Bruno Cartaxo Brunet Vilar

Um estudo sobre a teoria unificada de Weyl

João Pessoa - PB

2022

Bruno Cartaxo Brunet Vilar

Um estudo sobre a teoria unificada de Weyl

Trabalho de conclusão do curso de graduação em Física do Centro de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade Federal da Paraíba como requisito parcial para a obtenção do título de Bacharel em Física.

Universidade Federal da Paraíba – UFPB

Centro de Ciências Exatas e da Natureza – CCEN

Departamento de Física – DF

Orientador: Prof. Dr. Carlos Augusto Romero Filho

João Pessoa - PB

2022

Catalogação na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

V697e Vilar, Bruno Cartaxo Brunet.
Um estudo sobre a teoria unificada de Weyl / Bruno Cartaxo Brunet Vilar. - João Pessoa, 2022.
41 f. : il.

Orientação: Carlos Augusto Romero Filho.
TCC (Curso de Graduação em Física) - UFPB/CCEN.

1. Relatividade geral. 2. Teoria de Weyl. 3. Eletromagnetismo. I. Romero Filho, Carlos Augusto. II. Título.

UFPB/CCEN CDU 53(043.2)

Elaborado por Ana Roberta Sousa Mota - CRB-15/101

Ata da Sessão Pública da Defesa do Trabalho de Conclusão de Curso de Bacharelado em Física, do discente Bruno Cartaxo Brunet Vilar.

Aos 08 dias do mês de junho do ano de 2022, às 16h, reuniram-se, remotamente, os membros da Banca Examinadora constituída pelos docentes Prof. Dr. Carlos Augusto Romero Filho (Dep. Física – UFPB), orientador e presidente da banca examinadora, Prof. Dr. Valdir Barbosa Bezerra (Dep. Física – UFPB) e Prof. Dr. Iarley Pereira Lobo (UFPB – Campus Areia), para avaliar o discente Bruno Cartaxo Brunet Vilar. Dando início aos trabalhos, o professor orientador e presidente da banca examinadora comunicou aos presentes a finalidade da reunião. A seguir, concedeu a palavra ao discente Bruno Cartaxo Brunet Vilar para que fizesse a explanação, oralmente, de seu Trabalho de Conclusão de Curso, intitulado "*Um estudo sobre a Teoria Unificada de Weyl*". Concluída a exposição, o discente foi arguido pela Banca Examinadora. Após as arguições, a banca examinadora, de comum acordo, [(declarou que a monografia apresentada foi aprovada com nota 9,0) / (emitiu o seguinte parecer: "aprovado")]. Assim sendo, encerrada a reunião, eu, Prof. Dr. Carlos Augusto Romero Filho (Dep. Física – UFPB), orientador e presidente da banca examinadora, lavrei esta ata, que vai assinada pelos demais examinadores, pelo discente e por mim que a subscrevi. João Pessoa, 08 de junho de 2022.

Prof. Dr. Carlos Augusto Romero Filho
UFPB – Orientador

Prof. Dr. Valdir Barbosa Bezerra
UFPB

Prof. Dr. Iarley Pereira Lobo
UFPB

Bruno Cartaxo Brunet Vilar
Discente

Link da reunião: https://meet.google.com/suj-qmpe-vik?pli=1&authuser=1

Dedico esse trabalho à minha sanidade.

Agradecimentos

Agradeço a Deus por sua presença na minha vida.

Agradeço aos meus pais (Flávia Cartaxo e Antonio Vilar) e minha irmã (Bárbara T. Brunet) por todo carinho e dedicação.

À minha mãe minha eterna gratidão, minha amiga, minha companheira nessa jornada. "Te amo mais que o infinito".

À minha família (tias, tios e primos), em especial a minha tia Andréa Cartaxo, obrigado por tudo.

Minha avó (Honorina Maria Cartaxo) por esses anos de dedicação, cuidado e carinho, garatidão eterna.

Ao meu orientador Dr. Carlos Augusto Romero Filho, pelos ensinamentos, dedicação e oportunidade para participar da sua equipe. Grato por tudo grande professor.

Aos amigos nos momentos de desespero. Conseguimos!

Nobody ever figures out what life is all about,
and it doesn't matter. Explore the world.
Nearly everything is really interesting
if you go into it deeply enough.
(Richard P. Feynman)

Resumo

A teoria da Relatividade Geral, proposta por Albert Einstein, é um dos maiores sucessos da física, generalizando e colocando um novo significado na Gravitação Universal de Newton. Mas, com isso surgiu um novo problema, geometrizar o eletromagnetismo, para assim unificar o eletromagnetismo com a gravitação. Uma tentativa foi proposta por Hermann Weyl, generalizando a geometria Riemanniana, para assim acrescentar graus de liberdade e conseguir incluir o eletromagnetismo nas equações. Por mais que a ideia de Weyl fosse brilhante, ela apresentava problemas na física. Einstein apontou esse problema, uma dura crítica que fez com que a teoria de Weyl fosse esquecida por várias décadas. Apesar disto, com o passar dos anos, a sua teoria tem tomado força novamente. Esse trabalho tem como objetivo realizar um revisão bibliográfica da Teoria de Weyl, mostrando em que contexto ela está sendo usada atualmente.

Palavras-chave: Relatividade Geral, Teoria de Weyl, Eletromagnetismo.

Abstract

The theory of General Relativity, proposed by Albert Einstein, is one of the greatest successes in physics, generalizing and putting new meaning in Newton's Universal Gravitation. But with that came a new problem, to geometrize electromagnetism, in order to unify electromagnetism with gravitation. An attempt was proposed by Hermann Weyl, generalizing the Riemannian geometry, in order to add degrees of freedom and be able to include electromagnetism in the equations. As brilliant as Weyl's idea was, it had problems in physics. Einstein pointed out this problem, a harsh criticism that caused Weyl's theory to be forgotten for several decades. Despite this, over the years, his theory has gained strength again. This work aims to carry out a literature review of Weyl's Theory, showing in what context it is currently being used.

Keywords: General Relativity, Weyl's Theory, Electromagnetism.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Transporte de um vetor V^i. 15
Figura 2 – Transporte paralelo ao longo do espaço euclidiano e de um espaço curvo. 16
Figura 3 – Observadores A,B,C e D em diferentes sistemas. 21

Sumário

1	INTRODUÇÃO	11
2	A TEORIA DA RELATIVIDADE GERAL	12
2.1	Tensores	12
2.2	Transporte vetorial e transporte paralelo	14
2.3	Geodésica	16
2.4	Derivada covariante	17
2.5	Curvatura	19
2.6	Postulados	20
2.7	Equações de campo	21
3	TEORIA UNIFICADA DE WEYL	24
3.1	Invariantes de Weyl	26
3.2	Segundo efeito do relógio	26
3.3	A crítica de Einstein revisitada	27
3.4	Eletromagnetismo de Weyl	28
4	CAMPO DE PROCA	33
4.1	Aplicação no campo fraco	33
4.2	Aplicação na cosmologia	36
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS	39
	REFERÊNCIAS	40

1 Introdução

A humanidade, desde a sua origem, vem de forma incessante tentando compreender o mundo a sua volta, sendo a física a ponte que liga os fenômenos da natureza com a ciência. Uma das maiores buscas dos fisícos são as chamadas teorias de unificação, algumas já são bem conhecidas como a unificação do campo elétrico com o magnético e da força fraca com o eletromagnetismo, sendo esta última definida como força eletrofraca.

Em 1915, Albert Einstein concebeu a teoria da relatividade geral, proporcionando uma nova visão a respeito do espaço e do tempo, geometrizando a gravitação, conectando-a com a métrica do espaço de Riemann. Este acontecimento fez com que se buscasse a geometrização de outras áreas da física, tentando, por grande parte da sua vida, geometrizar o eletromagnetismo mas não obteve sucesso.

Para obter uma teoria análoga para o eletromagnetismo, é preciso estabelecer relaçõess de correspondência entre os potenciais eletromagnéticos e o tensor métrico. Um dos problemas encontrados logo de início é que as componentes "g" do tensor métrico já são suficientemente determinadas pelas equações de Campo de Einstein, de modo que não parece cabível conseguir colocar a teoria do Campo Eletromagnético nesta mesma geometria diferenciável (ADLER, 1965). Atualmente não se tem uma teoria da unificação do eletromagnetismo com a gravitação, de modo que uma tentativa de unificação foi proposta por Hermann Weyl, em 1918, sendo esquecida por muito tempo por conta das críticas feitas por Albert Einstein.

A teoria unificada de Weyl vem sendo resgatada nos últimos anos, mostrando uma enorme riqueza. As teorias modificadas da gravitação podem explicar certos fenômenos, assim se faz necessário o estudo destas. O objetivo deste trabalho é apresentar de forma concisa e clara, as bases da Teoria Weyl, bem como seu desenvolvimento no campo de Proca. Esperando assim que este trabalho sirva como um guia para os graduandos que queiram estudar e se aprofundar nesta teoria.

2 A teoria da Relatividade Geral

Para estudar a teoria de Weyl, é necessario entender a teoria da Relatividade Geral, já que uma é a generalização da outra.Por muitos séculos, a teoria da gravitação universal proposta por Newton, no século XVI, foi o melhor modelo para descrever o movimento dos corpos celestes. Ela considera a atração entre corpos como instantânea e sua mudança de coordenadas como sendo dada pelas transformações de Galileu (NUSSENZVEIG, 2013). Foi com esta teoria que se tornou possível a decoberta de Netuno, pois a órbita calculada de Urano não correspondia aos valores observáveis, o que levou à hipótese de um planeta próximo a ele que estava por alterar o seu movimento graças a sua influência gravitacional. Por conta disso também se achou que havia um novo planeta nas proximidades de Mercúrio, como forma de explicar o avanço do seu periélio, mas essa hipótese não vingou, acabando por apresentar uma das limitações da gravitação de Newton.

