

$$(\overline{R}(X, Y)N)^\top = (\nabla_X A)Y - (\nabla_Y A)X. \quad (1.13)$$

1.7 As transformações de Newton e seus operadores diferenciáveis associados

Considere a imersão $\psi : \Sigma \rightarrow \overline{M}$ e seja $A : \mathcal{X}(\Sigma) \rightarrow \mathcal{X}(\Sigma)$ operador de Weingarten (ou operador forma) de Σ referente a aplicação de Gauss N . Como dito anteriormente, A é um operador linear auto-adjunto em cada espaço tangente $T_p\Sigma$, além disso, seus autovalores $\kappa_1(p), \dots, \kappa_n(p)$ são as curvaturas principais da nossa hipersuperfície Σ . Associado ao operador forma existem n invariantes algébricos dado por

$$S_k(p) = \sigma_k(\kappa_1(p), \dots, \kappa_n(p)), \text{ com } 1 \leq k \leq n,$$

onde $\sigma_k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é a função simétrica elementar dada por

$$\sigma_k(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i_1 < \dots < i_k}^n x_{i_1} \cdots x_{i_k}.$$

Proposição 1.7.1. *Considere $S_0 = 1$. Dado $p \in \Sigma$, o polinômio característico de A pode ser dado por*

$$\det(tI - A) = \sum_{k=0}^n (-1)^k S_k t^{n-k}$$

onde S_k denota as funções simétricas elementares de $\kappa_1, \dots, \kappa_n$.

Demonstração. Seja $p(t)$ o polinômio característico da matriz associada ao operador A . Como A é simétrico, bilinear e auto adjunto, temos que A é diagonalizável. Logo, existe uma base na qual A pode ser representado por uma matriz diagonal. Assim, podemos escrever seu polinômio característico $p(t)$ da seguinte forma:

$$p(t) = \det(tI - A) = \det \begin{pmatrix} t - \kappa_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & t - \kappa_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & t - \kappa_{n-1} & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & t - \kappa_n \end{pmatrix}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
p(t) &= (t - \kappa_1)(t - \kappa_2)\dots(t - \kappa_n) \\
&= t^n - \left(\sum_{k=1}^n \kappa_k t^{n-1} \right) + \sum_{i_1 < i_2} \kappa_{i_1} \kappa_{i_2} t^{n-2} + \dots + (-1)^r \sum_{i_1 < \dots < i_r} \kappa_{i_1} \dots \kappa_{i_r} t^{n-r} + \dots \\
&\quad + (-1)^n \kappa_1 \dots \kappa_n \\
&= t^n - S_1 t^{n-1} + S_2 t^{n-2} + \dots + S_r t^{n-r} + \dots + (-1)^n S_n \\
&= \sum_{k=0}^n (-1)^k S_k t^{n-k}
\end{aligned}$$

como o esperado. ■

Definição 1.7.2. *A k -ésima curvatura média H_k de uma hipersuperfície Σ será definida por*

$$\binom{n}{k} H_k = (-1)^k S_k = \sigma_k(-\kappa_1, \dots, -\kappa_n),$$

onde $1 \leq k \leq n$.

Observe que a partir do modo como definimos H_k , para $k = 1$, temos

$$nH_1 = -S_1 \Rightarrow H_1 = -\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \kappa_i = -\frac{1}{n} \text{tr}(A) = H$$

que é justamente a curvatura média de Σ , isto é, a curvatura extrínseca principal da hipersuperfície. A escolha do sinal $(-1)^k$ em nossa definição [1.7.2](#) é motivada pelo fato de que nesse caso, o vetor curvatura média é dado por $\vec{H} = HN$. Além disso, quando k é par, segue-se da equação de Gauss da hipersuperfície que o valor de H_k é uma grandeza geométrica que está relacionada à curvatura intrínseca de Σ . Por exemplo, para $k = 2$, um breve cálculo mostra que

$$n(n-1)H_2 = \bar{S} - S + 2\overline{Ric}(N, N), \tag{1.14}$$

onde S e \bar{S} são, respectivamente, a curvatura escalar de Σ e \bar{M} , e \overline{Ric} representa o tensor de Ricci do espaço-tempo ambiente GRW. Para isso, considere $\{E_1, \dots, E_n\}$ um referencial ortonormal da hipersuperfície Σ . Por definição, temos

$$\begin{aligned}
Ric(X, Y) &= \sum_{i=1}^n \langle R(X, E_i)Y, E_i \rangle \\
&= \sum_{i=1}^n \langle \bar{R}(X, E_i)Y, E_i \rangle - \sum_{i=1}^n \langle AX, Y \rangle \langle AE_i, E_i \rangle + \sum_{i=1}^n \langle AE_i, Y \rangle \langle AX, E_i \rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^n \langle \overline{R}(X, E_i)Y, E_i \rangle - \langle \overline{R}(X, N)Y, N \rangle + \langle \overline{R}(X, N)Y, N \rangle - \langle AX, Y \rangle \text{tr}(A) + \\
&+ \langle AX, AY \rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n+1} \epsilon_i \langle \overline{R}(X, E_i)Y, E_i \rangle + \langle \overline{R}(X, N)Y, N \rangle - \langle AX, Y \rangle \text{tr}(A) + \langle AX, AY \rangle \\
&= \overline{Ric}(X, Y) + \langle \overline{R}(X, N)Y, N \rangle - \langle AX, Y \rangle \text{tr}(A) + \langle AX, AY \rangle
\end{aligned}$$

perceba que $\{E_1, \dots, E_n, N\}$ fornece um referencial ortonormal para \overline{M} . Sendo $S = \text{tr}(\text{Ric})$ então,

$$\begin{aligned}
S &= \sum_{i=1}^n \text{Ric}(E_i, E_i) \\
&= \sum_{i=1}^n \overline{Ric}(E_i, E_i) + \sum_{i=1}^n \langle \overline{R}(E_i, N)E_i, N \rangle - \sum_{i=1}^n \langle AE_i, E_i \rangle \text{tr}(A) \\
&+ \sum_{i=1}^n \langle A^2 E_i, E_i \rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n+1} \overline{Ric}(E_i, E_i) + 2\overline{Ric}(N, N) - \text{tr}(A^2) + n^2 H^2.
\end{aligned}$$

obtemos, assim que

$$\text{tr}(A^2) - nH^2 = \overline{S} - S + 2\overline{Ric}(N, N). \quad (1.15)$$

Note que pela definição de H_k , temos que

$$\binom{n}{2} H_2 = S_2,$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\frac{n(n-1)}{2} H_2 &= \sigma_2(\kappa_1, \dots, \kappa_n) \\
&= \sum_{i_1 < i_2} \kappa_{i_1} \kappa_{i_2} \\
&= \frac{1}{2} (\text{tr}(A^2) - \text{tr}(A)^2) \\
&= \frac{1}{2} (\text{tr}(A^2) - n^2 H^2),
\end{aligned}$$

consequentemente

$$n(n-1)H_2 = \text{tr}(A^2) - n^2 H^2.$$

Finalmente, substituindo a igualdade obtida em (1.15), obtemos

$$n(n-1)H_2 = \bar{S} - S + 2\overline{Ric}(N, N).$$

Definição 1.7.3. A k -ésima transformação de Newton é a aplicação $P_k : \mathcal{X}(\Sigma) \rightarrow \mathcal{X}(\Sigma)$ definida indutivamente a partir do operador forma A e da definição (1.7.2) por

$$P_0 = I \text{ e } P_k = \binom{n}{k} H_k I + A \circ P_{k-1}.$$

para $k = 1, \dots, n$, onde I denota a identidade em $\mathcal{X}(\Sigma)$. Fazendo $(k-1)$ -substituições ao operador P_{k-1} na definição acima, obtemos equivalentemente

$$P_k = \sum_{j=0}^k \binom{n}{j} H_j A^{k-j}.$$

Observe que $P_n = 0$. Faremos a verificação desta observação utilizando a proposição (1.7.1) e o Teorema de Cayley-Hamilton enunciado a seguir.

Teorema 1.7.4 (Cayley-Hamilton). *Seja A uma matriz quadrada de ordem n , e $p(t)$ seu polinômio característico dado por*

$$p(t) = \det(tI - A)$$

onde I é matriz identidade de ordem n . Então

$$p(A) = 0.$$

De fato, pela definição (1.7.3) acima, temos que

$$\begin{aligned} P_n &= \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} H_j A^{n-j} \\ &= \binom{n}{0} H_0 A^{n-0} + \binom{n}{1} H_1 A^{n-1} + \dots + \binom{n}{n-1} H_{n-1} A^{n-(n-1)} + \binom{n}{n} H_n A^{n-n} \\ &= S_0 A^n - S_1 A^{n-1} + \dots + (-1)^{n-1} S_{n-1} A^1 + (-1)^n S_n A^0 \end{aligned}$$

e pela proposição (1.7.1), temos $P_n = p(A)$, assim, pelo Teorema de Cayley-Hamilton, concluímos que $P_n = 0$.

Perceba que, caso k seja par o operador P_k , não depende da escolha da aplicação de Gauss, porém, caso k seja ímpar, ocorre uma mudança de sinal da definição de P_k

Proposição 1.7.5. *Para cada $p \in \Sigma$, $P_k(p)$ é um operador linear auto adjunto em cada espaço tangente $T_p \Sigma$, que comuta com o operador $A(p)$.*

Demonstração: Utilizaremos aqui o critério de indução. Primeiramente fazemos a verificação que P_k comuta com A .

Por definição, temos

$$AP_k = A((-1)^k S_k I + A \circ P_{k-1})$$

Se $k = 0$, segue que

$$AP_0 = AI = IA = P_0A$$

Suponhamos que nossa afirmação seja válida para $k - 1$, ou seja, $AP_{k-1} = P_{k-1}A$, e mostremos que o resultado ainda é válido para k . Veja que

$$\begin{aligned} AP_k &= A((-1)^k S_k I + AP_{k-1}) \\ &= A((-1)^k S_k I + P_{k-1}A) \\ &= (-1)^k A + AP_{k-1}A \\ &= ((-1)^k S_k I + AP_k)A \\ &= P_kA. \end{aligned}$$

Portanto, A comuta com P_k . Mostremos agora que P_k é auto adjunto. Sejam $X, Y \in \mathcal{X}(\Sigma)$, se $k = 0$, temos

$$\langle P_0X, Y \rangle = \langle IX, Y \rangle = \langle X, IY \rangle = \langle X, P_0Y \rangle.$$

Suponhamos agora que o resultado é válido para $k - 1$, ou seja, $\langle P_{k-1}X, Y \rangle = \langle X, P_{k-1}Y \rangle$ e mostremos que é válido para k . Dados $X, Y \in \mathcal{X}(\Sigma)$, temos

$$\begin{aligned} \langle P_kX, Y \rangle &= \langle ((-1)^k S_k I + AP_{k-1}), Y \rangle \\ &= \langle (-1)^k S_k X, Y \rangle + \langle AP_{k-1}X, Y \rangle \\ &= \langle X, (-1)^k S_k Y \rangle + \langle X, P_{k-1}AY \rangle \\ &= \langle X, ((-1)^k S_k I + P_{k-1}A)Y \rangle \\ &= \langle X, ((-1)^k S_k I + AP_{k-1})Y \rangle \\ &= \langle X, P_kY \rangle. \end{aligned}$$

Logo, P_k é auto adjunto. ■

Proposição 1.7.6. *Seja E_1, \dots, E_n um referencial ortonormal que diagonaliza o operador A (ou seja, $AE_i = \kappa_i E_i$ $i=1, \dots, n$). Então, este referencial ortonormal também diagonaliza*

o operador P_k e $P_k E_i = \mu_{i,k} E_i$ onde

$$\mu_{i,k}(p) = (-1)^k \frac{\partial \sigma_{k+1}}{\partial \kappa_i}(\kappa_1(p), \dots, \kappa_n(p)) = (-1)^k \sum_{i_1 < \dots < i_k; i_j \neq i} \kappa_{i_1}(p) \dots \kappa_{i_k}(p)$$

Demonstração: Fixemos i , $1 \leq i \leq n$ e apliquemos indução sobre k . Se $k = 0$ então

$$P_0 E_i = I E_i = \mu_{i,0} E_i.$$

Suponhamos que o resultado seja valido para k , ou seja,

$$P_k E_i = \mu_{i,k} E_i$$

e provemos para $k + 1$. Por definição

$$\begin{aligned} P_{k+1} E_i &= (-1)^{k+1} S_{k+1} E_i + A P_k E_i \\ &= (-1)^{k+1} S_{k+1} E_i + A(\mu_{i,k} E_i) \\ &= (-1)^{k+1} S_{k+1} E_i + \mu_{i,k} \kappa_i E_i. \end{aligned} \tag{1.16}$$

Como

$$\mu_{i,k} = (-1)^k S_k + \kappa_i \mu_{i,k-1} \Rightarrow \kappa_i \mu_{i,k} = \mu_{i,k+1} - (-1)^{k+1} S_{k+1}$$

substituindo em (1.16), obtemos

$$\begin{aligned} P_{k+1} E_i &= (-1)^{k+1} S_{k+1} E_i + (\mu_{i,k+1} - (-1)^{k+1} S_{k+1}) E_i \\ &= (-1)^{k+1} S_{k+1} E_i + \mu_{i,k+1} E_i - (-1)^{k+1} S_{k+1} E_i \\ &= \mu_{i,k+1} E_i. \end{aligned}$$

Portanto, para todo $k = 1, \dots, n$, vale $P_k E_i = \mu_{i,k} E_i$. Perceba que $\mu_{i,k}$ e $\mu_{i,k+1}$ não dependem de κ_i , então $\frac{\partial \mu_{i,k+1}}{\partial \kappa_i} = \frac{\partial \mu_{i,k}}{\partial \kappa_i} = 0$, logo,

$$\begin{aligned} (-1)^{k+1} \frac{\partial \sigma_{k+1}}{\partial \kappa_i} &= (-1)^{k+1} \frac{\partial S_{k+1}}{\partial \kappa_i} \\ &= \frac{\partial}{\partial \kappa_i} (\mu_{i,k+1} + \kappa_i \mu_{i,k}) \\ &= \frac{\partial \mu_{i,k+1}}{\partial \kappa_i} + \frac{\partial \kappa_i \mu_{i,k}}{\partial \kappa_i} \\ &= \frac{\partial \kappa_i}{\partial \kappa_i} \mu_{i,k} + \kappa_i \frac{\partial \mu_{i,k}}{\partial \kappa_i} \\ &= \mu_{i,k}. \end{aligned}$$

■

Proposição 1.7.7. *Para cada $1 \leq k \leq n$ vale*

- (i) $tr(P_k) = c_k H_k$;
- (ii) $tr(AP_k) = -c_k H_{k+1}$;
- (iii) $tr(A^2 P_k) = \binom{n}{k+1} (n H H_{k+1} - (n - k - 1) H_{k+2})$;
- (iv) *Para cada $\in \mathcal{X}(\Sigma)$ e cada $1 \leq k \leq n - 1$*

$$tr(P_k(\nabla_X A)) = -\binom{n}{k+1} \langle H_{k+1}, X \rangle,$$

onde $c_k = (n - k) \binom{n}{k} = (k + 1) \binom{n}{k+1}$.

Demonstração:

- (i) Considere o referencial ortonormal $\{E_1, \dots, E_n\}$ que diagonaliza o operador A , temos que

$$\begin{aligned} Tr(P_k) &= \sum_{i=1}^n \langle P_k E_i, E_i \rangle = \sum_{i=1}^n \langle \mu_{i,k} E_i, E_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \mu_{i,k} \langle E_i, E_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \mu_{i,k} \\ &= \sum_{i=1}^n (-1)^k S_k + \kappa_i \mu_{i,k-1} \\ &= (-1)^k (n - k) S_k = (n - k) \binom{n}{k} H_k = (k + 1) \binom{n}{k+1} H_{k+1}. \end{aligned}$$

- (ii) Por definição, temos

$$\begin{aligned} Tr(A \circ P_k) &= Tr(P_{k+1} - \binom{n}{k+1} H_{k+1} I) \\ &= Tr(P_{k+1}) - Tr\left(\binom{n}{k+1} H_{k+1} I\right) \\ &= (n - (k + 1)) \binom{n}{k+1} H_{k+1} - n \binom{n}{k+1} H_{k+1} \\ &= \left((n - k - 1) \binom{n}{k+1} - n \binom{n}{k+1} \right) H_{k+1} \\ &= -(k + 1) \binom{n}{k+1} H_{k+1}. \end{aligned}$$

(iii) Pela definição do operador de Newton

$$\begin{aligned} P_{k+1} = \binom{n}{k+1} H_{k+1} + AP_k &\Rightarrow AP_{k+1} = \binom{n}{k+1} H_{k+1} A + A^2 P_k \\ &\Rightarrow A^2 P_k = AP_{k+1} - \binom{n}{k+1} H_{k+1} A \end{aligned}$$

Conseqüentemente,

$$\begin{aligned} Tr(A^2 P_k) &= Tr\left(AP_{k+1} - \binom{n}{k+1} H_{k+1} A\right) \\ &= Tr(AP_{k+1}) - \binom{n}{k+1} H_{k+1} Tr(A) \\ &= -(k-2) \binom{n}{k+2} H_{k+2} - \binom{n}{k+1} H_{k+1} (-nH) \\ &= \binom{n}{k+1} nHH_{k+1} - (k+2) \binom{n}{k+2} H_{k+2} \\ &= \binom{n}{k+1} nHH_{k+1} - \frac{n!}{(k+2)!(n-k-2)!} \\ &= \binom{n}{k+1} (nHH_{k+1} - (n-k-2)H_{k+2}). \end{aligned}$$

(iv) Seja $\{E_1, \dots, E_n\}$ um referencial ortonormal em Σ que diagonaliza o operador A em um ponto $p \in \Sigma$, ou seja, $AE_i = \kappa_i E_i$. Então,

$$\begin{aligned} (\nabla_X A)(E_i) &= \nabla_X(AE_i) - A(\nabla_X E_i) \\ &= \nabla_X(\kappa_i E_i) - A\left(\sum_{j=1}^n \langle E_j, \nabla_X E_i \rangle E_j\right) \\ &= \kappa_i \nabla_X E_i + X(\kappa) E_i - \sum_{j=1}^n \langle \nabla_X E_i, E_j \rangle A E_j \\ &= \sum_{j=1; i \neq j}^n (\kappa_i - \kappa_j) \langle \nabla_X E_i, E_j \rangle E_j + X(\kappa_i) E_i. \end{aligned}$$

Sendo assim, temos

$$\begin{aligned} tr(P_k \circ \nabla_X A) &= \sum_{i=1}^n \langle P_k(\nabla_X A)E_i, E_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \left\langle P_k\left(X(\kappa_i)E_i + \sum_{j=1; i \neq j}^n (\kappa_i - \kappa_j) \langle \nabla_X E_i, E_j \rangle E_j\right), E_i \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \langle P_k(X(\kappa_i))E_i, E_i \rangle + \sum_{i=1}^n \left\langle P_k\left(\sum_{j=1; i \neq j}^n (\kappa_i - \kappa_j) \langle \nabla_X E_i, E_j \rangle E_j\right), E_i \right\rangle, \end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned}
 tr(P_k \circ \nabla_X A) &= \sum_{i=1}^n X(\kappa_i) \langle P_k E_i, E_i \rangle + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1; j \neq i}^n (\kappa_i - \kappa_j) \langle \nabla_X E_i, E_j \rangle \langle P_k E_j, E_i \rangle \\
 &= \sum_{i=1}^n X(\kappa_i) \mu_{i,k} \langle E_i, E_i \rangle + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1; j \neq i}^n (\kappa_i - \kappa_j) \langle \nabla_X E_i, E_j \rangle \mu_{j,k} \langle E_j, E_i \rangle \\
 &= \sum_{i=1}^n X(\kappa_i) \mu_{i,k}
 \end{aligned}$$

logo,

$$\begin{aligned}
 tr(P_k \circ \nabla_X A) &= \sum_{i=1}^n X(\kappa_i) \mu_{i,k} \\
 &= - \sum_{i=1}^n X(-\kappa_i) \sum_{i_1 < i_2, \dots, i_k; i_k \neq i} ((-\kappa_{i_1}) \cdots (-\kappa_{i_k})) \\
 &= -X \left(\sum_{i_1 < \dots < i_k} (-\kappa_{i_1}) \cdots (-\kappa_{i_{k+1}}) \right) \\
 &= -X((-1)^{k+1} S_{k+1}) \\
 &= - \binom{n}{k+1} \langle \nabla H_{k+1}, X \rangle.
 \end{aligned}$$

■

Definição 1.7.8. *Seja ∇ a conexão de Levi-Civita de Σ . Para cada transformação de Newton P_k , definimos o operador diferencial linear de segunda ordem $L_k : C^\infty(\Sigma) \rightarrow C^\infty(\Sigma)$ por $L_k = tr(P_k \circ \nabla^2 f)$.*

Observe que, a partir da definição do operador L_k , podemos constatar que

$$tr(P_k \circ \nabla^2 f) = tr(\nabla^2 f \circ P_k).$$

De fato. Pela definição do operador L_k , temos

$$\begin{aligned}
 L_k(f) &= tr(P_k \circ \nabla^2 f) = \sum_{i=1}^n \langle (P_k \circ \nabla^2 f)(E_i), E_i \rangle \\
 &= \sum_{i=1}^n \langle P_k(\nabla^2 f(E_i)), E_i \rangle \\
 &= \sum_{i=1}^n \langle P_k(\nabla_{E_i} \nabla f), E_i \rangle.
 \end{aligned}$$

Utilizando o fato de P_k ser auto-adjunto

$$L_k(f) = \sum_{i=1}^n \langle P_k(\nabla_{E_i} \nabla f), E_i \rangle \quad (1.17)$$

$$= \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{P_k(E_i)} \nabla f, E_i \rangle \quad (1.18)$$

$$= \sum_{i=1}^n \langle \nabla^2 f(P_k(E_i)), E_i \rangle \quad (1.19)$$

$$= \sum_{i=1}^n \langle (\nabla^2 f \circ P_k)(E_i), E_i \rangle \quad (1.20)$$

$$= \text{tr}(\nabla^2 f \circ P_k). \quad (1.21)$$

A passagem que acontece entre as equações (1.18) e (1.19) se deve ao fato de que o hessiano pode ser visto como um campo tensorial simétrico dado por

$$\nabla^2 f(X, Y) = \langle \nabla_X \nabla f, Y \rangle.$$

Veja que pela compatibilidade da métrica temos

$$X \langle \nabla f, Y \rangle = \langle \nabla_X \nabla f, Y \rangle + \langle \nabla f, \nabla_X Y \rangle \Rightarrow \langle \nabla_X \nabla f, Y \rangle = X \langle \nabla f, Y \rangle - \langle \nabla f, \nabla_X Y \rangle.$$

Pela definição de gradiente, temos

$$\begin{aligned} \langle \nabla_X \nabla f, Y \rangle &= X(Y(f)) - \nabla_X Y(f) \\ &= X(Y(f)) - df(\nabla_X Y) \\ &= X(Y(f)) - df(\nabla_Y X + [X, Y]) \\ &= X(Y(f)) - df(\nabla_Y X) - df([X, Y]) \\ &= X(Y(f)) - df(\nabla_Y X) - [X, Y](f) \\ &= X(Y(f)) - df(\nabla_Y X) - X(Y(f)) + Y(X(f)) \\ &= Y(X(f)) - df(\nabla_Y X) \\ &= Y \langle \nabla f, X \rangle - \langle \nabla f, \nabla_Y X \rangle \\ &= \langle \nabla_Y \nabla f, X \rangle \end{aligned}$$

o que justifica nossa passagem entre as equações (1.18) e (1.19).

Definição 1.7.9 (Diferencial covariante de um tensor). *Seja P_k um $(1,1)$ -tensor em Σ . O diferencial covariante ∇P_k é dado por*

$$\nabla P_k(X, Y) = (\nabla_X P_k)(Y) = \nabla_X(P_k Y) - P_k(\nabla_X Y); \forall X, Y \in \mathcal{X}(\Sigma).$$

Pela definição anterior, dado um referencial ortonormal $\{E_1, \dots, E_n\}$ de Σ , temos

$$(\nabla_{E_i})P_k(Y) = \nabla_{E_i}(P_k \nabla f) - P_k(\nabla_{E_i} Y) \Leftrightarrow \nabla_{E_i}(P_k(\nabla f)) = (\nabla_{E_i} P_k) \nabla f + P_k(\nabla_{E_i} \nabla f).$$

Agora, utilizando a definição de divergente juntamente com a expressão anterior, temos

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(P_k(\nabla f)) &= \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{E_i}(P_k(\nabla f)), E_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \langle (\nabla_{E_i} P_k) \nabla f + P_k(\nabla_{E_i} \nabla f), E_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \langle (\nabla_{E_i} P_k) \nabla f, E_i \rangle + \sum_{i=1}^n \langle P_k(\nabla_{E_i} \nabla f), E_i \rangle \end{aligned} \quad (1.22)$$

$$= \sum_{i=1}^n \langle \nabla f, (\nabla_{E_i} P_k) E_i \rangle + \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{E_i} \nabla f, P_k E_i \rangle \quad (1.23)$$

$$\begin{aligned} &= \langle \nabla f, \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{E_i} P_k, E_i \rangle \rangle + L_k \\ &= \langle \nabla f, \operatorname{div} P_k \rangle + L_k. \end{aligned} \quad (1.24)$$

A passagem entre (1.22) e (1.23), se deve ao fato de que o operador $\nabla_X P_k$ é auto-ajunto (veja [31, Proposição 2.25]).

Proposição 1.7.10. *Seja $X \in \mathcal{X}(\Sigma)$ e $P_k : \mathcal{X}(\Sigma) \rightarrow \mathcal{X}(\Sigma)$. Então o operador linear $\nabla_X P_k$ é auto adjunto.*

Demonstração: Sejam $X, Y, Z \in \mathcal{X}(\Sigma)$. Pela definição de derivada covariante de um tensor, temos

$$\nabla_X(P_k Y) = (\nabla_X P_k) Y + P_k(\nabla_X Y)$$

logo,

$$\begin{aligned} \langle \nabla_X(P_k Y), Z \rangle &= \langle (\nabla_X P_k) Y + P_k(\nabla_X Y), Z \rangle \\ &= \langle (\nabla_X P_k) Y, Z \rangle + \langle P_k(\nabla_X Y), Z \rangle. \end{aligned} \quad (1.25)$$

Pela compatibilidade da métrica temos

$$X \langle (P_k Y), Z \rangle = \langle \nabla_X(P_k Y), Z \rangle + \langle \nabla P_k Y, \nabla_X Z \rangle.$$

Substituindo e isolando $\langle (\nabla_X P_k) Y, Z \rangle$ em (1.25), obtemos,

$$\langle (\nabla_X P_k) Y, Z \rangle = X \langle P_k Y, Z \rangle - \langle P_k Y, \nabla_X Z \rangle - \langle P_k(\nabla_X Y), Z \rangle.$$

Como P_k é auto adjunto, então

$$\begin{aligned}
 \langle (\nabla_X P_k)Y, Z \rangle &= X\langle Y, P_k Z \rangle - \langle Y, P_k(\nabla_X Z) \rangle - \langle \nabla_X Y, P_k Z \rangle \\
 &= \langle \nabla_X Y, P_k Z \rangle + \langle Y, \nabla_X(P_k Z) - \langle Y, P_k(\nabla_X Z) \rangle - \langle \nabla_X Y, P_k Z \rangle \\
 &= \langle Y, \nabla_X(P_k Z) - P_k(\nabla_X Z) \rangle \\
 &= \langle Y, (\nabla_X P_k)Z \rangle.
 \end{aligned}$$

■

Uma observação interessante que podemos fazer é que, caso P_k seja livre de divergência (ou seja $\text{div}P_k = 0$), então, $L_k = \text{div}(P_k(\nabla f))$, e L_k é um operador forma diferenciável de divergência em Σ . Um caso fácil de notar é quando $k = 0$, que nos dá operador L_0 que é justamente operador laplaciano Δ em Σ . O mesmo ocorre para todo $k = 0, 1, 2, \dots, n$ quando o espaço-tempo GRW tem curvatura seccional constante, pois, como pode ser visto em [4, Corolário 3.2], quando o espaço-tempo ambiente $-I \times_f M^n$ tem curvatura seccional constante, as transformações de Newton P_k são livres de divergência ($\text{div}P_k = 0$). Tal resultado decorre de uma expressão para os operadores de Newton que pode ser encontrada em [4, Lema 3.1], que será enunciado a seguir.

