

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

AMANDA COSTA SILVA

TEOREMA FUNDAMENTAL DA ÁLGEBRA: UMA
DEMONSTRAÇÃO UTILIZANDO CONCEITOS
TOPOLÓGICOS

João Pessoa
2022

AMANDA COSTA SILVA

**TEOREMA FUNDAMENTAL DA ÁLGEBRA: UMA
DEMONSTRAÇÃO UTILIZANDO CONCEITOS
TOPOLÓGICOS**

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao Curso de Licenciatura em Matemática, do Departamento de Matemática, do Centro de Ciências Exatas e da Natureza, da Universidade Federal da Paraíba, como requisito para obtenção do título de Licenciada em Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Miriam da Silva Pereira

João Pessoa
2022

Catálogo na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

S586t Silva, Amanda Costa.

Teorema fundamental da álgebra: uma demonstração
utilizando conceitos topológicos / Amanda Costa Silva.

- João Pessoa, 2022.

50 f. : il.

Orientação: Miriam da Silva Pereira.

TCC (Curso de Licenciatura em Matemática) -
UFPB/CCEN.

1. Homotopia. 2. Álgebra - grupo fundamental. 3.
Teorema fundamental da álgebra. 4. Topologia algébrica.
I. Pereira, Miriam da Silva. II. Título.

UFPB/CCEN

CDU 51(043.2)



**MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA**

ATA Nº 5 / 2022 - CCEN-CGM (11.01.14.44)

Nº do Protocolo: 23074.054658/2022-56

João Pessoa-PB, 16 de Junho de 2022

ATA DA SESSÃO PÚBLICA DE DEFESA DO TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO DA DISCENTE AMANDA COSTA SILVA, MATRÍCULA 20180071150, DO CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA.

Ao décimo sétimo dia do mês de junho dois mil e vinte e dois (17/06/2022), às 17:00 horas, por videoconferência via plataforma Google Meet, através do link meet.google.com/qya-qdsx-jru, em conformidade com a portaria nº 29/GR/REITORIA de 22 de julho de 2021, que dispõe sobre a regulamentação, em caráter excepcional e temporário, das atividades da graduação da Universidade Federal da Paraíba durante o período de isolamento social imposto pela pandemia de coronavírus (covid-19), reuniram-se em caráter de solenidade pública, os membros da comissão designada para avaliar Amanda Costa Silva. Foram componentes da Banca Examinadora, o professor Dra. Miriam da Silva Pereira (Orientadora) e os professores Dr. Aurélio Menegon Neto (UFPB) e Dr. Flank David Morais Bezerra (UFPB). Dando início aos trabalhos, a Presidente da Banca, Miriam da Silva Pereira, após declarar os objetivos da reunião, apresentou a candidata a quem concedeu a palavra para que dissertasse, oral e sucintamente, sobre o tema apresentado, intitulado “O Teorema Fundamental da Álgebra: Uma demonstração Topológica”. Após discorrer sobre o referido tema, a candidata foi arguida pelos examinadores na forma regimental. Ato contínuo passou a comissão, em caráter secreto, a proceder à avaliação e julgamento do trabalho, concluindo por atribuir-lhe a nota **10** e, portanto, o conceito **Aprovada**.

João Pessoa, 17 de junho de 2022.

(Assinado digitalmente em 20/06/2022 08:40)

AURELIO MENEGON NETO
PROFESSOR DO MAGISTERIO SUPERIOR
Matrícula: 2015919

(Assinado digitalmente em 20/06/2022 08:44)

FLANK DAVID MORAIS BEZERRA
PROFESSOR DO MAGISTERIO SUPERIOR
Matrícula: 1812720

(Assinado digitalmente em 17/06/2022 18:14)

MIRIAM DA SILVA PEREIRA
PROFESSOR DO MAGISTERIO SUPERIOR
Matrícula: 1818769

Para verificar a autenticidade deste documento entre em <https://sipac.ufpb.br/documentos/> informando seu número: **5**, ano: **2022**, documento(espécie): **ATA**, data de emissão: **16/06/2022** e o código de verificação: **7767d2a46a**

RESUMO

O presente trabalho tem o objetivo de apresentar uma demonstração para o Teorema Fundamental da Álgebra utilizando conceitos da Topologia Geral e conceitos iniciais da Topologia Algébrica. Para isso, foi realizada uma pesquisa bibliográfica, explorando as ideias de espaço topológico, homotopia, grupo fundamental, espaços de recobrimento, retrações e pontos fixos.

Palavras-chave: Homotopia. Grupo Fundamental. Teorema Fundamental da Álgebra.

ABSTRACT

The present work has the objective of presenting a proof for the Fundamental Theorem of Algebra using concepts of General Topology and initial concepts of Algebraic Topology. For this purpose, a bibliographical research was carried out, exploring the ideas of topological space, homotopy, fundamental group, covering spaces, retractions and fixed points.

Keywords: Homotopy. Fundamental Group. Fundamental Theorem of Algebra.

Sumário

1	INTRODUÇÃO	5
2	DESENVOLVIMENTO	7
2.1	Espaços Topológicos	7
2.2	Homotopia e Grupo Fundamental	24
2.3	Grupo Fundamental do Círculo	33
3	CONSIDERAÇÕES FINAIS	47
	REFERÊNCIAS	48

1 INTRODUÇÃO

De acordo com a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), o trabalho com equações deve iniciar no sétimo ano do ensino fundamental, com elaboração e resolução de problemas que possam ser representados por equações do tipo $ax + b = c$. Em seguida, no oitavo ano, devem ser introduzidas equações de segundo grau, do tipo $ax^2 = b$. No nono ano, os problemas estudados podem ser representados por equações do tipo $ax^2 + bx + c = 0$, e é recomendado que a resolução seja feita por meio de fatoração de expressões algébricas, utilizando produtos notáveis.

Apesar de ser estudado já no ensino fundamental, o problema de achar raízes para equações algébricas é antigo e foi tratado por estudiosos de diferentes épocas. De acordo com Roque (2012), o matemático árabe Al-Khwarizmi (780 - 850), em seu livro *Tratado sobre o cálculo de al-jabar e el-muqabala*, apresenta métodos de resolução para seis tipos de equações de segundo grau. Utilizando linguagem retórica e tratando cada caso a partir de exemplos (que podem ser estendidos a casos semelhantes), Al-Khwarizmi apresenta um algoritmo equivalente à fórmula de resolução de equações de segundo grau que usamos atualmente. Tartaglia (1500 - 1557) e Girolamo Cardano (1501 - 1576) desenvolveram métodos para resolução de equações de terceiro e quarto grau. François Viète (1540 - 1603) introduziu uma representação padrão, representando incógnitas por vogais e os coeficientes pelas consoantes.

Com isso, diante da dificuldade em determinar a solução de equações de grau maior que quatro, surgiu a seguinte questão: há solução para equações de grau superior a quatro? Carl Friedrich Gauss (1777 - 1855), em sua tese de doutorado, respondeu a essa pergunta, demonstrando o resultado que conhecemos por Teorema Fundamental da Álgebra: toda equação polinomial com coeficientes complexos tem pelo menos uma raiz.

Nesse contexto, o objetivo deste trabalho é apresentar uma demonstração para o Teorema Fundamental da Álgebra (TFA), utilizando conceitos da Topologia, área da Matemática que, de maneira geral, estuda deformações dos sólidos. Foi realizada uma pesquisa bibliográfica, assumindo conhecimentos de teoria dos conjuntos, para estudar os conceitos prévios até chegar à demonstração do TFA, começando pela definição de espaços topológicos por meio de conjuntos abertos. Apresentamos como determinar um espaço topológico por meio de uma base para a topologia, bem como as propriedades de um subespaço, as definições de conjuntos fechados, interior e fecho de um conjunto e espaço Hausdorff. Discutimos, também, a definição de continuidade de uma função usando o conceito de conjuntos abertos, de modo a entendermos quando dois espaços são considerados homeomorfos.

A noção de homeomorfismo é fundamental quando tratamos de invariantes topoló-

gicos (propriedades topológicas preservadas por homeomorfismo), tais como conexidade, compacidade e o grupo fundamental. Esses conceitos, juntamente com os estudados adiante, quais sejam espaços de recobrimento, levantamento de aplicações, retrações e pontos fixos e o cálculo do grupo fundamental do círculo, compõem um conjunto de ferramentas necessárias para a demonstração do Teorema Fundamental da Álgebra.

2 DESENVOLVIMENTO

2.1 Espaços Topológicos

Definição 1. Uma **topologia** num conjunto X é uma coleção τ de subconjuntos de X , satisfazendo as seguintes propriedades:

- (i) $\emptyset, X \in \tau$;
- (ii) A união de qualquer subcoleção de τ pertence a τ ;
- (iii) A interseção de uma subcoleção finita de τ pertence a τ .

Um **espaço topológico** é um par ordenado (X, τ) , sendo X um conjunto e τ uma topologia em X . Na maioria das vezes, denotamos o espaço topológico apenas por X .

Um subconjunto U de X que pertença a τ é chamado **conjunto aberto** em X . Assim, o conjunto vazio e o X são abertos em X , assim como as uniões arbitrárias e as interseções de subcoleções finitas.

Exemplo 1.1. Seja X um conjunto. A coleção $\tau = \{\emptyset, X\}$ é chamada topologia indiscreta (ou trivial). Note que ela obedece à primeira condição da Definição 1. Além disso, a união de seus dois elementos é igual ao próprio X , que também é um elemento; a interseção é igual ao conjunto vazio, que é um elemento da coleção. Logo, τ é, de fato, uma topologia.

Exemplo 1.2. Seja X um conjunto. Definimos o conjunto das potências de X como $P(X) = \{A \mid A \subset X\}$. A coleção $\tau = P(X)$ é chamada topologia discreta. Ou seja, nesta topologia, todos os subconjuntos de X são abertos. Vamos verificar que esta coleção é, de fato, uma topologia:

- (i) $\emptyset, X \subset X$. Logo, $\emptyset, X \in \tau$;
- (ii) Seja $\{U_i\}_{i \in I}$ uma família indexada de conjuntos abertos em X . Então, $\bigcup_{i \in I} U_i \subset X$. Assim, $\bigcup_{i \in I} U_i \in \tau$;
- (iii) Sejam $U_1, \dots, U_n$ conjuntos abertos em X . Temos que $U_1 \cap \dots \cap U_n \subset X$. Logo, $U_1 \cap \dots \cap U_n \in \tau$.

Exemplo 1.3. Seja $X = \{a, b, c\}$. Então, a coleção $\mathcal{A} = \{X, \emptyset, \{a\}, \{b\}\}$ não é uma topologia, pois $\{a\} \cup \{b\} = \{a, b\} \notin \mathcal{A}$.

Definição 2. Seja X um conjunto. Uma **base** para uma topologia em X é uma coleção $\mathcal{B}$ de subconjuntos de X tal que:

- (i) Se $x \in X$, então $x \in B$, para algum $B \in \mathcal{B}$;
- (ii) Sejam $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, então se $x \in B_1 \cap B_2$, existe $B_3 \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_3$ e $B_3 \subset B_1 \cap B_2$.

Para definirmos uma topologia τ em X em termos de uma base $\mathcal{B}$, adotamos o seguinte critério:

$$U \in \tau \Leftrightarrow \forall x \in U, \exists B \in \mathcal{B} \text{ tal que } x \in B \subset U \quad (1)$$

Notemos que um elemento B da base também é um elemento da topologia: sabemos que $B \subset B$, logo, ele satisfaz (1).

Agora, vamos mostrar que uma coleção τ gerada por uma base $\mathcal{B}$ é uma topologia em X . De fato,

- (i) Se $U = \emptyset$, então U satisfaz (1) por vacuidade. Se $U = X$, pela Definição 2, para cada $x \in X$, existe um elemento $B \in \mathcal{B}$ contendo x . Além disso, sabemos que $B \subset X$. Assim, X satisfaz (1);
- (ii) Seja $\{U_i\}_{i \in I}$ uma família indexada de elementos de τ . Se $U = \bigcup_{i \in I} U_i$, tomando $x \in U$, então $x \in U_i$, para algum $i \in I$. Como U_i é aberto, existe um elemento $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subset U_i \subset U$. Assim, $U = \{U_i\}_{i \in I}$ satisfaz (1);
- (iii) Sejam U_1, U_2 abertos. Dado $x \in U_1 \cap U_2$, temos que existe $B_1 \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_1 \subset U_1$ e existe $B_2 \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_2 \subset U_2$. Pela Definição 2, existe um elemento $B_3 \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_3$ e $B_3 \subset B_1 \cap B_2$. Assim, $B_3 \subset B_1 \subset U_1$ e $B_3 \subset B_2 \subset U_2$, de modo que $B_3 \subset U_1 \cap U_2$. Por (1), temos que se $U = U_1 \cap U_2$, então $U \in \tau$.

Agora, vamos mostrar, por indução, que qualquer interseção finita $U_1 \cap U_2 \cap \dots \cap U_n$ (com $n \in \mathbb{N}$) de elementos de τ pertence a τ :

- O caso $n = 1$ é trivial;
- Suponhamos, agora, que $U_1 \cap U_2 \cap \dots \cap U_{n-1} \in \tau$. Temos: $(U_1 \cap U_2 \cap \dots \cap U_n) = (U_1 \cap U_2 \cap \dots \cap U_{n-1}) \cap U_n$.

De maneira análoga ao caso $n = 2$ citado acima, temos que se $U_A = U_1 \cap U_2 \cap \dots \cap U_{n-1}$ e $U_B = U_n$, então $U_A \cap U_B = (U_1 \cap U_2 \cap \dots \cap U_{n-1}) \cap U_n = U_1 \cap U_2 \cap \dots \cap U_n \in \tau$.

Portanto, a coleção τ é uma topologia para X .

Lema 2.1. *Sejam X um conjunto e $\mathcal{B}$ uma base para uma topologia τ em X . Então, τ é a coleção de todas as uniões dos elementos de $\mathcal{B}$.*

Prova: Dada uma coleção de elementos de $\mathcal{B}$, sabemos que estes elementos estão contidos em τ . Segue da Definição 1, que a união destes elementos também está contida em τ . Assim, a coleção de todas as uniões de elementos básicos está contida em τ . Reciprocamente, por (1), dado $U \in \tau$, para cada $x \in U$ existe $B_x \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_x \subset U$.

Então, $U = \bigcup_{x \in U} B_x$, isto é, U é uma união de elementos básicos. Assim, τ está contida na coleção de todas as uniões de elementos de $\mathcal{B}$.

Lema 2.2. *Seja (X, τ) um espaço topológico. Suponha que $\mathcal{D}$ é uma coleção de conjuntos abertos de X tal que, dado um aberto U , para cada $x \in U$, existe um $C \in \mathcal{D}$ tal que $x \in C \subset U$. Então, $\mathcal{D}$ é uma base para a topologia τ de X .*

Prova: Para mostrar que $\mathcal{D}$ é uma base, devemos verificar as duas condições da Definição 2:

- (i) Dado $x \in X$, como X é um conjunto aberto, existe $C \in \mathcal{D}$ tal que $x \in C \subset X$, por hipótese.
- (ii) Seja $x \in C_1 \cap C_2$, com C_1 e C_2 elementos de $\mathcal{D}$. Como C_1 e C_2 são abertos, $C_1 \cap C_2$, também é um aberto. Por hipótese, existe $C_3 \in \mathcal{D}$ tal que $x \in C_3 \subset (C_1 \cap C_2)$.

Devemos concluir também que $\mathcal{D}$ gera, de fato, a topologia τ de X . Para isso, vamos mostrar que a topologia τ' gerada pela base $\mathcal{D}$ é igual a τ :

- $\tau \subset \tau'$: $U \in \tau$ e $x \in U \Rightarrow \exists C \in \mathcal{D}$ tal que $x \in C \subset U \Rightarrow U \in \tau'$ (por 1);
- $\tau' \subset \tau$: se $W \in \tau'$, segue do Lema 2.1 que W é uma união de elementos de $\mathcal{D}$. Como $\mathcal{D}$ é uma coleção de abertos de τ , cada elemento de $\mathcal{D}$ pertence a τ . Como τ é uma topologia, uma união qualquer de elementos de $\mathcal{D}$ também pertence a τ . Portanto, $W \in \tau$.