Em 1905, Albert Einstein propôs a famosa teoria da relatividade restrita. Nesta o espaço e o tempo não tem caráter absoluto e a mudança de coordenadas é dada pelas transformações de Lorentz, a qual foi formulada para solucionar os problemas acerca das equações de Maxwell, já que as transformações não são invariantes pelas equações de Galileu. Ao acrescentar o efeito da gravidade, Einstein generaliza a sua teoria e a força gravitacional é interpretada como uma deformação no espaço-tempo. É essa geometrização da gravitação que o leva á formulação da Relatividade Geral. Mas para entender as equações de Einstein é necessario conhecer o formalismo matemático por trás desta.

2.1 Tensores

De forma bem resumida, os tensores são uma generalização de escalares e vetores. Esses objetos são invariantes ao se realizar mudanças de coordenadas, sendo então covariantes.

Nesta transformação de coordenadas podemos ter um tensor contravariante, covariante ou misto. A ordem de um tensor é definida como a sua quantidade total de índices, tal que para ordem “zero” temos um escalar e para ordem “um” um vetor, para os demais casos temos um Tensor de ordem N (número total de índices). Segue as transformações dos tensores contravariantes e covariantes, respectivamente.

$$\bar{A}^i = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j} A^j, \tag{2.1}$$

$$\bar{A}_i = \frac{\partial x_j}{\partial \bar{x}^i} A^j, \tag{2.2}$$

Tensores mistos, como o nome já diz, obedecem as duas transformções acima, estes são da forma

$$\bar{A}^i_j = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^l}\frac{\partial x_k}{\partial \bar{x}^j}A^k_l. \tag{2.3}$$

Os tensores apresentam, diversas propriedades. Durante este trabalho elas serão usadas corriqueiramente. Abaixo abordaremos algumas destas; as demais como, por exemplo, abaixamento e levantamento de índices, teorema do quociente entre outras, podem ser encontradas em livros como (ADLER, 2021) (D'INVERNO, 1992) (SOKOLNIKOFF, 1964) (NETO, 2010).

1) A soma de dois tensores com os mesmos números de índices covariantes e contravariantes pode ser definido como a soma de suas componentes, resultando em um tensor,

$$A^{ij}_k + B^{ij}_k = C^{ij}_k. \tag{2.4}$$

2) O produto de um tensor por um escalar continua sendo um tensor.

3) Um tensor é dito simétrico quando a permutação entre seus índices o mantém inaterado, já no caso antissimetrico há uma mudança no seu sinal.

- Simétrico:
$$A^{ij} = A^{ji} \tag{2.5}$$

- Antissimétrico:
$$B^{ij} = -B^{ji} \tag{2.6}$$

4) A contração de um tensor simétrico com um antissimétrico é zero.

5) A multiplicação entre tensores pode ser dada por meio do produto externo ou interno (também chamado de contração).

- Produto externo
$$A^{ij}_k B^m_n = C^{ijm}_{kn} \tag{2.7}$$

- Produto interno
$$A^{ij}_k B^m_i = C^{jm}_k \tag{2.8}$$

Nesta última equação usamos a notação de Einstein, onde índices repetidos são tomados como uma soma, desta forma omitimos o simbôlo de somatório. Um tensor bastante importante é o métrico, $g_{\mu\nu}$, que, além de abaixar e subir os índices de um tensor, é o responsável por informar como calcular a distância entre dois pontos(2.24), acabando por levar à uma generalização da distância Euclidiana.

2.2 Transporte vetorial e transporte paralelo

Trabalhando no Espaço Riemanniano, já que a teoria da Relatividade Geral é feita neste espaço, é necessário uma operação que permita transportar objetos de um ponto a outro, visto que diferente da geometria Euclidiana, um vetor, ao ser transportado, pode ter alteração na sua direção. Por meio do transporte vetorial obteremos o transporte paralelo ao impormos que o espaço é Riemanniano.

Tomando um campo vetorial ζ^i com compontentes constantes em um sistema de coordenadas (x^α), ao efetuar uma mudança para as coordenadas $\bar{x}^\alpha$ segue que:

$$\bar{\zeta}^i = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k}\zeta^k. \tag{2.9}$$

Como o termo da derivada parcial é arbitrário, $\bar{\zeta}^i$ varia ao longo do espaço. Variando este em relação a um parâmetro u, obtemos:

$$\frac{d\bar{\zeta}^i}{du} = \frac{\partial^2 \bar{x}^i}{\partial x^k \partial x^l}\frac{dx^l}{du}\zeta^k, \tag{2.10}$$

que pode ser escrita da seguinte forma:

$$\frac{d\bar{\zeta}^i}{du} = \bar{\Gamma^i}_{mj}\frac{d\bar{x}^m}{du}\bar{\zeta}^j. \tag{2.11}$$

Onde

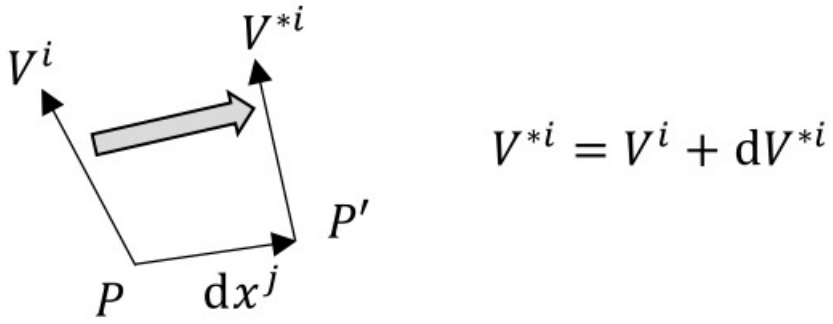
$$\bar{\Gamma^i}_{mj} = \frac{\partial^2 \bar{x}^i}{\partial x^k \partial x^l}\frac{dx^l}{d\bar{x}^m}\frac{dx^k}{d\bar{x}^j}. \tag{2.12}$$

Considerando apenas a diferencial de 2.9 e ignorando a origem desta, a equação é generalizada e assim obtemos uma lei de transporte para o campo vetorial $\bar{\zeta}^i$, lembrando que com isto, a forma da conexão não está mais restrita a 2.12 (ADLER, 1965).Podemos então transportar o vetor de um ponto P a um ponto P', ou seja, ζ^i em um ponto x é transportado para $\zeta^i + d\zeta^i$ em um ponto $x + dx$.

$$d\zeta^i = {\Gamma^i}_{mj}dx^m\zeta^j. \tag{2.13}$$

Para melhor entendimento desta equação, segue a imagem:

Figura 1 – Transporte de um vetor V^i.



Fonte: Disponível em ADLER, R. J. General Relativity and Cosmology. [S.l.]: Springer, 2021.

Onde vemos a atuação do transporte em um vetor V^i, este acabando por ir de um ponto P para um P'.

Um cálculo direto, utilizando a expansão de Taylor, bem como as transformações 2.1 e 2.2 como pontuado por (D'INVERNO, 1992), leva a transformção de Γ

$$\bar{\Gamma}^j_{ms} = \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^i}\frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^m}\frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^s}\Gamma^i_{\alpha\beta} + \frac{\partial^2 \bar{x}^j}{\partial x^\alpha \partial x^\beta}\frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^m}\frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^s}. \tag{2.14}$$

Graças ao termo inomogêneo é visível que a conexão não é um tensor, pois não se transforma como um, mas ao se tomar transformações lineares de coordenadas este termo será zero, logo nesse caso "Γ^j_{ms}" se transforma como um tensor. Outra situação é a difereça entre conexões, $\bar{\Gamma}^j_{ms} - \Gamma^j_{ms}$, onde temos novamente um tensor.

Com tudo isto exposto, consideremos agora o espaço Riemanniano. Neste, o comprimento de um vetor é preservado mediante o transporte paralelo mas a sua direção não. Essa condição pode ser descrita pela seguinte equação:

$$\frac{d}{ds}(g_{ik}\zeta^i\eta^k) = 0. \tag{2.15}$$

Onde temos a derivada, do produto escalar entre os vetores ζ^i e η^k, em relação ao parâmetro s, onde g_{ik} é o tensor métrico do espaço. Fazendo a derivada de 2.15 e usando 2.10, após certas manipulações temos:

$$\Gamma^r_{ki} = \frac{1}{2}g^{lr}\left(\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{li}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l}\right). \tag{2.16}$$

Outra forma de representar a conexão Γ, também conhecida como símbolo de Christoffel é

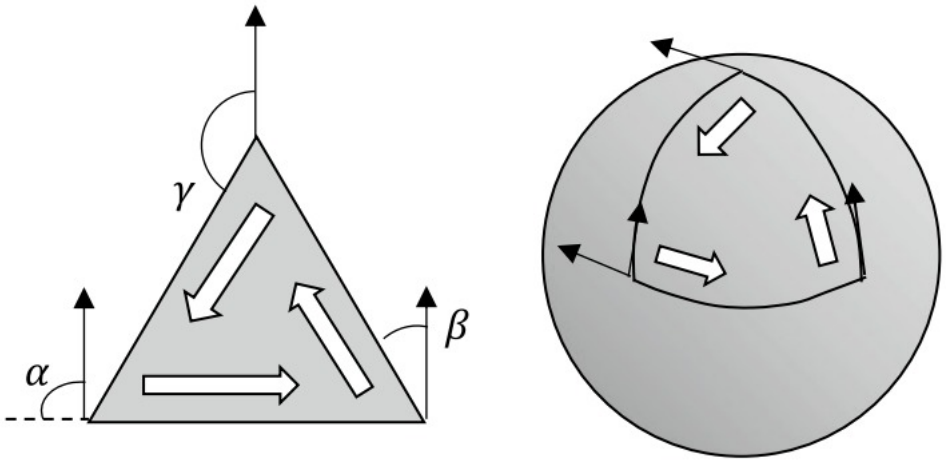
$$\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \beta\gamma \end{matrix} \right\}. \tag{2.17}$$

Com isto obtemos um deslocamento no espaço métrico

$$d\zeta^i = \begin{Bmatrix} i \\ \alpha\beta \end{Bmatrix} dx^m \zeta^\beta. \tag{2.18}$$

No espaço Riemanianno os símbolos de Christoffel são simétricos nos índices inferiores. Para ilustrar o transporte paralelo tomemos a seguinte imagem.

Figura 2 – Transporte paralelo ao longo do espaço euclidiano e de um espaço curvo.



