

Eduardo Moraes de Medeiros

**ANÁLISE DE CONFIABILIDADE  
DEPENDENTE DO TEMPO USANDO  
MODELOS DE SÉRIES TEMPORAIS**

João Pessoa, Paraíba

2022

Eduardo Moraes de Medeiros

# **ANÁLISE DE CONFIABILIDADE DEPENDENTE DO TEMPO USANDO MODELOS DE SÉRIES TEMPORAIS**

Tese submetida ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil e Ambiental da Universidade Federal da Paraíba, como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de Doutor.

Orientador: André Jacomel Torii  
Coorientador: Henrique Machado Kroetz

João Pessoa, Paraíba  
2022

**Catálogo na publicação**  
**Seção de Catalogação e Classificação**

M488a Medeiros, Eduardo Morais de.

Análise de confiabilidade dependente do tempo usando  
modelos de Séries Temporais / Eduardo Morais de  
Medeiros. - João Pessoa, 2022.

101 f. : il.

Orientação: André Jacomel Torii.

Coorientação: Henrique Machado Kroetz.

Tese (Doutorado) - UFPB/CT.

1. Processos estocásticos. 2. Séries temporais. 3.  
Confiabilidade estrutural. 4. Confiabilidade dependente  
do tempo. 5. EOLE. 6. ARMA. I. Torii, André Jacomel.  
II. Kroetz, Henrique Machado. III. Título.

UFPB/BC


CDU 519.218(043)

**ANÁLISE DE CONFIABILIDADE DEPENDENTE DO TEMPO USANDO MODELOS DE  
SÉRIES TEMPORAIS**


**EDUARDO MORAIS DE MEDEIROS**


**Tese aprovada em 29 de março de 2022.**

**Período Letivo: 2021.2**

  
**Prof. Dr. André Jacomel Torii – UNILA**  
**Orientador**

  
**Prof. Dr. Roberto Leal Pimentel – UFPB**  
**Examinador Interno**

  
**Prof. Dr. Celso Augusto Guimarães Santos – UFPB**  
**Examinador Interno**

  
**Prof. Dr. Rafael Holdorf Lopez – UFSC**  
**Examinador Externo**

  
**Prof. Dr. André Teófilo Beck – USP**  
**Examinador Externo**

**João Pessoa/PB  
2022**

# Agradecimentos

A Deus, por me ajudar a superar todas as dificuldades que enfrentei nesta caminhada;

Aos meus pais, irmãos, esposa e filho, que sempre serviram de exemplos para mim, e por me apoiarem em todas as decisões;

Aos amigos, por todas as risadas e momentos alegres que me proporcionam. Ao colega de doutorado, Prof. Marcus Paiva (in memoriam), pela sua amizade e valiosos conselhos;

Ao Prof. Henrique, por toda ajuda e eterna disponibilidade. Agradecimento especial ao meu orientador Prof. André Torii, pelos conselhos, orientações, e por servir de inspiração para mim, tanto no caráter pessoal como profissional.

Muito Obrigado!

# Resumo

MEDEIROS, E. M. **Análise de confiabilidade dependente do tempo usando modelos de séries temporais.** 98p. Tese (Doutorado) - Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2022.

Nesta tese é realizada a comparação conceitual e computacional entre o método da Expansão da Estimativa Linear Ótima (EOLE) e o modelo de série temporal Autoregressivo de Média móvel (ARMA) para a representação de processos estocásticos no contexto da análise de confiabilidade dependente do tempo. É demonstrado que resultados semelhantes para a confiabilidade dependente do tempo podem ser obtidos usando as duas abordagens. Embora as técnicas de expansão, como o EOLE, sejam adequadas para problemas onde as propriedades dos processos estocásticos são explicitamente conhecidas, tais informações raramente estão disponíveis em casos práticos. Por outro lado, os modelos de séries temporais, como o ARMA, são muito populares para representar processos estocásticos a partir do monitoramento em tempo real ou através de dados históricos disponíveis. Nesta tese, são propostas duas novas abordagens complementares às anteriores: i) obtenção de um modelo ARMA apropriado quando as propriedades do processo estocástico são explicitamente conhecidas, mas amostras de dados não estão disponíveis; ii) aplicação do EOLE a partir de informação que pode ser obtida com amostras de dados reais, mas sem conhecimento explícito das propriedades dos processos estocásticos envolvidos. Estas duas novas abordagens complementam as abordagens existentes até então, contribuindo com o avanço do conhecimento da área e possibilitando que os modelos ARMA e EOLE possam ser utilizados em casos nos quais até então não eram possíveis. Com estas abordagens, modelos ARMA e EOLE foram aplicados em cinco problemas de confiabilidade dependente do tempo. Os resultados são notavelmente consistentes, demonstrando que as novas abordagens propostas são válidas e que problemas de confiabilidade dependente do tempo podem ser analisados usando ambas as técnicas.

**Palavras-chave:** confiabilidade dependente do tempo, séries temporais, confiabilidade estrutural, processos estocástico, EOLE, ARMA

# Abstract

MEDEIROS, E. M. **Time-dependent reliability analysis using time series models**, 2022. 98p. Thesis - Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2022.

This thesis presents conceptual and computational comparisons between EOLE (Expansion Optimal Linear Estimation) and ARMA (Autoregressive Moving Average) models to represent stochastic processes in the context of time-dependent reliability analysis. It is demonstrated that similar results for time-dependent reliability can be obtained using the two approaches. Even though expansion techniques, such as EOLE, are appropriate for problems where the properties of the stochastic process are explicitly known, such information is rarely available in practical situations. On the other hand, time series models, such as ARMA, are widely employed to represent stochastic processes from real time monitoring or available historical data. Two new approaches, that are complementary to the previous ones, are presented in this thesis: i) appropriate calibration of ARMA models when the properties of the stochastic process are explicitly known, but no data sample is available; ii) employment of EOLE using information that can be obtained from real data samples, but without explicit knowledge of the properties of the stochastic process. These two novel approaches complement the approaches available until now. This is an important contribution for the field and allows the employment of ARMA and EOLE models in cases where it was not possible until now. With these two new approaches, ARMA and EOLE models were applied to five problems concerning time-dependent reliability. The results are notably consistent, demonstrating that the new approaches are valid and that time-dependent reliability analysis problems can be addressed using both ARMA and EOLE techniques.

**Keywords:** time-dependent reliability, time series, structural reliability, stochastic process, EOLE, ARMA

# Lista de abreviaturas e siglas

ACF	Função autocorrelação (do inglês <i>Autocorrelation Function</i> )
AR	Autoregressivo (do inglês <i>Autoregressive</i> )
ARIMA	Autoregressivo Integrado Média Móvel (do inglês <i>Autoregressive Integrated Moving Average</i> )
ARMA	Autoregressivo de Média Móvel (do inglês <i>Autoregressive Moving Average</i> )
BIC	Critério da informação Bayesiana (do inglês <i>Bayesian Information Criterion</i> )
Corr	Coefficiente de correlação
Cov	Covariância
CV	Coefficiente de variação
DP	Desvio padrão
EOLE	Expansão da estimativa linear ótima (do inglês <i>Expansion Optimal Linear Estimation</i> )
FDA	Função de distribuição acumulada de probabilidade
FDP	Função densidade de probabilidade
KL	<i>Karhunen-Loève</i>
<i>Lag</i>	Diferença entre dois instantes de tempo
MA	Média Móvel (do inglês <i>Moving Average</i> )
MEF	Método dos Elementos Finitos
OLE	Estimativa linear ótima (do inglês <i>Optimal Linear Estimation</i> )
PACF	Função autocorrelação parcial (do inglês <i>Partial Autocorrelation Function</i> )
PE	Processo estocástico
SMC	Simulação de Monte Carlo



VA            Variável aleatória

Var           Variância

# Lista de símbolos

$\hat{X}(t)$ ou $\hat{X}(\omega, t)$	Aproximação do processo estocástico
$\lambda$	Autovalores de $A$
$\phi$	Autovetores de $A$
$\alpha$	Comprimento de autocorrelação
$\sigma_e$	Desvio padrão de $\epsilon$
$\sigma$ ou $\sigma_X$	Desvio padrão de uma variável aleatória
$\sigma(t)$ ou $\sigma_X(t)$	Desvio padrão do processo estocástico
$\tau$	Diferença entre dois tempos
$D_f$	Domínio de falha da função $g$
$\Omega$	Espaço amostral contendo todos possíveis valores $\omega$
$R_{XX}$	Função autocorrelação
$\rho_{kk}$	Função autocorrelação parcial
$C_{XX}$ ou $\gamma$	Função autocovariância
$\rho$	Função coeficiente de autocorrelação
$F_{XY}(x, y)$	Função conjunta cumulativa de probabilidades
$f_{XY}(x, y)$	Função conjunta de densidades de probabilidades
$F_X(x)$	Função de distribuição acumulada de probabilidade
$f_1(x, t)$	Função densidade de primeira ordem do processo estocástico
$f_X(x)$	Função densidade de probabilidade
$F_1(x, t)$	Função distribuição cumulativa de primeira ordem do processo estocástico
$g(X(t))$ ou $g(t)$	Função estado limite para processos estocásticos
$g(X)$ ou $g$	Função estado limite para variáveis aleatórias

$I(x)$	Função indicadora
$L$	Função <i>likelihood</i>
$A$	Matriz autocorrelação
$\mu$ ou $\mu_X$	Média de uma variável aleatória
$\mu(t)$ ou $\mu_X(t)$	Média do processo estocástico
$N$	Número de instantes de tempo discretizados
$x$	Número real atribuído a um ponto amostral $\omega$ de uma variável aleatória
$n_f$	Número total de falhas
$n_{si}$	Número total de simulações
$r$	Ordem da expansão do EOLE
$p$	Ordem do modelo AR
$q$	Ordem do modelo MA
$\varphi$	Parâmetros do modelo AR
$\theta$	Parâmetros do modelo MA
$\omega$	Ponto amostral
$P_f$	Probabilidade de falha acumulada
$p_f$	Probabilidade de falha instantânea
$X(t)$ ou $X(\omega, t)$	Processo estocástico original
$\psi$	Raízes das equações características do modelo ARMA
$\epsilon$	Ruído branco Gaussiano
$\Delta t$	Tamanho do intervalo ou passo do tempo
$T$	Tempo final da análise
$E$	Valor esperado
$\xi_i(\omega)$	Variáveis aleatórias normais padrões independentes
$X$ ou $X(\omega)$	Variável aleatória

# Lista de ilustrações

Figura 1 – Exemplo de função de estado limite $g(\mathbf{X})$ . . . . .	18
Figura 2 – Realização de um processo estocástico $X(t)$ . . . . .	20
Figura 3 – Exemplo do comportamento do coeficiente de autocorrelação do tipo exponencial quadrática . . . . .	23
Figura 4 – Exemplo da aplicação da simulação de Monte Carlo. . . . .	26
Figura 5 – Exemplo de problema de primeira passagem . . . . .	27
Figura 6 – Exemplo de 5 trajetórias do processo estocástico $X(t)$ . . . . .	29
Figura 7 – Cálculo da probabilidade de falha acumulada via simulação de Monte Carlo . . . . .	30
Figura 8 – Obtenção da trajetória do processo estocástico pelo EOLE . . . . .	34
Figura 9 – Exemplo de tendência e linha de tendência . . . . .	36
Figura 10 – Exemplo de comportamento sazonal da temperatura média mensal . . . . .	37
Figura 11 – Exemplo de um processo estocástico estacionário . . . . .	37
Figura 12 – Valores da ACF e PACF para uma amostra da velocidade do vento . . . . .	43
Figura 13 – Obtenção dos parâmetros do ARMA a partir de observações amostrais . . . . .	45
Figura 14 – Obtenção dos parâmetros do ARMA sem observações amostrais . . . . .	48
Figura 15 – Fluxograma usado no Caso I . . . . .	50
Figura 16 – Fluxograma usado no Caso II . . . . .	52
Figura 17 – Evolução da probabilidade de falha acumulada no tempo (Exemplo 1 - Caso I) . . . . .	56
Figura 18 – Variação da diferença relativa da $P_f(0, 10)$ entre ARMA e EOLE com o aumento da ordem (p,q) do modelo ARMA (Exemplo 1 - Caso I) . . . . .	58
Figura 19 – Evolução da probabilidade de falha acumulada dos modelos ARMA e EOLE (Exemplo 1 - Caso II) . . . . .	59
Figura 20 – Representação da carga no meio da viga, adaptada de Andrieud-Renaud, Sudret e Lemaire (2004) . . . . .	60
Figura 21 – Evolução da probabilidade de falha acumulada no tempo (Exemplo 2 - Caso I) . . . . .	61
Figura 22 – Variação da diferença relativa da $P_f(0, 15)$ entre o ARMA e EOLE com o aumento da ordem (p,q) do modelo ARMA (Exemplo 2 - Caso I) . . . . .	62
Figura 23 – Evolução da probabilidade de falha acumulada no tempo dos modelos ARMA e EOLE (Exemplo 2 - Caso II) . . . . .	63
Figura 24 – Treliça plana composta de 23 barras . . . . .	65

Figura 25 – Evolução da probabilidade de falha acumulada no tempo (Exemplo 3 -	
Caso I)	66
Figura 26 – Variação da diferença relativa da $P_f(0, 20)$ entre ARMA e EOLE com o	
aumento da ordem (p,q) do modelo ARMA (Exemplo 3 - Caso I)	67
Figura 27 – Evolução da probabilidade de falha acumulada dos modelos ARMA e	
EOLE (Exemplo 3 - Caso II)	69
Figura 28 – Treliça com duas barras	70
Figura 29 – Evolução da probabilidade de falha acumulada no tempo (Exemplo 4 -	
Caso I)	72
Figura 30 – Variação da diferença relativa da $P_f(0, 15)$ entre ARMA e EOLE com o	
aumento da ordem (p,q) do modelo ARMA (Exemplo 4 - Caso I)	73
Figura 31 – Evolução da probabilidade de falha acumulada dos modelos ARMA e	
EOLE (Exemplo 4 - Caso II)	74
Figura 32 – Pórtico plano de 2 andares	75
Figura 33 – Evolução da probabilidade de falha acumulada no tempo (Exemplo 5 -	
Caso I)	77
Figura 34 – Evolução da probabilidade de falha acumulada no tempo (Exemplo 5 -	
Caso II)	78

# Lista de tabelas

Tabela 1 – Diferença entre processo estocástico com outros termos similares . . . . .	19
Tabela 2 – Escolha da ordem $p$ e $q$ baseada na ACF e PACF . . . . .	44
Tabela 3 – Valores da probabilidade de falha acumulada e instantânea (Exemplo 1 - Caso I) . . . . .	57
Tabela 4 – Valores da probabilidade de falha acumulada e instantânea (Exemplo 1 - Caso II) . . . . .	58
Tabela 5 – Parâmetros e variáveis aleatórias da viga . . . . .	60
Tabela 6 – Valores da probabilidade de falha acumulada e instantânea (Exemplo 2 - Caso I) . . . . .	61
Tabela 7 – Valores da probabilidade de falha acumulada e instantânea (Exemplo 2 - Caso II) . . . . .	64
Tabela 8 – Variáveis aleatórias consideradas no problema . . . . .	65
Tabela 9 – Valores da probabilidade de falha acumulada e instantânea (Exemplo 3 - Caso I) . . . . .	66
Tabela 10 – Valores da probabilidade de falha acumulada e instantânea (Exemplo 3 - Caso II) . . . . .	68
Tabela 11 – Valores dos processos estocásticos e variáveis aleatórias . . . . .	70
Tabela 12 – Valores da probabilidade de falha acumulada e instantânea (Exemplo 4 - Caso I) . . . . .	71
Tabela 13 – Valores da probabilidade de falha acumulada e instantânea (Exemplo 4 - Caso II) . . . . .	73
Tabela 14 – Valores do processo estocástico, variável aleatória e parâmetros deter- minísticos . . . . .	76
Tabela 15 – Valores da probabilidade de falha acumulada (Exemplo 5 - Caso I) . . .	76
Tabela 16 – Valores da probabilidade de falha acumulada (Exemplo 5 - Caso II) . . .	77

# Sumário

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>1</b>
<b>1.1</b>	<b>Objetivos</b>	<b>2</b>
<b>1.2</b>	<b>Justificativa</b>	<b>3</b>
<b>1.3</b>	<b>Organização do Trabalho</b>	<b>4</b>
<b>2</b>	<b>REFERENCIAL TEÓRICO</b>	<b>6</b>
<b>2.1</b>	<b>Métodos usados na análise de confiabilidade dependente do tempo</b>	<b>6</b>
<b>2.2</b>	<b>Aplicações de séries temporais na Engenharia</b>	<b>11</b>
<b>3</b>	<b>ANÁLISE DE CONFIABILIDADE</b>	<b>15</b>
<b>3.1</b>	<b>Variáveis aleatórias</b>	<b>15</b>
<b>3.1.1</b>	<b>Conceitos iniciais</b>	<b>15</b>
<b>3.1.2</b>	<b>Problema geral de confiabilidade</b>	<b>17</b>
<b>3.2</b>	<b>Processo estocástico</b>	<b>18</b>
<b>3.2.1</b>	<b>Conceitos iniciais</b>	<b>19</b>
<b>3.2.2</b>	<b>Problema geral de confiabilidade dependente do tempo</b>	<b>22</b>
<b>3.3</b>	<b>Simulação de Monte Carlo</b>	<b>25</b>
<b>3.3.1</b>	<b>Problema independente do tempo</b>	<b>25</b>
<b>3.3.2</b>	<b>Problema dependente do tempo</b>	<b>27</b>
<b>4</b>	<b>EXPANSÃO DA ESTIMATIVA LINEAR ÓTIMA</b>	<b>31</b>
<b>5</b>	<b>SÉRIES TEMPORAIS</b>	<b>35</b>
<b>5.1</b>	<b>Conceitos iniciais</b>	<b>35</b>
<b>5.1.1</b>	<b>Tendência</b>	<b>35</b>
<b>5.1.2</b>	<b>Sazonalidade</b>	<b>36</b>
<b>5.1.3</b>	<b>Estacionariedade</b>	<b>36</b>
<b>5.2</b>	<b>Modelos de séries temporais</b>	<b>38</b>
<b>5.2.1</b>	<b>Modelo Autoregressivo - AR(p)</b>	<b>38</b>
<b>5.2.2</b>	<b>Modelo Média Móvel - MA(q)</b>	<b>38</b>
<b>5.2.3</b>	<b>Modelo Autoregressivo de Média Móvel - ARMA(p,q)</b>	<b>39</b>
<b>5.2.4</b>	<b>Modelo Autoregressivo Integrado Média Móvel - ARIMA(p,d,q)</b>	<b>39</b>
<b>5.3</b>	<b>Condições de Estacionariedade e Invertibilidade</b>	<b>40</b>
<b>5.4</b>	<b>Obtenção dos parâmetros do ARMA(p,q)</b>	<b>41</b>

5.4.1	Obtenção dos parâmetros do ARMA(p,q) a partir de dados históricos amostrais	42
5.4.1.1	Análise da Função Autocorrelação e Função Autocorrelação Parcial	42
5.4.1.2	<i>Bayesian Information Criterion</i>	44
5.4.1.3	Função <i>Likelihood</i>	44
5.4.2	Obtenção dos parâmetros do ARMA(p,q) sem dados históricos amostrais	45
<b>6</b>	<b>IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL</b>	<b>49</b>
<b>6.1</b>	<b>Caso I</b>	<b>49</b>
<b>6.2</b>	<b>Caso II</b>	<b>51</b>
<b>7</b>	<b>EXEMPLOS NUMÉRICOS</b>	<b>54</b>
<b>7.1</b>	<b>Exemplo 1: Problema da Barreira Constante</b>	<b>55</b>
7.1.1	Caso I	56
7.1.2	Caso II	57
<b>7.2</b>	<b>Exemplo 2: Viga metálica sujeita à corrosão</b>	<b>60</b>
7.2.1	Caso I	61
7.2.2	Caso II	63
<b>7.3</b>	<b>Exemplo 3: Treliça Plana com 23 barras</b>	<b>64</b>
7.3.1	Caso I	65
7.3.2	Caso II	68
<b>7.4</b>	<b>Exemplo 4: Treliça submetida à dois processos estocásticos</b>	<b>69</b>
7.4.1	Caso I	71
7.4.2	Caso II	72
<b>7.5</b>	<b>Exemplo 5: Pórtico plano de 2 andares</b>	<b>75</b>
7.5.1	Caso I	76
7.5.2	Caso II	77
<b>8</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS</b>	<b>79</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>82</b>



# 1 Introdução

Diversos problemas das ciências e engenharias não podem ser apropriadamente analisados no contexto determinístico devido à incerteza e aleatoriedade de seus parâmetros. Nestes casos, torna-se necessária uma análise probabilística, que considera parâmetros como variáveis aleatórias, permitindo, assim, uma modelagem mais representativa em diversas situações. Um problema de grande interesse nas engenharias é aquele da Análise de Confiabilidade, no qual busca-se estimar a probabilidade de ocorrência de eventos indesejados, ou probabilidade de falha.

É comum que sistemas estejam sujeitos a efeitos dependentes do tempo, como envelhecimento, degradação, mudanças nas condições às quais estão expostos e alteração das suas propriedades ao longo dos anos. Com isso, observa-se que a Análise de Confiabilidade envolvendo apenas variáveis aleatórias pode falhar em representar adequadamente diversas situações de interesse para a engenharia. Em muitos casos, é necessário que sejam considerados aspectos dependentes do tempo. Nestas situações, têm-se os problemas chamados de Análise de Confiabilidade dependente do tempo, onde são considerados parâmetros com variação temporal, determinística ou aleatória. Apesar de serem mais complexos, problemas deste tipo vêm atraindo bastante atenção da comunidade científica da área nos últimos anos.

Notavelmente, a maioria das contribuições científicas da literatura utilizam as chamadas técnicas de expansão para representar os processos estocásticos envolvidos nos problemas. Dentre as técnicas de expansão disponíveis, destaca-se no contexto da Confiabilidade Estrutural a EOLE, do inglês *Expansion Optimal Linear Estimation*. Estas técnicas requerem, de forma geral, que as propriedades do processo estocástico sejam explicitamente conhecidas (i.e média, desvio padrão, autocorrelação). Isto facilita a aplicação de técnicas de expansão em problemas conceituais onde o processo estocástico é definido pelo analista. Porém, a aplicação destas técnicas em casos práticos, onde o analista disponha apenas de uma amostra de dados reais, não é usual, pois neste caso as propriedades do processo não são completamente conhecidas.

Os modelos de séries temporais, como o modelo ARMA (do inglês *Autoregressive Moving Average*), são muito utilizados em diversas áreas da ciência, como engenharia, economia, ciências da natureza, entre outras. Na realidade, considerando o contexto geral, os modelos de Séries Temporais provavelmente são mais populares do que as técnicas de expansão. Através desses modelos é possível simular observações futuras a partir de bancos de dados e/ou medições de características de interesse. A principal vantagem dos modelos de séries temporais é que ao longo dos anos foram desenvolvidas diversas técnicas para se calibrar tais

modelos a partir de bancos de dados reais. Com isso, existe um arcabouço computacional bastante extenso que permite calibrar modelos de séries temporais a partir de dados reais.

Porém, os modelos de Séries Temporais não são usualmente empregados para a Análise de Confiabilidade dependente do tempo. Isso porque não existia uma metodologia robusta, até o presente trabalho, para calibrar adequadamente um modelo de séries temporais diretamente a partir das propriedades do processo estocástico, sem considerar uma amostra de observações. De fato, a maioria das aplicações envolvendo séries temporais, como ARMA, são focadas em problemas onde exista uma amostra de dados reais disponíveis. Por este motivo, a literatura foca apenas em apresentar técnicas de calibração das séries temporais a partir de tais amostras, não levando em consideração o caso onde não exista amostra disponível mas as propriedades do processo já sejam explicitamente conhecidas.

Este trabalho visa demonstrar que a utilização da técnica de expansão EOLE e do modelo de séries temporais ARMA são capazes de fornecer resultados equivalentes no contexto da Análise de Confiabilidade dependente do tempo. De forma a se obter tais resultados, também são apresentadas metodologias apropriadas para os casos não cobertos pela literatura até então: Caso I, calibração de um modelo ARMA apropriado quando as propriedades do processo estocástico são explicitamente conhecidas mas não existe amostra de dados reais; Caso II, aplicação do EOLE a partir de informação que pode ser obtida com uma amostra de dados reais, mas sem conhecimento explícito das propriedades do processo estocástico.

## 1.1 Objetivos

O objetivo geral deste trabalho é verificar se a utilização do modelo de Séries Temporais ARMA é capaz de fornecer resultados semelhantes àqueles obtidos com o método EOLE no contexto da confiabilidade dependente do tempo.

Objetivos específicos:

- Desenvolver metodologia que possibilite utilização do ARMA na ausência de amostra de dados reais, utilizando apenas propriedades explicitamente conhecidas do processo estocástico, como média, desvio padrão e autocorrelação;
- Desenvolver metodologia que possibilite a utilização do EOLE quando as propriedades do processo estocástico não são explicitamente conhecidas, utilizando apenas informações que podem ser obtidas com amostras de dados reais, como média amostral, desvio padrão amostral e autocovariância amostral;
- Comparar os resultados de problemas de confiabilidade dependente do tempo utilizando EOLE e ARMA.

## 1.2 Justificativa

O presente trabalho busca demonstrar a equivalência entre métodos de expansão (EOLE) e métodos de séries temporais (ARMA) para representar processos estocásticos em problemas de confiabilidade dependente do tempo. Esta equivalência permite que a metodologia mais adequada para cada finalidade prática possa ser utilizada. Por exemplo, diferentemente do que ocorre no EOLE, nos modelos de séries temporais não são necessários os cálculos dos autovalores e autovetores. Com isso, situações onde a função de autocorelação não seja do tipo exponencial, necessitam do cálculo aproximado dos autovalores e autovetores, aumentando a carga e complexidade numérica do problema. Outra situação para utilização desses métodos seria, quando dados amostrais são conhecidos, usar inicialmente modelos de séries temporais para calibrar um modelo numérico deste problema e, a partir deste modelo numérico calibrado, usar o EOLE na análise de confiabilidade dependente do tempo.

Além disso, permite que a metodologia mais vantajosa do ponto de vista computacional possa ser adotada em cada caso. Tudo isso sabendo-se que as metodologias são capazes de obter resultados equivalentes e, portanto, não há prejuízo significativo quanto à precisão dos resultados. Entre as principais vantagens do uso de modelos de séries temporais na análise de confiabilidade dependente do tempo em comparação com o EOLE (e outras técnicas de expansão), pode-se citar que:

- Processos estocásticos não estacionários, com tendências ou com comportamentos sazonais podem ser representados facilmente via modelos de séries temporais, diferentemente do EOLE que é direcionado, na grande maioria dos casos, para a representação apenas de processos estacionários;
- Modelos de séries temporais são mais populares que o EOLE em aplicações práticas, tendo em vista que já são amplamente utilizados há décadas em diversas áreas do conhecimento (ver (CRYER; CHAN, 2008)). Com isso, os modelos de séries temporais possuem uma ampla exploração teórica e disponibilidade de algoritmos. Diversas aplicações reais da Engenharia já fazem uso desta metodologia (LIU et al., 2021; SALAMANIS et al., 2021; MELCHIOR et al., 2021; WANG; ZHAO; HE, 2020; LU; LI, 2021; CRIBARI-NETO; SCHER; BAYER, 2021; HECQ; VOISIN, 2021);
- Em situações práticas onde existam amostras com dados históricos do processo estocástico, os modelos de séries temporais como ARMA são amplamente utilizados (GOYAL; PABLA, 2016). Isso porque existem técnicas robustas de calibragem dos modelos de séries temporais a partir de dados reais. O mesmo não ocorre, de forma geral, para técnicas de expansão como o EOLE.

- A utilização do EOLE requer alguns passos intermediários, como a solução de um problema de autovalores algébrico. Este problema pode ocasionar dificuldades computacionais em aplicações de larga escala, caso o problema numérico torne-se mal condicionado. Já a utilização de modelos de séries temporais não envolve métodos numéricos complexos, uma vez que o modelo tenha sido calibrado.
- **Box e Jenkins (1978)** ressaltam ainda que outra vantagem do uso de séries temporais é que tais modelos podem ser usados para fazer previsões futuras dos fenômenos analisados, além de ser possível avaliar situações com tendências, comportamento sazonal, processos estocásticos não estacionários, entre outros, servindo de base para, por exemplo, planejamento de negócios, economia, produção, otimização, organização e execução de projetos voltados para a engenharia. Logo, os modelos de séries temporais são, de forma geral, mais flexíveis e adaptáveis às condições encontradas na prática do que as técnicas de expansão como EOLE.

Estas características dos modelos de séries temporais justificam o tema de estudo do presente trabalho.

### 1.3 Organização do Trabalho

O texto da tese foi dividido nos seguintes capítulos:

- **CAPÍTULO 2 - REFERENCIAL TEÓRICO:** Como o intuito deste trabalho é realizar análise de confiabilidade usando modelos de séries temporais, neste capítulo foram apresentados os principais trabalhos relacionados ao tema desta tese. Primeiro, foram apresentados os principais métodos envolvidos, direto ou indiretamente, no cálculo da probabilidade de falha dependente do tempo. Posteriormente, trabalhos científicos sobre aplicações de modelos de séries temporais na engenharia estrutural são brevemente revisados.
- **CAPÍTULO 3 - ANÁLISE DE CONFIABILIDADE:** Os principais conceitos envolvidos no cálculo e análise de confiabilidade, independente e dependente do tempo, são explicados. Definições de variáveis aleatórias e processos estocásticos são apresentadas, assim como os cálculos das funções envolvidas na análise de confiabilidade. Além disso, é apresentado o método da simulação de Monte Carlo, usado nesta tese para o cálculo da probabilidade de falha.
- **CAPÍTULO 4 - EXPANSÃO DA ESTIMATIVA LINEAR ÓTIMA:** O método usualmente empregado nos trabalhos acadêmicos relacionados à confiabilidade depen-

dente do tempo é apresentado neste capítulo. O procedimento de cálculo é desenvolvido e a sua equação final é apresentada.

- **CAPÍTULO 5 - SÉRIES TEMPORAIS:** Conceitos iniciais e os principais tipos de modelos de séries temporais são apresentados neste capítulo. Além disso, são apresentados métodos para a obtenção dos parâmetros de cada modelo, além das condições matemáticas necessárias para que sejam gerados processos estocásticos estacionários. Uma atenção especial é dada na explicação dos possíveis caminhos para obtenção dos parâmetros desses modelos, sendo apresentada a alternativa a partir de uma amostra de dados históricos (usualmente empregada), além de outra possibilidade sem necessitar de uma amostra de dados históricos (metodologia nova proposta neste trabalho).
- **CAPÍTULO 6 - IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL:** O procedimento e fluxograma de cálculos realizados para obtenção dos resultados, para os dois casos considerados nesta tese, são apresentados neste capítulo.
- **CAPÍTULO 7 - EXEMPLOS NUMÉRICOS:** Os resultados da pesquisa são apresentados através de diferentes exemplos numéricos. Com o intuito de retratar diferentes situações e possibilidades da engenharia, foram selecionados exemplos numéricos considerando barreira constante, barreira variável, viga metálica sujeita à corrosão, treliça plana com o uso do método de elementos finitos, além de sistema em série com dois processos estocásticos.
- **CAPÍTULO 8 - CONSIDERAÇÕES FINAIS:** Por fim, conclusões e indicações de trabalhos futuros são apresentadas e discutidas, além de ressaltar as principais contribuições alcançadas neste trabalho.

## 2 Referencial Teórico

### 2.1 Métodos usados na análise de confiabilidade dependente do tempo

Entre os métodos que mais se destacam atualmente estão os métodos de expansões em série como o *Karhunen-Loève* (KL), estimativa linear ótima (OLE) (do inglês *Optimal Linear Estimation method*) e expansão da estimativa linear ótima (EOLE) (do inglês *Expansion Optimal linear estimation method*). Os métodos KL, OLE e EOLE são usados como estratégias de discretização no tempo, sendo utilizados posteriormente para gerar as simulações a serem analisadas via simulação de Monte Carlo (SMC). Um dos trabalhos mais antigos e importantes é o de [Li e Kiureghian \(1993\)](#), onde é mostrado o funcionamento do EOLE, além de fazer comparações deste método com o KL e OLE. Trabalhos onde os autores explicam cada método detalhadamente, além de fazerem várias comparações entre si e mostrando a eficiência de cada um em casos específicos, são apresentados em [\(LI; KIUREGHIAN, 1993\)](#) e [\(ZHANG; ELLINGWOOD, 1994\)](#). Cabe ressaltar que uma das dificuldades encontradas na análise de processos estocásticos está no tamanho e escolha dos intervalos dos tempos a serem analisados.

O método PHI2, inicialmente proposto por [Andrieud-Renaud, Sudret e Lemaire \(2004\)](#), serve para calcular a taxa de falha  $v$  para processos estocásticos. Para isso, a ideia de tal método era simplificar o processo de cálculo fazendo a análise do índice de confiabilidade nos tempos  $t$  e  $(t + \Delta t)$ , tornando o processo invariante no tempo, ou seja, as análises eram realizadas nos espaços  $X(t)$  e  $X(t + \Delta t)$ . Contudo, este método se mostrou muito sensível e instável a valores pequenos de  $\Delta t$ , sendo aperfeiçoado em [Sudret \(2008\)](#), definido por PHI2+, onde o autor realizou a derivação analítica da taxa de cruzamento  $v$ , mantendo as mesmas vantagens do PHI2 original (de tornar a análise invariante do tempo), além de permitir que o PHI2+ fosse menos sensível aos valores de  $\Delta t$  e sendo usado ainda em problemas estacionários e não-estacionários.

Uma alternativa para avaliar confiabilidade em problemas dependentes do tempo não envolvendo técnicas de *importance sampling* e nem taxa de cruzamento (evitando aproximações nos resultados e problemas nos casos não estacionários) é o método proposto por [Li e Mourelatos \(2009\)](#). No seu trabalho, [Li e Mourelatos \(2009\)](#) propõem a utilização de dois algoritmos de otimização, um para o laço “interno” e o outro para o laço “externo”. O laço interno procuraria, de maneira aproximada, os máximos globais com a ajuda de um algoritmo genético e, posteriormente, usaria outro algoritmo de otimização baseado em gradiente para encontrar os pontos exatos, sendo feita a avaliação das funções de estado limite nesses pontos encontrados.

Vale atentar que [Li e Mourelatos \(2009\)](#) focaram em obter resultados precisos com menos custo computacional, quando comparado aos outros métodos (por exemplo: PHI2, EOLE, Monte Carlo, entre outros). Entretanto, os autores ressaltam que o custo computacional pode aumentar de maneira brusca para os casos em que se tenha muitas variáveis aleatórias.

Seguindo os trabalhos de [Li e Mourelatos \(2009\)](#), [Singh, Mourelatos e Li \(2010\)](#) aplicaram a técnica de algoritmos genéticos para otimizar funções baseada no custo usando probabilidade dependente do tempo. Para o cálculo da probabilidade de falha acumulada -  $P_f$ , os autores usaram o método PHI2 e a simulação de Monte Carlo, além de algoritmos genéticos, aplicando tais métodos em problemas de sistema de duas massas vibratórias e sistemas de embreagem de automóveis.

O JUR/FORM (*Joint Upcrossing Rates and First Order Reliability Method*), proposto por [Hu e Du \(2013b\)](#), apresenta como alternativa aos métodos PHI2 e PHI2+, o cálculo da taxa de cruzamento conjunta para evitar erros nos problemas onde os cruzamentos possuem uma alta dependência.

[Hu e Du \(2013b\)](#) utilizaram o método PHI2+ para calcular a taxa de cruzamento isolada e propõem como adicional o cálculo da taxa de cruzamento conjunta, para evitar erros encontrados no PHI2+ para os casos em que as falhas possuem alta dependência. Como o JUR/FORM utiliza método numérico para resolver algumas integrais internas da sua formulação matemática, sua resposta pode ser afetada com o tamanho do incremento do tempo  $\Delta t$ . Além disso, o autor argumenta que tal método pode ser aplicado também em problemas não gaussianos e não estacionários, desde que seja feita a transformação total para o espaço gaussiano.