Lema 1.7.11. *As divergências das transformações de Newton P_k são dadas pela seguinte fórmula indutiva*

$$\begin{cases} \text{div}(P_0) = 0 \\ \text{div}(P_k) = A(\text{div}(P_{k-1})) + \sum_{i=1}^n (\overline{R}(N, P_{k-1}E_i)E_i)^\top \end{cases} \quad (1.26)$$

Equivalentemente, para cada campo tangente $X \in \mathcal{X}(\Sigma)$ segue que

$$\langle \text{div}P_k, X \rangle = \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^n \langle \overline{R}(N, P_{k-j}E_i)E_i, A^{j-1}X \rangle. \quad (1.27)$$

Demonstração: Dados $X, Y \in \mathcal{X}(\Sigma)$, temos

$$(\nabla_X I)(Y) = \nabla_X(IY) - I\nabla_X(Y) = \nabla_X(Y) - \nabla_X Y = 0.$$

Logo,

$$\text{div}(P_0) = \text{div}(I) = \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{E_i} I, E_i \rangle = 0.$$

Agora, consideremos $k \geq 1$. Pela definição do operador de Newton temos que dados

$X, Y \in \mathcal{X}(\Sigma)$

$$\begin{aligned}
 (\nabla_X P_k) &= \nabla_X \left(\binom{n}{k} H_k I + A \circ P_{k-1} \right) Y \\
 &= \nabla_X \left(\binom{n}{k} H_k Y + A(P_{k-1})Y \right) \\
 &= \nabla_X \left(\binom{n}{k} H_k Y \right) + \nabla_X (A(P_{k-1})Y)
 \end{aligned}$$

sendo assim,

$$\begin{aligned}
 (\nabla_X P_k)(Y) &= \left(\binom{n}{k} X(H_k)I \right) (Y) + \binom{n}{k} H_k (\nabla_X I)(Y) + \nabla_X (A \circ P_{k-1})Y \\
 &= \binom{n}{k} \langle \nabla(H_k), X \rangle (Y) + (\nabla_X A)(P_{k-1}Y) + (A(\nabla_X P_{k-1}))(Y).
 \end{aligned}$$

A partir disto, temos,

$$\begin{aligned}
 \operatorname{div}(P_k) &= \sum_{i=1}^n (\nabla_{E_i} P_k)(E_i) \\
 &= \sum_{i=1}^n \langle \nabla(H_k), E_i \rangle + \sum_{i=1}^n (\nabla_{E_i} A)(P_k \circ E_i) + \sum_{i=1}^n (A(\nabla_{E_i} P_k))(E_i) \\
 &= \sum_{i=1}^n \binom{n}{k} \langle \nabla H_k, E_i \rangle \sum_{i=1}^n (\nabla_{E_i} A)(P_{k-1} \circ E_i) + \sum_{i=1}^n A \left(\sum_{i=1}^n \langle \nabla_{E_i} P_{k-1}, E_i \rangle \right) \\
 &= \binom{n}{k} \nabla H_k + \sum_{i=1}^n (\nabla_{E_i} A)(P_{k-1} \circ E_i) + A(\operatorname{div}(P_{k-1})).
 \end{aligned}$$

Como $\nabla_{E_i} A$ é auto-adjunto, para todo e qualquer $X \in \mathcal{X}(\Sigma)$, segue que,

$$\langle (\nabla_{E_i} A)(P_{k-1} E_i), X \rangle = \langle P_{k-1} E_i, (\nabla_{E_i} A)(X) \rangle.$$

Fazendo uso da equação de Codazzi $(\bar{R}(X, Y)N)^\top = (\nabla_X A)Y - (\nabla_Y A)X$ e do fato que $(\nabla_{E_i} A)$ é auto-adjunto, obtemos

$$\begin{aligned}
 \langle (\nabla_{E_i} A)(P_{k-1} E_i), X \rangle &= \langle P_{k-1} E_i, (\nabla_{E_i} A)(X) \rangle \\
 &= \langle \bar{R}(X, E_i)N, P_{k-1} E_i \rangle + \langle (\nabla_X A)E_i, P_{k-1} E_i \rangle \quad (1.28) \\
 &= \langle \bar{R}(X, E_i)P_{k-1} E_i, N \rangle + \langle (\nabla_X A)(E_i), P_{k-1} E_i \rangle \\
 &= \langle \bar{R}(X, E_i)P_{k-1} E_i, N \rangle + \langle P_{k-1}(\nabla_X A)(E_i), E_i \rangle.
 \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}\langle \operatorname{div}(P_k), X \rangle &= \left\langle \binom{n}{k} \nabla H_k + \sum_{i=1}^n (\nabla_{E_i} A)(P_{k-1}) + A(\operatorname{div}(P_{k-1})), X \right\rangle \\ &= \left\langle \binom{n}{k} \nabla H_k, X \right\rangle + \sum_{i=1}^n \langle (\nabla_{E_i} A)(P_{k-1}), X \rangle + \langle A(\operatorname{div}(P_{k-1})), X \rangle\end{aligned}$$

Fazendo uso da igualdade (1.29) juntamente com a expressão acima, temos

$$\begin{aligned}\langle \operatorname{div}(P_k), X \rangle &= \binom{n}{k} \langle \nabla H, X \rangle + \sum_{i=1}^n \langle \bar{R}(X, E_i) P_{k-1} E_i, N \rangle + \\ &+ \sum_{i=1}^n \langle (P_{k-1} \circ (\nabla_X A))(E_i), E_i \rangle + \langle A(\operatorname{div}(P_{k-1})), X \rangle \\ &= \binom{n}{k} \langle \nabla H, X \rangle + \sum_{i=1}^n \langle \bar{R}(X, E_i) P_{k-1} E_i, N \rangle + \\ &+ \operatorname{tr}(P_{k-1} \circ (\nabla_X A)) + \langle A(\operatorname{div}(P_{k-1})), X \rangle\end{aligned}$$

Pelo item (iv) da Proposição 1.7.7

$$\operatorname{tr}(P_k \circ (\nabla_X A)) = - \binom{n}{k+1} \langle \nabla H_{k+1}, X \rangle$$

o que implica

$$\operatorname{tr}(P_{k-1} \circ (\nabla_X A)) = - \binom{n}{k} \langle \nabla H_k, X \rangle.$$

Então, temos,

$$\begin{aligned}\langle \operatorname{div}(P_k), X \rangle &= \binom{n}{k} \langle \nabla H, X \rangle + \sum_{i=1}^n \langle \bar{R}(X, E_i) P_{k-1} E_i, N \rangle + \\ &- \binom{n}{k} \langle \nabla H_k, X \rangle + \langle A(\operatorname{div}(P_{k-1})), X \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \langle \bar{R}(X, E_i) P_{k-1} E_i, N \rangle + \langle A(\operatorname{div}(P_{k-1})), X \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \langle \bar{R}(E_i, X) N, P_{k-1} E_i \rangle + \langle A(\operatorname{div}(P_{k-1})), X \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \langle \bar{R}(N, P_{k-1} E_i) E_i, X \rangle + \langle A(\operatorname{div}(P_{k-1})), X \rangle,\end{aligned}$$

pelo fato de $X \in \mathcal{X}(\Sigma)$ ser arbitrário, segue-se que

$$\operatorname{div}(P_k) = \sum_{i=1}^n (\overline{R}(N, P_{k-1}E_i)E_i)^\top + A(\operatorname{div}(P_{k-1})).$$

Como era esperado. Vamos mostrar agora a equivalência entre as expressões apresentadas neste lema, usando o critério de indução finita. Fazendo $k = 1$, temos,

$$\operatorname{div}(P_1) = A(\operatorname{div}(P_{1-1})) + \sum_{i=1}^n (\overline{R}(N, P_{k-1}E_i)E_i)^\top = \sum_{i=1}^n (\overline{R}(N, P_{k-1}E_i)E_i)^\top.$$

Suponhamos que o resultado seja válido para $k - 1$, ou seja,

$$\langle \operatorname{div}(P_{k-1}), X \rangle = \sum_{p=1}^{k-1} \sum_{i=1}^n \langle \overline{R}(N, P_{k-1-p}E_i)E_i, A^{p-1}X \rangle.$$

Então

$$\begin{aligned} \langle \operatorname{div}(P_k), X \rangle &= \sum_{i=1}^n \langle \overline{R}(N, P_{k-1}E_i)E_i, X \rangle + \langle A(\operatorname{div}(P_{k-1})), X \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \langle \overline{R}(N, P_{k-1}E_i)E_i, X \rangle + \langle \operatorname{div}(P_{k-1}), AX \rangle. \end{aligned}$$

Utilizando a hipótese de indução obtemos,

$$\begin{aligned} \langle \operatorname{div}(P_k), X \rangle &= \sum_{p=1}^{k-1} \sum_{i=1}^n \langle \overline{R}(N, P_{k-1-p}E_i)E_i, A^p X \rangle + \sum_{i=1}^n \langle \overline{R}(N, P_{k-1}E_i)E_i, X \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{p=1}^{k-1} \langle \overline{R}(N, P_{k-(1+p)}E_i)E_i, A^{(p+1)-1} X \rangle + \sum_{i=1}^n \langle \overline{R}(N, P_{k-1}E_i)E_i, X \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{p+1=2}^k \langle \overline{R}(N, P_{k-(1+p)}E_i)E_i, A^{(p+1)-1} X \rangle \\ &+ \sum_{i=1}^n \langle \overline{R}(N, P_{k-(p+1)}E_i)E_i, A^{(p+1)-1} X \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{p+1=1}^k \langle \overline{R}(N, P_{k-(1+p)}E_i)E_i, A^{(j+1)-1} X \rangle \right). \end{aligned}$$

Fazendo $j = p + 1$, obtemos

$$\langle \operatorname{div}(P_k), X \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k \langle \bar{R}(N, P_{k-j} E_i) E_i, A^{j-1} X \rangle.$$

Logo, a equação (1.26) implica na equação (1.27). Reciprocamente, tomando arbitrariamente $X \in \mathcal{X}(\Sigma)$, temos,

$$\begin{aligned} \langle \operatorname{div}(P_k), X \rangle &= \sum_{i=1}^n \langle \bar{R}(N, P_{k-1} E_i) E_i, X \rangle + \sum_{j=1}^{k-1} \sum_{i=1}^n \langle \bar{R}(N, P_{k-1-j} E_i) E_i, A^{j-1}(AX) \rangle \\ &= \left\langle \sum_{i=1}^n (\bar{R}(N, P_{k-1} E_i) E_i)^\top, X \right\rangle + \langle \operatorname{div}(P_{k-1}), AX \rangle \\ &= \left\langle \sum_{i=1}^n (\bar{R}(N, P_{k-1} E_i) E_i)^\top + A \operatorname{div}(P_{k-1}), X \right\rangle. \end{aligned}$$

Como $X \in \mathcal{X}(\Sigma)$ é qualquer, temos

$$\operatorname{div}(P_k) = A(\operatorname{div}(P_{k-1})) + \sum_{i=1}^n (\bar{R}(N, P_{k-1} E_i) E_i)^\top$$

o que conclui a demonstração. ■

Pela equação (1.24), temos que $L_k = \operatorname{div}(P_k(\nabla f)) - \langle \nabla f, \operatorname{div}(P_k) \rangle$, assim, L_k é elíptico se, e somente se, P_k é positivo definido. Claro que $L_0 = \Delta$ é sempre elíptico. Para o estudo que iremos realizar, será muito útil condições geométricas que garantam a elipticidade do operador L_k quando $k \geq 1$.

Considere a seguinte proposição.

Proposição 1.7.12. *Para cada k tal que $1 \leq k \leq n$, se H_1, \dots, H_k são não negativos, então*

- (i) $H_{k-1} H_{k+1} \leq H_k^2$
- (ii) $H H_k \geq H_{k+1}$
- (iii) $H \geq H_2^{\frac{1}{2}} \geq \dots \geq H_k^{\frac{1}{k}}$.

Quando $k = 1$ podemos enunciar o seguinte lema.

Lema 1.7.13. *Seja Σ uma hipersuperfície tipo-espaço imersa em um espaço-tempo GRW. Se $H_2 > 0$ em Σ , então L_1 é elíptico ou, equivalentemente, P_1 é positivo definido (Para uma escolha apropriada da aplicação de Gauss N).*

Demonstração: A fim de demonstrarmos o lema apresentado, vamos mostrar que todos os auto-valores associados ao operador P_1 são positivos. Observe que pela desigualdade de Cauchy-Schwarz $H^2 = H_1^2 \geq H_2 > 0$.

Com efeito, veja que

$$\begin{aligned}
 H^2 - H_2 &= \frac{1}{n^2} \left(\sum_{i=1}^n \kappa_i \right)^2 - \frac{2}{n(n-1)} \sum_{1 \leq i < j \leq n} \kappa_i \kappa_j \\
 &= \frac{1}{n(n-1)} \left[\left(1 - \frac{1}{n} \right) \left(\sum_{i=1}^n \kappa_i \right)^2 - 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \kappa_i \kappa_j \right] \\
 &= \frac{1}{n(n-1)} \left[\left(\sum_{i=1}^n \kappa_i \right)^2 - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n \kappa_i \right)^2 - 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \kappa_i \kappa_j \right] \\
 &= \frac{1}{n(n-1)} \left[\left(\sum_{i=1}^n \kappa_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \kappa_i \kappa_j \right) - 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \kappa_i \kappa_j - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n \kappa_i \right)^2 \right] \\
 &= \frac{1}{n(n-1)} \left[\sum_{i=1}^n \kappa_i^2 - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n \kappa_i \right)^2 \right].
 \end{aligned}$$

Considere os vetores $v = (\kappa_1, \dots, \kappa_n)$ e $u = (1, \dots, 1)$, obtemos

$$\left(\sum_{i=1}^n \kappa_i \right)^2 = \langle u, v \rangle^2 \leq |u|^2 |v|^2 = n \sum_{i=1}^n \kappa_i^2.$$

O que nos dá que $H^2 - H_2 \geq 0$, e como por hipótese temos $H_2 > 0$ então $H^2 \geq H_2 > 0$. Como, $H > 0$ então pela definição de curvatura média de ordem superior temos que $-S_1 > 0$, sendo assim, existe pelo menos um índice $i \in \{1, \dots, n\}$ tal que $-\kappa_1 > 0$, logo,

$$S_1^2 > \kappa_i^2,$$

e consequentemente,

$$\mu_{i,1} = -S_k + \kappa_i > 0.$$

Pelo que vimos anteriormente ($P_k E_i = \mu_{i,k} E_i$), temos

$$\langle P_1 E_i, E_j \rangle = \mu_{i,1} \langle E_i, E_j \rangle = \mu_{i,1} \delta_{i,j} \geq 0; \forall i \in \{1, \dots, n\}.$$

Como P_k é auto adjunto, obtemos

$$\mu_{j,1} \langle E_i, E_j \rangle = \langle E_i, \mu_{j,1} E_j \rangle = \langle E_i, P_1 E_j \rangle = \langle P_1 E_i, E_j \rangle \geq 0; \forall j \in \{1, \dots, n\}.$$

O que implica que $\mu_{i,j} > 0$, pois, caso não fosse, teríamos

$$\mu_{j,1} = S_1 - \kappa_j = 0 \Leftrightarrow S_1 = \kappa_j \Leftrightarrow \kappa_i = 0; \forall i \neq j \Rightarrow S_2 = 0 \Rightarrow H_2 = 0.$$

Um absurdo! Já que por hipótese $H_2 > 0$. Portanto, P_1 é positivo definido. ■

Lema 1.7.14. *Seja Σ uma hipersuperfície tipo-espaço imersa em um espaço-tempo GRW. Se existe um ponto elíptico de Σ , com respeito a uma escolha apropriada da aplicação de Gauss N , e $H_{k+1} > 0$ em Σ , para $2 \leq k \leq n - 1$, então, para todo $1 \leq j \leq k$ o operador L_j é elíptico ou, equivalentemente, P_j é positivo definido (para aquela escolha apropriada da aplicação de Gauss, se j for ímpar).*

Capítulo 2

Unicidade de hipersuperfícies tipo-espaço com curvatura média de ordem superior constante em espaços-tempos GRW

Neste capítulo, faremos o estudo sobre a unicidade de slices tipo-espaço imersos em espaços tempos GRW. Para isso precisaremos desenvolver ferramentas que nos ajudem a demonstrar tais resultados de unicidade. As principais ferramentas são as fórmulas para operador L_k atuando nas funções altura e $\langle N, K \rangle$, além dos teoremas, aos quais faremos as devidas menções presentes em [22]. Os resultados aqui apresentados foram baseados no trabalho [5] feito por Luis J. Alías e Antonio G. Colares.

2.1 O operador L_k atuando na função altura

Nesta seção, faremos o estudo sobre operador L_k atuando na função altura, que será uma ferramenta essencial para as demonstrações feitas neste trabalho.

Definição 2.1.1. *Em uma variedade semi-Riemanniana \overline{M} um campo conforme K é dito fechado se, para todo e qualquer $V \in \mathcal{X}(\overline{M})$, temos $\overline{\nabla}_V K = \psi V$, onde ψ é uma função suave em \overline{M} .*

Proposição 2.1.2. *O campo de vetores dado por*

$$K(t, x) = f(t) \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)_{(t,x)} ; (t, x) \in \overline{M}$$

é conforme fechado, não nulo apontando para futuro.

2. Unicidade de hipersuperfícies tipo-espaço com curvatura média de ordem superior constante em espaços-tempos GRW

Demonstração. Pelo modo como $K(t, x)$ foi definido, temos que

$$\langle K, \partial_t \rangle = \langle f(t) \partial_t, \partial_t \rangle = -f(t) < 0.$$

Portanto K é aponta para futuro. Seja $Z \in \mathcal{X}(\overline{M})$. Decompondo Z como $Z = Z^* - y \partial_t$, onde $y = \langle Z, \partial_t \rangle \in C^\infty(\overline{M})$ e $Z^* \in \mathcal{X}(\overline{M})$. Então

$$\begin{aligned} \overline{\nabla}_Z K &= \overline{\nabla}_{Z^* - y \partial_t} f(t) \partial_t \\ &= -y \overline{\nabla}_{\partial_t} f(t) \partial_t + \overline{\nabla}_{Z^*} f(t) \partial_t \\ &= -y f(t) \overline{\nabla}_{\partial_t} \partial_t - y \partial_t (f(t)) \partial_t + \overline{\nabla}_{f(t) \partial_t} Z^* \\ &= -y f(t) \overline{\nabla}_{\partial_t} \partial_t - y \partial_t (f(t)) \partial_t + f(t) \left(\frac{\partial_t (f(t))}{f(t)} \right) Z^* \\ &= -y f'(t) - y \partial_t + f(t) \left(\frac{\partial_t (f)}{f} \right) Z^* \\ &= f'(t) (-y \partial_t + Z^*) = f' Z. \end{aligned}$$

Logo,

$$\overline{\nabla}_Z K = f'(t) Z. \quad (2.1)$$

■

Definição 2.1.3. *Seja $\psi : \Sigma \rightarrow \overline{M}$ uma hipersuperfície tipo-espaço com aplicação de Gauss N . A função altura de Σ , denotada por h , é a restrição $\pi_I(t, x) = t$ para Σ ; ou seja, $h : \Sigma \rightarrow I$ é dado por $h = \pi \circ \psi$.*

Em qualquer espaço-tempo GRW existe uma importante classe de hipersuperfícies tipo-espaço, a saber, os slices tipo-espaço $\{t_0\} \times M$, $t_0 \in I$. No decorrer deste trabalho os slices tipo-espaço estarão presentes em boa parte de nossos resultados, fazendo-se assim, importante a necessidade de uma definição que daremos a seguir (veja [3]). As fatias tipo-espaço

Definição 2.1.4. *Uma hipersuperfície tipo-espaço em \overline{M} é (parcialmente) um slice tipo-espaço se, e somente se, a função $h := \pi_I \circ \psi$ for constante.*

Veja que $\overline{\nabla} \pi_I = -\partial_t$, pois dado $X \in \mathcal{X}(\overline{M})$ e escrevendo $X = X^* - \langle X, \partial_t \rangle \partial_t$, temos

$$\langle \overline{\nabla} \pi_I, X \rangle = X(\pi_I) = -\langle X, \partial_t \rangle \partial_t(\pi_I) + X^*(\pi_I) = -\langle X, \partial_t \rangle.$$

Como $X \in \mathcal{X}(\overline{M})$ foi tomado de forma arbitrária, $\overline{\nabla} \pi_I = -\partial_t$, sendo assim, o gradiente de h em Σ é dado por

$$\nabla h = (\overline{\nabla} \pi_I)^\top = -\partial_t^\top,$$

2. Unicidade de hipersuperfícies tipo-espaço com curvatura média de ordem superior constante em espaços-tempos GRW

onde

$$\partial_t = \partial_t^\top - \langle N, \partial_t \rangle N$$

e $\partial_t^\top \in \mathcal{X}(\overline{M})$ denota a componente tangente de ∂_t .

Para efetuarmos nossos próximos cálculos, iremos considerar a função $g(h)$, onde $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ é uma primitiva de f , ou seja $g' = f$. Como $f > 0$, podemos pensar em g como uma reparametrização da função altura. Em particular, temos que o gradiente de $g(h)$ em Σ é dado por

$$\nabla g(h) = g'(h)\nabla h = f(h)\nabla h = f(h)(\overline{\nabla}\pi_I)^\top = -f(h)\partial_t^\top = -K^\top,$$

onde K^\top denota a componente tangente de K ao longo da hipersuperfície Σ , no qual

$$K = K^\top - \langle N, K \rangle N.$$

Pelo que fizemos anteriormente, a equação (2.1) implica que

$$\overline{\nabla}_X K = f'(h)X, \quad (2.2)$$

para $X \in \mathcal{X}(\Sigma)$. A partir de todas essas informações até aqui apresentadas, podemos afirmar que

$$\nabla_X K^\top = f'(h)X - f(h)\langle N, \partial_t \rangle AX = f'(h)X - \langle N, K \rangle AX. \quad (2.3)$$

Com efeito, observe que

$$\begin{aligned} K &= K^\top + K^\perp \\ \Rightarrow \overline{\nabla}_X K &= \overline{\nabla}_X K^\top + \overline{\nabla}_X K^\perp \\ \Rightarrow f'(h)X &= \nabla_X K^\top + II(X, K^\top) - A_{K^\perp}X + \nabla_X^\perp K^\perp \end{aligned}$$

para todo $X \in \mathcal{X}(\Sigma)$. Sendo assim, temos

$$\begin{aligned} (\overline{\nabla}_X K)^\top &= \nabla_X K^\top - A_{K^\perp}X \\ (\overline{\nabla}_X K)^\perp &= II(X, K^\top) + \nabla_X^\perp K^\perp. \end{aligned}$$

Por outro lado, como $\overline{\nabla}_X K = f'(h)X$, obtemos

$$(\overline{\nabla}_X K^\top) = f'(h)X \text{ e } (\overline{\nabla}_X K)^\perp = 0$$

então,

$$\nabla_X K^\top = f'(h)X - A_{K^\perp}X. \quad (2.4)$$

2. Unicidade de hipersuperfícies tipo-espaço com curvatura média de ordem superior constante em espaços-tempos GRW

Porém, temos ainda, que

$$A_{K^\perp}X = A_{(f(t)\langle N, \partial_t \rangle N)}X = f(t)A_{\langle N, \partial_t \rangle N} = f(t)\langle N, \partial_t \rangle AX$$

e, portanto,

$$\nabla_X K^\top = f'(h)X - f(h)\langle N, \partial_t \rangle AX = f'(h)X - \langle N, K \rangle AX. \quad (2.5)$$

Com a expressão (2.5) podemos verificar o seguinte lema

Lema 2.1.5. *Seja $\psi : \Sigma \rightarrow -I \times_f M^n$ um a hipersuperfície tipo-espaço imersa em um espaço-tempo GRW com aplicação de Gauss N . Seja $h = \pi \circ \psi$ a função altura de Σ , e seja $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ uma primitiva arbitrária de f . Então, para cada $k = 0, \dots, n-1$, temos*

$$L_k(h) = -(\log f)'(h)(c_k H_k + \langle P_k(\nabla h), \nabla h \rangle) - \langle N, \partial_t \rangle c_k H_{k+1}$$

e

$$L_k(g(h)) = -c_k(f'(h)H_k + \langle N, K \rangle H_{k+1}),$$

onde $c_k = (n-k)\binom{n}{k} = (k+1)\binom{n}{k+1}$.

Demonstração. Primeiramente, mostremos que

$$L_k(g(h)) = f'(h)(P_k) + \langle N, K \rangle \text{tr}(A \circ P_k) \quad (2.6)$$

$$= -c_k(f'(h)H_k + \langle N, K \rangle H_{k+1}). \quad (2.7)$$

Considere um referencial ortonormal $\{E_1, \dots, E_n\}$. Pela Definição 1.7.8, temos

$$L_k(g(h)) = \sum_{i=1}^n (\langle P_k \circ \nabla^2 g(h) \rangle E_i, E_i)$$

e como

$$\nabla g(h) = -K^\top \quad (2.8)$$

temos pela equação (2.5) que

$$\nabla_X \nabla g(h) = -\nabla_X K^\top = -f'(h)X + \langle N, K \rangle AX. \quad (2.9)$$

Sendo assim,

$$L_k(g(h)) = \sum_{i=1}^n (\langle P_k \circ \nabla^2 g(h) \rangle E_i, E_i)$$

2. Unicidade de hipersuperfícies tipo-espaço com curvatura média de ordem superior constante em espaços-tempos GRW

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{i=1}^n \langle \langle P_k(\nabla^2 g(h)E_i), E_i \rangle \rangle \\
 &= \sum_{i=1}^n \langle P_k(\nabla_{E_i} \nabla g(h)), E_i \rangle.
 \end{aligned}$$

Pela equação (2.9), obtemos

$$\begin{aligned}
 L_k(g(h)) &= \sum_{i=1}^n \langle P_k(-f'(h)E_i + \langle N, K \rangle AE_i), E_i \rangle \\
 &= -f'(h) \sum_{i=1}^n \langle P_k E_i, E_i \rangle + \langle N, K \rangle \sum_{i=1}^n \langle P_k(AE_i), E_i \rangle \\
 &= -f'(h) \text{tr}(P_k) + \langle N, K \rangle \text{tr}(A \circ P_k).
 \end{aligned}$$

Pela proposição 1.7.7 temos

$$\begin{aligned}
 L_k(g(h)) &= -f'(h)c_k H_k + \langle N, K \rangle (-c_k H_{k+1}) \\
 &= -c_k(f'(h)H_k + \langle N, K \rangle H_{k+1}).
 \end{aligned}$$

Agora, considerando o fato de que

$$\nabla h = \frac{1}{f(h)} \nabla g(h) \tag{2.10}$$

decorre,

$$\begin{aligned}
 \nabla_X \nabla h &= \nabla_X \left(\frac{1}{f(h)} \nabla g(h) \right) \\
 &= X \left(\frac{1}{f(h)} \nabla g(h) \right) + \frac{1}{f(h)} \nabla_X (\nabla g(h)) \\
 &= \frac{-X(f(h))}{f^2(h)} \nabla g(h) + \frac{1}{f(h)} (-f'(h)X + \langle N, K \rangle AX) \\
 &= \frac{-f'(h)X(h)}{f^2(h)} \nabla g(h) - \frac{1}{f(h)} f'(h)X + \frac{1}{f(h)} \langle N, f(h)\partial_t \rangle AX \\
 &= \frac{f'(h)}{f(h)} \frac{\langle \nabla h, X \rangle}{f(h)} \nabla g(h) - \frac{f'(h)}{f(h)} X + \langle N, \partial_t \rangle AX \\
 &= (\log f)'(h) \langle \nabla h, X \rangle \frac{\nabla g(h)}{f(h)} - (\log f)'(h)X + \langle N, \partial_t \rangle AX
 \end{aligned}$$

Pela igualdade em (2.10) obtemos

$$\nabla_X \nabla h = -(\log f)'(h) (\langle \nabla f, X \rangle \nabla h + X) + \langle N, \partial_t \rangle AX. \tag{2.11}$$

Considere um referencial ortonormal $\{E_1, \dots, E_n\}$, então temos por definição

$$\begin{aligned} L_k(h) &= \text{tr}(P_k \circ \nabla^2 h) \\ &= \sum_{i=1}^n \langle (P_k \circ \nabla^2 h) E_i, E_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \langle P_k(\nabla_{E_i} \nabla h), E_i \rangle \end{aligned}$$

pela a equação (2.11), obtemos

$$\begin{aligned} L_k(h) &= \sum_{i=1}^n \langle P_k(-\log f)'(h) (\langle \nabla h, E_i \rangle \nabla h + E_i) + \langle N, \partial_t \rangle A E_i, E_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \langle P_k(-\log f)'(h) (\langle \nabla h, E_i \rangle \nabla h + E_i), E_i \rangle + \sum_{i=1}^n \langle P_k(-\log f)'(h) E_i, E_i \rangle + \\ &+ \sum_{i=1}^n \langle P_k(\langle N, \partial_t \rangle A E_i), E_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n -(\log f)'(h) \left(\sum_{i=1}^n \langle P_k, (E_i), E_i \rangle + \sum_{i=1}^n \langle \langle \nabla h, E_i \rangle P_k(\nabla h), E_i \rangle \right) + \\ &+ \langle N, \partial_t \rangle \sum_{i=1}^n \langle P_k(A E_i), E_i \rangle \\ &= -(\log f)'(h) \left(\text{tr}(P_k) + \sum_{i=1}^n \langle P_k(\nabla h), \langle \nabla h, E_i \rangle E_i \rangle \right) \\ &+ \langle N, \partial_t \rangle \text{tr}(P_k \circ A) \\ &= -(\log f)'(h) (\text{tr}(P_k) + \langle P_k(\nabla h), \nabla h \rangle) + \langle N, \partial_t \rangle \text{tr}(P_k \circ A). \end{aligned}$$

Novamente, pela Proposição 1.7.7

$$L_k(h) = -(\log f)'(h) (c_k H_k + \langle P_k(\nabla h), \nabla h \rangle) - \langle N, \partial_t \rangle c_k H_{k+1}. \quad (2.12)$$

■

2.2 Primeiras aplicações

Nesta seção, iremos ver algumas aplicações relacionadas às fórmulas vistas anteriormente nas seções (1.7) e (2.1).