Fonte: Disponível em ADLER, R. J. General Relativity and Cosmology. [S.l.]: Springer, 2021

Adotando como ponto inicial o vértice esquerdo do triângulo, verifica-se que na imagem da esquerda a direção do vetor não munda quando este volta ao seu ponto de origem, após ser transportado paralelamente, já na outra imagem a direção do vetor muda. Concluindo então que a direção do vetor depende do trajeto feito por ele quando se trata de espaços curvos.

2.3 Geodésica

A geodésica pode ser definida tanto como curvas auto-paralelas como a curva que minimiza a distância entre dois pontos. Por simplicidade, o primeiro caso será deduzido e o segundo caso analisado. Toma-se uma curva $C : x^l = x^l(u)$, como queremos que esta seja uma geodésica, o transporte paralelo de um vetor tangente t deve continuar sendo tangente ao longo da curva, ou seja, paralelo a si mesmo. Usando a equação 2.18 transportaremos o vetor tangente t^i do ponto u ao ponto u',

$$\bar{t^i}(u') = t^i(u) + \begin{Bmatrix} i \\ jk \end{Bmatrix} dx^j t^k(u), \tag{2.19}$$

no entanto, podemos achar o vetor no ponto u) por uma expansão de Taylor do ponto),

$$\bar{t^i}(u') = t^i(u) + \frac{dt^i}{du}du. \tag{2.20}$$

Pela definição de geodésica acima, as expressões 2.19 e 2.20 são iguais.

$$\begin{Bmatrix} i \\ jk \end{Bmatrix} dx^j t^k(u) = \frac{dt^i}{du}du \tag{2.21}$$

Adotando u como o comprimento da curva, $du = ds$, ao usarmos a derivada da posição normalizada como vetor tangente, segue que:

$$t^j = \frac{dx^j}{ds}. \tag{2.22}$$

Com isto, a equação 2.21 se torna:

$$\frac{d^2x^i}{ds^2} + \begin{Bmatrix} i \\ jk \end{Bmatrix} \frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds} = 0. \tag{2.23}$$

Assim finalmente obtemos a equação da geodésica, e fazendo os símbolos de Christoffel zero recuperamos a equação da reta. Para o caso em que ela é definida como o extremo de um funcional, é feito a extremização da seguinte equação, como pontuado por (ADLER, 1965),

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu. \tag{2.24}$$

Sendo esta a definição de distância na geometria riemannianna, ds^2 é o elemento de linha e $g_{\mu\nu}$ o tensor métrico, por meio do cálculo variacional (NETO, 2010) (BUTKOV, 1978) (ARFKEN, 2017), é desta que obtemos a distância infinitesimal entre dois pontos na geometria Riemanniana, uma expressão análoga ao caso Euclidiano sendo que agora considerando geometrias mais gerais.

2.4 Derivada covariante

Pelas propriedades do espaço Riemanniano, é de se esperar que a derivada ordinária não seja adequada para descrever o comportamento/variação de um tensor em pontos diferentes do espaço, portanto precisamos de uma operação que obedeça as transformações tensoriais 2.1 2.2. Baseado nisto construiremos a derivada covariante.

Para contruir esta devivada tomaremos a diferença entre dois vetores, o vetor transportado de x até $x + dx$ e o valor do vetor neste ponto, ou seja, sem o transporte paralelo, assim poderemos ver o variação do vetor ao longo do espaço. Temos então:

$$\zeta^i(x^j + dx^j)) - \zeta^{i'}(x^j + dx^j), \tag{2.25}$$

onde "$\zeta^{i'}$" representa o vetor transportado. Usando a expanção de Taylor em ζ^i e 2.13 em $\zeta^{i'}$ podemos reecrever 2.25 da seguinte maneira:

$$\zeta^i(x^j + dx^j) - \zeta^{i'}(x^j + dx^j) = [\frac{\partial \zeta^i}{\partial x^k} - \Gamma^i_{kl}\zeta^l]dx^k + O(dx^k)^2 \tag{2.26}$$

Desta expressão interpretamos o termo entre colchetes como um análogo a derivada ordinária. Ao usarmos o teorema do quociente (SOKOLNIKOFF, 1964), verificamos que esta quantidade é um tensor. Ao longo deste trabalho, a derivada ordinária será representada por "|" e a covariante por "||" como exemplo segue:

$$A^i_{jk|z} = \frac{\partial A^i_{jk}}{\partial x^z} \tag{2.27}$$

e

$$A^i_{||z} = \frac{\partial A^i}{\partial x^z} - \begin{Bmatrix} i \\ zl \end{Bmatrix} A^l = A^i_{|z} - \begin{Bmatrix} i \\ zl \end{Bmatrix} A^l. \tag{2.28}$$

Considerando agora o transporte paralelo e expressando a conexão em termo do simbolo de Cristofell, como proposto na equação 2.17, obtemos a derivada covariante de um campo vetorial no campo Riemanniano:

$$\zeta^i_{||k} = \zeta^i_{|k} + \begin{Bmatrix} i \\ kl \end{Bmatrix} \zeta^l. \tag{2.29}$$

Vale mencionar que, com a derivada covariante sendo zero e definindo ζ^i como um vetor tangente, obtemos a equação 2.23, como esperado. Tomando que a derivada covariante satisfaz a regra de Leibniz (CARROLL, 2019), segue que para um vetor covariante temos:

$$\zeta_{i||k} = \zeta_{i|k} - \begin{Bmatrix} i \\ kl \end{Bmatrix} \zeta_l. \tag{2.30}$$

Já um caso mais geral é dado por:

$$\zeta^{i...}_{j...||k} = \zeta^{i...}_{j...|k} + \begin{Bmatrix} i \\ lk \end{Bmatrix} \zeta^{l...}_{j...} + ... - \begin{Bmatrix} l \\ jk \end{Bmatrix} \zeta^{i...}_{l...} - ... \tag{2.31}$$

Uma propriedade importante, do espaço de Riemman, é que a derivada covariante do tensor métrico, g_{ik}, é zero (CHAPTER,) Sendo este um teorema demonstrado por Ricci.

Por fim, é com o auxílio da derivada covariante que se define a divergência de um vetor. Esta é dada pela contração dos índices do vetor $\zeta^i_{||j}$,

$$\zeta^i_{||i} = \zeta^i_{|i} + \Gamma^k_{kl}\zeta^l. \tag{2.32}$$

Para escreve-la de uma forma mais simples, que não envolva conexões, expressemos Γ^k_{kl} por 2.16

$$\Gamma^k_{kl} = \frac{1}{2}g^{kn}(g_{nk|l} + g_{ln|k} - g_{kl|n}) = \frac{1}{2}g^{kn}g_{nk|l}. \tag{2.33}$$

Como mostrado em (SOKOLNIKOFF, 1964), a inversa do tensor métrico, g^{ik} é definido pela seguinte equação:

$$g^{ik} = \frac{\Delta^{ik}}{|g|}, \tag{2.34}$$

a quantidade Δ^{ik} é o cofator da matriz g^{ik} e |g| é o seu determinante. Dessa relação se obtém

$$g^{ik} = \frac{1}{|g|}\frac{\partial|g|}{\partial g_{ik}} \tag{2.35}$$

substituindo em 2.33,

$$\Gamma^k_{kl} = \frac{1}{2}(\frac{1}{|g|}\frac{\partial|g|}{\partial g_{kt}})\frac{\partial g_{kt}}{\partial x^l} = \frac{1}{2|g|}|g|_{|l} = (log\sqrt{|g|})_{|l} = \frac{(\sqrt{|g|}_{|l})}{\sqrt{|g|}}. \tag{2.36}$$

Assim 2.32 pode ser escrita da seguinte maneira

$$\zeta^i_{||i} = \zeta^i_{|i} + \frac{(\sqrt{|g|})_{|l}}{\sqrt{|g|}}\zeta^l = \frac{1}{\sqrt{|g|}}(\sqrt{|g|}\zeta^l)_{|l}. \tag{2.37}$$

2.5 Curvatura

A curvatura do espaço tem papel fundamental nos resultados físicos. A teoria da Relatividade Geral, proposta por Einstein, trata a gravitação como uma curvatura do espaço. Com isto vemos o quão importante é uma quantidade que descreva o grau desta no espaço. Para defini-la começamos com o fato de que a derivada covariante não comuta em espaços curvos, como mostrado pela 2.2 onde transportamos um vetor. Tomando um vetor ζ^i segue que:

$$\zeta^i_{||k||j} \neq \zeta^i_{||j||k}. \tag{2.38}$$

A derivada covariante só comutará caso o espaço seja plano, pois assim o transporte do vetor é independente da curva escolhida. Com isto e usando a 2.38 (ADLER, 2021), definimos o tensor de curvatura de Riemann.

$$\zeta^i_{||k||j} - \zeta^i_{||j||k} = R^i{}_{lkj}\zeta^l, \tag{2.39}$$

sendo este representado por:

$$R^i_{lkj} = \left\{ \begin{matrix} i \\ kl \end{matrix} \right\}_{|j} - \left\{ \begin{matrix} i \\ lj \end{matrix} \right\}_{k} + \left\{ \begin{matrix} i \\ mj \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} m \\ kl \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} i \\ mk \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} m \\ jl \end{matrix} \right\} \tag{2.40}$$

Com o tensor de Riemann sendo zero o espaço é plano e temos então uma métrica Lorentziana. Este tensor tem 4 dimensões, resultando em 256 componentes que, por meio de simetrias e identidades, conseguimos reduzir este número, seguem elas:

- Antissimetria entre os dois ultimos índices:

$$R_{ilkj} = -R_{iljk}. \tag{2.41}$$

- Antissimetria entre os dois primeiros índices:

$$R_{ilkj} = -R_{likj}. \tag{2.42}$$

- Simetria entre mudança de pares:

$$R_{ilkj} = R_{kjil}. \tag{2.43}$$

Onde foi usado a métrica para abaixar o índice. É com o uso desta que chegamos a seguinte identidade:

$$R_{ilkj} + R_{ikjl} + R_{ijkl} = 0. \tag{2.44}$$

Com tudo isso, obtemos a identidade de Bianchi:

$$R^i_{lkj||p} + R^i_{ljp||k} + R^i_{lpk||j} = 0. \tag{2.45}$$

Desta forma as 256 componentes passam a ser 20 componentes independentes.