Definição 3. *Considere $\mathcal{B}$ a coleção de todos os intervalos abertos de $\mathbb{R}$, isto é, os conjuntos*

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}.$$

*A topologia gerada por $\mathcal{B}$ é chamada **topologia usual da reta**.*

Vamos verificar que $\mathcal{B}$ é, de fato, uma base.

- (i) Se $x \in \mathbb{R}$, tome $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $a < x < b$. Assim, $x \in B = (a, b)$ e $B \in \mathcal{B}$;
- (ii) Sejam $B_1 = (a, b)$, $B_2 = (c, d) \in \mathcal{B}$ tais que $x \in B_1 \cap B_2$. Podemos considerar, sem perda de generalidade, que $a < c < b < d$. Tome $e, f \in \mathbb{R}$ tais que $c < e < x$ e $x < f < b$. Assim, $B_3 = (e, f)$ é tal que $x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$.

Definição 4. *Sejam X e Y espaços topológicos. A **topologia produto** em $X \times Y$ é a topologia que tem como base a coleção*

$$\mathcal{B} = \{U \times V \mid U \text{ é aberto em } X \text{ e } V \text{ é aberto em } Y\}$$

Vamos verificar que $\mathcal{B}$ é, de fato, uma base.

- (i) Temos que $X \times Y \in \mathcal{B}$ pois X é aberto no espaço X e Y é aberto no espaço Y . Logo, dado $(x, y) \in X \times Y$, existe $B = X \times Y$ tal que $(x, y) \in B \subset X \times Y$;
- (ii) Sejam $U_1 \times V_1, U_2 \times V_2 \in \mathcal{B}$. Temos que

$$(U_1 \times V_1) \cap (U_2 \times V_2) = (U_1 \cap U_2) \times (V_1 \cap V_2)$$

De fato,

$$(x, y) \in (U_1 \times V_1) \cap (U_2 \times V_2) \Leftrightarrow (x \in U_1 \text{ e } y \in V_1) \text{ e } (x \in U_2 \text{ e } y \in V_2) \Leftrightarrow (x \in U_1 \text{ e } x \in U_2) \text{ e } (y \in V_1 \text{ e } y \in V_2) \Leftrightarrow (x, y) \in (U_1 \cap U_2) \times (V_1 \cap V_2)$$

Como $U_1 \cap U_2$ e $V_1 \cap V_2$ são abertos em X e Y , respectivamente, temos que $(U_1 \cap U_2) \times (V_1 \cap V_2)$ é um elemento básico. Assim, considerando $B_1 = (U_1 \times V_1)$ e $B_2 = (U_2 \times V_2)$, dado $(x, y) \in B_1 \cap B_2$, existe $B_3 = B_1 \cap B_2 \in \mathcal{B}$ tal que $(x, y) \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$.

Teorema 4.1. *Se $\mathcal{B}$ é uma base para a topologia de X e $\mathcal{C}$ é uma base para topologia de Y , então a coleção*

$$\mathcal{D} = \{B \times C \mid B \in \mathcal{B} \text{ e } C \in \mathcal{C}\}$$

é uma base para a topologia de $X \times Y$. (MUNKRES, 2000, p. 86)

Definição 5. *Sejam (X, τ) um espaço topológico e $Y \subset X$. A **topologia de subespaço** é dada por*

$$\tau_Y = \{Y \cap U \mid U \in \tau\}$$

e Y é um subespaço de Y .

Vamos verificar que τ_Y é, de fato, uma topologia em X :

- (i) Sabemos que $\emptyset \in \tau$ e $Y \cap \emptyset = \emptyset$. Portanto, $\emptyset \in \tau_Y$. Além disso, $X \in \tau$ e $Y \cap X = Y$. Portanto, $Y \in \tau_Y$.
- (ii) Temos que dados A, B, C conjuntos, vale $(A \cap B) \cap (C \cap B) = A \cap C \cap B$. De maneira análoga, é possível verificar que é verdadeira a equação:

$$(U_1 \cap Y) \cap \dots \cap (U_n \cap Y) = (U_1 \cap \dots \cap U_n) \cap Y \tag{2}$$

Considerando, em (2), $U_n \in \tau_Y$, para todo $n \in \mathbb{N}$, então qualquer interseção finita de elementos de τ_Y é um aberto em Y .

(iii) Note que

$$\bigcup_{i \in I} (U_i \cap Y) = \left(\bigcup_{i \in I} U_i \right) \cap Y \quad (3)$$

De fato,

$$\begin{aligned} x \in \bigcup_{i \in I} (U_i \cap Y) &\Leftrightarrow \exists i \in I \text{ tal que } x \in (U_i \cap Y) \Leftrightarrow \exists i \in I \text{ tal que } x \in U_i \text{ e } x \in Y \\ &\Leftrightarrow x \in \bigcup_{i \in I} U_i \text{ e } x \in Y \Leftrightarrow x \in \left(\bigcup_{i \in I} U_i \right) \cap Y \end{aligned}$$

Considerando que $U_i \in \tau$, então a equação 3 afirma que uma união qualquer de elementos de τ_Y é um elemento de τ_Y .

Exemplo 5.1. *Seja X um espaço topológico e Y um subespaço de X .*

- (a) *Se X tem a topologia trivial, então Y também tem a topologia trivial. De fato, os únicos abertos em X são X e $\emptyset$. Assim, os abertos em Y , na topologia de subespaço, são $Y \cap Y = Y$ e $Y \cap \emptyset = \emptyset$*
- (b) *Se X tem a topologia discreta, então Y também tem a topologia discreta. De fato, os abertos em X são os conjuntos da coleção $P(X)$. Assim,*
 - *se V é aberto em Y , então $V \in P(Y)$;*
 - *se $V \in P(Y)$, também temos que $V \in P(X)$, de modo que $V = V \cap V$ é aberto em Y .*

Lema 5.1. *Seja $Y \subset X$. Se $\mathcal{B}$ é uma base para a topologia de X , então a coleção $\mathcal{B}_Y = \{B \cap Y \mid B \in \mathcal{B}\}$ é uma base para a topologia de subespaço em Y .*

Prova: Dado U aberto em X , se $y \in U \cap Y$, sabemos que existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $y \in B \subset U$, segundo o critério (1). Logo, $y \in (B \cap Y) \subset (U \cap Y)$. Provemos essa inclusão:

$$w \in B \cap Y \Rightarrow w \in B \text{ e } w \in Y \Rightarrow w \in U \text{ e } w \in Y \Rightarrow w \in U \cap Y$$

Assim, pelo Lema 2.2, $\mathcal{B}_Y$ é uma base para a topologia de subespaço.

Lema 5.2. *Seja Y um subespaço de X . Se U é aberto em Y e Y é aberto em X , então U é aberto em X .*

Prova: Se U é aberto em Y , então $U = Y \cap V$, sendo V um aberto em X . Como Y e V são abertos em X , então, sua interseção também é aberto em X .

Observação 5.1. *No Lema 5.2 é importante observar a hipótese de que Y deve ser aberto em X . Pois, por definição, para ser subespaço de X , Y não precisa ser aberto em X .*

Definição 6. *Um subconjunto A de um espaço topológico X é **fechado** se $X - A$ (seu complementar) é aberto.*

Exemplo 6.1. Considerando a topologia usual da reta (na qual os conjuntos abertos são intervalos abertos):

- (i) $[a, b]$ é fechado, pois $\mathbb{R} - [a, b] = (-\infty, a) \cup (b, +\infty)$ é aberto.
- (ii) $[a, +\infty)$ é fechado, pois $\mathbb{R} - [a, +\infty) = (-\infty, a)$ é aberto.
- (iii) $[a, b)$ não é aberto nem fechado, pois $\mathbb{R} - [a, b) = (-\infty, a) \cup [b, +\infty)$ não é aberto.

Exemplo 6.2. Na topologia discreta em um conjunto X , temos que, se $U \subset X$, então U e $X - U$ são abertos. Isto implica que ambos também são fechados. Assim, na topologia discreta, todos os abertos são fechados.

Exemplo 6.3. Seja $Y = [0, 1] \cup (2, 3)$ subconjunto da reta com a topologia de subespaço. Então, $[0, 1]$ é aberto em Y , pois é igual a $Y \cap (-1, 2)$ e $(-1, 2)$ é aberto em $\mathbb{R}$ com a topologia usual. Além disso, $[0, 1]$ é fechado, pois $Y - [0, 1] = (2, 3)$ e $(2, 3)$ é aberto em Y , por argumento semelhante ao usado anteriormente.

O teorema a seguir traz uma forma de definir espaços topológicos, utilizando conjuntos fechados, análoga à Definição 1.

Teorema 6.1. Seja X um espaço topológico. As seguintes afirmações são válidas:

- (a) $\emptyset$ e X são fechados.
- (b) Interseções arbitrárias de conjuntos fechados são fechados.
- (c) Uniões finitas de conjuntos fechados são fechados.

Prova:

- (a) $\emptyset$ e X são fechados, pois X e $\emptyset$ são seus complementares, respectivamente, e são abertos, por definição.
- (b) Dada uma coleção de subconjuntos fechados $\{A_\alpha\}_{\alpha \in J}$, então:

$$X - \bigcap_{\alpha \in J} A_\alpha = \bigcup_{\alpha \in J} (X - A_\alpha)$$

De fato,

$$\begin{aligned} x \in X - \bigcap_{\alpha \in J} A_\alpha &\Leftrightarrow x \in X \text{ e } x \notin \bigcap_{\alpha \in J} A_\alpha \Leftrightarrow x \in X \text{ e } \exists \alpha \in J \text{ tal que } x \notin A_\alpha \\ &\Leftrightarrow \exists \alpha \in J \text{ tal que } x \in X \text{ e } x \notin A_\alpha \Leftrightarrow \exists \alpha \in J \text{ tal que } x \in (X - A_\alpha) \Leftrightarrow x \in \bigcup_{\alpha \in J} (X - A_\alpha). \end{aligned}$$

Temos que A_α é um conjunto fechado, para todo α . Logo, $X - A_\alpha$ é um conjunto aberto. Assim, $\bigcup_{\alpha \in J} (X - A_\alpha)$ é uma união arbitrária de conjuntos abertos e, portanto, trata-se de um conjunto aberto. Logo, $X - \bigcap_{\alpha \in J} A_\alpha$ é um conjunto aberto, o que implica que $\bigcap_{\alpha \in J} A_\alpha$ é um conjunto fechado.

(c) Se A_i é fechado para $i \in \{1, \dots, n\}$, então a seguinte igualdade é válida:

$$X - \bigcup_{i=1}^n A_i = \bigcap_{i=1}^n (X - A_i)$$

De fato,

$$\begin{aligned} x \in X - \bigcup_{i=1}^n A_i &\Leftrightarrow x \in X \text{ e } x \notin \bigcup_{i=1}^n A_i \Leftrightarrow x \in X \text{ e } x \notin A_i, \forall i \in \{1, \dots, n\} \Leftrightarrow \forall i \in \\ &\{1, \dots, n\}, x \in X \text{ e } x \notin A_i \Leftrightarrow x \in \bigcap_{i=1}^n (X - A_i). \end{aligned}$$

Como o conjunto A_i é fechado, para todo $i \in \{1, \dots, n\}$, então $X - A_i$ é aberto, o que implica que $\bigcap_{i=1}^n (X - A_i)$ é aberto. Dessa forma, $X - \bigcup_{i=1}^n A_i$ é aberto. Assim,

$\bigcup_{i=1}^n A_i$ é fechado.

Teorema 6.2. *Seja Y um subespaço de X . Então, um conjunto A é fechado em Y se, e somente se, ele é igual à interseção entre Y e um conjunto fechado de X .*

Prova:

($\Leftarrow$) Seja $A = C \cap Y$, com C subconjunto fechado em X . Como C é fechado em X , temos que $X - C$ é aberto em X . Pela definição de subespaço, $(X - C) \cap Y$ é aberto em Y . Vamos mostrar que $(X - C) \cap Y = Y - A$, o que implica que $Y - A$ é aberto e, assim, A é fechado em Y :

$$\begin{aligned} x \in (X - C) \cap Y &\Leftrightarrow x \in (X - C) \text{ e } x \in Y \Leftrightarrow x \in X \text{ e } x \notin C \text{ e } x \in Y \Leftrightarrow x \notin A \text{ e } \\ &x \in Y \Leftrightarrow x \in Y - A. \end{aligned}$$

($\Rightarrow$) Se A é fechado em Y , então $Y - A$ é aberto em Y . Assim, $Y - A = Y \cap U$, com U um conjunto aberto em X . Além disso, $X - U$ é fechado em X . Se é verdade que $A = Y \cap (X - U)$, então A é a interseção de um conjunto fechado de X com Y . Provemos isto:

$$\begin{aligned} x \in A &\Leftrightarrow x \in Y \text{ e } x \notin Y - A \Leftrightarrow x \in Y \text{ e } x \notin Y \cap U \Leftrightarrow x \in Y \text{ e } x \in X \text{ e } \\ &x \notin U \Leftrightarrow x \in Y \cap (X - U). \end{aligned}$$

Teorema 6.3. *Seja Y um subespaço de X . Se A é fechado em Y e Y é fechado em X , então A é fechado em X .*

Prova: Se A é fechado em X , podemos escrevê-lo como $A = B \cap Y$, para algum conjunto B fechado em X . Mas, pelo Teorema 6.1, uma interseção arbitrária de conjuntos fechados em X é um conjunto fechado em X . Logo, $B \cap Y = A$ é fechado em X .

Definição 7. *Seja A um subconjunto de um espaço topológico X . O **interior** de A , denotado por $\text{Int}A$, é união de todos os abertos contidos em A . O **fecho** de A , denotado por $\overline{A}$ é interseção de todos os fechados que contêm A .*

Por definição, $\text{Int}A$ é um aberto, pois é uma união de abertos. Já $\overline{A}$ é fechado, pois é uma interseção de conjuntos fechados.

Segue, pela definição, que $\text{Int}A \subset A \subset \overline{A}$. Além disso, se A é aberto, então é um conjunto aberto contido (não propriamente) em A . Logo, $A \subset \text{Int}A$. Assim, $A = \text{Int}A$. Se A é fechado, então é um fechado que contém (não propriamente) A e, assim, a interseção dos fechados contendo A se restringe ao A . Logo, $\overline{A} \subset A$. Em outras palavras, se $x \in \overline{A}$, então x pertence a todos os fechados contendo A . Como A é um desses fechados, $x \in A$. Assim, $\overline{A} = A$.