Em boa parte desta dissertação, o lema a seguir será de suma importância em diversos resultados, e por isso apresentaremos aqui sua demonstração. Um resultado mais geral

2. Unicidade de hipersuperfícies tipo-espaço com curvatura média de ordem superior constante em espaços-tempos GRW

deste lema pode ser visto em [4, Lema 5.4] juntamente com a Observação 5.7, onde lá o caso abordado não exige que nossa fibra M seja compacta.

Lema 2.2.1 (Existência de um ponto elíptico). *Seja $\psi : \Sigma^n \rightarrow -I \times_f M^n$ uma hipersuperfície compacta tipo-espaço imersa em um espaço-tempo GRW espacialmente fechado e suponha que $f'(h)$ não se anule em Σ (equivalentemente, $\psi(\Sigma)$ está contido em um slab*

$$\Omega(t_1, t_2) = (t_1, t_2) \times M \subset -I \times_f M$$

em que f' não se anula).

- (i) *Se $f'(h) > 0$ em Σ (equivalentemente, $f' > 0$ em (t_1, t_2)), então existe um ponto elíptico de Σ em relação a aplicação Gauss N apontando para futuro.*
- (ii) *Se $f'(h) < 0$ em Σ (equivalentemente, $f' < 0$ em (t_1, t_2)), então existe um ponto elíptico de Σ em relação a aplicação Gauss N apontando para o passado.*

Demonstração. Seja $f'(h) > 0$ e N a aplicação de Gauss apontando para futuro. Sendo Σ uma hipersuperfície tipo-espaço compacta, a mesma possui um ponto p_0 tal que a função altura h atinge seu mínimo. Como p_0 é um ponto de mínimo de h temos que p_0 é também ponto crítico e portanto $\nabla h(p_0) = 0$ e pelo fato de $\partial_t = \nabla h - \langle N, \partial_t \rangle N$ temos que $\partial_t(p_0) = -\langle N, \partial_t \rangle N(p_0)$, ou seja N e ∂_t são linearmente dependentes, e utilizando a fórmula de Cauchy-Schwarz obtemos que $\langle \partial_t, N \rangle(p_0) = -1$. Por (2.11) temos que para cada $i = 1, \dots, n$

$$\begin{aligned} \nabla^2 h_{p_0}(e_i, e_i) &= \langle \nabla_{e_i}(\nabla h(p_0)), e_i \rangle \\ &= (-\log f)'(h(p_0)) \langle e_i + \langle N, \partial_t, N \rangle A e_i, e_i \rangle \\ &= (-\log f)'(h(p_0)) \langle e_i, e_i \rangle - \langle A e_i, e_i \rangle \\ &= (-\log f)'(h(p_0)) - \kappa_i(p_0) \geq 0, \end{aligned}$$

onde $\{e_1, \dots, e_n\}$ são direções principais de p_0 . Logo

$$(-\log f)'(h(p_0)) - \kappa_i(p_0) \geq 0 \Leftrightarrow 0 > (-\log f)'(h(p_0)) \geq \kappa_i(p_0). \quad (2.13)$$

Como era esperado.

Analogamente, se $f'(h) < 0$ escolhemos em Σ a aplicação de Gauss N apontando para o passado. Como Σ uma hipersuperfície tipo-espaço compacta, consideramos agora o ponto p_1 tal que a função altura h atinge seu máximo. Como p_1 é ponto de máximo de h temos que p_1 é também ponto crítico, e, portanto, $\nabla h = 0$ e pelo fato de $\partial_t = \nabla h - \langle N, \partial_t \rangle N$, temos que $\partial_t = \langle N, \partial_t \rangle N$, ou seja, N e ∂_t são linearmente dependentes, e utilizando a

2. Unicidade de hipersuperfícies tipo-espaço com curvatura média de ordem superior constante em espaços-tempos GRW

fórmula de Cauchy-Schwarz, obtemos que $\langle \partial_t, N \rangle = 1$. Novamente por (2.11) temos que para cada $i = 1, \dots, n$

$$\nabla^2 h_{p_1}(e_i, e_i) = (-\log f)'(h(p_1)) + \kappa_i(p_1) \leq 0 \quad (2.14)$$

onde $\{e_1, \dots, e_n\}$ são direções principais de p_1 . Como $f'(h_{max}) < 0$ então

$$\kappa_i(p_1) \leq (\log f)'(h_{max}) < 0. \quad (2.15)$$

■

A prova do Teorema 2.2.3 será uma consequência do lema seguinte, que na verdade é uma generalização de [6, Lema 3 e Corolário 4], já que nosso lema se aplica a curvaturas média de ordem superior ao invés de somente o caso de curvatura média comum ($k = 1$).

Lema 2.2.2. *Seja $-I \times_f M^n$ um espaço-tempo GRW espacialmente fechado e Σ uma hipersuperfície compacta tipo-espaço imersa em $-I \times_f M^n$. Suponha que para algum $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, a k -ésima transformação de Newton P_k é semi-definida em Σ e a função H_k não se anula em Σ . Então, o quociente H_{k+1}/H_k satisfaz*

$$\min \left(\frac{H_{k+1}}{H_k} \right) \leq (\log f)'(h_{max}) \text{ e } (\log f)'(h_{min}) \leq \max \left(\frac{H_{k+1}}{H_k} \right)$$

onde h_{min} e h_{max} denotam, respectivamente, os valores mínimo e máximo da função altura em Σ . Em particular, se a função torção f satisfaz $ff'' - f'^2 \leq 0$, então

$$\min \left(\frac{H_{k+1}}{H_k} \right) \leq (\log f)'(h_{max}) \leq (\log f)'(h_{min}) \leq \max \left(\frac{H_{k+1}}{H_k} \right).$$

Demonstração. Seja Σ uma hipersuperfície compacta imersa em $-I \times_f M$, e considere a aplicação de Gauss N apontando para futuro. Pelo fato de Σ compacta, temos que existem pontos p_{min} e p_{max} , tais que a função altura h atinge seu valor mínimo e seu valor máximo respectivamente, ou seja,

$$h(p_{min}) = \min_{\Sigma} h = h_{min} \leq h_{max} = \max_{\Sigma} h = h(p_{max}) \quad (2.16)$$

além de $\nabla h(p_{min}) = \nabla h(p_{max}) = 0$. Logo,

$$(\partial_t)_{p_{max}} = N(p_{max}) \text{ e } (\partial_t)_{p_{min}} = N(p_{min})$$

e pelo Lema 2.1.5, temos

$$\begin{aligned}
 L_k(h_{\max}) &= -(\log f)'(h_{\max})(c_k H_k(p_{\max}) + \langle P_k(\nabla h_{p_{\max}}), \nabla h(p_{\max}) \rangle) \\
 &\quad - \langle N_{p_{\max}}, (\partial_t)_{p_{\max}} \rangle c_k H_{k+1}(p_{\max}) \\
 &= -(\log f)'(h_{\max})(c_k H_k(p_{\max}) - \langle N_{p_{\max}}, (\partial_t)_{p_{\max}} \rangle c_k H_{k+1}(p_{\max}))
 \end{aligned} \tag{2.17}$$

logo,

$$\frac{1}{c_k} L_k(h_{\max}) = H_{k+1}(p_{\max}) - (\log f)'(h_{\max}) H_k(p_{\max}). \tag{2.18}$$

Analogamente,

$$\frac{1}{c_k} L_k(h)(p_{\min}) = H_{k+1}(p_{\min}) - (\log f)'(h_{\min}) H_k(p_{\min}). \tag{2.19}$$

Considere agora, sem perda de generalidade, que P_k é semi-definida positiva, então teríamos que $H_k \geq 0$, mas, como por hipótese $H_k \neq 0$ em Σ , temos $H_k > 0$. Sendo assim, pela Definição 1.7.8 $L_k(h) = \text{tr}(P_k \circ \nabla^2 h)$, onde $\nabla^2 h(p_{\min})$ é positivo semi-definido e $\nabla^2 h(p_{\max})$ é negativo semi-definido, temos $L_k(h)(p_{\min}) \geq 0$ e $L_k(h)(p_{\max}) \leq 0$ (pois P_k é positivo semi-definido). Logo, pela equações (2.19) e (2.18) obtemos

$$\max \left(\frac{H_{k+1}}{H_k} \right) \geq \left(\frac{H_{k+1}}{H_k} \right) (p_{\min}) \geq (\log f)'(h_{\min}) \tag{2.20}$$

e

$$\min \left(\frac{H_{k+1}}{H_k} \right) \leq \left(\frac{H_{k+1}}{H_k} \right) (p_{\max}) \leq (\log f)'(h_{\max}). \tag{2.21}$$

Claro que se $(-\log f)$ é convexa, então $(\log f)'$ é não crescente, ou seja

$$(\log f)'(h_{\max}) \leq (\log f)'(h_{\min})$$

e, assim, pelas desigualdades (2.20) e (2.21) concluímos

$$\min \left(\frac{H_{k+1}}{H_k} \right) \leq (\log f)'(h_{\max}) \leq (\log f)'(h_{\min}) \leq \max \left(\frac{H_{k+1}}{H_k} \right).$$

O caso em que P_k é negativo semi-definido é análogo, levando em conta que agora $H_k < 0$ em Σ , e $L_k(h)(p_{\min}) \leq 0$ e $L_k(h)(p_{\max}) \geq 0$. ■

2. Unicidade de hipersuperfícies tipo-espaço com curvatura média de ordem superior constante em espaços-tempos GRW

Teorema 2.2.3. *Seja $-I \times_f M^n$ um espaço-tempo GRW espacialmente fechado, de modo que sua função torção satisfaça a seguinte condição*

$$ff'' - f'^2 \leq 0, \quad (2.22)$$

(isto é, tal que $-\log(f)$ é convexo). Seja Σ^n uma hipersuperfície compacta tipo-espaço imersa em $-I \times_f M^n$ cuja k -ésima transformação de Newton P_k é definida em Σ , para algum $k = 0, 1, \dots, n-1$. Se o quociente H_{k+1}/H_k for constante, então a hipersuperfície é um slice contido em $\{t_0\} \times M$, onde $t_0 \in I$ satisfaz $f'(t_0) \neq 0$ se $k \geq 1$.

Demonstração. Seja Σ uma hipersuperfície compacta tipo-espaço imersa em \overline{M} e N sua aplicação de Gauss apontando para futuro. Como por hipótese $(-\log f)$ é convexa e $\frac{H_{k+1}}{H_k} = \alpha$ é constante (onde $\alpha \in \mathbb{R}$), temos pelo Lema 2.2.2 que

$$\frac{H_{k+1}}{H_k} = (\log f)'(h_{\max}) = (\log f)'(h_{\min}) \quad (2.23)$$

e, conseqüentemente,

$$(\log f)'(h) = \frac{f'(h)}{f(h)} = \frac{H_{k+1}}{H_k} = \alpha \quad (2.24)$$

é constante em I . Pelo Lema 2.1.5, temos

$$L_k(g(h)) = -c_k(f'(h)H_k + \langle N, K \rangle H_{k+1})$$

mas, de (2.24), obtemos que $f'(h)H_k = f(h)H_{k+1}$, logo

$$L_k(g(h)) = -c_k(f(h) + \langle N, K \rangle)H_{k+1}. \quad (2.25)$$

Note que, pelo fato de P_k ser definida temos que $H_{k+1} = \alpha H_k$ não muda de sinal em Σ e $\langle N, K \rangle < -f(h) < 0$ em Σ . Então, de (2.25), temos que $L_k(g(h))$ não muda de sinal em Σ , que é uma variedade Riemanniana compacta. No caso de P_k ser positivo definido, temos que L_k é um operador elíptico e pelo princípio clássico do máximo, concluímos que $g(h)$ é constante. Caso P_k seja negativo definido, então $-L_k$ é elíptico e conseqüentemente, $g(h)$ continua sendo constante. Mas, se $g(t)$ for crescente, então isto significa, necessariamente, que h é constante em Σ e, então, nossa hipersuperfície Σ é um slice $\{t_0\} \times M$. Finalmente, se $k \geq 1$, então $f'(t_0) \neq 0$, já que os slices $\{t_0\} \times M$ são totalmente geodésicas em $-I \times_f M$, conseqüentemente $P_k = 0$, já que $A \equiv 0$. ■

Conforme dito em Montiel [22], embora a hipótese de $-\log f$ ser uma função convexa é uma condição razoavelmente fraca, esta condição é suficiente para obter resultados de unicidade para hipersuperfícies tipo-espaço em espaços-tempos GRW. Um exemplo é, que

2. Unicidade de hipersuperfícies tipo-espaço com curvatura média de ordem superior constante em espaços-tempos GRW

todo espaço-tempo GRW obedecendo à condição de convergência tipo-tempo (que será visto mais adiante) satisfaz [2.22](#). Agora como uma primeira aplicação do Teorema [2.2.3](#), juntamente como o Lema [1.7.13](#) temos o seguinte corolário.

Corolário 2.2.4. *Seja $-I \times_f M^n$ um espaço-tempo GRW espacialmente fechado de modo que sua função torção satisfaça a condição*

$$f f'' - f'^2 \leq 0,$$

Então, as únicas hipersuperfícies compactas tipo-espaço Σ imersas em $-I \times_f M^n$ de modo que $H_2 > 0$ em Σ e o quociente H_2/H_1 é constante são os slices contidos $\{t_0\} \times M$, com $t_0 \in I$ satisfazendo $f'(t_0) \neq 0$.

Perceba que para aplicar o Lema [1.7.14](#) e obter uma segunda aplicação do Teorema [2.2.3](#), é necessário ter alguma condição geométrica que garanta a existência de um ponto elíptico. Então pelos Lemas [1.7.14](#), [2.2.1](#) juntamente com o Teorema [2.2.3](#) obtemos,

Corolário 2.2.5. *Seja \overline{M}^n um espaço-tempo GRW espacialmente fechado de forma que sua função torção satisfaça a condição*

$$f f'' - f'^2 \leq 0.$$

Assuma que Σ , $n \geq 3$, é uma hipersuperfície compacta tipo-espaço imersa em $-I \times_f M^n$ que está contida em um slab $\Omega(t_1, t_2) \subset -I \times_f M^n$ no qual f' não se anula. Se $H_{k+1} > 0$ em Σ para algum $k \geq 2$ e um dos quocientes H_{j+1}/H_j for constante para algum $1 \leq j \leq k$, então Σ é necessariamente um slice contido em $\{t_0\} \times M$, com $t_0 \in (t_1, t_2)$.

Teorema 2.2.6. *Seja $-I \times_f M^n$ um espaço-tempo GRW espacialmente fechado de forma que sua função torção satisfaça a condição [\(2.22\)](#), com igualdade apenas em pontos isolados de I , no máximo. Seja Σ uma hipersuperfície compacta tipo-espaço imersa em $-I \times_f M^n$ cuja k -ésima transformação de Newton P_k é semi-definida em Σ e H_k não se anula em Σ , para algum $k = 0, 1, \dots, n-1$. Se o quociente H_{k+1}/H_k for constante, então a hipersuperfície é um slice contido em $t_0 \times M$, onde t_0 satisfaz $f'(t_0) \neq 0$ se $k > 0$.*

Demonstração. Pelo mesmo argumento do Teorema [2.2.3](#), temos que

$$\frac{H_{k+1}}{H_k} = (\log f)'(h_{\max}) = (\log f)'(h_{\min}).$$

Como $f f'' - f'^2 < 0$ e $f f'' - f'^2 = 0$ no máximo em pontos isolados, temos então que $(\log f)'(h)$ é estritamente decrescente e como $\frac{H_{k+1}}{H_k} = (\log f)'(h_{\max}) = (\log f)'(h_{\min})$, então $h_{\max} = h_{\min}$, ou seja, h é uma função constante em Σ , e Σ é um slice $\{t_0\} \times M$ onde $f'(t_0) \neq 0$. ■

2.3 Fórmulas de Minkowski para hipersuperfícies em espaços-tempos GRW

Nesta seção, iremos apresentar as fórmulas de Minkowski para hipersuperfícies compactas tipo-espaço imersas em GRW ainda como aplicações das fórmulas do Lema [2.1.5](#). A motivação dessa abordagem se deve ao fato de que essas novas fórmulas de Minkowski podem ser aplicadas em hipersuperfícies com curvatura média de ordem superior constante em quaisquer espaços-tempos RW, até mesmo quando o espaço ambiente não tem curvatura seccional constante.

Lema 2.3.1. *Seja $\psi : \Sigma \rightarrow \overline{M}$ uma hipersuperfície compacta tipo-espaço imersa em um espaço-tempo GRW. Então*

$$\int_{\Sigma} (f'(h) + \langle N, K \rangle H) d\Sigma = 0 \quad (2.26)$$

e

$$\begin{aligned} n(n-1) \int_{\Sigma} (f'(h)H + \langle N, K \rangle H_2) d\Sigma \\ = \int_{\Sigma} \langle N, K \rangle (Ric_M(N^*, N^*) - (n-1)(\log f)''(h)|\nabla h|^2) d\Sigma. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Demonstração. Seja Σ uma hipersuperfície compacta tipo-espaço imersa em um espaço-tempo GRW. Como

$$div(P_k(\nabla f)) = \langle div P_k, \nabla f \rangle + L_k(f)$$

e

$$L_k(g(h)) = -c_k(f'(H_k) + \langle N, K \rangle H_{k+1})$$

logo,

$$div(P_k(\nabla g(h))) = f(h)\langle div P_k, \nabla h \rangle - c_k(f'(h)H_k + \langle N, K \rangle H_{k+1}) \quad (2.28)$$

para cada $k = 0, \dots, (n-1)$. Integrando em Σ , temos pelo Teorema da Divergência

$$0 = \int_{\Sigma} div(P_k(\nabla g(h))) d\Sigma = \int_{\Sigma} f(h)\langle div(P_k), \nabla h \rangle d\Sigma - c_k \int_{\Sigma} f'(h)H_k + \langle N, K \rangle H_{k+1} d\Sigma$$

o que nos dá

$$c_k \int_{\Sigma} (f'(h)H_k + \langle N, K \rangle H_{k+1}) d\Sigma = \int_{\Sigma} f(h)\langle div(P_k), \nabla h \rangle d\Sigma \quad (2.29)$$

onde $d\Sigma$ é a medida Riemanniana induzida em Σ .

2. Unicidade de hipersuperfícies tipo-espaço com curvatura média de ordem superior constante em espaços-tempos GRW

Se que $k = 0$, então temos que $P_0 = I$, $div(P_0) = 0$, que é a primeira fórmula de Minkowski

$$\int_{\Sigma} (f'(h) + \langle N, K \rangle H) d\Sigma = 0. \quad (2.30)$$

Vejamos agora o caso $k = 1$. Pelo Lema [1.7.11](#), para $k = 1, \dots, (n - 1)$, temos que

$$\langle div P_k, X \rangle = \sum_{j=0}^{k-1} \sum_{i=1}^n \langle \bar{R}(E_i, A^{k-1-j} X) N, P_j E_i \rangle.$$

Assim, se $k = 1$, temos,

$$\begin{aligned} \langle div P_1, \nabla h \rangle &= \sum_{i=1}^n \langle \bar{R}(E_i, \nabla h) N, E_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \bar{R}(E_i, \nabla h, N, E_i) \\ &= \sum_{i=1}^n -\bar{R}(\nabla h, E_i, N, E_i) \\ &= -\sum_{i=1}^n \bar{R}(\nabla h, E_i, N, E_i) \\ &= -\bar{Ric}(N, \nabla h) \\ &= -\bar{Ric}(\nabla h, N), \end{aligned}$$

Decompondo nosso campo ∂_t , obtemos o seguinte

$$\begin{aligned} \partial_t &= \partial_t^\top - \langle \partial_t, N \rangle N \\ \partial_t &= -\nabla h - \langle \partial_t, N \rangle N \\ \nabla h &= -\partial_t - \langle \partial_t, N \rangle N \end{aligned}$$

logo,

$$(\nabla h)^* = -\langle \partial_t, N \rangle N^*, \quad (2.31)$$

então, considerando [\(1.8\)](#) e $\langle div(P_1), \nabla h \rangle = -Ric(N, \nabla h)$, temos

$$\begin{aligned} Ric(N, -\nabla h) &= Ric_M(N^*, -(\nabla h)^*) + (n((\log f)')^2 + (\log f)'') \langle \nabla h, N \rangle + \\ &\quad - (n - 1)(\log f)'' \langle \langle N, \partial_t \rangle \langle -\nabla h, \partial_t \rangle \\ &= Ric_M(N^*, \langle N, \partial_t \rangle N^*) - (n - 1)(\log f)'' \langle \langle N, \partial_t \rangle \langle -\nabla h, -\nabla h - \langle N, \partial_t \rangle N \rangle \\ &= \langle N, \partial_t \rangle Ric_M(N^*, N^*) - (n - 1)(\log f)'' \langle \langle N, \partial_t \rangle \langle -\nabla h, -\nabla h \rangle \\ &= \langle N, \partial_t \rangle (Ric_M(N^*, N^*) - (n - 1)(\log f)'' |\nabla h|^2). \end{aligned}$$

2. Unicidade de hipersuperfícies tipo-espaço com curvatura média de ordem superior constante em espaços-tempos GRW

Portanto, obtemos que a segunda fórmula de Minkowski (quando $k = 1$) para uma hipersuperfície tipo-espaço compacta em um espaço-tempo GRW é dada por

$$\begin{aligned} c_1 & \int_{\Sigma} (f'(h)H + \langle N, K \rangle H_2) d\Sigma \\ & = \int_{\Sigma} \langle N, K \rangle (Ric_M(N^*, N^*) - (n-1)(\log f)''(h)|\nabla h|^2) d\Sigma. \end{aligned}$$

■

Com base no Lema anterior, é natural pensar como seriam sucessivas fórmulas de Minkowski para $k \geq 2$. Afim de deduzirmos tais fórmulas iremos assumir que para $n \geq 3$, o espaço-tempo GRW $-I \times_f M$ tem fibra com curvatura seccional constante, em outras palavras, $-I \times_f M$ é um espaço-tempo RW. Feito estas considerações enunciaremos o seguinte resultado.

Teorema 2.3.2. *Seja $\psi : \Sigma \rightarrow -I \times_f M^n$ uma hipersuperfície compacta tipo-espaço espaço imersa em um espaço-tempo RW, sendo M^n uma variedade Riemanniana com curvatura seccional constante κ . Então, para cada $k = 2, \dots, n-1$*

$$\binom{n}{k} \int_{\Sigma} (f'(h)H_k + \langle N, K \rangle H_{k+1}) d\Sigma = \int_{\Sigma} \left(\frac{\kappa}{f^2(h)} - (\log f)''(h) \right) \langle N, K \rangle \langle P_{k-1} \nabla h, \nabla h \rangle d\Sigma.$$

Demonstração. Primeiramente, calculemos $\langle \text{div}(P_k), \nabla h \rangle$ para $2 \leq k \leq n-1$. De (1.6) temos

$$\begin{aligned} \overline{R}(E_i, X)N & = R_M(E_i^*, X^*)N^* + ((\log f)')^2(\langle E_i, N \rangle X - \langle X, N \rangle W) + (\log f)''(\langle X, \partial_t \rangle E_i + \\ & \quad - \langle E_i, \partial_t \rangle X) - (\log f)''(\langle X, \partial_t \rangle \langle E_i, N \rangle - \langle E_i, \partial_t \rangle \langle X, N \rangle) \\ & = R_M(E_i^*, X^*)N^* + (\log f)''\langle N, \partial_t \rangle(\langle X, \partial_t \rangle E_i - \langle E_i, \partial_t \rangle X). \end{aligned}$$

Lembrando que $\partial_t = -\nabla h - \langle N, \partial_t \rangle N$, advêm-se que

$$\langle X, \partial_t \rangle = \langle X, -\nabla h \rangle - \langle N, \partial_t \rangle \langle X, N \rangle = \langle X, -\nabla h \rangle \quad (2.32)$$

e

$$\langle E_i, \partial_t \rangle = \langle E_i, -\nabla h \rangle - \langle N, \partial_t \rangle \langle E_i, N \rangle = \langle E_i, -\nabla h \rangle. \quad (2.33)$$

Logo,

$$\begin{aligned} \overline{R}(E_i, X)N & = R_M(E_i^*, X^*)N^* + (\log f)''\langle N, \partial_t \rangle(-\langle X, \nabla h \rangle + \langle E_i, \nabla h \rangle X) \\ & = R_M(E_i^*, X^*)N^* - (\log f)''\langle N, \partial_t \rangle(\langle X, \nabla h \rangle E_i - \langle E_i, \nabla h \rangle X) \end{aligned} \quad (2.34)$$

onde $X \in \mathcal{X}(\Sigma)$.