2.6 Postulados

A relatividade especial tem como seus pilares os dois postulados:

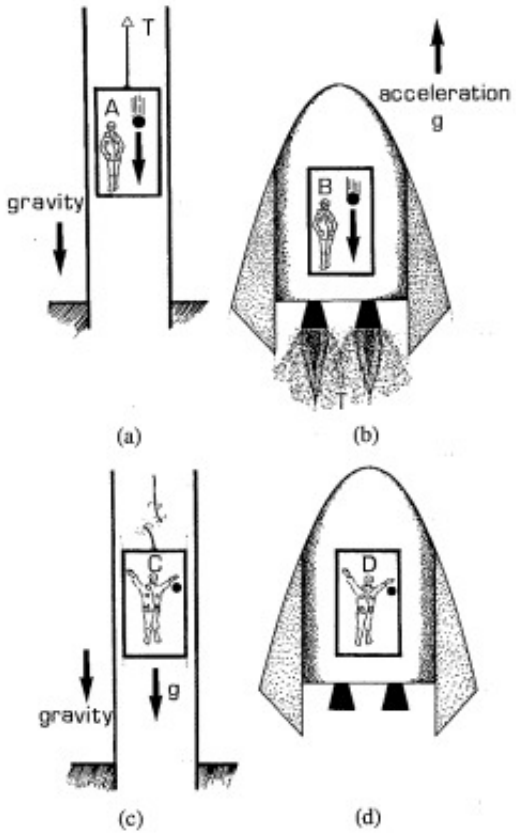
1.Princípio da equivalência: As leis da Física são as mesmas em todos os sistemas referenciais inerciais.

2.Princípio da Constância da Velocidade da Luz: A velocidade da luz no vácuo tem o mesmo valor para todos os sistemas referenciais inerciais.

Para clarear a ideia do primeiro postulado, consideremos o seguinte situação ilustrada pela figura 2.6

Um observador A está em um elevador que se encontra em repouso em relação a Terra, tal que, ao soltar um corpo de massa m, ele irá cair no chão. Para um observador B em um foguete, distante de qualquer corpo massivo, com aceleração g, os resultados experimentais serão os mesmos que os obtidos por A. Já para um observador C em queda livre dentro de um elevador, uma vez que o cabo se rompeu, o objeto então, ao ser solto estará em repouso em relação ao observador, sendo equivalente a um observador D em um foguete estacionário livre da influência de campos gravitacionais.

Figura 3 – Observadores A,B,C e D em diferentes sistemas.



Fonte: Disponível em ELLIS, G. F. R.; ELLIS, G. F.; WILLIAMS, R. M. Flat and curved space-times. [S.l.]: Clarendon Press, 2000.

2.7 Equações de campo

Com o objetivo de "encontrar" as equações de campo da relatividade geral no vácuo, a partir da gravitação clássica, consideremos a equação de Laplace para um campo gravitacional de potencial ϕ

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^{i^2}} = \sum_{i=1}^{3} \phi_{|i|i} = 0. \tag{2.46}$$

e que a métrica do espaço tempo para um campo gravitacional fraco (IQBAL et al., 2020) nos leva a:

$$g_{00} = 1 + \frac{2\phi}{c^2}. \tag{2.47}$$

Segue que:

$$\sum_{i=1}^{3} g_{00|i|i} = 0. \tag{2.48}$$

Sem a presença do campo gravitacional, $\phi = 0$, consequentemente as suas derivadas segundas também, sendo então uma métrica Lorentziana, logo $R_{\alpha\beta\gamma\sigma}$ é nulo. Como a

gravidade está intimamente relacionada com a geometria do espaço tempo, as equações de campo que desejamos devem ter o tensor de curvatura, e ser análogas à 2.48, pois ela é um caso limite por se tratar de um campo fraco.

O análogo da soma no formalismo tensorial é a contração de índices, o que leva o tensor de curvatura para o tensor de Ricci $R_{\beta\sigma}$,

$$R_{\beta\sigma} = R^{\alpha}{}_{\beta\alpha\sigma} = g^{\alpha\gamma}R_{\alpha\beta\gamma\sigma}. \tag{2.49}$$

A contração é feita nesses índices pois nas demais elas seriam zero, tendo em vista as propriedades de simetria. Já o escalar de Ricci é dado por:

$$R = g^{\beta\sigma}R_{\beta\sigma}. \tag{2.50}$$

Calculando a divergência de $R_{\beta\sigma}$, uma vez que leis de conservação estão associadas a divergência nula. Subindo os dois primeiros índices de 2.45 e contraindo o primeiro com o terceiro e o segundo com o quarto temos:

$$R^{\alpha\beta}{}_{\alpha\beta||\nu} + R^{\alpha\beta}{}_{\beta\nu||\alpha} + R^{\alpha\beta}{}_{\nu\alpha||\beta} = 0. \tag{2.51}$$

Aplicando 2.49 ,2.50, propriedades de simetria e renomenado os índices mudos:

$$R^{\mu\nu}_{||\mu} = \frac{1}{2}(g^{\mu\nu}R)_{||\mu} \tag{2.52}$$

Definimos então o tensor de Einstein:

$$G^{\mu\nu} = R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R, \tag{2.53}$$

que apresenta divergência zero, fica evidente que $G^{\mu\nu}$ é nulo se e somente se $R^{\mu\nu}$ é nulo.

Agora voltemos a atenção para o caso em que se tenha matéria. Einstein teve como inspiração a seguinte equação da mecânica clássica.

$$\nabla^2\phi = 4\pi G\rho, \tag{2.54}$$

sendo esta a equação de Poisson, como pontuado por ele em (EINSTEIN, 1921)"We must next attempt to find the laws of gravitational field .For this purpose ,Poisson's equation of the Newtonian theory must serve as a model." , G é a constante gravitacional de Newton e ρ a densidade de matéria. Ele propôs a seguinte equação:

$$G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}, \kappa = \frac{8\pi G}{c^4}, \tag{2.55}$$

onde $G_{\mu\nu}$ é o tensor apresentado 2.53, $T_{\mu\nu}$ é o tensor energia-momento e κ a constante de acoplamento. Por esta equação, é nitído que a energia do espaço determina sua geometria.

Como mencionado na equação 2.53 o divergente de $G^{\mu\nu}$ é nulo, logo por 2.55 temos a conservação do tensor energia-momento.

O primeiro experimento que comprovou a Teoria da Relatividade Geral, foi realizado na cidade de Sobral, interior do Ceará, em 1919 (CRISPINO; KENNEFICK, 2019). Outros experimentos ajudaram a ratificar essa teoria, como o redshift gravitacional, a precessão do periélio de Mercúrio, o atraso do radar e o GPS (ELLIS; ELLIS; WILLIAMS, 2000)

3 Teoria Unificada de Weyl

A forma que Weyl encontrou para unificar o campo eletromagnético com o gravitacional foi generalizar a geometria Riemanniana, fazendo com que a norma de um vetor ao longo de um transporte paralelo varie. Esta modificação faz com que a derivada covariante com relação ao tensor métrico não seja mais zero e sim

$$g_{\beta\lambda||\alpha} = \sigma_\alpha g_{\beta\lambda}, \tag{3.1}$$

com σ_α sendo as componetes de um campo uma forma σ.

O gauge de Weyl consiste do tripleto (M,g,σ), com M sendo uma variedade, possuindo uma métrica g e um campo uma forma σ. Com a derivada covariante sendo simétrica, uma álgebra direta mostra que a conexão afim é escrita como:

$$\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \beta\gamma \end{matrix} \right\} - \frac{1}{2} g^{\alpha\mu}[g_{\mu\beta}\sigma_\gamma + g_{\mu\gamma}\sigma_\beta + g_{\beta\gamma}\sigma_\mu]. \tag{3.2}$$

O primeiro termo desta equação é o símbolo de Christofell. Vale mencionar que caso o segundo termo seja zero voltamos para a geometria Riemanniana. Por meio de 3.2 todas as ideias da Geometria Riemanniana, desenvolvidas nas seções anteriores, podem ser generalizadas, tendo como ponto de partida o transporte vetorial, ficando evidente que basta substituir a conexão. Na teoria de Weyl, ao tomar a transformação conforme:

$$g'_{\mu\nu} = e^f g_{\mu\nu}, \tag{3.3}$$

O f é uma função escalar arbitrária em M, da equação 3.1 obteremos a transformação para o σ:

$$g'_{\mu\nu||'\alpha} = \sigma'_\alpha g'_{\mu\nu}. \tag{3.4}$$

Substituindo 3.3 no lado esquerdo temos:

$$(e^f g_{\mu\nu})_{||\alpha} = (e^f)_{||\alpha} g_{\mu\nu} + e^f \sigma_\alpha g_{\mu\nu} = \partial_\alpha f e^f g_{\mu\nu} + e^f \sigma_\alpha g_{\mu\nu}. \tag{3.5}$$

Retomando 3.4 temos:

$$\partial_\alpha f e^f g_{\mu\nu} + e^f \sigma_\alpha g_{\mu\nu} = e^f g_{\mu\nu} \sigma'_\alpha. \tag{3.6}$$

Logo,

$$\sigma'_\alpha = \sigma_\alpha + f_{|\alpha}. \tag{3.7}$$

Portanto a equação 3.1 não muda ao ir de um gauge para outro ao efetuar as transformações 3.3 e 3.7. Agora, veremos como o comprimento do vetor se comporta ao

longo do transporte paralelo em uma curva fechada onde $x0$ é o ponto inicial. Segue da equação de compatibilidade:

$$dl = \frac{1}{2}(\sigma_\alpha dx^\alpha)l, \tag{3.8}$$

onde fica clara a analogia com 2.13. Integrando ,

$$\oint \frac{dl}{l} = \oint \frac{1}{2}\sigma_\alpha dx^\alpha \tag{3.9}$$

$$l = l_0 e^{\frac{1}{2}\oint \sigma_\alpha dx^\alpha}, . \tag{3.10}$$

com $dl = 0$ voltaremos para geometria riemanniana, e com uma escolha adequada de f obtemos $\sigma'_\alpha = 0$, logo σ_α deve ser o gradiente de um campo vetorial,

$$\sigma_{\alpha|\beta} - \sigma_{\beta|\alpha} = 0. \tag{3.11}$$

Temos então a teoria de Weyl integravel, $dl = 0$. Para a não integral temos a seguinte equação tensorial:

$$F_{\mu\nu} = \sigma_{\alpha|\beta} - \sigma_{\beta|\alpha}. \tag{3.12}$$

Weyl então viu que além da curvatura de direção (Richtungkrummung) há também a curvatura de comprimento (Streckenkrummung) (ROMERO; LIMA; SANOMIYA, 2019), a primeira sendo dada pelo tensor usual de curvatura $R^\alpha_{\beta\mu\nu}$ e a segunda por $F_{\mu\nu}$. Nesta nova geometria também se consegue definir o conceito de geodésica como curvas auto-paralelas, já como o extremo de uma curva só é possível na teoria de Weyl integrável, satisfazendo as condições de Helmholtz(NIGAM; BANERJEE, 2016), tendo em vista que o comprimento não é invariante pelas transformações de Gauge.