Uma alternativa para avaliar a probabilidade de falha usando processos estocásticos foi proposta por [Hu e Du \(2013a\)](#), em que obtiveram resultados excelentes por tratar e usar a técnica de valores extremos. O método se mostrou pouco custoso computacionalmente e tão preciso quanto a simulação de Monte Carlo. No entanto, uma limitação deste método está relacionada à quantidade de processos estocásticos, pois apenas um processo estocástico pode ser abordado em cada análise, além de ser focado em problemas onde o processo estocástico representa força ou tensão.

Os mesmos autores também criaram o método FOSA (*First Order Simulation Approach*) em [Hu e Du \(2014\)](#), fazendo o uso de aproximações de 1<sup>a</sup> ordem (FORM) e expansões em série (EOLE, OLE, KL), ou seja, criaram um método de amostragem baseado no FORM. Entre as principais vantagens desse método estão em usar as vantagens dos métodos de simulação (precisão) junto com os de primeira ordem (rapidez), e serve para funções com variáveis aleatórias e processos não estacionários, além de poder ser usado para qualquer intervalo de tempo. O FOSA substitui a função de estado limite por um processo estocástico equivalente com pouco custo computacional. Ao invés do OLE/EOLE, poderia ter usado

séries temporais, mas o autor optou pelas primeiras. Caso o problema seja não estacionário, usa-se também a técnica de *Kriking* para melhorar sua precisão. Resultados mostraram uma rapidez de até 40 vezes quando comparado com o método PHI2, além de ser mais preciso. Vale ressaltar que o tamanho do  $\Delta t$  também interfere diretamente nos resultados desse método.

No trabalho de Jiang et al. (2014), os autores mostram um método de análise de confiabilidade dependente do tempo baseado na discretização no tempo, o TRPD, transformando um processo dependente do tempo em um processo independente do tempo, além de evitar o cálculo da taxa de cruzamento. Os resultados do TRPD mostram que, adotando-se um valor adequado para o intervalo do tempo, o produto obtido pelo TRPD se torna tão preciso quanto a simulação de Monte Carlo, além de ter a vantagem relacionada ao baixo custo computacional, necessitando analisar poucas vezes a função objetivo do problema. O fato de não calcular a taxa de cruzamento faz com que a eficiência do método não dependa do tipo da função estado limite e da adoção do processo estocástico como processo de Poisson ou de Markov. Vale ressaltar que Jiang et al. (2014) tratam o problema dependente do tempo como um processo em série, sendo analisado em vários tempos no decorrer da vida útil da estrutura, através do FORM.

Embora ainda sejam escassos estudos relacionados à análise de sistemas de confiabilidade variando no tempo, Jiang et al. (2017) conseguiram aplicar o TRPD para tais análises, obtendo resultados satisfatórios quando comparado a simulação de Monte Carlo e com um erro médio menor que 4% entre os dois resultados.

Baseado ainda no método TRPD, os próprios autores elaboraram uma melhoria (*improvement*) e criaram o iTRPD (JIANG et al., 2018). A principal alteração foi que, diferente do TRPD, no iTRPD, a análise de confiabilidade é feita apenas para um nível do componente e não precisa de variáveis aleatórias, diminuindo, assim, o custo computacional, ficando mais estável e mantendo a sua alta precisão. Como usa o FORM, ainda possui a limitação para aplicação em problemas não lineares e não pode ser aplicado às situações em que os processos aleatórios são correlacionados. A escolha do  $\Delta t$  ainda se mantém como algo que interfere diretamente nos resultados, no entanto, o iTRPD se mostrou mais eficiente computacionalmente e preciso que o TRPD e PHI2, além de poder ser aplicado à análise de sistemas variando no tempo.

A técnica de *Polynomial Chaos Expansion* (PCE) foi usada para o cálculo da  $P_f$  de processos estocásticos, como visto nos trabalhos de Hawchar, Soueidy e Shoefs (2015) e Hawchar, Soueidy e Shoefs (2017), onde os autores mostram o método t-PCE e TV-PCA-SPCE, utilizando as PCE juntamente com as simulações via KL e EOLE para estimar a  $P_f$ . Os resultados obtidos foram comparados com SMC e PHI2, sendo o t-PCE mais eficiente e preciso quando comparado com o PHI2. Por fazer o uso das PCE, o t-PCE necessitou de menos análises da função de estado limite para chegar ao valor final da  $P_f$ . Como dicas para



trabalhos futuros, os autores ressaltam que ainda existem lacunas a serem exploradas no uso do t-PCE em problemas de sistemas em série/paralelo e de otimização. Vale ressaltar ainda que, entre as grandes vantagens desses métodos, estão as possibilidades de servirem para problemas não-gaussianos e não-estacionários, além de problemas com mais de um processo estocástico, limitações essas que são encontradas em outros métodos.

Um método para estimar a taxa de cruzamento na análise de confiabilidade de estruturas dependente do tempo foi proposto por Moarefzadeh e Sudret (2018). O método foi baseado na técnica de simulação direcional (*Directional Simulation Method – DSM*), criada e aplicada anteriormente em alguns problemas por Ditlevsen et al. (1988), Melchers (1992) e Moarefzadeh e Melchers (1999), e é um aperfeiçoamento do método PHI2 e PHI2+, mostrados anteriormente em Andrieud-Renaud, Sudret e Lemaire (2004) e Sudret (2008).

A técnica DSM foi elaborada para ser aplicada em problemas com várias funções de estado limite e em problemas não-estacionários. Entre suas principais vantagens está evitar problemas de instabilidade devido à escolha de um  $\Delta t$  muito pequeno, fator importante na análise de problemas estocásticos. Para isso, diferentemente do método PHI2 que realizava análises em  $X(t)$  e  $X(t+\Delta t)$ , a simulação direcional realiza as simulações em  $x(t)$  e sua derivada. Mesmo usando o método das diferenças finitas para calcular a derivada, percebeu-se uma maior estabilidade nos resultados do DMS para valores pequenos de  $\Delta t$ . Entretanto, do ponto de vista computacional, por surgir um novo espaço (o da derivada de  $x(t)$ ), o DSM é mais custoso computacionalmente, necessitando de um espaço de dimensão  $(2n+m)$ , ao invés de  $(n+m)$  que é usado no PHI2.

Ainda com relação ao DSM, o trabalho de Nie e Ellingwood (2005) mostra que essa técnica também é eficiente para tratar da análise de confiabilidade de estruturas usando o método dos elementos finitos - MEF. Em situações onde se usa MEF, um dos principais problemas é o custo computacional, que muitas vezes torna a aplicação da técnica inviável. No entanto, Nie e Ellingwood (2005) mostram que o DSM, juntamente com a técnica de conjuntos de pontos determinísticos e com o uso de redes neurais, se mostra mais eficiente e menos custosa que usar SMC com o *importance sampling*, por exemplo. Segundo os autores, no caso do *importance sampling*, problemas relacionados à identificação da localização, a forma da função densidade de importância e as incertezas com relação ao custo e a optimalidade dos resultados, ainda se mostram como pontos a serem explorados.

Além dos métodos do PHI2, PHI2+, DMS e FOSA, Gong e Frangopol (2019) propuseram o método NEWREL, sendo mais preciso e menos sensível ao valor do  $\Delta t$  que os demais. A ideia do NEWREL foi baseada na resolução de problema de confiabilidade dependente do tempo através da análise do problema como sistemas em séries, calculando as  $P_f$  para cada sistema e somando-as ao final. No entanto, mesmo sendo preciso e pouco custoso quando comparado a SMC, o NEWREL ainda resulta em erros no caso de se adotar mais de uma

função de estado limite e/ou no caso dessas serem não-lineares. Vale salientar que Gong e Frangopol (2019) concluíram ainda que o NEWREL não permite estimar o erro relacionado ao seu resultado, sendo prejudicial e não confiável em alguns casos.

Seguindo a linha de processos estocásticos, na literatura ainda se encontram poucos trabalhos relacionados a confiabilidade de sistemas para várias funções de estados limite. Trabalho recente de Zhou, Gong e Hong (2017) mostra novas alternativas de fazer tal análise usando o FORM, porém com algumas melhorias, diminuindo, assim, o custo computacional e aumentando a robustez do método. Em seu trabalho, Zhou, Gong e Hong (2017) recomendam analisar cada função de estado limite isoladamente na aplicação do FORM, além de trabalhar em um espaço distinto do espaço normal padronizado. Por fim, encontra-se o coeficiente de correlação entre as funções de estado limite e, conseqüentemente, a probabilidade de falha do sistema com variáveis aleatórias. Tal método pode ser importante, pois surge como uma alternativa futura mais robusta e menos custosa para calcular o coeficiente de correlação usado por vários autores na análise de processos estocásticos.

Um método recente baseado na teoria de primeira passagem é o de Yu et al. (2020). Os autores usam uma *approximation first - crossing probability density function method* - AFC-PDFM. Utiliza-se ainda uma aproximação baseada nos métodos dos mínimos quadrados, método da colocação, quadratura gauss-hermite e bases polinomiais. A pesquisa mostra que a partir de alguns pontos, uma função aproximada é gerada e os momentos originais do sistema são calculados. Com os momentos calculados, os autores usam o *maximum entropy method* - MEM para encontrar a função densidade probabilidade e, conseqüentemente, a probabilidade de falha do sistema. O AFC-PDFM se mostrou mais rápido e eficiente que a SMC e o iTRPD, no entanto, em alguns casos, dependendo do valor do intervalo  $\Delta t$  de tempo adotado, o erro comparado com SMC chegou a 7%, algo a se analisar em outros problemas similares. Vale ressaltar ainda que os autores não chegam a um valor aconselhável de  $\Delta t$ .

Wu, Hu e Du (2020) e Hu et al. (2021) realizaram também análises de confiabilidade de sistemas dependentes do tempo: Wu, Hu e Du (2020) usando métodos de confiabilidade de primeira e segunda ordem, e Hu et al. (2021) usando métodos baseados em expansões e técnica de krikagem.

Zhang, Gong e Li (2021) apresentam o método AMPPT, fazendo a análise de confiabilidade dependente do tempo através do ponto mais provável da simulação. Os autores criam um algoritmo iterativo que combina técnica *Kriking* com o uso do EOLE, alcançando resultados satisfatórios quando comparados a outros métodos baseado na simulação de Monte Carlo.

Por fim, no trabalho de Kroetz, Medeiros e Torii (2020), fruto desta tese, o modelo ARMA foi utilizado para análise de confiabilidade dependente do tempo e os resultados foram comparados com aqueles obtidos com o EOLE. Nesse trabalho, a calibração do modelo ARMA

foi realizada gerando-se inicialmente uma amostra fictícia para o processo estocástico. Esta amostra foi posteriormente utilizada para calibrar o modelo ARMA com técnicas padrões da área (por exemplo, análise da função de autocorrelação e autocorrelação parcial, análise da função likelihood, entre outras citadas em (CRYER; CHAN, 2008)). Porém, observou-se que a geração da amostra fictícia do processo estocástico ocasiona erros estatísticos, que posteriormente deterioram a precisão dos resultados. Evidenciou-se assim a necessidade de uma formulação mais robusta para a calibração do modelo ARMA diretamente a partir das propriedades do processo estocástico. Esta formulação é apresentada nesta tese.

## 2.2 Aplicações de séries temporais na Engenharia

Nesta seção, serão apresentados alguns estudos relacionados à aplicação de modelos de séries temporais Autoregressivo (AR) (do inglês *autoregressive*), Média Móvel (MA) (do inglês *moving average*), Autoregressivo de Média Móvel (ARMA) (do inglês *autoregressive moving average*) e Autoregressivo Integrado Média Móvel (ARIMA) (do inglês *autoregressive integrated moving average*) em problemas de confiabilidade e segurança estrutural.

Os trabalhos de (Singh, Mourelatos e Nikolaidis (2011a) e (Singh, Mourelatos e Nikolaidis (2011b)) mostram um método de *importance sampling* aplicado a processos estocásticos usando modelos de séries temporais autoregressivos (AR, ARMA e ARIMA) para gerar simulações randômicas. Os autores ressaltam que os modelos de séries temporais já são bastante conhecidos nas áreas de finanças, economia, meteorologia, entre outras, e aplicam-os na área de engenharia. A técnica é também baseada nos problemas de primeira passagem e ao contrário das expansões KL e EOLE que assumem a estacionariedade e são custosos nos cálculos dos autovalores/autovetores, as simulações via séries temporais não sofrem com essas limitações. Os resultados de (Singh, Mourelatos e Nikolaidis (2011a) e (Singh, Mourelatos e Nikolaidis (2011b)) mostram que, quando comparado à simulação de Monte Carlo, o modelo AR requer uma menor quantidade de simulação das funções de estado limite.

Trabalhos como os desenvolvidos por (Walls e Bendell (1987), Mignolet e Spanos (1989), Ho e Xie (1998) e Billinton e Wangdee (2007)) têm realizado análise de confiabilidade com modelos de séries temporais. Os estudos não foram direcionados diretamente para o cálculo da probabilidade de falha instantânea  $p_f$  ou acumulada  $P_f$ , principalmente para pequenos valores da  $P_f$ , que são os mais usuais na área de Engenharia, além de não terem verificado a eficácia desses métodos em comparação com outros modelos da literatura.

No trabalho de (Mignolet e Spanos (1989)), os autores mostram alguns casos de aplicação de modelos ARMA na engenharia estrutural focado na área de turbulência atmosférica, ondas e terremotos. No entanto, os autores não fazem análise de confiabilidade dependente do tempo propriamente dita, apenas mencionam alguns estudos preliminares que foram desenvolvidos

nesta área, sendo a maioria através de dados históricos existentes. Os autores ainda deixam claro a intenção de usar modelos ARMA em problemas de análise estrutural com o avanço da tecnologia, não tendo realizados tais estudos.

Sohn, Fugate e Farrar (2000), Fugate, Sohn e Farrar (2001) e Sohn e Farrar (2001) aplicaram modelos AR(36), AR(5) e AR(30), respectivamente, em análises de danos relacionados às vibrações estruturais. Em Sohn, Fugate e Farrar (2000) foram realizados testes experimentais em sistemas massa-mola, Fugate, Sohn e Farrar (2001) usaram um pilar de concreto armado e Sohn e Farrar (2001) utilizaram um sistema massa-mola de oito graus de liberdade, variando características do sistema e a temperatura, e empregaram modelos AR(36), AR(5) e AR(30), a partir dos dados experimentais, para prever diferentes cenários de danos estruturais.

Owen et al. (2001) mostraram o uso de modelos AR para a análise da frequência temporal de estruturas da engenharia civil. Ao invés de usar a transformada rápida de Fourier para gerar os espectros de frequência, os autores usaram modelos AR. Dados amostrais da amplitude máxima de cabos de pontes estaiadas sujeitas à força do vento (situação não estacionária) e de testes modais de vigas de concreto armado fissuradas (situação com não linearidade física e/ou geométrica) foram analisadas. Owen et al. (2001) ressaltam que, como os modelos AR são sensíveis dependendo da escolha dos parâmetros adotados, os mesmos devem ser usados com cautela.

Omenzetter e Brownjohn (2006) usaram modelos ARIMA para detectar danos e mudanças estruturais em uma ponte, a partir de dados históricos medidos na fase de construção e na fase de funcionamento através do sistema de *structural health monitoring (SHM)*. Conforme os autores, alguns fatores não foram levados em consideração, por exemplo a mudança da temperatura diária, e os resultados encontram as mudanças estruturais bruscas, mas não especifica com exatidão, o local e a intensidade de tal mudança, devendo ser complementado com uma análise de confiabilidade e simulação numérica, o que não foi realizado segundo mencionado pelos próprios autores.

Carden e Brownjohn (2008) aplicaram modelos ARMA para filtrar dados históricos experimentais de um pórtico metálico de quatro andares e de duas pontes considerando análise dinâmica. Carden e Brownjohn (2008) usaram em alguns casos modelos ARMA(30,30) e mostraram que os mesmos são capazes de, a partir da mudança de seus coeficientes, prever mudanças no sistema estrutural analisado.

Em seu trabalho, Zheng e Mita (2008) aplicaram modelos ARMA com o intuito de identificar a intensidade e a localização do dano de estruturas sujeitas à variações de cargas dinâmicas e diferentes cenários de terremotos. Enquanto Zheng e Mita (2008) criaram inicialmente modelos ARMA a partir dos dados experimentais da estrutura intacta e, posteriormente, criaram novos modelos ARMA para a estrutura possivelmente danificada (quando sujeita à diferentes

cenários de cargas dinâmicas). Ao final, a partir da diferença dos coeficientes desses modelos, foi possível identificar a intensidade e a localização do possível dano estrutural.

Drignei (2011) aplicou modelos AR de séries temporais em sistemas estruturais mecânicos (suspensão veicular). Como o próprio autor ressalta, a análise estrutural desses modelos requer alto custo computacional devido à complexidade do modelo matemático usado, por isso, como alternativa de diminuir o custo computacional, modelos AR foram aplicados.

Assim como no trabalho de Zheng e Mita (2008), Bao, Hao e Li (2013) usaram modelos ARMA para monitorar a segurança estrutural de tubos *offshore*. Os autores realizaram estudo numérico e experimental para validar a proposta desenvolvida. Em ambos os casos, criaram modelos ARMA para a estrutura intacta e, posteriormente, criaram novos modelos para a estrutura possivelmente danificada, quando exposta à solicitações dinâmicas, sendo determinado um indicador de dano a partir da diferença dos parâmetros de tais modelos. Bao, Hao e Li (2013) mostram que a abordagem desenvolvida é robusta, sendo possível detectar o dano estrutural e sua localização nesses tubos.

Modelos AR para detecção de danos estruturais também foram realizados por Yao e Pakzad (2013). Os autores empregaram o AR(20) em um modelo numérico de uma ponte com 10 graus de liberdade, usando os coeficientes do AR(20) para determinar possíveis comportamentos adversos e danos estruturais ao modelo numérico analisado no programa *ANSYS*.

A empregabilidade e importância do uso de modelos de séries temporais, principalmente modelos ARMA, no monitoramento de segurança estrutural através de dados experimentais e numéricos para solicitações relacionadas à vibrações, ficam nítidos na revisão do estado da arte feito por Goyal e Pabla (2016). Os autores ressaltam que desde 1951 esses métodos são usados nos mais diversos problemas de segurança estrutural, servindo como uma ferramenta importante na detecção de danos e tomada de decisões de projetos de engenharia.

Um trabalho onde modelos de séries temporais foram aplicados juntamente com a técnica *Vine copula* e *Kriking* na análise de confiabilidade dependente do tempo, para problemas em que processos estocásticos são não-Gaussianos e correlacionados entre si, foi o desenvolvido por Hu e Mahadevan (2017), chamado de Vine-ARMA. No entanto, os autores ressaltam que tal método pode resultar em um alto custo computacional com o aumento da ordem do modelo ARMA, sendo estimado que para um modelo ARMA de ordem  $n$  a quantidade de coeficientes a serem determinados na técnica aumenta na ordem de  $(n - 2)^2$ . A *Vine copula* foi usada para calcular a correlação entre os modelos ARMA e a técnica *Kriking* para, principalmente, diminuir o custo computacional. Cabe ressaltar ainda que, para utilização do método proposto pelos autores, dados históricos iniciais são necessários para a implementação do Vine-ARMA.

Com o intuito de avaliar a sensibilidade de cada coeficiente do modelo AR quando sujeito a diferentes sistemas estruturais, Datteo et al. (2018) realizaram uma análise de sensibilidade

global para saber a relação de cada parâmetro do modelo AR quando é feita variações na força, massa, rigidez e razão de amortecimento de pórticos. Os autores concluíram que determinados coeficientes são mais sensíveis à determinadas mudanças estruturais, não tendo uma relação de dependência uniforme entre todos eles. Conforme mencionado no trabalho de [Datteo et al. \(2018\)](#), o modelo ARMA é uma das ferramentas mais precisas para modelar sistemas lineares sujeitos a excitações randômicas. [Datteo et al. \(2018\)](#) ressaltam ainda que a principal desvantagem em usar modelos ARMA é a necessidade de usar uma abordagem não linear do método dos mínimos quadrados para encontrar os coeficientes da parcela do MA. Nesses casos, o uso dos mínimos quadrados, além de ter um alto custo computacional, pode ter problemas de convergência e mínimos locais. Para evitar problemas no uso de modelos ARMA, um modelo autoregressivo  $AR(p)$  pode aproximar o  $ARMA(n, n-1)$  quando  $p \gg n$ , com  $p$  e  $n$  sendo as ordens dos modelos  $AR(p)$  e  $ARMA(n, n-1)$ , respectivamente ([DATTEO et al., 2018](#)).

[Zhang, Ju e Wang \(2018\)](#) aplicaram modelos AR para processos estocásticos que representassem a força do vento na análise de sistemas de torres de transmissão de energia, acoplando tal análise com o programa *ANSYS*. [Avci et al. \(2021\)](#) fizeram uma revisão da literatura de vários estudos onde são empregados modelos de séries temporais para detectar danos baseado em vibrações em estruturas civis.

Por fim, [Wang, Beer e Ayyub \(2021\)](#) fazem uma revisão da literatura de vários métodos empregados na análise de confiabilidade dependente do tempo para estruturas em deterioração, citando apenas os trabalhos de [Samaras, Shinzuka e Tsurui \(1985\)](#) e [Hu e Mahadevan \(2017\)](#) quando se trata do uso de modelos de séries temporais na análise de confiabilidade estrutural dependente do tempo, indicando que esse ramo (do uso de modelos ARMA envolvendo o cálculo da  $P_f$ ) ainda tem muito a ser explorado.

## 3 Análise de confiabilidade

Estruturas civis são projetadas e executadas para garantirem bem estar, conforto e segurança aos seus usuários durante toda sua vida útil, ou seja, até o fim do período de funcionamento para o qual foi projetada. No entanto, existem fatores que ameaçam a segurança estrutural, como por exemplo, a resistência da estrutura que pode diminuir no decorrer do tempo devido aos impactos de condições naturais ou operacionais. Assim, uma análise da segurança da estrutura no decorrer do tempo é importante para que seja avaliado seu risco de colapso ou se a mesma necessita de reparos.

Ademais, muitas cargas têm seus valores de frequência e/ou magnitude modificados com o passar do tempo, por exemplo as cargas de tráfego, vento, sísmicas, entre outras. Esse conjunto de fatores indicam a importância de avaliar a confiabilidade estrutural do ponto de vista probabilístico e, não apenas, do ponto de vista determinístico. A análise do ponto de vista probabilístico pode ser realizada, principalmente, com o uso de variáveis aleatórias e/ou de processos estocásticos, ambas descritas a seguir.

### 3.1 Variáveis aleatórias

#### 3.1.1 Conceitos iniciais

Como o próprio nome sugere, *variável aleatória* (VA) é uma variável que pode assumir diferentes valores dentro de um espaço amostral. Definindo  $\mathbf{X}(\omega)$  (ou apenas  $\mathbf{X}$ ) como uma variável aleatória e  $\Omega$  o espaço amostral contendo todos os possíveis valores de um experimento aleatório  $\omega$ , onde para cada realização do experimento aleatório  $\omega$  é atribuído um número real  $x$ , a probabilidade  $P[.]$  que o valor de  $\mathbf{X}$  seja menor ou igual a um número real qualquer  $x$  é dada pela *função de distribuição acumulada de probabilidade* (FDA)  $F_X(x)$  (DITLEVSEN; MADSEN, 1996; MELCHERS; BECK, 2018):

$$F_X(x) = P[X \leq x] \quad (3.1)$$

Uma das maneiras de representar a frequência que os valores de  $\mathbf{X}$  aparecem em uma determinada amostra é através da *função densidade de probabilidade* (FDP)  $f_X(x)$ :

$$f_X(x) = \lim_{\Delta X \rightarrow 0} \frac{P[x \leq X \leq x + \Delta X]}{\Delta X} \quad (3.2)$$

sendo assim, a FDP é a derivada da FDA:



$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx} \quad (3.3)$$

Com isso, para calcular a probabilidade de um valor  $X$  ser menor ou igual a um valor  $x$ , pode-se relacionar a FDA com a FDP por:

$$F_X(x) = P[X \leq x] = P[X \in (-\infty, x]] = \int_{-\infty}^x f_X(x)dx \quad (3.4)$$

O valor esperado  $E[.]$  ou média  $\mu_X$  (ou apenas  $\mu$ ) de uma variável aleatória  $\mathbf{X}$  é definido como (DITLEVSEN; MADSEN, 1996; MELCHERS; BECK, 2018):

$$\mu_X = E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)dx \quad (3.5)$$

ou então por:

$$\mu_X = E[X] = \int_{\Omega} x f_X(x)dx \quad (3.6)$$

em que  $\Omega$  é o espaço amostral ou o suporte de  $f_X(x)$ . Embora as Equações 3.5 e 3.6 representem uma média ponderada dos possíveis valores de  $\mathbf{X}$ , ela não fornece informação sobre a dispersão dos valores de  $\mathbf{X}$  com relação a média  $\mu$ . Para isso, definindo os momentos de ordem  $k$  (Equação 3.7) de uma variável aleatória e seus respectivos momentos centrais (Equação 3.8), respectivamente, por:

$$E[X^k] = \int_{\Omega} x^k f_X(x)dx \quad (3.7)$$

$$E[(X - \mu_X)^k] = \int_{\Omega} (x - \mu_X)^k f_X(x)dx \quad (3.8)$$

é possível quantificar a dispersão dos dados através da *variância* ( $Var$ ), igual ao quadrado do *desvio padrão* (DP)  $\sigma_X$  (ou apenas  $\sigma$ ) e calculada por:

$$Var(X) = E[(X - \mu_X)^2] = \int_{\Omega} (x - \mu_X)^2 f_X(x)dx = \sigma_X^2 \quad (3.9)$$

A dispersão dos dados pode ainda ser representada de maneira adimensional, através do *coeficiente de variação* (CV):

$$CV = \frac{\sigma}{\mu}, \quad (3.10)$$

caso  $\mu \neq 0$ .

Nos casos onde no mesmo problema existam várias variáveis aleatórias, é possível que as mesmas sejam *independentes* entre si, ou seja, que o valor de uma VA não tenha influência



ou dependência sobre o valor da outra. Para duas variáveis aleatórias  $\mathbf{X}$  e  $\mathbf{Y}$ , por exemplo, a condição de *independência* entre as mesmas é definida por:

$$P[X \leq x, Y \leq y] = P[X \leq x]P[Y \leq y] \quad (3.11)$$

e a *função conjunta de distribuição cumulativa de probabilidades* e a *função conjunta de densidades de probabilidades* são dadas, respectivamente, pelas Equações 3.12 e 3.13:

$$F_{XY}(x, y) = P[X \leq x, Y \leq y] \quad (3.12)$$

$$f_{XY}(x, y) = \frac{\partial^2 F_{XY}(x, y)}{\partial x \partial y} \quad (3.13)$$

As funções conjuntas de distribuição cumulativa e de densidade de probabilidade refletem a probabilidade das variáveis  $X$  e  $Y$  atingirem, conjuntamente, valores menores que  $x$  e  $y$ , respectivamente. Baseado nas Equações 3.12 e 3.13, pode-se calcular ainda, em valores absolutos, a *covariância* ( $Cov$ ) ou, como medida adimensional, o *coeficiente de correlação* ( $Corr$ ) entre as VA, dadas por:

$$Cov(X, Y) = E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)] \quad (3.14)$$

$$Corr(X, Y) = \frac{Cov(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y} \quad (3.15)$$

Mais detalhes da formulação matemática mostrada neste item podem ser encontrados em Ditlevsen e Madsen (1996) e Melchers e Beck (2018).

### 3.1.2 Problema geral de confiabilidade

No problema básico de confiabilidade, a estrutura tem uma resistência  $R$  e está sujeita à uma solicitação  $S$ . Para isso, temos três possíveis cenários:

- Cenário I:  $R > S$  - Situação em que a parcela de resistência estrutural é maior que a solicitação, resultando em uma estrutura segura;
- Cenário II:  $R = S$  - Nesse caso temos que o valor da solicitação é igual ao da resistência, estando a estrutura no seu limite de segurança;
- Cenário III:  $R < S$  - Situação em que a solicitação é maior que a resistência, significando que a estrutura está colapsada.

Adotando  $\mathbf{X} = \{R, S\}$  como variáveis aleatórias, define-se a *função de estado limite*  $g(\mathbf{X})$  do problema como:

$$g(\mathbf{X}) = R - S \quad (3.16)$$

onde  $g(\mathbf{X}) = 0$  indica o limite de falha ou a *equação de estado limite*,  $g(\mathbf{X}) > 0$  indica que a estrutura está segura (região segura) e  $g(\mathbf{X}) < 0$  indica que a estrutura colapsou (região de falha). Um exemplo é apresentado na Figura 1 com  $\mathbf{X} = \{X_1, X_2\}$  sendo duas variáveis aleatórias, e  $f_X(\mathbf{X})$  a função densidade de probabilidade conjunta dessas duas variáveis.

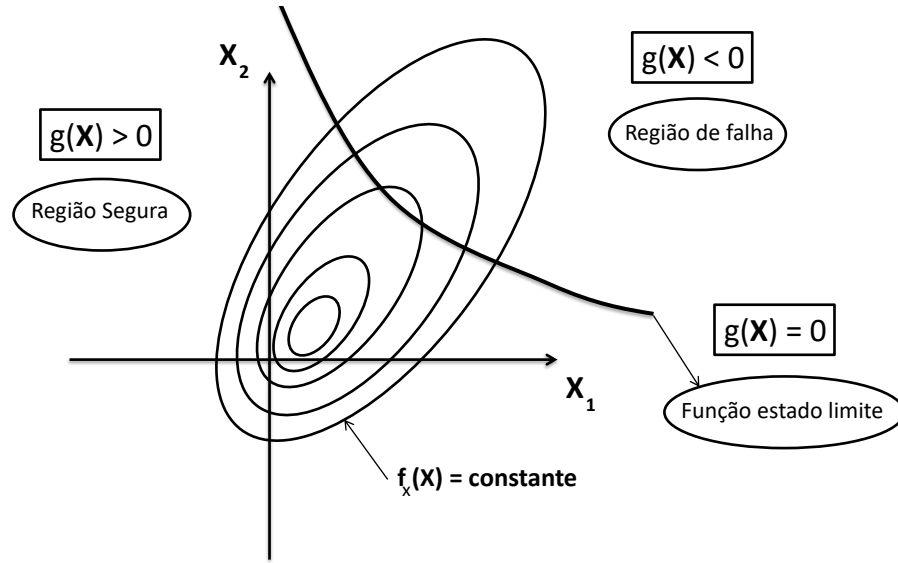


Figura 1 – Exemplo de função de estado limite  $g(\mathbf{X})$

Com isso, a probabilidade de falha  $p_f$  do problema é dada por:

$$p_f = P[g(\mathbf{X}) < 0] = \int_{g(\mathbf{X}) < 0} f_x(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{D_f} f_x(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad (3.17)$$

onde  $D_f$  indica o domínio de falha da função  $g(\mathbf{X})$ .

## 3.2 Processo estocástico

O problema geral de confiabilidade, representado na Equação 3.16, é de suma importância e representa vários problemas da Engenharia, mas não abrange as situações em que solicitação e/ou resistência, por exemplo, variam com o tempo. Caso a função de estado limite seja invariante no tempo, a probabilidade de falha é constante e calculada pela Equação 3.17. No entanto, a equação de estado limite pode variar no tempo e uma análise de confiabilidade dependente do tempo se torna necessária.

Abordagens baseadas na análise de confiabilidade dependente do tempo têm sido fortemente usadas na prática da engenharia, incluindo situações para (WANG; BEER; AYYUB, 2021):

- determinação da vida útil baseada em confiabilidade de estruturas que sofrem deterioração;
- avaliação e otimização relacionadas ao custo durante a vida útil em projetos estruturais;
- criar estratégias de manutenções;
- analisar sistemas em séries com vários estados limites;
- avaliar situações onde ocorrem, ao longo do tempo/espço, variações de temperaturas, cargas do vento atuantes em edificações e em pontes, entre outros.

### 3.2.1 Conceitos iniciais

Em um determinado experimento aleatório, pode-se atribuir a cada realização  $\omega$  do experimento uma função  $x(\omega, t)$  variando no tempo. O conjunto de funções  $X(\omega, t)$  assim criado é chamado de *processo estocástico (PE)* (LOÈVE, 1977; MADSEN; KRENK; LIND, 1986; SHRIRYAEV, 1995; DITLEVSEN; MADSEN, 1996). Com o intuito de evitar qualquer confusão na definição e notação do processo estocástico com o de variável aleatória e de uma função no tempo, na Tabela 1, adaptada de Beck (2019), explicam-se as diferenças entre cada uma delas.

Tabela 1 – Diferença entre processo estocástico com outros termos similares

Situação	Notação utilizada	Significado
$\omega$ e $t$ variáveis	$X(\omega, t)$ ou $X(t)$	processo estocástico
$\omega$ variável, $t$ fixo	$X(\omega)$ ou $X$	variável aleatória
$\omega$ fixo, $t$ variável	$x(\omega, t)$ ou $x(t)$	função do tempo
$\omega$ fixo, $t$ fixo	$x(\omega, t)$ ou $x$	número real

Um exemplo gráfico é apresentado na Figura 2, onde é apresentada uma realização do processo estocástico  $X(t)$  ao longo do tempo  $t$ . Para cada instante  $t$ , atribui-se uma média  $\mu(t)$  e um desvio padrão  $\sigma(t)$ . No entanto, para um tempo  $t = t_i$  fixo, o processo estocástico  $X(t)$  se comporta como uma variável aleatória com média  $\mu(t_i)$  e desvio padrão  $\sigma(t_i)$ , ou seja, para cada tempo  $t$  fixo e constante, a dependência temporal não existirá e o processo estocástico se comportará como uma variável aleatória.