2. Unicidade de hipersuperfícies tipo-espaço com curvatura média de ordem superior constante em espaços-tempos GRW

Considerando agora as decomposições

$$N = N^* - \langle N, \partial_t \rangle \partial_t; \quad E_i = E_i^* - \langle E_i, \partial_t \rangle \partial_t; \quad X = X^* - \langle X, \partial_t \rangle \partial_t,$$

temos

$$\begin{aligned} (N^*)^\top &= N^* + \langle N^*, \partial_t \rangle \partial_t \\ &= N^* + \langle N + \langle N, \partial_t \rangle \partial_t, N \rangle N \\ &= N^* - N + \langle N, \partial_t \rangle^2 N \\ &= \langle N, \partial_t \rangle \partial_t + \langle N, \partial_t \rangle^2 N \\ &= -\langle N, \partial_t \rangle (-\partial_t - \langle N, \partial_t \rangle N) \\ &= -\langle N, \partial_t \rangle \nabla h. \end{aligned} \tag{2.35}$$

Repetindo o mesmo raciocínio para (X^*)

$$\begin{aligned} (X^*)^\top &= X^* + \langle X^*, N \rangle N \\ &= X + \langle X, \partial_t \rangle \partial_t + \langle X + \langle X, \partial_t \rangle \partial_t, N \rangle N \\ &= X + \langle X, \partial_t \rangle \partial_t + \langle X, \partial_t \rangle \langle N, \partial_t \rangle N \\ &= X - \langle X, \nabla h \rangle \partial_t - \langle X, \nabla h \rangle \langle N, \partial_t \rangle N \\ &= X + \langle X, \nabla h \rangle (-\partial_t - \langle N, \partial_t \rangle N) \\ &= X + \langle X, \nabla h \rangle \nabla h, \end{aligned} \tag{2.36}$$

e analogamente

$$(E_i^*)^\top = E_i + \langle E_i, \nabla h \rangle \nabla h. \tag{2.37}$$

Além disso,

$$\langle N, N \rangle = -\langle d\pi_I(N), d\pi_I(N) \rangle_I + f^2 \langle N^*, N^* \rangle_M.$$

Isolando $\langle N^*, N^* \rangle_M$, obtemos,

$$\begin{aligned} \langle N^*, N^* \rangle_M &= \frac{1}{f^2} (-1 + \langle -\langle N, \partial_t \rangle \partial_t, -\langle N, \partial_t \rangle \partial_t \rangle_I) \\ &= -\frac{1}{f^2} (1 - \langle N, \partial_t \rangle^2) \\ &= \frac{1}{f^2} |\nabla h|^2. \end{aligned} \tag{2.38}$$

2. Unicidade de hipersuperfícies tipo-espaço com curvatura média de ordem superior constante em espaços-tempos GRW

Analogamente,

$$\langle N, X \rangle = -\langle d\pi_I(N), d\pi_I(X) \rangle + f^2 \langle N^*, X^* \rangle$$

isolando $\langle N^*, X^* \rangle_M$,

$$\begin{aligned} \langle N^*, X^* \rangle_M &= \frac{1}{f^2} (\langle N, X \rangle + \langle d\pi_I(N), d\pi_I(X) \rangle_I) \\ &= \frac{1}{f^2} (\langle -\langle N, \partial_t \rangle \partial_t, -\langle X, \partial_t \rangle \partial_t \rangle_I) \\ &= -\frac{1}{f^2} \langle N, \partial_t \rangle \langle X, \nabla h \rangle, \end{aligned} \quad (2.39)$$

repetindo o processo para E_i^* obtemos,

$$\langle E_i^*, N^* \rangle_M = -\frac{1}{f^2} \langle N, \partial_t \rangle \langle E_i, \nabla h \rangle. \quad (2.40)$$

Perceba que todas as 6 equações vistas anteriormente continuam sendo válidas para toda e qualquer fibra Riemanniana M^n , já que não utilizamos a hipótese de curvatura seccional constante para deduzir tais fórmulas. Se M^n tem curvatura seccional constante κ , então

$$(R_M(E_i^*, X_i^*)N^*)^\top = \kappa \langle E_i^*, N^* \rangle_M (X^*)^\top - \kappa \langle X^*, N^* \rangle_M (E_i^*)^\top \quad (2.41)$$

Pois sendo M^n uma variedade Riemanniana de curvatura seccional constante, temos que dados X^*, N^* e $E_i^* \in \mathcal{X}(M)$

$$R_M(E_i^*, X^*)N^* = \kappa [\langle E_i^*, N^* \rangle_M (X^*) - \langle X^*, N^* \rangle_M (E_i^*)]$$

e a expressão (2.41) segue naturalmente. Pela equação (2.41), juntamente com (2.36), (2.37), (2.40), (2.39), temos,

$$\begin{aligned} (R_M(E_i^*, X^*)N^*)^\top &= \kappa \left[-\frac{1}{f^2(h)} \langle N, \partial_t \rangle \langle E_i, \nabla h \rangle (X + \langle X, \nabla h \rangle \nabla h) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{f^2(h)} \langle N, \partial_t \rangle \langle X, \nabla h \rangle (E_i + \langle E_i, \nabla h \rangle \nabla h) \right], \end{aligned}$$

e colocando $\frac{\kappa}{f^2(h)} \langle N, \partial_t \rangle$ em evidência

$$\begin{aligned} (R_M(E_i^*, X^*)N^*)^\top &= \frac{\kappa}{f^2(h)} \langle N, \partial_t \rangle \left[\langle X, \nabla h \rangle E_i + \langle X, \nabla h \rangle \langle E_i, \nabla h \rangle \nabla h - \langle E_i, \nabla h \rangle X \right. \\ &\quad \left. - \langle E_i, \nabla h \rangle \langle X, \nabla h \rangle \nabla h \right] \end{aligned}$$

2. Unicidade de hipersuperfícies tipo-espaço com curvatura média de ordem superior constante em espaços-tempos GRW

assim,

$$(R_M(E_i^*, X^*)N^*)^\top = \frac{\kappa}{f^2(h)} \langle N, \partial_t \rangle \left[\langle X, \nabla h \rangle E_i - \langle E_i, \nabla h \rangle X \right], \quad (2.42)$$

Através de (2.34) e da equação anterior

$$\begin{aligned} (\bar{R}(E_i, X)N)^\top &= (R_M(E_i^*, X^*)N^* - (\log f)'' \langle N, \partial_t \rangle (\langle X, \nabla h \rangle E_i - \langle E_i, \nabla h \rangle X))^\top \\ &= \frac{\kappa}{f^2(h)} \langle N, \partial_t \rangle \left[\langle X, \nabla h \rangle E_i - \langle E_i, \nabla h \rangle X \right] - (\log f)'' \langle N, \partial_t \rangle (\langle X, \nabla h \rangle E_i \\ &\quad - \langle E_i, \nabla h \rangle X) \\ (\bar{R}(E_i, X)N^\top) &= \left(\frac{\kappa}{f^2(h)} - (\log f)''(h) \right) \langle N, \partial_t \rangle \left[\langle X, \nabla h \rangle E_i - \langle E_i, \nabla h \rangle X \right]. \end{aligned}$$

Agora, para cada $j = 0, 1, \dots, n-1$ fixado, temos que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \langle (\bar{R}(E_i, X)N, P_j E_i) \rangle &= \sum_{i=1}^n (\langle R_M(E_i^*, X^*)N^* - (\log f)'' \langle N, \partial_t \rangle (\langle X, \nabla h \rangle E_i \\ &\quad - \langle E_i, \nabla h \rangle X), P_j(E_i) \rangle) \\ &= \sum_{i=1}^n \langle R_M(E_i^*, X^*)N^*, P_j E_i \rangle + \\ &\quad - (\log f)'' \langle N, \partial_t \rangle \left[\langle X, \nabla h \rangle \sum_{i=1}^n \langle E_i, P_j E_i \rangle - \sum_{i=1}^n \langle E_i, \nabla h \rangle \langle X, P_j E_i \rangle \right] \\ &= \sum_{i=1}^n \langle R_M(E_i^*, X^*)N^*, P_j E_i \rangle - (\log f)'' \langle N, \partial_t \rangle \left[\langle X, \nabla h \rangle \text{tr}(P_j) \right. \\ &\quad \left. - \sum_{i=1}^n \langle P_j X, \langle E_i, \nabla h \rangle E_i \rangle \right] \\ &= \sum_{i=1}^n \langle R_M(E_i^*, X^*)N^*, P_j E_i \rangle - (\log f)'' \langle N, \partial_t \rangle \left[\langle X, \nabla h \rangle \text{tr}(P_j) + \right. \\ &\quad \left. - \langle P_j X, \nabla h \rangle \right]. \end{aligned}$$

Pela equação (2.41)

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \langle (\bar{R}(E_i, X)N, P_j E_i) \rangle &= \sum_{i=1}^n \langle \kappa \langle E_i^*, N^* \rangle_M X^*, P_j E_i \rangle - \sum_{i=1}^n \langle \kappa \langle X^*, N^* \rangle_M E_i^*, P_j E_i \rangle \\ &\quad - (\log f)''(h) \langle N, \partial_t \rangle \left[\langle X, \nabla h \rangle \text{tr}(P_j) - \langle P_j X, \nabla h \rangle \right]. \end{aligned}$$

Substituindo as expressões encontradas para $\langle N^*, X^* \rangle_M$ e $\langle N^*, E^* \rangle_M$ obtemos

$$\sum_{i=1}^n \langle (\bar{R}(E_i, X)N, P_j E_i) \rangle = \frac{\kappa}{f^2(h)} \Upsilon - (\log f)''(h) \langle N, \partial_t \rangle \left[\langle X, \nabla h \rangle \text{tr}(P_j) - \langle P_j X, \nabla h \rangle \right],$$

2. Unicidade de hipersuperfícies tipo-espaço com curvatura média de ordem superior constante em espaços-tempos GRW

onde

$$\Upsilon = \left[\sum_{i=1}^n \langle N, \partial_t \rangle \langle X, \nabla h \rangle \langle E_i, P_j E_i \rangle - \sum_{i=1}^n \langle N, \partial_t \rangle \langle E_i, \nabla h \rangle \langle X^*, P_j E_i \rangle \right].$$

Primeiramente, fazamos uma análise somente da igualdade atribuída a Υ . Substituindo as decomposições dos campos E^* e X^* , temos

$$\begin{aligned} \Upsilon &= \sum_{i=1}^n \left[\langle N, \partial_t \rangle \langle X, \nabla h \rangle \langle E_i, P_j E_i \rangle + \langle N, \partial_t \rangle \langle X, \nabla h \rangle \langle E_i, \partial_t \rangle \langle \partial_t, P_j E_i \rangle \right. \\ &\quad \left. - \langle N, \partial_t \rangle \langle E_i, \nabla h \rangle \langle X, P_j E_i \rangle - \langle N, \partial_t \rangle \langle E_i, \nabla h \rangle \langle X, \partial_t \rangle \langle \partial_t, P_j E_i \rangle \right] \\ &= \sum_{i=1}^n \left[\langle N, \partial_t \rangle \langle X, \nabla h \rangle \langle E_i, P_j E_i \rangle + \langle N, \partial_t \rangle \langle X, \nabla h \rangle \langle P_j(\partial_t^\top), \langle E_i, \partial_t \rangle E_i \rangle + \right. \\ &\quad \left. - \langle N, \partial_t \rangle \langle P_j X, \langle E_i, \nabla h \rangle E_i \rangle - \langle N, \partial_t \rangle \langle X, \partial_t \rangle \langle P_j(\partial_t^\top), \langle E_i, \nabla h \rangle E_i \rangle \right] \\ &= \left[\langle N, \partial_t \rangle \langle X, \nabla h \rangle \text{tr}(P_j) + \langle N, \partial_t \rangle \langle X, \nabla h \rangle \langle P_j(\partial_t^\top), \partial_t \rangle - \langle N, \partial_t \rangle \langle P_j X, \nabla h \rangle \right. \\ &\quad \left. - \langle N, \partial_t \rangle \langle X, \partial_t \rangle \langle P_j(\partial_t^\top), \nabla h \rangle \right] \\ &= \left[\langle N, \partial_t \rangle \langle X, \nabla h \rangle \text{tr}(P_j) + \langle N, \partial_t \rangle \langle X, \nabla h \rangle \langle P_j(\partial_t^\top), \partial_t^\top \rangle - \langle N, \partial_t \rangle \langle P_j X, \nabla h \rangle \right. \\ &\quad \left. - \langle N, \partial_t \rangle \langle X, \partial_t^\top \rangle \langle P_j(\partial_t^\top), \nabla h \rangle \right] \\ &= \left[\langle N, \partial_t \rangle \langle X, \nabla h \rangle \text{tr}(P_j) + \langle N, \partial_t \rangle \langle X, \nabla h \rangle \langle P_j(\partial_t^\top), -\nabla h \rangle - \langle N, \partial_t \rangle \langle P_j X, \nabla h \rangle \right. \\ &\quad \left. - \langle N, \partial_t \rangle \langle X, -\nabla h \rangle \langle P_j(\partial_t^\top), \nabla h \rangle \right] \\ &= \left[\langle N, \partial_t \rangle \langle X, \nabla h \rangle \text{tr}(P_j) - \langle N, \partial_t \rangle \langle X, \nabla h \rangle \langle P_j(\partial_t^\top), \nabla h \rangle - \langle N, \partial_t \rangle \langle P_j X, \nabla h \rangle \right. \\ &\quad \left. + \langle N, \partial_t \rangle \langle X, \nabla h \rangle \langle P_j(\partial_t^\top), \nabla h \rangle \right] \\ &= \langle N, \partial_t \rangle \langle X, \nabla h \rangle \text{tr}(P_j) - \langle N, \partial_t \rangle \langle P_j X, \nabla h \rangle, \end{aligned}$$

logo,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \langle \langle \bar{R}(E_i, X) N, P_j E_i \rangle \rangle &= \frac{\kappa}{f^2(h)} \left[\langle N, \partial_t \rangle \langle X, \nabla h \rangle \text{tr}(P_j) - \langle N, \partial_t \rangle \langle P_j X, \nabla h \rangle \right] \\ &\quad - (\log f)''(h) \langle N, \partial_t \rangle \left[\langle X, \nabla h \rangle \text{tr}(P_j) - \langle P_j X, \nabla h \rangle \right] \end{aligned}$$

2. Unicidade de hipersuperfícies tipo-espaço com curvatura média de ordem superior constante em espaços-tempos GRW

e, portanto,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \langle (\bar{R}(E_i, X)N, P_j E_i) \rangle &= \left(\frac{\kappa}{f^2(h)} - (\log f)''(h) \right) \langle N, \partial_t \rangle \langle (N, \partial_t) \langle X, \nabla h \rangle \text{tr}(P_j) \\ &\quad - \langle N, \partial_t \rangle \langle P_j X, \nabla h \rangle, \end{aligned}$$

para todo campo $X \in \mathcal{X}(\Sigma)$. Agora, pelo Lema [1.7.11](#) e utilizando a expressão obtida anteriormente, temos

$$\begin{aligned} \langle \text{div} P_k, \nabla h \rangle &= \sum_{j=0}^{k-1} \sum_{i=1}^n \langle \bar{R}(E_i, A^{k-1-j}(\nabla h))N, P_j E_j \rangle \\ &= \left(\frac{\kappa}{f^2(h)} - (\log f)''(h) \right) \langle N, \partial_t \rangle \sum_{j=0}^{k-1} \left(\text{tr}(P_j) \langle A^{k-1-j}(\nabla h), \nabla h \rangle \right. \\ &\quad \left. - \langle (P_j \circ A^{k-1-j}) \nabla h, \nabla h \rangle \right). \end{aligned} \quad (2.43)$$

Na verdade, em geral, ocorre que para $2 \leq k \leq n$

$$\sum_{j=0}^{k-1} (\text{tr}(P_j) A^{k-1-j} - P_j \circ A^{k-1-j}) = (n-1) P_{k-1}. \quad (2.44)$$

Por mais que tal afirmação não seja tão evidente de se ver, não é difícil prová-la. Para fazermos isso utilizaremos o indução finita em k . Bem, se $k = 2$, então

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^1 (\text{tr}(P_j) A^{k-1-j} - P_j \circ A^{k-1-j}) &= (\text{tr}(P_0)A - P_0 \circ A) + (\text{tr}(P_1)I - P_1 I) \\ &= (c_0 H_0 A - A) + (c_1 H I - P_1) \\ &= (n-1)A + ((n-1) \frac{n!}{(n-1)!} H I - P_1) \\ &= (n-1)A + n(n-1)H I - P_1 \\ &= (n-1)(A + nH I) - P_1 \\ &= (n-1)P_1 - P_1 \\ &= (n-2)P_1. \end{aligned}$$

Suponhamos agora que nossa afirmação seja válida para $k-1 \geq 2$, ou seja,

$$\sum_{j=0}^{k-2} (\text{tr}(P_j) A^{k-2-j} - P_j \circ A^{k-2-j}) = (n - (k-1)) P_{k-2}$$

2. Unicidade de hipersuperfícies tipo-espaço com curvatura média de ordem superior constante em espaços-tempos GRW

logo,

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{k-1} (tr(P_j)A^{k-1-j} - P_j \circ A^{k-1-j}) &= tr(P_k - 1)I - P_{k-1} + \\
&+ \sum_{j=0}^{k-2} (tr(P_j)A^{k-2-j} - P_j \circ A^{k-2-j}) \circ A \\
&= (n - k + 1)P_{k-2} \circ A + c_{k-1}H_{k-1}I \\
&= (n - k + 1) \binom{n}{k-1} H_{k-1}I - P_{k-1} \\
&= (n - k + 1) \left[P_{k-2} \circ A + \binom{n}{k-1} H_{k-1}I \right] - P_{k-1} \\
&= (n - k + 1)P_{k-1} - P_{k-1} \\
&= (n - k + 1 - 1)P_{k-1} \\
&= (n - k)P_{k-1}.
\end{aligned}$$

Estando provada nossa afirmação, aplicando-a na equação (2.43), obtemos,

$$\begin{aligned}
\langle div(P_k), \nabla h \rangle &= \left(\frac{\kappa}{f^2(h)} - (\log f)''(h) \right) \langle N, \partial_t \rangle \sum_{j=0}^{k-1} \left(tr(P_j) \langle A^{k-1-j} \nabla h, \nabla h \rangle + \right. \\
&\quad \left. - \langle (P_j \circ A^{k-1-j}) \nabla h, \nabla h \rangle \right) \\
&= \left(\frac{\kappa}{f^2(h)} - (\log f)''(h) \right) \langle N, \partial_t \rangle \sum_{j=0}^{k-1} \left(tr(P_j) \langle A^{k-1-j} \nabla h + \right. \\
&\quad \left. - (P_j \circ A^{k-1-j}) \nabla h, \nabla h \rangle \right) \\
&= (n - k) \left(\frac{\kappa}{f^2(h)} - (\log f)''(h) \right) \langle N, \partial_t \rangle \langle P_{k-1} \nabla h, \nabla h \rangle \quad (2.45)
\end{aligned}$$

para $2 \leq k \leq n$. Finalmente, substituindo (2.45) em (2.29), obtemos

$$\binom{n}{k} \int_{\Sigma} (f'(h)H_k + \langle N, K \rangle H_{k+1}) d\Sigma = \int_{\Sigma} \left(\frac{\kappa}{f^2(h)} - (\log f)''(h) \right) \langle N, K \rangle \langle P_{k-1} \nabla h, \nabla h \rangle d\Sigma.$$

■

A fim de simplificar as referências a estas fórmulas vistas nessa seção, iremos nos referir as fórmulas do Lema 2.3.1 como primeira e segunda fórmula de Minkowski respectivamente, e a expressão do Teorema 2.3.2 chamaremos de $(k + 1)$ -ésima fórmula de Minkowski.

2.4 Umbilicidade de hipersuperfícies em espaços-tempos RW

Nesta seção, utilizaremos as fórmulas de Minkowski apresentadas anteriormente para estender o Teorema 2.4.4 ([22, Teorema 8]) para o caso de hipersuperfícies imersas em espaços-tempos RW que obedecem a condição de convergência nula que apresentaremos logo nas primeiras definições desta seção.

Definição 2.4.1. *Diremos que um espaço-tempo obedece a Condição de Convergência Nula (CCN) se a curvatura de Ricci é não negativa em direções nulas (ou tipo-luz).*

Evidentemente, por definição, todo espaço-tempo de curvatura seccional constante obedecem a CCN. Perceba que através da equação (1.8) podemos extrair como consequência o seguinte resultado

Proposição 2.4.2. *Um espaço-tempo \overline{M} obedece a condição de convergência nula se, e somente se,*

$$Ric_M \geq (n-1) \sup_I (ff'' - f'^2) \langle, \rangle_M. \quad (2.46)$$

Demonstração. Seja X um campo de vetores tipo-luz definido em \overline{M} . Se \overline{M} obedece a CCN então $\overline{Ric}(X, X) \geq 0$, logo, pela equação (1.8), temos

$$\overline{Ric}(X, X) = Ric_M(X^*, X^*) - (n-1)(\log f)''(h) \langle X, \partial_t \rangle^2 \geq 0.$$

Mas como,

$$\begin{aligned} 0 &= \langle X, X \rangle \\ &= \langle X^* - \langle X, \partial_t \rangle \partial_t, X^* - \langle X, \partial_t \rangle \partial_t \rangle \\ &= \langle X^*, X^* \rangle - \langle X, \partial_t \rangle^2, \end{aligned}$$

então,

$$\langle X^*, X^* \rangle = f^2 \langle X^*, X^* \rangle_M = \langle X, \partial_t \rangle^2.$$

Logo,

$$Ric_M(X^*, X^*) - (n-1)(\log f)'' \langle X^*, X^* \rangle_M \geq 0$$

2. Unicidade de hipersuperfícies tipo-espaço com curvatura média de ordem superior constante em espaços-tempos GRW

o que implica,

$$Ric_M(X^*, X^*) \geq (n-1)(\log f)'' \langle X^*, X^* \rangle_M \Leftrightarrow Ric_M \geq (n-1) \sup_I (ff'' - f'^2) \langle \cdot, \cdot \rangle_M.$$

■

Observação 2.4.3. *Perceba que caso o espaço-tempo GRW seja Einstein, obtemos a igualdade em (2.46) da seguinte maneira*

$$c \langle \cdot, \cdot \rangle_M = \sup_I (ff'' - f'^2) \langle \cdot, \cdot \rangle_M.$$

onde $\overline{Ric} = \bar{c} \langle \cdot, \cdot \rangle$ e $Ric_M = c \langle \cdot, \cdot \rangle_M$.

Em particular, decorre da proposição anterior que um espaço-tempo RW obedece CCN se, e somente se

$$\kappa \geq \sup_I (ff'' - f'^2) \langle \cdot, \cdot \rangle_M \quad (2.47)$$

onde κ denota a curvatura seccional constante da fibra M^n . Por outro lado, não é difícil ver que um espaço-tempo $-I \times_f M^n$ tem constante curvatura seccional $\bar{\kappa}$ se, e somente se, M^n tem uma curvatura seccional constante κ (ou seja, $-I \times_f M^n$ é um espaço-tempo RW) e a função torção f satisfaz as seguintes equações diferenciais

$$\frac{f''}{f} = \bar{\kappa} = \frac{(f')^2 + \kappa}{f^2}$$

(ver [11, Corolário 9.107]). A seguir, enunciaremos o teorema de Montiel [22, Teorema 8], o qual iremos estender fazendo uso do nosso Teorema 2.3.2.

Teorema 2.4.4. *Seja $-I \times_f M^n$ um espaço espacialmente fechado RW com curvatura seccional constante $\bar{\kappa}$, com $n \geq 3$. Então cada hipersuperfície tipo-espaço compacta Σ imersa em $-I \times_f M^n$ com curvatura escalar constante S tal que $S < n(n-1)\bar{\kappa}$ é totalmente umbílica. Além disso, se $\bar{\kappa} \leq 0$, então Σ é um slice contido em $\{t\} \times M^n$ (necessariamente com $f'(t) \neq 0$), e se $\bar{\kappa} > 0$ então Σ é um slice contido em $\{t\} \times M^n$ (necessariamente com $f'(t) \neq 0$) ou uma hiperesfera umbílica redonda em um espaço de Sitter.*

Observe que a condição de que a curvatura escalar S de Σ é constante e menor que $n(n-1)\bar{\kappa}$, no Teorema 2.4.4 é equivalente a equação (1.14), desde que H_2 seja uma constante positiva, pois se H_2 é constante e positiva, temos pela equação (1.14) que

$$0 \leq n(n-1)H_2 = \bar{S} - S + 2\overline{Ric}(N, N).$$

Como \bar{M} e M^n possuem curvatura seccional constante $\bar{\kappa}$, κ respectivamente, e conside-

2. Unicidade de hipersuperfícies tipo-espaço com curvatura média de ordem superior constante em espaços-tempos GRW

rando \overline{Ric} e \overline{S} o tensor de Ricci e a curvatura escalar do ambiente \overline{M} , temos que

$$\overline{S} = \sum_{i=1}^{n+1} \overline{Ric}(E_i, E_i) = (n-3)n\overline{\kappa}$$

e

$$\overline{Ric}(N, N) = n\overline{\kappa},$$

assim,

$$\begin{aligned} 0 &\leq \overline{S} - S + 2\overline{Ric}(N, N) \\ &= (n^2 - 3n)\overline{\kappa} - S + 2n\overline{\kappa} \\ &= n^2\overline{\kappa} - n\overline{\kappa} - S. \end{aligned}$$

e, portanto,

$$S \leq (n-1)\overline{\kappa}. \quad (2.48)$$

O que mostra a equivalência. Por este fato, o Teorema [2.4.4](#) pode ser estendido da seguinte maneira.

Teorema 2.4.5. *Seja \overline{M}^n um espaço-tempo espacialmente fechado RW que obedece à condição de convergência nula, com $n \geq 3$. Então cada hipersuperfície tipo-espaço compacta imersa em $-I \times_f M^n$ com H_2 constante positiva é totalmente umbílica. Além disso, Σ deve ser um slice $\{t_0\} \times M^n$ (necessariamente com $f'(t_0) \neq 0$), a menos no caso em que $-I \times_f M^n$ tem uma curvatura seccional constante positiva e Σ é uma hiperesfera umbílica redonda. Este último caso não pode ocorrer se a desigualdade em [\(2.47\)](#) é estrita.*

Demonstração. Multiplicando a primeira fórmula de Minkowski, Teorema [2.26](#), por $\binom{n}{2}H_2$, temos que

$$\binom{n}{2}H_2 \int_{\Sigma} f'(h)d\Sigma = -\binom{n}{2}H_2 \int_{\Sigma} (\langle N, K \rangle H) d\Sigma,$$

observe que pela terceira fórmula de Minkowski, ou seja, fazendo $k = 2$ no Teorema [2.3.2](#), temos

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Sigma} \left(\frac{\kappa}{f^2(h)} - (\log f)''(h) \right) \langle N, K \rangle \langle P_1 \nabla h, \nabla h \rangle d\Sigma - \binom{n}{2} \int_{\Sigma} f'(h) H_2 \\ &\quad - \int_{\Sigma} \langle N, K \rangle H_3 d\Sigma \\ 0 &= \int_{\Sigma} \left(\binom{n}{2} (H H_2 - H_3) + \left(\frac{\kappa}{f^2(h)} - (\log f)''(h) \right) \langle P_1 \nabla h, \nabla h \rangle \right) \langle N, K \rangle d\Sigma. \end{aligned}$$

2. Unicidade de hipersuperfícies tipo-espaço com curvatura média de ordem superior constante em espaços-tempos GRW

Sendo H_2 constante e positiva, temos pelo Lema [1.7.13](#), que para uma escolha conveniente da aplicação de Gauss N , a transformação de Newton P_1 é positiva definida e $H > 0$, pois, pela Proposição [1.7.12](#), temos $HH_3 \leq H_2^2$, conseqüentemente

$$\begin{aligned} -H_2^2 \leq -HH_3 &\Leftrightarrow H^2H_2 - H_2^2 \leq H^2H_2 - HH_3 \Leftrightarrow H^2H_2 - H_2^2 \leq H(HH_2 - H_3) \\ &\Leftrightarrow 0 \leq \frac{H_2}{H}(H^2 - H_2) \leq HH_2 - H_3 \end{aligned}$$

pela igualdade de Cauchy-Schwarz, com igualdade acontecendo se, e somente se, Σ for totalmente umbílica. Sendo P_1 positivo definido e pela definição de condição de convergência nula [2.4.1](#), temos

$$\left(\frac{\kappa}{f^2(h)} - (\log f)''(h) \right) \langle P_1 \nabla h, \nabla h \rangle \geq 0. \quad (2.49)$$

Sendo assim, desde que $\langle N, K \rangle$ não se anule em Σ , a equação [\(2.49\)](#), implica que $(HH_2 - H_3) = 0$ e

$$\left(\frac{\kappa}{f^2(h)} - (\log f)''(h) \right) \langle P_1 \nabla h, \nabla h \rangle = 0$$

e, portanto, Σ é totalmente umbílica. Pelo fato de P_1 ser positivo definido, temos de [\(2.49\)](#) que em Σ

$$\left(\frac{\kappa}{f^2(h)} - (\log f)''(h) \right) = 0, \quad (2.50)$$

ou

$$\langle P_1 \nabla h, \nabla h \rangle = 0 \Leftrightarrow \nabla h = 0, \quad (2.51)$$

o que nos diz que Σ é um slice.