O tensor $F^{\mu\nu}$ é invariante pelas transformações de gauge 3.3 e 3.7 e satisfaz a seguinte equação tensorial.

$$F_{\mu\nu|\lambda} + F_{\lambda\mu|\nu} + F_{\nu\lambda|\mu} = 0, \tag{3.13}$$

de forma compacta podemos escrever esta usando a notação de antissimetrização:

$$\{F_{\mu\nu|\lambda}\} \tag{3.14}$$

Com isto fica clara a semelhança de 3.12 e 3.14 com as equações de Maxwell, sendo natural interpretar $F_{\mu\nu}$ e σ_μ como o tensor eletromagnético e o potencial vetor respectivamente.

3.1 Invariantes de Weyl

A geometria de Weyl requer uma definição de invariante mais específica, pois ao tomar a contração do vetor ζ_α,

$$\zeta_\alpha = g_{\alpha\beta}\zeta^\beta, \tag{3.15}$$

ele não depende da métrica, mas pela transformação 3.3,

$$\zeta'_\alpha = e^f \zeta_\alpha, \tag{3.16}$$

fica nítido que o vetor apresenta uma dependência de gauge. Por conta disto Weyl definiu o conceito de peso de um tensor mediante uma transformação de gauge. Um tensor é dito de peso n se admitir a seguinte transformação:

$$\zeta'^{\alpha\ldots}_{\beta\ldots} = e^{nf}\zeta^{\alpha\ldots}_{\beta\ldots}. \tag{3.17}$$

Para que seja um invariante de Weyl é necessário que o peso seja zero. Como exemplo temos a equação 3.15 que apresenta peso 1, já a densidade tensorial $\sqrt{-g}$ apresenta peso 2,$\sqrt{-g'} = e^{2f}\sqrt{-g}$, e a conexão afim 3.2 apresenta peso zero. Como o tensor de Riemman e de Ricci dependem apenas da conexão eles também são invariantes de Weyl, diferente do escalar de Ricci que apresenta peso -1; por fim o tensor $F_{\mu\nu}$, como mencionado anteriormente, é invariante pelas transformações de gauge 3.3 e 3.7, ou seja, $F'_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}$ tendo portanto peso 0.

3.2 Segundo efeito do relógio

Tomando com base (ADLER, 1965), a crítica de Einstein reside na equação 3.10, considerando o caso estático, com um campo gravitacional radialmente simétrico, em que um campo eletrostático não zero está presente, com a única componente diferente de zero do campo de Weyl sendo σ_0. Em seguida, colocando um relógio em um ponto fixo do campo, este mede o tempo por meio do seu período, que tem duração τ_0 na medida de tempo x^0. Este tempo do relógio parado coincide com a quatidade $(1/c)l$, então depois que um tempo x^0 passa, o comprimento é dado pela 3.10 . Tomando l_0 como o período τ_0, ou seja, no momento x^0 o "tique-taque" coincide com o intervalo do tempo físico. Quando o tempo x^0 passar teremos

$$\tau = \tau_0 e^{\frac{1}{2}\oint \sigma_\alpha dx^\alpha}. \tag{3.18}$$

Logo, dois relógios idênticos em dois pontos diferentes do campo com diferentes σ_0 iam diferir cada vez mais na sua frequência; os relógios atômicos então teriam seus vários espectros dependendo do local e do passado dos átomos, mas as linhas espectrais são bem definidas, como mencionado em (NYAMBUYA, 2014). Einstein diz que:

"... apart from the agreement with reality, it is at any rate a grandiose achievement of the mind... a first class [stroke of] genius."

Com essa dura crítica, Weyl, bem como seus colegas, Arthur S. Eddington e Paul A. M. Dirac tentaram salvar a teoria com as seguintes publicações (WEYL et al., 1929), (EDDINGTON, 1921) e (DIRAC, 1973), mas não tiveram êxito.

Este estranho fenômeno é conhecido como segundo efeito do relógio e até o momento ele não foi identificado por meio de experimentos. Atualmente é conhecido que a física clássica não descreve os fenômenos atômicos sem a mecânica quântica, fazendo a crítica de Einstein ser um pouco menos impactante.

3.3 A crítica de Einstein revisitada

Essa objeção feita por Einstein, tem como base a definição de tempo próprio riemanniana

$$\Delta\tau = \frac{1}{c}\int [g(V,V)]^{\frac{1}{2}} d\lambda = \frac{1}{c}\int [g_{\mu\nu}V^{\mu}V^{\nu}]^{\frac{1}{2}} d\lambda, \tag{3.19}$$

com V sendo o vetor tangente à linha de universo do relógio viajando ao longo da curva $x^{\alpha} = x^{\alpha}(\lambda)$, e c a velocidade da luz. Além do campo de Weyl não estar presente em 3.19, essa definição de tempo próprio não é invariante pelas transformações de Weyl. É necessário uma nova definição de tempo próprio, satisfazendo as condições(ROMERO; LIMA; SANOMIYA, 2019):

- Ser construido inteiramente da geometria do espaço-tempo;
- Ser consistente com o Princípio da Invariância de Gauge;
- Depender tanto da métrica $g_{\mu\nu}$ como do campo σ_{μ};
- Ser igual a 3.19 quando $\sigma_{\mu} = 0$;
- Deve ser escrito na forma $\Delta\tau = \int F(V, g, \sigma)d\lambda$, sendo F uma função homogênea de primeiro grau em relação ao vetor tangente V. Garantindo então a invariância de $\Delta\tau$ sob reparametrização.

Não é necessário, mas seria de grande interesse que com o novo $\Delta\tau$, uma definição de geodésica por meio do cálculo variacional fosse possível.

Uma definição de $\Delta\tau$ que satisfaz todas as condições mencionadas acima foi proposta por V. Perlick (PERLICK, 1987). Ele define que uma curva tipo tempo $\alpha(t)$, é chamada de relógio padrão, se a aceleração$\frac{D\alpha'}{dt}$ é ortogonal a velocidade α', obtendo-se:

$$\Delta\tau(t) = (\frac{d\tau/dt}{\sqrt{g_{\alpha\beta}\dot{x}^{\alpha}\dot{x}^{\beta}}})_{t=t0}\int_{t_0}^{t} exp(-\frac{1}{2}\int_{u_0}^{u}\sigma_{\rho}\dot{x}^{\rho}ds)[g_{\mu\nu}\dot{x}^{\mu}\dot{x}^{u}]^{\frac{1}{2}} \tag{3.20}$$

O ponto se refere a derivada com relação ao parâmetro da curva. O segundo efeito do relógio também é previsto nesta nova definição (AVALOS; DAHIA; ROMERO, 2018).

3.4 Eletromagnetismo de Weyl

Antes de começar, vale mencionar novamente que $F_{\mu\nu}$ corresponde ao tensor eletromagnético e σ_{μ} ao quadripotencial eletromagnético. Para relacionar as 14 quantidades de campo geradas por σ_{α} e $g_{\alpha\beta}$ é usado a seguinte ação:

$$S = \int W\sqrt{-g}d^4x. \tag{3.21}$$

W precisa ser um invariante de Weyl, como $\sqrt{-g}$ tem peso 2, W deve ter um peso -2, a ação da relatividade geral com campo de Maxwell tem a seguinte forma:

$$S = \int \sqrt{-g}[R + (1/16\pi)F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}]d^4x. \tag{3.22}$$

Tomando em conta 3.22 e sabendo que R tem peso -1, a forma mais simples para 3.21 é:

$$S = \int (R^2 + wF_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta})\sqrt{-g}d^4x. \tag{3.23}$$

Sendo os termos no integrando um invariante de Weyl e w uma constante. Vale mencionar que a densidade tensorial $F^{\alpha\beta}\sqrt{-g}$ apresenta peso 0, pois

$$F^{\alpha\beta} = g^{\mu}g^{\beta\mu}F_{\mu\nu} \tag{3.24}$$

tem peso 2.

A ação 3.23 pode ser resolvida tanto tomando o gauge natural, onde o escalar de curvatura é dado pela constante Λ, como para um gauge qualquer, nestas duas situações há uma variação para ser feita na métrica e outra no campo de Weyl. Para se fazer a variação, é necessário conhecer a expressão de R, uma vez que ele depende explicitamente de σ_{α}.