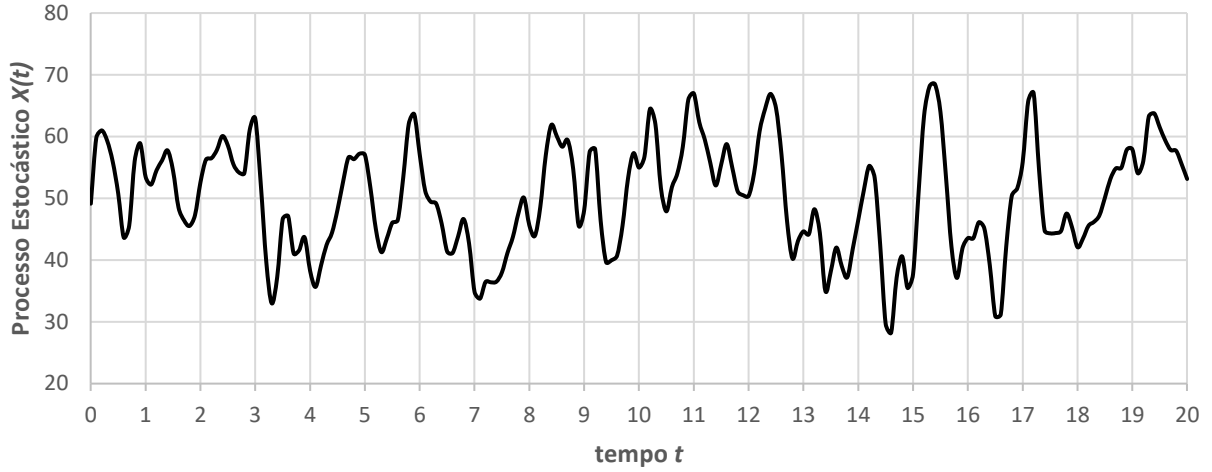


Figura 2 – Realização de um processo estocástico  $X(t)$

Com relação aos parâmetros dos PE, a média  $\mu(t)$  ( $\mu_X(t)$ ) ou valor esperado  $E[X(t)]$  de um processo estocástico  $X(t)$  é dada por (LOÈVE, 1977; MADSEN; KRENK; LIND, 1986; SHRIRYAEV, 1995; DITLEVSEN; MADSEN, 1996):

$$E[X(t)] = \mu(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_1(x, t) dx \quad (3.18)$$

com  $f_1(x, t)$  representando a função densidade de primeira ordem definida como:

$$f_1(x, t) = \frac{\partial F_1(x, t)}{\partial x} \quad (3.19)$$

e  $F_1(x, t)$  sendo a distribuição cumulativa de primeira ordem do processo  $X(t)$  e calculada por:

$$F_1(x, t) = P\{X(w, t) \leq x\} \quad (3.20)$$

Manipulando a Equação 3.18, pode-se encontrar um momento de ordem  $k$  do processo estocástico  $X(t)$  por:

$$E[X(t)^k] = \mu^k(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f_1(x, t) dx \quad (3.21)$$

Vale ressaltar novamente que, baseado nas características apresentadas na Tabela 1, para um tempo  $t$  fixo, o processo estocástico  $X(t)$  se comporta como uma variável aleatória. Além disso, algumas simplificações podem ser feitas para os processos estocásticos com o intuito, principalmente, de facilitar a formulação matemática e resolução do problema. O processo pode ser considerado *estacionário* quando a sua função densidade não depende do tempo, ou

seja,  $f_1(x, t) = f_1(x)$  (SHRIRYAEV, 1995). Substituindo  $f_1(x, t)$  por  $f_1(x)$  na Equação 3.18, tem-se que:

$$E[X(t)] = \mu(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_1(x) dx = \mu, \forall t \in [0, T] \quad (3.22)$$

indicando que, para um intervalo de tempo  $[0, T]$  analisado, a média  $\mu(t)$  do processo estocástico  $X(t)$  estacionário é constante e não depende de  $t$ . Consequentemente, o mesmo ocorre para o desvio padrão  $\sigma(X(t))$  e variância  $Var(X(t))$ , os quais permanecem com valores constantes para qualquer valor de  $t$  (SHRIRYAEV, 1995; MELCHERS; BECK, 2018):

$$Var(X(t)) = \sigma^2, \forall t \in [0, T] \quad (3.23)$$

Assumindo que  $X(t)$  é um processo estocástico estacionário, o nível de correlação entre os valores de  $X(t_a)$  e  $X(t_b)$  em dois instantes de tempo  $t_a, t_b \in [0, T]$ , depende apenas da diferença  $\tau = t_b - t_a$  e é calculada pela *função de autocorrelação*  $R_{XX}(t_a, t_b)$ :

$$R_{XX}(t_a, t_b) = E[X(t_a)X(t_b)] \quad (3.24)$$

e a *função de autocovariância*  $C_{XX}(t_a, t_b)$  de  $X(t)$  corresponde à covariância de  $X(t_a)$  e  $X(t_b)$  dada por:

$$C_{XX}(t_a, t_b) = E[(X(t_a) - \mu(t_a))(X(t_b) - \mu(t_b))] = R_{XX}(t_a, t_b) - \mu(t_a)\mu(t_b) \quad (3.25)$$

como  $\tau = t_b - t_a$  e para processos estacionários a média  $\mu(t_a) = \mu(t_b) = \mu = \text{constante}$ , adotando  $t_a = t$  e  $t_b = t + \tau$ , para  $\forall t \in [0, T]$ , as Equações 3.24 e 3.25 podem ser representadas por:

$$\begin{aligned} R_{XX}(t_a, t_b) &= R_{XX}(t, t + \tau) = R_{XX}(\tau) = E[X(t)X(t + \tau)] \\ C_{XX}(t_a, t_b) &= C_{XX}(t, t + \tau) = C_{XX}(\tau) = R_{XX}(\tau) - \mu^2 \end{aligned} \quad (3.26)$$

indicando que, para processos estocásticos estacionários, ambas funções de autocorrelação  $R_{XX}$  e de autocovariância  $C_{XX}$  dependem apenas do valor de  $\tau$ , ou seja, da distância entre os dois instantes  $t_a$  e  $t_b$  analisados.

Nesta tese, por convenção, para processos estocásticos estacionários, onde o valor da função de autocovariância depende apenas do valor de  $\tau$ , será usado  $\gamma(\tau)$  para indicar o valor da autocovariância entre dois valores  $t_a$  e  $t_b$  com  $\tau = t_b - t_a$ , ou seja:

$$C_{XX}(\tau) = C_{XX}(t, t + \tau) = \gamma(t, t + \tau) = \gamma(\tau) \quad (3.27)$$

Além da autocorrelação e autocovariância, pode-se calcular ainda o *coeficiente de autocorrelação*  $\rho(\tau)$  para processos estocásticos, que indica a correlação linear entre dois valores de  $X(t)$  com uma distância  $\tau$  entre eles e é calculado por (SHRIRYAEV, 1995; MELCHERS; BECK, 2018):

$$\rho(\tau) = \rho(t, t + \tau) = \frac{C_{XX}(t, t + \tau)}{\sigma(t)\sigma(t + \tau)}. \quad (3.28)$$

Como o desvio padrão é constante para processos estacionários, tem-se que  $\sigma(t) = \sigma(t + \tau) = \sigma$ , e  $\rho(\tau)$  é então calculado como (SHRIRYAEV, 1995; MELCHERS; BECK, 2018):

$$\rho(\tau) = \frac{C_{XX}(\tau)}{\sigma^2} = \frac{\gamma(\tau)}{\gamma(0)} \quad (3.29)$$

com  $\rho(\tau)$  variando entre  $-1$  e  $+1$ , onde  $\rho(\tau) = -1$  indica uma dependência linear negativa (ou inversamente proporcional linearmente),  $\rho(\tau) = +1$  indica relação perfeitamente proporcional linearmente e  $\rho(\tau) = 0$  se traduz em nenhuma correlação linear entre ambos valores.

Usualmente, percebe-se que com o aumento da distância  $\tau$ , a dependência entre dois valores  $X(t)$  e  $X(t + \tau)$  vai diminuindo (em módulo) e, conseqüentemente, diminui o valor do coeficiente de autocorrelação  $\rho(\tau)$ . Por ser amplamente utilizado na literatura, o coeficiente de autocorrelação  $\rho(\tau)$  adotado nesta tese foi do tipo exponencial quadrática, definido por:

$$\rho(\Delta t, \alpha) = \exp \left[ - \left( \frac{\Delta t}{\alpha} \right)^2 \right], \quad (3.30)$$

com  $\alpha$  sendo o comprimento de autocorrelação e  $\Delta t$  a distância entre dois instantes de tempo (ou o passo do tempo).

Definindo *lag* como a distância entre dois pontos, por exemplo,  $lag = 1$  indicando que estão sendo analisados os pontos em  $t_i$  e  $t_{i+1}$ ,  $lag = 2$  indicando que estão sendo analisados os pontos em  $t_i$  e  $t_{i+2}$ , e assim sucessivamente, um exemplo gráfico do comportamento deste tipo de coeficiente de autocorrelação do tipo exponencial quadrática é apresentado na Figura 3, percebendo-se que, com o aumento dos *lag*, a dependência linear vai diminuindo cada vez mais.

### 3.2.2 Problema geral de confiabilidade dependente do tempo

Analisando então o problema de confiabilidade dependente do tempo, nos casos onde a resistência  $R(t)$  da estrutura e as cargas aplicadas  $S(t)$  são caracterizadas como processos estocásticos e  $\mathbf{X}(t) = \{R(t), S(t)\}$ , a *equação de estado limite* é definida para qualquer tempo  $t$  por:

$$g(X(t)) = g(\mathbf{Y}, X(t), t) = g(R, S, t) = R(t) - S(t) \quad (3.31)$$

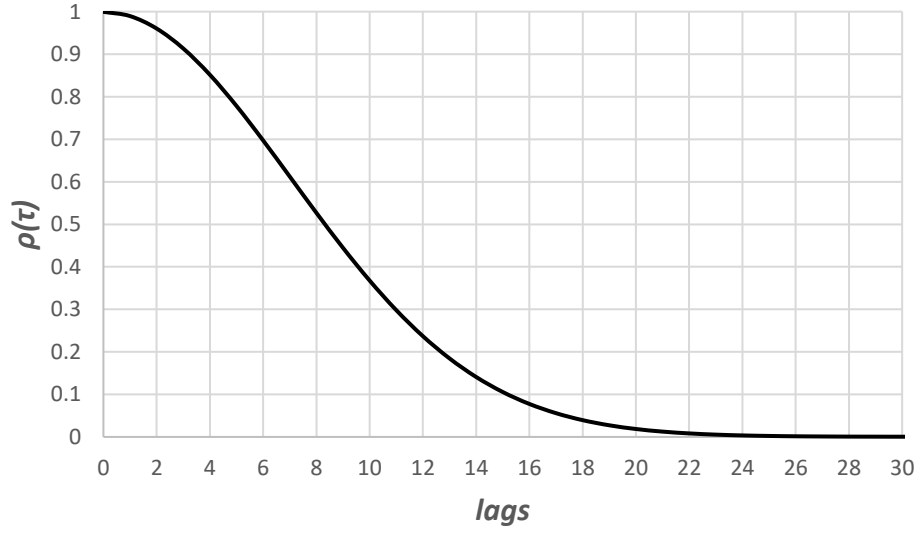


Figura 3 – Exemplo do comportamento do coeficiente de autocorrelação do tipo exponencial quadrática

onde  $\mathbf{Y}$  representa as variáveis aleatórias e  $\mathbf{X}(t)$  representa os processos estocásticos envolvidos no problema indexado no espaço  $t$ . Nesta tese, para simplificar a notação empregada, será utilizado apenas  $g$  (ou  $g(x)$ ) para representar a *função de estado limite* para variáveis aleatórias (ou nos casos de  $t$  constante) e  $g(X(t))$  (ou  $g(t)$ ) para processos estocásticos (dependentes do tempo  $t$ ).

Assumindo que  $g < 0$  representa a falha do problema, tem-se a probabilidade de falha instantânea  $p_f$  para um instante de tempo  $t$  fixo dada por :

$$p_f(t) = P[g(X(t)) < 0]. \quad (3.32)$$

onde a  $p_f$ , pelo fato de adotar  $t$  fixo e constante, se torna equivalente a Equação 3.17 pelo fato do processo estocástico se comportar como uma variável aleatória. Por outro lado, a probabilidade de falha no intervalo de tempo  $[t_1, t_2]$ , conhecida também como a probabilidade de falha acumulada  $P_f(t_1, t_2)$ , é calculada por:

$$P_f(t_1, t_2) = P[\exists \tau \in [t_1, t_2] | g(X(\tau)) < 0]. \quad (3.33)$$

As probabilidades de falha instantânea  $p_f(t)$  (Equação 3.17 e 3.32) e acumulada  $P_f(t_1, t_2)$  (Equação 3.33) podem ser calculadas de duas maneiras principais: baseado em técnicas de amostragens ou pela integração da taxa de falha dependente do tempo (DITLEVSEN; MADSEN, 1996; ANDRIEUD-RENAUD; SUDRET; LEMAIRE, 2004).

Abordagens computacionais baseadas na integração da taxa de falha, por exemplo os métodos PHI2 (ANDRIEUD-RENAUD; SUDRET; LEMAIRE, 2004), PHI2+ (SUDRET,

[2008], JUR/FORM ([HU; DU, 2013b]), TRPD ([JIANG et al., 2014]), iTRPD ([JIANG et al., 2018]) e NEWREL ([GONG; FRANGOPOL, 2019]), primeiro calculam a taxa de falha para cada instante de tempo na análise e depois integram em todo o intervalo de tempo da análise, resultando na probabilidade de falha dependente do tempo. Esses métodos são vantajosos principalmente devido à sua eficiência computacional, tendo em vista que o cálculo da taxa de falha para cada instante de tempo reduz o problema à uma análise de confiabilidade independente do tempo. Consequentemente, abordagens eficientes baseadas no FORM podem ser empregadas. No entanto, esses métodos têm algumas limitações com relação à precisão nos resultados. A primeira limitação vem do fato de que o FORM pode não ser preciso em algumas circunstâncias frequentemente encontradas na prática (por exemplo, os casos onde são adotadas equações não lineares). Além disso, a integração da taxa de falha produz um limite superior para a probabilidade de falha ([DITLEVSEN; MADSEN, 1996]). Mesmo que esse limite superior seja frequentemente muito preciso (ou seja, próximo à probabilidade de falha real), isso pode não ser verdade em algumas situações, devido a mesma simplificação do modelo ser aplicada à diferentes situações sem prévia análise.

Tomando como base o processo Poisson, que pode ser entendido como um processo de contagem no tempo  $N(t)$ , contando o número de incidentes que ocorrem aleatoriamente em um tempo  $t$ . Vale salientar que as funções  $N(t)$  são cumulativas com saltos 1 a cada vez que ocorre tal fenômeno esperado (por exemplo: quando o valor da solicitação  $S$  ultrapassa, ou cruza, uma determinada resistência  $R$ ).

Para se trabalhar com Processo de Poisson, o cálculo da probabilidade de falha  $P_f(0, T)$  em um intervalo  $[0, T]$  pode ser estimada por  $P_f(0, T) = vT$ , onde  $v$  indica a taxa de falha, ou seja, a taxa de passagens ou cruzamento pela barreira limite do problema, e  $T$  representa o tempo final da análise. Cabe ressaltar que equação de  $P_f(0, T)$  pode ser usada caso a taxa de falha seja constante. Mais detalhes envolvidos no cálculo da  $P_f(0, T)$  envolvendo a taxa de falha pode ser visto em [Beck (2019)].

Outra abordagem para resolver problemas de confiabilidade dependente do tempo é empregando técnicas de amostragens, tal como Simulação de Monte Carlo ([ROSS, 2006; RUBINSTEIN; KROESE, 2008; KROESE; TAIMRE; BOTEV, 2011]). No entanto, para aplicar essas técnicas de amostragens na análise de confiabilidade dependente do tempo, primeiro é necessário modelar o processo estocástico usando representações em série (por exemplo, o EOLE, OLE, KL ([LI; KIUREGHIAN, 1993]) ou através dos modelos de séries temporais (por exemplo, o AR, MA, ARMA, ARIMA ([CRYER; CHAN, 2008])).

As representações em série permitem gerar um conjunto de possíveis caminhos ou trajetórias para os processos estocásticos usando técnicas de amostragens padrões. Como ocorre em geral, técnicas de amostragens são menos eficientes, principalmente do ponto de vista computacional, que as abordagens baseadas no FORM. No entanto, essas técnicas são con-



vergentes para os valores reais da probabilidade de falha ([ROSS, 2006; RUBINSTEIN; KROESE, 2008; KROESE; TAIMRE; BOTEV, 2011]). Isto significa que a precisão dos resultados pode ser melhorada com o aumento do tamanho da amostra. Consequentemente, técnicas de amostragens são frequentemente vistas como escolhas robustas quando o custo computacional envolvido não se torna um problema, por exemplo, quando o tamanho da amostra requerido não é exageradamente grande ou quando o cálculo da resposta do modelo não requer um alto custo computacional.

Neste contexto, observou-se que ambas abordagens da taxa de falha e de técnicas de amostragens são importantes ferramentas na análise de confiabilidade dependente do tempo. A proposta de usar a taxa de falha é frequentemente a única escolha viável para problemas com alto custo computacional, enquanto que técnicas de amostragens podem ser preferíveis quando o esforço computacional não é um problema. Neste trabalho, o foco é para abordagens baseadas em técnicas de amostragens, via Simulação de Monte Carlo (SMC).

### 3.3 Simulação de Monte Carlo

#### 3.3.1 Problema independente do tempo

Nos problemas independentes do tempo, as probabilidade de falha da Equação 3.17 e 3.32 podem ser calculadas via simulação de Monte Carlo. Para isso, uma maneira mais usual de representar essa probabilidade de falha é dada por:

$$p_f = \int_{\Omega} I(g(x)) f_x(\mathbf{x}) dx, \quad (3.34)$$

sendo  $\Omega$  o domínio ou suporte da função  $f_x(x)$  e  $I$  a função indicadora definida como

$$\begin{cases} I(g(x)) = 0, & \text{se } g(x) \geq 0 \\ I(g(x)) = 1, & \text{se } g(x) < 0 \end{cases} \quad (3.35)$$

Note que a função indicadora simplesmente diferencia os casos onde seu argumento é negativo ou não. Por este motivo,  $I(g(x))$  indica se ocorre falha ou não.

Substituindo a Equação 3.5 na Equação 3.34, chega-se a:

$$p_f = \int_{\Omega} I(g(x)) f_x(\mathbf{x}) dx = E[I(g(X))], \quad (3.36)$$

indicando que a probabilidade de falha  $p_f$  de um sistema é igual ao valor esperado da função indicadora de  $g(X)$ .

Realizando um número total de simulações  $n_{si}$  para cada variável aleatória do problema, a Equação 3.36 pode ser estimada pela  $\tilde{p}_f$  usando Simulação de Monte Carlo dada por (MELCHERS; BECK, 2018):

$$p_f \approx \tilde{p}_f = \frac{1}{n_{si}} \sum_{i=1}^{n_{si}} I(g(x_i)) = \frac{n_f}{n_{si}}, \quad (3.37)$$

na qual  $n_f$  indica o número de simulações onde  $g(x) < 0$ . Em outras palavras, a probabilidade de falha pode ser calculada a partir da razão entre a quantidade de simulações  $n_f$  onde o sistema falha e o total de simulações  $n_{si}$  realizadas.

Graficamente, para um exemplo de duas variáveis aleatórias  $X_1$  e  $X_2$  e representando cada simulação pelo símbolo +, como mostrado na Figura 4, a simulação de Monte Carlo estima a  $p_f$  como a razão do número de simulações que estão na região de falha do sistema  $g(x) < 0$  sobre o número total de simulações.

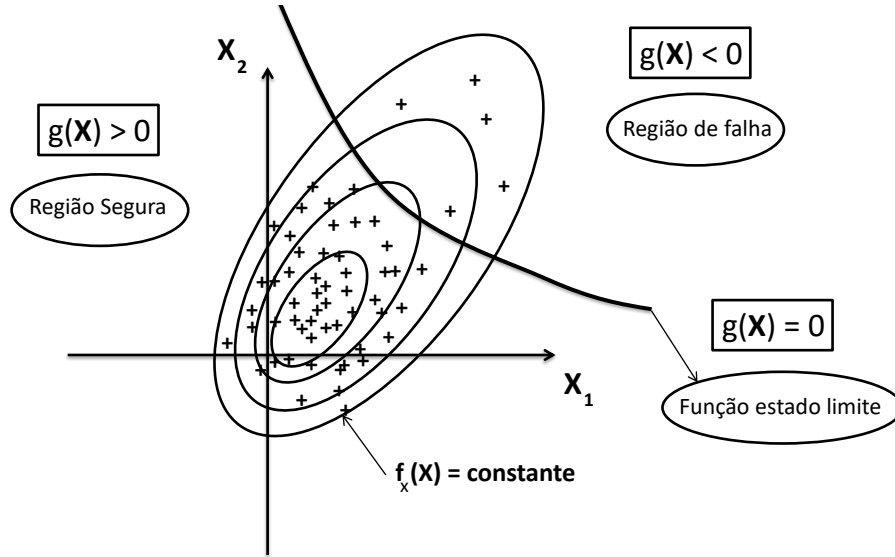


Figura 4 – Exemplo da aplicação da simulação de Monte Carlo.

A variância e o coeficiente de variação do estimador  $\tilde{p}_f$  são calculados, respectivamente, por (MEDEIROS, 2018):

$$Var[\tilde{p}_f] = \frac{\tilde{p}_f(1 - \tilde{p}_f)}{n_{si}} \quad (3.38)$$

$$CV[\tilde{p}_f] = \frac{\sqrt{Var[\tilde{p}_f]}}{E[\tilde{p}_f]} = \sqrt{\frac{1 - \tilde{p}_f}{n_{si}\tilde{p}_f}} \quad (3.39)$$

onde o coeficiente de variação  $CV$  pode ser entendido como o erro envolvido na simulação de Monte Carlo no cálculo da probabilidade de falha  $p_f$ . Vale ressaltar que o esforço compu-

tacional e a precisão do método de Monte Carlo estão diretamente ligados a quantidade de simulações realizadas  $n_{si}$ . Autores como Melchers e Beck (2018) recomendam que, como nos problemas de engenharia geralmente a probabilidade de falha é na ordem de  $10^{-4}$  ou  $10^{-5}$ , serão necessárias em torno de  $10^6$  a  $10^7$  simulações para estimar com precisão o valor da  $p_f$ .

### 3.3.2 Problema dependente do tempo

No caso da probabilidade de falha acumulada  $P_f(t_1, t_2)$  (Equação 3.33), a mesma também pode ser calculada via simulação de Monte Carlo. Para isso, primeiro é feita uma discretização do intervalo de tempo  $[0, T]$  em  $N$  instantes, onde  $T$  é o tempo final, obtendo-se  $N$  tempos  $t_i = (i-1)\Delta t$ , com  $i = 1, \dots, N$  indicando a posição e  $\Delta t = \frac{T}{N-1}$  o passo de tempo considerado na discretização em que a função de estado limite será avaliada.

Nesta tese, adotou-se a falha como um problema de primeira passagem, ou seja, a falha do sistema ocorre a partir do instante  $t_f$  em que o valor de  $g(t_f) < 0$ . Por exemplo, tomando como base a situação da Figura 5, tem-se que o processo estocástico  $X(t)$  cruza pela primeira vez uma barreira limite do sistema no tempo  $t_f = 3$ , instante este que ocorre a primeira falha do sistema. Assim, mesmo  $X(t)$  assumindo valores menores que a barreira limite logo após o instante  $t_f = 3$ , assume-se que a estrutura já está colapsada a partir do momento em que o valor de  $X(t)$  ultrapassou a barreira limite pela primeira vez. Com isso, considera-se:

$$\begin{cases} g(X(t)) > 0 & \text{para } 0 \leq t < t_f \\ g(X(t)) < 0 & \text{para } t_f \leq t \leq T \end{cases} \quad (3.40)$$

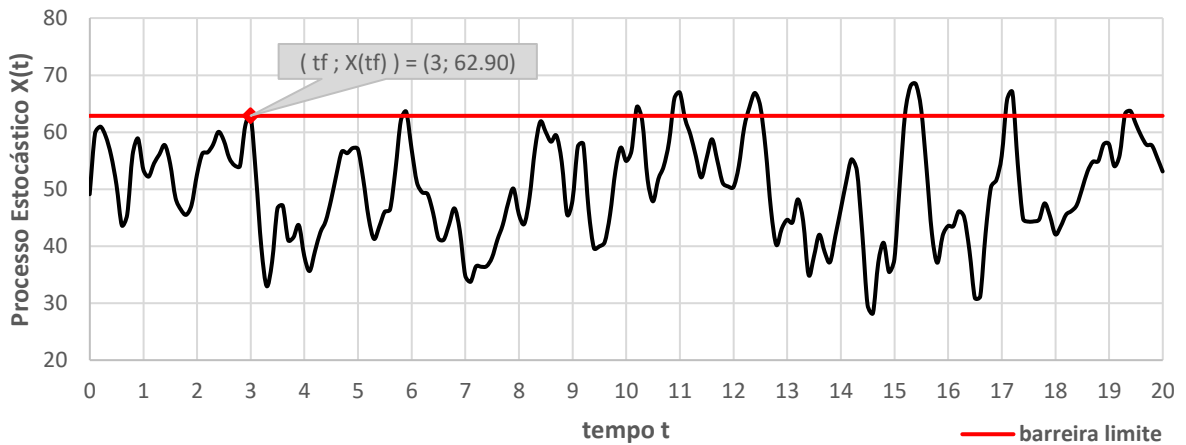


Figura 5 – Exemplo de problema de primeira passagem

Baseado nisto, para calcular o número de falhas entre os tempos  $[t_i; t_{i+1}]$ , um contador  $k_{i+1}$  é usado e armazena a quantidade de falhas relacionadas ao intervalo  $[t_i; t_{i+1}]$ , tal que

todos os contadores  $k_n$ , com  $n = i+1, \dots, N$  são incrementados sempre que a função de estado limite é violada pela primeira vez. Assumindo  $k_0$  como o número de falhas no tempo  $t = 0$ , a probabilidade de falha acumulada  $P_f$  pode ser estimada por  $\tilde{P}_f$  e calculada via SMC no intervalo  $[0, T]$  por (MELCHERS; BECK, 2018):

$$P_f(0, T) \approx \tilde{P}_f(0, T) = \frac{k_0 + \sum_{n=1}^N k_n}{n_{si}}, \quad (3.41)$$

com  $k_n$  sendo o contador ou o número de falhas no instante  $n$ .

Contudo, na Figura 5 está representado apenas uma trajetória do processo estocástico  $X(t)$ . Com o uso da SMC, na maioria dos problemas de engenharia, são necessárias amostras com  $10^6 - 10^7$  trajetórias (ou simulações) para a estimativa da probabilidade de falha (MELCHERS; BECK, 2018).

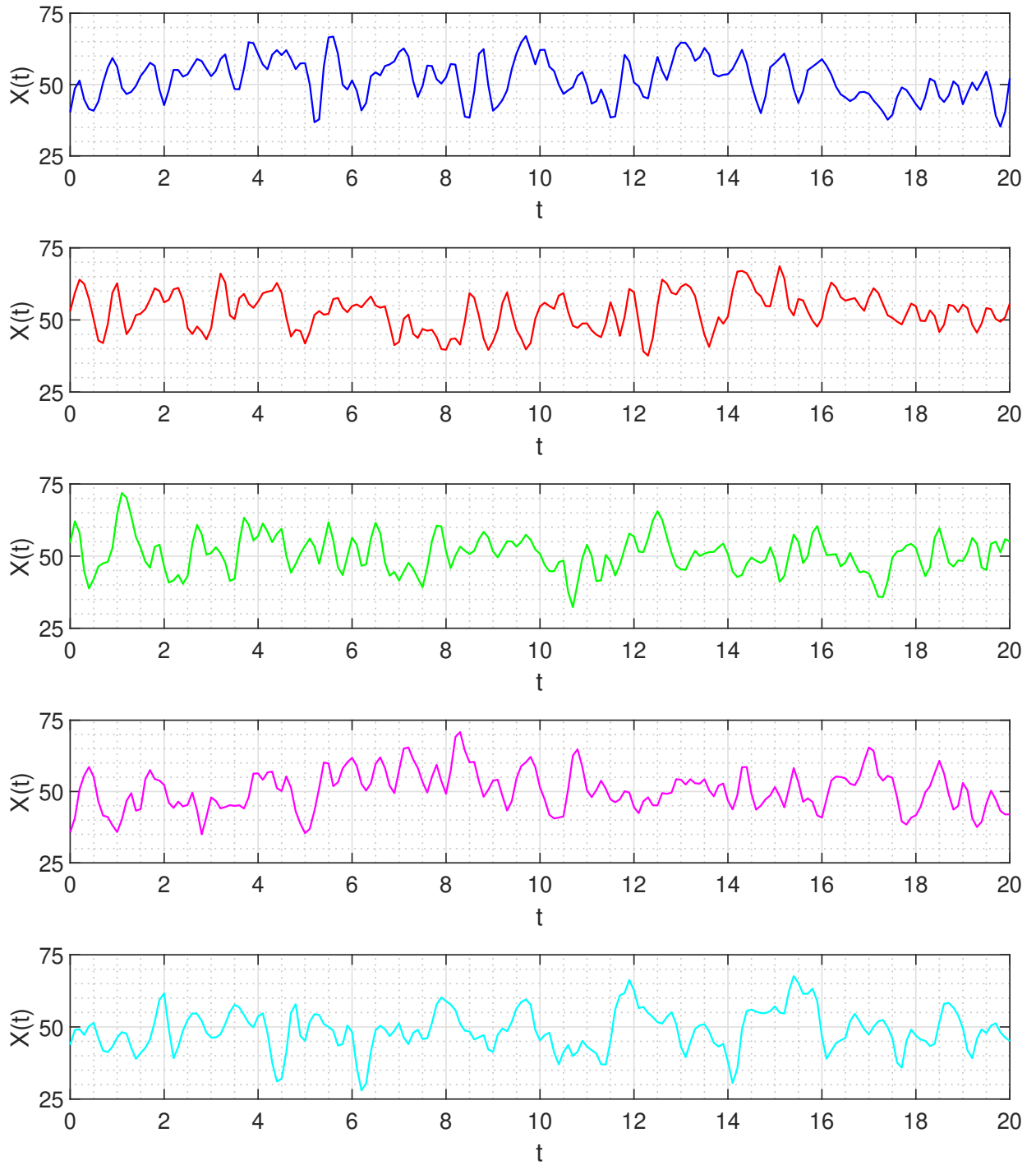
No caso de problemas independentes do tempo, para o cálculo da  $p_f$ , apenas a geração de uma amostra com  $10^6 - 10^7$  valores para a variável aleatória é necessário, tendo em vista que o tempo não é levado em consideração (ou é constante). No entanto, para problemas dependentes do tempo, será necessário cerca de  $10^6 - 10^7$  valores para cada tempo  $t_i$  discretizado, pois neste caso o tempo é levado em consideração.

Usando como exemplo a Figura 6, percebe-se que cinco trajetórias do mesmo processo estocástico são simuladas para que, posteriormente, sejam realizadas as análises das  $g(X(t))$  e dos contadores  $k_n$  em todos os tempos  $t_i$  discretizados.

A geração das trajetórias do PE são pontos chaves na análise de confiabilidade dependente do tempo, tendo em vista que é a partir das mesmas que toda a análise de confiabilidade será realizada e o custo computacional para gerar, por exemplo,  $10^6 - 10^7$  trajetórias pode tornar o modelo proibitivo.

Ademais, essas simulações devem representar, o mais fiel possível, as características do processo estocástico original  $X(t)$ , principalmente com relação aos valores da média  $\mu(t)$ , desvio padrão  $\sigma(t)$  e autocorrelação  $\rho$ . Caso as trajetórias simuladas tenham características diferentes do processo estocástico original, a análise de confiabilidade é defeituosa pois o processo estocástico original não está sendo fielmente representado. Logo, o processo de amostragem está sujeito à erros estatísticos.

Para gerar essas trajetórias do processo estocástico, na literatura os métodos mais utilizados são os baseados nas expansões em série, entre eles o *Karhunen-Loève (KL)*, estimativa linear ótima (OLE) (do inglês, *Optimal Linear Estimation*) e a expansão da estimativa linear ótima (EOLE) (do inglês *Expansion Optimal Linear Estimation*) (LI; KIUREGHIAN, 1993). Entre esses, percebe-se amplamente na literatura um maior uso pelo EOLE na análise de confiabilidade estrutural dependente do tempo (LI; KIUREGHIAN, 1993; ZHANG; ELLINGWOOD, 1994; HAWCHAR; SOUEIDY; SHOEF, 2015; HAWCHAR; SOUEIDY;

Figura 6 – Exemplo de 5 trajetórias do processo estocástico  $X(t)$ 

[SHOEF, 2017; ZHANG; GONG; LI, 2021; KROETZ et al., 2020; PELLIZZER et al., 2020], tornando este um dos métodos mais utilizados na academia e que será apresentado no Capítulo 4.

Alternativamente ao EOLE, como proposta deste trabalho, focou-se em gerar tais tra-

jetórias via modelo de séries temporais ARMA, mostrando que resultados equivalentes podem ser obtidos com representações de séries temporais. Assim, é uma importante contribuição tendo em vista que modelos de séries temporais têm uma formulação matemática simples e são amplamente empregados na prática. Além disso, comparações detalhadas entre resultados obtidos com ARMA e EOLE não foram encontrados na literatura, exceto pelo estudo de Kroetz, Medeiros e Torii (2020).

Devido às suas características, empregar séries temporais para análise de confiabilidade dependente do tempo pode ser vantajoso em comparação ao EOLE em alguns casos. Neste trabalho, apenas processos estacionários foram considerados, o caso de não estacionariedade deve ser investigado em futuras pesquisas. O fluxograma da Figura 7 apresenta como é feito o cálculo da probabilidade de falha acumulada para processos estocásticos via simulação de Monte Carlo.

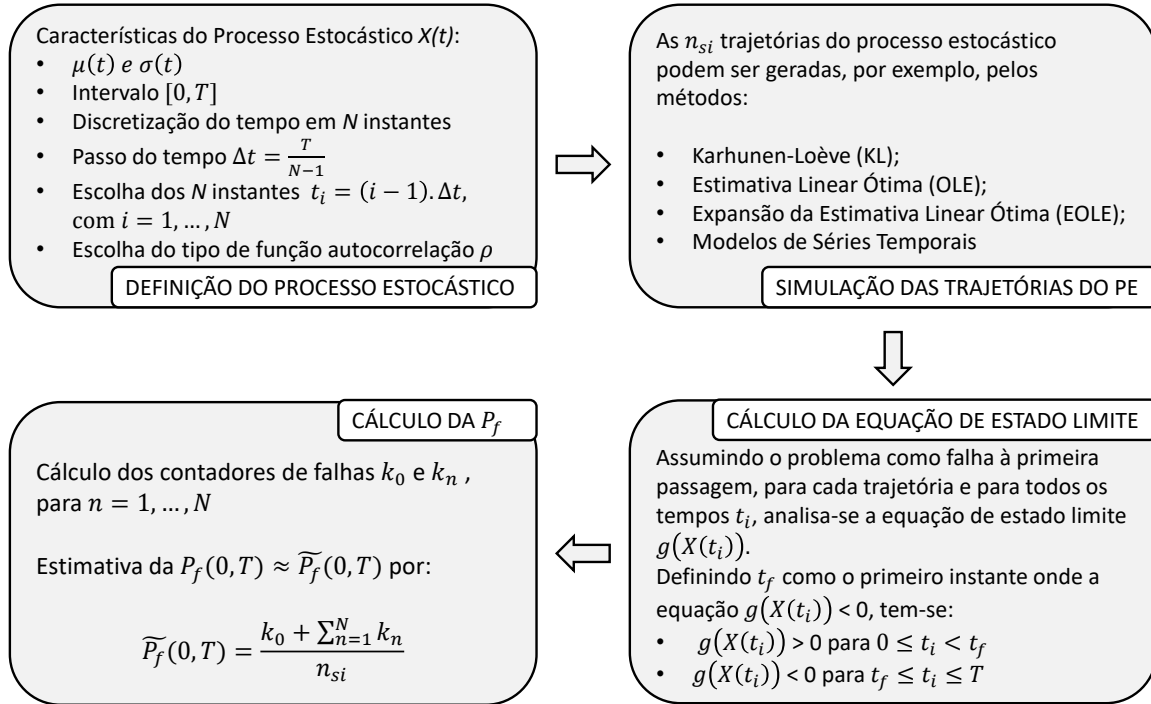


Figura 7 – Cálculo da probabilidade de falha acumulada via simulação de Monte Carlo

## 4 Expansão da Estimativa Linear Ótima

Um ponto crucial na hora de aplicar métodos baseados em simulações para problemas dependentes do tempo é na obtenção das amostras (ou trajetórias) para o processo estocástico. Nesta tese, o método utilizado como padrão, para validar os resultados via modelos de séries temporais, foi a expansão da estimativa linear ótima (EOLE) (do inglês *Expansion Optimal Linear Estimation*), criado por Li e Kiureghian (1993) e se tratando de um dos métodos mais usados atualmente para esta finalidade. Cabe ressaltar que o EOLE é uma extensão do método da estimativa linear ótima (OLE) (do inglês, *Optimal Linear Estimation*), também desenvolvido por Li e Kiureghian (1993).

Ademais, como será visto, para implementação e cálculo do EOLE, que pode ser usado em processos estacionários e não estacionários, dados amostrais do fenômeno analisado não são requeridos, necessitando-se apenas dos valores da média  $\mu(t)$  e desvio padrão  $\sigma(t)$  do processo estocástico, além da função de autocorrelação  $\rho$ .

Considerando um processo estocástico  $X(\omega, t)$  (ou  $X(t)$ ), o mesmo pode ser representado por métodos baseados em expansões em série, como o OLE e EOLE. Para isso, o processo estocástico é exatamente representado como uma série envolvendo variáveis aleatórias e funções determinísticas. Logo, uma aproximação  $\hat{X}(\omega, t)$  (ou  $\hat{X}(t)$ ) pode ser obtida pelo truncamento desta série (LI; KIUREGHIAN, 1993).

O procedimento matemático do OLE e EOLE são descritos e explicados minuciosamente no trabalho de Li e Kiureghian (1993). No entanto, a seguir serão apresentados os principais pontos, retirados do trabalho de Li e Kiureghian (1993), para a obtenção das equações finais desses métodos.