Veja que, se Σ é um slice $\{t_0\} \times M$, então, necessariamente, $f'(t_0) \neq 0$, já que por hipótese temos que $H_2 > 0$ (lembre que slices com $f'(t_0) = 0$ são totalmente geodésicos). Agora, caso Σ não seja um slice, pelo fato de Σ ser totalmente umbílica, temos que $H_2 = H^2$. Logo, por [\[22, Teorema 5\]](#) (que será enunciado a seguir) sobre classificação de hipersuperfícies, concluímos que o único caso em que Σ não é um slice, ocorre apenas quando \bar{M} é uma hipersfera redonda totalmente umbílica. Caso a igualdade [\(2.4.1\)](#) seja estrita, então [\(2.49\)](#) não pode ocorrer, acarretando que $\langle P_1 \nabla h, \nabla h \rangle = 0$, ou seja, $\nabla h = 0$ e Σ é um slice. ■

2. Unicidade de hipersuperfícies tipo-espaço com curvatura média de ordem superior constante em espaços-tempos GRW

Teorema 2.4.6 (Montiel [22], Teorema 5). *Seja Σ , $n \geq 2$, uma hipersuperfície tipo-espaço compacta imersa de forma totalmente umbílica com curvatura de ordem superior constante em um espaço-tempo M^{n+1} com campo vetorial tipo-tempo conforme fechado obedecendo a condição de convergência nula. Então Σ é uma folha da foliação $\mathcal{F}(X)$; ou M^{n+1} é localmente um espaço-tempo de Sitter e Σ é uma hiperesfera redonda totalmente umbílica; ou localmente M^{n+1} é um produto semi-Riemanniano $\mathbb{R}_1^2 \times Q^{n-1}$ imerso como $\gamma \times I_{Q^{n-1}}$, onde γ é uma reta tipo-espaço no plano de Lorentz \mathbb{R}_1^2 .*

É possível enunciar uma versão do Teorema [2.4.5] para o caso de curvatura média de ordem superior constante, como veremos a seguir.

Teorema 2.4.7. *Seja $-I \times_f M^n$ um espaço espacialmente fechado da RW que obedece à condição de convergência nula, com $n \geq 3$. Suponha que Σ seja uma hipersuperfície tipo-espaço compacta imersa em $-I \times_f M^n$ que está contido em um slab $\Omega(t_1, t_2) \subset -I \times_f M^n$ onde f' não se anula. Se H_k é constante, com $3 \leq k \leq n$ então Σ é totalmente umbílica. Além disso, Σ deve ser um slice $\{t_0\} \times M^n$ (necessariamente com $f'(t_0) \neq 0$), exceto o caso que $-I \times_f M^n$ tem curvatura seccional constante positiva e Σ é uma hiperesfera umbílica redonda. Este último caso não pode ocorrer se a desigualdade em (2.47) é estrita.*

Demonstração. Seja $f' > 0$ em (t_1, t_2) , pelo Lema [2.2.1] e considerando a aplicação de Gauss N apontando para futuro, existe um ponto $p_0 \in \Sigma$, tal que todas as curvaturas principais são negativas, logo a constante $H_k = H_k(p_0)$ é positiva. Então por Caminha [23, Proposição 3.2] temos

$$H \geq H_2^{\frac{1}{2}} \geq \dots \geq H_{k-1}^{\frac{1}{k-1}} \geq H_k^{\frac{1}{k}} > 0 \quad \text{em } \Sigma, \quad (2.52)$$

onde a igualdade acontece apenas em pontos umbílicos. Como $f'(h) > 0$, então

$$f'(h)H_{k-1}^{\frac{1}{k-1}} \geq f'(h)H_k^{\frac{1}{k}} \Leftrightarrow f'(h)H_{k-1} \geq f'(h)H_k^{\frac{k-1}{k}}. \quad (2.53)$$

Pela k -ésima fórmula de Minkowski (ou seja, a fórmula [2.3.2] para $k - 1$), segue-se

$$\int_{\Sigma} (f'(h)H_{k-1} + \langle N, K \rangle H_k) d\Sigma = \int_{\Sigma} \left(\frac{\kappa}{f^2(h)} - (\log f)''(h) \right) \langle N, K \rangle \langle P_{k-2} \nabla h, \nabla h \rangle, \quad (2.54)$$

como $H_k > 0$, o Lema [1.7.14] nos garante que P_{k-2} é positivo definido, além disso, a desigualdade (2.47) nos fornece que $\frac{\kappa}{f^2(h)} - (\log f)''(h) > 0$ e sendo N apontando para futuro a igualdade em (2.54) é menor ou igual a zero, assim

$$\int_{\Sigma} \langle N, K \rangle H_k d\Sigma \leq - \int_{\Sigma} f'(h)H_{k-1} d\Sigma$$

2. Unicidade de hipersuperfícies tipo-espaço com curvatura média de ordem superior constante em espaços-tempos GRW

logo,

$$\begin{aligned} H_k \int_{\Sigma} \langle N, K \rangle d\Sigma &\leq - \int_{\Sigma} f'(h) H_{k-1} d\Sigma \\ &\leq -H_k^{\frac{k-1}{k}} \int_{\Sigma} f'(h) d\Sigma \\ &= H_k^{\frac{k-1}{k}} \int_{\Sigma} \langle N, K \rangle H d\Sigma, \end{aligned}$$

ou seja,

$$0 \leq \int_{\Sigma} (H_k^{\frac{k-1}{k}} \langle N, K \rangle - \langle N, K \rangle H_k) \quad (2.55)$$

$$= \int_{\Sigma} (H_k^{\frac{k-1}{k}} H - H_k) \langle N, K \rangle d\Sigma. \quad (2.56)$$

Dividindo por $H_k^{\frac{k-1}{k}}$, obtemos

$$0 \leq \int_{\Sigma} (H - H_k^{1-\frac{k-1}{k}}) \langle N, K \rangle d\Sigma. \quad (2.57)$$

Porém, veja que $1 - \frac{k-1}{k} = \frac{1}{k}$, então

$$\int_{\Sigma} (H - H_k^{\frac{1}{k}}) \langle N, K \rangle d\Sigma \geq 0. \quad (2.58)$$

Como N é aponta para futuro, por definição, $\langle N, K \rangle < 0$ e pela desigualdade de Cauchy-Schwarz para campos de vetores tipo-tempo, temos

$$|\langle N, K \rangle| \geq |N| |\partial_t| f(h) = f(h) \Rightarrow \langle N, K \rangle \leq -f(h) < 0$$

assim, por (2.52) temos $H - H_k^{\frac{1}{k}} \geq 0$ e por (2.58) segue que $H - H_k^{\frac{1}{k}} \equiv 0$ em Σ e consequentemente, Σ é totalmente umbílica. Pelo fato de H_k ser constante positiva e Σ ser totalmente umbílica, segue que todas as curvaturas médias de ordem superior são constantes, em particular H_2 é constante positiva, e o resultado segue pelo Teorema 2.4.5. ■

É possível, ainda, enunciar uma outra versão do Teorema 2.4.7 para o caso onde $n \geq 4$ e tendo sob hipótese a existência de um ponto elíptico como veremos no próximo resultado.

Teorema 2.4.8. *Seja $-I \times_f M^n$ um espaço-tempo RW espacialmente fechado obedecendo à condição de convergência nula, com $n \geq 4$. Suponha que Σ^n é uma hipersuperfície compacta tipo-espaço imersa em $-I \times_f M^n$ que contém um ponto elíptico. Se H_k for constante, com $3 \leq k \leq n-1$, então Σ é totalmente umbílica. Além disso, Σ deve ser um*

2. Unicidade de hipersuperfícies tipo-espaço com curvatura média de ordem superior constante em espaços-tempos GRW

slice $\{t_0\} \times M^n$ (necessariamente com $f'(t_0) \neq 0$), a menos no caso em que $-I \times_f M^n$ tem curvatura seccional constante positiva e Σ é uma hiperesfera redonda umbílica. O último caso não pode ocorrer se a desigualdade em (2.4.1) for estrita.

Demonstração. De maneira semelhante ao teorema anterior, multipliquemos a primeira fórmula de Minkowski (2.26) pela constante $\binom{n}{k} H_k$ e façamos a subtração pela $(k+1)$ -ésima fórmula de Minkowski (2.3.2), o que nos dá

$$\begin{aligned}
 0 &= \int_{\Sigma} \left(\binom{n}{k} H_k f'(h) + \langle N, K \rangle \binom{n}{k} H_k H - \left[\binom{n}{k} f'(h) H_k + \binom{n}{k} \langle N, K \rangle H_{k+1} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \left(\left(\frac{\kappa}{f^2(h) - (\log f)''(h)} \right) \langle N, K \rangle \langle P_{k-1} \nabla h, \nabla h \rangle \right) \right] \right) d\Sigma \\
 &= \int_{\Sigma} \left[\binom{n}{k} (H_k H - H_{k+1}) + \left(\frac{\kappa}{f^2(h)} - (\log f)''(h) \right) \langle P_{k-1} \nabla h, \nabla h \rangle \right] \langle N, K \rangle d\Sigma.
 \end{aligned} \tag{2.59}$$

Seja p_0 um ponto elíptico de Σ , então, temos que as curvaturas principais em p_0 são negativas, e, portanto, a constante $H_k = H_k(p_0)$ é positiva. Por outro lado, por [16, Teorema 51 e teorema 144] pelo fato de $H_j > 0$ para cada $1 \leq j \leq n$, temos

$$H_{j-1} H_{j+1} \leq H_j^2,$$

onde a igualdade ocorre somente em pontos umbílicos. logo,

$$\frac{H_{j-1} H_{j+1}}{H_j} \leq H_j$$

e conseqüentemente, $\frac{H_{j+1}}{H_j} \leq \frac{H_j}{H_{j-1}}$, ou equivalentemente

$$H \geq \frac{H_2}{H_1} \geq \frac{H_3}{H_2} \geq \dots \geq \frac{H_k}{H_{k-1}} \geq \frac{H_{k+1}}{H_k}, \tag{2.60}$$

ou seja,

$$H H_k - H_{k+1} \geq 0. \tag{2.61}$$

Com igualdade ocorrendo se, e somente se Σ for totalmente umbílica.

Pelo Lema 1.7.14 temos que P_{k-1} é positivo definido em Σ , juntamente com (2.4.1) temos

$$\left(\frac{\kappa}{f^2(h)} (\log f)''(h) \right) \langle P_{k-1} \nabla h, \nabla h \rangle \geq 0 \tag{2.62}$$

Como $\langle N, K \rangle$ não se anula em Σ temos de (2.59) que $(H_k H - H_{k+1}) = 0$, o que nos dá

que Σ é totalmente umbílica. O restante desta demonstração segue como no Teorema [2.4.5](#) ■

2.5 Operador L_k atuando na função $\langle N, K \rangle$

Nesta seção, faremos o estudo do operador L_k atuando na função $\langle N, K \rangle$.

Vimos anteriormente que $\bar{\nabla}_X K = f'(h)X$, e disto, temos

$$X(\langle N, K \rangle) = \langle -AX, K \rangle = -\langle X, A(K^\top) \rangle \quad (2.63)$$

Pois, pela compatibilidade da métrica,

$$\begin{aligned} X(\langle N, K \rangle) &= \langle \bar{\nabla}_X N, K \rangle + \langle N, \bar{\nabla}_X K \rangle \\ &= \langle -AX, K \rangle + \langle N, f'(h)X \rangle \\ &= \langle -A(X), K \rangle = \langle X, -A(K^\top) \rangle. \end{aligned} \quad (2.64)$$

Pela definição de gradiente, temos que

$$X(\langle N, K \rangle) = \langle \nabla(\langle N, K \rangle), X \rangle \Rightarrow \nabla(\langle N, K \rangle) = -A(K^\top) \quad (2.65)$$

e, conseqüentemente,

$$\nabla_X(\nabla\langle N, K \rangle) = -\nabla_X(A(K^\top)) = -(\nabla_X A)(K^\top) - A(\nabla_X K^\top), \quad (2.66)$$

onde $\nabla_X A$ denota a derivada covariante de A . Usando o fato que

$$\nabla_X K^\top = f'(h)X - f(h)\langle N, \partial_t \rangle AX = f'(h)X - \langle N, K \rangle AX$$

e equação de Codazzi ([1.13](#)) em ([2.66](#)), temos que

$$\nabla_X(\nabla\langle N, K \rangle) = -(\nabla_{K^\top} A)(X) - (\bar{R}(X, K^\top)N)^\top - f'(h)AX + \langle N, K \rangle A^2(X). \quad (2.67)$$

Veja que, pela equação de Codazzi

$$(\bar{R}(X, K^\top)N)^\top = (\nabla_X A)(K^\top) - (\nabla_{K^\top} A)(X)$$

logo,

$$(\nabla_X A)(K^\top) = (\bar{R}(X, K^\top)N)^\top + (\nabla_{K^\top} A)(X)$$

2. Unicidade de hipersuperfícies tipo-espaço com curvatura média de ordem superior constante em espaços-tempos GRW

e por (2.3), temos $A(\nabla_X K^\top) = A(f'(h)X - \langle N, K \rangle AX) = f'(h)AX - \langle N, K \rangle A^2 X$.

Substituindo estas equações em (2.66), obtemos

$$\nabla_X(\nabla\langle N, K \rangle) = -(\nabla_{K^\top} A)(X) - (\bar{R}(X, K^\top)N)^\top - f'(h)A(X) + \langle N, K \rangle A^2 X,$$

isto implica que

$$\begin{aligned} L_k(\langle N, K \rangle) &= \text{tr}((\nabla_{K^\top} A) \circ P_k) - \sum_{i=1}^n \bar{R}(E_i, K^\top)N, P_k(E_i) - f'(h)\text{tr}(A \circ P_k) + \\ &+ \langle N, K \rangle \text{tr}(A^2 \circ P_k) \\ &= \binom{n}{k+1} \langle \nabla H_{k+1} K \rangle - \sum_{i=1}^n \langle \bar{R}(E_i, K^\top)N, P_k(E_i) \rangle + f'(h)c_k H_{k+1} + \\ &+ \binom{n}{k+1} \langle N, K \rangle (n H H_{k+1} - (n-k-1)H_{k+2}), \end{aligned} \quad (2.68)$$

onde $\{E_1, \dots, E_n\}$ é um referencial ortonormal local em Σ . Pela Definição 1.7.8

$$\begin{aligned} L_k(\langle N, K \rangle) &= \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{E_i} \nabla\langle N, K \rangle, P_k E_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \langle -(\bar{R}(E_i, K^\top)N)^\top - (\nabla_{K^\top} A)(E_i) - f'(h)A(E_i) + \langle N, K \rangle A^2 E_i, P_k E_i \rangle \\ &= - \sum_{i=1}^n \langle (\nabla_{K^\top} A)(E_i), P_k(E_i) \rangle - \sum_{i=1}^n \langle (\bar{R}(E_i, K^\top)N)^\top, P_k(E_i) \rangle + \\ &- f'(h) \sum_{i=1}^n \langle A(E_i), P_k E_i \rangle + \langle N, K \rangle \sum_{i=1}^n \langle A^2 E_i, P_k E_i \rangle \\ &= \text{tr}(\nabla_{K^\top} A \circ P_k) - \sum_{i=1}^n \langle (\bar{R}(E_i, K^\top)N)^\top, P_k(E_i) \rangle - f'(h)\text{tr}(A \circ P_k) + \\ &+ \langle N, K \rangle \text{tr}(A \circ P_k) \\ &= \binom{n}{k+1} \langle \nabla H_{k+1}, K \rangle - \sum_{i=1}^n \langle (\bar{R}(E_i, K^\top)N)^\top, P_k(E_i) \rangle + f'(h)c_k H_{k+1} + \\ &+ \binom{n}{k+1} \langle N, K \rangle (n H H_{k+1} - (n-k-1)H_{k+2}). \end{aligned} \quad (2.69)$$

Com o intuito de expressarmos a equação (2.69) de uma maneira mais estética, considere a decomposição do campo $K = K^\top - \langle N, K \rangle N$. Isolando a componente K^\top , temos que $\bar{R}(X, K^\top)N$ pode ser escrita da seguinte maneira

$$\begin{aligned} \bar{R}(X, K^\top)N &= \bar{R}(X, K + \langle N, K \rangle N)N \\ &= \bar{R}(X, K)N - \langle N, K \rangle \bar{R}(N, X)N \end{aligned} \quad (2.70)$$

2. Unicidade de hipersuperfícies tipo-espaço com curvatura média de ordem superior constante em espaços-tempos GRW

para todo campo de vetores $X \in \mathcal{X}(\Sigma)$. Como a projeção de K sobre a fibra M^n é o campo nulo (ou seja $K^* = 0$), temos por (2.34) que

$$\begin{aligned}
\overline{R}(X, K)N &= R_M(X^*, K^*)W^* + ((\log f)')^2(\langle X, N \rangle K - \langle K, N \rangle X) + \\
&+ (\log f)''(h)\langle N, \partial_t \rangle(\langle K, \partial_t \rangle X - \langle X, \partial_t \rangle K) + \\
&- (\log f)''(h)(\langle K, \partial_t \rangle \langle X, N \rangle - \langle X, \partial_t \rangle \langle K, N \rangle)\partial_t \\
&= -\langle N, K \rangle((\log f)')^2(h)X + (\log f)''(h)\langle N, \partial_t \rangle(\langle f\partial_t, \partial_t \rangle X - \langle X, \partial_t \rangle f\partial_t) + \\
&- (\log f)''(-\langle X, \partial_t \rangle \langle f\partial_t, N \rangle \partial_t) \\
&= -\langle N, K \rangle(\log f)^2(h) - (\log f)''(h)f(h)\langle N, \partial_t \rangle X + \\
&- (\log f)''(h)f(h)\langle N, \partial_t \rangle \langle X, \partial_t \rangle \partial_t + (\log f)''(h)f(h)\langle N, \partial_t \rangle \langle X, \partial_t \rangle \partial_t \\
&= -\langle N, K \rangle((\log f)')^2(h)X - (\log f)''\langle N, K \rangle X \\
&= \langle N, K \rangle X \left[\frac{f^2(h)}{f^2(h)} - \left(\frac{f''(h)f(h)}{f^2(h)} - \frac{f^2(h)}{f^2} \right) \right],
\end{aligned}$$

cancelando os termos semelhantes, obtemos

$$\overline{R}(X, K)N = \frac{f''(h)}{f(h)}\langle N, K \rangle X,$$

para cada campo de vetores tangentes $X \in \mathcal{X}(\Sigma)$. Sendo assim, podemos reescrever nossa equação (2.70) como segue abaixo

$$\overline{R}(X, K^\top)N = -\langle N, K \rangle \left(\frac{f''(h)}{f(h)}X + \overline{R}(N, X)N \right). \quad (2.71)$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n \langle \overline{R}(E_i, K^\top)N, P_k E_i \rangle &= \sum_{i=1}^n -\langle N, K \rangle \left\langle \frac{f''(h)}{f(h)}E_i + \overline{R}(N, E_i)N, P_k E_i \right\rangle \\
&= -\langle N, K \rangle \left(\sum_{i=1}^n \frac{f''(h)}{f(h)} \langle E_i, P_k E_i \rangle + \sum_{i=1}^n \langle \overline{R}(N, E_i)N, P_k E_i \rangle \right) + \\
&- \langle N, K \rangle \left(\frac{f''(h)}{f(h)} \text{tr}(P_k) + \text{tr}(P_k \circ \overline{R}_N) \right) \\
&= -\langle N, K \rangle \left(\frac{f''(h)}{f(h)} c_k H_k + \text{tr}(P_k \circ \overline{R}_N) \right), \quad (2.72)
\end{aligned}$$

onde $\overline{R}_N : \mathcal{X}(\Sigma) \rightarrow \mathcal{X}(\Sigma)$ é o operador dado por $\overline{R}_N(X) = (\overline{R}(N, X)N)^\top$. Usando (2.72) em (2.69), obtemos o seguinte resultado.

2. Unicidade de hipersuperfícies tipo-espaço com curvatura média de ordem superior constante em espaços-tempos GRW

Lema 2.5.1. *Seja Σ uma hipersuperfície tipo-espaço imersa em um espaço-tempo GRW $-I \times_f M^n$, com aplicação de Gauss N e função de altura h . Então, para cada $k = 0, \dots, n-1$, temos*

$$\begin{aligned} L_k(\langle N, K \rangle) &= \binom{n}{k+1} \langle \nabla H_{k+1}, K \rangle + f'(h) c_k H_{k+1} + \binom{n}{k+1} \langle N, K \rangle (n H_1 H_{k+1} \\ &\quad - (n-k-1) H_{k+2}) + \langle N, K \rangle \left(\text{tr}(P_k \circ \bar{R}_N) + \frac{f''(h)}{f(h)} c_k H_k \right), \end{aligned} \quad (2.73)$$

onde $\bar{R}_N : \mathcal{X}(\Sigma) \rightarrow \mathcal{X}(\Sigma)$ é o operador dado por $\bar{R}_N(X) = (\bar{R}(N, X)N)^\top$.

Algo que podemos observar da expressão (2.73), é que caso $k = 0$, o que iremos obter é justamente o operador laplaciano em Σ (veja (1.24)), além disso

$$\text{tr}(P_0 \circ \bar{R}_N) = \sum_{i=1}^n \langle (\bar{R}(N, E_i)N)^\top, E_i \rangle = \sum_{i=1}^n \langle \bar{R}(N, E_i)N, E_i \rangle = \bar{Ric}(N, N). \quad (2.74)$$

Por outro lado, de (1.8) juntamente com o fato de $\langle N, \partial_t \rangle^2 = 1 + |\nabla h|^2$, temos que

$$\begin{aligned} \bar{Ric}(N, N) &= Ric_M(N^*, N^*) + (n((\log f)')^2(h) + (\log f)''(h)) \langle N, N \rangle + \\ &\quad - (n-1)(\log f)''(h) \langle N, \partial_t \rangle^2 \\ &= Ric_M(N, N) - n((\log f)')^2(h) - (\log f)''(h) - [(n-1)(\log f)''(h)(1 + |\nabla h|^2)] \\ &= Ric_M(N^*, N^*) - n((\log f)')^2(h) - (\log f)''(h) + \\ &\quad - (n-1)(\log f)''(h) - (n-1)(\log f)''(h) |\nabla h|^2 \\ &= Ric_M(N^*, N^*) + \left(\frac{-n f'^2(h) - (f'' f)(h) + f'^2(h) - n(f'' f)(h) + n f'^2(h)}{f^2(h)} \right) + \\ &\quad + \frac{(f'' f)(h) - f'^2(h)}{f^2(h)} - (n-1)(\log f)''(h) |\nabla h|^2 \\ &= Ric_M(N^*, N^*) - \frac{n(f'' f)(h)}{f^2(h)} - (n-1)(\log f)''(h) |\nabla h|^2 \\ &= Ric_M(N^*, N^*) - \frac{n f''(h)}{f(h)} - (n-1)(\log f)''(h) |\nabla h|^2. \end{aligned}$$

Logo,

$$\text{tr}(\bar{R}_N) + n \frac{f''(h)}{f(h)} = Ric(N^*, N^*) - (n-1)(\log f)''(h) |\nabla h|^2. \quad (2.75)$$

E, portanto, para $k = 0$, a expressão (2.73) nos permite enunciar o seguinte resultado

Corolário 2.5.2. *Seja Σ uma hipersuperfície tipo-espaço imersa em um espaço-tempo GRW, com aplicação de Gauss N e a função de altura h . Então*

$$\begin{aligned} \Delta \langle N, K \rangle &= n \langle \nabla H, K \rangle + n f'(h) H + \langle N, K \rangle |A|^2 + \\ &\quad + \langle N, K \rangle (Ric_M(N^*, N^*) - (n-1)(\log f)''(h) |\nabla h|^2). \end{aligned} \quad (2.76)$$

2. Unicidade de hipersuperfícies tipo-espaço com curvatura média de ordem superior constante em espaços-tempos GRW

Demonstração. Para $k = 0$, pelo Lema [2.5.1](#) temos

$$\begin{aligned}
 \Delta(\langle N, K \rangle) &= n\langle \nabla H, K \rangle + nf'(h)H + n\langle N, K \rangle(nHH - (n-1)H_2) + \\
 &+ \langle N, K \rangle \left(tr(\bar{R}_N) + n\frac{f''(h)}{f(h)} \right) \\
 &= n\langle \nabla H, K \rangle + nf'(h)H + n\langle N, K \rangle(nHH - (n-1)H_2) + \\
 &+ \langle N, K \rangle(Ric(N^*, N^*) - (n-1)(\log f)''(h)|\nabla h|^2)
 \end{aligned} \tag{2.77}$$

pela proposição [1.7.7](#), temos que $tr(A^2 \circ P_k) = (nHH_{k+1} - (n-k-1)H_{k+2})$; como $k = 0$ então, $tr(A^2 \circ P_0) = tr(A^2) = n^2H^2 - n(n-1)H_2$. Substituindo em [\(2.77\)](#) obtemos

$$\begin{aligned}
 \Delta\langle N, K \rangle &= n\langle \nabla H, K \rangle + nf'(h)H + \langle N, K \rangle|A|^2 + \\
 &+ \langle N, K \rangle(Ric_M(N^*, N^*) - (n-1)(\log f)''(h)|\nabla h|^2)
 \end{aligned}$$

finalizando a demonstração. ■

Embora já tenhamos aperfeiçoado a expressão [\(2.69\)](#) para [\(2.73\)](#), e melhorado [\(2.73\)](#) para [\(2.76\)](#) para o caso $k = 0$, é possível fazer o mesmo para o caso $k \geq 1$. Pela expressão [\(1.6\)](#), temos que

$$\begin{aligned}
 \bar{R}(N, X)N &= R_M(N^*, X^*)N^* + ((\log f)')^2(h)(\langle N, N \rangle X - \langle X, N \rangle N) + \\
 &+ (\log f)''(h)\langle N, \partial_t \rangle(\langle X, \partial_t \rangle N - \langle N, \partial_t \rangle X) + \\
 &- (\log f)''(h)(\langle X, \partial_t \rangle \langle N, n \rangle - \langle N, \partial_t \rangle \langle X, N \rangle)\partial_t \\
 &= R_M(N^*, X^*)N^* + (\log f)''(h)\langle N, \partial_t \rangle(\langle X, \partial_t \rangle N - \langle N, \partial_t \rangle X) + \\
 &- (\log f)''(h)(-\langle X, \partial_t \rangle \partial_t) - ((\log f)')^2(h)X \\
 &= R_M(N^*, X^*)N^* - (((\log f)')^2(h) + (\log f)''(h)\langle N, \partial_t \rangle^2)X + \\
 &+ (\log f)''(h)\langle X, \partial_t \rangle \partial_t + (\log f)''(h)\langle n, \partial_t \rangle \langle X, \partial_t \rangle N,
 \end{aligned} \tag{2.78}$$

para todo campo de vetores tangentes $X \in \mathcal{X}(\Sigma)$. Como $\nabla h = -\partial_t^\top$ e $\langle N, \partial_t \rangle^2 = 1 + |\nabla h|^2$, vale que $(\bar{R}(N, X)N)^\top = \bar{R}_N(X)$, logo

$$\begin{aligned}
 \bar{R}_N(X) &= (R_M(N^*, X^*)N^*)^\top - [(((\log f)')^2(h) + (\log f)''(h)(1 + |\nabla h|^2))X]^\top + \\
 &+ ((\log f)''(h)\langle X, \partial_t \rangle \partial_t)^\top + ((\log f)''(h)\langle N, \partial_t \rangle \langle X, \partial_t \rangle N)^\top \\
 &= (R_M(N^*, X^*)N^*)^\top - [(((\log f)')^2(h) + (\log f)''(h)(1 + |\nabla h|^2))X] + \\
 &+ ((\log f)''(h)(\langle X, \partial_t^\top \rangle + \langle X, \partial_t^\perp \rangle)\partial_t^\top) \\
 &= (R_M(N^*, X^*)N^*)^\top + (\log f)''(h)\langle X, \nabla h \rangle \nabla h + \\
 &- \left(\frac{f''(h)}{f(h)} + (\log f)''(h)|\nabla h|^2 \right) X.
 \end{aligned} \tag{2.79}$$