Para isto será tomado um sistema de coordenadas geodésicas, ou seja, os símbolos de Christofell serão zero. Esta escolha de sistema pode ser feita uma vez que R é um escalar e facilitará as contas. Logo 3.2 é escrita da seguinte forma:

$$\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\lambda} = -\frac{1}{2}(\delta^{\alpha}_{\beta}\sigma_{\lambda} + \delta^{\alpha}_{\lambda\beta} - g_{\beta\lambda}\sigma^{\alpha}) \tag{3.25}$$

Nesta operação os tensores métricos foram contraidos. Substituindo 2.40 em 2.49

$$R = g^{\beta\mu}(\Gamma^{\alpha}_{\beta\alpha|\mu} - \Gamma^{\alpha}_{\beta\mu|\alpha} + \Gamma^{\tau}_{\beta\lambda}\Gamma^{\alpha}{}_{\tau\mu} - \Gamma^{\tau}{}_{\beta\mu}\Gamma^{\alpha}{}_{\tau\lambda}). \tag{3.26}$$

Multiplicando por $g^{\beta\mu}$ e contraindo α com λ segue que:

$$R = g^{\beta\mu}\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\alpha|\mu} - (g^{\beta\mu}\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\mu})_{|\alpha} + g^{\beta\mu}\Gamma^{\tau}{}_{\beta\alpha}\Gamma^{\alpha}{}_{\tau\mu} - g^{\beta\mu}\Gamma^{\tau}_{\beta\mu}\Gamma^{\alpha}{}_{\tau\alpha}. \tag{3.27}$$

Abrindo o primeiro termo de 3.27,

$$\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\alpha} = \bar{\Gamma}^{\alpha}{}_{\beta\alpha} - \frac{1}{2}(\delta^{\alpha}_{\beta}\sigma_{\alpha} + \delta^{\alpha}_{\alpha}\sigma_{\beta} - g_{\beta\alpha}\sigma^{\alpha}) = -\frac{1}{2}(\sigma_{\beta} + n\sigma_{\beta} - \sigma_{\beta}) = -\frac{1}{2}n\sigma_{\beta}. \tag{3.28}$$

O barra em Γ representa a geometria Riemanniana já o "n" é a dimensão da variedade. Analogamente, como demonstrado por (SANOMIYA et al., 2020b), temos:

$$g^{\beta\mu}\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\mu} = \frac{1}{2}(n-2)\sigma^{\alpha} \tag{3.29}$$

e

$$g^{\beta\mu}\Gamma^{\tau}{}_{\beta\alpha}\Gamma^{\alpha}{}_{\tau\mu} = -\frac{1}{4}(n-2)\sigma_{\alpha}\sigma^{\alpha} \tag{3.30}$$

Substituindo 3.28 3.29 3.30 em 3.27, chegamos à

$$R = \bar{R} + \frac{1}{4}(n-1)(n-2)\sigma_{\alpha}\sigma^{\alpha} - \frac{(n-1)}{\sqrt{-g}}(\sqrt{-g}\sigma^{\alpha})_{|\alpha}. \tag{3.31}$$

No último termo foi usado 2.37. Para $n = 4$, pois estamos em uma variedade de 4 dimensões.

$$R = \bar{R} + \frac{3}{2}\sigma_{\alpha}\sigma^{\alpha} - \frac{3}{\sqrt{-g}}(\sqrt{-g}\sigma^{\alpha})_{|\alpha}. \tag{3.32}$$

Agora é possível calcular a variação de 3.23,

$$\delta S = \delta\int(R^2 + wF_{\mu\nu}F^{\mu\nu})\sqrt{-g}d^4x = \int[2R\delta(R\sqrt{-g}) - R^2\delta(\sqrt{-g}) + w\delta(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\sqrt{-g})]d^4x. \tag{3.33}$$

Para o Gauge natural, $R = \Lambda$, a equação 3.33 divida por 2Λ fica,

$$\delta S = \delta\int(R - \frac{\Lambda}{2} + \frac{w}{2\Lambda}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu})\sqrt{-g}d^4x = 0. \tag{3.34}$$

Ainda tem um R na equação pois é preciso efetuar a variação para depois substituir por Λ. Aplicando 3.32 à 3.34 a ação é dada por:

$$\delta\int[\bar{R} + \frac{3}{2}\sigma_{\alpha}\sigma^{\alpha} - \frac{3}{\sqrt{-g}}(\sqrt{-g}\sigma^{\alpha})_{|\alpha} - \frac{\Lambda}{2} + \frac{w}{2\Lambda}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}]\sqrt{-g}d^4x = 0 \tag{3.35}$$

O terceiro termo é zero, uma vez que ele é um termo de fronteira. Com isso em mente:

$$\delta \int [\bar{R} + \frac{3}{2}\sigma_\alpha \sigma^\alpha - \frac{\Lambda}{2} + \frac{w}{2\Lambda} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}]\sqrt{-g}d^4x = 0. \tag{3.36}$$

Primeiramente será feito a variação na métrica e posteriormente no campo de Weyl. Do cálculo variacional de 3.22 é conchecido as expressões:

$$\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}, \tag{3.37}$$

$$\delta(\bar{R}\sqrt{-g}) = (\bar{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\bar{R}g_{\mu\nu})\sqrt{-g}\delta g_{\mu\nu} + g_{\mu\nu}\sqrt{-g}\delta\bar{R}_{\mu\nu} \tag{3.38}$$

e

$$\int g^{\mu\nu}\sqrt{-g}\delta\bar{R}_{\mu\nu}d^4x = 0 \tag{3.39}$$

Dos outros termos de 3.36 tem-se os seguintes variacionais

$$\delta(\sigma_\alpha\sigma^\alpha\sqrt{-g}) = \delta(\sigma_\mu\sigma_\nu g^{\mu\nu})\sqrt{-g} + \sigma_\alpha\sigma^\alpha\delta(\sqrt{-g}) = (\sigma_\mu\sigma_\mu - \frac{1}{2}\sigma_\alpha\sigma^\alpha g_{\mu\nu})\sqrt{-g}\delta(g^{\mu\nu}) \tag{3.40}$$

e

$$\begin{aligned}\delta(F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\sqrt{-g}) &= F_{\mu\nu}F_\alpha g^{\beta\nu}\sqrt{-g}\delta^{\alpha\mu} + F_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}g^{\alpha\mu}\sqrt{-g}\delta g^{\nu\beta} - \frac{1}{2}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} \\ &= 2(g^{\alpha\beta}F_{\mu\beta}F_{\alpha\nu} + \frac{1}{4}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}g_{\mu\nu})\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu}\end{aligned} \tag{3.41}$$

Fazendo

$$T_{\mu\nu} = g^{\alpha\beta}F_{\mu\beta}F_{\alpha\nu} + \frac{1}{4}g_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} \tag{3.42}$$

a equação se torna

$$\delta(F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\sqrt{-g}) = -2T_{\mu\nu}\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu}. \tag{3.43}$$

Substituindo 3.37, 3.38, 3.39, 3.40 e3.43 em 3.36,

$$\int [\bar{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\bar{R}g_{\mu\nu} + \frac{3}{2}(\sigma_\mu\sigma_\nu - \frac{1}{2}\sigma_\alpha\sigma^\alpha g_{\mu\nu}) + \frac{\Lambda}{4}g_{\mu\nu} - \frac{w}{\Lambda}T_{\mu\nu}]\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu}d^4x = 0, \tag{3.44}$$

de onde segue que:

$$\frac{w}{\Lambda}T_{\mu\nu} = \bar{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\bar{R}g_{\mu\nu} + \frac{3}{2}(\sigma_\mu\sigma_\nu - \frac{1}{2}\sigma_\alpha\sigma^\alpha g_{\mu\nu}) + \frac{\Lambda}{4}g_{\mu\nu}. \tag{3.45}$$

A equação acima pode ser simplificada, fazendo o traço de 3.42

$$\begin{aligned}T &= g_{\mu\nu}(g^{\alpha\beta}F_{\mu\beta}F_{\alpha\nu} + \frac{1}{4}g_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}) \\ &= F^{\nu\alpha}F_{\alpha\nu} + \frac{1}{4}\delta^\mu_\mu F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} \\ &= 0.\end{aligned} \tag{3.46}$$

Como o espaço tem 4 dimensões $\delta^{\mu}_{\mu} = 4$, multiplicando 3.45 por $g^{\mu\nu}$ e substituindo 3.46 a expressão fica:

$$\bar{R} - 2\bar{R} + \frac{3}{2}(\sigma^{\mu}\sigma_{\mu} - 2\sigma^{\mu}\sigma_{\mu}) + \Lambda = 0 \tag{3.47}$$

$$\bar{R} = -\frac{3}{2}\sigma^{\mu}\sigma_{\mu} + \Lambda, \tag{3.48}$$

com isto 3.45 é escrita da seguinte forma:

$$\frac{w}{\Lambda}T_{\mu\nu} = \bar{R}_{\mu\nu} - \frac{\Lambda}{4}g_{\mu\nu} + \frac{3}{2}\sigma_{\mu}\sigma_{\nu}. \tag{3.49}$$

Retornando para 3.36, será feito agora a variação no campo de Weyl. Como $F^{\mu\nu}$ depende de σ será usado 3.12. Logo da variação seguem as equações:

$$\delta(\sigma_{\alpha}\sigma^{\alpha})\sqrt{-g} = 2\sqrt{-g}\sigma^{\mu}\delta\sigma_{\mu}, \tag{3.50}$$

$$\begin{aligned}\delta(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\sqrt{-g}) &= \sqrt{-g}g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}\delta(F_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}) = 2\sqrt{-g}F^{\mu\nu}[(\sigma_{\mu})_{|\nu} - (\sigma_{\nu})_{|\mu}] \\ &= 4[(\sqrt{-g}F^{\mu\nu}\delta\sigma_{\mu})_{|\nu} - (\sqrt{-g}F^{\mu\nu})_{|\nu}\delta\sigma_{\mu}]\end{aligned} \tag{3.51}$$

Aplicando 3.50, 3.51 em 3.36

$$\int\{3\sigma^{\mu}\delta\sigma_{\mu}\sqrt{-g} + \frac{2w}{\Lambda}[\sqrt{-g}F^{\mu\nu}\delta\sigma_{\mu}]_{|\mu} - \frac{2w}{\Lambda}(\sqrt{-g}F^{\mu\nu})_{|\nu}\delta\sigma_{\mu}\}d^4x = 0 \tag{3.52}$$

Os demais termos de 3.36 foram desconsiderados para o cálculo uma vez que não dependem de σ^{α}. Desprezando o termo de fronteira e admitindo que δ_{α} é arbitrária, de maneira análoga a variação na métrica, obtemos:

$$(\sqrt{-g}F^{\mu\nu})_{|\nu} = \frac{3\Lambda\sqrt{-g}}{2w}\sigma^{\mu}. \tag{3.53}$$