Assumindo o vetor  $\chi = \{X(t_1), \dots, X(t_N)\}$  como o conjunto de  $X(t)$  para cada tempo  $t$  fixo, onde o vetor dos tempos discretizados é dado por  $\mathbf{t} = \{t_1, \dots, t_N\}$ , a aproximação  $\hat{X}(t)$  é definida como uma função linear do conjunto de valores de  $\chi$  através de:

$$\hat{X}(\omega, \mathbf{t}) = a(\mathbf{t}) + \sum_{i=1}^N b_i(\mathbf{t})\chi_i \quad (4.1)$$

ou na forma matricial:

$$\hat{X}(\omega, \mathbf{t}) = a(\mathbf{t}) + \mathbf{b}^T(\mathbf{t})\chi \quad (4.2)$$

onde  $N$  indica o número de pontos envolvidos na aproximação. As funções  $a(\mathbf{t})$  e  $b(\mathbf{t})$  são determinadas através da minimização do erro da variância  $Var[X(\mathbf{t}) - \hat{X}(\mathbf{t})]$  em cada ponto do vetor  $\mathbf{t}$ , desde que  $\hat{X}(\mathbf{t})$  seja um estimador de  $X(\mathbf{t})$  na média, ou seja:

$$\min Var \left[ X(\mathbf{t}) - \hat{X}(\mathbf{t}) \right], \quad \forall t \in \Omega \quad (4.3)$$

sujeito a

$$E \left[ X(\mathbf{t}) - \hat{X}(\mathbf{t}) \right] = 0 \quad (4.4)$$

A partir da condição apresentada na Equação 4.4 e usando o valor da Equação 4.2 resulta que:

$$\mu(t) = a(\mathbf{t}) + \mathbf{b}^T(\mathbf{t})E[\boldsymbol{\chi}] \equiv a(\mathbf{t}) + \mathbf{b}^T(\mathbf{t})\boldsymbol{\mu}_{\chi} \quad (4.5)$$

onde é possível isolar e encontrar o valor de  $a(\mathbf{t})$  pela relação:

$$a(\mathbf{t}) = \mu(t) - \mathbf{b}^T(\mathbf{t})\boldsymbol{\mu}_{\chi} \quad (4.6)$$

Com isso, o erro da variância é dado por:

$$Var \left[ X(\mathbf{t}) - \hat{X}(\mathbf{t}) \right] = E \left[ \left( X(\mathbf{t}) - \hat{X}(\mathbf{t}) \right)^2 \right] \quad (4.7)$$

e através de manipulação matemática, chega-se a (LI; KIUREGHIAN, 1993):

$$Var \left[ X(\mathbf{t}) - \hat{X}(\mathbf{t}) \right] = \sigma^2(\mathbf{t}) - 2 \sum_{i=1}^N b_i(\mathbf{t}) Cov \left[ X(\mathbf{t}), \chi_i \right] + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N b_i(\mathbf{t}) b_j(\mathbf{t}) Cov \left[ \chi_i, \chi_j \right] \quad (4.8)$$

O problema de minimização é então resolvido ponto a ponto para  $b_i(\mathbf{t})$ . Assim, fazendo a derivada parcial da Equação 4.8 com relação a  $b_i(\mathbf{t})$  e igualando a zero, tem-se:

$$-Cov \left[ X(\mathbf{t}), \chi_i \right] + \sum_{j=1}^N b_j(\mathbf{t}) Cov \left[ \chi_i, \chi_j \right] = 0, \quad \forall i = 1, \dots, N \quad (4.9)$$

ou na forma matricial:

$$-\Sigma_{X(\mathbf{t})\chi} + \Sigma_{\chi\chi} \mathbf{b}(\mathbf{t}) = 0 \quad (4.10)$$

e ainda por:

$$\mathbf{b}(\mathbf{t}) = \Sigma_{X(\mathbf{t})\chi}^{-1} \Sigma_{\chi\chi} \quad (4.11)$$

onde  $\Sigma_{\chi\chi}$  é a matriz covariância de  $\boldsymbol{\chi}$  e  $\Sigma_{X(\mathbf{t})\chi}$  a matriz covariância de  $X(\mathbf{t})$  com  $\boldsymbol{\chi}$ . Assim, usando o valor de  $\mathbf{b}(\mathbf{t})$  da Equação 4.10,  $a(\mathbf{t})$  da Equação 4.6 e substituindo ambos valores na Equação 4.2, a estimativa linear ótima (OLE) finalmente resulta em (LI; KIUREGHIAN, 1993):



$$\hat{X}(\omega, \mathbf{t}) = \mu(\mathbf{t}) + \Sigma_{X(\mathbf{t})\chi}^T \Sigma_{\chi\chi}^{-1} \cdot (\chi - \mu_\chi) \quad (4.12)$$

A partir do OLE, [Li e Kiureghian \(1993\)](#) criaram uma extensão deste método usando uma representação espectral para o vetor de variáveis  $\chi$ . Com isso, assumindo que  $X(t)$  é Gaussiano, a decomposição espectral da matriz covariância  $\Sigma_{\chi\chi}$  de  $\chi = \{X(t_1), \dots, X(t_N)\}$  é dada por:

$$\chi(\omega) = \mu_\chi + \sum_{i=1}^N \sqrt{\lambda_i} \xi_i(\omega) \phi_i \quad (4.13)$$

onde  $\{\xi_i, i = 1, \dots, N\}$  são variáveis aleatórias normais padrões independentes  $\xi_i \sim N(0, 1)$  e  $(\phi_i, \lambda_i)$  são os autovetores e autovalores da matriz covariância  $\Sigma_{\chi\chi}$  encontrados por:

$$\Sigma_{\chi\chi} \phi_i = \lambda_i \phi_i \quad (4.14)$$

Substituindo as Equações [4.6](#) e [4.13](#) na Equação [\(4.2\)](#), obtém-se:

$$\hat{X}(\omega, \mathbf{t}) = \left( \mu(t) - \mathbf{b}^T(\mathbf{t}) \mu_\chi \right) + \mathbf{b}^T(\mathbf{t}) \left( \mu_\chi + \sum_{i=1}^N \sqrt{\lambda_i} \xi_i(\omega) \phi_i \right) \quad (4.15)$$

podendo ser resumida a:

$$\hat{X}(\omega, \mathbf{t}) = \mu(t) + \mathbf{b}^T(\mathbf{t}) \sum_{i=1}^N \sqrt{\lambda_i} \xi_i(\omega) \phi_i \quad (4.16)$$

Em seguida, substituindo a Equação [4.16](#) na Equação [4.7](#) e realizando todo o procedimento matemático apresentado em [Li e Kiureghian \(1993\)](#), obtém-se a expressão do  $\hat{X}(\omega, \mathbf{t})$  através do método da expansão da estimativa linear ótima (EOLE):

$$\hat{X}(\omega, \mathbf{t}) = \mu(\mathbf{t}) + \sum_{i=1}^N \frac{\xi_i(\omega)}{\sqrt{\lambda_i}} \phi_i^T \Sigma_{X(\mathbf{t})\chi} \quad (4.17)$$

Por fim, como é usualmente representada nos trabalhos acadêmicos, a aproximação via EOLE é calculada pelo truncamento da série da Equação [4.17](#) e, em função da matriz autocorrelação, da média e do desvio padrão do processo estocástico, é dada por:

$$\hat{X}(\omega, t) = \mu(t) + \sigma(t) \sum_{i=1}^r \frac{\xi_i(\omega)}{\sqrt{\lambda_i}} \phi_i^T A_{t, t_i}(t) \quad (4.18)$$

onde  $\mu(t)$  é a média e  $\sigma(t)$  o desvio padrão do processo estocástico original,  $\xi_i(\omega)$  são variáveis aleatórias normais padrões independentes,  $\phi_i$  e  $\lambda_i$  são os autovetores e autovalores da matriz autocorrelação  $A_{ij} = \rho(t_i, t_j)$ . O número de termos  $r$  é a ordem da expansão. Cabe ressaltar

que a ordem da expansão é limitada ao número máximo de instantes  $N$  empregados na discretização, ou seja,  $r \leq N$ .

O algoritmo do EOLE se mostrou eficaz e de simples implementação computacional, por isso seu uso nesta tese para efeito comparativo com modelos de séries temporais. Entre as diversas aplicações do EOLE pode-se citar, por exemplo, que o mesmo foi empregado na criação dos métodos FOSA (HU; DU, 2014), t-PCE e TV-PCA-SPCE (HAWCHAR; SOUEIDY; SHOEFS, 2015; HAWCHAR; SOUEIDY; SHOEFS, 2017), AMPPT (ZHANG; GONG; LI, 2021), além de ter sido utilizado em Kroetz et al. (2020), junto com a técnica *kriking*, em problemas de otimização de risco dependente do tempo. Um fluxograma é apresentado na Figura 8 mostrando as principais etapas para implementação e cálculo de uma trajetória do processo estocástico via EOLE.

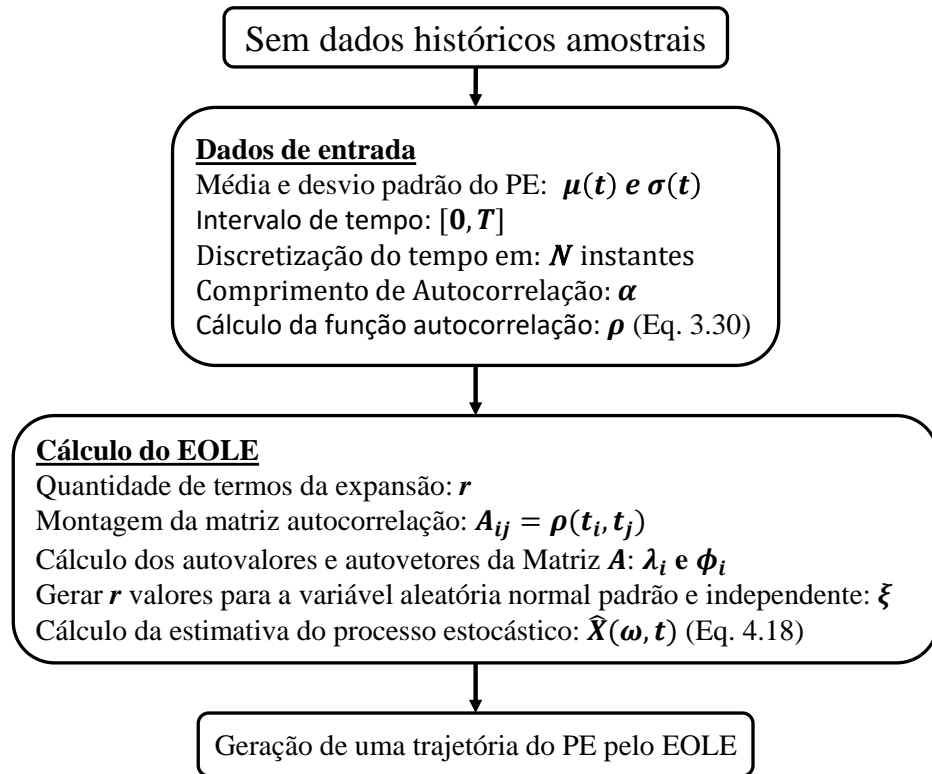


Figura 8 – Obtenção da trajetória do processo estocástico pelo EOLE

## 5 Séries Temporais

Conforme detalhado nos materiais de [Box e Jenkins \(1978\)](#) e [Cryer e Chan \(2008\)](#), a seguir serão apresentadas algumas características dos modelos de séries temporais.

Com o histórico de dados, podemos traçar um gráfico com esses valores ao longo do tempo e, posteriormente, fazer algum tipo de regressão (ex: regressão linear simples) para saber a tendência da série (se vai aumentar ou diminuir no decorrer do tempo, por exemplo).

Para se construir um modelo ideal, alguns passos devem ser seguidos, conforme sugeridos em [Box e Jenkins \(1978\)](#) e [Cryer e Chan \(2008\)](#), como a identificação, determinação da forma e diagnóstico do modelo adotado. Vale ressaltar que a escolha do modelo ideal não é trivial, com isso, algumas tentativas e testes devem ser realizados com o intuito de se chegar ao mais próximo possível do modelo real.

Na parte de identificação, o modelo deve ser escolhido baseado na sua natureza e comportamento, podendo este ser corrigido no decorrer do processo de construção da série temporal. Com relação a forma do modelo, esta consiste em encontrar os parâmetros desconhecidos dentro do modelo dado.

A última parte é a do diagnóstico, já com o modelo especificado e estimado, direciona-se o foco à análise da qualidade do modelo criado. Caso o modelo se ajuste bem aos dados coletados e as suposições físicas/matemáticas estejam coerentes, conclui-se que a modelagem está completa e o modelo pronto para ser usado, por exemplo, na estimativa de valores futuros. Caso contrário, deve-se repetir todo o processo de escolha e cálculo do modelo.

Definindo um modelo de série temporal  $\{X(t) : t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$  e sabendo que  $X(t)$  é um processo estocástico, então todas as propriedades e características relacionadas a média, desvio padrão, covariância etc., vistas anteriormente para processos estocásticos, também servem aqui para o caso de séries temporais, inclusive as condições de estacionariedade.

### 5.1 Conceitos iniciais

#### 5.1.1 Tendência

Em uma série temporal geral, a média  $\mu(t)$  da série pode variar (crescendo ou diminuindo) no decorrer do tempo  $t$ . Caso a média  $\mu(t)$  varie proporcionalmente no decorrer do tempo, tem-se as chamadas tendências. Caso a média  $\mu(t)$  seja constante durante toda série, tem-se as chamadas séries estacionárias ([CRYER; CHAN, 2008](#)).

A tendência é definida como um movimento previsível, baseado nos dados históricos,

de sua trajetória no decorrer do tempo. A partir do histórico das observações da série, uma das técnicas utilizada para identificar a tendência é a regressão linear simples, onde os dados históricos são usados na formulação da reta que indica a direção da tendência, como exemplificado na Figura 9 para o número de passageiros de uma empresa no decorrer do tempo.

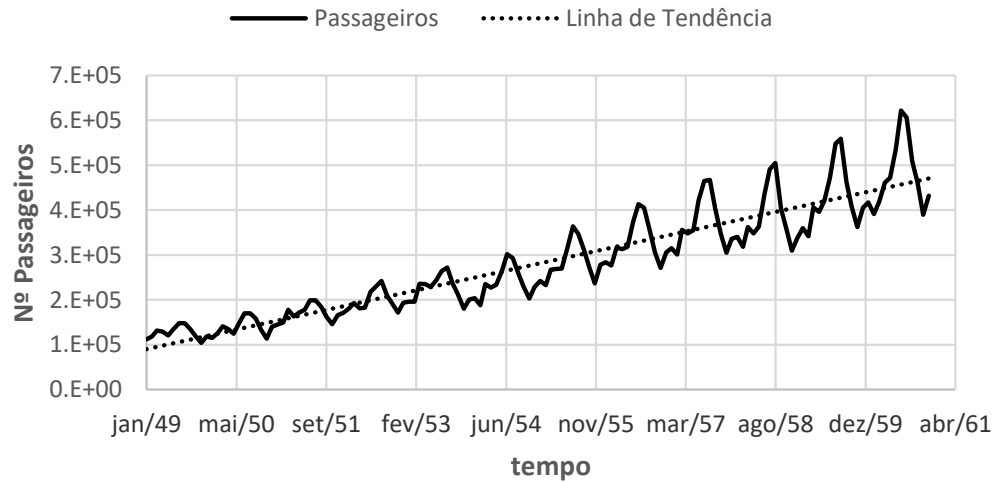


Figura 9 – Exemplo de tendência e linha de tendência

### 5.1.2 Sazonalidade

A sazonalidade de uma série é caracterizada pela repetição cíclica de um comportamento periodicamente, ou seja, um comportamento que se repete constantemente a intervalos fixos de tempo. Na Figura 10 é apresentado um exemplo de comportamento sazonal de medições da temperatura média mensal de um objeto exposto ao ambiente, notando-se que o comportamento se repete a cada ano.

Vale acrescentar ainda que o comportamento sazonal também pode estar atrelado a uma tendência. Na Figura 9, por exemplo, nota-se um comportamento sazonal com uma tendência de alta do número de passageiros a cada ano (que varia baseado nas estações anuais).

### 5.1.3 Estacionariedade

A situação de estacionariedade é definida quando a média  $\mu(t) = \mu$  do processo é constante durante todo o tempo  $t$ , ou seja, as observações do processo variam em torno da média constante. Essa condição pode ser assumida na prática a partir de vasto histórico de observações passadas.

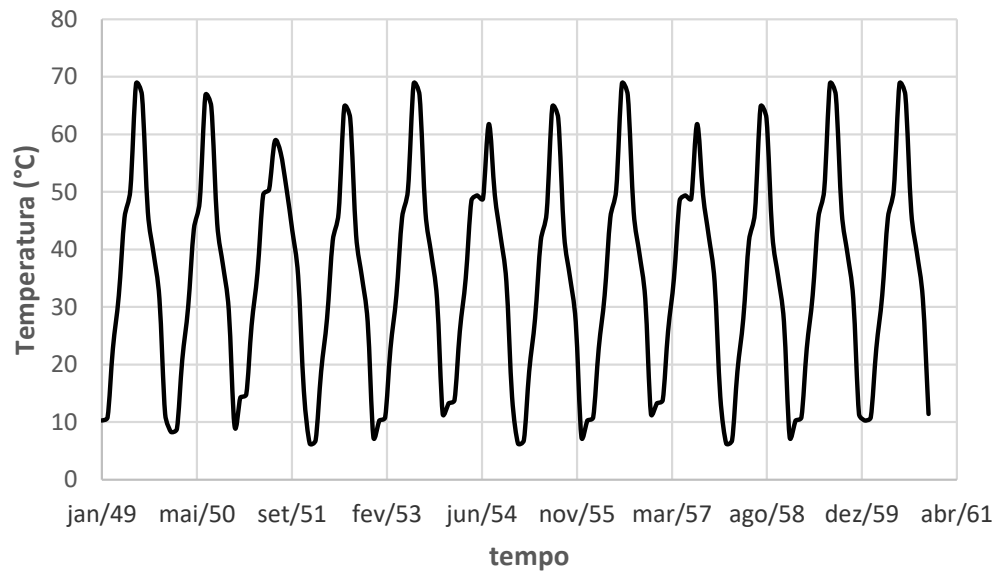


Figura 10 – Exemplo de comportamento sazonal da temperatura média mensal

Um exemplo de processo estacionário é apresentado na Figura 11, onde o valor de uma força é apresentado durante 1500 dias, variando em torno da força média de 6000 N. No entanto, cabe ressaltar que, na prática, isso faria parte de um histórico de vários anos de medições.

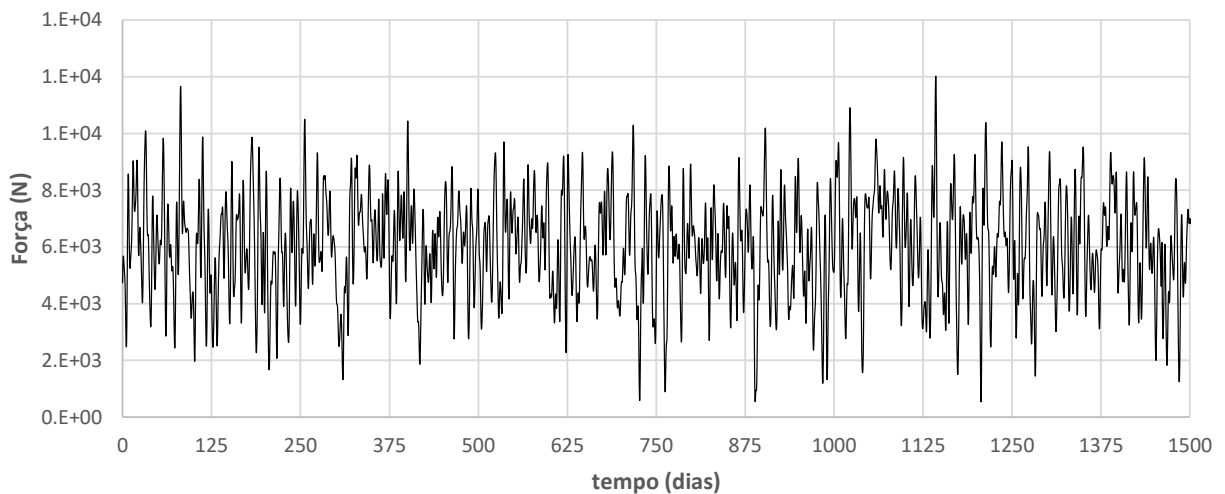


Figura 11 – Exemplo de um processo estocástico estacionário

Nesta pesquisa, optou-se por usar a estacionariedade em todas as análises e cálculos realizados, não sendo utilizados processos estocásticos com tendências ou comportamentos

sazonais.

## 5.2 Modelos de séries temporais

Os modelos de séries temporais servem para estimar, assim como o EOLE, um processo estocástico original  $X(t)$  por uma estimativa  $\hat{X}(t)$  através dos modelos: Autoregressivo (AR) (do inglês *Autoregressive*), Média Móvel (MA) (do inglês *Moving Average*), Autoregressivo de Média Móvel (ARMA) (do inglês *Autoregressive Moving Average*) e o Autoregressivo Integrado Média Móvel (ARIMA) (do inglês *Autoregressive Integrated Moving Average*)

### 5.2.1 Modelo Autoregressivo - AR(p)

Como o próprio nome sugere, modelos autoregressivos são regressões sobre eles mesmos. Especificamente, um processo estocástico  $X(t)$  pode ser estimado por  $\hat{X}(t)$  usando um modelo  $AR(p)$  de ordem  $p$  através de:

$$AR(p) : \hat{X}(t) - \mu = \varphi_1(x_{t-1} - \mu) + \varphi_2(x_{t-2} - \mu) + \cdots + \varphi_p(x_{t-p} - \mu) + \epsilon_t \quad (5.1)$$

onde  $\mu$  é a média constante,  $\epsilon_t \equiv N(0, \sigma_e^2)$  é um ruído branco Gaussiano com média zero e desvio padrão igual a  $\sigma_e$ ,  $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p\}$  são os parâmetros a serem estimados e  $x_i$  são valores amostrais passados. Em outras palavras, o processo estocástico  $\hat{X}(t)$  é uma combinação linear dos  $p$  valores  $\{x_{t-1}, \dots, x_{t-p}\}$  passados mais recentes ponderados pelos pesos  $\varphi$ , sendo adicionado um termo  $\epsilon$  que deve considerar o ruído (ou “aleatoriedade”) na previsão atual, usualmente adotado como um ruído branco (*white noise*).

Por exemplo, temos que os modelos  $AR(1)$  e  $AR(2)$  são representados, respectivamente, por:

$$\begin{aligned} AR(1) : \hat{X}(t) - \mu &= \varphi_1(x_{t-1} - \mu) + \epsilon_t \\ AR(2) : \hat{X}(t) - \mu &= \varphi_1(x_{t-1} - \mu) + \varphi_2(x_{t-2} - \mu) + \epsilon_t \end{aligned} \quad (5.2)$$

### 5.2.2 Modelo Média Móvel - MA(q)

Diferentemente do  $AR$  que usa combinação linear dos  $p$  valores passados, o modelo  $MA(q)$  é uma combinação linear de  $(q + 1)$  sinais de ruídos  $\epsilon$ , aleatórios e independentes entre si. Os ruídos podem ser entendidos como a diferença entre o valor verdadeiro de um processo estocástico em um instante  $t$  e seu correspondente valor estipulado. O modelo  $MA(q)$  estima o processo estocástico  $X(t)$  por :

$$MA(q) : \hat{X}(t) - \mu = \epsilon_t - \theta_1\epsilon_{t-1} - \theta_2\epsilon_{t-2} \cdots - \theta_q\epsilon_{t-q} \quad (5.3)$$

onde  $\{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_q\}$  e  $\epsilon_t \equiv N(0, \sigma_e^2)$  são os parâmetros a serem estimados. A nível de exemplificação, temos que os modelos  $MA(1)$  e  $MA(2)$  são representados, respectivamente, por:

$$\begin{aligned} MA(1) : \hat{X}(t) - \mu &= \epsilon_t - \theta_1\epsilon_{t-1} \\ MA(2) : \hat{X}(t) - \mu &= \epsilon_t - \theta_1\epsilon_{t-1} - \theta_2\epsilon_{t-2} \end{aligned} \quad (5.4)$$

### 5.2.3 Modelo Autoregressivo de Média Móvel - ARMA(p,q)

O modelo autoregressivo de média móvel, como o próprio nome sugere, é formado pela combinação dos modelos  $AR(p)$  (usando os  $p$  valores  $\{x_{t-1}, \dots, x_{t-p}\}$  passados) e  $MA(q)$  (usando os  $q+1$  ruídos/erros  $\{\epsilon_t, \dots, \epsilon_{t-q}\}$  passados), formando então o modelo  $ARMA(p, q)$  e encontrando  $\hat{X}(t)$  como:

$$ARMA(p, q) : \hat{X}(t) - \mu = \varphi_1(x_{t-1} - \mu) + \cdots + \varphi_p(x_{t-p} - \mu) + \epsilon_t - \theta_1\epsilon_{t-1} - \cdots - \theta_q\epsilon_{t-q} \quad (5.5)$$

onde  $\mu$  é a média temporal constante do processo,  $\epsilon_i \equiv N(0, \sigma_e^2)$  é um ruído branco Gaussiano com média zero e desvio padrão igual a  $\sigma_e$ ,  $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p\}$  e  $\{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_q\}$  são os parâmetros a serem estimados. Como forma de exemplificar, o modelo  $ARMA(1, 1)$  e  $ARMA(2, 2)$  estimam  $X(t)$  por:

$$\begin{aligned} ARMA(1, 1) : \hat{X}(t) - \mu &= \varphi_1(x_{t-1} - \mu) + \epsilon_t - \theta_1\epsilon_{t-1} \\ ARMA(2, 2) : \hat{X}(t) - \mu &= \varphi_1(x_{t-1} - \mu) + \varphi_2(x_{t-2} - \mu) + \epsilon_t - \theta_1\epsilon_{t-1} - \theta_2\epsilon_{t-2} \end{aligned} \quad (5.6)$$

Cabe ressaltar que, devido à adoção de processos estocásticos estacionários, nesta tese foi usado apenas o modelo  $ARMA(p, q)$  quando se tratar de modelo de série temporal. No entanto, mesmo não tendo sido o foco desta pesquisa, caso o processo estocástico seja não estacionário, pode-se utilizar o modelo autoregressivo integrado média móvel - ARIMA(p,d,q) (CRYER; CHAN, 2008; BOX; JENKINS, 1978).

### 5.2.4 Modelo Autoregressivo Integrado Média Móvel - ARIMA(p,d,q)

O  $ARIMA(p, d, q)$  pode ser entendido como a combinação do  $ARMA(p, q)$  com uma parte integrada  $I(d)$ , que serve justamente para derivar/integrar 'd' vezes o processo estocástico original, convertendo o problema não estacionário em um problema estacionário, resolvendo-o posteriormente pelo próprio modelo  $ARMA(p, q)$ .

Com isso, um processo estocástico  $X(t)$  pode ser estimado via modelo  $ARIMA(p, d, q)$  se a  $d$ -ésima derivada  $W(t) = \nabla^d X(t)$  é um processo estacionário  $ARMA(p, q)$ . Assim, se o processo estocástico  $W(t)$  segue um modelo  $ARMA(p, q)$ , diz-se que  $X(t)$  é um processo  $ARIMA(p, d, q)$ . Para situações práticas, recomenda-se usar  $d = 1$  ou, no máximo,  $d = 2$  (CRYER; CHAN, 2008; BOX; JENKINS, 1978).

Como meio de exemplificação, o processo estocástico  $X(t)$  pode ser estimado pelo modelo  $ARIMA(p, 1, q)$  através da equação:

$$ARIMA(p, 1, q) : (\hat{X}(t) - x_{t-1}) - \mu = \varphi_1(x_{t-1} - x_{t-2} - \mu) + \varphi_2(x_{t-2} - x_{t-3} - \mu) + \dots + \varphi_p(x_{t-p} - x_{t-p-1} - \mu) + \epsilon_t - \theta_1\epsilon_{t-1} - \dots - \theta_q\epsilon_{t-q} \quad (5.7)$$

Mesmo não tendo sido usado nesta tese, percebe-se que processos não estacionários podem ser representados via modelos de séries temporais do tipo  $ARIMA(p, d, q)$  e que, após a  $d$ -ésima derivada, recai em um modelo  $ARMA(p, q)$ . Assim, o modelo  $ARMA(p, q)$  foi usado em todos os exemplos neste trabalho, tendo em vista que, em trabalhos futuros, a adoção de processos não estacionários podem ser analisados, indiretamente, através desses modelos.

### 5.3 Condições de Estacionariedade e Invertibilidade

Os modelos de séries temporais AR, MA e ARMA são usados na representação de processos estacionários, com isso, algumas condições matemáticas devem ser satisfeitas a fim de garantir a sua estacionariedade. Segundo Box e Jenkins (1978) e Cryer e Chan (2008), a verificação da estacionariedade do modelo  $ARMA(p, q)$  pode ser feito através da análise conjunta das equações características dos modelos  $AR(p)$  ( $\varphi(B)$ ) e  $MA(q)$  ( $\theta(B)$ ). As equações características  $\varphi(B)$  e  $\theta(B)$  são representadas, respectivamente, por:

$$\begin{aligned} AR(p) : \varphi(B) &= 1 - \varphi_1 B - \varphi_2 B^2 - \varphi_3 B^3 - \dots - \varphi_p B^p = 0 \\ MA(q) : \theta(B) &= 1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \theta_3 B^3 - \dots - \theta_q B^q = 0 \end{aligned} \quad (5.8)$$

Com isso, tem-se que o modelo  $AR(p)$  é estacionário se e somente se todas as raízes da sua equação característica  $\varphi(B)$  estiverem fora do círculo unitário, ou seja, que as raízes excedam a unidade em módulo. Similarmente ao que ocorre no modelo  $AR(p)$ , para o modelo  $MA(q)$  a condição de invertibilidade é alcançada desde que todas as raízes da equação característica  $\theta(B)$  sejam maiores que um em módulo, garantindo assim, indiretamente, a estacionariedade do modelo  $MA(q)$ .

Consequentemente, para que o modelo  $ARMA(p, q)$  seja estacionário, tanto a condição de estacionariedade para o modelo  $AR(p)$  quanto a de invertibilidade para o  $MA(q)$  devem



ser satisfeitas conjuntamente, ou seja, todas as raízes (denominadas aqui por  $\psi$ ) das equações características  $\varphi(B)$  e  $\theta(B)$  apresentadas na Equação 5.8 devem ser maiores que a unidade em módulo. (BOX; JENKINS, 1978; CRYER; CHAN, 2008).

## 5.4 Obtenção dos parâmetros do ARMA(p,q)

Com a escolha do modelo de série temporal do tipo  $ARMA(p, q)$ , o próximo passo é escolher a ordem  $(p, q)$  do modelo e, posteriormente, encontrar todos os coeficientes  $\varphi$  e  $\theta$ . Para isso, antes de encontrar tais valores, é necessário definir se o problema analisado é:

- **Com dados históricos amostrais**, ou seja, problemas onde observações passadas de séries temporais são conhecidas, por exemplo: medições passadas de força, temperatura, pressão, deslocamento, entre outros. Esta situação onde modelos de séries temporais são empregados a partir de observações passadas é, sem dúvidas, a mais empregada nos trabalhos acadêmicos e em situação práticas (SOHN; FUGATE; FARRAR, 2000; FUGATE; SOHN; FARRAR, 2001; SOHN; FARRAR, 2001; OWEN et al., 2001; OMENZETTER; BROWNJOHN, 2006; CARDEN; BROWNJOHN, 2008; ZHENG; MITA, 2008; HU; MAHADEVAN, 2017; ZHANG; JU; WANG, 2018; DATTEO et al., 2018). Ademais, nos casos onde não se tem diretamente essas observações passadas, autores como Hu e Mahadevan (2017) geraram amostras iniciais com o uso de softwares de análise estrutural, a fim de partir do pressuposto que o problema será analisado com o uso de dados históricos. Ao invés de gerar amostras iniciais via softwares estruturais, outra possibilidade vista foi em usar amostras iniciais via modelo EOLE (KROETZ; MEDEIROS; TORII, 2020);
- **Sem dados históricos amostrais**, ou seja, quando o problema não possui observações passadas. Nesses casos, os únicos valores conhecidos do processo estocástico são: a média  $\mu(t)$ , desvio padrão  $\sigma(t)$  e tipo de função de autocorrelação  $\rho$ . Trabalhos acadêmicos não foram encontrados na literatura com esse tipo de situação.

A seguir será apresentada a metodologia tradicional empregada para encontrar os parâmetros do ARMA quando se tem dados históricos amostrais e, posteriormente, a metodologia alternativa utilizada neste trabalho para os casos quando não são conhecidos dados históricos do fenômeno analisado.

### 5.4.1 Obtenção dos parâmetros do ARMA(p,q) a partir de dados históricos amostrais

#### 5.4.1.1 Análise da Função Autocorrelação e Função Autocorrelação Parcial

As ordens  $p$  e  $q$  podem ser encontradas a partir do comportamento da função do coeficiente de autocorrelação  $\rho(k)$  (ACF) (do inglês *Autocorrelation Function*) e da função parcial de autocorrelação  $\rho_{k,k}$  (PACF) (do inglês *Partial Autocorrelation Function*).

Conforme apresentado no item [3.2.1](#), a ACF pode ser entendida como o nível de dependência linear de uma variável em dois pontos distintos no tempo. Para séries temporais estacionárias, a autocorrelação entre quaisquer duas observações depende apenas do *Lag* (intervalo) de tempo  $\tau = (t_2 - t_1)$  entre eles, ou seja, a ACF mede o nível de dependência linear da série no tempo  $t_2$  em relação ao valor em  $t_1$ , considerando também a dependência das observações nos tempos intermediários entre  $[t_1, t_2]$ .

Na presença de dados históricos amostrais com  $N$  valores  $\{x_1, x_2, \dots, x_N\}$ , média  $\bar{x}$  e desvio padrão  $\sigma$ , a ACF amostral  $\hat{\rho}(k)$  é calculada para um *lag*  $k$  dada por:

$$\hat{\rho}(k) = \frac{\sum_{t=k+1}^N (x_t - \bar{x})(x_{t-k} - \bar{x})}{\sum_{t=1}^N (x_t - \bar{x})^2}, \text{ para } k = 0, 1, 2, \dots, N-1. \quad (5.9)$$

e usando a relação da Equação [3.29](#) para processos estocásticos, a função autocovariância  $\hat{\gamma}(k)$  é dada por:

$$\hat{\gamma}(k) = \hat{\rho}(k)\sigma^2, \text{ para } k = 0, 1, 2, \dots, N. \quad (5.10)$$

Para uma série temporal estacionária  $X(t)$ , além da ACF, pode-se calcular também o valor da PACF, definida por  $\rho_{k,k}$  para um *lag*  $k$ . A PACF é dada como a correlação entre duas observações  $x_t$  e  $x_{t+k}$  separadas por  $k$  lags, sem levar em consideração a dependência dos elementos intermediários, ou seja, é a autocorrelação entre  $x_t$  e  $x_{t+k}$ , removendo-se a dependência linear de cada  $\{x_{t+1}, \dots, x_{t+k-1}\}$ .

Segundo [Cryer e Chan \(2008\)](#), uma das maneiras de obter o valor da PACF é a partir dos valores da ACF  $\hat{\rho}(k)$ . Com isso, para um dado *lag*  $k$  e usando as equações de *Yule-Walker*, a PACF amostral  $\hat{\rho}_{k,k}$  é calculada por:

$$\begin{bmatrix} 1 & \hat{\rho}(1) & \hat{\rho}(2) & \dots & \hat{\rho}(k-1) \\ \hat{\rho}(1) & 1 & \hat{\rho}(1) & \dots & \hat{\rho}(k-2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{\rho}(k-1) & \hat{\rho}(k-2) & \hat{\rho}(k-3) & \dots & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \hat{\rho}_{1,1} \\ \hat{\rho}_{2,2} \\ \vdots \\ \hat{\rho}_{k,k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\rho}(1) \\ \hat{\rho}(2) \\ \vdots \\ \hat{\rho}(k) \end{bmatrix} \quad (5.11)$$

Com os resultados da ACF e PACF, é possível estimar qual o melhor grau  $p$  e  $q$  da série temporal, além de sugerir qual o melhor tipo de modelo (*AR*, *MA* ou *ARMA*) a ser usado.

A seguir na Figura 12, tem-se um exemplo do gráfico da ACF e PACF para uma amostra da velocidade do vento.