Teorema 7.1. *Seja Y um subespaço de X , A um subconjunto de Y e $\overline{A}$ o fecho de A em X . Então, o fecho de A em Y é igual a $\overline{A} \cap Y$.*

Prova: Chamemos de B o fecho de A em Y . O conjunto $\overline{A}$ é fechado em X , então, pelo Teorema 6.2, $\overline{A} \cap Y$ é fechado em Y . Como $A \subset \overline{A}$ e $A \subset Y$, temos $A \subset \overline{A} \cap Y$. Assim, $\overline{A} \cap Y$ é um conjunto fechado em Y que contém A . Como B é igual à interseção de todos os subconjuntos fechados de Y contendo A , B está contido em todos esses conjuntos fechados. Temos que $\overline{A} \cap Y$ é um deles. Assim, $B \subset \overline{A} \cap Y$. Reciprocamente, como B é fechado em Y , temos pelo Teorema 6.2, que $B = C \cap Y$, sendo C um conjunto fechado em X . Então, C é um conjunto fechado contendo A (pois $A \subset B \subset C$). Como $\overline{A}$ é a interseção de todos os conjuntos fechados em X contendo A , temos que $\overline{A} \subset C$. Assim,

$$x \in \overline{A} \cap Y \implies x \in \overline{A} \text{ e } x \in Y \implies x \in C \text{ e } x \in Y \implies x \in C \cap Y = B$$

Observação 7.1. *Sejam A e B conjuntos. Se $A \cap B \neq \emptyset$, diremos que A intersecta B . Se B é um aberto contendo x , diremos que B é uma vizinhança de x .*

Teorema 7.2. *Seja A um subconjunto do espaço topológico X .*

- (a) *Então $x \in \overline{A}$ se, e somente se, toda vizinhança U de x intersecta A .*
- (b) *Supondo que a topologia de X é dada por uma base, então $x \in \overline{A}$ se, e somente se, todo elemento básico B que contém x intersecta A .*

Prova:

- (a) Reescrevendo de acordo com a contrapositiva: $x \notin \overline{A}$ se, e somente se, existe uma vizinhança U de x que não intersecta A .
- ($\Rightarrow$) Se $x \notin \overline{A}$, então $x \in X - \overline{A}$. Mas, como $\overline{A}$ é fechado, temos que $X - \overline{A}$ é aberto. Se $U = X - \overline{A}$, então U é uma vizinhança de x que não intersecta A , visto que $A \subset \overline{A}$.
- ($\Leftarrow$) Se existe uma vizinhança U que contém x e não intersecta A , então $X - U$ é um conjunto fechado contendo A . Como $\overline{A}$ é a interseção dos conjuntos fechados contendo A , então $\overline{A} \subset X - U$. Assim, se $x \notin X - U$, temos que $x \notin \overline{A}$.
- (b) ($\Rightarrow$) Por (a), temos que se $x \in \overline{A}$, então todo conjunto aberto U contendo x intersecta A . Isso é válido para os elementos básicos, visto que são conjuntos abertos.
- ($\Leftarrow$) Se todo elemento básico B que contém x intersecta A , então isso acontece para qualquer conjunto aberto U que contém x , pois U contém um elemento básico que contém x . Assim, $x \in \overline{A}$, por (a).

Exemplo 7.1. Considere $\mathbb{R}$ munido da topologia usual:

- Se $A = (0, 1]$, então $\overline{A} = [0, 1]$, pois toda vizinhança de 0 intersecta A . O mesmo acontece para os demais pontos contidos no intervalo, mas não para os pontos que estão fora.
- Seja $B = \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{Z}_+ \right\}$. Note que toda vizinhança de 0 intersecta B , de modo que $\overline{B} = \{0\} \cup B$.

Definição 8. Sejam X um espaço topológico e $A \subset X$. Dizemos que $x \in X$ é um **ponto limite ou ponto de acumulação** de A se toda vizinhança de x intersecta A em algum ponto distinto de x . Denotamos por A' o conjunto de todos os pontos limites de A .

Equivalentemente, $x \in X$ é ponto limite de $A \subset X$ se $x \in \overline{A - \{x\}}$. De fato, nessas condições, pelo Teorema 7.2, podemos afirmar que toda vizinhança de x intersecta $A - \{x\}$. Assim, toda vizinhança de x intersecta A em algum ponto além do x .

Exemplo 8.1. Considere $\mathbb{R}$ munido da topologia usual:

- Se $A = (0, 1]$, então $A' = [0, 1]$, pois dado $x \in A'$, toda vizinhança de x intersecta A em algum ponto distinto de x .
- Se $B = \{0\} \cup (1, 2)$, então $B' = [1, 2]$. O zero não é ponto limite de B , pois $(-1, 1)$ é uma vizinhança de 0 que não intersecta B em um ponto diferente de 0.

Teorema 8.1. Seja A um subconjunto de um espaço topológico X . Então $\overline{A} = A \cup A'$.

Prova:

($\subset$) Se $x \in A'$, toda vizinhança de x intersecta A . Pelo Teorema 7.2, $x \in \overline{A}$. Assim, $A' \subset \overline{A}$. Pela definição de fecho, $A \subset \overline{A}$. Assim, $A \cup A' \subset \overline{A}$.

($\supset$) Se $x \in \overline{A}$, temos as possibilidades:

- $x \in A$: então, $x \in A \cup A'$;
- $x \notin A$: como $x \in \overline{A}$, toda vizinhança U de x intersecta A . Mas $x \notin A$, então, concluímos que U intersecta A em um ponto distinto de x . Assim, $x \in A'$ e, consequentemente, $x \in A \cup A'$.

Portanto, $\overline{A} = A \cup A'$.

Corolário 8.1.1. *Um subconjunto A de um espaço topológico é fechado se, e somente se, ele contém todos os seus pontos limites.*

Prova:

($\Rightarrow$) Se A é fechado, sabemos que $A = \overline{A}$. Como, pelo Teorema 8.1, $A' \subset \overline{A}$, temos que $A' \subset A$.

($\Leftarrow$) Se $A' \subset A$, temos que $A \cup A' = A$. Pelo Teorema 8.1, $A \cup A' = \overline{A}$, logo $A = \overline{A}$. Portanto, A é fechado.

Definição 9. *Um espaço topológico X é um **espaço de Hausdorff** se para quaisquer x_1, x_2 pontos distintos de X , existem vizinhanças U_1 e U_2 de x_1 e x_2 , respectivamente, tais que $U_1 \cap U_2 = \emptyset$.*

Exemplo 9.1. *Seja X um espaço topológico com a topologia discreta. Então X é um espaço de Hausdorff. De fato, dados dois pontos distintos x_1 e x_2 de X , existem $U_1 = \{x_1\}$ e $U_2 = \{x_2\}$ vizinhanças de x_1 e x_2 disjuntas.*

Exemplo 9.2. $\mathbb{R}^2$ é um espaço de Hausdorff. De fato, dados $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^2$, tomando as vizinhanças:

- $U_1 = \{a : |a - x_1| < r_1\};$
- $U_2 = \{a : |a - x_2| < r_2\}$

de x_1 e x_2 , respectivamente. Seja r igual à distância entre x_1 e x_2 . Tome $r_1 = r_2 = \frac{r}{2}$. Então, $U_1 \cap U_2 = \emptyset$.

Teorema 9.1. *Todo conjunto finito num espaço de Hausdorff é fechado.*

Prova: Segundo o Teorema 6.1, toda união finita de conjuntos fechados é um conjunto fechado. Portanto, basta mostrar que todo conjunto unitário $\{x\}$ é fechado, pois podemos considerar que um conjunto finito é uma união de conjuntos unitários contendo cada um de seus elementos.

Se $x_1, x_2 \in X$ e $x_1 \neq x_2$, então x_1 e x_2 têm vizinhanças U_1 e U_2 , respectivamente, disjuntas, por tratar-se de um espaço de Hausdorff. Como U_2 não intersecta $\{x_1\}$ (pois U_2 é disjunto de U_1), o ponto x_2 não pertence ao fecho de $\{x_1\}$ (segundo o Teorema 7.2). Portanto, o fecho do conjunto $\{x_1\}$ é igual a $\{x_1\}$. Consequentemente, $\{x_1\}$ é fechado.

Teorema 9.2. *Sejam X um espaço topológico e $Y \subset X$. Se X é um espaço de Hausdorff, então Y também é de Hausdorff.*

Prova: Dados $x_1, x_2 \in Y$ pontos distintos, existem V_1, V_2 vizinhanças disjuntas de x_1 e x_2 , respectivamente, em X , tais que $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. Temos que $A_1 = X \cap V_1$ e $A_2 = X \cap V_2$ são vizinhanças de x_1, x_2 , respectivamente, em Y , tais que $A_1 \cap A_2 = \emptyset$. Logo, Y é de Hausdorff.

A próxima definição é encontrada na Teoria de Conjuntos e servirá para abordarmos a definição de funções contínuas.

Definição 10. *Sejam X e Y espaços topológicos e $f : X \rightarrow Y$ uma função. Se $U \subset X$ e $V \subset Y$, o conjunto*

$$f^{-1}(V) = \{x \in X \mid f(x) \in V\}$$

é chamado imagem inversa ou pré-imagem de V . E o conjunto

$$f(U) = \{y \in Y \mid \exists x \in U \text{ tal que } y = f(x)\}$$

é chamado imagem direta de U .

Definição 11. *Sejam X e Y espaços topológicos. A função $f : X \rightarrow Y$ é contínua se para cada aberto $V \subset Y$, o conjunto $f^{-1}(V)$ é aberto em X .*

Se o espaço Y é dado por uma base $\mathcal{B}$, podemos expressar a continuidade da função f por meio dos elementos básicos. Se $V \subset Y$ é aberto, então, pelo Lema 2.1, $V = \bigcup_{\alpha \in J} B_\alpha$, onde, para todo $\alpha \in J$, B_α é um elemento básico.

Assim,

$$f^{-1}(V) = f^{-1}\left(\bigcup_{\alpha \in J} B_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha \in J} f^{-1}(B_\alpha)$$

Ou seja, $f^{-1}(V)$ é um conjunto aberto se a pré-imagem de cada B_α é aberto.

Teorema 11.1. *Sejam X e Y espaços topológicos e $f : X \longrightarrow Y$ uma função. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

- (1) f é contínua.
- (2) Para cada subconjunto A de X , temos $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.
- (3) Se B é um conjunto fechado em Y , então $f^{-1}(B)$ é um conjunto fechado.
- (4) Para cada $x \in X$ e cada vizinhança V de $f(x)$, existe uma vizinhança U de x tal que $f(U) \subset V$.

Prova: Como este teorema traz múltiplas equivalências, iremos mostrar que $(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (1)$ e $(1) \Rightarrow (4) \Rightarrow (1)$.

- $(1) \Rightarrow (2)$. Seja $A \subset X$. Queremos mostrar que se $f(x) \in \overline{f(A)}$, então $f(x) \in \overline{f(A)}$. Para termos $f(x) \in \overline{f(A)}$, devemos tomar $x \in \overline{A}$. Para concluir, devemos mostrar que toda vizinhança de $f(x)$ intersecta $f(A)$. Tomando V vizinhança de $f(x)$, como f é contínua, $f^{-1}(V)$ é um aberto em X contendo x . Como $x \in \overline{A}$, temos $f^{-1}(V) \cap A \neq \emptyset$. Seja $x_1 \in f^{-1}(V) \cap A$, então $f(x_1) \in V$ (pois $f(f^{-1}(V)) \subset V$) e $f(x_1) \in f(A)$. Assim, V intersecta $f(A)$ e, portanto, $f(x) \in \overline{f(A)}$.
- $(2) \Rightarrow (3)$. Seja B fechado em Y e $A = f^{-1}(B)$. Temos que $f(A) = f(f^{-1}(B)) \subset B$. Se $x \in \overline{A}$, então

$$f(x) \in \overline{f(A)} \subset \overline{f(A)} \subset \overline{B} = B$$

A igualdade segue do fato de B ser fechado. A primeira inclusão vem de (2) e a segunda é verdadeira pois se $y \in \overline{f(A)}$, então qualquer vizinhança U de y intersecta $f(A)$. Como $f(A) \subset B$, segue que qualquer vizinhança de y intersecta B e, assim, y pertence a $\overline{B}$.

Com isso, dado $x \in \overline{A}$, temos $f(x) \in B$, de modo que $x \in f^{-1}(B) = A$. Assim, $\overline{A} \subset A$, logo $A = \overline{A}$. Portanto, A é fechado em X .

- $(3) \Rightarrow (1)$. Seja $V \subset Y$ um aberto, temos que $B = Y - V$ é fechado. Então,

$$f^{-1}(B) = f^{-1}(Y) - f^{-1}(V) = X - f^{-1}(V)$$

Vamos verificar a primeira igualdade:

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(B) &\Leftrightarrow f(x) \in B \Leftrightarrow f(x) \in Y - V \Leftrightarrow f(x) \in Y \text{ e } f(x) \notin V \Leftrightarrow \\ &x \in f^{-1}(Y) \text{ e } x \notin f^{-1}(V) \Leftrightarrow x \in f^{-1}(Y) - f^{-1}(V) \end{aligned}$$

Como, por hipótese, $f^{-1}(B)$ é fechado em X , temos que $f^{-1}(V)$ é aberto, pois é seu complementar.

- (1) $\Rightarrow$ (4). Seja $x \in X$ e V uma vizinhança de $f(x)$. Como f é contínua, $U = f^{-1}(V)$ é aberto em X , sendo uma vizinhança de x , uma vez que $f(x) \in V$. Além disso, $f(f^{-1}(V)) = f(U) \subset V$, como desejado.
- (4) $\Rightarrow$ (1). Seja V um aberto em Y e $x \in f^{-1}(V)$. Temos que $f(x) \in V$. Por hipótese, existe uma vizinhança U_x de x tal que $f(U_x) \subset V$. Assim, $U_x \subset f^{-1}(V)$. Verifiquemos isto:

$$x \in U_x \implies f(x) \in f(U_x) \implies f(x) \in V \implies x \in f^{-1}(V)$$

Afirmção: $f^{-1}(V)$ pode ser visto como a união dos conjuntos abertos U_x . De fato, por hipótese,

$$x \in f^{-1}(V) \Leftrightarrow x \in U_x \Leftrightarrow x \in \bigcup U_x$$

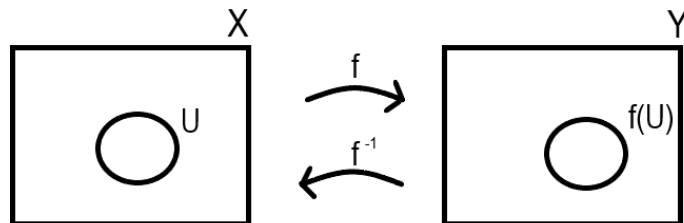
Portanto, $f^{-1}(V)$ é aberto, o que implica que f é contínua.

Definição 12. *Sejam X e Y espaços topológicos e $f : X \longrightarrow Y$ uma bijeção. A função f é um **homeomorfismo** se ela e sua inversa f^{-1} são contínuas.*

Se f^{-1} é contínua, então a imagem inversa de cada aberto $U \subset X$ sob a função f^{-1} é um conjunto aberto. A imagem inversa de U em f^{-1} é o conjunto $f(U)$. Portanto, um homeomorfismo é uma bijeção $f : X \longrightarrow Y$ tal que $f(U)$ é aberto em Y se, e somente se, U é aberto em X .

A partir da noção de homeomorfismo, podemos definir **invariantes topológicos**, os quais são propriedades preservadas por homeomorfismo. Isto é, se X é homeomorfo a Y , então Y tem os mesmos invariantes topológicos que X .

Figura 1: Representação de um homeomorfismo.



Exemplo 12.1. A função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 3x + 1$ é um homeomorfismo. De fato, seja $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(y) = \frac{1}{3}(y - 1)$. Temos que

- $f(g(y)) = 3\left[\frac{1}{3}(y - 1)\right] + 1 = y - 1 + 1 = y;$
- $g(f(x)) = \frac{1}{3}[(3x + 1) - 1] = x + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = x.$

Assim, $g = f^{-1}$. Como f^{-1} é uma função, temos que f é uma bijeção. Além disso, f e g são contínuas, por serem polinômios.

O teorema a seguir nos mostra regras para a construção de funções contínuas.

Teorema 12.1. *Sejam X, Y e Z espaços topológicos.*

(a) (Função constante) Se $f : X \rightarrow Y$ é dada por $f(x) = y_0$ para todo $x \in X$, então f é contínua.

(b) (Função inclusão) Se A é um subespaço de X , então a função $j : A \rightarrow X$ dada por $j(x) = x$, para todo $x \in A$, é contínua.

(c) (Função composta) Se $f : X \rightarrow Y$ e $g : Y \rightarrow Z$ são contínuas, então $g \circ f : X \rightarrow Z$ é contínua.

(d) (Restrição de domínio) Se $f : X \rightarrow Y$ é contínua e $A \subset X$, então $f|_A : A \rightarrow Y$ é contínua.

(e) (Restrição ou expansão de contradomínio) Seja $f : X \rightarrow Y$ uma aplicação contínua. Se $f(X) \subset Z \subset Y$, então a aplicação $g : X \rightarrow Z$ é contínua. Se $Y \subset Z$, então $h : X \rightarrow Z$ é contínua.