Já para um gauge qualquer, as equações podem ser obtidas tanto pelo cálculo variacional como mostrado por (LIMA et al., 2016), ou pelas transformações de Gauge 3.3 e 3.7 ao aplicá-las nas equações obtidas para o Gauge natural (SANOMIYA et al., 2020b). Essas equações são:

$$w\bar{T}_{\mu\nu} = \bar{R}(\bar{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{4}\bar{R}\bar{g}_{\mu\nu}) + \bar{D}_{\mu\nu} \tag{3.54}$$

e

$$(\sqrt{-\bar{g}}\bar{F}^{\mu\nu})_{|\nu} = \frac{3}{2w}\bar{g}^{\mu\alpha}(\bar{R}\bar{\sigma}_{\alpha} + \partial_{\alpha}\bar{R}) \tag{3.55}$$

onde $\bar{D}_{\mu\nu}$ é:

$$\bar{D}_{\mu\nu} = \bar{R}_{||\mu||\nu} + \frac{1}{2}R(\sigma_{\mu||\nu} + \sigma_{\nu||\mu}) + R\sigma_{\mu}\sigma_{\nu} + \sigma_{\nu}R_{||\mu} + \sigma_{\mu}R_{||\nu}. \tag{3.56}$$

Caso $\sigma_\mu = 0$, os tensores $F_{\mu\nu}$ e $T_{\mu\nu}$ serão zero, logo R será uma constante, $R = \bar{R} = \Lambda = constante$, fazendo com que $D_{\mu\nu}$ seja zero. Há então duas soluções para 3.53, $\bar{R} = 0$ ou $\bar{R}_{\mu\nu} = \frac{1}{4}\Lambda g_{\mu\nu}$. Para o primeiro caso, todas as soluções das equações de Einstein no vácuo também serão soluções desta, já no último caso as soluções correspondem a espaços cujas curvaturas de Ricci são constante. A teoria de Weyl prevê corretamente o avanço do periélio de Mercúrio, como também a deflexão da luz por um corpo massivo, já que todas as soluções das equações de Einstein satisfazem 3.36 e 3.45 quando $\sigma_\alpha = 0$.

4 Campo de Proca

Weyl por meio dessa nova geometria, conseguiu, de forma brilhante, acrescentar o eletromagnetismo à gravitação. Identificando $F_{\mu\nu}$ como o tensor eletromagnético e σ_μ como o quadripotencial eletromagnético. Mas ao comparar 3.53 com a equação de Maxwell,

$$F^{\alpha\beta}{}_{|\beta} = -\frac{4\pi}{c} J^\alpha, \tag{4.1}$$

é nítido que o campo de Weyl está acoplado consigo mesmo, ou seja, σ_μ atua como a própria fonte, diferindo de 4.1 (ROMERO, 2015). Já o termo não linear $\sigma_\alpha \sigma^\alpha$ da ação 3.36, faz com que se tenha uma grande semelhança com a ação do campo de Proca(POENARU, 2006) (HEISENBERG, 2014),

$$S = \int [-\frac{1}{4} F^2{}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} m^2 A^2]. \tag{4.2}$$

Nesse campo os quanta apresentam massa, m a massa da partícula. Alexandru Proca obteve essa equação ao generalizar as equações de Maxwell no contexto da mecânica quântica. É este campo que descreve a dinâmica de partículas com massa não nula e spin igual 1.

Com isto em mente, a teoria invariante de Weyl acaba por ser interpretada como uma teoria modificada da gravitação, acabando por geometrizar o Campo de Proca. Logo o σ_μ deixará de ser interpretado como potencial eletromagnético e um campo vetorial massivo será introduzido(DUARTE, 2021).

4.1 Aplicação no campo fraco

O campo de Weyl, σ_α, agora é interpretado como o campo de Proca geométrico. Na ausência de correntes, a equação que descreve bósons massivos (POENARU, 2006) é:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} (\sqrt{-g} F^{\alpha\beta})_| \alpha + \mu^2 \sigma^\beta = 0. \tag{4.3}$$

Novamente, comparando com 3.53 segue que

$$\mu^2 = \frac{3\Lambda}{2w}, \tag{4.4}$$

onde $w < 0$, uma vez que μ é equivalente a massa.

Diante disso, será obtido uma solução para um campo franco(DUARTE, 2021)(SANOMIYA et al., 2020b), σ_α tem um valor muito pequeno. Logo é plausível considerar

$$\sigma_\mu = (\eta\varphi, 0, 0, 0), \tag{4.5}$$

sendo $\eta << 1$, a solução será feita para uma métrica com simetria esférica aproximada dada por

$$ds^2 = (1 + \eta\nu)dt^2 - (1 + \eta\lambda)dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 sin^2(\theta) d\phi^2 \tag{4.6}$$

Os termos de ordem $O(\eta^2)$ foram desconsiderados e Λ, interpretada como a constante cosmológica, é no máximo de ordem η.

Portanto, a equação 3.49 fica,

$$\bar{R_{\alpha\beta}} - \frac{\Lambda}{4} g_{\alpha\beta} = 0. \tag{4.7}$$

Do campo 4.5 o tensor $F^{\mu\nu}$ é:

$$F_{\mu\nu} = -\eta\varphi(r) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

.

Desta matriz, é visível que a única solução não trivial, é para $\mu = 0$ e $\nu = 0$ pois é onde há componentes não nulas. A equação 3.53 se torna:

$$(\sqrt{-g} F^{01})_{|1} = \frac{3\Lambda}{2w} \sqrt{-g} \sigma^0, \tag{4.8}$$

que é equivalente à,

$$\varphi'' + \frac{2\varphi}{r} + \frac{3\Lambda}{w}\varphi = 0 \tag{4.9}$$

Sua solução para $\Lambda, w > 0$ é :

$$\varphi(r) = \frac{C_1}{r} e^{-i\sqrt{\beta r}} + \frac{iC_2}{r} e^{i\sqrt{\beta r}}, \tag{4.10}$$

onde $\beta = \sqrt{-\frac{3\Lambda}{2w}}$, como demonstrado em (SANOMIYA et al., 2020b).

Já para $\Lambda < 0$ ou $w < 0$,

$$\varphi(r) = \frac{C_1}{r} e^{-\beta r} + \frac{C_2}{r} e^{\sqrt{\beta r}}. \tag{4.11}$$

Essa equação tem o exato formato do potencial de Yukawa, decaindo exponencialmente a medida em que se afasta da fonte, quando $C_2 = 0$,

$$\varphi(r) = \frac{C^{-\sqrt{\beta r}}}{r} \tag{4.12}$$

Substituindo 4.4, temos,

$$\varphi(r) = \frac{C^{-\mu r}}{r}. \tag{4.13}$$

Apresentando uma grande semelhança com as equações:

$$\sigma_0 = q\frac{e^{\mu r}}{r} \qquad\qquad \varphi = \frac{Q}{r}e^{-\mu r}. \tag{4.14}$$

Obtidas respectivamente por (VUILLE; IPSER; GALLAGHER, 2002) e (SHI; LIU, 2005), equações que demostram o campo de Proca no âmbito da relatividade geral, sistema de equações Einstein-Proca. Ratificando a semelhança do campo de Weyl e o campo de Proca.

Agora, falta analisar 3.49 nos índices $\mu = \nu = 0, 1$:

$$-\frac{1}{2}\eta\nu'' - \frac{\eta\nu'}{r} - \frac{\Lambda}{4}(1 + \eta\nu) = 0 \tag{4.15}$$

$$\frac{1}{2}\eta\nu'' - \frac{\eta\lambda'}{r} + \frac{\Lambda}{4}(1 + \eta\lambda) = 0. \tag{4.16}$$

Somando elas, temos:

$$\frac{\eta}{r}(\nu + \lambda)' + \frac{\Lambda}{4}\eta(\lambda - \nu) = 0 \tag{4.17}$$

descartando termos de ordem $O(\eta^2)$, resulta em:

$$(\nu + \lambda)' = 0. \tag{4.18}$$

Para $\mu = \nu = 2$ em 3.49, obtem-se:

$$\frac{1}{2}r\eta(\nu - \lambda)' - \eta\lambda + \frac{\Lambda}{4}r^2 = 0. \tag{4.19}$$

Aplicando à 4.18, ela fica:

$$\lambda' + \frac{\lambda}{r} - \frac{\Lambda}{4\eta}r = 0. \tag{4.20}$$

Com sua solução sendo:

$$\lambda(r) = \frac{C_1}{r} + \frac{\Lambda}{12\eta}r^2. \tag{4.21}$$

Da igualdade 4.18,

$$\nu(r) = \frac{C_1}{r} - \frac{\Lambda}{12\eta}r^2. \tag{4.22}$$

Finalmente, obtendo o resultado de 4.6:

$$ds^2 = (1 - \frac{\eta C_1}{r} - \frac{\Lambda}{12}r^2)dt^2 - (1 + \frac{\eta C_1}{r} + \frac{\Lambda}{12}r^2)dr^2 - r^2d\theta^2 - r^2sin^2(\theta)d\phi^2. \tag{4.23}$$

Correspondendo ao espaço-tempo de Schwarzschild de Sitter, que descreve um buraco negro(NARIAI, 1999).

4.2 Aplicação na cosmologia

Nos trabalhos de (SANOMIYA et al., 2020b) e (DUARTE, 2021), é apresentada a teoria de Weyl, como uma teoria modificada da gravitação, aplicada no ambito cosmológico. Um acoplamento de matéria faz as equações de campo 3.49 3.53 serem (SANOMIYA et al., 2020a):

$$\bar{R} - \frac{1}{2}\bar{R}g_{\mu\nu} + \frac{\Lambda}{4}g_{\mu\nu} + \frac{3}{2}(\sigma_\mu\sigma_\nu - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\sigma^\alpha\sigma_\alpha) = \frac{w}{\Lambda}T_{\mu\nu} - \kappa T^*{}_{\mu\nu} \tag{4.24}$$

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}(\sqrt{-g}F^{\mu\nu}) = \frac{3\Lambda}{2w}\sigma^\mu, \tag{4.25}$$

onde κ é a constante de acoplamento, u_μ a quadrivelocidade do fluido e $T^*{}_{\mu\nu}$ é o tensor momento-energia da matéria:

$$T^*{}_{\mu\nu} = (\rho + p)u_\mu u_\nu - pg_{\mu\nu}, \tag{4.26}$$

sendo ρ a densidade de energia e p a pressão. O σ_μ é adotado como:

$$\sigma_\mu = (\phi(t), \vec{\psi}(t)) \tag{4.27}$$

Ao considerar o modelo cosmológico como sendo homogêneo e isotrópico, temos que $g_{\mu\nu}$ e σ_μ, ρ e p dependem apenas do tempo. Dessa forma a métrica acaba por ser dada pelo elemento de linha de Friedmann-Robertson-Walker

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)(dx^2 + dy^2 + dz^2). \tag{4.28}$$

Usando 4.24 e 4.25, $a(t)$ será determinado, sendo este o fator que descreve a dinâmica do universo. Por 3.12, 3.42 e 4.28 se obtém:

$$F^{\mu\nu} = \frac{\dot{\psi}}{a^2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad T_{\mu\nu} = \frac{\dot{\psi}}{a^2}\begin{pmatrix} \frac{3}{a^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad g^{\mu\nu} = \frac{\dot{\psi}}{a^2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a^2 \end{pmatrix}$$

.