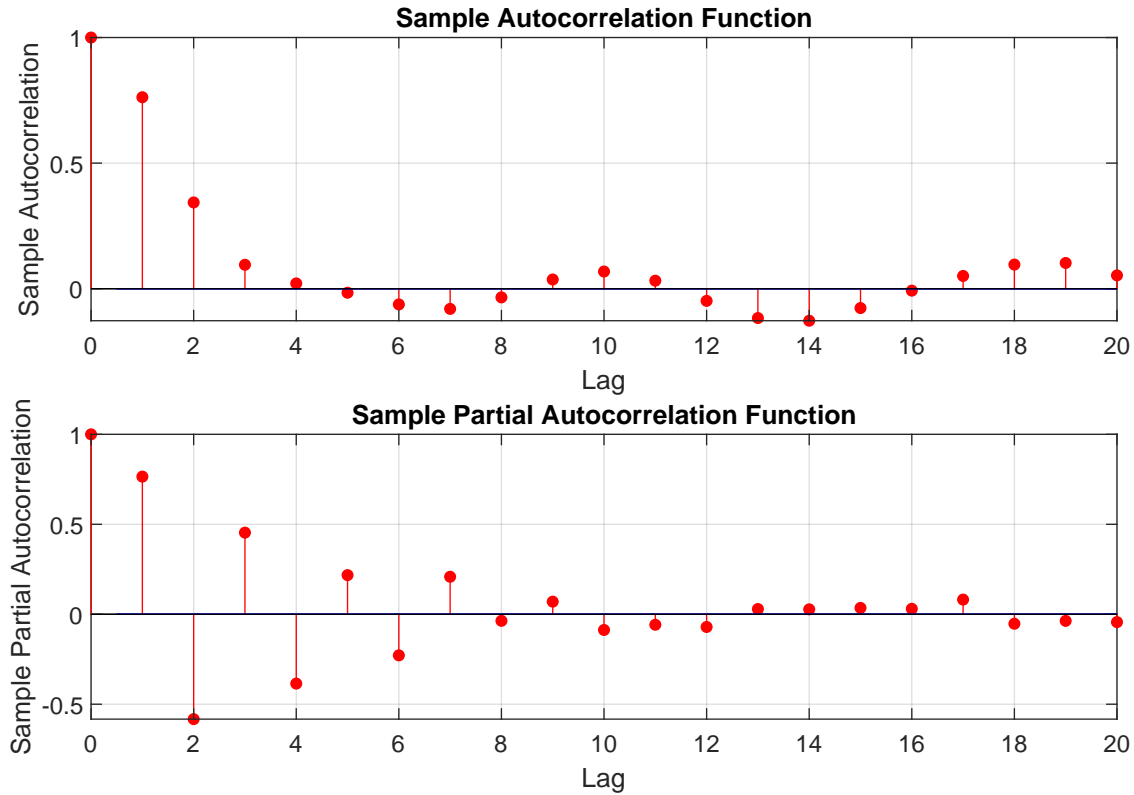


Figura 12 – Valores da ACF e PACF para uma amostra da velocidade do vento

Segundo o comportamento da ACF apresentada na Figura 12, percebe-se que ACF tem um decaimento gradativo e os dados possuem uma autocorrelação linear significativa até o *lag* 2 e, após esse valor, a autocorrelação é praticamente nula. Logo, os 2 valores (em  $t_{i-1}$  e  $t_{i-2}$ ) anteriores a um tempo qualquer  $t_i$  são significativos para a determinação de um valor da velocidade do vento no tempo  $t_i$ . Com relação ao comportamento da PACF, nota-se que a mesma tem um decaimento de maneira gradativa.

A Tabela 2, adaptada de Cryer e Chan (2008), sugere qual a ordem ( $p$  e  $q$ ) e qual tipo de modelo de série temporal ( $AR$ ,  $MA$  ou  $ARMA$ ) são recomendados para o problema analisado a partir dos gráficos da ACF e PACF. Para o comportamento da ACF/PACF mostrado na Figura 12 e com base na Tabela 2, uma estimativa seria o uso do modelo  $MA(2)$ .

Contudo, cabe ressaltar que essas estimativas de graus e tipos de modelos devem ser avaliados após a sua construção, pois não são definitivas, a fim de avaliar se o modelo adotado representa fielmente o modelo real. Como práticas para avaliar a qualidade desses modelos, pode-se usar outro método complementar à análise da ACF/PACF ou então pode ser calcu-

Tabela 2 – Escolha da ordem  $p$  e  $q$  baseada na ACF e PACF

	AR(p)	MA(q)	ARMA(p,q)
ACF	Decai gradualmente	Desprezível após lag $q$	Decai gradualmente
PACF	Desprezível após lag $p$	Decai gradualmente	Decai gradualmente

lado a média, desvio padrão e função de autocorrelação das simulações geradas pelo modelo de série temporal e comparadas às do processo estocástico original.

Um método alternativo à análise da ACF/PACF é o critério da informação Bayesiana (BIC) (do inglês, *Bayesian Information Criterion*), que usa o valor da função *likelihood*.

#### 5.4.1.2 Bayesian Information Criterion

Para encontrar os graus  $p$  e  $q$  do modelo ARMA, segundo Box e Jenkins (1978) e Cryer e Chan (2008) outros métodos alternativos à análise da ACF/PACF podem ser usados, entre eles o método baseado no critério da informação Bayesiana.

Proposto por Schwarz (1978), através do BIC os graus  $(p, q)$  do modelo são variados e várias combinações são avaliadas. Para cada combinação  $(p, q)$  é calculado o valor *BIC* dado por:

$$BIC = -2\log[L(\varphi, \theta, \mu, \sigma_e^2)] + a\log(N) \quad (5.12)$$

onde  $a$  é o número de parâmetros a serem estimados,  $N$  é o número de observações da amostra e  $L(\varphi, \theta, \mu, \sigma_e^2)$  é o valor máximo da função *likelihood*, definida como a densidade conjunta das  $N$  observações dados os " $a$ " parâmetros. Com os valores da função *BIC* calculados para diferentes combinações de  $p$  e  $q$ , seleciona-se a combinação que resulte em um menor valor desta função.

#### 5.4.1.3 Função Likelihood

A função *likelihood*  $L(\varphi, \theta, \mu, \sigma_e^2)$  usada no cálculo do BIC, serve para estimar todos os parâmetros  $(\varphi, \theta, \mu$  e  $\sigma_e^2)$  desconhecidos do modelo  $ARMA(p, q)$ . Uma das vantagens de usar a função *likelihood* é que todas as informações dos dados históricos são usadas, ao invés apenas de usar o primeiro e segundo momento, como fazem outros métodos. A principal desvantagem é que deve ser feito o uso da função densidade probabilidade conjunta, tornando-o custoso do ponto de vista computacional em alguns casos (CRYER; CHAN, 2008).

Assim, para um modelo  $ARMA(p, q)$  com um conjunto de observações  $\mathbf{x} = \{x_1, \dots, x_{N-1}, x_N\}$ , os parâmetros  $(\varphi, \theta, \mu$  e  $\sigma_e^2)$  são encontrados através de algoritmo de otimização para que maximizem a função *likelihood*  $L$  dada por:

$$L(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\theta}, \mu, \sigma_e^2) = \prod_{t=2}^N \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_e^2}} \exp\left\{\frac{-\epsilon_t}{2\sigma_e^2}\right\} \quad (5.13)$$

com  $\epsilon_t$  sendo obtido da Equação 5.5 e dado por:

$$\epsilon_t = (x(t) - \mu) - \varphi_1(x_{t-1} - \mu) - \cdots - \varphi_p(x_{t-p} - \mu) + \theta_1\epsilon_{t-1} + \cdots + \theta_q\epsilon_{t-q} \quad (5.14)$$

Outros critérios usados para estimar a ordem e os parâmetros dos modelos ARMA podem ser encontrados em Schwarz (1978) e Cryer e Chan (2008), como por exemplo o critério da informação *Akaike* (AIC), o AIC corrigido (AICc), AIC consistente (CAIC), *Ljung-Box Q-test*, *Hannan-Quinn criterion* (HQC), entre outros. Um resumo da utilização da ACF/PACF, funções BIC e *likelihood* é apresentado na Figura 13.

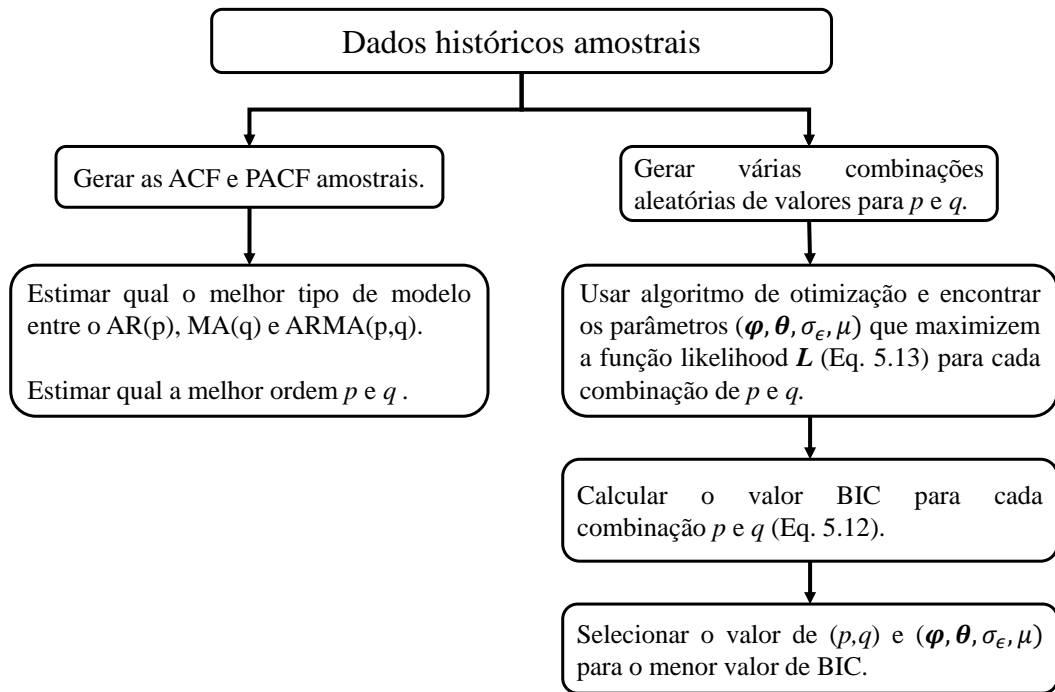


Figura 13 – Obtenção dos parâmetros do ARMA a partir de observações amostrais

#### 5.4.2 Obtenção dos parâmetros do ARMA(p,q) sem dados históricos amostrais

No casos onde não se têm dados históricos amostrais do fenômeno envolvido, sendo esta a situação usual nos trabalhos acadêmicos voltados à análise de confiabilidade estrutural dependente do tempo e a utilizada pelos principais métodos que geram amostras estocásticas

(como o KL,OLE e EOLE), os únicos valores disponíveis do processo são a média  $\mu(t)$ , desvio padrão  $\sigma(t)$  e a função de autocorrelação  $\rho(\tau)$ .

No entanto, modelos de séries temporais são geralmente empregados e calculados considerando que observações/medições históricas são disponíveis ([CRYER; CHAN, 2008; BAO; HAO; LI, 2013; CARDEN; BROWNJOHN, 2008; YAO; PAKZAD, 2013; HU; DU, 2014; ZHANG; JU; WANG, 2018; HU; MAHADEVAN, 2017; AVCI et al., 2021]). Por esta razão, com o objetivo de estimar os parâmetros do modelo ARMA usando apenas os valores de  $\mu$ ,  $\sigma$  e  $\rho_X(t_i, t_j)$ , empregou-se nesta tese um procedimento alternativo.

Uma primeira alternativa consistiu em simular trajetórias de processos estocásticos usando EOLE ou softwares de análise estrutural e, posteriormente, aplicar as técnicas padrões usadas na criação de modelos de séries temporais, conforme mostrado na Figura 13. No entanto, observou-se que a precisão desta abordagem é afetada pelo erro amostral no uso do EOLE ([KROETZ; MEDEIROS; TORII, 2020]). Por esta razão, esta alternativa não é recomendada, ao menos que seja estritamente necessária.

Uma segunda possibilidade, mais precisa que a primeira, é obter os parâmetros dos modelos ARMA através da resolução do problema de otimização: Encontrar os parâmetros  $\varphi_i$ ,  $\theta_i$ ,  $\sigma_e$  que:

$$\min f(\varphi, \theta, \sigma_e) = \|\gamma - \bar{\gamma}(\varphi, \theta, \sigma_e)\| \quad (5.15)$$

sujeito a

$$|\psi_i| \geq 1 + \varepsilon, \quad i = 1, 2, \dots, p + q, \quad (5.16)$$

onde  $\|\cdot\|$  representa a norma Euclidiana do vetor,  $\gamma$  é o vetor de autocovariâncias do processo estocástico original:

$$\gamma = \{\rho(0), \rho(t_1), \rho(t_2), \dots, \rho(t_N)\} \sigma^2, \quad (5.17)$$

considerando cada instante de tempo analisado  $t_i$  e  $\bar{\gamma}$  o vetor de autocovariância do modelo ARMA com parâmetros  $(\varphi, \theta, \sigma_e)$ . Desde que o processo seja assumido como estacionário, o vetor das autocovariâncias  $\bar{\gamma}$  do modelo ARMA pode ser obtido resolvendo o sistema de equações lineares ([BROCKWELL; DAVIS, 1991; CRYER; CHAN, 2008]):

$$\begin{cases} \bar{\gamma}(k) - \varphi_1 \bar{\gamma}(k-1) - \dots - \varphi_p \bar{\gamma}(k-p) = \sigma_e^2 \sum_{k \leq j \leq q} \theta_j \Psi_{j-k}, \quad \forall 0 \leq k < \max\{p, q+1\} \\ \bar{\gamma}(k) - \varphi_1 \bar{\gamma}(k-1) - \dots - \varphi_p \bar{\gamma}(k-p) = 0, \quad \forall k \geq \max\{p, q+1\} \end{cases} \quad (5.18)$$

com

$$\begin{cases} \Psi_j - \sum_{0 < k \leq j} \varphi_k \Psi_{j-k} = \theta_j, \quad \forall 0 \leq j < \max\{p, q+1\} \\ \Psi_j - \sum_{0 < k \leq p} \varphi_k \Psi_{j-k} = 0, \quad \forall j \geq \max\{p, q+1\} \end{cases}, \quad (5.19)$$

com  $\theta_0 = 1$ ,  $\theta_j = 0$  para  $j > q$ ,  $\varphi_j = 0$  para  $j > p$ ,  $\bar{\gamma}(0) = \sigma^2$  e  $\bar{\gamma}(k) = \bar{\gamma}(-k)$ .

Note que a função objetivo da Equação 5.15 mede a diferença entre o vetor da autocovariância verdadeira  $\gamma$  (Equação 5.17) e um resultado  $\bar{\gamma}$  (Equação 5.18) em função dos parâmetros  $(\varphi, \theta, \sigma_e)$  do modelo ARMA. As restrições da Equação 5.16, por outro lado, garantem que o modelo ARMA seja estacionário e invertível durante o processo de otimização. Neste caso,  $\psi_i$  são as raízes das equações

$$\begin{cases} \varphi(x) = 1 - \varphi_1 x - \varphi_2 x^2 - \varphi_3 x^3 - \dots - \varphi_p x^p = 0 \\ \theta(x) = 1 - \theta_1 x - \theta_2 x^2 - \theta_3 x^3 - \dots - \theta_q x^q = 0 \end{cases} \quad (5.20)$$

e  $\varepsilon > 0$  é um pequeno *parâmetro de relaxamento*, usado para evitar instabilidades computacionais. Note que o modelo ARMA é estacionário e invertível se  $|\psi_i| > 1$  (BOX; JENKINS, 1978; CRYER; CHAN, 2008). O parâmetro de relaxamento é empregado para transformar esta condição na declaração padrão de problemas de otimização que considera restrições do tipo  $\leq$  ou  $\geq$ , por razões teóricas. Nesta tese adotamos  $\varepsilon = 10^{-10}$ .

O problema de otimização da Equação 5.15 foi resolvido usando a função *fmincon* do MATLAB e o algoritmo SQP (*Sequential Quadratic Programming*). Os valores iniciais de todos os parâmetros desconhecidos  $(\varphi; \theta; \sigma_e)$  foram iguais a  $(10^{-5}; 10^{-5}; 5\sigma)$ , respectivamente. O critério de convergência adotado foi de uma diferença de  $10^{-13}$  entre dois resultados consecutivos. Um fluxograma mostrando as etapas para obtenção dos parâmetros do *ARMA*( $p, q$ ) sem dados históricos amostrais adotado nesta tese é apresentado na Figura 14.

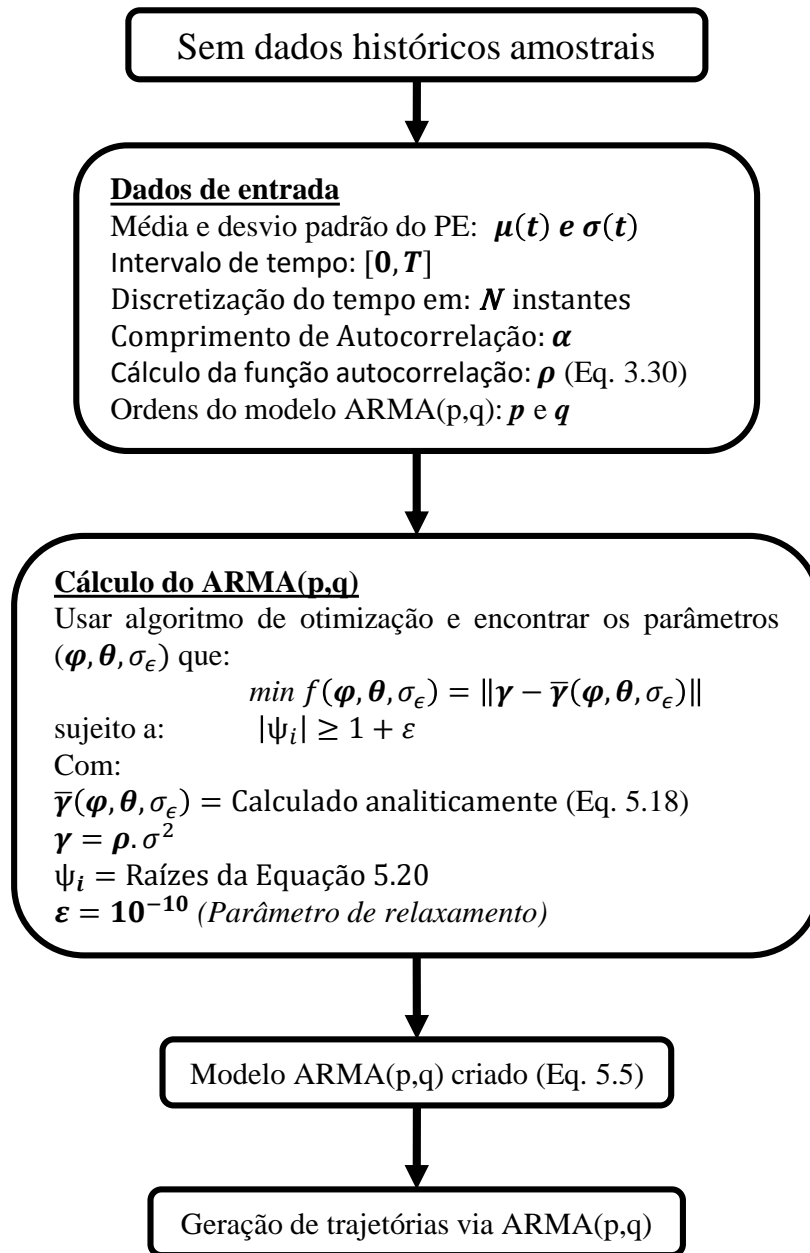


Figura 14 – Obtenção dos parâmetros do ARMA sem observações amostrais



## 6 Implementação Computacional

No entanto, como o intuito deste trabalho é comparar modelos ARMA e EOLE no contexto da análise de confiabilidade dependente do tempo, dois diferentes casos de interesse prático são considerados:

- **Caso I:** quando são conhecidos apenas os valores da média  $\mu(t)$  e desvio padrão  $\sigma(t)$  do processo estocástico, além do tipo da função do coeficiente de autocorrelação  $\rho$ ;
- **Caso II:** quando é conhecida ou pré-definida a matriz autocovariância  $\bar{\gamma}$ , ou seja, nos casos onde a matriz autocovariância já é dada inicialmente, que pode ser de acordo com a discretização real do problema, a partir de dados históricos ou até mesmo através de outros modelos pré-definidos.

### 6.1 Caso I

No Caso I, foram adotados como valores conhecidos a média  $\mu(t)$  e desvio padrão  $\sigma(t)$  do processo estocástico, além do tipo da função do coeficiente de autocorrelação  $\rho$ , sem necessitar dos dados históricos do problema. Essa abordagem é a mais praticada nos trabalhos acadêmicos na área de confiabilidade dependente do tempo.

A metodologia de cálculo para esta situação é apresentada no fluxograma da Figura 15, onde em cada etapa é calculado:

- **Dados de entrada:** Partindo da suposição que observações históricas amostrais não são conhecidas, nesta hipótese os dados de entrada são os usualmente utilizados nos exemplos da literatura, como a média  $\mu(t)$  e desvio padrão  $\sigma(t)$  do processo estocástico e tipo da função do coeficiente de autocorrelação  $\rho$ . Dados adicionais para caracterização do problema são definidos nesta etapa, como o valor do comprimento de autocorrelação  $\alpha$ , tempo total  $[0, T]$  que será feito a análise, quantidade de instantes  $N$  que serão usados para discretizar o tempo, dando um passo de tempo  $\Delta t = \frac{T}{N-1}$  e selecionando os tempos  $t_i = (i - 1)\Delta t$ , com  $i = 1, \dots, N$ ;
- **Cálculo via ARMA(p,q) e EOLE:** Com os dados de entrada definidos, os modelos ARMA(p,q) e EOLE são construídos para, posteriormente, gerar as trajetórias do processo estocástico que serão usadas na análise de confiabilidade. O modelo EOLE é construído baseado no fluxograma da Figura 8 e o ARMA(p,q) na Figura 14;

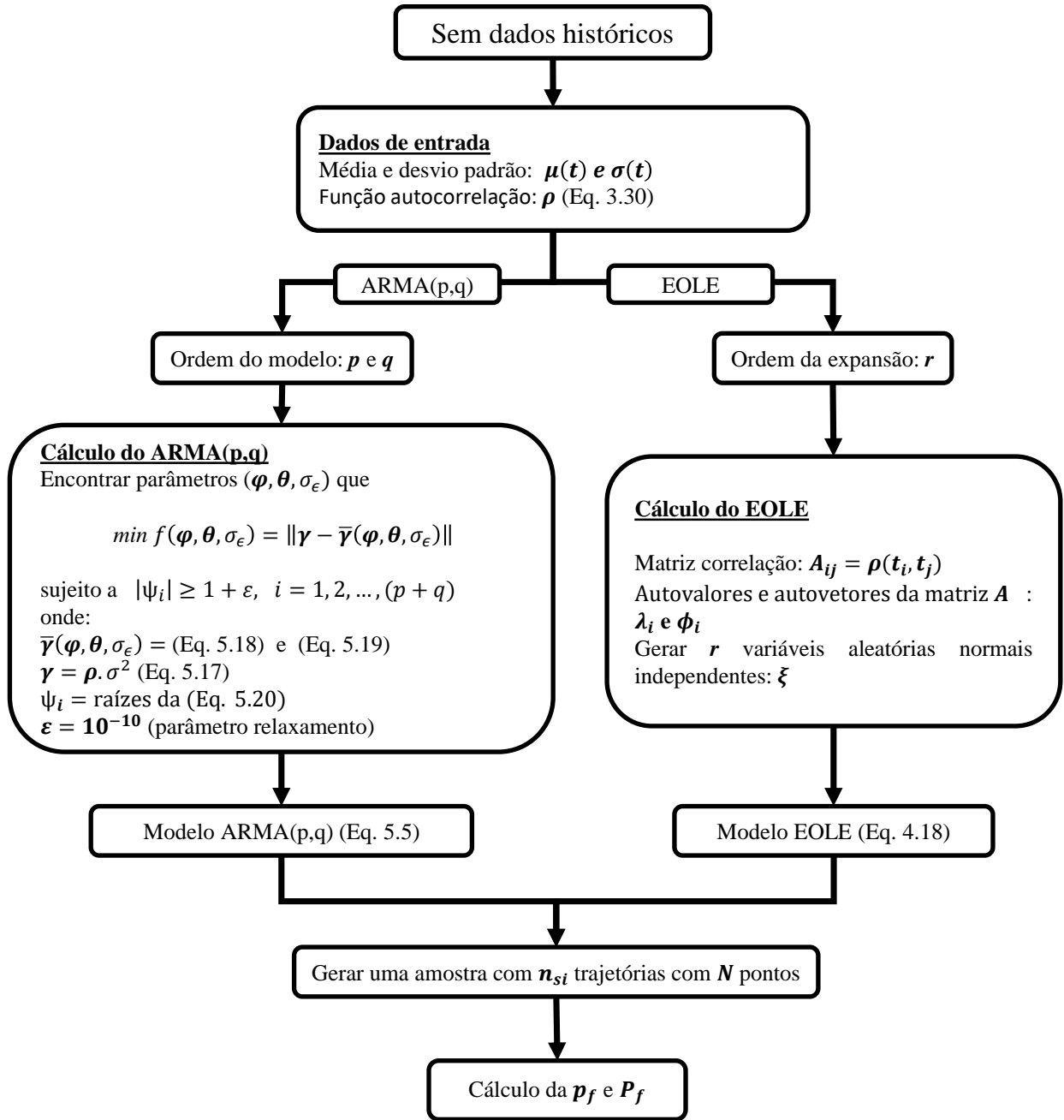


Figura 15 – Fluxograma usado no Caso I

- **Geração das amostras:** Após a construção do ARMA(p,q) e EOLE, tais modelos serão usados para gerar, individualmente, todas as trajetórias/amostras usadas na simulação de Monte Carlo e que serão utilizadas na análise de confiabilidade dependente do tempo. A partir das Equações 4.18 (para o EOLE) e 5.5 (para o ARMA) são geradas  $n_{si}$  trajetórias com cada uma possuindo  $N$  valores. Usando como exemplo a Figura 2 que apresenta uma trajetória do PE para todos os  $N$  tempos usados da análise, na

prática, serão criados  $n_{si}$  trajetórias como essas tanto para o ARMA(p,q) quanto para o EOLE;

- **Simulação de Monte Carlo:** Com as  $n_{si}$  simulações geradas, a análise de confiabilidade dependente do tempo é resolvida com o uso da simulação de Monte Carlo, sendo usada a Equação 3.37 no cálculo da probabilidade de falha instantânea  $p_f$  e a Equação 3.41 no cálculo da probabilidade de falha acumulada  $P_f$ .

## 6.2 Caso II

Na segunda hipótese, adotou-se que uma matriz autocovariância do problema é totalmente conhecida. Nesta tese, usou-se a matriz autocovariância  $\bar{\gamma}$  conhecida a partir de um modelo ARMA(p,q) pré-definido inicialmente. Vale ressaltar que a matriz autocovariância pode ser obtida também a partir de uma amostra de dados reais. Logo, apesar de utilizarmos aqui uma matriz de autocovariância conhecida como dado de entrada obtida a partir de um processo ARMA pré-definido, não haveria problemas em substituir esta informação por uma matriz autocovariância obtida diretamente através de uma amostra de dados reais.

Para o Caso II, a análise de confiabilidade dependente do tempo foi realizada conforme o fluxograma da Figura 16, onde em cada etapa é calculado:

- **Dados de entrada:** No Caso II, a função de autocovariância  $\bar{\gamma}$  usada na análise foi obtida inicialmente a partir de um modelo ARMA(p,q) já conhecido, ou seja,  $\bar{\gamma} = \bar{\gamma}(\varphi, \theta, \sigma_e)$  obtida pela Equação 5.18 para um modelo ARMA(p,q) pré-definido. Cabe ressaltar que  $\bar{\gamma}$  poderia ser obtida também, por exemplo, a partir de dados amostrais ou até mesmo através de uma caracterização pré-definida do problema analisado;
- **Cálculo do ARMA e EOLE:** Conforme mencionado na etapa anterior, o modelo ARMA(p,q) é inicialmente conhecido, então não se fez necessário nenhum cálculo adicional relacionado à obtenção dos seus coeficientes. Para o modelo EOLE, com as matrizes de autocovariância  $\bar{\gamma}$  e autocorrelação  $\bar{\rho}$  conhecidas, calculam-se seus autovalores  $\lambda$  e autovetores  $\phi$ , define-se a quantidade de termos  $r$  da expansão, geram-se  $r$  variáveis aleatórias  $\xi$  e, por fim, cria-se o modelo EOLE a partir da Equação 4.18, conforme apresentado no fluxograma da Figura 16. Por conveniência, adotou-se a seguinte nomenclatura para este caso: para um modelo ARMA(p,q=p) inicialmente conhecido, com "p" sendo a ordem do modelo ARMA, criou-se uma expansão EOLEp. Assim, usando a matriz autocovariância de um modelo ARMA(4,4), criou-se um EOLE4. Para o caso de um ARMA(8,8) inicialmente conhecido, criou-se o EOLE8, e assim sucessivamente;

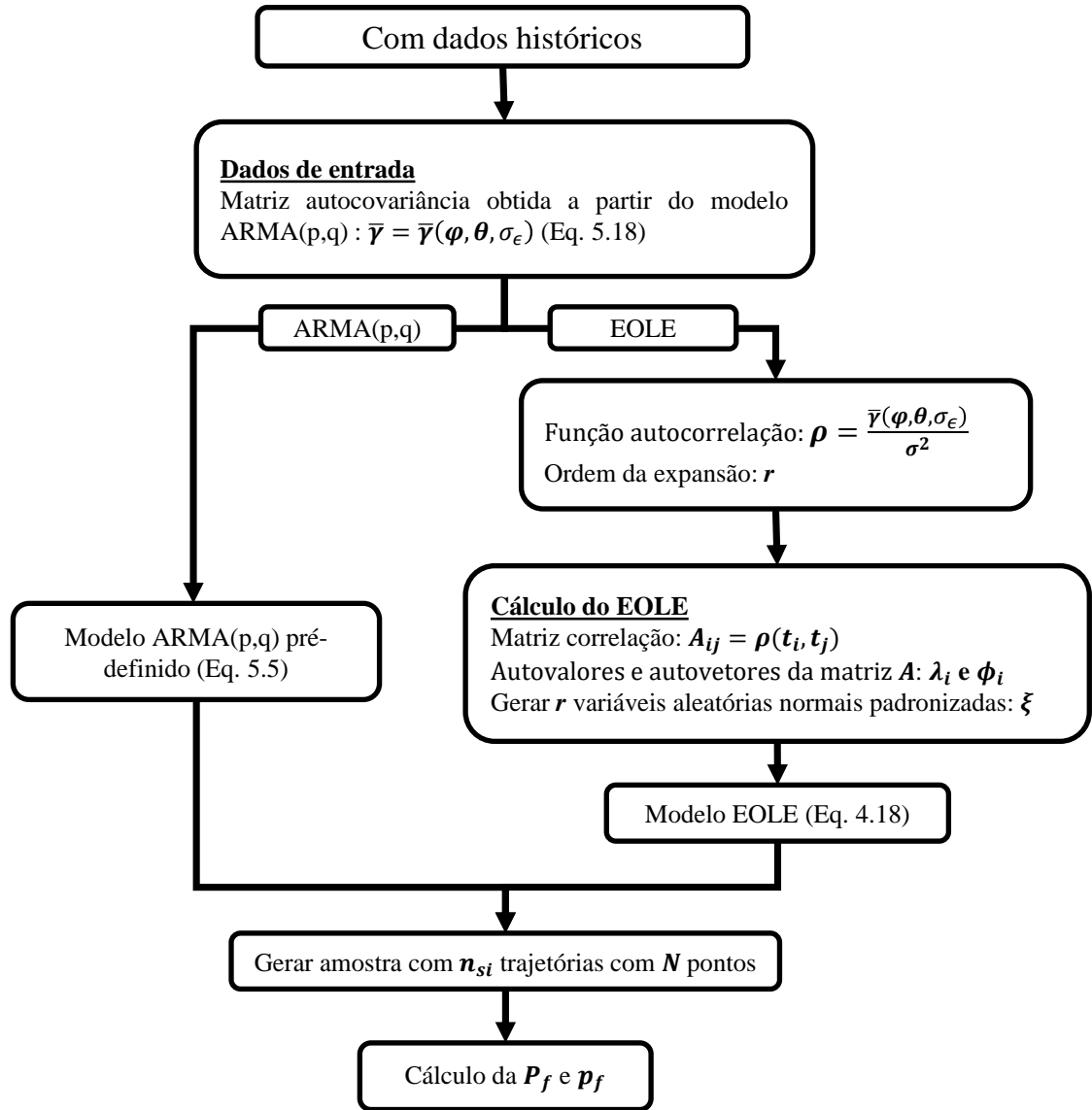


Figura 16 – Fluxograma usado no Caso II

- **Geração das amostras:** Com o ARMA e EOLE definidos, tais modelos são usados para gerar, individualmente, todas as trajetórias/amostras usadas na simulação de Monte Carlo e que serão usadas para a análise de confiabilidade dependente do tempo. A partir das Equações 4.18 (para o modelo EOLE) e 5.5 (para o ARMA) são geradas  $n_{si}$  trajetórias com cada uma possuindo  $N$  valores. Usando como exemplo a Figura 2 que apresenta uma trajetória do PE para todos os  $N$  tempos usados da análise, na prática, serão criadas  $n_{si}$  trajetórias como essas para cada modelo;
- **Simulação de Monte Carlo:** Com as  $n_{si}$  simulações geradas, a análise de confiabilidade dependente do tempo é resolvida com o uso da simulação de Monte Carlo,

conforme apresentado no item 3.3, sendo usada a Equação 3.37 no cálculo da probabilidade de falha instantânea  $p_f$  e a Equação 3.41 no cálculo da probabilidade de falha acumulada  $P_f$ .

## 7 Exemplos Numéricos

Com o objetivo de avaliar a capacidade de usar modelos ARMA, em comparação com o EOLE, em diferentes situações para análise de confiabilidade dependente do tempo, cinco exemplos foram escolhidos e resolvidos usando os dois casos apresentados no Capítulo 6 e retratando diferentes situações da Engenharia. O primeiro exemplo é o problema da barreira constante usado para calibrar e validar inicialmente os modelos EOLE e ARMA, e de fácil implementação computacional. O segundo exemplo é um problema de *benchmark* envolvendo uma viga sujeita à corrosão, com a carga representada por um processo estocástico. No terceiro exemplo, temos uma ponte treliçada onde a análise estrutural é realizada via método dos elementos finitos. No quarto exemplo, apresenta-se um sistema em série de uma treliça com dois processos estocásticos atuantes. No quinto exemplo, foi usado um pórtico plano de 2 andares com o intuito de simular uma estrutura real e obter pequenos valores para a probabilidade de falha acumulada.

Vale ressaltar que, em todos os exemplos a função de autocorrelação adotada no Caso I foi a do tipo exponencial quadrática, definida na Equação 3.30, e no Caso II foi obtida a partir de um modelo ARMA conhecido.

No primeiro conjunto de testes foi assumido que as propriedades do processo estocástico (i.e. função autocorrelação, média e desvio padrão) são explicitamente conhecidos, o que corresponde ao Caso I apresentado na Figura 15. Esses testes foram realizados para avaliar se os modelos ARMA podem ser calibrados a partir de um processo estocástico explicitamente conhecido, sem disponibilidade de uma amostra de dados reais do processo, e se os resultados mostram convergência quando comparados ao EOLE.

No segundo conjunto de testes adota-se como conhecidos a média, o desvio padrão e a matriz autocovariância do processo estocástico, obtida a partir de um modelo ARMA conhecido, o que corresponde ao Caso II mostrado na Figura 16. Note que a matriz autocovariância pode ser obtida a partir de uma amostra de dados reais e, portanto, esta metodologia pode ser aplicada em tais situações. Esta situação é importante do ponto de vista prático, pois modelos de séries temporais são frequentemente calibrados a partir de dados reais existentes.

Neste Caso II, por conveniência, foram utilizados como modelos ARMA iniciais todos aqueles usados no Caso I. Com isso, neste Caso II, para cada modelo ARMA( $p,p$ ) com sua função autocovariância/autocorrelação já conhecida, sendo “ $p$ ” a ordem do modelo ARMA, foi construído um respectivo EOLE $p$  e os resultados das probabilidade de falha são calculados e comparados. Por exemplo, usando o modelo ARMA(4,4) como conhecido inicialmente, o fluxograma da Figura 16 é realizado, um respectivo EOLE4 é construído e os valores da  $P_f$  e

$p_f$  são calculados e comparados via ARMA(4,4) e EOLE4. Para um ARMA(8,8) conhecido, refaz-se a metodologia da Figura 16, o respectivo EOLE8 é criado e os valores da  $P_f$  e  $p_f$  são novamente calculados e comparados via ARMA(8,8) e EOLE8, e assim sucessivamente.