(f) (Formulação local de continuidade) Seja $f : X \rightarrow Y$ uma aplicação. Se $X = \bigcup U_\alpha$, com U_α aberto e $f|_{U_\alpha}$ contínua para todo α , então f é contínua. (MUNKRES, 2000, p. 107)

Lema 12.1. (Lema da Colagem) Seja $X = A \cup B$, com A e B fechados. Sejam $f : A \rightarrow Y$ e $g : B \rightarrow Y$ funções contínuas. Se $f(x) = g(x)$ para todo $x \in A \cap B$, então a função $h : X \rightarrow Y$, dada por

$$\begin{cases} h(x) = f(x), & \text{se } x \in A \\ h(x) = g(x), & \text{se } x \in B \end{cases}$$

é contínua. (MUNKRES, 2000, p.108)

Definição 13. Seja X um espaço topológico. Uma **separação** de X é um par U, V de conjuntos abertos não vazios tais que $U \cap V = \emptyset$ e $U \cup V = X$. O espaço X é **conexo** se não existir uma separação de X .

Outro modo de formular a definição de conexidade é o seguinte: um espaço X é conexo se, e somente se, os únicos subconjuntos de X que são tanto abertos como fechados em X são o conjunto vazio e o próprio X .

Seja X um espaço conexo. Vamos mostrar que essas duas definições são equivalentes:

Suponhamos, por absurdo, que existe $A \subset X$ tal que $A \neq X$ e $A \neq \emptyset$ que é aberto e fechado em X . Assim, $U = A$ e $V = X - A$ constituem uma separação de X , pois são não vazios, disjuntos e $U \cup V = X$. Isso é uma contradição com a hipótese.

Reciprocamente, suponhamos, por absurdo, que existe uma separação de X . Sejam U e V uma separação de X . Então, $U \neq \emptyset$ e $U \neq X$, pois se $U = X$, então $U \cap V = V \neq \emptyset$ (não seria uma separação) e temos que U é aberto (definição de separação) e fechado (pois V , seu complementar, é aberto) em X . Isso é uma contradição com a hipótese.

Observação 13.1. *Se $f : X \rightarrow Y$ é um homeomorfismo e X é conexo, então Y é conexo. Dizemos, dessa forma, que conexidade é uma propriedade topológica. De fato, suponhamos que Y não é conexo, então existem U e V conjuntos formando uma separação de Y . Mas $f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V) = f^{-1}(Y) = X$. Como $f^{-1}(U)$ e $f^{-1}(V)$ são abertos (pois f é contínua) e disjuntos (pois U e V são disjuntos), eles formam uma separação de X . Mas isso é uma contradição com o fato de X ser conexo. Logo, Y é conexo.*

Lema 13.1. *Se Y é um subespaço de X , uma separação de Y é um par de conjuntos não vazios A e B , com $A \cap B = \emptyset$ e $A \cup B = Y$, tais que nenhum dos dois contém um ponto limite do outro. O espaço Y é conexo se não existe separação de Y .*

Exemplo 13.1. *Seja X um espaço topológico munido com a topologia trivial. Como os únicos subconjuntos que são abertos e fechados são o vazio e o próprio X , temos que X é conexo.*

Exemplo 13.2. *Seja Y o subespaço $[-1, 0) \cup (0, 1]$ de $\mathbb{R}$. Os conjuntos $[-1, 0)$ e $(0, 1]$ são não vazios, disjuntos e abertos em Y (são abertos em Y pois $[-1, 0) = (-2, 0) \cap Y$ e $(0, 1] = (0, 2) \cap Y$). Assim, eles formam uma separação de Y . Notemos que nenhum dos dois contém um ponto limite do outro (o ponto zero é ponto limite de ambos, mas não está contido em nenhum deles). Assim, $[-1, 0)$ e $(0, 1]$ formam uma separação de Y .*

Exemplo 13.3. *Seja X o subespaço $[-1, 1]$ de $\mathbb{R}$. Os conjuntos $[-1, 0]$ e $(0, 1]$ são disjuntos e não vazios, mas eles não formam uma separação de X , pois $0 \in [-1, 0]$ e 0 é ponto limite de $(0, 1]$.*

Exemplo 13.4. *O conjunto $\mathbb{Q}$ não é conexo. Os únicos subespaços conexos de $\mathbb{Q}$ são os conjuntos unitários. De fato, são conexos, pois se tomarmos $X = \{x\}$ subespaço de $\mathbb{Q}$, os únicos subconjuntos de X que são abertos e fechados em X ao mesmo tempo são o vazio e o próprio X . E são os únicos, pois, se Y é um subespaço de $\mathbb{Q}$ contendo dois pontos distintos*

p e q , então existe um irracional a entre p e q , tal que $Y = [Y \cap (-\infty, a)] \cup [Y \cap (a, +\infty)]$. Se $p < q$, então $p \in Y \cap (-\infty, a)$ e $q \in Y \cap (a, +\infty)$. Mas, $Y \cap (-\infty, a)$ e $Y \cap (a, +\infty)$ são abertos, não vazios e a sua união é igual ao Y . Logo, eles constituem uma separação de Y e, assim, este é desconexo.

Lema 13.2. *A imagem de um espaço conexo sob uma aplicação contínua é um conjunto conexo.*

Prova: Seja $f : X \rightarrow Y$ uma aplicação contínua, com X um espaço conexo. Devemos mostrar que $Z = f(X)$ é conexo. Para isso, podemos tomar a aplicação $g : X \rightarrow Z$, a qual é contínua (pelo Teorema 12.1) e sobrejetora.

Suponhamos, por absurdo, que A e B formam uma separação de Z . Então, $g^{-1}(A)$ e $g^{-1}(B)$ são subconjuntos disjuntos de X , pois se existe $x \in g^{-1}(A) \cap g^{-1}(B)$, então existe $y \in A \cap B$ tal que $y = g(x)$ (impossível, pois A e B são disjuntos). Além disso, $g^{-1}(A) \cup g^{-1}(B) = X$, pois

$$g^{-1}(Z) = X \Rightarrow g^{-1}(A \cup B) = g^{-1}(A) \cup g^{-1}(B) = X$$

Temos também que $g^{-1}(A)$ e $g^{-1}(B)$ são abertos (pois g é contínua), e que são não-vazios, pois g é sobrejetiva.

Dessa forma, $g^{-1}(A)$ e $g^{-1}(B)$ formam uma separação de X , o que é uma contradição com a hipótese de que X é conexo. Logo, Z é conexo.

Observação 13.2. *Conexidade é um invariante topológico, isto é, se X é um espaço conexo e $f : X \rightarrow Y$ é um homeomorfismo, então Y é conexo. De fato, como f é bijetiva, então $f(X) = Y$. Pelo Teorema 13.2, temos que Y deve ser conexo.*

Definição 14. *Seja $\mathcal{A}$ uma coleção de subconjuntos de um espaço X . Se a união dos elementos de $\mathcal{A}$ é igual a X , dizemos que $\mathcal{A}$ é uma **cobertura** de X . Se $\mathcal{A}$ é uma cobertura formada por abertos em X , dizemos que $\mathcal{A}$ é uma **cobertura aberta** de X .*

Definição 15. *Dada $\mathcal{A}$ uma cobertura aberta de X , se existe uma subcoleção finita de $\mathcal{A}$ que cobre X (isto é, cuja união dos elementos é igual a X), então dizemos que X é **compacto**.*

Exemplo 15.1. *O subespaço*

$$X = \{0\} \cup \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{Z}\}$$

de $\mathbb{R}$ é compacto. De fato, seja $\mathcal{A}$ uma cobertura aberta de X , deve existir $U \in \mathcal{A}$ tal que $0 \in U$. Logo, U contém infinitos pontos de X , o que implica que fora de U existem finitos pontos de X ; para cada um destes pontos, escolha um elemento U_{i_j} de $\mathcal{A}$ que o contém. Logo, $\{U, U_{i_1}, \dots, U_{i_k}\}$ cobre X .

Exemplo 15.2. *Se X é finito, então é compacto. De fato, se X é finito, então ele contém finitos subconjuntos. Logo, qualquer cobertura aberta $\mathcal{A}$ de X é finita.*

Definição 16. *Se Y é um subespaço de X , uma coleção $\mathcal{A}$ de subconjuntos de X **cobre** Y se a união dos elementos de $\mathcal{A}$ contém Y .*

Lema 16.1. *Seja $Y \subset X$. Então, Y é compacto se, e somente se, toda cobertura de Y por abertos de X (coleção de abertos de X cuja união contém Y) possui uma subcoleção finita que cobre Y (coleção finita cuja união contém Y). (MUNKRES, 2000, p. 164).*

Teorema 16.1. *Todo subconjunto fechado em um espaço compacto é compacto. (MUNKRES, 2000, p. 165)*

Teorema 16.2. *Todo subespaço compacto num espaço de Hausdorff é fechado. (MUNKRES, 2000, p. 165)*

Teorema 16.3. *A imagem de um conjunto compacto por uma aplicação contínua é um conjunto compacto.*

Prova: Sejam X um espaço compacto e $f : X \rightarrow Y$ uma aplicação contínua. Devemos mostrar que $f(X)$ é compacto. Seja $\mathcal{A} = \{A_\alpha\}_{\alpha \in J}$ uma cobertura aberta de $f(X)$. Então, como f é contínua, $\{f^{-1}(A_\alpha) : \alpha \in J\}$ é uma cobertura aberta de X . Como X é compacto, existe uma subcoleção finita, dessa cobertura,

$$\{f^{-1}(A_{\alpha_1}), \dots, f^{-1}(A_{\alpha_n})\}$$

que cobre X . Portanto,

$$\{A_{\alpha_1}, \dots, A_{\alpha_n}\}$$

é uma subcoleção finita de $\{A_\alpha\}_{\alpha \in J}$ que cobre $f(X)$.

Observação 16.1. *Compacidade é um invariante topológico, isto é, se X é um espaço compacto e $f : X \rightarrow Y$ é um homeomorfismo, então Y é compacto. De fato, como f é bijetiva, então $f(X) = Y$. Pelo Teorema 16.3, temos que Y deve ser compacto.*

Teorema 16.4. *Seja $f : X \rightarrow Y$ uma bijeção contínua. Se X é compacto e Y é de Hausdorff, então f é um homeomorfismo.*

Prova: Devemos verificar que f^{-1} é contínua, através do Teorema 11.1. Para isso, vamos mostrar que a imagem de um subconjunto fechado via f é um conjunto fechado, o que é equivalente a afirmar que a pré-imagem, via f^{-1} , de um subconjunto fechado é um conjunto fechado.

Seja $A \subset X$ fechado. Pelo Teorema 16.1, A é compacto. Segue que $f(A)$ é compacto, pelo Teorema 16.3. Como Y é de Hausdorff, então $f(A)$ é fechado, pelo Teorema 16.2.

2.2 Homotopia e Grupo Fundamental

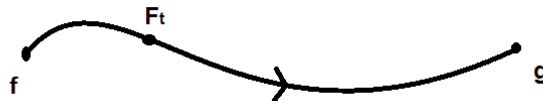
Durante toda esta seção, denotamos por I o intervalo $[0, 1]$.

Definição 17. *Sejam X e Y espaços topológicos e sejam $f : X \rightarrow Y$ e $g : X \rightarrow Y$ aplicações contínuas. Então, f é **homotópica** a g se existe uma aplicação contínua $F : X \times I \rightarrow Y$ tal que $F(x, 0) = f(x)$ e $F(x, 1) = g(x)$ para todo $x \in X$. F é chamada **homotopia** entre f e g .*

Notação: se f é homotópica a g , escrevemos $f \simeq g$.

Uma homotopia pode ser entendida como uma família contínua a um parâmetro de aplicações de X em Y . A continuidade da família significa que $(x, t) \mapsto F(x, t) = F_t(x)$ é uma aplicação contínua (LIMA, 2012). Na Figura 2.2, cada ponto da curva representa uma aplicação F_t (dentre elas, estão $f = F_0$ e $g = F_1$).

Figura 2: Homotopia entre f e g .



Fonte: Elaborado pela autora, 2019.

Definição 18. *Seja $f : I \rightarrow X$ uma aplicação contínua tal que $f(0) = x_0$ e $f(1) = x_1$. Chamamos f um **caminho** em X e dizemos que x_0 é o **ponto inicial** e x_1 é o **ponto final** do caminho f .*

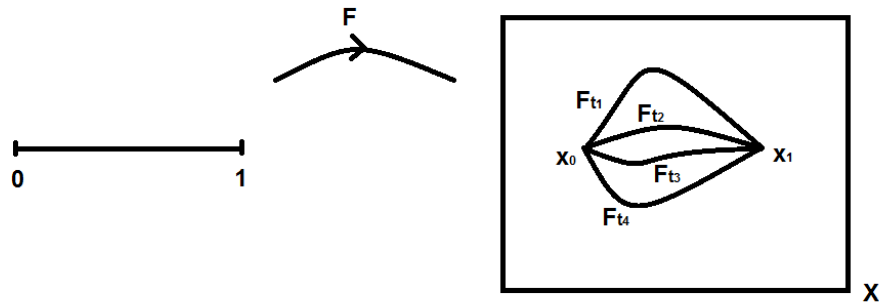
Definição 19. *Dois caminhos $f : I \rightarrow X$ e $g : I \rightarrow X$ são **homotópicos** se ambos começam em x_0 e terminam em x_1 e se existe uma aplicação contínua $F : I \times I \rightarrow X$ tal que*

$$(i) \quad F(s, 0) = f(s) \text{ e } F(s, 1) = g(s);$$

$$(ii) \quad F(0, t) = x_0 \text{ e } F(1, t) = x_1$$

*para todo $s, t \in I$. F é chamada **homotopia de caminhos** entre f e g . Se f é um caminho homotópico a g , escrevemos $f \simeq_p g$.*

Figura 3: Homotopia de caminhos.



Fonte: Elaborado pela autora, 2019.

Lema 19.1. *As relações $\simeq$ e $\simeq_p$ são de equivalência. (MUNKRES, 2000, p. 324)*

A classe de equivalência do caminho f será denotada por $[f]$.

Exemplo 19.1. *Seja $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ duas aplicações contínuas. A aplicação $F(x, t) = (1 - t)f(x) + tg(x)$ é uma homotopia entre elas e é chamada homotopia da linha reta (pois ela liga o ponto $f(x)$ ao $g(x)$ por meio de um segmento de reta). Vamos verificar que F é, de fato, uma homotopia:*

$$F(x, 0) = f(x) - 0f(x) + 0g(x) = f(x)$$

$$F(x, 1) = f(x) - 1f(x) + 1g(x) = g(x)$$

Além disso, se f e g são caminhos de x_0 a x_1 , então F é uma homotopia de caminhos. De fato, como $f(0) = g(0) = x_0$ e $f(1) = g(1) = x_1$, então

$$F(0, t) = f(0) - tf(0) + tg(0) = f(0) = x_0$$

$$F(1, t) = f(1) - tf(1) + tg(1) = f(1) = x_1$$

Mais geralmente, seja $A \subset \mathbb{R}^n$ um subespaço convexo (isto é, dados $a, b \in A$, o segmento de reta unindo a e b está contido em A). Se f e g são caminhos em A de x_0 a x_1 , então eles são homotópicos, pois a imagem da homotopia da linha reta entre eles é composta por segmentos de reta ligando $f(x)$ a $g(x)$ para todo $x \in X$, os quais estão contidos em A .

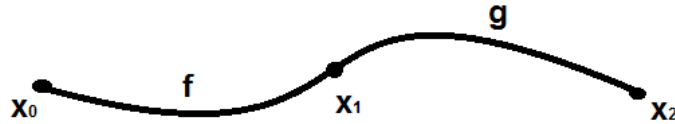
Definição 20. *Seja f um caminho em X de x_0 a x_1 e g um caminho de x_1 a x_2 . O produto $f * g$ é o caminho h dado por*

$$h(s) = \begin{cases} f(2s), & \text{se } s \in [0, \frac{1}{2}] \\ g(2s - 1), & \text{se } s \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

que vai de x_0 a x_2 .

Pelo Lema 12.1, a função h é bem definida e contínua. Podemos pensar que a primeira metade de h é o caminho f e a segunda metade é o caminho g , conforme representado na figura a seguir.