É com o auxílio dessas matrizes que as expressões adiantes serão calculadas.

Para $\mu = 0$, em 4.25 a equação é:

$$(a^3 F^{0\nu})_{|\nu} = \frac{3\Lambda}{2w} a^3 \sigma^0 \tag{4.29}$$

Logo $\sigma^0 = 0$, $\phi(t) = 0$. Já com $\nu = 1$,

$$(a^3 F^{1\nu})_{|\nu} = \frac{3\Lambda}{2w} a^3 \sigma^1, \tag{4.30}$$

segue que:

$$\ddot{\psi} + (\frac{\dot{a}}{a}\dot{\psi}) = \frac{3\Lambda}{2w}\psi. \tag{4.31}$$

Agora, para $\mu = 1$ e $\nu = 2$ em 4.24, obtemos:

$$\frac{\dot{\psi}}{\psi} \pm \sqrt{-\frac{3\Lambda}{2w}}, \tag{4.32}$$

com a solução sendo

$$\psi(t) = Ae^{\pm\sqrt{-\beta t}}, \tag{4.33}$$

com $\beta = \sqrt{-\frac{3\Lambda}{2w}}$. Tomando a raiz positiva desta e substituindo em 4.31, o fator de escala fica

$$a(t) = e^{-2\sqrt{-\beta t}}. \tag{4.34}$$

Analisando 4.32, é nítido que $w < 0$, para que assim o termo da raiz seja positivo, lembrando que Λ por ser a constante cosmológica é positivo, resultando em um universo em contração. Já para a raiz negativa de 4.33, $a(t)$ é:

$$a(t) = e^{2\sqrt{-\beta t}}. \tag{4.35}$$

Sendo um caso contrário, por se tratar de um universo em expansão, quando t tende ao infitino o campo de Weyl desaparece, indo para geometria Riemanniana. Como é de interesse o universo em expansão, substituindo 4.35 em 4.28,

$$ds^2 = dt^2 - e^{2\sqrt{-\beta t}}(dx^2 + dy^2 + dz^2). \tag{4.36}$$

Agora a equação 4.24 para $\mu = \nu = 0$ é:

$$-3\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{\Lambda}{4} + \frac{9}{4}\frac{\psi^2}{a^2} = \beta\frac{\dot{\psi}^2}{a^2} - \kappa\rho., \tag{4.37}$$

Subistituindo 4.33 e 4.34,

$$\rho = -\frac{\Lambda}{\kappa}(\frac{18}{w} + \frac{1}{4}) - \frac{9}{2\kappa}e^{(-6\sqrt{-\beta t})}. \tag{4.38}$$

Já para $\mu = \nu = 1$,

$$\kappa p = -\frac{\dot{a^2}}{a^2} - \frac{2\ddot{a}}{a} + \frac{\Lambda}{4} + \frac{3}{4}\frac{\psi^2}{a^2} + \frac{w}{2\Lambda}\frac{\dot{\psi}^2}{a^2}. \tag{4.39}$$

Novamente, substituindo 4.33 e 4.34,

$$p = \frac{\Lambda}{\kappa}(\frac{18}{w} + \frac{1}{4}). \tag{4.40}$$

A equação de estado, $p = -\rho$, é obtida quando t tende ao infinito, uma equação bem presente para modelos de energia escura. Um resultado que, no contexto da cosmologia, é de grande interesse pois a solução da equação representa um universo não-singular em expansão.

5 Considerações finais

A Teoria de Weyl foi bastante ousada, ao tentar unificar o eletromagnetismo com a gravitação. A crítica de Einstein acabou por cessar por muito tempo o desenvolvimento dessa nova generalização da geometria Riemanniana.

Com a física da atualidade a Teoria de Weyl acabou por ser estendida, a base dela foi apresentada no capítulo 3, monstrando-se fortemente relacionada ao Campo de Proca e ao Potencial de Yukawa no capítulo 4. Uma teoria bem rica por conta de seu aspecto geométrico, acabando por levar a discussão/investigação de seus efeitos nas ondas gravitacionais e modelização da matéria escura, como perspectivas futuras.

O trabalho aqui apresentado pode ser de grande utilidade para alunos interessados em iniciar os estudos na área de cosmologia e gravitação, tanto por apresentar as bases da matemática necessária, como também as equações de Campo de Einstein e a Teoria de Weyl, tendo problemas em aberto e podendo ser temas de teses.

Referências

ADLER, R. J. *Introduction to General Relativity*. [S.l.]: McGraw-Hill, 1965.

ADLER, R. J. *General Relativity and Cosmology*. [S.l.]: Springer, 2021.

ARFKEN, G. B. *Física Matemática - Métodos Matemáticos para Engenharia e Física*. [S.l.]: GEN LTC, 2017.

AVALOS, R.; DAHIA, F.; ROMERO, C. A note on the problem of proper time in weyl space–time. *Foundations of Physics*, Springer, v. 48, n. 2, p. 253–270, 2018.

BUTKOV. *Física Matemática*. [S.l.]: LTC, 1978.

CARROLL, S. M. *Spacetime and geometry*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2019.

CHAPTER, S.-t. L.-e. 5 covariant derivative, lie derivative and killings equation.

CRISPINO, L. C.; KENNEFICK, D. J. A hundred years of the first experimental test of general relativity. *Nature Physics*, Nature Publishing Group, v. 15, n. 5, p. 416–419, 2019.

D'INVERNO, R. A. Introducing einstein's relativity. *Introducing Einstein's relativity by RA D'Inverno. New York: Oxford University Press*, 1992.

DIRAC, P. A. M. Long range forces and broken symmetries. *Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences*, The Royal Society London, v. 333, n. 1595, p. 403–418, 1973.

DUARTE, M. P. Gravitação e o campo de proca. Universidade Federal da Paraíba, 2021.

EDDINGTON, A. S. A generalisation of weyl's theory of the electromagnetic and gravitational fields. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character*, The Royal Society London, v. 99, n. 697, p. 104–122, 1921.

EINSTEIN, A. The meaning of relativity, princeton science library edition. *Lectures originally given in*, 1921.

ELLIS, G. F. R.; ELLIS, G. F.; WILLIAMS, R. M. *Flat and curved space-times*. [S.l.]: Clarendon Press, 2000.

HEISENBERG, L. Generalization of the proca action. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, IOP Publishing, v. 2014, n. 05, p. 015, 2014.

IQBAL, M. A. et al. The metric of space-time curvature in a weak gravitational field and it's consequence in newtonian approximation. *Int. J. Mat. Math. Sci*, v. 2, n. 5, p. 87–92, 2020.

LIMA, R. G. et al. Teoria da gravitação num espaço-tempo de weyl não-integrável. Universidade Federal da Paraíba, 2016.

NARIAI, H. Editor's note: On some static solutions of einstein's gravitational field equations in a spherically symmetric case. on a new cosmological solution of einstein's field. *General Relativity and Gravitation*, v. 31, n. 6, 1999.

NETO, J. B. *Matemática para Físicos com aplicações*. [S.l.]: Livraria da Física, 2010.

NIGAM, K.; BANERJEE, K. A brief review of helmholtz conditions. *arXiv preprint arXiv:1602.01563*, 2016.

NUSSENZVEIG, H. M. *Curso de Física Básica: Mecânica (Volume 1)*. [S.l.]: Blucher, 2013.

NYAMBUYA, G. G. A perdurable defence to weyl's unified theory. *Journal of Modern Physics*, Scientific Research Publishing, v. 2014, 2014.

PERLICK, V. Characterization of standard clocks by means of light rays and freely falling particles. *General relativity and gravitation*, Springer, v. 19, n. 11, p. 1059–1073, 1987.

POENARU, D. N. Proca equations of a massive vector boson field. In: CITESEER. *Twenty Fifth International Workshop on Nuclear Theory, Rila Mountains, Bulgaria*. [S.l.], 2006. v. 26.

ROMERO, C. Is weyl unified theory wrong or incomplete? *arXiv preprint arXiv:1508.03766*, 2015.

ROMERO, C.; LIMA, R.; SANOMIYA, T. One hundred years of weyl's (unfinished) unified field theory. *Studies in History and Philosophy of Science Part B: Studies in History and Philosophy of Modern Physics*, Elsevier, v. 66, p. 180–185, 2019.

SANOMIYA, T. et al. Invariant approach to weyl's unified field theory. *Physical Review D*, APS, v. 102, n. 12, p. 124031, 2020.

SANOMIYA, T. A. T. et al. Reinterpretação e extensão da teoria unificada de weyl. Universidade Federal da Paraíba, 2020.

SHI, C.; LIU, Z. Proca effect in reissner–nordstrom de sitter metric. *International Journal of Theoretical Physics*, Springer, v. 44, n. 3, p. 303–308, 2005.

SOKOLNIKOFF, I. S. *Tensor analysis, theory and applications to geometry and mechanics of continua*. [S.l.]: Wiley, 1964.

VUILLE, C.; IPSER, J.; GALLAGHER, J. Einstein-proca model, micro black holes, and naked singularities. *General Relativity and Gravitation*, Springer, v. 34, n. 5, p. 689–696, 2002.

WEYL, H. et al. Electron and gravitation. *z. Phys*, v. 56, p. 330–352, 1929.