Em todos os exemplos foram calculados os valores da probabilidade de falha acumulada  $P_f(0, T)$  para o tempo final do problema, seguindo o fluxograma de cálculo apresentado na Figura 7. Este procedimento foi adotado a fim de verificar a convergência dos resultados da  $P_f$  via ARMA e via EOLE, sendo esta probabilidade de falha acumulada um dos parâmetros mais importantes na análise de confiabilidade dependente do tempo.

Ademais, com o intuito de avaliar também a probabilidade de falha em tempos específicos do problema e, conseqüentemente, a capacidade de aplicação de modelos ARMA para esta finalidade, foi calculada a probabilidade de falha instantânea  $p_f$  (Equação 3.37) nos tempos  $t = 0$  (tempo inicial),  $t = \frac{T}{2}$  (tempo intermediário) e  $t = T$  (tempo final). Vale salientar que, como foram adotados processos estocásticos estacionários, para tempos  $t$  fixos, os mesmos se comportam como uma variável aleatória, justificando a utilização da Equação 3.37.

O nível de incerteza (ou erro) amostral envolvido na simulação de Monte Carlo, representado nas tabelas dos resultados por  $CV\ SMC$ , foi estimado pela Equação 3.39 ou seja, pelo coeficiente de variação, sendo esta fórmula usada tanto para a  $p_f$  quanto para a  $P_f$ . Com o intuito de diminuir este erro de amostragem, adotou-se nesta tese amostras com tamanho da ordem de  $10^6$  e  $10^7$ , conforme será apresentado nos exemplos.

A diferença percentual  $\Delta$  entre dois valores  $p_i$  e  $p_j$  de uma probabilidade, seja ela  $p_f$  ou  $P_f$ , foi calculada através de:

$$\Delta(\%) = \left| \frac{p_j - p_i}{p_i} \right| 100\% \quad (7.1)$$

sendo  $p_i$  o valor de referência.

## 7.1 Exemplo 1: Problema da Barreira Constante

No primeiro exemplo foi considerado um processo estacionário Gaussiano  $X(t)$  com média  $\mu = 3$ , desvio padrão  $\sigma = 0.3$  e comprimento de autocorrelação  $\alpha = 0.1$ . A falha é assumida quando  $X(t)$  ultrapassa uma barreira constante de 3.65. A função de estado limite  $g(t, \mathbf{X})$  do problema é:

$$g(t, \mathbf{X}) = 3.65 - X(t). \quad (7.2)$$

O problema é resolvido para um intervalo de tempo de  $[0, 10]$  com uma discretização uniforme deste intervalo em 1,000 pontos. Uma expansão com 250 termos foi usada no

EOLE. O número total de simulações em cada análise foi de  $10^7$  e quatro modelos ARMA foram testados: ARMA(4,4), ARMA(8,8), ARMA(16,16) e ARMA(32,32).

### 7.1.1 Caso I

Inicialmente, assumiu-se que a função de autocorrelação, média e desvio padrão do processo estocástico eram conhecidos e os modelos ARMA e EOLE foram criados como mostrado na Figura 15. O resultado da  $P_f$  no decorrer do período  $[0, 10]$  é mostrado na Figura 17. Os valores da probabilidade de falha acumulada  $P_f(0, 10)$  e instantânea  $p_f(t)$  em  $t = \{0, 5, 10\}$  são mostrados e comparados na Tabela 3, onde a diferença relativa é computada usando como referência o EOLE. O erro amostral relacionado a simulação de Monte Carlo (*Erro SMC*) foi estimado considerando  $10^7$  simulações.

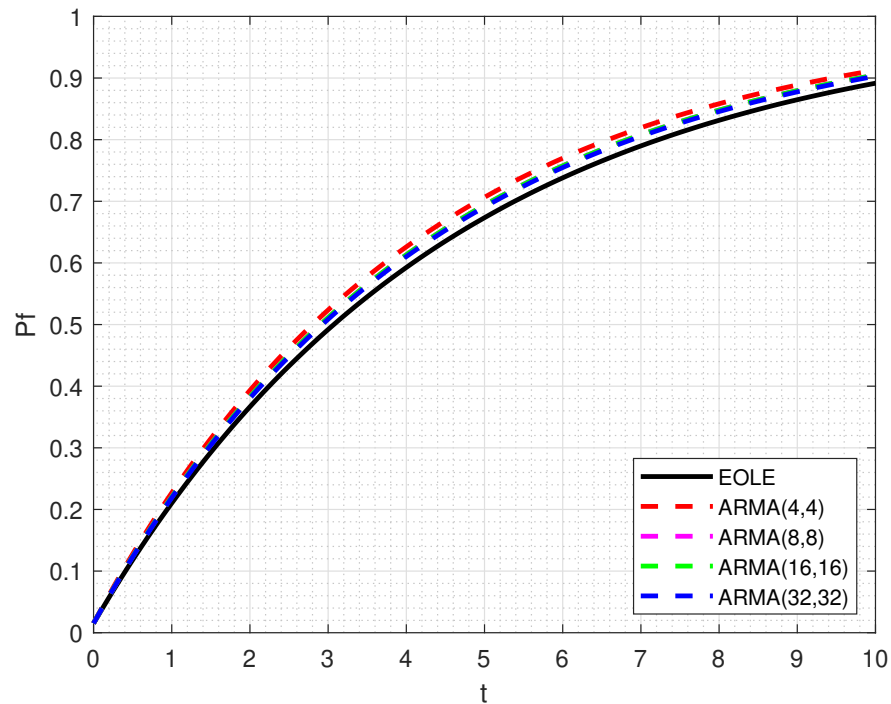


Figura 17 – Evolução da probabilidade de falha acumulada no tempo (Exemplo 1 - Caso I)

De acordo com os resultados apresentados, percebe-se que os resultados via EOLE e ARMA são similares. A diferença máxima nos valores da  $P_f$  no tempo final da análise foi menor que 2.40% e da  $p_f$ , para todos os tempos analisados, foi menor que 1.30%. A partir desses resultados, pode-se notar que ocorre uma convergência dos resultados obtidos via EOLE e via modelos ARMA usados aqui, pois esta diferença pode ser considerada pequena



Tabela 3 – Valores da probabilidade de falha acumulada e instantânea (Exemplo 1 - Caso I)

	$P_f(0, 10)$	$\Delta^*$	$p_f(0)$	$\Delta^*$	$p_f(5)$	$\Delta^*$	$p_f(10)$	$\Delta^*$
EOLE	89.158%	—	1.512%	—	1.520%	—	1.518%	—
ARMA(4,4)	91.264%	2.36%	1.530%	1.18%	1.534%	0.95%	1.529%	0.74%
ARMA(8,8)	90.466%	1.47%	1.521%	0.57%	1.522%	0.14%	1.518%	0.04%
ARMA(16,16)	90.470%	1.47%	1.520%	0.51%	1.517%	0.15%	1.502%	1.09%
ARMA(32,32)	90.291%	1.27%	1.517%	0.34%	1.516%	0.24%	1.499%	1.26%
CV SMC	0.01%		0.25%		0.25%		0.25%	

\* Diferença computada baseada no valor do EOLE.

dentro do contexto de análise baseada em amostragem. Ademais, devido a pequena diferença, para este caso, um modelo ARMA(4,4) seria suficiente para representar tal problema.

Vale ressaltar também que, neste caso, para a  $P_f$ , o aumento da ordem do modelo ARMA resulta em uma melhor aproximação com o EOLE, conforme visto na Figura 18 através da diferença relativa, o que já era teoricamente esperado, indicando que à medida que aumenta a quantidade de coeficientes e a ordem do modelo ARMA, obtém-se uma melhor estimativa para  $\bar{\gamma}(\varphi, \theta, \sigma_e)$ , o erro envolvido no processo de otimização (Equação 5.15) diminui e, consequentemente, melhora a qualidade dos resultados.

### 7.1.2 Caso II

Posteriormente, foi utilizada a matriz de autocovariância de modelos ARMA já conhecidos. Neste caso, por conveniência, usaram-se como modelos ARMA iniciais todos aqueles usados no Caso I da seção anterior. Com isso, sendo  $p$  a ordem do modelo ARMA, para cada modelo ARMA( $p, p$ ) com sua respectiva função autocovariância já conhecida, foi construído um EOLE $p$  e as probabilidade de falha instantânea e acumulada são calculadas e comparadas. Por exemplo, usando inicialmente o ARMA(4,4) e sua respectiva matriz autocovariância, foi criado um EOLE4, e assim sucessivamente para o ARMA(8,8) (criando o EOLE8), ARMA(16,16) (criando o EOLE16) e ARMA(32,32) (criando o EOLE32).

Os resultados para  $P_f$  no decorrer do tempo para todos os conjuntos de casos são apresentados na Figura 19. Os resultados numéricos da probabilidade de falha acumulada  $P_f(0, 10)$  e instantânea  $p_f(t)$  (para  $t = \{0, 5, 10\}$ ) são mostrados e comparados na Tabela 4.

A partir dos resultados apresentados na Tabela 4, pode ser visto que os valores via ARMA e EOLE também são semelhantes, com uma diferença máxima de 1.99% nos valores da  $P_f$  e de 2.51% para a  $p_f$ , entre todos os modelos analisados. Assim como ocorreu no Caso I, o valor da  $P_f$  melhora com o aumento da ordem do modelo ARMA, ficando praticamente constante a partir do ARMA(8,8).

A partir dos resultados para os Caso I e Caso II, é possível dizer que os resultados via

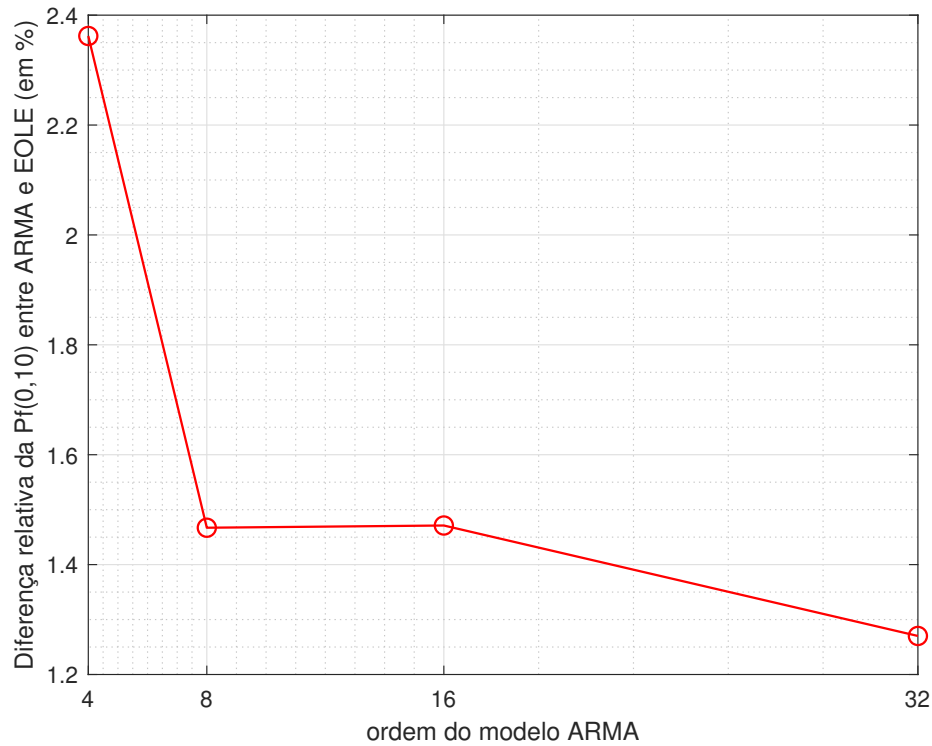


Figura 18 – Variação da diferença relativa da  $P_f(0, 10)$  entre ARMA e EOLE com o aumento da ordem  $(p, q)$  do modelo ARMA (Exemplo 1 - Caso I)

Tabela 4 – Valores da probabilidade de falha acumulada e instantânea (Exemplo 1 - Caso II)

	$P_f(0, 10)$	$\Delta^*$	$p_f(0)$	$\Delta^*$	$p_f(5)$	$\Delta^*$	$p_f(10)$	$\Delta^*$
ARMA(4,4)	91.264%	—	1.530%	—	1.534%	—	1.529%	—
EOLE4	89.450%	1.99%	1.505%	1.62%	1.496%	2.51%	1.499%	2.00%
ARMA(8,8)	90.466%	—	1.521%	—	1.522%	—	1.518%	—
EOLE8	89.216%	1.38%	1.507%	0.88%	1.503%	1.24%	1.507%	0.71%
ARMA(16,16)	90.470%	—	1.520%	—	1.517%	—	1.502%	—
EOLE16	89.133%	1.48%	1.509%	0.71%	1.506%	0.75%	1.512%	0.67%
ARMA(32,32)	90.291%	—	1.517%	—	1.516%	—	1.499%	—
EOLE32	89.095%	1.32%	1.514%	0.21%	1.510%	0.39%	1.508%	0.59%
CV SMC	0.01%		0.25%		0.25%		0.25%	

\* Diferença computada com relação ao modelo ARMA correspondente.

ARMA e EOLE são convergentes, tendo em vista que as máximas diferenças encontradas (2.36% para a  $P_f(0, 10)$  e 2.51% para todas as  $p_f$  analisadas) estão dentro dos limites padrões para situações onde técnicas de amostragens são utilizadas, significando que modelos ARMA podem ser usados, alternativamente ao EOLE, para a análise de confiabilidade dependente do tempo partindo de diferentes cenários iniciais.

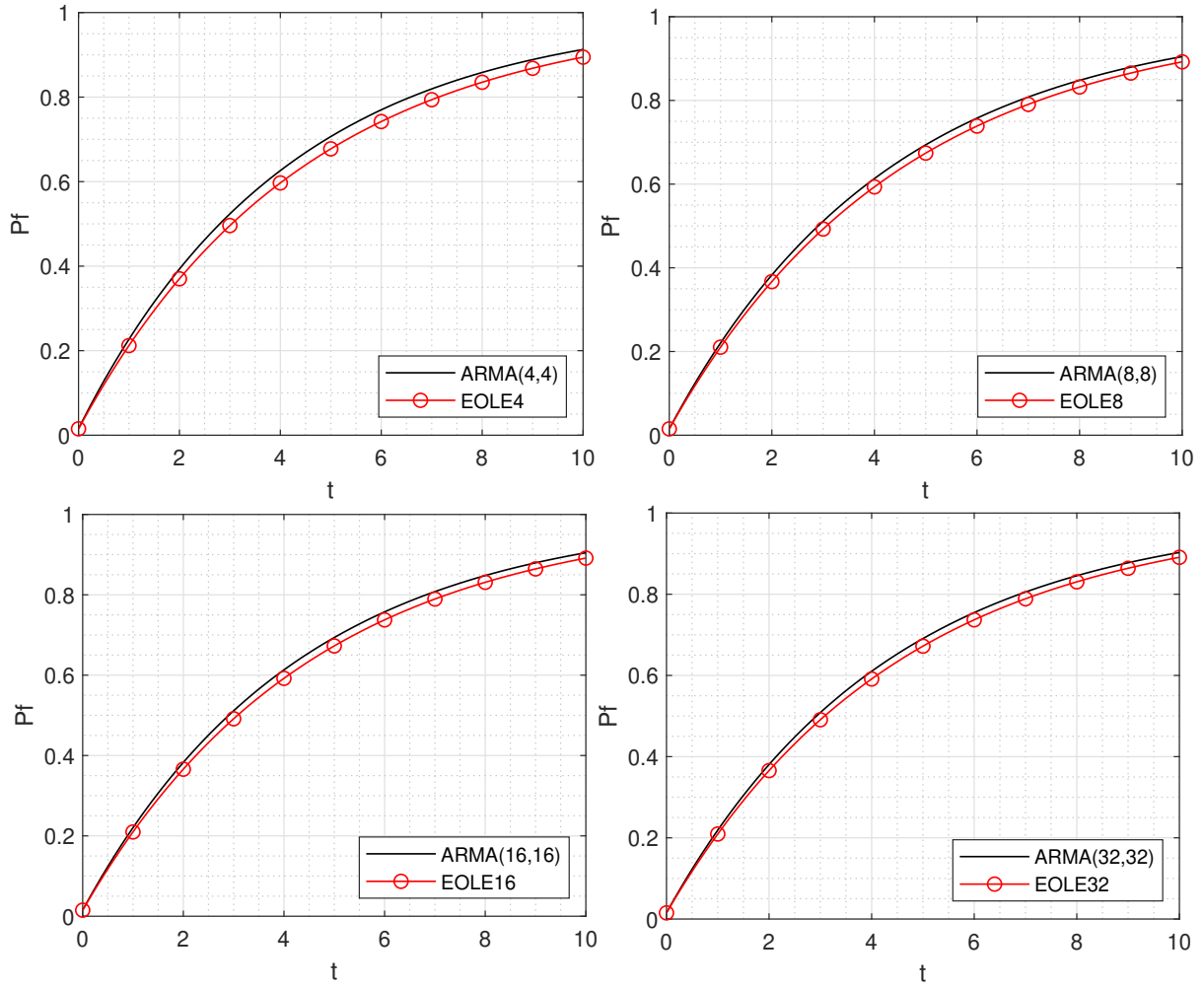


Figura 19 – Evolução da probabilidade de falha acumulada dos modelos ARMA e EOLE (Exemplo 1 - Caso II)

Ademais, as diferenças encontradas para a  $P_f$  e  $p_f$  entre todos os valores do ARMA e EOLE podem estar relacionadas ainda, por exemplo, a ordem de truncamento da expansão do EOLE (foi usada uma expansão com 250 termos, dentro de um limite de 1000 termos), baixa ordem do modelo ARMA (tendo em vista que quanto maior a ordem, aumenta o número de coeficientes e melhora a qualidade dos resultados), ao processo de otimização para obtenção dos coeficientes do ARMA (mostrado na Figura 15, especificamente para o Caso I) e ao erro de amostragem relacionado a simulação de Monte Carlo.

## 7.2 Exemplo 2: Viga metálica sujeita à corrosão

Neste exemplo, adaptado de [Andrieud-Renaud, Sudret e Lemaire \(2004\)](#), tem-se uma viga sujeita à corrosão e à ação de cargas dependentes do tempo, como mostrado na Figura [20](#). Aqui, o problema é de barreira variável e a função de estado limite é definida como

$$g(t) = \frac{(b_0 - 2\kappa t)(h_0 - 2\kappa t)^2 \sigma_y}{4} - \left( \frac{F(t)L}{4} + \frac{\rho_{st} b_0 h_0 L^2}{8} \right), \quad (7.3)$$

onde  $\{b_0, h_0\}$  e  $L$  representam a seção transversal e o comprimento da viga, respectivamente.  $\kappa$  é a taxa de corrosão,  $t$  é o tempo (em anos),  $\sigma_y$  é a tensão de escoamento e  $\rho_{st}$  é a densidade do material da viga. A viga está sujeita à corrosão, com uma profundidade  $d_c(t)$  de corrosão no material atuando em todas as faces da viga e aumentando linearmente com o tempo, tal que  $d_c(t) = \kappa t$ . A média e o coeficiente de variação das variáveis aleatórias e do processo estocástico, assim como os valores dos parâmetros determinísticos da viga, são apresentados na Tabela [5](#).

Tabela 5 – Parâmetros e variáveis aleatórias da viga

Parâmetro	Distribuição	Média	CV
Força $F$ (kN)	Processo Gaussiano	6000	3%
Tensão escoamento do aço $\sigma_y$ (MPa)	Lognormal	240	10%
Largura inicial da viga $b_0$ (m)	Lognormal	0.20	3%
Altura inicial da viga $h_0$ (m)	Lognormal	0.04	3%
Taxa de corrosão $\kappa$ (mm/ano)	Determinística	0.10	-
Comprimento da viga $L$ (m)	Determinística	5.00	-
Densidade do aço $\rho_{st}$ (kN/m <sup>3</sup> )	Determinística	78.50	-

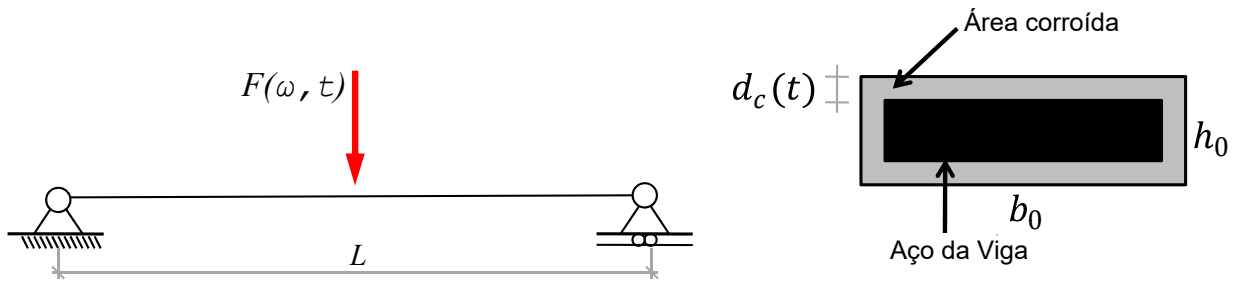


Figura 20 – Representação da carga no meio da viga, adaptada de [Andrieud-Renaud, Sudret e Lemaire \(2004\)](#)

O intervalo de tempo analisado foi de  $t = [0, 15]$  anos, discretizados em 1,200 pontos, usando um comprimento de correlação de um mês ( $\alpha = 1/12$  ano) e uma expansão de 350 termos no EOLE. Para o ARMA, os modelos ARMA(4,4), ARMA(6,6), ARMA(8,8) e ARMA(10,10) foram criados. O número total de simulações em cada análise foi de  $10^7$ .

### 7.2.1 Caso I

Inicialmente, os modelos ARMA e EOLE foram criados conforme o fluxograma da Figura 15, a partir dos valores da média e desvio padrão do processo estocástico  $F(t)$ , além da função de autocorrelação (Equação 3.30) do problema. A evolução da  $P_f$  durante o intervalo de tempo  $[0, 15]$  anos é mostrado na Figura 21 e os resultados numéricos da  $P_f(0, 15)$  e da  $p_f$ , para os tempos  $t = \{0, 7.5, 15\}$  anos, são apresentados na Tabela 6.

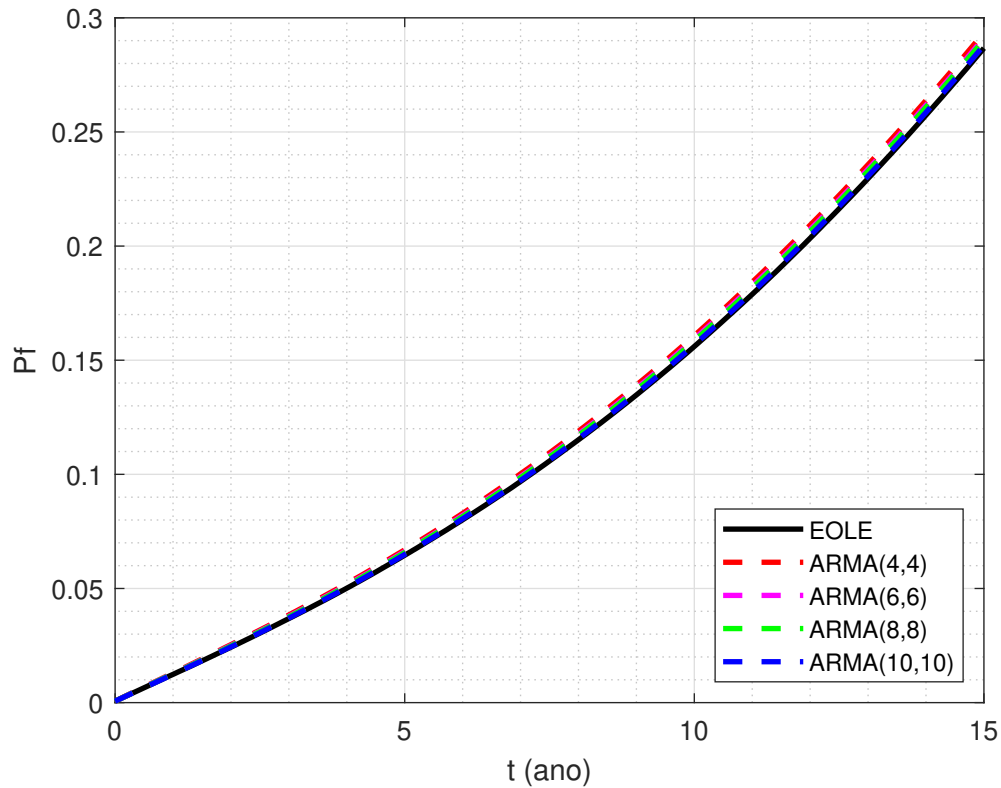


Figura 21 – Evolução da probabilidade de falha acumulada no tempo (Exemplo 2 - Caso I)

Tabela 6 – Valores da probabilidade de falha acumulada e instantânea (Exemplo 2 - Caso I)

	$P_f(0, 15)$	$\Delta^*$	$p_f(0)$	$\Delta^*$	$p_f(7.5)$	$\Delta^*$	$p_f(15)$	$\Delta^*$
EOLE	28.671%	—	0.062%	—	0.274%	—	0.983%	—
ARMA(4,4)	29.351%	2.37%	0.064%	2.71%	0.273%	0.24%	0.986%	0.39%
ARMA(6,6)	29.124%	1.58%	0.063%	1.52%	0.272%	0.72%	0.981%	0.18%
ARMA(8,8)	29.036%	1.27%	0.063%	1.01%	0.274%	0.09%	0.983%	0.01%
ARMA(10,10)	28.796%	0.44%	0.063%	0.27%	0.273%	0.45%	0.984%	0.15%
CV SMC	0.05%		1.26%		0.60%		0.32%	

\* Diferença computada baseada no valor do EOLE.

De acordo com os resultados apresentados, percebe-se que a diferença máxima entre os valores de  $P_f$  foi de 2.37% e da  $p_f$  foi de 2.71%. Assim como no Exemplo 7.1, o aumento da ordem do modelo ARMA resulta em uma melhor convergência nos resultados desse modelo quando comparado ao do EOLE para o cálculo da  $P_f(0, 15)$  e também para as  $p_f$  analisadas. Esse fato se deve a uma melhor aproximação da função de autocovariância  $\bar{\gamma}(\varphi, \theta, \sigma_e)$  do modelo ARMA (Equação 5.15) com a função de autocovariância inicial  $\gamma$  do problema analisado, ou seja, ocorre uma diminuição do erro no processo de otimização mostrado na Figura 15.

Além disso, o fato de aumentar a ordem  $(p, q)$  e incluir mais termos no modelo de série temporal, resulta que mais valores passados  $F(t - i)$ , com  $i = 1, 2, \dots, \max(p, q)$ , serão usados para estimar o valor de  $F(t)$ , melhorando a aproximação deste modelo com o EOLE, conforme percebido também na Figura 22 através da diferença relativa da  $P_f(0, 15)$  para ambos os métodos.

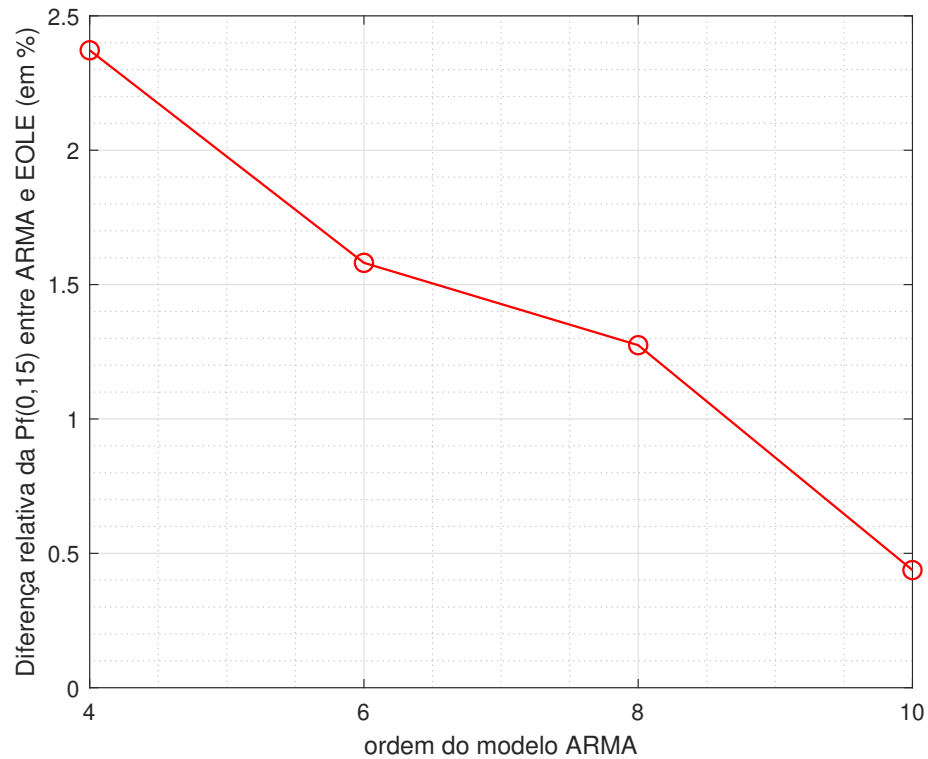


Figura 22 – Variação da diferença relativa da  $P_f(0, 15)$  entre o ARMA e EOLE com o aumento da ordem  $(p, q)$  do modelo ARMA (Exemplo 2 - Caso I)

### 7.2.2 Caso II

Para o Caso II, uma matriz de autocovariância foi adotada como dado de entrada, sendo esta obtida a partir dos modelos ARMA já conhecidos e usados no Caso I. Assim, usando um modelo ARMA(4,4) conhecido e sua matriz de autocoraviância como dado de entrada, criou-se o EOLE4 e os valores das probabilidades de falha instantânea e acumulada são calculados e comparados, seguindo o fluxograma da Figura 16. O processo é repetido para os modelos ARMA(6,6), ARMA(8,8) e ARMA(10,10), tendo os valores da  $P_f$  e  $p_f$  comparados, respectivamente, com os valores obtidos via EOLE6, EOLE8 e EOLE10.

Os gráficos das  $P_f$  ao longo do tempo para todos os modelos são mostrados na Figura 23, e os valores numéricos para  $P_f(0, 15)$  e  $p_f(t)$  (para  $t = \{0, 7.5, 15\}$  anos) são apresentados na Tabela 7.

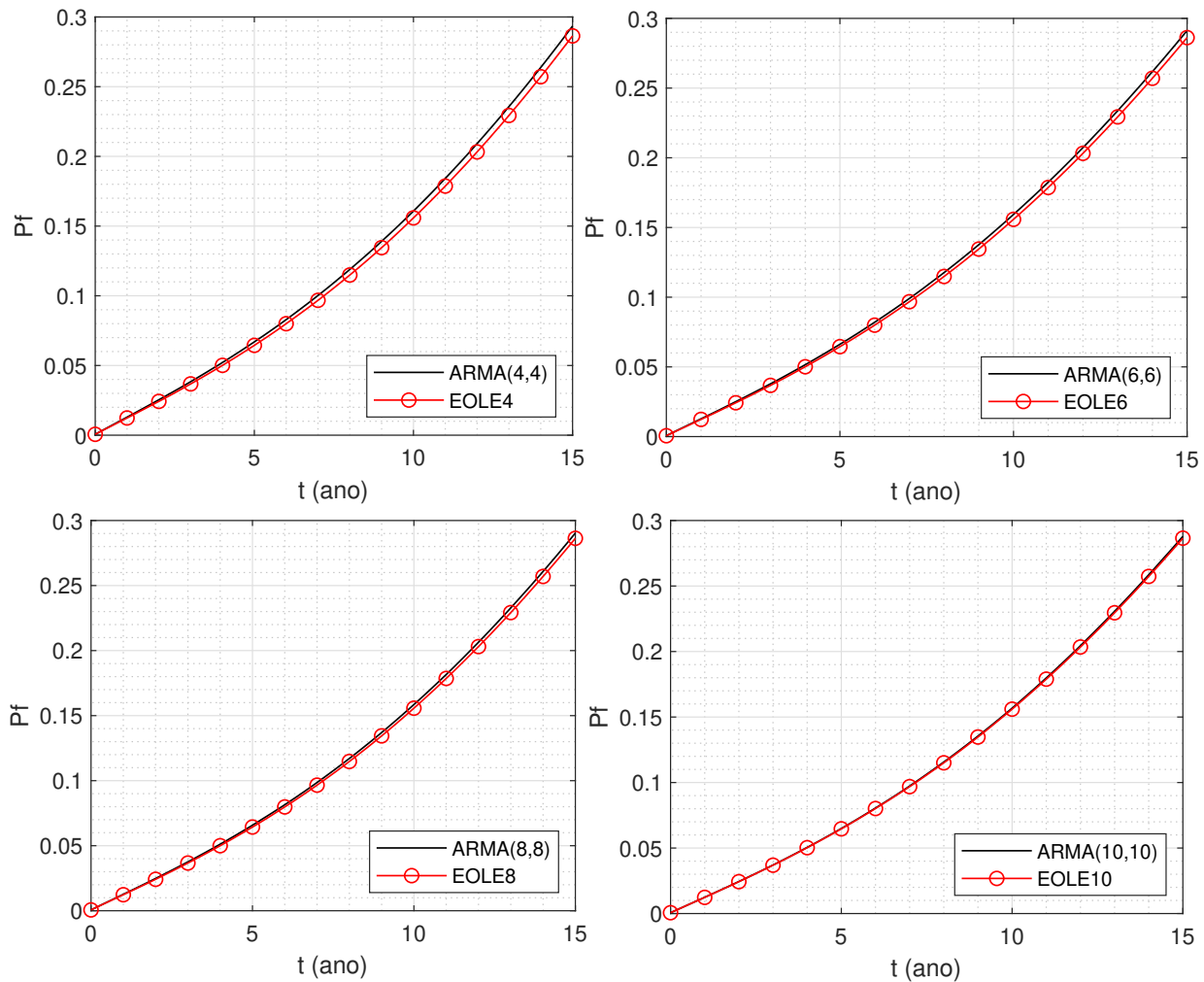


Figura 23 – Evolução da probabilidade de falha acumulada no tempo dos modelos ARMA e EOLE (Exemplo 2 - Caso II)

Tabela 7 – Valores da probabilidade de falha acumulada e instantânea (Exemplo 2 - Caso II)

	$P_f(0, 15)$	$\Delta^*$	$p_f(0)$	$\Delta^*$	$p_f(7.5)$	$\Delta^*$	$p_f(15)$	$\Delta^*$
ARMA(4,4)	29.351%	—	0.064%	—	0.273%	—	0.986%	—
EOLE4	28.643%	2.41%	0.062%	2.47%	0.272%	0.53%	0.970%	1.70%
ARMA(6,6)	29.124%	—	0.063%	—	0.272%	—	0.981%	—
EOLE6	28.622%	1.72%	0.063%	0.76%	0.273%	0.52%	0.977%	0.37%
ARMA(8,8)	29.036%	—	0.063%	—	0.274%	—	0.983%	—
EOLE8	28.631%	1.39%	0.062%	0.98%	0.275%	0.23%	0.979%	0.42%
ARMA(10,10)	28.796%	—	0.063%	—	0.273%	—	0.984%	—
EOLE10	28.652%	0.50%	0.062%	0.26%	0.275%	0.77%	0.979%	0.55%
CV SMC	0.05%		1.26%		0.60%		0.32%	

\* Diferença computada com relação ao modelo ARMA correspondente.

Com os resultados apresentados na Tabela 7, nota-se que a diferença máxima entre os valores da  $P_f$  é de 2.41% e para  $p_f$  é da ordem de 2.47%. Assim como no Exemplo 7.1, aqui no Exemplo 7.2 também ocorreu uma melhor convergência dos resultados das  $P_f$  e  $p_f$  via EOLE e ARMA com o aumento da ordem deste último método, ocorrendo uma diminuição das diferenças máximas para a  $P_f$  de 2.41% para 0.50% e da  $p_f$  de 2.47% para 0.77%.

Ademais, analisando as Tabelas 6 e 7, as diferenças encontradas entre os valores do EOLE e ARMA podem estar relacionadas, principalmente, ao erro envolvido na simulação de Monte Carlo (principalmente para a  $p_f$  que teve um erro amostral de até 1.26%), à adoção dos 350 termos na expansão do EOLE (de um limite de 1200 termos) e na escolha da ordem do ARMA (a convergência melhora à medida que aumenta o valor de  $(p, q)$ ).