2. Unicidade de hipersuperfícies tipo-espaço com curvatura média de ordem superior constante em espaços-tempos GRW

Para que consigamos simplificar a expressão (2.73), precisaremos encontrar uma igualdade mais simples para $\left(tr(P_k \circ \bar{R}_N) + \frac{f''(h)}{f(h)} c_k H_k \right)$, com este intuito iremos calcular $tr(P_k \circ \bar{R}_N)$. Por (2.34) e utilizando o fato que P_k é auto adjunto, procede-se

$$\begin{aligned}
tr(P_k \circ \bar{R}_N) &= \sum_{i=1}^n \langle R_M(N^*, E_i^*) N^*, P_k E_i \rangle + (\log f)''(h) \sum_{i=1}^n \langle E_i, \nabla h \rangle \langle \nabla h, P_k E_i \rangle + \\
&- \left(\frac{f''(h)}{f(h)} + (\log f)''(h) |\nabla h|^2 \right) \sum_{i=1}^n \langle E_i, P_k E_i \rangle \\
&= \sum_{i=1}^n \langle R_M(N^*, E_i^*) N^*, P_k E_i \rangle + (\log f)''(h) \sum_{i=1}^n \langle P_k \nabla h, \langle E_i, \nabla h \rangle E_i \rangle + \\
&- \left(\frac{f''(h)}{f(h)} + (\log f)''(h) |\nabla h|^2 \right) tr(P_k) \\
&= \sum_{i=1}^n \langle R_M(N^*, E_i^*) N^*, P_k E_i \rangle + (\log f)''(h) \langle P_k \nabla h \nabla h \rangle + \\
&- \left(\frac{f''(h)}{f(h)} + (\log f)''(h) |\nabla h|^2 \right) c_k H_k.
\end{aligned}$$

Somando $\frac{f''(h)}{f(h)} c_k H_k$ de ambos os lados, obtemos

$$\begin{aligned}
tr(P_k \circ \bar{R}_N) + c_k H_k &= \sum_{i=1}^n \langle R_M(N^*, E_i^*) N^*, P_k E_i \rangle + (\log f)''(h) \langle P_k \nabla h \nabla h \rangle + \\
&- \frac{f''(h)}{f(h)} c_k H_k + c_k H_k (\log f)''(h) |\nabla h|^2 c_k H_k + \frac{f''(h)}{f(h)} c_k H_k \\
&= \sum_{i=1}^n \langle R_M(N^*, E_i^*) N^*, P_k E_i \rangle + \\
&- (\log f)''(h) (|\nabla h|^2 c_k H_k - \langle P_k \nabla h, \nabla h \rangle), \tag{2.80}
\end{aligned}$$

onde $\{E_1, \dots, E_n\}$ é um referencial ortonormal arbitrário em Σ . Agora, iremos trabalhar em cima de dois casos, o caso em que $n = 2$ e o caso em que $n \geq 3$ e M^n tem curvatura seccional constante. Note que em qualquer um dos casos, temos

$$(R_M(N^*, X^*) N^*)^\top = \kappa \langle N^*, N^* \rangle_M (X^*)^\top - \kappa \langle N^*, X^* \rangle_M (N^*)^\top \tag{2.81}$$

onde κ denota a curvatura gaussiana de M^n (que não é necessariamente constante para $k = 2$, e denota a curvatura seccional constante para o caso $k \geq 3$). Pelo que fizemos anteriormente, advém

$$\begin{aligned}
(R_M(N^*, X^*)N^*)^\top &= \kappa \frac{1}{f^2(h)} |\nabla h|^2 (X + \langle X, \nabla h \rangle \nabla h) + \\
&\quad - \kappa \left(-\frac{1}{f^2(h)} \langle N, \partial_t \rangle \langle X, \nabla h \rangle \right) (-\langle N, \partial_t \rangle \nabla h) \\
&= \frac{\kappa}{f^2(h)} \left(|\nabla h|^2 X + |\nabla h|^2 \langle X, \nabla h \rangle \nabla h - (1 + |\nabla h|^2) \langle X, \nabla h \rangle \nabla h \right) \\
&= \frac{\kappa}{f^2(h)} \left(|\nabla h|^2 X - \langle X, \nabla h \rangle \nabla h \right) \tag{2.82}
\end{aligned}$$

nestas circunstâncias (2.80) é dado por

$$tr(P_k \circ \bar{R}_N) + \frac{f''(h)}{f(h)} c_k H_k = \left(\frac{\kappa}{f^2(h)} - (\log f)''(h) \right) (c_k H_k |\nabla h|^2 - \langle P_k \nabla h, \nabla h \rangle) \tag{2.83}$$

pois,

$$\begin{aligned}
tr(P_k \circ \bar{R}_N) &= \sum_{i=1}^n \left\langle \frac{\kappa}{f^2(h)} \left(|\nabla h|^2 E_i - \langle E_i, \nabla h \rangle \nabla h \right), P_k E_i \right\rangle \\
&= \frac{\kappa}{f^2(h)} \left(|\nabla h|^2 \sum_{i=1}^n \langle P_k E_i, E_i \rangle - \sum_{i=1}^n \langle P_k E_i, \langle E_i, \nabla h \rangle \nabla h \rangle \right) \\
&= \frac{\kappa}{f^2(h)} \left(|\nabla h|^2 c_k H_k - \langle P_k \nabla h, \nabla h \rangle \right)
\end{aligned}$$

a partir disto, substituindo a última igualdade em (2.80) e colocando a expressão entre parênteses em evidência obtemos (2.83), e pelo Lema 2.5.1, juntamente com a última expressão nos permitem apresentar os seguintes resultados

Corolário 2.5.3. *Seja $\psi : \Sigma^2 \longrightarrow -I \times_f M^2$ uma superfície tipo-espaço imersa em um espaço-tempo GRW tridimensional, com aplicação de Gauss N e função de altura h . Então,*

$$\begin{aligned}
L_1(\langle N, K \rangle) &= \langle \nabla H_2, K \rangle + 2f'(h)H_2 + \langle N, K \rangle (2H_1 H_2) \\
&\quad - \langle N, K \rangle \left(\frac{K_M(\pi)}{f^2(h)} - (\log f)''(h) \right) \langle A \nabla h, \nabla h \rangle
\end{aligned}$$

onde $\pi : \Sigma \longrightarrow M^2$ denota a projeção de Σ^2 em M^2 , $\pi = \pi_M \circ \psi$.

2. Unicidade de hipersuperfícies tipo-espaço com curvatura média de ordem superior constante em espaços-tempos GRW

Demonstração. Pelo Lema [2.5.1](#), temos

$$\begin{aligned}
 L_1(\langle N, K \rangle) &= \binom{2}{2} \langle \nabla H_2, K \rangle + f'(h)c_1 H_2 + \binom{2}{2} \langle N, K \rangle (2HH_2 - (2-1-1)H_3) \\
 &+ \langle N, K \rangle + \langle N, K \rangle \left(\text{tr}(P_1 \circ \bar{R}_N) + \frac{f''(h)}{f(h)}c_1 H \right) \\
 &= \langle \nabla H, K \rangle + 2f'(h)H_2 + \langle N, K \rangle \left(2H|\nabla h|^2 - \langle P_1 \nabla h, \nabla h \rangle \right) \mathcal{U} \\
 &+ \langle N, K \rangle 2HH_2
 \end{aligned}$$

onde $\mathcal{U} = \left(\frac{K_M(\pi)}{f^2(h)} - (\log f)''(h) \right)$. Pela Definição [1.7.3](#) para $k = 1$, decorre,

$$\begin{aligned}
 L_1(\langle N, K \rangle) &= \langle \nabla H, K \rangle + 2f'(h)H_2 + \langle N, K \rangle \left(2H|\nabla h|^2 - \langle 2H\nabla h + A\nabla h, \nabla h \rangle \right) \mathcal{U} \\
 &+ \langle N, K \rangle 2HH_2 \\
 &= \langle \nabla H, K \rangle + \langle N, K \rangle \left(2H|\nabla h|^2 - 2H\langle \nabla h, \nabla h \rangle - \langle A\nabla h, \nabla h \rangle \right) \mathcal{U} \\
 &+ \langle N, K \rangle 2HH_2 + 2f'(h)H_2 \\
 &= \langle \nabla H, K \rangle + 2f'(h)H_2 + \langle N, K \rangle \left(\frac{K_M(\pi)}{f^2(h)} - (\log f)''(h) \right) \langle A\nabla h, \nabla h \rangle \\
 &+ \langle N, K \rangle 2HH_2
 \end{aligned}$$

■

Corolário 2.5.4. *Seja Σ uma hipersuperfície tipo-espaço imersa em um espaço-tempo RW com fibra Riemanniana M^n de curvatura seccional constante κ , e seja N e h a aplicação de Gauss e função de altura, respectivamente. Então, para cada $k = 0, \dots, n-1$ temos*

$$\begin{aligned}
 L_k(\langle N, K \rangle) &= \binom{n}{k+1} \langle \nabla H_{k+1}, K \rangle + f'(h)c_k H_{k+1} \\
 &+ \binom{n}{k+1} \langle N, K \rangle (nH_1 H_{k+1} - (n-k-1)H_{k+2}) \\
 &+ \langle N, K \rangle \left(\frac{\kappa}{f^2(h)} - (\log f)''(h) \right) (c_k H_k |\nabla h|^2 - \langle P_k \nabla h, \nabla h \rangle)
 \end{aligned}$$

Demonstração. Basta substituir [\(2.83\)](#) em [\(2.73\)](#). ■

Ainda com a intenção de melhorarmos a expressão [\(2.73\)](#), iremos buscar uma simplificação do somatório em [\(2.80\)](#). Para isso, consideraremos um referencial ortonormal em Σ que diagonaliza o operador A . Vale ressaltar que tal referencial nem sempre existe. Por este motivo, trabalharemos em um conjunto $\Sigma_0 \subset \Sigma$ tal que, Σ_0 é um conjunto de pontos, nos quais as curvaturas principais distintas são localmente constante, além disso Σ_0 é um conjunto aberto denso de Σ [[11](#), Parágrafo 16.10]. Feito estas considerações, para todo

2. Unicidade de hipersuperfícies tipo-espaço com curvatura média de ordem superior constante em espaços-tempos GRW

$p_0 \in \Sigma_0$ existe um referencial ortonormal $\{E_1, \dots, E_n\}$ que diagonaliza o operador A , e consequentemente, diagonaliza o operador P_k , ou seja, $A(E_i) = \kappa_i E_i$ e $P_k E_i = \mu_{i,k} E_i$.

Considere $K_M(N^* \wedge E_i^*)$ a curvatura seccional constante em M^n do 2-plano gerado por E_i^* e N^* . Veja que

$$\begin{aligned} \langle R_M(N^*, E_i^*)N^*, P_k E_i \rangle &= \mu_{i,k} \langle R_M(N^* E_i^*)N^*, E_i \rangle \\ &= \mu_{i,k} \langle R_M(N^*, E_i^*)N^*, E_i - \langle E_i, \partial_t \rangle \partial_t \rangle \\ &= \mu_{i,k} \langle R_M(N^*, E_i^*)N^*, E_i^* \rangle \\ &= \mu_{i,k} f^2(h) \langle R_M(N^*, E_i^*)N^*, E_i^* \rangle_M \\ &= \mu_{i,k} f^2(h) K_M(N^* \wedge E_i^*) |N^* \wedge E_i^*|_M^2 \end{aligned}$$

mas,

$$|N^* \wedge E_i^*|^2 = f^4(h) |N^* \wedge E_i^*|_M^2 \Leftrightarrow \frac{1}{f^2(h)} = f^2(h) |N^* \wedge E_i^*|^2.$$

Portanto

$$\langle R_M(N^*, E_i^*)N^*, P_k E_i \rangle = \frac{\mu_{i,k}}{f^2(h)} K_M(N^* \wedge E_i^*) |N^* \wedge E_i^*|^2. \quad (2.84)$$

Então temos o seguinte corolário.

Corolário 2.5.5. *Seja Σ uma hipersuperfície tipo-espaço imersa em um espaço-tempo GRW com aplicação de Gauss N e a função de altura h . Então, para cada $k = 0, \dots, n-1$, temos*

$$\begin{aligned} L_k(\langle N, K \rangle) &= \binom{n}{k+1} \langle \nabla H_{k+1}, K \rangle + f'(h) c_k H_{k+1} + \binom{n}{k+1} \langle N, K \rangle (n H_1 H_{k+1} \\ &\quad - (n-k-1) H_{k+2}) + \frac{\langle N, K \rangle}{f^2(h)} \sum_{i=1}^n \mu_{i,k} K_M(N^* \wedge E_i^*) |N^* \wedge E_i^*|^2 \\ &\quad - \langle N, K \rangle (\log f)''(h) (c_k H_k |\nabla h|^2 - \langle P_k \nabla h, \nabla h \rangle). \end{aligned}$$

Observação 2.5.6. *Pelo fato de Σ_0 ser denso em Σ , para todo $p \in \Sigma$, existe uma sequência de pontos $p_n \in \Sigma_0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = p$. Pelo fato do operador L_k ser composto por funções contínuas temos que $\lim_{n \rightarrow \infty} L_k(\langle N, K \rangle)(p_n) = L_k(\langle N, K \rangle)(p)$, o que garante a extensão de Σ_0 a Σ .*

2.6 Umbilicidade de hipersuperfícies em espaços-tempos GRW

Quando $k = 0$, nossas fórmulas para o operador $L_0 = \Delta$ atuando nas funções $g(h)$ e $\langle N, K \rangle$ nos permitem obter novamente o resultado de unicidade dado por Montiel em [22].

2. Unicidade de hipersuperfícies tipo-espaço com curvatura média de ordem superior constante em espaços-tempos GRW

Teorema 6] para hipersuperfícies com curvatura média constante.

Teorema 2.6.1. *Seja $-I \times_f M^n$ um espaço-tempo GRW espacialmente fechado obedecendo à condição de convergência nula, ou seja, satisfazendo*

$$Ric_M \geq (n-1) \sup_I (ff'' - f'^2) \langle \cdot, \cdot \rangle_M, \quad (2.85)$$

onde Ric_M e $\langle \cdot, \cdot \rangle_M$ são respectivamente os tensores de Ricci e métrica da variedade Riemanniana compacta M^n . Então, as únicas hipersuperfícies compactas imersas em $-I \times_f M^n$ com curvatura média constante são os slices $\{t\} \times M^n$, $t \in I$, exceto o caso em que $-I \times_f M^n$ seja isométrico ao espaço-tempo de Sitter em uma vizinhança de Σ , que deve ser uma hiperesfera redonda umbílica. O último caso não pode ocorrer se assumirmos que a desigualdade em (2.85) é estrita.

Demonstração. Seja N a aplicação de Gauss em Σ apontando para futuro e consideremos a função $\phi = Hg(h) + \langle N, K \rangle \in C^\infty(\Sigma)$. Sendo H constante, temos pelos lemas 2.1.5 e 2.5.1 que

$$\begin{aligned} \Delta\phi &= \Delta(H(g(h))) + \langle N, K \rangle \\ &= \Delta(H(g(h))) + \Delta(\langle N, K \rangle) \\ &= H[-n(f'(h) + \langle N, K \rangle H)] + [n\langle \nabla h, K \rangle n f'(h) H + \langle N, K \rangle |A|^2 \\ &\quad + \langle N, K \rangle (Ric_M(N^*, N^*) - (n-1)(\log f)''(h) |\nabla h|^2)] \\ &= \langle N, K \rangle (|A|^2 - nH^2 + Ric_M(N^*, N^*) - (n-1)(\log f)''(h) |\nabla h|^2) \end{aligned} \quad (2.86)$$

pois como H é constante $\nabla H = 0$. Observe que pela desigualdade de Cauchy-Schwarz $|A|^2 - nH^2 \geq 0$ em Σ , com a igualdade acontecendo apenas em pontos umbílicos. Além disso, por (2.85) e (2.38)

$$Ric_M(N^*, N^*) - (n-1)(\log f)''(h) |\nabla h|^2 \geq 0. \quad (2.87)$$

Sendo N apontando para futuro, temos que $\langle N, K \rangle < 0$ em Σ , e juntamente com (2.86) obtemos que ϕ é super-harmônica, mas pelo fato de Σ ser compacta temos que ϕ deve ser constante. Consequentemente $\Delta\phi = 0$ e $|A|^2 - nH^2$ se anula em Σ o que nos dá que Σ totalmente umbílica e

$$Ric_M(N^*, N^*) - (n-1)(\log f)''(h) |\nabla h|^2 = 0, \text{ em } \Sigma. \quad (2.88)$$

Se a desigualdade em (2.85) é estrita, então para cada $p \in \Sigma$, isso é equivalente a $N^*(p) = 0$

2. Unicidade de hipersuperfícies tipo-espaço com curvatura média de ordem superior constante em espaços-tempos GRW

o que implica $|\nabla h| = 0$, ou seja, h é constante e, portanto, Σ é um slice. Para o caso que Σ , não é um slice, é totalmente umbílica e tem curvatura média constante em \overline{M} , por [22, Teorema 5], o único caso que isso ocorre, acontece se, e somente se, \overline{M} for localmente um espaço de Sitter e Σ for uma hiperesfera redonda umbílica. ■

Fazendo uso da observação 2.4.3, podemos ainda extrair um resultado do teorema anterior que não descarta o fato de Σ ser uma hiperesfera redonda umbílica, para isso, basta considerarmos que o espaço ambiente GRW é Einstein.

Corolário 2.6.2. *Seja $-I \times_f M^n$ um espaço-tempo GRW, Einstein com $\overline{Ric} = \bar{c}\langle, \rangle$, espacialmente fechado e que obedecendo à condição de convergência nula, ou seja, satisfaz*

$$c\langle, \rangle_M = (n - 1) \sup_I (f f'' - f'^2) \langle, \rangle_M, \quad (2.89)$$

onde $Ric_M = c\langle, \rangle_M$ é o tensor de Ricci da variedade Riemanniana compacta M^n . Então, as únicas hipersuperfícies compactas imersas em $-I \times_f M^n$ com curvatura média constante são os slices $\{t\} \times M^n$, $t \in I$, exceto o caso em que $-I \times_f M^n$ seja isométrico ao espaço-tempo de Sitter em uma vizinhança de Σ , que deve ser uma hiperesfera redonda umbílica.

O nosso próximo passo é de alguma forma estender o Teorema 2.6.1 para o caso hipersuperfícies com curvatura média de ordem superior constante. Para isso, utilizaremos nossas fórmulas para o operador L_k atuando em $g(h)$ e $\langle N, K \rangle$. O que faremos a seguir é estender o Teorema 2.4.7 para o caso de espaços-tempos GRW. Em vez de usarmos a condição de convergência nula, iremos supor que \overline{M} satisfaz a condição de convergência nula forte (CCNF), ou seja,

$$K_M \geq \sup_I (f f'' - f'^2). \quad (2.90)$$

Teorema 2.6.3. *Seja $-I \times_f M^n$ um espaço-tempo GRW espacialmente fechado obedecendo à condição de convergência nula forte, com $n \geq 3$. Suponha que Σ é uma hipersuperfície compacta tipo-espaço imersa em $-I \times_f M^n$ que está contida em um slab $\Omega(t_1, t_2)$ em que f' não se anula. Se H_k for constante, com $2 \leq k \leq n$, então Σ é totalmente umbílica. Além disso, Σ deve ser um slice $\{t_0\} \times M^n$ (necessariamente com $f'(t_0) \neq 0$), a menos no caso em que $-I \times_f M^n$ tem curvatura seccional constante positiva e Σ é uma hiperesfera redonda umbílica. O último caso não pode ocorrer se assumirmos que a desigualdade em (2.90) é estrita.*

Demonstração. Sem perda de generalidade, suponhamos que $f'(h) > 0$ em Σ escolhamos a aplicação de Gauss N apontando para futuro. Pelo Lema 2.2.1 existe um ponto $p_0 \in \Sigma$ onde todas as curvaturas principais são negativas. Sendo H_k constante e positiva,

2. Unicidade de hipersuperfícies tipo-espaço com curvatura média de ordem superior constante em espaços-tempos GRW

considere a função $\varphi = H_k^{1/k}g(h) + \langle N, K \rangle \in C^\infty(\Sigma)$, logo, pelos Lemas 2.1.5 e 2.85, temos que

$$\begin{aligned}
L_{k-1}(\varphi) &= L_{k-1}(H_k^{1/k}g(h)) + L_{k-1}(\langle N, K \rangle) \\
&= [-H_k^{1/k}c_{k-1}(f'(h)H_{k-1} + \langle N, K \rangle H_k)] + \binom{n}{k} \langle \nabla H_k, K \rangle + \binom{n}{k} \langle \nabla H, K \rangle \\
&+ f'(h)c_{k-1}H_k + \binom{n}{k} \langle N, K \rangle (nHH_k - (n-k)H_{k+1}) \\
&+ \frac{\langle N, K \rangle}{f^2(h)} \sum_{i=1}^n \mu_{i,k-1} K_M(N^*, E_i^*) |N^* \wedge E_i^*|^2 \\
&- \langle N, K \rangle (\log f)''(h) (c_{k-1}H_{k-1} |\nabla h|^2 - \langle P_{k-1} \nabla h, \nabla h \rangle) \\
&= \left[-H_k^{1/k} k \binom{n}{k} (f'(h)H_{k-1} + \langle N, K \rangle H_k) \right] + \binom{n}{k} k f'(h) H_k \\
&+ \binom{n}{k} \langle N, K \rangle (nHH_k - (n-k)H_{k+1}) + \langle N, K \rangle \Theta \\
&= -k \binom{n}{k} f'(h) H_k^{1/k} H_{k-1} - k \binom{n}{k} \langle N, K \rangle H_k^{\frac{k+1}{k}} + k \binom{n}{k} f'(h) H_k \\
&+ \binom{n}{k} (nHH_k - (n-k)H_{k+1}) + \langle N, K \rangle \Theta
\end{aligned}$$

logo,

$$\begin{aligned}
L_{k-1}(\varphi) &= k \binom{n}{k} (H_k - H_k^{1/k} H_{k-1}) f'(h) + \binom{n}{k} \langle N, K \rangle (nHH_k - (n-k)H_{k+1} - kH_k^{\frac{k+1}{k}}) \\
&+ \langle N, K \rangle \Theta, \tag{2.91}
\end{aligned}$$

onde

$$\Theta = \frac{1}{f^2(h)} \sum_{i=1}^n \mu_{i,k-1} K_M(N^* \wedge E_i^*) |N^* \wedge E_i^*|^2 - (\log f)''(h) (c_{k-1}H_{k-1} |\nabla h|^2 - \langle P_{k-1} \nabla h, \nabla h \rangle)$$

e $P_{k-1}E_i = \mu_{i,k-1}E_i$ para cada $i = 1, \dots, n$. Como Σ possui um ponto elíptico, pelas provas dos teoremas 2.4.7 e 2.4.8 sabemos que as desigualdades $H \geq \dots \geq H_k^{1/k}$ e $HH_k - H_{k+1} \geq 0$ são válidas para Σ para todo k . Por (2.52)

$$H_k - H_k^{1/k} H_{k-1} = H_k^{1/k} (H_k^{\frac{k-1}{k}} - H_{k-1}) \leq 0 \tag{2.92}$$

em Σ , com igualdade ocorrendo se, e somente se Σ totalmente umbílica. Utilizando (2.61), temos também, que

$$nHH_k - (n-k)H_{k+1} - kH_k^{\frac{k+1}{k}} \geq kH_k(H - H_k^{1/k}) \geq 0. \tag{2.93}$$

2. Unicidade de hipersuperfícies tipo-espaço com curvatura média de ordem superior constante em espaços-tempos GRW

Pelos Lemas [1.7.13](#) (para $k = 2$) e [1.7.14](#) (para $k \geq 3$), temos que operador L_{k-1} é elíptico, ou seja, os auto valores associados ao operador P_{k-1} são positivos em Σ . E de [\(2.90\)](#), temos

$$\mu_{i,k-1}K_M(N^* \wedge E_i^*)|N^* \wedge E_i^*|^2 \geq \mu_{i,k-1}\alpha|N^* \wedge E_i^*|^2 \quad (2.94)$$

para cada $i = 1, \dots, n$, onde $\alpha = \sup_I (ff'' - f'^2)$. Não é difícil ver que

$$|N^* \wedge E_i^*|^2 = |\nabla h|^2 - \langle E_i, \nabla h \rangle^2. \quad (2.95)$$

Para visualizar isso, considere as decomposições

$$N = N^* - \langle N, \partial_t \rangle \partial_t, \quad E_i = E_i^* - \langle E_i, \partial_t \rangle \partial_t, \quad \text{e} \quad \partial_t = -\nabla h - \langle N, \partial_t \rangle N.$$

Lembrando que

$$|N^* \wedge E_i^*|^2 = |N^*|^2|E_i^*|^2 - \langle N^*, E_i^* \rangle^2$$

observe o seguinte,

$$\begin{aligned} |N^*|^2 &= \langle N^*, N^* \rangle \\ &= \langle N + \langle N, \partial_t \rangle \partial_t, N + \langle N, \partial_t \rangle \partial_t \rangle \\ &= \langle N, N \rangle + \langle N, \partial_t \rangle^2 + \langle N, \partial_t \rangle - \langle N, \partial_t \rangle \\ &= -1 + \langle N, \partial_t \rangle^2 \\ &= |\nabla h|^2, \end{aligned}$$

analogamente

$$\begin{aligned} |E_i^*|^2 &= \langle E_i^*, E_i^* \rangle \\ &= \langle E_i, E_i \rangle + \langle E_i, \partial_t \rangle^2 + \langle E_i, \partial_t \rangle^2 - \langle E_i, \partial_t \rangle^2 \\ &= 1 + \langle E_i, \partial_t \rangle^2. \end{aligned}$$

Agora, calculando a métrica do ambiente em $\langle N^*, E_i^* \rangle$, temos

$$\begin{aligned} \langle N^*, E_i^* \rangle &= \langle N + \langle N, \partial_t \rangle \partial_t, E_i + \langle E_i, \partial_t \rangle \partial_t \rangle \\ &= \langle N, E_i \rangle + \langle E_i, \partial_t \rangle \langle N, \partial_t \rangle + \langle E_i, \partial_t \rangle \langle N, \partial_t \rangle - \langle N, \partial_t \rangle \langle E_i, \partial_t \rangle \\ &= \langle E_i, \partial_t \rangle \langle N, \partial_t \rangle \\ &= \langle E_i, -\nabla h \rangle \langle N, \partial_t \rangle, \end{aligned}$$

2. Unicidade de hipersuperfícies tipo-espaço com curvatura média de ordem superior constante em espaços-tempos GRW

ou seja,

$$\langle N^*, E_i^* \rangle^2 = \langle E_i, \nabla h \rangle^2 \langle N, \partial_t \rangle^2 = \langle E_i, \nabla h \rangle^2 (1 + |\nabla h|^2)$$

e, conseqüentemente

$$\begin{aligned} |N^* \wedge E_i^*|^2 &= |\nabla h|^2 (1 + \langle E_i, \partial_t \rangle^2) - \langle E_i, \nabla h \rangle^2 (1 + |\nabla h|^2) \\ &= |\nabla h|^2 + |\nabla h|^2 \langle E_i, \partial_t \rangle^2 - \langle E_i, \nabla h \rangle^2 - |\nabla h|^2 \langle E_i, \nabla h \rangle \\ &= |\nabla h|^2 - \langle E_i, \nabla h \rangle^2. \end{aligned}$$

Sendo assim, (2.95) implica que

$$\sum_{i=1}^n \mu_{i,k-1} K_M(N^* \wedge E_i^*) |N \wedge E_i^*|^2 \geq \alpha \left(\sum_{i=1}^n \mu_{i,k-1} |\nabla h|^2 - \mu_{i,k-1} \langle E_i, \nabla h \rangle^2 \right),$$

então, considerando $\Pi = \sum_{i=1}^n \mu_{i,k-1} |\nabla h|^2 - \mu_{i,k-1} \langle E_i, \nabla h \rangle^2$, segue-se

$$\begin{aligned} \alpha \Pi &= \alpha \left(\text{tr}(P_{k-1}) |\nabla h|^2 - \sum_{i=1}^n \langle P_{k-1} E_i, E_i \rangle \langle E_i, \nabla h \rangle \langle E_i, \nabla h \rangle \right) \\ &= \alpha \left(\text{tr}(P_{k-1}) |\nabla h|^2 - \sum_{i=1}^n \langle P_{k-1} E_i, \langle E_i, \nabla h \rangle E_i \rangle \langle E_i, \nabla h \rangle \right) \\ &= \alpha \left(\text{tr}(P_{k-1}) |\nabla h|^2 - \sum_{i=1}^n \langle P_{k-1} (\langle E_i, \nabla h \rangle E_i), \langle E_i, \nabla h \rangle E_i \rangle \right) \\ &= \alpha (\text{tr}(P_{k-1}) |\nabla h|^2 - \langle P_{k-1}(\nabla h), \nabla h \rangle) \\ &= \alpha (c_{k-1} H_{k-1} |\nabla h|^2 - \langle P_{k-1}(\nabla h), \nabla h \rangle). \end{aligned}$$

Logo,

$$\Theta \geq \left(\frac{\alpha}{f^2(h)} - (\log f)''(h) \right) (c_{k-1} H_{k-1} |\nabla h|^2 - \langle P_{k-1}(\nabla h), \nabla h \rangle). \quad (2.96)$$

Então, por (2.92), (2.93) e (2.96), como $f'(h) > 0$ e $\langle N, K \rangle < 0$ por consequência $L_{k-1}\varphi \leq 0$, e como L_{k-1} é elíptico em Σ que é compacta, temos pelo princípio do máximo que φ é constante. Portanto, $L_{k-1}\varphi = 0$, e os três termos em (2.91) se anulam em Σ . Em particular, (2.92) é uma igualdade e Σ é uma hipersuperfície totalmente umbílica. Como H_k é uma constante positiva e Σ é totalmente umbílica, temos que todas as curvaturas médias de ordem superior são constantes. Em particular, H é uma constante positiva e o resultado segue pelo Teorema 2.6.1. ■

Capítulo 3

Curvatura escalar de hipersuperfícies tipo-espaço em Espaços-tempos GRW

Neste capítulo, faremos o estudo a respeito da curvatura escalar de hipersuperfícies tipo-espaço imersas no espaço-tempo GRW, onde utilizaremos algumas ferramentas que foram deduzidas no capítulo anterior, mais precisamente as que envolvem o operador L_k . Os resultados aqui apresentados foram baseados no trabalho de Juan A. Aledo e Rafael M. Rubio [3].