Figura 4: Produto entre f e g .



Fonte: Elaborado pela autora, 2019.

Podemos definir a operação $*$ no conjunto das classes de equivalência de homotopia de caminhos:

$$[f] * [g] = [f * g] \quad (4)$$

Vamos verificar que essa operação está bem definida. Sejam f, f', g, g' caminhos em X , F uma homotopia de caminhos entre f e f' e G uma homotopia de caminhos entre g e g' . Considere

$$H(s, t) = \begin{cases} F(2s, t), & \text{se } s \in [0, \frac{1}{2}] \\ G(2s - 1, t), & \text{se } s \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

H é contínua pelo Lema 12.1; está bem definida, pois $F(2 \cdot \frac{1}{2}, t) = F(1, t) = x_1 = G(0, t) = G(2 \cdot \frac{1}{2} - 1, t)$, para todo $t \in I$. Temos que H é uma homotopia de caminhos entre $f * g$ e $f' * g'$, pois

$$H(s, 0) = \begin{cases} F(2s, 0) = f(2s), & \text{se } s \in [0, \frac{1}{2}] \\ G(2s - 1, 0) = g(2s - 1), & \text{se } s \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases} = f * g(s);$$

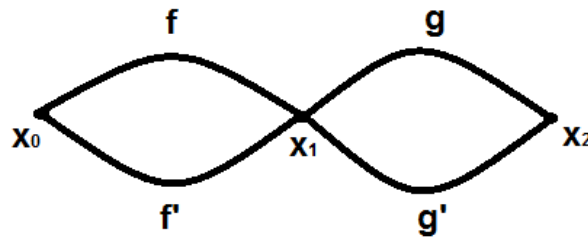
$$H(s, 1) = \begin{cases} F(2s, 1) = f'(2s), & \text{se } s \in [0, \frac{1}{2}] \\ G(2s - 1, 1) = g'(2s - 1), & \text{se } s \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases} = f' * g'(s);$$

$$H(0, t) = F(0, t) = x_0;$$

$$H(1, t) = G(1, t) = x_2$$

Assim, a operação $*$ no conjunto de classes de homotopia está bem definida.

Figura 5: Produto entre classes de equivalência.



Fonte: Elaborado pela autora, 2019.

É importante frisar que o produto $[f] * [g]$ está definido apenas para as classes $[f], [g]$ tais que $f(1) = g(0)$. Essa operação satisfaz as propriedades listadas no enunciado do teorema a seguir, chamadas de propriedades grupoide de $*$, as quais são semelhantes às que encontramos na definição de grupo.

Teorema 20.1. *A operação $*$ tem as seguintes propriedades:*

(1) *Associatividade: Se $[f] * ([g] * [h])$ está definida, então $([f] * [g]) * [h]$ também está e*

$$[f] * ([g] * [h]) = ([f] * [g]) * [h];$$

(2) *Identidade à direita e à esquerda: Dado $x \in X$, seja $e_x : I \rightarrow X$ o caminho que leva todos os pontos de I para o ponto $x \in X$. Se f é um caminho de x_0 a x_1 , então*

$$[f] * [e_{x_1}] = [f] \text{ e } [e_{x_0}] * [f] = [f];$$

(3) *Inverso: Seja f um caminho em X de x_0 a x_1 e seja $\bar{f}$ o caminho definido por $\bar{f}(s) = f(1 - s)$, que é chamado inverso de f . Então,*

$$[f] * [\bar{f}] = [e_{x_0}] \text{ e } [\bar{f}] * [f] = [e_{x_1}].$$

Prova: Vamos assumir os seguintes fatos (MUNKRES, 2000, p. 327):

- (i) Se $k : X \rightarrow Y$ é uma aplicação contínua e se F é uma homotopia de caminhos em X entre f e g , então $k \circ F$ é uma homotopia de caminhos entre $k \circ f$ e $k \circ g$.

- (ii) Se $k : X \longrightarrow Y$ é uma aplicação contínua e se f e g são caminhos em X com $f(1) = g(0)$, então

$$k \circ (f * g) = (k \circ f) * (k \circ g)$$

- (2) Seja e_0 o caminho constante em I que leva todos os pontos em 0 e seja $i : I \longrightarrow I$ a aplicação identidade, que é um caminho em I com ponto inicial 0 e ponto final 1. Então, $e_0 * i$ é um caminho em I de 0 a 1, pois a primeira parte do produto é e_0 (constante em 0) e segunda parte é i (que vai de 0 a 1).

Como I é convexo, existe uma homotopia de caminhos G em I entre os caminhos i e $e_0 * i$. Assim, por (i), temos que $f \circ G$ é uma homotopia de caminhos em X entre $f \circ i$ e $f \circ (e_0 * i)$. Além disso,

- $f \circ i = f$;
- por (ii), temos $f \circ (e_0 * i) = (f \circ e_0) * (f \circ i) = e_{x_0} * f$. A última igualdade segue do seguinte fato: $f \circ e_0(y) = f(e_0(y)) = f(0) = x_0$. Assim, $f \circ e_0$ é o caminho constante que leva todos os pontos em x_0 .

Por (4), temos $[e_{x_0} * f] = [e_{x_0}] * [f]$. Como $e_{x_0} * f$ e f são caminhos homotópicos, estão na mesma classe, isto é, $[e_{x_0}] * [f] = [f]$.

Analogamente, seja e_1 o caminho constante em I que leva todos os pontos em 1 e seja $i : I \longrightarrow I$ a aplicação identidade. Então, $i * e_1$ é um caminho em I de 0 a 1.

Como I é convexo, existe uma homotopia de caminhos H em I entre i e $e_1 * i$. Assim, temos que $f \circ H$ é uma homotopia de caminhos em X entre $f \circ i = f$ e $f \circ (i * e_1) = f * e_1$. Assim, $[f] * [e_{x_1}] = [f]$.

- (3) Notemos que o caminho inverso a i é $\bar{i}(s) = 1 - s$. De fato, $i(0) = 0$, $i(1) = 1$, $\bar{i}(0) = 1 - 0 = 1$ e $\bar{i}(1) = 1 - 1 = 0$. Assim, $i * \bar{i}$ tem como primeira metade o caminho i (que vai de 0 a 1) e como segunda metade o caminho $\bar{i}$ (que vai de 1 a 0). Portanto, $i * \bar{i}$ tem 0 como ponto inicial e final. Mas, sabemos que e_0 também obedece a estas condições. Juntamente a isso, o fato de I ser convexo assegura que existe uma homotopia de caminhos H em I entre e_0 e $i * \bar{i}$. Assim, por (i), $f \circ H$ é uma homotopia de caminhos entre $f \circ e_0$ e $f \circ (i * \bar{i})$. Temos:

- na demonstração de (2), vimos que $f \circ e_0 = e_{x_0}$;
- por (ii), obtemos $f \circ (i * \bar{i}) = (f \circ i) * (f \circ \bar{i}) = f * \bar{f}$. A segunda igualdade é verdadeira, pois $f \circ \bar{i}(s) = f(\bar{i}(s)) = f(1 - s) = \bar{f}(s) \implies f \circ \bar{i} = \bar{f}$.

Assim, existe uma homotopia de caminhos H entre e_{x_0} e $f * \bar{f}$. Como se trata de uma relação de equivalência, então $[f * \bar{f}] = [f] * [\bar{f}] = [e_{x_0}]$.

Analogamente, temos que $\bar{i} * i$ é um caminho que tem 1 como ponto inicial e final. Como e_1 também obedece a isso e I é convexo, existe uma homotopia de caminhos G em I entre $f \circ (\bar{i} * i) = \bar{f} * f$ e $f \circ e_1 = e_{x_1}$. Logo, $[f * f] = [\bar{f}] * [f] = [e_{x_1}]$.

- (1) Vamos assumir o seguinte fato: Sejam $[a, b]$, $[c, d]$ intervalos contidos em $\mathbb{R}$. Então, existe uma única aplicação $m : [a, b] \rightarrow [c, d]$ tal que $m(a) = c$ e $m(b) = d$. Nestas condições, p é chamada aplicação linear positiva.

Sabendo disso, vamos descrever o produto $f * g$ da seguinte forma: na primeira metade do produto, que corresponde a f , temos uma aplicação linear positiva de $[0, \frac{1}{2}]$ a $[0, 1]$ dada por $m(s) = 2s$. Na segunda metade, que corresponde a g , temos uma aplicação linear positiva de $[\frac{1}{2}, 1]$ a $[0, 1]$, dada por $m'(s) = 2s - 1$.

Agora, sejam f, g, h caminhos em X . Note que os produtos $(f * g) * h$ e $f * (g * h)$ estão definidos quando $f(1) = g(0)$ e $g(1) = h(0)$.

Nessas condições, vamos definir o produto triplo entre f, g, h : dados pontos $a, b \in I$ tais que $0 < a < b < 1$, podemos definir o caminho $K_{a,b}$ em X da seguinte forma: na primeira parte de $K_{a,b}$, que corresponde a f , temos uma aplicação linear positiva de $[0, a]$ a $[0, 1]$. Na segunda parte, que corresponde a g , temos uma aplicação que vai de $[a, b]$ a $[0, 1]$. Na última, que corresponde a h , temos uma aplicação de $[b, 1]$ a $[0, 1]$.

Vamos mostrar que dados a, b nas condições acima e $c, d \in I$ tais que $0 < c < d < 1$, então $K_{a,b}$ e $K_{c,d}$ são caminhos homotópicos: seja $p : I \rightarrow I$ a aplicação que leva todos os pontos dos intervalos $[0, a]$, $[a, b]$, $[b, 1]$ nos intervalos $[0, c]$, $[c, d]$, $[d, 1]$, respectivamente.

Afirmção: $K_{c,d} \circ p = K_{a,b}$.

De fato, temos que

$$K_{c,d} \circ p = \{(x, y) : \exists z \text{ tal que } (x, z) \in p \text{ e } (z, y) \in K_{c,d}\}$$

Assim, se $(x, y) \in K_{c,d}$, temos as possibilidades:

- (a) $x \in [0, a] \Leftrightarrow z \in [0, c] \Leftrightarrow y \in [0, 1]$;
- (b) $x \in [a, b] \Leftrightarrow z \in [c, d] \Leftrightarrow y \in [0, 1]$;
- (c) $x \in [b, 1] \Leftrightarrow z \in [d, 1] \Leftrightarrow y \in [0, 1]$.

Isto acontece se, e somente se, $(x, y) \in K_{a,b}$.

Como p é um caminho em I de 0 a 1, existe uma homotopia de caminhos P entre p e a aplicação identidade $i : I \rightarrow I$. Por (i), $K_{c,d} \circ P$ é uma homotopia de caminhos entre $K_{c,d} \circ p = K_{a,b}$ e $K_{c,d} \circ i = K_{c,d}$.

Para concluir a verificação de (1), faremos as seguintes afirmações:

– $f * (g * h)$ é o produto triplo $K_{a,b}$, com $a = \frac{1}{2}$ e $b = \frac{3}{4}$. De fato,

$$f*(g*h)(s) = \begin{cases} f(2s), & \text{se } s \in [0, \frac{1}{2}] \\ g * h(2s - 1), & \text{se } s \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases} = \begin{cases} f(2s), & \text{se } s \in [0, \frac{1}{2}] \\ g(2(2s - 1)), & \text{se } s \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}] \\ h(2(2s - 1) - 1), & \text{se } s \in [\frac{3}{4}, 1] \end{cases}$$

– $(f * g) * h$ é o produto triplo $K_{c,d}$, com $c = \frac{1}{4}$ e $d = \frac{1}{2}$. De fato,

$$(f * g) * h(s) = \begin{cases} f * g(2s), & \text{se } s \in [0, \frac{1}{2}] \\ h(2s - 1), & \text{se } s \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases} = \begin{cases} f(2(2s)), & \text{se } s \in [0, \frac{1}{4}] \\ g(2(2s) - 1), & \text{se } s \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}] \\ h(2s - 1), & \text{se } s \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Assim, por (4),

$$[f*(g*h)] = [(f*g)*h] \implies [f]*([g*h]) = ([f*g])*[h] \implies [f]*([g]*[h]) = ([f]*[g])*[h]$$

Note que o conjunto de classes de homotopia de caminhos em um espaço X munido da operação $*$ não é um grupo, pois o produto $*$ não está sempre definido para quaisquer dois caminhos em X .

Para as definições de conceitos algébricos, consultar MUNKRES, 2000, p. 330; YARTEY, 2017, p. 84.

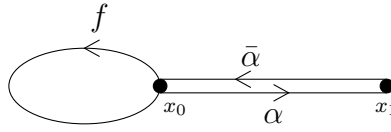
Definição 21. *Sejam X um espaço topológico e $x_0 \in X$. Um caminho que tem x_0 como ponto inicial e final é chamado **laço** com base em x_0 . O conjunto de classes de homotopia de caminhos entre laços com base em x_0 , munido com a operação $*$, é chamado **grupo fundamental** e é denotado por $\pi_1(X, x_0)$.*

Dados dois caminhos f e g com base em x_0 , o produto $f * g$ está sempre definido, pois $f(1) = g(0) = x_0$. Assim, os resultados do Teorema 20.1 sempre regem o produto entre dois laços e, consequentemente, o grupo fundamental é, de fato, um grupo. Além disso, pela Definição 20, $f * g$ também é um laço.

Exemplo 21.1. *O grupo fundamental $\pi_1(\mathbb{R}^n, x_0)$ é o grupo trivial (o grupo cujo único elemento é $[e_{x_0}]$). De fato, se f é um laço em $\mathbb{R}^n$ com base em x_0 , a homotopia da linha reta, do Exemplo 19.1, é uma homotopia de caminhos entre f e e_{x_0} (isto é, dado $[f] \in \pi_1(\mathbb{R}^n, x_0)$, temos $[f] = [e_{x_0}]$).*

Definição 22. *Seja α um caminho em X de x_0 a x_1 . Definimos a aplicação $\hat{\alpha} : \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(X, x_1)$ dada por $\hat{\alpha}([f]) = [\bar{\alpha}] * [f] * [\alpha]$.*

Figura 6: Representação da aplicação $\hat{\alpha}$.



Fonte: Elaborado pela autora, 2020.

A aplicação $\hat{\alpha}$ é bem definida pois a operação $*$ é bem definida. Se f é um laço com base em x_0 , então $(\bar{\alpha} * f) * \alpha$ é um laço com base em x_1 .

Teorema 22.1. *A aplicação $\hat{\alpha}$ é um isomorfismo de grupo.*

Prova: Primeiro, vamos mostrar que $\hat{\alpha}$ é um homomorfismo:

$$\hat{\alpha}([f]) * \hat{\alpha}([g]) = ([\bar{\alpha}] * [f] * [\alpha]) * ([\bar{\alpha}] * [g] * [\alpha]) = [\bar{\alpha}] * [f] * [g] * [\alpha] = \hat{\alpha}([f] * [g]).$$

Agora, vamos concluir que $\hat{\alpha}$ é um isomorfismo, exibindo sua inversa. Sejam $\beta = \bar{\alpha}$, $[f] \in \pi_1(X, x_0)$ e $[h] \in \pi_1(X, x_1)$.

Temos:

$$\hat{\beta}([h]) = ([\bar{\beta}] * [h] * [\beta]) = [\alpha] * [h] * [\bar{\alpha}];$$

$$\hat{\alpha}(\hat{\beta}([h])) = [\bar{\alpha}] * ([\alpha] * [h] * [\bar{\alpha}]) * [\alpha] = [e_{x_1}] * [h] * [e_{x_1}] = [h];$$

$$\hat{\beta}(\hat{\alpha}([f])) = [\bar{\beta}] * ([\bar{\alpha}] * [f] * [\alpha]) * [\beta] = [\alpha] * [\bar{\alpha}] * [f] * [\alpha] * [\bar{\alpha}] = [e_{x_0}] * [f] * [e_{x_0}] = [f].$$

Assim, $\hat{\beta}$ é a inversa de $\hat{\alpha}$ e, desse modo, $\hat{\alpha}$ é um isomorfismo.