A partir destes resultados, percebe-se novamente a convergência e eficácia dos resultados obtidos via ARMA quando comparados com os obtidos via EOLE, confirmando a ideia principal desta tese em usar, alternativamente aos modelos EOLE, modelos de séries temporais nos problemas onde são conhecidos inicialmente apenas os valores da média e desvio padrão do processo estocástico e da função de autocorrelação, sem dados históricos amostrais (Caso I). Da mesma maneira, mostrou-se que, alternativamente aos modelos de séries temporais, modelos EOLE podem ser aplicados em situações práticas onde a matriz autocovariância é conhecida inicialmente, seja a mesma já pré-definida (como feito nesta tese) ou podendo ser obtida também a partir de dados históricos amostrais (Caso II).

### 7.3 Exemplo 3: Treliça Plana com 23 barras

O terceiro exemplo trata de uma treliça plana composta por 23 barras e 13 nós, adaptada de Kroetz et al. (2020) e apresentada na Figura 24. A estrutura está submetida à aplicação de seis cargas  $P$  onde todas são tratadas como um processo estocástico gaussiano estacionário



com média de 50 kN e desvio padrão de 7.5 kN. A treliça foi analisada em um período de  $[0, 20]$  anos com uma discretização de 200 pontos no tempo. Foi usado um comprimento de correlação  $\alpha = 0.2$  ano para o processo estocástico e a expansão EOLE foi definida com 200 termos. No caso do ARMA, foram criados os modelos ARMA(4,4), ARMA(8,8), ARMA(12,12) e ARMA(16,16). A taxa de corrosão  $\kappa$  adotada foi de 0.1 mm/ano.

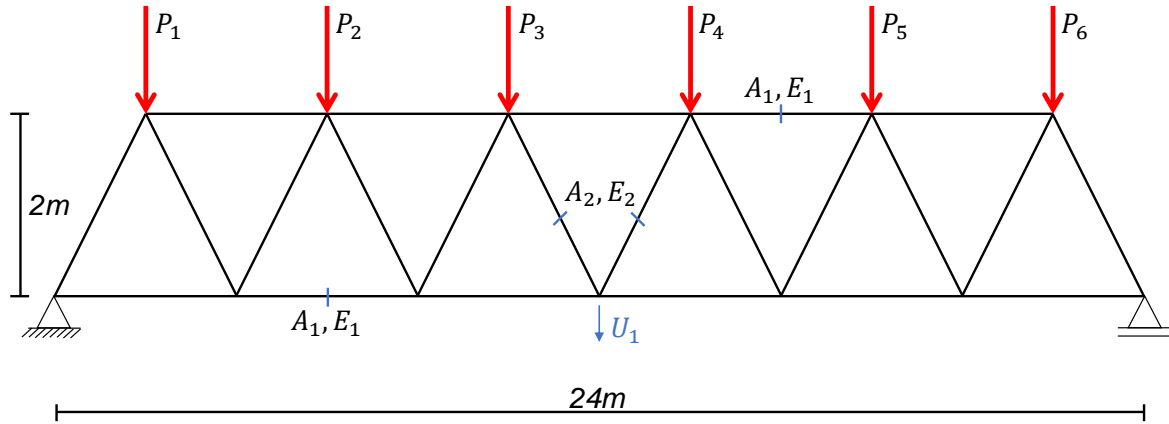


Figura 24 – Treliça plana composta de 23 barras

No cálculo da  $p_f$  e  $P_f$  foram usadas  $10^6$  simulações e adotadas quatro variáveis aleatórias  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $A_1$  e  $A_2$  com média e coeficiente de variação mostradas na Tabela 8. A função de estado limite é dada por:

$$g(t, \mathbf{X}) = 0.1 - U_1(t, \mathbf{X}) \quad (7.4)$$

sendo adotado um valor admissível do deslocamento de 0.1 m e o deslocamento  $U_1$  da estrutura foi encontrado via Modelo de Elementos Finitos.

Tabela 8 – Variáveis aleatórias consideradas no problema

Parâmetro	Distribuição	Média	CV
$E_1(MPa)$	Lognormal	210	10%
$E_2(MPa)$	Lognormal	210	10%
$A_1(cm^2)$	Lognormal	25	10%
$A_2(cm^2)$	Lognormal	20	10%

### 7.3.1 Caso I

Inicialmente, assumiu-se que a função de autocorrelação era conhecida e os modelos ARMA e EOLE foram criados como mostrado na Figura 15. O resultado da  $P_f$  no decorrer do período  $[0, 20]$  anos é mostrado na Figura 25, e os resultados numéricos da probabilidade de

falha acumulada  $P_f(0, 20)$  e instantânea  $p_f(t)$  (para  $t = \{0, 10, 20\}$  anos) são apresentados e comparados na Tabela 9.

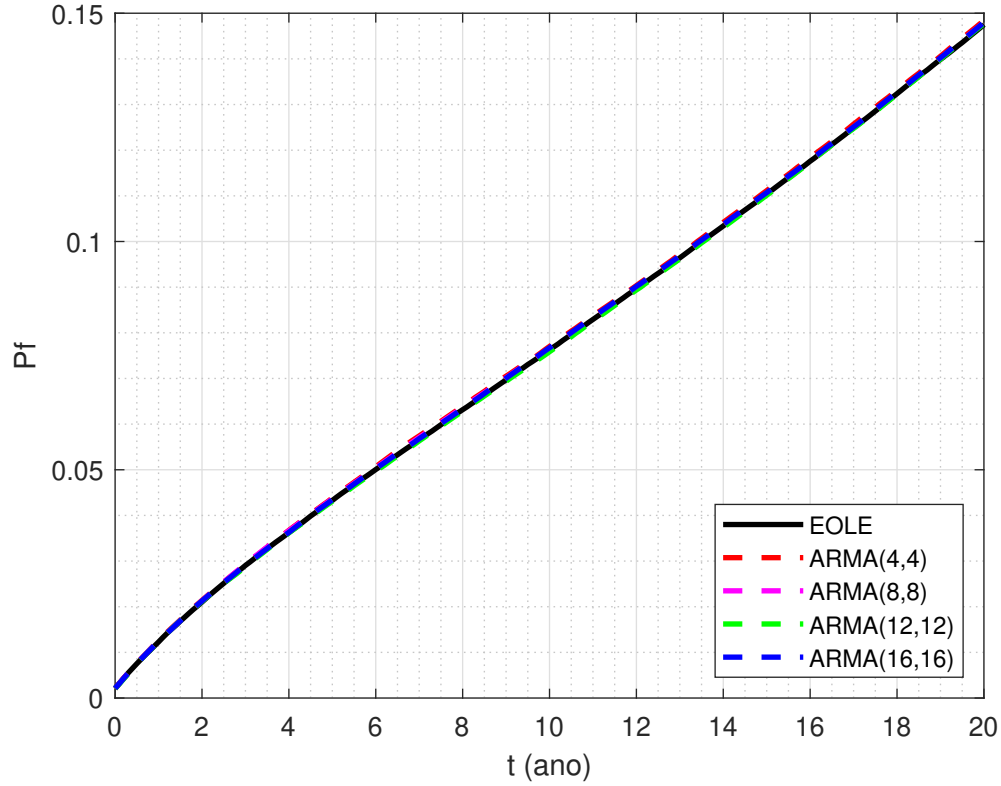


Figura 25 – Evolução da probabilidade de falha acumulada no tempo (Exemplo 3 - Caso I)

Tabela 9 – Valores da probabilidade de falha acumulada e instantânea (Exemplo 3 - Caso I)

	$P_f(0, 20)$	$\Delta^*$	$p_f(0)$	$\Delta^*$	$p_f(10)$	$\Delta^*$	$p_f(20)$	$\Delta^*$
EOLE	14.750%	—	0.217%	—	0.438%	—	0.903%	—
ARMA(4,4)	14.836%	0.58%	0.206%	4.84%	0.458%	4.75%	0.919%	1.74%
ARMA(8,8)	14.798%	0.32%	0.209%	3.51%	0.432%	1.19%	0.904%	0.06%
ARMA(12,12)	14.768%	0.12%	0.207%	4.38%	0.444%	1.55%	0.882%	2.35%
ARMA(16,16)	14.795%	0.31%	0.211%	2.49%	0.449%	2.51%	0.901%	0.20%
CV SMC	0.24%		2.17%		1.50%		1.05%	

\* Diferença computada baseada no valor do EOLE.

De acordo com os resultados apresentados, percebe-se que os resultados via EOLE e via ARMA são muito similares. A diferença máxima nos valores da  $P_c(0, 20)$  entre os modelos EOLE e ARMA foi de 0.58% para o ARMA(4,4), que é da ordem de grandeza do erro da Simulação de Monte Carlo. No entanto, aumentando a ordem  $(p, q)$ , percebe-se desde o

ARMA(8,8) uma convergência e tendência de estabilização do resultado da  $P_f(0, 20)$  tendo em vista que a diferença varia entre 0.32% a 0.12% e o erro de amostragem é da ordem de 0.24%. Tal fato se dá, principalmente, devido ao melhor ajuste da autocovariância do modelo ARMA, com base na autocovariância dada inicialmente, mesmo com o uso de poucos coeficientes para o modelo ARMA. Conforme visualizado também na Figura 26, a diferença relativa da  $P_c(0, 20)$  entre o ARMA e EOLE atinge baixos percentuais, tendo em vista que um erro de amostragem da ordem de 0.24% está ainda incorporado ao problema.

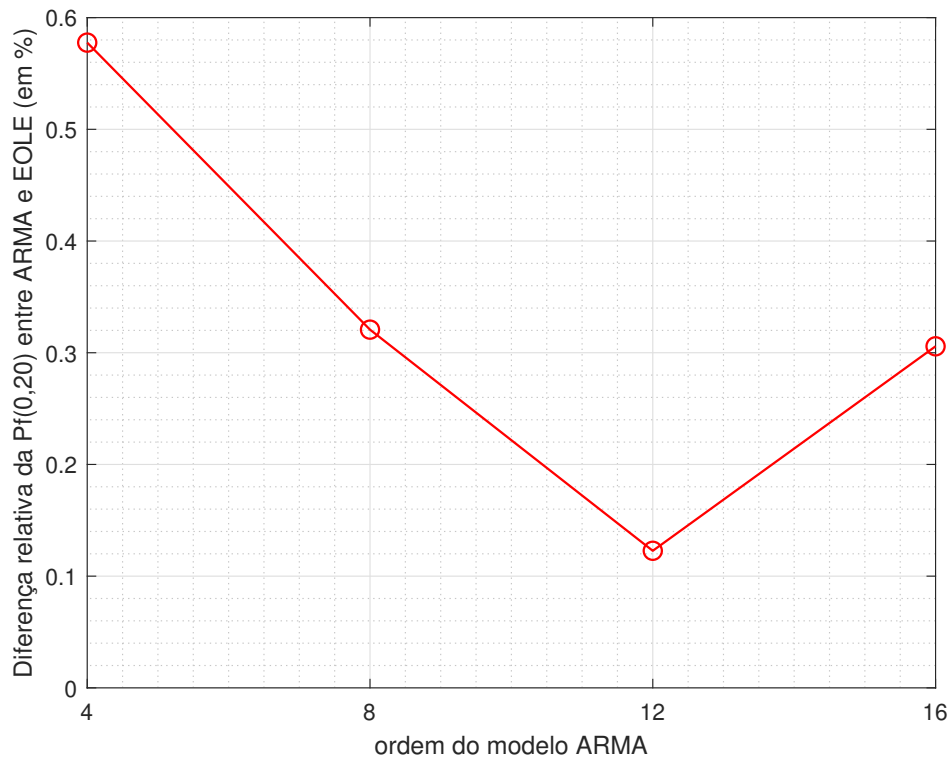


Figura 26 – Variação da diferença relativa da  $P_f(0, 20)$  entre ARMA e EOLE com o aumento da ordem  $(p, q)$  do modelo ARMA (Exemplo 3 - Caso I)

Para os valores da  $p_f$ , nota-se uma diferença máxima de 4.84% para o modelo ARMA(4,4) e, à medida que se aumenta a ordem  $(p, q)$ , essa diferença vai diminuindo até 2.51% para o ARMA(16,16), com um erro de amostragem de 2.17%. Com isso, a partir dos valores para a  $P_f$  e  $p_f$ , pode-se notar que ocorre uma convergência dos resultados obtidos via EOLE e via modelos ARMA usados aqui neste exemplo, pois estas diferenças podem ser consideradas pequenas dentro do contexto de análise baseada em amostragem.

Neste caso, mesmo sendo relativamente pequenas em se tratando de análise de confiabilidade, as diferenças apresentadas para a  $P_f$  e  $p_f$  podem ser explicadas devido ao erro

envolvido na simulação de Monte Carlo (principalmente no cálculo da  $p_f$ , onde o erro amostral ficou variando entre 2.17% – 1.05%) e a possível obtenção de mínimos locais no processo de otimização dos coeficientes ARMA (mostrado na Figura 15).

### 7.3.2 Caso II

Posteriormente foi utilizado o procedimento mostrado na Figura 16, com as matrizes de autocovariância iniciais obtidas a partir dos modelos ARMA(4,4), ARMA(8,8), ARMA(12,12) e ARMA(16,16) usados no Caso I da seção anterior. Usando a  $\bar{\gamma} = \bar{\gamma}(\varphi, \theta, \sigma_e)$  do ARMA(4,4), foi criado o EOLE4, já para a autocovariância do ARMA(8,8), foi construído o EOLE8, e assim sucessivamente.

O comportamento da  $P_f$  no decorrer do tempo para todos os modelos são apresentados na Figura 27. Os resultados numéricos para a  $P_f(0, 20)$  e  $p_f(t)$  (para  $t = \{0, 10, 20\}$  anos) são mostrados e comparados na Tabela 10.

Tabela 10 – Valores da probabilidade de falha acumulada e instantânea (Exemplo 3 - Caso II)

	$P_f(0, 20)$	$\Delta^*$	$p_f(0)$	$\Delta^*$	$p_f(10)$	$\Delta^*$	$p_f(20)$	$\Delta^*$
ARMA(4,4)	14.836%	—	0.206%	—	0.458%	—	0.919%	—
EOLE4	14.779%	0.38%	0.215%	4.02%	0.445%	2.97%	0.869%	5.41%
ARMA(8,8)	14.798%	—	0.209%	—	0.432%	—	0.904%	—
EOLE8	14.744%	0.36%	0.210%	0.33%	0.448%	3.63%	0.894%	1.08%
ARMA(12,12)	14.768%	—	0.207%	—	0.444%	—	0.882%	—
EOLE12	14.781%	0.09%	0.209%	0.68%	0.436%	1.82%	0.890%	0.95%
ARMA(16,16)	14.795%	—	0.211%	—	0.449%	—	0.901%	—
EOLE16	14.772%	0.16%	0.214%	1.04%	0.446%	0.67%	0.869%	3.64%
CV SMC	0.24%		2.17%		1.50%		1.05%	

\* Diferença computada com relação ao modelo ARMA correspondente.

A partir dos resultados encontrados na Tabela 10 pode ser visto que os valores via ARMA e EOLE para o Caso II são novamente similares. As diferenças máximas entre ARMA e EOLE nos valores da  $P_f$  ficaram todas menores que 0.40%, variando entre 0.38% e 0.09%, com um erro amostral de aproximadamente 0.24%, o que pode ser entendido como todos os resultados convergentes, embora ocorra uma estabilização e melhora na convergência com o aumento da ordem  $(p, q)$ .

Para a  $p_f$ , embora a mesma apresente uma diferença de 5.41% usando a autocovariância inicial do ARMA(4,4), percebe-se que usando matrizes de autocovariância de modelos ARMA com ordens superiores, as diferenças diminuem e têm todos seus valores inferiores a 3.64%, o que pode ser considerada pequena em relação ao erro de amostragem da Simulação de Monte Carlo. Assim, os resultados deste exemplo para os Casos I e II mostram uma convergência

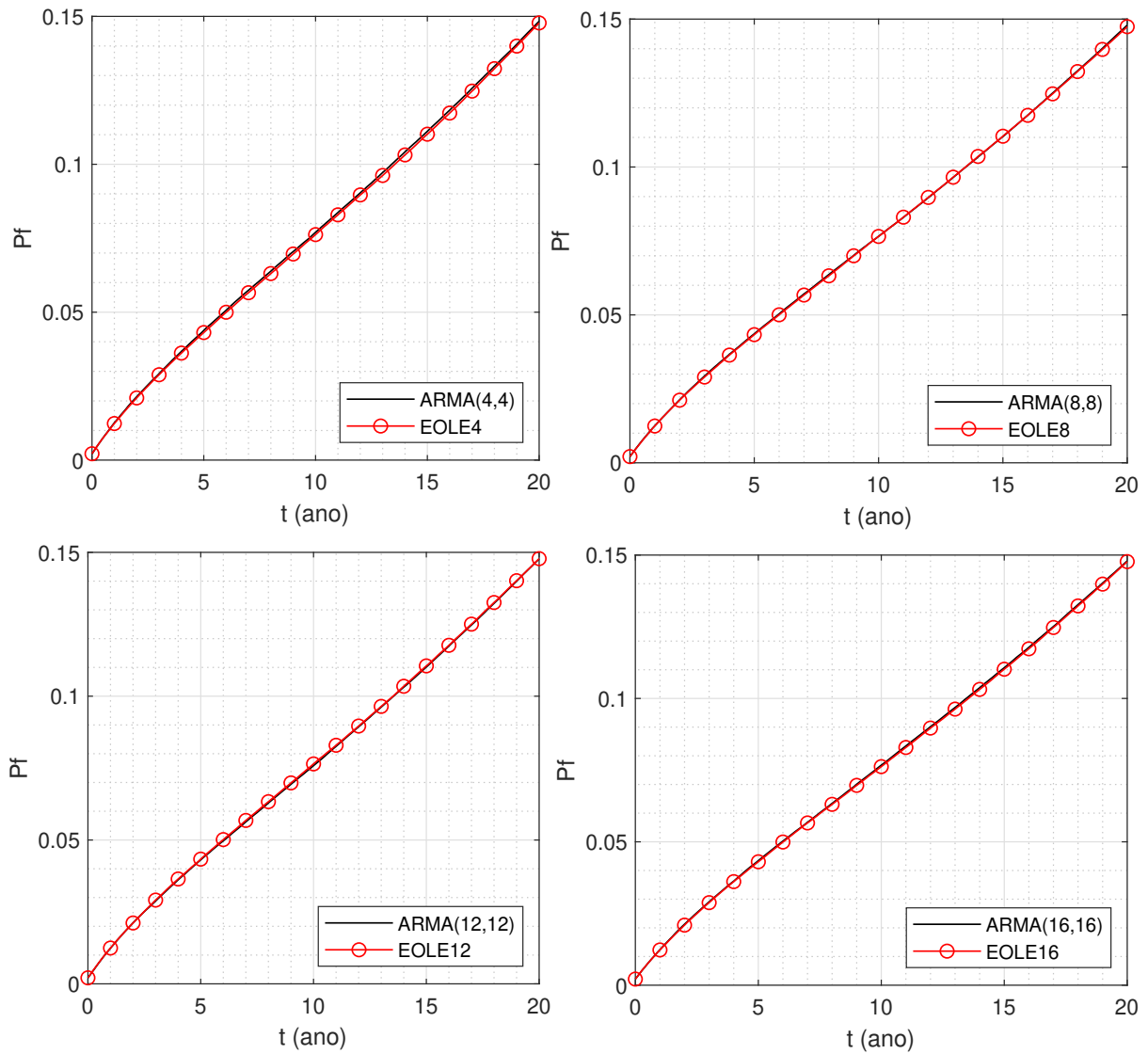


Figura 27 – Evolução da probabilidade de falha acumulada dos modelos ARMA e EOLE (Exemplo 3 - Caso II)

entre os modelos EOLE e ARMA, sendo suficiente, neste caso, a adoção de modelos ARMA com ordem igual ou superior ao  $ARMA(8, 8)$  para representar tal processo estocástico.

## 7.4 Exemplo 4: Treliza submetida à dois processos estocásticos

O quarto exemplo, mostrado na Figura 28 e adaptado de Kroetz et al. (2020), se trata de uma treliza cuja falha está relacionada a atuação de dois processos estocásticos e três equações de estados limites, ou seja, uma análise de confiabilidade estrutural de sistemas em séries dependentes do tempo.

A treliça possui duas barras circulares submetidas a dois processos estocásticos (força horizontal  $H$  e força vertical  $V$ ) e duas variáveis aleatórias (Módulo de Elasticidade  $E$  e tensão de escoamento do material  $\sigma_u$ ), conforme mostrado na Figura 28 e na Tabela 11. O raio  $r$  das barras foram adotados com 6 mm, o comprimento  $L$  da barra com 0.47 m e um ângulo  $\beta$  de  $40^\circ$ . A área e o momento de inércia das barras são representados por  $A$  e  $I$ , respectivamente.

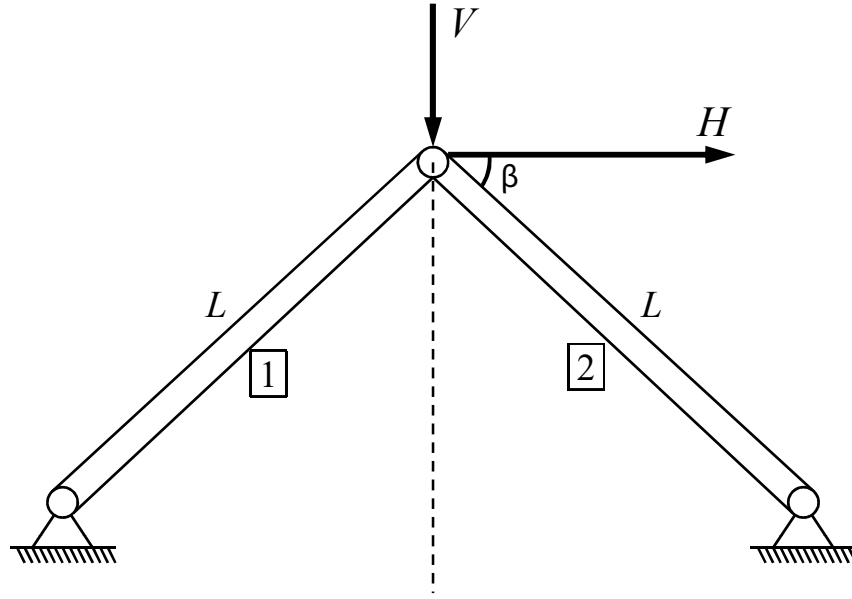


Figura 28 – Treliça com duas barras

Tabela 11 – Valores dos processos estocásticos e variáveis aleatórias

Parâmetro	Distribuição	Média	CV
Força $V$ (kN)	Processo Gaussiano	1.1	20%
Força $H$ (kN)	Processo Gaussiano	2.1	20%
Módulo de Elasticidade $E$ (GPa)	Normal	70	3%
Tensão Escoamento do Material $\sigma_u$ (MPa)	Normal	24	10%

O tempo analisado foi de  $[0, 15]$  anos, discretizado em 1,200 partes e adotando um comprimento de correlação  $\alpha = 1/12$  ano. Foram realizadas  $10^7$  simulações. No caso do EOLE foi adotado uma expansão com 300 termos e para o ARMA foram criados os modelos ARMA(4,4), ARMA(8,8), ARMA(12,12) e ARMA(16,16).

Com relação as equações de estados limites, a treliça pode colapsar devido a tensão de ruptura na barra 1 ( $g_{t1}$ ), flambagem na barra 1 ( $g_{b1}$ ) ou flambagem na barra 2 ( $g_{b2}$ ), resultando nas equações de estado limite

$$\left\{ \begin{array}{l} g_{t1}(\mathbf{X}, t) = A_1 \sigma_u - \left[ \frac{H(t)}{2 \cos \beta} - \frac{V(t)}{2 \sin \beta} \right] \\ g_{b1}(\mathbf{X}, t) = \frac{\pi^2 E I_1}{L^2} - \left[ -\frac{H(t)}{2 \cos \beta} + \frac{V(t)}{2 \sin \beta} \right] \\ g_{b2}(\mathbf{X}, t) = \frac{\pi^2 E I_2}{L^2} - \left[ \frac{H(t)}{2 \cos \beta} + \frac{V(t)}{2 \sin \beta} \right] \\ g_{sys}(\mathbf{X}, t) = \min(g_{t1}, g_{b1}, g_{b2}) \end{array} \right. \quad (7.5)$$

Assume-se que a falha ocorre caso qualquer uma das funções de estado limite sejam violadas. Assim, é possível construir a função de estado limite do sistema  $g_{sys}$  como sendo o valor mínimo entre as três funções individuais, o que corresponde a um sistema em série.

#### 7.4.1 Caso I

Inicialmente, os modelos ARMA e EOLE foram criados a partir da metodologia da Figura 15. A evolução da  $P_f$  durante o intervalo de tempo  $[0, 15]$  anos é mostrado na Figura 29. A  $p_f$  foi analisada para os tempos  $t = \{0, 7, 15\}$  anos, e a  $P_f$  foi avaliada no tempo final da análise. Os resultados para  $P_f$  e  $p_f$  são apresentados na Tabela 12.

Tabela 12 – Valores da probabilidade de falha acumulada e instantânea (Exemplo 4 - Caso I)

	$P_f(0, 15)$	$\Delta^*$	$p_f(0)$	$\Delta^*$	$p_f(7)$	$\Delta^*$	$p_f(15)$	$\Delta^*$
EOLE	42.272%	—	0.225%	—	0.225%	—	0.224%	—
ARMA(4,4)	43.996%	4.08%	0.225%	0.17%	0.225%	0.09%	0.228%	2.20%
ARMA(8,8)	43.657%	3.28%	0.229%	1.48%	0.226%	0.62%	0.229%	2.25%
ARMA(12,12)	43.285%	2.40%	0.227%	0.50%	0.229%	1.74%	0.223%	0.09%
ARMA(16,16)	43.145%	2.07%	0.227%	0.66%	0.225%	0.01%	0.225%	0.81%
CV SMC	0.04%		0.66%		0.66%		0.67%	

\* Diferença computada baseada no valor do EOLE.

De acordo com os resultados apresentados, percebe-se que a diferença máxima entre os valores via EOLE e ARMA da  $P_f$  foi de 4.08% e vai diminuindo à medida que se aumenta a ordem  $(p, q)$  do modelo ARMA, até chegar em 2.07% para o ARMA(16,16), indicando uma estabilização e convergência dos resultados entre tais modelos, conforme percebido pela diminuição da diferença relativa da  $P_f(0, 15)$  entre o EOLE e ARMA mostrada na Figura 30.

Para a  $p_f$ , em todos os tempos analisados a diferença máxima entre ARMA e EOLE ficou na ordem de 2.25%. Assim como ocorreu para a  $P_f$ , os resultados melhoram à medida que aumenta a ordem do modelo ARMA, devido ao fato de calcular o valor final do processo

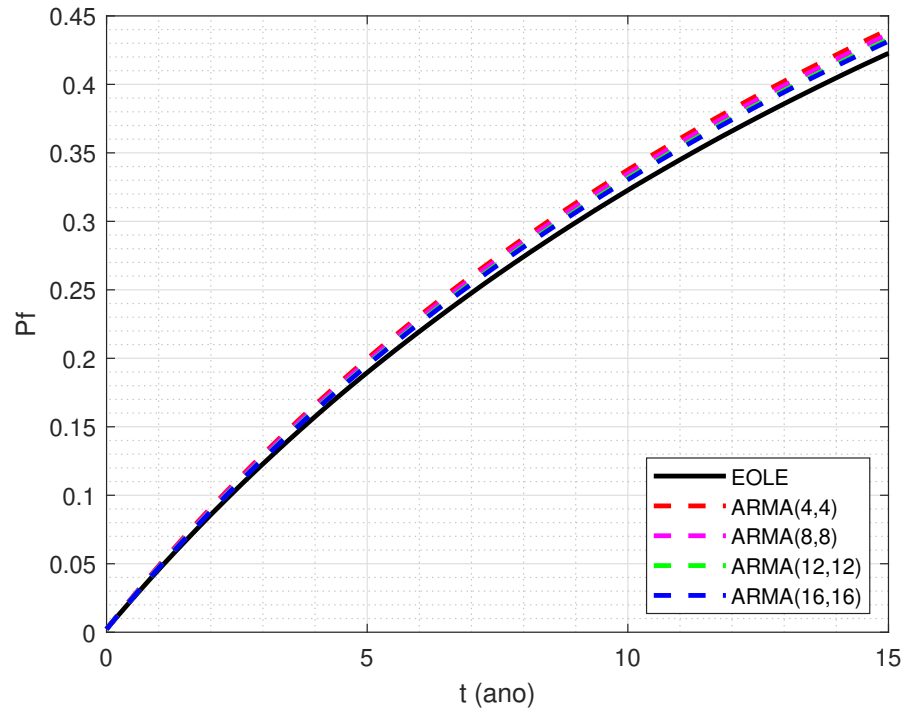


Figura 29 – Evolução da probabilidade de falha acumulada no tempo (Exemplo 4 - Caso I)

estocástico com mais coeficientes e, conseqüentemente, levando em consideração mais valores passados  $X_{t-i}$ , com  $i = 1, 2, \dots, p$ , na determinação do valor de  $X_t$ .

#### 7.4.2 Caso II

No Caso II, a partir da matriz autocovariância obtida pelos modelos de séries temporais usados no Caso I, modelos EOLE foram criados e, em seguida, calcularam-se os valores da probabilidade de falha (acumulada e instantânea). Por fim, esses valores foram comparados com os obtidos pelo respectivo modelo ARMA, conforme mostrado no fluxograma representado na Figura 16. Assim, para o Caso II, foi criado o EOLE4 a partir da matriz de autocovariância do ARMA(4,4) usado no Caso I, criou-se o EOLE8 usando a matriz autocovariância do ARMA(8,8) usado no Caso I, e assim sucessivamente.

Os gráficos da  $P_f$  ao longo do tempo para todos os modelos são mostrados na Figura 31, e os valores numéricos da probabilidade de falha acumulada  $P_f(0, 15)$  e instantânea  $p_f(t)$  (para  $t = \{0, 7, 15\}$  anos) são mostrados na Tabela 13.

Com os resultados apresentados na Tabela 13, nota-se que as diferenças máximas entre os valores da  $P_f$  e  $p_f$  entre o EOLE e ARMA vão diminuindo à medida que aumenta a ordem do modelo ARMA(p,q), encontrando para o ARMA(16,16) as diferenças máximas de 2.29%



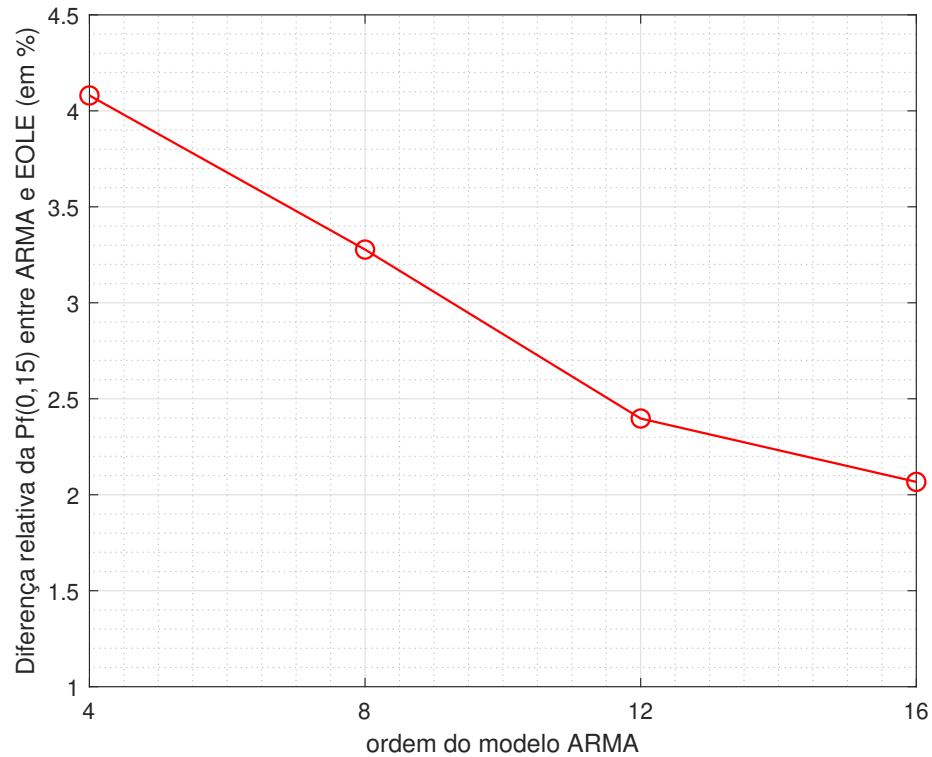


Figura 30 – Variação da diferença relativa da  $P_f(0,15)$  entre ARMA e EOLE com o aumento da ordem  $(p,q)$  do modelo ARMA (Exemplo 4 - Caso I)

Tabela 13 – Valores da probabilidade de falha acumulada e instantânea (Exemplo 4 - Caso II)

	$P_f(0,15)$	$\Delta^*$	$p_f(0)$	$\Delta^*$	$p_f(7)$	$\Delta^*$	$p_f(15)$	$\Delta^*$
ARMA(4,4)	43.996%	—	0.225%	—	0.225%	—	0.228%	—
EOLE4	42.157%	4.18%	0.224%	0.35%	0.224%	0.36%	0.224%	1.99%
ARMA(8,8)	43.657%	—	0.229%	—	0.226%	—	0.229%	—
EOLE8	42.129%	3.50%	0.226%	1.32%	0.222%	1.77%	0.224%	1.85%
ARMA(12,12)	43.285%	—	0.227%	—	0.229%	—	0.223%	—
EOLE12	42.141%	2.64%	0.225%	0.53%	0.226%	1.45%	0.224%	0.52%
ARMA(16,16)	43.145%	—	0.227%	—	0.225%	—	0.225%	—
EOLE16	42.159%	2.29%	0.226%	0.60%	0.222%	1.37%	0.225%	0.32%
CV SMC	0.04%		0.66%		0.66%		0.67%	

\* Diferença computada com relação ao modelo ARMA correspondente.

para a  $P_f(0,15)$  e de 1.37% para a  $p_f$ , o que pode ser considerada pequena em problemas voltados à análise de confiabilidade estrutural dependente do tempo.