3.1 Convenções

Seja $\overline{M} = -I \times_f M$ temporalmente orientada, neste capítulo, diferentemente do caso anterior, iremos tomar para cada hipersuperfície tipo-espaço Σ em \overline{M} , um único campo vetorial tipo-tempo $N \in \mathcal{X}^\perp(\Sigma)$ globalmente definido em Σ com a mesma orientação temporal que $-\partial_t$, ou seja, tal que $-\langle N, \partial_t \rangle < 0$. Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos que $\langle N, \partial_t \rangle \geq 1$, onde a igualdade ocorre em um ponto $p \in \Sigma$ se, e somente se, $N = -\partial_t$.

Definição 3.1.1. *Para uma hipersuperfície tipo-espaço $\psi : \Sigma \rightarrow \overline{M}$ com aplicação de Gauss N , o ângulo hiperbólico ϕ , em qualquer ponto $p \in \Sigma$ entre os vetores unitários N e ∂_t é dado por $\langle N, \partial_t \rangle = \cosh(\phi)$. Iremos nos referir a ϕ como função ângulo hiperbólico em Σ .*

Definição 3.1.2. *Uma hipersuperfície tipo-espaço com $H = 0$ é chamada hipersuperfície máxima.*

Definição 3.1.3. *O operador forma de um slice $h = t_0$ é dado por $A = \frac{f'(t_0)}{f(t_0)}I$ e sua curvatura média H é dada por $-\frac{f'(t_0)}{f(t_0)}$.*

Observação 3.1.4. *Pela definição anterior, um slice tipo-espaço é máxima se, e somente se, $f'(t_0) = 0$ (e, portanto, totalmente geodésico).*

Seja $\psi : \Sigma \rightarrow \bar{M}$ uma hipersuperfície tipo-espaço em um espaço-tempo GRW $\bar{M} = -I \times_f M$. O tensor curvatura \bar{R} de \bar{M} pode ser escrito em termos do tensor curvatura R de Σ e o operador forma A de acordo com a equação de Gauss

$$R(X, Y)Z = (\bar{R}(X, Y)Z)^\top - \langle AX, Z \rangle AY + \langle AY, Z \rangle AX; \quad X, Y, Z \in \mathcal{X}(\Sigma), \quad (3.1)$$

onde $(\bar{R}(X, Y)Z)^\top$ denota a parte tangente de $\bar{R}(X, Y)Z = \bar{\nabla}_{[X, Y]}Z - [\bar{\nabla}_X, \bar{\nabla}_Y]Z$. Logo de (3.1) temos que,

$$Ric(X, Y) = \bar{Ric}(X, Y) + \langle \bar{Ric}(X, N)Y, N \rangle - tr(A)\langle AX, Y \rangle + \langle AX, AY \rangle. \quad (3.2)$$

Para $X, Y \in \mathcal{X}(\Sigma)$. O que nos mostra

$$S = tr(Ric) = \bar{S} + 2Ric(N, N) + tr(A^2) - n^2H^2, \quad (3.3)$$

onde \bar{S} e S representam a curvatura escalar de \bar{M} e Σ respectivamente .

Observe que, como $\langle N, N \rangle = \langle \partial_t, \partial_t \rangle = -1$ e

$$\begin{aligned} |\nabla h|^2 &= \langle N^*, N^* \rangle \\ &= -1 + \langle \partial_t, N \rangle^2 \\ &= -1 + \cosh(\phi)^2 \\ &= -1 + \sinh(\phi)^2 + 1 \\ &= \sinh(\phi)^2. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Por (1.8), temos,

$$\bar{Ric}(N, N) = Ric_M(N^*, N^*) - (n-1)\frac{f''}{f}|\partial_t^\top|^2 + (n-1)\frac{f'^2}{f^2}|\partial_t^\top|^2 - n\frac{f''}{f}, \quad (3.5)$$

e como $\bar{S} = tr(\bar{Ric}) = \frac{S_M}{f^2} + 2n\frac{f''}{f} + n(n-1)\frac{f'^2}{f^2}$ (decorre de um processo similar feito para a fórmula (1.14), veja também (1.5)), pela expressão para $\bar{Ric}(N, N)$, obtemos o seguinte resultado.

Lema 3.1.5. *Seja $\psi : \Sigma \longrightarrow \overline{M}$ uma hipersuperfície tipo-espaço no espaço-tempo GRW \overline{M} . Então, a curvatura escalar de Σ é dada por*

$$S = \frac{S_M \circ \pi_M}{f^2} + 2Ric_M(N^*, N^*) + n(n-1) \left(\frac{f'^2}{f^2} - H^2 \right) - 2(n-1)(\log f)'' |\partial_t^\top|^2 + tr(A^2) - nH^2.$$

Demonstração. Colocando $-(n-1)|\partial_t^\top|^2$ em evidência em (3.5), obtemos

$$\overline{Ric}(N, N) = Ric_M(N^*, N^*) - (n-1)(\log f)'' |\partial_t^\top|^2 - n \frac{f''}{f}$$

Como $S = \overline{S} + 2\overline{Ric}(N, N) + tr(A^2) - n^2 H^2$ temos

$$\begin{aligned} S &= \frac{S_M}{f^2} + 2n \frac{f''}{f} + n(n-1) \frac{f'^2}{f^2} + 2Ric_M(N^*, N^*) - 2(n-1)(\log f)'' |\partial_t^\top|^2 - 2n \frac{f''}{f} \\ &+ tr(A^2) - n^2 H^2 \\ &= \frac{S_M}{f^2} + n(n-1) \frac{f'^2}{f^2} + 2Ric_M(N^*, N^*) - 2(n-1)(\log f)'' |\partial_t^\top|^2 + tr(A^2) - n^2 H^2. \end{aligned}$$

Somando e subtraindo nH^2

$$\begin{aligned} S &= \frac{S_M}{f^2} + 2Ric_M(N^*, N^*) + n(n-1) \frac{f'^2}{f^2} - 2(n-1)(\log f)'' |\partial_t^\top|^2 + tr(A^2) - n^2 H^2 \\ &+ nH^2 - nH^2 \\ &= \frac{S_M}{f^2} + 2Ric_M(N^*, N^*) + n(n-1) \left(\frac{f'^2}{f^2} - H^2 \right) - 2(n-1)(\log f)'' |\partial_t^\top|^2 \\ &+ tr(A^2) - nH^2. \end{aligned}$$

■

Considere em Σ a função $\mathcal{L} : \Sigma \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\mathcal{L} = \overline{g}_p(K_p, N_p) + H(p)g(h(p))$$

onde $\overline{g} = \langle, \rangle$, e $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ é tal que $g' = f$. Então, temos o seguinte lema.

Lema 3.1.6. *Seja $\psi : \Sigma \longrightarrow \overline{M}$ uma hipersuperfície de curvatura média constante tipo-espaço em um espaço-tempo GRW. Se Σ é totalmente umbílica, então $\nabla \mathcal{L}$ é identicamente nulo.*

Demonstração. Como vimos anteriormente, $\nabla h = -\partial_t^\top$, onde $h = \pi_I \circ \psi$, e como $\overline{\nabla}_X K = f'(\pi_I)X$, temos que $\nabla \langle N, K \rangle = -AK^\top$. Como Σ é totalmente umbílica e tem curvatura média constante, temos que

$$\begin{aligned}
 \nabla \mathcal{L} &= \nabla \langle K, N \rangle + H \nabla G(h) \\
 &= -AK^\top + HG'(h) \nabla h \\
 &= fH\partial_t^\top - fH\partial_t^\top \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

■

Ao longo desta seção, iremos assumir que Σ tem curvatura média constante. Seja ∇ a conexão de Levi-Civita da métrica $g = \langle \cdot, \cdot \rangle_\Sigma$, lembre que as fórmulas de da Gauss e Weingarten são dadas respectivamente por $\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y - \langle AX, Y \rangle N$ e $AX = -\overline{\nabla}_X N$ para $X, Y \in \mathcal{X}(\Sigma)$. De [2.3](#), como $f'(h) = f' \circ h$ e $K^\top = f(h)\partial_t^\top$, pelo Lema [2.1.5](#), decorre

$$\Delta h = -\frac{f'(h)}{f(h)}(n + |\nabla h|^2) - nH\langle N, \partial_t \rangle \quad (3.6)$$

e

$$\Delta(g(h)) = nf'(h) + nH\langle K, N \rangle. \quad (3.7)$$

Pelo Corolário [2.5.2](#)

$$\begin{aligned}
 \Delta \langle N, K \rangle &= n\langle \nabla H, K \rangle + nf'(h)H + \langle N, K \rangle \text{tr}(A^2) + \langle N, K \rangle (\text{Ric}_M(N^*, N^*) \\
 &\quad - (n-1)(\log f)''(h)|\nabla h|^2) \\
 &= n\langle \nabla H, K \rangle + nf'(h)H + \overline{\text{Ric}}(K^\top, N) + \text{tr}(A^2)\langle N, K \rangle,
 \end{aligned} \quad (3.8)$$

pois

$$\begin{aligned}
 \overline{\text{Ric}}(K^\top, N) &= \langle N, K \rangle \overline{\text{Ric}}(N^*, N^*) - \langle N, K \rangle |\partial_t^\top|^2 \overline{\text{Ric}}(\partial_t, \partial_t) \\
 &= \langle N, K \rangle (\text{Ric}_M(N^*, N^*) - (n-1)|\partial_t^\top|^2 (\log f)''(h)).
 \end{aligned}$$

Assim, por [\(3.7\)](#) e [\(3.8\)](#)

$$\begin{aligned}
 \Delta \mathcal{L} &= \Delta(\langle N, K \rangle HG(h)) \\
 &= \Delta(\langle N, K \rangle) + \Delta(HG(h)) \\
 &= n\langle \nabla H, K \rangle + \overline{\text{Ric}}(K^\top, N) + nf'(h)H + \text{tr}(A^2)\langle N, K \rangle - Hnf'(h) - nH^2\langle N, k \rangle \\
 &= n\langle \nabla H, K \rangle + \overline{\text{Ric}}(K^\top, N) + \text{tr}(A^2)\langle N, K \rangle - nH^2\langle N, K \rangle
 \end{aligned}$$

Como Σ tem curvatura média constante, podemos concluir que $\nabla H \equiv 0$, portanto

$$\begin{aligned}\Delta \mathcal{L} &= \overline{Ric}(K^\top, N) + tr(A^2)\langle N, K \rangle - nH^2\langle N, K \rangle \\ &= \langle N, K \rangle (\overline{Ric}(N^*, N^*) - (n-1)|\partial_t^\top|^2(\log f)''(h) + tr(A^2) - nH^2).\end{aligned}$$

Perceba que pelo Lema [3.1.5](#)

$$\begin{aligned}S - \frac{S_M}{f^2(h)} - n(n-1)\left(\frac{f'^2(h)}{f^2(h)} - H^2\right) &= 2Ric_M(N^*, N^*) - 2(n-1)(\log f)''(h)|\partial_t^\top|^2 \\ &+ tr(A^2) - nH^2\end{aligned}$$

logo,

$$\Lambda = \frac{1}{2}\left(S - \frac{S_M}{f^2(h)} - n(n-1)\left(\frac{f'^2(h)}{f^2(h)} - H^2\right) + tr(A^2) - nH^2\right),$$

onde $\Lambda = Ric_M(N^*, N^*) - (n-1)(\log f)''(h)|\partial_t^\top|^2 + tr(A^2) - nH^2$. Portanto

$$\Delta \mathcal{L} = \frac{1}{2}\left[S - \frac{S_M}{f^2} - n(n-1)\left(\frac{f'^2}{f^2} - H^2\right) + (tr(A^2) - nH^2)\right]. \quad (3.9)$$

3.2 Alguns Resultados

De acordo com [\[30, Corolário 5.10\]](#), em um espaço-tempo GRW espacialmente fechado onde $(\log f)'' \leq 0$, toda hipersuperfície compacta tipo-espaço de curvatura média constante é um slice tipo-espaço. Na verdade, a suposição sobre a compactação pode ser relaxada quando a fibra é simplesmente conexa, uma vez que toda hipersuperfície tipo-espaço completa deve ser compacta [\[9, Proposição 3.3\]](#). Nessas condições, pelo Lema [3.1.5](#), a curvatura escalar da hipersuperfície se reduz

$$S = \frac{S_M \circ \pi_M}{f(h)^2}. \quad (3.10)$$

Quando o espaço-tempo é espacialmente aberto e $(\log f)'' \leq 0$, o resultado não é verdadeiro. Um contra exemplo ocorre no espaço-tempo de Lorentz-Minkowski, o espaço hiperbólico é uma hipersuperfície tipo-espaço completa com curvatura média constante que não é um slice.

Perceba que pela definição de CCN. [\(2.4.1\)](#) se, a fibra M é Ricci flat, ou seja, $Ric_M \equiv 0$ então

$$\overline{M} = -I \times_f M \text{ obedece CCN} \Leftrightarrow (\log f)'' \leq 0.$$

Por este fato, como consequência direta do Lema [3.1.5](#), conseguimos fornecer um limite

inferior para curvatura escalar de uma hipersuperfície tipo-espaço (não necessariamente completa) em um espaço-tempo cuja a função torção satisfaz $(\log f)'' < 0$.

Teorema 3.2.1. *Seja $\bar{M} = -I \times_f M$ um espaço-tempo GRW cuja função torção satisfaça $(\log f)'' \leq 0$ e seja Σ uma hipersuperfície tipo-espaço em \bar{M} . Então a curvatura escalar de Σ satisfaz*

$$S \geq \frac{S_M \circ \pi_M}{f(h)^2} + 2Ric_M(N^*, N^*) + n(n-1) \left(\frac{f'^2}{f^2} - H^2 \right). \quad (3.11)$$

Além disso, a igualdade ocorre se, e somente se a hipersuperfície tipo-espaço for totalmente umbílica e $(\log f)''(h)|\partial_t^\top|^2 = 0$.

Além disso, se $(\log f)'' = 0$ apenas em pontos isolados, então S atinge a igualdade em [3.11](#) se, e somente se Σ estiver contido em um slice tipo-espaço, e como consequência $S = \frac{S_M \circ \pi_M}{f(h)^2}$.

Demonstração. Pelo Lema [3.1.5](#), temos

$$\begin{aligned} S &= \frac{S_M \circ \pi_M}{f(h)^2} + 2Ric_M(N^*, N^*) + n(n-1) \left(\frac{f'^2}{f^2} - H^2 \right) - 2(n-1)(\log f)''|\partial_t^\top|^2 \\ &\quad + tr(A^2) - nH^2 \end{aligned}$$

como $tr(A^2) - nH^2 \geq 0$ e $-2(n-1)(\log f)''|\partial_t^\top|^2 \geq 0$ então

$$S \geq \frac{S_M \circ \pi_M}{f(h)^2} + 2Ric_M(N^*, N^*) + n(n-1) \left(\frac{f'^2}{f^2} - H^2 \right).$$

Se nossa hipersuperfície for totalmente umbílica, temos $|A|^2 = tr(A^2) = nH$, e como por hipótese temos $(\log f)''|\partial_t^\top|^2 = 0$, pelo Lema [3.1.5](#), obtemos a igualdade em [3.11](#). Agora, se $(\log f)'' = 0$ apenas em pontos isolados, temos pela continuidade de $|\partial_t^\top|$ que $|\partial_t^\top| = |\nabla h| = 0$, o que implica que Σ é um slice, consequentemente $S = \frac{S_M \circ \pi_M}{f(h)^2}$. ■

Uma aplicação simples do teorema anterior pode ser feita para espaços-tempos *estáticos*, ou seja, espaços-tempos cuja a função torção f é constante. Considerando $f \equiv 1$, temos pelo teorema anterior o seguinte corolário.

Corolário 3.2.2. *Seja $\bar{M} = I \times M$ um espaço-tempo GRW estático cuja fibra tem curvatura de Ricci não negativa, e seja Σ uma hipersuperfície tipo-espaço em \bar{M} . Então a curvatura escalar de Σ satisfaz*

$$S \geq S_M \circ \pi_M - n(n-1)H^2,$$

e a igualdade ocorre se, e somente se, Σ for totalmente umbílica. Em particular, se a curvatura de Ricci da fibra for positiva, a igualdade ocorre se, e somente se, Σ for máxima (e, portanto, totalmente geodésica) e estiver contida em um slice tipo-espaço. Neste caso $S = S_M \circ \pi_M$.

Perceba que, caso a fibra seja *Ricci-flat*, cada hipersuperfície tipo-espaço tem curvatura escalar limitada inferiormente em relação homotética ao quadrado de sua curvatura, ou seja

$$S \geq -n(n-1)H^2. \quad (3.12)$$

Observação 3.2.3. Sob a suposição de $(\log f)'' < 0$, se a derivada da função torção f não tiver zeros, então não existem hipersuperfícies máximas tais que a curvatura escalar assuma igualdade em (3.11). Com efeito, suponha por um momento que exista uma hipersuperfície Σ que seja máxima e atinja a igualdade em (3.11). Então pelo Teorema 3.2.1 temos que Σ é totalmente umbílica e $(\log f)''|\partial_t^\top| = 0$, ou seja, $|\partial_t^\top| = 0$, implicando que Σ está contido em um slice. Porém, sendo Σ uma hipersuperfície máxima, por definição $H = \frac{f'}{f} = 0$, acarretando que $f' = 0$, o que é um absurdo, já que contraria nossa hipótese de $f' \neq 0$. Portanto não existem hipersuperfícies máximas que atinjam a igualdade (3.11), onde $(\log f)'' < 0$ e $f' \neq 0$. Por outro lado, sendo Σ uma hipersuperfície máxima, onde $(\log f)'' \leq 0$ e a curvatura de Ricci da fibra é positiva, lembrando que $|N^*| = \sinh(\phi)$, é correto afirmar que uma hipersuperfície tipo-espaço Σ tem curvatura escalar $S = \frac{S_M \circ \pi_M}{f^2(h)}$ se, e somente se Σ está contido em um slice. De fato, seja $S = \frac{S_M \circ \pi_M}{f^2(h)}$. Pelo Lema 3.1.5

$$\begin{aligned} S &= \frac{S_M}{f^2} + 2\text{Ric}_M(N^*, N^*) + n(n-1)\frac{f'^2}{f^2} - 2(n-1)(\log f)''|\partial_t^\top|^2 \\ &= \frac{S_M}{f^2}. \end{aligned}$$

Como cada um dos elementos da expressão acima são positivos (exceto possivelmente S_M) temos que $\text{Ric}(N^*, N^*) = 0$, implicando que $N^* = 0$, assim, pela equação (3.4), temos $\nabla h = 0$, e portanto Σ está contido em um slice.

Corolário 3.2.4. Seja $\bar{M} = -I \times_f M$ seja um espaço-tempo GRW obedecendo a CCN com fibra M Ricci flat, e seja Σ uma hipersuperfície tipo-espaço em \bar{M} . Então, a curvatura escalar de Σ satisfaz

$$S \geq n(n-1) \left(\frac{f'(h)^2}{f(h)^2} - H^2 \right). \quad (3.13)$$

Além disso, a igualdade ocorre se, e somente se, a hipersuperfície tipo-espaço for total-

mente umbílica e $(\log f)''(h)|\partial_t^\top|^2 = 0$.

Para mais, se $(\log f)'' = 0$ apenas em pontos isolados, então S atingirá a igualdade em (3.13) se, e somente se, Σ estiver contido em um slice tipo-espaço e, como consequência, S será identicamente nulo.

Demonstração. A demonstração decorre diretamente do Teorema 3.2.1. ■

Perceba que para os espaços-tempos tradicionais, ou seja $\dim(M) = 3$ o tensor de Ricci da fibra Riemanniana determina seu tensor curvatura, neste caso em particular, supondo que a fibra seja *Ricci flat* temos que a fibra M é plana. Além disso, a suposição $H^2 \leq \frac{f'^2(h)}{f^2(h)}$ para curvatura média H de uma hipersuperfície tipo-espaço, que a princípio não é necessariamente constante, tem sido muito utilizada pra obter resultados de rigidez como pode ser visto em [28]. Ainda sob as hipóteses do Corolário 3.2.4, considerando o conjunto

$$\Omega_\Sigma = \left\{ p \in \Sigma; H^2(p) \leq \frac{f'^2(h(p))}{f^2(h(p))} \right\} \quad (3.14)$$

Temos que a curvatura escalar S é não negativa em Ω_Σ , e $S = 0$ se e somente se p for um ponto umbílico e $(\log f)''(h(p))|\partial_t^\top(p)|^2 = 0$. A seguir, enunciaremos um resultado bastante interessante que nos concede uma fórmula simples para a curvatura média de uma hipersuperfície tipo-espaço, que está contida em um slab $[t_1, t_2] \times M$, tal que $\nabla h(t_i) = 0$ com $i = 1, 2$, isto é, contida entre dois slices. Este resultado pode ser encontrado em [2, Lema 12].

Lema 3.2.5. *Seja $\psi : \Sigma \rightarrow \overline{M}$ uma hipersuperfície tipo-espaço, com curvatura média constante, n -dimensional ($n \geq 2$) em um produto torcido Lorentziano $\overline{M} = -I \times_f M$ cuja função torção satisfaz $(\log f)'' \leq 0$. Se a curvatura de Ricci de Σ é limitada inferiormente e Σ está contido em um slab $[t_1, t_2] \times M$, tal que $\nabla h(t_i) = 0$ com $i = 1, 2$, então*

$$H = -\frac{f'(h)}{f(h)}.$$

Pelo lema anterior, para uma hipersuperfície com curvatura média constante completa do tipo-espaço que está contida entre dois slices em um espaço-tempo GRW cuja função torção satisfaz $(\log f)'' \leq 0$, a igualdade $H^2 = \frac{f'(h)^2}{f(h)^2}$ é válida. Portanto temos o seguinte corolário

Corolário 3.2.6. *Seja $\overline{M} = -I \times_f M$ um espaço-tempo GRW obedecendo a CCN com fibra M Ricci flat, e seja Σ uma hipersuperfície com curvatura média constante, completa do tipo-espaço contida no slab $[t_1, t_2] \times M$, tal que $\nabla h(t_i) = 0$ com $i = 1, 2$ em \overline{M} . Então a curvatura escalar S de Σ é não negativa. Além disso, S é identicamente nulo se, e somente se a hipersuperfície tipo-espaço for totalmente umbílica e $(\log f)''(h(p))|\partial_t^\top(p)|^2 = 0$. Além*

disso, se $(\log f)'' = 0$ apenas em pontos isolados, então $S \equiv 0$ se e somente se Σ estiver contido em um slice tipo-espaço.

Demonstração. Estando Σ no slab $[t_1, t_2] \times M$ (consequentemente entre dois slices), temos de [2, Lema 12] que $H^2 = \frac{f'(h)^2}{f(h)^2}$ e pelo Corolário 3.2.4 temos $S \geq 0$, e pelo Teorema 3.2.1 $S = 0$ se, e somente se, Σ for totalmente umbílica e $(\log f)''(h)|\partial_t^\top|^2 = 0$. ■

Lembre-se de que cada partição de GRW induz uma folheação do espaço-tempo por hipersuperfícies de curvatura média constante tipo-espaço totalmente umbílicas. Assim, as suposições sobre a hipersuperfície tipo-espaço no teorema a seguir tornam-se naturais. Além disso, quando lidamos com hipersuperfícies tipo-espaço completas, o resultado pode ser usado para obter a unicidade da divisão.

Teorema 3.2.7. *Seja $\bar{M} = -I \times_f M$ um espaço-tempo GRW cuja função torção satisfaz $(\log f)'' \leq 0$ e cuja fibra tenha curvatura de Ricci não negativa. Se Σ for uma hipersuperfície com curvatura média constante, tipo-espaço totalmente umbílica, então*

$$S = \frac{S_M \circ \pi_M}{f(h)^2} + n(n-1) \left(\frac{f'(h)^2}{f(h)^2} - H^2 \right). \quad (3.15)$$

Além disso, se $(\log f)'' = 0$ apenas em pontos isolados, então Σ está contido em um slice tipo-espaço.