Definição 23. Um espaço X é **conexo por caminhos** se para todos $x, y \in X$ existe um caminho ligando x e y .

Corolário 23.0.1. Se X é conexo por caminhos e x_0 e x_1 são pontos de X , então $\pi_1(X, x_0)$ é isomorfo a $\pi_1(X, x_1)$.

Prova: Como X é conexo por caminhos, dados quaisquer pontos x_0 e x_1 em X , é possível encontrar um caminho α ligando-os. Assim, podemos construir uma aplicação $\hat{\alpha}$ entre $\pi_1(X, x_0)$ e $\pi_1(X, x_1)$, a qual é um isomorfismo, pelo Teorema 22.1.

Definição 24. Um espaço X é **simplesmente conexo** se é conexo por caminhos e se $\pi_1(X, x_0)$ é o grupo trivial para algum $x_0 \in X$ e, conseqüentemente, para todo $x_0 \in X$ (pelo Corolário 23.0.1). Para expressar que $\pi_1(X, x_0)$ é o grupo trivial, escrevemos $\pi_1(X, x_0) = 0$.

Lema 24.1. Se X é um espaço simplesmente conexo, quaisquer dois caminhos que têm o mesmo ponto inicial e o mesmo ponto final são homotópicos.

Prova: Sejam α e β dois caminhos de x_0 a x_1 , com $x_0, x_1 \in X$. Então, $\alpha * \bar{\beta}$ está definido e é um laço em X com base em x_0 , isto é, $\alpha * \bar{\beta} \in \pi_1(X, x_0)$.

Como X é simplesmente conexo, $\pi_1(X, x_0)$ é o grupo trivial, isto é, $[e_{x_0}]$ é o único elemento de $\pi_1(X, x_0)$. Assim, $[\alpha * \bar{\beta}] = [e_{x_0}]$. Então,

$$[\alpha * \bar{\beta}] * [\beta] = [e_{x_0}] * [\beta] \implies [\alpha] * [\bar{\beta}] * [\beta] = [e_{x_0}] * [\beta] \implies [\alpha] * [e_{x_1}] = [e_{x_0}] * [\beta] \implies [\alpha] = [\beta].$$

Uma forma de provar que o grupo fundamental é um invariante topológico do espaço X é através da noção de homomorfismo induzido por uma aplicação contínua.

Suponha que $h : X \longrightarrow Y$ é uma aplicação contínua que leva o ponto x_0 de X para o ponto y_0 de Y . Podemos denotar isto da seguinte forma: $h : (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$. Se f é um laço em X com base em x_0 , então $h \circ f : I \longrightarrow Y$ é um laço em Y com base em y_0 (em f , $0 \longmapsto x_0$, e em h , $x_0 \longmapsto y_0$; em f , $1 \longmapsto x_0$, e em h , $x_0 \longmapsto y_0$).

Definição 25. *Seja $h : (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$ uma aplicação contínua. Definimos $h_* : \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(Y, y_0)$ pela equação $h_*([f]) = [h \circ f]$. A aplicação h_* é chamada homomorfismo induzido por h relativo ao ponto base x_0 .*

A aplicação h_* está bem definida, pois se F é uma homotopia de caminhos entre f e f' , então $h \circ F$ é uma homotopia entre $h \circ f$ e $h \circ f'$. Assim, se $[f] = [f']$, então $[h \circ f] = [h \circ f']$.

Temos que h_* é um homomorfismo, pois:

$$(h \circ f) * (h \circ g) = h \circ (f * g) \implies h_*([f]) * h_*([g]) = h_*([f * g]).$$

Teorema 25.1. *Se $h : (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$ e $k : (Y, y_0) \longrightarrow (Z, z_0)$ são contínuas, então $(k \circ h)_* = k_* \circ h_*$. Se $i : (X, x_0) \longrightarrow (X, x_0)$ é a aplicação identidade, então i_* é o homomorfismo identidade.*

Prova: Por definição, temos:

$$(k \circ h)_*([f]) = [(k \circ h) \circ f] = [k \circ (h \circ f)] = k_*([h \circ f]) = k_*(h_*([f])) = (k_* \circ h_*)([f]).$$

Além disso, note que $k \circ h$ é uma aplicação que leva (X, x_0) em (Z, z_0) , o que implica que $(k \circ h)_*$ é uma aplicação de $\pi_1(X, x_0)$ em $\pi_1(Z, z_0)$. Logo, $(k \circ h)_* = k_* \circ h_*$. Finalmente, temos que $i_*([f]) = [i \circ f] = [f]$.

Corolário 25.1.1. *Se $h : (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$ é um homeomorfismo entre X e Y , então h_* é um isomorfismo entre $\pi_1(X, x_0)$ e $\pi_1(Y, y_0)$.*

Prova: Sabemos que h_* é um homomorfismo. Resta mostrar que é uma bijeção, exibindo sua inversa. Seja $k : (Y, y_0) \longrightarrow (X, x_0)$ a inversa de h . Então,

$$k_* \circ h_* = (k \circ h)_* = i_* \quad (5)$$

com i a aplicação identidade de X , e

$$h_* \circ k_* = (h \circ k)_* = j_* \quad (6)$$

com j a aplicação identidade de Y .

Pelo Teorema 25.1, i_* e j_* são os homomorfismos identidade de $\pi_1(X, x_0)$ e $\pi_1(Y, y_0)$, respectivamente. Assim, por (5) e (6), k_* é a aplicação inversa de h_* .

2.3 Grupo Fundamental do Círculo

Definição 26. *Sejam X, Y espaços topológicos. Uma aplicação $f : X \longrightarrow Y$ é um **homeomorfismo local** quando para cada ponto $x \in X$ existe uma vizinhança $U \subset X$ tal que $V = f(U)$ é aberto em Y e $f|_U : U \longrightarrow V$ é um homeomorfismo.*

Exemplo 26.1. *Todo homeomorfismo (global) é um homeomorfismo local. De fato, seja $f : X \longrightarrow Y$ um homeomorfismo. Basta tomar, nos termos da Definição 26, $U = X$ e $V = Y$. Assim, a primeira e a segunda condição são satisfeitas.*

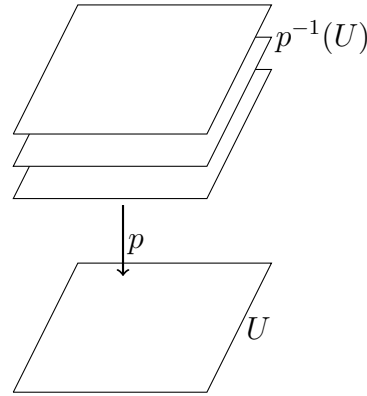
Definição 27. *Seja $p : E \longrightarrow B$ uma aplicação contínua e sobrejetiva. O subconjunto aberto $U \subset B$ é dito **uniformemente coberto** por p se*

$$(i) \quad p^{-1}(U) = \bigcup_{\alpha \in J} V_\alpha, \text{ com } V_\alpha \text{ subconjuntos abertos e disjuntos de } E, \text{ para todo } \alpha \in J;$$

$$(ii) \quad p|_{V_\alpha} : V_\alpha \longrightarrow U \text{ é um homeomorfismo, para todo } \alpha \in J.$$

A coleção $\{V_\alpha\}_{\alpha \in J}$ é chamada uma *partição de $p^{-1}(U)$ em fatias*.

Figura 7: Conjunto U uniformemente coberto por p .



Fonte: Elaborado pela autora, 2020.

Definição 28. *Seja $p : E \longrightarrow B$ uma aplicação contínua e sobrejetiva. Se cada ponto $b \in B$ tem uma vizinhança U uniformemente coberta por p , então p é chamada **aplicação de recobrimento** e E é dito **espaço de recobrimento** de B .*

Exemplo 28.1. *Seja $E = X \times \{1, \dots, n\}$. A aplicação $p : E \longrightarrow X$ dada por $p(x \times i) = x$, para todo $i \in \{1, \dots, n\}$ é uma aplicação de recobrimento.*

De fato, note que p é sobrejetiva. Ela é contínua, pois para todo $U \subset X$ aberto, $p^{-1}(U) = U \times \{1, \dots, n\}$, o qual é aberto em E .

Dado $x \in X$, então X é uma vizinhança de x tal que $p^{-1}(X) = \bigcup X_i$, onde $X_i = X \times \{i\}$. Temos que os conjuntos X_i são abertos e disjuntos entre si. Além disso, $p|_{X_i} : X_i \longrightarrow X$ é um homeomorfismo, pois é bijetiva e

- $p|_{X_i}$ é contínua, pois dado $U \subset X$ aberto, $p^{-1}|_{X_i}(U) = U \times \{i\}$ é aberto em $X_i = X \times \{i\}$;
- $p^{-1}|_{X_i}$ é contínua, pois dado $U_i = U \times \{i\} \subset X_i$ aberto básico, temos $p|_{X_i}(U_i) = U$, que é aberto em X .

Teorema 28.1. *Seja $S^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| = 1\} \subset \mathbb{R}^2$. A aplicação $p : \mathbb{R} \longrightarrow S^1$ dada por $p(x) = (\cos 2\pi x, \sin 2\pi x)$ é uma aplicação de recobrimento.*

Prova: Temos que p é sobrejetiva, pois $f : \mathbb{R} \longrightarrow [-1, 1]$ dada por $f(x) = \cos 2\pi x$ e $g : \mathbb{R} \longrightarrow [-1, 1]$ dada por $g(x) = \sin 2\pi x$ são sobrejetivas; p é contínua, pois dado $A \subset S^1$ aberto básico (que é igual à interseção de S^1 com uma bola aberta), $p^{-1}(A)$ é um intervalo aberto, o qual é aberto em $\mathbb{R}$.

Inicialmente, vamos mostrar que $p(n + 1/4) = (0, 1)$ e $p(n - 1/4) = (0, -1)$, para qualquer inteiro n . Temos que $p(n) = (1, 0) = b_0, \forall n \in \mathbb{Z}$, isto é, $p^{-1}(b_0) = \mathbb{Z}$, pois

- dado $n \in \mathbb{Z}$, $p(n) = (\cos(n2\pi), \sin(n2\pi)) = (1, 0)$, visto que $n2\pi$ trata-se de um múltiplo de 2π . Assim, $\mathbb{Z} \subset p^{-1}(b_0)$;
- dado $x \in p^{-1}(b_0)$, temos que

$$\begin{aligned} (\cos 2\pi x, \sin 2\pi x) = (1, 0) &\iff \cos 2\pi x = 1 \text{ e } \sin 2\pi x = 0 \\ &\iff 2\pi x = k2\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z} \iff x \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Logo, $p^{-1}(b_0) \subset \mathbb{Z}$.

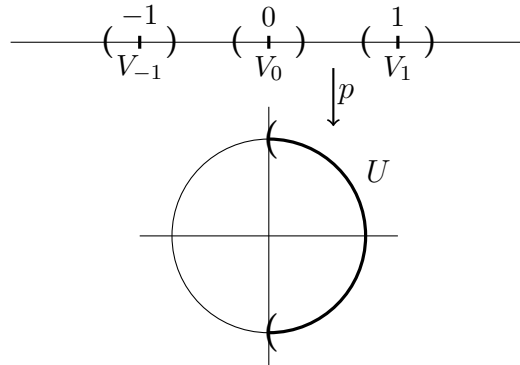
Além disso, $p(1/4) = (0, 1)$. Assim, usando as fórmulas referentes a $\cos(a+b)$ e $\sin(a+b)$,

$$\begin{aligned} p(n + 1/4) &= (\cos 2\pi(n + 1/4), \sin 2\pi(n + 1/4)) = (\cos(2\pi n + \pi/2), \sin(2\pi n + \pi/2)) = \\ &= (1 \cdot 0 - 0 \cdot 1, 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1) = (0, 1) \end{aligned}$$

Aplicando um processo semelhante, concluímos que $p(n - 1/4) = (0, -1)$.

Agora, considere $U \subset S^1$ como sendo o conjunto de todos os pontos que têm a primeira coordenada positiva. Ou seja, $p^{-1}(U)$ é o conjunto dos pontos x para os quais $\cos 2\pi x > 0$. Desse modo, $p^{-1}(U) = \bigcup V_n$, com $V_n = (n - 1/4, n + 1/4)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Observe a figura:

Figura 8: Representação da aplicação $p : \mathbb{R} \rightarrow S^1$.



Fonte: Elaborado pela autora, 2020.

Note que a imagem da aplicação p corresponde a inúmeras voltas no círculo unitário. Em U , o cosseno é sempre maior que zero. Já no seu complementar, o cosseno é menor ou igual a zero.

Temos que os conjuntos V_n são abertos e disjuntos. Devemos mostrar, agora, que a aplicação $p|_{V_n} : V_n \rightarrow U$ é um homeomorfismo, para qualquer n inteiro. A aplicação $p|_{\bar{V}_n} : \bar{V}_n \rightarrow \bar{U}$, com $\bar{V}_n = [n - 1/4, n + 1/4]$ para todo $n \in \mathbb{Z}$, é injetora, pois $\sin 2\pi x$

é estritamente crescente num intervalo desse tipo. Para mostrar que $p|_{\overline{V}_n}$ é sobrejetora, consideremos o Teorema do Valor Intermediário (ver MUNKRES, 2000, p. 154). Sabemos que $p|_{\overline{V}_n}(n - 1/4) = (0, -1)$ e $p|_{\overline{V}_n}(n + 1/4) = (0, 1)$, para todo $n \in \mathbb{Z}$. Como $(0, -1)$ e $(0, 1)$ são os extremos do conjunto $\overline{U}$, então qualquer ponto de $\overline{U}$ entre eles possui um correspondente em $\overline{V}_n$, segundo o Teorema do Valor Intermediário.

A aplicação $p|_{\overline{V}_n}$ é contínua por ser restrição de uma aplicação contínua. Para concluir que $p|_{\overline{V}_n}$ é um homeomorfismo, vamos usar o Teorema 16.4. Devemos mostrar que $\overline{V}_n$ é compacto e $\overline{U}$ é um espaço de Hausdorff. Vamos assumir o seguinte fato: todo intervalo fechado em $\mathbb{R}$ é compacto.

Assim, $\overline{V}_n$ é compacto. Pelo Exemplo 9.2, $\mathbb{R}^2$ é de Hausdorff. Então, pelo Teorema 9.2, $\overline{U}$ deve ser de Hausdorff. Logo, $p|_{\overline{V}_n}$ é um homeomorfismo e, em particular, $p|_{V_n}$ é um homeomorfismo.

Argumentos semelhantes podem ser aplicados para interseções de S^1 com a parte esquerda do plano e com as partes superior e inferior. Consequentemente, $p : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ é uma aplicação de recobrimento.

Proposição 28.1. *Se $p : E \rightarrow B$ é uma aplicação de recobrimento, então p é um homeomorfismo local entre E e B .*

Prova: Dado $e \in E$, $p(e)$ possui uma vizinhança U tal que $p^{-1}(U) = \bigcup V_\alpha$ (onde todos V_α são conjuntos abertos e disjuntos). Temos que $e \in V_\alpha$ para algum α . Como $p|_{V_\alpha} : V_\alpha \rightarrow U$ é um homeomorfismo e $U = p(V_\alpha)$ é aberto em B , então as condições de homeomorfismo local estão satisfeitas.

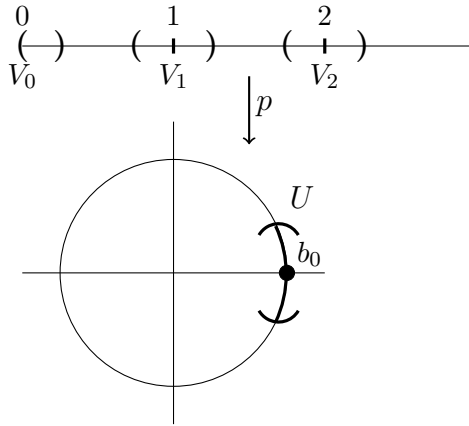
Entretanto, a condição de p ser um homeomorfismo local, não é suficiente para que p seja uma aplicação de recobrimento, como nos mostra o seguinte exemplo:

Exemplo 28.2. *A aplicação $p : \mathbb{R}_+ \rightarrow S^1$ dada por $p(x) = (\cos 2\pi x, \sin 2\pi x)$ é sobrejetiva e é um homeomorfismo local, mas não é uma aplicação de recobrimento.*

De fato, a aplicação p é um homeomorfismo local, pois é uma restrição de homeomorfismo local. É sobrejetiva, pois $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow [-1, 1]$ dada por $f(x) = \cos 2\pi x$ e $g : \mathbb{R}_+ \rightarrow [-1, 1]$ dada por $g(x) = \sin 2\pi x$ são sobrejetivas.