Conforme notado também nos exemplos anteriores, um aumento da ordem  $(p,q)$  do mo-

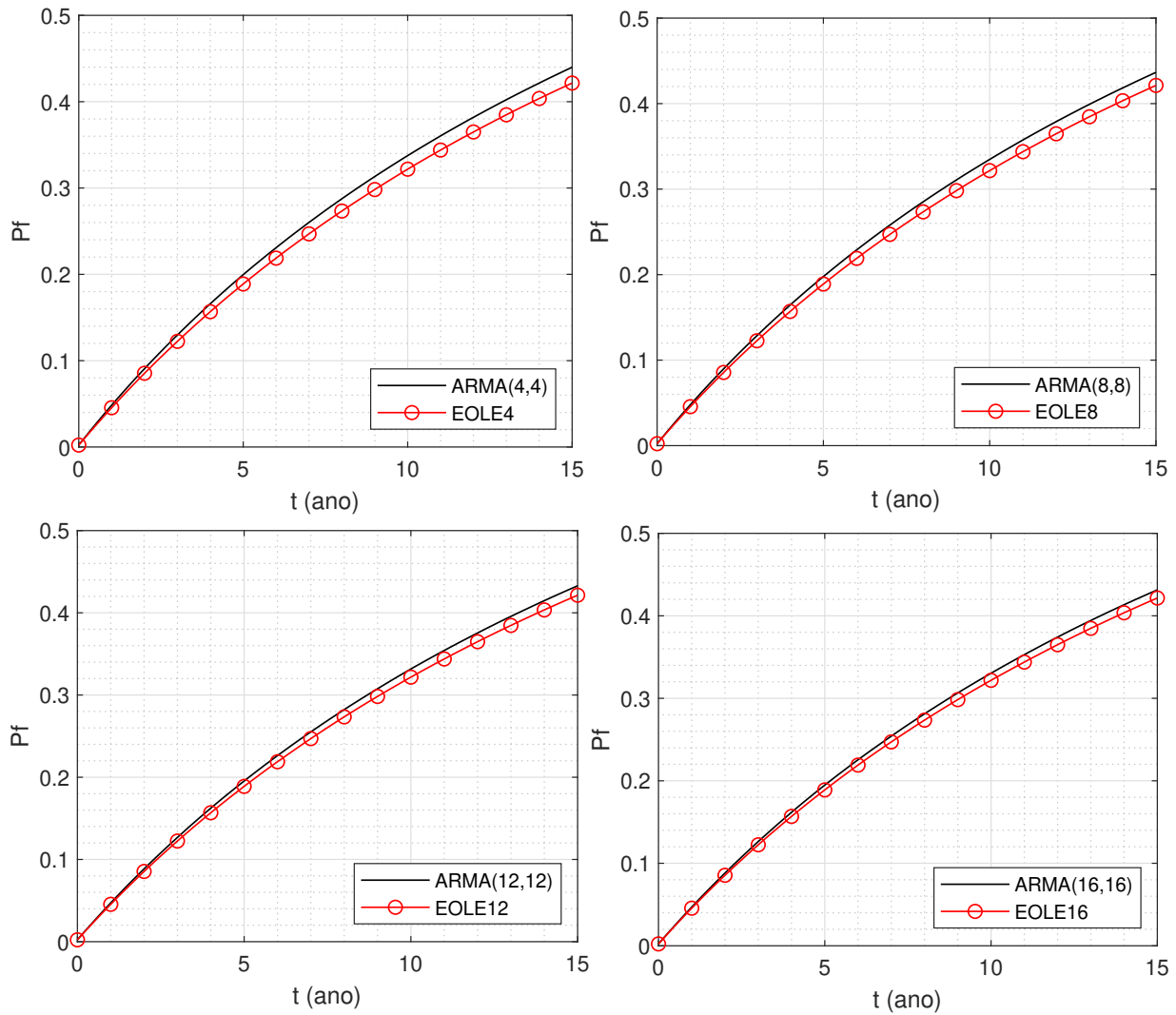


Figura 31 – Evolução da probabilidade de falha acumulada dos modelos ARMA e EOLE (Exemplo 4 - Caso II)

delo ARMA resulta em menores diferenças entre este modelo e o EOLE, justificado pelo fato do aumento de coeficientes e da quantidade de valores passados usados no ARMA. Ademais, parte desta diferença (principalmente para a  $p_f$ ) pode ser explicada pelo erro de amostragem relacionado à simulação de Monte Carlo, além do erro relacionado ao truncamento da expansão do EOLE.

A partir destes resultados, percebe-se novamente a convergência e eficácia dos resultados obtidos via ARMA quando comparados com os obtidos via EOLE, confirmando a ideia principal desta tese em usar, alternativamente aos modelos EOLE, modelos de séries temporais na análise de confiabilidade estrutural dependente do tempo.

## 7.5 Exemplo 5: Pórtico plano de 2 andares

Com a comprovação e validação da aplicação dos modelos EOLE e ARMA em todos os exemplos anteriores para os Casos I e II, neste último exemplo foi adotado um pórtico plano de 2 andares submetido a duas forças  $P$  iguais, ambas adotadas aqui como um único processo estocástico com média 50 N e desvio padrão 7.5 N, conforme mostrado na Figura 32. A ideia deste exemplo é simular uma estrutura real de 2 andares, calculando a probabilidade de falha acumulada  $P_f$  no período de  $[0, 5]$  anos com valor na ordem de  $10^{-5}$  a  $10^{-4}$ . Cabe ressaltar que, com o valor da  $P_f(0, 5)$ , estratégias relacionadas a manutenções periódicas ou a análise da segurança estrutural podem ser tomadas baseada neste valor da probabilidade de falha acumulada.

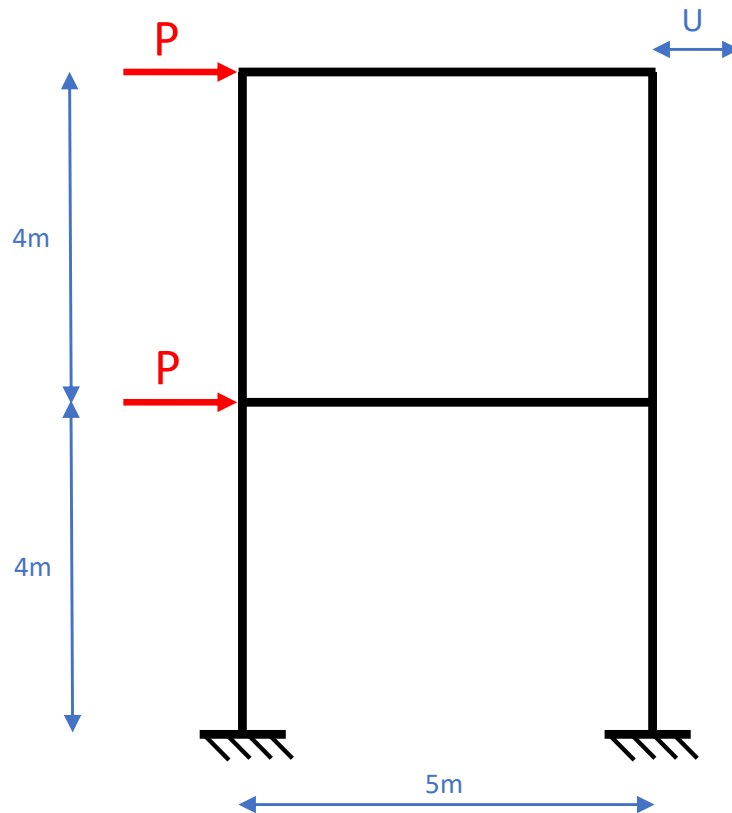


Figura 32 – Pórtico plano de 2 andares

O tempo de análise foi de  $[0, 5]$  anos, discretizados uniformemente em 50 intervalos, sendo adotado uma expansão com 50 termos para o EOLE e um comprimento de correlação de 0.2 anos. O modelo de série temporal escolhido foi o ARMA(12,12). A simulação de Monte Carlo foi realizada com  $10^7$  simulações e o módulo de elasticidade  $E$  foi adotado como variável aleatória. A seção transversal das barras foi considerada circular vazada, com um diâmetro externo inicial  $d_0$  de 115 mm e um diâmetro interno  $d_i$  com 90% deste valor, ou seja, um

diâmetro interno de 103.5 mm. A estrutura está sujeita a corrosão com uma diminuição da seção transversal a uma taxa de corrosão  $\kappa$  constante de 1 mm/ano. Os valores dos parâmetros envolvidos neste exemplo são mostrados na Tabela 14.

Tabela 14 – Valores do processo estocástico, variável aleatória e parâmetros determinísticos

Parâmetro	Distribuição	Média	Desvio padrão
Força $P$ (N)	Processo Gaussiano	50	7.5
Módulo de Elasticidade $E$ (N/mm <sup>2</sup> )	Normal	210000	21000
Diâmetro externo inicial $d_0$ (mm)	Determinístico	115	-
Diâmetro interno inicial $d_i$ (mm)	Determinístico	103.5	-
Taxa de corrosão $\kappa$ (mm/ano)	Determinístico	1	-

Para a função de estado limite, foi considerado um deslocamento máximo  $U_{adm}$  na extremidade superior da estrutura no valor de 4 mm. O deslocamento  $U$  no topo da estrutura foi calculado via modelos de elementos finitos. Logo, a equação de estado limite é dada por:

$$g(t, \mathbf{X}) = 4 - U(t, \mathbf{X}) \quad (7.6)$$

### 7.5.1 Caso I

Para o Caso I, o gráfico da evolução da  $P_f$  ao longo do tempo e o valor numérico da  $P_f(0, 5)$  para o EOLE e ARMA(12,12) são mostrados e comparados na Figura 33 e Tabela 15, respectivamente.

Tabela 15 – Valores da probabilidade de falha acumulada (Exemplo 5 - Caso I)

	$P_f(0, 5)$	$\Delta^*$
EOLE	0.0118%	—
ARMA(12,12)	0.0113%	3.66%
CV SMC	2.94%	

\* Diferença computada baseada no valor do EOLE.

Conforme pode ser constatado nos resultados apresentados neste Caso I, os valores da  $P_f(0, 5)$  via EOLE e ARMA(12,12) são semelhantes, ficando com uma diferença em torno de 3.66%, próximo ao valor do coeficiente de variação da simulação de Monte Carlo que ficou na ordem de 2.94%. Com isso, percebe-se que ambos os métodos poderiam ser usados no cálculo da probabilidade de falha acumulada e, posteriormente, usando este valor na programação de manutenções estruturais, por exemplo.

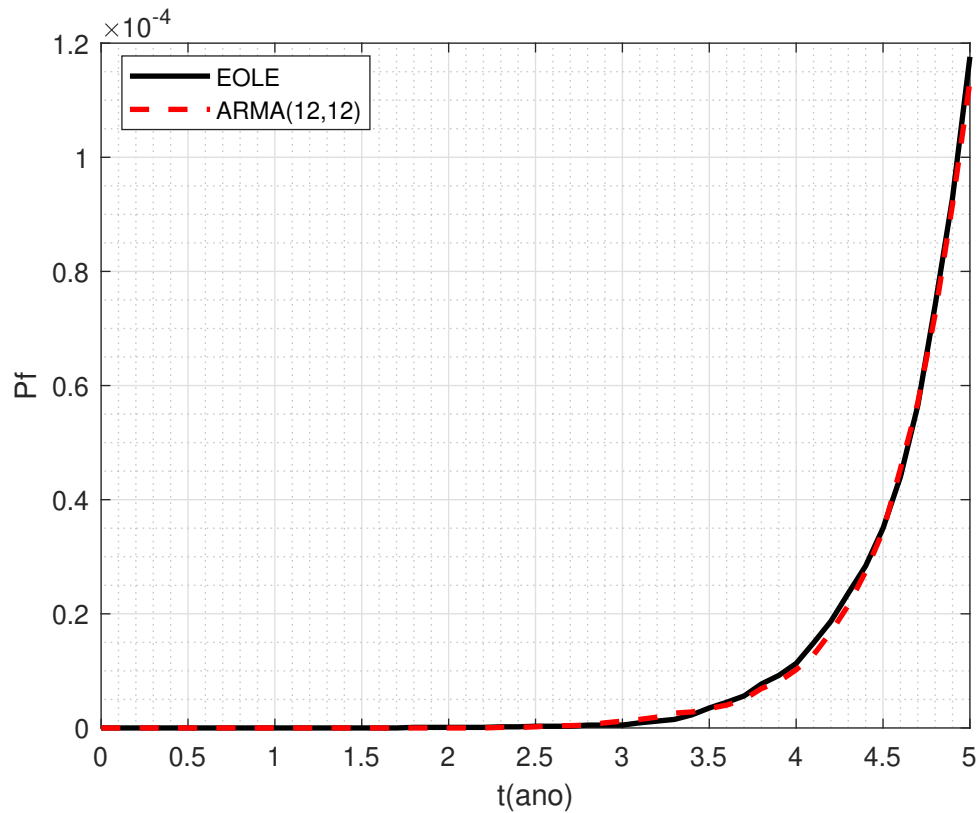


Figura 33 – Evolução da probabilidade de falha acumulada no tempo (Exemplo 5 - Caso I)

### 7.5.2 Caso II

Para o Caso II, foi considerado inicialmente uma matriz autocovariância obtida a partir do modelo ARMA(12,12) usado no Caso I. Com isso, foi criado o EOLE12 e os resultados entre ambos os métodos foram comparados.

O gráfico da evolução da  $P_f$  para os modelos ARMA(12,12) e EOLE12 ao longo do tempo é apresentado na Figura 34 e os resultados numéricos da  $P_f(0, 5)$  são comparados na Tabela 16.

Tabela 16 – Valores da probabilidade de falha acumulada (Exemplo 5 - Caso II)

	$P_f(0, 5)$	$\Delta^*$
ARMA(12,12)	0.0113%	–
EOLE12	0.0114%	0.79%
CV SMC	2.94%	

\* Diferença computada baseada no valor do ARMA(12,12).

Assim como ocorreu no Caso I, para o Caso II os resultados da probabilidade de falha acumulada também são semelhantes, ficando a diferença no valor da  $P_f(0, 5)$  menor que

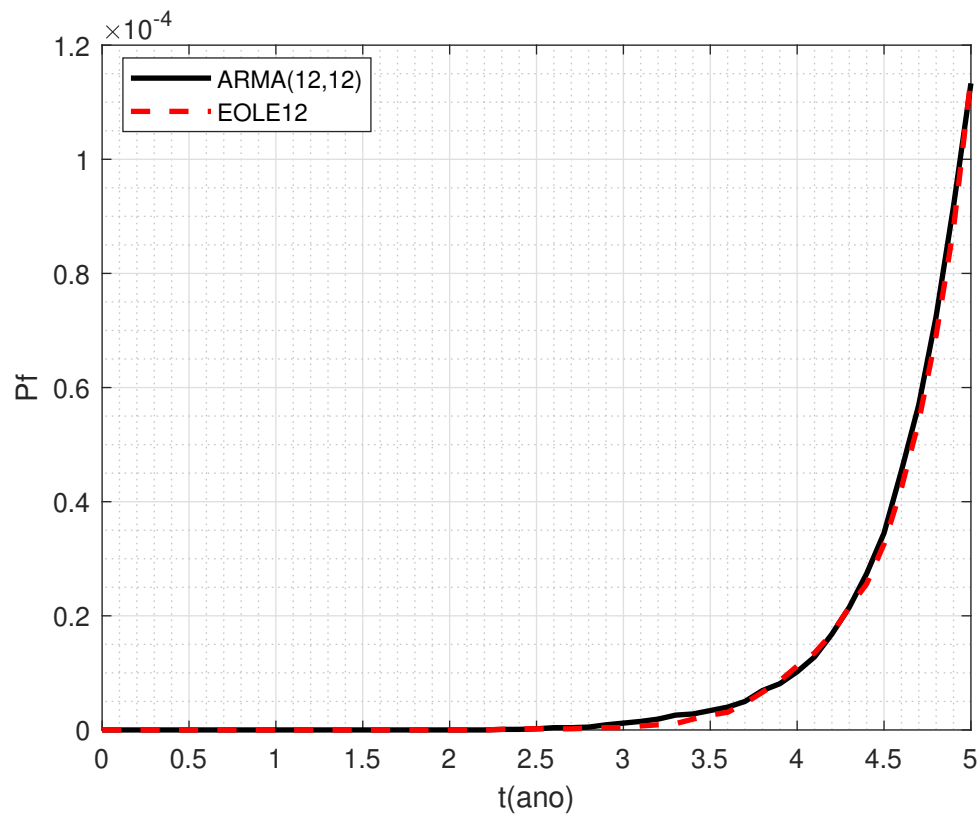


Figura 34 – Evolução da probabilidade de falha acumulada no tempo (Exemplo 5 - Caso II)

0.80%, inferior também ao próprio coeficiente de variação da simulação de Monte Carlo que ficou na ordem de 2.94%.

Cabe ressaltar ainda que, a partir dos resultados obtidos neste Exemplo 7.5, percebe-se que tanto o EOLE quanto o ARMA também podem ser usados nos casos onde o valor da probabilidade de falha acumulada é relativamente pequena, ou seja, na ordem de  $10^{-5}$  a  $10^{-4}$ .

## 8 Considerações finais

Neste trabalho, foram realizadas análises de confiabilidade dependentes do tempo usando modelos de séries temporais (ARMA), comparadas com análises que se utilizam de um método tradicional de expansão (EOLE). Com os resultados obtidos a partir dos exemplos numéricos, pode-se concluir que o modelo ARMA pode ser usado no contexto de análise de confiabilidade estrutural dependente do tempo.

Além disso, para realizar as comparações deste trabalho foram apresentadas duas metodologias novas: i) obtenção de um modelo ARMA apropriado quando as propriedades do processo estocástico são explicitamente conhecidas, mas amostras de dados não estão disponíveis; ii) aplicação do EOLE a partir de informação que pode ser obtida com amostras de dados reais, mas sem conhecimento explícito das propriedades dos processos estocásticos envolvidos. Estas duas novas abordagens complementam as abordagens existentes até então, contribuindo com o avanço do conhecimento da área e possibilitando que os modelos ARMA e EOLE possam ser utilizados em casos onde até então não era possível.

Modelos de séries temporais do tipo ARMA já são amplamente aplicados em diversas áreas a partir de dados históricos, como no monitoramento de danos estruturais, dados de vento registrados por uma estação meteorológica, estações de medições de temperaturas, entre outras, mas pouco utilizados seguindo as abordagens tratadas nesta tese. Com o objetivo de comparar modelos ARMA com EOLE, duas estratégias foram analisadas: construção do modelo ARMA a partir da resolução de um problema de otimização sem usar dados históricos, como é feito usualmente para o EOLE (Caso I), e construção do EOLE a partir de um modelo ARMA pré-definido (Caso II).

Com isso, deve ser ressaltado que é inédita a proposta apresentada neste trabalho de calibrar modelos ARMA sem a necessidade de dados históricos iniciais (Caso I), como é feito para o EOLE e a maioria dos métodos existentes na literatura. Da mesma maneira, mostrou-se que, alternativamente aos modelos de séries temporais, modelos EOLE podem ser aplicados em situações práticas onde a matriz autocovariância é conhecida inicialmente, seja a mesma já pré-definida (como feito nesta tese) ou podendo ser obtida também a partir de dados históricos amostrais (Caso II).

Cinco exemplos de Engenharia foram resolvidos para os dois casos, usando diferentes ordens para os modelos ARMA e comparando os resultados com os respectivos modelos EOLE. Em todos os casos foram comparadas a probabilidade de falha acumulada e instantânea. Cabe ressaltar ainda que, conforme apresentado no último exemplo, modelos EOLE e ARMA também podem ser usados em situações onde pequenos valores (na ordem de  $10^{-5}$  a  $10^{-4}$ )

da probabilidade de falha acumulada são encontrados.

Com relação às diferenças existentes nos valores das  $P_f$  e  $p_f$  entre os modelos ARMA e EOLE, no geral se mostraram pequenas e os resultados apresentaram convergência, não sendo possível eliminar totalmente o erro por se tratar de problemas de confiabilidade utilizando técnicas de amostragem. Contudo, como era teoricamente esperado, percebeu-se uma melhor convergência dos resultados entre EOLE e ARMA à medida que se aumentava a ordem do modelo ARMA( $p, q$ ). Isso se deve ao fato de diminuir o erro no processo de otimização usado para obtenção dos coeficientes do ARMA( $p, q$ ), tendo em vista que o aumento da ordem ( $p, q$ ) acarreta em mais coeficientes para o modelo e em uma maior quantidade de valores passados  $X(t - i)$ , sendo  $i = 1, 2, \dots, \max(p, q)$ , para a obtenção de  $X(t)$ , resultando em uma melhor aproximação da função autocovariância  $\bar{\gamma}(\varphi, \theta, \sigma_e)$  do ARMA com a função de autocovariância  $\gamma$  dada inicialmente, conforme mostrado nas Figuras 14 e 15.

As diferenças entre os resultados via ARMA e EOLE também podem ser explicadas pela necessidade de truncamento da expansão do EOLE. Nos exemplos apresentados, foram usados em torno de 25% – 30% da capacidade máxima dos termos possíveis, exceto para o Exemplo 7.3 que foi usada a expansão completa com todos os termos. Entretanto, cabe ressaltar que um aumento na ordem da expansão do EOLE resulta em um aumento significativo no custo computacional, o que usualmente justifica a utilização de um número menor de termos. Ademais, o erro envolvido na simulação de Monte Carlo (teoricamente inevitável ao resolver problemas baseado nas técnicas de amostragem) e a possibilidade de obtenção de mínimos locais no processo de otimização dos coeficientes do ARMA( $p, q$ ), também contribuem e explicam as pequenas diferenças entre os valores da  $P_f$  e  $p_f$  via EOLE e ARMA.

Assim, os modelos de séries temporais emergem como uma proposta robusta para problemas de confiabilidade dependentes do tempo, sendo promissores, a partir do ponto de vista de aplicabilidade, tanto para situações onde são conhecidos dados históricos reais (como usualmente é realizado) ou para os casos onde se conhecem apenas as propriedades estatísticas do problema, sendo esta última a metodologia sugerida neste trabalho. Logo, espera-se que esta contribuição ajude a inspirar o desenvolvimento de novas técnicas e permita a solução de uma gama mais ampla de problemas.

Como sugestões para trabalhos futuros:

- Abordar problemas envolvendo processos estocásticos não-estacionários, através da utilização de modelos ARIMA, e comparar esses resultados com o EOLE;
- Análise de sensibilidade para avaliar a relação de cada coeficiente do ARMA com as propriedades iniciais da estrutura;



- Aplicar modelos ARMA, seguindo a metodologia do Caso I (sem dados históricos iniciais), para avaliar futuros danos estruturais em construções reais;
- Desenvolver e aplicar técnicas de *importance sampling* nos modelos ARMA seguindo a metodologia do Caso I;
- Analisar se o problema de otimização é convexo ou não, devido as restrições de estacionariedade e invertibilidade, e determinar sobre quais condições seria recomendado usar o ARMA;
- Como modelos ARMA podem ser aproximados por modelos AR(p), com 'p' tendendo ao infinito, comparar resultados obtidos via ARMA(p,q) x AR(p) x EOLE;
- Usar modelos de séries temporais, a partir de dados obtidos via sensores de baixo custo, para monitorar e avaliar a segurança estrutural baseada na probabilidade de falha acumulada.
- Aplicar modelos de séries temporais em problemas de vibrações, usando dados experimentais e numéricos de estruturas intactas e, posteriormente, danificadas. Em seguida, comparar os coeficientes dos modelos ARMA, para a estrutura intacta e danificada, e medir o nível de dano estrutural.

# Referências

ANDRIEUD-RENAUD, C.; SUDRET, B.; LEMAIRE, M. The phi2 method: a way to compute time-variant reliability. *Reliability Engineering and System Safety*, v. 84, p. 75–86, 2004.

AVCI, O. et al. A review of vibration-based damage detection in civil structures: From traditional methods to machine learning and deep learning applications. *Mechanical Systems and Signal Processing*, v. 147, p. 107077, 2021. ISSN 0888-3270. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0888327020304635>.

BAO, C.; HAO, H.; LI, Z. Vibration-based structural health monitoring of offshore pipelines: numerical and experimental study. *Structural Control and Health Monitoring*, v. 20, n. 5, p. 769–788, 2013. Disponível em: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/stc.1494>.

BECK, A. T. *Confiabilidade e Segurança das Estruturas*. 1. ed. Rio de Janeiro: Elsevier, 2019.

BILLINTON, R.; WANGDEE, W. Reliability-based transmission reinforcement planning associated with large-scale wind farms. *IEEE Transactions on power systems*, v. 22, n. 1, p. 34–41, 2007.

BOX, G. E. P.; JENKINS, G. M. *Time series analysis : forecasting and control*. [S.l.]: Holden-Day, 1978. Revised Edition.

BROCKWELL, P. J.; DAVIS, R. A. *Time series; Theory and Methods*. [S.l.]: Springer, 1991. Second Edition.

CARDEN, E. P.; BROWNJOHN, J. M. Arma modelled time-series classification for structural health monitoring of civil infrastructure. *Mechanical Systems and Signal Processing*, v. 22, n. 2, p. 295–314, 2008. ISSN 0888-3270. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0888327007001185>.

CRIBARI-NETO, F.; SCHER, V. T.; BAYER, F. M. Beta autoregressive moving average model selection with application to modeling and forecasting stored hydroelectric energy. *International Journal of Forecasting*, 2021. ISSN 0169-2070. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0169207021001485>.

CRYER, J. D.; CHAN, K. S. *Time series analysis : with applications in R*. [S.l.]: Springer, 2008. Second Edition.

DATTEO, A. et al. On the use of ar models for shm: A global sensitivity and uncertainty analysis framework. *Reliability Engineering and System Safety*, v. 170, p. 99–115, 2018. ISSN 0951-8320. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0951832017302557>.

DITLEVSEN, O. et al. Directional simulation in gaussian space. *Probab Eng Mech*, v. 4, n. 4, p. 207–217, 1988.

DITLEVSEN, O.; MADSEN, H. O. *Structural Reliability Methods*. Chichester: John Wiley & Sons, 1996.

DRIGNEI, D. A general statistical model for computer experiments with time series output. *Reliability Engineering and System Safety*, v. 96, n. 4, p. 460–467, 2011. ISSN 0951-8320. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0951832010002462>.

FUGATE, M. L.; SOHN, H.; FARRAR, C. R. Vibration-based damage detection using statistical process control. *Mechanical Systems and Signal Processing*, v. 15, n. 4, p. 707–721, 2001. ISSN 0888-3270. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0888327000913232>.

GONG, C.; FRANGOPOL, D. M. An efficient time-dependent reliability method. *Structural Safety*, v. 81, n. 64, p. 10–18, 2019.

GOYAL, D.; PABLA, B. S. The vibration monitoring methods and signal processing techniques for structural health monitoring: A review. *Archives of Computational Methods in Engineering*, v. 23, n. 2, p. 585–594, dec 2016. ISSN 1886-1784. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/s11831-015-9145-0>.

HAWCHAR, L.; SOUEIDY, C. P. E.; SHOEFS, F. Time-variant reliability analysis using polynomial chaos expansion. In: *12 International conference on applications of statistics and probability in civil engineering. ICASP12*. [S.l.: s.n.], 2015.

HAWCHAR, L.; SOUEIDY, C. P. E.; SHOEFS, F. Principal component analysis and polynomial chaos expansion for time-variant reliability problems. *Reliability Engineering and System Safety*, v. 167, p. 406–416, 2017.

HECQ, A.; VOISIN, E. Forecasting bubbles with mixed causal-noncausal autoregressive models. *Econometrics and Statistics*, v. 20, p. 29–45, 2021. ISSN 2452-3062. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S245230622030040X>.

HO, S.; XIE, M. The use of arima models for reliability forecasting and analysis. *Computers and Industrial Engineering*, v. 35, n. 1-2, p. 213–216, 1998.

HU, Y. et al. Time-dependent structural system reliability analysis model and its efficiency solution. *Reliability Engineering and System Safety*, v. 216, p. 108029, 2021. ISSN 0951-8320. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0951832021005378>.

HU, Z.; DU, X. A sampling approach to extreme value distribution for time-dependent reliability analysis. *Journal of Mechanical design*, v. 135, p. 071003, 2013.

HU, Z.; DU, X. Time-dependent reliability analysis with joint upcrossing rates. *Struct Multidisc Optim*, v. 48, p. 893–907, 2013.

HU, Z.; DU, X. First order reliability method for time-variant problems using series expansions. *Structure Multidisciplinary Optimization*, v. 51, p. 1–21, 2014.

HU, Z.; MAHADEVAN, S. Time-dependent reliability analysis using a vine-arma load model. *ASCE-ASME Journal of Risk and Uncertainty in Engineering Systems, Part B: Mechanical Engineering*, v. 3, n. 1, p. 011007, 2017. Disponível em: <https://ascelibrary.org/doi/abs/10.1115/1.4034805>.

JIANG, C. et al. A time-variant reliability analysis method based on stochastic process discretization. *Journal of Mechanical Design*, v. 136, p. 091009, 2014.

JIANG, C. et al. A time-variant reliability analysis method for structural systems based on stochastic process discretization. *International Journal of Mechanics and Materials in Design*, v. 13, p. 173–193, 2017.

JIANG, C. et al. An improved trpd method for time-variant reliability analysis. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, v. 58, p. 1935–1946, 2018.

KROESE, D. P.; TAIMRE, T.; BOTEV, Z. I. *Handbook of Monte Carlo Methods*. Hoboken: John Wiley & Sons, 2011.

KROETZ, H. et al. A two-level kriging-based approach with active learning for solving time-variant risk optimization problems. *Reliability Engineering and System Safety*, v. 203, p. 107033, 2020. ISSN 0951-8320. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0951832020305342>.

KROETZ, H. M.; MEDEIROS, E. M.; TORII, A. J. On the applicability of time-series models for structural reliability analysis. In: *Proceedings of XLI CILAMCE*. [S.l.: s.n.], 2020. p. 7.

LI, C. C.; KIUREGHIAN, A. Optimal discretization of random fields. *Journal of Engineering Mechanics*, v. 1136, n. 119, p. 6, 1993.

LI, J.; MOURELATOS, Z. P. Time-dependent reliability estimation for dynamic problems using a niching genetic algorithm. *J. Mech. Des.*, v. 131, n. 7, p. 071009, 2009.

LIU, C. et al. An integrated autoregressive model for predicting water quality dynamics and its application in yongding river. *Ecological Indicators*, v. 133, p. 108354, 2021. ISSN 1470-160X. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1470160X21010190>.

LOÈVE, M. *Probability Theory II*. 4th. ed. New York: Springer-Verlag, 1977.

LU, J.; LI, Z. Early prognostic factors of patients with acquired pneumonia under the analysis of autoregressive integrated moving average model-based pathogenic infectious influenza virus. *Results in Physics*, v. 22, p. 103908, 2021. ISSN 2211-3797. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2211379721000863>.

MADSEN, H. O.; KRENK, S.; LIND, N. C. *Methods of structural safety*. Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1986.

MEDEIROS, E. M. de. *Análise de confiabilidade estrutural com expansão polinomial*. 54 p. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa-PB, 2018.

MELCHERS, R. E. Load-space formulation for time-dependent structural reliability. *J Eng Mech ASCE*, v. 118, n. 5, p. 853–870, 1992.

MELCHERS, R. E.; BECK, A. T. *Structural Reliability Analysis and Prediction*. [S.l.]: John Wiley and Sons, 2018. v. 1.

MELCHIOR, C. et al. Forecasting brazilian mortality rates due to occupational accidents using autoregressive moving average approaches. *International Journal of Forecasting*, v. 37, n. 2, p. 825–837, 2021. ISSN 0169-2070. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0169207020301515>.

MIGNOLET, M.; SPANOS, P. Arma monte carlo simulation in probabilistic structural analysis. *The Shock and Vibration Digest*, v. 21, n. 11, p. 3–14, 1989.

MOAREFZADEH, M. R.; MELCHERS, R. E. Directional importance sampling for ill-proportioned spaces. *J Struct Safety*, v. 21, n. 1, p. 1–22, 1999.

MOAREFZADEH, M. R.; SUDRET, B. Implementation of directional simulation to estimate outcrossing rates in time-variant reliability analysis of structures. *Qual Reliab Engng Int*, v. 34, p. 1–10, 2018.

NIE, J.; ELLINGWOOD, B. R. Finite element-based structural reliability assessment using efficient directional simulation. *Journal of Engineering Mechanics*, v. 131, n. 3, p. 259–267, 2005.

OMENZETTER, P.; BROWNJOHN, J. M. W. Application of time series analysis for bridge monitoring. *Smart Materials and Structures*, IOP Publishing, v. 15, n. 1, p. 129–138, jan 2006. Disponível em: <https://doi.org/10.1088/0964-1726/15/1/041>.

OWEN, J. et al. The application of auto-regressive time series modelling for the time-frequency analysis of civil engineering structures. *Engineering Structures*, v. 23, n. 5, p. 521–536, 2001. ISSN 0141-0296. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0141029600000596>.

PELLIZZER, G. P. et al. Time-dependent reliability of reinforced concrete considering chloride penetration via boundary element method. *Latin American Journal of Solids and Structures*, v. 17, 2020. ISSN 1679-7825.

ROSS, S. M. *Simulation*. 4th. ed. Orlando: Academic Press, 2006.

RUBINSTEIN, R. Y.; KROESE, D. P. *Simulation and the Monte Carlo method*. 2nd. ed. Hoboken: John Wiley & Sons, 2008.

SALAMANIS, A. I. et al. An adaptive cluster-based sparse autoregressive model for large-scale multi-step traffic forecasting. *Expert Systems with Applications*, v. 180, p. 115093, 2021. ISSN 0957-4174. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0957417421005340>.

SAMARAS, E.; SHINZUKA, M.; TSURUI, A. Arma representation of random processes. *Journal of Engineering Mechanics*, v. 111, n. 3, p. 449–461, 1985.

SCHWARZ, G. Estimating the Dimension of a Model. *The Annals of Statistics*, Institute of Mathematical Statistics, v. 6, n. 2, p. 461 – 464, 1978. Disponível em: <https://doi.org/10.1214/aos/1176344136>.

SHRIRYAEV, A. N. *Probability*. 2nd. ed. New York: Springer-Verlag, 1995.

SINGH, A.; MOURELATOS, Z. P.; LI, J. Design for lifecycle cost using time-dependent reliability. *ASME Journal of Mechanical Design*, v. 132, n. 9, p. 091008, 2010.

SINGH, A.; MOURELATOS, Z. P.; NIKOLAIDIS, E. An importance sampling approach for time-dependent reliability. In: *International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference*. [S.l.: s.n.], 2011.

SINGH, A.; MOURELATOS, Z. P.; NIKOLAIDIS, E. Time-dependent reliability of random dynamic systems using time-series modeling and importance sampling. *SAE international Journal of Materials and Manufactur*, v. 4, n. 1, p. 929–946, 2011.

SOHN, H.; FARRAR, C. R. Damage diagnosis using time series analysis of vibration signals. *Smart Materials and Structures*, IOP Publishing, v. 10, n. 3, p. 446–451, jun 2001. Disponível em: <https://doi.org/10.1088/0964-1726/10/3/304>.

SOHN, H.; FUGATE, M. L.; FARRAR, C. R. Damage diagnosis using statistical process control. In: *CITESEER. Proc., 7th Int. Conf. on Recent Advances in Structural Dynamics, Southampton, UK*. [S.l.], 2000.

SUDRET, B. Analytical derivation of the outcrossing rate in time-variant reliability problems. *Structure and Infrastructure Engineering: Maintenance, management, Life-Cycle Design and Performance*, v. 4, n. 5, p. 353–362, 2008.

WALLS, L.; BENDELL, A. Time series methods in reliability. *Reliability Engineering*, v. 18, n. 1, p. 239–265, 1987.

WANG, C.; BEER, M.; AYYUB, B. M. Time-dependent reliability of aging structures: Overview of assessment methods. *ASCE-ASME Journal of Risk and Uncertainty in Engineering Systems, Part A: Civil Engineering*, v. 7, n. 4, p. 03121003, 2021. Disponível em: <https://ascelibrary.org/doi/abs/10.1061/AJRUA6.0001176>.

WANG, Z.-X.; ZHAO, Y.-F.; HE, L.-Y. Forecasting the monthly iron ore import of china using a model combining empirical mode decomposition, non-linear autoregressive neural network, and autoregressive integrated moving average. *Applied Soft Computing*, v. 94, p. 106475, 2020. ISSN 1568-4946. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1568494620304142>.

WU, H.; HU, Z.; DU, X. Time-Dependent System Reliability Analysis With Second-Order Reliability Method. *Journal of Mechanical Design*, v. 143, n. 3, 11 2020. ISSN 1050-0472. 031101. Disponível em: <https://doi.org/10.1115/1.4048732>.

YAO, R.; PAKZAD, S. N. Damage and noise sensitivity evaluation of autoregressive features extracted from structure vibration. *Smart Materials and Structures*, IOP Publishing, v. 23, n. 2, p. 025007, dec 2013. Disponível em: <https://doi.org/10.1088/0964-1726/23/2/025007>.

YU, S. et al. Time-variant reliability analysis via approximation of the first-crossing pdf. *Structural and Multidisciplinary optimization*, v. 62, p. 2653–2667, 2020.

ZHANG, J.; ELLINGWOOD, B. Orthogonal series expansions of random fields in reliability analysis. *Journal of Engineering Mechanics*, v. 120, n. 12, p. 2660–2677, 1994.

ZHANG, X.; JU, Y.; WANG, F. Statistical Analysis of Wind-Induced Dynamic Response of Power Towers and Four-Circuit Transmission Tower-Line System. *Shock and Vibration*, v. 2018, 3 2018. ISSN 1070-9622. Disponível em: <https://doi.org/10.1155/2018/5064930>.

ZHANG, Y.; GONG, C.; LI, C. Efficient time-variant reliability analysis through approximating the most probable point trajectory. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, v. 63, n. 1, p. 289–309, 2021.

ZHENG, H.; MITA, A. Damage indicator defined as the distance between arma models for structural health monitoring. *Structural Control and Health Monitoring*, v. 15, n. 7, p. 992–1005, 2008. Disponível em: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/stc.235>.

ZHOU, W.; GONG, C.; HONG, H. P. New perspective on application of first-order reliability method for estimating system reliability. *Journal of Engineering Mechanics*, v. 173, n. 9, p. 04017074, 2017.