Demonstração. Sendo Σ uma hipersuperfície de curvatura média constante, totalmente umbílica temos pelo Lema 3 que $\nabla \mathcal{L} \equiv 0 \Rightarrow \Delta \mathcal{L} = 0$, ou seja

$$\langle N, K \rangle \left(S - \frac{S_M}{f^2} - n(n-1) \left(\frac{f'^2}{f^2} - H^2 \right) + \text{tr}(A^2) - nH^2 \right) = 0 \quad (3.16)$$

porém, utilizando novamente o fato que Σ é totalmente umbílica $\text{tr}(A^2) - nH^2 = 0$, logo

$$S - \frac{S_M}{f^2} - n(n-1) \left(\frac{f'^2}{f^2} - H^2 \right) = 0 \Leftrightarrow S = \frac{S_M \circ \pi_M}{f^2(h)} + n(n-1) \left(\frac{f'^2}{f^2} - H^2 \right) \quad (3.17)$$

com $(\log f)''|\partial_t^\top|^2 = 0$. E assim, pelo Teorema 3.2.1, concluímos que se $(\log f)'' = 0$ em pontos isolados, então Σ está contido em um slice. ■

3.3 Espaços-tempos Einstein GRW

Nesta seção, faremos o estudo da curvatura escalar de uma hipersuperfície tipo-espaço imersa em um espaço-tempo Einstein GRW, recorrendo aos teoremas vistos anteriormente. Utilizando a definição de espaço-tempo Einstein juntamente com o Teorema 3.2.1 e a expressão 3.4 obtemos o seguinte resultado.

Teorema 3.3.1. *Seja $\overline{M} = I \times_f M$ seja um espaço-tempo de Einstein GRW cuja fibra tem curvatura de Ricci não positiva $c \leq 0$, e seja Σ uma hipersuperfície tipo-espaço em \overline{M} . Então a curvatura escalar de Σ satisfaz*

$$S \geq n \frac{c}{f(h)^2} + 2c \langle N^*, N^* \rangle + n(n-1) \left(\frac{f'(h)^2}{f(h)^2} - H^2 \right).$$

Além disso, a igualdade ocorre se, e somente se, a hipersuperfície tipo-espaço for totalmente umbílica e $c = 0$ ou Σ estiver contido em um slice tipo-espaço.

Demonstração. Temos $2Ric_M(N^*, N^*) = 2c \langle N^*, N^* \rangle$, e pelo Teorema [3.1.5](#),

$$S \geq \frac{S_M \circ \pi_M}{f(h)^2} + 2Ric_M(N^*, N^*) + n(n-1) \left(\frac{f'}{f^2} - H^2 \right). \quad (3.18)$$

Logo,

$$S \geq n \frac{c}{f^2(h)} + 2c \langle N^*, N^* \rangle_M + n(n-1) \left(\frac{f'^2(h)}{f^2(h)} - H^2 \right). \quad (3.19)$$

Pelo Lema [3.1.5](#)

$$\begin{aligned} S &= \frac{S_M \circ \pi_M}{f^2} + 2Ric_M(N^*, N^*) + n(n-1) \left(\frac{f'^2}{f^2} - H^2 \right) - 2(n-1)(\log f)'' |\partial_t^\top|^2 \\ &+ tr(A^2) - nH^2. \end{aligned}$$

Se a igualdade ocorre, então $tr(A^2) - nH^2 = 0$, o que implica que Σ é totalmente umbílica e

$$2(n-1)(\log f)''(h) |\partial_t^\top|^2 = \frac{c}{f^2(h)} |\partial_t^\top|^2 = 0,$$

logo, ou $c = 0$ ou Σ esta contido em um slice. ■

Agora, a título de exemplo iremos utilizar o espaço-tempo $\mathcal{E} = -(0, \infty) \times_{t^{1/3}} \mathbb{R}^3$ *Einstein de Sitter*, que é uma solução clássica para equação de campo de Einstein sem a constante cosmológica.

Em 1922 o físico e cosmólogo russo Aleksander Aleksandrovich Friedmann (1888-1925) publicou um artigo intitulado *Sobre a curvatura do espaço*, que seria a mais nova contribuição na área da cosmologia. Neste trabalho, Friedmann resolve as equações de campo completas de Einstein, sob as hipóteses de homogeneidade e isotropia, o que chamamos hoje de *Princípio Cosmológico*, obtendo que o universo teria curvatura espacial positiva, isto é, o espaço esférico. Mais tarde, foi descoberto, que a solução obtida por Friedmann era apenas uma das três soluções possíveis. Hoje sabe-se que ao resolver as equações de campo completas de Einstein sob um espaço-tempo que satisfaz o princípio cosmológico, encontramos duas características possíveis para o formato do universo, ele é aberto ou

fechado. Caso ele seja aberto, então ele possui curvatura nula (o que nos diz que o universo é um espaço plano), ou então, curvatura negativa (o que nos dá que o universo é um espaço hiperbólico), para o caso que ele é fechado chegamos a resposta proposta por Friedmann.

O espaço-tempo *Einstein de Sitter* é um modelo de Friedmann-Robertson-Walker espacialmente aberto, que satisfaz o princípio cosmológico, ou seja, contém homogeneidade e isotropia em largas escalas além de aceitar a condição de expansão do universo.

Se Σ é uma hipersuperfície tipo-espaço em \mathcal{E} , pelo Corolário 3.2.4, temos que a curvatura escalar de Σ é limitada inferiormente

$$S \geq n(n-1) \left(\frac{f'^2(h)}{f^2(h)} - H^2 \right) \Rightarrow S \geq 6 \left(\frac{1}{9h^2} - H^2 \right)$$

Se atentando ao fato que $(\log f)''(x) = -\frac{1}{3x^2} < 0$ pela observação 3.2.3 e Corolário 3.2.4, temos o seguinte corolário

Corolário 3.3.2. *Cada hipersuperfície máxima tipo-espaço em \mathcal{E} tem curvatura escalar positiva.*

Demonstração. Pelo Corolário 3.2.4 temos que $S \geq n(n-1) \left(\frac{f'^2(h)}{f^2(h)} - H^2 \right)$. Como a Hipersuperfície é máxima para \mathcal{E} , temos

$$S \geq 6 \left(\frac{1}{9h^2} \right) > 0$$

logo,

$$S \geq \frac{2}{3h^2} > 0. \tag{3.20}$$

■

Juntando este fato ao Teorema 3.2.7, obtemos o seguinte resultado.

Corolário 3.3.3. *Não existem hipersuperfícies totalmente geodésicas tipo-espaço em \mathcal{E}*

Demonstração. Suponha por um momento que exista um hipersuperfície tipo-espaço Σ totalmente geodésica em \mathcal{E} , então, temos que Σ é também totalmente umbílica com curvatura média constante, logo pelo Corolário anterior $S = \frac{2}{3h^2}$. Pela observação 3.2.3, como $(\log f)''(h) < 0$ e $f' \circ h = \frac{1}{3h^{2/3}} \neq 0$, esta igualdade é um absurdo, já que não existem hipersuperfícies máximas que satisfazem a igualdade (3.11) ■

Perceba que, cada hipersuperfície tipo-espaço, totalmente umbílica com curvatura média constante em \mathcal{E} está contida em um slice tipo-espaço, o que nos permite afirmar a seguinte caracterização para os slices tipo-espaço.

Corolário 3.3.4. *As únicas hipersuperfícies de curvatura média constante, tipo-espaço, totalmente umbílicas e completas no espaço-tempo de Einstein de Sitter são os slices tipo-espaço.*

Demonstração. Seja Σ uma hipersuperfícies com curvatura média constante, completa e totalmente umbílica em \mathcal{E} . Pelo Lema 3.1.6, a fórmula (3.9) do laplaciano $\Delta\mathcal{L}$ é identicamente nulo, ou seja,

$$S - n(n-1)\left(\frac{f'^2}{f^2} - H^2\right) = 0,$$

consequentemente,

$$S = 6\left(\frac{1}{9h^2} - H^2\right).$$

Mas, pelo fato de $(\log f)'' < 0$, o Lema 3.1.5 nos garante que $|\partial_t^\top|^2 = 0$, logo Σ é um slice, e além disso $H = -\frac{f'}{f}$, acarretando que $S = 0$. ■

3.4 Espaço-tempo em estado estacionário

O espaço-tempo estacionário $\mathcal{N} = -\mathbb{R} \times_{e^t} \mathbb{R}^n$ é um modelo do universo proposto por Hoyle [17] e Bondi e Gold [12] que satisfaz o principio cosmológico, ou seja, é homogêneo e isotrópico. Porém, além de ser homogêneo espacialmente, assim como o espaço-tempo Einstein de Sitter visto anteriormente, o mesmo é homogêneo temporalmente, em outras palavras, este modelo parece o mesmo em todos os pontos, direções e sentido (veja [34, Seção 14.8]).

Definição 3.4.1. *Dizemos que uma hipersuperfície tipo-espaço Σ em \mathcal{N} é limitada para longe do futuro infinito (respectivamente limitada para longe do infinito) se $\sup h(\Sigma) < \infty$ (respectivamente $\sup |h(\Sigma)| < \infty$).*

Como uma consequência direta do Lema 3.1.5 temos que a curvatura escalar de uma hipersuperfície Σ em \mathcal{N} é dada por

$$S = n(n-1)(1 - H^2) + \text{tr}(A^2) - nH^2. \tag{3.21}$$

logo, se $H^2 \leq 1$ então $S \geq 0$. Temos que uma hipersuperfície tipo-espaço de curvatura média constante, completa e que é limitada para longe do futuro infinito em \mathcal{N} , tem curvatura média $H = -1$. Assim, é possível enunciar o seguinte resultado

Corolário 3.4.2. *Toda hipersuperfície completa tipo-espaço com curvatura média constante em \mathcal{N} que é limitada longe do infinito tem curvatura escalar não negativa.*

Demonstração. Pelo lema anterior, vemos facilmente que $H = -1$, e utilizando a expressão para curvatura escalar de uma hipersuperfície Σ imersa em \mathcal{N} , temos

$$S = \text{tr}(A^2) - nH^2 \geq 0.$$

■

Considere o espaço-tempo de Sitter visto no Exemplo 1.5.2. Pelo exemplo 1.5.4 visto anteriormente, o espaço-tempo de estado estacionário é realizável como o domínio $\{x \in \mathbb{S}_1^{n+1}; x_0 + x_1 > 0\}$. Levando em consideração que o traço de toda geodésica do espaço-tempo de Sitter é dado pela intersecção do espaço-tempo de Sitter com um 2-plano através da origem de \mathbb{L}^{n+2} (Veja [25], Proposição 4.28)], é fácil ver que todas as geodésicas não constantes no espaço-tempo de estado estacionário são incompletas. Agora, usando uma técnica diferente, podemos estender esse fato a uma família mais ampla do espaço-tempo GRW. Para concluir a demonstração do teorema a seguir, precisaremos do seguinte teorema tipo Liouville

Lema 3.4.3. *Seja Σ uma variedade Riemanniana completa cuja curvatura de Ricci é limitada inferiormente e seja $u : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave não negativa em Σ . Se houver uma constante $c > 0$ tal que $\Delta u \geq cu^2$, então u é identicamente nulo em Σ .*

Teorema 3.4.4. *Seja $\overline{M} = -I \times_f M$ ser um espaço-tempo GRW obedecendo a CCN cujo função torção satisfaz $(\log f)'' \leq 0$ e $\inf \frac{f'(t)^2}{f(t)^2} = c > 0$. Então, \overline{M} não admite hipersuperfícies tipo-espaço completas totalmente geodésicas.*

Demonstração. Suponhamos por um momento que \overline{M} contenha um hipersuperfície tipo-espaço completa totalmente geodésica Σ e consideremos a função ângulo hiperbólico ϕ dada por

$$\langle N, \partial_t \rangle = \cosh(\phi).$$

Dado $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$, temos que

$$\begin{aligned} \langle \nabla \langle N, \partial_t \rangle, X \rangle &= X \langle N, \partial_t \rangle \\ &= \langle \overline{\nabla}_X, \partial_t \rangle + \langle N, \overline{\nabla}_X \partial_t \rangle \\ &= \langle -AX, \partial_t \rangle + \left\langle N, \frac{f'}{f}(X + \langle X, \partial_t \rangle \partial_t) \right\rangle \\ &= \langle -A\partial_t^\top, X \rangle + \frac{f'}{f} \left(\langle N, X \rangle + \langle X, \partial_t \rangle \langle N, \partial_t \rangle \right) \\ &= \langle -A\partial_t^\top, X \rangle + \frac{f'}{f} \left(\langle X, \langle \partial_t, N \rangle \partial_t \rangle \right) \\ &= \left\langle -A\partial_t^\top + \frac{f'}{f} \langle N, \partial_t \rangle \partial_t^\top, X \right\rangle. \end{aligned}$$

Logo, $\nabla \cosh \phi = -A\partial_t^\top + \frac{f'}{f}\langle N, \partial_t \rangle \partial_t^\top$. Porém, como Σ é totalmente geodésica

$$\nabla \cosh \phi = \frac{f'}{f}\langle N, \partial_t \rangle \partial_t^\top.$$

A princípio, temos

$$\Delta f(h) = f'(h)\Delta h + f''(h)|\nabla h|^2$$

e pela equação (3.6), obtemos

$$\Delta f(h) = -n\frac{f'^2(h)}{f(h)} + |\nabla h|^2 f(h)(\log f)''(h) - nHf'(h)\cosh(\phi)$$

assim,

$$\begin{aligned} \Delta(f(h)\cosh(\phi)) &= \Delta f(h)\cosh(\phi) + f(h)\cosh(\phi) + 2\langle \nabla f(h), \nabla \cosh(\phi) \rangle_M \\ &= -\frac{f'^2(h)}{f(h)}n\cosh(\phi) + f(h)\cosh(\phi)\sinh^2(\phi)(\log f)''(h) \\ &\quad - nHf'(h)\cosh^2(\phi) + f(h)\Delta \cosh(\phi) + 2\langle A\partial_t^\top, \partial_t^\top \rangle_M \\ &\quad - 2\frac{f'(h)}{f(h)}\cosh(\phi)\sinh^2(\phi). \end{aligned} \quad (3.22)$$

Lembremos de (3.8) que $\Delta\langle N, K \rangle = n\langle \nabla H, K \rangle + nf'(h)H + \overline{Ric}(K^\top, N) + tr(A^2)\langle N, K \rangle$, então, sendo Σ uma hipersuperfície com curvatura média constante, temos

$$\Delta\langle N, K \rangle = \overline{Ric}(K^\top, N) + nf'(h)H + tr(A^2)\langle N, K \rangle. \quad (3.23)$$

Assim, por (3.22) e (3.23), obtemos

$$\begin{aligned} \overline{Ric}(K^\top, N) &= -f'(h)nH - f(h)\cosh(\phi)tr(A^2) + f(h)\cosh(\phi)\sinh^2(\phi)(\log f)''(h) \\ &\quad - \frac{f'(h)}{f(h)}n\cosh(\phi) - nHf'(h)\cosh^2(\phi) + \Delta f(h)\Delta \cosh(\phi) = 2\langle A\partial_t^\top, \partial_t^\top \rangle_M \\ &\quad - \frac{f'^2(h)}{f(h)}\cosh(\phi)\sinh^2(\phi). \end{aligned} \quad (3.24)$$

De (3.9), temos

$$\overline{Ric}(K^\top, N) = f(h)\cosh(\phi)(Ric_M(N^*, N^*) - (n-1)\sinh^2(\phi)(\log f)''(h)) \quad (3.25)$$

que juntamente com (3.24), acarreta,

$$\begin{aligned}
 \Delta \cosh(\phi) &= nH(\log f)'(h)(1 + \cosh^2(\phi)) + \cosh(\phi)(Ric_M(N^*, N^*)) \\
 &- n \sinh^2(\phi)(\log f)''(h) + \frac{f'^2(h)}{f(h)} \cosh(\phi)(n + 2 \sinh^2(\phi)) + \cosh(\phi)tr(A^2) \\
 &- 2\frac{f'(h)}{f(h)} \langle A\partial_t^\top, \partial_t^\top \rangle.
 \end{aligned}$$

Porém, como Σ é totalmente geodésica

$$\begin{aligned}
 \Delta \cosh(\phi) &= \cosh(\phi)(Ric_M(N^*, N^*) - n \sinh^2(\phi)(\log f)''(h)) \\
 &+ \frac{f'^2(h)}{f(h)} \cosh(\phi)(n + 2 \sinh^2(\phi))
 \end{aligned} \tag{3.26}$$

Veja que,

$$\begin{aligned}
 \Delta \sinh^2(\phi) &= \Delta(\cosh^2(\phi) - 1) \\
 &= \Delta \cosh^2(\phi) \\
 &= 2 \cosh(\phi)\Delta \cosh(\phi) + 2|\nabla \cosh(\phi)|^2.
 \end{aligned}$$

então, multiplicando (3.26) por $\cosh(\phi)$ e substituindo na expressão anterior, obtemos que

$$\begin{aligned}
 \Delta \sinh^2(\phi) &= 2 \cosh^2(\phi)(Ric_M(N^*, N^*) - n(\log f)''(h) \sinh^2(\phi)) \\
 &+ 2\frac{f'^2(h)}{f^2(h)} \cosh^2(\phi) \sinh^2(\phi) + 2\frac{f'(h)}{f(h)} \cosh(\phi)(n + 2 \sinh^2(\phi))
 \end{aligned} \tag{3.27}$$

e, como \overline{M} obedece a condição de convergência nula e $\cosh^2(\phi) \geq \sinh^2(\phi)$, então,

$$\begin{aligned}
 \Delta \sinh^2(h) &\geq 2n\frac{f'(h)}{f^2(h)} + 4\frac{f'^2(h)}{f^2(h)} \cosh^2(h) \sinh^2(\phi) + 2\frac{f'^2(h)}{f^2(h)} \cosh^2(\phi) \sinh^2(\phi) \\
 &\geq 4\frac{f'^2(h)}{f^2(h)} \sinh^4(\phi) + 2\frac{f'^2(h)}{f^2(h)} \sinh^4(\phi) \\
 &= 6\frac{f'^2(h)}{f^2(h)} \sinh^4(\phi) \\
 &\geq 6c \sinh^4(\phi).
 \end{aligned} \tag{3.28}$$

Portanto, pelo Teorema 3.4.3, temos que $\phi \equiv 0$, ou seja Σ é um slice necessariamente totalmente geodésico. O que é um absurdo, já que um slice tipo-espaço é máximo se, e somente se $f' \equiv 0$, o que implicaria $c = 0$ contradizendo a hipótese $\inf \frac{f'(t)^2}{f(t)^2} = c > 0$ do teorema. ■

3.5 Espaços-tempos GRW espacialmente parabólicos

Definição 3.5.1. *Seja M^n uma variedade Riemanniana completa não compacta. Dizemos que M^n é uma variedade Riemanniana parabólica se, as únicas funções super-harmônicas, limitadas inferiormente, são as funções constantes. Dizemos que um espaço-tempo $\overline{M} = -I \times_f M$ é espacialmente parabólico se sua fibra for parabólica.*

Definição 3.5.2. *Dizemos que uma variedade tem a propriedade forte de Liouville se ela não admite nenhuma função harmônica positiva não constante.*

Como pode ser visto em Yau [35], Seção 2, Corolário 1], caso a fibra M tenha curvatura de Ricci não negativa, então a propriedade forte de Liouville se aplica a ela, ou seja $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle_M)$ não admite função harmônica positiva não constante. Note que a propriedade forte de Liouville é verdadeira para qualquer variedade Riemanniana parabólica sem ser necessário fazer suposição sobre a curvatura.

Teorema 3.5.3. *Seja $\overline{M} = -I \times_f M$ um espaço-tempo GRW espacialmente parabólico, cuja fibra 1-conexa completa tem curvatura seccional não negativa e cuja função torção f satisfaz que $(\log f)$ é limitada e côncava. Seja Σ uma hipersuperfície tipo-espaço, completa, com curvatura média constante contida em um slab $[t_1, t_2] \times M$, tal que $\nabla h(t_i) = 0$ com $i = 1, 2$ e cujo ângulo hiperbólico é limitado. Então Σ é totalmente umbílica e sua curvatura escalar satisfaz*

$$S = \frac{S_M \circ \pi_M}{f(h)^2} \quad (3.29)$$

Além disso, se $(\log f)'' = 0$ apenas em pontos isolados, então S satisfaz a igualdade em (3.29) se, e somente se, Σ for um slice tipo-espaço.

Demonstração. Primeiramente, perceba que a função \mathcal{L} é limitada em Σ e $\Delta \mathcal{L} \geq 0$, pois estando Σ contida no slab $[t_1, t_2] \times M$, temos que a função altura h é limitada superiormente e inferiormente e como $\log f$ é limitada e côncava, temos que f é limitada, portanto \mathcal{L} é limitada, e pelo Teorema 3.2.1 e [2, Lema 12] $\Delta \mathcal{L} \geq 0$. Por [30, Teorema 4.4], concluímos que Σ é parabólico, o que implica que $\nabla \mathcal{L} \equiv 0$ e, em vista disso, \mathcal{L} é constante e $\Delta(\mathcal{L}) = 0$. Como $\Delta \mathcal{L}$ é composto pela soma de funções não negativas, então $tr(A^2) - nH^2 = 0$, ou seja, Σ é totalmente umbílica e

$$S - \frac{S_M}{f^2} - n(n-1) \left(\frac{f'^2}{f^2} - H^2 \right) = 0$$

logo,

$$S = \frac{S_M}{f^2} + n(n-1) \left(\frac{f'^2}{f^2} - H^2 \right),$$

como Σ está entre dois slices

$$S = \frac{S_M \circ \pi_M}{f^2}.$$

■

Referências Bibliográficas

- [1] ALEDO, J. A., ALÍAS, L. J., E ROMERO, A. *Integral formulas for compact spacelike hypersurfaces in de Sitter space: applications to the case of constant higher order mean curvature.*, J. Geom. Phys., **31** (1999), 195 – 208.
- [2] ALEDO, J. A., ROMERO, A., E RUBIO, R. M., *Constant mean curvature spacelike hypersurfaces in Lorentzian warped products and Calabi-Bernstein type problems.* Nonlinear Anal. **106** (2014), 57 – 69.
- [3] ALEDO, J. A., E RUBIO, R. M., *On the scalar curvature of spacelike hypersurfaces in generalized Robertson Walker spacetimes.*, Differential Geometry and its Applications, **44** (2016) , 17 – 29.
- [4] ALÍAS, L. J., BRASIL, A. E COLARES, A. G., *Integral formulae for spacelike hypersurfaces in conformally stationary spacetimes and applications.* Proc. Edinb. Math. Soc. **46** (2003), 465 – 488.
- [5] ALÍAS, L. J. E COLARES, A. GERVASIO. *Uniqueness of spacelike hypersurfaces with constant higher order mean curvature in generalized Robertson-Walker spacetimes.* Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **143** (2007), 703 – 729.
- [6] ALÍAS, L. J., E MONTIEL, S., *Uniqueness of spacelike hypersurfaces with constant mean curvature in generalized Robertson-Walker spacetimes In Differential Geometry.*, Valencia 2001. (2002), 59 – 69.
- [7] ALÍAS, L. J., ROMERO, A., E SÁNCHEZ, M., *Spacelike hypersurfaces of constant mean curvature and Calabi-Bernstein type problems.*, Tohoku Math. J. **49** (1997), 337 – 345.
- [8] ALÍAS, L. J., ROMERO, A., E SÁNCHEZ, M., *Spacelike hypersurfaces of constant mean curvature in certain spacetimes.*, Nonlinear Anal. **30** (1997), 655 – 661.
- [9] ALÍAS, L.J., ROMERO, A. E SÁNCHEZ, M., *Uniqueness of complete spacelike hypersurfaces of constant mean curvature in Generalized Robertson-Walker spacetimes.*, Gen. Relativity Gravitation **27** (1995), 71– 84.

- [10] BARBOSA, J. L. M., E COLARES, A. G., *Stability of Hypersurfaces with Constant r -Mean Curvature.*, Ann. Global Anal. Geom. **15** (1997), 277 – 297.
- [11] BESSE, A. L., *Einstein manifolds.*, Springer Science e Business Media (2007).
- [12] BONDI, H., E GOLD, T., *On the generation of magnetism by fluid motion.*, Monthly Not. Roy. Astr. Soc. **110** (1950), 607– 611.
- [13] CALABI, E. . Examples of Bernstein problems for some non-linear equations. Global Analysis (1970), 223 – 230.
- [14] CHENG, S. Y., E YAU, S. T., *Maximal space-like hypersurfaces in the Lorentz-Minkowski spaces.*, Ann. of Math. **104** (1976), 407– 419.
- [15] Ehrlich, P. E., Jung, Y. T., e Kim, S. B., *Constant scalar curvatures on warped product manifolds. Tsukuba journal of mathematics.*,**20** (1996), 239-256.
- [16] HARDY, G. , LITTLEWOOD, J. E. AND G. PÓYLA. INEQUALITIES, 2ND. ED., Cambridge Mathematical Library, (1989).
- [17] HOYLE, F., *A new model for the expanding universe.*,Mon. Notices Royal Astron. Soc. **108** (1948), 372 – 382.
- [18] JÚNIOR, J., *Imersões em produtos torcidos.*, Dissertação de Mestrado, UFPI (2011).
- [19] LICHNEROWICZ, A., *L'intégration des équations de la gravitation relativiste et le problème des n -corps.*, Gauthier-Villars (1944).
- [20] MONTIEL, S., *An integral inequality for compact spacelike hypersurfaces in de Sitter space and applications to the case of constant mean curvature.*, Indiana Univ. Math. J., **37** (1988), 909 – 917.
- [21] MONTIEL, S., E ROS, A. *Compact hypersurfaces: the Alexandrov theorem for higher order mean curvatures.* Differential geometry **52** (1991), 279 – 296.
- [22] MONTIEL, S., *Uniqueness of spacelike hypersurfaces of constant mean curvature in foliated spacetimes.*, Mathematische Annalen, **314** (1999), 529 – 553.
- [23] MUNIZ NETO, A. C. , *Sobre Hipersuperfícies em Espaços de Curvatura Seccional Constante.*, Tese de Doutorado, UFC (2004).
- [24] NISHIKAWA, SEIKI. *On maximal spacelike hypersurfaces in a Lorentzian manifold.*, Nagoya Mathematical Journal **95** (1984), 117-124.

- [25] O'NEILL, B. 1983., *Semi-Riemannian geometry with applications to relativity.*, Academic press (1983).
- [26] PARENTE, U. L., *Alguns resultados tipo-Bernstein em variedades semi-riemannianas.*(2011)
- [27] PINHEIRO, A. J., *Hipersuperfícies com r -ésima curvatura média constante positiva em $M^m \times \mathbb{R}$* , Dissertação de mestrado, UFC (2010).
- [28] ROMERO, A., RUBIO, R., *A Nonlinear Inequality Arising in Geometry and Calabi-Bernstein Type Problems.*, J Inequal Appl (2010)
- [29] SÁNCHEZ, M., *On the geometry of generalized Robertson-Walker spacetimes: curvature and Killing fields.* J J. Geom. Phys. **31** (1999), 1–15.
- [30] ROMERO, A., RUBIO, R. M., E SALAMANCA, J. J., *Uniqueness of complete maximal hypersurfaces in spatially parabolic generalized Robertson-Walker spacetimes.*, Classical and Quantum Gravity, **30** (2013).
- [31] SANTOS, F. R. DOS, *Hipersuperfícies tipo-espaço com curvatura de ordem superior constante no espaço de Sitter.*, Dissertação de mestrado, UFCG (2013).
- [32] SINDEAUX, J. S., *Resultados de rigidez e não existência para subvariedades trapped em espaços Lorentzianos.*, Dissertação de mestrado, UFPB (2020).
- [33] SOARES, D., *Os fundamentos físico-matemáticos da cosmologia relativista.*, Revista Brasileira de Ensino de Física, **35** (2013), 1– 6.
- [34] S. WEINBERG., *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity.*, John Wiley and Sons, New York, 1972.
- [35] YAU, S. T., (1975). *Harmonic functions on complete Riemannian manifolds.*, Comm. Pure Appl. Math. **28** (1975), 201–228.