Para o ponto $b_0 = (1, 0) \in S^1$ não existe uma vizinhança U que é uniformemente coberta por p . Isso ocorre porque uma vizinhança típica U de b_0 tem como pré-imagem a união de intervalos abertos V_n (com n inteiro e $n > 0$) com o intervalo V_0 da forma $(0, \epsilon)$, conforme está representado na figura a seguir.

Figura 9: Representação da aplicação $p : \mathbb{R}_+ \rightarrow S^1$.



Fonte: Elaborado pela autora, 2020.

Para cada intervalo V_n , com $n > 0$, temos que $p|_{V_n} : V_n \rightarrow U$ é um homeomorfismo. Mas, para o intervalo V_0 , $p|_{V_0} : V_0 \rightarrow U$ não é sobrejetivo, pois não existe um ponto $x \in V_0$ tal que $p(x) = b_0$.

Teorema 28.2. *Seja $p : E \rightarrow B$ uma aplicação de recobrimento. Se B_0 é um subespaço de B e se $E_0 = p^{-1}(B_0)$, então a aplicação $p_0 : E_0 \rightarrow B_0$ é uma aplicação de recobrimento.*

Prova: A aplicação p_0 é sobrejetiva, pois $p^{-1}(B_0) = E_0$; é contínua por ser uma restrição de função contínua.

Dado $b_0 \in B_0$, seja U uma vizinhança de b_0 em B que é uniformemente coberta por p e seja $\{V_\alpha\}$ uma partição de $p^{-1}(U)$ em fatias. Temos que $U \cap B_0$ é uma vizinhança de b_0 em B_0 , e os conjuntos $V_\alpha \cap E_0$ são abertos e disjuntos em E_0 (visto que os conjuntos V_α são abertos e disjuntos).

Afirmção 1: $p^{-1}(U \cap B_0) = \bigcup (V_\alpha \cap E_0)$

$$\begin{aligned} x \in p^{-1}(U \cap B_0) &\iff p(x) \in U \cap B_0 \iff p(x) \in U \text{ e } p(x) \in B_0 \iff \\ x \in p^{-1}(U) = \bigcup V_\alpha \text{ e } x \in p^{-1}(B_0) = E_0 &\iff x \in \bigcup V_\alpha \cap E_0 \iff x \in \bigcup (V_\alpha \cap E_0) \end{aligned}$$

Afirmção 2: $p|_{V_\alpha \cap E_0} : V_\alpha \cap E_0 \rightarrow U \cap B_0$ é um homeomorfismo para todo α .

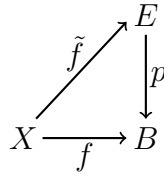
De fato,

- é bijetiva: dado $y \in U \cap B_0$, temos que $y \in U$. Pela aplicação $p|_{V_\alpha} : V_\alpha \rightarrow U$, que é bijetiva, existe um único $x \in V_\alpha$ tal que $p(x) = y$. Como $y \in B_0$, então $x \in p^{-1}(B_0) = E_0$. Logo, como $p|_{V_\alpha \cap E_0}$ é uma restrição de $p|_{V_\alpha}$, então existe único $x \in V_\alpha \cap E_0$ tal que $y = p|_{V_\alpha \cap E_0}(x)$;

- é contínua e a inversa é contínua: $p|_{V_\alpha \cap E_0}$ é restrição de $p|_{V_\alpha}$, a qual é contínua; do mesmo modo, $p|_{V_\alpha \cap E_0}^{-1}$ é restrição de $p|_{V_\alpha}^{-1}$.

Definição 29. *Seja $p : E \longrightarrow B$ uma aplicação. Se $f : X \longrightarrow B$ é uma aplicação contínua, um **levantamento** de f é uma aplicação $\tilde{f} : X \longrightarrow E$ tal que $p \circ \tilde{f} = f$*

Figura 10: Levantamento da aplicação $f : X \longrightarrow B$.



Fonte: Elaborado pela autora, 2020.

Exemplo 29.1. *Considere a aplicação de recobrimento $p : \mathbb{R} \longrightarrow S^1$ do Teorema 28.1. O caminho $f : I \longrightarrow S^1$, dado por $f(s) = (\cos \pi s, \sin \pi s)$ (que começa em $b_0 = (1, 0)$ e termina em $(-1, 0)$), tem como levantamento o caminho $\tilde{f} : I \longrightarrow \mathbb{R}$, dado por $\tilde{f}(s) = \frac{s}{2}$ (que começa em 0 e termina em $\frac{1}{2}$). De fato, devemos mostrar que $p \circ \tilde{f} = f$. Temos que $p \circ \tilde{f} : I \longrightarrow S^1$. Resta verificar que $p \circ \tilde{f}(s) = f(s)$, para todo $s \in I$. Dado $s \in I$,*

$$p \circ \tilde{f}(s) = p(\tilde{f}(s)) = p\left(\frac{s}{2}\right) = \left(\cos 2\pi \frac{s}{2}, \sin 2\pi \frac{s}{2}\right) = (\cos \pi s, \sin \pi s).$$

Os dois lemas a seguir nos mostram que caminhos e homotopias de caminhos podem ser levantadas.

Lema 29.1. *Considere $p : E \longrightarrow B$ uma aplicação de recobrimento e $p(e_0) = b_0$. Qualquer caminho $f : I \longrightarrow B$ que começa em b_0 tem um único levantamento $\tilde{f} : I \longrightarrow E$ começando em e_0 , isto é, tal que $\tilde{f}(0) = e_0$. (MUNKRES, 2000, p. 342)*

Lema 29.2. *Considere $p : E \longrightarrow B$ uma aplicação de recobrimento e $p(e_0) = b_0$. Seja $F : I \times I \longrightarrow B$ uma aplicação contínua tal que $F(0, 0) = b_0$. Então, existe um único levantamento $\tilde{F} : I \times I \longrightarrow E$ de F começando em e_0 . Se F é uma homotopia de caminhos, então $\tilde{F}$ é uma homotopia de caminhos. (MUNKRES, 2000, p. 343)*

Teorema 29.1. *Considere $p : E \longrightarrow B$ uma aplicação de recobrimento e $p(e_0) = b_0$. Sejam f e g dois caminhos em B de b_0 para b_1 ; sejam $\tilde{f}$ e $\tilde{g}$ os levantamentos de f e g , respectivamente, começando em e_0 . Se f e g são caminhos homotópicos, então $\tilde{f}$ e $\tilde{g}$ terminam no mesmo ponto de E e são caminhos homotópicos. (MUNKRES, 2000, p. 344)*

Definição 30. *Sejam $p : E \longrightarrow B$ uma aplicação de recobrimento e $b_0 \in B$. Escolha e_0 tal que $p(e_0) = b_0$. Dado $[f] \in \pi_1(B, b_0)$, seja $\tilde{f}$ o levantamento do caminho f em E que começa*

em e_0 . Seja $\phi([f]) = \tilde{f}(1)$. Então, ϕ é a aplicação $\phi : \pi_1(B, b_0) \longrightarrow p^{-1}(b_0)$. Chamamos ϕ a **correspondência de levantamento** derivada da aplicação de recobrimento p . Temos que ϕ depende do ponto e_0 (pois o levantamento $\tilde{f}$ de f depende do ponto e_0).

O contradomínio de ϕ é igual a $p^{-1}(b_0)$ pois $p(\tilde{f}(1)) = f(1) = b_0$, visto que f é um laço. Além disso, a aplicação ϕ é bem definida. De fato, se $[f] = [g]$, então $\tilde{f}(1) = \tilde{g}(1)$, pelo Teorema 29.1.

Teorema 30.1. *Considere $p : E \longrightarrow B$ uma aplicação de recobrimento e $p(e_0) = b_0$. Se E é conexo por caminhos, então a correspondência de levantamento $\phi : \pi_1(B, b_0) \longrightarrow p^{-1}(b_0)$ é sobrejetiva. Se E é simplesmente conexo, então ϕ é bijetivo.*

Prova: Suponhamos que E seja conexo por caminhos. Dado $e_1 \in p^{-1}(b_0)$, devemos mostrar que existe $[f] \in \pi_1(B, b_0)$ tal que $\phi([f]) = e_1$. Temos que existe um caminho $\tilde{f}$ em E de e_0 a e_1 . Como o domínio de p é igual ao contradomínio de $\tilde{f}$, a aplicação $p \circ \tilde{f} = f$ existe e é um caminho em B . Note que $f(0) = p(\tilde{f}(0)) = p(e_0) = b_0$ e $f(1) = p(e_1) = b_0$. Logo, f é um laço em B com base em b_0 , isto é, $[f] \in \pi_1(B, b_0)$. Assim, $\tilde{f}$ é o levantamento de f começando em e_0 e, pela definição anterior, $e_1 = \tilde{f}(1) = \phi([f])$.

Se E é simplesmente conexo, então E é conexo por caminhos, fazendo com que ϕ seja sobrejetiva, conforme já provamos. Resta, portanto, mostrar que ϕ é injetiva: sejam $[f], [g] \in \pi_1(B, b_0)$ tais que $\phi([f]) = \phi([g])$. Sejam $\tilde{f}$ e $\tilde{g}$ os levantamentos de f e g , respectivamente, em E e que começam em e_0 ; assim $\tilde{f}(1) = \tilde{g}(1)$.

Como E é simplesmente conexo, então, pelo Lema 24.1, $\tilde{f}$ e $\tilde{g}$ são caminhos homotópicos (visto que ambos começam no mesmo ponto). Logo, existe $\tilde{F}$ uma homotopia de caminhos em E entre $\tilde{f}$ e $\tilde{g}$. Como $f = p \circ \tilde{f}$ e $g = p \circ \tilde{g}$, temos que $p \circ \tilde{F}$ é uma homotopia de caminhos entre f e g . Assim, $[f] = [g]$, o que implica que ϕ é injetiva e, consequentemente, bijetiva.

Teorema 30.2. *O grupo fundamental de S^1 é isomorfo ao grupo aditivo dos inteiros.*

Prova: Seja $p : \mathbb{R} \longrightarrow S^1$ a aplicação de recobrimento do Teorema 28.1. Sejam $e_0 = 0$ e $b_0 = p(e_0)$. Como $b_0 = (1, 0)$, então $p^{-1}(b_0) = \mathbb{Z}$.

Temos que $\mathbb{R}$ é conexo por caminhos e, pelo Exemplo 21.1, $\pi_1(\mathbb{R}, x_0)$ é o grupo trivial para todo $x_0 \in \mathbb{R}$. Assim, $\mathbb{R}$ é simplesmente conexo. Desse modo, pelo Teorema 30.1, a correspondência de levantamento $\phi : \pi_1(S^1, b_0) \longrightarrow \mathbb{Z}$ é bijetiva. Resta mostrar, então, que ϕ é um homomorfismo. Dados $[f], [g] \in \pi_1(S^1, b_0)$, sejam $\tilde{f}$ e $\tilde{g}$ os levantamentos de f e g , respectivamente, em $\mathbb{R}$ começando em e_0 . Considere $n = \tilde{f}(1) = \phi([f])$ e $m = \tilde{g}(1) = \phi([g])$. Seja $\tilde{g}(s) = n + \tilde{g}(s)$.

Temos que a aplicação p é periódica, completando um período a cada número

inteiro, isto é, $p(n+x) = p(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Logo, $\tilde{g}$ é um levantamento de g , pois

$$p \circ \tilde{g}(s) = p(n + \tilde{g}(s)) = p(\tilde{g}(s)) = g(s)$$

e $p \circ \tilde{g} : I \longrightarrow S^1$. Além disso, $\tilde{g}$ começa em n , pois $\tilde{g}(0) = 0$.

Como $\tilde{f}(1) = n = \tilde{g}(0)$, então $\tilde{f} * \tilde{g}$ está definido e é o levantamento para $f * g$ que começa em 0. De fato, temos que $f * g : I \longrightarrow S^1$ e $p \circ (\tilde{f} * \tilde{g})(s) : I \longrightarrow S^1$ têm o mesmo domínio e contradomínio e

$$p \circ (\tilde{f} * \tilde{g})(s) = \begin{cases} p \circ \tilde{f}(2s), & \text{se } s \in [0, \frac{1}{2}] \\ p \circ \tilde{g}(2s-1), & \text{se } s \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases} = \begin{cases} f(2s), & \text{se } s \in [0, \frac{1}{2}] \\ g(2s-1), & \text{se } s \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases} = f * g(s).$$

Temos que o ponto final de $\tilde{f} * \tilde{g}$ é dado por $(\tilde{f} * \tilde{g})(1) = \tilde{g}(1) = n + \tilde{g}(1) = n + m$. Logo,

$$\phi([f] * [g]) = \phi([f * g]) = (\tilde{f} * \tilde{g})(1) = n + m = \phi([f]) + \phi([g]).$$

Definição 31. Sejam G um grupo e $x \in G$. Denotamos por x^{-1} o inverso de x ; x^n o n -ésimo produto de x com si próprio; x^{-n} o n -ésimo produto de x^{-1} com si próprio; x^0 o elemento neutro de G . Se $\{x^m \mid m \in \mathbb{Z}\} = G$, dizemos que G é um **grupo cíclico** e x é um **gerador** de G .

Note que o produto representa uma operação do conjunto que satisfaz as propriedades da definição de grupo. Ou seja, na definição acima, caso o grupo seja aditivo, a operação produto pode ser entendida como a operação soma.

Definição 32. Se A é um subconjunto de X , uma **retração** de X em A é uma aplicação contínua $r : X \longrightarrow A$ tal que $r|_A$ é a aplicação identidade de A . Se existe uma retração de X em A , dizemos que A é um **retrato** de X .

Lema 32.1. Se A é um retrato de X , então o homomorfismo induzido pela inclusão $j : A \longrightarrow X$ é injetivo.

Prova: Se $r : X \longrightarrow A$ é uma retração, então $r \circ j$ é a aplicação identidade $i : A \longrightarrow A$. Sejam $r_* : \pi_1(X, a) \longrightarrow \pi_1(A, a)$ e $j_* : \pi_1(A, a) \longrightarrow \pi_1(X, a)$ os homomorfismos induzidos por r e j , respectivamente. Logo, $r_* \circ j_*$ é a aplicação identidade de $\pi_1(A, a)$. De fato, dado $[f] \in \pi_1(A, a)$,

$$r_*(j_*([f])) = r_*([j \circ f]) = [r \circ (j \circ f)] = [(r \circ j) \circ f] = [i \circ f] = [f].$$

Logo, como $i_* = r_* \circ j_*$ é injetivo, então j_* deve ser injetiva.

Teorema 32.1. (Teorema da não-retração) Seja $B^2 = \{x : \|x\| \leq 1\} \subset \mathbb{R}^2$. Não existe retração de B^2 em S^1 .

Prova: Temos que $\pi_1(B^2, x_0)$ é o grupo trivial, pois é um subespaço convexo de $\mathbb{R}^2$. Entretanto, $\pi_1(S^1, b_0)$ não é o grupo trivial, pois é isomorfo a $\mathbb{Z}$, pelo Teorema 30.2.

Suponhamos que existe uma retração de B^2 em S^1 , isto é, que S^1 é um retrato de B^2 . Então, o homomorfismo j_* induzido pela inclusão $j : S^1 \rightarrow B^2$ é injetivo, segundo o Lema 32.1. Mas, isso é uma contradição, pois $\pi_1(S^1, b_0)$ não é o grupo trivial, enquanto $\pi_1(B^2, x_0)$ é o grupo trivial.

Lema 32.2. *Seja $h : S^1 \rightarrow X$ uma aplicação contínua. Então, as seguintes condições são equivalentes.*

- (1) h é homotópica a uma aplicação constante.
- (2) h se estende para uma aplicação contínua $k : B^2 \rightarrow X$.
- (3) h_* é o homomorfismo trivial de grupos fundamentais.

Corolário 32.1.1. *A inclusão $j : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2 - 0$ não é homotópica a uma aplicação constante. A aplicação identidade $i : S^1 \rightarrow S^1$ não é homotópica a uma aplicação constante.*

Prova: Temos que a aplicação $r : \mathbb{R}^2 - 0 \rightarrow S^1$ dada por $r(x) = \frac{x}{\|x\|}$ é uma retração de $\mathbb{R}^2 - 0$ em S^1 , pois

- é contínua, visto que é um quociente de funções contínuas;
- $r|_{S^1}$ é a aplicação identidade de S^1 :

$$x \in S^1 \implies r|_{S^1}(x) = r(x) = \frac{x}{\|x\|}.$$

Mas, $\|x\| = 1$. Logo, $r(x) = x$.

Logo, pelo Lema 32.1, j_* é injetivo. Com isso, não há como j_* ser o homomorfismo trivial, pois, para isso, deveria levar todos os pontos do seu domínio no elemento neutro do contradomínio. Assim, pelo Lema 32.2, j não é homotópica a uma aplicação constante.

Da mesma forma, i_* é o homomorfismo identidade e, portanto, injetivo. Por isso, não é trivial e, consequentemente, i não é homotópica a uma aplicação constante.

Definição 33. *Seja v uma aplicação contínua de B^2 em $\mathbb{R}^2$. Um **campo vetorial** em B^2 é um par ordenado $(x, v(x))$, com $x \in B^2$.*

Teorema 33.1. *Considere um campo vetorial $(x, v(x))$ em B^2 tal que $v(x) \neq 0$, para todo $x \in B^2$. Então, existe um ponto em S^1 onde o campo vetorial aponta para dentro e um ponto em S^1 onde o campo vetorial aponta para fora.*

Prova: Como $v(x) \neq 0$, para todo $x \in B^2$, então v aplica B^2 em $\mathbb{R}^2 - 0$. Suponhamos, por absurdo, que $v(x)$ não aponta para dentro em nenhum ponto $x \in S^1$. Seja $w = v|_{S^1}$. Como w se estende para uma aplicação contínua de B^2 em $\mathbb{R}^2 - 0$, então ela é homotópica a uma aplicação constante, segundo o Lema 32.2. Mas, w também é homotópica à inclusão $j : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2 - 0$. De fato, considere a aplicação F tal que $F(x, t) = tx + (1 - t)w(x)$, com $x \in S^1$ e $t \in I$. Temos que $F(x, 0) = w(x)$ e $F(x, 1) = x = j(x)$. Resta mostrar que o contradomínio de F é $\mathbb{R}^2 - 0$, isto é, vamos mostrar que $F(x, t) \neq 0$, $\forall x \in S^1$, $t \in I$.

Temos que, dado $x \in S^1$, $j(x) \neq 0$ e $w(x) \neq 0$ (por hipótese). Assim, para $t = 0$ e $t = 1$, $F(x, t) \neq 0$. Se $F(x, t) = 0$ para $0 < t < 1$, então

$$tx + (1 - t)w(x) = 0 \iff w(x) = -\frac{t}{1 - t}x.$$

Note que $\frac{t}{1 - t} > 0$. Logo, $w(x)$ é um múltiplo escalar negativo de x , o que implica que $w(x)$ aponta para dentro em x . Como isso não é possível (pois $v(x)$ não aponta para dentro em nenhum ponto em S^1 , por hipótese), então $F(x, t) \neq 0$, $\forall x \in S^1$, $t \in I$.

Logo, F é uma aplicação de $S^1 \times I$ em $\mathbb{R}^2 - 0$ e, como ela é contínua, satisfaz as condições para ser uma homotopia entre w e j . Assim, j é homotópica a uma aplicação constante. Mas isso é uma contradição, segundo o Corolário 32.1.1. Portanto, $v(x)$ aponta para dentro em algum ponto $x \in S^1$.

Agora, considere o campo vetorial $(x, -v(x))$. Pelo resultado já provado, $-v(x)$ aponta para dentro em algum ponto $x \in S^1$. Logo, $v(x)$ aponta para fora, nesse ponto x em questão.

A seguir, será enunciado o Teorema Fundamental da Álgebra e apresentada uma demonstração para ele baseada na prova contida em Munkres (2000).

Teorema 33.2. (*Teorema do ponto-fixo para o disco de Brouwer*) Se $f : B^2 \rightarrow B^2$ é contínua, então existe $x \in B^2$ tal que $f(x) = x$.

Prova: Suponhamos, por absurdo, que $f(x) \neq x$, para todo $x \in B^2$. Definindo $v(x) = f(x) - x$, obtemos um campo vetorial $(x, v(x))$ em B^2 tal que $v(x) \neq 0$, para todo $x \in B^2$. Pelo Teorema 33.1, o campo vetorial aponta para fora em um ponto $x_0 \in S^1$, isto é, $v(x_0)$ é um múltiplo escalar positivo de x_0 . Logo, $f(x_0) - x_0 = ax_0 \implies f(x_0) = (1 + a)x_0$, com $a \in \mathbb{R}_+^*$. Mas, isso significa que $f(x_0) \notin B^2$, pois

$$\|(1 + a)x_0\| = \|(1 + a)\| \cdot \|x_0\| = \|(1 + a)\| \cdot 1 > 1,$$

o que é uma contradição.

Teorema 33.3. (*O Teorema Fundamental da Álgebra*) Uma equação polinomial

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 = 0$$

de grau $n > 0$ com coeficientes complexos tem pelo menos uma raiz complexa.

Prova:

Passo 1: Seja $f : S^1 \rightarrow S^1$ uma aplicação dada por $f(z) = z^n$, com $z \in \mathbb{C}$. Vamos mostrar que o homomorfismo induzido f_* é injetivo. Sabemos que

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta = (\cos\theta, \sin\theta).$$

Então, seja $p_0 : I \rightarrow S^1$ a aplicação dada por $p_0(s) = e^{2\pi is} = (\cos 2\pi s, \sin 2\pi s)$, a qual é um laço em S^1 (com base em $b_0 = (1, 0)$). Temos que $f_*([p_0]) = [f \circ p_0]$ e

$$f(p_0(s)) = (e^{2\pi is})^n = (\cos 2\pi ns, \sin 2\pi ns),$$

a qual também é um laço em S^1 (com base em b_0). Considere o caminho $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ dado por $g(s) = ns$ e $p : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ a aplicação de recobrimento do Teorema 28.1. Note que $p \circ g = f \circ p_0$, isto é, g é o levantamento de $f \circ p_0$ que começa em 0. Assim, sendo ϕ o isomorfismo de $\pi_1(S^1, b_0)$ com $\mathbb{Z}$ (visto no Teorema 30.2), temos que $\phi([f \circ p_0]) = g(1) = n$, isto é, $[f \circ p_0]$ corresponde ao inteiro n .

Agora, seja $h : I \rightarrow I$ um caminho dado por $h(s) = s$. Temos que $p \circ h = p_0$, isto é, h é o levantamento de p_0 que começa em 0. Assim, $\phi([p_0]) = h(1) = 1$, ou seja, $[p_0]$ corresponde ao número inteiro 1. Logo,

$$\begin{aligned} f_* : \pi_1(S^1, b_0) &\rightarrow \pi_1(S^1, b_0) \\ [p_0] &\mapsto [f \circ p_0] \end{aligned}$$

pode ser enxergada, via o isomorfismo ϕ , como

$$\begin{aligned} f_* : \mathbb{Z} &\rightarrow \mathbb{Z} \\ 1 &\mapsto n \end{aligned}$$

Mas, 1 é o gerador do grupo aditivo dos inteiros (pois a n -ésima soma do número 1 é igual ao inteiro n). Dessa forma, dado $m \in \mathbb{Z}$,

$$f_*(m) = f_*(1 + \cdots + 1) = f_*(1) + \cdots + f_*(1) = n + \cdots + n = m \cdot n$$

com m parcelas em cada soma (note que se m for negativo, então devemos ter $|m|$ parcelas de -1). Sabemos que dados $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$ tais que $m_1 n = m_2 n$, temos que $m_1 = m_2$. Logo,

f_* é injetiva.

Passo 2: Vamos mostrar que a aplicação $g : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2 - 0$ dada por $g(z) = z^n$ não é homotópica a uma aplicação constante. Note que $g = j \circ f$, com j a aplicação inclusão de S^1 em $\mathbb{R}^2 - 0$ e f a aplicação do Passo 1. Assim, $g_* = (j \circ f)_*$, o que implica que $g_* = j_* \circ f_*$.

Temos que existe uma retração de $\mathbb{R}^2 - 0$ em S^1 dada por $r(x) = \frac{x}{\|x\|}$. Logo, pelo Lema 32.1, j_* é injetiva; pelo Passo 1, f_* é injetiva. Portanto, $g_* = j_* \circ f_*$ é injetiva, não podendo ser o homomorfismo trivial e, conseqüentemente, g não é homotópica a uma aplicação constante (segundo o Lema 32.2).

Passo 3: Vamos provar um caso especial do teorema, que vale para equações polinomiais $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0 = 0$ tais que $|a_{n-1}| + \dots + |a_1| + |a_0| < 1$. Vamos mostrar que uma equação desse tipo possui uma raiz em B^2 . Suponhamos, por absurdo, que a equação não possui raiz em B^2 . Temos que

$$A = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0 \neq 0, \forall z \in B^2$$

e, assim, podemos definir uma aplicação $k : B^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 - 0$ tal que $k(z) = A$.

Seja $h = k|_{S^1}$. Como h se estende para uma aplicação de B^2 em $\mathbb{R}^2 - 0$, então h é homotópica a uma constante (pelo Lema 32.2). Agora, vamos mostrar que h é homotópica à aplicação g do Passo 2. Considere a aplicação F dada por

$$F(z, t) = z^n + t(a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_0), \text{ com } z \in S^1 \text{ e } t \in I.$$

Note que $F(z, 0) = z^n = g(z)$ e $F(z, 1) = h(z)$. Além disso, F é contínua, pois é uma soma de aplicações contínuas. Resta mostrar que seu contradomínio é igual a $\mathbb{R}^2 - 0$, isto é, que $F(z, t) \neq 0 \forall z \in S^1, t \in I$.

Temos que valem as propriedades para todos $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$:

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \text{ e } |z_1 + z_2| \geq |z_1| - |z_2|.$$

Logo, como $|z|^n = 1$ para todo $z \in S^1$,

$$\begin{aligned} |F(z, t)| &\geq |z^n| - |t(a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_0)| \\ &\geq 1 - t(|a_{n-1}z^{n-1}| + \dots + |a_0|) \\ &= 1 - t(|a_{n-1}| + \dots + |a_0|) = (*). \end{aligned}$$

Como $t(|a_{n-1}| + \dots + |a_0|) < 1$, então $(*) > 0$. Assim, F é uma homotopia entre g e h . Mas isso implica que g é homotópica a uma aplicação constante, o que é uma contradição (segundo o Passo 2).

Passo 4: Vamos provar o caso geral. Dada uma equação polinomial

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 = 0,$$

escolha um número real $c > 0$ e considere $x = cy$. Substituindo, obtemos:

$$\begin{aligned} (cy)^n + a_{n-1}(cy)^{n-1} + \cdots + a_1(cy) + a_0 = 0 &\Leftrightarrow \frac{c^n y^n}{c^n} + \frac{a_{n-1}c^{n-1}y^{n-1}}{c^n} + \cdots + \frac{a_1cy}{c^n} + \frac{a_0}{c^n} = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow y^n + \frac{a_{n-1}y^{n-1}}{c} + \cdots + \frac{a_1y}{c^{n-1}} + \frac{a_0}{c^n} = 0. \end{aligned}$$

Escolhendo c suficientemente grande tal que

$$\left| \frac{a_{n-1}}{c} \right| + \left| \frac{a_{n-2}}{c^2} \right| + \cdots + \left| \frac{a_1}{c^{n-1}} \right| + \left| \frac{a_0}{c^n} \right| < 1,$$

temos, pelo Passo 3, que a equação obtida a partir da substituição tem uma raiz $y = y_0$. Logo, a equação original tem uma raiz $x_0 = cy_0$.

Observação 33.1. *Usando o Teorema Fundamental da Álgebra, é possível concluir que uma equação polinomial*

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 = 0$$

de grau $n > 0$ com coeficientes complexos possui n raízes complexas. De fato, primeiro vamos mostrar que um polinômio

$$p(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$$

pode ser escrito como

$$p(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n),$$

onde $x_1, \dots, x_n$ são números complexos. Pelo Teorema 33.3, o polinômio $p(x)$ tem uma raiz complexa x_1 . Assim, $p(x) = (x - x_1)q_1(x)$, onde $q_1(x)$ é um polinômio (YARTEY, 2017, p. 209). Se o grau de $q_1(x)$ é maior ou igual a 1, então $q_1(x) = (x - x_2)q_2(x)$, com x_2 uma raiz de $q_1(x)$ e $q_2(x)$ um polinômio. Repetindo esse processo até que o grau de $q_n(x)$ seja zero, obteremos

$$p(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n)q_n(x).$$

Pela identidade de polinômios, devemos ter $q_n(x) = a_n$. Assim, se $p(x) = 0$, então

$$a_n(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n) = 0,$$

ou seja, $p(x)$ possui n raízes complexas (podendo haver raízes com multiplicidade maior do que 1).

3 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho, foram estudados conceitos topológicos, abordando a Topologia Geral e ideias introdutórias da Topologia Algébrica, com o objetivo de apresentar uma demonstração para o Teorema Fundamental da Álgebra. Esse teorema é abordado ainda no ensino básico, mas sem que seja, necessariamente, trabalhada alguma de suas demonstrações, dada a alta complexidade do conteúdo para essa etapa do ensino. No entanto, até mesmo no contexto dos cursos de graduação em licenciatura em Matemática, é possível que os futuros professores se formem sem que tenham tido contato com a demonstração do TFA.

Tendo como requisito básico a Teoria dos Conjuntos, que costuma ser vista nos primeiros períodos dos cursos de graduação em Matemática, além de conceitos algébricos básicos, que podem ser facilmente apreendidos, apresentamos uma sequência de conteúdos da Topologia que permitiram provar o TFA como um corolário do teorema em que calculamos o grupo fundamental do círculo. Assim, utilizando conteúdos vistos na graduação em Matemática e unindo a assuntos próprios de um curso de Mestrado, foi feita a demonstração de um teorema que faz parte do trabalho de qualquer professor de Matemática.

Apesar da sua importância no campo da Matemática, o TFA é apenas um dos vários resultados aos quais pode-se chegar a partir da Topologia Algébrica, a exemplo da Teoria de Homologia, que associa objetos topológicos a objetos algébricos. Também pode-se expandir esse tema, investigando se o resultado estudado neste trabalho é válido para extensões do conjunto dos números complexos, como o anel dos Quatérnios. Destacamos, ainda, que nesse trabalho foi abordada apenas uma das formas de demonstrar o TFA, com uma prova que não é comumente difundida, permitindo que alunos do nível de graduação explorem esse tema. Mas, é importante que sejam estudadas outras formas de demonstrá-lo, oportunizando-se o aprofundamento em outras teorias e a conexão com diferentes áreas da Matemática.

Referências

- [1] BRASIL, Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018.
- [2] LIMA, Elon Lages. **Grupo Fundamental e Espaços de Recobrimento**. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, 1998.
- [3] MUNKRES, James R. **Topology**. 2ª edição. Prentice Hall, Inc Upper Saddle River, 2000.
- [4] ROQUE, Tatiana. **História da Matemática**: Uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. 1ª edição. Editora Zahar, 2012.
- [5] YARTEY, Joseph Nee Anyah. **Álgebra II**. Salvador: UFBA, Instituto de Matemática e Estatística; Superintendência de Educação a Distância, 2017.